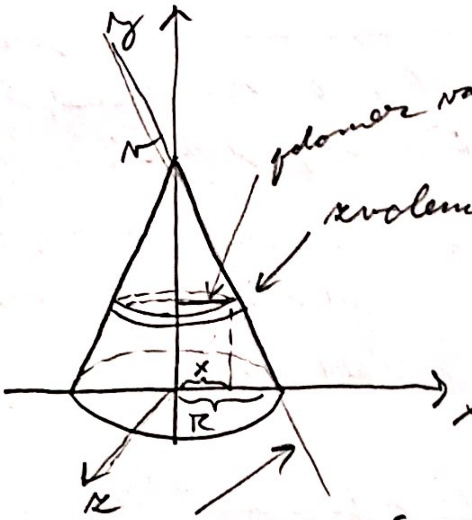
(1.) Určite ťažisko kužeľa s polomerom R a výškou v (1)



zvolený hmotnostný element $\to \pi x^2 dy$

$$V_{kuž.} = \frac{1}{3}\pi R^2 v$$

$$dm = \frac{M}{V} dV = \frac{M}{\frac{1}{3}\pi R^2 v} \pi x^2 dy$$

priamka zodpovedajúca

vzťah medzi premennými x a y: $y = v - \frac{v}{R}x \Rightarrow x = R - \frac{R}{v} y$

$$y_T = \frac{\int y\, dm}{M} = \frac{1}{M}\int \frac{3M y}{\pi R^2 v}\pi x^2 dy =$$

$$= \frac{1}{M}\int_0^v \frac{3M y}{\pi R^2 v}\pi \cdot \left(R - \frac{R}{v}y\right)^2 dy =$$

$$= \frac{3}{R^2 v}\int_0^v \left(y R^2 - \frac{2R^2}{v}y^2 + \frac{R^2}{v^2}y^3\right) dy = \frac{3}{R^2 v}\left[\frac{y^2 R^2}{2} - \frac{2R^2 y^3}{3v} + \frac{R^2 y^4}{4v^2}\right]_0^v$$

$$= \frac{3}{R^2 v}\left[\frac{v^2R^2}{2} - \frac{2}{3}v^2R^2 + \frac{v^2R^2}{4}\right] = \frac{3}{R^2 v}\cdot\frac{1}{12}\cdot R^2 v^2 =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4} v}}$$

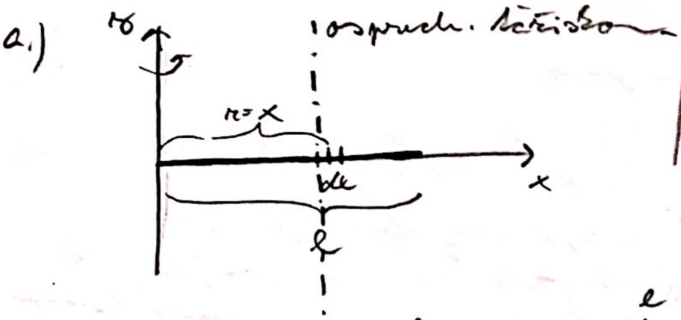
– súradnice x_T a z_T ~~sa~~ majú v nami zvolenej súradnic sústave nulové hodnoty, čo vyplýva zo symetrie problému v týchto smeroch

v

Ťažisko sa v nami zvolenej súrad. sústave nachádza v bode $T[0, \frac{1}{4}v, 0]$

132. Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénnej tyče dĺžky l a hmotnosti m vzhľadom na os kolmú na smer dĺžky tyče:
a.) prechádz. konc. bodom tyče
b.) prechádz. stredom tyče

a.)



hmotný element

$$dm = \frac{M}{l} \cdot dx$$

$\frac{M}{l}$ – dĺžková hustota

$$I_c = \int r^2 dm = \int x^2 dm = \int_0^l x^2 \frac{M}{l} dx = \frac{M}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l = \frac{Ml^2}{3}$$

x – vzdialenosť elementu dx od osi otáčania

b.) pre výpočet prípadu, keď os otáčania prechádza stredom tyče využijeme Steinerovu vetu

$$\boxed{I_c = I_T + m r_0^2} \leftarrow \text{všeobecne}$$

$$r_0 = \frac{l}{2}$$

$$I_T = I_c - M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{3} - \frac{Ml^2}{4} = \frac{Ml^2}{12}$$

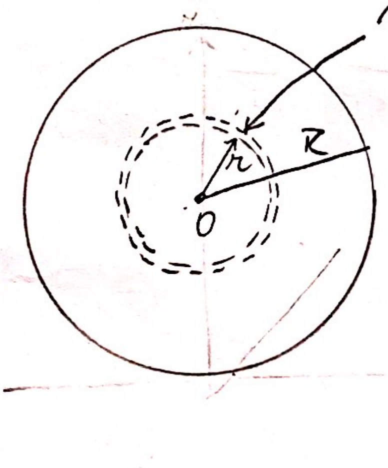
I_c – moment zotrvačnosti okolo osi rovnobežnej s osou otáč. prechádz. cez ťažisko vo vzdialen. r_0 od ťažiska

I_T – moment zotrvačnosti s osou otáčania prechádzajúcou cez ťažisko telesa

r_0 – vzdialenosť dvoch osí otáč.

