

Софийски Университет “Св. Климент Охридски”

Физически Факултет

Катедра “Квантова Електроника”



## ДИПЛОМНА РАБОТА

на Виктор Евгениев Семьонов, фак. № 120106

магистър, програма “Квантова електроника и лазерна техника”

Тема: Числено моделиране на усилването на импулсно лазерно  
лъчение в диодно напompвани твърдотелни усилватели с  
цилиндрична геометрия

Ръководител: \_\_\_\_\_

/ ас. А. Гайдарджиев /

София, 2012 г.

# Съдържание

<b>1</b>	<b>Увод .....</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Модел на лазерен усилвател .....</b>	<b>6</b>
2.1	Особености на моделирания усилвател и на входния сигнал.....	6
2.2	Лазерни скоростни уравнения. Приближения.....	7
2.3	Уравнение за преноса на фотони. Модел на Франц-Нодвик. ....	8
2.4	Усилена спонтанна емисия.....	10
2.5	Математически модели на напompването на активната среда и на разпространението на лазерни импулси .....	12
<b>3</b>	<b>Числен модел на процесите в лазерен усилвател. Анализ и резултати. ....</b>	<b>16</b>
3.1	Анализ на моделите на усилената спонтанна емисия .....	16
3.2	Числено пресмятане на мощността на усилената спонтанна емисия .....	18
3.3	Дискретизация на задачите. Схеми за численото им решаване. ....	19
3.3.1	Числено решаване на задачата за напompването на активната среда.....	20
3.3.2	Числено решаване на задачата за разпространението на лазерни импулси ..	21
3.4	Области на устойчивост и физическа смисленост на числените решения.....	24
3.4.1	Параметри на дискретизация на задачата за напompването на активната среда.....	24
3.4.2	Параметри на дискретизация на задачата за разпространението на лазерни импулси .....	26
3.5	Нестандартна схема за числено решаване на уравненията, описващи разпространението на лазерни импулси .....	28
3.6	Експериментална проверка на модела .....	31
3.7	Изследвания на влиянието на усилената спонтанна емисия.....	32
3.8	Изследвания на разпространението на лазерни импулси.....	37
3.9	Оптимизиране на лазерен усилвател.....	42
3.9.1	Оптимизиране на напompващата система .....	42
3.9.2	Оптимизиране на геометрията на усилвателя .....	48
3.10	Изследвания на усилването на серии от лазерни импулси .....	54
<b>4</b>	<b>Заключение .....</b>	<b>57</b>
<b>5</b>	<b>Литература .....</b>	<b>58</b>
	<b>Приложение А Контрол на числената грешка и определяне на параметрите на дискретизация .....</b>	<b>59</b>



# 1 Увод

В съвременните научни изследвания, технологии и индустрия, източниците на импулсно лазерно лъчение, характеризиращо се едновременно с висока средна мощност и голяма импулсна енергия, намират широко приложение в области като синтез на нови материали [1], дистанционно откриване на химически съединения и лазерни лидарни системи [2], обработка на материали, напompване на оптични параметрични устройства и ефективно честотно преобразуване [3], и много други. Подходящите за тези приложения лазерни източници имат голяма енергия в импулс (от порядъка на милиджаули), висока честота на повторение на импулсите (килохерци), кратка продължителност на импулсите (единици наносекунди или под наносекундна продължителност) и високо качество на лъчението ( $M^2 < 5$ ).

Създаването на лазерни източници с изброените параметри представлява значително техническо и изследователско предизвикателство. В огромното количество лазерни системи, работещи на килохерцови честоти на следване на импулсите, изходната енергия е силно ограничена, докато от друга страна, при системите с висока енергия в импулс, честота не превишава 100 Hz (лампово напompвани системи). Един от подходите за създаване на лазерно лъчение с желаните параметри, при използване на лазерни системи с диодно напompване, е архитектурата задаващ осцилатор – мощен усилвател, която успешно съчетава високо качество на лъчението, кратка продължителност на импулса, висока честота на повторение и голяма енергия на изходните импулси. Този популярен подход, основан на лазерни усилватели с голямо усилване, предоставя широки възможности за създаване на лазерни източници с уникални параметри с множество практически приложения, като се използват технологично установени активни среди (например Nd:YAG).

Математическото моделиране на такъв тип системи с висока степен на сложност е първа стъпка към успешната им реализация. В мощен усилвател, влиянието на усилената спонтанна емисия върху обезселването на горното лазерно състояние е съществено и е необходимо да се отчита при моделирането. При изследване на усиляването на лазерни импулси с кратка продължителност в активна среда с четири нива е необходимо да се отчита крайното време на живот на долното лазерно състояние. Решението на този проблем не е известно в аналитичен вид и е необходимо да се пресмята числено.

Целта на тази работа е изучаването, осъществяването и изследването на числен модел на лазерен усилвател на серии от импулси, отчитащ влиянието на усилената спонтанна емисия и крайното време на живот на долното лазерно състояние. Задачите, решени за постигане на тази цел, са:

- Изучаване на математическия модел на разпространението на импулси в лазерен усилвател с четири нива и крайно време на живот на долното лазерно състояние.
- Изучаване и анализ на различни математически модели на усилената спонтанна емисия в активна среда с инверсна населеност.
- Създаване на числен модел на усилената спонтанна емисия.
- Създаване на числени модели на напompването на активната среда и на разпространението на импулси с помощта на известни от литературата числени методи.
- Анализ на устойчивостта и физическата смисленост на числените решения.
- Създаване и изследване на оригинална схема за числено решаване на уравненията, описващи разпространението на импулси, пораждаща безусловно устойчиви и физически смислени решения.
- Анализ на числената грешка, внесена в отделните междинни резултати от изчисленията, и създаване на методи за контролирането ѝ.
- Анализ на междинните числени резултати. Проверка на модела чрез сравнение на крайните числени резултати с експериментални данни.
- Прилагане на създадения числен модел за оптимизация на напompващата система и геометрията на лазерен усилвател на единични импулси.
- Изследване на усиляването на микросекундни серии от пикосекундни импулси и анализ на резултатите.

В част §2 ще посочим съществените за настоящата магистърска теза особености на моделирания усилвател и на входния сигнал. Ще разгледаме известните от литературата модели на процесите в лазерен усилвател. Ще завършим тази част с конкретизация на разгледаната теория за случая на моделирания усилвател.

В част §3 ще направим анализ на разгледаните модели на усилената спонтанна емисия и ще внесем допълнения в тях. Ще изследваме проблемите при численото моделиране на процесите в лазерен усилвател. Ще създадем числени схеми за решаване на диференциалните уравнения в модела, като използваме както известни от литературата методи, така и оригинални такива. Ще направим анализ на резултатите от серия от изследвания, проведени с помощта на създадения числен модел.

В приложение §А ще изследваме числената грешка, внесена в отделните изчисления, и зависимостта на грешката в крайните резултати от тази в междинните. Ще формулираме алгоритми за осигуряване на произволна точност на изчисленията и за определяне на най-ефективната комбинация от числени методи (изискваща най-малко компютърна памет).

## 2 Модел на лазерен усилвател

### 2.1 Особенности на моделирания усилвател и на входния сигнал

Предметът на настоящата магистърска теза е моделирането на лазерен усилвател. Моделът, който разглеждаме, е създаден за практически цели и се отнася за усилватели с определени особености. В тази част разглеждаме съществените конструктивни и операционни особености на моделирания усилвател.

Активната среда на усилвателя представлява матрица от итриево-алуминиев гранат, дотирана с неодимови йони. Моделът ни е приложим и за други видове активни среди с четири нива. За настоящата теза избрахме Nd:YAG, тъй като е най-широко разпространен, а и усилвателите, с които разполагахме за експериментална проверка на числените резултати, бяха именно с такива активни среди.

Усилвателят е с напречно диодно напompване в импулсен режим на работа. Оптичният интензитет на напompващото лъчение е постоянен в обема на активната среда. Мощността на лъчението, излъчвано от напompващата система, е правоъгълна функция на времето. Околната повърхност на активната среда е дифузна. Охлаждането на активната среда е водно. В активната среда отсъстват съществени температурни градиенти и механични напрежения, следователно средата е хомогенна. Нейната температура, а следователно и показателят ѝ на пречупване, са постоянни във времето.

Усилвателят е еднопроходен. Лазерният сноп, разпространяващ се в усилвателя, е колимиран. Входният сигнал постъпва в усилвателя незабавно след края на напompването, а преди това мощността му е нула. Той представлява или единичен импулс или серия от краен брой еднакво раздалечени във времето импулси с еднаква времева и пространствена форма. Широчината на честотния спектър на сигнала е много по-малка от неговата носеща честота. Общата продължителност на входния сигнал, т.е. времевият интервал, в който мощността на сигнала се различава от нула, е много по-малка от флуоресцентното време на живот на горното лазерно състояние.

Честотата на повторение на цикъла на напompване и усиление е достатъчно малка така, че времевият интервал, между края на усиляването на входния сигнал и началото на следващото напompване, е много по-голям от флуоресцентното време на живот на горното лазерно състояние.

За удобство при разглежданията използваме цилиндрична координатна система с начало, съвпадащо с центъра на входната апертура на активната среда и надлъжна ос, ориентирана към центъра на изходната апертура.

Поляризацията на входния сигнал не е от значение, тъй като активната среда е изотропна. Енергията  $E_0$  на входния сигнал е разпределена по напречното сечение на входния сноп с определена повърхнинна плътност  $F_0$ . Оптичният интензитет  $I$  на

снопа, в точка  $Q$  на входа на усилвателя и в момент от времето  $t$ , е пропорционален както на повърхнинната плътност на енергията на входния сигнал, така и на неговата мощност  $P_0$ . Тъй като оптичният интензитет на един колимиран сноп определя енергията, преминаваща за единица време през единица площ, перпендикулярна на оста на снопа, то коефициентът на пропорционалност  $K$  се определя от условието:

$$\int_0^T \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\rho, \varphi, z=0, t) \rho d\rho d\varphi dt = K \int_0^{2\pi} \int_0^\infty F_0(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi \int_0^T P_0(t) dt = E_0 \quad (2.1.1)$$

където  $T$  е продължителността на входния сигнал, а  $\rho$ ,  $\varphi$  и  $z$  са цилиндричните координати на точката  $Q$  (на входа на усилвателя  $z=0$ ). Имайки предвид тъждествата:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty F_0(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi = E_0 \quad (2.1.2)$$

$$\int_0^T P_0(t) dt = E_0 \quad (2.1.3)$$

получаваме  $K = 1/E_0$ , или:

$$I(\rho, \varphi, z=0, t) = \frac{1}{E_0} F_0(\rho, \varphi) P_0(t) \quad (2.1.4)$$

Тогава плътността на фотоните  $\phi$  на входа на усилвателя е:

$$\phi(\rho, \varphi, z=0, t) = \frac{1}{h\nu c} \frac{1}{E_0} F_0(\rho, \varphi) P_0(t) \quad (2.1.5)$$

където  $h$  е константата на Планк,  $\nu$  е носещата честота на сигнала, а  $c$  е скоростта на светлината в активната среда.

## 2.2 Лазерни скоростни уравнения. Приближения.

За целите на тази работа е необходимо да определим времевата еволюция на населеността на енергетичните състояния на активните частици в лазерния усилвател. За система с четири нива тази задача може да се опрости ако са изпълнени следните условия:

- Времето на живот на горното възбудено състояние, в което преминават частиците при поглъщане на напompващото лъчение, е толкова малко, че населеността на това състояние може да се пренебрегне.
- Населеността на основното състояние е много по-голяма от сумата от населеността на горното и долното лазерни състояния, и може да се счита за постоянна.
- Може да се пренебрегнат безизлъчвателните преходи от горно лазерно състояние към по-ниско лежащи енергетични състояния.

- Може да се пренебрегне честотната зависимост на сечението на стимулирано излъчване за прехода от горно към долно лазерно състояние.

В такъв случай, населеността на горното и долното лазерни състояния  $n_2$  и  $n_1$ , в точка  $Q$  в обема на активната среда и в момент от времето  $t$ , удовлетворява следната система от скоростни уравнения [4]:

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = w_p - (n_2 - n_1)\sigma c \phi - \frac{n_2}{\tau_f} \quad (2.2.1)$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = (n_2 - n_1)\sigma c \phi + \frac{n_2}{\tau_{21}} - \frac{n_1}{\tau_1} \quad (2.2.2)$$

където:

- $w_p$  е броят на частиците в единица обем в точката  $Q$  и в момента  $t$ , преминаващи за единица време в горно лазерно състояние вследствие на напompването.
- $\sigma$  е сечението на стимулирано излъчване за прехода от горно към долно лазерно състояние (не зависи от честотата на фотоните на сигнала).
- $\tau_f$  е флуоресцентното време на живот на горното лазерно състояние.
- $\tau_{21}$  е времето на живот на горното лазерно състояние при преход към долно лазерно състояние. Времената  $\tau_f$  и  $\tau_{21}$  се различават, защото първото отчита всички възможни преходи към по-ниско лежащи енергетични състояния, а второто – само един преход.
- $\tau_1$  е времето на живот на долното лазерно състояние.

Горните уравнения важат за активна среда, за която степените на израждане на горното и долното лазерни състояния са еднакви, което е изпълнено за Nd:YAG [5].

### 2.3 Уравнение за преноса на фотони. Модел на Франц-Нодвик.

При разпространение на импулс в лазерен усилвател можем в първо приближение да считаме, че плътността на фотоните, а следователно и енергията на импулса, нараства експоненциално с изминатото разстояние. Такова експоненциално усилване може да се наблюдава само при достатъчно ниска енергия на входния импулс. В противен, случай при разпространение в активната среда, плътността на фотоните в предния фронт на импулса нараства достатъчно за да намали съществено инверсната населеност, т.е. да насити усилването. В този случай задният фронт се усилва по-малко от предния, променя се времевата форма на изходния импулс спрямо тази на входния, и усилването на енергията не е експоненциално. При усилване на серия от импулси, усилването става все по-малко за всеки следващ импулс.

Нека разгледаме едномерната задача за усилване на лазерен импулс или серия от импулси в среда с инверсна населеност. Считаме, че можем да пренебрегнем спонтанно излъчените фотони. Пренебрегваме също загубите от поглъщане и



разсейване на светлината, причинени от дефекти в активната среда. При тези условия, плътността на фотоните, в точка  $Q$  и в момент  $t$ , удовлетворява уравнението за преноса на фотони [4, 6]:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \sigma c n \phi - c \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2.3.1)$$

където  $n = n_2 - n_1$  е инверсната населеност в точката  $Q$  в момента  $t$ . Т.е. нарастването на плътността на фотоните за единица време в един елементарен обем от средата се определя от броя фотони, излъчени в този обем, броя фотони, постъпващи в този обем, и броя фотони, напускащи този обем за единица време.

За да отчетем влиянието на насищането на усилването е необходимо да разгледаме изменението на инверсната населеност с времето. Можем да пренебрегнем влиянието на спонтанната емисия за продължителността на входния сигнал и за времето за един проход на светлината през усилвателя, тъй като и двете времена са много по-малки от времето на живот на горното лазерно състояние. Освен това, в активната среда отсъства напompващо лъчение по време на усилването на сигнала. В такъв случай, за система с три нива и за идеална система с четири нива (при която времето на живот на долното лазерно състояние е толкова малко, че населеността на това състояние може да се пренебрегне), инверсната населеност удовлетворява уравнението [4, 6]:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\gamma \sigma c n \phi \quad (2.3.2)$$

където за система с три нива  $\gamma=2$ , а за идеална система с четири нива  $\gamma=1$ .

Аналитичните решения на системата диференциални уравнения (2.3.1) и (2.3.2) за случая на система с три нива са известни от модела на Франц-Нодвик [6]. Нека  $\phi(z, t)$  и  $n(z, t)$  са решенията съответно за инверсната населеност и за плътността на фотоните. Необходимите гранични условия са:

$$\phi_0(t) = \phi(0, t) \quad (2.3.3)$$

$$n_0(z) = n(z, -\infty) \quad (2.3.4)$$

т.е. времевата зависимост на плътността на фотоните на входа на усилвателя, както и инверсната населеност по дължината на усилвателя преди постъпването на входния сигнал. Решенията за произволни гранични условия са:

$$\phi(z, t) = \frac{\phi_0(t - z/c)}{1 - \{1 - \exp[-\sigma \int_0^z n_0(z') dz']\} \exp[-2\sigma c \int_{-\infty}^{t-z/c} \phi_0(t') dt']} \quad (2.3.5)$$

$$n(z, t) = \frac{n_0(z) \exp[-\sigma \int_0^z n_0(z') dz']}{\exp[2\sigma c \int_{-\infty}^{t-z/c} \phi_0(t') dt'] + \exp[-\sigma \int_0^z n_0(z') dz'] - 1} \quad (2.3.6)$$

## 2.4 Усилената спонтанна емисия

Усилената спонтанна емисия, още известна като суперфлуоресценция, е нежелан, но неизбежен процес в лазерния усилвател. При наличие на инверсна населеност, спонтанната емисия в активната среда се усилюва при разпространението си в нея. Това предизвиква обезселване на горното лазерно състояние и отнема от запасената в средата енергия. Влиянието на усилената спонтанна емисия е особено силно в усилватели с голямо усиление – тяхната ефективност може съществено да се ограничи от този процес.

От литературата са известни различни модели за количествена оценка на обезселването на горното лазерно състояние, породено от усилената спонтанна емисия. Тук разглеждаме някои от тези модели в случая на отсъствие на напompващо лъчение и сигнал в усилвателя. Моделите, които разглеждаме, правят следните предположения:

- Активната среда е идеална система с четири нива.
- Инверсната населеност не се променя съществено за времето за един проход на светлината през усилвателя.

Един от моделите на усилената спонтанна емисия е този на Линфорд [7]. Считаме, че съществено обезселване предизвиква само усилената спонтанна емисия, изминаваща голямо разстояние в активната среда. Затова разглеждаме само емисията в пространствения ъгъл  $\Omega = A/L^2$  около оста на активната среда, където  $L$  е дължината на активната среда, а  $A$  е площта на нейната апертура. Отчитайки формата  $g(\nu)$  на линията на прехода от горно към долно лазерно състояние, мощността  $dP_s$  на спонтанната емисия от обем елемент  $dV=Adz$ , в честотен интервал  $d\nu$ , насочено в малък пространствен ъгъл  $d\Omega$ , е:

$$dP_s = h\nu A_{21} n g(\nu) \frac{d\Omega}{4\pi} A d\nu dz \quad (2.4.1)$$

където  $A_{21}$  е вероятността за преход от горно към долно лазерно състояние в единица време. Считаме, че инверсната населеност е постоянна в обема на активната среда. В такъв случай мощността на суперфлуоресценцията, наблюдавана на изхода на усилвателя, е:

$$P_s = \iiint h\nu A_{21} n g(\nu) \exp[\sigma n(L-z)] \frac{d\Omega}{4\pi} A d\nu dz \quad (2.4.2)$$

След заместване в горното уравнение на  $\sigma = [(c^2 A_{21})/(8\pi\nu^2)]g(\nu)$  и интегриране по честоти, пространствени ъгли и надлъжни координати, получаваме:

$$P_s = A \frac{h\nu}{\sigma\tau_{21}} \frac{\Omega}{4} \frac{(G_0 - 1)^{3/2}}{(G_0 \ln G_0)^{1/2}} \quad (2.4.3)$$

където  $G_0 = \exp(\sigma nL)$  е малосигналното усиление в активната среда.

Друг модел на усилената спонтанна емисия е този на Шулц [8]. Скоростното уравнение за инверсната населеност, с отчитане на оптичния интензитет  $I_{ASE}$  на усилената спонтанна емисия, е:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n}{\tau_f} - \frac{I_{ASE}}{h\nu} \sigma n \quad (2.4.4)$$

Оптичният интензитет на усилената спонтанна емисия е сума на оптичните интензитети на светлината, разпространяваща се в права и в обратна посока. Считаме, че тези интензитети не се променят съществено за времето за проход на светлината през активната среда. В такъв случай те удовлетворяват уравненията:

$$\pm \frac{dI_{ASE}^{\pm}}{dz} = \sigma I_{ASE}^{\pm} n + \frac{\Omega}{4\pi} \frac{n}{\tau_{21}} h\nu \quad (2.4.5)$$

След намиране на решенията на уравнения (2.4.5) за оптичните интензитети, заместването на сумата им в уравнение (2.4.4) и интегриране на полученото уравнение по дължината на активната среда, получаваме:

$$\tau_f \frac{d\gamma}{dt} = -\gamma - \frac{\tau_f}{\tau_{21}} \frac{\Omega}{2\pi} (e^{\gamma} - 1 - \gamma) \quad (2.4.6)$$

където  $\gamma = \sigma \int_0^L n dz$ .

Друг модел на усилената спонтанна емисия е този на Рос [9]. Считаме, че инверсната населеност е постоянна в обема на активната среда. В такъв случай, в точка  $P$ , интензитетът  $dI$  на усилената спонтанната емисия от елементарен обем  $dV$ , намиращ се на разстояние  $r$  от точката  $P$ , е:

$$dI = \beta \frac{n}{\tau_f} h\nu \frac{\exp(g_0 r)}{4\pi r^2} dV \quad (2.4.7)$$

където  $g_0 = \sigma n$  е коефициентът на малосигнално усилване, а  $\beta = \tau_f / \tau_{21}$  е разклонното отношение за прехода от горно към долно лазерно състояние, т.е. вероятността за преход към долното лазерно състояние, отнесена към общата вероятност за преход към по-ниско лежащо енергетично състояние от горното, в единица време. Общата плътност на фотоните в точката  $P$  е:

$$\phi = \frac{1}{c} \beta \frac{n}{\tau_f} \int_V \frac{\exp(g_0 r)}{4\pi r^2} dV \quad (2.4.8)$$

където интегрирането се извършва по обема  $V$  на активната среда. В точката  $P$  инверсната населеност удовлетворява уравнението:

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{n}{\tau_f} - \sigma n \phi = -\frac{n}{\tau_f} (1 + B_P) \quad (2.4.9)$$

където:

$$B_P = \beta g_0 \int_V \frac{\exp(g_0 r)}{4\pi r^2} dV \quad (2.4.10)$$

Тази интегрална характеристика отчита отраженията от повърхността на активната среда и определя приноса на усилената спонтанна емисия към обезселването на горното лазерно състояние. За да намерим скоростното уравнение за общия брой частици  $N$  в горно лазерно състояние, интегрираме уравнение (2.4.9) по обема на активната среда и получаваме:

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{N}{\tau_f} (1 + B) \quad (2.4.11)$$

където:

$$B = \beta g_0 \frac{1}{V} \int_V \int_V \frac{\exp(g_0 r)}{4\pi r^2} dV dV \quad (2.4.12)$$

За еднопроходен усилвател с активна среда Nd:YLF, с дифузна околна повърхност и водно охлаждане, приблизителен аналитичен израз за горната величина е [10]:

$$B \approx 0.05 \left( \frac{2R}{L} \right)^{0.3} G_0 \quad (2.4.13)$$

където  $R$  е радиусът на активната среда.

