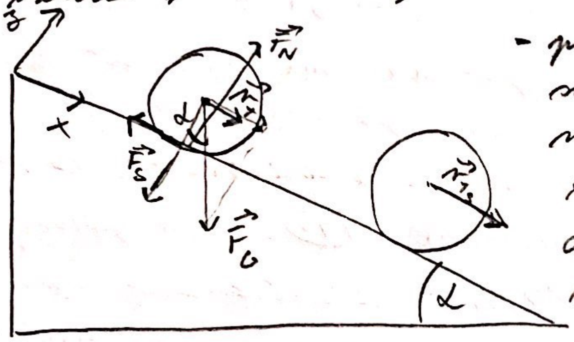
145. Homog. teleso gule, ktorá sa spočiatku nachádza v kľudovom stave, sa valí po naklonenej rovine zvierajúcej s vodorovnou rovinou uhol α. Akú rýchlosť má ťažisko gule po prejdení dráhy s a v akom vzťahu je táto rýchlosť k rýchlosti, ktorú by malo ťažisko gule pri čistom šmýkaní bez trenia po uvedenej rovine?



- podľa zadania ide o izolovaný systém, v ktorom pôsobia len konzervat. sily, to znamená, že pre určenie rýchlosti ťažiska gule po prejdenej dráhe s môžeme využiť zákon zachov. mechanickej energie

- budeme predpokladať, že pre $s=0$ bola E_{ki} gule nulová
- v mieste, kde uvažujeme $s=0$ zvolíme $E_{pi}=0$

$E_{ki}=0$

$E_{pi}=0$

$$E_i = E_f$$

$$E_{ki} + E_{pi} = E_{kf} + E_{pf}$$

$$0 + 0 = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{5} m v_T^2 - mg s \sin\alpha$$

- kinetická energia valiaceho sa telesa je súčtom kinetickej energie rotácie telesa a energie translačného pohybu $E_{kT} = \frac{1}{2} m v_T^2$

$$mg s \sin\alpha = \frac{7}{10} m v_T^2$$

$$v_T = \sqrt{\frac{10}{7} g s \sin\alpha}$$

- energiu rotač. pohybu gule určíme ako $E_{kR} = \frac{1}{2} I_G \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m R^2 \omega^2 = \frac{1}{5} m v_T^2$

- pre guľu, kt. by sa šmýkala po naklonenej rovine nemôžeme uvažovať $E_{kR} \Rightarrow E_{kR}=0$

$$0 + 0 = \frac{1}{2} m v_T^2 - mg s \sin\alpha$$

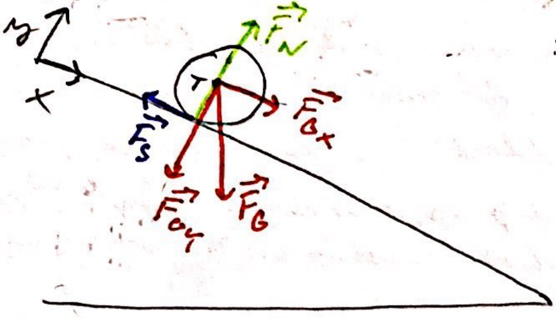
$$v_{T_s} = \sqrt{2 g s \sin\alpha}$$

- potenciálna energia gravitačného poľa telesa pri pohybe po naklonenej rovine pod uhlom α ~~...~~ klesne po prejdení dráhy s o $m.g.s \sin\alpha$

$$\frac{v_T}{v_{T_s}} = \frac{\sqrt{\frac{10}{7} g s \sin\alpha}}{\sqrt{2 g s \sin\alpha}} = \sqrt{\frac{10}{14}} = \sqrt{\frac{5}{7}}$$

$$v_T = \sqrt{\frac{5}{7}}\, v_{T_s}$$

146. Homog. rotačný valec s polomerom R a hmotnosťou m sa valí bez šmýkania vplyvom svojej tiaže po naklonenej rovine, kt. s vodorovnou rovinou zviera uhol α. Treba určiť zrýchlenie ťažiska valca a_T a rýchlosť v_T, ktorou sa vyznačuje ťažisko po prejdení s, keď v čase $t=0$ bol valec v pokoji.



