

Домашняя работа №2 (3, 4)

Головин Вячеслав Сергеевич (ВШЭ, МОАД, 5 курс)

28 февраля 2022 г.

```
[1]: %matplotlib inline

from collections import namedtuple
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from test_functions import test_functions # модуль с тестовыми функциями

plt.rc('figure', dpi=300)

[2]: def plot_test_functions(method_wrapper, lstyle, first_batch=True):
    # инициализация графиков
    fig, axes = plt.subplots(nrows=5, ncols=2)
    fig.set_size_inches(8, 10)
    fig.subplots_adjust(hspace=0.5)
    axes = axes.flatten()

    # выбор первой или второй половины тестовых функций
    if first_batch:
        functions = test_functions[:10]
        first_number = 1
    else:
        functions = test_functions[10:]
        first_number = 11

    # поиск минимума и построение графика
    for i, tf in enumerate(functions):
        res = method_wrapper(tf)
        x = np.linspace(*tf.interval, 500)
        y = tf.f(x)
        ax = axes[i]
        ax.plot(x, y)
        ax.plot(res.x, res.y, **lstyle)
        title = '$f_{%d}(x)$, $x_{min} = %.3f, n = %d' % (i + first_number, res.x_min, res.nfev)
        ax.set_title(title)

    return fig, axes
```

Вспомогательные функции и класс данных для хранения результатов минимизации.

```
[3]: OptimizeResult = namedtuple('OptimizeResult', ['x_min', 'x', 'y', 'nfev'])  
MAXFEV = 3000 # максимальное число вызовов целевой функции  
  
def argmax(iterable):  
    """  
    Возвращает индекс максимального элемента.  
    """  
    i_max = None  
    x_max = None  
    for i, x in enumerate(iterable):  
        if x_max is None or x > x_max:  
            x_max = x  
            i_max = i  
    return i_max  
  
def argmin(iterable):  
    """  
    Возвращает индекс минимального элемента.  
    """  
    i_min = None  
    x_min = None  
    for i, x in enumerate(iterable):  
        if x_min is None or x < x_min:  
            x_min = x  
            i_min = i  
    return i_min
```

1 Метод ломаных

```
[4]: def minimize_NA(f, a, b, L, atol=None, maxfev=MAXFEV, full_output=False):
    """
    Найти на на отрезке [`a`, `b`] минимум функции `f` с помощью метода
    ломаных (недифференцируемая целевая функция, априорно заданная оценка
    константы Липшица `L`).
    """

    def new_point(i):
        return (x[i] + x[i + 1]) / 2 - (y[i + 1] - y[i]) / (2 * L)

    def characteristic(i):
        return (y[i] + y[i + 1]) / 2 - L * (x[i + 1] - x[i]) / 2

    # точность по умолчанию
    if atol is None:
        atol = 1e-4 * (b - a)

    x = [a, b]           # точки разбиения интервала
    y = [f(a), f(b)]     # значения функции в этих точках
    x_m = [new_point(0)] # точки внутри интервалов
    F = [characteristic(0)] # характеристики интервалов

    while True:
        # найдём интервал с минимальной характеристикой
        i = argmin(F)

        # проверим условие остановки по точности
        if x[i + 1] - x[i] <= atol:
            break

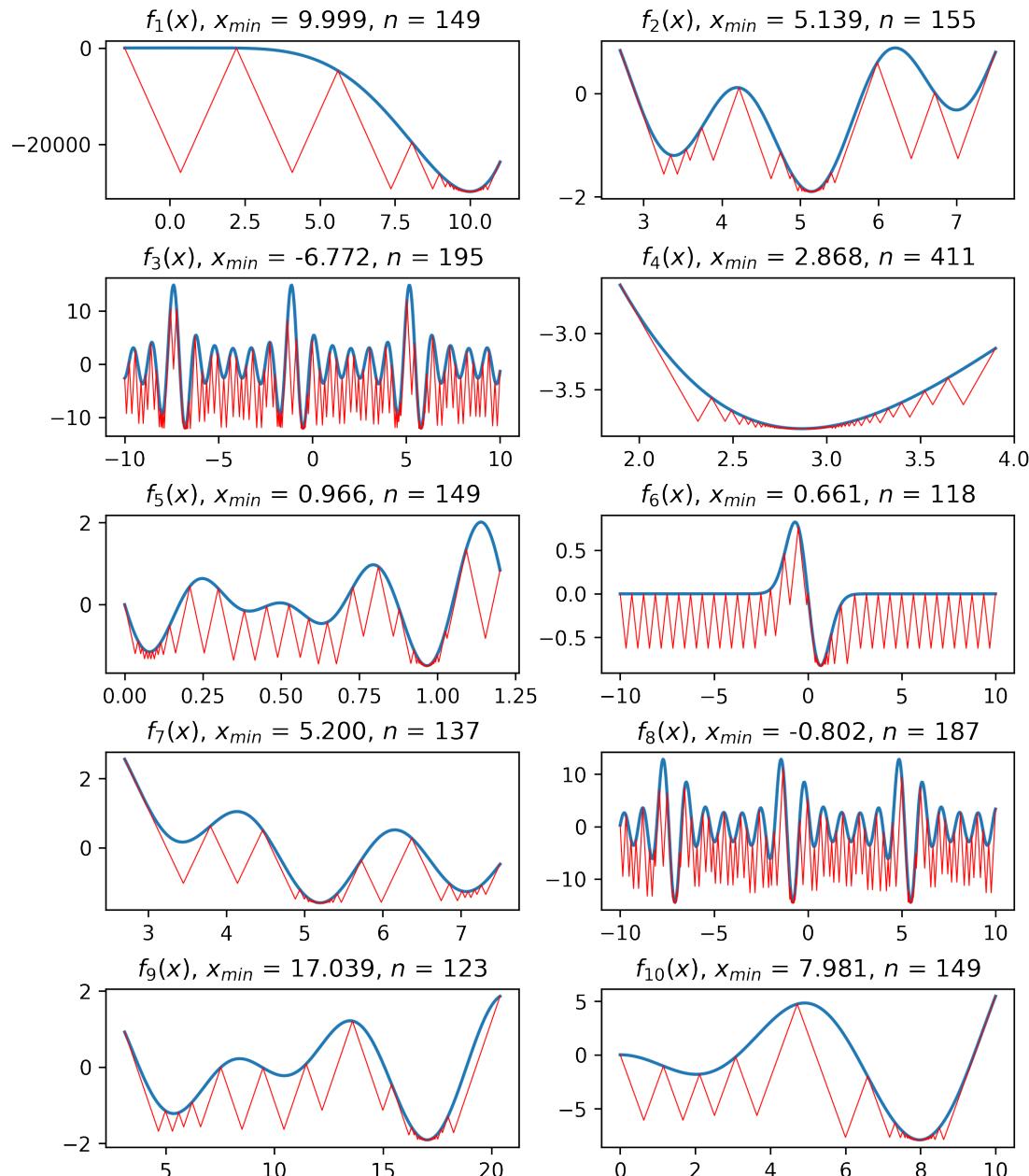
        # проверяем условие остановки по числу итераций
        if len(y) > maxfev: # слишком много итераций -- останавливаем расчёт
            raise Exception(
                f'Решение не сошлоось после {maxfev} вызовов целевой функции.')
        else:
            # условие не выполнено => разбиваем интервал на 2 части
            x.insert(i + 1, x_m[i])
            y.insert(i + 1, f(x_m[i]))

            # меняем характеристику старого интервала на характеристики двух новых
            x_m[i] = new_point(i)
            x_m.insert(i + 1, new_point(i + 1))
            F[i] = characteristic(i)
            F.insert(i + 1, characteristic(i + 1))

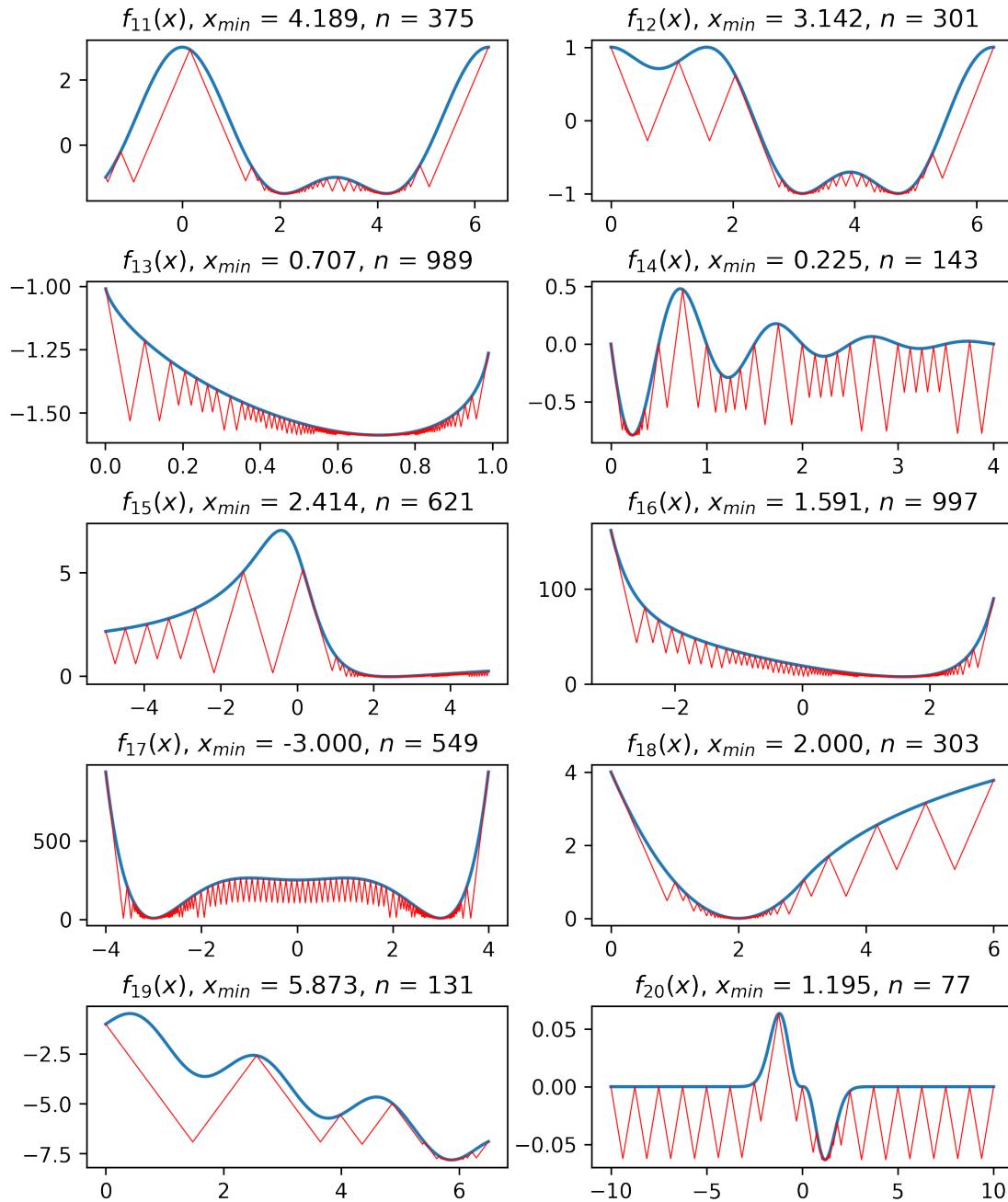
    # возвращаем результат
    if full_output:
        return x, y, F
    else:
        return x[1], y[1]
```

```
x_min = x[i] if y[i] < y[i + 1] else x[i + 1]
if not full_output:
    return x_min
x_full = []
y_full = []
for i in range(len(y) - 1):
    x_full.append(x[i])
    x_full.append(x_m[i])
    y_full.append(y[i])
    y_full.append(F[i])
x_full.append(x[-1])
y_full.append(y[-1])
return OptimizeResult(x_min, x_full, y_full, len(y))
```

```
[5]: fig, _ = plot_test_functions(
    lambda tf: minimize_NA(f=tf.f, a=tf.interval[0], b=tf.interval[1], L=tf.L,
                           atol=1e-4*(tf.interval[1]-tf.interval[0]),
                           full_output=True),
    dict(ls='-', lw=0.5, color='r'), True
)
```



```
[6]: fig, _ = plot_test_functions(
    lambda tf: minimize_NA(f=tf.f, a=tf.interval[0], b=tf.interval[1], L=tf.L,
                           atol=1e-4*(tf.interval[1]-tf.interval[0])), full_output=True),
    dict(ls='-', lw=0.5, color='r'), False
)
```



