Генеративные модели на основе диффузии

Домашнее задание №2

Задача 1

Пусть $(X_t, t \in [0,1))$ — процесс, заданный стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX_t = \frac{x_1 - X_t}{1-t}dt + \sqrt{\gamma}\,dW_t,$$

где x_1 — константа и $X_0 = x_0$ — константа. Найдите EX_t и $VarX_t$.

Решение

Воспользуемся следующим разложением для заданного процесса:

$$X_{t+h} - X_t \approx hf_t(X_t) + g(t)\sqrt{h}\varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim N(0, I) \text{ и н.з. с историей } X_{[0:t]}$$

$$f_t(X_t) = \frac{x_1 - X_t}{1-t},\ g(t) = \sqrt{\gamma}$$

Тогда посчитаем искомые статистики

- **Математическое ожидание:** $E[X_t] = m(t)$

$$E[X_{t+h}] \approx E[X_t + h\frac{x_1 - X_t}{1-t} + \sqrt{\gamma}\sqrt{h}\varepsilon_t] = E[X_t] + h\frac{x_1}{1-t} - \frac{h}{1-t}E[X_t] + \underbrace{E[\sqrt{\gamma}\sqrt{h}\varepsilon_t]}_{=0}$$

$$m(t+h) = m(t) + h\frac{x_1}{1-t} - \frac{h}{1-t}m(t)$$

$$\frac{m(t+h) - m(t)}{h} = \frac{x_1}{1-t} - \frac{1}{1-t}m(t) \mid h \to 0$$

$$\frac{dm(t)}{dt} + \frac{1}{1-t}m(t) = \frac{x_1}{1-t}$$

Воспользуемся методом интегрирующего множителя. Возьмем в качестве интегрирующего множителя $-\frac{1}{1-t}$, домножим на него левую и правую части:

$$-\frac{1}{1-t}\frac{dm(t)}{dt} + \frac{1}{(1-t)^2}m(t) = -\frac{x_1}{(1-t)^2}$$

$$\frac{d(m(t)\frac{-1}{1-t})}{dt} = -\frac{x_1}{(1-t)^2}$$

$$\frac{m(t)}{1-t} - \underbrace{m(0)}_{=x_0} = x_1 \int_0^t \frac{1}{(1-s)^2} ds = x_1 (\frac{1}{1-t} - 1)$$

$$\boxed{m(t) = (1-t)x_0 + tx_1}$$

- **Дисперсия:** $Var(X_t) = v(t)$

$$Var(X_{t+h}) \approx Var(X_t + h\frac{x_1 - X_t}{1-t} + \sqrt{\gamma}\sqrt{h}\varepsilon_t) = Var(X_t + h\frac{x_1}{1-t} - \frac{h}{1-t}X_t + \sqrt{\gamma}\sqrt{h}\varepsilon_t) =$$

$$Var((1 - \frac{h}{1-t})X_t + h\frac{x_1}{1-t} + \sqrt{\gamma}\sqrt{h}\varepsilon_t) = (1 - \frac{h}{1-t})^2 Var(X_t) + \gamma h =$$

$$Var(X_t) - 2\frac{h}{1-t}Var(X_t) + \underbrace{(\frac{h}{1-t})^2 Var(X_t)}_{\text{Отбросим как } o(h)} + \gamma h$$

$$v(t+h) = v(t) - 2(\frac{h}{1-t})v(t) + \gamma h$$

$$\frac{v(t+h) - v(t)}{h} = -2\frac{1}{1-t}v(t) + \gamma \mid h \to 0$$

$$\frac{dv(t)}{dt} + 2\frac{1}{1-t}v(t) = \gamma$$

Аналогично воспользуемся методом интегрирующих множителей и домножим левую и правую части на $-\frac{1}{(1-t)^2}$:

$$-\frac{1}{(1-t)^2}\frac{dv(t)}{dt} + 2\frac{1}{(1-t)^3}v(t) = -\frac{1}{(1-t)^2}\gamma$$

$$\frac{d(v(t)\frac{-1}{(1-t)^2})}{dt} = -\frac{1}{(1-t)^2}\gamma$$

$$\frac{v(t)}{(1-t)^2} - \underbrace{v(0)}_{=0} = \gamma \int_0^t \frac{1}{(1-s)^2} ds = \gamma (\frac{1}{1-t} - 1)$$

$$\boxed{v(t) = \gamma t(1-t)}$$

Задача 2

Пусть $(X_t, t \in [0,1])$ — процесс, заданный стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX_t = f_t(X_t)dt + g(t)dW_t,$$

а $\tau(t) : [0,1] \to [0,1]$ — дифференцируемая монотонно возрастающая функция («замена времени»).

