29 октября 2018 г.

Дискретная математика

Магистратура КМЦ, АГУ, Майкоп – 2018/19

Часть 1: аналитическая комбинаторика

1. Основные принципы комбинаторики: принцип Дирихле, принципы сложения и умножения. Формула включений и исключений.

2. Перестановки, размещения, сочетания. Метод факторизации.

3. Простейшие свойства биномиальных коэффициентов. Биномиальная и полиномиальная формулы. Формула Стирлинга. Доказательство формулы включений и исключений, — метод индукции по объёму дискретного пространства.

4. Комбинаторные методы суммирования. Биномиальный базис в пространстве последовательностей. Метод производящих функций. Рекурсии и степенные ряды. Сингулярные суммы.

5. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Применение к задаче о случайных блужданиях.

6. Линейные динамические системы. Числа Фибоначчи.

7. Вычисление пределов рекуррентных последовательностей, заданных уравнениями с полиномиальными коэффициентами.

8. Структуры и экспоненциальные производящие функции. Формулы сложения и умножения.

9. Разбиения и составные структуры. Рекурсивные методы в теории структур. Задача о подсчёте для некоторых классов деревьев и графов. Числа Белла, числа Каталана.

Часть 2: дискретные структуры и алгоритмы

1. Оценка сложности алгоритмов на примере простейших алгоритмов сортировки. Алгоритмы в задачах линейной алгебры.

2. Понятие о кодировании и оценке информационного объёма. Алгоритм бинарного поиска. Элементарное введение в методы хеширования.

3. Символы o, O, Θ. Мастер-теорема. Использование мастер-теоремы для оценки сложности простейших алгоритмов поиска и геометрических алгоритмов.

В последующих лекциях даются примеры использования мастер-теоремы для оценки сложности ряда классических алгоритмов.

4. Алгоритмы быстрой сортировки. Оценка сложности алгоритма "merge sort" с применением мастер-теоремы. Алгоритм "heap sort" и графы дискретных групп преобразований.

5. Оценка сложности некоторых алгоритмов арифметики. Алгоритм Карацубы.

5. Алгоритмы умножения матриц. Алгоритм Штрассена.

6. Алгоритмы транзитивного замыкания графов и алгебра булевых матриц.

7. Элементарные примеры алгоритмов на графах.

Занятия 1, 2

Основные принципы комбинаторики. Перестановки, размещения, сочетания. Метод факторизации.

Задачи для разбора на семинаре:

1 (принцип сложения). Из n чисел выбирают тройку. С какой вероятностью они образуют арифметическую прогрессию?

2 (принцип умножения). Игрок вытянул из колоды 6 карт, по две карты трёх мастей. Сколько существует таких конфигураций?

3. Принцип Дирихле на торе $\mathbb{T}^n$: $U^{k_j} \to E$ для любой ортогональной матрицы U и некоторой подпоследовательности степеней $k_j \to +\infty$.

4. Задача о кинотеатре — применение формулы включений и исключений: вероятность того, что никто из зрителей не занял своё место в кинотеатре $\to \dfrac{1}{e}$.

Контрольное задание:

1. Сколькими способами 20 спортсменов могут разбиться на две команды для игры в футбол и регби, при условии, что в каждой команде не менеее 9 участников, причём футбольная команда выбирает футболки одного из трёх цветов, а команда по регби — одного из двух цветов? Какие комбинаторные принципы можно применить в этой задаче?

2. Каждая из 13 букв в слове "КОМБИНАТОРИКА" напечатана на кубике, — все кубики имеют разные цвета. Сколькими способами можно разместить эти кубики в ряд, так, что снова получится исходное слово?

3. 12 студентов писали контрольную работу из трёх задач, при этом первую задачу решили 8 студентов, вторую — 7 студентов и третью — 6 студентов. Известно также, что 6 студентов решили по две задачи, причём трое из них решили задачи с номерами 1 и 2.

а) сколько студентов решили все три задачи?
б) сколько студентов решили все три задачи?
в) сколько студентов решили вторую и третью задачу, но не решили первую?
г) пусть за каждую задачу даётся один балл, сколько баллов набрала вся группа?

