Chaos in klassischer (Hamilton'scher) Dynamik

Arbeitsgruppe III: Zufall und Komplexität in der Physik

Philipp Wilhelm Klein

Inhalt

1 Die Poincaré Abbildung

1.1 Die "Surface of Section"

Vorbemerkung. Im folgenden werden wir der Einfachheit bzw. Anschaulichkeit halber integrable, Hamilton'sche Systeme mit 2 Freiheitsgraden betrachten.

Grundsätzlich ist die Veranschaulichung dynamischer (Hamiltion'scher) Systeme aufgrund der Dimension des Phasenraums (dieser ist für ein System mit n Freiheitsgraden $2n$-dimensional) nicht möglich. Für ein konservatives, dynamisches System mit 2 Freiheitsgraden "lebt"die Hamilton-Funktion auf einer 3-dimensionalen Hyperebene im 4-dimenionalen Phasenraum (siehe Abb. ??). Anstatt eine Trajektorie (die in der Hyperebene liegt) als

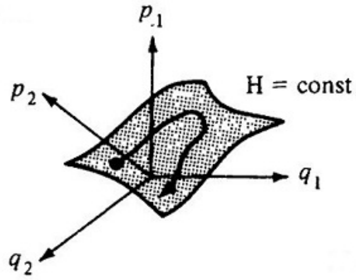


Abb. 1: 3-dim Hyperebene im 4-dim Phasenraum, Quelle: [?]

Ganzes zu studieren, fixiert man einen Parameter ($q_2 = 0$) und betrachtet Transversalschnitte der Trajektorie mit einer 2-dim. Ebene im Phasenraum (siehe Abb. ??)
Dies motiviert folgenden Defintion.

Defintion. Die *Surface of Section (SOS)* ist unter den obigen Voraussetzungen die Menge

$$SOS = \{(q, p) \in \mathbb{R}^4 \mid q_2 = 0, H(q, p) = E\}$$

1.2 Die Poincaré Abbildung

Definition. Sei φ eine Trajektorie mit den Anfangsbedingung $(q_0, p_0) \in SOS$, die nach der Reihe die Punkte $(q_1, p_1), (q_2, p_2), \ldots \in SOS$ durchläuft. Dann ist die *Poincaré Abbildung* $\mathcal{P}$ definiert durch

$$\mathcal{P} : (q_i, p_i) \longmapsto \mathcal{P}_i(q_0, p_0) = (q_{i+1}, p_{i+1})$$

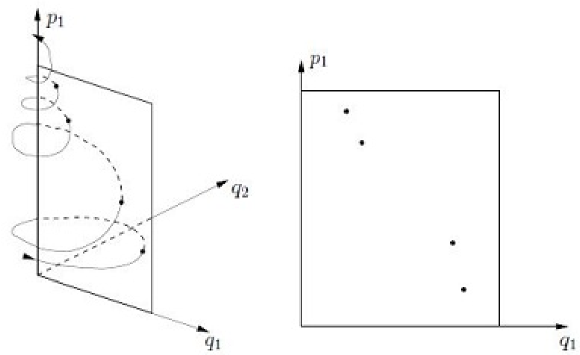


Abb. 2: Surface of Section (SOS), Quelle: [?]

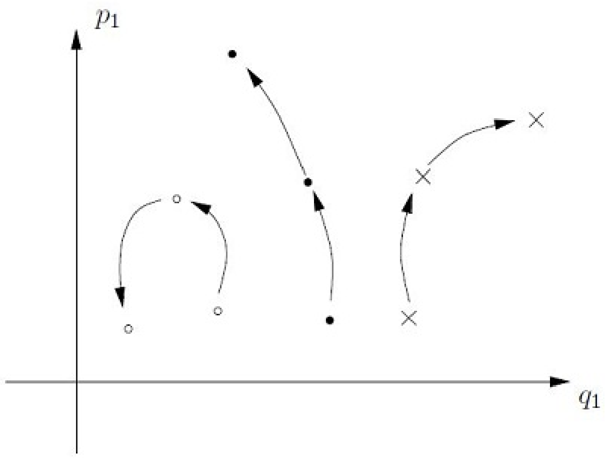


Abb. 3: Die Poincaré Abbildung für drei verschiedene Startpunkte einer Trajektorie auf der SOS, Quelle: [?]

