Студент:	Вячеслав Головин
Направление:	Машинное обучение и анализ данных
Филиал:	НИУ ВШЭ – Санкт-Петербург
Дата:	5 июня 2022 г.

Контрольная работа №2 (вариант 11)

Задача 1 *Найти наилучшее приближение A_1 ранга 2 матрицы A по норме $||\cdot||_2$ и вычислить $||A - A_1||_2$, где*

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -42 & 9 & 40 \\ 10 & 48 & -54 & -2 \\ -67 & -12 & 36 & -22 \end{pmatrix}.$$

Сначала выполним сингулярное разложение $A = U\Sigma V^T$. Матрица V состоит из собстенных векторов $A^T A$.

$$A^T A = \begin{pmatrix} 4653 & 1620 & -3024 & 1134 \\ 1620 & 4212 & -3402 & -1512 \\ -3024 & -3402 & 4293 & -324 \\ 1134 & -1512 & -324 & 2088 \end{pmatrix} \qquad V = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -6 & -6 & 7 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & 7 \\ 7 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & -7 & -6 & 6 \end{pmatrix} \qquad \lambda = (9801, 4356, 1089, 0)$$

Корни из собственных значений λ будут лежать на главной диагонали матрицы Σ

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 66 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 33 & 0 \end{pmatrix}$$

Далее, воспользовавшись соотношением $AV = U\Sigma$, рассчитаем U

$$U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Теперь, воспользовавшись теоремой Эккарта–Янга, найдём A_1

$$A_1 = U\Sigma_r V^T = U\begin{pmatrix} 99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 66 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} V^T = \begin{pmatrix} 6 & -42 & 21 & 28 \\ 24 & 48 & -42 & -14 \\ -60 & -12 & 42 & -28 \end{pmatrix}$$

Погрешность приближения

$$||A - A_1||_2 = ||\Sigma - \Sigma_r||_2 = 33$$

Задача 2 *Оценить относительную погрешность приближенного решения* $(1,1)$ *системы* $Ax=b$ *по нормам* $|\cdot|_1$ *и* $|\cdot|_2$ *с помощью числа обусловленности матрицы* A*, где*

$$A = \begin{pmatrix} 4.99 & 0.02 \\ -4.83 & -8.01 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5.0 \\ -12.98 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что решение $\hat{x} = (1,1)$ получается при округлении A и b до целочисленных значений. Таким образом

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -5 & -8 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_A = \hat{A} - A = \begin{pmatrix} 0.01 & -0.02 \\ -0.17 & 0.01 \end{pmatrix} \qquad \hat{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \end{pmatrix} \qquad \Delta b = \hat{b} - b = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.02 \end{pmatrix}$$

Погрешность решения относительно некоторой нормы $||\cdot||$ определяется выражением

$$\delta x \leqslant \frac{\kappa(A)}{1-\kappa(A)\delta A}(\delta A + \delta b),$$

где $\kappa(A) = ||A||\,||A^{-1}||$ – число обусловленности матрицы A; $\delta A = ||\varepsilon_A||/||A||$, $\delta b = ||\Delta b||/||b||$. Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} -8.01 & -0.02 \\ 4.83 & 4.99 \end{pmatrix} = \frac{1}{39.87}\begin{pmatrix} 8.01 & 0.02 \\ -4.83 & -4.99 \end{pmatrix}$$

Погрешность по норме $||\cdot||_1$:

$$\delta x \leqslant \frac{9.82 \cdot 0.32}{1 - 9.82 \cdot 0.32 \cdot (0.18/9.82)} \left(\frac{0.18}{9.82} + \frac{0.02}{17.98} \right) = \frac{3.16}{1 - 3.16 \cdot 0.018}(3.16 + 0.001) = 0.065$$

Погрешность по норме $||\cdot||_2$ (наибольшее сингулярное число):

$$\delta x \leqslant \frac{9.79 \cdot 0.25}{1 - 9.79 \cdot 0.25 \cdot (0.17/9.78)} \left(\frac{0.17}{9.78} + \frac{0.02}{13.91} \right) = 0.047$$

Задача 3 *Найти приближенно обратную матрицу к матрице* A *и оценить погрешность приближения относительно равномерной нормы* $||\cdot||_1$ *если элементы матрицы* A *известны с абсолютной погрешностью* 0.01.

$$A \approx \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$$

Если погрешность элементов матрицы A равна 0.01, то $||\varepsilon_A||_1 = 0.02$. Приближенное значение обратной матрицы, число обусловленности и относительное возмущение:

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} \qquad \kappa(A) = ||A||_1\,||A^{-1}||_1 = 10 \cdot \frac{15}{10} = 15 \qquad \delta A = \frac{||\varepsilon_A||_1}{||A||_1} = 0.002$$

Погрешность приближения

$$\delta A^{-1} = \frac{\kappa(A)\delta A}{1-\kappa(A)\delta A} = \frac{15 \cdot 0.002}{1 - 15 \cdot 0.002} = \frac{0.03}{0.97} = 0.031$$

Задача 4 *Найти самую влиятельную вершину в ориентированном графе с помощью алгоритма PageRank с коэффициентом ослабления* $1-\beta = 0.85$*, где матрица смежности графа равна*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

...

Задача 5 *Найти значение* $f(A)$ *функции* $f(l) = e^{l+2}$, *где*

$$A = \begin{pmatrix} -24 & 7 & -6 \\ -84 & 24 & -20 \\ 36 & -10 & 10 \end{pmatrix}$$

...

Задача 6 *Найти собственные значения методом вращений (метод Якоби) для матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

...

Задача 7 *Решить задачу линейного программирования и найти "теневые цены", отвечающие каждому ограничению.*

$$16x_1 + 108x_2 + 24x_3 \to min$$

$$\begin{cases} -10x_1 + 6x_2 + 8x_3 \geqslant 4 \\ 4x_1 + 6x_2 - 7x_3 \geqslant 2 \\ x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0;\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

...

Задача 8 *Решить систему линейных уравнений методом итераций, преобразовав, если нужно, систему.*

$$\begin{cases} 22x + 5y + 4z & = 2 \\ 2x + 26y + 2z & = 9 \\ 1x + 4y + 23z & = 1 \end{cases}$$

Определить номер итерации, после которой погрешность приближения по каждой координате не превосходит 0.01 *и найти соответствующее приближенное решение. За нулевое приближение принять вектор* $x_0 = [0, 0, 0]^T$.

...

Задача 9 *Найти неявное выражение кривой* $f(x, y) = 0$ *по данной параметризации*

$$x = \frac{t}{t^2 + 2} \qquad y = \frac{t^2 + 1}{t^3 - t^2 + 1}$$

...