4. Рассмотрим семейство бинарных деревьев с корнем. Каждый узел ν такого дерева можно задать парой $\nu = (\lambda, \rho)$, где λ — левое поддерово, ρ — правое поддерево (каждое из этих двух поддеревьев может отсутствовать). Выведите рекуррентную формулу для числа бинарных деревьев с n вершинами, используя принципы сложения и умножения.

5. Рассмотрите следующие комбинаторные схемы и вычислите общее число конфигураций:

1) Сколько существует способов разделить n объектов на m групп мощности $r_1, \ldots, r_m$?
2) Сколькими способами можно распределить n яблок по m корзинам?
3) Сколькими способами можно разложить m блинов по m тарелкам?

6*. Оператор $A_{n\times n}$ имеет хотя бы одну жорданову клетку размера ≥ 2. Даны $v_1, \ldots, v_n$ — собственные вектора. Докажите, что они линейно зависимы.

7*. Известно, что векторы $v_1, \ldots, v_{n+1} \neq 0$ являтся некоторыми собственными векторами оператора $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Кроме того, известно, что любые n среди этих векторов линейно независимы. Что можно сказать об операторе A?

Комментарий: задачи со звёздочками являются необязательными, но дают дополнительные баллы в общую сумму баллов экзамена по спецкурсу, в частности, позволяют скомпенсировать несданные задачи к другим занятиям.

Занятия 3, 4

Простейшие свойства биномиальных коэффициентов. Комбинаторные методы суммирования.

Задачи для разбора на семинаре:

1. Вычисляем $\int_0^\pi \cos^8 x\, dx$

2. Вычисляем

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k, \qquad \sum_{k=0}^{n} C_n^k i^k, \qquad C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \cdots + (-1)^n C_{2n}^{2n}$$

3. Вычисляем производящую функцию для следующих последовательностей:

- $1,\ 1,\ 1,\ \ldots\ 1,\ \ldots$
- $1,\ 0,\ 0,\ \ldots\ 0,\ \ldots$
- $0,\ 1,\ 0,\ \ldots\ 0,\ \ldots$
- $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots$
- $1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots$
- $0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \ldots$
- $1,\ \mu,\ \mu^2,\ \mu^3,\ \ldots$
- $1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4,\ \ldots$
- $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$

4. Вычисляем производящую функцию для последовательности чисел Фибоначчи, $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$, $b_0 = b_1 = 1$, методом построения краевой задачи.

5. Вычисляем методом рекурсии: $\sum_{n=k}^{\infty} C_n^k t^n$

6. Доказываем, что $\nabla_r \xi_k(n) = \xi_{k-1}(n)$, где $\xi_k(n) = C_n^k = \frac{n^{(k)}}{k!}$

7. Вычисляем суммы

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}.$$

8. Вычисляем $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+7n+12}$ методом регуляризации.

9. Вычисляем $\sum_{k=0}^{n} k^2$ используя метод сингулярных сумм.

Контрольное задание:

1. Вычислите производную порядка m для функции: а) t^n, б) $\frac{1}{1-t}$

2. Вычислите производящую функцию

$$f(t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \dots$$

для последовательности x_n, удовлетворяющей следующим условиям:

1) $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$
2) $x_n = -x_{n-1} - x_{n-2} - x_{n-3}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$

3. Вычислите сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{5^n}$

а) методом рекурсии
б) методом дифференцирования по t производящей функции
в) методом дискретного дифференцирования

4. Вычислите сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{5^n}$ применяя биномиальный базис $e_k(n) = C_n^k$.

5. Докажите Γ-*тожество* для биномиальных коэффициентов:

(1) $$C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + ... + C_{n+m}^m = C_{n+m+1}^m,$$

(2) $$C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + ... + C_{n+m}^n = C_{n+m+1}^{n+1},$$

иными словами, если дана фигура – ломаная в форме буквы Г в графе Паскаля, опирающаяся (под прямым углом) на границу треугольника, и состоящая из отрезка длины m и отрезка длины 1 (*изобразите конфигурацию на рисунке!*), то сумма коэффициентов вдоль длинного отрезка ломаной равна биномиальному коэффициенту в крайней вершине ломаной.

