Билеты по матану

...

24 июня 2021 г.

Содержание

1. ...

1.1. Лекция 1

***Определение* 1.1.**

$L^p(E,\mu) := \{f : E \to \bar{\mathbb{R}} | \int\limits_E |f|^p \, d\mu < +\infty\}$

$||f||_p = \left(\int\limits_E |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$

$\operatorname{ess\,sup} |f(x)| := \inf\{A : |f(x)| \leqslant A$ при п.в. $A\}$

$||f||_\infty := \operatorname{ess\,sup} |f|$

Теорема 1.1.

$L^p(E,\mu)$ – полное пространство

Доказательство. Для $p < +\infty$

$f_n \in L^p(E,\mu) \forall \varepsilon > 0 \exists N \ \forall m,n \geqslant N ||f_n - f_m||_p < \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{1}{2} \ \exists n_1 \ \ \forall m \geqslant n_1, n \geqslant n_1 \ \ ||f_n - f_m|| < \frac{1}{2}$

$\varepsilon = \frac{1}{4} \ \exists n_1 \ \ \forall m \geqslant n_1, n \geqslant n_1 \ \ ||f_n - f_m|| < \frac{1}{4}$

$||f_{n_k} - f_{n_{k-1}}|| < \frac{1}{2^{k-1}} \Rightarrow \sum\limits_{k=1} \infty \left\|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\right\| < 1$

$S(t) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|f_{n_k}(t) - f_{n_{k-1}}(t)\right| \in [0,+\infty] \ \ S_m(t)$ – частичная сумма

$\|S_m\| = \left\|\sum\limits_{k=1}^{m} \left|f_{n_k}(t) - f_{n_{k-1}}(t)\right|\right\| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{m} \left|f_{n_k}(t) - f_{n_{k-1}}(t)\right| < 1$

$\|S_m\|^p = \int\limits_E S^p \, d\mu = \int\limits_E \lim S_m^p \, d\mu \leqslant \liminf \int\limits_E S_m^p \, d\mu = \liminf \|S_m\|^p \leqslant 1$

$\Rightarrow S(t)$ почти всюду конечно $\Rightarrow$ ряд $\sum \left|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\right|$ сходится при почти всех t

$\Rightarrow \sum \left(f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\right)$ сходится при почти всех t

$\sum\limits_{k=1}^{m} \left(f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\right) = f_{n_m} - f_{n_0}$ имеет предел при почти всех $t \Rightarrow f_{n_m}(t)$ имеет предел при почти всех t

Осталось понять, что $\|f_{n_m} - f\|^p \to 0$

$\|f_{n_m} - f\|^p = \int\limits_E |f_{k_m} - f|^p \, d\mu \to \int\limits_E \lim |f_{k_m} - f|^p \, d\mu = 0$

$-f_{n_m} - f = \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\right) \Rightarrow |f - f_{n_k}| \leqslant S \Rightarrow |f - f_{n_k}|^p \leqslant S^p$ а это суммируемая мажоранта

□

***Определение* 1.2.**

Функция ступенчатая, если у нее конечное число значений

Замечание.

Если f ступенчатая и $f \in L^P(E,\mu)$ при $p < +\infty$, то $\mu E\{f \neq 0\} < +\infty$

Доказательство.

Пусть $c = \min$ по модулю ненулевого значения

$+\infty > \int\limits_E |f|^p \, d\mu \geqslant \int\limits_{E\{f \neq 0\}} c^p \, d\mu$

$\square$

***Определение* 1.3.**
$A \subset X$ – метрическое пространство A – всюду плотное, если $\operatorname{Cl} A = X$

Теорема 1.2.
Множество ступенчатых функций из $L^p(E,\mu)$ плотно в $L^p(E,\mu)$

Доказательство.
$p = +\infty$ Возьмем $f \in L^p(E,\mu)$ и подправим ее так, что

$|f| \leqslant \|f\|_\infty < +\infty$ **TODO:** рисунок

$p < +\infty$ Пусть $f \geqslant 0 \Rightarrow$ найдется $f_n \leqslant f$ – простая, т.ч. $\lim f_n(t) = f(t) \forall t \in E$ монотонно при каждом f

$\|f - f_n\|_p^p = \int\limits_E |f_n - f|^p \, d\mu \to \int\limits_E \lim |f_n - f|^p \, d\mu = 0$

Если f – производ. $f = f_+ - f_- \Rightarrow \exists f_n, g_n \in L^p(E,\mu)$, т.ч. $\|f_n - f_+\|_p \to 0$ $\|g_n - f_-\|_p \to 0$

$\|(f_n - g_n) - (f_+ - f_-)\|_p \leqslant \|f_n - f_+\|_p + \|g_n - f_-\|_p \to 0$

$\square$

Теорема 1.3.
Если $p < +\infty$ и $E \in \mathbb{R}^n$ измерима по Лебегу, то множество бесконечно дифференцируемых функция, равных нулю вне компакта, плотно в $L^p(E,\mu)$

***Обозначения* 1.1.**
$C_0^\infty(E) = \{f \in C^\infty(E)$ и $\operatorname{Cl}\{f \neq 0\}$– компакт, т.е. это огр. множество$\}$

***Определение* 1.4.**
Оператор сдвига $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ $\quad h \in \mathbb{R}^m$

$f_h(x) := f(x+h)$

Теорема 1.4. о непрерывности сдвига

1. Если f равномерно непрерывна, то $\|f_h - f\|_\infty \to 0$
2. Если $f \in L^p(E,\mu)$ при $p < +\infty$, то $\|f_h - f\|_p \to 0$
3. Если f непрерывна на $\mathbb{R}$ и 2π периодична, то $\|f_h - f\|_\infty \to 0$

Доказательство.

