Студент:	Вячеслав Головин
Направление:	Машинное обучение и анализ данных
Филиал:	НИУ ВШЭ – Санкт-Петербург
Дата:	5 июня 2022 г.

Контрольная работа №2 (вариант 11)

Задача 1 *Найти наилучшее приближение* A_1 *ранга* 2 *матрицы* A *по норме* $||\cdot||_2$ *и вычислить* $||A - A_1||_2$, *где*

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -42 & 9 & 40 \\ 10 & 48 & -54 & -2 \\ -67 & -12 & 36 & -22 \end{pmatrix}.$$

Сначала выполним сингулярное разложение $A = U\Sigma V^T$. Матрица V состоит из собстенных векторов $A^T A$.

$$A^T A = \begin{pmatrix} 4653 & 1620 & -3024 & 1134 \\ 1620 & 4212 & -3402 & -1512 \\ -3024 & -3402 & 4293 & -324 \\ 1134 & -1512 & -324 & 2088 \end{pmatrix} \qquad V = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -6 & -6 & 7 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & 7 \\ 7 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & -7 & -6 & 6 \end{pmatrix} \qquad \lambda = (9801, 4356, 1089, 0)$$

Корни из собственных значений λ будут лежать на главной диагонали матрицы Σ

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 66 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 33 & 0 \end{pmatrix}$$

Далее, воспользовавшись соотношением $AV = U\Sigma$, рассчитаем U

$$U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Теперь, воспользовавшись теоремой Эккарта–Янга, найдём A_1

$$A_1 = U\Sigma_r V^T = U \begin{pmatrix} 99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 66 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} V^T = \begin{pmatrix} 6 & -42 & 21 & 28 \\ 24 & 48 & -42 & -14 \\ -60 & -12 & 42 & -28 \end{pmatrix}$$

Погрешность приближения

$$||A - A_1||_2 = ||\Sigma - \Sigma_r||_2 = 33$$

Задача 2 *Оценить относительную погрешность приближенного решения* $(1,1)$ *системы* $Ax = b$ *по нормам* $|\cdot|_1$ *и* $|\cdot|_2$ *с помощью числа обусловленности матрицы* A*, где*

$$A = \begin{pmatrix} 4.99 & 0.02 \\ -4.83 & -8.01 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5.0 \\ -12.98 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что решение $\hat{x} = (1,1)$ получается при округлении A и b до целочисленных значений. Таким образом

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -5 & -8 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_A = \hat{A} - A = \begin{pmatrix} 0.01 & -0.02 \\ -0.17 & 0.01 \end{pmatrix} \qquad \hat{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \end{pmatrix} \qquad \Delta b = \hat{b} - b = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.02 \end{pmatrix}$$

Погрешность решения относительно некоторой нормы $||\cdot||$ определяется выражением

$$\delta x \leqslant \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\delta A}(\delta A + \delta b),$$

где $\kappa(A) = ||A||\,||A^{-1}||$ – число обусловленности матрицы A; $\delta A = ||\varepsilon_A||/||A||$, $\delta b = ||\Delta b||/||b||$. Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} -8.01 & -0.02 \\ 4.83 & 4.99 \end{pmatrix} = \frac{1}{39.87}\begin{pmatrix} 8.01 & 0.02 \\ -4.83 & -4.99 \end{pmatrix}$$

Погрешность по норме $||\cdot||_1$:

$$\delta x \leqslant \frac{9.82 \cdot 0.32}{1 - 9.82 \cdot 0.32 \cdot (0.18/9.82)}\left(\frac{0.18}{9.82} + \frac{0.02}{17.98}\right) = \frac{3.16}{1 - 3.16 \cdot 0.018}(3.16 + 0.001) = 0.065$$

Погрешность по норме $||\cdot||_2$:

$$\delta x \leqslant \frac{9.79 \cdot 0.25}{1 - 9.79 \cdot 0.25 \cdot (0.17/9.78)}\left(\frac{0.17}{9.78} + \frac{0.02}{13.91}\right) = 0.047$$