Длина кривой на графе исчисляется в количестве рёбер графа.

6. Вычислите $\int_0^{\pi} \sin^6 x\, dx$

7. Пусть $n = 64$. Вычислите

а) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} C_n^{n-1}$
б)* $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^n$
в)* $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots + C_n^{n-1}$

8. Верно ли, что для любого k выполнено следующее:

$$\frac{C_{2n}^{n+k+1}}{C_{2n}^{n+k}} \to 1, \quad n \to +\infty\ ?$$

9*. Изобразите несколько уровней треугольника Паскаля и подпишите вершины значениями γ_n^k, удовлетворяющими фундаментальному тождеству $\gamma_n^k = \gamma_{n-1}^{k-1} + \gamma_{n-1}^k$, а также краевым условиям $\gamma_n^0 = 1$, $\gamma_n^n = -1$.

10*. Вычислите и изобразите на графе Паскаля значения: а) $C_n^k \pmod 2$, б) $C_n^k \pmod 3$ (*задание рекомендуется выполнять с использованием компьютера*).

Комментарий: задачи со звёздочками являются необязательными, но дают дополнительные баллы в общую сумму баллов экзамена по спецкурсу, в частности, позволяют скомпенсировать несданные задачи к другим занятиям.

Занятие 5

Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами.

Задачи для разбора на семинаре:

1. Вычисляем последовательность x_n, заданную рекуррентным соотношением:
- $x_n = 2x_{n-1}$, $x_0 = 1$
- $x_n = 2x_{n-1} + 2^{n-1} - n$, $x_0 = 0$
- $2x_n = 3x_{n-1} + x_{n-2}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0$
- $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$
- $x_n = x_{n-1} - x_{n-2}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 0$

2. Находим явную формулу для чисел Фибоначчи двумя способами:
- методом решения рекуррентного соотношения;
- при помощи исследования производящей функции.

3. Вычисляем трёхдиагональные определители

$$x_n = \det \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ b & a & b & \dots & 0 \\ 0 & b & a & \dots & 0 \\ & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}$$

4. Игрок в начале игры имеет на руках 5 рублей. За каждый ход игры игрок либо теряет, либо приобретает 1 рубль с равными вероятностями $\frac{1}{2}$. Игра заканчивается, если сумма становится равной 0 или 10 рублей.
- Требуется вычислить математическое ожидание времени от начала до завершения игры.
- Решить задачу при условии, что вероятности выиграть/проиграть на каждом шаге составляют $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, и начальный баланс игрока составляет 7 рублей.

Контрольное задание:

1. Вычислите последовательность x_n, заданную рекуррентным соотношением:
1) $x_n = 4x_{n-1} - 3x_{n-2}$, $x_0 = 1$
2) $x_n = 4x_{n-1} - 3x_{n-2} + n + \frac{1}{2^n}$, $x_0 = 1$
3) $x_n = -x_{n-1} - x_{n-2}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1$ (*используйте периодичность*)

2. Найдите явную формулу для x_n методом разложения производящей функции на элементарные дроби, если $x_n = 7x_{n-1} - 12x_{n-2}$, $x_0 = x_1 = 1$.

3. Вычислите трёхдиагональные определители для следующих значений параметров a и b:
1) $a = 2$, $b = 1$
2) $a = 0$, $b = 1$
3) $a = -1$, $b = -1$
4) чему равны значения x_n, если $a = 1$, $b = i$ (здесь i — мнимая единица, $i^2 = -1$)

4. Решите задачу о среднем времени завершения игры, если
1) стартовая сумма составляет 3 рубля, игра завершается на значениях 0 или 6, вероятности выиграть/проиграть равны $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
2) стартовая сумма составляет 4 рубля, игра завершается на значениях 0 или 7, вероятности выиграть/проиграть равны $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}$

2a)* каким будет ответ на вопрос задачи, если игра завершается только в случае разорения?