(0.7 балла) Покажите, что процесс $Y_t = X_{\tau(t)}$ удовлетворяет СДУ

$$dY_t = \tau'(t) f_{\tau(t)}(Y_t)dt + \sqrt{\tau'(t)} g(\tau(t))dW_t.$$

Решение

Поскольку процесс $(X_t, t \in [0,1])$ удовлетворяет СДУ, то будет справедливо примерное равенство:

$$X_{t+h} - X_t \approx h f_t(X_t) + g(t)(W_{t+h} - W_t) \text{ при } h \to 0,$$

где h является приращением для момента времени t. Тогда рассмотрим выписанное выражение в момент времени $\tau(t)$ (замена времени):

$$X_{\tau(t+h)} - X_{\tau(t)} \approx k f_{\tau(t)}(X_{\tau(t)}) + g(\tau(t))(W_{\tau(t+h)} - W_{\tau(t)}) \text{ при } k \to 0,$$

где k является приращением для момента времени $\tau(t)$ или другими словами "сколько времени прошло в новой временной шкале при изменении времени в исходной системе". Согласно равенству $Y_t = X_{\tau(t)}$ выполняем замену:

$$Y_{t+h} - Y_t \approx k f_{\tau(t)}(Y_t) + g(\tau(t))(W_{\tau(t+h)} - W_{\tau(t)})$$

Т.к. τ дифференцируема, то верно разложение:

$$k = \tau(t+h) - \tau(t) = h\tau(t)' + \overline{o}(h)$$

Подставим получившееся разложение в представление для $Y_{t+h} - Y_t$:

$$Y_{t+h} - Y_t = (h\tau(t)' + \overline{o}(h)) f_{\tau(t)}(Y_t) + g(\tau(t)) \underbrace{(W_{\tau(t+h)} - W_{\tau(t)})}_{\sim \mathcal{N}(0,k)}$$

$$Y_{t+h} - Y_t = h\tau(t)' f_{\tau(t)}(Y_t) + g(\tau(t))\sqrt{k}\varepsilon_t =$$

$$Y_{t+h} - Y_t = h\tau(t)' f_{\tau(t)}(Y_t) + g(\tau(t))\sqrt{h}\sqrt{\tau(t)'}\varepsilon_t + \overline{o}(\sqrt{h})$$

Устремляем $h \to 0$ и получаем уравнение, которое удовлетворяет СДУ:

$$dY_t = \tau'(t) f_{\tau(t)}(Y_t)dt + \sqrt{\tau'(t)}g(\tau(t))dW_t$$

(0.3 балла) Рассмотрим $\beta > 0$ и непрерывную функцию $\beta_t > 0$. Каким условием должны быть связаны β и β_t, чтобы VP-SDE с постоянным параметром β

$$dX_t = -\frac{\beta}{2}X_t dt + \sqrt{\beta}dW_t, \quad t \in [0, 1]$$

можно было превратить в VP-SDE с переменным параметром β_t

$$dY_t = -\frac{\beta_t}{2}Y_t dt + \sqrt{\beta_t}dW_t, \quad t \in [0, 1]$$

заменой времени? Найдите эту замену.

Замечание. Проверять соответствие некоторого процесса СДУ можно, как всегда, с точностью до $\tilde{o}(h)$ в детерминированной части и $\tilde{o}(\sqrt{h})$ в стохастической.

Решение

Пусть замена времени $\tau(t) : [0, 1] \to [0, 1]$ — дифференцируемая монотонно возрастающая функция и верно, что $Y_t = X_{\tau(t)}$. Тогда для обоих процессов верно:

$$dX_t = f_t(X_t)dt + g(t)dW_t$$

$$dY_t = \tau'(t) f_{\tau(t)}(Y_t)dt + \sqrt{\tau'(t)}g(\tau(t))dW_t =$$
$$\tau'(t)\underbrace{(-\frac{\beta}{2}Y_t)}_{X_{\tau(t)}}dt + \sqrt{\tau'(t)}g(\tau(t))dW_t$$

Тогда, чтобы X_t и Y_t задавали одно СДУ, необходимо, чтобы коэффициенты при dt и dW_t совпадали. Достаточно проверить, чтобы коэффициент при dt:

$$-\frac{\beta}{2}\tau(t)' = -\frac{\beta_t}{2} \Rightarrow \tau'(t) = \frac{\beta_t}{\beta}$$

$$\tau(t) = \tau(0) + \frac{1}{\beta}\int_0^t \beta_s ds$$

Также исходя из определения, которое было дано для замены времени, необходимо потребовать от функции $\tau(t)$:

$$\begin{cases} \tau(0) = 0 \\ \tau(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{\beta}\int_0^1 \beta_s ds = 1 \Rightarrow \beta = \int_0^1 \beta_s ds \end{cases}$$

Объединяя получившиеся результаты в одну функцию получаем:

$$\boxed{\tau(t) = \frac{\int_0^t \beta_k dk}{\int_0^1 \beta_s ds}}$$