2 Геометрический метод с глобальной константой Липшица

```
[7]: def minimize_NG(f, a, b, r, atol=None, maxfev=MAXFEV, full_output=False):
    """
    Найти на отрезке [`a`, `b`] минимум функции `f` с помощью геометрического
    метода с аддитивным оцениванием глобальной константы Липшица. Точность
    метода и максимальное количество вызовов функции задаются параметрами
    `atol` и `maxfev`, соответственно.
    """

    def new_point(i):
        return (x[i] + x[i + 1]) / 2 - (y[i + 1] - y[i]) / (2 * L)

    def characteristic(i):
        return (y[i] + y[i + 1]) / 2 - L * (x[i + 1] - x[i]) / 2

    def difference(i):
        return abs(y[i + 1] - y[i]) / (x[i + 1] - x[i])

    # точность по умолчанию
    if atol is None:
        atol = (b - a) * 1e-4

    x = [a, b]                      # границы интервалов
    y = [f(a), f(b)]                # значения функции в x
    diff = [difference(0)]          # абсолютные приращения

    # начальная оценка константы Липшица
    H = diff[0]
    L = 1 if H < 1e-7 else H * r
    F = [characteristic(0)]

    while True:
        # выбор подинтервала
        i = argmin(F)

        # условия остановки
        if x[i + 1] - x[i] <= atol:
            break
        if len(y) >= maxfev:
            raise Exception(
                f'Решение не сошлоось после {maxfev} вызовов целевой функции.')

        # новое испытание
        x_new = new_point(i)
        x.insert(i + 1, x_new)
        y.insert(i + 1, f(x_new))
        diff[i] = difference(i)
```

```

diff.insert(i + 1, difference(i + 1))

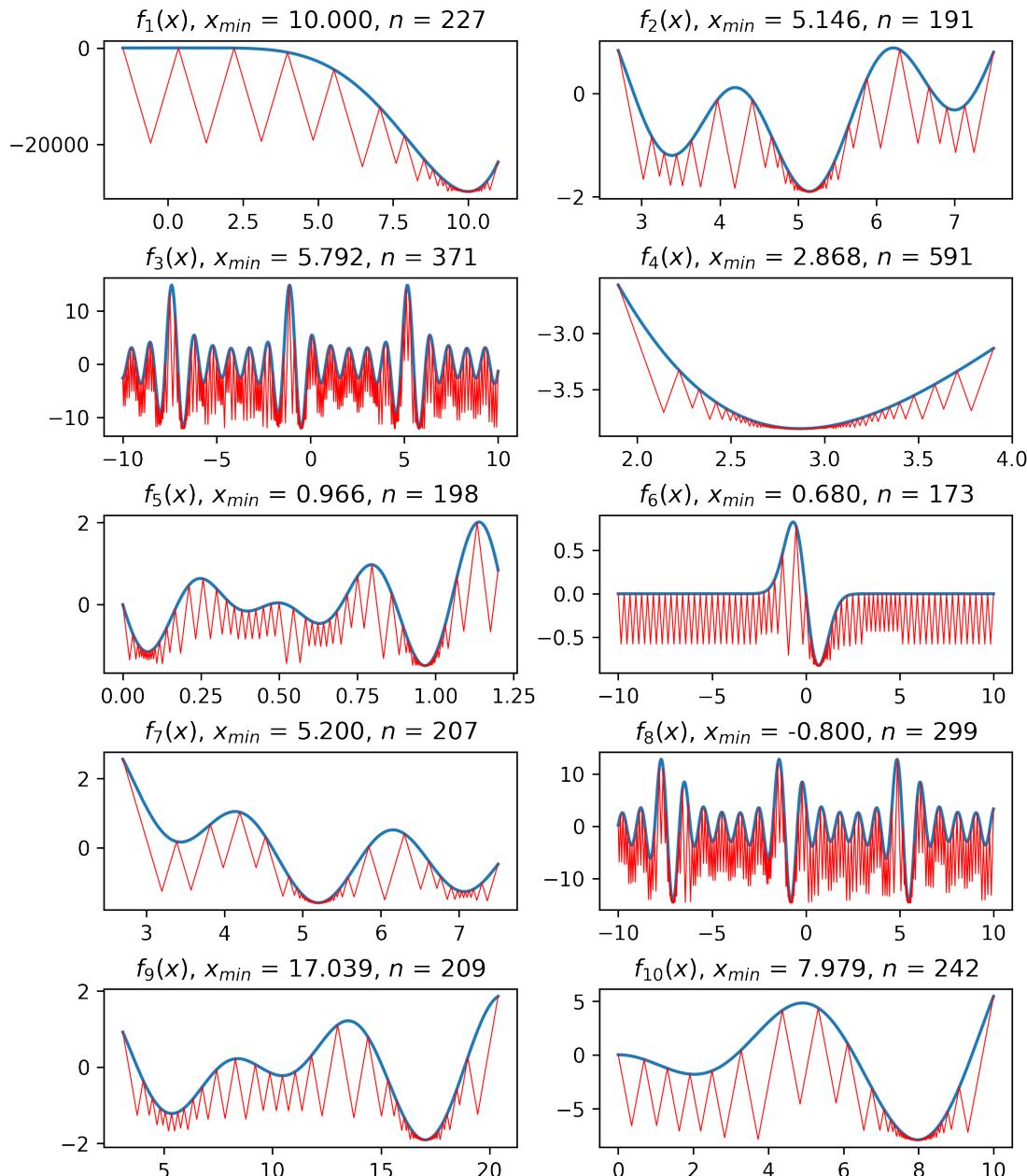
# оценка глобальной константы Липшица
k = i if diff[i] > diff[i + 1] else i + 1
if diff[k] > H: # обновляем все значения F
    H = diff[k]
    L = 1 if H < 1e-7 else H * r
    F = [characteristic(i) for i in range(len(y) - 1)]
else: # обновляем F только на новых интервалах
    F[i] = characteristic(i)
    F.insert(i + 1, characteristic(i + 1))

# найдём минимум
x_min = x[argmin(y)]

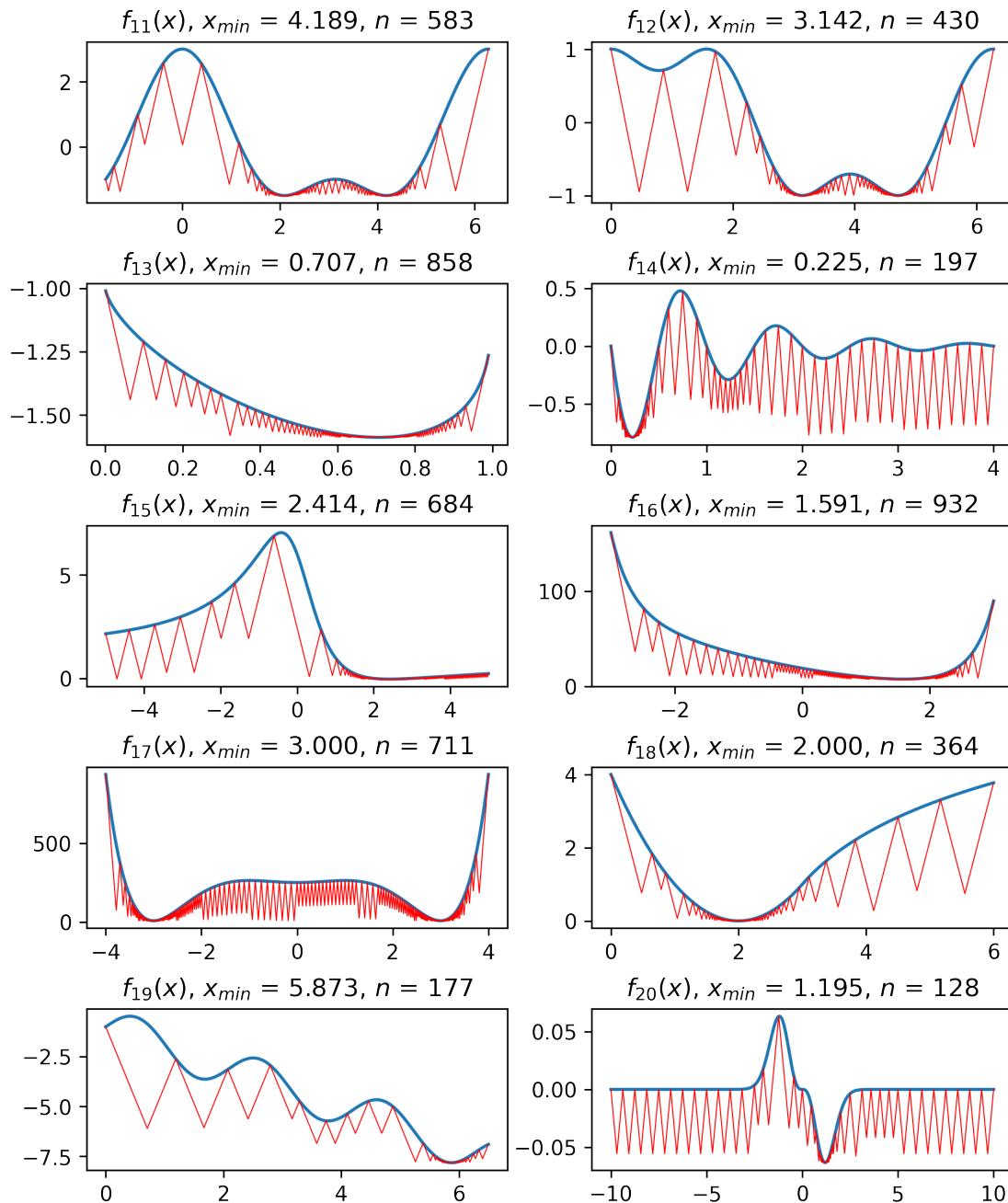
# возвращаем результат
if not full_output:
    return x_min
x_full = []
y_full = []
for i in range(len(x) - 1):
    x_full.append(x[i])
    x_full.append(new_point(i))
    y_full.append(y[i])
    y_full.append(characteristic(i))
x_full.append(x[-1])
y_full.append(y[-1])
return OptimizeResult(x_min, x_full, y_full, len(y))

```

```
[8]: fig, _ = plot_test_functions(
    lambda tf: minimize_NG(f=tf.f, a=tf.interval[0], b=tf.interval[1],
                           r=2, atol=1e-4*(tf.interval[1]-tf.interval[0]),
                           full_output=True),
    dict(ls='-', lw=0.5, color='r'), True
)
```



```
[9]: fig, _ = plot_test_functions(
    lambda tf: minimize_NG(f=tf.f, a=tf.interval[0], b=tf.interval[1],
                           r=2, atol=1e-4*(tf.interval[1]-tf.interval[0]),
                           full_output=True),
    dict(ls='-', lw=0.5, color='r'), False
)
```



3 Информационно-статистический метод с глобальной константой Липшица

```
[10]: def minimize_ING(f, a, b, r, atol=None, maxfev=MAXFEV, full_output=False):
    """
    Найти на отрезке [`a`, `b`] минимум функции `f` с помощью информационно-
    статистического метода с адаптивным оцениванием глобальной константы
    Липшица. Точность метода и максимальное количество вызовов функции задаются
    параметрами `atol` и `maxfev`, соответственно.
    """

    def characteristic(i):
        return (mu * (x[i + 1] - x[i])
                + ((y[i + 1] - y[i])**2) / (mu * (x[i + 1] - x[i]))
                - 2 * (y[i + 1] + y[i]))

    def difference(i):
        return abs(y[i + 1] - y[i]) / (x[i + 1] - x[i])

    # точность по умолчанию
    if atol is None:
        atol = (b - a) * 1e-4

    x = [a, b]
    y = [f(a), f(b)]
    diff = [difference(0)]

    # начальная оценка глобальной константы Липшица
    H = diff[0]
    mu = 1 if H < 1e-7 else H * r
    R = [characteristic(0)]

    while True:
        # выбор подинтервала
        i = argmax(R)

        # условия остановки
        if x[i + 1] - x[i] <= atol:
            break
        if len(y) >= maxfev:
            raise Exception(
                f'Решение не сошлось после {maxfev} вызовов целевой функции.')

        # новое испытание
        x_new = (x[i] + x[i + 1]) / 2 - (y[i + 1] - y[i]) / (2 * mu)
        x.insert(i + 1, x_new)
        y.insert(i + 1, f(x_new))
        diff[i] = difference(i)
```

```

diff.insert(i + 1, difference(i + 1))

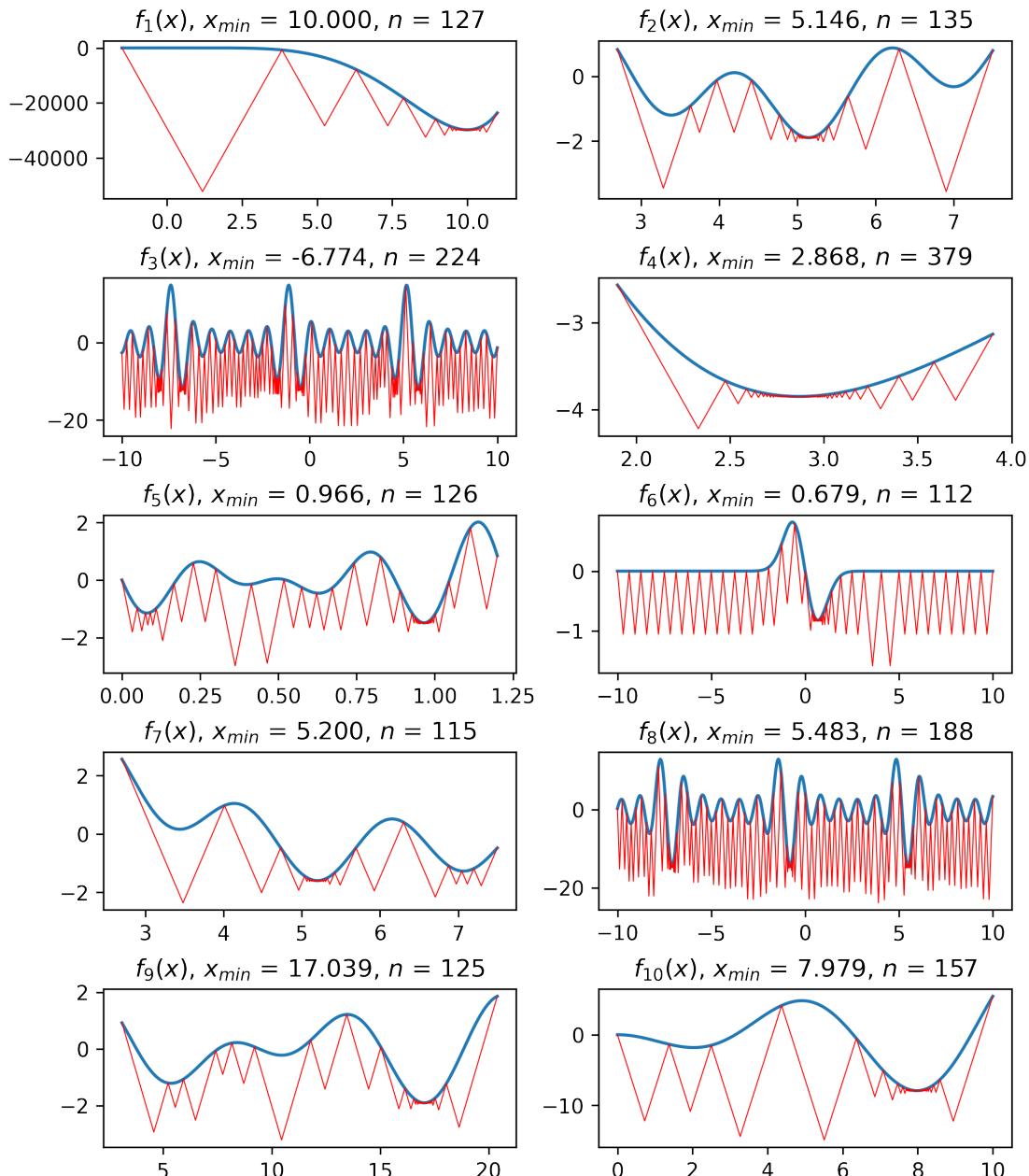
# оценка глобальной константы Липшица
k = i if diff[i] > diff[i + 1] else i + 1
if diff[k] > H: # обновляем все значения R
    H = diff[k]
    mu = 1 if H < 1e-7 else H * r
    R = [characteristic(i) for i in range(len(y) - 1)]
else: # обновляем R только на новых интервалах
    R[i] = characteristic(i)
    R.insert(i + 1, characteristic(i + 1))

# найдём минимум
x_min = x[argmin(y)]

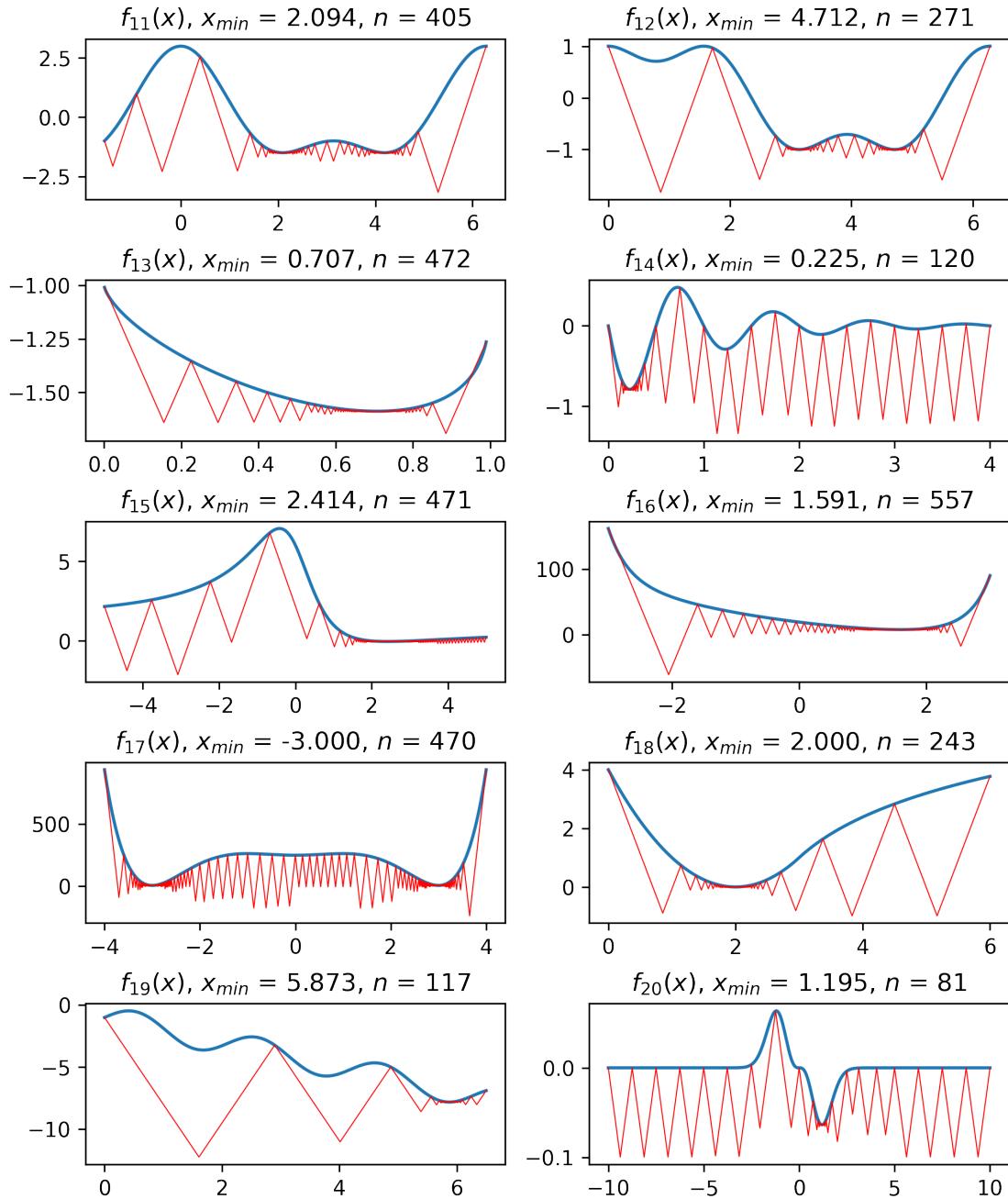
# возвращаем результат
if not full_output:
    return x_min
x_full = []
y_full = []
for i in range(len(x) - 1):
    x_full.append(x[i])
    x_full.append((x[i] + x[i + 1]) / 2 - (y[i + 1] - y[i]) / (2 * mu))
    y_full.append(y[i])
    y_full.append(y_full[-1] - mu * (x_full[-1] - x_full[-2]))
x_full.append(x[-1])
y_full.append(y[-1])
return OptimizeResult(x_min, x_full, y_full, len(y))