Eine wichtige Aussage über die Entwicklung von Transversalschnitten von Flußbildern in Hamilton'schen Systemen macht der folgende Satz.

Satz. (Poincaré-Cartan) Die Poincaré Abbildung ist Flächenerhaltend. Genauer: Sei $\sigma_0 \subset SOS$ in der $q_1 p_1$-Ebene. Sei $\sigma_i = \mathcal{P}_i(\sigma_0)$ die Menge, die nach i-facher Anwendung der Poincaré Abbildung $\mathcal{P}$ auf σ_0 entsteht. Dann gilt:

$$|\sigma_i| = |\sigma_0|$$

2 Fixpunkte

Definition. Ein Fixpunkt der Poincaré Abbildung $\mathcal{P}$ ist definiert durch

$$\mathcal{P}(z^*) = z^*$$

mit $z^* = (q^*, p^*) \in SOS$.

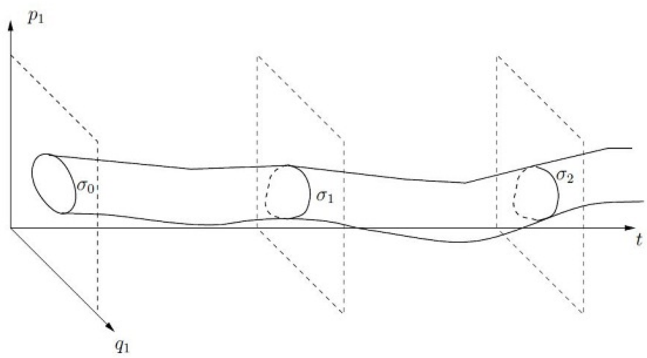


Abb. 4: Veranschaulichung des Satzes von Poincaré-Cartan: Es gilt $|\sigma_0| = |\sigma_1| = |\sigma_2| = \ldots$, Quelle: [**?**]

Linearisierung in einer Fixpunktumgebung. Sei $z^* \in SOS$ Fixpunkt der Poincaré Abbildung $\mathcal{P}$. Dann lässt sich $\mathcal{P}(z^*)$ in einer Umgebung von z^* approximieren durch

$$\mathcal{P}(z^* + \delta z) = z^* + d\mathcal{P}(z^*) \cdot \delta z \ + \mathcal{O}(\delta z^2),$$

wobei $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}(z^*) = d\mathcal{P}(z^*)$ die Jakobimatrix der Abbildung $\mathcal{P}$ ist.

Klassifikation von Fixpunkten. Die Eigenschaften des Fixpunktes werden bestimmt durch die Eigenwerte der Matrix $\mathcal{M}$. Also führt $det(\mathcal{M} - \lambda) = 0$ zu

$$\lambda^2 - \lambda tr(\mathcal{M}) + det(\mathcal{M}) = 0,$$

wobei $det(\mathcal{M}) = 1$ sein muss, da $\mathcal{P}$ flächenerhaltend ist. Die Eigenwerte lauten also

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}tr(\mathcal{M}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{tr(\mathcal{M})^2 - 4},$$

und können in Abhängigkeit von $tr(\mathcal{M})$ klassifiziert werden. Es ergeben sich folgende Fälle:

