Теория игр в общественных науках

А.В. Захаров

22 марта 2013 г.

Оглавление

Глава 1

Статические игры с полной информацией

Ранним утром 14 октября 1066 года войска короля Гарольда, правителя Англо-Саксонского королевства, стояли на высоком холме, рядом с местечком под названием Гастингс и готовились к бою. Двумя неделями ранее Вильгельм, герцог Нормандский, вторгся на земли Гарольда, желая присвоить их себе, и щедро наградить ими своих подданных. И вот настал день большего сражения.

Войско нормандцев, в основном состоявшее из тяжело вооруженных всадников, обрушилось на пеших англо-саксов, стоявших щитом к щиту на вершине холма. Первая атака была отбита: потеряв много убитых и раненых, нормандцы отступили, чтобы напасть снова.

Раз за разом они атаковали. Наконец, когда уже почти стемнело, всадникам все-таки удалось пробить брешь в обороне англичан. Войско Гарольда вдруг дрогнуло и побежало. Король был убит; немногим удалось спастись. Англия была завоевана — в последний раз в своей долгой истории.

Почему исход сражения решился так быстро? Каждый воин, стоя в строю, преследовал две (иногда противоположные) цели: выполнить свой воинский долг и остаться в живых. Пока его товарищи держали строй, воин должен был сражаться: конечно же, он мог быть убит при следующей атаке, но если бы он покинул поле боя, то его ждал позор — и, возможно, наказание или даже смерть за трусость. Но вот последовала особо суровая атака. Видя, как кругом гибнут их товарищи, несколько солдат дрогнуло и побежало. Несколько стоящих рядом последовало их примеру.

Как только некоторое критическое число солдат покинуло поле боя, держать оборону перестало быть выгодным: риск быть убитым начал перевешивать возможное наказание за бегство. Тем более, что чем больше солдат покидало поле боя, тем меньше становилась вероятность того, что каждый отдельно взятый беглец будет наказан. Не прошло и нескольких минут, как все войско обратилось в бегство — и погибло: пеший не имеет никаких шансов против преследующего его конного воина. Тем не менее, решение каждого солдата бросить свой щит и попытаться добежать до видневшейся вдали лесной опушки было рациональным: если остальные бегут, то у отдельно взятого воина фактически нет выбора. Оставаясь сражаться, он обрекает себя на верную смерть. Пытаясь спастись, он с некоторой вероятностью остается в живых. Что бы произошло, если бы каждый воин был готов сражаться до конца, как личная дружина короля Гарольда (которая не отступила ни на шаг и была полностью уничтожена)? Возможно, никто бы не побежал, и битва закончилась бы победой англо-саксонцев. Но история не знает сослагательного наклонения.

Оглянитесь вокруг. Действия других людей практически всегда влияют на решения, которые нам приходится принимать. Почему в некоторых ВУЗах студенты списывают на экзамене? Если списывают все остальные, то для каждого отдельно взятого студента выгода от списывания перевешивает ожидаемое наказание от поимки. В приличных ВУЗах не списывает никто (или почти никто): попавшегося ждет показательное наказание, вплоть до отчисления. Как происходит обвал финансового рынка? По той же причине: если вы ожидаете, что цена акции упадет, то вам выгодно от нее избавиться. Если все начинают избавляться от этой акции, то ее цена падает, оправдывая ожидания. Конечно же, всегда можно рассуждать о «стадном инстинкте» и о стремлении людей имитировать друг друга — но очень часто массовая паника имеет рациональное (на индивидуальном уровне) объяснение.

Теория игр — раздел прикладной математики, с помощью которого ученые (в первую очередь экономисты и политологи) моделируют поведение нескольких субъектов, когда критерий принятия решения каждого зависит от решений, принимаемых остальными. Важнейший факт состоит в том, что решение игровой задачи часто отличается от решения оптимизационной задачи: войску короля Гарольда (да и самому королю) было бы «выгодно», если бы никто из солдат не побежал. Но в итоге решение каждый отдельный солдат принимал сам за себя.

1.1 Статические игры с полной информацией: чистые стратегии

Существует несколько способов классифицировать игровые задачи. Различие между *статическими* и *динамическими* играми обусловлено возможностью игроков наблюдать за действиями друг друга и реагировать на них. В статических играх игроки принимают решения одновременно; принятые решения не подлежат пересмотру. В динамических играх существует более сложный порядок ходов.

1.1.1 Игры в нормальной форме

В детстве все играли в «камень-ножницы-бумага». Каждый из двух игроков выбрасывает одну из трех заглавных фигур. «Камень» побеждает «ножницы», «бумага» — «камень», «ножницы» — «бумагу». Победивший бьет щелбан проигравшему. Как можно математически описать эту игру?

Во-первых, нам известно, что игроков всего двое. Будем говорить, что *множество игроков* в этой игре состоит из двух элементов: $I = \{1, 2\}$.

Во-вторых, мы знаем, что каждый игрок может выбрать одну из трех стратегий. Таким образом, *множество стратегий* для каждого игрока $i \in I$ будет $S_i = \{$«камень», «ножницы», «бумага»$\}$.[1]

В-третьих, мы знаем, как выигрыши игроков зависят от тех стратегий, которые они выбрали. В нашей игре всего два игрока, причем у каждого игрока конечное число стратегий. Выигрыши игроков в такой игре можно представить в виде матрицы, каждая строка которой соотвествует одной стратегии 1-го игрока, каждый столбец — одной стратегии 2-го игрока. Каждая ячейка матрицы будет содержать два числа: выигрыш 1-го игрока и выигрыш 2-го игрока. Если выигрыш победы равен 1, поражения — -1, а ничьей — 0, то матрица выигрышей будет выглядеть так:

[1] «Камень-ножницы-бумага» — статическая игра: решая, какой ход делать, вы не знаете, что выбросит ваш противник. После того, как вы сделали свой ход, у вас нет возможности передумать, причем ваш противник находится в том же положении, что и вы. Примерами динамических игр являются карточная игра в «дурака», «крестики-нолики», или шахматы. Формально, мы тоже можем представить такую игру в виде (2). Стратегия должна предписывать, какой ход надо делать в каждой из возможных игровых ситуаций. Стратегия, в таком случае — это толстая книга, прочтя которую, доверенное Вами лицо может играть в карты или шахматы так, как вы считаете нужным. Множество стратегий в такой игре — это все возможные способы написания таких книг. Более подробно о том, как решать такие игры, мы расскажем в следующей главе.

		Игрок 2		
		«камень»	«ножницы»	«бумага»
Игрок 1	«камень»	0,0	1,-1	-1,1
	«ножницы»	-1,1	0,0	1,-1
	«бумага»	1,-1	-1,1	0,0

Эта матрица задает нам *функции полезности* игроков — то есть то, как их выигрыши зависят от играемых стратегий.

Для того, чтобы формально определить, что такое функция выигрышей, введем следующее обозначение.

Определение 1 Пусть $S_1, \ldots, S_N$ — множества. Тогда *декартово произведение* этих множеств будет

$$S \equiv \times_{i=1}^{N} S_i = \{(s_1, \ldots, s_N) | s_1 \in S_1, \ldots, s_N \in S_N\}.$$

Если $I = \{1, \cdots, N\}$ — множество игроков, $S_1, \ldots, S_N$ — множества стратегий игроков, то будем говорить, что множество стратегий во всей игре есть $S = \times_{i=1}^{N} S_i$. Например, в нашей игре множество стратегий будет $S = \{$(«камень»,«камень»),(«камень»,«ножницы»),…,(«бумага»,«бумага») $\}$.

Также обозначим за $S_{-i} = \times_{j \neq i} S_j$ множество стратегий всех игроков, кроме игрока $i \in I$. Элемент $s_i \in S_i$ назовем *стратегией* игрока i. Назовем элемент $s \in S$ *профилем стратегий* игроков. Соответственно, $s_{-i} \in S_{-i}$ будет профилем стратегий всех игроков, кроме i. Функция выигрыша игрока i будет, соответственно, присваивать каждому элементу $s \in S$ какой-то выигрыш: $u_i : S \to \mathbb{R}$. Обозначим за $u : S \to \mathbb{R}^N = (u_1, \ldots, u_N)$ *профиль функций выигрышей* игроков.

Теперь можно формально определить, что мы имеем в виду под игрой:

Определение 2 Набор $G = \langle I, S, u \rangle$ называется *игрой в нормальной форме.*

В игре каждый игрок i выбирает одну стратегию из множества стратегий S_i. Выигрыш каждого игрока зависит как от выбранной им стратегии, так и от стратегий, выбранных другими игроками. Цель анализа игры — понять, какие стратегии игроки выберут, в зависимости от их множеств стратегий S и функций полезностей u.

1.1.2 Доминирование

Наша задача — составить прогноз поведения игроков в игре. Первое (и наиболее очевидное) рассуждение состоит в том, что ни один игрок не станет играть стратегию, если какая-то другая стратегия всегда приносит ему больший выигрыш. Формально,

Определение 3 Пусть $G = \langle I, S, u \rangle$ — игра в нормальной форме. Тогда для игрока i стратегия $s_i \in S_i$ сильно (слабо) доминирует стратегию $s'_i \in S_i$ если для всех $s_{-i} \in S_{-i}$, мы имеем

$$u_i(s_i, s_{-i}) > (\geq) u_i(s'_i, s_{-i}). \tag{1.1}$$

Если у игрока есть одна стратегия, которая доминирует все остальные, то мы можем утверждать, с большой долей уверенности, что он сыграет именно ее. Если такая стратегия есть у каждого игрока, то мы получили решение игры — прогноз относительно того, что сделает каждый игрок.

Определение 4 Набор стратегий $s^* \in S$ является *равновесием в сильно (слабо) доминирующих стратегиях* если для всех i, для всех $s'_i \in S_i$, $s'_i \neq s^*_i$, s^*_i сильно (слабо) доминирует s'_i.

Дилемма заключенного.

Два бандита — Петя и Вася — попались милиции. Их подозревают в совершении ограбления. Следователь предлагает каждому из них дать показания против своего товарища. Никаких улик против них нет: если никто из них не сознается, то каждый проведет в тюрьме всего один год за незаконное хранение оружия. Петя и Вася сидят в разных камерах и лишены возможности общаться друг с другом. Если один из них даст показания, а другой промолчит, то промолчавший проведет в тюрьме десять лет, а расколовшийся выйдет на свободу. Если оба расколятся, то каждый получит по восемь лет. Формально, мы имеем $I = \{\text{Петя, Вася}\}$, $S_1 = S_2 = \{$«сознаться», «молчать»$\}$. Пусть выигрыш каждого равен годам, проведенным на воле:

		Вася	
		«молчать»	«сознаться»
Петя	«молчать»	-1,-1	-10,0
	«сознаться»	0,-10	-8,-8

Как же поведут себя Петя и Вася? Каждому выгодно сознаться, вне зависимости от того, что сделает другой. Допустим, что Васе стало известно, что Петя промолчит. Если Вася сознается, он проведет в тюрьме 0 лет; если промолчит, то один год. Следовательно, если Петя будет молчать, то Вася расколется. Теперь предположим, что Вася знает, что Петя решил расколоться. Васе все равно выгодно сознаться (так он получит 8 лет вместо 10). Следовательно, вне зависимости от того, что сделает Петя, Вася сознается. Поскольку выигрыши симметричны, Петя тоже сознается: профиль стратегий («сознаться», «сознаться») является равновесием в сильно доминирующих стратегиях.

Эффективность по Парето

Заметим, что исход «дилеммы заключенного» (8 лет тюрьмы каждому) не является наилучшим: если бы Петя и Вася сыграли стратегии $s =$ («молчать», «молчать»), то каждому из них было бы строго лучше. Это — следствие того, что мы анализируем игровую, а не оптимизационную задачу. Петя и Вася принимают решения по отдельности; если бы за них обоих решал кто-то один, максимизирующий суммарный выигрыш Пети и Васи, то он бы действительно выбрал $s =$ («молчать», «молчать»). Однако в реальности каждый решает сам за себя.

Можем ли мы сказать, какой из двух профилей стратегии является наилучшим? Наиболее консервативный критерий имеет следующее формальное определение:

Определение 5 Пусть $G = \langle I, S, u \rangle$ — игра, $s, s' \in S$. Будем говорить, что профиль стратегий s *Парето-доминирует* s', если для всех $i \in I$,

$$u_i(s) \geq u_i(s'), \tag{1.2}$$

причем как минимум для одного i это неравенство выполняется строго.

Профиль стратегий s^o является *Парето-эффективным* или *оптимальным по Парето* если не существует $s' \in S$, который Парето-доминирует s^o.

Согласно этому определению, мы будем считать, что один профиль стратегий лучше другого, если все без исключения игроки с этим согласны. В игре «дилемма заключенного» единственный профиль стратегий, который не является Парето-эффективным — это равновесные стратегии (сознаться, сознаться). В этом отражена суровая правда жизни. Поведение игроков в самых разных ситуациях очень часто оставляет желать лучшего с точки зрения их благосостояния.

Аукцион второй цены.

Предположим, что на продажу выставлена ранее не известная картина великого художника Виктора Михайловича Васнецова. Два богатых человека — Владимир и Михаил — решили купить эту картину. Владимир оценивает картину в v_1 рублей, Михаил — в v_2 рублей (то есть, по определению, v_1 и v_2 — максимальная сумма, которую каждый из них готов заплатить за картину). Аукцион происходит по следующей схеме. Сначала Владимир и Михаил присылают свои заявки в закрытых пакетах. Картину приобретает тот, кто предложит бóльшую сумму денег, но платит он столько, сколько указано в проигравшей заявке. Для простоты предположим, что при совпадении заявок каждый покупатель выигрывает с вероятностью $\frac{1}{2}$. Таким образом, если s_1 — это заявка Владимира, а s_2 — заявка Михаила, то функция полезности Владимира выглядит следующим образом:

$$u_1(s_1, s_2) = \begin{cases} v_1 - s_2, & s_1 > s_2 \\ \frac{v_1 - s_1}{2}, & s_1 = s_2 \\ 0, & s_1 < s_2. \end{cases} \tag{1.3}$$

Докажем, что стратегия $s_1^* = v_1$ слабо доминирует все остальные. Нам надо перебрать все остальные стратегии $s_1' \in [0, \infty)$ и показать, что ни для одной $s_2 \in [0, \infty)$ мы не можем иметь $u_1(s_1', s_2) > u_1(s_1^*, s_2)$. Тогда мы имеем

$$u_1(v_1, s_2) - u_1(s_1', s_2) = \begin{cases} 0, & s_1' > s_2 \\ \frac{v_1 - s_2}{2}, & s_1' = s_2 \\ v_1 - s_2, & s_1' < s_2, \end{cases} \tag{1.4}$$

при $s_2 \leq v_1$ и

$$u_1(v_1, s_2) - u_1(s_1', s_2) = \begin{cases} s_2 - v_1, & s_1' > s_2 \\ \frac{s_2 - v_1}{2}, & s_1' = s_2 \\ 0, & s_1' < s_2, \end{cases} \tag{1.5}$$

при $s_2 > v_1$. Обе эти величины неотрицательны. Следовательно, в аукционе второй цены слабо доминирующая стратегия — назвать в качестве заявки свою истинную оценку.

Выборы — два кандидата

N (нечетное число) членов гаражного кооператива решают, за какую из двух кандидатур на должность председателя следует проголосовать. Председателем становится тот, кто получил больше половины голосов. Таким образом, $S_i = \{1, 2\}$ для всех i, где «1» означает отдать голос за кандидата 1, «2» — за кандидата 2. Пусть избиратель i получает выигрыш 1 если председателем становится 1-й кандидат, и 0, если председателем становится 2-й кандидат. Тогда стратегия $s_1 = 1$ слабо доминирует стратегию $s_1' = 2$. Действительно, пусть D_1 — число голосов (кроме избирателя i) за кандидата 1 (остальные $N - 1 - D_1$ голосов за кандидата 2). Пусть $u_i(s_i, D_1)$ — выигрыш избирателя i при голосовании за кандидата $s_i \in S_i$. Тогда мы получим

$$u_i(1, D_1) - u_i(2, D_1) = \begin{cases} 1, D_1 = \frac{N-1}{2} \\ 0, D_1 \neq \frac{N-1}{2}. \end{cases} \tag{1.6}$$

Иными словами, голос избирателя имеет значение только если остальные голоса разделились ровно пополам. В таком случае, его голос будет решающим; если за одного из кандидатов собираются голосовать более половины оставшихся избирателей, то голос избирателя не влияет на исход выборов (и, соответственно, его полезности при голосовании за кандидата 1 и кандидата 2 равны). Профиль стратегий «каждый голосует за своего любимого кандидата» является, таким образом, равновесием в слабо доминирующих стратегиях. При двух кандидатах, *честное* поведение (когда каждый голосует за того, кто ему больше нравится) является рациональным — то есть даже если избиратель знал бы, как проголосуют другие, он все равно проголосовал бы так же.

1.1.3 Последовательное удаление доминируемых стратегий

Если равновесие в сильно доминирующих стратегиях существует, то оно является весьма обоснованным прогнозом действий игроков. К сожалению, равновесие в сильно доминирующих стратегиях встречается далеко не во всех играх.

Пример. Рассмотрим такую игру:

		Игрок 2		
		U	C	R
Игрок 1	U	1,2	2,1	1,0
	L	0,5	1,2	7,4
	D	-1,1	3,0	5,2

В этой игре у игрока 1 нет доминирующих (и доминируемых) стратегий. Однако у игрока 2 стратегия U доминирует C. Следовательно, если игрок 2 рационален, то он (по определению) не будет играть доминируемую стратегию C. Если игрок 1 знает, что игрок 2 рационален, то он может вообще не учитывать существование стратегии C у игрока 2. Следовательно, он может рассматривать следующую игру:

		Игрок 2	
		U	R
Игрок 1	U	1,2	1,0
	L	0,5	7,4
	D	-1,1	5,2

Если игрок 1 (а) рационален и (б) знает о том, что игрок 2 рационален, то он не будет играть доминируемую стратегию D. С точки зрения игрока 2, матрица игры тогда выглядит так:

		Игрок 2	
		U	R
Игрок 1	U	1,2	1,0
	L	0,5	7,4

Игрок 2 не станет играть доминируемую стратегию R (то есть он всегда будет играть U). Правда, для этого он должен быть уверен в том, игрок 1 знает о его (игрока 2) рациональности. Если игрок 1 уверен, что игрок 2 не станет играть R, то игра приобретет следующий вид:

		Игрок 2
		U
Игрок 1	U	1,2
	L	0,5

Игроку 1 остается сыграть U – конечно же, при условии выполнения следующей итерации предположений о рациональности[2]. В итоге у нас есть прогноз: $s_1^* = U$, $s_2^* = U$.

Процедура, которую мы проделали в предыдущем примере, называется *последовательное удаление доминируемых стратегий*. Дадим ей формальное описание.

Определение 6 Пусть $G^1, G^2, \cdots$ — последовательность игр. Пусть S_i^n — множество стратегий игрока i в игре n, полученное путем удаления сильно доминируемых стратегий из множества S_i^{n-1} в игре $G^{n-1} = \langle I, S^{n-1}, u\rangle$. Пусть S_i^∞ — предел последовательности $S_i^1 \supseteq S_i^2 \supseteq \cdots$. Тогда игра *разрешима по доминированию*, если S_i^∞ состоит из одного элемента s^∞, называемого

[2]Будем говорить, что в предельном случае рациональность является *всеобщим знанием.* Такое предположение является реалистичным, например, в том случае, когда игровое взаимодействие между несколькими субъектами повторяется много раз подряд. Если на протяжении нескольких ходов мои партнеры не играют доминируемые стратегии, то у меня есть основания полагать, что такого не произойдет и впредь. Если мои действия основаны на предположении о рациональности моих партнеров, то рано или поздно они это поймут, и так далее.

решением игры по доминированию.

Мы предполагаем, что множества S_i^∞ существуют. При конечных множествах стратегий S_i это утверждение очевидно. Кроме того, если на каждом следующем этапе мы удаляем сильно доминируемые стратегии, то порядок их удаления не влияет на итоговый результат S^∞. Например, если на первом шаге мы удалим доминируемые стратегии игрока 1, а на втором шаге — доминируемые стратегии игрока 2, то от перемены порядка, в котором удаляются доминируемые стратегии игроков, результат не изменится (см. задачу 18). Мы также получим тот же результат, если на одном шаге удалим доминируемые стратегии сразу нескольких (или даже всех) игроков. Однако, если мы удаляем не только сильно доминируемые, но и слабо доминируемые стратегии, то порядок удаления может быть важен.

Решения игры по доминированию может не существовать: множества S_i^∞ могут содержать несколько элементов.

Пример. Рассмотрим такую игру:

		Игрок 2		
		U	C	R
Игрок 1	U	1,0	2,1	0,0
	L	0,-1	0,0	2,1
	D	-1,1	-1,0	1,2

Мы удаляем стратегию D у игрока 1, стратегию U у игрока 2, и остаемся с неразрешимой по доминированию игрой

		Игрок 2	
		C	R
Игрок 1	U	2,1	0,0
	L	0,0	2,1

Здесь мы имеем $S^\infty = \{\mathtt{U},\mathtt{L}\} \times \{\mathtt{C},\mathtt{R}\}$.

Битва на Море Бисмарка

Вот классический жизненный пример использования удаления доминируемых стратегий. Во Второй Мировая войне на Тихом Океане сражались силы Соединенных Штатов и Японии. Японский генерал Имамура планировал атаковать американские позиции в Новой Гвинее; для этого ему было необходимо перебросить значительные сухопутные силы на Новую Гвинею. Существовало два возможных пути конвоя: южный (S) и северный (N). Американцы, под командованием генерала Кенни, собиралась не допустить японских подкреплений. Американцы не знали, какой путь выберут японцы; для того, чтобы уничтожить японский конвой, нужно было сначала обнаружить его с воздуха (из-за шторма обе стороны знали примерное время отправки конвоя). Таким образом, у Кенни тоже было две стратегии: искать конвой на севере (N) или на юге (S). От выбора обоих генералов зависело число дней, в течение которых американская авиация могла бомбить японский конвой. При этом северный маршрут был на один день короче южного. Эту ситуацию можно представить в виде следующей игры:

		Кенни	
		N	S
Имамура	N	-2,2	-1,1
	S	-2,2	-3,3

У генерала Имамуры есть слабо доминируемая стратегия: S. Следуя логике последовательного удаления доминируемых стратегий, Кенни должен был знать, что Имамура не станет играть стратегию S, и самому сыграть N. Так и произошло: Имамура выбрал северный путь, и довольно быстро был обранужен. Японцы понесли большие потери и вторжение в Новую Гвинею не состоялось (хотя, вероятно, потери японцев были бы еще больше, если бы они выбрали южный путь).

Последовательное удаление слабо доминируемых стратегий

При последовательном удалении слабо доминируемых стратегий решение игры по доминированию может зависеть от порядка, в котором игроки удаляют свои стратегии. Пусть в игре с двумя игроками матрица выигрышей такова[3]:

		Игрок 2	
		L	R
Игрок 1	U	1,1	0,0
	M	1,1	2,1
	D	0,0	2,1

В этой игре у первого игрока стратегия M слабо доминирует U и D. Если сначала удалить U, то в игре с оставшимися стратегиями у второго игрока R будет слабо доминировать L. Удалив L и (на третьей итерации) D, мы приходим у решению $(\mathtt{M},\mathtt{R})$. Если же сначала удалить D, то на второй итерации мы удаляем R у второго игрока и приходим к решению $(\mathtt{M},\mathtt{L})$ с другим значением выигрышей.

1.1.4 Равновесие Нэша.

Рассмотрим пример на странице 11. Если игрок 1 знает, что игрок 2 собирается играть C, то ему следует сыграть U. Аналогично, если игроку 2 известно намерение игрока 1 сыграть U, то ему следует сыграть C. Таким образом, профиль стратегий $s^* = (\mathtt{U},\mathtt{C})$ является равновесным: ни одному игроку не выгодно изменить свою стратегию при условии, что другой игрок не изменит свою. Формально, $(\mathtt{U},\mathtt{C})$ отвечает следующему критерию:

Определение 7 Пусть $G = \langle I, S, u\rangle$ — игра в нормальной форме. Тогда $s^* \in S$ — *равновесие Нэша*, если для всех i, для всех $s_i' \in S_i$, мы имеем

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geqslant u_i(s_i', s_{-i}^*). \tag{1.7}$$

Равновесие Нэша — это такой профиль стратегий, что ни один отдельно взятый игрок не захочет изменить свою стратегию, если стратегии оставшихся игроков останутся неизменными. Равновесие Нэша является основной концепцией решения теоретико-игровых задач в общественных науках. Почему? Видимо, из-за того, что оно удовлетворяет определенному минимальному набору представлений о рациональности игроков. Нобелевский лауреат Роджер Майерсон так обосновал важность равновесия:

> Когда меня спрашивают, почему в какой-то игре игроки должны вести себя как в равновесии Нэша, я отвечаю: «Почему нет?» Далее я предлагаю задавшему вопрос сформулировать свое представление о том, как должны повести себя игроки. Если эта спецификация не является равновесием Нэша, то ... она будет противоречить сама себе, если мы предположим, что игроки имеют верное представление о действиях друг друга (Майерсон, 2007, стр. 106).

Иными словами, равновесие Нэша является необходимым условием «разумного» поведения игроков. Является ли это условие достаточным? То есть, существуют ли игры, в которых профили стратегий, формально удовлетворяющие условиям равновесия Нэша, не могут являться разумными (с интуитивной точки зрения) прогнозами поведения игроков? К сожалению, да.

[3]Печерский и Беляева (2001, стр. 43).

Во многих динамических играх (как мы увидим в следующих главах) нам могут потребоваться более строгие условия для составления прогноза поведения игроков. Тем не менее, все равно любой такой прогноз будет являться равновесием Нэша.

Координационные игры

Два студента, Маша и Андрей, договорились пойти в Малый Театр. Билеты куплены, и за час до встречи они садятся в метро в разных районах города Москвы. Театр находится на станции метро Площадь Революции. К сожалению, они забыли договориться, где встречаться: в метро или у входа в театр. Телефонов у них нет. Что они будут делать? У каждого два варианта действий: ждать в метро или у театра. Если они пойдут в разные места, то опоздают на спектакль. Матрица игры для них выглядит так:

		Андрей	
		M	T
Маша	M	1,1	0,0
	T	0,0	1,1

В этой игре два равновесия: $(\mathtt{M},\mathtt{M})$ и $(\mathtt{T},\mathtt{T})$, причем ни у одного из игроков нет доминирующих стратегий. Это — классический пример *координационной игры.*

Можно ли сказать, какое из нескольких возможных равновесий будет реализовано в координационной игре? Важную роль играет коммуникация между игроками. Если перед тем, как выйти из дома, Андрей передал Маше, что будет ждать ее в метро, то, скорее всего будет реализована пара стратегий $(\mathtt{M},\mathtt{M})$ — несмотря на то, что сообщение Андрея не является обязательным к исполнению, и никто не мешает Маше прийти к театру.

При отсутствии коммуникаций важную роль играет культурный и психологический контекст игры, не отраженный в функциях полезностей игроков. Представьте себе следующий пример. Вы и ваш товарищ — десантники, заброшенные во вражеский тыл. Вы приземлились в разных местах; для успешного проведения операции вам необходимо встретиться. Ни у одного из вас нет рации. Однако у каждого есть карта местности — такая, как на рисунке 1.1. Куда вы пойдете в надежде встретить своего товарища? Для большинства ответ очевиден: мост через речку. Почему? Потому что это место наиболее очевидно. При этом очевидность никак не отражена в функции полезности: если вы встретитесь в любом другом месте, то ваш выигрыш будет таким же. Если вы разминетесь, то вы проиграете — вне зависимости от того, куда вы в итоге пришли.

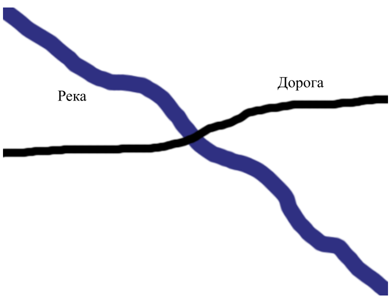


Рис. 1.1: Карта вражеской местности

Стратегии, похожие на точку на пересечении дороги и реки на рисунке 1.1 иногда называют *фокальными точками.* Важность таких стратегий в координационных играх описана в классической книге Томаса Шеллинга (1960). Автор спрашивал своих студентов: если бы вам пришлось встретиться в Нью-Йорке с незнакомым вам человеком (который находится в том же затруднительном положении, что и вы), то в какое место (и когда) бы вы пришли? Наиболее частый ответ был: в полдень на Times Square. Конечно же, наличие таких фокальных точек зависит от однородности культурной среды, из которой происходят игроки. Человек из другой страны, впревые попавший в Нью-Йорк, вряд ли пойдет искать своего товарища по игре на Times Square, так как не знает о символическом значении, которое может иметь это место для второго игрока.

В координационной игре на выбор равновесия могут влиять не только ментальные факторы, но и история предыдущих взаимодействий игроков. Если Маша и Андрей всегда встречались в метро Площадь Революции радиальная в центре зала, то и в следующий раз они встретятся там же. Андрей, предполагая, что Маша будет ждать его в метро, придет в метро. Маша, рассуждая схожим образом, сделает то же самое. Таким образом, координационная игра обладает свойством *зависимости от пути.* Если данная игра повторялась несколько раз и в ней каждый раз реализовывалось одно и то же равновесие, то и в следующий раз, скорее всего, игроки сыграют те же стратегии. Реализация одного и того же равновесия в повторяющемся игровом взаимодействии может привести к формированию социальных конвенций. Масколлел, Уинстон и Грин (1995) приводят такой пример:

> Каждый день люди, идущие на работу [в центре Нью-Йорка] должны решать, по какой стороне тротуара следует идти. Со временем, формируется конвенция, согласно которой люди идут по правой стороне тротуара. Эта конвенция поддерживается, так как любой индивид, отклонившийся [от конвенции] в одностороннем порядке, будет растоптан. Конечно же, в любой день *возможно*, что какой-нибудь индивид решит идти по левой стороне, рассчитывая на то, что все остальные вдруг решат, что конвенция изменилась. Тем не менее, наиболее разумный прогноз — что пешеходы и дальше будут придерживаться равновесия «все идут по правой стороне». Заметим, что поведение, для того, чтобы стать устойчивой конвенцией, должно являться равновесием Нэша. Иначе, индивиды начнут отклоняться от конвенции, как только та будет сформирована (Масколлел, Уинстон и Грин, 1995, стр. 249; перевод автора).

1.1.5 Функции реакции.

Рассмотрим матричную игру в таблицах 1.0(a) и 1.0(b).

(a) Наилучшая реакция игрока 1

	a	b	c	d
A	1,1	4,2	$\boxed{4,3}$	2,5
B	0,2	1,1	3,2	0,0
C	$\boxed{3,4}$	$\boxed{5,6}$	2,0	4,1
D	2,2	1,1	3,5	$\boxed{5,0}$

(b) Наилучшая реакция игрока 2

	a	b	c	d
A	1,1	4,2	4,3	$\boxed{2,5}$
B	$\boxed{0,2}$	1,1	$\boxed{3,2}$	0,0
C	3,4	$\boxed{5,6}$	2,0	4,1
D	2,2	1,1	$\boxed{3,5}$	5,0

В таблице 1.0(a) показано, какие стратегии игрока 1 максимизируют его выигрыш при данной стратегии игрока 2. Например, если игрок 2 выбирает стратегию a, то выигрыш игрока 1 максимизируется при выборе им стратегии C. Фактически, для каждого значения s_2 мы определяем одно или несколько значений s_1, максимизирующих выигрыш игрока 2. Аналогично, таблица 1.0(b) показывает, какая стратегия игрока 2 максимизирует его выигрыш для данной стратегии игрока 1. Дадим определение.