5**. Используя метод разложения периодической функции в суперпозицию волн: 1, $\cos kt$, $\sin kt$, определите, сколько решений имеет система:

$$\begin{cases} x+y+z=5 \\ x+y+z=33 \\ x+y+z=125 \end{cases} ?$$

6**. Найдите собственные значения матрицы $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = 1$, если $|i-j| = 1$, и нулю иначе.

Дополнение к предыдущему семинару:

7. Методом сингулярных сумм вычислите: 1) $\sum\limits_{k=1}^{n} n^2$, 2*) $\sum\limits_{k=1}^{n} n^4$.

Занятие 6

Линейные динамические системы. Числа Фибоначчи.

Задачи для разбора на семинаре:

1. Исследуем последовательность чисел Фибоначчи $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$, $b_0 = 1$, $b_1 = 1$, используя три метода:

1. Метод производящих функций, — определяем скорость роста последовательность b_n.
2. Решение рекуррентного соотношения (занятие 5), — находим явное представление для чисел b_n.
3. Исследование линейной динамической системы, — вычисляем предел отношения b_n/b_{n-1}, иллюстрируем динамическое поведение последовательности на фазовой плоскости.

2. Для подстановочной системы $1 \to 10$, $0 \to 11$ вычисляем число нулей и единиц в слове w_n, построенном на шаге n.

Контрольное задание:

1. Исследуйте последовательность x_n, заданную рекуррентным соотношением:

1) $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$, $x_0 = -1$, $x_1 = 1$
1) $3x_n = 7x_{n-1} - 2x_{n-2}$, $x_0 = -1$, $x_1 = 0$
1) $6x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1$
3) $x_n = -x_{n-1} - x_{n-2} - x_{n-3}$, $x_0 = 0$, $x_1 = x_2 = 1$

применяя каждый из трёх методов:

- метод производящих функций,
- метод, опирающийся на решение рекуррентного соотношения,
- исследование линейной динамической системы.

Определите скорость возрастания (убывания) последовательности, вычислите предел x_n/x_{n-1}, найдите общий вид последовательности x_n.

Для вычисления скорости роста исследуйте особые точки производящей функции.

2. Пусть дана последовательность слов w_n в алфавите $\mathbb{A} = \{0, 1\}$, где первые два слова заданы явно: $w_0 = 0$, $w_1 = 1$, а последующие строятся рекуррентно по формуле: $w_n = w_{n-1}w_{n-2}w_{n-1}$:

$$w_2 = 101$$
$$w_3 = 101\,1\,101$$
$$w_4 = 1011101\,101\,1011101$$
$$\ldots$$

а) Пусть x_n и y_n — число нулей и единиц в слове w_n соответственно. Запишите рекуррентные соотношения для x_n и y_n и представьте их в матричной форме: $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$.

б) Изучите скорость роста длин слов $\ell_n = |w_n|$. *Как свойства этой последовательности связаны со свойствами оператора A ?

в) Каково асимптотическое соотношение числа нулей и единиц в словах w_n ?

3. Задана подстановка $0 \to 011$, $1 \to 000$. Построим, используя это подстановочное преобразование, последовательность слов:

$$0$$
$$011$$
$$011\,000\,000$$
$$011\,000\,000\,011\,011\,011\,011\,011\,011$$
$$\ldots$$

Найдите явную формулу для числа нулей и единиц в построенных словах, какого асимпотическое соотношение числа нулей и единиц?

4*. Проведите исследование, аналогичное задаче 2, для подстановки над алфавитом $\mathbb{A} = \{a, b, c\}$:

$$a \to aba, \quad b \to cc, \quad c \to abc$$

Последовательность слов строим, начиная с буквы a:

$$a$$
$$aba$$
$$abaccaba$$
$$aba\,cc\,aba\,abc\,abc\,aba\,cc\,aba$$
$$\ldots$$

Занятие 7

Вычисление пределов рекуррентных последовательностей.