1. $\|f_h - f\|_\infty = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |f_h(x) - f(x)| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|$

   $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |h| < \delta \, \forall x \in \mathbb{R}^n \, |f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$

2. $f \in L^p(E,\mu)$ найдем $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, т.ч. $\|f - g\|_p < \varepsilon$

   Пусть $g = 0$ вне $B_R(0)$

   $\|f_h - f\|_p \leqslant \|f_h - g_h\|_p + \|g_h - h\|_p + \|g - f\|_p < 2\varepsilon + \|g_h - g\|_p < 3\varepsilon$

   Надо бы доказать последний переход, но g равномерно непрерывна $\Rightarrow \|g_h - g\|_\infty \to 0$

   $\|g_h - g\|_p^p = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x+h) - g(x)|^p \, dx = \int\limits_{B_{2R}(0)} |\ldots|^p \, dx \leqslant \lambda B_{2R}(0) \cdot \|g_h - g\|_\infty \to 0$

3. Теорема кантора

□

***Определение* 1.5.**

Скалярное произведение $< \cdot, \cdot >: X \times X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$

1. $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ и $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
3. $< x, y >= < y,\bar{} x >$
4. $< \alpha x, y >= \alpha < x, y >$

Гильбертово пространство – полное пространство со скалярным произведением

Пример.

$L^2(E,\mu) \quad < f, g >:= \int\limits_E f\bar{g}\, d\mu$

$l^2 = \{x = (x_1, x_2, \ldots) : \sum |x^k|^2 < +\infty\} \quad < x, y >:= \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y_k}$

$\|x\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2}$

1.2. Лекция 2

Пример.

Задача: есть фотография $4000 \times 6000 = 24 \cdot 10^6$, на каждый пиксель на по 24 бита, а это $24^2 \cdot 10^6 \approx 5 \cdot 10^8 \approx 60$ Мегабайт, но не каждый набор пикселей это фотография, обычно соседние пиксели похожих цветов. Хотим приближать набор векторов меньшей размерности приблизить к фотографии.

Лемма.

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится, то $\left\langle \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n, y \right\rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y\rangle$

Доказательство.

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \to S \Rightarrow \langle S_n, y\rangle \to \langle S, y\rangle$

Но также $\langle S_n, y\rangle = \left\langle \sum\limits_{k=1}^{n} x_k, y \right\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x_n, y\rangle$

□

***Определение* 1.6.**

x, y – ортогональны $x \perp y$, если $\langle x, y\rangle = 0$

***Определение* 1.7.**

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ – ортогональный ряд, если $x_k \perp x_n$ при $k \neq n$

Теорема 1.5.

В гильбертовом пространстве ортогональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < +\infty$

В этом случае $\left\|\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\right\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$

Доказательство.

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \quad C_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \Leftrightarrow S_n$ – фундаментальная $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \ \forall m \geqslant n \geqslant N \quad \|S_m - S_n\|^2 < \varepsilon$

$\|S_m - S_n\|^2 = \left\langle \sum\limits_{k=n+1}^{m} x_k, \sum\limits_{j=n+1}^{m} x_j \right\rangle = \sum\limits_{k=n+1}^{m} \sum\limits_{j=n+1}^{m} \langle x_k, x_j \rangle = \sum\limits_{k=n+1}^{m} \|x_k\|^2 = C_m - C_n \Leftrightarrow C_n$ – фундаментальная $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$

$\langle S_n, S_n \rangle = \|S_n\|^2 = C_n \to \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$

$\langle S_n, S_n \rangle \to \langle S, S \rangle$

□

Следствие.

Если ортогональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ перестановка, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\varphi n}$ сходится к той же сумме

Доказательство.

$S = \sum x$ – сходится $\Leftrightarrow \sum \left\|x_{\varphi(n)}\right\|^2 \sum \|x_n\|^2 < \infty \Leftrightarrow \tilde{S} = \sum x_{\varphi(n)}$ – сходится

$\left\|S - \tilde{S}\right\|^2 = \left\langle S - \tilde{S}, S - \tilde{S} \right\rangle = \left\langle S - \tilde{S}, \sum x_n - \sum x_{\varphi(n)} \right\rangle = \sum \left\langle S - \tilde{S}, x_n - x_{\varphi(n)} \right\rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left\langle x_k - x_{\varphi(k)}, x\right.$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\langle x_n, x_n \rangle - \langle x_n, x_n \rangle - \left\langle x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n)} \right\rangle + \left\langle x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n)} \right\rangle \right) = 0$

□

***Определение* 1.8.**

$x_1, x_2, \ldots$ – векторы в H

– ортогональная система, если $x_k \perp x_n$ при $k \neq n$ и $x_n \neq 0 \ \forall n$ – ортонормированная система, если $\langle x_k, x_n \rangle = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq n \\ 1 & \text{при } k = n \end{cases}$

Замечание.

Ортогональная система линейно независима

Доказательство.

От противного $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n = 0 \Rightarrow 0 = \langle c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n, x_k \rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} c_k \langle x_j, x_k \rangle = c_k \langle x_k, x_k \rangle = c_k \|x_k\|^2 \Rightarrow c_k = 0$

□

Пример ортогональных систем.