Определение 8 Функция реакции игрока i есть множества $s_i(s_{-i})$, такие, что для всех $s_{-i} \in S_{-i}$, мы имеем

$$s_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i | u_i(s_i, s_{-i}) = \max_{s'_i \in S_i} u_i(s'_i, s_{-i})\}.$$

Формально, функции реакции являются точечно-множественными отношениями: для профиля стратегий s_{-i} может существовать несколько стратегий, максимизирующих выигрыш игрока. Например, выигрыш игрока 2 при $s_1 = \mathtt{B}$ максимизируется при $s_2 \in s_2(B) = \{\mathtt{a}, \mathtt{c}\}$.

Равновесие Нэша можно определить как любой такой профиль стратегий, в котором стратегия каждого игрока является наилучшей реакцией на стратегии остальных игроков:

Лемма 1 Профиль стратегий s^* есть равновесие Нэша если и только если для всех i мы имеем

$$s_i^* \in s_i(s_{-i}^*). \tag{1.8}$$

Данную формулировку удобно использовать для решения некоторых задач по нахождению равновесия.

Дуополия Курно

Первой формальной задачей, исследованной с помощью нахождения равновесия, была модель конкуренции двух фирм, предложенная французским экономистом и математиком А.А. Курно в 19 веке.

В стране N два производителя виджетов. Обе фирмы должны решить, сколько штук виджетов произвести в течении ближайшего месяца. Пусть $q_1 \in [0, \infty)$ — объем производства первой фирмы, $q_2 \in [0, \infty)$ — второй. Функция спроса на виджеты имеет вид $P = 1 - q_1 - q_2$, где P — максимальная цена, по которой удастся продать $q_1 + q_2$ штук в течении месяца. Предположим, что издержки производства у фирмы i равны $c_i q_i$, где $0 \leq c_i < 1$ — издержки изготовления одной единицы товара. Прибыль фирмы равна ее выручке за вычетом издержек производства:

$$\begin{aligned} u_1 &= q_1 P - q_1 = q_1(1 - q_1 - q_2) - cq_1 \\ u_2 &= q_2 P - q_2 = q_2(1 - q_1 - q_2) - cq_2. \end{aligned} \tag{1.9}$$

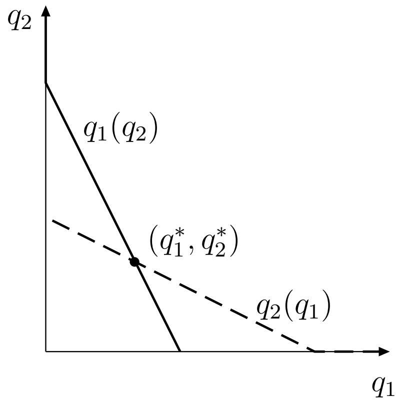
В этой задаче множество стратегий у каждой из двух фирм не является конечным: каждая фирма может выбрать любой неотрицательный объем производства. Функции выигрышей фирм являются непрерывными функциями от их стратегий. Если (q_1^*, q_2^*) — равновесие Нэша, то q_1^* должен максимизировать u_1 при $q_2 = q_2^*$, и наоборот. Решениями максимизационных задач фирм

$$\max_{q_1} u_1(q_1, q_2) \text{ и } \max_{q_2} u_2(q_1, q_2) \tag{1.10}$$

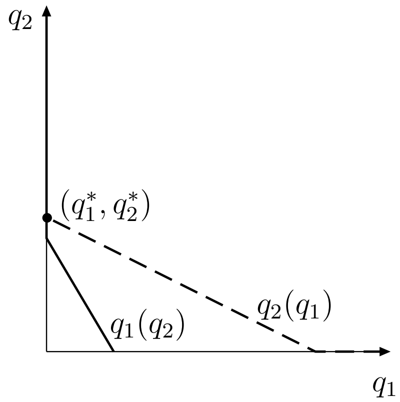
будут

$$q_1(q_2) = \begin{cases} \frac{1-q_2-c_1}{2}, & q_2 < 1 - c_1 \\ 0, & q_2 \geq 1 - c_1 \end{cases} \text{ и } q_2(q_1) = \begin{cases} \frac{1-q_1-c_2}{2}, & q_1 < 1 - c_2 \\ 0, & q_1 \geq 1 - c_2. \end{cases} \tag{1.11}$$

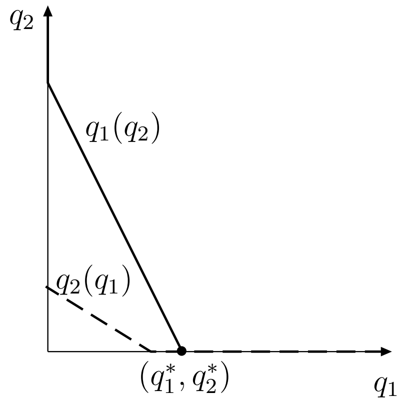
Уравнения (1.11) определяют функции реакции для первой и второй фирмы. Равновесие Нэша — это такие (q_1^*, q_2^*), при которых объем производства первой фирмы максимизирует ее



(a) $c_1 \in (2c_2 - 1, \frac{1+c_2}{2})$



(b) $c_1 \leq \frac{1+c_2}{2}$



(c) $c_1 \leq 2c_2 - 1$

Рис. 1.2: Равновесие в модели дуополии Курно для разных значений c_1 и c_2.

прибыль при данном объеме производства второй фирмы, и наоборот. Следовательно, равновесием будет являться любое решение системы уравнений

$$q_1(q_2) = q_1,\ q_2(q_1) = q_2. \tag{1.12}$$

Графики фунций реакции и равновесия для разных значений c_1 и c_2 изображены на рисунке 1.2.

Равновесие составит

$$q_1^* = \frac{1 - 2c_1 + c_2}{3},\ q_2^* = \frac{1 - 2c_2 + c_1}{3} \tag{1.13}$$

для $c_1 \in (2c_2 - 1, \frac{1+c_2}{2})$,

$$q_1^* = \frac{1 - c_1}{2},\ q_2^* = 0 \tag{1.14}$$

для $c_1 \leq 2c_2 - 1$, и

$$q_1^* = 0,\ q_2^* = \frac{1 - c_2}{2} \tag{1.15}$$

для $c_1 \geq \frac{1+c_2}{2}$.

1.1.6 Равновесие Нэша и доминирование.

Очевидно, что равновесие в доминирующих стратегиях обязательно является равновесием Нэша (но никак не наоборот):

Лемма 2 Пусть $s^* \in S$ — равновесие в доминирующих стратегиях. Тогда s^* — равновесие Нэша.

Действительно, доминирующая стратегия должна давать игроку наилучший выигрыш вне зависимости от того, какие стратегии выбирают остальные игроки. Равновесная (по Нэшу) стратегия удовлетворяет более слабому условию: она должна быть оптимальной при условии, что остальные игроки выбирают свои равновесные стратегии.

Может ли в равновесии играться доминируемая стратегия? Если это — сильно доминируемая стратегия, то нет:

Лемма 3 Пусть s^* — равновесие Нэша. Тогда s^* не содержит сильно доминируемых стратегий.

Однако вполне может быть так, что слабо доминируемая стратегия является равновесной:

		Игрок 2	
		L	R
Игрок 1	U	1,1	0,0
	M	1,1	2,1

В этой игре два равновесия: (U, L) и (M, R). В первом из них игрок 1 играет слабо доминируемую стратегию U.

Равновесие Нэша и множество S^∞ взаимосвязаны. Во-первых, при последовательном удалении доминируемых стратегий мы не можем удалить равновесную стратегию:

Лемма 4 Пусть в игре $G = \langle I, S, u \rangle$, $s^* \in S$ — равновесие Нэша. Тогда $s^* \in S^\infty$.

Доказательство Леммы 4.

Доказываем от противного. Пусть s^* — равновесие Нэша, но оно не содержится в S^∞. Пусть равновесие s^* удаляется на шаге n. Пусть s_i^* — стратегия, удаляемая на этом шаге. Тогда существует $s_i' \in S_i^n$, такая, что для всех $s_{-i} \in S_{-i}^n$, мы имеем

$$u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s_i^*, s_{-i}). \tag{1.16}$$

Но это противоречит утверждению, что s^* — равновесие, то есть

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geqslant u_i(s_i, s_{-i}^*) \tag{1.17}$$

для всех $s_i \in S_i$, ибо по построению s_i^* удаляется первой из стратегий игроков, входящих в равновесие, то есть $s_{-i}^* \in S_{-i}^n$. **Q.E.D.**

Во-вторых, решение игры по доминированию обязано быть равновесием. То есть из существования решения по доминированию должно следовать равновесие Нэша:

Лемма 5 Пусть s^∞ — решение игры по доминированию. Тогда, s^∞ — единственное равновесие Нэша.

Доказательство Леммы 5.

Докажем это утверждение для конечных игр. Пусть $s' = S^\infty$ — не равновесие Нэша. Следовательно, существует $i \in I$ и $s_i \in S_i$, такие, что

$$u_i(s_i, s_{-i}') > u_i(s_i', s_{-i}'), \tag{1.18}$$

причем существует n, такой, что $s_i'' \in S_i^n$ строго доминирует s_i в игре G^n, то есть для всех $s_{-i} \in S_{-i}^n$, мы имеем

$$u_i(s_i'', s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}). \tag{1.19}$$

Так как $s_{-i}' \in S_{-i}^n$ для всех n, получим

$$u_i(s_i'', s_{-i}') > u_i(s_i, s_{-i}'). \tag{1.20}$$

Рассмотрим 2 случая:

1. $s_i'' = s_i'$. Тогда (1.18) противоречит (1.20).

2. $s_i'' \neq s_i'$. Тогда существует $m > n$ и $s_i''' \in S_i^m$, которая строго доминирует s_i'' в игре G^m. Заменим s_i'' на s_i''' в неравенствах (1.19) и (1.20). Если $s_i''' = s_i'$, то утверждение доказано. Если $s_i''' \neq s_i'$, то повторим шаг (2).

Так как множества S_i конечны, мы должны прийти к противоречию. **Q.E.D.**

Какова ценность доказанных выше лемм? И множество равновесий Нэша, и множество S^∞ являются *концепциями решений* — то есть способами выделить из множества стратегий S некоторые подмножества (желательно, состоящие из небольшого числа элементов), которые будут являться прогнозами действий игроков. Мы показали, что эти две концепции решений практически эквивалентны: равновесная по Нэшу стратегия не может быть удалена как доминируемая, в то время как единственность решения по доминированию гарантирует существование (и единственность) равновесия Нэша.

1.1.7 Примеры

Лобовая атака

В игре с несколькими равновесиями выбор стратегий может быть обусловлен историей поведения игроков в подобных игровых взаимодействиях — друг с другом или с другими игроками.

Два автомобиля едут навстречу друг другу. Каждый водитель решает, свернуть ему или нет. Если один водитель свернул (T), а второй — нет (N), то свернувший водитель считается трусом, а не свернувший — крутым и заслуживающим уважения парнем. Если свернули оба, то каждый остатся «при своих». Если не свернул ни один из них, то происходит столкновение и оба водителя погибают. Предпочтения каждого водителя (в порядке убывания полезности) выглядят так: стать крутым, остаться «при своих», стать трусом, погибнуть. Эти предпочтения могут быть выражены, например, такой функцией полезности:

		Игрок 1	
		T	N
Игрок 2	T	0,0	-5,10
	N	10,-5	-10,-10

В этой игре два равновесия: $(\mathtt{T},\mathtt{N})$ и $(\mathtt{N},\mathtt{T})$.

Какое из двух равновесий будет реализовано? Возможно, ответ зависит от репутации каждого из игроков. Если про первого игрока известно, что в прошлых игровых взаимоедйствиях он никогда не сворачивал, а второй игрок не имеет такой репутации, то следует ожидать, что второй игрок свернет, а первый — нет. В таких играх с несимметричными равновесиями репутация будет самоподдерживаться от одной игры к другой.

Дележ ста рублей

Представления игроков о равенстве и справедливости тоже могут иметь значение при определении равновесия. Рассмотрим, например, такую игру:

В копилке лежат 100 рублей. Каждый из двух игроков называет сумму, которую он хотел бы забрать из копилки. Если сумма заявок не превосходит 100 рублей, то их заявки исполняются. Если в сумме было заявлено более 100 рублей, то каждый получает ноль. Формально, $s_1 = s_2 = [0, 100]$,

$$u_1(s_1,s_2) = \begin{cases} s_1, & s_1+s_2 \le 100 \\ 0, & s_1+s_2 > 100, \end{cases} \quad u_2(s_1,s_2) = \begin{cases} s_2, & s_1+s_2 \le 100 \\ 0, & s_1+s_2 > 100. \end{cases} \tag{1.21}$$

В этой игре континуум равновесий. Любое равновесие имеет вид $(s_1^*, s_2^*) = (s, 100 - s)$ при $s \in [0, 100]$.

Если два незнакомых человека сядут играть в эту игру, то какими будут их стратегии? Вероятнее всего, они предложат $(s_1, s_2) = (50, 50)$. Это — одно из многих равновесий, но оно наиболее очевидное в силу своей справедливости. Какое-нибудь другое, несимметричное равновесие — например, $(s_1, s_2) = (30, 70)$ — может быть реализовано, только если у каждого игрока есть основание полагать, что другой игрок будет придерживаться именно этой равновесной стратегии.

Банковская паника

Вот еще один пример, из книги Гиббонса (1992). Каждый из двух вкладчиков имеет D долларов на счету в банке. Банк использовал эти средства для того, чтобы профинансировать некий инвестиционный проект продолжительностью два года. Если банк попытается отозвать средства через год после начала проекта, то сможет вернуть $2r$, где $D > r > \frac{D}{2}$. Если банк дожидается окончания проекта, то получает $2R$, где $R > D$. Рассмотрим следующую двухэтапную игру. Через один год каждый из двух вкладчиков решает, забрать ли ему свой вклад из банка (W), или нет (H). Если хотя бы один вкладчик забирает вклад, то банк вынужден прекратить фининсирование проекта. Забравший свои средства вкладчик получает D, другой вкладчик — $2r - D$; игра останавливается. Если оба вкладчика забрали средства, то каждый получает r, игра заканчивается. Если оба вкладчика не забрали свои средства, то каждый получает по R. Матрица выигрышей в этой игре такая:

		2 вкладчик	
		H	W
1 вкладчик	H	R, R	$2r - D, D$
	W	$D, 2r - D$	r, r

В этой игре два равновесия: (H, H), в котором оба вкладчика дожидаются окончания проекта, и (W, W), в котором оба вкладчика забирают свои средства раньше срока, реализуя сценарий банковской паники.

Списывание на экзамене

N студентов пишут экзамен по теории игр. Каждый студент i имеет возможность списать ($s_i = 1$) или не списывать ($s_i = 0$). Все списывающие студенты будут наказаны. Однако тяжесть наказания, понесенная списывающим студентом, будет обратно пропорциональна числу списывающих. Так, например, если на списывании попался только один студент, то он может быть отчислен. Если на списывании попалась половина потока, то наказания для каждого студента будет более легким: по административным причинам, преподавателю будет трудно отчислить всех нарушителей. Пусть выигрыш студента i будет

$$U_i(s) = \begin{cases} 1 - \frac{C}{\sum_{j=1}^{N} s_j}, & s_i = 1 \\ 0, & s_i = 0. \end{cases} \tag{1.22}$$

Здесь, выигрыш от списывания равен 1; суммарный объем наказания — C. Найдем равновесия в этой игре. Функция реакции студента i будет

$$s_i(s_{-i}) = \begin{cases} 0, & \sum_{j \neq i} s_j < C - 1 \\ \{0, 1\}, & \sum_{j \neq i} s_j = C - 1 \\ 1, & \sum_{j \neq i} s_j > C - 1 \end{cases} \tag{1.23}$$

Легко убедиться, что в этой игре, в зависимости от значения параметра C, может быть несколько равновесий:

Случай 1: $C < 1$**.** Существует одно равновесие: все списывают.

Случай 2а: $1 \leq C \leq N$**,** C **целое число.** Существует три равновесия: никто не списывает, все списывают, и ровно C студентов списывают.

Случай 2b: $1 < C < N$, C **не целое число.** Существует два равновесия: никто не списывает и все списывают.

Случай 3: $C > N$. Существует одно равновесие: никто не списывает.

Получается, что наличие списывания может быть вызвано не институциональными причинами (такими, как тяжесть наказания C и число студентов N), а ожиданиями студентов относительно действий их товарищей. Если студент считает, что его товарищи списывать не будут, то его выигрыш от списывания будет меньше, чем тяжесть наказания, которую он понесет. Следовательно он не станет списывать. Если у остальных студентов такие же прогнозы относительно действий своих товарищей, то списывать не будет никто. Однако если же студент ожидает, что все остальные будут списывать, то ему будет выгодно списать: наказание будет достаточно легким по сравнению с издержками. Оба равновесия являются в своем роде фокальными точками — то есть в каждом из них все игроки действуют одинаково. В таком случае уместно говорить о *самосбывающихся прогнозах.*

Несуществование равновесия в игре «инспекция»

На железнодорожной платформе в электричку заходят двое: безбилетник и контролер. Если они заходят в один и тот же вагон, то контролер ловит безбилетника и штрафует его на 100 рублей. Если они садятся в разные вагоны, то безбилетник выходит на следующей станции, ничего не заплатив. Свое моральное удовлетворение от поимки безбилетника контролер оценивает в 50 рублей. Предположим, для простоты, что в электричке всего два вагона. Тогда матрица выигрышей имеет следующий вид:

		Контролер	
		1 вагон	2 вагон
Безбилетник	1 вагон	-100,50	0,0
	2 вагон	0,0	-100,50

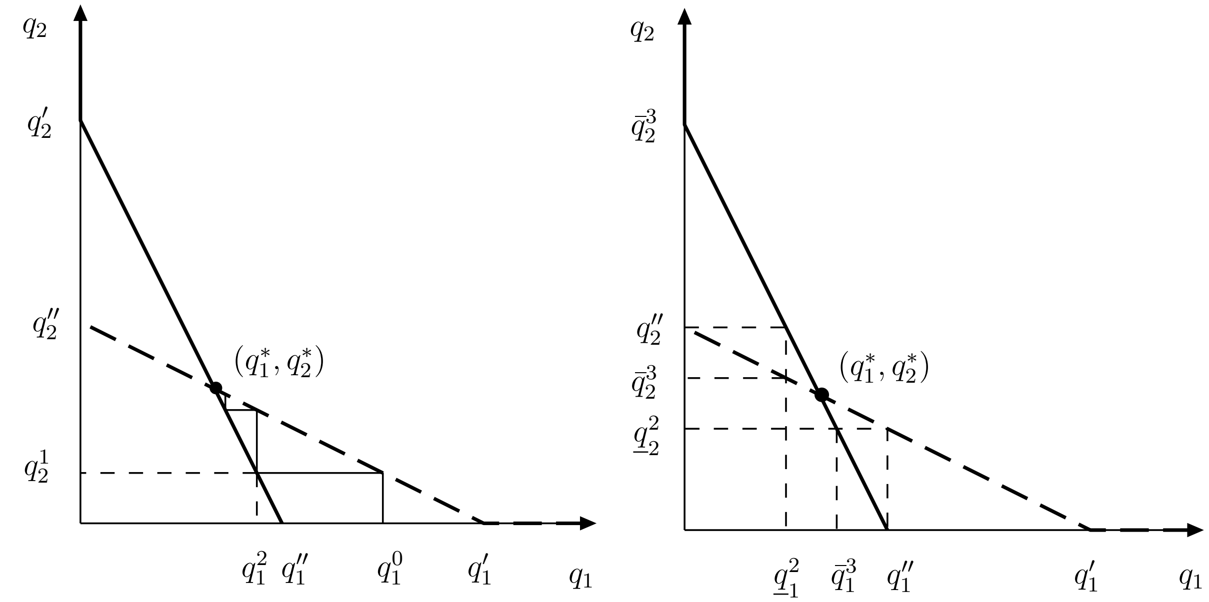
Эта игра не имеет равновесия Нэша. Если безбилетник едет в 1-м вагоне, то проводник максимизирует свой выигрыш, если сядет в 1-й вагон. Если же безбилетник знает, что проводник едет в 1-м вагоне, то сам переберется во 2-й.

Последовательное удаление доминируемых стратегий в дуополии Курно

Вернемся к задаче конкуренции двух фирм на странице 15. Данный пример показывает, как может выглядеть динамика поиска равновесия двумя фирмами. Например, предположим, что фирмы взаимодействуют друг с другом в течение нескольких периодов; в четные периоды фирма 1 имеет возможность изменить объем производства; в нечетные периоды — фирма 2. Пусть $c_1 = c_2$. Если в момент времени $t = 0$ фирма 1 произведет q_1^0, то в момент времени $t = 1$ фирма 2 произведет $q_2^1 = q_2(q_1^0)$, в момент времени $t = 2$ фирма 1 произведет $q_1^2 = q_1(q_2^1)$, и так далее (рисунок 1.3(a)). Последовательности объемов производств $q_1^0, q_1^2, \ldots$ и $q_2^1, q_2^3, \ldots$ сойдутся к q_1^* и q_2^* при любом начальном значении q_1^0. Таким образом, равновесие (q_1^*, q_2^*) будет устойчивым — если один из игроков отклонится от своей равновесной стратегии, то скорее всего поведение игроков довольно быстро вернется к равновесию.

На примере дуополии Курно можно проиллюстрировать процедуру последовательного удаления доминируемых стратегий. Предположим, что у фирмы 2 множество стратегий $S_2^t = [\underline{q}_2, \bar{q}_2]$. Какие стратегии для первой фирмы будут доминируемы? Во-первых, $q_1(\underline{q}_2)$ доминирует все стратегии $q_1 > q_1(\underline{q}_2)$. Действительно, если $q_2' < \underline{q}_2 \le q_2$, то $u_1(q_1(q_2'), q_2) < u_1(q_1(\underline{q}_2), q_2)$. Во-вторых, $q_1(\bar{q}_2)$ доминирует все стратегии $q_1 < q_1(\bar{q}_2)$.

Попробуем для данной задачи построить последовательность множеств стратегий, аналогичную Определению 6. Возьмем $S_1^0 = S_2^0 = [0, \infty)$. Стратегия $q_1' = q_1(0)$ доминирует все



(a) Существование равновесия и его устойчивость

(b) Удаление доминируемых стратегий

Рис. 1.3: Дуополия Курно

$q > q_1'$. Следовательно, $S_1 = [0, q_1']$. Аналогично, $S_2 = [0, q_2']$. На следующей итерации получим $S_1^2 = [q_1(q_2'), q_1']$, $S_2^2 = [q_2(q_1'), q_2']$. Мы получаем последовательность множеств стратегий $S_1^t = [\underline{q}_1^t, \bar{q}_1^t]$, $S_2^t = [\underline{q}_2^t, \bar{q}_2^t]$, где

$$\underline{q}_2^{t+1} = q_2(\bar{q}_1^t),\ \bar{q}_1^{t+1} = \bar{q}_1^t,\ \underline{q}_1^{t+1} = q_1(\bar{q}_2^t), \bar{q}_2^{t+1} = \bar{q}_2^t \text{ для четных } t \tag{1.24}$$

и

$$\underline{q}_1^{t+1} = \underline{q}_1^t,\ \bar{q}_2^{t+1} = q_2(\underline{q}_1^t),\ \underline{q}_2^{t+1} = \underline{q}_2^t,\ \bar{q}_1^{t+1} = q_1(\underline{q}_2^t) \text{ для нечетных } t, \tag{1.25}$$

при начальных элементах $\underline{q}_1^0 = \underline{q}_2^0 = 0$, $\bar{q}_1^0 = q_1'$ и $\bar{q}_2^0 = q_2'$. Заметим, что для $i = 1, 2$, $\underline{q}_i^t \le \underline{q}_i^{t+1}$, $\bar{q}_i^t \ge \bar{q}_i^{t+1}$ для всех $t \ge 0$. При этом можно показать, что последовательности $\underline{q}_i^t$ и $\bar{q}_i^t$ сходятся к q_i^*. Получается результат, аналогичный Лемме 4. Для каждой фирмы $i = 1, 2$, существует единственная стратегия — q_i^* — которая содержится во всех S_i^t. Отличие от конечной игры состоит в том, что схождение множеств стратегий к q_i^* происходит только в пределе, в то время как для конечной игры, множество S^∞ достигается за конечное число итераций.

Выборы — несколько кандидатов

Вернемся к задаче голосования, описанному на странице 9. Нахождение равновесия значительно усложняется, если кандидатов три или больше. Предположим, что на должность претендуют всего K кандидатов. При определении победителя действует правило простого большинства: кандидат, набравший большинство голосов, объявляется победителем. Если несколько кандидатов набрали максимальное число голосов, то каждый из этих кандидатов с равной вероятностью объявляется победителем. Каким условиям должны отвечать равновесные стратегии? Рассмотрим избирателя i. Пусть $D_1^i, \ldots, D_K^i$ — число голосов всех избирателей, за исключением i, за кандидатов $1, \ldots, K$. Пусть $M^i = \max\{D_1^i, \ldots, D_K^i\}$, $K_1^i = \{k : |D_k^i| = M^i\}$, $K_2^i = \{k : |D_k^i| = M^i - 1\}$. То есть M^i — это максимальное число голосов, отданное за какого-то кандидата, K_1^i — все кандидаты, которые набирают это число голосов, K_2^i — все кандидаты, набирающие на голос меньше (это множество может быть пустым). Избиратель i может повлиять на исход выборов в двух случаях. Во-первых, если K_1^i содержит не менее двух кандидатов и если i голосует за кандидата $k_1 \in K_1$, то кандидат k_1 побеждает с вероятностью 1. Во-вторых, если множество K_2^i

не пустое, и избиратель i голосует за кандидата $k_2 \in K_2^i$, то кандидат k_2 побеждает с вероятностью $\frac{1}{|K_1^i+1|}$. Если K_1^i состоит из одного элемента и K_2^i пусто, то *любое* действие избирателя i будет равновесным! Например, если избирателей больше трех и все голосуют за одного кандидата, то ни один их них не может изменить свой выигрыш, проголосовав за другого. Это свидетельствует о том, что на выборах — особенно на выборах, в которых участвуют несколько кандидатов или партий — очень важную роль играют прогнозы, то есть информация, которая доступна избирателю о стратегиях, которые могут быть выбраны другими избирателями.

Недопроизводство общественных благ

К числу общественных благ относятся бесплатные дороги, свет, произведенный уличными фонарями, национальная оборона, радиоэфир, знания, и правовая система, обеспечивающая всем гражданам низкие издержки при заключении контрактов. Все эти вещи отличают два свойства. Во-первых, они являеются *неисключаемыми*: никто не может запретить мне пользоваться светом от уличного фонаря; в то же самое время, для того, чтобы пользоваться автомобилем, мне необходимо сначала его купить. Во-вторых, общественные блага отвечают свойству *неистощаемости*. Автомобилем не могут одновременно пользоваться несколько человек; в то время как сразу несколько человек могут, не мешая друг другу, слушать одну и ту же радиопередачу; затраты на национальную оборону не зависят от числа граждан, которых необходимо оборонять. Иными словами, предельные издержки распространения общественного блага на еще одного потребителя равны нулю.

Рассмотрим такую задачу производства общественных благ. В Австралии по соседству находятся два фермерских участка. Каждый фермер может поставить на своем участке пугало для отпугивания ворон и кроликов, грозящих уничтожить его посевы. Урожайность каждого участка зависит наличия пугала как на этом, так и на соседнем участке. Пусть a — прибыль каждого фермера, если пугала стоят на обоих участках, $b < a$ — прибыль, если пугало стоит только на одном участке, 0 — прибыль, если пугал нет. Если стоимость установки пугала равна 100, то между фермерами может возникруть такая игра:

		Фермер 1	
		Ставить	Не ставить
Фермер 2	Ставить	$a-100, a-100$	$b-100, b$
	Не ставить	$b, b-100$	$0, 0$

При $b < 100$ и $a < b + 100$ мы имеем игру, аналогичную дилемме заключенного. Доминирующие стратегия у каждого фермера — не ставить пугало, но результат Парето-неэффективен: если оба фермера поставят пугала, то обоим будет лучше. Пугала в этой игре являются общественными благами, так как от того, что один из фермеров поставил пугало, выигрывает и другой. Другому фермеру может захотеть стать «зайцем» — бесплатно воспользоваться общественным благом, производимым соседом, не производя самому.[4]

Проблемы неэффективности равновесия не существовало бы, если фермеры могли принимать решения коллективно — то есть если можно было бы заставить каждого фермера не отклоняться от принятого коллективного решения ставить пугало. Существование общественных благ, требующих решения проблемы коллективных действий, есть одна из основных причин возникновения государств. Значительная часть государственных бюджетов большинства стран тратится именно на производство общественных благ (Мюллер, гл. 2-3; Хиндриск и Майлс, гл.

[4] Величина b отражает технологию производства общественных благ. Если $b = a$, то наличие пугала хотя бы на одном участке гарантирует урожай на обоих участках. Возможная аналогия — производстов знаний, например, если две фирмы разрабатывают новую технологию производства виджетов, или если два ученых независимо друг от друга доказывают одну и ту же теорему. Если $b = \frac{a}{2}$, то мы говорим о линейной технологии. Наконец, если $b = 0$, то мы имеем технологию «слабое звено», когда производство общественного блага невозможно без участия всех заинтересованных сторон.

5) .

1.2 Смешанные стратегии и существование равновесия

Вспомним игру «камень-ножницы-бумага». В такой игре на каждую чистую стратегию имеется своя «оборотка». Камень бьет ножницы, ножницы — бумагу. Следовательно, если я буду знать, что мой соперник собирается выбросить «ножницы», то я должен сыграть «камень». Зная это, он сыграет «бумагу», на что я должен ответить, сыграв «ножницы». Равновесия Нэша в чистых стратегиях в такой игре, очевидно, нет. Что делать игрокам? Можем ли мы как-то прогнозировать их действия? Для анализа таких игр необходимо расширить определение игры, разрешив *смешанные стратегии*.

1.2.1 Определение смешанных стратегий

Предположим теперь, что у каждого игрока есть генератор случайных чисел, которых говорит ему, какую из стратегий ему следует играть. Например, при наличии двух стратегий человек может подбрасывать монетку; в таком случае, вероятность того, что он сыграет каждую стратегию, равна 50%. Другим игрокам известена эта вероятность, однако наблюдать, как упала монета — орлом или решкой — они не могут. В этом случае мы говорим, что игрок i пользуется смешанной стратегией. Игрок теперь решает, с какой вероятностью он должен играть каждую из своих стратегий из множества S_i, которые мы будем теперь называть *чистыми стратегиями*. Заметим сразу, что чистая стратегия — это частный случай смешанной стратегии, в котором один из элементов S_i играется с вероятностью 100%.

Как мы опишем множество смешанных стратегий игрока? Например, в игре «камень-ножницы-бумага» у каждого игрока всего три чистых стратегии. Если p_1 — вероятность, с которой играется «камень», а p_2 и p_3 — вероятности для «ножниц» и «бумаги», соответственно, то мы должны иметь $p_i \geq 0$ для $i = 1, 2, 3$ и $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Формально, множество всех (p_1, p_2, p_3), удовлетворяющих этим свойствам, называется *двумерным симплексом*. Дадим два определения.

Определение 9 Пусть N — натуральное число. Тогда *симплекс* размерностью $N - 1$ есть множество $\Delta^{N-1} \subset \mathbf{R}^N$, такое, что для всех $(p_1, \ldots, p_N) \in \Delta^{N-1}$, мы имеем $\sum_j p_j = 1$, $p_j \geqslant 0$.

Получается, что $N - 1$ — мерный симплекс описывает все возможные распределения вероятностей на множестве из N элементов. Размерность Δ^{N-1} на единицу меньше N из-за ограничения $p_1 + \cdots + p_N = 1$.

