Билеты по матану

...

11 февраля 2021 г.

Содержание

1. ...

1.1. Лекция 1

***Определение* 1.1.**

$f_1 \in H(\Omega_1)$ и $f_2 \in H(\Omega_2)$

Δ – компонента связности $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \varnothing$

Если $f_1\Big|_\Delta = f_2\Big|_\Delta$, то f_2 непосредственное аналитическое продолжение f_1 через Δ

Замечание.

При фиксации Δ продолжение единственно

Доказательство.

$\widetilde{f}_2 \in H(\Omega_2) \quad \widetilde{f}_2\Big|_\Delta = f_1\Big|_\Delta = f_2\Big|_\Delta \Rightarrow \widetilde{f}_2\Big|_\Delta = f_2\Big|_\Delta \Rightarrow f_2 \equiv \widetilde{f}_2$ по единственности.

□

Замечание.

Продолжения через разные компоненты связности могут быть разными

***Определение* 1.2.** Продолжение по цепочке областей.

$f \in H(\Omega)$ и $\widetilde{f} \in H(\widetilde{\Omega})$

Если существует цеполчка областей

$\Omega_0 = \Omega, \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n = \widetilde{\Omega}, \quad f_0 = f, \dots, f_n = \widetilde{f}$

$f_k \in H(\Omega_k)$ и f_k непосредственно аналитическое продолжение f_{k-1}

Замечания.

1. Результат зависит от выбора компонент связности на каждом шаге
2. При их фиксации результат единственный
3. Можно считать, что все промежуточные области – круги

***Определение* 1.3.**

Разобьем множество пар $(f, \Omega) \quad f \in H(\Omega)$

на классы эквивалентности отностительно аналитического продолжения по цепочке. (Очевидно, что это отношение эквивалентности $\Rightarrow$ можем разбить на классы)

Класс эквивалентности – полная аналитческая функция F

множество $M := \bigcup_{(f,\Omega)\in F} \Omega$ – область определения F (существования)

Утверждение 1.1.

M – область

TODO: написать доказательство

***Определение* 1.4.**

Значения полной аналитической функции в точке $z \in M$ – множество значений в точке z всех функций из ее класса эквивалентности.

Замечание.

Теорема Пуанкаре-Вольтерры. Множество значений F в точке z либо конечно, либо счетно.

Более того можно ограничиться лишь нбчс (f, Ω) в классе эквивалентности.

Пример.

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ определена в $|z| < 1$

Можно продолжить до $\frac{1}{1-z}$ в $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

TODO: Написать про то, как надо дополнять, если мы не знаем формулу.

$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{1-a}} = \frac{1}{1-a} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{1-a}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(1-a)^{n+1}}$ сходится при $\left|\frac{z-a}{1-a}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-a| < |1-a|$

***Определение* 1.5.**

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \quad |z-z_0| < R \quad |z_1 - z_0| \leqslant R$

z_1 – правильная точка, если $\exists r > 0$ и $g \in H(B_r(r_1))$, т.ч. $f \equiv g$ в $B_R(z_0) \cap B_r(z_1)$ иначе z_1 – особая точка.

Теорема 1.2.

На границе круга сходимости есть особая точка.

Доказательство.

Пусть все точки правильные.

$S = \{|z - z_0| = R\}$

$\forall z \in S$ найдется круг $B_{r_z}(z)$, на который есть продолжение

У нас покрытие компакта (окружности) $\Rightarrow$ мы можем выбрать конченое подпокрытие шириками, из которых по лемме Лебега возьмем $r > 0$ чтобы у любой точки окружности был шарик радиуса r

Продолжим f в $\Omega = B_R(z_0) \cap B_{r_1}(z_1) \cap \ldots \cap B_{r_n}(z_n)$

Тогда $f \in H(\Omega)$, но $\Omega \supset B_{R+r}(z_0)$

Разложим f в ряд с центром в z_0, он сходится в $B_{R+r}(z_0) \Rightarrow B_R(z_0)$ не круг сходимости.

□

Пример.

1. $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \qquad$ сходится во всех точках $|z| = 1$

   $(f(z))' = \sum \frac{z^{n-1}}{n} \quad (zf'(z))' = \sum z^n = \frac{1}{1-z} \Rightarrow$ точка $z = 1$ особая, хотя интеграл сходится

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$ все точки $|z| = 1$ особые.

Теорема 1.3.

