Студент:	Вячеслав Головин
Направление:	Машинное обучение и анализ данных
Филиал:	НИУ ВШЭ – Санкт-Петербург
Дата:	5 июня 2022 г.

Контрольная работа №2 (вариант 11)

Задача 1 *Найти наилучшее приближение* A_1 *ранга* 2 *матрицы* A *по норме* $||\cdot||_2$ *и вычислить* $||A - A_1||_2$, *где*

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -42 & 9 & 40 \\ 10 & 48 & -54 & -2 \\ -67 & -12 & 36 & -22 \end{bmatrix}.$$

Сначала выполним сингулярное разложение $A = U\Sigma V^T$. Матрица V состоит из собстенных векторов $A^T A$.

$$A^T A = \begin{pmatrix} 4653 & 1620 & -3024 & 1134 \\ 1620 & 4212 & -3402 & -1512 \\ -3024 & -3402 & 4293 & -324 \\ 1134 & -1512 & -324 & 2088 \end{pmatrix} \qquad V = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -6 & -6 & 7 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & 7 \\ 7 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & -7 & -6 & 6 \end{pmatrix} \qquad \lambda = (9801, 4356, 1089, 0)$$

Корни из собственных значений λ будут лежать на главной диагонали матрицы Σ

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 66 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 33 & 0 \end{pmatrix}$$

Далее, воспользовавшись соотношением $AV = U\Sigma$, рассчитаем U

$$U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Теперь, воспользовавшись теоремой Эккарта–Янга, найдём A_1

$$A_1 = U\Sigma_r V^T = U \begin{pmatrix} 99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 66 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} V^T = \begin{pmatrix} 6 & -42 & 21 & 28 \\ 24 & 48 & -42 & -14 \\ -60 & -12 & 42 & -28 \end{pmatrix}$$

Погрешность приближения

$$||A - A_1||_2 = ||\Sigma - \Sigma_r||_2 = 33$$