1. $l^2 \quad e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ – ортонормированная система
2. $L^2[0, 2\pi] \quad 1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots$ – ортогональная система

3. $L^2[0, 2\pi]$ $\quad e^{int}, n \in \mathbb{Z}$ – ортогональная система

$$\left\langle e^{int}, e^{ikt} \right\rangle = \int\limits_0^{2\pi} e^{int} \cdot e^{-ikt}\, dt = \begin{cases} 2\pi & \text{если } n = k \\ \frac{e^{i(n-k)t}}{n-k}\Big|_0^{2\pi} = 0 & \text{если } n \neq k \end{cases}$$

4. $L^2[0, \pi]$ $\quad 1, \cos t, \cos 2t, \ldots$ ортогональная система $\qquad \sin t, \sin 2t, \ldots$ ортогональная система

Теорема 1.6.

Пусть $e_1, e_2, \ldots$ – ортогональная система

$x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ сходящийся ряд

Тогда $c_n = \dfrac{\langle x, e_n \rangle}{\|e_n\|^2}$

Доказательство.

$$\langle x, e_n \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, e_n \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \langle e_k, e_n \rangle = c_n \langle e_n, e_n \rangle = c_n \|e_n\|^2$$

□

***Определение* 1.9.**

Пусть $e_1, e_2, \ldots$ ортогональная система, $x \in H$

$c_n(x) = \dfrac{\langle x, e_n \rangle}{\|e_n\|^2}$ – коэффициент Фурье x по системе $\{e_n\}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x) e_n$ – ряд Фурье x по системе $\{e_n\}$

Замечания.

1. Теорема утверждает, что если x – сумма ортогонального ряда, то это ряд Фурье
2. $x = c_n e_n + z$, где $z = \sum\limits_{k \neq n} c_k e_k$

   $c_n e_n$ – проекция на e_n

Теорема 1.7 (о частичных суммах ряда Фурье)**.**

$x \in H \quad e_1, e_2, \ldots$ – ортогональная система, $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(x) e_k$

Тогда

1. S_n – проекция x на $lin\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} =: L_n$ **TODO:** какая-то очень красивая L
2. S_n – наилучшее приближение к x в $L - n$, т.ч.

   $\|x - S_n\| = \min\limits_{y \in L_n} \|x - y\|$
3. $\|S_n\| \leqslant \|x\|$

Доказательство.

1. $z := x - S_n$ и покажем, что $z \perp L_n$

   Надо доказать, что $z \perp e_k$ при $k = 1, 2, \ldots, n$

   $\langle z, e_k \rangle = \langle x - S_n, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \left\langle \sum\limits_{j=1}^{n} c_j(x) e_j, e_k \right\rangle = \langle x, e_k \rangle - \sum\limits_{j=1}^{n} c_j(x) \langle e_j, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - c_k(x) \langle e_k, e_k \rangle = 0$

2. $x - S_n \perp y$, т.ч. $y \in L_n$
   $x - y = S_n + z - y = (S_n - y) + z$, при этом $S_n - y \in L_n$
   $\|x - y\|^2 = \|S_n - y\|^2 + \|z\|^2 \geqslant \|z\|^2 = \|x - S_n\|^2$ и равенство, когда $y = S_n$
3. $x = S_n + z$, где $S_n \perp z \Rightarrow \|x\|^2 = \|S_n\|^2 + \|z\|^2 \geqslant \|S_n\|^2$

□

Следствие неравенство Бесселя.
$\|S\| \leqslant \|x\|$

Доказательство.
$\|S_n\| \leqslant \|x\|$, но также $\|S_n\| \to \|S\|$

□

Теорема 1.8 (Рисса-Фишера).
$x \in H \quad e_1, e_2, \ldots$ – ортогональная система

1. Ряд Фурье для x сходится
2. $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_n(x)e_n + z$, где $z \perp e_n \ \forall n$
3. $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_n(x)e_n \Leftrightarrow \|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_n(x)^2 e_n^2$ – тождество Парсевая

Доказательство.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x)e_n$ – ортогональный ряд сходится $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|c_n(x)e_n\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n(x)|^2 \|e_n\|^2 < +\infty$
   $\sum\limits_{n=1}^{N} |c_n(x)|^2 \|e_n\|^2 = \|S_N\|^2 \leqslant \|x\|^2$
2. $z := x - \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x)e_n \quad \langle z, e_n\rangle = \langle x, e_n\rangle - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle c_k(x)e_k, e_n\rangle = \langle x, e_n\rangle - c_k(x)\langle e_n, e_n\rangle = 0$
3. $z \perp \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x)e_n \Rightarrow \|x\|^2 = \|\sum c_n(x)e_n\|^2 + \|z\|^2 = \sum |c_n(x)|^2 \|e_n\|^2 + \|z\|^2$

□

Замечания.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x)e_n$ – ортогональная проекция на $\mathrm{Cl}\, Lin\{e_n\}$
2. Если $\sum c_n^2 < \infty$, то существует x, т.ч. $c_n(x) = c_n \forall n$

***Определение* 1.10.**
Ортогональная система замкнута, если $\forall x \in H$ выполняется тождаство Парсеваля.

Ортогональная система полная, если не существует ненулевого z, т.ч. $z \perp e_n \ \forall n$

Ортогональная система базис, если $\forall x \in H \quad x = \sum c_n(x)e_n$

Теорема 1.9.
$e_1, e_2, \dots$ – ортогональная система

Тогда равносильны

1. Базис
2. $\forall x, y \in H \quad \langle x, y\rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x)\bar{c_n}(y) \left\|e_n\right\|^2$
3. Полная
4. Замкнутая
5. $\operatorname{Cl} Lin\{e_n\} = H$

Доказательство.

