Билеты по матану

...

21 сентября 2021 г.

Содержание

1. ...

1.1. Лекция 2

Теорема 1.1 (Арцеоа-Асколи)**.**

$\{f_n\};\ f_n \in C[a,b]$

f_n равномерно ограниченны и равност. непрерывны

Тогда $\exists f_{n_k} \to \varphi \in C[a,b]$

Лемма (2)**.**

Если $M \in C[a,b]$

$\exists K : |f(x)| < K \quad \forall x \in [a,b], \forall f \in M$

$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 :$ если $|x_1 - x_2| < \delta$, то $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon\, \forall f \in M$

То $\exists$ конечная ε-сеть $\forall \varepsilon > 0$

Замечание.

Если мы докажем лемму 2, то с помощью леммы 1 можно доказать теорему

Доказательство.

Фиксируем $\varepsilon > 0$, $\varepsilon = \frac{k}{N}$

Строим решетку с шагом δ по горизонтали и с шагом ε по вертикали

Берем все ломанные по сетке и заметим, что их конечное кол-во.

Докажем, что ломанные являются ε-сетью для функций из M

$f \in M$. Пусть ψ_k – ближайший узел для $f(x_k)$.

Рассмотрим $\psi(x)$ – ломанная: $\psi(x_k) = \psi_k$

Докажем, что $\rho(f, \psi) < 5\varepsilon$

(?) $\max_{x\in[a,b]} |f(x) - \psi(x)| < 5\varepsilon$

$\forall m \quad |f(x_m) - \psi(x_m)| < \varepsilon$ по определению ψ

$\forall x \in [x_m, x_{m+1}] :\ |f(x) - \psi(x)| \leqslant |f(x) - f(x_m)| + |f(x_m) - \psi(x)| \leqslant \varepsilon + |f(x_m) - \psi(x_m)| + |\psi(x_m) - \psi(x)| \leqslant 2\varepsilon + |\psi(x_m) - \psi(x_{m+1})| \leqslant 2\varepsilon + |\psi(x_m) - f(x_m)| + |f(x_m) - f(x_{m+1})| + |f(x_{m+1}) - \psi(x_{m+1})| \leqslant 5\varepsilon$

Успех

□

теоремы А-А.

По лемме 1 если существует конечная ε-сеть $\forall \varepsilon$, то $\exists \varphi$

□

Упражнение.

1. К лемме 2: доказать, что обратное тоже верно
2. К Т. А-А: доказать, что обратное тоже верно

Замечание Лектописца.

$$\begin{cases} y'(x) &= F(x, y(x)) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

$F \in C(D), y_0 \in D$

Идея решения

TODO: Блин я не записал(((

Свойства.

$Q = \{(x,y) | |x - x_0| \leqslant A, |y - y_0| \leqslant B\} \subset D$

Q – компакт $\Rightarrow \max_Q F(x,y) = M$

$n = \min\left(A, \frac{B}{M}\right)$

1. Тогда на $[x_0, x_0 + h]$ ломаные Эйлера для некоторого $\delta = \frac{n}{N}$ остаются внутри Q за N шагов

   Доказательство.
   Все $x_k : |x_k - x_0| \leqslant A$

   $|y_k - y_0| \leqslant |y_k - y_{k-1}| + \ldots + |y_1 - y_0| = |F(x_{k-1} - y_{k-1})| \cdot |x_k - x_{k-1}| + \ldots + |F(x_0, y_0)| \cdot |x_1 - x_0| \leqslant M(|x_k - x_{k-1}| + \ldots + |x_1 - x_0|) = M \cdot \delta \cdot k \leqslant M \cdot \delta \cdot N \leqslant M \cdot n \leqslant B$

   □

2. $\forall \varepsilon > 0$ для достаточно большого N ломанная Эйлера для $\delta = \frac{n}{N}$

   (a) $(x, \psi(x)) \in D \ \forall x \in [x_0, x_0 + h]$

   (b) $|\psi'(x) - F(x, \psi(x))| < \varepsilon \ \forall x \in [x_0, x_0 + h]$ кроме точек дробления

   Доказательство.
   Пункт 1) есть по лемме 1 (даже $\in Q$)

