Студент: Вячеслав Головин
Направление: Машинное обучение и анализ данных
Филиал: НИУ ВШЭ – Санкт-Петербург
Дата: 10 апреля 2022 г.

Контрольная работа №1 (вариант 11)

Задача 1 *Найти разложение полного ранга и псевдообратную матрицу для*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -11 & -14 \\ -1 & 4 & 6 \\ 3 & -8 & -10 \\ -2 & -7 & 10 \end{bmatrix}$$

Для получения разложения полного ранга приведём матрицу A к ступенчатому виду.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -11 & -14 \\ -1 & 4 & 6 \\ 3 & -8 & -10 \\ -2 & -7 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -11/4 & -14/4 \\ 0 & 5/4 & 10/4 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & -25/2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2.75 & -3.5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6/25 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Видим, что исходная матрица имеет полный столбцовый ранг, т.е. её разложение полного ранга

$$A = FG = AI = \begin{bmatrix} 4 & -11 & -14 \\ -1 & 4 & 6 \\ 3 & -8 & -10 \\ -2 & -7 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а псевдообратная к ней матрица вычисляется как $A^+ = (A^TA)^{-1}A^T$.

Итак,

$$A^TA = \begin{pmatrix} 30 & -58 & -112 \\ -58 & 250 & 188 \\ -112 & 188 & 432 \end{pmatrix},$$

найдём $(A^TA)^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 30 & -58 & -112 & 1 & 0 & 0 \\ -58 & 250 & 188 & 0 & 1 & 0 \\ -112 & 188 & 432 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -58/30 & -56/15 & 1/30 & 0 & 0 \\ 0 & 5432/15 & -428/15 & 58/30 & 1 & 0 \\ 0 & -428/15 & 208/15 & 56/15 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2.2065 & 0.1215 & 0.5192 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1215 & 0.0126 & 0.0260 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5192 & 0.0260 & 0.1256 \end{array}\right)$$

Получим, что

$$A^+ = (A^TA)^{-1}A^T = \begin{pmatrix} 0.2211 & 1.3946 & 0.4558 & -0.0714 \\ -0.0170 & 0.0850 & 0.0034 & -0.0714 \\ 0.0323 & 0.3384 & 0.0935 & 0.0357 \end{pmatrix}$$

Задача 2 *Среди всех приближений решения следующей системы по методу наименьших квадратов найти решение наименьшей длины*

$$\begin{cases} -2x + 0y + 15z + 13t = 7 \\ 4x + 6y - 12z + 10t = 0 \\ -1x + 1y + 9z + 11t = 2 \\ 3x + 5y - 8z + 10t = 2 \end{cases}$$

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 15 & 13 \\ 4 & 6 & -12 & 10 \\ -1 & 1 & 9 & 11 \\ 3 & 5 & -8 & 10 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

тогда искомое решение $u = (x\ y\ z\ t)^T = A^+b$.

Найдём A^+. Как и в предудущей задаче, сначала приведём матрицу к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 15 & 13 \\ 4 & 6 & -12 & 10 \\ -1 & 1 & 9 & 11 \\ 3 & 5 & -8 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7.5 & -6.5 \\ 0 & 6 & 18 & 36 \\ 0 & 1 & 1.5 & 4.5 \\ 0 & 5 & 14.5 & 29.5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7.5 & -6.5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1.5 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь мы можем записать разложение полного ранга матрицы A

$$A = FG = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 15 \\ 4 & 6 & -12 \\ -1 & 1 & 9 \\ 3 & 5 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$G^+ = G^T(GG^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11/12 & -1/4 & -1/12 \\ -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/12 & -1/4 & 11/12 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 11 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 11 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F^+ = (F^TF)^{-1}F^T = \begin{pmatrix} 30 & 38 & -111 \\ 38 & 62 & -103 \\ -111 & -103 & 513 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 5 \\ 15 & -12 & 9 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5750 & 1.4750 & -4.7250 & -0.8250 \\ -1.2893 & -0.4750 & 1.8679 & 0.3964 \\ 0.5429 & 0.2000 & -0.6286 & -0.1143 \end{pmatrix}$$

$$A^+ = (FG)^+ = G^+F^+ = \begin{pmatrix} 3.554 & 1.454 & -4.746 & -0.846 \\ -1.3522 & -0.538 & 1.806 & 0.334 \\ 0.522 & 0.179 & -0.649 & -0.135 \\ 0.021 & 0.021 & 0.021 & 0.021 \end{pmatrix}$$

$$u = A^+b = \begin{pmatrix} 3.554 & 1.454 & -4.746 & -0.846 \\ -1.3522 & -0.538 & 1.806 & 0.334 \\ 0.522 & 0.179 & -0.649 & -0.135 \\ 0.021 & 0.021 & 0.021 & 0.021 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.696 \\ -5.183 \\ 2.085 \\ 0.229 \end{pmatrix}$$