2)⇒4) Очев $x = y$

4)⇒1) 3 из теоремы

1)⇒2) $x = \sum c_n(x)e_n$
$y = \sum c_n(y)e_n$
$\langle x, y\rangle = \sum\sum c_n(x)\bar{c_n}(y)\langle e_n, e_k\rangle$

1)⇒5) $x = \sum c_n(x)e_n \in \operatorname{Cl} Lin\{e_n\}$

1)⇒3) $z \perp e_n \Rightarrow z = \sum c_n(x)e_n = 0$

5)⇒3) Если $z \perp e_n \ \forall n \Rightarrow z \perp Lin\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \Rightarrow z \perp \operatorname{Cl} Lin\{e_n\} = H \Rightarrow z \perp z \Rightarrow \langle z, z\rangle = 0 \Rightarrow z = 0$

3)⇒1) $x = \sum c_n(x)e_n + z$, где $z \perp e_n \Rightarrow$ по 3 $z = 0 \Rightarrow e_n$ – базис

$\square$

1.3. Лекция 4

Пример Функция Хаара.
$h_0 \equiv 1, \quad h_1 = \begin{cases} 1 & \text{на } [0, \frac{1}{2}) \\ -1 & \text{на } [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}, \quad h_2 = \begin{cases} 1 & \text{на } [0, \frac{1}{4}) \\ -1 & \text{на } [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \end{cases}, \quad h_3 = \begin{cases} 1 & \text{на } [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ -1 & \text{на } [\frac{3}{4}, 1) \end{cases} \dots$

Функции из одного блока ортогональны.

Функции из разных блоков ортогональны, тк половина на 1, половина на -1

Докажем, что это базис в $L^2[0,1]$

$Lin\{h_0, h_1, \dots, h_{2^n-1}\} = Lin\{\mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})} : k = 0, 1, \dots, 2^n - 1\}$

$\operatorname{Cl} Lin\{h_n\} = L^2[0,1]$

$\operatorname{Cl} Lin\{\mathbb{1}_A : A$ – отрезок с двочино разиональными точками$\}$

***Определение* 1.11** (Наилучшее приближение)**.**
$a \in X, A \subset X \quad \rho(0, A) = \inf\limits_{x \in A} d(a, \infty)$

Теорема 1.10.

B – гильбертово пространство, A – выпуклое замкнутое. Тогда $\exists$ единственное $x \in A$, реализующее наилучшее приближение

Теорема 1.11.

L – замкнутое подпространство в гильбертовом пространстве и $x \notin L$. Тогда $\exists!$ единственный элемент наилучшего приближения x в L и если это y, то $x - y \perp L$, т.е. $x = y + z$, где $y \in L$, $z \perp L$

(Такой y называется проекцией x на L)

Доказательство.

По предыдущей теореме $\exists! y$ – элемент наилучшего приближения

$\|x-y\| = \inf\limits_{w \in L} \|x-w\| \quad z := x - y$ надо доказать, что $z \perp l \ \forall l \in L$

$\|x-y\| \leqslant \|x-y-\lambda l\| \Rightarrow$ верно и для квадратов

$\|x-y\|^2 \leqslant \|x-y-\lambda l\|^2 \Rightarrow \|z\|^2 \leqslant \|z-\lambda l\|^2 = \langle z-\lambda l, z-\lambda l\rangle = \|z\|^2 - \lambda \langle l, z\rangle - \bar{\lambda} \langle z, l\rangle + |\lambda|^2 \|l\|^2$

Предположим, что $|\lambda|^2 \|l\|^2 \neq 0$

$|\lambda|^2 \|l\|^2 \geqslant \lambda \langle l, z\rangle + \bar{\lambda} \langle z, l\rangle \quad \lambda := \langle \bar{l, z}\rangle t, \quad t > 0$

$t^2 |\langle l, z\rangle|^2 \|l\|^2 \geqslant 2 |\langle l, z\rangle|^2 \cdot t$

$t \|l\|^2 \geqslant 2 \forall t > 0$ противоречие

□

***Определение* 1.12** (Ортогональная проекция на L)**.**

$P_L : H \to L$

$x \to y$, т.ч. $x - y \perp L$

Замечание.

y определена однозначно

$y, y' \in L$

$x - y \perp L,\ x - y' \perp L \Rightarrow y - y' \perp L$, хотя они лежат в $L \Rightarrow y - y' = 0$

***Определение* 1.13** (Ортогональное дополнение)**.**

$L^{\perp} = \{x : x \perp L\}$

Теорема 1.12.

L – замкнутое подпространство H

1. P_L – линейный оператор
2. Если $L \neq \{0\}$, то $\|P_L\| = 1$
3. $P_{L^{\perp}} = Id - P_L$
4. $(L^{\perp})^{\perp} = L$

Доказательство.