Особеностите и различията на тези модели ще бъдат разгледани по-подробно в част §3 на настоящата магистърска теза.

## 2.5 Математически модели на напомнимането на активната среда и на разпространението на лазерни импулси

Имайки предвид описаните по-рано особености на усилвателя, процесите в него могат да бъдат разглеждани в три отделни времеви етапа:

- Етап на напомнимане, в който напомнимащото лъчение създава инверсна населеност в активната среда.
- Етап на усиляване, в който входният сигнал се усилява при разпространението си през активната среда.
- Междинен етап, в който в активната среда отсъства както сигнал, така и напомнимащо лъчение.

Междинният етап е с продължителност, много по-голяма от флуоресцентното време на живот на горното лазерно състояние. Затова считаме, че след края на този етап населеността на горното и долното лазерни състояния е нула.

Считаме, че времето на живот на долното лазерно състояние е много по-малко от времето на живот на горното лазерно състояние. За активна среда Nd:YAG, това предположение е оправдано – тези времена са съответно 170 ps [11] и 230 μs [4]. Затова

в етапа на напмпване можем да пренебрегнем населеността на долното лазерно състояние. Нека разгледаме изменението на инверсната населеност с времето в този етап. Както споменахме по-рано, напмпването е хомогенно в обема на активната среда и постоянно във времето. Считаме, че обезселването на горното лазерно състояние също е хомогенно (този въпрос ще бъде разгледан по-нататък). Затова инверсната населеност удовлетворява следното обикновено диференциално уравнение:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{1}{V} \frac{P_p}{h\nu_p} \eta_p - R_{ASE}(n) \quad (2.5.1)$$

където:

- $\nu_p$  е честотата на фотоните на напмпващото лъчение.
- $P_p$  е мощността на напмпващия оптичен импулс.
- $\eta_p$  е ефективността на напмпващата система, определена като отношението на броя активни частици, възбудени за единица време от напмпващото лъчение и попаднали в горно лазерно състояние, към общия брой фотони, излъчени за единица време от напмпващата система.
- $R_{ASE}$  е скоростта на обезселване на горното лазерно състояние вследствие на усилената спонтанна емисия.

Търсим решението  $n(t)$  във времеви интервал с продължителност, равна на продължителността  $T_{pump}$  на напмпващия импулс:

$$t \in [0; T_{pump}] \quad (2.5.2)$$

За начално условие, т.е. инверсната населеност в началния момент на напмпването, имаме:

$$n_0 = n(0) = 0 \quad (2.5.3)$$

тъй като горното лазерно състояние е напълно обезселено в междинния етап.

След края на напмпването, в усилвателя постъпва входният сигнал. За да определим сигнала на изхода на усилвателя е необходимо да решим системата, съставена от скоростните уравнения и уравнението за преноса на фотони. При това отчитаме крайното време на живот на долното лазерно състояние.

Поради крайната скорост на светлината в активната среда, сигналът пристига в точка с надлъжна координата  $z$  със закъснение  $z/c$ . Следователно продължителността на времеви интервал, в който трябва да търсим решенията на системата уравнения, описваща усилването на сигнала, е сумата от продължителността на импулса и времето за проход на светлината през усилвателя. Ако продължителността на импулса е с порядъци по-малка от времето за проход на светлината през усилвателя, това може да доведе до сериозни усложнения при дискретизацията на времеви интервал за численото моделиране на усилването. За да преодолеем тази трудност правим следната смяна на променливите:

$$\tau = t - \frac{z}{c} \quad (2.5.4)$$

известна като въвеждане на локално време. Скоростните уравнения (2.2.1) и (2.2.2) са инвариантни по отношение на тази смяна. След прилагане на тази смяна в уравнението за преноса на фотони (2.3.1) и изключване на членовете на скоростните уравнения, отговарящи на напомнимването и спонтанната емисия, получаваме системата:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \sigma c(n_2 - n_1)\phi \quad (2.5.5)$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = -\sigma c(n_2 - n_1)\phi \quad (2.5.6)$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = \sigma c(n_2 - n_1)\phi - \frac{n_1}{\tau_1} \quad (2.5.7)$$

като за удобство сме отбелязали локалното време с  $t$  (вместо с  $\tau$ ). Лесно се вижда, че ако се пренебрегне населеността на долното лазерно състояние, двете скоростни уравнения се опростяват до уравнение (2.3.2). Търсим решенията  $\phi(\rho, \varphi, z, t)$ ,  $n_2(\rho, \varphi, z, t)$  и  $n_1(\rho, \varphi, z, t)$  в областта:

$$\rho \in [0; R], \quad \varphi \in [0; 2\pi], \quad z \in [0; L], \quad t \in [0; T] \quad (2.5.8)$$

Необходимите начални условия са:

- Инверсната населеност в средата, в момента на постъпване на входния сигнал, получена от решението на скоростното уравнение (2.5.1). Тъй като, при отсъствие на сигнал, инверсната населеност не се променя съществено за времето за проход на светлината през усилвателя, нейната стойност в началния момент от локалното време е една и съща в целия обем на активната среда.
- Времева зависимост на плътността на фотоните на входа на усилвателя, получена от уравнение (2.1.5) при предварително известна времева и пространствена форма на сигнала.

Уравнение (2.5.1) и системата (2.5.5), (2.5.6), (2.5.7) са ключови за моделирането на лазерен усилвател в настоящата магистърска теза. Когато е известно решението за плътността на фотоните, повърхнинната плътност на изходната енергия се определя след интегриране по продължителността на сигнала:

$$F_{out}(\rho, \varphi) = h\nu c \int_0^T \phi(\rho, \varphi, z = L, t) dt \quad (2.5.9)$$

Енергията на изходния сигнал се определя след интегриране на нейната повърхнинна плътност по апертурата на активната среда:

$$E_{out} = \int_0^{2\pi} \int_0^R F_{out}(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi \quad (2.5.10)$$

Численото пресмятане на енергията на изходния сигнал, при дадени параметри на усилвателя и на входния сигнал, е крайната цел на създадения в настоящата магистърска теза модел на лазерен усилвател.

### 3 Числен модел на процесите в лазерен усилвател. Анализ и резултати.

#### 3.1 Анализ на моделите на усилената спонтанна емисия

Количествените резултати за обезселването на горното лазерно състояние вследствие на усилената спонтанна емисия се различават за различните разгледани модели. Причината за това е, че всеки от тези модели отчита различни фактори, влияещи върху резултата. В тази част правим сравнение между разгледаните модели.

Преките резултати, получени с помощта на разгледаните модели, са интегрални величини. Чрез тях не можем да пресметнем пространствената зависимост на скоростта на обезселване, а само нейната средна стойност в обема на активната среда. Затова считаме, че обезселването на горното лазерно състояние е хомогенно. Валидността на това предположение ще бъде разгледана в следващата част на тази работа.

Частиците в горно лазерно състояние могат да извършват спонтанни преходи не само към долно лазерно състояние, но и към други по-ниско лежащи енергетични състояния. Всеки от възможните преходи се характеризира със собствено разклонно отношение, определящо вероятността спонтанният преход да се извърши до съответното състояние. В общия случай разклонното отношение за лазерния преход е съизмеримо със сумата от разклонните отношения за другите преходи [4]. Въпреки това, и трите разгледани модела отчитат усиляването единствено на светлината, излъчена при преходи от горно към долно лазерно състояние. Причината е, че сечението на стимулирано излъчване е най-голямо за лазерния преход [12], и следователно усиляването на светлината, излъчена при другите преходи, е пренебрежимо малко.

Моделът на Линфорд отчита единствено флуоресценцията, излъчена в малък пространствен ъгъл около оста на активната среда, при спонтанни преходи от горно към долно лазерно състояние. Освен това, уравнение (2.4.3) определя мощността, излъчена само от единия край на активната среда. Преди да използваме модела на Линфорд е необходимо да внесем поправки за тези особености. Ако пренебрегнем широчината на спектъра на усилената спонтанна емисия, то скоростта на обезселване, с отчитане на всички спонтанни преходи от горно лазерно състояние, спонтанната емисия във всички направления, и мощността, излъчена от двата края на активната среда, е:

$$R_{Linford}(n) = \frac{2}{L} \frac{1}{\sigma \tau_{21}} \frac{\Omega}{4} \frac{(G_0 - 1)^{3/2}}{(G_0 \ln G_0)^{1/2}} + \left(1 - 2 \frac{\Omega}{4\pi}\right) \frac{n}{\tau_{21}} + (1 - \beta) \frac{n}{\tau_f} \quad (3.1.1)$$

Вторият и третият член в този израз определят съответно приноса на спонтанната емисия при преходи към долното лазерно състояние, излъчена в направления извън



пространствения ъгъл  $\Omega$ , и приноса на спонтанната емисия при преходи към състояния, различни от долното лазерно.

Скоростта на обезселване, получена чрез модела на Шулц, е:

$$R_{Schulz}(n) = \frac{n}{\tau_f} + \frac{1}{\sigma L} \frac{1}{\tau_{21}} \frac{\Omega}{2\pi} (G_0 - 1 - \ln G_0) \quad (3.1.2)$$

В сравнение с модела на Линфорд, този на Шулц не отчита формата на линията на лазерния преход.

Скоростта на обезселване, получена чрез модела на Рос, е:

$$R_{Ross}(n) = \frac{n}{\tau_f} (1 + B) \quad (3.1.3)$$

където стойността на величината  $B$ , определяща приноса на усилването на спонтанната емисия, се определя от уравнение (2.4.12). Приблизителният израз за  $B$  в уравнение (2.4.13) е получен за активна среда Nd:YLF. За да използваме този израз за Nd:YAG е необходимо да го коригираме. За тази цел, нека разгледаме разликите между двете активни среди, съществени за определянето на тази величина. Първо, разклонното отношение за лазерния преход е различно за двете активни среди. Имайки предвид, че аналитичният израз за  $B$  в уравнение (2.4.13) е приближение на този в уравнение (2.4.12), и следователно е пропорционален на разклонното отношение за съответната активна среда, за Nd:YAG получаваме:

$$B \approx \frac{\beta_{Nd:YAG}}{\beta_{Nd:YLF}} 0.05 \left( \frac{2R}{L} \right)^{0.3} G_0 \quad (3.1.4)$$

където отношението  $\beta_{Nd:YAG}/\beta_{Nd:YLF}$ , на разклонните отношения за Nd:YAG и Nd:YLF, е 0,95 [13]. Втората съществена разлика е, че показателят на пречупване на Nd:YAG е различен от този на Nd:YLF [4]. Следователно отраженията на усилената спонтанна емисия от околните повърхности на активната среда оказват различно влияние върху обезселването в двата вида активни среди. От друга страна, приблизителният израз за  $B$  е получен за активна среда с дифузна околна повърхност, каквато е и нашата. Считаме, че тази особеност значително намалява разликата във влиянието на отраженията, и използваме уравнение (3.1.4) без допълнителни промени.

В сравнение с другите два модела, този на Рос отчита усилването на спонтанната емисия във всички направления, а също и отраженията на светлината от повърхността на активната среда. Затова скоростта на обезселване, получена чрез модела на Рос, е по-голяма от тази, получена чрез другите модели.

### 3.2 Числено пресмятане на мощността на усилената спонтанна емисия

За да изследваме влиянието на различни фактори върху обезселването на долното лазерно състояние, по-нататък ще сравним инверсната населеност, а също и скоростта на обезселване, получени с помощта на различни модели на усилената спонтанна емисия. За да оценим влиянието на отраженията е необходимо да сравним резултатите от модела на Рос с тези от друг подобен модел, пренебрегващ отраженията. За тази цел бихме могли да пресметнем интеграла от уравнение (2.4.12) без да отчитаме отраженията, и да заместим получения резултат в уравнение (3.1.3). Този интеграл не е известен в аналитичен вид и е нужно да бъде пресметнат числено.

Интеграционната област дефинираме като:

$$\rho_1, \rho_2 \in [0; R], \quad \varphi_1, \varphi_2 \in [0; 2\pi], \quad z_1, z_2 \in [0; L] \quad (3.2.1)$$

$$r \geq \sqrt[3]{n_d} \quad (3.2.2)$$

където  $(\rho_1, \varphi_1, z_1)$  и  $(\rho_2, \varphi_2, z_2)$  са цилиндричните координати на двата обемни елемента,  $r$  е разстоянието между тях, а  $n_d$  е концентрацията на активните частици в матрицата на активната среда. Последното условие (3.2.2) налагаме с цел подинтегралната функция да бъде интегрируема в разглежданата област. Смисълът на това неравенство е, че интензитетът на усилената спонтанна емисия в дадена точка се създава от източници, отдалечени от тази точка на разстояние, не по-малко от минималното между активните частици в средата.

Пресмятането на интеграла чрез детерминистични методи за числено интегриране (пораждащи предсказуем резултат, зависещ единствено от параметрите на задачата) е затруднено поради следните особености на интеграционната област:

- Интеграционната област е шестмерна. Нека за постигане на достатъчна точност е нужно да оценим подинтегралната функция  $N$  пъти за всяко измерение. Тогава за цялата интеграционна област, общият брой оценки на тази функция, които е необходимо да пресметнем, е  $N^6$ . Това създава сериозни усложнения, свързани както с необходимото количество памет, така и с времето за извършване на изчисленията.
- Формата на интеграционната област е сложна. Областта за координатите на единия обемен елемент зависи от координатите на другия обемен елемент.

Тези трудности могат да бъдат преодолені чрез пресмятане на интеграла с помощта на Монте Карло метод [14], по следния начин. Първо, генерираме с равномерно разпределение случайните координати на  $N$  на брой точки от шестмерното пространство, лежащи в интеграционната област. За всяка от тези точки оценяваме подинтегралната функция. Стойността на интеграла е:

$$I \approx V_I \langle f \rangle \pm \sqrt{\frac{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}{N}} \quad (3.2.3)$$

където  $V_I \approx V^2$  е обемът на интеграционната област, с  $f$  са означени стойностите на подинтегралната функция в генерираното множество точки, а скобите означават аритметично осредняване. От този израз се вижда, че числената грешка е  $O(\sqrt{1/N})$ , независимо от броя на измеренията на интеграционната област.

Приложимостта на модела на Рос зависи от това до каква степен е изпълнено условието скоростта на обезселване на долното лазерно състояние, а следователно и инверсната населеност, да е постоянна в обема на активната среда. За количествена оценка до колко това е изпълнено, използваме относителното стандартно отклонение на скоростта на обезселване, получена чрез уравнение (2.4.9) за множество точки в обема на активната среда. Координатите на тези точки генерираме случайно, с равномерно разпределение в пространството. За да намерим скоростта на обезселване в дадена точка  $P$  е необходимо за тази точка първо да пресметнем величината  $B_P$  от уравнение (2.4.10). За тази цел отново използваме Монте Карло интегриране, по начина описан по-горе, но за тримерната област:

$$\rho \in [0; R], \quad \varphi \in [0; 2\pi], \quad z \in [0; L] \quad (3.2.4)$$

$$r \geq \sqrt[3]{n_d} \quad (3.2.5)$$

където  $\rho$ ,  $\varphi$  и  $z$  са цилиндричните координати на обемния елемент  $dV$ , а  $r$  е разстоянието между обемния елемент и точката  $P$ . Така намираме стандартното отклонение  $\sigma_B$  на величината  $B_P$  за множеството от  $N$  на брой точки. Като имаме предвид зависимостта на скоростта на обезселване от величината  $B_P$  в уравнение (2.4.9), и също че стандартното отклонение на едно множество числа се запазва или умножава, съответно при събиране или умножение на всеки елемент на множеството с едно и също число, за относителното стандартно отклонение на скоростта на обезселване получаваме:

$$\frac{\sigma_R}{R_{ASE}} = \frac{\sigma_B}{1 + B} \quad (3.2.6)$$

Тъй като стандартното отклонение на едно множество числа е мярка за отклонението на тези числа от средната им стойност, условието за хомогенност на обезселването, и следователно за валидност на модела на Рос, е:

$$\frac{\sigma_R}{R_{ASE}} \ll 1 \quad (3.2.7)$$

### 3.3 Дискретизация на задачите. Схеми за численото им решаване.

Ограничените ресурси на компютрите правят невъзможно представянето в тях на непрекъснати математически модели. Затова първата стъпка при численото решаване на диференциални уравнения е да се дискретизира задачата.

### 3.3.1 Числено решаване на задачата за напмпването на активната среда

За да определим инверсната населеност в етапа на напмпване е необходимо да намерим решението на скоростното уравнение (2.5.1). За целите на тази работа, в зависимост от прилагания модел на усилената спонтанна емисия, използваме различни функции  $R_{ASE}(n)$ , участващи в това уравнение, като в общия случай явният им вид може и да не ни е известен. Затова търсим решението с помощта на числени методи. Дискретизираме времето, като го представяме с множество равно-отдалечени моменти. Имайки предвид, че областта, в която търсим решението, е (2.5.2), то времето, при зададен брой стъпки  $K$ , дискретизираме така:

$$t_k = k\Delta t, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K-1, \quad \Delta t = T_{pump}/(K-1) \quad (3.3.1)$$

където  $k$  е индексът, с който определяме момент във времето,  $\Delta t$  е продължителността на времевата стъпка, а  $t_k$  са моментите във времето, отговарящи на горния индекс. Решението, или по-точно неговото числено приближение, в горните дискретизирани моменти във времето, означаваме:

$$n_k \approx n(t_k) \quad (3.3.2)$$

Поради споменатите по-горе особености на функцията  $R_{ASE}(n)$ , можем да прилагаме само явни методи за числено решаване на обикновени диференциални уравнения (които не изискват да бъде известен явният вид на производната на решението). За намиране на решението обхождаме последователно всички стъпки във времеви интервал. Във всяка следваща стъпка пресмятаме решението, прилагайки избрания явен метод и познавайки решението в предишната стъпка. За стойността на решението в началната стъпка използваме началното условие  $n_0=0$ .

Най-простият явен метод е този на Ойлер [14]. Прилагайки този метод за численото решаване на уравнение (2.5.1), за решението в стъпка  $k+1$  получаваме:

$$n_{k+1} = n_k + \Delta t \left[ \frac{1}{V} \frac{P_p}{h\nu_p} \eta_p - R_{ASE}(n_k) \right] \quad (3.3.3)$$

Тъй като методът на Ойлер апроксимира производната на търсената функция с дясна крайна разлика, той е от първи порядък на точност. Дясна крайна разлика се нарича разликата  $f(x+h)-f(x)$ , където  $f$  е търсената функция,  $x$  е точката, в която се оценява нейната производна, а  $h$  е размера на стъпката. Ако за даден метод, пренебрегвайки грешката от закръгляне на числата в паметта на компютъра, локалната грешка (внесена след еднократно прилагане на метода), е  $O(h^{p+1})$  при стъпка с размер  $h$ , то порядъкът на точност на метода е  $p$ .

Метод с по-висок порядък на точност е този на Рунге-Кута от четвърти порядък на точност [14]. Нека с  $f(n)$  означим дясната страна на уравнението, което решаваме. Прилагайки метода на Рунге-Кута, за решението в стъпка  $k+1$  получаваме:

$$\begin{aligned}
k_1 &= \Delta t f(n_k) \\
k_2 &= \Delta t f\left(n_k + \frac{1}{2}k_1\right) \\
k_3 &= \Delta t f\left(n_k + \frac{1}{2}k_2\right) \\
k_4 &= \Delta t f(n_k + k_3) \\
n_{k+1} &= n_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

### 3.3.2 Числено решаване на задачата за разпространението на лазерни импулси

За да определим плътността на фотоните и населеността на лазерните състояния в обема на активната среда по време на етапа на усилване, е необходимо да намерим числените решения на системата (2.5.5), (2.5.6), (2.5.7). Дискретизираме аргументите на решенията, като ги представяме с множества равно-отдалечени точки и моменти. Имайки предвид, че областта, в която търсим решенията, е (2.5.8), то аргументите, при зададен брой стъпки  $M, N, J$  и  $K$ , съответно по  $\rho, \varphi, z$  и  $t$ , дискретизираме така:

$$\begin{aligned}
\rho_m &= m\Delta\rho, & m &= 0, 1, 2, \dots, M-1, & \Delta\rho &= R/(M-1) \\
\varphi_n &= n\Delta\varphi, & n &= 0, 1, 2, \dots, N-1, & \Delta\varphi &= 2\pi/(N-1) \\
z_j &= j\Delta z, & j &= 0, 1, 2, \dots, J-1, & \Delta z &= L/(J-1) \\
t_k &= k\Delta t, & k &= 0, 1, 2, \dots, K-1, & \Delta t &= T/(K-1)
\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

където  $m, n, j$  и  $k$  са индексите, с които определяме цилиндричните координати на точка в пространството, както и момент във времето,  $\Delta\rho, \Delta\varphi, \Delta z$  и  $\Delta t$  са размерите на стъпките по координатите и по времето, а  $\rho_m, \varphi_n, z_j$  и  $t_k$  са координатите и моментите във времето, отговарящи на горните индекси.

Решенията за плътността на фотоните и населеността на лазерните нива са само междинен резултат за целите на тази работа. Крайният резултат, който търсим, е енергията на изходния сигнал. Областта, в която търсим решенията, е четиримерна и численото моделиране в нея би могло да изисква голямо количество компютърна памет. За да преодолеем този проблем, нека отново разгледаме решаваните уравнения. Радиалната и азимуталната координати  $\rho$  и  $\varphi$  участват в тях само като аргументи на решенията и на техните производни. При това, стойностите на тези аргументи са едни и същи навсякъде в уравненията. Зависимостта на решенията от напречните координати се получава единствено от началните условия. Затова, вместо в четиримерна област, можем, за дадени напречни координати, да търсим решенията в двумерната област на надлъжните координати и времето. За да намерим повърхнинната плътност на енергията на изходния сигнал е необходимо да обходим всички дискретни напречни координати, като във всяка стъпка:

- пресмятаме решенията в двумерната област на надлъжните координати и времето
- пресмятаме повърхнинната плътност на изходната енергия чрез числено интегриране на изходната плътност на фотоните по продължителността на сигнала

Изходната енергия пресмятаме чрез числено интегриране на нейната повърхнинна плътност по апертурата на активната среда.

Разбира се, този подход намалява само необходимото количество памет. Времето за извършване на изчисленията остава същото, тъй като броят точки, в които е необходимо да се пресметнат решенията, е същият.