Задача 3 *Построить график и выписать интерполяционный многочлен Лагранжа для функции, проходящей через четыре точки, координаты которых образуют столбцы матрицы*

$$P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ -10 & -10 & 16 & -20 \end{bmatrix}$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа $L(x)$ определяется следующим образом:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) y_i, \qquad l_i(x) = \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ i \neq j}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Итак, коэффициенты разложения:

$$l_0(x) = \frac{(x+1)x(x-1)}{(-2+1)(-2-0)(-2-1)} = \frac{x(x^2-1)}{-6}$$

$$l_1(x) = \frac{(x+2)x(x-1)}{(-1+2)(-1)(-1-1)} = \frac{x(x-1)(x+2)}{2}$$

$$l_2(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{2 \cdot 1 \cdot (-1)} = \frac{(x^2-1)(x+2)}{-2}$$

$$l_3(x) = \frac{(x+2)(x+1)x}{(1+2)(1+1)(1-0)} = \frac{x(x+1)(x+2)}{6}$$

Подставив эти коэффициенты в формулу для $L(x)$, и упростив выражение, получим

$$L(x) = -\frac{44}{3}x^3 - 31x^2 + \frac{29}{3}x + 16.$$

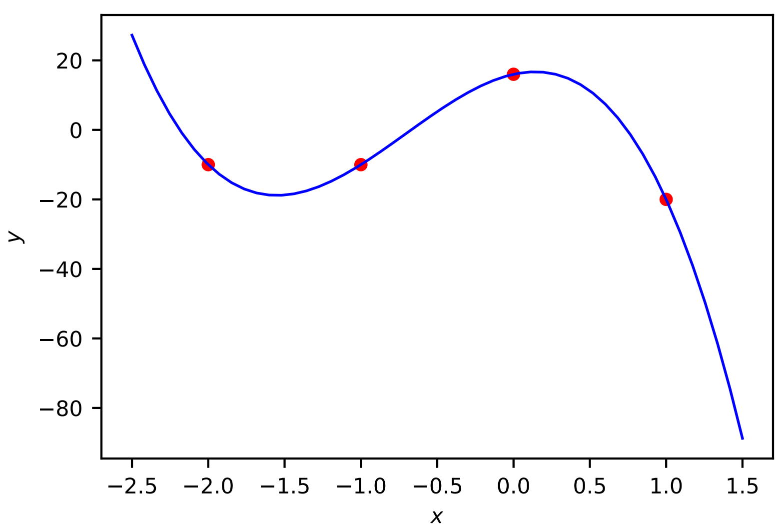

Рис. 1: Интерполяционный многочлен Лагранжа

Задача 4 *Построить график и найти (параметрически) уравнение кривой Безье, заданной четырьмя точками, координаты которых образуют столбцы матрицы*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 8 \\ 4 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Уравнение кривой Безье, построенной по $n+1$ точкам в $\mathbb{R}^2$ можно записать в виде:

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(t) x_k \\ y(t) = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(t) y_k \end{cases} \qquad B_{n,k}(t) = \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k.$$

Выпишем функции $B_{n,k}(t)$:

$$B_{3,0}(t) = \binom{3}{0}(1-t)^3 t^0 = (1-t)^3 \qquad B_{3,2}(t) = \binom{3}{2}(1-t)^1 t^2 = 3t^2(1-t)$$

$$B_{3,1}(t) = \binom{3}{1}(1-t)^2 t^1 = 3t(1-t)^2 \qquad B_{3,3}(t) = \binom{3}{3}(1-t)^0 t^3 = t^3.$$

Подставив $B_{n,k}(t)$ в написанные ранее формулы, получим следующие выражения

$$\begin{cases} x(t) = 4t^3 - 6t^2 + 9t + 1, \\ y(t) = -19t^3 + 27t^2 - 12t + 4. \end{cases}$$

Ниже представлен код для построения кривой Безье для произвольного набора точек. Также приведён построенный с помощью этого кода график. Аналогичный результат достигается при использовании полученных параметрических формул.