Определение 10 Пусть $G = \langle I, S, u \rangle$ — конечная игра. Назовем $\Sigma_i = \Delta^{|S_i|-1}$ множеством *смешанных стратегий* игрока i, $\Sigma = \times_{i=1}^{N} \Sigma_i$ — множеством смешанных стратегий в игре. Пусть $\Sigma_{-i} = \times_{j \neq i} \Sigma_j$. Элементы $\sigma_i \in \Sigma_i$, $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$ и $\sigma \in \Sigma$ будут называться смешанными стратегиями и профилями смешанных стратегий.

Иными словами, смешанная стратегия — это распределение вероятностей на множестве чистых стратегий. Мы предполагаем, что игрок имеет возможность предоставить выбор чистой стратегии (или действия) воле случая, но при этом контролировать вероятность, с которой реализуется та или иная чистая стратегия.

Здесь и в дальнейшем мы будем предполагать, что действия любых двух игроков являются назависимыми событими. Пусть $s = (s_1, \ldots, s_N)$ — профиль чистых стратегий, σ — профиль смешанных стратегий, в котором игрок i играет чистую стратегию s_i с вероятностью $p_{\sigma_i}(s_i)$.

Тогда вероятность того, что при профиле смешанных стратегий σ будет сыгран профиль чистых стратегий s,ем будет

$$p_\sigma(s) = \prod_{i=1}^{N} p_{\sigma_i}(s_i), \tag{1.26}$$

а математическое ожидание выигрыша игрока i —

$$u_i(\sigma) = u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s \in S} p_\sigma(s) u_i(s). \tag{1.27}$$

Теперь мы можем определить игру, в которой игроки могут пользоваться смешанными стратегиями.

Определение 11 Пусть $G = \langle I, S, u\rangle$ — конечная игра в нормальной форме. Назовем игру $\langle I, \Sigma, u\rangle$ *смешанным расширением* игры G. Тогда равновесие в смешанных стратегиях в игре G — это равновесие Нэша в ее смешанном расширении.

В нашем определении, u обозначает как функцию полезности в игре как с чистыми стратегиями, так и со смешанными стратегиями. В этом нет противоречия, так как чистая стратегия является частным случаем смешанной стратегии.

1.2.2 Равновесие в смешанных стратегиях

Существует такой результат:

Теорема 1 *(Нэш, 1950). Пусть G — конечная игра. Тогда в игре G существует равновесие в смешанных стратегиях.*

Эта теорема — один из наиболее важных результатов в современной науке об обществе. Фактически он означает, что равновесие Нэша является универсальным инструментом, который можно использовать для анализа любого игрового взаимодействия с конечным числом игроков и стратегий.[5]

Доказательство этой теоремы содержится в Приложении. Рассмотрим, какие равновесия в смешанных стратегиях существуют для различных игр 2×2.

Пример нахождения смешанного равновесия в игре типа «инспекция»

Финал Уимблдонского турнира, Роджер Федерер против Рафаэля Надаля. Федерер стоит на задней линии и собирается отбить мяч, посланный ему Надалем. Федерер решает, в какую сторону ему отбить мяч: направо вдоль края корта (`DL`) или налево наискосок (`CC`). Одновременно, Надаль пытается угадать направление, в котором полетит мяч. Он также может побежать отбивать подачу прямо, вдоль края корта (`DL`) или наискосок налево (`CC`, смотри рисунок 1.5(a)).

Оба очень хорошо играют в теннис. Пока Федерер не ударит, Надаль не побежит отбивать: иначе Федерер ударит в другую сторону, и выиграет гейм. Но если Надаль будет ждать, пока Федерер нанесет удар, то он тоже проиграет, так как удары в профессиональном теннисе очень сильные. Таким образом, оба игрока одновременно решают, что им делать. При этом множества чистых стратегий у Федерера и у Надаля одинаковы — $S_1 = S_2 = \{\mathtt{CC}, \mathtt{DL}\}$. Выигрыш Федерера равен вероятности того, что он выиграет розыгрыш, выигрыш Надаля равен вероятности того,

[5] Мы предположили, что игроки разыгрывают чистые стратегии независимо друг от друга. Если ослабить это предположение, то можно сформулировать так называемое *коррелированное равновесие*, частным случаем которого является равновесие Нэша.

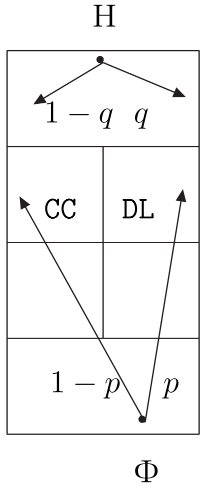


Рис. 1.4: Игра в теннис

что этого не произойдет. Следовательно, сумма полезностей обоих игроков равна нулю вне зависимости от профиля стратегий. Записывая матрицу выигрышей в такой игре, для каждого профиля стратегий достаточно указать только полезность первого игрока. В нашем случае, матрица будет такой:

		Надаль	
		DL	CC
Федерер	DL	0.5	0.8
	CC	0.9	0.2

Если Надаль правильно угадывает направление удара, то он имеет хорошие шансы отбить мяч — очень хорошие, если Федерер бьет наискосок. Но если Надаль не угадывает, то вероятность того, что он сумеет «догнать» мяч и спасти игру, невелика. Эта игра не имеет равновесий в чистых стратегиях и принадлежит к тому же классу игр, как и игра контролера с зайцем.

Найдем равновесие в смешанных стратегиях. Пусть $p \in [0,1]$ — смешанная стратегия Федерера, то есть вероятность того, что он ударит вдоль края корта (DL). Аналогично, обозначим за $q \in [0,1]$ вероятность того, что Надаль побежит отбивать в этом же направлении. Найдем математическое ожидание выигрышей обоих игроков:

$$u_F(p,q) = .5pq + .8p(1-q) + .9(1-p)q + .2(1-p)(1-q) \tag{1.28}$$

$$u_N(p,q) = -.5pq - .8p(1-q) - .9(1-p)q - .2(1-p)(1-q). \tag{1.29}$$

Найдем равновесие в этой игре. Предположим, что q известно Федереру. Тогда его максимизационная задача будет

$$\max_{p\in[0,1]} u_F(p,q), \tag{1.30}$$

а ее решение —

$$p(q) = \begin{cases} 1, & q < 0.6 \\ [0,1], & q = 0.6 \\ 0, & q > 0.6 \end{cases} \tag{1.31}$$

Аналогично для Надаля, задача

$$\max_{q\in[0,1]} u_N(p,q), \tag{1.32}$$

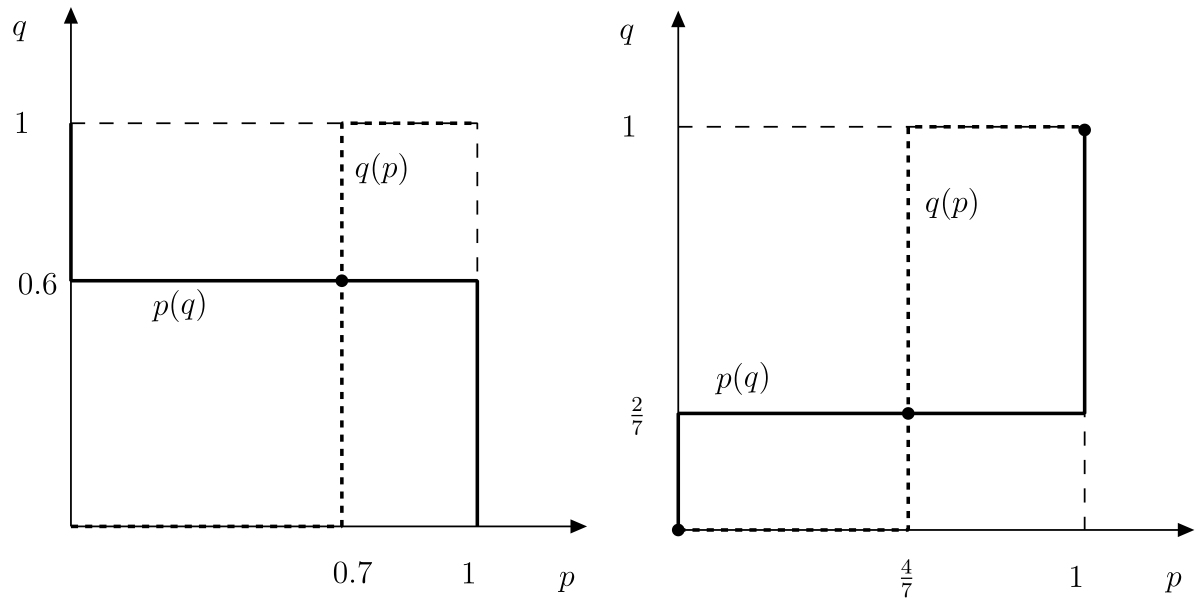
имеет решение

$$q(p) = \begin{cases} 1, & p > 0.7 \\ [0,1], & p = 0.7 \\ 0, & p < 0.7 \end{cases} \tag{1.33}$$

Функции $p(q)$ и $q(p)$ являются функциями реакции двух игроков. Равновесие Нэша будет являться решением системы

$$\begin{aligned} p(q) &= q \\ q(p) &= p. \end{aligned} \tag{1.34}$$

На рисунке 1.5(a) изображены графики функций реакции обоих игроков. Эти графики имеют единственную точку пересечения — $(p^*, q^*) = (0.7, 0.6)$. Это и есть равновесие Нэша в смешанных стратегиях. Таким образом, Федерер в равновесии будет играть `DL` с вероятностью 0.7 и `CC` с вероятностью 0.3, а Надаль — `DL` с вероятностью 0.6 и `CC` с вероятностью 0.4.



(a) Игра в теннис (b) Битва полов

Рис. 1.5: Функции реакций для различных игр 2×2.

Равновесие в смешанных стратегиях в игре «семейный спор»

Муж и жена решают, как им следует провести вечер. Обсуждаются два варианта: футбол и балет. Мужу больше нравится футбол, жене — балет. При этом они хотят быть вместе: если они идут в разные месте, то вечер пропадает. Матрица выигрышей в нашей игре будет

		Жена	
		балет	футбол
Муж	балет	3,5	0,0
	футбол	0,0	4,2

Этот классический пример, называющийся «семейный спор», является координационной игрой: сразу видно, что существуют два равновесия в чистых стратегиях. Но существуют ли равновесия в смешанных стратегиях? Пусть p и q — вероятности, с которыми муж и жена выбирают балет. Тогда их выигрыши будут

$$\begin{aligned} u_1(p,q) &= 3pq + 4(1-p)(1-q), \\ u_2(p,q) &= 5pq + 2(1-p)(1-q), \end{aligned} \tag{1.35}$$

а их функции реакции —

$$p(q) = \begin{cases} 1, & q > \frac{4}{7} \\ [0,1], & q = \frac{4}{7} \\ 0, & q < \frac{4}{7} \end{cases} \quad q(p) = \begin{cases} 1, & p > \frac{2}{7} \\ [0,1], & p = \frac{2}{7} \\ 0, & p < \frac{2}{7} \end{cases} \tag{1.36}$$

У этой игры три равновесия: два в чистых стратегиях ($p = 1, q = 1$ и $p = 0, q = 0$) и одно равновесие в смешанных стратегиях: $p = \frac{2}{7}, q = \frac{4}{7}$ (рисунок 1.5(b)). Отметим, что небольшие изменения матрицы выигрышей не влияют на существование равновесий в чистых стратегиях. В частности, профиль стратегий (балет,балет) перестанет быть равновесием, если выигрыш мужа при этом профиле стратегий будет меньше нуля. В общем случае, существование равновесия в чистых стратегиях определяется условиями типа неравенств (см. задачу 3); для того, чтобы (балет, балет) являлся равновесием в чистых стратегиях, нам необходимо и достаточно того, чтобы выигрыш мужа был выше, чем при (футбол, балет), и выигрыш жены был выше, чем при (балет, футбол). В то же время для того, чтобы найти равновесие в смешанных стратегиях, нам необходимо знать точные значения полезностей обоих игроков.

Важные свойства равновесия.

В смешанном расширении конечной игры, выигрыш каждого игрока является линейной функцией от вероятности сыграть ту или иную стратегию. Благодаря этому факту, равновесие в смешанных стратегиях обладает свойствами, которые могут пригодиться при нахождении самого равновесия в некоторых играх.

Во-первых, игроку безразлично, какую из своих чистых стратегий играть в равновесии:

Лемма 6 Пусть G — игра, σ^* — равновесие Нэша в смешанных стратегиях. Пусть $S_i^{\sigma_i^*} \subseteq S_i$ — *носитель* стратегии σ_i^*, то есть множество всех чистых стратегий, играемых с положительной вероятностью при смешанной стратегии σ_i^*. Тогда для всех $s_i \in S_i^{\sigma_i^*}$, мы имеем

$$u_i(s_i, \sigma_{-i}^*) = u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*), \tag{1.37}$$

а для всех $s_i' \notin S_i^{\sigma_i^*}$,

$$u_i(s_i', \sigma_{-i}^*) < u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*). \tag{1.38}$$

Действительно, допустим, что это не так. Пусть σ^* — равновесие в смешанных стратегиях, причем стратегии $s_1, s_1' \in S_i$ играются с вероятностями $p > 0$, $p' > 0$. Пусть $u_i(s_1, \sigma_{-i}^*) > u_i(s_1', \sigma_{-i}^*)$. Легко проверить, что стратегия σ_i', которая отличается от σ_i^* тем, что s_1 играется с вероятностью $p + p'$, а s_1' — с вероятностью 0, дает выигрыш, больший на $p'(u_i(s_1, \sigma_{-i}^*) > u_i(s_1', \sigma_{-i}^*))$. Это противоречит предположению о том, что σ^* — равновесие Нэша.

Во-вторых, при переходе от игры к ее смешанному расширению равновесия в чистых стратегиях сохраняются:

Лемма 7 Пусть в конечной игре G существует равновесие $s^* = (s_1^*, \ldots, s_N^*)$. Тогда в смешанном расширении игры G существует равновесие, в котором игрок i играет стратегию s_i^* с вероятностью 1.

В задаче 7 предлагается доказать это утверждение.

Игра «выбор чисел».

Каждый из двух игроков выбирает целое число от 1 до K. При совпадении чисел, игрок 1 выигрывает у игрока 2 один рубль. Если числа не совпадают, то выигрыш каждого игрока равен нулю. Найдем равновесие в смешанных стратегиях (сразу заметив, что чистых равновесий в этой игре нет). Пусть $\sigma_1 = (p_1, \ldots, p_K)$ — смешанная стратегия игрока 1, где p_l — вероятность того, что игрок 1 назовет число $1 \leq l \leq K$. Аналогично определим $\sigma_2 = (q_1, \ldots, q_K)$. Выигрыши игроков в зависимости от их смешанных стратегий будут

$$U_1(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{l=1}^{K} p_l q_l \quad (1.39)$$

$$U_2(\sigma_1, \sigma_2) = -U_1(\sigma_1, \sigma_2). \quad (1.40)$$

Найдем функцию наилучшего отклика для игрока 1. Если $q_1 = \cdots = q_K$, то игроку 1 все равно, какую стратегию играть. Пусть для каких-то l, k, $q_l > q_k$. Тогда любая стратегия p, где $p_k > 0$, строго доминируется стратегией p', где $p'_l = p_k + p_l$, $p'_k = 0$, $p'_j = p_j$ для $j \neq k, l$. То есть функция реакции игрока 1 будет

$$p(q) = \{p | \sum p_k = 1, p_k \geq 0, p_k = 0 \text{ если } q_k < \max_j q_j\}. \quad (1.41)$$

Аналогично, игрок 2 назовет число l с положительной вероятностью только если игрок 2 играет это число с минимальной вероятностью:

$$q(p) = \{q | \sum q_k = 1, q_k \geq 0, q_k = 0 \text{ если } q_k > \min_j p_j\}. \quad (1.42)$$

У системы $p \in p(q)$, $q \in q(p)$ есть единственное решение — $p = q = (\frac{1}{K}, \ldots, \frac{1}{K})$. То есть существует единственное равновесие в смешанных стратегиях, в котором оба игрока с равными вероятностями выбирают каждое из чисел.

1.2.3 Интерпретация смешанных стратегий и равновесия

Насколько поведение индивидов в реальной жизни соответствует нашим представлениям о смешанных стратегиях? Действительно ли в конфликтных ситуациях люди принимают случайные решения, чтобы не дать противнику возможность воспользоваться своим прогнозом относительно принимаемого решения? Бересфорд и Пестон (1955) приводят пример использования смешанной стратегии одним британским офицером. Во время колониальной войны в Малайзии в конце 1940х годов, британские войска несли потери от партизанских атак на их сухопутные конвои с продовольствием и оружием. Партизаны могли либо устроить конвою крупную засаду, либо подвергнуть его нескольким мелким снайперским атакам с целью деморализации водителей, которых британцы набирали из местного населения. Соответственно, британцы могли либо сосредоточить свои силы посередине конвоя (что было более эффективно при отражении крупных атак), либо рассредоточиться (что было более эффективно в борьбе против снайперов). Каждый раз перед отправкой конвоя командир тянул жребий, с вероятностью 50% выбирая каждую из двух возможных тактик.[6] Хотя британский офицер не знал теории игр, он понимал необходимость быть непредсказуемым, чтобы не дать партизанам возможность прогнозировать действия британцев, и оптимально реагировать на них.

Случаи, когда использование смешанных стратегий было задокументировано, довольно редки. Можно ли доказать использование смешанных стратегий основываясь на наблюдениях за стратегиями, выбираемыми игроками — а не за механизмом принятия решения, как это было в случае, описанном выше? Для этого необходим большой объем наблюдений. Нужно, чтобы действия двух или более игроков наблюдались, в похожих условиях, много раз подряд. Как правило, существует два источника для таких данных.

Многократные игровые взаимодействия наблюдаются в ходе экономических экспериментов. Подопытные добровольцы много раз подряд играют в одну и ту же игру в тщательно контролируемых условиях; на основе стратегий, выбираемых субъектами эксперимента, можно сделать

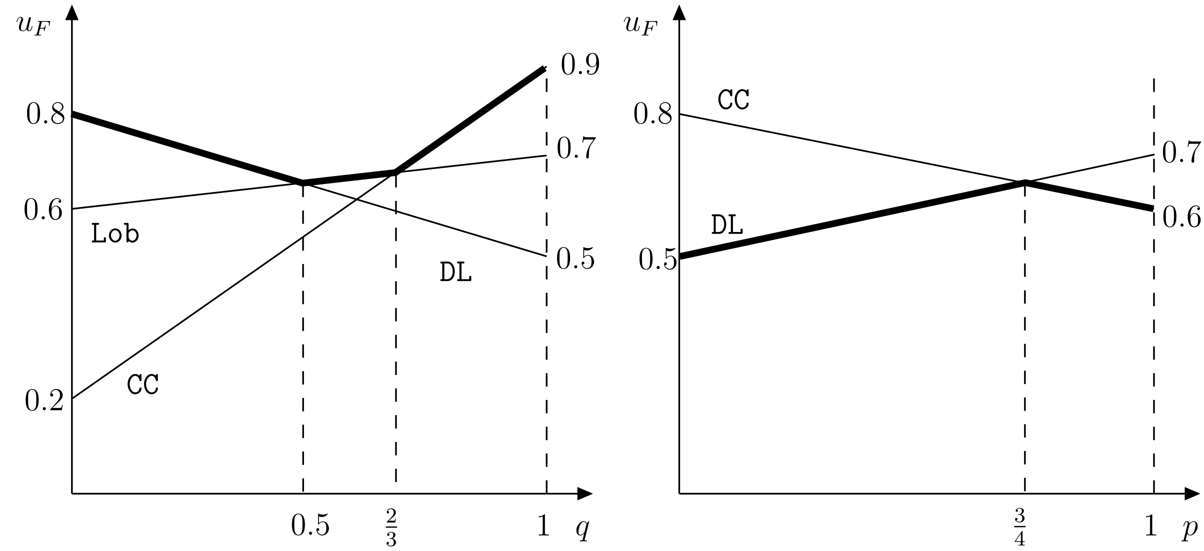
[6] Эта история также приводится в Диксит и Скит (2004).

вывод о виде стратегий, которые они используют. Полфри и Арагонес (2004) исследовали поведение субъектов в игре, моделирующей поведение политиков, претендующих на президентский пост на демократических выборах. У каждого из двух игроков было по три стратегии: предложить избирателям центристскую, левую, или правую политическую программу (задача 15). Игра не была симметричной: каждый из кандидатов являлся либо «сильным», либо «слабым». Если оба кандидата выбирали одинаковые стратегии, то слабый кандидат проигрывал выборы вчистую. Если стратегии у кандидатов были разные, то слабый кандидат мог проиграть с меньшим отставанием (что подразумевало больший выигрыш) или даже выиграть выборы (если он занимал центристскую позицию, а сильный кандидат — одну из двух крайних). В этой игре, как и в игре между зайцем и контролером, не существует равновесий в чистых стратегиях; оставалось выяснить, будут ли субъекты эксперимента действительно играть смешанные стратегии.

Субъектами эксперимента являлись студенты Калифорнийского технологического института и Института экономического анализа в Барселоне; участие в эксперименте оплачивалось наличными. В каждой экспериментальной сессии участвовало от 8 до 16 человек, поделенных на две группы — сильные и слабые кандидаты. В каждом из первых 50 раундов каждый слабый кандидат проводил одну игру с выбранным наугад (и неизвестным ему) сильным кандидатом. Далее сильные и слабые кандидаты менялись местами, и разыгрывалось еще 50 раундов. В конце сессии каждый из субъектов получал денежные выигрыш, равный сумме полезностей, полученных им в 100 раундах (для американских ВУЗов, средний выигрыш от участия в экономических экспериментах составляет порядка 25 долларов). Эксперимент показал, что игроки действительно используют смешанные стратегии; при этом, однако, частота использования различных чистых стратегий не всегда была равна равновесной, в особенности для слабых кандидатов (которые чаще, чем было предсказано равновесием Нэша, выбирали центристскую стратегию).

Вторым источником данных является спортивная статистика. Уокер и Вудерс (2002) исследовали игру теннисистов в 10 матчах — финалах турниров Большого шлема. Насколько поведение элитных игроков, среди прочих, Андре Агасси, Пита Сампраса, Бьерна Борга, соответствует нашему представлению о равновесных стратегиях? Авторы рассмотрели, как вероятность выиграть подачу в отдельно взятом матче зависит от направления подачи: под правую руку или под левую. Если гипотеза о равновесном поведении подающего и принимающего игроков верна, то вероятность выиграть должна быть одинаковой для обоих направлений подачи. К такому выводу и пришли авторы. Чиапоре, Левитт и Гросеклоуз (2002) провели анализ поведения голкиперов и форвардов во время исполнения пенальти. Большинство голкиперов не успевает реагировать на направление полета мяча; как и при теннисной подаче, голкипер вынужден угадывать, в какой угол (или, может быть, в центр ворот) полетит мяч. В этой работе использовались иные статистические методы, ибо в теннисе один матч между двумя игроками создает достаточно наблюдений для статистически значимых выводов, во время как в футболе количество взаимодействий между каждой парой форвард - голкипером весьма невелико, даже на протяжении нескольких сезонов. Тем не менее авторы показали, что стратегии и вратарей, и форвардов близки к равновесным.

Отмечено, что и в спортивных соревнованиях, и в экспериментах игроки скорее чередуют стратегии, нежели каждый раз делают действительно случайный выбор, независимый от сделанного в предыдущий раз. Например, анализ теннисных подач показал, что если игрок в предыдущий раз подавал налево, то в следующий раз он с большей вероятностью подаст направо. Однако их противники тоже ошибались, воспринимая это как случайное поведение. Они не эксплуатировали тот факт, что направление каждой подачи отрицательно коррелирует с направлением предыдущей подачи: им самим казалось, что никакой корреляции нет.



(a) Для смешанной стратегии Надаля q и разных чистых стратегиях Федерера

(b) Для смешанной стратегии Федерера p и разных чистых стратегий Надаля

Рис. 1.6: Нахождение равновесия при трех чистых стратегиях у Федерера.

1.2.4 Смешанное равновесие в антагонистической игре $2 \times M$

Важный подкласс игр составляют игры, в которых сумма выигрышей игроков одинакова, вне зависимости от профиля стратегий, выбираемого игроками.

Определение 12 Игра $G = \langle I, S, u \rangle$ является *игрой с постоянной суммой*, если

$$\sum_{i=1}^{N} u_i(s) = c \tag{1.43}$$

для некоторого c и всех $s \in S$. Если $N = 2$, то такая игра называется *антагонистической.*

Такие игры часто также называют играми с нулевой суммой. В данном случае название — это вопрос вкуса; примерами игр с нулевой суммой являются салонные игры, игры типа «инспекция», предвыборная борьба, заключение опционных контрактов на фондовом рынке. Существование равновесия и многие другие результаты для этого класса игр были получены великим математиком Джоном фон Нейманом (см. книгу фон Неймана и Моргенштерна, 1970).

Рассмотрим пример с игрой в теннис. Пусть в арсенале у Федерера есть еще один удар: `Lob` («свеча»). Матрица игры теперь такая:

		Надаль	
		`DL`	`CC`
Федерер	`DL`	0.5	0.8
	`CC`	0.9	0.2
	`Lob`	0.7	0.6

На рисунке 1.6(a) показано, как выигрыш Федерера зависит от смешанной стратегии Надаля q для каждой из трех чистых стратегий Федерера, где q, как и раньше, есть вероятность того, что Надаль сыграет `DL`.

Жирная ломаная линия показывает максимальную полезность, которую может получить Федерер, в зависимости от стратегии Надаля q. По этому графику можно построить функцию реакции Федерера. Если $q < 0.5$, то Федерер играет `DL`, если $q = 0.5$ — то любую смесь `DL` и `Lob`, если $q \in (0.5, \frac{2}{3})$, то `Lob`, если $q = \frac{2}{3}$ — то смесь `Lob` и `CC`, если $q > \frac{2}{3}$ — то `CC`.

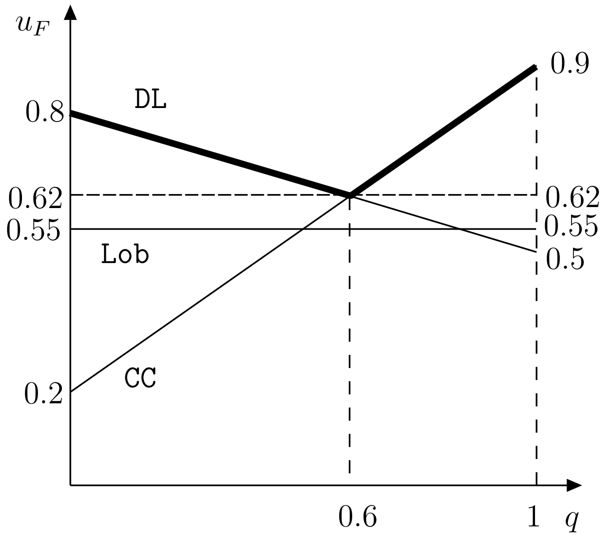


Рис. 1.7: Смешанная стратегия доминирует чистую стратегию

Так как эта игра является антагонистической, то в равновесии стратегия Надаля должна минимизировать максимальную полезность Федерера. Действительно, предположим, что в равновесии $q \neq 0.5$. Тогда (предполагая равновесие) выигрыш Федерера будет максимальным для данного q. Но это означает, что Надаль может увеличить свой выигрыш, выбрав стратегию $q^* = 0.5$. Таким образом, $q^* = 0.5$. Нам остается найти пропорции, в которых Федерер играет `DL` и `Lob`. На рисунке 1.6(b) показан выигрыш Федерера и Надаля в зависимости от p — вероятности, с которой Федерер играет `Lob`, при разных чистых стратегиях Надаля. Жирная линия — минимальный выигрыш Федерера (и, соответственно, максимальный выигрыш Надаля) в зависимости от p. Из графика видно, что $p = \frac{3}{4}$.

Давайте немного изменим выигрыши игроков:

		Надаль	
		DL	CC
Федерер	DL	0.5	0.8
	CC	0.9	0.2
	Lob	0.55	0.55

Выигрыш Федерера в зависимости от q показан на рисунке 1.7.

Как мы видим, Федерер не станет использовать стратегию Lob ни при каких q. Стратегия Lob не доминируется ни одной их двух других чистых стратегий; однако она доминируется некоторыми смешанными стратегиями — например, смесью из 70% `DL` и 30% `CC`, которая дает Федереру ожидаемый выигрыш 0.62 вне зависимости от стратегии Надаля. Поэтому мы поступаем с ней, как и с любой другой доминируемой стратегией — вычеркиваем. Она не будет играться ни в одном равновесии, чистом или смешанном (см. задачу 19).

1.3 Непрерывные игры

Теорема о существовании равновесия в смешанных стратегиях была доказана для конечных игр: мы предполагали, что у каждого игрока конечное число стратегий. Во многих играх, напротив, удобно считать, что множество стратегий не является конечным или даже счетным. Например, в дуополии Курно стратегия каждой из двух фирм — какое-то неотрицательное действительное число. Это предположение облегчает нам анализ задачи, так как (предполагая дифференцируемость фунукций полезности) мы можем находить равновесия, анализируя локальные максимумы функций полезностей игроков. Дуополия Курно соответствует следующему определению:

Определение 13 Игра $G = \langle I, S, U \rangle$ является непрерывной игрой, если для всех i, множество стратегий S_i является выпуклым подмножеством конечномерного Евклидового пространства $\mathbb{R}^{d_i}$, а функция полезности $u_i(s)$ является непрерывной по s.

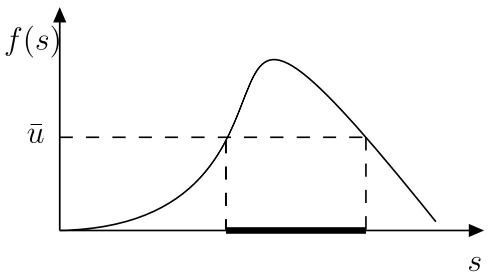
1.3.1 Теоремы о существовании равновесия

Можем ли мы что-нибудь сказать о существовании равновесий в чистых и смешанных стратегиях в таких играх? Существуют несколько теорем, которые обозначают необходимые условия существования равновесий в непрерывных играх. Определим такое свойство функций:

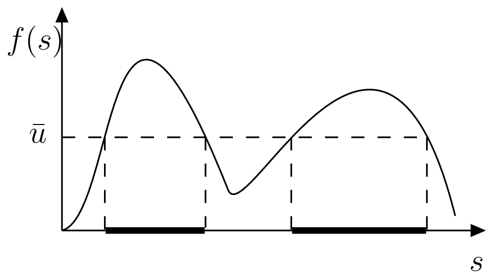
Определение 14 *Пусть X — подмножество конечномерного Евклидова пространства. Функция $u : X \to \mathbb{R}$ является квазивогнутой если для всех $\bar{u}$, множество $\{x|u(x) \geq \bar{u}\}$ является выпуклым.*

Лекго показать, что каждая вогнутая функция является квазивогнутой, но не наоборот. Также верно то, что каждая монотонная функция одной переменной является квазивогнутой (см. задачу 8).

Примеры квазивогнутой и не квазивогнутой финкций приведены на рисунке 1.8.



(a) Квазивогнутая функция



(b) Не квазивогнутая функция

Рис. 1.8: Примеры квазивогнутости и ее отсутствия.

На рисунке 1.8(a) функция удовлетворяет условиям: для данного $\bar{u}$ (как и для любого другого) множество $\{s|u(s) \geq \bar{u}\}$ (показанное на рисунке) является выпуклым. На рисунке 1.8(b) условия квазивогнутости нарушаются: для данного $\bar{u}$ множество $\{s|u(s) \geq \bar{u}\}$ является объединением двух отрезков — то есть не выпуклым.