Задачи для разбора на семинаре:

1. Вычисляем предел $\lim_{n\to\infty} x_n$ для последовательности, заданную рекуррентным соотношением:

- $x_{n+1} = \dfrac{x_n + n\,x_{n-1}}{n+1}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$
- $x_{n+1} = \dfrac{n\,x_n + x_{n-1}}{n+1}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 0$
- $x_{n+1} = \dfrac{n\,x_n + (n+1)x_{n-1}}{2n+1}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 0$

Контрольное задание:

1. Вычислите производящую функцию и затем найдите предел $\lim_{n\to\infty} x_n$ для последовательности, заданную рекуррентным соотношением:

1) $x_{n+1} = \dfrac{(n+1)x_n - x_{n-1}}{n+1}, \quad x_0 = 0,\ x_1 = 1$

2) $x_{n+1} = \dfrac{(n+1)x_n + nx_{n-1}}{2n+1}, \quad x_0 = -1,\ x_1 = 1$

3) $x_{n+1} = \dfrac{nx_n + (n+2)x_{n-1}}{2n+2}, \quad x_0 = 0,\ x_1 = 1$

2*. Применяя различные методы, вычислите пределы последовательностей, заданных рекуррентно:

1) $x_n = \sqrt{x_{n-1}} + 1, \quad x_0 = 1$

2) $x_n = \frac{n}{n+1}x_{n-1}, \quad x_0 = 1$

3) $x_n = \frac{n}{n+1}x_{n-1} + 1, \quad x_0 = 1$

4) $x_n = \frac{n}{n+1}x_{n-1} + \frac{1}{n+1}, \quad x_0 = 2$

5) $x_n = \frac{nx_n + x_{n-1}}{n+2}, \quad x_0 = 0,\ x_1 = 1$

6) $x_n = \sin x_{n-1}, \quad x_0 = \frac{\pi}{6}$

7) вычислите $\sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5 + \ldots}}}$

8) вычислите $\dfrac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ldots}}}$

Решение каждого из пунктов здачи зачитывается в общую сумму бонусных баллов.

Занятие 8

Структуры и экспоненциальные производящие функции. Формулы сложения и умножения.

Задачи для разбора на семинаре:

1. Вычисляем экспоненциальные производящие функции для следующих структур и предикатов:
- структура, связанная с семейством конечных множеств: $f = e^t$ (*тривиальная э.п.ф.*)
- $A = \varnothing$
- $A \neq \varnothing$ (применяем формулу сложения для структур)
- $|A| = 1$
- $|A| = k$
- линейный порядок на конечных множествах: $f = \frac{1}{1-t}$

2. Решаем задачу о кинотеатре при помощи структур:
$$\frac{1}{1-t} = f + tf + \frac{t^2}{2!}f + \frac{t^3}{3!}f + \dots$$
$$f = \frac{e^{-t}}{1-t}$$

3. Сколькими способами можно распределить n преподавателей по 4 экзаменационным аудиториям, так чтобы в каждой аудитории был хотя бы один преподаватель?

4. Сколькими способами n студентов на летней школе могут распределиться на две группы: одна группа отправляется в поход (минимум два участника, необходимо выбрать командира), а вторая группа ставит спектакль — задаём линейный порядок (соответствие ролей).

Контрольное задание:

1. Вычисляем экспоненциальные производящие функции для следующих структур и предикатов:
- $|A| = 2$, $|A| = 3$, $|A| \in \{2, 3\}$ (примените формулу сложения)
- мощность множества $|A|$ чётна
- мощность множества $|A|$ нечётна
- структура линейного порядка на множестве A с дополнительным требованием: $|A| > 1$
- структура линейного порядка на множестве A с нечётным числом элементов

2. Сколькими способами n студентов на летней школе могут распределиться на две группы: одна группа отправляется в поход (минимум два участника, необходимо выбрать командира и медика), а вторая группа ставит спектакль, в котором 5 главных ролей, а остальные участники играют жителей города?

3. Вычислите экспоненциальную производящую функцию для структуры, представляющей совокупность бинарных деревьев (определённых в задаче 4 к занятиям 1,2).

4*. Сколькими способами (x_n) можно сформировать упорядоченный набор бинарных деревьев (см. предыдущую задачу), если сумарное число вершин во всех деревьях составляет n? Найдите производящую функцию $f(t)$ для последовательности x_n, и затем вычислите $x_0, \dots, x_7$.