- najprv určíme rýchlosť ťažiska valca po prejdení dráhy s
- situácia je obdobná, ako v príklade 145, opäť použijeme ZZME; jediná zmena oproti predchádzajúcemu príkladu bude vo veličine E_{kR}, keďže I_V sa líši od I_C.

a.) $v_T = ?$

$$E_i = E_f$$

$$E_{k_i} = 0 \quad E_{p_i} = 0$$

$$0 + 0 = E_{p_f} + E_{k_f} \quad \begin{cases} E_{kR} = \frac{1}{2} I_V \omega^2 \\ E_{kT} = \frac{1}{2} m v_T^2 \end{cases}$$

$$0 = -mgs\sin\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m R^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2} m v_T^2$$

$$gs\sin\alpha = \frac{3}{4} v_T^2$$

$$v_T = 2\sqrt{\frac{gs\sin\alpha}{3}}$$

b.) $a_T = ?$

- k popisu situácie a k voľbe súradnicovej sústavy vyplýva, že zrýchlenie telesa v smere osi y bude nulové (reakčná sila podlahy vykompenzuje príslušnú zložku sily tiažovej)

$\Rightarrow a_T = a_{Tx}$ - v smere osi x pôsobia na valec dve sily

- je to jednak príslušná zložka tiažovej sily $\vec{F}_{Gx}$ a v opačnom smere sila statického trenia $\vec{F}_s$

$$a_{Tx} m = mg\sin\alpha - F_s$$

- sila $\vec{F_s}$ je tou silou, kt. spôsobuje, že sa valec točí

$\Rightarrow$ $\vec{F_s}$ vytvára moment sily $\vec{M}$

$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F_s} \qquad \varphi = 90°$$

$$M = R \cdot F_s \cdot \sin\varphi = R F_s$$

- teleso, na kt. pôsobí moment sily o veľkosti M, bude udeľované uhlové zrýchlenie ε, kt. je nepriamo úmerné veľkosti momentu zotrvačnosti telesa I

$$M = I . \varepsilon$$

- ťažisko valca rotujúceho (pri valivom pohybe bez prešmyku) bude mať zrýchlenie $a_T = \varepsilon . R$ – polomer valca

- môžeme teda písať – $\qquad I_V = \frac{1}{2} m R^2$

$$M = I_V \varepsilon = I_V \frac{a_{Tx}}{R} = R . F_s \Rightarrow F_s = I_V \frac{a_{Tx}}{R^2} = \frac{1}{2} m R^2 \frac{a_{Tx}}{R^2} =$$

$$= \frac{1}{2} m a_{Tx}$$

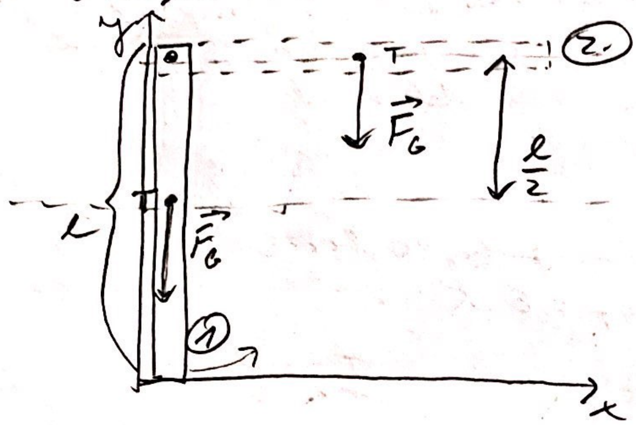
$$a_{Tx} m = mg \sin\alpha - F_s = mg \sin\alpha - \frac{1}{2} m a_{Tx}$$

$$\frac{3}{2} a_{Tx} m = mg \sin\alpha$$

$$\underline{\underline{a_{Tx} = \frac{2}{3} g \sin\alpha}}$$

171. vid' vypracované zadanie_ťažisko_moment zotrvačnosti.

(173) Tyč dĺžky $l = 1\,m$ je upevnená tak, že sa môže otáčať okolo vodorovnej osi prechádzajúcej koncovým bodom tyče. Akú najmenšiu rýchlosť musíme udeliť voľnému koncovému bodu tyče, aby pri svojom vychýlení z rovnovážnej polohy dosiahol vodorovnú úroveň prechádzajúcu osou otáčania? (4.)



- ide o homog. tyč, je ťažisko sa bude nachádzať v strede tyče
- potom čo bude tyči vo vertik. polohe udelená rýchlosť, tak bude mať tyč kinetickú energiu E_{ki}
- pri prechode tyče z polohy (1) do polohy (2) sa celá táto energia premení na energiu potenciálnu (nezohľadňujeme trenie o osi a odpor vzduchu)

- môžeme teda použiť ZZME

$E_{kf} = 0 \Leftarrow v_2 = 0$

E_{pi} - zvolíme nulovú (poloha (1))

$$E_{ki} + E_{pi} = E_{kf} + E_{pf}$$

$$\frac{1}{2} I_T \cdot \omega^2 + 0 = 0 + m \cdot g \cdot \frac{l}{2}$$

E_{ki} - bude celá pozostávať z E_{kr} - rotačný pohyb

$$\frac{1}{3} m l^2 \omega^2 = m g l$$

$I_T = \frac{1}{3} m l^2$ pre náš prípad

$$\frac{1}{3} v_{vk}^2 = g \cdot l$$

$$v_{vk} = \sqrt{3gl} =$$

v_{vk} - rýchlosť voľného konca tyče

$v_{vk} = l \cdot \omega$

$$= \sqrt{3 \cdot 9{,}81\,m \cdot s^{-2} \cdot 1\,m} =$$

$$= \underline{\underline{5{,}42\,m \cdot s^{-1}}}$$

Voľnému koncu tyče je potrebné udeliť rýchlosť $5{,}42\,m \cdot s^{-1}$.

