# Störungstheorie - KAM-Theorem

---

**Name**: Volker Karle

**Datum:** 3. Oktober 2012

---

# Inhaltsverzeichnis

# Teil I
# Wahloser Text

## 1 Störungstheorie

Die Störungstheorie behandelt dynamische, nicht explizit lösbare Systeme, über die sich mithilfe bekannter, lösbarer Systeme Aussagen treffen lassen. Wie stark diese Aussagen sind, hängt von einigen Bedingungen ab, die sich herleiten lassen. In dieser kurzen Einführung wollen wir allerdings nur Systeme betrachten, die beinahe integrabel sind und dann auf integrable Systeme zurückführen. Wir wollen nun ein nicht-integrables System $H_\epsilon$ durch das integrable System $H_0$ ausdrücken, wobei wir eine Störung $H_1$ hinzufügen, multipliziert mit einem Faktor $\epsilon \ll 1$:

$$H_\epsilon(I,\theta) = H_0(I) + \epsilon H_1(I,\theta) \tag{1}$$

Wobei ersichtlich wird, dass $H_\epsilon$ und $H_1$ von $I$ und von $\theta$ abhängen, also nicht integrabel sind, und $H_0$ nur von $I$ abhängt, da es der integrabele Teil von $H_\epsilon$ ist. Die Idee ist nun, für ein nicht-integrables System die exakte Lösung des integrablen Teils zu finden und die Störung rekursiv zu berechnen (siehe [?] auf Seite 90). Für die allgmeine Herangehensweise bei mehr als zwei Freiheitsgraden treten Probleme auf. Wir suchen nun neue Winkel-Wirkungsvariablen $I', \theta'$, sodass $H(I,\theta) = H(I')$ dargestellt werden kann. Nun können wir die Winkelwirkungsvariablen mit der erzeugenden Funktion $S(I',\theta)$ darstellen (also als Mischung zwischen den neuen und den alten Winkelwirkungsvariablen):

$$I = \frac{\partial S(I',\theta)}{\partial \theta} \quad \theta' = \frac{\partial S(I',\theta)}{\partial I'} \tag{2}$$

Nun setzen wir $S$ in $H$ ein:

$$H(\frac{\partial S(I',\theta)}{\partial \theta}, \theta) = H'(I') \tag{3}$$

Die Frage ist nun, wie $S$ aussieht. Wir gehen jetzt davon aus, dass wir $S$ als unendliche Reihe in $\epsilon$ entwicklen können (Näheres, warum das möglich ist in [?] in Kapitel 15):

$$S = S_0 + \epsilon S_1 + \epsilon^2 S_2 + \cdots \tag{4}$$

wobei wir die Anfangsbedingung $S_0 = I' \cdot \theta$ vorraussetzen, daraus folgt:

$$\Rightarrow \frac{\partial S_0}{\partial \theta} = I'$$

Somit ist

$$I = I' + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \theta} + \epsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial \theta} + \cdots \tag{5}$$

Dies können wir in 1 einsetzen:

$$H'(I') = H_0(I' + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \theta} + \epsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial \theta} + \cdots) + \epsilon H_1(I' + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \theta} + \epsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial \theta} + \cdots, \theta)$$

Nun entwickeln wir das Innere der Klammern (allerdings nur bis zum ersten Grad) an der Stelle $I = I'$:

$$H'(I') = \underbrace{\frac{\partial H_0}{\partial I}\Big|_{I=I'} I'}_{=H_0(I')} + \epsilon \frac{\partial H_0}{\partial I}\Big|_{I=I'} \frac{\partial S_1}{\partial \theta} + \epsilon^2 \frac{\partial H_0}{\partial I}\Big|_{I=I'} \frac{\partial S_2}{\partial \theta} + \cdots + \epsilon \underbrace{\frac{\partial H_1}{\partial I}\Big|_{I=I'} I'}_{=H_1(I',\theta)} + \epsilon^2 \frac{\partial H_1}{\partial I}\Big|_{I=I'} \frac{\partial S_1}{\partial \theta} + \epsilon^3 \frac{\partial H_1}{\partial I}\Big|_{I=I'} \frac{\partial S_2}{\partial \theta}$$

Vernachlässigt man nun Terme höherer Ordnungen von $\epsilon$, können wir die Gleichung vereinfachen:

$$H'(I') \approx H_0(I') + \epsilon \frac{\partial H_0}{\partial I}\Big|_{I=I'} \frac{\partial S_1}{\partial \theta} + \epsilon H_1(I', \theta)$$

Wir nehmen nun an, dass $H_1$ und $S_1$ periodisch in $\theta$ sind (stetig natürlich auch). Deshalb dürfen wir diese in eine Fourierreihe entwickeln:

$$H_1(I') = \sum_m H_{1,m}(I') \exp(im\theta)$$

$$S_1(I') = \sum_m S_{1,m}(I') \exp(im\theta)$$

wobei $m$ die Koeffizienten der Fourierreihe sind. Diese Darstellungen können wir nun einsetzen:

$$H'(I') \approx H_0(I') + \epsilon \frac{\partial H_0}{\partial I}\Big|_{I=I'} \sum_m (im) S_{1,m}(I') \exp(im\theta) + \epsilon \sum_m H_{1,m}(I') \exp(im\theta)$$

