Chaos auf dem Billiardtisch

Johannes Popp

Sommerakademie, Olang 2012

Abstract

Es werden drei verschiedene Herangehensweisen von Billiards vorgestellt: Zuerst wird eine einfache mathematische Modellierung des klassisch Billiardtisches betrachtet, weiter werden Grundlagen in der Statistischen Physik mit Billiards verbunden, was zur Einführung des Lorentz-Gas-Modelles führt und zum Schluss werden klassische Billards durch Wellen ersetzt und genauer studiert.

1 Mathematische Modellierung

Für die mathematische Formulierung wird meist eine konvexe Berandung Punktteilchen und Reibungslosigkeit genommen. Dies führt zur bekannten Regel: Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel. Um genauere Aussagen machen zu können, werden Poincarré-Abbildung im Phasenraum betrachtet. Hier stellen sich verschiedene Muster ein:

1. Bestimmte Anzahl Punkte $\leftrightarrow$ Periodische Orbits
2. Invariante Kurven $\leftrightarrow$ Invariante Kurven in Betracht der Dynamik
3. Übriger Raum mit einzelnen Punkten $\leftrightarrow$ Chaotische Bahnen

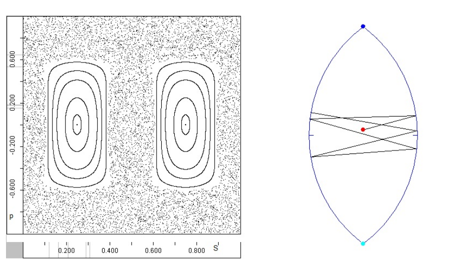

Figure 1: Zitronenbilliard und das dazugehörige Phasenraumdiagramm

Ein Beispiel, indem alle drei Eigenschaften sich im Phasenraumbild ergeben, ist der Zitronen Billiard (Fig. 1). Der einzige bekannte integrable Billiard ist die Ellipse. Dagegen sind Stadion und Sinaibilliard (Viereck mit Kreis in der Mitte) zwei völlig chaotische Billiards. Eine exakte mathematische Modellierung stet noch aus und genauso ein Beweis, dass die Ellipse einzigartig ist in ihrer integrablen Eigenschaft.

2 Verallgemeinerung, Lorentz-Gas-Modell

Mit der Verallgemeinerung werden Billiards mit beliebigen Rändern betrachtet. Um den Lyapunovexponenten zu bestimmen wird der zweite fundamentale Operator eingeführt, welcher Ort- und Geschwindigkeitsvariation verbindet. Für das Lorentz-Gas-Modell wird dafür eine regelmässig Anordnung von Kreisscheiben (Dreieckskristall) betrachtet und der Lyapunov-Exponent berechnet.

Für die Näherung grosser Abstände r ergibt sich der Lyapunov-Exponenten $\lambda \sim ln(r)/r^2$. Mit diesem Modell kann ferner Diffusion und Transport, Druck und Mehrteilchensysteme genauer untersucht werden.

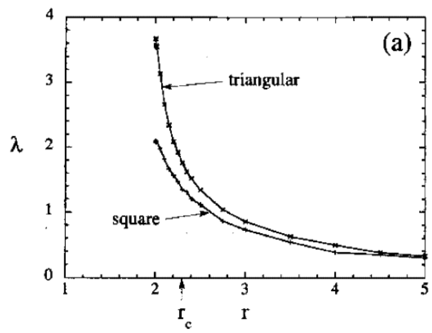

Figure 2: Lypunov-Exponent in Abhngigkeit des Abstandes r der Kreisscheiben mit fixem Radius a

3 Billiards als Wellen

Die Helmhotzgeichung $(\Delta + k_n^2)\psi(x) = 0$ beschreibt mit gegebenen Randbedingungen (Dirichlet oder Neumann) Wellen in Billiards, wobei die Dispersionsrelation $k_n = k_n(\omega)$ festlegt um welche Wellen es sich handelt. Viel beobachtet sind Mikrowellenbilliards; Hier wird ein Wellenleiter in Form eines Billiards auf Eigenfrequenzen untersucht. Interessant ist hierbei der Übergang zur Quantenmechanik, wo Quantumcorrals betarchtet werden. Um Ausagen über Chaos zu machen muss das Spektrum der Eigenfrequenzen genauer untersucht werden.

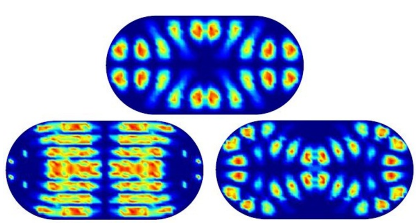

Figure 3: Mikrowellenbilliards zu verschiedenen Eigenfrequenzen

References

[1] H.J. Korsch, H.J. Jodl, T. Hartmann. *Chaos: A Program Collection for the PC.* Springer, 2008.

[2] H.J. Stöckmann. *Quantum Chaos: An Introduction.* CUP, 1999.

[3] P. Gaspard. *Chaos, Scattering and Statistical Mechanics.* CUP,1998.