(174) Teleso tvaru tenkej obruče hmotnosti $m = 10\,kg$, s (5.)
vonkajším priemerom $d = 1\,m$, zanedbateľnej šírky
sa valí bez šmýkania po naklonenej rovine, kt. zviera
s vodorovnou rovinou $\alpha = 30°$. Určite, akú rýchlosť
má ťažisko obruče po prejdení dráhy $s = 5\,m$, keď
na začiatku tejto dráhy bola rýchlosť obruče nulová.

OBRÁZOK + ANALÝZA – viď príklady (145.) a (146.)

$$E_{k_i} + E_{p_i} = E_{k_f} + E_{p_f}$$

$E_{k_i} = 0$

$E_{p_i} = 0$ – volíme

$$0 + 0 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + \frac{1}{2} m v_T^2 - mg s \sin\alpha$$

E_{k_T}

$$0 = \frac{1}{2} m \underbrace{R^2 \omega^2}_{v_T^2} + \frac{1}{2} m v_T^2 - mg \sin\alpha \cdot s$$

$E_{k_R} = \frac{1}{2} I_0 \cdot \omega^2$

$I_0 = m \cdot R^2$ – vieme, lebo celá

$sg \sin\alpha = v_T^2$

teda aj hmotnosť obruče sú vo vzdialenosti R od osi otáč.

$$v_T = \sqrt{s \cdot g \cdot \sin\alpha} = \sqrt{5\,m \cdot 9{,}81\,m \cdot s^{-2} \cdot \sin 30°} =$$

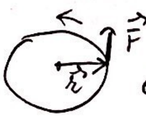
$$= \underline{\underline{4{,}95\,m \cdot s^{-1}}}$$

(175) Homog. teleso tvaru rotač. valca sa otáča okolo geom.
osi. Aký je hodnota momentu vonkajš. síl vzhľadom
na os otáčania, keď sa hodnota momentu hybnosti
telesa vzhľadom na os otáčania mení s časom tak, že
za 5 s vzrastie z nulovej hodnoty na hodnotu $L = 0{,}157\,kg\,m^2 s^{-1}$?

– podľa druhej impulz. vety je časová zmena momentu
hybnosti telesa rovná celk. momentu vonkajš. síl

$\Delta t = 5\,s$

$$M = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{L_f - L_i}{\Delta t} = \frac{0{,}157\,kg\,m^2 s^{-1} - 0}{5\,s} = \underline{\underline{0{,}0314\,kg \cdot m^2 s^{-2}}}$$

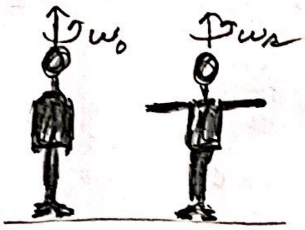


$\vec{L}$

$\vec{\omega}, \vec{\varepsilon}, \vec{M}, \vec{L}$ – smery ich pred nákresne

L – moment hybnosti

176. Krasokorčuliar sa otáča okolo svojej zvislej osi so stálou frekvenciou $f_0 = 2\ s^{-1}$, pričom jeho moment zotrvačnosti vzhľadom na os otáčania je $I_0 = 2\ kg\,m^2$. Ako sa zmení jeho uhlová rýchlosť otáčania, keď rozpaží, pričom zväčší svoj moment zotrvačnosti vzhľadom na os otáčania na hodnotu $I_1 = 2{,}1\ kg\,m^2$?



– predpokladáme, že trenie korčúľ o ľad je zanedbateľné resp. nie je, a tiež nerátame odpor vzduchu

– v takom prípade nepôsobí vzhľadom na os otáčania korčuliara žiadny moment síl $\vec{M} = 0$

– v takom prípade platí zákon zachovania momentu hybnosti (pre moment hyb. používame symbol L)

$$L_i = L_f$$

$$L = I\omega \qquad \omega_0 = 2\pi . f_0$$

$$I_0\omega_0 = I_1\omega_1$$

$$\omega_1 = \frac{I_0}{I_1}\omega_0 = \frac{2\ kg\,m^2}{2{,}1\ kg\,m^2} . 2\pi . 2\ s^{-1} = 11{,}97\ s^{-1}$$

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0 = 11{,}97\ s^{-1} - 2\pi . 2 . s^{-1} = -0{,}6\ s^{-1}$$

Uhlová rýchlosť korčuliara po rozpažení sa zmení o $0{,}6\ s^{-1}$.