Студент:	Вячеслав Головин
Направление:	Машинное обучение и анализ данных
Филиал:	НИУ ВШЭ – Санкт-Петербург
Дата:	7 июня 2022 г.

Контрольная работа №2 (вариант 11)

Задача 1 *Найти наилучшее приближение A_1 ранга 2 матрицы A по норме $||\cdot||_2$ и вычислить $||A-A_1||_2$, где*

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -42 & 9 & 40 \\ 10 & 48 & -54 & -2 \\ -67 & -12 & 36 & -22 \end{pmatrix}.$$

Сначала выполним сингулярное разложение $A = U\Sigma V^T$. Матрица V состоит из собстенных векторов A^TA.

$$A^TA = \begin{pmatrix} 4653 & 1620 & -3024 & 1134 \\ 1620 & 4212 & -3402 & -1512 \\ -3024 & -3402 & 4293 & -324 \\ 1134 & -1512 & -324 & 2088 \end{pmatrix} \qquad V = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -6 & -6 & 7 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & 7 \\ 7 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & -7 & -6 & 6 \end{pmatrix} \qquad \lambda = (9801, 4356, 1089, 0)$$

Корни из собственных значений λ будут лежать на главной диагонали матрицы Σ

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 66 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 33 & 0 \end{pmatrix}$$

Т. к. $AV = U\Sigma$, мы можем определить U

$$U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Теперь, воспользовавшись теоремой Эккарта–Янга, найдём A_1

$$A_1 = U\Sigma_r V^T = U\begin{pmatrix} 99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 66 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} V^T = \begin{pmatrix} 6 & -42 & 21 & 28 \\ 24 & 48 & -42 & -14 \\ -60 & -12 & 42 & -28 \end{pmatrix}$$

Погрешность приближения

$$||A - A_1||_2 = ||\Sigma - \Sigma_r||_2 = 33$$

Задача 2 *Оценить относительную погрешность приближенного решения* $(1, 1)$ *системы* $Ax = b$ *по нормам* $|\cdot|_1$ *и* $|\cdot|_2$ *с помощью числа обусловленности матрицы* A*, где*

$$A = \begin{pmatrix} 4.99 & 0.02 \\ -4.83 & -8.01 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5.0 \\ -12.98 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что решение $\hat{x} = (1, 1)$ получается при округлении A и b до целочисленных значений. Таким образом

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -5 & -8 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_A = \hat{A} - A = \begin{pmatrix} 0.01 & -0.02 \\ -0.17 & 0.01 \end{pmatrix} \qquad \hat{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \end{pmatrix} \qquad \Delta b = \hat{b} - b = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.02 \end{pmatrix}$$

Погрешность решения относительно некоторой нормы $||\cdot||$ определяется выражением

$$\delta x \leqslant \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\delta A}(\delta A + \delta b),$$

где $\kappa(A) = ||A||\,||A^{-1}||$ – число обусловленности матрицы A; $\delta A = ||\varepsilon_A||/||A||$, $\delta b = ||\Delta b||/||b||$. Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} -8.01 & -0.02 \\ 4.83 & 4.99 \end{pmatrix} = \frac{1}{39.87}\begin{pmatrix} 8.01 & 0.02 \\ -4.83 & -4.99 \end{pmatrix}$$

Погрешность по норме $||\cdot||_1$:

$$\delta x \leqslant \frac{9.82 \cdot 0.32}{1 - 9.82 \cdot 0.32 \cdot (0.18/9.82)}\left(\frac{0.18}{9.82} + \frac{0.02}{17.98}\right) = \frac{3.16}{1 - 3.16 \cdot 0.018}(3.16 + 0.001) = 0.065$$

Погрешность по норме $||\cdot||_2$ (наибольшее сингулярное число):

$$\delta x \leqslant \frac{9.79 \cdot 0.25}{1 - 9.79 \cdot 0.25 \cdot (0.17/9.78)}\left(\frac{0.17}{9.78} + \frac{0.02}{13.91}\right) = 0.047$$

Задача 3 *Найти приближенно обратную матрицу к матрице* A *и оценить погрешность приближения относительно равномерной нормы* $||\cdot||_1$ *если элементы матрицы* A *известны с абсолютной погрешностью* 0.01.