$f \in H(\Omega) \quad \Omega$ – односвязная область в $\mathbb{C}$ и $f \neq 0$ в Ω

Тогда существует $g \in H(\Omega)$, т.ч. $e^{g(z)} = f(z) \forall z \in \Omega$ и g единственна с точностью до $+2\pi i k$, где $k \in \mathbb{Z}$

Доказательство.

$\frac{f'}{f} \in H(\Omega) \Rightarrow$ у нее есть первообразная в Ω

зафиксируем $z_0 \in \Omega$ и подбурем константу так, что $e^{g(z_0)} = f(z_0)$

Докажем, что $e^{g(z)} = f(z)\ \forall z \in \Omega$

Рассмотрим $h(z) = e^{-g(z)}f(z)$

$h(z_0) = 1, h'(z) = -g'(z)e^{-g(z)}f(z) + e^{-g(z)}f'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}e^{-g(z)}f(z) + e^{-g(z)}f'(z) = 0$ значит эту функция константа

Пусть есть g_1 и g_2, тогда $e^{g_1(z)-g_2(z)} = 1 \Rightarrow g_1(z) - g_2(z) = 2\pi i k(z)$ – непрерывная функция и $k(z) \in \mathbb{Z} \Rightarrow k(z)$ фиксированная функция, тк она не может перескочить с одного дискретного значения на другое (функция непрерывна $\Rightarrow$ теорема Больцана-Коши $\Rightarrow$ есть все значения между, а из нет) □

Следствие.

В односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ существует $g \in H(\Omega)$, т.ч. $e^{g(z)} = z$ и g единственна с точностью до $+2\pi i k$, где $k \in \mathbb{Z}$

Доказательство.

Подставим $f(z) = z$

□

Замечание.

$g(z) = \ln|z| + i \arg z$

Причем $\arg z$ непрерывен в Ω

***Определение* 1.6.**

Функции g из следствия из одного класса эквивалентности

Получилась полная аналитическая функция Ln логарифм

Ее представители – голоморфные ветви логарифма.

Свойства Ln.

1. $\operatorname{Ln} z = \{w \in \mathbb{C} : e^w = z\} \quad z \neq 0$
2. $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z \quad z \neq 0$, где Arg = все аргументы z
3. $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$

   $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \ln|z_1 z_2| + i \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \ln|z_1| + \ln|z_2| + i \operatorname{Arg} z_1 + i \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$

Замечание. Для голоморфногой ветви логарифма свойства 3 нет

$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \arg z \quad -\pi < \arg z < \pi$

$\operatorname{Ln} e^{3\pi i/4} = \frac{3\pi i}{4}$

$\operatorname{Ln}\left((e^{3\pi i/4})^2\right) = \operatorname{Ln}\left(e^{2\cdot 3\pi i/4}\right) = \operatorname{Ln}\left(e^{3\pi i/2}\right) = -\frac{\pi i}{2} \neq \frac{3\pi i}{4} + \frac{3\pi i}{4}$

1.2. Лекция 2

***Определение* 1.7.**

$z^p := e^{p \operatorname{Ln} z}$

Замечания.

1. Если $p \in \mathbb{Z} \quad e^{p\cdot 2\pi i k} = 1$ и функция однозначна.

2. Если $p = \frac{q}{r},\ q \in \mathbb{Z},\ r \in \mathbb{N} \quad e^{\frac{q}{r}\cdot 2\pi i k}$ принимает r различных значений (зависит от остатка $k \mod r$)

3. Если $p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ функция принимает счетное число значений $e^{p\cdot 2\pi i k} \neq 1$

Упражнение.

1. Найти i^i

2. $(z^p)' = \frac{pz^p}{z}$ при $z \neq 0$

3. $z^p z^q \neq z^{p+q}$

   $(z^p)^q \neq z^{pq}$

   Если рассмотреть конкретную ветвь

Определение* 1.8** (Ряд Лорана).***

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$$

$f_1(z) := \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ Правильная (регулярная часть)

$f_2(z) := \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ главная часть

Дальше $z_0 = 0$

Свойства.

1. Существует $r, R \in [0, \infty]$, т.ч. $\forall z \quad r < |z| < R$ ряд абсолютно сходится, $\forall z \quad |z| < r$ и $\forall z \ \ |z| > R$ ряд расходится.

   $\frac{1}{r}$ – радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_{-n} z^n$

   R – радиус сходимости правильной части

2. В кольце, лежащем внутри $r < |z| < R$, сходимость равномерная.