(i) $|tr(\mathcal{M})| < 2$: Die Eigenwerte sind komplexe Zahlen und lassen sich mithilfe der Exponentialfunktion ausdrücken, d.h. $\lambda_{1,2} = \exp(\pm i\beta)$ mit $\beta \in (0, \pi)$. In diesem Fall ist $\mathcal{M}$ eine Rotationsmatrix, d.h. in der direkten Umgebung des Fixpunktes z^* verhält sich $\mathcal{P}$ wie eine Rotationsabbildung. Damit ist das dynamische System in der Umgebung von z^* stabil, siehe Abb. **??**(a). Man spricht von einem *elliptischen Fixpunkt.*

(ii) $|tr(\mathcal{M})| > 2$: Die Eigenwerte sind reel und haben die Form $\lambda_1 = \lambda$ bzw. $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda}$. In diesem Fall ergibt sich ein *hyperbolischer Fixpunkt*, siehe Abb. **??**(b). Dieser Fixpunkt ist damit instabil.

(iii) $|tr(\mathcal{M})| = 2$: Dieser Fall kennzeichnet den Grenzfall zwischen Stabilität bzw. Instabilität.

Beispiel. Wir betrachten ein System mit folgender Hamiltonfunktion:

$$H = \frac{p^2}{2} + (q^2 - 1)^2.$$

Das Potential $V(q)$ veranschaulicht Abb. **??**a. Das System hat drei Fixpunkte: zwei stabile Minima (s) (elliptisch) und ein instabiles Maximum (i) (hyperbolisch). Dies ist zunächst anhand der Form des Potentials anschaulich klar und wird durch das Phasenraumbild belegt, siehe Abb. **??**b.

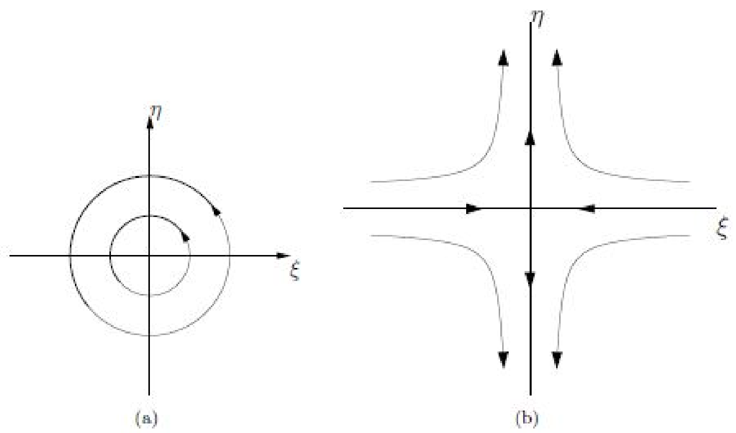


Abb. 5: Verhalten dynamischen Systems in der Nähe eines elliptischen (a) bzw. hyperbolischen (b) Fixpunktes, Quelle: [?]