1. $x - P_L x \perp L$

   $x' - P_L x' \perp L \Rightarrow \alpha x + \alpha' x' - (\alpha P_L x + \alpha' P_L x') \perp L$

   $P_L x, P_L x' \in L \Rightarrow \alpha P_L x + \alpha' P_L x' \in L$

2. $P_L x =: y \Rightarrow x - y \perp L \Rightarrow x - y \perp y$
   $\|x-y\|^2 + \|y\|^2 = \|x\|^2 \Rightarrow \|y\| \leqslant \|x\| \Rightarrow \|P_L\| \leqslant 1$
3. $P_{L^\perp} x = x - P_L x \quad y = P_L x \Rightarrow x - y \perp L \Rightarrow x - y \in L_\perp$
   Надо проверить, что $x - (x-y) \perp L^\perp$
4. $(L^\perp)^\perp = Id - P_{L^\perp} = Id - (Id - P_l) = P_L \quad L = P_L H$

□

***Определение* 1.14.**
X –метричное пространство
X – сепарабельное, если $\exists A$ – счетное $\subset X$, т.ч. $\mathrm{Cl}\, A = X$

Теорема 1.13.
В сепарабельном гильбертовом пространстве существует ортогональный базис

Доказательство.
Возьмем $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$, т.ч. $\mathrm{Cl}\, A = H$
Проредим и сделаем множество независимым $\{y_1, y_2, \ldots\} \quad Lin\{y_1, y_2, \ldots\} = Lin\{x_1, x_2, \ldots\}$
Ортогонализация Грамма-Шмидта $\{z_1, z_2, \ldots\}$ ортонормированные
$Lin\{z_1, z_2, \ldots, z_n\} = Lin\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$
$Lin\{z_1, z_2, \ldots\} = Lin\{y_1, y_2, \ldots\} = Lin\{x_1, x_2, \ldots\}$
$\mathrm{Cl}\, Lin\{z_1, z_2, \ldots\} = \mathrm{Cl}\, Lin\{x_1, x_2, \ldots\} \supset \mathrm{Cl}\, A = H \Rightarrow \mathrm{Cl}\, Lin\{z_1, z_2, \ldots\} = H \Rightarrow$ это базис

□

Теорема 1.14.
Бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство изометрично l^2

Доказательство.
Пусть $e_1, e_2, \ldots$ базис $\quad x \to (c_1(x), c_2(x), \ldots)$, где c_i – коэффициенты Фурье
$\langle x, y \rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x) \bar{c_n}(y)$

□

***Определение* 1.15.**
$\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ – тригонометрический многочлен
Если $|a_k| + |b_k| \neq 0$, то $\deg = n$

***Определение* 1.16.**
$\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ – тригонометрический ряд

Замечание.
$\cos kx = \dfrac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$
$\sin kx = \dfrac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$
$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$

$\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ – комплексно-значный тригонометрический многочлен

Лемма.

Пусть $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ сходится в $L^1[0, 2\pi]$.

Тогда

$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx$

$c_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx$

Доказательство.

$\left| \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx - \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx \right| \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(x) - S_n(x)| |\cos kx| \, dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(x) - S_n(x)| \, dx = \frac{1}{\pi} \left\| f - S_n \right\|_{L^1} \to 0$

□

Замечание.

Если f – четная, то $b_k(f) = 0$

Если f – нечетная, то $a_k(f) = 0$

***Определение* 1.17.**

$f \in L^1[0, 2\pi] \quad a_k, b_k$ и c_k – коэффициенты Фурье для функции f

Замечание.

$|a_k(f)| \leqslant \frac{\|f\|_{L^1}}{\pi} \quad |b_k(f)| \leqslant \frac{\|f\|_{L^1}}{\pi}, \quad |c_k(f)| \leqslant \frac{\|f\|_{L^1}}{2\pi}$

$|a_k(f)| = \left| \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx \right| \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(x)| \, dx = \frac{\|f\|_{L^1}}{\pi}$

***Обозначения* 1.2.**

$A_k(x) = \begin{cases} \frac{a_0}{2}, & \text{если } k = 0 \\ a_k \cos kx + b_k \sin kx, & \text{если } k > 0 \end{cases}$

Замечание.

$A_k(x) = \frac{1}{\pi} \left(\int\limits_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt \cdot \cos kx + \int\limits_0^{2\pi} f(t) \sin kt \, dt \cdot \sin kx \right) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t) \cos kx + t \, dt$

1.4. Лекция 5

Лемма (Римана-Лебега)**.**

$E \subset \mathbb{R} \quad f : E \to \mathbb{R}$ суммируема

Тогда $\int\limits_E f(t) e^{i\lambda t} \, dt \underset{\lambda \to \pm\infty}{\to} 0, \int\limits_E f(t) \cos(\lambda t) \, dt \to 0$ (аналогично с синусом)

Следствие.

Если $f \in L^1[0, 2\pi]$, то $a_k(f), b_k(f), c_k(f) \to 0$

Доказательство.

Доопределим f нулем

$\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\lambda t}\,dt = \int\limits_{\mathbb{R}} f(u+h)e^{i\lambda t}e^{i\lambda u}e^{i\lambda h}\,du$ возьмем $h = \frac{\pi}{\lambda}$

$2\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\lambda t}\,dt = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\lambda t}\,dt - \int\limits_{\mathbb{R}} f(t+h)e^{i\lambda t}\,dt = \int\limits_{\mathbb{R}} (f(t) - f(t+h))e^{i\lambda t}\,dt$

$2\left|\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\lambda t}\,dt\right| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}} (f(t) - f(t+h))e^{i\lambda t}\,dt\right| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} |f(t) - f(t+h)|\,e^{i\lambda t}\,dt = \|f - f_h\| \underset{h\to 0}{\to} 0$ если f суммируема

□

Пример Дискретное преобразование Фурье.