На свойство квазивогнутости опирается следующая теорема, доказанная Гликсбергом (1952):

Теорема 2 Рассмотрим непрерывную игру G, в которой множества стратегий S_i являются компактными. Предположим, что для каждого игрока i функция полезности $u_i(s_i, s_{-i})$ является квази-вогнутой по s_i для всех $s_{-i} \in S_{-i}$. Тогда в игре $\langle I, S, u \rangle$ существует равновесие Нэша в чистых стратегиях.

Доказательство этой теоремы похоже на доказательство теоремы Нэша: мы показываем, что точечно-множественное отображение, построенное из функций реакции игроков, удовлетворяет условиям теоремы Какутани и имеет непрерывную точку. Более того, теорема о существовании смешанного равновесия в конечных играх является частным случаем этой теоремы. Действительно, смешанное расширение любой конечной игры является непрерывной игрой, удовлетворяющей условиям Теоремы 2.

Квазивогнутость и непрерывность функций полезности является условиями, гарантирующими непрерывность функций реакции игроков. Посмотрим, что произойдет, если одно из этих условий будет нарушено.

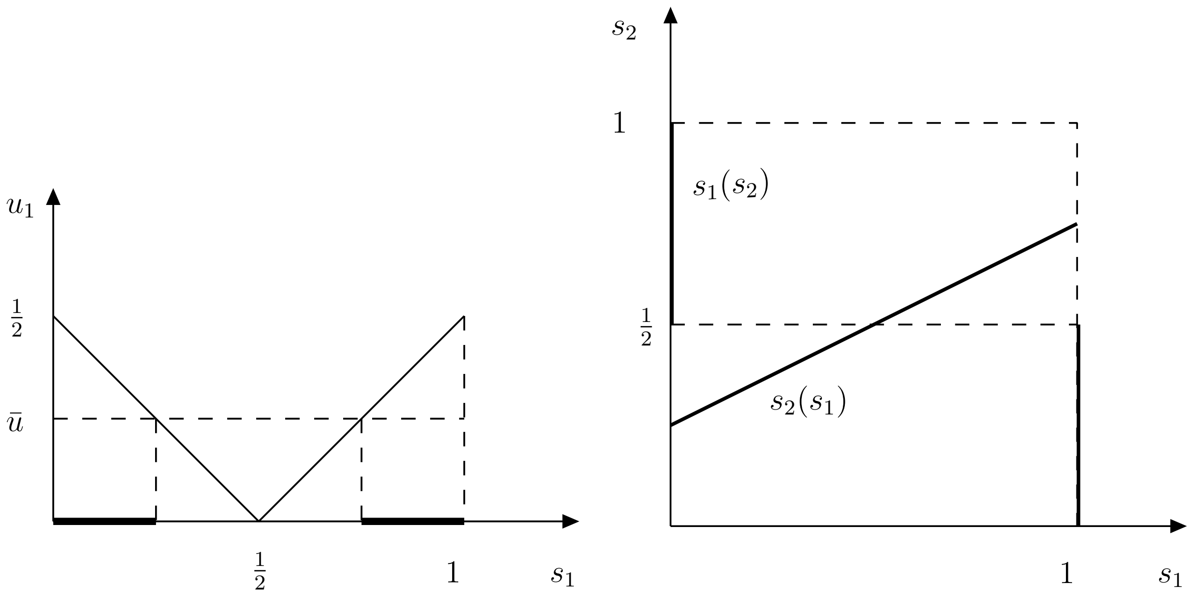
Пример.

Пусть $S_1 = S_2 = [0, 1]$,

$$\begin{aligned} u_1(s_1, s_2) &= \max\{s_2 - s_1, s_1 - s_2\} \\ u_2(s_1, s_2) &= -s_2^2 + \left(\frac{1}{2} + s_1\right) s_2. \end{aligned} \tag{1.44}$$

Обе функции полезности непрерывны по s_1 и s_2. Однако функция полезности первого игрока не является квазивогнутой: из рисунка 1.9(a) видно, что множество значений s_1, при которых $u_1 \geq \bar{u}$, не является выпуклым. Функция реакции первого игрока не является непрерывной:

$$s_1(s_2) = \begin{cases} 0, & s_2 > \frac{1}{2} \\ \{0, 1\}, & s_1 = \frac{1}{2}, \\ 1, & s_2 < \frac{1}{2} \end{cases} \quad s_2(s_1) = 0.25 + \frac{s_1}{2}. \tag{1.45}$$



(a) Функция полезности игрока 1 не является квазивогнутой ($s_2 = \frac{1}{2}$)

(b) Функции реакции игроков не пересекаются

Рис. 1.9: Пример отсутствия равновесия в непрерывной игре.

Графики функций реакции не пересекаются (рисунок 1.9(b)), следовательно, равновесия в чистых стратегиях не существует.

Можем ли мы рассчитывать на существование равновесия Нэша в смешанных стратегиях в бесконечных играх? Оказывается, что не всегда:

Теорема 3 Рассмотрим игру, в которой множества стратегий S_i являются выпуклыми и компактными подмножествами конечномерных Евклидовых пространств $\mathbb{R}^{d_i}$. Предположим, что для каждого игрока i функция полезности $u_i(s_i, s_{-i})$ является непрерывной по $s = (s_i, s_{-i})$. Тогда в игре $\langle I, S, u \rangle$ существует равновесие Нэша в смешанных стратегиях.

Доказательство этой теоремы технически более сложно, чем доказательства предыдущей теоремы и теоремы Нэша, ибо множество смешанных стратегий в непрерывной игре является бесконечномерным. Здесь необходим более сильный результат, чем теорема Какутани; доказательство (или даже формулировка) которого выходят за рамки этой книги. Однако можно рассуждать (весьма приблизительно), что нарушение непрерывности функций полезности по чистым стратегиям ведет к нарушению непрерывности по смешанным стратегиям.

1.3.2 Примеры

Борьба за ренту

Две фирмы соревнуются за право построить магазин на центральной площади города. Для того, чтобы получить контракт, необходимо потратить некоторую сумму денег на лоббирование органов власти. Успех не гарантирован — но чем больше денег будет потрачено каждой из фирм, тем больше вероятность того, что именно эта фирма получит контракт. Пусть прибыль, которую может приносить магазин, равна R. Предположим, что вероятность того, что фирма $i = 1, 2$ получит контракт, равна

$$P_i = \frac{r_i^\gamma}{r_1^\gamma + r_2^\gamma}, \tag{1.46}$$

где r_i — количество средств, потраченное фирмой i, $\gamma \geq 0$ — параметр, отражающий эффективность лоббирования. Чем выше γ, тем больше преимущество фирмы, затратившей на лоббирование больше средств. Действительно, рассмотрим два крайних случая. Если $\gamma = 0$, то вероятность получить контракт всегда равна $\frac{1}{2}$, вне зависимости от объема средств, потраченных на лоббирование. Если же $\gamma = \infty$, то контракт с вероятностью 1 достается фирме, которая затратила больше средств на лоббирование.

Получается, что функция полезности фирмы $i = 1, 2$ будет

$$u_i(r_1, r_2) = R\frac{r_i^\gamma}{r_1^\gamma + r_2^\gamma} - r_i, \tag{1.47}$$

где $r_i \in [0, \infty)$ — стратегия фирмы i.

В более общем случае мы рассматриваем задачу состязательного распределения ресурса, в которой вероятность приобретения ресурса одной из сторон является функцией от усилий, затраченных в борьбе за этот ресурс. Большой объем литературы в области моделирования состязаний восходит к известным работам Таллока (1967), Крюгер (1974) и Познера (1975). Лоббирование, коррупция, патентные гонки, спротивные состязания и войны — все это является примером состязательных процессов. В таких играх, вероятность успеха возрастает с увеличением затрат, однако сами затраты являются невозвратными, и не возмещаются игроку в случае проигрыша.

Функции полезности являются дифференцируемыми по r_1 и r_2. Соответственно, если (r_1, r_2) — равновесие, то в нем должны выполняться необходимые условия первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial r_i} &= 0 \text{ при } r_i > 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial r_i} &\leq 0 \text{ при } r_i = 0 \end{aligned} \tag{1.48}$$

для $i = 1, 2$. Второе условие было записано, ибо мы рассматриваем задачу условной максимизации, при $r_i \geq 0$.

Мы имеем

$$\frac{\partial u_i}{\partial r_i} = R\frac{\gamma r_i^{\gamma-1} r_{-i}^\gamma}{(r_1^\gamma + r_2^\gamma)^2} - 1 \tag{1.49}$$

для $i = 1, 2$. Условия первого порядка дают нам единственное решение

$$r_1^* = r_2^* = \frac{\gamma R}{4}. \tag{1.50}$$

Легко проверить, что условия максимума второго порядка в этой точке будут выполнены. Однако $(r_1^*, r_2^*) = (\frac{\gamma R}{4}, \frac{\gamma R}{4})$ будет равновесием Нэша только если $\gamma \leq 2$. В обратном случае равновесия не существует, так как $u_1(r_1^*, r_2^*) = \frac{R}{2} - \frac{\gamma R}{4} < 0 = u_1(0, r_2^*)$ (при том, что $(r_1, r_2) = (\frac{\gamma R}{4}, \frac{\gamma R}{4})$ является *необходимым* условием равновесия). Если $\gamma > 0$, то (r_1^*, r_2^*) является всего лишь *локальным* равновесием — то есть в этой точке функция полезности каждого игрока имеет локальный (но не обязательно глобальный) максимум на множестве стратегий этого игрока. При этом функции полезности являются квазивогнутыми только при $\gamma \in [0, 1]$. При $\gamma \in (1, 2]$, полезности не являются квазивогнутыми (рисунок 1.10).

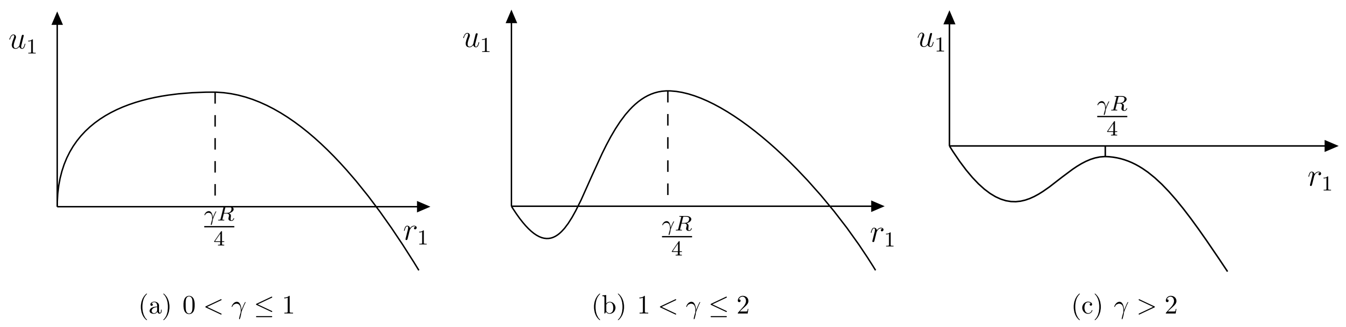


Рис. 1.10: Функция полезности игрока 1 в игре «борьба за ренту», при условии, что $r_2 = \frac{R\gamma}{4}$.

Тем не менее, равновесие существует: квазивогнутость функций полезности является достаточным (но не необходимым) условием существования равновесия.

Что же происходит? При борьбе за приз оба игрока тратят значительные ресурсы. Например при $\gamma = 1$, что соответствует обычной лотерее, общий объем затрачиваемых ресурсов будет равен половине от стоимости ресурса. Можно показать (см. задачу 24), что при увеличении числа игроков общий объем затрат на лоббирование стремится к ценности самого приза, за который ведется борьба (R в нашей модели). Также объем ресурсов, затрачиваемых на состязательную деятельность, возрастает при улучшении технологии лоббирования (величины γ). Все это — свидетельство того, что при отсутствии прозрачных механизмов распределения лицензий на ведение многих прибыльных видов экономической деятельности (импортные квоты, строительство в условиях ограниченного предложения земли и т.д.) общество несет значительные (и часто невидимые стороннему наблюдателю) потери.

Конкуренция на рынке с горизонтально дифференцированным товаром

Вот пример, восходящий к классической работе Гарольда Хотеллинга (1929). На южном морском курорте есть пляж длиной 1 километр. На пляже расположены отдыхающие. Будем считать, что отдыхающих — континуум, а их общая масса равна единице. Будем считать, что отдыхающие распределены равномерно: то есть для каждого $x \in [0, 1]$ доля отдыхающих с координатами $v \leq x$ равна x. На пляже действуют два продавца с мороженым. Стратегия каждого продавца i — координата $s_i \in [0, 1]$ расположения тележки, с которой он продает мороженое. Цена у обоих продавцов одинаковая и не зависит от их местоположения.

Предположим, что каждый покупатель в течение дня купит ровно один стакан мороженого. При этом покупатель купит морожение у того продавца, чья тележка расположена ближе. В том случае, если продавцы равноудалены от покупателя, он с равной вероятностью выберет каждого из двух продавцов. Пусть выигрыш продавца равен доле покупателей, которые приобрели у него мороженое. Таким образом, выигрыш продавца $i = 1, 2$ равен

$$U_i(s_1, s_2) = \begin{cases} \frac{s_1+s_2}{2}, & s_i < s_{-i} \\ \frac{1}{2}, & s_1 = s_2 \\ 1 - \frac{s_1+s_2}{2}, & s_i > s_{-i}, \end{cases} \tag{1.51}$$

где $-i$ — индекс другого продавца.

Распределение покупателей между продавцами показано на рисунке 1.11.

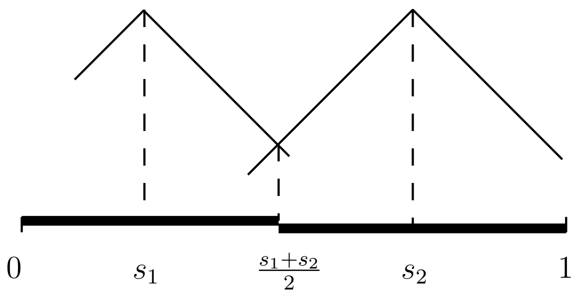


Рис. 1.11: Горизонтальная конкуренция и доли рынка продавцов.

На этом рисунке показаны графики двух функций: полезность покупателя с данным расположением при покупке у первого и второго продавцов. Покупатель с расположением $\frac{s_1+s_2}{2}$ безразличен между двумя продавцами; при $s_1 < s_2$, все покупатели с расположением $v < \frac{s_1+s_2}{2}$ приобретут мороженое у продавца 1, все покупатели с $v > \frac{s_1+s_2}{2}$ — у продавца 2.

Легко проверить, что в этой игре существует единственное равновесие, в котором $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$. Действительно, в равновесии мы не можем иметь $s_1 \neq s_2$. Если, без потери общности, $s_1 < s_2$, то любой продавец i может увеличить свой выигрыш, взяв $s_i' \in (s_1, s_2)$. Следовательно, в равновесии $s_1 = s_2 = s$. Но если $s > \frac{1}{2}$, то любой продавец сможет увеличить свой выигрыш, взяв $s_i' \in (s, 1-s)$. Таким образом, мы должны ожидать, что тележки продавцов расположатся рядом, причем их положение будет совпадать с расположением *медианного* покупателя — то есть такого, что равное число покупателей располагается справа и слева от него.

История с двумя продавцами мороженого — хорошая метафора для рынка с горизонтально дифференцируемым товаром. Например, главный параметр, по которому отличаются друг от друга современные пассажирские самолеты — это соотношение стоимости самолета и удельных издержек перевозки одного пассажира. С одного конца спектра мы имеем небольшие региональные самолеты; с другого — вместительные и дорогие авиалайнеры с низкими эксплуатационными издержками в расчете на одного пассажира. Авиакомпании — потребители самолетов — тоже отличаются друг от друга отчасти по тому, какие самолеты им нужны. Например, одни компании обслуживают большое число маршрутов с небольшим пассажиропотоком, другие — более загруженные маршруты.

Модель предвыборной конкуренции

Начиная с известной книги американского политолога Энтони Даунса (1957), модель горизонтальной конкурении используется при моделировании поведения политических партий или кандидатов на выборах. Предположим, что в некоторой стране президентский пост оспаривают два кандидата. Стратегией каждого кандидата является его предвыборная программа. Будем считать, что программа описывается одним параметром — степенью ее левизны или правизны. Левая политика означает высокие налоги, значительные затраты на производство общественных благ и социальные программы (такие, как пенсии или помощь малоимущим) за счет налогов, собранных с более состоятельных граждан. Правая политика — низкие налоги и малые затраты на социальную сферу. Пусть $s_1, s_2 \in [0, 1]$ — политические программы кандидатов, где $s = 0$ — крайне левая программа, $s = 1$ — крайне правая.

Полезность кандидата равна доле голосов избирателей, полученных им на выборах. Пусть для каждого избирателя существует величина $v \in [0,1]$ — политическая программа, которая больше всего ему нравится, или его наилучшая альтернатива. Избиратели отличаются друг от друга своими предпочтениями относительно политических программ. Например, наилучшая альтернатива человека со средним достатком будет правее наилучшей альтернативы мало зарабатывающего пенсионера, но левее, чем наилучшая альтернатива бизнесмена. Предположим, что наилучшие альтернативы избирателей равномерно распределены на $[0,1]$.

Будем считать, что избиратель v проголосует за кандидата 1 если $|s_1 - v| < |s_2 - v|$ и проголосует за кандидата 2 если $|s_1 - v| \geq |s_2 - v|$. В таком случае модель политической конкуренции между двумя кандидатами ничем не будет отличаться от конкуренции между двумя продавцами мороженого, рассмотренной в предыдущем примере. В равновесии, оба кандидата станут центристами: $s_1^* = s_2^* = \frac{1}{2}$. В более общей постановке, если наилучшие альтернативы избирателей распределены на $[0,1]$ с функцией распределения $F(\cdot)$, то есть если доля избирателей с наилучшими альтернативами $v \leq x$ равна $F(x)$, в равновесии предвыборные программы избирателей будут $s_1^* = s_2^* = F^{-1}(\frac{1}{2}) = v^m$. Программа v^m является наилучшей альтернативой *медианного избирателя*, то есть это такая альтернатива, что одна половина избирателей имеет более левые взгляды, другая половина — более правые.

Модель предвыборной конкуренции с идеологическими кандидатами

В середине 1950х годов, когда политологи впервые попытались объяснить поведение кандидатов на выборах при помощи теоретико-игровых моделей, полученный выше результат (согласно которому в ходе избирательной кампании оба кандидата принимают одну и ту же политическую программу) достаточно хорошо соответствовал реальной политической обстановке. В США (а именно там была сосредоточена деятельность значительной части исследователей) программы представителей двух основных политических партий — республиканцев и демократов — не слишком сильно отличались друг от друга по основным вопросам, касающимся национальной экономики. В частности, большинство республиканцев приняло так называемый «Новый курс» президента от демократической партии Франка Рузвельта, предполагавший значительное перераспределение доходов от более состоятельных граждан к бедным. Однако на протяжении последующих десятилетий позиция республиканцев поменялась; она стала в значительной мере отражать интересы наиболее обеспеченной части населения. Наблюдавшееся расхождение политических программ партий (и кандидатов, которые представляли их на выборах) бросило вызов ученым: как можно, при помощи формальной логики, объяснить наблюдавшиеся тенденции? Очевидно, что предпосылок, заложенных в самую простую модель политической конкуренции, описанную выше, было недостаточно.

Возможное объяснение состоит в том, что сами кандидаты могут быть заинтересованы в реализации каких-то конкретных политических программ. Такая модель была рассмотрена в работах Уиттмена (1979) и Кальверта (1985). Обозначим за $a_i \in [0,1]$ наилучшую альтернативу кандидата $i = 1,2$ (которая является параметром модели). Пусть, как и раньше, стратегия каждого кандидата i — его политическая программа $s_i \in [0,1]$ (которая может отличаться от a_i). Обозначим за P_i вероятность того, что кандидат i выиграет выборы. Пусть выигрыш кандидатов составляет

$$U_1 = \lambda P_1 - (P_1|a_1 - s_1| + P_2|a_1 - s_2|) \tag{1.52}$$
$$U_2 = \lambda P_2 - (P_1|a_2 - s_1| + P_2|a_2 - s_2|)\,. \tag{1.53}$$

Здесь мы предполагаем, что кандидату небезразлична как сама победа на выборах, так и политическая программа победившего кандидата (кем бы он ни был). Второе слагаемое в функции полезности — ожидаемый ущерб кандидата i от реализации победителем программы, возможно отличающейся от его собственной наилучшей альтернативы a_i. Параметр $\lambda \in [0,1]$ отражает относительную важность победы на выборах по сравнению с реализацией наилучшей политической программы.

Осталось определить вероятности победы кандидатов P_1, P_2. Пусть кандидат побеждает на выборах только в том случае, когда он набирает больше половины голосов. Пусть $s_1 < s_2$. Избиратель с наилучшей альтернативой $\bar{v} = \frac{s_1+s_2}{2}$ будет безразличен между программами двух кандидатов. Все избиратели с позициями $v < \bar{v}$ проголосуют за кандидата 1, с позициями $v > \bar{v}$ — за кандидата 2. Предположим, что каждый кандидат побеждает только если он получает голоса более половины избирателей. Следовательно, при $v^m < \bar{v}$ побеждает кандидат 1, при $v^m > \bar{v}$ побеждает кандидат 2, при $v^m = \bar{v}$ каждый побеждает с вероятностью $\frac{1}{2}$.

Предположим, что кандидаты знают об избирателях следующее: наилучшая альтернатива медианного избирателя — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[\frac{1}{2} - \frac{1}{2b}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2b}]$. Величина $b \geq 1$ отражает степень информированности кандидатов о своем электорате. Чем она выше, тем сильнее изменения политических программ влияют на вероятности победы P_1, P_2. Это предположение дает нам следующие вероятности побед кандидатов при $s_1 < s_2$:

$$P_1 = \begin{cases} 0, \frac{s_1+s_2}{2} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2b}, \\ \frac{b(s_1+s_2-1)}{2} + \frac{1}{2}, \frac{s_1+s_2}{2} \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{2b}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2b}) \\ 1, \frac{s_1+s_2}{2} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{b}, \end{cases} \quad P_2 = 1 - P_1. \tag{1.54}$$

Найдем равновесие в этой модели для $a_1 = 0$, $a_2 = 1$. Предполагая $P_1 \in (0,1)$ и $0 < s_1 < s_2 < 1$, получим условия первого порядка максимизации выигрыша кандидатов:

$$\frac{\partial U_1}{\partial s_1} = -P_1 + (\lambda - s_1 + s_2)\frac{\partial P_1}{\partial s_1} = 0 \tag{1.55}$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial s_2} = 1 - P_1 - (\lambda - s_1 + s_2)\frac{\partial P_1}{\partial s_2} = 0. \tag{1.56}$$

При $\lambda = 0$ получим

$$s_1^* = \frac{1}{2} - \frac{1}{2b},\ s_2^* = \frac{1}{2} + \frac{1}{2b}. \tag{1.57}$$

Выходит так: чем выше b, тем ближе позиции кандидатов к ожидаемой позиции медианного избирателя $\frac{1}{2}$. Действительно, предположим, что кандидата i интересует только реализация программы, наиболее близкой к своей наилучшей альтернативе a_i. Кандидат стоит перед дилеммой. С одной стороны, чем ближе его позиция y_i к ожидаемой позиции медианного избирателя, тем выше вероятность, что он выиграет выборы. С другой стороны, это снижает его полезность в случае победы. Чем выше неопределенность относительно позиции медианного избирателя, тем ближе будет политическая программа кандидата к его наилучшей альтернативе. Отметим, что при $b = \infty$ равновесные политические программы совпадают с наилучшей альтернативой медианного избирателя, несмотря на то, что в их функции полезности напрямую не входит победа на выборах.

Приложение А. Доказательство теоремы Нэша.

Доказательство теоремы Нэша является неконструктивным. Мы показываем, что для некоторого точечно-множественного отображения (определяемого через наилучшую реакцию игроков на действия остальных) существует неподвижная точка. Та же идея используется и при доказательстве многих других результатов в теории игр.

Сформулируем сначала вспомогательный результат. Если S — некоторое множество, то за 2^S обозначим множество всех подмножеств S.

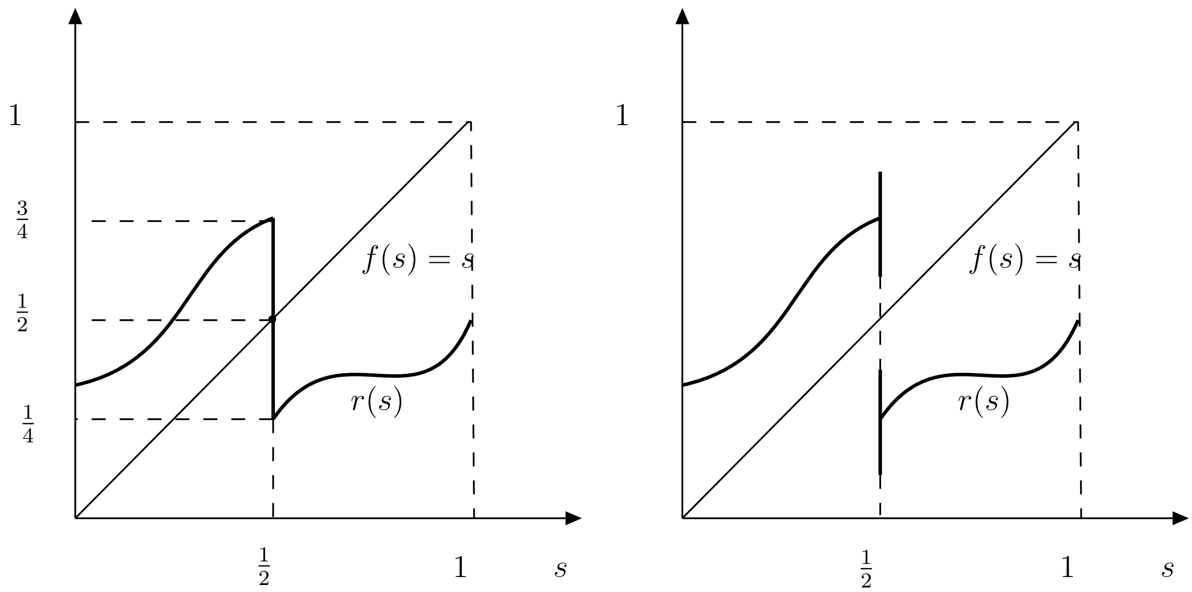
Теорема 4 (Какутани, 1941). Пусть S — непустое, компактное и выпуклое подмножество Евклидового пространства. Пусть $r : S \to 2^S$ — точечно-множественное отображение, такое, что

1. $r(s)$ является непустым и выпуклым для всех $s \in S$.

2. $r(\cdot)$ имеет замкнутый график. То есть если $(s^n, \hat{s}^n) \to (s, \hat{s})$ — последовательность, такая, что $\hat{s}^n \in r(s^n)$ для всех n, то $\hat{s} \in r(s)$.

тогда $r(\cdot)$ имеет неподвижную точку.

На рисунке 1.12 представлены два примера точечно-множественных отображений. В обоих случаях, $S = [0, 1]$. На рисунке 1.12(a), $r(\cdot)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Какутани. Для $s \neq \frac{1}{2}$ множества $r(s)$ состоят из единственного элемента, в то время как $r(\frac{1}{2}) = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$. Это отображение имеет неподвижную точку $s^* = \frac{1}{2}$, так как $\frac{1}{2} \in r(\frac{1}{2})$. Это видно из графика, так как именно в этой точке график $r(\cdot)$ пересекается с графиком функции $f(s) = s$.



(a) Неподвижная точка существует

(b) Неподвижной точки не существует

Рис. 1.12: Существование неподвижной точки для точечно-множественного отображения

На рисунке 1.12(b) неподвижная точка отсутствует. Здесь, $r(\frac{1}{2}) = [0.2, 0.4] \cup [0.6, 0.8]$, то есть $r(\cdot)$ не является выпуклым. Это позволяет графику $r(\cdot)$ не пересекаться с $f(s) = s$.

Теперь докажем теорему о существовании равновесия.

Доказательство Теоремы 1.

Пусть Σ — множество смешанных стратегий в игре G. Определим функцию реакции для игрока i:

$$r_i(\sigma) = \mathrm{argmax}_{\sigma'_i \in \Sigma_i} u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}). \tag{1.58}$$

Функции r_i определяют, какие смешанные стратегии максимизируют выигрыш игрока i при условии, что задан профиль смешанных стратегий остальных игроков. Функция реакции является точечно-множественным отобрашением из Σ в Σ_i, ибо максимальное значение полезности может быть достагнуто при нескольких значениях σ_i. Определим точечно-множественное отображение $r : \Sigma \to 2^\Sigma$ как

$$r(\sigma) = \prod_{i=1}^{N} r_i(\sigma). \tag{1.59}$$

Если $\sigma^* \in \Sigma$ является неподвижной точкой отображения $r(\cdot)$, то σ^* — равновесие; действительно, для всех i, σ_i^* будет являться наилучшей реакцией игрока i на σ_{-i}^*. Нам остается показать, что $r(\cdot)$ удовлетворяет условиям теоремы Какутани.

Множество Σ выпукло, так как оно является декартовым произведением симплексов. Так как $u_i(\sigma)$ линейны по σ_i, то $r_i(\sigma) \neq \emptyset$, так как непрерывная функция должна принимать максимум на компактном множестве. Следовательно, $r(\sigma)$ непусто для всех $\sigma \in \Sigma$.

Покажем, что $r(\sigma)$ выпукло. Действительно, пусть $\sigma', \sigma'' \in r(\sigma)$. Тогда для всех i, для всех $\lambda \in (0,1)$, получаем

$$u_i(\lambda\sigma_i' + (1-\lambda)\sigma_i'', \sigma_{-i}) = \lambda u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) + (1-\lambda)u_i(\sigma_i'', \sigma_{-i}). \tag{1.60}$$

Так как $u_i(\sigma', \sigma_{-i}) = u_i(\sigma'', \sigma_{-i})$, то

$$u_i(\lambda\sigma_i' + (1-\lambda)\sigma_i'', \sigma_{-i}) = u_i(\sigma', \sigma_{-i}) = u_i(\sigma'', \sigma_{-i}), \tag{1.61}$$

то есть $\lambda\sigma_i' + (1-\lambda)\sigma_i'' \in r_i(\sigma)$ и $\lambda\sigma' + (1-\lambda)\sigma'' \in r(\sigma)$.

Теперь покажем, что $r(\cdot)$ имеет замкнутый график. Пусть это не так, то есть существует $(\sigma^n, \hat{\sigma}^n) \to (\sigma, \hat{\sigma})$, такая, что $\hat{\sigma}^n \in r(\sigma^n)$ для всех n, но $\hat{\sigma} \notin r(\sigma)$. Тогда для некоторой i, $\hat{\sigma}_i \notin r_i(\sigma)$. Пусть $\sigma' \in r(\sigma)$. Следовательно, существует $\epsilon > 0$, такой, что

$$u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) > u_i(\hat{\sigma}_i, \sigma_{-i}) + 3\epsilon. \tag{1.62}$$

Так как u_i непрерывна по σ и $(\sigma^n, \hat{\sigma}^n) \to (\sigma, \hat{\sigma})$, для достаточно большого n мы имеем

$$u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}^n) > u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) - \epsilon > u_i(\hat{\sigma}_i, \sigma_{-i}) + 2\epsilon > u_i(\hat{\sigma}_i^n, \sigma_{-i}^n) + \epsilon. \tag{1.63}$$

Первое неравенство верно поскольку $u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}^n) \to u_i(\sigma_i', \sigma_{-i})$, третье — поскольку $u_i(\hat{\sigma}_i, \sigma_{-i}^n) \to u_i(\hat{\sigma}_i, \sigma_{-i})$. Следовательно, $\hat{\sigma}_i^n \notin r_i(\sigma^n)$. Мы пришли к противоречию. Следовательно, $r(\cdot)$ имеет замкнутый график и удовлетворяет всем условиям теоремы Какутани. **Q.E.D.**

1.4 Задачи

1. Рассмотрим следующую игру:

		Игрок 1		
		U	S	D
Игрок 2	u	4,1	0,0	0,3
	s	1,6	5,5	4,3
	d	2,5	7,3	6,0

   Найдите все равновесия Нэша (в чистых и смешанных стратегиях).