133. Určite moment zotrvačnosti homogénnej kruhovej dosky hmotnosti $m = 2\,kg$ a polomeru $r = 10\,cm$ vzhľadom na os prechádzajúcu stredom dosky kolmo na rovinu dosky!

zvolený hmot. element dm



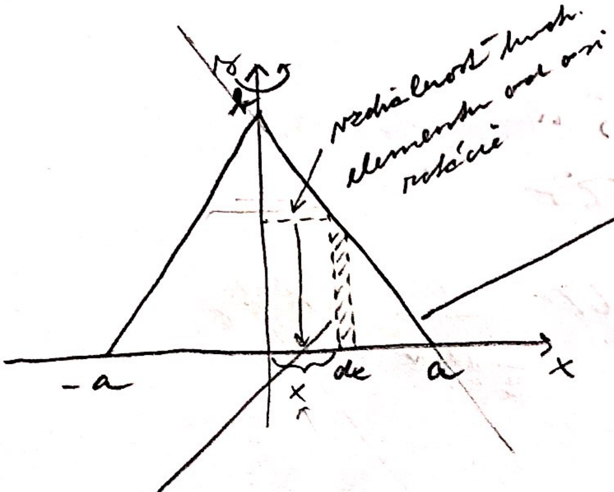
$$dm = \frac{M}{S} dS = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r\, dr$$

$$I_0 = \int r^2 dm = \int_0^R \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r^3 dr = \frac{2M}{R^2}\int_0^R r^3 dr =$$

$$= \frac{2M}{R^2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{2M}{R^2}\frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}MR^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2kg \cdot (0{,}1m)^2 = \underline{\underline{0{,}01\, kg \cdot m^{-2}}}$$

163. Nájdite moment zotrvačnosti pomocou dosky tvaru rovnoramenného △ s ramenami b a základ. 2a vzhľadom na os kolmú na základňu a prechádzajúcu protiľahl. vrcholom, hmotnosť dosky je M.



$y = -\frac{b}{a}x + b$ ← priamka, na ktorej leží jedno zo ramien trojuholníka

$dm = \frac{M}{S} \cdot dS = \frac{M}{a \cdot b}\, y \cdot dx$

$$I_s = \int r^2\, dm = 2\int \frac{M}{a \cdot b}\, x^2 \cdot y\, dx =$$

$$= 2\int_0^a \left(\frac{M}{a \cdot b}\, x^2 \cdot \left(-\frac{b}{a}x + b\right)\right) dx =$$

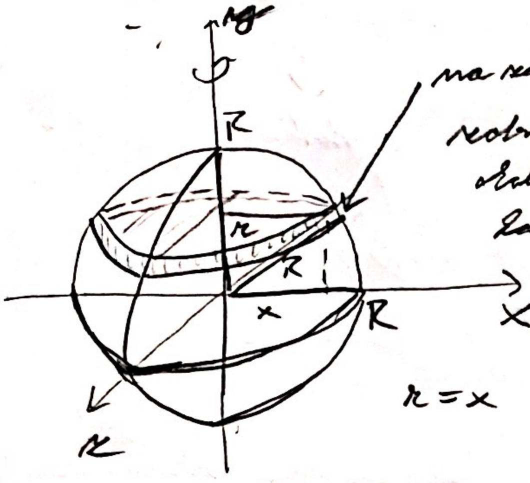
$$= \frac{2M}{ab}\int_0^a \left(-\frac{b}{a}x^3 + bx^2\right) dx =$$

$$= \frac{2M}{ab}\left[-\frac{b}{a}\frac{x^4}{4} + \frac{bx^3}{3}\right]_0^a =$$

$$= \frac{2M}{ab}\left[-\frac{ba^3}{4} + \frac{ba^3}{3}\right] =$$

$$= \frac{2M}{ab} \cdot \frac{a^3 b}{12} = \frac{1}{6} M a^2$$

164. Určite moment zotrvačnosti homogénnej plnej gule hmotnosti m a polomeru R vzhľadom na os prechádzajúcu stredom gule!



na základe výsledku príkladu 133. – moment zotrvačnosti kruhovej dosky otáčajúcej sa okolo svojho stredu – vieme, že príspevok každej takejto dosky k celkovému momentu zotrvačnosti gule bude $dI = \frac{1}{2} dm\, r^2$