$x_0, x_1, \dots, x_{N-1} \rightsquigarrow a_0, a_1, \dots, a_{N-1}$

$a_k = \sum\limits_{n=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{2\pi i}{N}nk}$

$x_n = \frac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1} a_k e^{\frac{2\pi i}{N}nk}$

$x(t)$ – кусочно постоянная

$c_k(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x(t)e^{ikt}\,dt = \frac{1}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{N-1}\int\limits_{\frac{2\pi}{N}n}^{\frac{2\pi}{N}(n+1)} x(t)e^{ikt}\,dt =$

$= \frac{1}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{N-1} x_n \frac{e^{-ikt}}{-ik}\Big|_{t=\frac{2\pi}{N}n}^{t=\frac{2\pi}{N}(n+1)} = \frac{i}{\pi k}\sum\limits_{n=0}^{N-1} x_n \left(e^{-ik\frac{2\pi}{N}(n+1)} - e^{-ik\frac{2\pi}{N}n}\right) = \frac{i}{\pi}\cdot\frac{e^{-ik\frac{2\pi}{N}}-1}{k}\sum\limits_{n=0}^{N-1} x_n e^{-ikn\frac{2\pi}{N}} = \frac{i}{\pi}\cdot\frac{e^{-ik\frac{2\pi}{N}}-1}{k}\cdot a_n$

Напоминание.

Модуль непрерывности $\omega_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(t)| : |x - y| \leqslant \delta\}$

Липцева функция $\mathrm{Lip}_M\,\alpha \quad \mathrm{Lip}\,\alpha = \bigcup\limits_{M>0} \mathrm{Lip}_M\,\alpha$

$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|^\alpha\ \forall x, y$

Замечание.

$f \in \mathrm{Lip}_M\,\alpha \Rightarrow \omega_f(h) \leqslant Mh^\alpha$

Теорема 1.15.

Пусть $f \in C_{2\pi}$ $2\,|C_k(f)| \leqslant \omega_f\left(\frac{\pi}{k}\right), |a_k(f)| \leqslant \omega_f\left(\frac{\pi}{k}\right)$ и $|b_k(f)| \leqslant \omega_f\left(\frac{\pi}{k}\right)$

В частности, если $f \in \mathrm{Lip}_M\,\alpha$, то $2\,|C_k(f)|\,, |a_k(f)|\,, |b_k(f)| \leqslant M\left(\frac{\pi}{k}\right)^\alpha$

Доказательство.

$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(y+h)e^{-iku}\,du\cdot e^{-ikh} \quad h = \frac{\pi}{k}$

$2c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t+h)e^{-itk}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(f(t) - f(t+h))\,e^{-ikt}\,dt$

$2|c_k(f)| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(t) - f(t+h)|\,dt \leqslant \omega_f\left(\frac{\pi}{k}\right)$

□

Лемма.

f – дифф. функция

$f' \in C_{2\pi}$

$c_k(f') = ikc_k(f)$

$a_k(f') = kb_k(f)$

$b_k(f') = -ka_k(f)$

Доказательство.

$c_k(f') = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f'(t)e^{-ikt}\, dt = \frac{f(t)e^{-ikt}}{2\pi}\Big|_{t=0}^{t=2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t) \left(e^{-ikt}\right)'\, dt$

□

Теорема 1.16.

$f \in C^r$ и $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}_M\, \alpha$

Тогда $2|c_k(f)|, |a_k(f)|, |b_k(f)| \leqslant \frac{\pi^\alpha}{k^{r+\alpha}} \cdot M$

Доказательство.

Индукция по r

Переход $r \to r+1$ $f \in C^{r+1} \Rightarrow f \in C^r \Rightarrow 2|c_k(f)| \cdot k = 2|c_k(f')| \leqslant \frac{\pi^\alpha}{k^{r+\alpha}} \cdot M$

□

***Определение* 1.18** (Ядро Дирихле)**.**

$D_n(t) := \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kt$

Свойства.

1. D_n – четная 2π периодичная функция
2. $D_n(0) = n + \frac{1}{2}$
3. Если $t \neq 2\pi l$, то $D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$

Доказательство.

$2\sin\frac{t}{2} D_n(t) = \sin(n+\frac{1}{2})t$

$2\sin\frac{t}{2} D_n(t) = \sin\frac{t}{2} + 2\sum\limits_{k=1}^{n} \sin\frac{t}{2}\cos kt = \sin\frac{t}{2} + 2\sum\limits_{k=1}^{n} \sin(k+\frac{1}{2})t - \sin(k-\frac{1}{2})t$

□

Лемма.

$S_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_n \sin kx) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x \pm t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} D_n(t)(f(x+t) + f(x-t))\, dt$

Доказательство.

$S_n(f,x) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k(f,x) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \int\limits_0^{2\pi} f(t)\cos k(x-t)\, dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\, dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos k(x-t)\, dt\right) =$
$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} D_n(x-t) f(t)\, dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(u) f(x-u)\, du$

$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x-t)\, dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \ldots + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} D_n(t) f(x-t)\, dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} D_n(t)(f(x+t) + f(x-t))\, dt$

□

Свойство.

$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta} D_n(t)\left(f(x+t) + f(x-t)\right)\, dt + o(1) \qquad \delta > 0$

Доказательство.

Надо понять, что $\int\limits_0^\pi D_n(t)\left(f(x+t)+f(x-t)\right)\,dt \underset{n\to\infty}{\to} 0$

$\int\limits_0^\pi D_n(t)\left(f(x+t)+f(x-t)\right)\,dt = \int\limits_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)\,dt \to 0$ по лемме Римана Лебега

$\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}}\left|f(x+t)+f(x-t)\right|$ – суммируемая функция

□

***Определение* 1.19** (Принцип локализации)**.**

Если f и g совпадают в окрестности точки x_0, то ряды Фурье для этих функций в точке x_0 ведут себя одинаково и если сходятся, то сходятся к одной и той же сумме

Лемма.