2. Найдите все равновесия в следующей антагонистической игре:

		Игрок 1		
		U	S	D
Игрок 2	u	3	0	2
	s	5	1	4
	d	2	6	5
	g	3	5	5

3. Рассмотрим симметричную игру

		Игрок 2	
		X	Y
Игрок 1	X	0,0	A, B
	Y	B, A	C, C

При каких значениях параметров A, B, C, мы имеем

(a) Доминирующую стратегию у каждого игрока (дилемма заключенного).

(b) Два симметричных равновесия в чистый стратегиях и одно — в смешанных (координационная игра).

(c) Единственное равновесие в смешанных стратегиях (инспекция).

(d) Два несимметричных равновесия в чистых стратегиях («Слабó?»).

Является ли данный список исчерпывающим? То есть, верно ли, что приведенный список является классификацией игр 2×2 с симметричной матрицей выигрышей?

4. Постройте пример игры 2×2, в которой множество равновесий (чистых и смешанных) имеет следующий вид: $\{(1,0)\} \cup \{(0,q)|q \in [\frac{1}{2}, 1]\}$.

5. Пусть G — непрерывная игра, в которой для всех i, функции полезностей $u_i(s_i, s_{-i})$ являются квазивогнутыми по s_i. Докажите, что графики функций реакции $s_i(s_{-i})$ являются непрерывными по s_{-i}.

6. Рассмотрим игру с нулевой суммой между двумя игроками, в которой у первого игрока 2 стратегии, а у второго — $M \geq 3$. Какое максимальное число чистых стратегий, которые будут входить равновесную смешанную стратегию 2-го игрока?

7. Докажите лемму 7.

8. Докажите, что каждая вогнуная функция является квазивогнутой, и что каждая монотонная функция одной переменной является квазивогнутой.

9. Докажите, что при итеративном удалении строго доминируемых стратегий, множество S^∞ не зависит от порядка игроков, доминируемые стратегии которых мы удаляем.

10. N человек решают, как провести вечер. Каждый выбирает, к кому из своих $N-1$ друзей отправиться в гости, или же остаться дома и самому ждать гостей. Выигрыш игрока, оставшегося дома, равен числу пришедших гостей. Выигрыш каждого гостя на μ меньше ($\mu > 0$). Выигрыш человека, не заставшего хозяина дома, равен $-\mu$. Постройте математическую модель данной ситуации в виде игры в нормальной форме. Найдите все равновесия Нэша в чистых стратегиях в зависимости от μ при N, равном 3. А при произвольном N?

11. Вы ехали с работы домой на своем автомобиле, когда загорелась красная лампочка «проверьте двигатель». Вы повезли машину в мастерскую. Вам известно, что с вероятностью p у вас серьезная поломка, требующая замены двигателя; с вероятностью $1-p$ у вас всего лишь испортился датчик системы диагностики. Вы показали машину механику, который (в отличие от вас) может определить истинную причину неисправности. У механика есть две стратегии: вести себя честно (то есть рекомендовать замену двигателя, если нужно заменить двигатель, и рекомендовать замеру датчика, если нужно заменить датчик), и вести себя нечестно (то есть всегда рекомендовать замену двигателя). Зарплата механика составит r если ремонт соответствует поломке, и $R > r$ если он заменит двигатель при сломанном датчике (так как он может продать ваш двигатель «налево»). У вас тоже две стратегии. Во-первых, вы можете всегда доверять механику (и согласиться на ремонт

в любом случае). Во-вторых, вы можете не доверять — то есть соглашаться на ремонт только если механик предлагает заменить датчик. Стоимость ремонта составляет C для замены двигателя и $c < C$ для замены датчика. Если вы отказываетесь от услуг механика, то ваши издержки равны c' в том случае, если у вас сломался датчик, и C' в том случае, если у вас сломался двигатель. Пусть $c > c' > C > C'$.

(a) Формализуйте эту ситуацию как игру 2×2 и найдите равновесие.

(b) Что еще вам напоминает эта игра?

12. Полковник Блотто командует тремя отрядами. Перед ним три высоты. Он должен решить, сколько отрядов послать на захват каждой высоты. Его противник, граф Балони, также имеет в подчинении три отряда и должен принять такое же решение. Если на одной из высот у одного противника есть численное превосходство, то он захватывает эту высоту. Если нет, то высота остается нейтральной территорией. Выигрыш каждого игрока равен количеству захваченных им высот, минус количество высот, захваченных противником.

    (a) Сколько чистых стратегий у каждого игрока? Какие будут равновесия?

    (b) Как изменится ваш ответ, если у Блотто четыре отряда, а у Балони - три? Если у каждого полководца по четыре отряда?

    (c) Будет ли существовать равновесие в чистых стратегиях при большом числе отрядов у каждого игрока?

13. Три избирателя, 1,2 и 3, решают, за кого из 3 кандидатов, A, B, или C, следует проголосовать. Для победы кандидату необходимо минимум 2 голоса. Если все кандидаты набирают поровну голосов, то побеждает кандидат A. Функции полезностей избирателей выглядят так: $U_1(A) > U_1(B) > U_1(C)$, $U_2(B) > U_2(C) > U_2(A)$, $U_3(C) > U_3(A) > U_3(B)$.

    (a) Найдите все равновесия Нэша.

    (b) Найдите все равновесия Нэша, в которых избиратели не голосуют за свои наихудшие альтернативы.

14. (Басу, 1994). У двух авиапассажиров, следовавших одним рейсом, пропали чемоданы. Авиакомпания готова возместить ущерб каждому пассажиру. Для того, чтобы определить размер компенсации, каждого пассажира просят сообщить, во сколько он оценивает содержимое своего чемодана. Каждый пассажир может назвать сумму не менее \$2 и не более \$100. Условия компенсации таковы: если оба сообщают одну и ту же сумму, то каждый получит эту сумму в качестве компенсации. Если же заявленный одним из пассажиров ущерб окажется меньше, чем заявленный ущерб другого пассажира, то каждый пассажир получит компенсацию, равную меньшей из заявленных сумм. При этом тот, кто заявил меньшую сумму, получит дополнительно \$2, тот, кто заявил бóльшую сумму — дополнительно потеряет два доллара.

    (a) Найдите равновесие Нэша.

    (b) Повторите решение, последовательно удаляя доминируемые стратегии. Почему вы думаете, что в реальности стратегии пассажиров будут отличаться от равновесных?

15. (Полфри и Арагонес, 2004). В стране N приходят президентские выборы. В них участвуют два кандидата — сильный и слабый. Стратегией кандидата является его предвы-

борная программа — левая L, центристская C, или правая R. Матрица выигрышей такова:

Слабый

Сильный		L	C	R
	L	$1,0$	$\alpha,1-\alpha$	$1-\alpha,\alpha$
	C	$1-\alpha,\alpha$	$1,0$	$1-\alpha,\alpha$
	R	$1-\alpha,\alpha$	$\alpha,1-\alpha$	$1,0$

Здесь, $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Если слабый кандидат выберет ту же стратегию, что и сильный, то проиграет вчистую; если выберет другую, то проиграет с меньшим отрывом (что лучше), или даже может выиграть. Найдите равновесие.

16. Нефтяная компания X имеет монополию на поставку бензина в трех регионах. Компания Y собирается построить сеть своих заправок в одном из этих регионов; компания X намерена ей помешать. Компания Y выбирает, в каком из регионов строить заправки; X выбирает, в каком из регионов бороться с Y путем административного ресурса. Если компания Y выбрала регион i, а компания X — другой регион, то Y выигрывает v_i, X проигрывает ту же величину. Если обе компании выбрали одинаковые регионы, то каждая получает нулевой выигрыш. Найдите равновесие в смешанных стратегиях, при условии, что $v_1 > v_2 > v_3 > 0$.

17. Дана игра в нормальной форме:

$$G = \langle \{1,2\}, \{X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}\}, \{u_1 = -x^2 - xy + \beta x, u_2 = -y^2 + \alpha xy + y\}\rangle,$$

здесь $x \in X$ — стратегия первого игрока, $y \in Y$ — стратегия второго. При каких значениях параметров α и β существует равновесие по Нэшу? При каких значениях параметров оно будет единственным? В каком случае в равновесии будет максимизирована суммарная полезность игроков?

18. Пусть $x_0 \in X, y_0 \in Y$ — некий профиль стратегий в следующей игре:

$$\langle \{1,2\}, X \times Y, (f(x,y), g(x,y))\rangle.$$

Будем говорить, что на профиле x_0, y_0 выполнены условия индивидуальной рациональности для игроков, если:

$$f(x_0,y_0) \geqslant \max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y), \qquad g(x_0,y_0) \geqslant \max_{y\in Y}\min_{x\in X} g(x,y)$$

(a) Поясните смысл этих условий. Выполняются ли они для равновесия по Нэшу?

(b) Выполняются ли эти условия, если (x_0, y_0) — оптимума по Парето?

19. Рассмотрим конечную игру в нормальной форме $G = \langle I, S, u\rangle$ и последовательности множеств стратегий $(S^0, S^1, \ldots)$, $(\Sigma^0, \Sigma^1, \ldots)$, такие, что

(a) $S^0 = S$,

(b) Для всех n, Σ^n — множество смешанных стратегий в игре $G^n = \langle I, S^n, u\rangle$,

(c) Для всех $n \geqslant 1$, S^n получается из S^{n-1} путем удаления (для одного или нескольких игроков) всех строго доминируемых чистых стратегий (в тои числе и тех стратегий, которые доминируются смешанными стратегиями).

Покажите, что

(a) $\tilde{S}^\infty$ — предельный элемент последовательности $S^1, \ldots$ — не зависит от порядка, в котором удалялись доминируемые стратегии,

(b) $\tilde{S}^\infty$ содержит в себе все равновесия Нэша. Если $\tilde{S}^\infty$ содержит единственный элемент, то это — единственное равновесие Нэша.

20. На необитаемом острове живут два туземца. Их единственное богатство — бананы. У каждого туземца i имеется w_i бананов, $w_1 = 4$. Каждый туземец может либо съесть банан, либо принести его в жертву местному божку, ответственному за хорошую погоду на острове. Пусть x_i — количество съеденных бананов, g_i — количество бананов, принесенных в жертву. Выигрыш каждого туземца равен $U_i = a_i \ln x_i + \ln(g_1 + g_2)$, где $a_i = 1$.

    (a) Выпишите максимизационную задачу каждого туземца.

    (b) Найдите функции реакции.

    (c) Найдите равновемие Нэша.

    (d) Будет ли равновесие Парето-оптимальным? То есть, можно ли выбрать такие x_1, x_2, g_1, g_2, что выигрыш обоих туземцев будет выше, чем в равновесии Нэша?. Сформулируйте задачу максимизации $U_1 + U_2$ и решите ее. В каком случае $g_1 + g_2$ будет выше? Прокомментируйте результат.

21. На рынке мобильной телефонной связи присутствуют две фирмы. Предположим, что фирмы конкурируют друг с другом путем объявления цен p_1, p_2 (в рублях за минуту) на свои услуги. Фирма $i = 1, 2$ дальше обязуется обслужить всех клиентов, желающих приобрести ее услуги по ее цене p_i. Пусть рыночный спрос задан как $q = 100 - p$, где p — наименьшая из предложенных цен, q — количество услуг, приобретенных покупателями. Таким образом, количество услуг, приобретенных у фирмы $i = 1, 2$ равно

$$q_i = \begin{cases} 100 - p_i, & p_i < p_{-i} \\ \frac{100-p_i}{2}, & p_i = p_{-i} \\ 0, & p_i > p_{-i} \end{cases}$$

Выигрыш фирмы i равен ее прибыли

$$U_i = q_i p_i - c(q_i),$$

где $c(q_i) = a\frac{q_i^2}{2}$ — издержки фирмы i, $a > 0$. Такая модель конкуренции, когда фирмы объявляют цены, а затем берут на себя обязательства удовлетворять весь спрос по этим ценам, называется *моделью конкуренции Бертрана.*

    (a) Найдите все равновесия. Почему равновесий будет много?

    (b) Найдите равновесие, если $c(q_i) = c_i q_i$, где $0 \le c_1 \le c_2$.

22. Найдите равновесие в модели дуополии Курно (страница 15) при условии, что функция спроса задана как $P = 100 - q_1 - q_2$, и прибыль фирмы i равна $q_i P - C_i(q_i)$, где

    (a) Издержки фирм квадратичны: $C_i(q_i) = c_i q_i^2$, где $c_i \ge 0$

    (b) Предельные издержки постоянны, но есть фиксированные издержки: $C_i(q_i) = f_i + c_i q_i$, где $f_i \ge 0$, $c_i \ge 0$.

23. В задаче конкуренции продавцов мороженого на пляже на странице 35,

    (a) Докажите, что если продавцов трое, то равновесия в чистых стратегиях не существует.

    (b) Найдите равновесие, если продавцов четверо, пятеро или шестеро.

(c) Пусть множество покупателей (и множество стратегий каждого продавца) — единичная окружность (например, продавцы конкурируют на пляже вокруг озера). Опишите все равновесия, когда продавцов двое или трое.

24. Каждая из N фирм решает, столько средств следует вложить в разработку новой технологии обработки данных. Пусть r_i — количество средств, затраченное фирмой i. Пусть

$$P_i = \frac{r_i}{\sum_{j=1}^{N} r_j} \tag{1.64}$$

— вероятность того, что фирма i успеет первой получить патент на изобретение. Ожидаемый выигрыш фирмы i будет

$$u_i = RP_i - r_i, \tag{1.65}$$

где R — ценность патента для его обладателя.

(a) Найдите, чему равны r_i^* в равновесии. Как r_i^* зависит от N?

(b) Как суммарные расходы $\sum_i r_i$ будут зависеть от N?

(c) Предположим, что издержки входа на рынок равны $c \geq 0$. Чему будет равно N?

25. (Нэш, 1953). Есть покупатель и продавец некого товара. Покупатель оценивает товар в $v \in [0, 1]$ единиц, продавец — в $c \in [0, 1]$ единиц. Покупатель и продавец одновременно называют цену, по которой они хотят купить/продать товар. Пусть p_1 — цена продавца, p_2 — цена покупателя. Обмен происходит если и только если $p_1 \leq p_2$, по цене $p = \frac{p_1+p_2}{2}$. Найдите равновесие. Правда ли, что в равновесии будет максимизировано произведение полезностей продавца и покупателя?

26. (Полфри и Розенталь, 1984). N человек решают, стоит ли им производить общественное благо. Решение каждого человека i есть $d_i \in \{0, 1\}$ — стоит ли участвовать в производстве блага, или нет. Выигрыш каждого человека, в том случае, когда благо произведено, равен 1, в том случае, когда благо не произведено — 0. Дополнительно к этому, человек, производящий благо, несет издержки $c < 1$. Пусть для производства блага необходимо, чтобы $1 \leq K < N$ человек участвовало в производстве. Найдите все равновесия в чистых стратегиях. Найдите симметричное равновесие в смешанных стратегиях. Почему равновесия в смешанных стратегиях могут выглядеть предпочтительней? Есть ли еще равновесия в этой игре?

27. (Зелтен и Пул, 1991). По соседству расположены два государства населением V_1 и V_2, в каждом государстве проживает континуум граждан. Граждане каждого государства говорят на своем национальном языке. Рассмотрим однопериодную игру, в которой гражданин каждого государства принимает решение, следует ли ему выучить язык другого государства. Пусть полезность каждого гражданина равна числу людей (в обоих государствах) с которыми он может общаться, возможно минус издержки $c > 0$ на изучение иностранного языка. Найдите все P_1^* и P_2^* — проценты людей в каждом государстве, выучивших иностранный язык. Найдите оптимальные P_1^o и P_2^o — то есть такие, которые максимизируют суммарное благосостояние граждан обоих государств. Почему они могут отличаться от равновесных значений?

28. (Градштейн и Конрад, 1999). Четыре спортсмена готовятся к соревнованию по бегу. Каждый атлет i решает, сколько усилий x_i ему потратить на подготовку. Турнир состоит из двух частей: финала и полуфинала. В полуфинале спортсмен 1 соревнуется со спортсменом 2 и спортсмен 3 со спортсменом 4. В финале бегут победители полуфиналов. Если i

соревнуется с j (как в финале, так и в полуфинале), то вероятность того, что i победит, есть $p_i(x_i, x_j) = \frac{x_i}{x_i+x_j}$.

(a) Пусть R — приз за первое место, r — приз за второе место. Найдите матожидания выигрышей каждого игрока, в зависимости от x_1, x_2, x_3, x_4.

(b) Найдите симметричное равновесие Нэша в этой игре (то есть такое, в котором $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x$. Существуют ли еще равновесия?

(c) Вы — устроитель турнира. Ваша задача — обеспечить его зрелищность, то есть максимизировать x при данном размере призового фонда $r + R = \bar{R}$. Решите эту задачу.

(d) Что лучше для организатора турнира — такая схема или один забег, где участвуют все четыре спортсмена, вероятность победы каждого равна $p_i = \frac{x_i}{x_1+x_2+x_3+x_4}$, и приз дается только за первое место?

29. (Мерфи, Шлейфер и Вишну, 1993). Население в стране N может заниматься одним из двух видов деятельности: работать и воровать у тех, кто работает. Пусть $V \in [0, 1]$ — доля работающего населения. Пусть α — максимальный доход работающего человека, $\gamma < \alpha$ — его гарантированный доход. Таким образом, максимальная сумма, которую можно украсть у работающих — $(\alpha-\gamma)V$. Пусть β — максимальная сумма, которую один человек может украсть. Следовательно, всего может быть украдено не более $\beta(1 - V)$. Если $V > \frac{\beta}{\alpha+\beta-\gamma}$, то количество украденного будет меньше, чем $(\alpha - \gamma)V$; при $V \leq \frac{\beta}{\alpha+\beta-\gamma}$, оно будет равно $(\alpha - \gamma)V$.

(a) Как полезность работающего и ворующего зависит от V?

(b) Найдите равновесие в игре, в которой каждый человек решает, чем ему заняться в жизни: работой или воровством. Как количество равновесий будет зависеть от значений параметров? Почему, по-вашему, равновесий может быть два?

30. (Холстром, 1992). Владелец мастерской нанял N работников. Количество товара, производимого мастерской, есть функция от усилий, прилагаемых работниками:

$$Y(q_1, \ldots, q_N) = \sqrt{q_1 + \cdots + q_N},$$

где q_i — усилие, прилагаемое работником i. Хозяин не может наблюдать или контролировать i. Следовательно, заработная плата, предлагаемая каждому работнику, есть функция от объема произведенного товара Y. Пусть выигрыш каждого работника есть

$$U_i = W_i - q_i,$$

где W_i — зарплата работника; последнее слагаемое отражает издержки работника i.

(a) Пусть зарплата каждого работника есть равная доля от выпуска: $W_i = \frac{Y}{N}$. Найдите равновесные объемы выпуска $q_1^*, \cdots, q_N^*$. Найдите Парето-оптимальные объемы выпуска $q_1^o, \cdots, q_N^o$, максимизирующие выпуск Y минус суммарные издержки $q_1 + \cdots + q_N$. Почему равновесные усилия не равны оптимальным?

(b) Пусть теперь хозяин предлагает следующую схему оплаты:

$$W_i = Y(q_1, \ldots, q_N) - \frac{N-1}{N} Y(q_1^o, \ldots, q_{i-1}^o, q_i, q_{i+1}^o, \ldots, q_N^o).$$

Будет ли такая схема оплаты Парето-оптимальной? Будет ли она сбалансированной, то есть такой, что всегда выполняется $q_1 + \cdots + q_N = Y$? Объясните, почему Парето-оптимальная схема оплаты не может быть сбалансированной.

31. (Асемоглу и Робинсон, 2006). В некоторой стране живут N капиталистов — товаропроизводителей. Они решают, сколько средств надо потратить на разгон профсоюза рабочих. Пусть $s_i \geq 0$ — количество средств, потраченное капиталистом i. Будем считать, что профсоюз удалось уничтожить, если $\phi \sum_{i=1}^{N} s_i > \omega$, где ω — случайная величина, распределенная на $[0, \infty)$ с ненулевой убывающей плотностью $f(\cdot)$ и функцией распределения $F(\cdot)$. Выигрыш капиталиста i составляет $R - s_i$ если профсоюз разогнан, и $-s_i$ если нет.

    (a) Найдите условия первого порядка для равновесия Нэша.

    (b) В стране принят закон в защиту профсоюзов. Теперь, чтобы разогнать профсоюз, капиталисты должны в сумме приложить усилия $\omega + \eta$, где $\eta > 0$ — детерминированная величина. Найдите условия первого порядка для равновесия Нэша. Изменится ли равновесная вероятность того, что профсоюз будет разогнан?

    (c) Принят другой закон. Теперь, чтобы разогнать профсоюз, капиталисты должны в сумме приложить усилия $\alpha\omega$, где $\alpha > 0$. Как изменится ваш ответ?

Литература

[1] E. Aragones and T. Palfrey. (2004) The Effect of Candidate Quality on Electoral Equilibrium: An Experimental Study. *The American Political Science Review* 98(1): 77–90

[2] Daron Acemoglu and James A. Robinson. 2006. De facto political power and institutional persistence. *AEA Papers and Proceedings* 96(2): 325–330

[3] Basu, Kaushik. 1994. The Traveler's Dilemma: Paradoxes of Rationality in Game Theory. *American Economic Review* 84(2): 391–395

[4] Bereford, S. and H. Person. (1955) A Mixed Strategy in Action *Operations Research* 6(4): 173–176

[5] Ken Binmore. *Fun and Games: A Text of Game Theory.* D.C. Hearth. 1992.

[6] Calvert, Randy. 1985. Robustness of Multidimensional Voting Model: Candidate Motivations, Uncertainty and Convergence. *Americal Journal of Political Science* 29:69–95.

[7] P.A. Chiappori, S. Levitt, and T. Groseclose. (2002) Testing Mixed-Strategy Equilibria When Players Are Heterogeneous: The Case of Penalty Kicks in Soccer. *The American Economic Review* 92(4): 1138–1151

[8] Davis, D. and C. Holt. (1993) *Experimental economics* Princeton Umiversity Press

[9] Dixit, A. and S. Skeath. (2004) *Games of strategy: 2nd edition* W.W. Norton & Company

[10] Downs, Anthony. 1957. *An Economic Theoty of Democracy* Harper&Row

[11] D.Fudenberg, J.Tirole. *Game Theory.* Cambridge, Mass.:MIT Press, 1991 — книга по большей части выходит за рамки курса, но местами есть совпадения

[12] R.Gibbons. *Game Theory for Applied Economists.* Princeton University Press. 1992

[13] Glicksberg I.L. 1952. A further generalization of the Kakuani fixed point theorem with applications to Nash equilibrium points. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 38: 170–174

[14] Gradstein, Mark, and Kai Kondar. 1999. Orchestrating rent-seeking contests. *Economic Journal* 109: 536–545

[15] Hindricks, Jean. and Gareth Myles. 2006. *Intermediate Public Economics.* The MIT Press

[16] Holmstrom, Bengt. 1982. Moral Hazard in Teams. *Bell Journal of Economics* 13(2): 324–340

[17] Hotelling, Harold (1929) Stability in Competition, *Economic Journal* 39 (153): 41—57

[18] Krueger, A. (1974) The Political Economy of the Rent-Seeking Society. *The American Economic Review* 64(3): 291–303

[19] MasCollel,A., M. Whinstoon, and J. Green. (1995) *Microeconomics Theory* Oxford University Press

[20] Murphy, Kevin, Andrei Shleifer, and Robert Vishnu. 1993. Why is rent-seeking so costly to growth? *The American Economic Review* 83(2): 409–414

[21] Myerson, R. (1991) *Game theory: Analysis of Conflict.* Harverd University Press

[22] Nash, John (1950) Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36(1): 48–49.

[23] Nash, John. 1953. Two-Person Cooperative Games. *Econometrica* 21(1): 128–140

[24] Palfrey, Thomas, and Howard Rosenthal. 1984/ Participation and the Provision of Public Goods: A Strategic Analysis. *Journal of Public Economics* 24(2): 171–193

[25] Posner, R. (1975) The Social Costs of Monopoly and Regulation. *The Journal of Political Economy* 83(4)

[26] Schelling, T. C. (1960). *The Strategy of Conflict.* Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press

[27] Selten, R. and J. Pool. 1991. The distribution of foreign language skills as a game equilibrium. In R. Selten, ed., *Game Equilibrium Models*, vol. 4, Berlin: Springer-Verlag, 64–84

[28] Tullock, G. (1967) The welfare costs of tariffs, monopolies, and theft. *Western Economic Journal* 5(3): 224—232

[29] Walker, M., and J. Wooders. (2001) Minimax play at Wimbledon, *American Economic Review* 91(5): 1521–1538

[30] Wittman, Donald. 1977. Candidates With Policy Preferences: A Dynamic Model. *Journal of Economic Theory* 14:180–189.

[31] В. Бусыгин, Е. Желободько, С. Коковин, А. Цыплаков. Микроэкономический анализ несовершенных рынков - I. 264 с. В сети находится здесь:

[32] Мюллер, Деннис. *Общественный выбор III.* ГУ ВШЭ 2007

[33] Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн. *Теория игр и экономическое поведение* Наука 1970

[34] Оуэн Г., Теория игр. Москва, Мир, 1971

[35] Печерский С.А. и А.А. Беляева. Теория игр для экономистов: Вводный курс. Учебное пособие. — СПб.: Изд-во Европейского Ун-та в С.-Петербурге, 2001

[36] Шагин В. Л. Теория игр : с экон. прил. : учеб. пособие

Глава 2

Динамические игры с полной информацией

На улице прекрасный летний день, и вы вышли немного погулять. Светит солнце, поют птицы, легкий ветерок играет в ваших волосах. У вас в кармане кошелек, в котором 1000 рублей[1]. К вам подходит хулиган с гранатой в руках, и предлагает вам такой выбор: либо вы отдаете ему кошелек, либо он взрывает гранату, и вы оба погибаете. Ваши предпочтения (в порядке убывания) таковы: остаться в живых с кошельком, остаться в живых без кошелька, быть взорванным. Предпочтения хулигана точно такие же. Больше всего ему понравится, если вы сразу отдадите ему кошелек. На втором месте альтернатива, когда вы отказываетесь отдавать кошелек, но он не взрывает гранату и остается в живых, но без кошелька. Наконец, меньше всего, как и вам, ему хочется быть взорванным.

Станете ли вы отдавать кошелек? Если вы не отдадите, то у хулигана будет нелегкий выбор. Он угрожал вам взорвать гранату, но теперь предпочтет не реализовывать эту угрозу. Если он недостаточно принципиален, то он передумает и не станет выдергивать чеку после того, как вы отказались отдавать ему кошелек. В этом случае, вы должны ответить ему отказом, так как его угроза нереализуема. Однако если он принципиален и никогда не меняет своих решений, то вам лучше сделать так, как он говорит, и отдать кошелек. Если вы не отдадите, то будете взорваны, и вряд ли вас утешит тот факт, что хулиган взлетит на воздух вместе с вами.

Этот маленький пример показывает важность порядка, в котором принимаются решения. Угроза хулигана взорвать гранату является невыполнимой, если хулиган имеет возможность пересмотреть свое решение *после* того, как вы окончательно и безповоротно отказались делиться с ним своими заработанными деньгами. Ситуация приобретает совершенно иной характер, если хулиган запрограммирован выполнять данные ранее обещания. В первом случае взаимодействие представимо в виде динамической игры, в которой первый ход принадлежит вам, а второй ход — хулигану. Во втором случае, первый ход у хулигана, а второй у вас. Наконец, если вы тоже способны принципиально не отдавать деньги при реальной угрозе взрыва, то это — статическая игра, в которой вы и хулиган ходите одновременно.

2.1 Игры в развернутой форме

Динамическая игра — более сложный объект, чем статическая игра. Для того, чтобы описать динамическое игровое взаимодействие нескольких субъектов, нам необходимо знать две вещи. Во-первых, это последовательность действий игроков при возможных сценариях развития событий в игре, а также выигрыши, получаемые игроками в зависимости от произошедших в игре событий. Во-вторых, необходимо знать, что каждому игроку может быть известно относи-

[1] Пример взят из книги Гиббонса (1992).

тельно ходов, уже сделанных другими игроками. В первом случае, мы говорим о *дереве игры*; во втором — об *информационных множествах* игроков.

2.1.1 Дерево игры.

Во-первых, нам (как и в статической игре) нужно определить множество игроков. Для того, чтобы моделировать случайные события, влияющие на выигрыш игроков, нам необходимо определить еще одного игрока — *природу*. Таким образом, мы имеем $I = \{1, \cdots, N\} \cup \{\text{природа}\}$.

Во-вторых, нужно определить, в каком порядке игроки ходят, и какие действия им доступны на каждом ходе. Например, в игре «хулиган с гранатой» первый ход делает прохожий; ему доступны действия «отдать» и «не отдавать». В случае, если выбрано действие «не отдать», делает ход хулиган; его возможные действия — «взорвать» и «не взорвать». Эту информацию мы можем изобразить в виде следующего *дерева* (или *графа*) игры, изображенного на рисунке 2.1. Дерево игры состоит из *вершин* и соединяющих их отрезков. Каждая вершина означает либо момент принятия решения одним из игроков, либо момент окончания игры. Моменты принятия решения обозначены жирными точками; их на нашем дереве два — принятие решения прохожим, и принятие решения хулиганом. Всего существует три варианта окончания игры: если прохожий отдает кошелек, если прохожий не отдает кошелек и хулиган взрывает гранату, и если прохожий не отдает кошелек, и хулиган не взрывает. В дереве игры всегда существует одна вершина, соответствующая началу игры. В нашем случае, это — вершина, в которой делает ход прохожий.

Наконец, в-третьих, нам надо определить, как выигрыши игроков зависят от ходов, которые были сделаны. Формально, для каждой конечной вершины дерева игры мы определяем выигрыши для каждого игрока. В нашем случае, мы предполагаем, что выигрыш каждого игрока равен -1 в случае взрыва гранаты, 0 в случае, если взрыва нет, но игрок остался без кошелька, и 1, если взрыва не было, и кошелек остался у игрока.

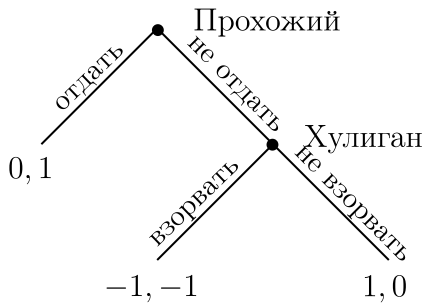
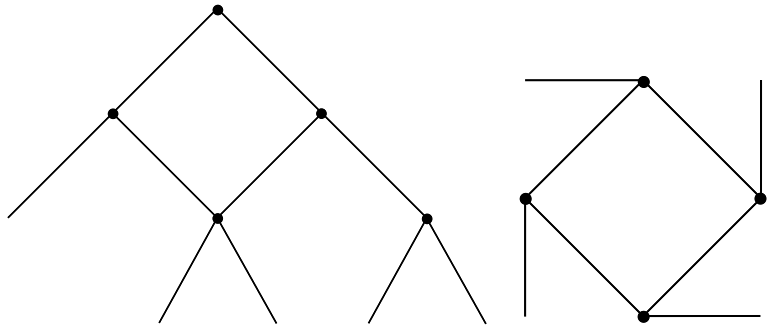


Рис. 2.1: Игра «хулиган с гранатой».