```

```
[11]: fig, _ = plot_test_functions(
    lambda tf: minimize_ING(f=tf.f, a=tf.interval[0], b=tf.interval[1],
                            r=2, atol=1e-4*(tf.interval[1]-tf.interval[0]),
                            full_output=True),
    dict(ls='-', lw=0.5, color='r'), True
)
```



```
[12]: fig, _ = plot_test_functions(
    lambda tf: minimize_ING(f=tf.f, a=tf.interval[0], b=tf.interval[1],
                            r=2, atol=1e-4*(tf.interval[1]-tf.interval[0]),
                            full_output=True),
    dict(ls='-', lw=0.5, color='r'), False
)
```



4 Информационно-статистический метод с глобальной константой Липшица (алтернативная версия)

```
[13]: def minimize_ING2(f, a, b, r, atol=None, maxfev=MAXFEV, full_output=False):
    """
    Найти на отрезке [`a`, `b`] минимум функции `f` с помощью информационно-
    статистического метода с адаптивным оцениванием глобальной константы
    Липшица. Точность метода и максимальное количество вызовов функции задаются
    параметрами `atol` и `maxfev`, соответственно.
    """

    def characteristic(i):
        return -4 * ((y[i] + y[i + 1]) / 2 - L * (x[i + 1] - x[i]) / 2)

    def difference(i):
        return abs(y[i + 1] - y[i]) / (x[i + 1] - x[i])

    # точность по умолчанию
    if atol is None:
        atol = (b - a) * 1e-4

    x = [a, b]
    y = [f(a), f(b)]
    diff = [difference(0)]

    # начальная оценка глобальной константы Липшица
    H = diff[0]
    mu = 1 if H < 1e-7 else H * r
    L = 0.5 * (mu + 1 / mu * ((y[1] - y[0]) / (b - a))**2)
    R = [characteristic(0)]

    while True:
        # выбор подынтервала
        i = argmax(R)

        # условия остановки
        if x[i + 1] - x[i] <= atol:
            break
        if len(y) >= maxfev:
            raise Exception(
                f'Решение не сошлоось после {maxfev} вызовов целевой функции.')
        # новое испытание
        x_new = (x[i] + x[i + 1]) / 2 - (y[i + 1] - y[i]) / (2 * L)
        x.insert(i + 1, x_new)
        y.insert(i + 1, f(x_new))
        diff[i] = difference(i)
        diff.insert(i + 1, difference(i + 1))
```

```

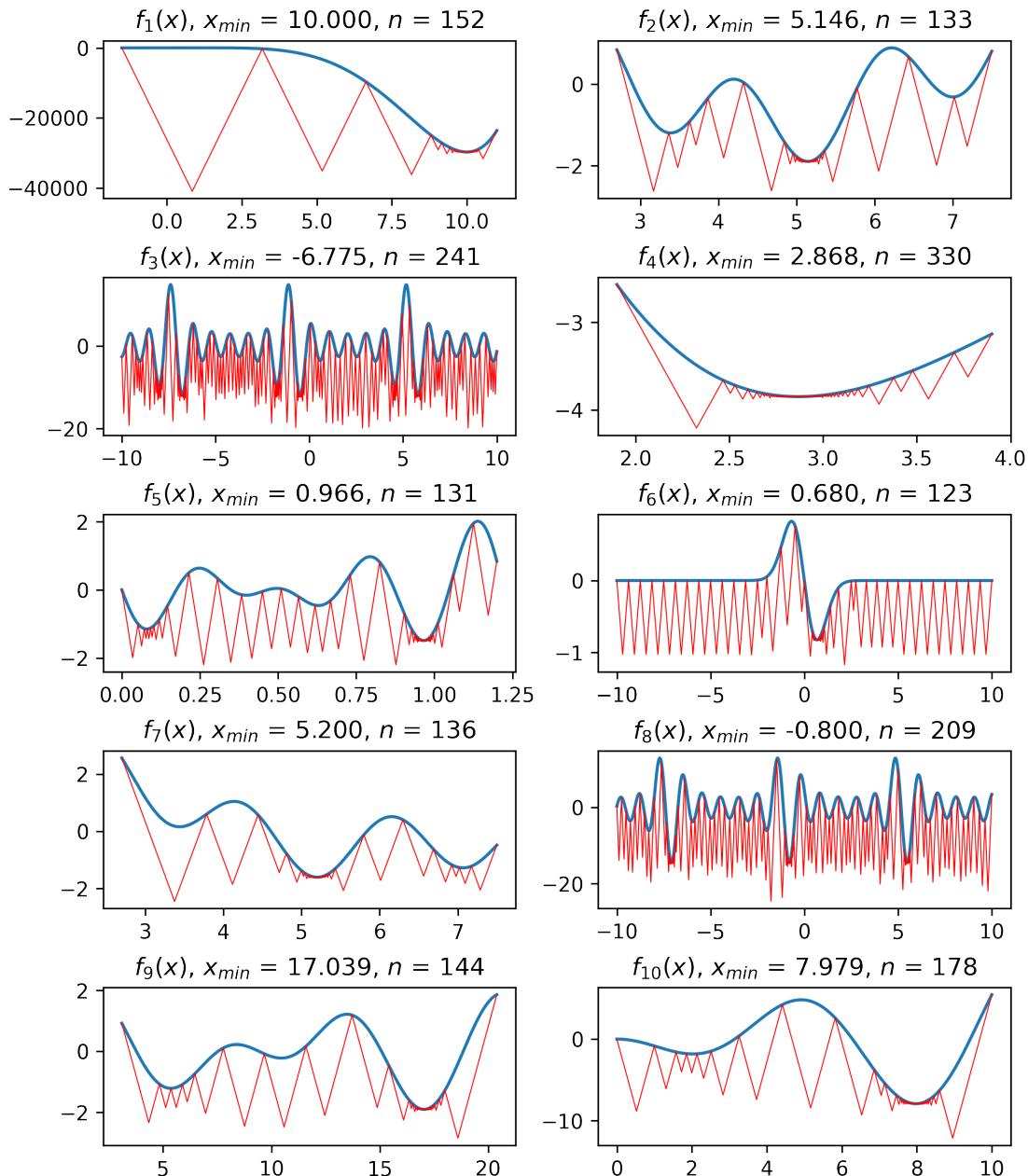
# оценка глобальной константы Липшица
k = i if diff[i] > diff[i + 1] else i + 1
if diff[k] > H: # обновляем все значения R
    H = diff[k]
    mu = 1 if H < 1e-7 else H * r
    L = 0.5 * (mu
                 + 1 / mu * ((y[k + 1] - y[k]) / (x[k + 1] - x[k]))**2)
    R = [characteristic(i) for i in range(len(y) - 1)]
else: # обновляем R только на новых интервалах
    R[i] = characteristic(i)
    R.insert(i + 1, characteristic(i + 1))

# найдём минимум
x_min = x[argmin(y)]

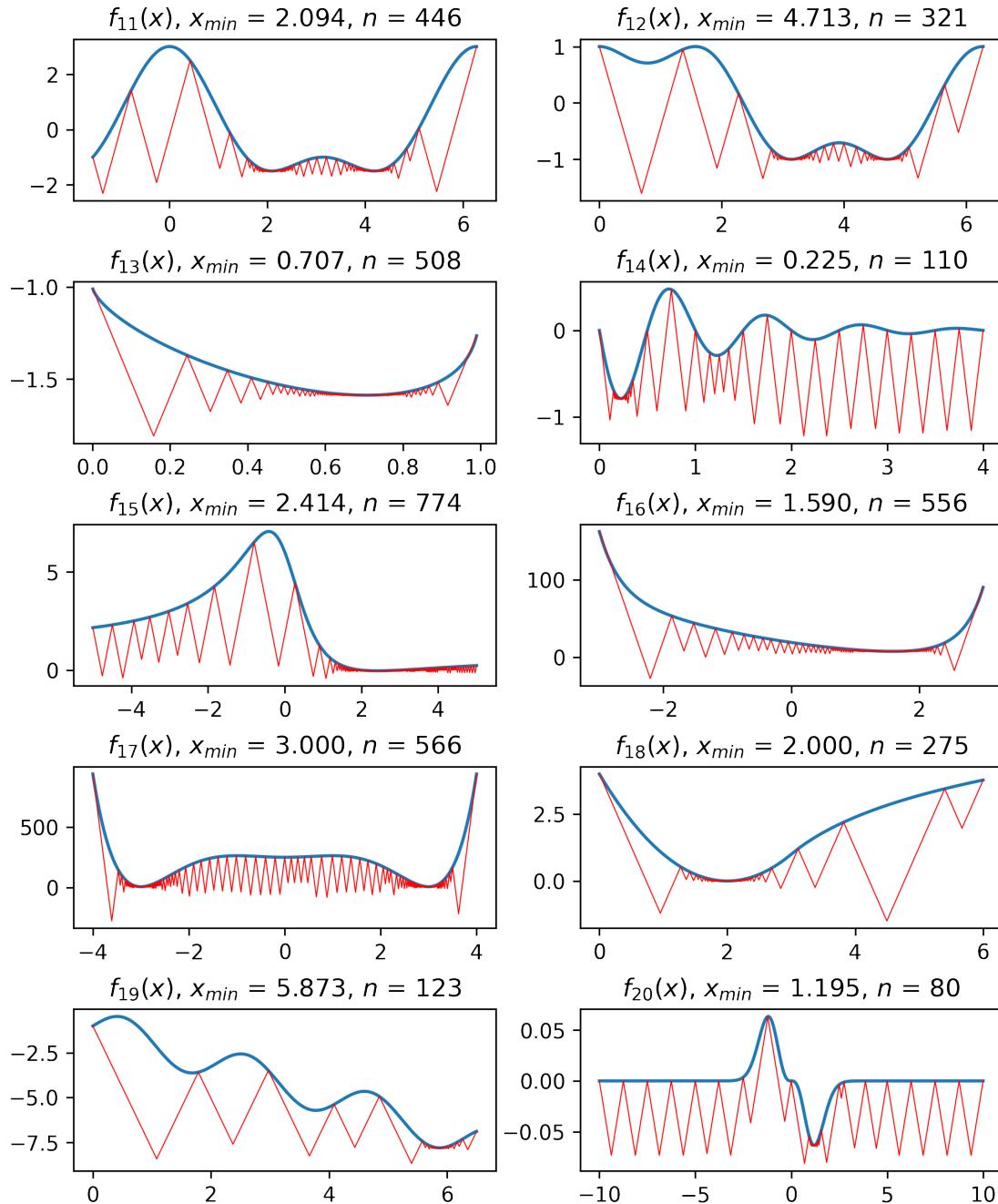
# возвращаем результат
if not full_output:
    return x_min
x_full = []
y_full = []
for i in range(len(x) - 1):
    x_full.append(x[i])
    x_full.append((x[i] + x[i + 1]) / 2 - (y[i + 1] - y[i]) / (2 * mu))
    y_full.append(y[i])
    y_full.append(y_full[-1] - mu * (x_full[-1] - x_full[-2]))
x_full.append(x[-1])
y_full.append(y[-1])
return OptimizeResult(x_min, x_full, y_full, len(y))