Если $f \in L^1[0,2\pi]$, то $\int\limits_0^\delta \frac{|f(t)|}{t}\,dt$ и $\int\limits_0^\delta \frac{|f(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$ ведут себя одинаково.

Доказательство.

$2\sin\frac{t}{2} \leqslant t$ при $0 \leqslant t \leqslant \pi \Rightarrow \frac{|f(t)|}{t} \leqslant \frac{|f(t)|}{2\sin\frac{t}{2}} \Rightarrow$ если второй интеграл сходится, то первый тоже

Пусть сходится первый $\int\limits_0^\pi = \int\limits_0^\delta + \int\limits_\delta^\pi \quad \int\limits_\delta^\pi \frac{|f(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt \leqslant \frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}}\int\limits_\delta^\pi |f(t)|\,dt$ – сходится

$\frac{|f(t)|}{t} \sim \frac{|f(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}$

□

***Определение* 1.20.**

$f(x_0+0) = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) \quad f(x_0-0) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$

$f'_+(x_0) = \lim\limits_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad f'_-(x_0) = \lim\limits_{h\to 0+} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$

$f^*_x(t) := f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0) = f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$ в точке регулярности

***Определение* 1.21.**

x_0 – регулярная точка, если $f(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$

все непрерывные точки регулярны

Теорема 1.17 (Признак Дини)**.**

$f \in L^1[0,2\pi], x$ – точка непрерывности или разрыва I рода

$\delta > 0$ Если $\int\limits_0^\delta \frac{|f^*_\alpha(t)|}{t}\,dt$ сходится, то ряд Фурье для этой функции f в точке x сходится к $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$

Доказательство.

$S_n(f,x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi D_n(t)\left(f(x+t)+f(x-t)\right)\,dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi D_n(t)\left(f(x+0)+f(x-0)\right) = \frac{1}{\pi}D_n(t)f^*_x(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2}t)}{2\sin\frac{t}{2}}f^*_x(t)\,dt \underset{\text{Р-Л}}{\to} 0$

$\int\limits_0^\pi \frac{|f^*_x(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt < +\infty \Leftrightarrow \int\limits_0^\delta \frac{|f^*_x(t)|}{t}\,dt < +\infty$

□

1.5. Лекция 7

Суммирование рядов Фурье

***Определение* 1.22.**
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \qquad A_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \quad \alpha_n := \frac{A_0+A_1+\ldots+A_n}{n+1}$

Если ряд сходится к S, то $A_n \to S \Rightarrow \alpha_n \to S$

Это было суммирования ряда по Чезаро

Пример.
$1-1+1-1+\ldots$

$A_n: \; 1,0,1,0,1,\ldots$

$\alpha_{2n-1} = \frac{1}{2} \;\; \alpha_{2n} - \frac{n+1}{2n+1} \to \frac{1}{2}$

Следствие.

1. Линейность
   $c\sum(\alpha a_n + \beta b_n) = c\alpha \sum a_n + c\beta \sum b_n$
2. Если ряд сходится, то он сходится по Чезаро к той же сумме
3. Если ряд сходится по Чезаро, то $a_n = o(n)$

   Доказательство.
   $\alpha_n \to S \Rightarrow \frac{n}{n+1}\alpha_{n-1} \to S \Rightarrow \alpha_n - \frac{n}{n+1}\alpha_{n-1} \to 0 \Rightarrow A_n = o(n)$
   $\Rightarrow a_n = A_n - A_{n-1} = o(n)$

   □

4. $\alpha_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) a_k$

   Доказательство.
   $\alpha_n = \frac{A_0+A_1+\ldots+A_n}{n+1} = \frac{a_0+(a_0+a_1)+(a_0+a_1+a_2)+\ldots+(a_0+a_1+\ldots+a_n)}{n+1} = a_0\frac{n+1}{n+1} + a_1\frac{n}{n+1} + \ldots + a_n\frac{1}{n+1}$

   □

Замечание.
Теорема Харди. Если $a_n = O(\frac{1}{n})$ и ряд сходится по Чезаро, то он сходится. (условие возрастания можно заменить на $a_n \geqslant -\frac{c}{n}$)

Пример.
$\frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos nt$

Частичные суммы $D_n(t) := \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$

$\Phi_n(t) := \frac{D_0(t)+D_1(t)+\ldots+D_n(t)}{n+1}$ – ядро Фейера

Следствие.

1. $\Phi_n(0) = \frac{\frac{1}{2}+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n+1}{2}$

2. При $t \neq 2nm \quad \Phi_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{(n+1)\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{2}(1-\cos(n+1)t) = \frac{1}{2(n+1)}\cdot\frac{\sin^2\frac{n+1}{n}t}{\sin^2\frac{t}{2}}$
3. $\Phi_n(t) \geqslant 0$
4. $\max\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\Phi_n(t) \leqslant \frac{1}{2(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}} \to 0$
5. Φ_n – четная функция
6. $\int\limits_{-n}^{n}\Phi_n(t)\,dt = \pi$

Возьмем ряд Фурье для функции f

$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-n}^{n}D_n(t)f(x-t)\,dt$

$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x)+S_1(x)+\ldots+S_n(x)}{n+1} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-n}^{n}\frac{D_0(x)+D_1(x)+\ldots+D_n(x)}{n+1}f(x-t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-n}^{n}\Phi_n(t)f(x-t)\,dt$

***Определение* 1.23** (Свертка функций)**.**
$f, g \in L^1[-\pi,\pi]$ продолжим до 2π - период

$f * g(x) = \int\limits_{-n}^{n}f(t)g(x-t)\,dt$

Следствие.