3. В кольце сходимости можно почленно дифференцировать.

Теорема 1.4.

Если голоморфная функция раскладывается в кольце $r < |z| < R$ в ряд Лорана, то его коэффициенты определяются однозначно.

$f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n \Rightarrow a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=\rho} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\,d\xi$, где $r < \rho < R$

Доказательство.

$f(\rho e^{it}) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \rho^n e^{int}$ равномерно сходится $\Rightarrow$

$$\int\limits_{|\xi|=\rho} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\,d\xi = \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(\rho e^{it})}{\rho^{n+1} e^{i(n+1)t}} \rho e^{it} i\,dt = i\int\limits_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \rho^k e^{ikt} \cdot \frac{dt}{\rho^n e^{int}} = i\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \int\limits_0^{2\pi} \rho^{k-n} e^{i(k-n)t}\,dt = i a_n \cdot 2\pi$$

$\int\limits_0^{2\pi} \rho^{k-n} e^{i(k-n)t}\,dt = 0$ если $k \neq n$ и $= 2\pi$, если $k = n$

$\square$

Замечание.

Неравенство Коши $|a_n| \leqslant \frac{M(\rho)}{\rho^n}$, где $M(\rho) = \max\limits_{|z|=\rho} |f(z)|$

Теорема 1.5 (Лорана)**.**

Если f голоморфна в кольце $r < |z| < R$, то она там раскладывается в ряд Лорана

Доказательство.

$r < r_1 < r_2 < R_2 < R_1 < R$, тогда f голоморфна в $r_1 \leqslant |z| \leqslant R_1$

Напишем интегральную формулу Коши для этого кольца

$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=R_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$

$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{1}{1 - z/\xi} = \frac{1}{\xi} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\xi}\right)^n$ при $|z| \leqslant R_2$ равномерно сходится.

$\int\limits_{|\xi|=R_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \int\limits_{|\xi|=R_1} f(\xi) \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\xi^{n+1}}\, d\xi = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n \int\limits_{|\xi|=R_1} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\, d\xi$ это дает правильную часть

$\frac{1}{\xi - z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \xi/z} = -\frac{1}{z} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi}{z}\right)^n$ при $|z| \geqslant r_2$ равномерно сходится.

$-\int\limits_{|\xi|=r_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \int\limits_{|\xi|=r_1} f(\xi) \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{z^{n+1}}\, d\xi = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \int\limits_{|\xi|=r_1} f(\xi) \cdot \xi^n\, d\xi$ это дает главную часть

По прошлой теореме такое разложение единственно

□

Теорема 1.6.

f - голоморфна в кольце $r < |z| < R$

Тогда существует $f_1 \in H(R\mathbb{D})$ и $f_2 \in H(\mathbb{C} \setminus r\tilde{\mathbb{D}})$, т.ч. $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$

Если добавить, что $|f_2(z)| \to 0$ при $|z| \to \infty$, то разложение единственно.

Доказательство.

f_1 – сумма правильной части, f_2 – сумма главной части

Единственность. Пусть $f(z) = f_1(z) + f_2(z) = g_1(z) + g_2(z)$

$f_1, g_1 \in H(R\mathbb{D})$ и $f_2, g_2 \in H(\mathbb{C} \setminus r\tilde{\mathbb{D}})$ и $\lim\limits_{|z|\to\infty} f_2(z) = \lim\limits_{|z|\to\infty} g_2(z) = 0$

$$h(z) = \begin{cases} f_1(z) - g_1(z), & \text{при } |z| < R \\ f_2(z) - g_2(z), & \text{при } |z| > r \end{cases}$$

$|h(z)| \leqslant |g_2(z)| + |f_2(z)| \underset{|z|\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow h$ ограничена.

h задана в $\mathbb{C}$ и голоморфна там $\Rightarrow$, тк это ограниченная функция, то по теореме Лиувилля $h = \mathrm{const} \Rightarrow h \equiv 0$

□

***Определение* 1.9.**

f – голоморфна в кольце $0 < |z - z_0| < R$

z_0 – изолированная особая точка

Если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$, то z_0 – устранимая особая точка.

Если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$, то z_0 – полюс

Если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не существует (даже ∞), то z_0 – существенная особая точка.

Пример.
$\frac{\sin z}{z}$, $\frac{1-e^z}{z}$ 0 – устранимая точка
$\frac{1}{\sin z}$, $\frac{1}{z}$ 0 – полюс
$e^{1/z}$ 0 – существенная особая точка.