$$A \approx \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$$

Если погрешность элементов матрицы A равна 0.01, то $||\varepsilon_A||_1 = 0.02$. Приближенное значение обратной матрицы, число обусловленности и относительное возмущение:

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} \qquad \kappa(A) = ||A||_1\,||A^{-1}||_1 = 10 \cdot \frac{15}{10} = 15 \qquad \delta A = \frac{||\varepsilon_A||_1}{||A||_1} = 0.002$$

Погрешность приближения

$$\delta A^{-1} = \frac{\kappa(A)\delta A}{1 - \kappa(A)\delta A} = \frac{15 \cdot 0.002}{1 - 15 \cdot 0.002} = \frac{0.03}{0.97} = 0.031$$

Задача 4 *Найти самую влиятельную вершину в ориентированном графе с помощью алгоритма PageRank с коэффициентом ослабления* $1-\beta = 0.85$*, где матрица смежности графа равна*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Сначала составим матрицу P, которая отличается от матрицы смежности тем, что сумма всех элементов, принадлежащих одному столбцу, равна 1.

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.33 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.2 & 0.33 & 1 \end{pmatrix}$$

Далее составим матрицу P', которая является взвешенной суммой матриц P и Q ($\forall i, j : q_{ij} = 1/n = 0.2$)

$$P' = (1-\beta)P + \beta Q = \begin{pmatrix} 0.455 & 0.03 & 0.2 & 0.03 & 0.03 \\ 0.03 & 0.88 & 0.2 & 0.03 & 0.03 \\ 0.03 & 0.03 & 0.2 & 0.313 & 0.03 \\ 0.03 & 0.03 & 0.2 & 0.313 & 0.03 \\ 0.455 & 0.03 & 0.2 & 0.313 & 0.88 \end{pmatrix}$$

Возьмем начальное решение $x = (0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)^T$ и применим алгоритм `PageRank`, т.е. будем итерационно выполнять обновления $x \leftarrow P'x$. Результаты приведены в таблице:

№ итерации k	x_k				
0	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
1	0.149	0.234	0.121	0.121	0.121
2	0.114	0.249	0.085	0.085	0.467
3	0.093	0.256	0.068	0.068	0.514
4	0.081	0.260	0.061	0.061	0.537
5	0.075	0.261	0.058	0.058	0.549
10	0.069	0.262	0.055	0.055	0.559
100	0.069	0.262	0.054	0.054	0.560

Видим, что самой влиятельной является 5 вершина.

Задача 5 *Найти значение $f(A)$ функции $f(l) = e^{l+2}$, где*

$$A = \begin{pmatrix} -24 & 7 & -6 \\ -84 & 24 & -20 \\ 36 & -10 & 10 \end{pmatrix}$$

Найдём $r(l)$ – остаток от деления $f(l)$ на аннулирующий многочлен матрицы A. Для этого численно определим собственные значения этой матрицы: $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. В таком случае

$$r(l) = \alpha l^2 + \beta l + \gamma$$

подчиняется следующим условиям:

$$\begin{cases} r(\lambda_1) & = f(\lambda_1) \\ r(\lambda_2) & = f(\lambda_2) \\ r'(\lambda_2) & = f'(\lambda_2) \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} 36\alpha + 6\beta + \gamma & = e^8 \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma & = e^4 \\ 4\alpha + \beta & = e^4 \end{cases}$$

Решение получившейся системы:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{e^8 - 5e^4}{16} & = 169.248 \\ \beta = \frac{9e^4 - e^8}{4} & = -622.394 \\ \gamma = -\beta & = 622.394 \end{cases}$$

Тогда

$$e^{A+2} = \alpha AA + \beta A + \gamma = \begin{pmatrix} -23028.7 & 5798.1 & -5743.5 \\ -69577.5 & 17503.6 & -17339.8 \\ 34461.1 & -8669.9 & 8615.3 \end{pmatrix}$$

Задача 6 *Найти собственные значения методом вращений (метод Якоби) для матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Первая итерация метода Якоби:

$$T_{ij} = T_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad A_1 = T_{23}^T A T_{23} = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad T_1 = ET_{23} = T_{23}$$