За простота на означенията, при по-нататъшните разглеждания на численото моделиране, няма изрично да отбелязваме зависимостта на решенията от напречните координати. Числените решения в горните дискретизирани аргументи означаваме:

$$\begin{aligned} \phi_{jk} &\approx \phi(\rho_m, \varphi_n, z_j, t_k), & n_{2,jk} &\approx n_2(\rho_m, \varphi_n, z_j, t_k), \\ n_{1,jk} &\approx n_1(\rho_m, \varphi_n, z_j, t_k) \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Диференциалните уравнения, описващи разпространението на лазерни импулси, са частни. Въпреки това, тъй като във всяко уравнение участва производна само по една свободна променлива, всяко от уравненията може да се разглежда като система от обикновени диференциални уравнения, отговарящи на различните дискретни стойности на другата свободна променлива. Затова за численото решаване на тези уравнения използваме методи за обикновени диференциални уравнения.

В общия случай можем да използваме различен метод за всяко от уравненията. Намирането на решенията се свежда до последователно обхождане на дискретните стойности на едната свободна променлива, като за всяка нейна стойност обхождаме последователно дискретните стойности на другата свободна променлива и пресмятаме решенията с помощта на избраните методи.

Тъй като уравненията са свързани, т.е. в десните им страни участват и трите търсени решения, схемата за числено решаване на тези уравнения може да бъде неявна най-много по една от двете свободни променливи. В противен случай, до колкото ни е известно, не би съществувала последователност на обхождане на стойностите на свободните променливи и на пресмятане на решенията в една стъпка, при която всички величини, участващи в изразите за решенията в тази стъпка, да са предварително известни. Освен това, тъй като задачата е дискретизирана, не е възможно да се използва метод, изискващ оценката на дясната страна на съответното уравнение за стойности на свободните променливи и на решението, различни от дискретните (напр. метода на Рунге-Кута).

При горните ограничения, за численото решаване на уравнението за преноса на фотони прилагаме метода на трапците [15], който е неявен метод от втори порядък на точност, а за скоростните уравнения – метода на Ойлер. Обхождаме последователно

надлъжната координата, започвайки от входа на усилвателя, като за всяка нейна стойност обхождаме последователно времето, започвайки от началния момент. Във всяка стъпка  $(j+1, k+1)$ , прилагайки съответния метод, пресмятаме решенията в следната последователност:

$$n_{2,j+1k+1} = n_{2,j+1k} - \Delta t \sigma c (n_{2,j+1k} - n_{1,j+1k}) \phi_{j+1k} \quad (3.3.7)$$

$$n_{1,j+1k+1} = n_{1,j+1k} + \Delta t \left[ \sigma c (n_{2,j+1k} - n_{1,j+1k}) \phi_{j+1k} - \frac{n_{1,j+1k}}{\tau_1} \right] \quad (3.3.8)$$

$$\phi_{j+1k+1} = \phi_{jk+1} \frac{1 + \frac{\Delta z}{2} \sigma (n_{2,jk+1} - n_{1,jk+1})}{1 - \frac{\Delta z}{2} \sigma (n_{2,j+1k+1} - n_{1,j+1k+1})} \quad (3.3.9)$$

Стойностите на населеността на лазерните състояния при  $k=0$ , и на плътността на фотоните при  $j=0$ , определяме от началните условия.

Когато входният сигнал представлява серия от импулси, техният брой може да бъде много голям. Освен това, периодът на повторение на входните импулси може да бъде много по-голям от тяхната продължителност. Тогава времеви интервал между два последователни импулса би бил много по-продължителен от самите импулси. В допълнение, енергията на сигнала в този времеви интервал е много по-малка от енергията на импулсите и оказва слабо влияние върху крайните резултати. За да избегнем усложнения при дискретизацията на продължителността на такъв сигнал, бихме могли да решаваме задачата за разпространението на всеки импулс от серията поотделно. За първия импулс от серията, началните условия за населеността на лазерните състояния са тези, получени при напompването на активната среда. За следващите импулси, началните условия получаваме от решенията на скоростните уравнения (2.5.6) и (2.5.7) във времеви интервал между импулсите. В тези уравнения отчитаме, че плътността на фотоните във времето между импулсите е нула. За начални условия използваме населеността на лазерните състояния след разпространението на предходния импулс. Така, за началната населеност  $n_2^{(i+1)}$  и  $n_1^{(i+1)}$ , за разпространението на импулса с пореден номер  $i+1$  от серията, получаваме:

$$n_{2,j0}^{(i+1)} = n_{2,jK-1}^{(i)} \quad (3.3.10)$$

$$n_{1,j0}^{(i+1)} = n_{1,jK-1}^{(i)} \exp\left(-\frac{T_I}{\tau_1}\right) \quad (3.3.11)$$

където  $T_I$  е продължителността на времеви интервал между два последователни импулса. Общата повърхнинна плътност на енергията на цялата серия от изходни импулси е сума от повърхнинната плътност на енергията на отделните изходни импулси.

За численото интегриране по продължителността на сигнала и по апертурата на активната среда използваме правилото на трапците [14], правилото на Симпсън [14] и метода на Ромберг [14]. Прилагаме един и същи метод от изброените, за интегриране както по времето, така и по напречните координати.

### **3.4 Области на устойчивост и физическа смисленост на числените решения**

В част §3.3 посочихме порядъците на точност на използваните от нас методи за числено решаване на обикновени диференциални уравнения. В тази част правим анализ на устойчивостта на тези методи.

Съществува вид диференциални уравнения – така наречените твърди уравнения [14] – чието решаване с помощта на някои методи поражда твърде големи грешки в крайните резултати. Причината е, че грешките, появили се в по-ранните стъпки от изпълнението на метода, могат в следващите стъпки да нарастват прогресивно до такава степен, че абсолютната грешка в края на изчисленията да бъде с много порядъци по-голяма от точното решение. По отношение на това поведение на грешката методите биват устойчиви или неустойчиви. Устойчивостта на един метод може да бъде по-важна характеристика от неговия порядък на точност. Ако знаем точното решение на задачата и го сравним с численото, то методът, пораждащ численото решение, заедно с параметрите на дискретизация, е устойчив ако численото решение остава в крайна област около точното, при математически коректно изменение на параметрите на задачата. Устойчивостта зависи както от метода, така и от параметрите на дискретизация. Един и същи метод при едни параметри може да е устойчив (при достатъчно малка стъпка), а при други – не. Метод, чиято устойчивост не зависи от параметрите на дискретизация, се нарича безусловно устойчив.

За постигане на определена точност на резултатите от изчисленията е необходимо използваният метод да бъде сходящ, т.е. численото решение, породено от този метод, с точност до грешката от закръгляне да клони към точното решение, когато размерът на стъпката клони към нула. Всички числени методи, разглеждани в настоящата теза, притежават това свойство.

Тъй като не е възможно предварително да определим размера на стъпката, при който грешката в последната стъпка на дискретизация би била по-малка от максималната допустима, за постигане на желаната точност е необходимо да пресмятаме решения с прогресивно намаляваща стъпка. Считаме, че сме достигнали желаната точност, когато относителната разлика между два последователни крайни резултата стане по-малка от максималната допустима относителна грешка. Определянето на размера на стъпката, при който съществените за нашия модел числени резултати се пресмятат с определена точност, ще бъде разгледано по-подробно в приложение §А.

#### **3.4.1 Параметри на дискретизация на задачата за напompването на активната среда**

Да разгледаме устойчивостта на решенията на скоростното уравнение (2.5.1). За численото решаване на това уравнение използваме методите на Ойлер и на Рунге-Кута. Явният вид на дясната страна на уравнението не ни е известен предварително. Затова



предварителното определяне на областта на устойчивост (максималния размер на стъпката, при който решенията са устойчиви) е невъзможно. Въпреки това, тъй като познаваме качествено поведението както на точното решение, така и на времевата му производна, можем да въведем условия, на които е нужно да отговаря едно числено решение, за да бъде устойчиво.

За да изясним тези условия, нека отново разгледаме уравнение (2.5.1). Дясната му страна определя времевата производна на търсеното решение. Тя е разлика между положителна постоянна величина и положителна монотонно-растяща функция на инверсната населеност в интервала  $(0; \infty)$ . Освен това, в началния момент от времето, когато инверсната населеност е нула, вторият член на дясната страна на уравнението е тъждествено равен на нула. Следователно можем да очакваме, че точното решение е неотрицателна и монотонно-растяща функция на времето, клоняща към крайна положителна горна граница, когато времето клони към безкрайност. Разбира се, когато точното решение клони към неговата горна граница, времевата му производна клони към нула.

Времевата производна на решението намалява монотонно с нарастване на инверсната населеност. За стойности на инверсната населеност, по-големи от нейната горна граница, времевата производна става отрицателна. Освен това, тя е нелинейна функция на инверсната населеност – нейната производна по инверсната населеност е отрицателна и монотонно-намаляваща функция. Затова, при численото решаване на уравнението с твърде голяма времева стъпка е възможно в някоя стъпка времевата производна на решението да бъде оценявана за отрицателна стойност на инверсната населеност. Но, по време на напompването, населеността на долното лазерно състояние е нула, а инверсната населеност е равна на населеността на горното лазерно състояние. Населеността на едно енергетично състояние има физически смисъл само когато е неотрицателна. Освен това, функцията  $R_{Linford}(n)$  от уравнение (3.1.1), определяща скоростта на обезселване на горното лазерно състояние, получена чрез модела на Линфорд, е дефинирана само за положителна инверсна населеност. Затова налагаме условието инверсната населеност, като аргумент на функцията  $R_{ASE}(n)$  (участваща в дясната страна на решаваното уравнение), да бъде неотрицателна при всяка оценка на тази функция, във всяка времева стъпка. Ако това условие не е изпълнено, отхвърляме решението и го пресмятаме отново, с по-малка времева стъпка. С други думи, във всяка времева стъпка  $k$  проверяваме дали е изпълнено условието:

$$n_{kl} \geq 0 \quad (3.4.1)$$

където  $l$  е поредният номер на извършваната оценка на функцията  $R_{ASE}(n)$  в текущата стъпка, а  $n_{kl}$  е аргументът на тази функция при оценката с пореден номер  $l$ . Когато използваме метода на Ойлер, във всяка времева стъпка извършваме само една оценка на функцията  $R_{ASE}(n)$ , а когато използваме метода на Рунге-Кута извършваме четири оценки, т.е.  $l=1,2,3,4$ .

Възможно е това условие да бъде изпълнено за всички междинни времеви стъпки, но пресметнатата инверсна населеност в последната стъпка (в която не

оценяваме функцията  $R_{ASE}(n)$  да бъде отрицателна. Освен това, дори когато горното условие е изпълнено е възможно, след достигане на горната граница на точното решение, численото решение да осцилира около нея. В такъв случай е възможно относителната разлика между инверсната населеност в последната стъпка на две последователни осцилиращи решения, получени при различен размер на времева стъпка, да бъде по-малка от максималната допустима относителна грешка. Това е възможно дори при осцилации с амплитуда, по-голяма от максималната допустима грешка. Затова, ако в някоя времева стъпка численото решение намалее спрямо предишната стъпка, и разликата е извън границите на максималната допустима грешка, отхвърляме решението и го пресмятаме отново, с по-малка времева стъпка. С други думи, във всяка времева стъпка  $k+1$  проверяваме дали е изпълнено условието:

$$\frac{(n_{k+1} - n_k)/2}{|n_{k+1} + n_k|/2} \geq -\varepsilon_r \quad (3.4.2)$$

където  $\varepsilon_r$  е максималната допустима относителна грешка в инверсната населеност в края на напompването.

Точното решение за инверсната населеност е ограничено в крайния интервал  $[0; n_{\max}]$ , където  $n_{\max}$  е стойността на решението, при която неговата времева производна е нула. Числените решения, удовлетворяващи неравенства (3.4.1) и (3.4.2), са ограничени в крайния интервал:

$$n_k \in [0; n_{\max} + w_p \Delta t] \quad (3.4.3)$$

Следователно тези решения са устойчиви.

### 3.4.2 Параметри на дискретизация на задачата за разпространението на лазерни импулси

Да разгледаме устойчивостта на решенията на уравнението за преноса на фотони (2.5.5). Нека предположим, че познаваме точното решение за инверсната населеност. Тогава аналитичното решение за плътността на фотоните е:

$$\phi(\rho, \varphi, z, t) = \phi(\rho, \varphi, 0, t) \exp \left[ \sigma \int_0^z n(\rho, \varphi, z', t) dz' \right] \quad (3.4.4)$$

Аргументът на експонентата е положителен. В началния момент от локалното време, когато инверсната населеност е постоянна по дължината на активната среда, плътността на фотоните расте експоненциално по надлъжната координата. Следователно точните решения са неустойчиви – с нарастване на надлъжната координата решение, получено при малка промяна на началното условие, се отдалечава неограничено от решението, отговарящо на точното начално условие. Следователно численото решение на това уравнение е безусловно неустойчиво, независимо чрез кой метод е получено. Въпреки това, тъй като методът на трапците, с помощта на който решаваме това уравнение, е сходящ, можем да пресметнем решението с произволно малка грешка, стига да използваме достатъчно малка стъпка.

Тъй като целта на настоящата магистърска теза е моделирането на процеси от действителността, необходимо е пресметнатите числени решения, освен да са устойчиви, да имат и физически смисъл. За да осигурим това тяхно свойство, за всяко решавано уравнение е необходимо да намерим областта за параметрите на дискретизация, при които числените решения отговарят на определени условия. При това можем да считаме, че началните условия също удовлетворяват тези условия.

Плътността на фотоните, за усилвател с посочените по-рано особености, има физически смисъл в разглежданата област, когато е:

- неотрицателна
- монотонно растяща функция на надлъжната координата

Населеността на горното и долното лазерни състояния, за същия усилвател, има физически смисъл в разглежданата област, когато:

- населеността на горното и на долното лазерни състояния е неотрицателна
- инверсната населеност е неотрицателна
- населеността на горното лазерно състояние е монотонно-намаляваща функция на времето

Използвайки означенията, въведени в част §3.3, численото решение за плътността на фотоните, в стъпката  $(j+1, k+1)$ , е необходимо да отговаря на следните условия:

$$\phi_{j+1, k+1} \geq 0, \quad \phi_{j+1, k+1} \geq \phi_{j, k+1} \quad (3.4.5)$$

Като заместим в тези неравенства израза за численото решение от уравнение (3.3.9), имайки предвид, че инверсната населеност е неотрицателна, че плътността на фотоните е неотрицателна в предишната стъпка, и, че максималната стойност на инверсната населеност в разглежданата област е началната ѝ стойност, за размера на стъпката по надлъжната координата получаваме:

$$\Delta z < \frac{2}{\sigma n_0} \quad (3.4.6)$$

където  $n_0$  е инверсната населеност в началния момент от времето. Равенството не е разрешено с цел да се избегне деление на нула при пресмятане на решението.

За да имат физически смисъл, числените решения за населеността на лазерните състояния, в стъпката  $(j+1, k+1)$ , е необходимо да отговарят на следните условия:

$$\begin{aligned} n_{2, j+1, k+1} \geq 0, \quad n_{1, j+1, k+1} \geq 0, \quad n_{2, j+1, k+1} \geq n_{1, j+1, k+1}, \\ n_{2, j+1, k+1} \leq n_{2, j+1, k} \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Като заместим в тези неравенства изразите за числените решения от уравнения (3.3.7) и (3.3.8), имайки предвид, че плътността на фотоните, населеността на лазерните състояния и инверсната населеност са неотрицателни в предишната стъпка, за размера на стъпката по времето получаваме:

$$\Delta t \leq \frac{1}{2\sigma c \phi_{max}} \quad \cap \quad \Delta t \leq \tau_1 \quad (3.4.8)$$

където  $\phi_{max}$  е най-голямата плътност на фотоните, която е възможно да получим при изчисленията в разглежданата област.

За да определим максималната времева стъпка е необходимо предварително да направим консервативна оценка на максималната плътност на фотоните. Разбира се, най-голяма плътност на фотоните бихме получили на изхода на усилвателя, за стойностите на напречните координати и на времето, при които входната плътност на фотоните е максимална. И понеже оценката е предварителна и е необходимо да бъде консервативна, считаме, че инверсната населеност е постоянна и равна на началната. При тези условия, изхождайки от максималните начални условия и намирайки израз за численото решение във всяка следваща стъпка по надлъжната координата от уравнение (3.3.9), за численото решение в последната стъпка получаваме:

$$\phi_{max} = \phi_r \left( \frac{1 + \frac{\Delta z}{2} \sigma n_0}{1 - \frac{\Delta z}{2} \sigma n_0} \right)^{J-1} \quad (3.4.9)$$

където  $\phi_r$  е максималната плътност на фотоните на входа на усилвателя. Определянето на максималната плътност на фотоните изисква предварително да знаем размера на стъпката по надлъжната координата. Следователно областта за времевата стъпка, при която числените решения са физически смислени, зависи от надлъжната стъпка.

Числените решения за населеността на лазерните състояния, удовлетворяващи неравенства (3.4.7), са ограничени в интервала:

$$n_{1,jk}, n_{2,jk} \in [0; n_0] \quad (3.4.10)$$

Точните решения са ограничени в същия краен интервал. Следователно числените решения за населеността на лазерните състояния, получени за стъпки по надлъжната координата и по времето, удовлетворяващи съответно неравенства (3.4.6) и (3.4.8), са устойчиви.

### 3.5 Нестандартна схема за числено решаване на уравненията, описващи разпространението на лазерни импулси

В предишната част разгледахме областите за параметрите на дискретизация, при които числените решения на уравненията, описващи разпространението на лазерни импулси, са устойчиви и физически смислени. Както се вижда от неравенства (3.4.6) и (3.4.8) и от уравнение (3.4.9), максималните размери на стъпките по времето и по надлъжната координата зависят от началните условия за инверсната населеност и за плътността на фотоните. При много големи максимални стойности на началните условия, броят на стъпките е много голям. Това води до усложнения при изчисленията както за усилвател с голямо усиление, така и за входен сигнал с висока енергия.

Затова създадохме оригинална алтернативна схема за числено решаване на уравненията, описващи разпространението на импулси, като използвахме подхода на схемите с нестандартни крайни разлики [16]. Това е названието на вид схеми, които апроксимират производната на търсеното решение не с крайна разлика, а с такава функция, че породеното от схемата числено решение притежава свойствата, присъщи на точното решение.

Нека приложим този подход за численото решаване на уравнението за преноса на фотони (2.5.5). От вида на аналитичното му решение, дадено в уравнение (3.4.4), считайки, че населеността на лазерните състояния е постоянна в интервала между две съседни стъпки по надлъжната координата, за численото решение в стъпката  $(j+1, k+1)$  получаваме:

$$\phi_{j+1, k+1} = \phi_{j, k+1} \exp[\sigma(n_{2, j, k+1} - n_{1, j, k+1})\Delta z] \quad (3.5.1)$$

Да приложим същия подход и за численото решаване на скоростните уравнения (2.5.6) и (2.5.7). Нека разгледаме тези уравнения в интервала между две съседни времеви стъпки, при условие, че плътността на фотоните е постоянна в този интервал. При това условие, двете уравнения представляват система от хомогенни линейни обикновени диференциални уравнения от първи ред с постоянни коефициенти. От аналитичното решение на такава система, при начални условия, определени от населеността на лазерните състояния в предишната времева стъпка, за населеността на лазерните състояния в стъпката  $(j+1, k+1)$  получаваме:

$$\begin{aligned} a &= -\left(\sigma c \phi_{j+1, k} + \frac{1}{\tau_1}\right) \\ b &= \sigma c \phi_{j+1, k} \\ c' &= \sigma c \phi_{j+1, k} \\ d &= -\sigma c \phi_{j+1, k} \\ D &= (a - d)^2 + 4bc' > 0 \\ \lambda_1 &= \frac{a + d + \sqrt{D}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{a + d - \sqrt{D}}{2} \\ C_1 &= \frac{n_{2, j+1, k} - \frac{n_{1, j+1, k}}{b}(\lambda_2 - a)}{\sqrt{D}} \\ C_2 &= \frac{n_{1, j+1, k}}{b} - C_1 \\ n_{1, j+1, k+1} &= C_1 b \exp(\lambda_1 \Delta t) + C_2 b \exp(\lambda_2 \Delta t) \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

$$n_{2, j+1, k+1} = C_1(\lambda_1 - a)\exp(\lambda_1 \Delta t) + C_2(\lambda_2 - a)\exp(\lambda_2 \Delta t) \quad (3.5.3)$$

Последователността на обхождане на стъпките по пространствената координата и по времето е същата, като описаната в част §3.3. Стойностите на населеността на лазерните състояния при  $k=0$ , и на плътността на фотоните при  $j=0$ , определяме от началните условия.

За да определим порядъка на точност на тази схема е необходимо да намерим локалната грешка в числените решения в дадена стъпка. Грешката в численото решение за плътността на фотоните в стъпката  $(j+1, k+1)$ , при точно определено решение в предишната стъпка по надлъжната координата, е:

$$\Delta\phi_{j+1k+1} = \phi_{jk+1} \left| \exp[\sigma(n_{2,jk+1} - n_{1,jk+1})\Delta z] - \exp\left[\sigma \int_{z_j}^{z_{j+1}} n(z, t_{k+1}) dz\right] \right| \quad (3.5.4)$$

След разлагане на членовете на горния израз в ред на Тейлър около нулевия размер на стъпката, получаваме:

$$\Delta\phi_{j+1k+1} = \phi_{jk+1} \left| \sum_{p=1}^{\infty} \frac{[\sigma(n_{2,jk+1} - n_{1,jk+1})\Delta z]^p - [\sigma \int_{z_j}^{z_{j+1}} n(z, t_{k+1}) dz]^p}{p!} \right| \quad (3.5.5)$$

След разлагане на интеграла на точната инверсна населеност в ред на Тейлър около същата точка, получаваме:

$$\int_{z_j}^{z_{j+1}} n(z, t_{k+1}) dz = (n_{2,jk+1} - n_{1,jk+1})\Delta z + O(\Delta z^2) \quad (3.5.6)$$

След заместване на този израз в уравнение (3.5.5), получаваме:

$$\Delta\phi_{j+1k+1} = O(\Delta z^2) \quad (3.5.7)$$

Най-ниската степен на размера на стъпката, участваща в израза за локалната грешка, е втората. Следователно схемата е от първи порядък на точност по надлъжната координата.

