Mathematische Charakterisierung von Chaos

Name: Annabelle Junger

Datum: 8. November 2012

Inhaltsverzeichnis

Teil I
Wahloser Text

1 Definition eines dynamischen Systems

Ein dynamisches System ist eine mathematische Beschreibung einer Zustandsveränderung nach der Zeit, formal ausgedrückt ein Tripel (X, T, f) mit

- X = Zustandsraum; d.h. eine nichtleere Menge, genauer ein metrischer Raum mit Metrik d, bestehend aus den Elementen, die sich mit der Zeit verändern; z.B. Geldbeträge auf einem Sparbuch $X = \mathbb{R}_0^+$
- T = Zeitraum; d.h. eine der Mengen, innerhalb derer sich jene Elemente von oben entweder nach diskreten Zeitschritten verändern oder ansonsten kontinuierlich; hier: jedes volle Jahr: $T = \mathbb{N}$
- $f : T \times X \to X$, $(t, x) \to ft(x)$ = stet. Funktion, nach der sich diese Elemente verändern; hier: Multiplikation mit 1,1 bei Zinssatz von 10% $\to f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $(n, r) \to (1,1)^n r$
- Dabei gilt:
  - $f(0, x) = f_0(x) = x$
  - $f(n, (f(m, x))) = f^n(f^m(x)) = f^{m+n}(x)$ für alle x aus X und m, n aus T

2 Definition von Chaos

Ein dynamisches System (X, T, f) ist genau dann chaotisch, wenn folgende Bedingungen gelten (wobei die ersten beiden die letzte, für das Chaos als essentiell betrachtete Eigenschaft implizieren):

- Dichtheit der periodischen Punkte von f in X; d.h., für alle x aus X existiert ein periodisches y aus X beliebig nahe an x (in Bezug auf die Metrik d)
- Transitivität von f; d.h., für alle x, y aus X existiert ein z beliebig nahe an x, dessen Orbit beliebig nahe an dem von y liegt
- Sensibilität von f; d.h., für alle x aus X existiert ein y aus X beliebig nahe an x, so dass deren Orbits an einer Stelle um einen Mindestwert voneinander differieren

3 Definitionen versch. Orbits

Der Orbit eines Elements aus der Zustandsmenge eines dynamischen Systems beschreibt dessen Veränderung nach der Zeit. Er wird als Folge (x_t) mit $x_t = f(t, x)$ verstanden, etwa $(x, f(x), f_2(x), f_3(x), ...)$. Dabei unterscheidet man:

- gemischt p-periodische Orbits, falls p, t aus T existieren, so dass $f_p(x_t) = x_t$; etwa $(x_0, x_1, x_2, ..., x_t, x_{t+1}, x_t, x_{t+1}, ...)$ hier:$p = 2$ x_t nennt man in dem Falle einen periodischen Punkt
- p-periodische Orbits, falls $t = 0$; etwa $(x_0, x_1, x_0, x_1, ...)$ hier: $p = 2$
- gemischte Fixpunktfolgen, falls $p = 1$; etwa $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_3, x_3, ...)$ hier: $t = 3$ x_3 nennt man in dem Falle einen Fixpunkt
- Fixpunktfolgen, falls $t = 0$ und $p = 1$; etwa $(x_0, x_0, x_0, ...)$
- Konvergente Orbits, falls dessen Folgeglieder gegen einen bestimmten Wert aus X konvergieren; etwa $(256, 16, 4, 2, 1.414, 1.189, 1.091, 1.044, ...) \to 1$
- Chaotische Orbits sonst