

Студент: Вячеслав Головин
 Направление: Машинное обучение и анализ данных
 Филиал: НИУ ВШЭ – Санкт-Петербург
 Дата: 8 апреля 2022 г.

Контрольная работа №1 (вариант 11)

Задача 1 Найти разложение полного ранга и псевдообратную матрицу для

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -11 & -14 \\ -1 & 4 & 6 \\ 3 & -8 & -10 \\ -2 & -7 & 10 \end{bmatrix}$$

Для получения разложения полного ранга приведём матрицу A к ступенчатому виду.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -11 & -14 \\ -1 & 4 & 6 \\ 3 & -8 & -10 \\ -2 & -7 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -11/4 & -14/4 \\ 0 & 5/4 & 10/4 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & -25/2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2.75 & -3.5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6/25 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Видим, что исходная матрица имеет полный столбцовый ранг, т.е. её разложение полного ранга

$$A = FG = AI = \begin{bmatrix} 4 & -11 & -14 \\ -1 & 4 & 6 \\ 3 & -8 & -10 \\ -2 & -7 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а псевдообратная к ней матрица вычисляется как $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$.

Итак,

$$A^T A = \begin{pmatrix} 30 & -58 & -112 \\ -58 & 250 & 188 \\ -112 & 188 & 432 \end{pmatrix},$$

найдем $(A^T A)^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} 30 & -58 & -112 & | & 1 & 0 & 0 \\ -58 & 250 & 188 & | & 0 & 1 & 0 \\ -112 & 188 & 432 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -58/30 & -56/15 & | & 1/30 & 0 & 0 \\ 0 & 5432/15 & -428/15 & | & 58/30 & 1 & 0 \\ 0 & -428/15 & 208/15 & | & 56/15 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2.2065 & 0.1215 & 0.5192 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0.1215 & 0.0126 & 0.0260 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0.5192 & 0.0260 & 0.1256 \end{pmatrix}$$

Получим, что

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T = \begin{pmatrix} 0.2211 & 1.3946 & 0.4558 & -0.0714 \\ -0.0170 & 0.0850 & 0.0034 & -0.0714 \\ 0.0323 & 0.3384 & 0.0935 & 0.0357 \end{pmatrix}$$

Задача 2 Среди всех приближений решения следующей системы по методу наименьших квадратов найти решение наименьшей длины

$$\begin{cases} -2x + 0y + 15z + 13t = 7 \\ 4x + 6y - 12z + 10t = 0 \\ -1x + 1y + 9z + 11t = 2 \\ 3x + 5y - 8z + 10t = 2 \end{cases}$$

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 15 & 13 \\ 4 & 6 & -12 & 10 \\ -1 & 1 & 9 & 11 \\ 3 & 5 & -8 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

тогда искомое решение $u = (x \ y \ z \ t)^T = A^+ b$.

Найдём A^+ . Как и в предыдущей задаче, сначала приведём матрицу к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 15 & 13 \\ 4 & 6 & -12 & 10 \\ -1 & 1 & 9 & 11 \\ 3 & 5 & -8 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7.5 & -6.5 \\ 0 & 6 & 18 & 36 \\ 0 & 1 & 1.5 & 4.5 \\ 0 & 5 & 14.5 & 29.5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7.5 & -6.5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1.5 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь мы можем записать разложение полного ранга матрицы A

$$A = FG = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 15 \\ 4 & 6 & -12 \\ -1 & 1 & 9 \\ 3 & 5 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$G^+ = G^T(GG^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11/12 & -1/4 & -1/12 \\ -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/12 & -1/4 & 11/12 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 11 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 11 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F^+ = (F^T F)^{-1} F^T = \begin{pmatrix} 30 & 38 & -111 \\ 38 & 62 & -103 \\ -111 & -103 & 513 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 5 \\ 15 & -12 & 9 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5750 & 1.4750 & -4.7250 & -0.8250 \\ -1.2893 & -0.4750 & 1.8679 & 0.3964 \\ 0.5429 & 0.2000 & -0.6286 & -0.1143 \end{pmatrix}$$

$$A^+ = (FG)^+ = G^+ F^+ = \begin{pmatrix} 3.554 & 1.454 & -4.746 & -0.846 \\ -1.3522 & -0.538 & 1.806 & 0.334 \\ 0.522 & 0.179 & -0.649 & -0.135 \\ 0.021 & 0.021 & 0.021 & 0.021 \end{pmatrix}$$

$$u = A^+ b = \begin{pmatrix} 3.554 & 1.454 & -4.746 & -0.846 \\ -1.3522 & -0.538 & 1.806 & 0.334 \\ 0.522 & 0.179 & -0.649 & -0.135 \\ 0.021 & 0.021 & 0.021 & 0.021 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.696 \\ -5.183 \\ 2.085 \\ 0.229 \end{pmatrix}$$

Задача 3 Построить график и выписать интерполяционный многочлен Лагранжа для функции, проходящей через четыре точки, координаты которых образуют столбцы матрицы

$$P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ -10 & -10 & 16 & -20 \end{bmatrix}$$

Задача 4 Построить график и найти (параметрически) уравнение кривой Безье, заданной четырьмя точками, координаты которых образуют столбцы матрицы

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 8 \\ 4 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Задача 5 Для многочлена $x^3 - 4x^2 + 4x - 5$ найти наилучшее приближение по \max -норме многочленом степени 2 на отрезке $[0, 4]$.

Задача 6 Оценить относительную погрешность приближённого решения $(1, 1)$ системы $Ax = b$ по нормам $|\cdot|_1$ с помощью числа обусловленности матрицы A , где

$$A = \begin{pmatrix} 2.95 & -0.07 \\ 6.97 & -2.0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3.11 \\ 4.97 \end{pmatrix}$$

Задача 7 Построить многочлен степени ≤ 3 , аппроксимирующий функцию $f = \sqrt{5x + 5}$ на отрезке $[0, 6]$ по норме $|h|_T = \sqrt{\int_0^6 \frac{h^2(x)}{\sqrt{1 - (2x - 6)^2/36}} dx}$.