За да бъде от полза, тази схема е необходимо да бъде сходяща. За да докажем това нейно свойство, нека разгледаме плътността на фотоните в последната стъпка по надлъжната координата:

$$\phi_{J-1k} = \phi_{0k} \prod_{j=0}^{J-2} \exp[\sigma(n_{2,jk} - n_{1,jk})\Delta z] = \phi_{0k} \exp\left[\sum_{j=0}^{J-2} \sigma(n_{2,jk} - n_{1,jk})\Delta z\right] \quad (3.5.8)$$

Когато размерът на стъпката клони към нула, границата на плътността на фотоните в последната стъпка е:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \phi_{J-1k} = \phi_{0k} \exp\left[\sigma \int_0^L n(z, t_k) dz\right] \equiv \phi(\rho, \varphi, 0, t) \exp\left[\sigma \int_0^L n(\rho, \varphi, z, t) dz\right] \quad (3.5.9)$$

Оказва се, че когато размерът на стъпката клони към нула, численото решение клони към точното. Следователно методът, по който е получено численото решение, е сходящ.

Формалното доказателство на сходимостта на метода за числено решаване на скоростните уравнения, както и определянето на порядъка на точност на този метод, са затруднени, тъй като аналитичните решения за населеността на лазерните състояния не са ни известни. Въпреки това, тъй като този метод е получен по аналогичен начин на метода за числено решаване на уравнението за преноса на фотони, считаме без доказателство, че той също е сходящ.

Изведохме тази схема от точните решения на частни случаи на съответните уравнения. Затова числените решения, породени от тази схема, са физически смислени, според условията, посочени в предишната част, независимо от параметрите на дискретизация. Числените решения за населеността на лазерните състояния, породени от тази схема, са ограничени в същия краен интервал както точните решения, и следователно са безусловно устойчиви.

### 3.6 Експериментална проверка на модела

За най-обща проверка на коректността на модела на лазерен усилвател, както и на неговото програмно изпълнение, правим сравнение на крайните числени резултати, получени с помощта на модела, и експериментално получени резултати.

Резултатите от изследванията, проведени с помощта на създадения в тази теза модел, зависят от множество параметри на усилвателя и на входния сигнал. Стойностите на някои от тези параметри са едни и същи за всички проведени изследвания. Тези параметри и техните стойности са изброени в таблица 3.6.1.

параметър	стойност
дължина на вълната, съответстваща на лазерния преход (във вакуум)	1064 nm
сечение на стимулирано излъчване за лазерния преход	$2.8 \times 10^{-19} \text{ cm}^2$
флуоресцентно време на живот на горното лазерно състояние	230 $\mu\text{s}$
разклонно отношение за лазерния преход	0.56
време на живот на долното лазерно състояние	170 ps
концентрация на активните частици	$1.38 \times 10^{20} \text{ cm}^{-3}$
показател на пречупване на активната среда	1.82
дължина на вълната на напмпващото лъчение (във вакуум)	808 nm
напречна форма на входния лазерен сноп	гаусова
времева форма на входните лазерни импулси	гаусова

Таблица 3.6.1: Физически параметри, общи за всички проведени изследвания.

В предходните части на тази теза описахме алтернативни методи за извършване на някои от изчисленията, необходими за получаване на крайните резултати. Точността на описаните по-нататък резултати зависи както от избора на комбинацията от прилагани методи, така и от параметрите на дискретизация, при дадените физически

параметри на задачата. Този избор се прави автоматично, в зависимост от предварително определената максимална допустима относителна грешка, внасяна в отделните междинни стъпки от изчисленията. При излагането на резултатите ще посочваме само грешката в крайния резултат.

Проведохме експерименти с два различни усилвателя на единични лазерни импулси. Усилвателите притежават особеностите, посочени в част §2.1. Проверихме коректността на модела като сравнихме изходната енергия, получена числено и експериментално. При изчисленията, за оценка на обезселването на горното лазерно състояние, по време на напompването на активната среда, използвахме модела на Рос, като влиянието на усилването на спонтанната емисия оценявахме чрез приблизителния израз от уравнение (2.4.13). Параметрите на усилвателите и на входния сигнал, както и получените числени и експериментални резултати, са изброени в таблица 3.6.2.

параметър/резултат	усилвател 1	усилвател 2
дължина на активната среда	50 mm	55 mm
диаметър на активната среда	3 mm	3 mm
продължителност на напompващия оптичен импулс	200 $\mu$ s	200 $\mu$ s
мощност на напompващия оптичен импулс	600 W	1500 W
ефективност на напompващата система	50 %	40 %
диаметър на входния лазерен сноп (на ниво $1/e^2$ от максималния оптичен интензитет)	1.5 mm	2 mm
продължителност на входния импулс (на ниво 1/2 от максималния оптичен интензитет)	1 ns	1 ns
енергия на входния импулс	0.8 mJ	0.85 mJ
изходна енергия (числен резултат)	$1.46 \pm 0.03$ mJ	$2.82 \pm 0.07$ mJ
изходна енергия (експериментален резултат)	$2.2 \pm 0.1$ mJ	$7.9 \pm 0.1$ mJ

Таблица 3.6.2: Физически параметри и резултати от експерименталната проверка на модела.

Тъй като ефективността на напompващата система не ни беше известна за нито един от двата усилвателя, за този параметър използвахме приблизителни стойности, характерни за конструкцията на усилвателите. И двата числени резултата са от порядъка на съответния експериментален резултат. Съвпадение (в границите на грешката) на числените резултати с експерименталните бихме получили при ефективност на напompващите системи на двата усилвателя съответно 85 % и 80 %.

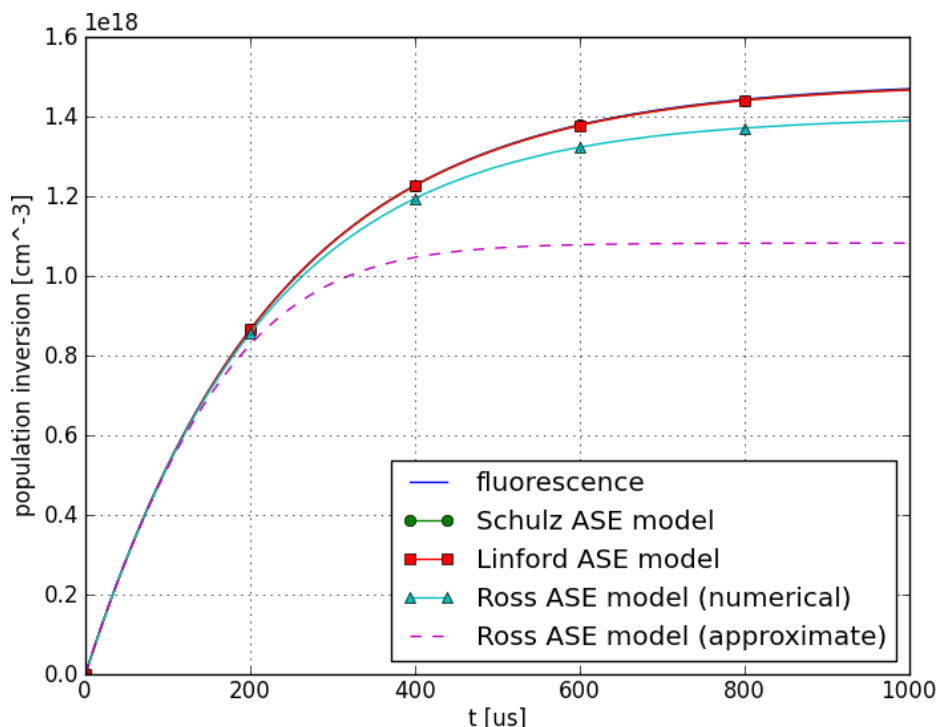
### 3.7 Изследвания на влиянието на усилената спонтанна емисия

В тази част сравняваме резултатите за скоростта на обезселване на горното лазерно състояние и за инверсната населеност, получени с помощта на различните модели на усилената спонтанна емисия, които разгледахме.

Нека разгледаме инверсната населеност при напompването на активната среда. Активната среда е с дължина 100 mm и диаметър 4 mm. Напompващият оптичен импулс е с мощност 4 kW и продължителност 1 ms, а ефективността на напompващата



система е 50 %. Времева еволюция на инверсната населеност е показана на фиг. 3.7.1, с фамилия криви, отговарящи на различни модели на обезселването на горното лазерно състояние. Стойностите на инверсната населеност в края на напомнимването, за различните модели, са изброени в таблица 3.7.1.



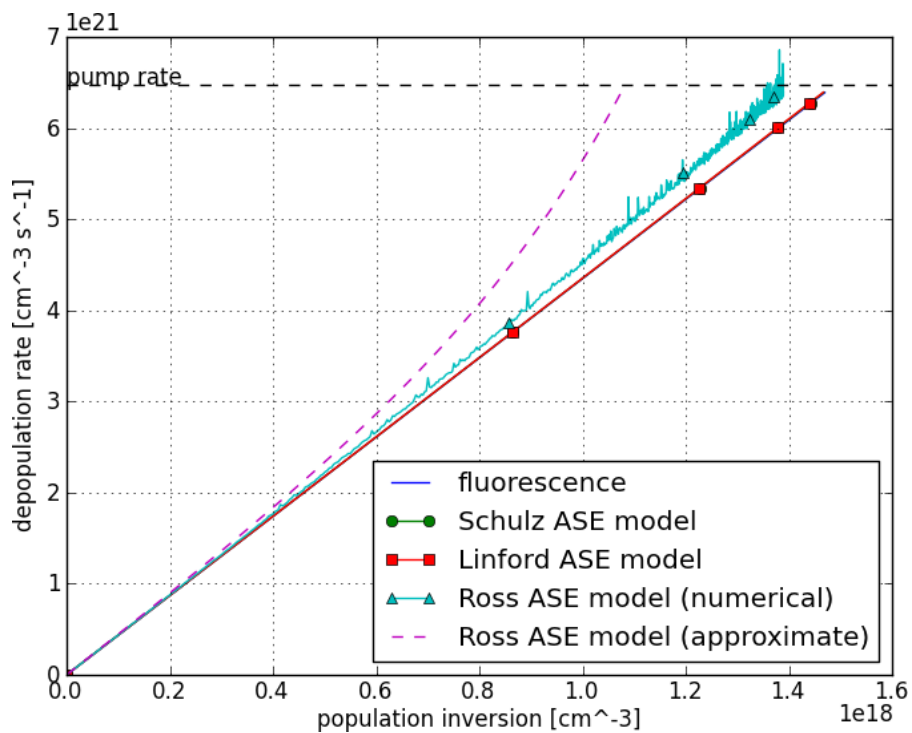
Фиг. 3.7.1: Времева еволюция на инверсната населеност в активната среда по време на напомнимването.

модел на обезселване	крайна инверсна населеност ( $\times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ )
флуоресценция (неусилена)	$1.47 \pm 0.01$
Линфорд	$1.47 \pm 0.01$
Шулц	$1.47 \pm 0.01$
Рос (числен, без отражения)	$1.39 \pm 0.09$
Рос (приблизителен, с отражения)	$1.08 \pm 0.01$

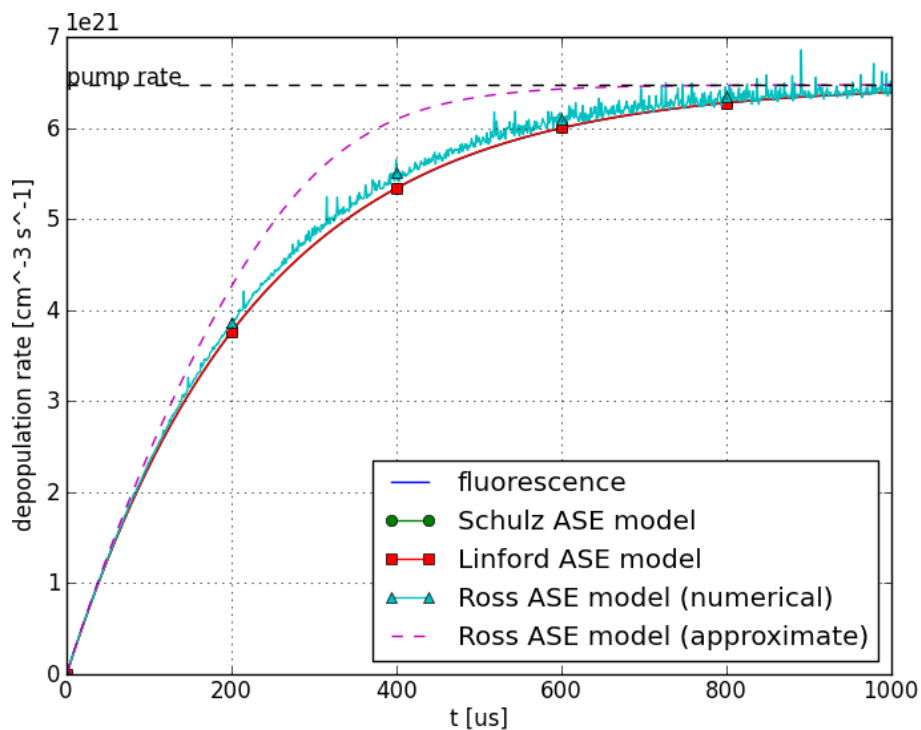
Таблица 3.7.1: Инверсна населеност в края на напомнимването.

Напълно очаквано, инверсната населеност нараства монотонно с времето и клони към крайна горна граница, когато времето клони към безкрайност.

Да разгледаме скоростта на обезселване на горното лазерно състояние. Нейната зависимост от инверсната населеност е показана с фамилия криви на фиг. 3.7.2, за различните модели на обезселването. Времева еволюция на скоростта на обезселване, при напомнимването на активната среда, е показана на фиг. 3.7.3.



Фиг. 3.7.2: Скорост на обезселване на горното лазерно състояние, като функция на инверсната населеност. С прекъснатата права линия е отбелязана скоростта на заселване на горното лазерно състояние вследствие на поглъщаното напмпващо лъчение.



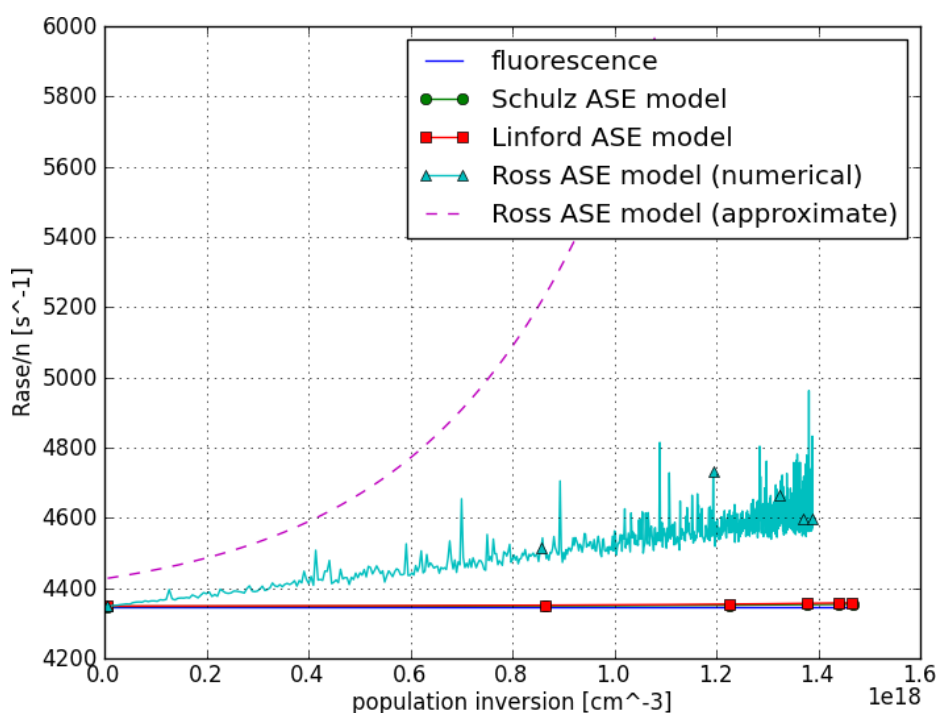
Фиг. 3.7.3: Времева еволюция на скоростта на обезселване на горното лазерно състояние по време на напмпването.

Скоростта на обезселване е нелинейна функция на инверсната населеност, за моделите, отчитащи усилената спонтанна емисия (фиг. 3.7.2). С нарастване на времето, докато инверсната населеност клони към нейната горна граница, скоростта на обезселване на горното лазерно състояние клони към скоростта на неговото заселване (фиг. 3.7.3).

Най-висока скорост на обезселване поражда моделът на Рос, отчитащ отраженията на спонтанната емисия от повърхността на активната среда, следван от модела на Рос, пренебрегващ тези отражения. Причината за това, както посочихме в част §3.1, е, че моделът на Рос отчита усиляването на спонтанната емисия във всички направления. Както се вижда от показаните резултати, влиянието на този фактор върху инверсната населеност е съществено. Влиянието на отраженията също е съществено. Причината за осцилациите на скоростта на обезселване, получена с помощта на модела на Рос, пренебрегващ отраженията, е, че я пресмятаме числено чрез Монте Карло интегриране, което се извършва с помощта на случайни числа и е недетерминистично.

Скоростта на обезселване, породена от моделите на Шулц и Линфорд, е по-малка. Макар тя да е по-голяма от тази, получена при отчитане единствено на флуоресценцията, разликата е по-малка от 1 %.

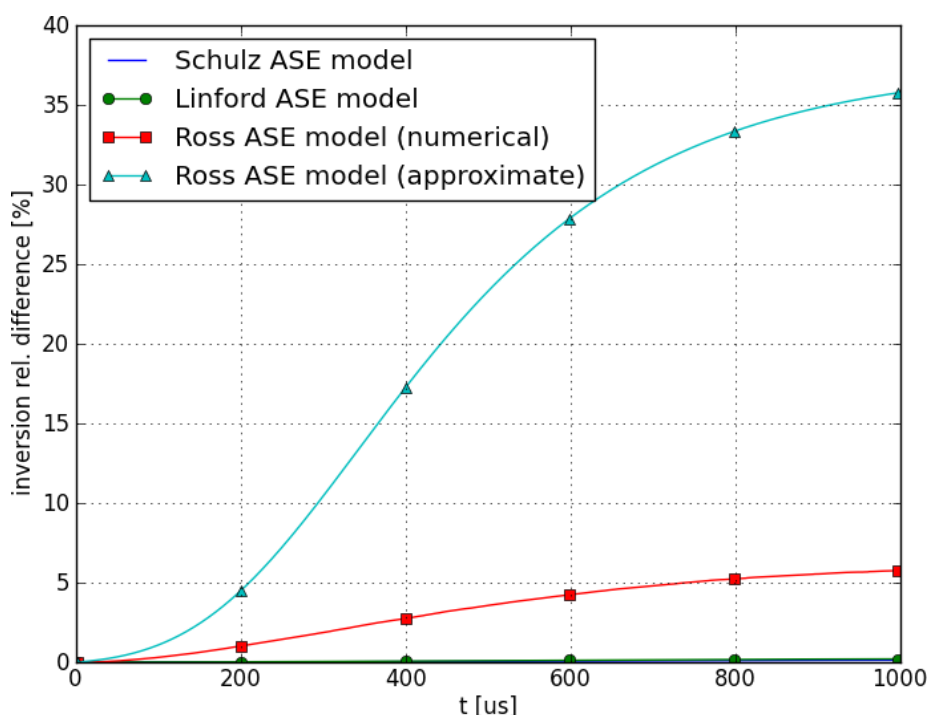
На фиг. 3.7.4 е показано отношението на скоростта на обезселване към инверсната населеност, в зависимост от инверсната населеност.



Фиг. 3.7.4: Отношение на скоростта на обезселване на горното лазерно състояние към инверсната населеност, като функция на инверсната населеност.

При отчитане на отраженията, скоростта на обезселване, породена от модела на Рос, не само е най-висока, но и нараства най-бързо с инверсната населеност, когато последната е малка.

Усилената спонтанна емисия е нежелан в практиката процес, намаляващ ефективността на усилвателя, и чието влияние е необходимо да се оцени при проектирането на лазерен усилвател. За тази цел, с помощта на създадения в тази теза модел, намираме относителната грешка в инверсната населеност, внесена при пренебрегване на усилената спонтанна емисия, след сравнение на инверсната населеност, получена чрез модела на Рос (отчитащ отраженията) и тази, получена чрез модела, отчитащ единствено обезселването вследствие на флуоресценцията. Времовата еволюция на тази грешка, за посочените по-горе параметри, е показана на фиг. 3.7.5.



Фиг. 3.7.5: Времева еволюция на относителна грешка в инверсната населеност, внесена при пренебрегване на усилената спонтанна емисия. Различните криви от фамилията съответстват на различни модели на усилената спонтанна емисия.

За избягване на прекаленото понижаване на инверсната населеност вследствие на усилената спонтанна емисия е необходимо напompвацият импулс да бъде достатъчно кратък. При посочените по-горе параметри, за да избегнем понижаването на инверсната населеност с повече от 5 %, е необходимо продължителността на напompването да бъде не по-голяма от 200  $\mu$ s (фиг. 3.7.5).

От всички разгледани модели на усилената спонтанна емисия, моделът на Рос отчита влиянието на най-много фактори. Затова във всички по-нататъшни изследвания ще използваме именно този модел.