```

```
[14]: fig, _ = plot_test_functions(
    lambda tf: minimize_ING2(f=tf.f, a=tf.interval[0], b=tf.interval[1],
                             r=2, atol=1e-4*(tf.interval[1]-tf.interval[0]),
                             full_output=True),
    dict(ls='-', lw=0.5, color='r'), True
)
```



```
[15]: fig, _ = plot_test_functions(
    lambda tf: minimize_ING2(f=tf.f, a=tf.interval[0], b=tf.interval[1],
                             r=2, atol=1e-4*(tf.interval[1]-tf.interval[0]),
                             full_output=True),
    dict(ls='-', lw=0.5, color='r'), False
)
```



5 Геометрический метод с локальными константами Липшица

```
[16]: def minimize_NL(f, a, b, r, xi, atol=None, maxfev=MAXFEV, full_output=False):
    """
    Найти на отрезке [`a`, `b`] минимум функции `f` с помощью геометрического
    метода с адаптивным оцениванием локальных констант Липшица. Точность метода
    и максимальное количество вызовов функции задаются параметрами `atol` и
    `maxfev`, соответственно.
    """

    def new_point(i):
        return (x[i + 1] + x[i]) / 2 - (y[i + 1] - y[i]) / (2 * mu[i])

    def characteristic(i):
        return (y[i + 1] + y[i]) / 2 - mu[i] * (x[i + 1] - x[i]) / 2

    # точность по умолчанию
    if atol is None:
        atol = (b - a) * 1e-4

    x = [a, b]
    y = [f(a), f(b)]

    # оценка локальной константы Липшица и характеристики первого интервала
    dx = [b - a]
    diff = [abs(y[1] - y[0]) / dx[0]]
    X_max = dx[0]
    lam = [diff[0]]
    lam_max = lam[0]
    gamma = [lam_max * dx[0] / X_max]
    mu = [r * max(lam[0], gamma[0], xi)]
    R = [characteristic(0)]

    while True:
        # выбор подинтервала
        i = argmin(R)

        # условия остановки
        if x[i + 1] - x[i] <= atol:
            break
        if len(y) >= maxfev:
            raise Exception(
                f'Решение не сошлоось после {maxfev} вызовов целевой функции.')
        # новое испытание
        x.insert(i + 1, new_point(i))
        y.insert(i + 1, f(x[i + 1]))
```

```

# оценка локальных констант Липшица и характеристик
full_update = False # обновлять ли все значения
if dx[i] == X_max: # разбиваем самый длинный интервал
    X_max = None
    full_update = True
dx[i] = x[i + 1] - x[i]
dx.insert(i + 1, x[i + 2] - x[i + 1])
k = i if dx[i] > dx[i + 1] else i + 1
if X_max is None:
    X_max = max(dx)
elif dx[k] > X_max:
    X_max = dx[k]
    full_update = True

# обновляем lam
diff[i] = abs(y[i + 1] - y[i]) / dx[i]
diff.insert(i + 1, abs(y[i + 2] - y[i + 1]) / dx[i + 1])
lam.insert(i + 1, None)
for j in range(max(0, i - 1), min(i + 3, len(lam))):
    j1 = max(0, j - 1)
    j2 = min(j + 2, len(lam))
    lam[j] = max(diff[j1:j2])
    if lam[j] > lam_max:
        lam_max = lam[j]
        full_update = True

if full_update: # обновить все значения
    gamma = [lam_max * dx_i / X_max for dx_i in dx]
    mu = [r * max(lam[i], gamma[i], xi) for i in range(len(lam))]
    R = [characteristic(i) for i in range(len(y) - 1)]
else: # обновить только значения, измененные новыми интервалами
    gamma.insert(i + 1, None)
    mu.insert(i + 1, None)
    R.insert(i + 1, None)
    for j in range(max(0, i - 1), min(i + 3, len(lam))):
        gamma[j] = lam_max * dx[j] / X_max
        mu[j] = r * max(lam[j], gamma[j], xi)
        R[j] = characteristic(j)

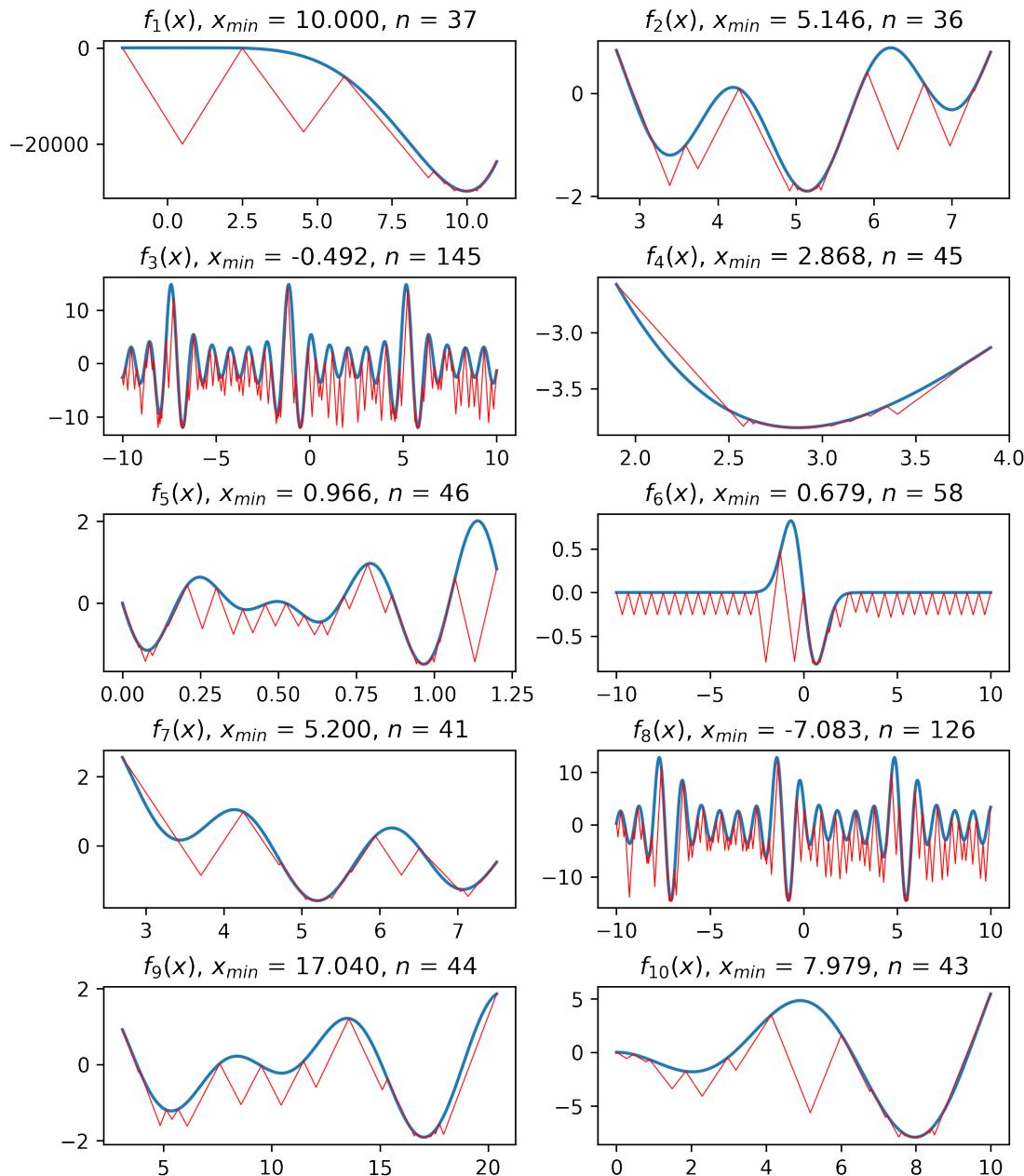
# найдём минимум
x_min = x[argmin(y)]

# возвращаем результат
if not full_output:
    return x_min
x_full = []
y_full = []

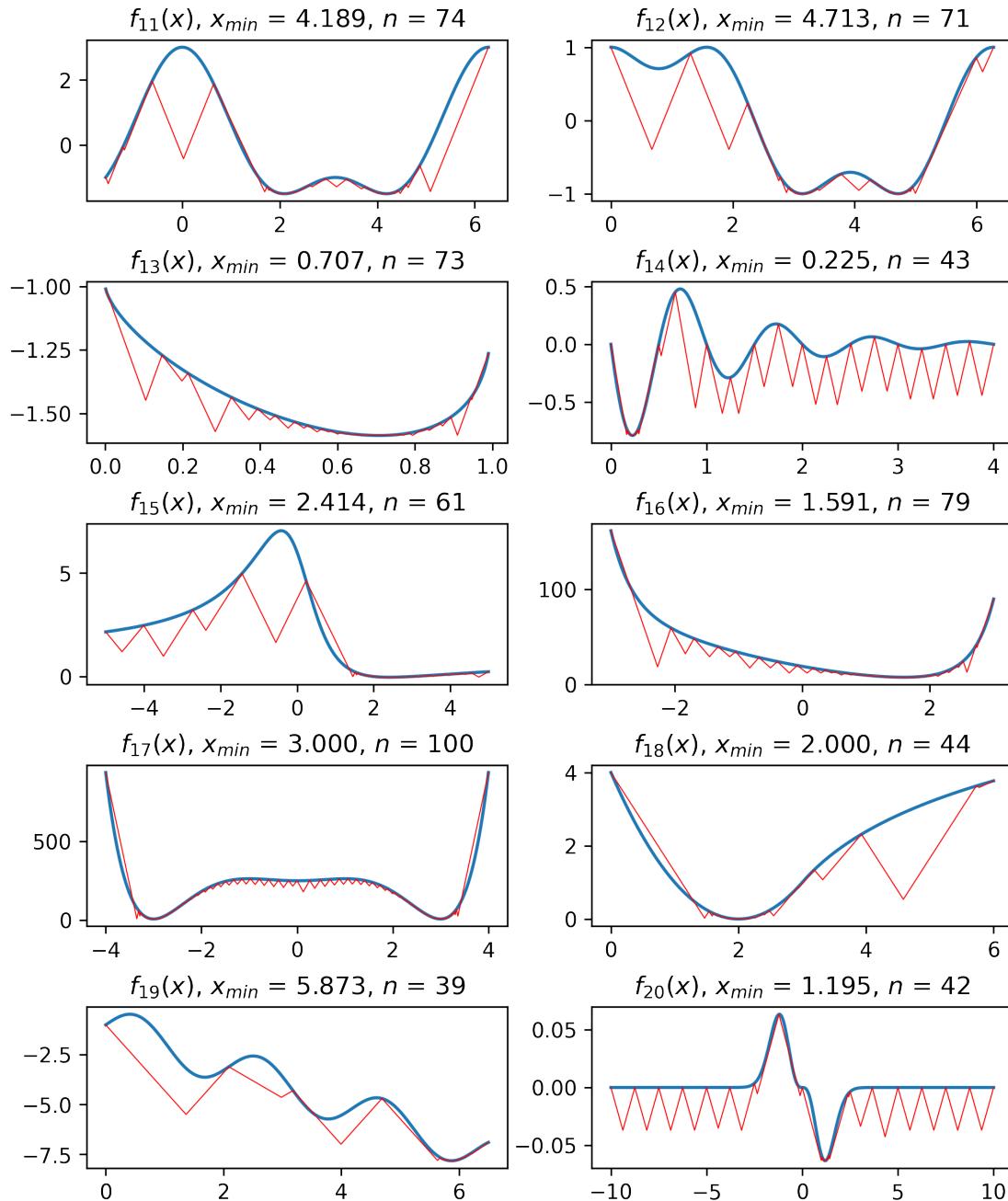
```

```
for i in range(len(x) - 1):
    x_full.append(x[i])
    y_full.append(y[i])
    x_full.append(new_point(i))
    y_full.append(characteristic(i))
x_full.append(x[-1])
y_full.append(y[-1])
return OptimizeResult(x_min, x_full, y_full, len(y))
```

```
[17]: fig, _ = plot_test_functions(
    lambda tf: minimize_NL(f=tf.f, a=tf.interval[0], b=tf.interval[1],
                           r=1.1, xi=1e-6,
                           atol=1e-4*(tf.interval[1]-tf.interval[0]),
                           full_output=True),
    dict(ls='--', lw=0.5, color='r'), True
)
```



```
[18]: fig, _ = plot_test_functions(
    lambda tf: minimize_NL(f=tf.f, a=tf.interval[0], b=tf.interval[1],
                           r=1.1, xi=1e-6,
                           atol=1e-4*(tf.interval[1]-tf.interval[0]),
                           full_output=True),
    dict(ls='--', lw=0.5, color='r'), False
)
```