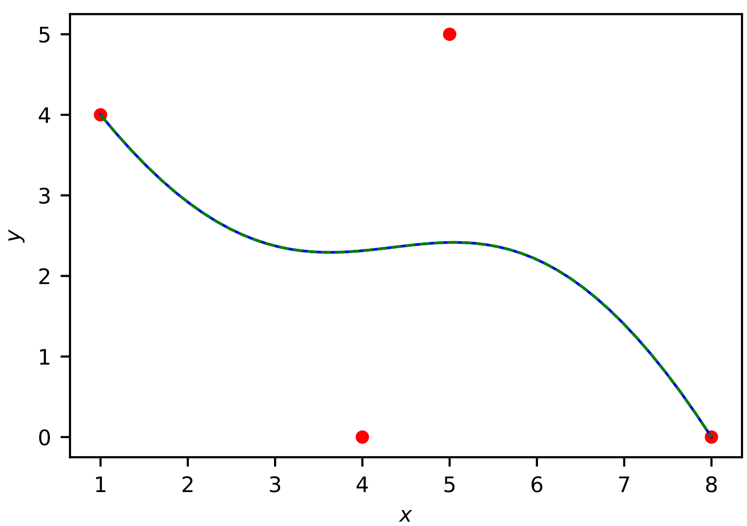

Рис. 2: Кривая Безье

```
def get_bezier_function(points: np.ndarray) -> Callable:
    n = len(points)
    coeffs = np.array([math.comb(n - 1, k) * points[k] for k in range(n)])

    def bezier(t):
        terms = np.array([(1 - t)**(n - 1 - i) * t**i
                          for i in range(n)]).reshape((-1, 1))
        return np.sum(terms * coeffs, axis=0)
    return bezier

data = np.array([[1, 4], [4, 0], [5, 5], [8, 0]])
bezier = get_bezier_function(data)
t = np.linspace(0, 1)
bezier_curve = np.array([bezier(ti) for ti in t])

plt.figure()
plt.plot(data[:, 0], data[:, 1], 'ro')
plt.plot(bezier_curve[:, 0], bezier_curve[:, 1], 'b-')
plt.xlabel('$x$')
plt.ylabel('$y$')
```

Задача 5 *Для многочлена* x^3-4x^2+4x-5 *найти наилучшее приближение по max-норме многочленом степени* 2 *на отрезке* $[0,4]$.

Наилучшее приближение $g(x)$ многочлена $f(x)$ по max-норме на отрезке $[a,b]$ можно найти из условия:

$$f(x)-g(x)=c_0\frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}T_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right),$$

где c_0 – коэффициент перед x^n в исходной функции $f(x)$, T_n – многочлен Чебышёва.