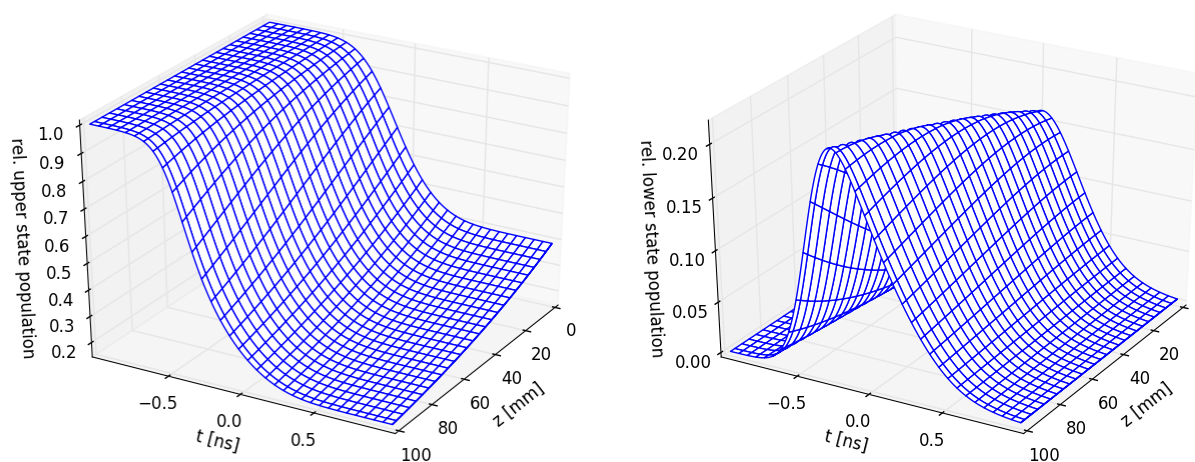
### 3.8 Изследвания на разпространението на лазерни импулси

В тази част изследваме влиянието на насищането на усилването и влиянието на крайното време на живот на долното лазерно състояние върху усилването на единични лазерни импулси. За целта използваме входни параметри, при които влиянието на тези фактори е съществено – входен импулс с достатъчно висока енергия и с продължителност, съизмерима с времето на живот на долното лазерно състояние. Стойностите на параметрите, използвани за изследванията в тази част, са следните:

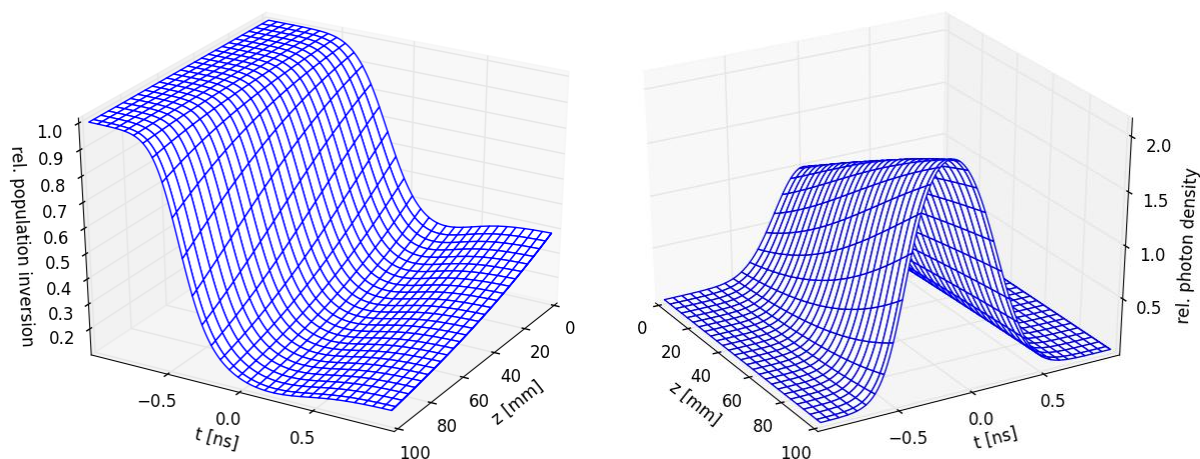
- активна среда с дължина 100 mm и диаметър 4 mm
- напompващ оптичен импулс с мощност 4 kW и продължителност 250  $\mu$ s, ефективност на напompващата система: 50 %
- входен лазерен импулс с продължителност 500 ps (на ниво 1/2) и енергия 50 mJ; диаметър на входния лазерен сноп: 4 mm (на ниво  $1/e^2$ )

Малосигналното усилване, получено при напompването на активната среда, е  $13.1 \pm 0.3$ .

Да разгледаме плътността на фотоните, населеността на лазерните състояния и инверсната населеност по оста на снопа, където влиянието на насищането на усилването е най-силно изразено. Числените решения за тях са показани на фиг. 3.8.1 и 3.8.2.



Фиг. 3.8.1: Времева и надлъжна зависимост на населеността на горното (ляво) и долното (дясно) лазерни състояния по оста на снопа.

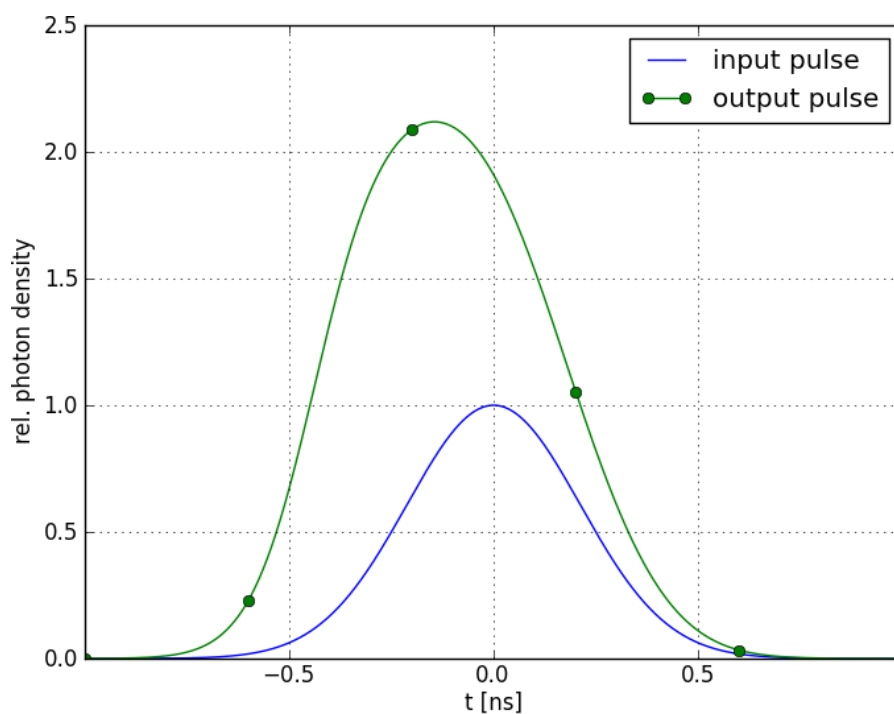


Фиг. 3.8.2: Времева и надлъжна зависимост на инверсната населеност (ляво) и на плътността на фотоните (дясно) по оста на снопа.

Населеността на лазерните състояния и инверсната населеност са неотрицателни (фиг. 3.8.1, 3.8.2). Населеността на горното лазерно състояние е монотонно-намаляваща функция на времето (фиг. 3.8.1). Плътността на фотоните е неотрицателна и монотонно-растяща функция на надлъжната координата (фиг. 3.8.2). Следователно числените решения са физически смислени според условията, посочени в част §3.4.

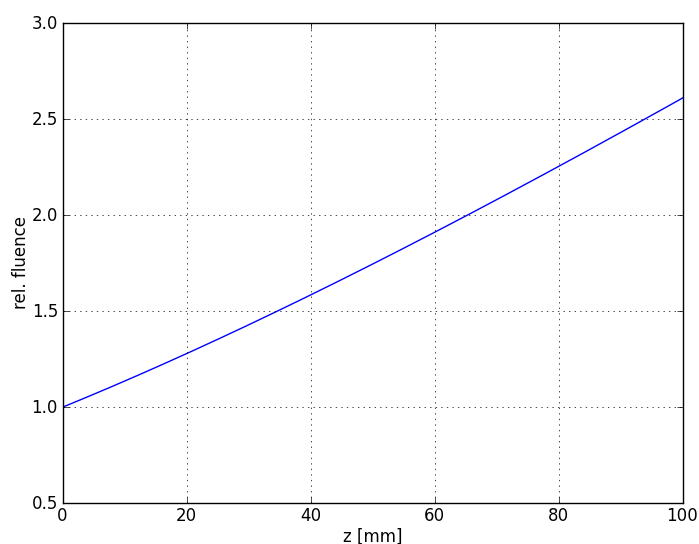
Поради крайното време на живот на долното лазерно състояние, неговата населеност нараства по време на усилването на импулса, а след това намалява (фиг. 3.8.1). Затова инверсната населеност нараства след преминаването на импулса (фиг. 3.8.2).

Нека разгледаме времевата форма на плътността на фотоните на изходния импулс, съпоставена с тази на входния импулс. Те са показани на фиг. 3.8.3.



Фиг. 3.8.3: Времева зависимост на плътността на фотоните на входния и на изходния импулси в оста на снопа.

Макар малосигналното усилване да е 13.1, максимумът на импулса е усилен само 2.1 пъти. Освен това, продължителността на изходния импулс е по-голяма от тази на входния, а максимумът на плътността на фотоните е отместен във времето. Разбира се, причината за тези ефекти е насищането на усилването. За по-подробен анализ на това явление, нека разгледаме усилването на повърхнинната плътност на енергията. Нейната зависимост от надлъжната координата е показана на фиг. 3.8.4.

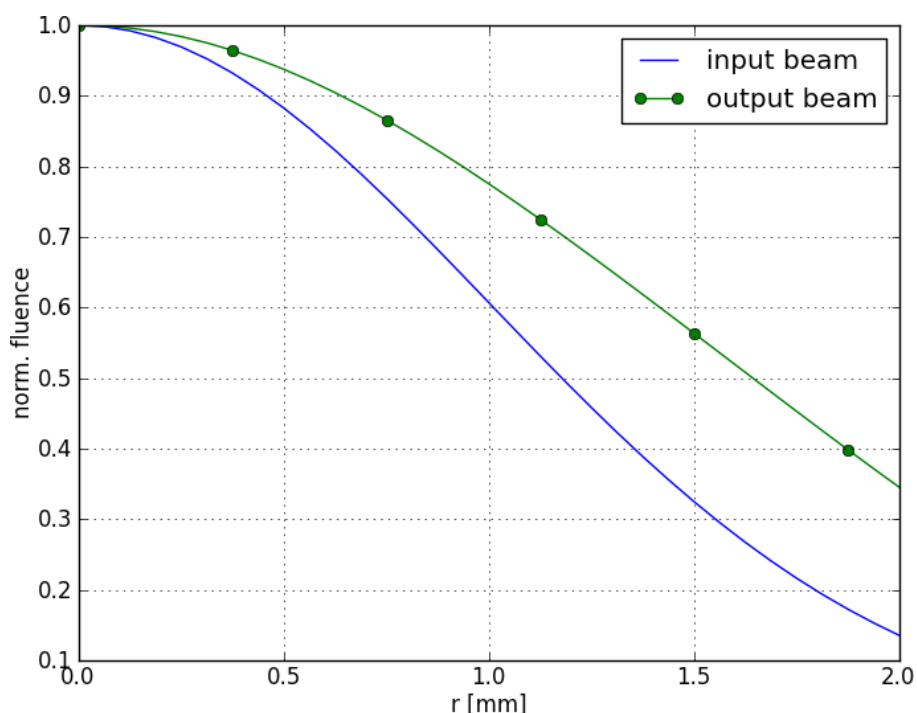


Фиг. 3.8.4: Усилване на повърхнинната плътност на енергията по оста на снопа.

Повърхнинната плътност на енергията също се усилюва по-малко от малосигналното усилване. При това, вместо експоненциална, нейната зависимост от

надлъжната координата е близка до линейна. Това поведение е очаквано при насищане на усилването. Причината за него е, че още при постъпването на импулса в усилвателя, повърхнинната плътност на неговата енергия е толкова голяма, че при разпространението му по дължината на активната среда, импулсът извлича значителна част от енергията, запасена в средата под формата на инверсна населеност (фиг. 3.8.2). В случая на пълно извличане на тази енергия, повърхнинната плътност на енергията на импулса е сума от повърхнинната плътност на входната енергия и на обемната плътност на запасената в средата енергия, интегрирана по изминатото от импулса разстояние. Тъй като първият член на тази сума е постоянен, а вторият расте линейно с надлъжната координата, повърхнинната плътност на енергията на импулса също расте линейно.

Повърхнинната плътност на входната енергия е най-голяма в оста на снопа и намалява в периферията му. Затова, в условия на насищане, усилването на повърхнинната плътност на енергията е по-малко по оста на снопа отколкото по периферията му. Това е показано на фиг. 3.8.5 чрез съпоставка на повърхнинната плътност на входната и на изходната енергия, като функции на радиалната координата, поотделно нормирани към максималните им стойности.

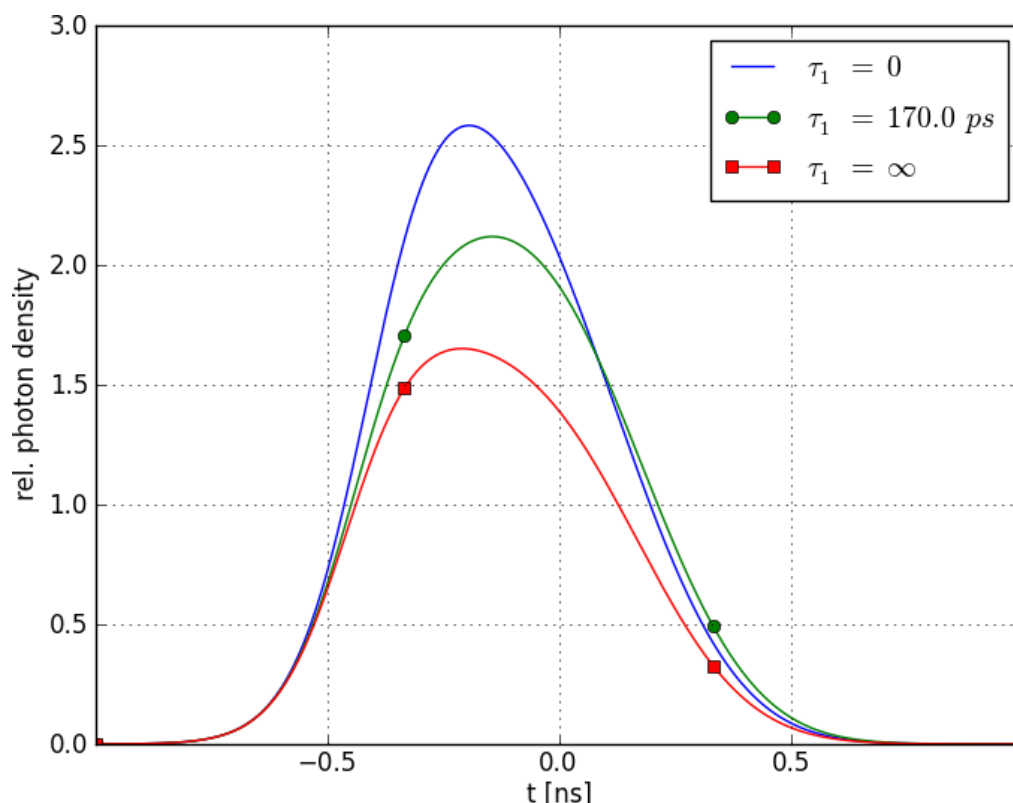


Фиг. 3.8.5: Радиална зависимост на повърхнинната плътност на енергията на входния и изходния импулси, нормирана към максималната ѝ стойност (с  $r$  е отбелязана радиалната координата).

Нека разгледаме влиянието на крайното време на живот на долното лазерно състояние върху усилването на импулса. На фиг. 3.8.6 е показана изходната плътност на фотоните на три импулса, получени чрез усилване на един и същи входен импулс от



активни среди с еднаква дължина и начална инверсна населеност, но с различно време на живот на долното лазерно състояние.



Фиг. 3.8.6: Влияние на времето на живот на долното лазерно състояние върху времевата форма на изходния импулс в оста на снопа.

Напълно очаквано, усилването е различно в трите случая. Разликата е най-съществена при продължителност на входния импулс, съизмерима с времето на живот на долното лазерно състояние. Когато продължителността на входния импулс е много по-малка или много по-голяма от това време, формата на изходния импулс клони към тази на импулса, усилен съответно от система с три нива и от идеална система с четири нива.

При продължителност на входния импулс, съизмерима с времето на живот на долното лазерно състояние, е възможно част от задния фронт на импулса да бъде усилена повече отколкото в идеална система с четири нива, а максимумът на импулса да бъде отместен по-малко (фиг. 3.8.6). Причината е следната. При усилване на предния фронт на импулса, поради заселването на долното лазерно състояние, в сравнение със случая на идеална система с четири нива, инверсната населеност и усилването са по-малки, а горното лазерно състояние се обезселва по-малко. При усилването на задния фронт на импулса, долното лазерно състояние се обезселва (фиг. 3.8.1), инверсната населеност нараства (фиг. 3.8.2), и усилването е по-голямо отколкото в случая на идеална система с четири нива.

### 3.9 Оптимизиране на лазерен усилвател

В тази част прилагаме създадения в тази теза модел за да оптимизираме лазерен усилвател на единични импулси. Изходните характеристики, които максимизираме, са:

- енергията на изходния лазерен импулс
- ефективността на извличане на енергията, запасена в активната среда (разликата между изходната и входната енергия, отнесена към запасената в активната среда енергия)
- оптично-оптичната ефективност на усилвателя (разликата между изходната и входната енергия, отнесена към енергията на напompващия оптичен импулс)

Търсим оптималните стойности на параметрите на усилвателя, при които горните величини са максимални. Параметрите, които оптимизираме, са:

- параметрите на напompващата система – продължителност и мощност на напompващия оптичен импулс
- геометричните параметри на усилвателя – диаметър на активната среда и диаметър на входния лазерен сноп

При това, търсим оптималните стойности на горните параметри само в такава тяхна област, в която са изпълнени следните условия:

- усилената спонтанна емисия по време на напompването намалява получената инверсна населеност с не повече от 10 %
- повърхнинната плътност на изходната енергия в оста на снопа (където тя е максимална) е под прага на разрушение на антиотражателното покритие на активната среда

Активната среда на оптимизирания от нас усилвател е с дължина 50 mm. Напompващата система е с ефективност 50 %. Входният импулс е с продължителност 1 ns (на ниво 1/2) и енергия 1 mJ. Считаме, че прагът на разрушение на антиотражателното покритие на активната среда е  $0.95 \text{ J/cm}^2$ .

#### 3.9.1 Оптимизиране на напompващата система

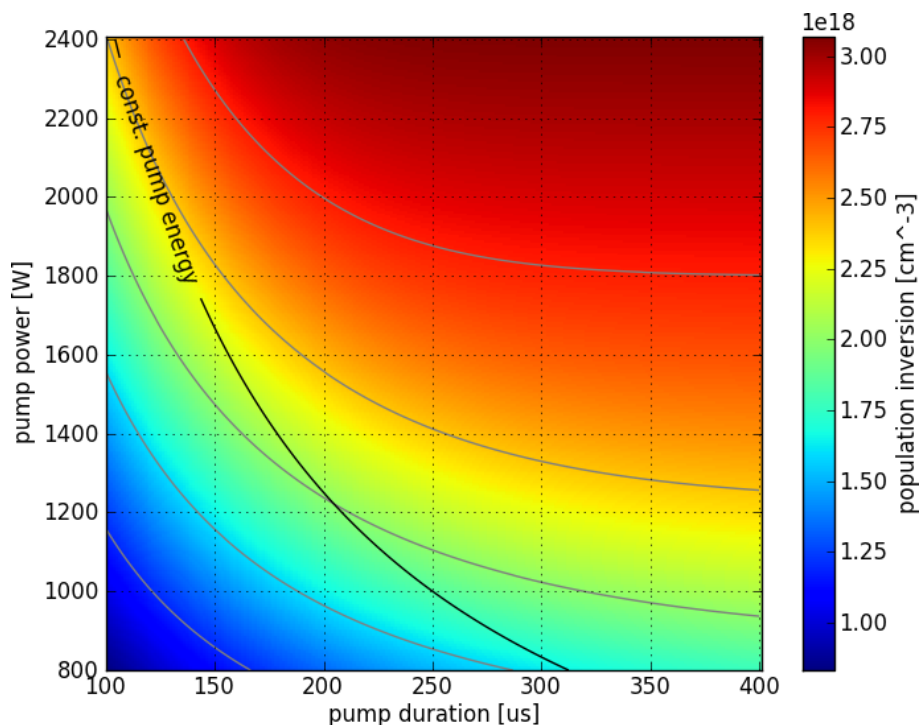
За да оптимизираме напompващата система, варираме продължителността и мощността на напompващия импулс, търсейки тези техни стойности, при които изходните характеристики на усилвателя са максимални. Областта, в която оптимизираме параметрите на напompващата система, е:

- продължителност на напompващия оптичен импулс:  $100 \mu\text{s} \div 400 \mu\text{s}$
- мощност на напompващия оптичен импулс:  $800 \text{ W} \div 2400 \text{ W}$

Геометричните параметри са постоянни и имат следните стойности:

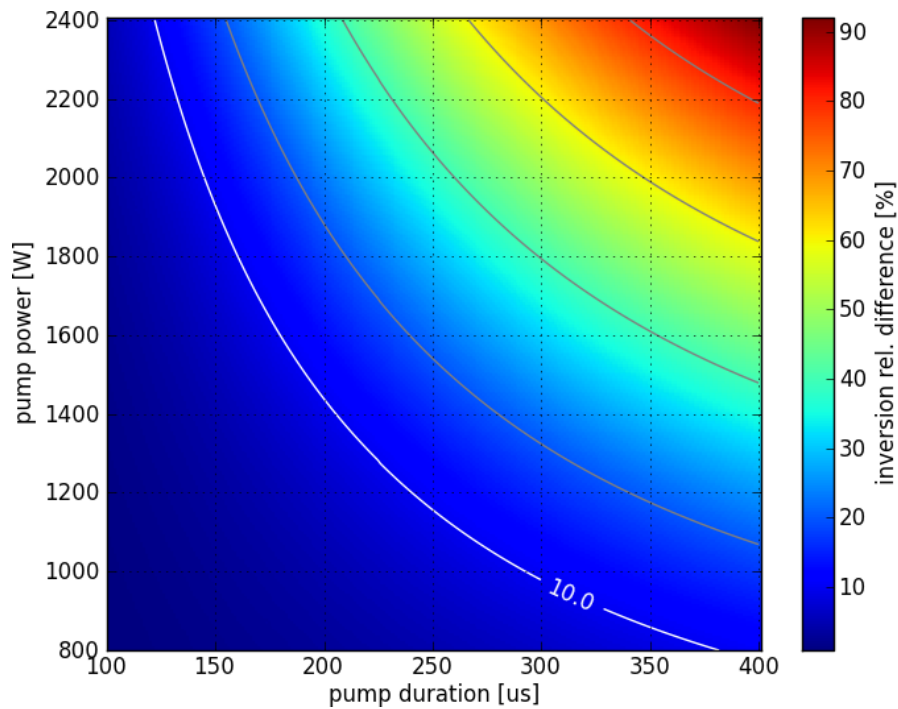
- диаметър на активната среда: 2 mm
- диаметър на входния лазерен сноп (на ниво  $1/e^2$ ): 2 mm

Инверсната населеност, получена при напмпването на активната среда, в зависимост от оптимизираните параметри, е показана на фиг. 3.9.1.