6 Информационно-статистический метод с локальными константами Липшица

```
[19]: def minimize_INL(f, a, b, r, xi, atol=None, maxfev=MAXFEV, full_output=False):
    """
    Найти на отрезке [`a`, `b`] минимум функции `f` с помощью информационно-
    статистического метода с адаптивным оцениванием локальной константы
    Липшица. Точность метода и максимальное количество вызовов функции задаются
    параметрами `atol` и `maxfev`, соответственно.
    """

    def characteristic(i):
        return (mu[i] * dx[i] + (y[i + 1] - y[i])**2 / (dx[i] * mu[i])
               - 2 * (y[i + 1] + y[i]))

    # точность по умолчанию
    if atol is None:
        atol = (b - a) * 1e-4

    x = [a, b]
    y = [f(a), f(b)]

    # оценка локальной константы Липшица и характеристики первого интервала
    dx = [b - a]
    X_max = dx[0]
    diff = [abs(y[1] - y[0]) / dx[0]]
    diff_max = diff[0]
    lam = [diff[0]]
    gamma = [diff_max]
    mu = [r * max(lam[0], gamma[0], xi)]
    R = [characteristic(0)]

    while True:
        # выбор подинтервала
        i = argmax(R)

        # условия остановки
        if x[i + 1] - x[i] <= atol:
            break
        if len(y) >= maxfev:
            raise Exception(
                f'Решение не сошлось после {maxfev} вызовов целевой функции.')

        # новое испытание
        x_new = 0.5 * (x[i + 1] + x[i] - (y[i + 1] - y[i]) / mu[i])
        x.insert(i + 1, x_new)
        y.insert(i + 1, f(x_new))
```

```

# оценка локальных констант Липшица и характеристик
full_update = False # обновлять ли все значения

# обновляем dx
if dx[i] == X_max:
    X_max = None
    full_update = True
dx[i] = x[i + 1] - x[i]
dx.insert(i + 1, x[i + 2] - x[i + 1])
k = i if dx[i] > dx[i + 1] else i + 1
if X_max is None:
    X_max = max(dx)
elif dx[k] > X_max:
    X_max = dx[k]
    full_update = True

# обновляем diff
if diff[i] == diff_max:
    full_update = True
    diff_max = None
diff[i] = abs(y[i + 1] - y[i]) / dx[i]
diff.insert(i + 1, abs(y[i + 2] - y[i + 1]) / dx[i + 1])
k = i if diff[i] > diff[i + 1] else i + 1
if diff_max is None:
    diff_max = max(diff)
elif diff[k] > diff_max:
    diff_max = diff[k]
    full_update = True

# обновляем lam
lam.insert(i + 1, None)
for j in range(max(0, i - 1), min(i + 3, len(lam))):
    j1 = max(0, j - 1)
    j2 = min(j + 2, len(lam))
    lam[j] = max(diff[j1:j2])

if full_update: # обновить все значения
    gamma = [diff_max * dx_i / X_max for dx_i in dx]
    mu = [r * max(lam[i], gamma[i], xi) for i in range(len(lam))]
    R = [characteristic(i) for i in range(len(y) - 1)]
else: # обновить только значения, измененный новыми интервалами
    gamma.insert(i + 1, None)
    mu.insert(i + 1, None)
    R.insert(i + 1, None)
    for j in range(max(0, i - 1), min(i + 3, len(lam))):
        gamma[j] = diff_max * dx[j] / X_max
        mu[j] = r * max(lam[j], gamma[j], xi)

```

```

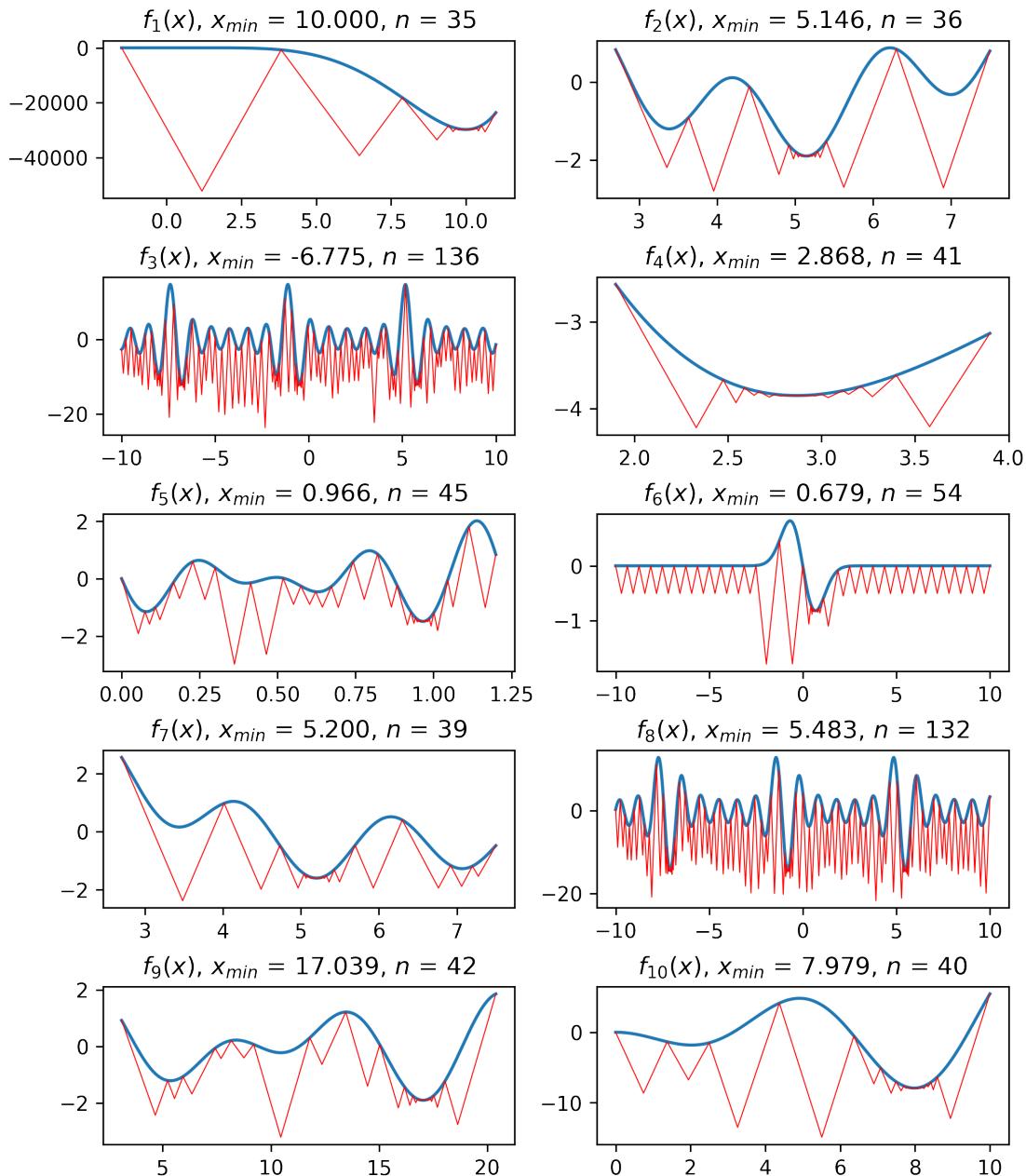
R[j] = characteristic(j)

# найдём минимум
x_min = x[argmin(y)]

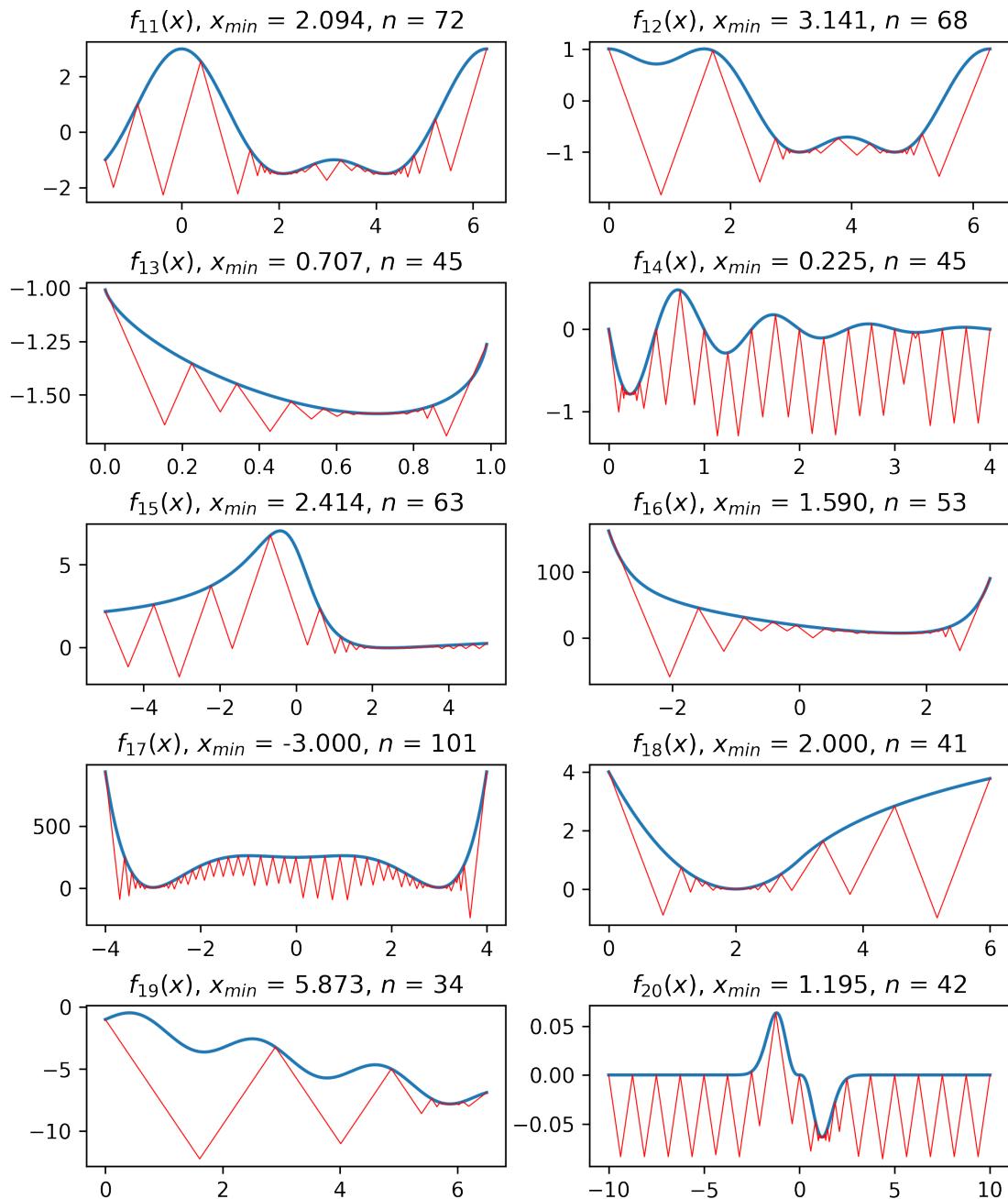
# возвращаем результат
if not full_output:
    return x_min
x_full = []
y_full = []
for i in range(len(x) - 1):
    x_full.append(x[i])
    x_full.append(0.5 * (x[i + 1] + x[i] - (y[i + 1] - y[i]) / mu[i]))
    y_full.append(y[i])
    y_full.append(y_full[-1] - mu[i] * (x_full[-1] - x_full[-2]))
x_full.append(x[-1])
y_full.append(y[-1])
return OptimizeResult(x_min, x_full, y_full, len(y))

```

```
[20]: fig, _ = plot_test_functions(
    lambda tf: minimize_INL(f=tf.f, a=tf.interval[0], b=tf.interval[1],
                            r=2, xi=1e-6,
                            atol=1e-4*(tf.interval[1]-tf.interval[0]),
                            full_output=True),
    dict(ls='--', lw=0.5, color='r'), True
)
```



```
[21]: fig, _ = plot_test_functions(
    lambda tf: minimize_INL(f=tf.f, a=tf.interval[0], b=tf.interval[1],
                            r=2, xi=1e-6,
                            atol=1e-4*(tf.interval[1]-tf.interval[0]),
                            full_output=True),
    dict(ls='--', lw=0.5, color='r'), False
)
```