Каждому ходу, который игрок делает в какой-то вершине, соответствует вершина, в которой игра оказывается после сделанного хода. Например, после хода прохожего «отдать», игра переходит в конечную вершину с выигрышем $(0, 1)$. После хода «не отдать» игра переходит в вершину, в которой ход делает хулиган. Будем говорить, что вершина, в которой делет ход прохожий, лежит выше, чем вершина, в которой делает ход хулиган. В любом дереве игры, для любой вершины, кроме начальной, однозначно задается *история игры* — то есть последовательность вершин, через которые игра уже успела пройти. В частности, для любой вершины (опять же, кроме начальной) существует ровно одна вершина, непосредственно предшествующая данной. Это исключает «деревья» вроде графа, изображенного на рисунке 2.2(a). Необходимость наличия начальной вершины исключает возможность циклов (как на рисунке 2.2(b)).



(a) У одной вершины существует несколько вершин, непосредственно предшествующих ей.

(b) Нет начальной вершины.

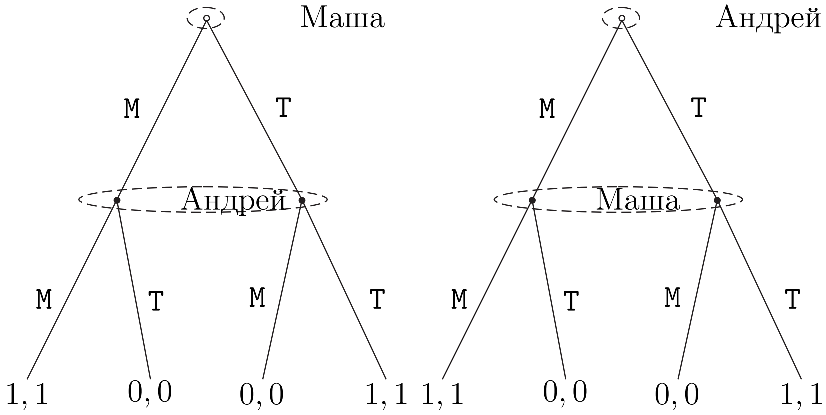
Рис. 2.2: Примеры графов, не являющихся деревьями игры.

2.1.2 Информационные множества и стратегии в динамической игре.

Рассмотрим задачу «встреча в городе» из Главы 1 (стр. 13). Напомним, что в исходной задаче речь шла об игре 2×2 со следующей матрицей выигрышей:

		Андрей	
		M	T
Маша	M	1,1	0,0
	T	0,0	1,1

Мы предполагали, что когда Маша и Андрей принимают решения, между ними отсутствует связь; следовательно, на момент принятия решения Андрей не знает о решении Маши, и наоборот. На рисунке 2.3 показаны два эквивалентных способа записать эту игру как развернутую.



(a) 1 способ

(b) 2 способ

Рис. 2.3: Встреча в городе — 2 способа записать статическую игру как динамическую.

На рисунке 2.3(a) нарисовано дерево игры, в которой Маша делает первый ход, но Андрей не знает, какой ход сделала Маша — то есть, на момент принятия решения, Андрей не может сказать, в какой из двух своих вершин он находится. Это предположение достигается объединением двух вершин, в которых Андрей принимает решения, в одно *информационное множество*. На рисунке 2.3(b) показан альтернативный способ записи той же игры в развернутой форме.

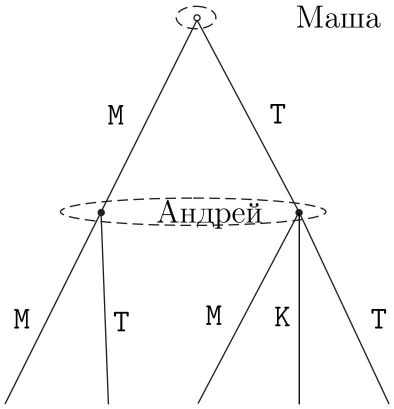
Дадим формальное определение.

Определение 15 Пусть Γ — игра в развернутой форме. *Информационное множество* игрока i есть совокупность вершин, в которых этот игрок делает ход, со следующими свойствами:

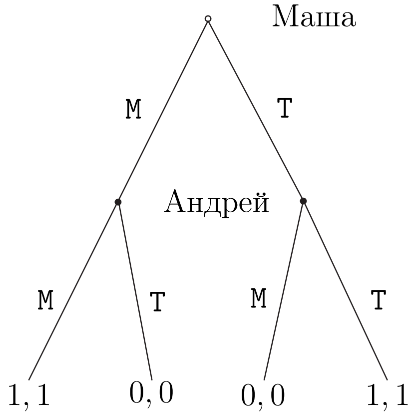
1. Каждая вершина игрока i содержится в одном и ровно одном информационном множестве.

2. Пусть h_i — информационное множество игрока i. Во всех вершинах, входящих в h_i, игроку доступен один и тот же набор действий $A(h_i)$.

По определению, игрок не может наблюдать, в какой из вершин информационного множества он находится. Поэтому мы требуем, чтобы во всех вершинах, принадлежащих к одному информационному множеству, каждому игроку были доступны одни и те же действия. В противном случае — как, например, на рисунке 2.4(a) — игрок сможет определить вершину, в которой он находится, по числу доступных ему действий, что противоречит предположению о том, что две вершины принадлежат к одному информационному множеству.



(a) Пример несуществующей игры



(b) Игра «встреча в городе» с односторонней связью.

В тех играх, в которых игроки могут наблюдать за действиями всех других игроков — включая Природу — каждое информационное множество содержит ровно одну вершину. Если в нашем примере между Машей и Андреем имеется односторонняя связь — например, если Маша может скидывать Андрею СМСки, но Андрей не может на них отвечать — информационное множество Андрея разбивается на два множества (рисунок 2.4(b)), каждое из которых соответствует одному из выбранных Машей действий. У Маши, как и прежде, всего одно информационное множество, так как при наличии односторонней связи она принимает решение раньше Андрея. У Андрея информационных множеств два, каждое из которых соответствует одной вершине, в которой он принимает решение (когда в информационном множестве всего одна вершина, мы не обводим ее пунктиром на рисунке).

Какие стратегии доступны игрокам в игре, изображенной на рисунке 2.4(b)? У Маши всего два варианта действий: `M` или `T`. Выбор Андрея, однако, является более богатым. У него могут быть разные планы в зависимости от хода, сделанного Машей. Перечислим все стратегии Андрея:

`TT` Играть `T` если Машин ход был `T`; играть `T` если Машин ход был `M`.

`TM` Играть `T` если Машин ход был `T`; играть `M` если Машин ход был `M`.

`MT` Играть `M` если Машин ход был `T`; играть `T` если Машин ход был `M`.

`MM` Играть `M` если Машин ход был `T`; играть `M` если Машин ход был `M`.

Получается, что у Андрея всего 4 стратегии. Каждая стратегия предписывает, что делать в *каждом* информационном множестве. Дадим определение.

Определение 16 В игре Γ в развернутой форме множество чистых стратегий игрока i есть

$$S_i = \times_{h_i \in H_i} A(h_i),$$

где H_i — информационные множества, в которых делает ход игрок i.

При этом число чистых стратегий у игрока i будет

$$N_i = \prod_{h_i \in H_i} |A(h_i)|. \tag{2.1}$$

Например, если в некой игре у некого игрока есть 3 информационных множества, в которых возможно по 3,4 и 5 действий, то число его чистых стратегий равно $3 \times 4 \times 5 = 60$.

Совокупность дерева игры и информационных множеств игроков позволяет нам определить множество стратегий для каждого игрока. Так как выигрыш каждого игрока однозначно определяется стратегиями, выбранными игроками, то это позволяет нам говорить о равновесии Нэша в играх в развернутой форме. Однако, как мы убедимся на следующем примере, в динамических играх далеко не все равновесия соответствуют нашему представлению о рациональности игроков.

«Я — Михаэль Шумахер, и я никогда не сворачиваю первым».

Рассмотрим задачу «лобовая атака» на странице 18. Два автомобиля едут навстречу друг другу. За рулем первой машины Иван — водитель со среднестатистическими навыками вождения. За рулем второй машины сидит Михаель Шумахер, семикратный обладатель чемпионского титула гонок Формулы-1. Каждый водитель может свернуть — `T` или не свернуть — `N`. Пусть, как и в прошлой главе, полезности игроков заданы такой матрицей:

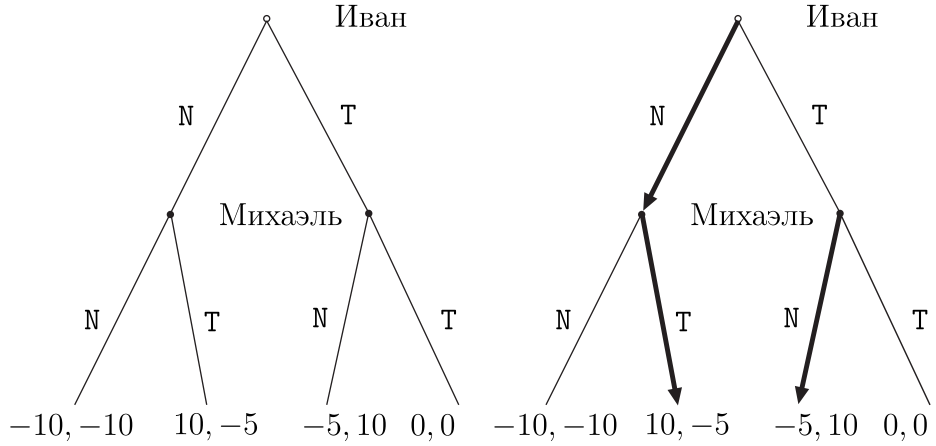
		Шумахер	
		`T`	`N`
Иван	`T`	0,0	-5,10
	`N`	10,-5	-10,-10

Реакция Михаэля Шумахера намного лучше, чем у Ивана. Поэтому решение о том, свернуть ему или нет, Иван принимает первый. После того, как Иван определился со своим выбором (и не в состоянии его изменить), Шумахер все еще имеет в запасе несколько долей секунды, достаточных для принятия решения. У нас получается динамическая игра, в которой Иван делает первый ход (рисунок 2.4(c)).

У Ивана в этой игре две стратегии: $S_1 = \{\mathtt{T}, \mathtt{N}\}$, у Михаэля — четыре: $S_2 = \{\mathtt{TT}, \mathtt{TN}, \mathtt{NT}, \mathtt{NN}\}$. Какие профили стратегий будут равновесными? Запишем матрицу выигрышей в этой игре.

		Михаэль			
		`TT`	`TN`	`NT`	`NN`
Иван	`T`	0,0	0,0	-5,10	-5,10
	`N`	10,-5	-10,-10	10,-5	-10,-10

Попробуем проанализировать эту игру как статическую. Формально, мы получим три равновесия Нэша: $(\mathtt{N}, \mathtt{TT})$, $(\mathtt{N}, \mathtt{NT})$ и $(\mathtt{T}, \mathtt{NN})$. Однако в двух из них — $(\mathtt{N}, \mathtt{TT})$ и $(\mathtt{T}, \mathtt{NN})$ — Михаэль принмает неоптимальные для него действия *вне траектории игры.* Рассмотрим, например, $(\mathtt{T}, \mathtt{NN})$. Эта пара стратегий предписывает Михаелю никогда не сворачивать — даже в том случае, если Иван по какой-то причине отклонится от своей равновесной стратегии `T` и не свернет. У Михаэля будет еще несколько долей секунды для того, чтобы передумать. Следуя стратегии `NN`, Михаэль будет вынужден разбить машину и получить выигрыш -10, имея возможность увернуться и получить всего -5.



(c) Исходная игра (d) Равновесие (N, NT)

Рис. 2.4: Динамическая игра в «лобовую атаку».

Зато пара стратегий (N, NT) предписывает Шумахеру оптимально, с его точки зрения, реагировать на любой первый ход Ивана. Шумахер сворачивает, если Иван не свернет, и едет прямо, если Иван уступает ему дорогу (рисунок 2.4(d)). Зная, что Шумахер действует таким образом, Иван фактически выбирает между выигрышами в -5 (если он свернет) и 10 (если он не свернет). Это равновесие, полученное «задом наперед» — нахождением оптимальной стратегии сначала для Шумахера, делающего последний ход, затем для Ивана, ходящего первым — выдерживает нашу критику. Как мы увидим в следующем разделе, такой алгоритм позволяет найти равновесие в любой конечной игре, в которой игроки обладают всей информацией о всех сделанных ранее ходах.

2.1.3 Игры с совершенной информацией.

Наиболее простым для изучения подклассом динамических игр являются игры, в которых игроки делают свои ходы строго по очереди, причем в каждый момент времени каждому игроку известны все ходы, сделанные предыдущими игроками. Дадим определение.

Определение 17 Пусть каждое информационное множество в игре Γ содержит ровно одну вершину. Такая игра называется *игрой с совершенной информацией.*

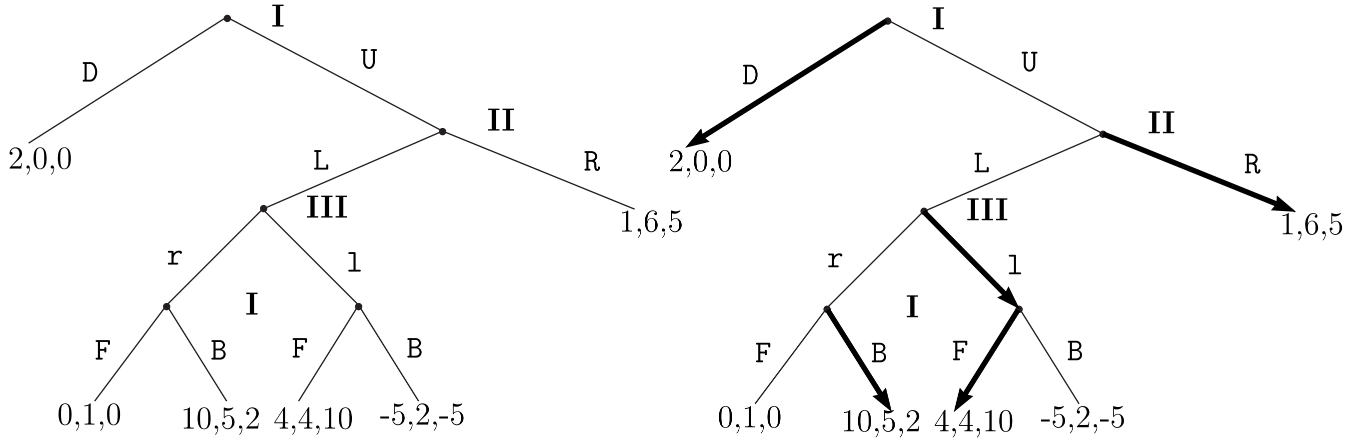
Игра «лобовая атака» между Иваном и Шумахером и игра «хулиган с гранатой» являются примерами игр с совершенной информацией. К этому же классу относятся такие настольные игры, как шашки, шахматы и крестики-нолики. Подкидной дурак, напротив, не является игрой с совершенной информацией: игрок не видит руки других игроков; следовательно, некоторые (на самом деле, почти все) информационные множества содержат более одного элемента.

Мы показали, что в игре «лобовая атака» можно построить равновесие, сначала находя оптимальное действие игрока, делающего последний ход. Аналогичный алгоритм можно применить и к любой игре с совершенной информацией, если количество ходов в этой игре конечно:

Теорема 5 (Цермело, 1913; Кун, 1953) В любой конечной игре с совершенной информацией есть равновесие в чистых стратегях.

Полное доказательство этой теоремы, использующее формальное определение игры в развернутой форме, содержится в Приложении Б, однако сама идея доказательства очень проста. Мы действует методом *обратной индукции.* Нам нужно построить профиль стратегий — то есть для каждого информационного множества (то есть для каждой вершины, так как речь идет об игре с совершенной информацией), найти действие игрока в этом множестве. Возьмем все вершины, такие, что ниже этих вершин игра заканчивается. Найдем оптимальное действие каждого игрока в каждой такой вершине. Далее рассмотрим вершины одним уровнем выше и найдем оптимальные действия игроков в них; так как игра является конечной, мы рано или поздно придем к начальной вершине.

Пример использования этого алгоритма показан на рисунке 2.5(a).



(a) Исходная игра

(b) Решение игры методом обратной индукции

Рис. 2.5: Обратрая индукция в игре с совершенной информацией.

Если первый ход игрока I будет `U`, а ходы игроков II и III— соответственно `L` и `r`, то второй ход игрока I должен быть `B`. Если игрок III сделает ход `l`, то следующий ход игрока I должен быть `F`. Если эти планы известны игроку III, то его ход должен быть `l`. Игрок II сделает ход `R`, а первый ход игрока I будет `D`.

К классу конечных игр с совершенной информацией принадлежат такие известные игры, как крестики-нолики, шашки и шахматы. Эти игры являются конечными (по правилам шахмат, при троекратном повторении позиции объявляется ничья) и могут быть решены методом обратной индукции. Между крестиками-ноликами, шашками и шахматами нет принципиальной разницы, однако практическая возможность нахождения такого решения зависит от числа ходов в игре. Легко проверить, что в «крестиках-ноликах» каждый игрок может обеспечить себе ничью (или выигрыш, если его противник ошибется и отклонится от равновесной стратегии). Недавно таким же образом была решена одна из разновидностей шашек. Компьютерная программа Chinook, созданная профессором Джонатаном Шейфером из канадского Университета штата Альберта, реализует равновесную стратегию, обеспечивающую как минимум ничью при любой стратегии противника (Шейфер и др., 2007). Теоретически, похожий результат должен существовать и для шахмат. Однако решение шахмат пока не представляется возможным, так как дерево этой игры слишком велико. В шашках существует порядка 10^{20} возможных позиций; при этом решение шашек потребовало несколько месяцев работы сотен персональных компьютеров. В шахматах число позиций превышает 10^{40}, так что с точки зрения сложности стратегий, шахматы настолько сложнее шашек, насколько шашки сложнее крестиков-ноликов. Вряд ли шахматы будут решены в обозримом будущем.

Сжигание мостов.

Генерал командует армией, которая защищает город, находящийся на берегу реки. Между городом и другим берегом проложен мост, по которому армия может, при необходимости, отступить. На город готовится напасть вражеская армия. Генерал имеет возможность уничтожить мост до того, как враг решится атаковать (`B`), или не уничтожать мост (`N`). После того, как враг наблюдает действие генерала, он решает, атаковать город (A), или нет (S). Если враг напал и мост не уничтожен, то генерал может либо принять решение сражаться (F), либо отступить (R). Если мост уничтожен и враг напал, то генерал может только сражаться. Выигрыш каждой стороны составляет 10, если на конец игры она обладает городом, но сражения не произошло; 0 если сражения не было, но сторона осталась без города; и -5, если было сражение. Дерево этой игры и его решение показано на рисунке 2.6.

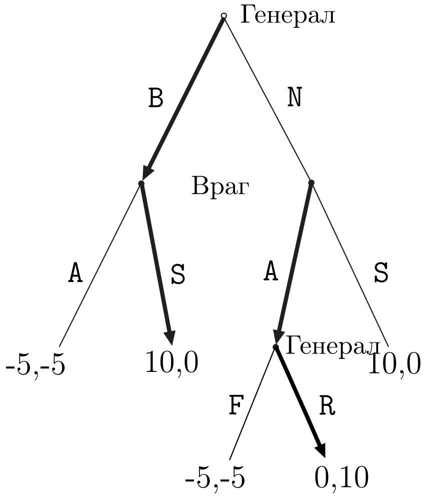


Рис. 2.6: Сжигание мостов.

В нашей игре генерал примет решение сжечь мост для того, чтобы перекрыть себе возможность к отступлению. Такое равновесие возможно, если обе стороны считают, что ущерб от сражения выше, чем ценность обладания городом.

Русская рулетка.

Поручик Ржевский и корнет Оболенский поспорили из-за дамы. Они договорились решить этот вопрос игрой в русскую рулетку. Правила игры такие: в револьвер заряжается ровно один патрон, после чего на револьвере вращается барабан. Далее г-н Ржевский берет револьвер и решает, что ему делать: выстрелить себе в висок или сдаться и проиграть спор. Если он решит выстрелить, то с вероятностью $\frac{1}{6}$ в стволе окажется патрон, и Ржевский погибнет (а Оболенский — выиграет спор). С вероятностью $\frac{5}{6}$ патрона в стволе не будет. В таком случае, револьвер переходит к г-ну Оболенскому, который также должен решить, что ему делать: стрелять или сдаваться. При передаче хода барабан не крутится, так что вероятность погибнуть при втором выстреле при условии, что первый выстрел был холостой, равна $\frac{1}{5}$. Револьвер переходит из рук в руки до тех пор, пока после пятой попытки в стволе не остается ровно один патрон. Каждый из господ гусаров оценивает победу в одну единицу полезности, смерть — в ноль единиц, поражение — $\frac{2}{3}$ единиц. Дерево этой игры изображено на рисунке 2.7.

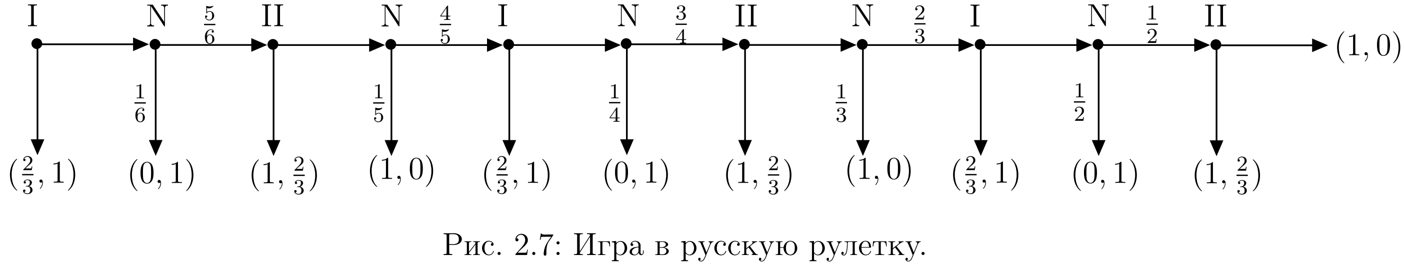


Рис. 2.7: Игра в русскую рулетку.

Первым игроком в этой игре является поручик Ржевский; далее (при условии, что Ржевский решает стрелять) делает ход Природа, которая с вероятностью $\frac{1}{6}$ решает, что должен произойти выстрел; далее (при условии, что Ржевский остается жив) ходит Оболенский. Решение этой игры показано на рисунке 2.8.

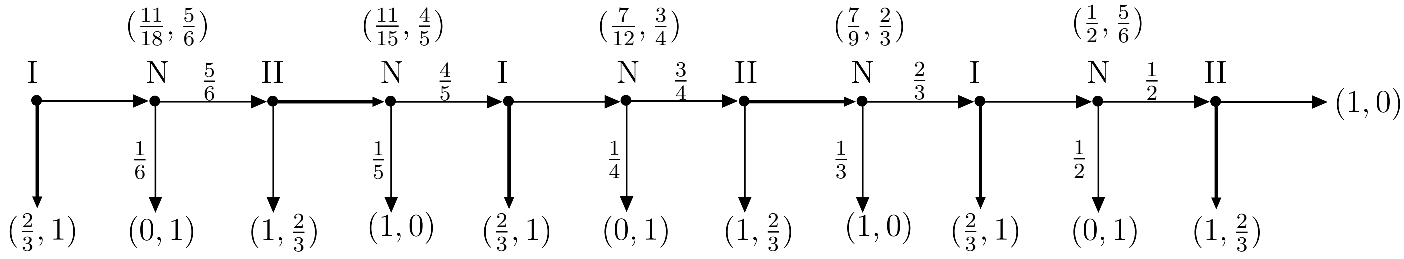


Рис. 2.8: Игра в русскую рулетку — решение.

На последнем ходе корнет Оболенский предпочтет сдаться, так как в случае нажатия на курок он погибнет с вероятностью 1. Следовательно, при условии, что Оболенский сдастся на последнем ходу, ожидаемый выигрыш игроков при нажатии Ржевским на курок будет $(\frac{1}{2}, \frac{5}{6})$. Аналогично, при нажатии на курок Оболенским на предыдущем ходе выигрыши будут $(\frac{7}{9}, \frac{2}{3})$. Продолжая решение таким способом, получим, что Ржевский сдастся при первом же ходе.

Обратная индукция в телеигре Survivor.

Survivor[2] было одним из самых популярных «реалити шоу» на американском телевидении. Первый сезон был показан телекомпанией CBS летом 2000 года. Участники шоу («племя») находились на необитаемом острове. Задачей каждого было найти себе пропитание и ночлег. Каждые 3 дня участники («совет племени») решали, кого следует изгнать из племени (изгоняемый покидал игру). Перед советом племени все участники проходили испытание на силу, смекалку или выдержку. Победитель испытания не мог быть изгнан из племени на ближайшем совете. После последнего совета, когда участников осталось всего двое, победителя выбирали последние 10 выбывших участников.

В конце первого сезона в игре оставалось трое человек: Руди, Рич и Келли. Руди, самый старший из участников, был очень популярен и рассчитывал выиграть итоговое голосование вне зависимости от того, кто (Келли или Рич) будет изгнан на последнем совете племени. Рич и Келли были моложе и имели гораздо больше шансов выиграть последнее перед советом испытание (надо было простоять как можно дольше в неудобной позе, держась одной рукой за тотемный столб). Победитель испытания получал иммунитет и фактическую возможность решать, кого из оставшихся двух участников следует изгнать с острова.

Проблема победителя заключалась в том, что, голосуя против Руди, он рисковал проиграть итоговое голосование, так как Руди был очень популярен среди выбывших игроков. Лучше было вообще не побеждать в итоговом испытании! Рассмотрим динамическую игру, в которой на первом этапе один из участников — Рич — решает, стоит ли ему сдаться и намеренно проиграть испытание. Дерево этой игры изображено на рисунке 2.9.

В этой игре на последнем ходе Келли и Рич проголосуют против Руди. Если Рича на первом этапе решит «стоять», то его ожидаемый выигрыш (с учетом равновесных действий на последнем ходе) будет равен $0.5 \times 0.8 + 0.1 \times 0 + 0.4 \times 0.2 = 0.48$. Если Рич решает «сдаться», то он его ожидаемый выигрыш будет $0.8 \times 0.8 + 0.2 \times 0 = 0.64$. Рич должен уступить, для того, чтобы не быть поставленным перед неудобным выбором. Если бы Рич выиграл последнее испытание, то он был бы вынужден либо проголосовать против Келли (и затем проиграть Руди на финальном голосовании), либо проголосовать против Руди (что также настроило бы против него большинство выбывших членов племени). Рич поступил единственным верным образом — сдался. Самое

[2]Этот случай взят из книги Диксита и Скит (2004, стр. 72-77).

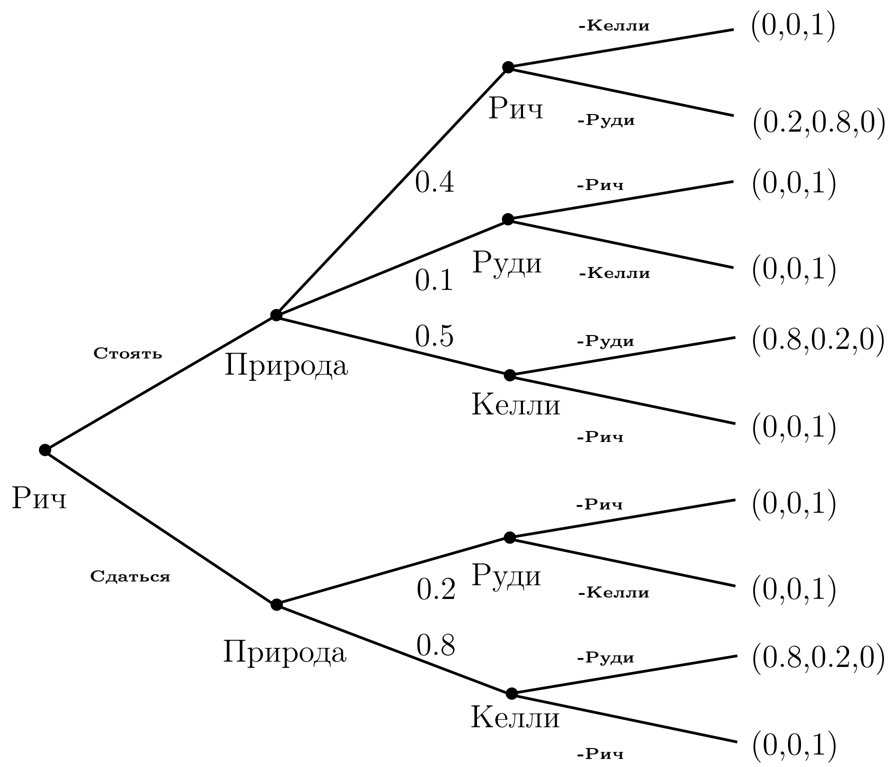


Рис. 2.9: Дерево в игре «Survivor».

примечательное, что Рич не изучал теорию игр, и проделал весь путь размышлений под палящим солнцем, стоя в неудобной позе. Расчет оказался правильным: соревнования выиграла Келли, которая затем проголосовала против Руди. Выбывшие члены племени проголосовали против Келли, что сделало Рича победителем всей игры.

Ограничение метода обратной индукции: игры «сороконожка» и «ультиматум».

Следующие два примера — «паталогические» динамические игры, в которых предсказанное равновесие, полученное обратной индукцией, не соответствует как нашим представлениям о том, как будут вести себя люди в аналогичных ситуациях, так и данным, полученным в ходе экономических экспериментов. В каждой из игр причина расхождения между теорией и действительностью разная. В первом случае — игре «сороконожка» — поведение игроков отличается от равновесного, поскольку нахождение равновесия требует большего числа шагов алгоритма обратной индукции. Во втором случае — игре «ультиматум» — денежные выигрыши игроков не отражают их истинных предпочтений, на которые могут влиять такие факторы, как представления о справедливости, зависть, или альтруизм.

Сороконожка. Богатый мизантроп позвал в гости двух студентов: Вову и Диму. Он предлагает Вове взять один рубль. Если он отказывается, то Диме предлагается 2 рубля. Если Дима отказывается, то Вове предлагается взять 4, и так далее. Наконец, Вове предлагается либо забрать 16 рублей, либо поделить эту сумму поровну между собой и Димой. Дерево этой игры представлено на рисунке 2.10.

Решая игру методом обратной индукции, мы приходим к неутешительному выводу: в самом начале игры Вова заберет один рубль; Дима не получит ничего.

Игра «сороконожка» показывает, что обратная индукция не всегда дает хороший прогноз человеческого поведения. Действительно, если бы вам предложили поиграть в «сороконожку», то вы вряд ли бы остановили игру на первом ходе. В ходе эксперимента, проведенного Мак-

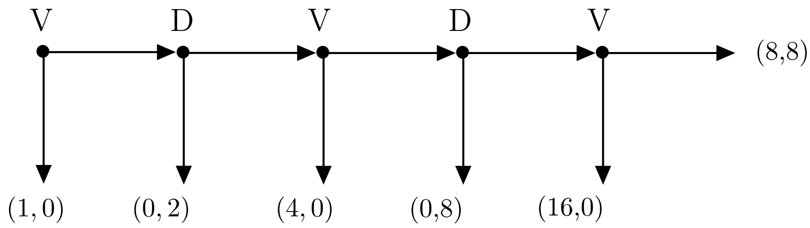


Рис. 2.10: Игра «сороконожка».