1. $f * g \in L^1[-\pi,\pi]$

   Доказательство.
   $F(x,t) := f(t)g(x-t)$ – измеримая функция

   $\int\limits_{[-\pi,\pi]^2}|F(x,t)|\,dx\,dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g(x-t)\,dx\,dt| = \int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,dt\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g(x)|\,dx < +\infty$

   $\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f*g(x)|\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)g(x-t)\,dt\right|\,dx \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|F(x,t)|\,dt\,dx < +\infty$

   □

2. $f * g = g * f$

   Доказательство.
   $\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)g(x-t)\,dt = -\int\limits_{x+\pi}^{x-\pi}f(x-y)g(y)\,dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x-y)g(y)\,dy = g*f(x)$

   □

3. $c_k(f*g) = 2\pi c_k(f)c_k(g)$

   Доказательство.
   $c_k(f*g) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{-ikx}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)g(x-t)\,dt\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-ikt}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}g(x-t)e^{-ik(x-t)}\,dx\right)\,dt = \frac{2\pi c_k(g)}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-i}$
   $2\pi c_k(g)c_k(f)$

   □

4. Если $f \in L^p[-\pi,\pi]$ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, то $f*g \in C_{2\pi}$ и $\|f*g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$

   Доказательство.
   $|f*g(x)| = \left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)\,dt\right| \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,|g(x-t)|\;dt \leqslant \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} =$
   $\|f\|_p \|g\|_q$
   $|f*g(x+h) - f*g(x)| = \left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x+h-t)\,dt - \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)\,dt\right| \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\cdot|g(x+h-t)-g(x-t$
   $\|f\|_p \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(x+h-t)-g(x-t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \cdot \|g_h - h\|_q \underset{h\to 0}{\to} 0$

   □

5. $f \in L^p[-\pi,\pi], g \in L^1[-\pi,\pi] \quad p > 1$
   Тогда $\|f*g\|_p \leqslant \|f\|_p \|g\|_1$

   Доказательство.
   $\|f*g(x)\|_p^p = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f*g(x)|^p\;dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)\,dt\right|^p dx \leqslant \|g\|_1^{\frac{p}{q}} \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p|g(x-t)|\,dt\,dx$

   $\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)\,dt\right| \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)||g(x-t)|^{\frac{1}{p}}\cdot|g(x-t)|^{\frac{1}{q}}\,dt \leqslant \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p|g(x-t)|\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(x-t)|\,dt\right)^{\frac{1}{q}} =$
   q из Гёльдера такая, что $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$
   $\|g\|_1^{fracpq} \cdot \|f\|_p^p \cdot \|g\|_1 = \|f\|_p^p \|g\|_1^p$

   □

Определение **1.24** (Аппроксимативная единица $K_n(t)$).
$h \in D$ – множество параметров $\quad h_0$ – предельная точка D

1. $K_n \in K^1[-\pi,\pi]$

2. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt = 1$

3. $\|K_n\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |K_n(t)|\,dt \leqslant M$ (не зависит от h)

4. $\int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus(-\delta,\delta)} |K_n(t)|\;dt \underset{h\to h_0}{\to} 0$

4' ess $\sup\limits_{[-\pi,\pi]\setminus(-\delta,\delta)} |K_n(t)| \underset{h\to h_0}{\to} 0$

$1+2+3+4$ – аппроксимативная единица
$1+2+3+4'$ – усиленная аппроксимативная единица

Пример.
$\frac{1}{\pi}\Phi_n$ – усиленная аппроксимативная единица

Теорема 1.18 (об аппросмимативной единице).
K_n – аппроксимативная единица

1. Если $f \in C_{2\pi}$, то $f * K_n \underset{h \to h_0}{\rightrightarrows} f$
2. Если $f \in L^p[-\pi, \pi]$, $1 \leqslant p < +\infty$, то $\|f * K_n - f\|_p \underset{h \to 0}{\to} 0$
3. Если $f \in L^1[-\pi, \pi]$ и непрерывная в точке x

   K_n – усиленная аппроксимативная единица, то $f * K_n(x) \underset{h \to h_0}{\to} f(x)$

Доказательство.

$$f * K_n(x) - f(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(t) f(x-t)\, dt - \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(t) f(x)\, dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(t)(f(x-t) - f(x))\, dt$$

1. Берем по ε из равномерной непрерывности $\delta > 0$

   Если $|t| < \delta$, то $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon \qquad |f(t)| \leqslant A$

   $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |K_n(t) \left(f(x-t) - f(t)\right)|\, dt = \int\limits_{-\delta}^{\delta} + \int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus(-\delta,\delta)}$

   $\int\limits_{-\delta}^{\delta} < \varepsilon \int\limits_{-\delta}^{\delta} |K_n(t)|\, dt \leqslant \varepsilon \int\limits_{-\pi}^{\pi} |K_n(t)|\, dt \leqslant M\varepsilon$

   $\int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus(-\delta,\delta)} \leqslant 2A \int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus(-\delta,\delta)} |K_n(t)|\, dt \to 0$
2. Берем δ в точке x

   $\int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus(-\delta,\delta)} \leqslant \operatorname{ess} \sup\limits_{t \in [-\pi,\pi]\setminus(-\delta,\delta)} |K_n(t)| \cdot \int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus(-\delta,\delta)} |f(x-t) - f(x)|\, dt \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(|f(x-t)| + |f(t)|\right)\, dt = 2 \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt$

□

***Определение* 1.25.**

Лемма.

Теорема 1.19.

Доказательство. □

Следствие.