Как понять, что нет предела? Взять несколько подпоследовательностей, которые сходятся к разным значениям.

$z_n = \frac{1}{n}$ $\lim = \infty$ $z_n = \frac{1}{2\pi i n}$ $\lim = 1$

Теорема 1.7 (характеристика устранимой особой точки)**.**
$f \in H(0 < |z - z_0| < R)$ Тогда равносильны

1. z_0 – устранимая особая точка
2. f ограничена в некоторой окрестности точки z_0
3. Существует функция $g \in H(|z - z_0| < R)$, совпадающая с f при $0 < |z - z_0| < R$
4. В главное части ряда Лорана все коэффициенты равны нулю.

Доказательство.

4)⇒3) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ в качестве g берем сумму этого ряда

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & \text{при } z \neq z_0 \\ a_0, & \text{при } z = z_0 \end{cases}$$

3)⇒1) g голоморфна ⇒ $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \lim\limits_{z \to z_0} g(z) = g(z_0)$

1)⇒2) очевидно

2)⇒4) Выберем $0 < \tilde{R} < R$

$f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, где $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}$

Из неравенства Коши мы можем ограничить коэффициенты

$|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n} \leqslant \frac{M}{r^n} \underset{r \to 0}{\to} 0$, тк $n < 0$

□

Теорема 1.8 (характеристика полюсов)**.**
$f \in H(0 < |z - z_0| < R)$ Тогда равносильны

1. z_0 – полюс
2. Существует $m \in N$ и функция $g \in H(|z - z_0| < R)$, т.к. $g(z_0) = 0$ и $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$ при $z \neq z_0$
3. В главной части ряда Лорана лишь конечное число ненулевых коэффициентов (но они есть).

Доказательство.

3)⇒1) Пусть N – наибольший номер такого ненулевого коэффициента

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=-N}^{-1} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \frac{\sum_{n=0}^{N+1} a_{N-n}(z-z_0)^{N-n}}{(z-z_0)^N} \underset{z\to z_0}{\to} \infty$$

2)⇒3) $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n \Rightarrow f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0^{n-m})$ – ряд орана

1)⇒2) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty \Rightarrow$ есть круг $|z-z_0| \leqslant r$, т.ч. $|f(z)| > 1$ в этом круге

$h(z) = \frac{1}{f(z)}$ в этом круге, тогда $h \in H(0 < |z-z_0| < r)$ и $\lim\limits_{z\to z_0} h(z) = 0$ Доопределим $h(z_0) = 0$.

А для этой функции у нас есть характеристика нуля $\Rightarrow h(z) = (z-z_0)^m \tilde{h}(z)$, где $\tilde{h}(z_0) \neq 0$

Давайте перевернем все обратно. Мы можем это делать, тк $\tilde{h}(z_0) \neq 0$, значит и в окрестности не ноль.

$f(z) = \frac{1/\tilde{h}(z)}{(z-z_0)^m} \Rightarrow \frac{1}{\tilde{h}}$ голоморфна в окрестности z_0

Во всех точках круга, кроме точки z_0, мы определим $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$, а в точке z_0 доопределим $\frac{1}{\tilde{h}}$

TODO: что-то более формальное написать почему тут все хорошо и почему есть непрерывность

□

Замечание.

Мы доказали равносильность

1. z_0 – полюс порядка m функции f (это то m, которое в пункте 2) теоремы)
2. z_0 – ноль кратности m функции $1/f$
3. $f(z) = \sum\limits_{n=-m}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $a_{-m} \neq 0$ в проколотой окрестности точки z_0

1.3. Лекция 3

***Определение* 1.10.**

Функция, не имеющая в Ω никаких особых точек за исключением полюсов, называется мероморфной в Ω

$f \in H(\Omega \setminus E)$ и в точках из E у нее полюсы

Замечание.

E не имеет предельных точек в Ω

Если у нас есть предельная точка в Ω, то есть последовательность полюсов т.ч. в пределе ∞, но тогда значение в этой точке $\infty \Rightarrow$ это полюс, а в окрестности полюса есть шарик, в котором функция голоморфна.

Пример.

$f(z) = \frac{1}{\sin\frac{1}{z}} \quad z = \frac{1}{\pi k}$

f мероморфна в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, но не мероморфна в $\mathbb{C}$

Свойство.