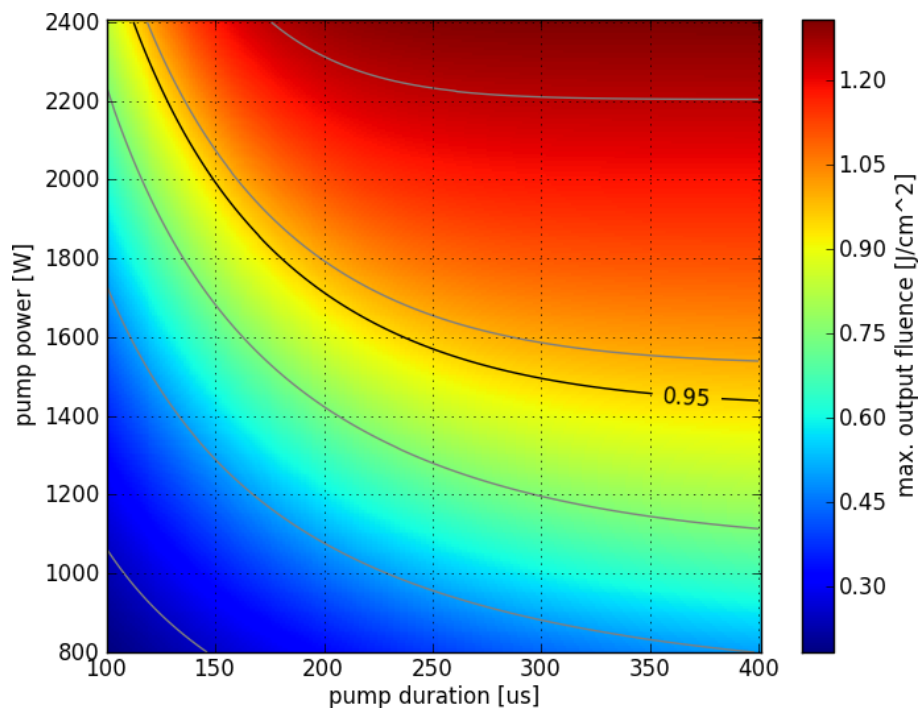
Фиг. 3.9.1: Инверсна населеност, получена при различни условия на напмпване на активната среда.

В разглежданата област на оптимизираните параметри, контурите на постоянна инверсна населеност пресичат контурите на постоянна енергия на напмпващия импулс. При една и съща енергия на напмпването, по-голяма инверсна населеност получаваме когато енергията на напмпващия импулс е разпределена в по-кратък времеви интервал. Причината е, че при голяма продължителност на напмпването нарастват загубите на запасената в активната среда енергия вследствие на усилената спонтанна емисия. Относителната грешка в инверсната населеност, внесена при пренебрегване на влиянието на този процес, е показана на фиг. 3.9.2 в областта за оптимизираните параметри.



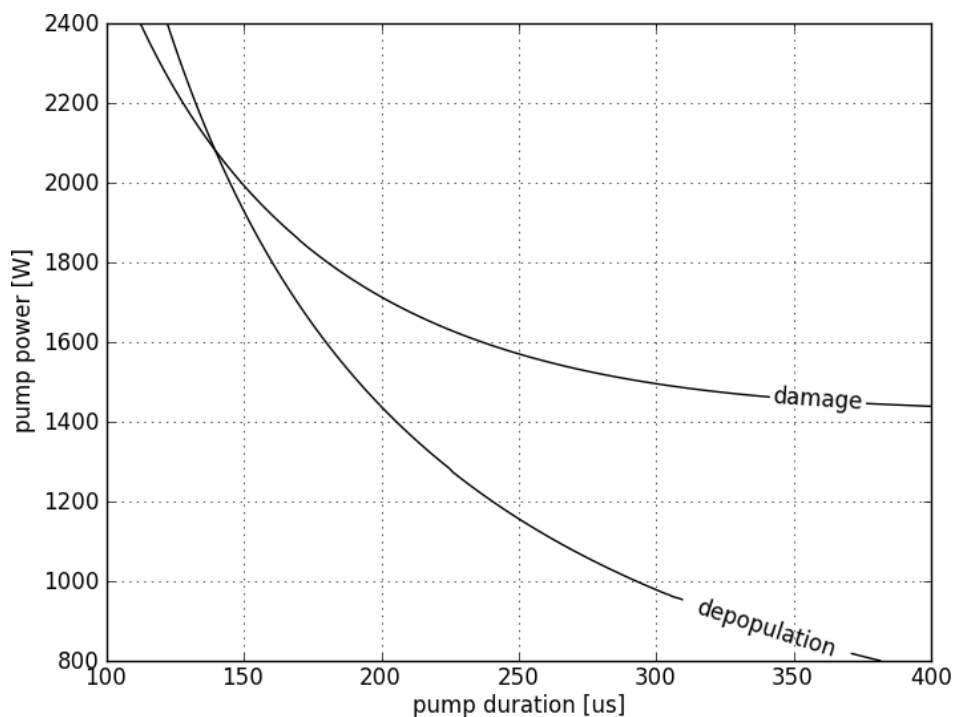
Фиг. 3.9.2: Относителна разлика между инверсната населеност, получена със и без отчитане на усилената спонтанна емисия.

Тази грешка е оценена чрез относителната разлика между инверсната населеност, получена с помощта на модела на Рос, и тази, получена без отчитане на усилената спонтанна емисия. От показаната на горната фигура зависимост намираме подобластта на оптимизираните параметри, при които влиянието на усилената спонтанна емисия върху инверсната населеност е не по-голямо от максималното допустимо. За да намерим и подобластта на оптимизираните параметри, при които максималната повърхнинна плътност на изходната енергия е под прага на разрушение, нека разгледаме фиг. 3.9.3.



Фиг. 3.9.3: Повърхнинна плътност на изходната енергия в оста на снопа.

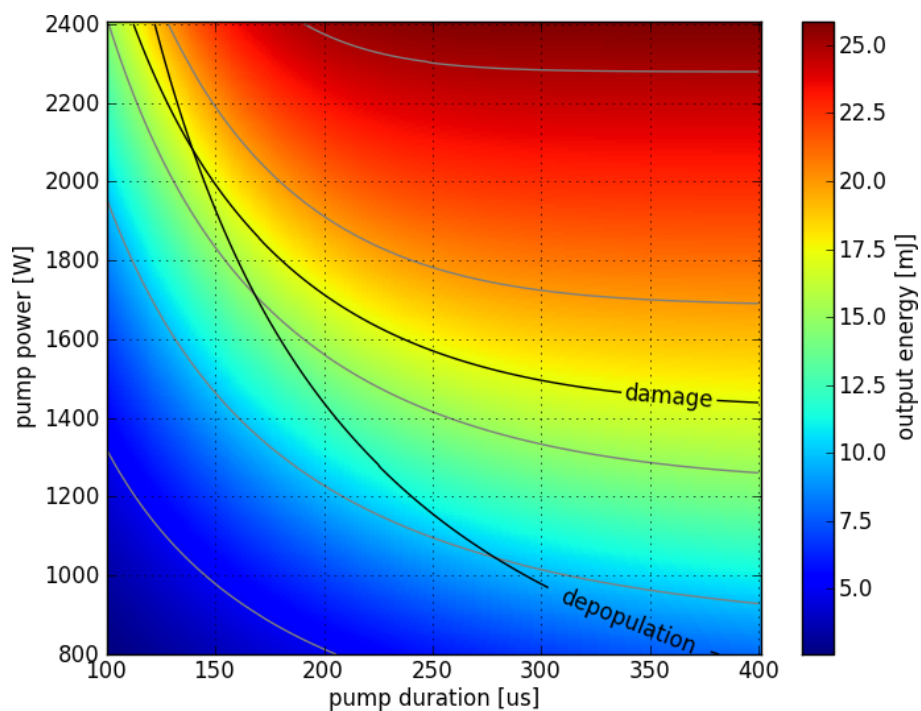
От показаните на последните две фигури зависимости намираме подобластта на оптимизираните параметри, при които са изпълнени и двете наложени ограничения. Контурите, определящи тази подобласт, са показани на фиг. 3.9.4.



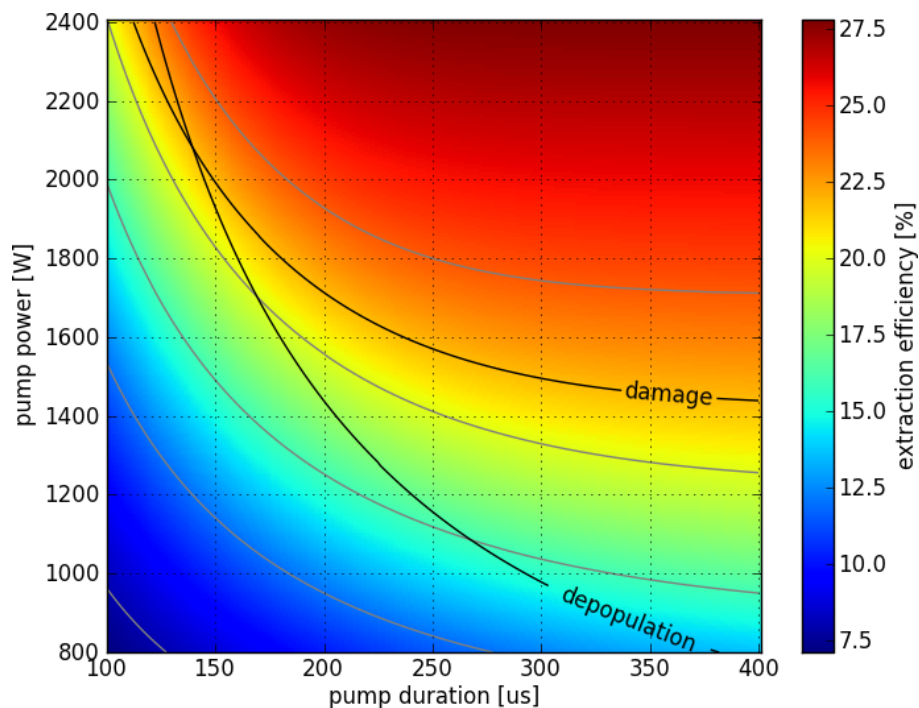
Фиг. 3.9.4: Контури, определящи разрешената подобласт на параметрите на напмпващата система.

Разрешената подобласт е множеството точки, съответстващи на мощност и продължителност на напмпването, по-малки от тези, определени от двата контура.

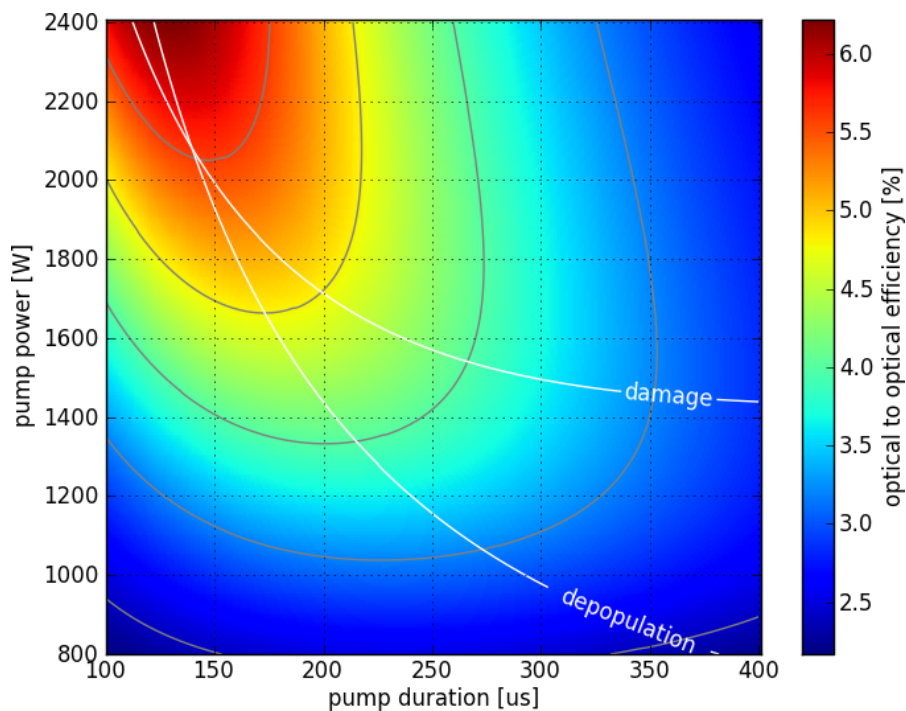
Резултатите за изходната енергия, ефективността на извличане на енергията и оптично-оптичната ефективност, в зависимост от оптимизираните параметри, са показани на фиг. 3.9.5, 3.9.6 и 3.9.7. За получаването на тези зависимости, запасената в активната среда енергия е определена от произведението на обема на активната среда, инверсната населеност, и енергията, излъчена при преход от горно към долно лазерно състояние.



Фиг. 3.9.5: Енергия на изходния лазерен импулс.



Фиг. 3.9.6: Ефективност на извличане на енергията, запасена в активната среда.



Фиг. 3.9.7: Оптично-оптична ефективност на усилвателя.

Оптично-оптичната ефективност на усилвателя има максимум по продължителността на напмпването, при определена мощност (фиг. 3.9.7). Причината е следната. Ако продължителността на напмпването е по-малка от оптималната, малосигналното усилване намалява и сигналът извлича по-малка част от запасената в средата енергия. Ако продължителността на напмпването е по-голяма от оптималната, вследствие на обезселването на горното лазерно състояние, по-малка част от енергията

на напompващия импулс се запасява в активната среда под формата на инверсна населеност.

В общия случай, различните изходни характеристики са максимални в различни точки от разглежданата подобласт. Затова не е възможно едновременното максимизиране на всички тези характеристики. Максималните стойности на изходните характеристики, както и оптималните стойности на параметрите на напompващата система, са посочени в таблица 3.9.1.

изходна характеристика	максимална стойност	продължителност на напompването	мощност на напompването
изходна енергия	$17.3 \text{ mJ} \pm 0.8 \text{ mJ}$	$139 \text{ } \mu\text{s}$	2086 W
ефективност на извличане	$22 \% \pm 1 \%$	$139 \text{ } \mu\text{s}$	2086 W
оптично-оптична ефективност	$6.1 \% \pm 0.3 \%$	$112 \text{ } \mu\text{s}$	2400 W

Таблица 3.9.1: Оптимални параметри на напompващата система и максимални изходни характеристики на усилвателя.

### 3.9.2 Оптимизиране на геометрията на усилвателя

Подходът за оптимизиране на геометрията на усилвателя е почти същият като този за оптимизиране на напompващата му система. Единствената принципна разлика е, че инверсната населеност, получена при напompването на активната среда, зависи само от единия оптимизиран параметър (диаметъра на активната среда).

Областта, в която оптимизираме геометрията на усилвателя, е:

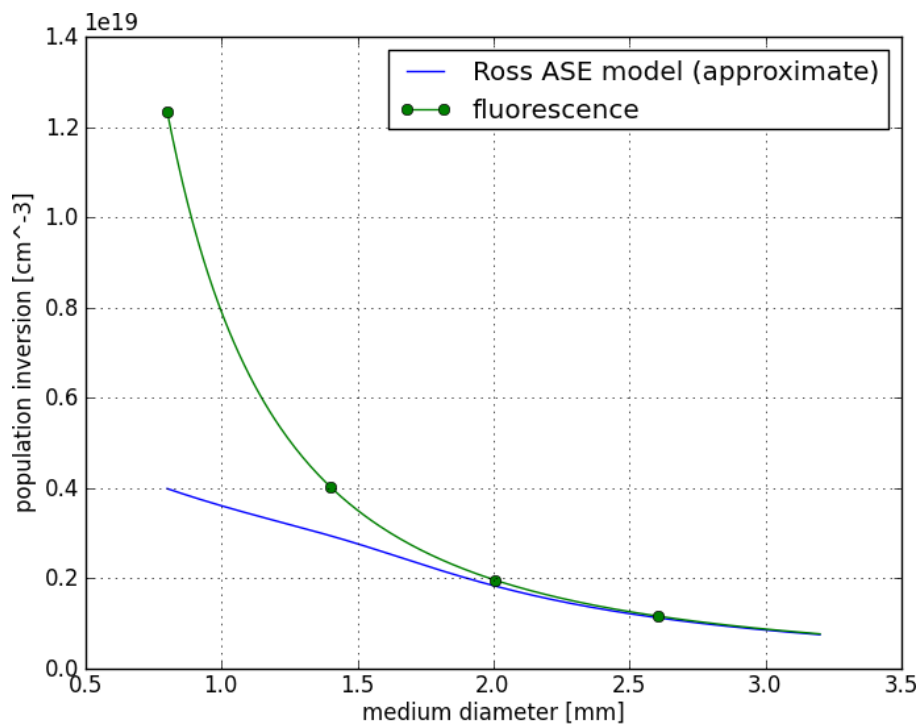
- диаметър на активната среда:  $0.8 \text{ mm} \div 3.2 \text{ mm}$
- диаметър на входния лазерен сноп (на ниво  $1/e^2$ ):  $0.8 \text{ mm} \div 3.2 \text{ mm}$

Параметрите на напompващата система имат следните стойности:

- продължителност на напompващия оптичен импулс:  $250 \text{ } \mu\text{s}$
- мощност на напompващия оптичен импулс: 1 kW

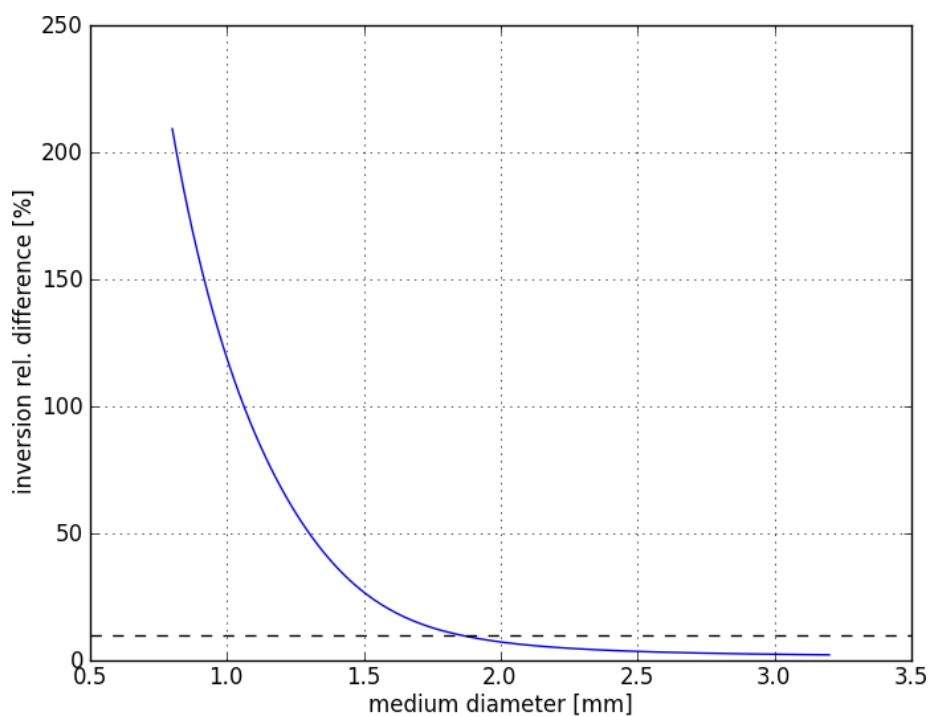
Зависимостта на получената при напompването инверсна населеност от диаметъра на активната среда е показана на фиг. 3.9.8, при отчитане и при пренебрегване на усилената спонтанна емисия.





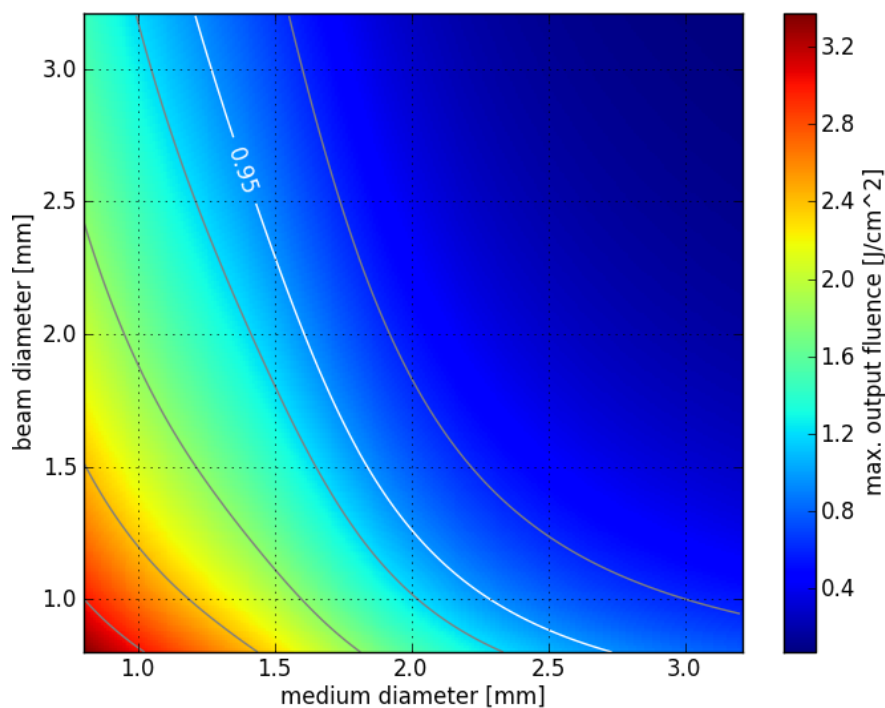
Фиг. 3.9.8: Инверсна населеност, получена при различни диаметри на активната среда.

И в двата случая инверсната населеност расте при намаляване на диаметъра, тъй като енергията на погълнатото напompващо лъчение е разпределена в по-малък обем. На фиг. 3.9.9 е показана относителната грешка в инверсната населеност, внесена при пренебрегване на усилената спонтанна емисия.