кельви и Полфри (1992), более 60% игроков останавливались на 3 или 4 ходе из 7 возможных. Однако дальнейшие исследования показали, что результат эксперимента сильно зависит от интеллектуального уровня игроков. Обычно, в качестве субъектов экперимента используют университетских студентов. Паласиос-Уэрта и Волиш (2009) провели тот же эксперимент с шахматистами высокого уровня. Результаты разительно отличались: в большинстве случаев, игра останавливалась на первом же ходе; при этом, вероятность остановки на первом ходе возрастала с шахматным рейтингом игроков (гроссмейстеры всегда прекращали игру при первой же возможности). Показательно, что склонность играть равновесные стратегии зависит не только от собственного уровня, но и от уровня соперника: если обычный игрок знает, что он играет против профессионального шахматиста, то его собственное поведение будет больше соотвествовать равновесному, чем в том случае, когда он играет против другого обычного игрока.

Ультиматум. Олег предлагает Михаилу пропорции, в которых можно поделить 100 рублей. Пусть Олег предлагает оставить $p \in [0, 100]$ рублей себе, и оставить $100 - p$ Михаилу. Если Михаил соглашается (`A`), то эти платежи реализуются. Если он отказывается (`D`), то каждый игрок получает 0. На рисунке 2.11 изображено дерево этой игры.

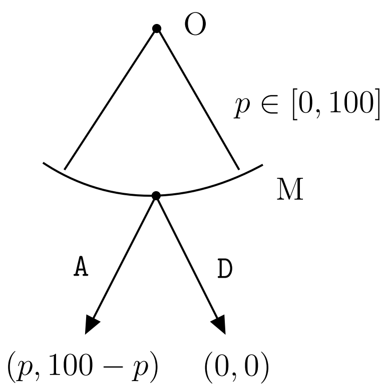


Рис. 2.11: Игра «ультиматум».

Как поступит Михаил при известном p? Если $p < 100$, то Михаил согласится, так как $100 - p > 0$. Если $p = 100$, то Михаил может и согласиться, и отказаться (его выигрыш будет равен нулю в обоих случаях). При условии, что реакция Михаила будет такой, Олег предложит дележ $p = 100 - \epsilon$, где $\epsilon > 0$ — небольшая величина. Михаил согласится на такой дележ.

Игра «ультиматум» — еще один пример того, как результат, полученный методом обратной индукции, не реализуется в реальной игре. Эта игра, как и «сороконожка», часто исследуется в экономических экспериментах, и результаты, как правило, также разительно отличаются от полученного выше равновесия. Первая причина состоит в том, что второй игрок, как правило, отвергает дележ, который он считает несправедливым. В некоторых экспериментах, вторые игроки отвергали дележи, предлагавшие им вплоть до половины от имевшейся у первого игрока суммы. Первый игрок, предвидя это, «делится» (Камерер, 2003).

Второй причиной, почему экспериментальные результаты отличаются от предсказанных моделью $p = 100 - \epsilon$, является альтруизм. Хоффман и др. (1996) исследовали так называемую «игру диктатора», в которой игрок, обладающий определенной суммой денег, может поделиться частью этой суммы с неизвестным ему реципиентом. При этом реципиент, в отличие от второго игрока в «ультиматуме», не имеет возможности отказаться или заблокировать дележ. В эксперименте, 46% диктаторов пожертвовали не менее $3 из имеющихся у них $10, при том, что им не была известна личность реципиентов. В той же работе, однако, было показано, что при альтернативных условиях эксперимента, когда личности «диктаторов» не известны экспериментаторам, пожертвования резко сокращаются (до 16%). Авторы мотивируют это тем, что когда человеку известно, что за его альтруистическими действиями никто не наблюдает, у человека меньше стимулов делиться с неизвестным ему человеком. Однако в других работах было показано, что на степень альтруизма влияет большое число факторов — таких, как ожидаемое состояние реципиента (бедным дают больше), восприятие средств, имеющихся у диктатора (человек с меньшей вероятностью поделится, если воспринимает свои деньги как заработанные, а не как подарок), и так далее. Человеческое поведение в играх типа «ультиматум» и «диктатор» до конца не изучено и продолжает оставаться актуальной темой для исследований.

2.1.4 Смешанные стратегии в динамической игре

Как нам определить смешанные стратегии для игр в развернутой форме? Конечно же, можно просто расширить множество чистых стратегий до множества распределений вероятности на нем. Формально, множеством смешанных стратегий игрока i будет

$$\Sigma_i = \Delta^{|\times_{h_i \in H_i} A(h_i)|-1}, \tag{2.2}$$

где, как мы помним, $\times_{h_i \in H_i} A(h_i)$ есть множество чистых стратегий, то есть множество всех возможных комбинаций действий игрока во всех его информационных множествах.

Какой длины вектор необходим, чтобы задать смешанную стратегию? В игре «лобовая атака», смешанная стратегия для Михаэля Шумахера будет состоять из вероятностей p_1, p_2, p_3, и $1 - p_1 - p_2 - p_3$, с которыми он будет играть свои чистые стратегии (см. таблицу 2.1). Для Ивана смешанная стратегия будет определяться вероятностями q и $1 - q$.

		Михаэль				
		TT	TN	NT	NN	
Иван	T	0,0	0,0	-1,1	-1,1	q
	N	1,-1	-2,-2	1,-1	-2,-2	$1 - q$
		p_1	p_2	p_3	$1 - p_1 - p_2 - p_3$	

Таблица 2.1: Петр и Михаэль: смешанные стратегии

В общем случае, длина вектора, определяющего смешанную стратегию, будет равна числу чистых стратегий минус 1:

$$\dim(\Sigma_i) = \prod_{h_i \in H_i} |A(h_i)| - 1. \tag{2.3}$$

Здесь $\dim(\cdot)$ означает размерность множества. Так, у Шумахера смешанная стратегия задается тремя параметрами p_1, p_2, и p_3. Случайное поведение игроков можно задать и более простым способом. Предположим, что Михаэль и Иван играют смешанные стратегии $(p_1, p_2, p_3, 1 - p_1 - p_2 - p_3)$ и $(q, 1 - q)$. Давайте посчитаем вероятность того, что Михаэль свернет (то есть выберет действие T) *в том случае, если Иван свернет (выберет действие* T*)*. Легко проверить, что эта величина есть

$$p_1' = p_1 + p_2. \tag{2.4}$$

Аналогично, в том случае, если Иван не свернет, Михаэль сворачивает с вероятностью

$$p'_2 = p_1 + p_3. \tag{2.5}$$

Вероятности (p'_1, p'_2) являются *поведенческой стратегией* Михаэля.

Дадим формальное определение.

Определение 18 Множество поведенческих стратегий игрока i есть

$$B_i = \times_{h_i \in H_i} \Delta^{|A(h_i)|-1}. \tag{2.6}$$

Поведенческая стратегия предписывает, для каждого информационного множества, с какой вероятностью нужно выбирать каждое из действий. Исследовать игру с помощью поведенческих стратегий значительно проще, чем с помощью смешанных. Действительно,

$$\dim(B_i) = \sum_{h_i \in H_i} (|A(h_i)| - 1). \tag{2.7}$$

Если у игрока 3 информационных множества, в которых возможно по 3, 4 и 5 действий, то размерность вектора поведенческой стратегии будет равно $3 + 4 + 5 - 3 = 9$, а размерность вектора смешанной стратегии — $3 \times 4 \times 5 - 1 = 59$.

Определим, как в общем случае получать поведенческие стратегии из смешанных. Если $R_i(h_i)$ — множество чистых стратегий игрока i, допускающих прохождение игры через информационное множество h_i при каких-то s_{-i}, то вероятность того, что игрок i выберет действие a_i в информационном множестве h_i, есть

$$b_i(a_i|h_i) = \frac{\sum_{s_i \in R_i(h_i), s_i(h_i)=a_i} \sigma_i(s_i)}{\sum_{s_i \in R_i(h_i)} \sigma_i(s_i)}. \tag{2.8}$$

Здесь, $\sigma_i(s_i)$ — вероятность сыграть чистую стратегию s_i при смешанной стратегии σ_i. Обозначим за $b_i(\sigma_i)$ поведенческую стратегию, полученную таким образом из смешанной стратегии σ_i (в качестве примера — (p'_1, p'_2)). Обозначим за $\sigma_i(b_i)$ множество всех смешанных стратегий, приводящих к поведенческой стратегии b_i.

Имеется следующий результат.

Теорема 6 (Кун, 1953). Для всех игр с полной памятью, смешанные и поведенческие стратегии эквивалентны. То есть для всех σ_i, σ_{-i}, мы имеем

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = u_i(b_i(\sigma_i), b_{-i}(\sigma_{-i})), \tag{2.9}$$

а для всех b_i, b_{-i} и всех $\sigma_i \in \sigma_i(b_i)$,$\sigma_{-i} \in \sigma_{-i}(b_i)$ —

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = u_i(b_i, b_{-i}). \tag{2.10}$$

В игре с полной памятью каждый игрок, в каждом информационном множестве, помнит всю последовательность сделанных им ходов, а также не забывает все однажды увиденные им ходы других игроков. Подавляющее большинство игровых взаимодействий в экономике, политологии и других общественных науках, являются играми с полной памятью.

Рассмотрим пример игры без полной памяти. Водитель едет домой в слегка нетрезвом состоянии (рисунок 2.12). На дороге два поворота, на которых можно повернуть направо (`R`) или поехать прямо (`S`). Водителю нужно повернуть направо на втором повороте. Но проехав первый поворот, он тут же забывает, что его проехал.

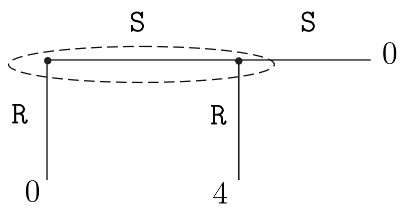


Рис. 2.12: Незадачливый шофер

В игре две чистые стратегии: R и S. **Обе** приносят нулевой выигрыш. Соответственно, выигрыш при любой смешанной стратегии тоже будет нулевым: если игрок с вероятностью p всегда сворачивает (то есть играет чистую стратегию R), и с вероятностью $1-p$ никогда не сворачивает (чистая стратегия S), то его ожидаемый выигрыш будет $0 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = 0$. Если же игрок принимает поведенческую стратегию «при любой возможности, поворачивать направо с вероятностью p», то его ожидаемый выигрыш будет $0 \cdot p + (1-p) \cdot (4 \cdot p + 0 \cdot (1-p)) = 4p(1-p)$. Поведенческая стратегия $p = \frac{1}{2}$ принесет ему ожидаемый выигрыш, равный 1. Следовательно, в этой игре смешанные и поведенческие стратегии не эквивалентны.

Верю - не верю.

В колоде, рубашкой кверху, лежат две карты: шестерка и туз. Первый игрок берет одну карту, смотрит ее, и называет ее достоинство (6 или туз). Если первый игрок сказал «6», то он проигрывает второму игроку 1 рубль. Если первый игрок сказал «туз», то второй игрок может поверить или не поверить. Если второй игрок поверил, то он проигрывает первому игроку 1 рубль. Если второй игрок не поверил, то первый игрок открывает карту. Если это туз, то первый выигрывает 2 рубля. Если это шестерка, то первый игрок проигрывает 2 рубля.

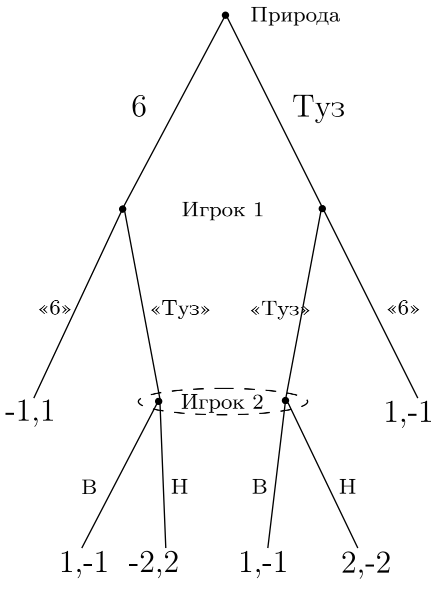


Рис. 2.13: Игра верю - не верю

Дерево этой игры показано на рисунке 2.13. Первый ход делает Природа — она решает, какую карту получит первый игрок. У первого игрока два информационных множества, и, соответственно, четыре стратегии. Однако любая стратегия, которая предписывает заявлять «6» при наличии туза, слабо доминируется стратегией, которая при наличии туза предписывает говорить «туз». Поэтому поведенческой стратегией Игрока 1 будем считать p — вероятность того, что этот игрок заявит «туз» при условии, что у него на руках шестерка. Стратегия игрока 2 — вероятность q сказать «не верю». Выразим ожидаемые выигрыши обоих игроков через p и

q:

$$\begin{aligned} u_1(p,q) &= -\frac{1-p}{2} - 2q\frac{p}{2} + (1-q)\frac{p}{2} + 2\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}(1-q) = p - \frac{3}{2}pq + \frac{q}{2}, \\ u_2(p,q) &= -u_1(p,q). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Равновесием Нэша в этой игре является $p^* = \frac{1}{3}$, $q^* = \frac{2}{3}$. Равновесные стратегии в игре «верю - не верю» являются смешанными. Действительно, если второй игрок всегда верит, то первому игроку будет выгодно всегда говорить «туз». В таком случае, второй игрок должен все время проверять карту первого игрока. Однако же если второй игрок всегда проверяет, то первый игрок должен всегда говорить «6», получив шестерку. Но тогда, если первый игрок никогда не врет, второму нет смысла проверять его карту! По сути, мы имеем игру типа однопериодной игры «инспекция». Очередность ходов здесь компенсируется асимметричной информацией: первый игрок знает, какая карта у него на руках, а второй — нет.

2.1.5 Совершенство по подыграм

Метод обратной индукции можно использовать не только для игр с совершенной информацией. Дадим такое определение.

Определение 19 Пусть Γ — игра в развернутой форме. *Подыгра* $\Gamma(x)$ — эта часть дерева игры, которая начинается с некоторой вершины x, и удовлетворяет следующим свойствам:

1. x — единственный элемент в своем информационном множестве.
2. Информационные множества, содержащие вершины из подыгры $\Gamma(x)$, не содержат других вершин.

Приведем пример — вариацию на тему игры «сжигание мостов». Генерал должен защищать город на берегу реки. До того, как враг нападает, генерал принимает решение, сжигать мост, соединяющий город с другим берегом (`B`), или нет (`N`). На этот раз враг не является игроком, и нападает автоматически. Далее командиры двух отрядов (подчиненные генерала) принимают решение: бежать с поле боя (`R`), или нет (`F`). В случае, когда мост не разрушен, выигрыши командиров в зависимости от принимамых ими решений таковы:

		Командир II	
		R	F
Командир I	R	3,3	5,2
	F	2,5	4,4

Если мост уничтожен, то отступающему отряду придется наводить переправу во время боя. Выигрыши командиров тогда будут

		Командир II	
		R	F
Командир I	R	1,1	3,2
	F	2,3	4,4

Наконец, выигрыш генерала равен 1, если город остался защищать хотя бы один отряд, и 0, если оба отряда бежали. Дерево этой игры показано на рисунке 2.14.

Формально, эта игра не является игрой с совершенной информацией, так как после первого хода генерала, два командира принимают решения одновременно. Однако эту игру можно решить способом, очень похожим на метод обратной индукции, используемый нами для решения игр с совершенной информацией. У нас две подыгры, соответствующие каждому из двух возможных действий генерала. В первой подыгре, когда мост не сожжен, равновесный профиль

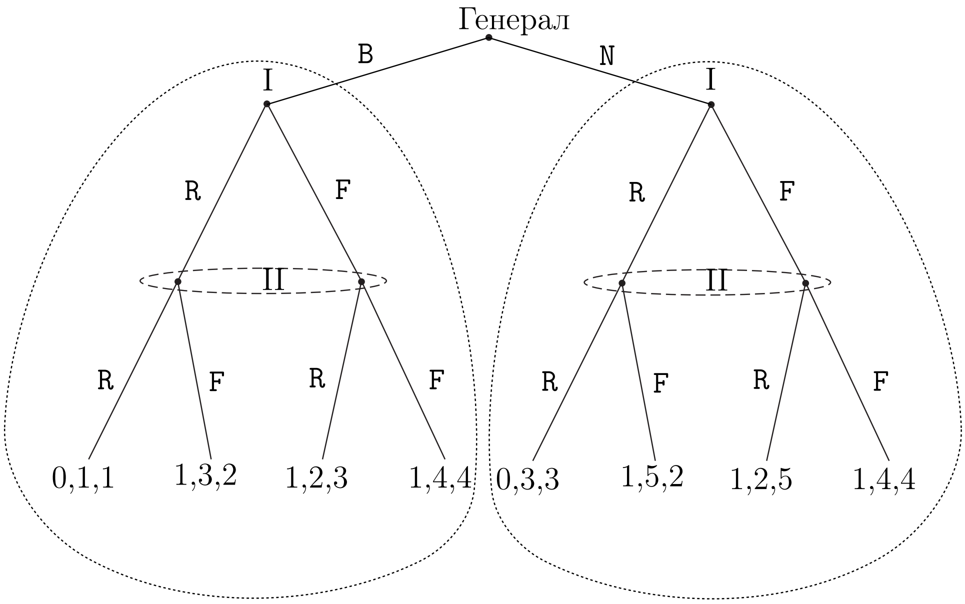


Рис. 2.14: Сжигание мостов - 2. Подыгры выделены пунктиром.

стратегий первого и второго командира будет (R, R). Во второй подыгре, когда мост сожжен, равновесие будет (F, F). Следовательно, генерал получает выигрыш 0, если делает ход N, и 1, если делает ход B. Дадим определение равновесия, которое мы получили.

Определение 20 Пусть Г — динамическая игра. Профиль стратегий является *совершенным по подыграм,* если он является равновесным для каждой из подыгр Г.

Любое равновесие, полученное методом обратной индукции, является совершенным по подыграм.

В игре «лобовая атака» две подыгры. В каждой подыгре Иван принимает решение, свернуть ему, или нет. Каждая подыгра соответствует одному из решений Петра (свернуть/не свернуть). В игре «ультиматум» континуум подыгр, по одной для каждого $p \in [100]$. В каждой подыгре Михаил решает, согласиться ему или отказаться с предложенным дележом.

Пример. На рисунке 2.15 показана игра из работы Рабина (1988) и учебника Фаденберга и Тироля (1991, стр.99-100).

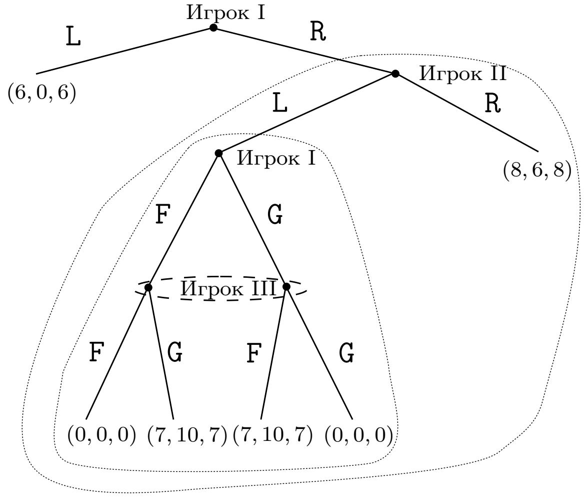


Рис. 2.15: Координация или нет?

У этой игры две подыгры (показаны пунктиром). Подыгра 2 является игрой в координацию между игроками I и III. У этой игры три равновесия. Два из них в чистых стратегиях, дающих выигрыш $(7, 10, 7)$ и одно — в смешанных, которое дает выигрыш $(3.5, 5, 3.5)$. Если в подыгре 2 играется одно из двух координационных равновесий ($(\mathtt{F}, \mathtt{G})$ либо $(\mathtt{G}, \mathtt{F})$), то игрок II должен делать ход $\mathtt{L}$. Если в подыгре 2 играется равновесие в смешанных стратегиях (то есть игроки I и III не координируют свои действия), то игрок II должен сделать ход $\mathtt{R}$. Следовательно, в подыгре 1 выигрыш игрока I составит либо 7, либо 8, то есть его первый ход всегда будет $\mathtt{R}$. В итоге это дает нам три совершенных по подыграм равновесия: $((\mathtt{R}, \mathtt{G}), \mathtt{L}, \mathtt{F})$, $((\mathtt{R}, \mathtt{F}), \mathtt{L}, \mathtt{G})$ и $((\mathtt{R}, \frac{1}{2}\mathtt{G} + \frac{1}{2}\mathtt{F}), \mathtt{R}, \frac{1}{2}\mathtt{G} + \frac{1}{2}\mathtt{F})$.

Может ли ход $\mathtt{L}$ быть разумным с точки зрения игрока I? Пусть, например, игрок I не может координировать свои действия с игроком III в подыгре 2. Если игрок II об этом не знает (и думает, что I и III будут координироваться), то в итоге выигрыши игроков в подыгре 1 составят $(3.5, 5, 3.5)$. В этом случае игроку I в начале игры надо сделать ход $\mathtt{L}$. Таким образом, понятие совершенства по подыграм предполагает не только то, что все игроки ожидают, что во всех подыграх будут реализовываться равновесия Нэша, но и то, что во всех подыграх ожидаются одни и те же равновесия (Фаденберг и Тироль, 1991, стр. 100).

2.1.6 Примеры.

Модель ценовой конкуренции Штакельберга.

Рассмотрим модель ценовой конкуренции из Главы 1. В стране N два производителя виджетов. Обе фирмы должны решить, сколько штук виджетов произвести в течение ближайшего месяца. Пусть $q_1 \in [0, \infty)$ — объем производства первой фирмы, $q_2 \in [0, \infty)$ — второй. Пусть взаимодействие фирм реализуется в 2 этапа.

1 этап. Фирма 1 выбирает q_1.

2 этап. Фирма 2 выбирает q_2.

Как и раньше, функция спроса на виджеты имеет вид $P = 1 - q_1 - q_2$, где P — максимальная цена, по которой удастся продать $q_1 + q_2$ штук в течение месяца. Предположим, что издержки производства у фирмы i равны cq_i, где $0 \le c < 1$. Прибыль фирмы равна ее выручке за вычетом издержек производства:

$$\begin{aligned} u_1 &= q_1 P - q_1 = q_1(1 - q_1 - q_2) - cq_1 \\ u_2 &= q_2 P - q_2 = q_2(1 - q_1 - q_2) - cq_2. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Найдем совершенное по подыграм равновесие. В этой игре для каждого q_1, выбранного первой фирмой, определяется подыгра, в которой фирма 2 выбирает q_2. Решением максимизационной задачи Фирмы 2 будет

$$q_2(q_1) = \begin{cases} \frac{1-q_1-c}{2}, & q_1 < 1 - c \\ 0, & q_1 \ge 1 - c, \end{cases} \tag{2.13}$$

Уравнение (2.13) задает стратегию игрока 2 в совершенном по подыграм равновесии. Теперь необходимо найти q_1, который максимизирует выигрыш первого игрока при условии, что второй игрок выбирает стратегию (2.13). Подставим $q_2(q_1)$ в u_1:

$$u_1(q_1, q_2(q_1)) = \begin{cases} \frac{q_1}{2}(100 - q_1 - c), & q_1 < 1 - c, \\ q_1(1 - q_1 - c), & q_1 \ge 1 - c. \end{cases} \tag{2.14}$$

Максимизируя $u_1(q_1, q_2(q_1))$ по q_1, получим $q_1^* = \frac{1-c}{2}$, $q_2(q_1^*) = \frac{1-c}{4}$. Заметим, что это решение отличается от равновесия в игре Курно, в которой обе фирмы ходят одновременно (тогда мы имеем $q_1^* = q_2^* = \frac{1-c}{3}$). Возможность делать первый ход дает фирме 1 преимущество: в модели Штакельберга ее прибыль выше, чем в модели Курно. При этом прибыль фирмы 2 будет ниже.

Модель ценовой конкуренции с инвестициями в производственные мощности.

Постановка модели Штакельберга вызывает ряд вопросов. Почему в какой-нибудь отрасли у одной из фирм будет преимущество, позволяющее ей первой решать, сколько производить? Что вообще означает «выбор объемов производства»? В долгосрочной перспективе, количество товара, производимого фирмой, определяется ее производственными мощностями. Если фирма хочет увеличить объем производства, то она должна построить новый завод. При этом начальные условия у фирм могут быть разными. Одна из фирм может обладать преимуществом, позволяющим ей первой принимать решение относительно того, какого размера завод следует построить. Например, фирма может первой разработать технологию производства нового товара; обладать бóльшими финансовыми возможностями; обладать необходимым административным ресурсом. Фирма, которая уже построила завод, обладает более низкими предельными издержками по сравнению с фирмой, которой только предстоит принять решение о том, какого размера завод ей предстоит построить (и, соответственно, сколько товара производить). Такова интерпретация классической (Штакельберг, 1934) модели ценовой конкуренции, предложенная Спенсом (1977) и Дикситом (1979, 1980). Ниже представлена модель ценовой конкуренции между двумя фирмами, взятая из работы Диксита (1980).[3]

Предположим, что две фирмы играют в динамическую игру со следующим порядком ходов:

1 этап. Фирма 1 выбирает $\bar{q}_1$ — установленную мощность перед тем, как на рынок войдет Фирма 2.

2 этап. Фирмы 1 и 2 выбирают q_1, q_2 — объемы производства.

Функции полезностей двух фирм при этом будут

$$\begin{aligned} U_1 &= Pq_1 - c\bar{q}_1 - c\cdot\max\{0, q_1 - \bar{q}_1\}, \\ U_2 &= Pq_2 - cq_2, \end{aligned} \tag{2.15}$$

где $0 < c \leq \frac{1}{2}$ — стоимость установленной мощности, позволяющей производить 1 единицу товара за указанный период. Таким образом, мы предполагаем, что на втором этапе предельные издержки Фирмы 1 равны 0 при $q_1 < \bar{q}_1$ и c при $q_1 > \bar{q}_1$, так как затраты на строительство завода на первом этапе являются невозвратными. Предельные издержки фирмы 2 всегда равны c.

Решение задачи максимизации полезности на втором этапе дает нам следующую функцию реакции для первой фирмы:

$$q_1(q_2) = \begin{cases} 0, & q_2 \geq 1, \\ \frac{1-q_2}{2} & , q_2 \in [1 - 2\bar{q}_1, 1), \\ \bar{q}_1, & q_2 \in [1 - 2\bar{q}_1 - c, 1 - 2\bar{q}_1), \\ \frac{1-q_2-c}{2}, & q_2 < 1 - 2\bar{q}_1 - c. \end{cases} \tag{2.16}$$

Для второй фирмы функция реакции будет такой же, как и в задачах Курно и Штакельберга:

$$q_2(q_1) = \begin{cases} 0, & q_1 \geq 1 - c, \\ \frac{1-q_2-c}{2}, & q_2 < 1 - c. \end{cases} \tag{2.17}$$

Нам нужно найти решение системы

$$q_1(q_2) = q_1,\ q_2(q_1) = q_1 \tag{2.18}$$

для всех возможных значений $\bar{q}_1$. Так как графики функций реакции пересекаются ровно в одной точке, решение единственно. Всего возможно три случая (рисунок 2.16).

[3]Обзоры таких работ содержатся в книге Тироля (1987, стр. 314) и Вивеса (1999, гл. 7).

1. $q_1 < \bar{q}_1$. Равновесные q_1, q_2 являются решением системы

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1-q_2}{2}, \\ q_2 &= \frac{1-q_1-c}{2}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

   Решая эту систему, получаем $q_1 = \frac{1+c}{3}$, $q_2 = \frac{1-2c}{3}$. Это решение существует если $\bar{q}_1 > \frac{1+c}{3}$.

2. $\bar{q}_1 < q_1$. Равновесные q_1, q_2 являются решением системы

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1-q_2-c}{2}, \\ q_2 &= \frac{1-q_1-c}{2}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

   Решая эту систему, получаем $q_1 = \frac{1-c}{3}$, $q_2 = \frac{1-c}{3}$. Это решение существует если $\bar{q}_1 < \frac{1-c}{3}$.

3. $\bar{q}_1 = q_1$. Тогда мы будем иметь $q_2 = \frac{1-\bar{q}_1-c}{2}$. Это решение существует если $\bar{q}_1 \in [\frac{1-c}{3}, \frac{1+c}{3}]$.

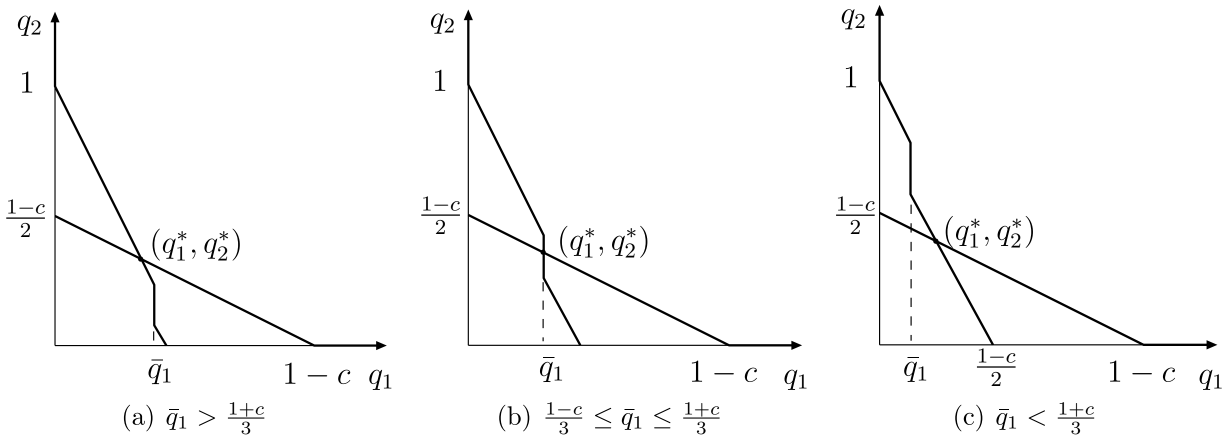


Рис. 2.16: Равновесие на втором этапе, в зависимости от $\bar{q}_1$.

Мы нашли, как q_1, q_2, реализуемые в совершенном по подыграм равновесии на втором этапе игры, зависят от $\bar{q}_1$. Можно подставить эти значения в U_1 и получить зависимость U_1 от $\bar{q}_1$. Для того, чтобы найти равновесие во всей игре, нам достаточно найти, при каком $\bar{q}_1$ достигается максимум полезности первой фирмы U_1. При данном $\bar{q}_1$, рыночная цена будет определяться уравнением

$$P = 1 - q_1 - q_2 = \begin{cases} \frac{1+2c}{3}, & \bar{q}_1 < \frac{1-c}{3} \\ \frac{1-\bar{q}_1+c}{2}, & \bar{q}_1 \in [\frac{1-c}{3}, \frac{1+c}{3}] \\ \frac{1+c}{3}, & \bar{q}_1 > \frac{1+c}{3}. \end{cases} \tag{2.21}$$

Функция полезности Фирмы 1 будет

$$U_1(\bar{q}_1) = \begin{cases} \frac{(1-c)^2}{9}, & \bar{q}_1 < \frac{1-c}{3}, \\ \frac{1-\bar{q}_1}{2}\bar{q}_1 - c\bar{q}_1, & \bar{q}_1 \in [\frac{1-c}{3}, \frac{1+c}{3}], \\ \frac{(1+c)^2}{9} - c\bar{q}_1, & \bar{q}_1 > \frac{1+c}{3}. \end{cases} \tag{2.22}$$

Максимизируя U_1 по $\bar{q}_1$, получим

$$\bar{q}_1 = \begin{cases} \frac{1+c}{3}, & c < \frac{1}{8}, \\ \frac{1}{2} - c, & c \in [\frac{1}{8}, \frac{1}{4}], \\ \frac{1-c}{3}, & c > \frac{1}{4}. \end{cases} \tag{2.23}$$

Что мы видим? Фирма 1 будет стараться построить часть своих производственных мощностей на первом этапе — те есть до того момента принятия решения Фирмой 2. Делая это, Фирма 1 рассчитывает получить преимущество в конкурентной борьбе с Фирмой 2 на втором этапе. Насколько серьезным будет это преимущество? Найдем равновесные объемы выпуска каждой фирмы и цену в зависимости от c:

	$\bar{q}_1$	q_1	q_2	P
$c < \frac{1}{8}$	$\frac{1+c}{3}$	$\frac{1+c}{3}$	$\frac{1-2c}{3}$	$\frac{1+c}{3}$
$\frac{1}{8} \leq c \leq \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} - c$	$\frac{1}{2} - c$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} + c$
$c > \frac{1}{4}$	$\frac{1-c}{3}$	$\frac{1-c}{3}$	$\frac{1-c}{3}$	$\frac{1-c}{3}$

Сравним эти результаты с тем случаем, когда обе фирмы находятся в равных условиях и принимают решения одновременно (эта модель была рассмотрена на страницах 15–16). При $c \geq \frac{1}{4}$ решения совпадают, то есть возможность инвестировать в установленную мощность не дает преимущества первой фирме. Однако при меньших издержках выпуск первой фирмы больше, а выпуск второй фирмы — меньше, чем в исходном случае. Мало того, рыночная цена P тоже будет выше, если одна из фирм может заранее инвестировать в производственные мощности. Стратегическое поведение первой фирмы не только приводит к большей прибыли для этой фирмы, но к тому же вредит потребителям, так как в итоге они получат меньший объем товара по большей штучной цене.