Если f и g мероморфны в Ω, то $f \pm g, fg, f/g$ (если $g \not\equiv 0$) и f' мероморны в Ω

Доказательство.

TODO: написать про $f \pm g$

fg и f/g $\quad f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$ $g(z) = ()z - z_0)^n \psi(z)$ $\varphi(z_0) \neq 0$ $\psi(z_0) \neq 0$
$f(z)g(z) = (z - z_0)^{m+n}\varphi(z)\psi(z)$ $\quad f(z)/g(z) = (z - z_0)^{m-n}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$

TODO: написать про голоморфность

$f'(z) = (z - z_0)^m \varphi'(z) + m(z - z_0)^{m-1}\varphi(z) = (z - z_0)^{m-1}(m\varphi(z) + (z - z_0)\varphi'(z))$ в скобках голоморфная функция

□

Теорема 1.9 (характеристика существенных особых точек)**.**

$f \in H(0 < |z - z_0| < R)$, тогда равносильны

Тогда равносильны

1. z_0 – существенная особая точка
2. В главной части ряда Лорана лишь бесконечное число ненулевых слагаемых

Пример.

$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{3!} + \ldots$
$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$
$\sin 1/z = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{3!} + \frac{1}{z^5} \cdot \frac{1}{5!} + \ldots$

Замечание.

В окрестности 0 $e^{1/z}$ принимает все значение, кроме 0.

Теорема 1.10 (Пикара)**.**

a – существенная особая точка f $\Rightarrow$ в проколотой окрестности точки a f принимает все значения, кроме возможно одного.

Теорема 1.11 (Сохоцкого)**.**

a – существенная особая точка f

Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $f(0 < |z - a| < \varepsilon) = \mathbb{C}$ Более того $\forall A \in \mathbb{C}$ или $A = \infty$ найдется последовательность $z_n \to a$, т.ч. $f(z_n) \to A$

Доказательство.

Поймем, что из "более того" следует $\forall \varepsilon > 0$ $f(0 < |z - a| < \varepsilon) = \mathbb{C}$.

Возьмем число a возьмем последовательность $z_n \to a$, т.ч. $f(z_n) \to A$ начиная с какого-то момента $z_n \in 0 < |z - a| < \varepsilon \Rightarrow$ предел образа лежит в замыкании

Поймем, что существует последовательность z_n, которая стремится к a, а значения функции к бесконечности.

Иначе f ограничена в окрестности точки a и тогда a – устранимая особая точка.

Пусть $A \in \mathbb{C}$. Если $\forall \varepsilon > 0 \quad A \in f(0 < |z - a| < \varepsilon)$, то найдутся $|z_n - a| < \frac{1}{n}$, т.ч. $f(z_n) = A$ и это нужная последовательность.

Можно считать, что $f(z) \neq A$ при $0 < |z - a| < \varepsilon$.

Рассмотрим $g(z) = \frac{1}{f(z)-A}$ голоморфна в $0 < |z-a| < \varepsilon$

$f(z) = A + \frac{1}{g(z)}$

a не может быть ни устранимой точкой, ни полюсом g. Если a – полюс для g, то a – устранимая особая точка f, а если a – устанимая особая точка g, то a – устанимая особая точка или полюс f

$\Rightarrow a$ – существенная особая точка $g \Rightarrow \exists z_n \to a$, т.ч. $g(z_n) \to \infty \Rightarrow f(z_n) = A + \frac{1}{g(z_n)} \to A$

□

***Обозначения* 1.1.**

$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$f(\infty) = \ldots$

Непрерывность в ∞ $f(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$

$\forall z_n \to \infty \Rightarrow f(z_n) \to f(\infty)$

***Определение* 1.11.**

Особая точка $z = \infty \quad f \in H(|z| > R)$

∞ – устранимая особая точка f, если $\exists$ конечный $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$

∞ – полюс f, если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$

∞ – существенная особая точка f, если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ не существует.

Замечание.

$f \in H(|z| > R) \Leftrightarrow g(z) = f(1/z) \in H(0 < |z| < \frac{1}{R})$

$1/z$ – голоморфная функция, композиция голоморфных функций – голоморфная функция $\Rightarrow g$ – голоморфная функция

$\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \lim\limits_{z\to 0} g(z)$

Утверждение 1.12.