Вторая итерация:

$$T_{ij} = T_{12} = \begin{pmatrix} 0.982 & 0.191 & 0 \\ -0.191 & 0.982 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = T_{12}^T A_1 T_{12} = \begin{pmatrix} 3.725 & 0 & 0 \\ 0 & 11.275 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \Lambda,$$

$$T_2 = T_1 T_{12} = \begin{pmatrix} 0.982 & 0.191 & 0 \\ -0.135 & 0.694 & -0.707 \\ -0.135 & 0.694 & 0.707 \end{pmatrix} = T$$

Диагональные элементы Λ – собственные числа, а соответствующие им столбцы T – собственные векторы матрицы A.

Задача 7 *Решить задачу линейного программирования и найти "теневые цены", отвечающие каждому ограничению.*

$$16x_1 + 108x_2 + 24x_3 \to min$$

$$\begin{cases} -10x_1 + 6x_2 + 8x_3 \geqslant 4 \\ 4x_1 + 6x_2 - 7x_3 \geqslant 2 \\ x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0;\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

...

Задача 8 *Решить систему линейных уравнений методом итераций, преобразовав, если нужно, систему.*

$$\begin{cases} 22x + 5y + 4z &= 2 \\ 2x + 26y + 2z &= 9 \\ 1x + 4y + 23z &= 1 \end{cases}$$

Определить номер итерации, после которой погрешность приближения по каждой координате не превосходит 0.01 *и найти соответствующее приближенное решение. За нулевое приближение принять вектор* $x_0 = [0, 0, 0]^T$.

Преобразуем нашу систему к виду $X = PX + b$ (здесь и далее $X = (x, y, z)^T$). Для этого выразим x, y и z из 1, 2 и 3 уравнения, соответственно.

$$\begin{cases} x = -\frac{5}{22}y - \frac{2}{11}z + \frac{1}{11} \\ y = -\frac{1}{13}x - \frac{1}{13}z + \frac{9}{26} \\ z = -\frac{1}{23}x - \frac{4}{23}y + \frac{1}{23} \end{cases} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & -5/22 & -2/11 \\ -1/13 & 0 & -1/13 \\ -1/23 & -4/23 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1/11 \\ 9/26 \\ 1/23 \end{pmatrix}$$

Нетрудно заметить, что $||P||_1 < 1$, соответственно итерационный метод должен сходиться к истинному решению системы. В случае произвольной матричной нормы, согласованной с векторной, число итераций определяется выражением

$$k = \left\lceil \ln\left(\frac{1 - ||P||}{|X_1 - X_0|}\varepsilon\right) / \ln ||P|| \right\rceil,$$

где $\varepsilon = |X_k - \hat{X}|$, а $X_1 - X_0 = b$ при $X_0 = (0, 0, 0)^T$.

Очевидно, что если погрешность приближения по 1-норме не превосходит 0.01, то и приближение по каждой координате $\leqslant 0.01$. Тогда число итераций

$$k_1 = \left\lceil \ln\left(\frac{1 - 0.401}{0.481} 0.01\right) / \ln 0.401 \right\rceil = \lceil 4.8 \rceil = 5$$

Но такое же утверждение справедливо и для 2-нормы, при этом число необходимых итераций

$$k_2 = \left\lceil \ln\left(\frac{1 - 0.328}{0.361} 0.01\right) / \ln 0.328 \right\rceil = \lceil 3.6 \rceil = 4$$

оказывается меньше.

В таблице представлены полученные с помощью итерационного метода результаты. Видно, что после 4 итераций действительно достигается требуемая точность.

№ итерации k	x_k	y_k	z_k
0	0	0	0
1	0.091	0.346	0.043
2	0.004	0.336	-0.021
3	0.018	0.347	-0.015
4	0.015	0.345	-0.017
...			
100	0.015	0.346	-0.017

Задача 9 *Найти неявное выражение кривой* $f(x, y) = 0$ *по данной параметризации*

$$x = \frac{t}{t^2 + 2} \qquad y = \frac{t^2 + 1}{t^3 - t^2 + 1}$$

...