$r = x$, pre ktoré x a y platí $x^2+y^2=R^2$

$$dm = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} dV = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \pi x^2 dy = \frac{3m}{4\pi R^3} \pi (R^2-y^2) dy$$

$$I = \frac{1}{2}\int r^2 dm = \frac{1}{2}\int x^2 dm = \frac{1}{2}\int (R^2-y^2) dm =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} (R^2-y^2) \cdot \frac{3m}{4\pi R^3} \pi (R^2-y^2) dy =$$

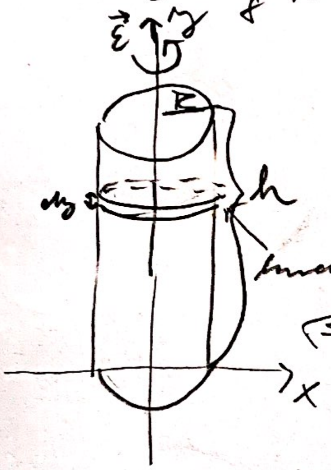
$$= \frac{3}{8}\frac{m}{R^3} \cdot 2 \cdot \int_0^R (R^2-y^2)^2 dy = \frac{3}{4}\frac{m}{R^3}\int_0^R (R^4-2R^2y^2+y^4) dy =$$

$$= \frac{3}{4}\frac{m}{R^3}\left[R^4 y - \frac{2R^2y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right]_0^R = \frac{3}{4}\frac{m}{R^3}\left[R^5 - \frac{2}{3}R^5 + \frac{R^5}{5}\right] =$$

$$= \frac{3}{4}\frac{m}{R^3}\left[\frac{15R^5 - 10R^5 + 3R^5}{15}\right] = \frac{3}{4}\frac{m}{R^3}\frac{8R^5}{15} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{5} m R^2}}$$

171. Vypočítajte kinetickú energiu telesa valcovit. tvaru s polomerom $r = 0{,}08\,m$ a hmotnosťou $M = 1{,}5\,kg$ v čase $t = 5\,s$, keď sa toto teleso otáča okolo svojej geometrickej osi s konštantným uhlovým zrýchlením $\varepsilon = \frac{\pi}{8}\,s^{-2}$, ak v čase $t = 0$ bolo teleso v pokoji.



– pre určenie kinetickej energie rotujúceho telesa je najprv potrebné určiť jeho moment zotrvačnosti

hmotn. element – z celk. I prispieva $dI = \frac{1}{2} R^2\, dm$ ⇐

⇐ kruhová doska s polom. R rotujúca okolo svojho stredu má moment zotr. $I = \frac{1}{2} m R^2$

– ε je rovnomerné, preto môžeme písať $\omega = \varepsilon \cdot t$

$$dm = \frac{M}{\pi R^2 h}\pi R^2\, dz = \frac{M}{h}\, dz$$

$$I = \int_0^h \frac{1}{2} R^2 \frac{M}{h}\, dz = \frac{1}{2} R^2 \frac{M}{h} [z]_0^h = \frac{1}{2} M R^2$$

$$E_{k_5} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} I (\varepsilon t_5)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M R^2 \cdot (\varepsilon t_5)^2 =$$

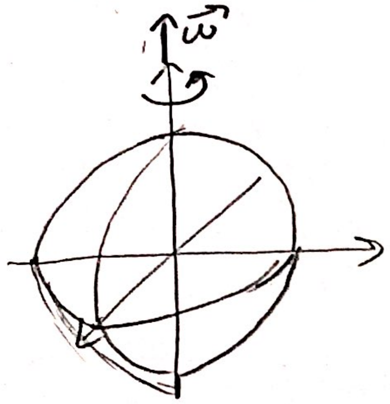
$$= \frac{1}{4} \cdot 1{,}5\,kg \cdot (0{,}08\,m)^2 \cdot \left(\frac{\pi}{8} s^{-2} \cdot 5\,s\right)^2 =$$

$$= \underline{\underline{0{,}00925\,J}}$$

Kinetická energia valca rotujúceho s konšt. $\varepsilon = \frac{\pi}{8} s^{-2}$ je v piatej sekunde rovná $9{,}25 \cdot 10^{-3}\,J$.

172. S akou konšt. uhl. rýchlosťou sa otáča homog.

zovorá guľa hmotnosti $m = 5\,kg$ a polomerom $r = 0{,}1\,m$ okolo svojho priemeru, keď jej kinet. energia $E_{k_G} = 0{,}1\,J$?



kinet. energia gule rotuj. okolo svojho priemeru

$$E_{k_G} = \frac{1}{2} J_G \cdot \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2E_{k_G}}{J_G}} = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{k_G}}{\frac{2}{5} m r^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{5E_{k_G}}{m r^2}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 0{,}1\,J}{5\,kg \cdot (0{,}1\,m)^2}} = 3{,}16\,s^{-1}$$

Guľa sa otáča okolo svojho priemeru uhl. rýchl. $\omega = 3{,}16\,s^{-1}$.