∞ – устанимая особая точка $\Leftrightarrow$ f ограничена в окрестности ∞ $\Leftrightarrow$ в ряде Лорана f нет положительных степеней

∞ – устанимая особая точка $f \Leftrightarrow 0$ – устранимая особая точка $g = f(1/z) \Leftrightarrow g$ ограничена в окрестности $0 \Leftrightarrow f$ ограничена в окрестности ∞

$\Leftrightarrow$ в главной части ряда Лорана (по степеням z) все слагаемые нулевые для g

$\Leftrightarrow$ в ряде Лорана (по степеням z) нет положительных степеней для g

***Определение* 1.12.**

f голоморфна в ∞ если там устранимая особая точка

Утверждение 1.13.

∞ –полюс $f \Leftrightarrow$ в ряде Лорана f для f ненулевое конечное множество положительных степеней

∞ – полюс $f \Leftrightarrow 0$ – полюс $g = f(1/z) \Leftrightarrow$ в главной части ненеулвое коенчное число слагаемых для g $\Leftrightarrow$ в ряде Лорана f для f ненулевое конечное множество положительных степеней

***Определение* 1.13 (Сфера Римана).**

TODO: рисунок

Короче это шарик на плоскости и каждую точку можно получить так проекцию точки окружности из северного полюса.

Следствие.

1. Расстояние между образами точек z и z_1 равно $\frac{|z-z_1|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|z_1|^2}}$. Расстояние между образами z и ∞ равно $\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$

   Доказательство.
   $u+iv$, w $\frac{z}{1+|z|^2}$ и $\frac{|z|^2}{1+|z|^2}$

   $$\rho = \left|\frac{z}{1+|z|^2} - \frac{z_1}{1+|z_1|^2}\right| + \left(\frac{|z|^2}{1+|z|^2} - \frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2}\right)^2 =$$
   $$= \frac{z\bar{z}}{(1+|z|^2)^2} + \frac{z_1\bar{z_1}}{(1+|z_1|^2)^2} - \frac{z\bar{z_1}+\bar{z}z_1}{(1+|z|^2)(1+|z_1|)^2} + \frac{(|z|^2-|z_1|^2)^2}{(1+|z|^2)^2(1+|z_1|^2)^2} =$$
   $$= \frac{|z|^2}{(1+|z|^2)^2} + \frac{|z_1|^2}{(1+|z_1|^2)^2} - \frac{2\operatorname{Re} z\bar{z_1}}{(1+|z|^2)(1+|z_1|)^2} + \frac{(|z|^2-|z_1|^2)^2}{(1+|z|^2)^2(1+|z_1|^2)^2}$$
   $$\frac{|z-z_1|^2}{(1+|z|^2)(1+|z_1|^2)} = \frac{|z|^2+|z_1|^2-2\operatorname{Re} z\bar{z_1}}{(1+|z|^2)(1+|z_1|^2)}$$

   TODO: досчитать

   Для z и ∞
   $$\rho = \left|\frac{z}{1+|z|^2}\right|^2 + \left(1 - \frac{|z|^2}{1+|z|^2}\right)^2 = \frac{|z|^2}{(1+|z|^2)^2} + \frac{1}{(1+|z|^2)^2} = \frac{1}{1+|z|^2}$$ □

2. Сходимость в $\bar{\mathbb{C}}$ равносильна сходимости на сфере Римана.

   Доказательство.
   $\frac{|z-z_1|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|z_1|^2}}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$

   $$z_n \to z \Rightarrow |z_n - z| \to 0 \Rightarrow \frac{|z-z_n|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|z_1|^2}} \to 0$$
   $$\frac{|z-z_n|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|z_1|^2}} \to 0 \Rightarrow |z - z_n| \to 0$$
   □

3. $\bar{\mathbb{C}}$ – компакт

Теорема 1.14 (Лиувилля)**.**
$f \in H(\bar{\mathbb{C}}) \Rightarrow f \equiv \text{const}$

Доказательство.
$f \in H(\bar{\mathbb{C}}) \Rightarrow f \in C(\bar{\mathbb{C}}) \Rightarrow f$ ограничена по теореме Вейерштрасса $\Rightarrow$ по теореме Лиувилля это константа

□

Замечание Лектописца.

Теорема 1.15 (Лиувилля)**.**
f – целая и ограниченная функция $\Rightarrow f$ – константа

1.4. Лекция 5

Лемма (Жордана)**.**

$C_{R_n} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = R_n, \operatorname{Im} z > 0\}$

$R_n \to +\infty$ $m_n = \sup\limits_{z \in C_{R_n}} |g(z)| \to 0$

Тогда $\forall \lambda > 0$ $\int\limits_{C_{R_n}} g(z)e^{i\lambda z}\, dz \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

Доказательство.