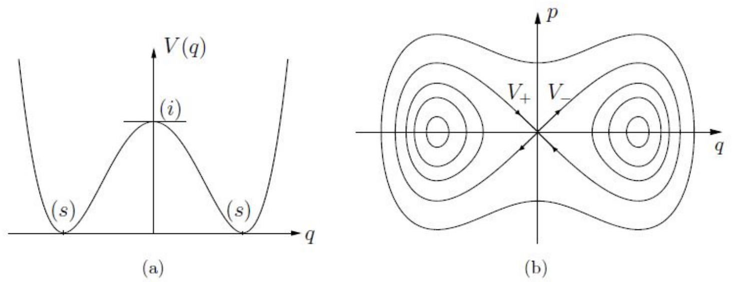


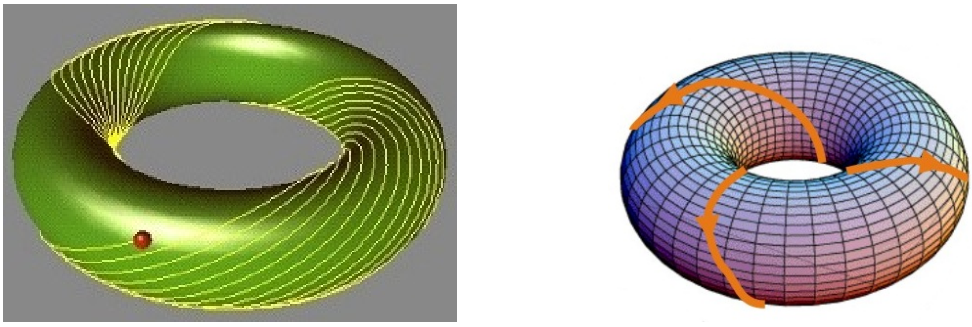
Abb. 6: (a) stellt qualitativ das Potential dar, (b) zeigt das zugehöre Phasenraumbild, Quelle: [?]

3 Der Satz von Poincaré-Birkhoff

Erinnerung. (KAM-Theorem) Phasenraumkurven mit irrationaler Rotationszahl (d.h. $\frac{\omega_1}{\omega_2} \equiv \alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$) weichen für hinreichend kleine Störungen nur leicht von ihrer ungestörten Bahn ab (solange die Bedingung $\det \left(\frac{\partial \omega(J)}{\partial J} \right)_{J \approx I} \neq 0$ erfüllt ist). Was irrationale Rotationszahl bedeutet, veranschaulicht Abb. ??. Eine Aussage über Trajektorien mit rationaler Rotationszahl ($\alpha \in \mathbb{Q}$), siehe Abb. ??, liefert im Folgenden der Satz von Poincaré-Birkhoff.

Beobachtung. Sei $H(I_1, I_2, \Theta_1, \Theta_2) = H_0(I_1, I_2) + \epsilon H_1(I_1, I_2, \Theta_1, \Theta_2)$ die Hamiltonfunktion, bestehend aus einem integrablen Teil H_0, der mit Wirkungs-Winkel-Variablen beschreibbar ist und einem (kleinen) Störtherm ϵH_1. Eine ungestörte Trajektorie verläuft auf einem Torus im 4-dimensionalen Phasenraum. Ihre Poincaré-Abbildung hat die Form $\Theta_1^{'} = \Theta_1 + 2\pi \cdot \alpha(I_1)$ und I_1 bleibt unverändert, d.h. $I_1^{'} = I_1$. Dabei soll α gleichmäßig von I_1 abhängen und es gelte $\alpha = \frac{m}{n}$, wobei m und n teilerfremde ganze Zahlen sind.

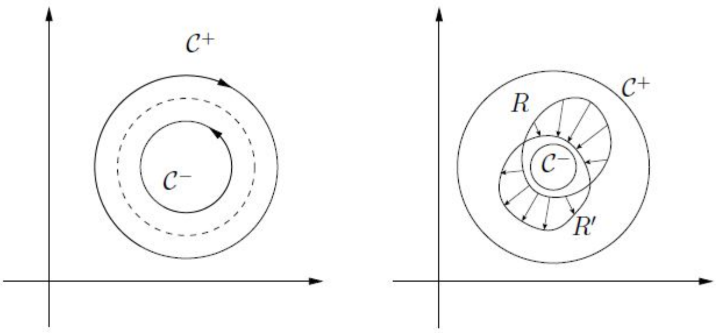
Sei nun $\mathcal{C} \subset SOS$ ein $\mathcal{P}$-invarianter Kreis in der SOS, d.h. es gilt $\mathcal{P}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, wobei das dynamische Verhalten der Punkte in $\mathcal{C}$ durch $\alpha(I_1)$ beschrieben wird. Wenn wir nun I_1 größer oder kleiner wählen, finden wir Kreise $\mathcal{C}^+$, bzw. $\mathcal{C}^-$, die außerhalb bzw. innerhalb von $\mathcal{C}$ liegen und irrationale Rotationszahlen haben. Da α gleichmäßig von I_1 abhängt, rotiert, in Bezug auf $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}^+$ im Uhrzeigersinn und $\mathcal{C}^-$ gegen den Uhrzeigersinn wenn man



(a) (b)

Abb. 7: Trajektorie auf Torus: mit irrationaler (a) bzw. rationaler (b) Rotationszahl

ihre Punkt n-fach unter $\mathcal{P}$ iteriert, siehe Abb. **??**a.