7 Метод с негладкими минорантами и глобальной оценкой константы Липшица производной

```
[22]: def minimize_DGN(f, fdot, a, b, r, atol=None, maxfev=MAXFEV,
                      full_output=False):
    """
    Найти на отрезке [`a`, `b`] минимум дифференцируемой функции `f` с помощью
    метода с аддитивным оцениванием глобальной константы Липшица. Точность
    метода и максимальное количество вызовов функции задаются параметрами
    `atol` и `maxfev`, соответственно.
    """

    def calculate_m(i):
        dx = x[i + 1] - x[i]
        alpha = abs(y_dot[i + 1] - y_dot[i]) / dx
        beta = 2 * (-y[i + 1] + y[i] + y_dot[i] * dx) / dx**2
        gamma = 2 * (y[i + 1] - y[i] - y_dot[i + 1] * dx) / dx**2
        return max(alpha, beta, gamma)

    def new_point(i):
        return ((-y[i + 1] + y[i] + y_dot[i + 1] * x[i + 1] - y_dot[i] * x[i]
                + 0.5 * L * (x[i + 1]**2 - x[i]**2))
                / (L * (x[i + 1] - x[i]) + y_dot[i + 1] - y_dot[i]))

    def characteristic(i):
        x_hat = new_point(i)
        return y[i] + y_dot[i] * (x_hat - x[i]) - 0.5 * L * (x_hat - x[i])**2

    # точность по умолчанию
    if atol is None:
        atol = (b - a) * 1e-4

    x = [a, b]
    y = [f(a), f(b)]
    y_dot = [fdot(a), fdot(b)]

    while True:
        # оценка константы Липшица для производной
        m = [calculate_m(i) for i in range(len(y) - 1)]
        G = max(m)
        L = 1 if G < 1e-7 else r * G

        # вычисление характеристик
        R = [characteristic(i) for i in range(len(y) - 1)]

        # выбор интервала для разбиения
        i = argmin(R)
```

```

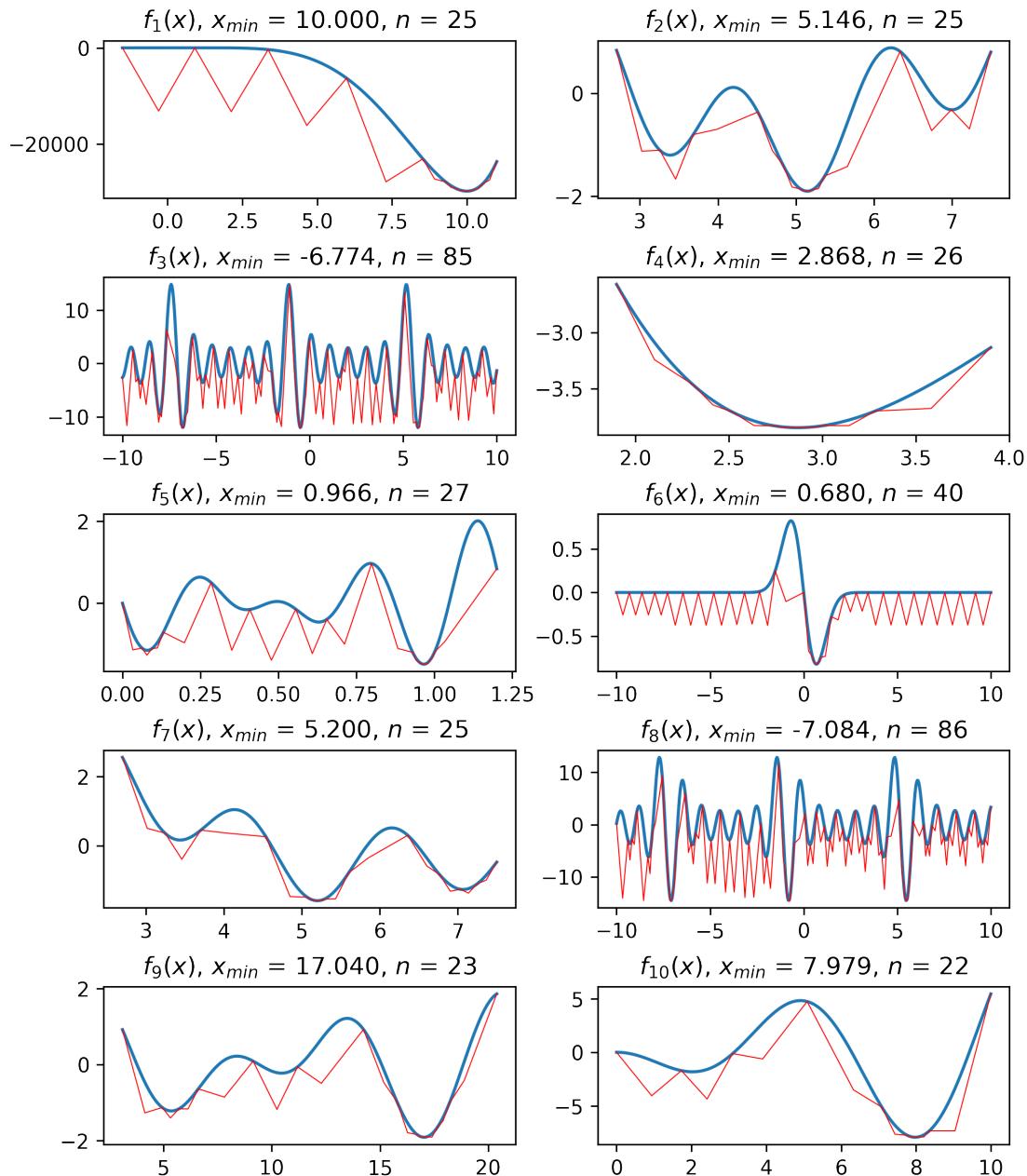
# условия остановки
if x[i + 1] - x[i] <= atol:
    break
if len(y) >= maxfev:
    raise Exception(
        f'Решение не сошлось после {maxfev} вызовов целевой функции.')
# новое испытание
x.insert(i + 1, new_point(i))
y.insert(i + 1, f(x[i + 1]))
y_dot.insert(i + 1, fdot(x[i + 1]))

# найдём минимум
x_min = x[argmin(y)]

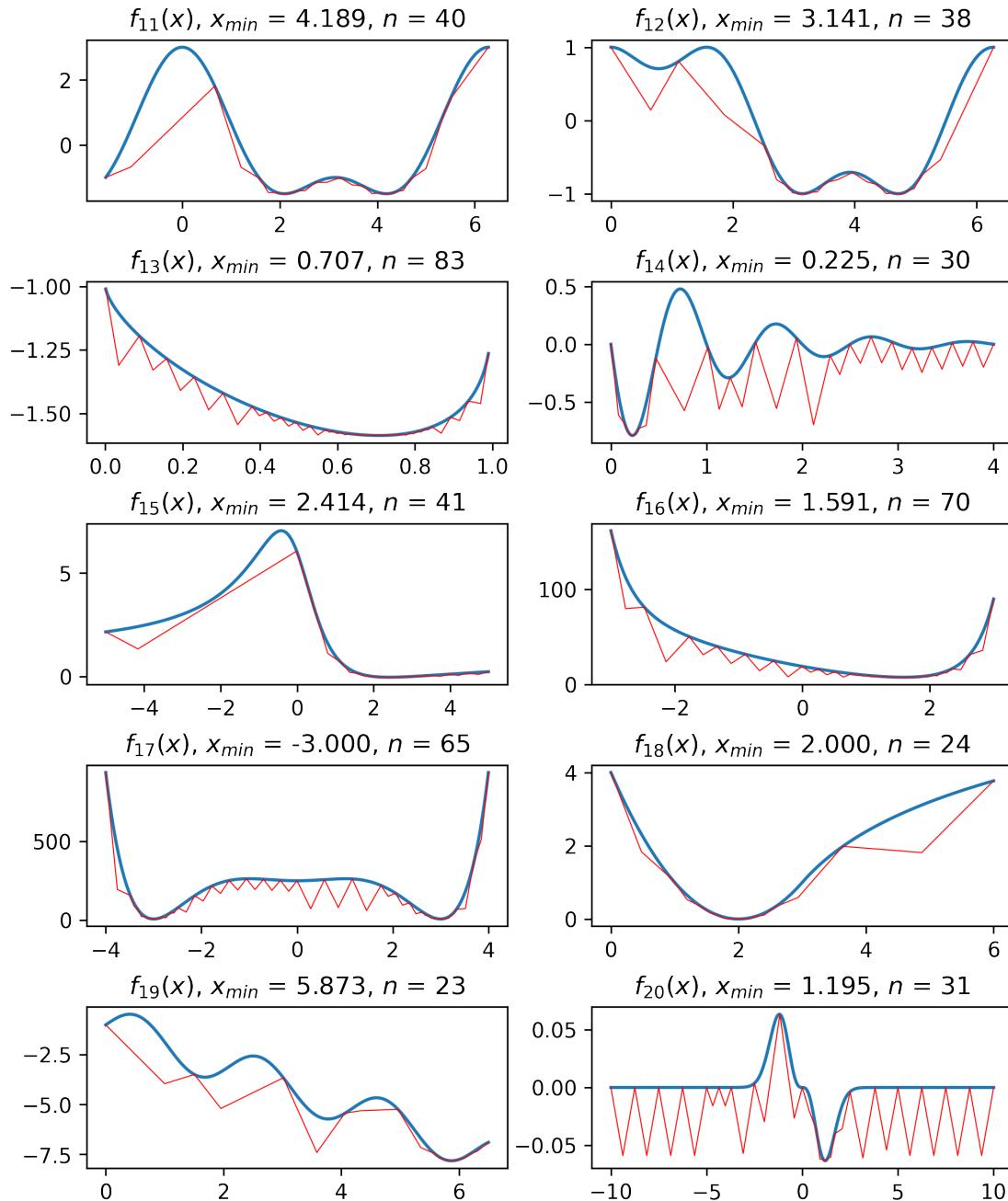
# возвращаем результат
if not full_output:
    return x_min
# возвращаем график миноранты
x_hat = [new_point(i) for i in range(len(y) - 1)]
x_full = []
y_full = []
for i in range(len(y) - 1):
    x_full.append(x[i])
    x_full.append(x_hat[i])
    y_full.append(y[i])
    y_full.append(R[i])
x_full.append(x[-1])
y_full.append(y[-1])
return OptimizeResult(x_min, x_full, y_full, len(y))

```

```
[23]: fig, _ = plot_test_functions(
    lambda tf: minimize_DGN(f=tf.f, fdot=tf.fdot, a=tf.interval[0],
                            b=tf.interval[1], r=1.1,
                            atol=1e-4*(tf.interval[1]-tf.interval[0]),
                            full_output=True),
    dict(ls='--', lw=0.5, color='r'), True
)
```



```
[24]: fig, _ = plot_test_functions(
    lambda tf: minimize_DGN(f=tf.f, fdot=tf.fdot, a=tf.interval[0],
                            b=tf.interval[1], r=1.1,
                            atol=1e-4*(tf.interval[1]-tf.interval[0]),
                            full_output=True),
    dict(ls='--', lw=0.5, color='r'), False
)
```



8 Метод с негладкими минорантами и локальными оценками констант Липшица производной

```
[25]: def minimize_DLN(f, fdot, a, b, r, xi, atol=None, maxfev=MAXFEV,
                      full_output=False):
    """
    Найти на отрезке [`a`, `b`] минимум дифференцируемой функции `f` с помощью
    метода с аддитивным оцениванием локальных констант Липшица. Точность
    метода и максимальное количество вызовов функции задаются параметрами
    `atol` и `maxfev`, соответственно.
    """

    def calculate_tau(i, pt):
        dx_f = pt - x[i]
        dx_b = pt - x[i + 1]
        return 2 * abs(y[i + 1] - y[i] + y_dot[i + 1] * dx_b
                       - y_dot[i] * dx_f) / (dx_b**2 + dx_f**2)

    def calculate_nu(i):
        if abs(y_dot[i] - y_dot[i + 1]) < 1e-6:
            return calculate_tau(i, (x[i] + x[i + 1]) / 2)
        d = 0.5 * np.sqrt(
            (2 * (y[i] - y[i + 1]) + (y_dot[i + 1] + y_dot[i]) * dx[i])**2
            + (y_dot[i + 1] - y_dot[i])**2 * dx[i]**2
        )
        d_minus = x[i] + ((y[i] - y[i + 1] + y_dot[i + 1] * dx[i] - d)
                           / (y_dot[i + 1] - y_dot[i]))
        if x[i] <= d_minus <= x[i + 1]:
            tau_minus = calculate_tau(i, d_minus)
        else:
            tau_minus = -np.inf
        d_plus = x[i] + ((y[i] - y[i + 1] + y_dot[i + 1] * dx[i] + d)
                          / (y_dot[i + 1] - y_dot[i]))
        if x[i] <= d_plus <= x[i + 1]:
            tau_plus = calculate_tau(i, d_plus)
        else:
            tau_plus = -np.inf
        return max(
            calculate_tau(i, x[i]),
            calculate_tau(i, x[i + 1]),
            tau_minus,
            tau_plus
        )

    def calculate_m(i):
        i1 = max(0, i - 1)
        i2 = min(len(nu), i + 2)
        lam = max(nu[i1:i2])
```

```

gamma = max(nu) * dx[i] / max(dx)
return r * max(lam, gamma, xi)

def new_point(i):
    return ((-y[i + 1] + y[i] + y_dot[i + 1] * x[i + 1] - y_dot[i] * x[i]
            + 0.5 * m[i] * (x[i + 1]**2 - x[i]**2))
            / (m[i] * dx[i] + y_dot[i + 1] - y_dot[i]))

def characteristic(i):
    x_hat = new_point(i)
    return min(
        y[i],
        y[i + 1],
        y[i] + y_dot[i] * (x_hat - x[i]) - 0.5 * m[i] * (x_hat - x[i])**2
    )

# точность по умолчанию
if atol is None:
    atol = (b - a) * 1e-4

x = [a, b]
y = [f(a), f(b)]
dx = [b - a]
y_dot = [fdot(a), fdot(b)]
nu = [calculate_nu(0)]

while True:
    # оценка локальных констант Липшица для производной
    m = [calculate_m(i) for i in range(len(y) - 1)]

    # вычисление характеристик
    R = [characteristic(i) for i in range(len(y) - 1)]

    # выбор интервала для разбиения
    i = argmin(R)

    # условия остановки
    if dx[i] <= atol:
        break
    if len(y) >= maxfev:
        raise Exception(
            f'Решение не сорвалось после {maxfev} вызовов целевой функции.')
    else:
        print(f'При i={i}, x[i]={x[i]}, y[i]={y[i]}, m[i]={m[i]}, R[i]={R[i]}')

    # новое испытание
    x.insert(i + 1, new_point(i))
    y.insert(i + 1, f(x[i + 1]))
    dx[i] = x[i + 1] - x[i]