$z = R_n e^{e\varphi}$ $\quad |e^{i\lambda z}| = |e^{i\lambda R_n(\cos\varphi + i\sin\varphi)}| = e^{-\lambda R_n \sin\varphi} \underset{\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]}{\leqslant} e^{-2\lambda R^n/\pi}$

$\sin\varphi \geqslant \frac{2\varphi}{\pi}$ при $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\int\limits_{C_{R_n}} g(z)e^{i\lambda z}\, dz = |\int\limits_0^\pi g(R_n e^{i\varphi})e^{i\lambda R_n e^{i\varphi}} R_n e^{i\varphi} i\, d\varphi| \leqslant \int\limits_0^\varphi M_n R_n e^{-\lambda R_n \sin\varphi}\, d\varphi = 2M_n R_n \int\limits_0^{\pi/2} e^{-\lambda R_n \sin\varphi}\, d\varphi \leqslant$$

$$2M_n r_n \int\limits_0^{\pi/2} e^{-2\lambda R_n \varphi/\pi}\, d\varphi = 2M_n R_n \left.\frac{-e^{-2\lambda R_n\varphi/\pi}}{2\lambda R_n/\pi}\right|_0^{\pi/2} \leqslant \frac{\pi M_n}{\lambda} \to 0$$

□

Пример.

$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\lambda x}{1+x^2}\, dx = I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\lambda x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{1+x^2}\, dx$

$f(z) = \frac{e^{i\lambda z}}{1+z^2}$

$\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i \sum res = 2\pi i res_{z=i} \frac{e^{i\lambda z}}{1+z^2} = 2\pi i \left.\frac{e^{i\lambda z}}{(1+z^2)'}\right|_{z=i} = 2\pi i \frac{e^{-\lambda}}{2i} = \frac{\pi}{e^\lambda}$

$\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\, dz = \int\limits_{-R}^{R} + \int\limits_{C_R} \to \int\limits_{-\infty}^{+\infty} +0$

TODO: Приделать рисунок

Лемма (о полувычете)**.**

a – полюс первого порядка функции f

$C_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = \varepsilon, \alpha \leqslant \arg(z-a) \leqslant \beta\}$

Тогда $\int\limits_{C_\varepsilon} f(z)\, dz \underset{\varepsilon\to 0+}{\to} (\beta-\alpha) i res_{z=a} f(z)$

Доказательство.

$f(z) = \frac{c}{z-a} + g(z)$, где g голоморфна в окрестности точки a

$\int\limits_{C_\varepsilon} f(z)\, dzz = \int\limits_{C_\varepsilon} \frac{c}{z-a}\, dz + \int\limits_{C_\varepsilon} g(z)\, dz$

$\left|\int\limits_{C_\varepsilon} g(z)\, dz\right| \leqslant 2\pi\varepsilon \max|g(z)| \leqslant 2\pi\varepsilon M \to 0$

$\int\limits_{C_\varepsilon} \frac{c}{z-a}\, dz = \int\limits_\alpha^\beta \frac{c}{\varepsilon e^{i\varphi}} = \varepsilon e^{i\varphi} i\, d\varphi = ci(\beta-\alpha) = i(\beta-\alpha) res_{z=a} f(z)$

$a + \varepsilon e^{i\varphi} = z$

□

Отступление

***Определение* 1.14** (Главное значение интеграла)**.**

$x_0 \in (a,b)$ особая точка функции f

$$v.p. \int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_a^{x_0-\varepsilon} + \int\limits_{x_0}^b f(x)\,dx$$

Замечание.

Если $\int\limits_a^b f(z)\,dx$ сходится, то

$$v.p. \int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

Пример.

$$v.p. \int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{-1}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x}$$

TODO: не успел дописать(

Если особых точек несколько, то можем выкинуть интервалы около каждой точки и устремить размер каждого интервала к 0.