(a) (b)

Abb. 8: (a) zeigt die Kreise $\mathcal{C}$ (gestrichelt), sowie außer- bzw. innerhalb $\mathcal{C}^+$ und $\mathcal{C}^-$ auf der SOS, Quelle: [**?**]

Nun betrachten wir die Veränderungen unter Einfluss des Störtherms ϵH_1. Die zum gestörten System gehörige Poincaré Abbildung bezeichnen wir mit $\mathcal{P}^\epsilon$. Nach dem KAM-Theorem wirkt sich der Störtherm auf $\mathcal{C}^+$ und $\mathcal{C}^-$ kaum aus, d.h. sie sind invariant unter $\mathcal{P}^\epsilon$. Wir nehmen außerdem an, dass ϵ so klein gewählt ist, dass sich der relative Drehgeschwindigkeit unter $\mathcal{P}_n^\epsilon$ nicht (bzw. kaum) ändert. Daraus folgt aber direkt schon, dass für jeden Radius zwischen den Radien von $\mathcal{C}^+$ und $\mathcal{C}^-$ ein Punkt existiert, dessen Winkelkorrdinate Θ_1 unter $\mathcal{P}_n^\epsilon$ erhalten bleibt. Für jeden Radius aufgetragen formen diese Punkte eine Kurve $\mathcal{R}$, siehe Abb. **??**b. In Abb. **??**b ist außerdem die Kurve $\mathcal{R}' = \mathcal{P}_n^\epsilon(\mathcal{R})$ eingezeichnet. D.h. nach n-facher Anwendung von $\mathcal{P}^\epsilon$ sind genau die Punkte Fixpunkte von $\mathcal{P}^\epsilon$, die sich in der Menge $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ befinden. Diese Fixpunkte treten immer in Paaren auf.

Dies führt schlussendlich auf folgenden Satz.

Satz. (Poincaré-Birkhoff) Sei $\mathcal{C} \subset SOS$ Kurve eines ungestörten Hamilton'schen Systems mit Rotationszahl $\alpha = \frac{m}{n}$, die Fixpunkte von $\mathcal{P}_n$ sind, d.h.:

$$\forall c \in \mathcal{C} : \mathcal{P}_n(c) = c.$$

Unter Einfluss eines Störtherms bleiben dann

$$2kn, \quad k \in \mathbb{N},$$

Fixpunkte von $\mathcal{P}$ erhalten.

4 Lyapunov-Exponenten, Stabilitätskriterien

4.1 Der maximale Lyapunov-Exponent

Beispiel. Wir betrachten wiederrum ein Hamilton'sches System mithilfe einer Poincaré Abbildung $\mathcal{P}$ auf einer SOS. Sei $z^* \in SOS$ einer hyperbolischer Fixpunkt. Wir möchten die Matrix $\mathcal{M}_n(z^*)$ der Abbildung $\mathcal{P}_n$ bestimmen. Diese ergibt sich zu $\mathcal{M}_n(z^*) = \mathcal{M}^n(z^*)$. Seien nun $\lambda > 1$ und $\frac{1}{\lambda} < 1$ Eigenwerte von $\mathcal{M}$, dann sind λ^n und $\frac{1}{\lambda^n}$ Eigenwerte von $\mathcal{M}_n$. Sei weiterhin $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}$ eine Basis aus Eigenvektoren (jeweils zu den Eigenwerten λ_1 bzw. λ_2).