   Пункт 2) $F \in C(Q)$, Q – компакт $\Rightarrow F$ равномерно непрерывна

   $\exists \delta_1 :$ если $|x_1 - x_2| < \delta_1$ и $|y_1 - y_2| < \delta_1$, то $|F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)| < \varepsilon$

   Выберем N, $\delta = \frac{n}{N}$, что $\delta < \frac{\delta_1}{M}$ и $\delta < \delta_1$

   Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n$ – точки дробления

   $\psi'(x) = F(x_k, y_k)$ для $x \in [x_k, x_{k+1}]$

   $\psi'(x) = |F(x_k, \psi(x_k)) - F(x, \psi(x))| < \varepsilon$

   Надо доказать, что разность аргументов $F(x_k, \psi(x_k))$ и $F(x, \psi(x)$ меньше, чем δ_1

   $|x_k - x| < \delta \leqslant \delta_1$; $|\psi(x_k) - \psi(x)| < |\psi(x_k) - \psi(x_{k+1})| < M \cdot \delta \leqslant \delta_1$

   □

3. $f_n \to \varphi$ равномерно
   Тогда $F(x, f_n(x)) \to F(x, \varphi(x))$ равномерно на $[a, b]$

   Доказательство.
   $|F(x, y_1) - F(x, y_2)| < \varepsilon$

   при $|y_1 - y_2| < \delta$ (т.к. F равномерно непрерывна на Q)

   $f_n \to \varphi$ равномерно $\Leftrightarrow \max_{x \in [x_0, x_0+h]} |f_n(x) - \varphi(x)| \to 0$ при $n \to \infty$

   $\forall \delta > 0 \ \exists N : \ \forall n > N \quad |f_n(x) - \varphi(x)| < \delta \ \forall x \in [x_0, x_0 + h]$

   Итого: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ \forall n > N \quad |F(x, f_n(x)) - F(x, \varphi(x))| < \varepsilon \ \forall x \in [x_0, x_0 + h]$

   □

Замечание.

Все рассуждения повторяются на $[x_0 - h, x_0]$

Теорема 1.2 (Пеано)**.**

Пусть A, B, Q, M и h как ранее

Тогда на $[x_0 - h, x_0 + h]$ существует решение задачи Коши

Доказательство.

Возьмем убывающую последовательность $\varepsilon_k \to$. Строим ψ_k по лемме 2 для $\varepsilon = \varepsilon_k$

1. ψ_k – равномерно ограничена:

   $|\psi_k(x) - y_0| \leqslant B \Rightarrow |\psi_k(x)| \leqslant B + |y_0|$

2. ψ_k – равностепенно непрерывны:

   $|\psi_k(x) - \psi_k(x)| \leqslant M|x - x|$ если $x, x \in [x_m, x_{m+1}] \Rightarrow \forall x, x \in [x_0 - h, x_0 + h]$

   δ по ϵ строится как $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$

   Тогда по теореме А-А $\exists \psi : \psi_k \to \psi$ раномерно на $[x_0 - h, x_0 + h]$

   Докажем, что $\psi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} F(x, \psi(x))\, dx$

   $\psi_k(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} F(x, \psi_k(x))\, dx + \int\limits_{x_0}^{x} \omega_k(x)\, dx$, т.к. $\varphi_k(x) = \psi_k(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} \psi_k'(x)\, dx$

   где $\omega_k(x) = \psi_k'(x) - F(x, \psi(x))$ кроме точке дробления

   $\int\limits_{x_0}^{x} \omega_k(x)\, dx \to 0$

   $\left|\int\limits_{x_0}^{x} \omega_k(x)\, dx\right| \leqslant \int\limits_{x_0}^{x} |\omega_k(x)|\, dx \leqslant \varepsilon_k \cdot |x - x_0| \leqslant \varepsilon_k \cdot n \to 0$ по лемме 2

   по лемме 3 $|F(x, \psi_k(x)) - F(x, \psi(x))| < \varepsilon$ при достаточно больших k

   Тогда $\left|\int_{x_0}^{x} F(x, \psi(x))\, dx - \int_{x_0}^{x} F(x, \psi_k(x))\, dx\right| \leqslant \int_{x_0}^{x} |F(x, \psi(x)) - F(x, \psi_k(x))|\, dx < \varepsilon \cdot |x - x_0| < \varepsilon \cdot h \to 0$

   Получаем, что ψ – решение задачи Коши

$\square$