Если особая точка бесконечность, то надо смотреть на $\int\limits_{-R}^R f(x)\,dx \to v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \Rightarrow v.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,dx = 0$

Пример.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\lambda x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\sin\lambda x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} e^{i\lambda x}}{x}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Im} v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{x}\,dx$$

Надо найти $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{x}\,dx =: I$

$$f(z) = \frac{e^{i\lambda z}}{z}$$

TODO: рисунок

$\int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz = 0$, тк в область не попали особые точки

$$\int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz = \int\limits_{-R}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{R} + \int\limits_{C_\varepsilon} + \int\limits_{C_R} = I + \int\limits_{C_\varepsilon} + 0$$

$$\int\limits_{C_\varepsilon} \frac{e^{i\lambda z}}{z}\,dz \to -\pi i res_{z=0} f(z) = -\pi i \frac{e^{i\lambda z}}{z'}\Big|_{z=0} = -\pi i$$

$$I - \pi i = 0 \Rightarrow I = \pi i$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\lambda x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Пример.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}} \quad p \in (0,1)$$

$$f(z) = \frac{e^{(p-1)\operatorname{Ln} z}}{1+z} \quad \operatorname{Ln} z = \ln z \text{ если } z > 0$$

$$\int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz = 2\pi i \sum res = 2\pi i res_{z=-1} = 2\pi i e^{(p-1)\operatorname{Ln}(-1)} = 2\pi i e^{(p-1)\pi i}$$

$$\int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz = \int\limits_{C_\varepsilon} + \int\limits_{C_R} + \int\limits_{\varepsilon}^{R} + \int\limits_{Re^{2\pi i}}^{\varepsilon e^{2\pi i}}$$

$$\left|\int\limits_{C_R} f(z)\,dz\right| \leqslant 2\pi R \max|f(z)| \leqslant 2\pi R \tfrac{R^{p-1}}{R-1}$$

$$\left|\int\limits_{C_\varepsilon} f(z)\,dz\right| \leqslant 2\pi \varepsilon \max|f(z)| \leqslant 2\pi\varepsilon \tfrac{\varepsilon^{p-1}}{\varepsilon-1} \to 0$$

$$\int\limits_{Re^{2\pi i}}^{\varepsilon e^{2\pi i}} = \int\limits_{R}^{\varepsilon} \tfrac{e^{(p-1)(\ln x + 2\pi i)}}{1+x}\,dx = -e^{p-1} 2\pi i \int\limits_{\varepsilon}^{R} \tfrac{x^{p-1}}{1+x}\,dx \to -e^{2\pi i(p-1)} I$$

$$I(1-e^{2\pi i(p-1)}) = 2\pi i e^{2\pi i(p-1)}$$

$$I = \tfrac{2\pi i e^{p-1}\pi i}{1-e^{2\pi i(p-1)}} = -\tfrac{2\pi i e^{\pi i p}}{1-e^{2\pi i p}} = \tfrac{2\pi i e^{\pi i p}}{e^{2\pi i p}-1} = \pi \tfrac{2i}{e^{\pi i p}-e^{-\pi i p}} = \tfrac{1}{\sin \pi p}$$

Теорема 1.16.

f – мороморфна в $\mathbb{C}$, имеет полюсы $a_1, a_2, \dots, a_n$ и в ∞ устранимая особая точка или полюс. Тогда

$f(z) = C + G(z) + \sum\limits_{k=1}^{n} G_k(z)$, где G_k – главная часть ряда Лорана в a_k, G – правильная часть ряда Лорана в ∞

В частности f – дробно рациональная функция

Доказательство.

$\varphi(z) = f(z) - G(z) - \sum\limits_{k=1}^{n} G_k(z)$

Для φ точки a_k – устранимые особые точки $\Rightarrow \varphi \in (\mathbb{C}), G_k \in H(\mathbb{C} \setminus \{a_k\})$

Точка ∞ – устранимая особая точка для $\varphi \Rightarrow \varphi \in H(\bar{\mathbb{C}}) \Rightarrow \varphi \equiv \text{const}$

$\square$

Теорема 1.17.

f мероморфна в $\mathbb{C}$, a_k – ее полюсы

Если существует такая последовательность R_n, что $\max\limits_{|z|=R_n} |f(z)| =: M_{R_n} \to 0$,

Тогда $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{|a_k|<R_n} G_k(z)$

Доказательство.

$I_n(z) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=R_n} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$ при $|z| < R_n$

$|I_n(z)| \leqslant \frac{2\pi R_n}{2\pi} \frac{M_{R_n}}{R_n - |z|} \to 0$

$I_n(z) = res_{\xi=z} \frac{f(\xi)}{\xi - z} + \sum\limits_{|a_k|<R_n} res_{\xi=a_k} \frac{f(\xi)}{\xi - z} = res_{\xi=a_k} \frac{G_k(\xi)}{\xi - z}$

$\square$