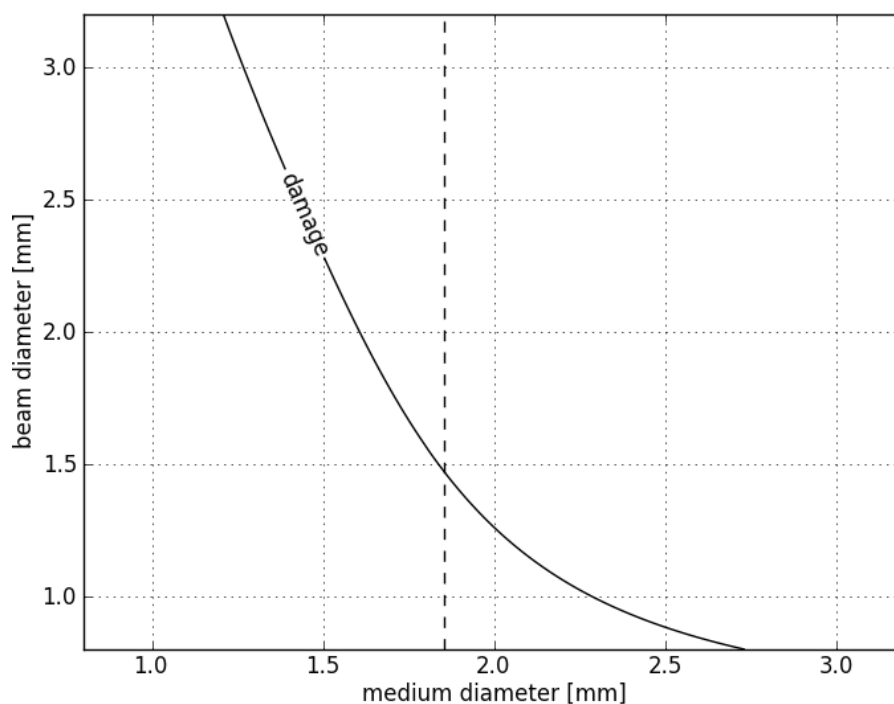
Фиг. 3.9.9: Относителна разлика между инверсната населеност, получена със и без отчитане на усилената спонтанна емисия.

От показаната на горната фигура зависимост намираме подобластта за диаметъра на активната среда, при който влиянието на усилената спонтанна емисия върху инверсната населеност е не по-голямо от максималното допустимо. За да намерим подобластта на двата оптимизирани параметъра, при които максималната повърхнинна плътност на изходната енергия е под прага на разрушение, нека разгледаме фиг. 3.9.10.



Фиг. 3.9.10: Повърхнинна плътност на изходната енергия в оста на снопа.

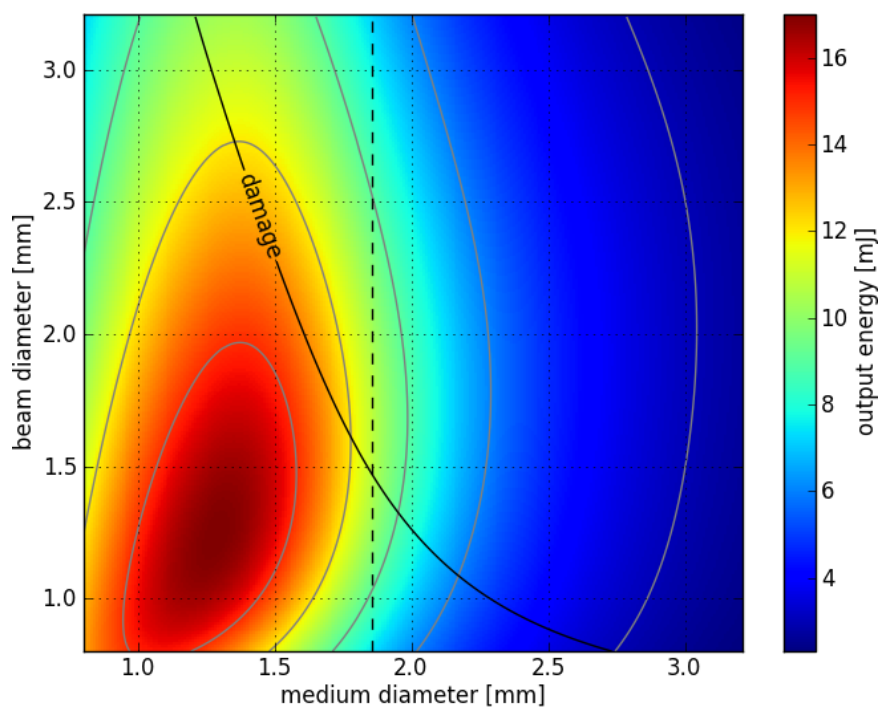
От показаните на последните две фигури зависимости намираме подобластта на оптимизирани параметри, при които са изпълнени и двете наложени ограничения. Контурите, определящи тази подобласт, са показани на фиг. 3.9.11.



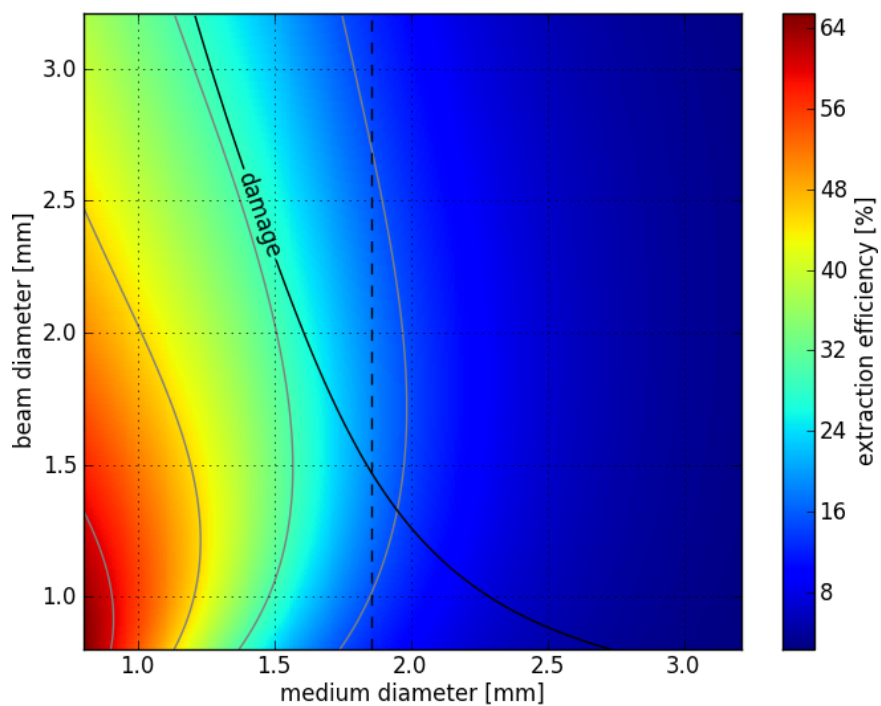
Фиг. 3.9.11: Контури, определящи разрешената подобласт за параметрите на напмпващата система.

Разрешената подобласт е множеството точки, съответстващи на диаметър на активната среда, по-голям от критичния за допустимото влияние на усилената спонтанна емисия, и на диаметър на активната среда и на снопа, по-големи от тези, определени от контура, отговарящ на прага на разрушение.

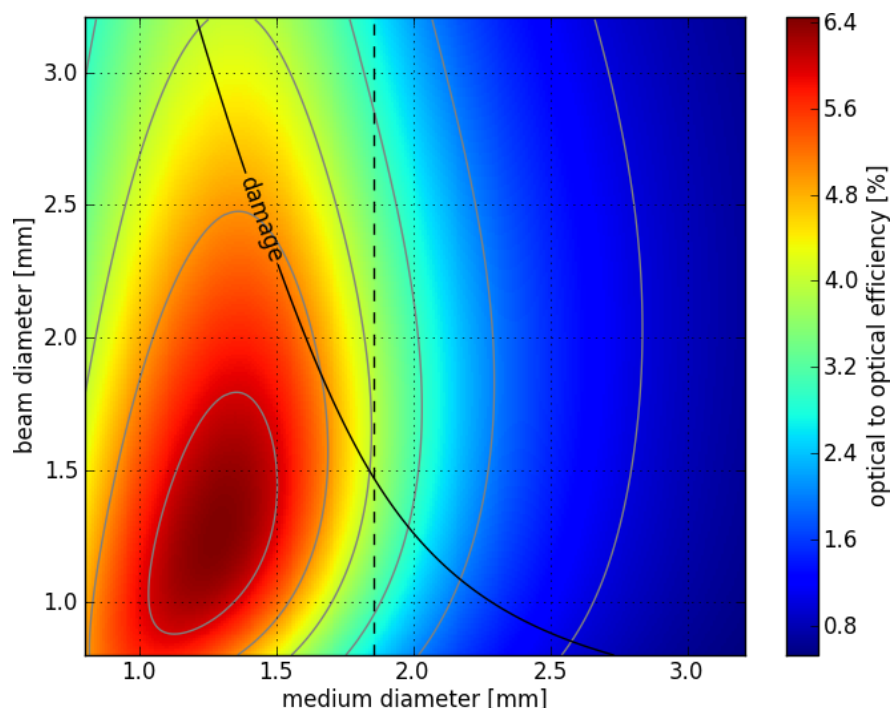
Резултатите за изходната енергия, ефективността на извличане на енергията и оптично-оптичната ефективност, в зависимост от оптимизираните параметри, са показани на фиг. 3.9.12, 3.9.13 и 3.9.14.



Фиг. 3.9.12: Енергия на изходния лазерен импулс.

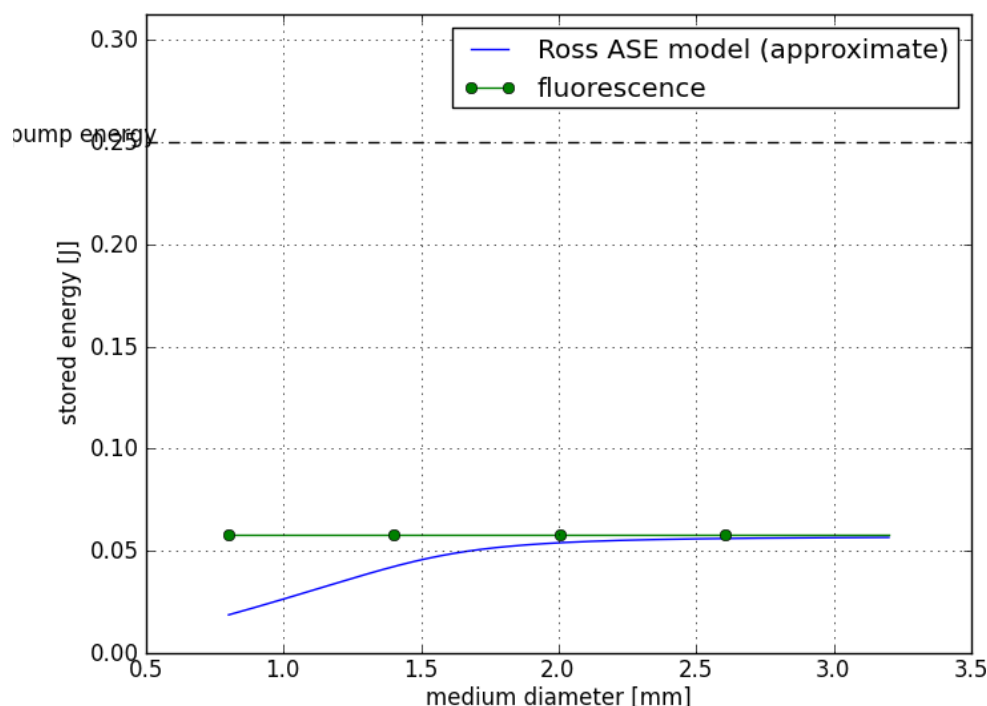


Фиг. 3.9.13: Ефективност на извличане на енергията, запасена в активната среда.



Фиг. 3.9.14: Оптично-оптична ефективност на усилвателя.

В разглежданата област на оптимизираните параметри, изходната енергия и оптично-оптичната ефективност имат максимум и по двата оптимизирани параметъра. Причината да се наблюдава максимум по диаметъра на снопа е следната. Ако снопът е твърде широк, в активната среда постъпва само малка част от енергията на импулса. От друга страна, ако снопът е твърде тесен, енергията на импулса е съсредоточена около оста на снопа и импулсът извлича енергията, запасена само в тази област от обема на активната среда. Причината да се наблюдава максимум на изходната енергия по диаметъра на активната среда е следната. Ако активната среда е с твърде голям диаметър, запасената в нея енергия е разпределена в по-голям обем. Тогава инверсната населеност, и следователно усилването, е по-малко. От друга страна, ако активната среда е с твърде малък диаметър, макар инверсната населеност да расте, запасената в активната среда енергия намалява. Това е показано на фиг. 3.9.15.



Фиг. 3.9.15: Зависимост на запасената в активната среда енергия от нейния диаметър.

От своя страна, причината за това поведение на запасената енергия е, че при намаляване на диаметъра на активната среда, и следователно на нейния обем, нараства инверсната населеност, и следователно силно нараства скоростта на обезселване на горното лазерно състояние вследствие на усилената спонтанна емисия.

В общия случай, различните изходни характеристики са максимални в различни точки от разглежданата подобласт. Затова не е възможно едновременното максимизиране на всички тези характеристики. Максималните стойности на изходните характеристики, както и оптималните стойности на параметрите на геометрията на усилвателя, са посочени в таблица 3.9.2.

изходна характеристика	максимална стойност	диаметър на активната среда	диаметър на входния сноп
изходна енергия	10.8 mJ $\pm$ 0.4 mJ	1.85 mm	1.63 mm
ефективност на извличане	19 % $\pm$ 1 %	1.85 mm	1.66 mm
оптично-оптична ефективност	4.0 % $\pm$ 0.2 %	1.85 mm	1.66 mm

Таблица 3.9.2: Оптимални геометрични параметри и максимални изходни характеристики на усилвателя.

### 3.10 Изследвания на усиляването на серии от лазерни импулси

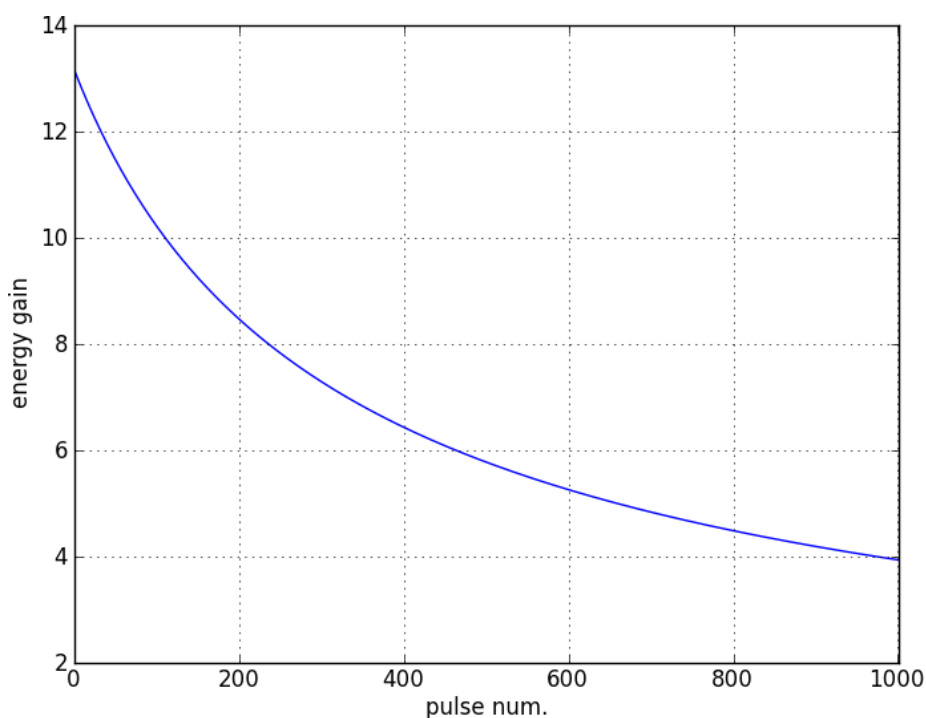
В тази част изследваме усиляването на серии от пикосекундни лазерни импулси с микросекундна продължителност. Използваме следните параметри на усилвателя и на входния сигнал:

- активна среда с дължина 100 mm и диаметър 4 mm

- напмпващ оптичен импулс с продължителност 250  $\mu$ s и мощност 4 kW; ефективност на напмпващата система: 50 %
- входен лазерен сноп с диаметър 4 mm (на ниво  $1/e^2$ ); входни импулси с продължителност 6 ps (на ниво  $1/2$ ) и енергия 20  $\mu$ J
- серия от 1000 входни импулса с период на повторение 1ns

Общата изходна енергия, която бихме получили при горните параметри на усилвателя, когато цялата входна енергия е съсредоточена в един микроимпулс, е  $82 \text{ mJ} \pm 3 \text{ mJ}$ . Когато входната енергия е разпределена в серия от микроимпулси с горните параметри, изходната енергия е  $113 \text{ mJ} \pm 4 \text{ mJ}$ . Докладваните грешки в изходната енергия включват числената грешка в инверсната населеност, получена при напмпването на активната среда. Причината за тази разлика в изходната енергия е обезселването на долното лазерно състояние във времето между импулсите от серията. Това обезселване увеличава инверсната населеност и, следователно, усилването на енергията.

Нека разгледаме разпределението на изходната енергия в отделните микроимпулси. То е показано на фиг. 3.10.1.



Фиг. 3.10.1: Усилване на енергията на отделните микроимпулси от серията.

Усилването намалява монотонно за всеки следващ импулс от серията, поради извличането на част от запасената в активната среда енергия при преминаването на всеки отделен импулс. Така инверсната населеност, във всяка точка от обема на активната среда, намалява след всеки усилен импулс.

Затова, при проектирането на лазерен усилвател на серии от импулси, намаляването на разликата в усилването на отделните микроимпулси става за сметка

на ефективността на извличане на запасената в активната среда енергия. Например, резултатите от нашите числени експерименти показват, че при усилване на серия от импулси, всеки от които е с входна енергия  $1 \mu\text{J}$ , и еднакви други условия, относителното понижение на усилването (разликата между усилването на енергията на първия и последния импулси, отнесена към усилването на енергията на първия импулс) намалява от 70 % до 12 %. Същевременно ефективността на извличане на енергията намалява от 44 % до 4.5 %.



## 4 Заключение

В заключение, извършеното в настоящата магистърска теза може да се обобщи както следва:

- Изучен е математическият модел на разпространението на импулси в лазерен усилвател с четири нива и крайно време на живот на долното лазерно състояние.
- Изучени са и са анализирани различни математически модели на усилената спонтанна емисия в активна среда с инверсна населеност.
- Създаден е числен модел на усилената спонтанна емисия.
- Създадени са числени модели на напompването на активната среда и на разпространението на импулси с помощта на известни от литературата числени методи.
- Направен е анализ на устойчивостта и физическата смисленост на числените решения.
- Създадена е и е изследвана оригинална схема за числено решаване на уравненията, описващи разпространението на импулси, пораждаща безусловно устойчиви и физически смислени решения.
- Направен е анализ на числената грешка, внесена в отделните междинни резултати от изчисленията, и са създадени методи за контролирането ѝ.
- Направен е анализ на междинните числени резултати. Извършена е проверка на модела чрез сравнение на крайните числени резултати с експериментални данни.
- Създаденият числен модел е приложен за оптимизация на напompващата система и геометрията на лазерен усилвател на единични импулси.
- Изследвано е усиляването на микросекундни серии от пикосекундни импулси и е направен анализ на резултатите.

## 5 Литература

1. D. Hwang, S. Ryu, N. Misra, H. Jeon, C. P. Grigoropoulos, “Nanoscale laser processing and diagnostics”, *Applied Physics A: Materials Science & Processing* **96**, 289-306 (2009)
2. M. Ostermeyer, P. Kappe, R. Menzel, V. Wulfmeyer, “Diode-pumped Nd:YAG master oscillator power amplifier with high pulse energy, excellent beam quality, and frequency-stabilized master oscillator as a basis for a next-generation lidar system”, *Applied Optics* **44**, 582-590 (2005)
3. T. Debuisschert, “Nanosecond optical parametric oscillators”, *Quantum and Semiclassical Optics* **9**, 209 (1997)
4. W. Koechner, “Solid-State Laser Engineering”, 6<sup>th</sup> ed., Springer (2006)
5. O. Svelto, “Principles of Lasers”, 5<sup>th</sup> ed., Springer (2009)
6. L. M. Frantz, J. S. Nodvik, “Theory of Pulse Propagation in a Laser Amplifier”, *Journal of Applied Physics* **34**, 2346-2349 (1963)
7. G. J. Linford, E. R. Peressini, W. R. Sooy, M. L. Spaeth, “Very Long Lasers”, *Applied Optics* **13**, 379-390 (1974)
8. P. A. Schulz, K. F. Wall, R. L. Aggarwal, “Simple model for amplified spontaneous emission in a Ti:Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> amplifier”, *Optics Letters* **13**, 1081-1083 (1988)
9. I. N. Ross, M. Csatári, S. Hutchins, “High-performance diode-pumped Nd:YLF amplifier”, *Applied Optics* **42**, 1040-1047 (2003)
10. I. N. Ross, S. J. Hutchins, “A Laser System Design for the Photo-injector Option for the CERN Linear Collider”, *CERN/PS/PP Central Laser Facility Annual Report 2000/2001*, 184-187
11. C. Bibeau, S. A. Payne, H. T. Powell, “Direct measurements of the terminal laser level lifetime in neodymium-doped crystals and glasses”, *Journal of the Optical Society of America B* **12**, 1981-1992 (1995)
12. R. Paschotta, “Encyclopedia of Laser Physics and Technology”, Wiley-VCH (2008)
13. T. S. Lomheim, L. G. DeShazer, “New procedure of determining neodymium fluorescence branching ratios as applied to 25 crystal and glass hosts”, *Optics Communications* **24**, 89-94 (1978)
14. W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, “Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing”, 3<sup>rd</sup> ed., Cambridge University Press (2007)
15. Y. Y. Lu, “Numerical Methods for Differential Equations”, City University of Hong Kong, <http://math.cityu.edu.hk/~mayylu/ma3514/3514.pdf> (April 23, 2012)
16. R. E. Mickens, “Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes”, World Scientific (2000)

## **Приложение А    Контрол на числената грешка и определяне на параметрите на дискретизация**

Моделът в настоящата магистърска теза е създаден за практически цели. Затова, едно от изискванията към него е параметрите на дискретизация на решаваните задачи да не се въвеждат ръчно, а да се определят автоматично, в зависимост от:

- параметрите на усилвателя
- параметрите на входния сигнал
- максималната допустима грешка в числените решения на отделните задачи

Освен това, някои от изчисленията биха могли да се извършват с помощта на повече от един алтернативни методи. За пресмятане на един и същи резултат, най-ефективният метод (изискващ най-малко количество памет) може да бъде различен, в зависимост от физическите параметри (на усилвателя и на входния сигнал). Затова, допълнително изискване към създадения в тази теза модел е, при дадени входни параметри, да се определя автоматично комбинацията от методи, които са най-ефективни за пресмятане на отделните резултати.

По този начин се увеличава ефективността на провеждане на изследвания с помощта на модела. При всяка промяна на входните параметри, вместо параметрите на дискретизация и комбинацията от използвани методи да се определят ръчно, това се извършва от компютъра.