```

```

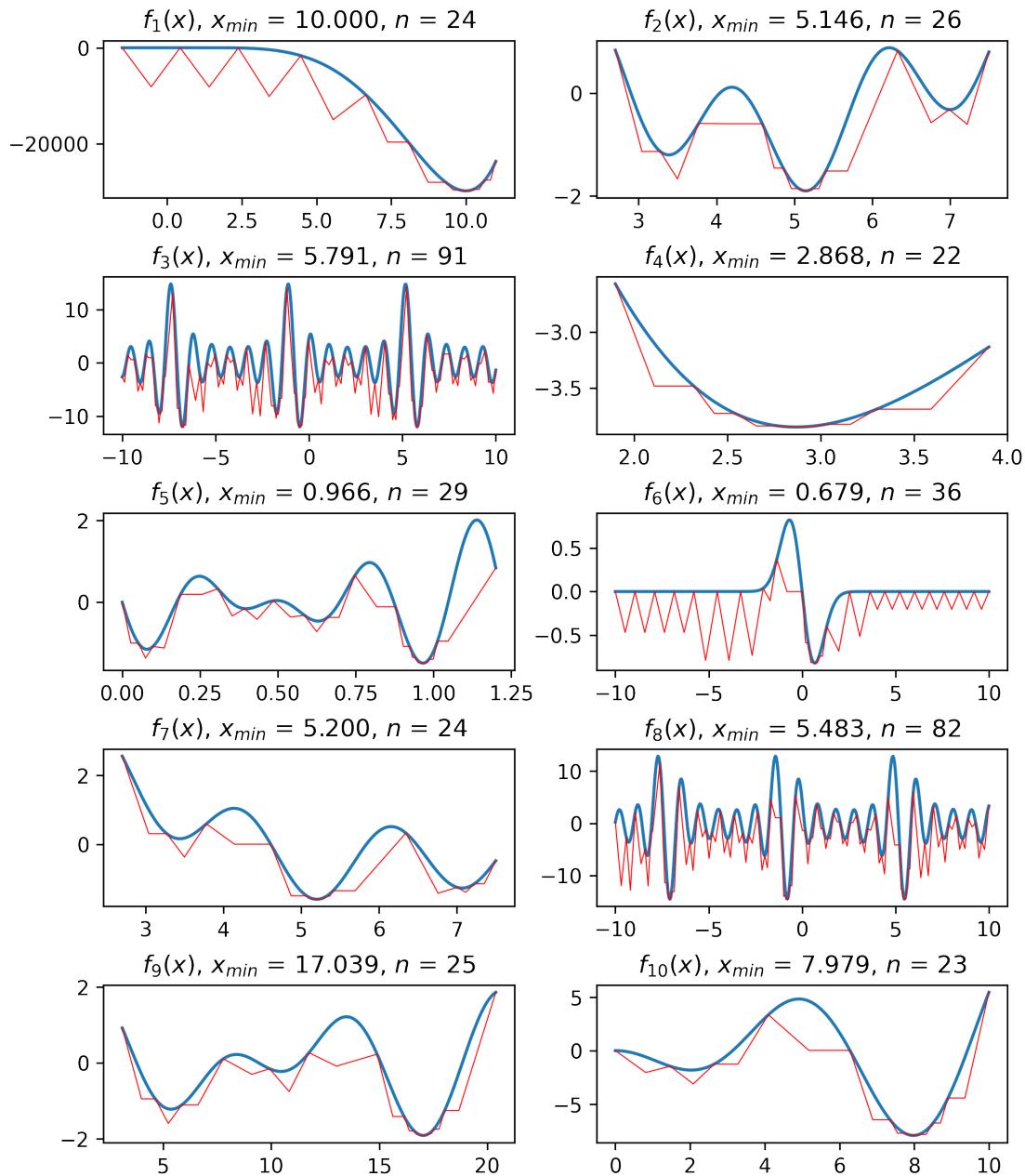
dx.insert(i + 1, x[i + 2] - x[i + 1])
y_dot.insert(i + 1, fdot(x[i + 1]))
nu = [calculate_nu(i) for i in range(len(y) - 1)]

# найдём минимум
x_min = x[argmin(y)]

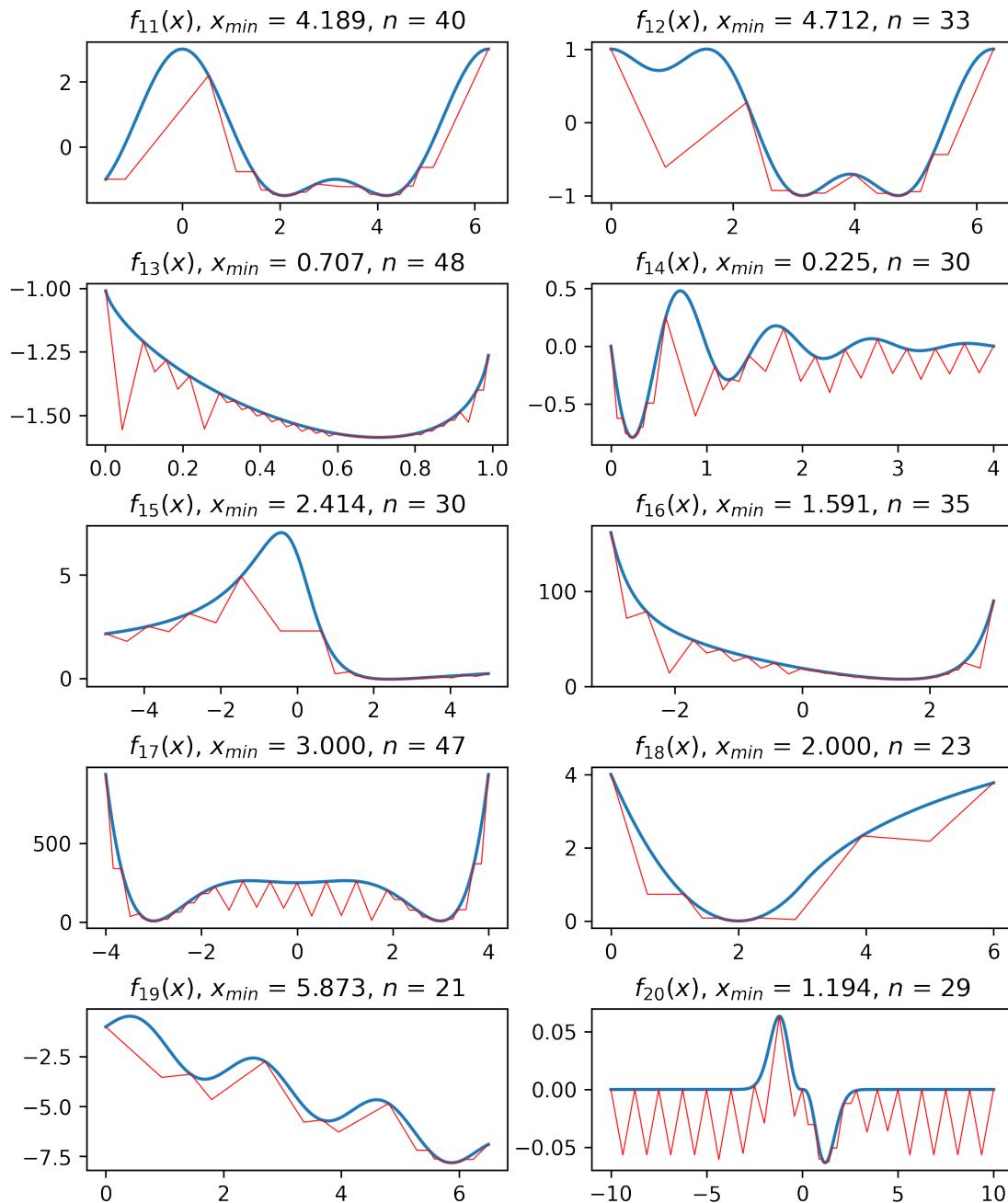
# возвращаем результат
if not full_output:
    return x_min
# возвращаем график миноранты
x_hat = [new_point(i) for i in range(len(y) - 1)]
x_full = []
y_full = []
for i in range(len(y) - 1):
    x_full.append(x[i])
    x_full.append(x_hat[i])
    y_full.append(y[i])
    y_full.append(R[i])
x_full.append(x[-1])
y_full.append(y[-1])
return OptimizeResult(x_min, x_full, y_full, len(y))

```

```
[26]: fig, _ = plot_test_functions(
    lambda tf: minimize_DLN(f=tf.f, fdot=tf.fdot, a=tf.interval[0],
                            b=tf.interval[1], r=1.1, xi=1e-9,
                            atol=1e-4*(tf.interval[1]-tf.interval[0]),
                            full_output=True),
    dict(ls='--', lw=0.5, color='r'), True
)
```



```
[27]: fig, _ = plot_test_functions(
    lambda tf: minimize_DLN(f=tf.f, fdot=tf.fdot, a=tf.interval[0],
                            b=tf.interval[1], r=1.1, xi=1e-9,
                            atol=1e-4*(tf.interval[1]-tf.interval[0]),
                            full_output=True),
    dict(ls='--', lw=0.5, color='r'), False
)
```



9 Метод с гладкими минорантами и глобальной оценкой константы Липшица производной

```
[28]: def minimize_DGS(f, fdot, a, b, r, xi, atol=None, maxfev=MAXFEV,
                      full_output=False):
    """
    Найти на отрезке [`a`, `b`] минимум дифференцируемой функции `f` с помощью
    метода с аддитивным оцениванием глобальной константы Липшица для
    производной, использующий гладкие миноранты. Точность метода и максимальное
    количество вызовов функции задаются параметрами `atol` и `maxfev`,
    соответственно.
    """

    def calculate_nu(i):
        d = np.sqrt((2 * (y[i] - y[i + 1])
                     + (y_dot[i + 1] + y_dot[i]) * dx[i])**2
                     + (y_dot[i + 1] - y_dot[i])**2 * dx[i]**2)
        return (abs(2 * (y[i] - y[i + 1])
                   + (y_dot[i + 1] + y_dot[i]) * dx[i]) + d) / dx[i]**2

    def calculate_pi(arg, m, b, c):
        return 0.5 * m * arg**2 + b * arg + c

    def calculate_pi_prime(arg, m, b):
        return m * arg + b

    def characteristic(i):
        # точки пересечения вспомогательных функций
        delta_1 = dx[i] / 4 + (y_dot[i + 1] - y_dot[i]) / (4 * m[i])
        delta_2 = ((y[i] - y[i + 1]
                    + y_dot[i + 1] * x[i + 1]
                    - y_dot[i] * x[i]
                    + 0.5 * m[i] * (x[i + 1]**2 - x[i]**2))
                    / (m[i] * dx[i] + y_dot[i + 1] - y_dot[i]))
        u[i] = delta_1 + delta_2
        u_prime[i] = -delta_1 + delta_2

        # ограничивающая парабола
        b = y_dot[i + 1] - 2 * m[i] * u[i] + m[i] * x[i + 1]
        c = (y[i + 1] - y_dot[i + 1] * x[i + 1]
             - 0.5 * m[i] * x[i + 1]**2 + m[i] * u[i]**2)
        piprime_u = calculate_pi_prime(u[i], m[i], b)
        piprime_uprime = calculate_pi_prime(u_prime[i], m[i], b)

        # характеристика зависит от положения минимума параболы
        if piprime_u * piprime_uprime < 0:
            x_hat[i] = 2 * u[i] - x[i + 1] - y_dot[i + 1] / m[i]
            psi = calculate_pi(x_hat[i], m[i], b, c)
```

```

        W.add(i)
        return min(y[i], psi, y[i + 1])
    else:
        if y[i] < y[i + 1]:
            U_prime.add(i)
            return y[i]
        U.add(i)
        return y[i + 1]

# точность по умолчанию
if atol is None:
    atol = (b - a) * 1e-4

x = [a, b]
y = [f(a), f(b)]
y_dot = [fdot(a), fdot(b)]
dx = [b - a]

while True:
    # оценка глобальной константы Липшица для производной
    nu = [calculate_nu(i) for i in range(len(y) - 1)]
    m = [r * max(xi, max(nu))] * (len(y) - 1)

    # вычисление характеристик
    W = set()
    U = set()
    U_prime = set()
    u = [None] * (len(y) - 1)
    u_prime = [None] * (len(y) - 1)
    x_hat = [None] * (len(y) - 1)
    R = [characteristic(i) for i in range(len(y) - 1)]
    # последняя команда заполняет все инициализированные массивы

    # выбор интервала для разбиения
    t = argmin(R)

    # выбор точки для нового испытания
    if t in U_prime:
        x_new = u_prime[t]
    elif t in W:
        x_new = x_hat[t]
    else:
        assert t in U
        x_new = u[t]

    # новое испытание
    x.insert(t + 1, x_new)