Es ist ersichtlich, dass immer noch eine $\theta$-Abhängigkeit besteht. Nun können wir eine Bedingung aufstellen, dass $H'$ nicht von $\theta$ abhängig ist, nämlich dann, wenn der Teil, der $\theta$ abhängig ist, null wird:

$$\sum_m \exp(im\theta) \Big( im \frac{\partial H_0}{\partial I}\Big|_{I=I'} S_{1,m}(I') + H_{1,m}(I') \Big) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow im \frac{\partial H_0}{\partial I}\Big|_{I=I'} S_{1,m}(I') + H_{1,m}(I') \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow im \frac{\partial H_0}{\partial I}\Big|_{I=I'} S_{1,m}(I') \stackrel{!}{=} -H_{1,m}(I')$$

$$\Leftrightarrow S_{1,m}(I') \stackrel{!}{=} \frac{iH_{1,m}(I')}{m \frac{\partial H_0}{\partial I}\Big|_{I=I'}}$$

Da laut der Definition der Winkelvariablen gilt: $\frac{\partial H_0}{\partial I} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} := \omega$ (wobei $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit ist, mit der sich eine einzelne Phasenraumtrajektorie auf dem Torus bewegt) können wir nun sagen:

$$\Leftrightarrow S_{1,m}(I') \stackrel{!}{=} \frac{iH_{1,m}(I')}{m \cdot \omega}$$

An dieser Stelle wird nun ein Problem ersichtlich, welche das "Problem der kleinsten Teiler"genannt wird. Bis jetzt sind wir immer von einer Dimension ausgegangen, doch

sämtliche Gleichungen können mehrdimensional aufgefasst werden (Sodass alle Variablen zu Vektoren werden) was auch bei den meisten Systemen der Fall ist. Somit ist also auch $m$ und $\omega$ mehrdimensional, das Produkt ist also ein Skalarprodukt. Wir betrachten also $m\omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \cdots$ mit soviel Einträgen, um wieviel Dimensionen es sich handelt. Da die $m$'s alle ganzzahlig sind, kann die Summe genau dann null werden, wenn die $\omega$'s kommensurabel sind, d.h. wenn sie rational abhängig sind und deshalb eine Linearkombination existiert, sodass die Summe null ergiebt (analog zu der Linearen Unabhängigkeit von Vektoren). Nun kann aber für jeden beliebigen Vektor $\omega$ der Vektor $m$ so gewählt werden, dass das Skalarprodukt beliebig klein wird. Dann divergiert allerdings die Summe, und es gibt keine Möglichkeit, eine Approximation zu finden.
Für dieses Problem gab es lange keine Lösung, bis Kolmogorov, Arnold und Moser im KAM-Theorem eine Möglichkeit fanden, die Reihe trotzdem konvergieren zu lassen. Der Beweis benutzt ein rekursives Verfahren (superkonvergentes Verfahren), das Ähnlichkeiten mit dem Newton-Verfahren aufweist. Das Ergebnis ist folgendes:
KAM - Theorem
Wenn die Störung $\epsilon$ klein genug ist, dann kann das nicht-integrable System durch ein integrables approximiert werden, wenn folgende Bedingungen [**?**] erfüllt sind:

- Das System ist nichtlinear:
$$\frac{\partial^2 H(I')}{\partial I_i \partial I_j}) \neq 0 \forall i, j \tag{6}$$
- Die Frequenzen $\omega$ sind diophantisch (das ist noch etwas stärker als rational unabhängig):
$$\forall k \in \mathbb{Z} : |k \cdot \omega(I)| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau} \tag{7}$$
Wobei der Parameter $\gamma$ von der Größe der Störung und der $\tau$ von der Nichtlinearität abhängt.
- Regularität: Wie wir in der Herleitung schon gesehen haben, wird an einigen Stellen Stetigkeit und auch (n-fache) Differenzierbarkeit erforderlich.

Als logische Konsequenz des Theorems lässt sich nun aussagen, dass ein System stabiler ist, je irrationaler die Frequenzen (bzw je "diophantischer"der Frequenzvektor) sind. Das Maß der Irrationalität lässt sich dadurch bestimmten, wie gut und wie schnell eine Zahl sich durch rationale Zahlen darstellen lässt, also durch durch Kettenbrüche (das schnell bezieht sich dann auf die Anzahl der Brüche). Betrachten wir beispielsweise ein zweidimensionales System, so ist das irrationalste Frequenzverhältnis der goldene Schnitt $\mu = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, da dessen Kettenbruchzerlegung folgendermaßen aussieht:

$$\mu = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}} \tag{8}$$

# Literatur

[1] Harold Stanley Heaps. *Information Retrieval – Computational and Theoretical Aspects*. Academic Press, 1978.