Нека разгледаме грешката в числените резултати, получени с помощта на нашия модел. Считаме, че физическите параметри на задачите са точно определени. Пренебрегваме грешката вследствие на направените опростяващи предположения. Освен това, пренебрегваме числената грешка от закръгляне, тъй като, при извършването в програмното изпълнение на модела изчисления, тя е малка в сравнение с другите компоненти на грешката, и нямаме голям контрол върху нея.

Крайният резултат, пресмятан с помощта на нашия модел, е изходната енергия на серията от усилен импулси. Пресмятането на този резултат се извършва в няколко последователни стъпки. Приближенията и изчисленията във всяка от тези стъпки внасят крайна грешка спрямо точния резултат. Тези стъпки са:

- Пресмятане на скоростта на обезселване на горното лазерно състояние. Внасяме грешка единствено когато пресмятаме скоростта на обезселване по начина, описан в част §3.2. Резултатите от другите модели се пресмятат точно.
- Числено пресмятане на инверсната населеност при напompването на активната среда. Грешката, внесена в тази стъпка, се дължи както на грешката от прекъсване (вследствие на апроксимирането на безкраен ред на Тейлър чрез краен брой членове) при численото решаване на

диференциалното уравнение, така и на грешката в скоростта на обезселване, внесена в горната стъпка.

- Дискретизация на областта, в която търсим решенията на задачата за разпространението на импулси. Изчислителният прозорец е с крайна продължителност, а времевият интервал, в който плътността на фотоните на входните импулси е различна от нула, в общия случай е безкраен. Така внасяме грешка като пренебрегваме част от енергията на входните импулси.
- Числено пресмятане на решенията на задачата за разпространението на лазерни импулси. Грешката от прекъсване, внесена при изчисленията за разпространението на един импулс от серията, оказва влияние върху грешката за следващия импулс.
- Числено интегриране на изходната плътност на фотоните по продължителността на импулса.
- Числено интегриране на повърхнинната плътност на изходната енергия по апертурата на активната среда.
- Числено интегриране на инверсната населеност по дължината на активната среда. Тази стъпка се изпълнява само при оценката на грешката, внесена в друга стъпка, и ще бъде изяснена по-късно.

В следващите части на това приложение ще разгледаме поотделно контрола на грешката във всяка от тези стъпки, зависимостта на грешката в крайния резултат от тази, внесена в отделните междинни стъпки, както и избора на най-ефективната комбинация от числени методи.

## **A.1 Грешка при численото пресмятане на мощността на усилената спонтанна емисия**

Пресмятането на скоростта на обезселване на горното лазерно състояние би могло да внесе грешка, когато се извършва по начина, описан в част §3.2. В останалите случаи резултатът се пресмята директно и е точен. При численото му пресмятане, приблизителната оценка на грешката във величината  $B$  от модела на Рос е дадена в уравнение (3.2.3). От израза за скоростта на обезселване в уравнение (3.1.3), използвайки означенията в част §3.2, за относителната грешка в скоростта на обезселване получаваме:

$$\frac{\Delta R_{Ross}}{R_{Ross}} \approx \frac{\sqrt{\frac{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}{N}}}{1 + B} \quad (A.1)$$

За да сведем тази грешка до предварително зададената максимална допустима относителна грешка е необходимо да пресмятаме величината  $B$  с достатъчно голям брой точки  $N$ . Тъй като не е възможно предварително да определим минималния брой точки, правим пресмятания с прогресивно нарастващ брой точки, докато след някое пресмятане не получим относителна грешка, по-малка от максималната допустима. Използваме геометрична прогресия (с частно 8) на броя точки.

## A.2 Грешка при пресмятането на инверсната населеност при напмпването на активната среда

Факторите, които оказват влияние върху грешката в численото решение за инверсната населеност, са два:

- грешката от прекъсване, внесена при численото решаване на скоростното уравнение (2.5.1)
- крайната точност, с която е определена времевата производна на инверсната населеност

Без да пренебрегваме напълно грешката във времевата производна на инверсната населеност, считаме, че тя е достатъчно малка, така, че решенията за инверсната населеност са сходящи в границите на допустимата грешка. Тогава, за да осигурим желаната точност, бихме могли да пресмятаме решения с прогресивно нарастващ брой стъпки, докато относителната разлика между инверсната населеност в последната стъпка на две последователни решения не стане по-малка от максималната допустима относителна грешка. За пресмятането на всяко следващо решение използваме времева стъпка, двойно по-малка от тази за предходното решение. Разбира се, във всяка стъпка на решенията е необходимо да проверяваме дали са изпълнени условията от неравенства (3.4.1) и (3.4.2). Извършваме сравнението на два последователни резултата само ако и двете решения отговарят на тези условия.

Да разгледаме оценката на влиянието, което грешката във времевата производна на инверсната населеност оказва върху численото решение. Когато пресмятаме числено скоростта на обезселване, явният вид на производната не ни е известен предварително. Това прави невъзможна аналитичната оценка на влиянието на нейната грешка. Бихме могли да направим оценката числено, чрез пертурбация на скоростта на обезселване. За тази цел е необходимо да намерим второ решение за инверсната населеност. При пресмятането му, пертурбираме скоростта на обезселване с допустимата за нея грешка. С други думи, сравняваме два резултата за инверсната населеност – един, получен чрез числено решаване на уравнение (2.5.1), и друг, получен чрез числено решаване на следното уравнение:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{1}{V} \frac{P_p}{h\nu_p} \eta_p - (1 - \varepsilon_{rR}) R_{Ross}(n) \quad (A.2)$$

където  $\varepsilon_{rR}$  е максималната допустима относителна грешка в скоростта на обезселване. Пертурбацията на скоростта на обезселване взимаме отрицателна, защото това води до по-голямо отклонение на решението. Тогава, имайки предвид, че и двете крайни инверсни населености  $n_0$  и  $n_{0p}$ , съответно на непертурбираното и на пертурбираното решения, са получени с дадена относителна грешка  $\varepsilon_{rP}$ , то за абсолютната грешка в крайната инверсна населеност получаваме:

$$\Delta n_0 = |n_{0p} - n_0| + (n_{0p} + n_0) \varepsilon_{rP} \quad (A.3)$$

### **A.3 Грешка от крайната продължителност на изчислителния прозорец**

В общия случай, плътността на фотоните на входните импулси би могла да бъде различна от нула в безкраен времеви интервал (при гаусова и други характерни форми на лазерни импулси). Но при численото моделиране е възможно да представяме функции само в краен брой точки, и следователно в крайни интервали. Затова пренебрегваме плътността на фотоните извън разглеждания краен времеви интервал, внасяйки грешка в изходната плътност на енергията. Относителната грешка, която внасяме, е:

$$\varepsilon_{rT} = \frac{E_0 - E_{0T}}{E_0} \quad (\text{A.4})$$

където  $E_0$  е енергията на входния импулс в безкраен времеви интервал, а  $E_{0T}$  е неговата енергия в крайния времеви интервал, който разглеждаме. Следователно, за да осигурим желаната точност, намираме и използваме такава продължителност на изчислителния прозорец, при която относителната грешка, внесена в тази стъпка, да бъде по-малка от максималната допустима.

### **A.4 Грешка при численото интегриране на плътността на фотоните по продължителността на импулса**

Численото интегриране на плътността на фотоните по продължителността на импулса се извършва с помощта на някой от методите, споменати в част §3.3. Методът на Ромберг изисква броят на стъпките по времето да бъде:

$$K = 2^{k_k} + 1 \quad (\text{A.5})$$

където  $k_k$  е цяло положително число.

Намирането на минималния брой времеви стъпки, необходим за постигане на определена точност при интегрирането, е затруднено, тъй като точното решение за плътността на фотоните, при крайно време на живот на долното лазерно състояние, не ни е известно. Затова бихме могли да намерим минималния брой стъпки за някои крайни случаи, за които са ни известни точните решения, и да считаме, че най-големият получен брой стъпки е достатъчен за интегриране с желаната точност и на численото решение. Крайните случаи, за които търсим необходимия брой стъпки, са:

- Експоненциално усилен импулс. Изходната плътност на фотоните се равнява на входната, умножена по малосигналното усиление. Това съответства на усиление на сигнал с много ниска енергия.
- Точното решение за плътността на фотоните на изходния импулс в случая на система с три нива. Това съответства на усиление на импулси в активна среда с безкрайно време на живот на долното лазерно състояние.
- Точното решение за плътността на фотоните на изходния импулс в случая на идеална система с четири нива. Това съответства на усиление на импулси в активна среда с нулево време на живот на долното лазерно състояние.

Тъй като всеки импулс, преминал през активната среда, променя нейната инверсна населеност, плътността на фотоните е различна за всеки импулс от серията. При оценката на минималния брой стъпки, за начална инверсна населеност вземаме тази, която сме получили при напомпването на средата. Оценяваме плътността на фотоните в оста на снопа, където тя е най-голяма, а насищането на усилването и промяната на времевата форма на изходния импулс са най-силно изразени. Считаме, че полученият по този начин минимален брой стъпки е достатъчен за числено интегриране с желаната точност на всеки от серията изходни импулси в произволна точка от напречното сечение на усилвателя.

За да намерим минималния брой времеви стъпки за всеки от горните крайни случаи, пресмятаме съответния числен интеграл с прогресивно нарастващ брой стъпки, удовлетворяващ уравнение (А.5). Считаме, че сме достигнали желаната точност, когато относителната разлика между два последователни резултата стане по-малка от максималната допустима относителна грешка.

Точните решения за плътността на фотоните в локално време, за система с три нива и за идеална система с четири нива, са:

$$\phi(z, t) = \frac{\phi_0(t)}{1 - \{1 - \exp[-\sigma \int_0^z n_0(z') dz']\} \exp[-\gamma \sigma c \int_{-\infty}^t \phi_0(t') dt']} \quad (\text{A.6})$$

#### **А.5 Грешка при численото интегриране на повърхнинната плътност на изходната енергия по апертурата на усилвателя**

Численото интегриране на повърхнинната плътност на изходната енергия по апертурата на усилвателя се извършва с помощта на някой от методите, споменати в част §3.3. Методът на Ромберг изисква броят на стъпките по напречните координати да бъде:

$$M = 2^{k_m} + 1, \quad N = 2^{k_n} + 1 \quad (\text{A.7})$$

където  $k_m$  и  $k_n$  са цели положителни числа.

Намирането на областта за параметрите на дискретизация, при които численият интеграл се пресмята с достатъчна точност, е затруднено, тъй като точната повърхнинна плътност на изходната енергия не ни е известна. Затова бихме могли да намерим тези параметри на дискретизация, при които с достатъчна точност се пресмята численият интеграл в някои крайни случаи, за които ни е известна точната повърхнинна плътност на изходната енергия, и да считаме, че тези параметри на дискретизация са достатъчни за численото интегриране с желаната точност на пресметнатата повърхнинна плътност на изходната енергия. Крайните случаи, за които търсим необходимите параметри на дискретизация, са:

- Експоненциално усилена повърхнинна плътност на енергията.  
Повърхнинната плътност на изходната енергия се равнява на повърхнинната

плътност на входната енергия, умножена по малосигналното усилване. Това съответства на усилване на сигнал с много ниска енергия.

- Сумата от повърхнинната плътност на входната енергия и половината от повърхнинната плътност на запасената в активната среда енергия. Това съответства на усилване на импулси с повърхнинна плътност на енергията, много по-голяма от тази за насищане на усилването, в активна среда с безкрайно време на живот на долното лазерно състояние.
- Сумата от повърхнинната плътност на входната енергия и цялата повърхнинна плътност на запасената в активната среда енергия. Това съответства на усилване на импулси с повърхнинна плътност на енергията, много по-голяма от тази за насищане на усилването, в активна среда с нулево време на живот на долното лазерно състояние.

Областта за параметрите  $k_m$  и  $k_n$  на дискретизация на напречните координати е двумерна. Нейното обхождане извършваме по следния алгоритъм, започвайки от минималния брой стъпки по всяка координата ( $k_m=1, k_n=1$ ):

- Пресмятаме числените интеграли за всеки от крайните случаи.
- Пресмятаме същите интеграли при увеличен брой на стъпките само по радиалната координата. Намираме най-голямата относителната разлика  $\varepsilon_\rho$  в пресмятаните интеграли, получена при увеличаване на тази координата.
- Пресмятаме същите интеграли при увеличен брой на стъпките само по азимуталната координата. Намираме най-голямата относителната разлика  $\varepsilon_\varphi$  в пресмятаните интеграли, получена при увеличаване на тази координата.
- Пресмятаме точните интеграли за всеки от крайните случаи. Намираме най-голямата относителна разлика  $\varepsilon_r$  между числените и точните интеграли.
- Проверяваме дали са изпълнени следните условия:
  - и двете относителни разлики  $\varepsilon_\rho$  и  $\varepsilon_\varphi$  са по-малки от максималната допустима относителна грешка
  - относителната разлика  $\varepsilon_r$  е по-малка от максималната допустима грешка
- Ако и двете условия са изпълнени, считаме, че текущите параметри на дискретизация са достатъчни за постигане на желаната точност и прекратяваме изпълнението на алгоритъма.
- В противен случай се връщаме в първата стъпка на алгоритъма, като преди това увеличаваме броя на стъпките по тази координата, за която това води до по-голямата относителна разлика.

#### **А.6 Грешка при численото интегриране на инверсната населеност по дължината на активната среда**

Численото интегриране на инверсната населеност по дължината на активната среда се извършва с помощта на някой от методите, споменати в част §3.3. Методът на Ромберг изисква броят на стъпките по надлъжната координата да бъде:



$$J = 2^{k_j} + 1 \quad (\text{A.8})$$

където  $k_j$  е цяло положително число.

Намирането на минималния брой стъпки по надлъжната координата, необходим за постигане на определена точност при интегрирането, е затруднено, тъй като точното решение за инверсната населеност, при крайно време на живот на долното лазерно състояние, не ни е известно. Затова бихме могли да намерим минималния брой стъпки за някои крайни случаи на инверсната населеност, и да считаме, че най-големият получен брой стъпки е достатъчен за интегриране с желаната точност и на численото решение. Крайните случаи, за които търсим необходимия брой стъпки, са:

- Точното решение за инверсната населеност след преминаване на импулс в случая на система с три нива. Това съответства на усилване на импулси в активна среда с безкрайно време на живот на долното лазерно състояние.
- Точното решение за инверсната населеност след преминаване на импулс в случая на идеална система с четири нива. Това съответства на усилване на импулси в активна среда с нулево време на живот на долното лазерно състояние.

Интегралът, пресмятан в тази стъпка, се използва само за оценка на грешката, внесена в друга стъпка. Той се пресмята само за решението за инверсната населеност след разпространението на първия импулс от серията, и само за напречните координати на оста на снопа. Затова, при пресмятането на интеграла в горните крайни случаи, за начална инверсна населеност използваме тази, която сме получили при напомпването на средата, и оценяваме плътността на фотоните в оста на снопа.

За да намерим минималния брой стъпки по надлъжната координата за всеки от горните крайни случаи, пресмятаме съответния числен интеграл с прогресивно нарастващ брой стъпки, удовлетворяващ уравнение (A.8). Считаме, че сме достигнали желаната точност, когато относителната разлика между два последователни резултата стане по-малка от максималната допустима относителна грешка.

Точните решения за инверсната населеност в локално време, за система с три нива и за идеална система с четири нива, са:

$$n(z, t) = \frac{n_0(z) \exp[-\sigma \int_0^z n_0(z') dz']}{\exp[\gamma \sigma c \int_{-\infty}^t \phi_0(t') dt'] + \exp[-\sigma \int_0^z n_0(z') dz'] - 1} \quad (\text{A.9})$$

## **A.7 Грешка при численото решаване на задачата за разпространението на лазерни импулси**

Численото решение за плътността на фотоните на изходния сигнал е само междинен резултат за нашия модел. След като пресметнем това решение го интегрираме по продължителността на импулса. Затова не се интересуваме от грешката

в решението в отделните моменти от времето, а от грешката в интеграла на численото решение по продължителността на сигнала.

Тази грешка се поражда от два фактора (освен грешката при численото интегриране):

- Грешката от прекъсване при численото решаване на системата диференциални уравнения, описващи разпространението на импулсите.
- Грешката в началните условия – при усилване на серия от импулси, населеността на лазерните състояния след разпространението на един импулс определя началните условия при разпространението на следващия импулс. Тази населеност се пресмята с крайна грешка.

Считаме, че:

- И двете компоненти на грешката са най-големи при усилване на първия импулс от серията, тъй като неговото усилване е най-голямо.
- И двете компоненти на грешката са най-големи по оста на снопа, тъй като там плътността на фотоните е най-голяма, и следователно насищането на усилването и промяната на времевата форма на импулса са най-силно изразени.

Тогава бихме могли чрез проба и грешка да намерим необходимите параметри на дискретизация, като пресмятаме решенията за плътността на фотоните и населеността на лазерните състояния за първия импулс от серията, по оста на снопа. Тъй като не са ни известни точните решения при крайно време на живот на долното лазерно състояние, при всяка проба сравняваме следните двойки резултати:

- числения интеграл на решението, пресметнато чрез нашия модел за текущите параметри на дискретизация и за такива с увеличен брой на стъпките по едната свободна променлива
- числения интеграл на точното решение за система с три нива и числения интеграл на решението, пресметнато чрез нашия модел при безкрайно време на живот на долното лазерно състояние
- числения интеграл на точното решение за идеална система с четири нива и числения интеграл на решението, пресметнато чрез нашия модел при нулево време на живот на долното лазерно състояние

Така намираме параметрите на дискретизация, при които се постига достатъчна точност за нулево и за безкрайно време на живот на долното лазерно състояние, и при които увеличаването на броя стъпки, по която и да е свободна променлива, променя резултата (за крайно време на живот на долното лазерно състояние) по-малко от максималната допустима грешка. Считаме, че така намерените параметри на дискретизация са достатъчни за постигане на желаната точност при крайно време на живот на долното лазерно състояние, за всеки импулс от серията, и за произволна точка от напречното сечение на активната среда.

Отчитайки максималното за серията от импулси влияние на грешката в началната инверсна населеност върху плътността на фотоните, както и грешката при численото интегриране, относителната грешка  $\varepsilon$  в единия от сравняваните резултати (ако другия приемем за точен), в първо приближение, е:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\phi &= \frac{|I_{\phi 2} - I_{\phi 1}|}{I_{\phi 1}} + \varepsilon_{rI} \left(1 + \frac{I_{\phi 2}}{I_{\phi 1}}\right) \\ \Delta I_n &= |I_{n2} - I_{n1}| + \varepsilon_{rI} (I_{n2} + I_{n1}) \\ \varepsilon_n &= \exp(\sigma \Delta I_n) - 1 \\ \varepsilon &= \varepsilon_\phi + \varepsilon_n\end{aligned}\tag{A.10}$$

където:

- $I_{\phi 1}$  и  $I_{\phi 2}$  са числените интеграли на сравняваните решения за плътността на фотоните по продължителността на импулса
- $I_{n1}$  и  $I_{n2}$  са числените интеграли на началните условия за инверсната населеност (за следващия импулс) по дължината на активната среда
- $\varepsilon_{rI}$  е максималната относителна грешка при численото интегриране

За да намерим параметрите на дискретизация, необходими за постигане на желаната точност, обхождаме двумерната област за тези параметри. Започваме от параметрите, при които решенията са физически смислени, и численото интегриране по двете свободни променливи се извършва с желаната точност. Ако, при текущите параметри на дискретизация, оценената грешка е по-малка от максималната допустима, за всяка от изброените по-горе двойки резултати, считаме, че тези параметри са достатъчни. В противен случай увеличаваме броя на стъпките по тази свободна променлива, за която това води до по-голямо различие в резултатите за крайно време на живот на долното лазерно състояние.

## A.8 Обща грешка в крайния резултат за енергията на изходния сигнал

Общата относителна грешка  $\varepsilon_r$  в крайния резултат за енергията на изходния сигнал, в зависимост от грешките, въведени в отделните стъпки на пресмятането му, е:

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= \exp(\sigma \varepsilon_{rn} n_0 L) - 1 \\ \varepsilon_E &= \varepsilon_{rT} + \varepsilon_{rF} + \varepsilon_{rE} \\ \varepsilon_r &= \varepsilon_n + \varepsilon_E\end{aligned}\tag{A.11}$$

където:

- $\varepsilon_{rn}$  е относителната грешка, с която е пресметната инверсната населеност при напompването на активната среда
- $\varepsilon_{rT}$  е относителната грешка, внесена вследствие на крайната продължителност на изчислителния прозорец

- $\varepsilon_{rF}$  е относителната грешка в числения интеграл на плътността на фотоните по продължителността на сигнала
- $\varepsilon_{rE}$  е относителната грешка при численото интегриране на повърхнинната плътност на изходната енергия по апертурата на активната среда

Резултатите, изложени в настоящата магистърска теза, са получени с изброените в таблица А.8.1 стойности на максималната допустима относителна грешка, внесена в отделните стъпки на изчисленията.

$\varepsilon_{rR}$	$5 \times 10^{-2}$
$\varepsilon_{rP}$	$1 \times 10^{-2}$
$\varepsilon_{rT}$	$1 \times 10^{-3}$
$\varepsilon_{rI}$	$1 \times 10^{-6}$
$\varepsilon_{rF}$	$1 \times 10^{-2}$
$\varepsilon_{rE}$	$1 \times 10^{-6}$

Таблица А.8.1: Максимална допустима относителна грешка, внесена в отделните стъпки на изчисленията.

## А.9 Избор на най-ефективна комбинация от методи

Някои от изчисленията в нашия модел биха могли да се извършват с помощта на повече от един алтернативни методи. Тези изчисления са:

- численото пресмятане на инверсната населеност при напмпването на активната среда
- численото пресмятане на плътността на фотоните и населеността на лазерните състояния при разпространението на импулси
- численото интегриране на плътността на фотоните по продължителността на импулса, както и на повърхнинната плътност на изходната енергия по апертурата на активната среда

Тъй като първото изчисление се извършва еднократно, не е възможно предварително да се определи най-ефективният метод за неговото извършване (изискващ най-малък брой оценки на скоростта на обезселване). Това изчисление се извършва с помощта на предварително избран метод. Методът на Рунге-Кута, макар да изисква по-голям брой оценки на скоростта на обезселване във всяка времева стъпка, е от по-висок порядък на точност, и беше по-ефективен от метода на Ойлер при проведените в настоящата теза изследвания.

Най-ефективната комбинация от методи за извършване на другите два вида изчисления определяме по следния начин. По начина, описан по-горе в тази част, за всяка възможна комбинация от методи за двата вида изчисления, намираме тези параметри на дискретизация на четирите свободни променливи, при които резултатите от отделните изчисления се пресмятат с желаната точност. За най-ефективна считаме тази комбинация, за която е най-малък общият брой точки на дискретизация на разглежданата четиримерна област.