Wir betrachten nun das Verhalten von $\xi = z^* + \delta z$, d.h. eines Punktes in der Fixpunktumgebung, unter der Abbildung $\mathcal{P}_n$. Wenn wir noch δz bezüglich der Basis $\mathcal{B}'$ durch $\delta z = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 \equiv \delta z_1 + \delta z_2$ ausdrücken, ergibt sich in linearer Näherung

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_n(\xi) &= z^* + \mathcal{M}_n \cdot \delta z + \mathcal{O}(\delta z^2)\\ &= z^* + \lambda^n \cdot \delta z_1 + \frac{1}{\lambda^n} \cdot \delta z_2 + \mathcal{O}(\delta z^2)\\ &= z^* + e^{n\ln(\lambda)} \cdot \delta z_1 + e^{-n\ln(\lambda)} \cdot \delta z_2 + \mathcal{O}(\delta z^2).\end{aligned}$$

Für hinreichend großes n ist $e^{-n\ln(\lambda)}$ entsprechend klein und kann vernachlässigt werden. Damit wird der Abstand eines Punktes ξ zum Fixpunkt z^* nach n-facher Anwendung von $\mathcal{P}$ durch $\|e^{n\ln(\lambda)} \cdot \delta z_1\|$ bestimmt.
Man nennt $\pm\ln(\lambda)$ die *Lyapunov-Exponenten* der Abbildung $\mathcal{P}$ im Punkt z^*.

Bemerkung. Das obige Beispiel zeigt, dass zur Überprüfung der Stabilität von Trajketorien der größte Lyapunov-Exponent maßgebend ist. Man nennt diesen auch *maximalen Lyapunov-Exponenten*. Er gibt die Rate an mit der sich zwei Trajektorien voneinander entfernen (bzw. aneinander annähern). Das motivert folgende Defintion:

Defintion. (maximaler Lyapunov-Exponent) Der maximale Lyapunov-Exponent $\sigma(z)$ der Poincaré Abbildung $\mathcal{P}$ (für eine Anfangsbedingung z) ist definiert durch

$$\sigma(z) \equiv \lim_{n\to\infty} \lim_{\delta z\to 0} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{\|\mathcal{P}_n(z+\delta z) - \mathcal{P}_n(z)\|}{\|\delta z\|}\right).$$

4.2 Das Lyapunov-Spektrum

Bemerkung. Möchte man Wachstumsraten für die Abstände von Trajektorien in allen Phasenraumrichtungen betrachten, so ist es sinnvoll, nicht nur einen, d.h. den maximalen, Lyapunov-Exponenten zu berechnen, sondern jeweils einen für jede Raumrichtung.

Definition. (Lyapunov-Spektrum für 2-dim. Poincaré Abbildung $\mathcal{P}$) An das Beispiel zu Anfang von Kapitel 4.1 anknüpfend, ist das Lyapunov Spektrum gegeben durch

$$\begin{aligned}\sigma_{1,2}(z) &\equiv \lim_{n\to\infty} \lim_{h\to 0} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{\|\mathcal{P}_n(z+hv_{1,2}) - \mathcal{P}_n(z)\|}{|h|}\right) \qquad (*)\\ &= \ln(\lambda_{1,2}).\end{aligned}$$

Bemerkung. Das Beispiel aus Kapitel 4.1 bezog sich auf einen hyperbolischen Fixpunkt. In dessen Nähe stimmt das Lyapunov-Spektrum mit den Eigenwerten der Matrix $\mathcal{M}$ überein. Das Lyapunov-Spektrum bezogen auf die Zeitentwicklunsfunktion $\mathscr{H}_t$ des gesamten dynamischen Systems ist analog definiert.

Literatur

[1] S. Wimberger, *Nonlinear Dynamics and Quantum Chaos* (2012)

[2] M. Tabor, *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics* (John Wiley Sons, 1989)

[3] A.J. Lichtenberg, M.A. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics* (Springer Verlag, Berlin, 1992)

[4] Science-Blogs: http://www.scienceblogs.de/astrodic-ticum-simplex/2009/05/chaotische-systeme-teil-2-der-raum-als-donut.php