

Для игры в развернутой форме с совершенной информацией задается дерево игры  $T$ , каждой вершине (кроме листьев) ставится в соответствие игрок, который управляет этой вершиной, в каждом листе написаны выигрыши игроков.

**Задача 1.** Формализуйте игру в а) шахматы; б) «крестики-нолики» как игру в развернутой и нормальной формах.

**Задача 2.** Всегда ли игру в развернутой форме (в варианте, описанном выше) можно представить как игру в нормальной форме? Что означает равновесие Нэша для игры в развернутой форме?

**Задача 3.** Формализуйте следующую игру в развернутой форме. Вы идёте по улице. К вам подходит хулиган с гранатой в руках, и предлагает вам такой выбор: либо вы отдаете ему кошелек, либо он взрывает гранату, и вы оба погибаете. Ваши предпочтения (в порядке убывания) таковы: остаться в живых с кошельком, остаться в живых без кошелька, быть взорванным. Предпочтения хулигана точно такие же. Больше всего ему понравится, если вы сразу отдадите ему кошелек. На втором месте альтернатива, когда вы отказываетесь отдавать кошелек, но он не взрывает гранату и остается в живых, но без кошелька. Наконец, меньше всего, как и вам, ему хочется быть взорванным.

**Задача 4.** Рассмотрим игру «орлянка». Как её формализовать в виде игры в развернутой форме?

**Задача 5.** (Михаил Шумахер) Рассмотрим игру «лобовая атака», в которой один из игроков — Михаил Шумахер. В этом случае он принимает решение позже, чем принял решение его противник. а) Опишите развернутую и нормальную формы этой игры. б) Найдите равновесия Нэша в чистых стратегиях.

**ТЕОРЕМА 1.** (Цермело-Куна, 1913, 1953) В любой игре с совершенной информацией в каждой вершине которой есть конечное число действий и конечной длиной любого пути от начальной вершины к терминальной есть равновесие в чистых стратегиях.

**Задача 6.** (Дележ золота) На пиратском корабле 50 разного старшинства пиратов делят 100 кусков золота по следующему обычаю. Старший предлагает дележ — кому сколько. Если хотя бы половина команды (включая его) согласна, то так и будет, иначе его выбросят за борт, а оставшийся старшим предложит дележ, и так далее. Найдите равновесия Нэша.

**Задача 7.** (Сороконожка) Богатый мизантроп позвал в гости двух студентов: Вову и Диму. Он предлагает Вове взять 100 рублей. Если он отказывается, то Диме предлагается 200 рублей. Если Дима отказывается, то Вове предлагается взять 400, и так далее. Наконец, Вове предлагается либо забрать 1600 рублей, либо поделить эту сумму поровну между собой и Димой. Найдите равновесия Нэша.

**Задача 8.** (Ультиматум) Олег предлагает Михаилу пропорции, в которых можно поделить 100 рублей. Пусть Олег предлагает оставить  $p \in [0, 100]$  рублей себе, и оставить  $100 - p$  Михаилу. Если Михаил соглашается, то эти платежи реализуются. Если он отказывается, то каждый игрок получает 0. Найдите равновесия Нэша.

### Детские игры

Детской игрой называется игра двух игроков, в которых игроки ходят по очереди, а в конце игры выигрывает либо первый, либо второй игрок (можно считать, что ставка в игре — 1 рубль).

В приводимых ниже примерах будем считать, что проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

**Задача 9.** В кучке 121 камень. Игроки ходят по очереди. Игрок за один ход может взять а) 1, 2 или 3 камней; б)  $1, 2, 3, \dots, n$  камней, в)  $1, 2, 4, \dots, 2^n$  камней. Кто выигрывает при правильной игре?

**Задача 10.** (Ним) Есть несколько кучек камней. За ход разрешается взять любое положительное количество камней из одной кучки.

Кто выигрывает, если изначально количество камней в кучках равно а) (5, 5); б) (5, 6); в)  $(a, b)$ ; г)  $(a, a, b)$ ; д) (1, 2, 3); е) (6, 7, 8).

### Поведенческие игры

В игре с полной информацией, как и в игре в нормальной форме можно ввести смеси стратегий. Поведенческой стратегией игрока  $i$  в вершине  $x$ , управляемой им называется распределение на ребрах  $A(x)$ . Таким образом, можно считать, что по каждому ребру игра реализуется с некоторой вероятностью. В этом случае для каждого исхода можно рассчитать вероятность этого исхода, и значит, ожидаемый выигрыш игрока

**Задача 11.** (Русская рулетка) Поручик Ржевский и корнет Оболенский поспорили из-за дамы. Они договорились решить этот вопрос игрой в русскую рулетку. Правила игры такие: в револьвер заряжается ровно один патрон, после чего на револьвере вращается барабан. Далее  $n$ -й Ржевский берет револьвер и решает, что ему делать: выстрелить себе в висок или сдать и проиграть спор. Если он погибает или сдаётся, то дуэль заканчивается. Иначе ход переходит к Оболенскому (барабан при этом не крутится).

Каждый оценивает победу в одну единицу, смерть — в ноль единиц, поражение — в  $\frac{2}{3}$  единиц. Найдите равновесие в этой игре.

**Задача 12.** (*Последовательная дуэль*) Несколько игроков стреляются на дуэли. Правила: стреляют в порядке очередности, задаваемой заранее. У каждого фиксированная вероятность попадания. Количество патронов бесконечное. Выигрыш — вероятность выжить в игре.

Как будут действовать игроки и какие получают выигрыши, в следующей ситуации:

**а)** Андрей и Борис стреляются в порядке А-Б-А-Б-..., вероятности попадания в цель —  $a$  и  $b$  соответственно.

**б)** Андрей, Борис и Владимир стреляются в порядке В-А-Б-В-А-Б-В-..., вероятности попадания в цель — 0.5, 0.8 и 1 соответственно.

**в)** Андрей, Борис и Владимир стреляются в порядке Б-В-А-Б-В-А-Б-..., вероятности попадания в цель — 0.5, 0.8 и 1 соответственно.

**г)** Андрей, Борис и Владимир стреляются в порядке А-Б-В-А-Б-В-А-..., вероятности попадания в цель — 0.5, 0.8 и 1 соответственно.