```

```

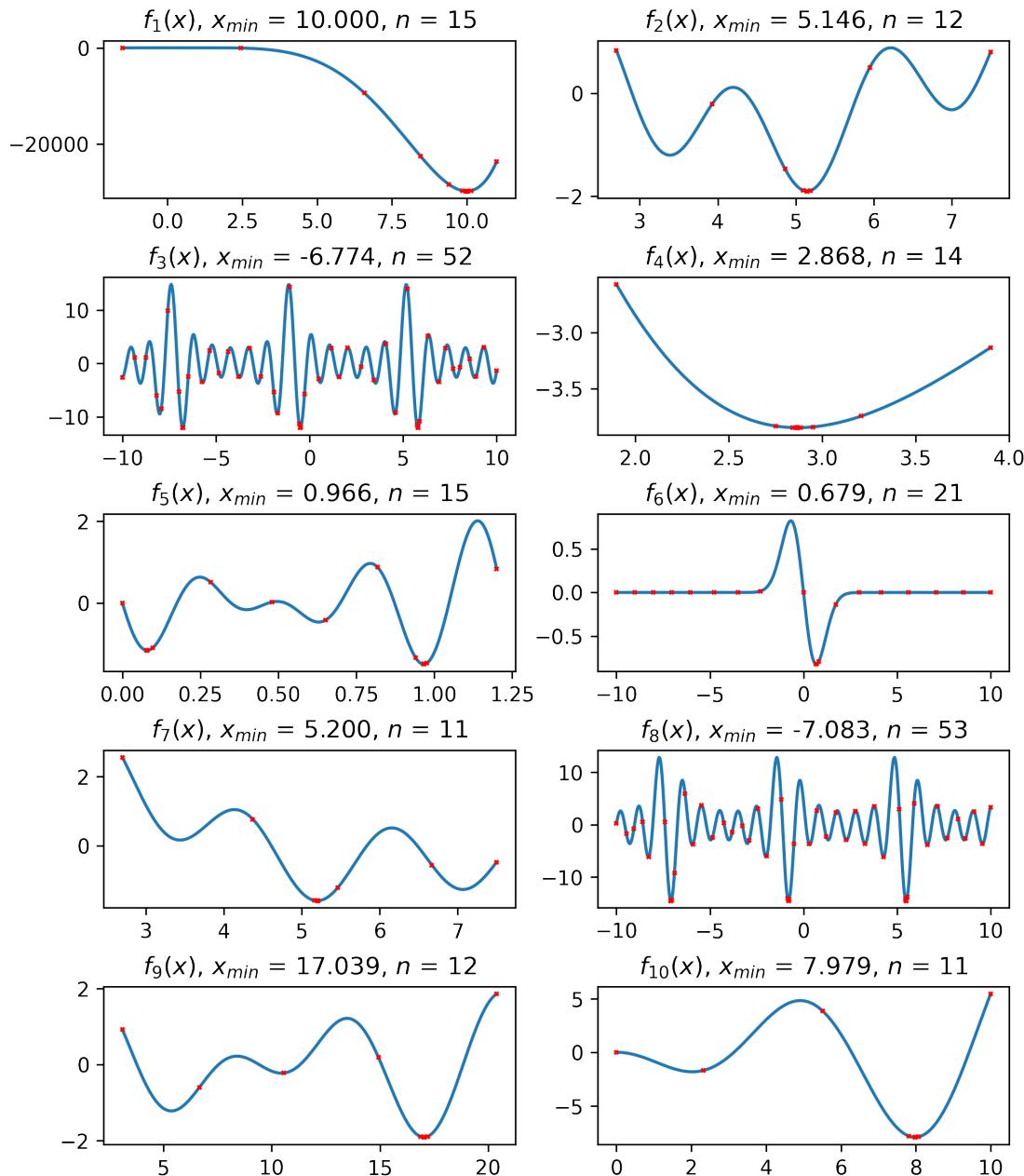
y.insert(t + 1, f(x[t + 1]))
dx[t] = x[t + 1] - x[t]
dx.insert(t + 1, x[t + 2] - x[t + 1])
y_dot.insert(t + 1, fdot(x[t + 1]))

# условия остановки
if dx[t] <= atol:
    break
if len(y) >= maxfev:
    raise Exception(
        f'Решение не сошлось после {maxfev} вызовов целевой функции.')
# найдём минимум
x_min = x[argmin(y)]

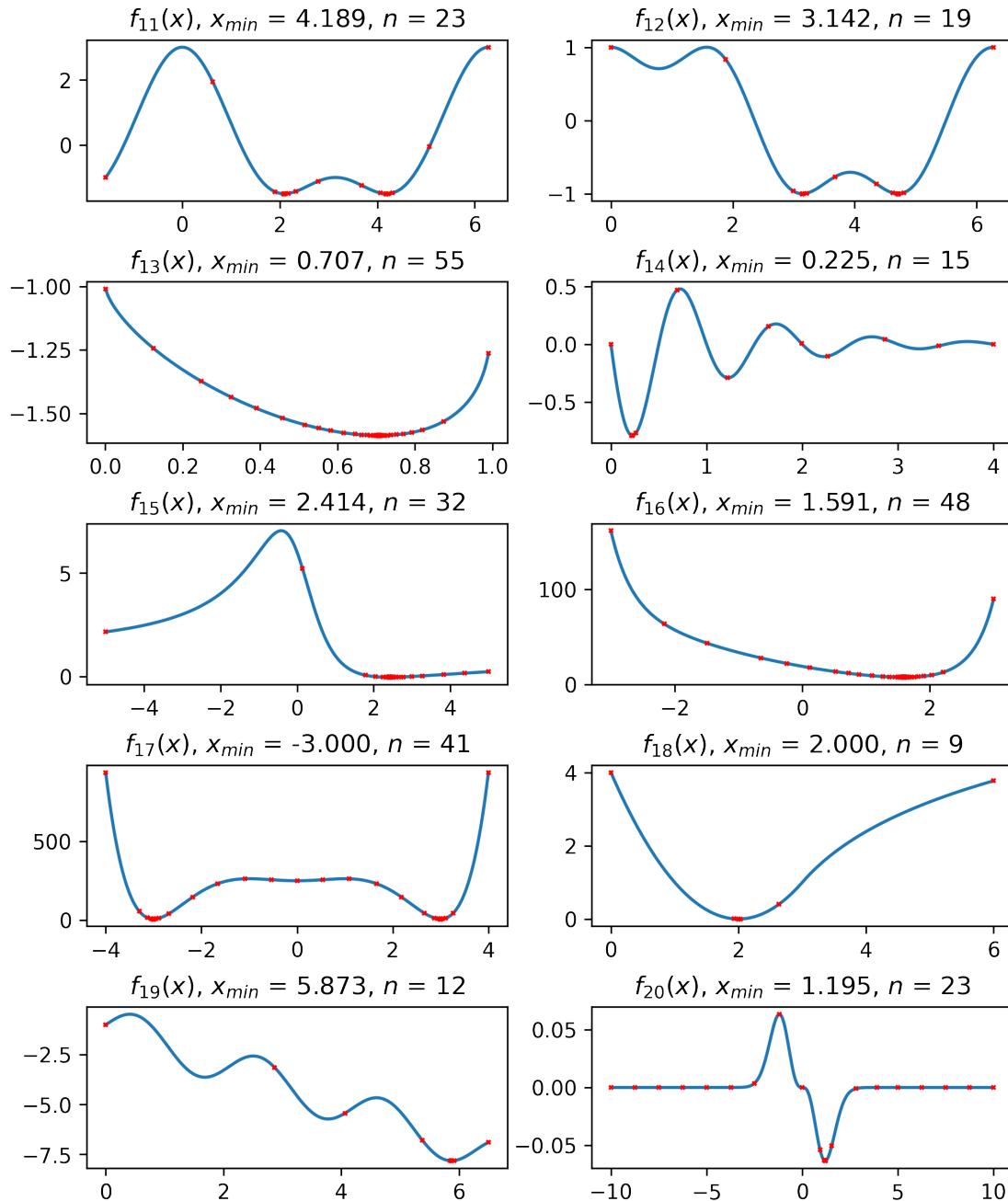
# возвращаем результат
if not full_output:
    return x_min
return OptimizeResult(x_min, x, y, len(y))

```

```
[29]: fig, _ = plot_test_functions(
    lambda tf: minimize_DGS(f=tf.f, fdot=tf.fdot, a=tf.interval[0],
                            b=tf.interval[1], r=1.11, xi=1e-9,
                            atol=1e-4*(tf.interval[1]-tf.interval[0]),
                            full_output=True),
    dict(ls='none', marker='x', ms=2, color='r'), True
)
```



```
[30]: fig, _ = plot_test_functions(
    lambda tf: minimize_DGS(f=tf.f, fdot=tf.fdot, a=tf.interval[0],
                            b=tf.interval[1], r=1.11, xi=1e-9,
                            atol=1e-4*(tf.interval[1]-tf.interval[0]),
                            full_output=True),
    dict(ls='none', marker='x', ms=2, color='r'), False
)
```



10 Метод с гладкими минорантами и локальными оценками констант Липшица производной

```
[31]: def minimize_DLS(f, fdot, a, b, r, xi, atol=None, maxfev=MAXFEV,
                     full_output=False):
    """
    Найти на отрезке [`a`, `b`] минимум дифференцируемой функции `f` с помощью
    метода с аддитивным оцениванием локальных констант Липшица для
    производной, использующий гладкие миноранты. Точность метода и максимальное
    количество вызовов функции задаются параметрами `atol` и `maxfev`,
    соответственно.
    """

    def calculate_nu(i):
        d = np.sqrt((2 * (y[i] - y[i + 1])
                     + (y_dot[i + 1] + y_dot[i]) * dx[i])**2
                     + (y_dot[i + 1] - y_dot[i])**2 * dx[i]**2)
        return (abs(2 * (y[i] - y[i + 1])
                    + (y_dot[i + 1] + y_dot[i]) * dx[i]) + d) / dx[i]**2

    def calculate_pi(arg, m, b, c):
        return 0.5 * m * arg**2 + b * arg + c

    def calculate_pi_prime(arg, m, b):
        return m * arg + b

    def characteristic(i):
        # точки пересечения вспомогательных функций
        delta_1 = dx[i] / 4 + (y_dot[i + 1] - y_dot[i]) / (4 * m[i])
        delta_2 = ((y[i] - y[i + 1]
                    + y_dot[i + 1] * x[i + 1]
                    - y_dot[i] * x[i]
                    + 0.5 * m[i] * (x[i + 1]**2 - x[i]**2))
                    / (m[i] * dx[i] + y_dot[i + 1] - y_dot[i]))
        u[i] = delta_1 + delta_2
        u_prime[i] = -delta_1 + delta_2

        # ограничивающая парабола
        b = y_dot[i + 1] - 2 * m[i] * u[i] + m[i] * x[i + 1]
        c = (y[i + 1] - y_dot[i + 1] * x[i + 1]
             - 0.5 * m[i] * x[i + 1]**2 + m[i] * u[i]**2)
        piprime_u = calculate_pi_prime(u[i], m[i], b)
        piprime_uprime = calculate_pi_prime(u_prime[i], m[i], b)

        # характеристика зависит от положения минимума параболы
        if piprime_u * piprime_uprime < 0:
            x_hat[i] = 2 * u[i] - x[i + 1] - y_dot[i + 1] / m[i]
            psi = calculate_pi(x_hat[i], m[i], b, c)
```

```

W.add(i)
    return min(y[i], psi, y[i + 1])
else:
    if y[i] < y[i + 1]:
        U_prime.add(i)
        return y[i]
    U.add(i)
    return y[i + 1]

# точность по умолчанию
if atol is None:
    atol = (b - a) * 1e-4

x = [a, b]
y = [f(a), f(b)]
y_dot = [fdot(a), fdot(b)]
dx = [b - a]

while True:
    # оценка глобальной константы Липшица для производной
    nu = [r * calculate_nu(i) for i in range(len(y) - 1)]
    lam = [None] * len(nu)
    for j in range(len(lam)):
        j1 = max(0, j - 1)
        j2 = min(len(lam), j + 2)
        lam[j] = max(nu[j1:j2])
    nu_max = max(nu)
    X_max = max(dx)
    gamma = [nu_max * dx_i / X_max for dx_i in dx]
    m = [max(lam[i], gamma[i], xi) for i in range(len(lam))]

    # вычисление характеристик
    W = set()
    U = set()
    U_prime = set()
    u = [None] * (len(y) - 1)
    u_prime = [None] * (len(y) - 1)
    x_hat = [None] * (len(y) - 1)
    R = [characteristic(i) for i in range(len(y) - 1)]
    # последняя команда заполняет все инициализированные массивы

    # выбор интервала для разбиения
    t = argmin(R)

    # выбор точки для нового испытания
    if t in U_prime:
        x_new = u_prime[t]

```

```

    elif t in W:
        x_new = x_hat[t]
    else:
        assert t in U
        x_new = u[t]

    # новое испытание
    x.insert(t + 1, x_new)
    y.insert(t + 1, f(x[t + 1]))
    dx[t] = x[t + 1] - x[t]
    dx.insert(t + 1, x[t + 2] - x[t + 1])
    y_dot.insert(t + 1, fdot(x[t + 1]))

    # условия остановки
    if dx[t + 1] <= atol:
        break
    if len(y) >= maxfev:
        raise Exception(
            f'Решение не сошлось после {maxfev} вызовов целевой функции.')

```

найдём минимум

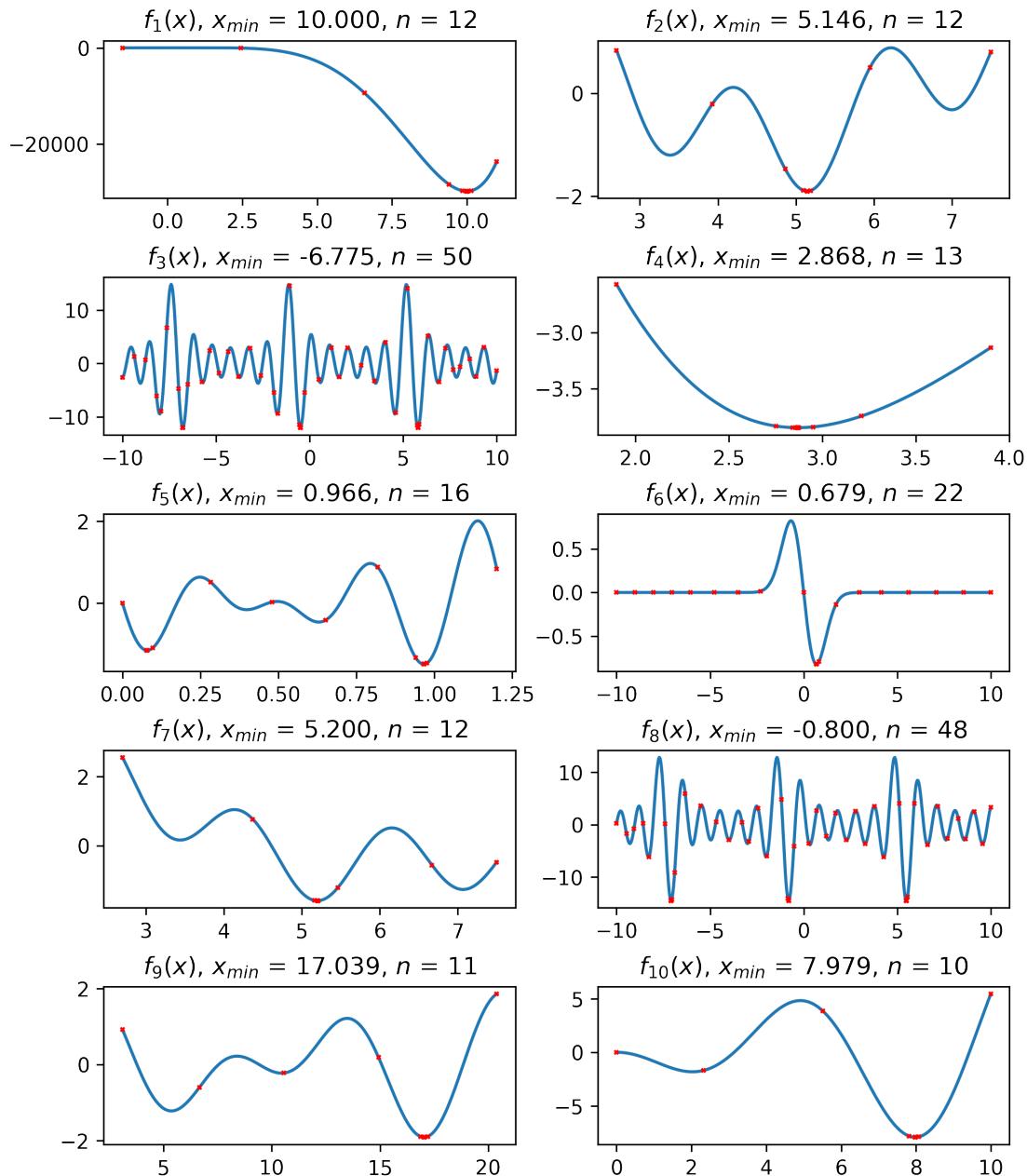
```

x_min = x[argmin(y)]

# возвращаем результат
if not full_output:
    return x_min
return OptimizeResult(x_min, x, y, len(y))

```

```
[32]: fig, _ = plot_test_functions(
    lambda tf: minimize_DLS(f=tf.f, fdot=tf.fdot, a=tf.interval[0],
                            b=tf.interval[1], r=1.11, xi=1e-9,
                            atol=1e-4*(tf.interval[1]-tf.interval[0]),
                            full_output=True),
    dict(ls='none', marker='x', ms=2, color='r'), True
)
```



```
[33]: fig, _ = plot_test_functions(
    lambda tf: minimize_DLS(f=tf.f, fdot=tf.fdot, a=tf.interval[0],
                            b=tf.interval[1], r=1.11, xi=1e-9,
                            atol=1e-4*(tf.interval[1]-tf.interval[0]),
                            full_output=True),
    dict(ls='none', marker='x', ms=2, color='r'), False
)
```