Обозначим $u=(2x-a-b)/(b-a)=(x-2)/2$, тогда

$$T_n(u)=T_3(u)=4x^3-3u$$

$$u^3=\frac{1}{8}(x-2)^3=\frac{1}{8}(x^3-6x^2+12x-8)$$

$$T_3(u)=0.5(x^3-6x^2+12x-8)-1.5(x-2)=0.5x^3-3x^2+4.5x-1$$

$$f(x)-g(x)=1\cdot\frac{4^3}{2^5}(0.5x^3-3x^2+4.5x+1)=x^3-6x^2+9x-2$$

$$g(x)=x^3-4x^2+4x-5-x^3+6x^2-9x+2=2x^2-5x-3$$

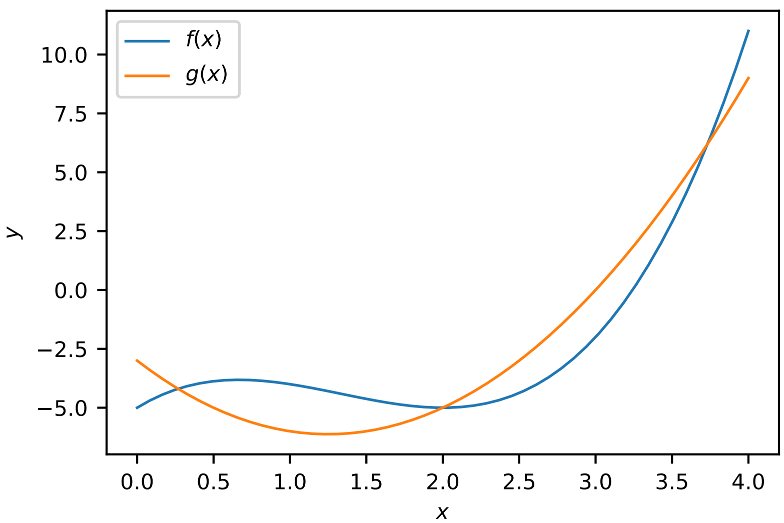

Рис. 3: Исходный многочлен 3 степени $f(x)$ и его наилучшее приближение многочленом 2 степени $g(x)$

Задача 6 *Оценить относительную погрешность приближённого решения* $(1,1)$ *системы* $Ax=b$ *по нормам* $|\cdot|_1$ *с помощью числа обусловленности матрицы* A, *где*

$$A=\begin{pmatrix}2.95 & -0.07\\ 6.97 & -2.0\end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix}3.11\\ 4.97\end{pmatrix}$$

[...]

Задача 7 *Построить многочлен степени* $\leqslant 3$, *аппроксимирующий функцию* $f = \sqrt{5x+5}$ *на отрезке* $[0, 6]$ *по норме* $|h|_T = \sqrt{\int_0^6 \frac{h^2(x)}{\sqrt{1-(2x-6)^2/36}}dx}$.

Мы можем выполнить замену $u = (2x-6)/6 = (x-3)/3$, тогда с точностью до постоянного множителя норма перепишется как

$$|h|_T = \sqrt{\int_{-1}^{1} \frac{h^2(u)}{\sqrt{1-u^2}}du}.$$

Известно, что в таком случае наилучшее приближение функции $f(u) = \sqrt{15u+20}$ многочленом $g(u)$ степени $\leqslant n$ достигается с помощью разложения в базисе многочленов Чебышёва $T_i(u)$:

$$g(u) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i T_i(u), \qquad \alpha_i = \frac{\langle T_i, f(u)\rangle}{\langle T_i, T_i\rangle}.$$

С помощью численного интегрирования были получены следующие значения α_i:

$$\alpha_0 = 4.123 \qquad \alpha_2 = -0.522$$
$$\alpha_1 = 1.645 \qquad \alpha_3 = -0.102$$

Подставив их в формулу для $g(u)$, а также выполнив замену $x = 3u + 3$, получим следующее выражение:

$$g(x) = -0.015x^3 + 0.021x^2 + 0.937x + 2.059.$$

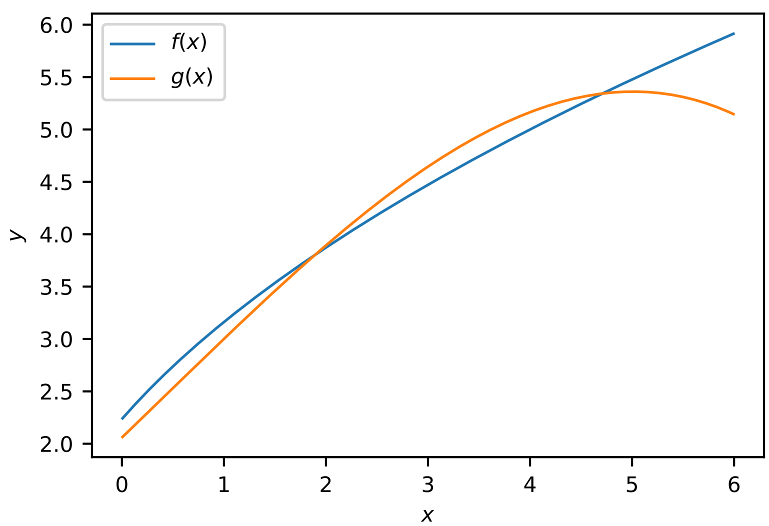

Рис. 4: Исходная функция $f(x)$ и её наилучшее приближение многочленом 3 степени $g(x)$