Насколько распространено такое стратегическое поведение? Согласно Гхемавату (1997, гл. 3), в начале 1970х годов компания Du Pont могла вводить новые мощности по производству диоксида титана именно для того, чтобы повлиять на стимулы конкурентов и не допустить увеличения их рыночной доли.

Диктатура, демократия и революция

Почему в одних странах происходят революции, а в других нет? Разберем модель из известной книги Дарона Асемоглу и Джеймса Робинсона (2005).[4]

В некотором государстве общество разделено на два класса: богатых и бедных. Исторически, в данной стране существовал авторитарный режим: все ключевые решения принимает диктатор и небольшая кучка богачей, которые его поддерживают. Неудивительно, что в этой стране богатые не платили налоги; бедные всегда были возмущены этим фактом. За последний год возмущение достигло предела, и над обществом нависла угроза революции — насильственного свержения власти и национализации всей собственности богатого класса.

Богатые понимают, что должны идти на уступки. У них есть два варианта. При первом варианте богатые обещают бедным более справедливое распределение доходов, но сохраняют политический контроль и возможность самим устанавливать ставку налогообложения в будущем (в том числе и через несколько лет, когда угроза революции пройдет). При втором варианте проходит демократизация общества. Бедные получают избирательные права (и юридические, и фактические), и богатые навсегда теряют контроль над экономической политикой (хотя, в отличие от революционного сценария, они сохраняют бóльшую часть своей собственности). Какой вариант выберут богатые? Станут ли бедные устраивать революцию?

Представим взаимодействие богатых и бедных в виде динамической игры. Первый ход делают богатые, которые решают, стоит ли вводить демократию (`D`), или нет (`N`). На следующем ходе устанавливается ставка налогообложения τ. При демократии налоги определяют бедные (так как их большинство). При авторитарном строе налоги определяют богатые. После того, как ставка налогообложения установлена, бедные решают, устроить революцию (`R`), или нет (`NR`). Наконец, если на первом ходе не была введена демократия, и если на третьем ходе не произошло революции, то богатые с вероятностью q снова устанавливают ставку налогообложения.

[4]Данный пример также разобран в книге Маккарти и Мейровица (2007).

Дерево этой игры показано на рисунке 2.17.

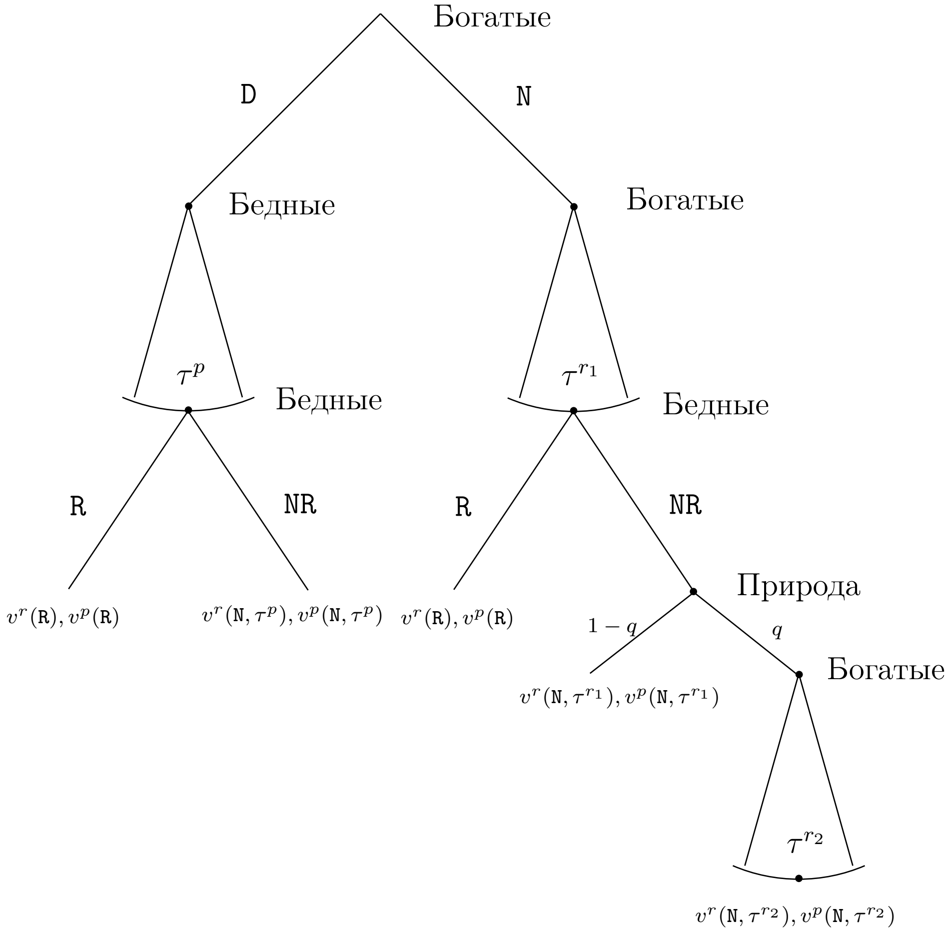


Рис. 2.17: Модель демократизации

Формально, стратегия бедных[5] будет (τ^p, d_D, d_R), где $\tau^p \in [0,1]$ — ставка налогообложения, устанавливаемая бедными (в том случае, если первый ход богатых будет $\mathtt{D}$), $d_D^p \in \{\mathtt{R}, \mathtt{NR}\}$ и $d_R^p : [0,1] \to \{\mathtt{R}, \mathtt{NR}\}$— решения, устраивать ли революцию при первом ходе богатых $\mathtt{D}$ и $\mathtt{N}$, соответственно. Последнее решение также зависит от τ^r. Стратегия богатых есть $(d^r, \tau^{r_1}, \tau^{r_2})$, где $\tau^{r_1}, \tau^{r_2} \in [0,1]$ — ставки налогооблажения, устанавливаемые богатыми в первый и во второй раз, $d^r \in \{\mathtt{D}, \mathtt{N}\}$ — решение богатых, проводить демократизацию, или нет.

Предположим, что при отсутствии революции, выигрыш элиты и народа будет зависеть от ставки налогообложения таким образом:

$$v^r(\mathtt{N}, \tau) = (1-\tau)y^r + (\tau - \frac{1}{2}\tau^2)\bar{y}, \tag{2.24}$$

$$v^p(\mathtt{N}, \tau) = (1-\tau)y^p + (\tau - \frac{1}{2}\tau^2)\bar{y}. \tag{2.25}$$

Здесь y^r — доход богатого гражданина, y^p — доход бедного, $\bar{y}$ — средний доход. Мы предполагаем, что налогообложение связано с издержками. При ставке налогообложения τ с каждого рубля дохода в бюджет попадает $\tau - \frac{1}{2}\tau^2$ рублей; последний член и есть издержки налогообложения. Пусть $y^r > y^p$ и $\bar{y} = \lambda y^p + (1-\lambda)y^r$, где $\lambda \geq \frac{1}{2}$ — доля бедных в общем числе граждан.

Предположим, что в случае революции, бедные отбирают у богатых весь их доход. При этом часть совокупного дохода μ уничтожается. Выигрыши богатых и бедных в случае революции

[5]Мы предполагаем, что и бедные, и богатые смогли решить проблему коллективных действий; поэтому все богатые (и все бедные) у нас представлены как один игрок.

будут такими:

$$\begin{aligned} v^r(\mathtt{R}) &= 0 && (2.26)\\ v^p(\mathtt{R}) &= \frac{\mu\bar{y}}{\lambda}. && (2.27) \end{aligned}$$

Найдем совершенное по подыграм равновесие.

Максимизируя $v^r(\mathtt{N}, \tau)$ по τ, получим, что оптимальная ставка налогообложения для богатых равна нулю. Следовательно, в любом совершенном по подыграм равновесии мы имеем $\tau^{r_2^*} = 0$, так как на последнем этапе игры богатые установят наилучшую, со своей точки зрения, ставку налогообложения.

Максимизируя $v^p(\mathtt{N}, \tau)$ по τ получим оптимальную ставку налогообложения для бедных:

$$\tau^{p^*} = \frac{\bar{y} - y^p}{\bar{y}}. \tag{2.28}$$

Подставим $\tau^{r_2^*}$ и τ^{p^*} в целевые функции народа и элиты. После раскрытия скобок мы получим

$$\begin{aligned} v^r(\mathtt{N}, \tau^{r_2^*}) &= y^r, && (2.29)\\ v^p(\mathtt{N}, \tau^{r_2^*}) &= y^p, && (2.30)\\ v^r(\mathtt{N}, \tau^{p^*}) &= \frac{1}{2\bar{y}}\left(2y^py^r + \bar{y}^2 - y^{p2}\right), && (2.31)\\ v^p(\mathtt{N}, \tau^{p^*}) &= \frac{1}{2\bar{y}}\left(\bar{y}^2 + y^{p2}\right). && (2.32)\\ & && (2.33) \end{aligned}$$

Рассмотрим, каким будет d_D^p — то есть решение бедных относительно революции при демократическом режиме. Мы имеем $v^p(\mathtt{N}, \tau^{p^*}) \geq v^p(\mathtt{R})$ если и только если

$$\mu \leq \bar{\mu} = \frac{\lambda}{2\bar{y}^2}(y^{p2} + \bar{y}^2). \tag{2.34}$$

Следовательно, в любом равновесии $d_D^{p\,*} = \mathtt{NR}$ если $\mu \leq \bar{\mu}$ и $d_D^{p\,*} = \mathtt{R}$ если $\mu > \bar{\mu}$.

Революции не произойдет, если величина μ достаточно мала (то есть если в ходе революции будет уничтожен достаточно большой процент благосостояния государства), либо если доля бедного населения достаточно близка к $\frac{1}{2}$. Революция произойдет, если средний доход бедного y^p достаточно низок, либо если μ высока (то издержки экспроприации богатых низки).

Теперь найдем равновесный d_R^p. При недемократическом режиме революция не произойдет если

$$(1-q)v^p(\mathtt{N}, \tau^{r_1}) + qv^p(\mathtt{N}, \tau^{r_2^*}) \geq v^p(\mathtt{R}). \tag{2.35}$$

Заметим, что это условие зависит от τ^{r_1} (произвольной ставки налогообложения, предложенной богатыми на предыдущем этапе игры) и $\tau^{r_2^*}$ (ставки налогообложения, предлагаемой богатыми на следующем этапе игры в совершенном по подыграм равновесии). Преобразуя это условие, получим

$$qy^p + (1-q)(y^p(1-\tau^{r_1}) + (\tau^{r_1} - \frac{1}{2}\tau^{r_1 2})\bar{y}) = y_p + (1-q)((\bar{y} - y^p)\tau^{r_1} - \frac{\bar{y}}{2}\tau^{r_1 2}) \geq \frac{\mu\bar{y}}{\lambda}, \tag{2.36}$$

или

$$d_R^{p\,*}(\tau^{r_1}) = \begin{cases} \mathtt{R}, & \mu > \frac{\lambda y_p + \lambda(1-q)((\bar{y} - y^p)\tau^{r_1} - \frac{\bar{y}}{2}\tau^{r_1 2})}{\bar{y}} \\ \mathtt{NR} & \mu \leq \frac{\lambda y_p + \lambda(1-q)((\bar{y} - y^p)\tau^{r_1} - \frac{\bar{y}}{2}\tau^{r_1 2})}{\bar{y}}, \end{cases} \tag{2.37}$$

Возможно три случая. Во-первых, при $\mu \leq \mu_0 = \frac{\lambda y_p}{\bar{y}}$ условие (2.36) будет верно при $\tau^{r_1} = 0$. Следовательно, мы будем иметь $\tau^{r_1 *} = 0$. Богатые смогут установить наиболее выгодные для себя налоги и при этом избежать революции.

Во-вторых, при $\mu \in (\mu_0, \mu_1)$, условие (2.36) будет верно для некоторых $\tau^{r_1} > 0$. Ожидаемый выигрыш $(1-q)v^p(\mathtt{N}, \tau^{r_1}) + qv^p(\mathtt{N}, \tau^{r_2 *})$ достигает максимума по τ^{r_1} при $\tau^{r_2} = \tau^{p*}$. Следовательно, если

$$(1-q)v^p(\mathtt{N}, \tau^{p*}) + qv^p(\mathtt{N}, \tau^{r_2 *}) = y_p + (1-q)\frac{(\bar{y} - y^p)^2}{2\bar{y}} \geq \frac{\mu \bar{y}}{\lambda} = v^p(\mathtt{R}) \tag{2.38}$$

или

$$\mu \leq \mu_1 = \frac{\lambda y^p}{\bar{y}} + (1-q)\frac{(\bar{y} - y^p)^2}{2}, \tag{2.39}$$

то мы будем иметь $\tau^{r_1 *} \leq \tau^{p*}$ (рисунок 2.18).

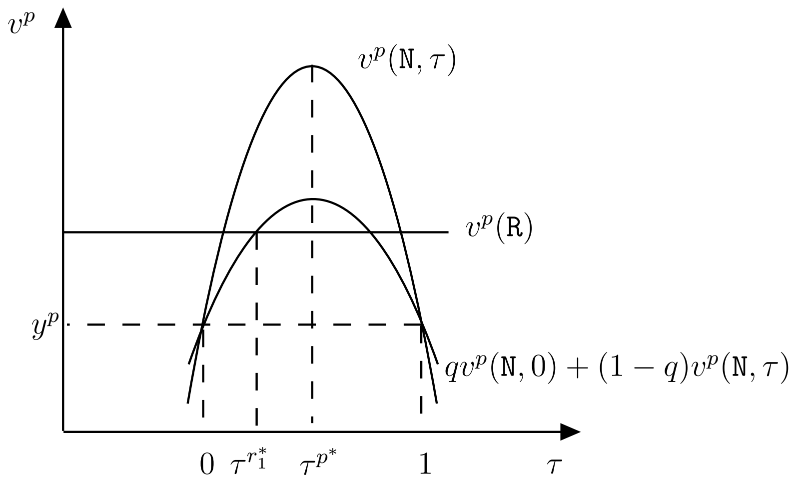


Рис. 2.18: Равновесная стратегия при $\mu < \underline{\mu}$ (предполагается, что $\bar{y} = 2y^p$).

В-третьих, при $\mu > \mu_1$ для всех $\tau^{r_1} \in [0, 1]$ мы имеем $d_R^{p*}(\tau^{r_1}) = \mathtt{R}$. Богатые могут выбрать любой τ^{r_1}, так как в любом случае на следующем ходу произойдет революция, и они получат нулевой выигрыш.

Наконец, найдем равновесное решение о демократизации d^r. Заметим, что $\mu_0 < \mu_1 < \bar{\mu}$. Возможно три случая.

1. $\mu > \bar{\mu}$. Тогда вне зависимости от d^r происходит революция. Следовательно, d^{r*} может быть любым.

2. $\mu \in [\bar{\mu}, \mu_1)$. Революция происходит только при $d^r = \mathtt{N}$. Следовательно, богатые выбирают $d^{r*} = \mathtt{D}$.

3. $\mu \leq \mu_1$. Революции не происходит ни при каком d^r. Богатые выбирают $d^{r*} = \mathtt{N}$, так как в этом случае $\tau^{r_1 *} \leq \tau^{p*}$.

Из трех перечисленных случаев наибольший интерес представляет второй. Почему богатые соглашаются ввести демократию, то есть навсегда отказаться от возможности устанавливать ставку налогообложения? Действительно, с их стороны было бы лучше, если они могли бы предложить бедным ставку налогообложения, достаточно высокую для того, чтобы предотвратить революцию, но ниже той, которая установилась бы при демократическом режиме. Однако это не всегда возможно. С вероятностью p богатые смогут нарушить данное им обещание τ^{r_1} и установить ставку налогообложения $\tau^{r_2} = 0$ после того, как угроза революции миновала. Понимая это, бедные могут совершить революцию, даже если богатые предложат им $\tau^{r_1} = \tau^{p*}$. Богатым не остается ничего, кроме как отказаться от возможности в дальнейшем устанавливать налоги.

Согласно Асемоглу и Робинсону, невозможность элит сдерживать данные народу обещания является одной из основных причин как для революций, так и для мирных и ненасильственных демократизаций во всем мире. Именно такой механизм, согласно Асемоглу и Робинсону, привел к демократизации и падению режима апартеида в Южно-Африканской республике. Исторически, территория ЮАР была заселена темнокожими африканскими племенами. В 17 веке появились первые европейские поселенцы, потомки которых в начале 20 века образовали независимое государство. Темнокожие, составлявшие более 90% населения страны, были практически полностью лишены политических и экономических прав. У них не было права свободно передвигаться по территории страны и занимать государстенные должности выше определенного уровня; возможность голосовать была сильно ограничена. К середине 1980х годов угроза гражданской войны побудила правительство, представлявшее интересы белого меньшинства, пойти на уступки. Непреклонным условием, поставленным Африканским Национальным Конгрессом под предводительством Нельсона Манделы, были равные избирательные права для всего населения ЮАР. В итоге белое правительство согласилось, что привело к первым в истории этой страны свободным выборам в 1994 году и избранию правительства, представляющего интересы темнокожего большинства.

Конкуренция на рынке с горизонтально дифференцированым товаром со входом.

Рассмотрим задачу конкуренции продавцов мороженого на пляже из первой главы. Как и раньше, предположим, что цены, по которым продавцы реализуют мороженое, являются фиксированными (и равны между собой). Пусть каждый отдыхающий покупает ровно одну единицу мороженого от ближайшего продавца; координаты покупателей равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$.

Предположим, что продавцов трое. Мы знаем (задача 23 ко Главе 1) что в игре, в которой продавцы одновременно выбирают местоположение своих тележек с мороженым, равновесия не существует. Рассмотрим вариант игры, в котором выбор местоположения тележек происходит по очереди. В момент времени $t = 1$ продавцы 1 и 2 выбирают $s_1, s_2 \in [0, 1]$. В момент времени $t = 2$ продавец 3 выбирает $s_3 \in [0, 1]$. Затем реализуются выигрыши. Как и раньше, выигрыш продавца равен доле покупателей, приобретающих у него товар (рисунок 2.19).

Рис. 2.19: Горизонтальная конкуренция с тремя продавцами.

Что является равновесием в этой игре? Стратегии продавцов 1 и 2 — это местоположения их тележек s_1, s_2. Стратегия продавца 3 есть функция $s_3(s_1, s_2)$, предписывающая продавцу, где ставить тележку в зависимости от s_1 и s_2. В совершенном по подыграм равновесии, $s_3(s_1, s_2)$ должна максимизировать u_3 при любых s_1, s_2. Пусть $s_1 < s_2$. Если координаты покупателей равномерно распределены на $[0, 1]$, то выигрыш продавца 3 будет $\frac{s_1+s_3}{2}$ при $s_3 < s_1$; $\frac{s_1+s_2}{4}$ при $s_3 = s_1$; $\frac{s_2-s_1}{2}$ при $s_3 \in (s_1, s_2)$; $\frac{1-\frac{s_1+s_2}{2}}{2}$ при $s_3 = s_2$; и $1 - \frac{s_2+s_3}{2}$ при $s_3 > s_2$.

Следовательно, продавец 3 максимизирует свой выигрыш, выбирая $s_3 = s_1 - \epsilon$ при $s_1 > \max\{1-s_2, \frac{s_2-s_1}{2}\}$; $s_3 = s_2+\epsilon$ при $1-s_2 > \max\{s_1, \frac{s_2-s_1}{2}\}$; и $s_3 \in (s_1, s_2)$ при $\frac{s_2-s_1}{2} > \max\{s_1, 1-s_2\}$. В принципе, нас устроит любая функция $s_3(s_1, s_2)$, удовлетворяющая данным условиям. Однако равновесные s_1 и s_2 зависят от того, как конкретно мы определим $s_3(s_1, s_2)$ в том случае, если $\frac{s_2-s_1}{2} > \max\{s_1, 1-s_2\}$. Предположим, что в этом случае $s_3 = \frac{s_2+s_1}{2}$. Тогда легко убедиться, что в равновесии мы будем иметь $s_1^* = \frac{1}{4}$, $s_2^* = \frac{3}{4}$, и $s_3^*(s_1^*, s_2^*) = \frac{1}{2}$. При этом выигрыши продавцов 1 и 2 будут равны $\frac{3}{8}$, выигрыш продавца $3 - \frac{1}{2}$. Получается, что два продавца, имеющих возможность первыми выбрать места для своих тележек, не станут располагаться слишком близко друг к другу. Причина тому — наличие третьего продавца, который в таком случае может захватить бóльшую часть рынка.

Лоббирование в парламенте и покупка сверхбольшинства голосов.

Конгресс США характеризуется слабой партийной дисциплиной. Политические партии — республиканцы и демократы — не обладают значительным контролем над тем, как голосуют отдельные конгрессмены. Причин этому несколько, в первую очередь наличие одномандатных округов, и необходимость конгрессмена отчитываться перед своими избирателями о своей успешной работе. Для того, чтобы конгрессмена переизбрали, ему необходимо время от времени голосовать за законопроекты, перераспределяющие средства его избирателям (например, за такие законопроекты, которые предполагают реализацию, за федеральные деньги, каких-то проектов на территории его округа). Это делает голос конгрессмена «продаваемым».

Предположим, что группа конгрессменов, представляющая чьи-то интересы (возможно, свои собственные), продвигает какой-то законопроект. Для того, чтобы заручиться моей поддержкой, им нужно обещать мне, что в будущем на повестку дня будет вынесен вопрос о выделении моему округу дополнительных средств, и что они за него проголосуют. Таким образом, проведение любого законопроекта связано с издержками на покупку голосов конгрессменов — то есть с некоторым набором обещаний, которые надо будет потом выполнить.

Гросеклоуз и Снайдер (1996) обращают внимание на то, что, как правило, значительная часть законопроектов принимается *сверхбольшинством* конгрессменов, в то время как для прохождения достаточно простого большинства. Зачем лоббисты тратят излишние ресурсы на покупку больших коалиций, не смотря на то, что минимальной коалиции — половины конгрессменов плюс один голос — достаточно для прохождения законопроекта? Например, при голосовании за Североамериканское соглашение о свободной торговле в нижней палате конгресса (Палате представителей), 234 голоса было отдано «за» и 200 голосов «против». Почему администрация президента Клинтона (лоббировавшая этот проект) не удовлетворилась минимальной коалицией в 218 представителей? Зачем нужно было тратить ресурсы на приобретение лишних голосов? Ответ таков: для того, чтобы эти голоса не были куплены республиканцами, которые были противниками заключения соглашения о свободной торговле с Мексикой и Канадой.

Рассмотрим такую игру. Нечетное число N депутатов должны проголосовать за или против некого законопроекта. Два лоббиста, A и B, пытаются склонить их на свою сторону. Первый лоббист поддерживает законопроект, второй препятствует ему. Пусть игра происходит следующим образом.

$t = 1$. Лоббист A решает, сколько ресурсов ему следует потратить на покупку голосов. Пусть a_i — сумма, которую он обещает депутату i, если он проголосует за законопроект. Будем считать, что $a_i \geq 0$.

$t = 2$. Лоббист B решает, сколько ресурсов ему следует потратить на покупку голосов. Пусть b_i — сумма, которую он обещает депутату i, если он проголосует за законопроект. Будем считать, что $b_i \geq 0$.

$t = 3$. Депутаты голосуют. Депутат i голосует за законопроект, если

$$a_i > b_i, \tag{2.40}$$

и против в обратном случае.

Выигрыш лоббиста A равен $W_A - \sum_{i=1}^N a_i$ если законопроект принят (то есть если за него проголосовало большинство депутатов), и $-\sum_{i=1}^N a_i$, если нет. Выигрыш лоббиста B равен $W_B - \sum_{i=1}^N b_i$ если законопроект не принят, и $-\sum_{i=1}^N b_i$, если он принят, где величины W_A и W_B отражают степень заинтересованности лоббистов. Мы предполагаем, что a_i и b_i — суммы, предлагаемые лоббистами депутату i — являются невозвратными; депутат может пообещать проголосовать за законопроект, но потом нарушить свое обещание, если ему будет сделано более выгодное предложение.

Пусть, без потери общности, $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_N$. Рассмотрим, каким должно быть действие $b_1, \ldots, b_N$ лоббиста B при данном $a_1, \ldots, a_N$. Для того, чтобы заблокировать законопроект, он должен скупить $\frac{N+1}{2}$ наиболее дешевых голосов. Лоббист B так поступит, если $\sum_{i=\frac{N-1}{2}}^N a_i \leq W_B$. Формально, мы будем иметь

$$b_i(a_1, \ldots, a_N) = \begin{cases} a_i, & i \geq \frac{N-1}{2}, \text{ и } \sum_{i=\frac{N-1}{2}}^N a_i \leq W_B, \\ 0, & \text{в обратном случае.} \end{cases} \tag{2.41}$$

Сразу можно сделать следующий вывод. Пусть m — число депутатов i, таких, что $a_i > 0$. Тогда верно следующее: Если существует совершенное по подыграм равновесие, в котором законопроект принимается, а m — число депутатов, получающих положительные платежи от лоббиста A, то $a_1 = \ldots = a_m$.

Действительно, пусть функция реакции лоббиста B задана как (2.41). Если лоббист A хочет провести законопроект, то его задачей становится минимизация издержек $\sum_{i=1}^N a_i$ при условии $\sum_{i=\frac{N-1}{2}}^N a_i \geq W_B$ и $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_N$. Если $a_1, \ldots, a_m > 0$ и $a_{m+1}, \cdots, a_N = 0$, где $m \geq \frac{N+1}{2}$, то мы обязаны иметь $\sum_{i=\frac{N+1}{2}}^m a_i = W_B + \epsilon$ и $a_1 = \ldots = a_{\frac{N+1}{2}}$, где ϵ - небольшое число. Но тогда издержки минимизируются при

$$a_1 = \ldots = a_m = \frac{W_B}{m - \frac{N-1}{2}} + \epsilon. \tag{2.42}$$

Лоббист B будет предлагать платежи наиболее слабым представителям коалиции лоббиста A, то есть депутатам с наименьшим a_i. Для того, чтобы максимально осложнить задачу скупки голосов своему конкуренту при данном суммарном объеме платежей, игрок A должен предложить всем членам своей коалиции равные платежи.

Выигрыш лоббиста A в равновесии составит

$$U_A = \max\left\{0, \max_{m \geq \frac{N+1}{N}} W_A - \frac{mW_b}{m - \frac{N-1}{2}} - m\epsilon\right\}. \tag{2.43}$$

Не факт, что эта величина максимизируется при $m = \frac{N+1}{2}$. Действительно, если лоббист A собирает коалицию минимального большинства — то есть если $m = \frac{N+1}{2}$ — то лоббисту B достаточно перекупить одного депутата, на которого он может потратить весь свой потенциальный выигрыш W_B; следовательно, для того, чтобы коалиция не распалась, лоббист A должен платить *каждому* из $\frac{N+1}{2}$ членов своей коалиции как минимум по W_B. Если $m = \frac{N+1}{2} + 1$, то лоббист B для победы должен будет купить голоса двух депутатов; следовательно, для сохранения коалиции, A должен платить всем своим депутатам минимум по $\frac{W_B}{2}$; однако число депутатов, с которыми придется делиться, будет больше на единицу.

Какой же размер коалиции будет оптимальным? Мы видим, что

$$\frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{W_B m}{m - \frac{N-1}{2}} + m\epsilon\right) = -\frac{\frac{N-1}{2} W_B}{(m - \frac{N-1}{2})^2} + \epsilon < 0, \tag{2.44}$$

то есть издержки на покупку голосов всегда максимизируются при наибольшей возможной коалиции $m = N$. Остается посмотреть, для каких значений W_B и W_A вообще существует равновесие, в котором законопроект принимается. При $m = N$, лоббист A будет иметь положительный выигрыш при

$$\frac{W_A}{W_B} > \frac{2N}{N+1}. \tag{2.45}$$

То есть для того, чтобы гарантировать прохождение законопроекта, нужны большие ресурсы, чем у тех, кто потенциально хочет сорвать голосование и сохранить статус-кво.

2.2 Повторяющиеся игры

Очень часто, игровые взаимодействия между одними и теми же игроками повторяются. Противостояние между упрямым ребенком и его родителями продолжается изо для в день. Две фирмы, конкурирующие друг с другом, рассчитывают на то, что их конкуренция продлится и в следующем году, и через два года. Люди, отвечающие за кредитно-денежную политику в центральном банке, скорее всего, будут отвечать за нее и через год. Может ли повторяющийся характер игровых взаимодействий влиять на стратегии, реализуемые игроками? Как правило, ответ на этот вопрос зависит от того, является ли горизонт планирования игроков конечным, или нет; результаты нашего анализа будут качественно различаться для конечно и бесконечно повторяющихся игр

2.2.1 Конечно повторяющиеся игры

Рассмотрим игру «дилемма заключенного» с такой матрицей выигрышей:

		Вася	
		молчать (D)	сознаться (H)
Петя	молчать (D)	3,3	0,5
	сознаться (H)	5,0	1,1

Как поведут себя Петр и Василий, если им придется сыграть в «дилемму заключенного» два раза подряд? На рисунке 2.20 показано дерево этой игры.

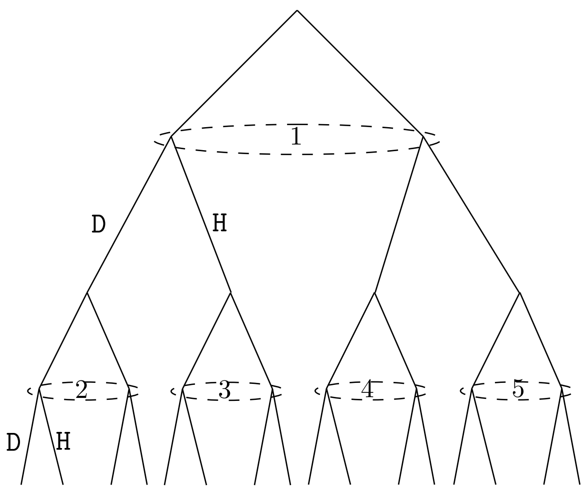


Рис. 2.20: Дилемма заключенного, повторенная два раза.

Цифрами 1-5 обозначены информационные множества второго игрока (Васи). Множество 1 соответствует принятию решения (молчать/сознаться), в момент времени 1, то есть когда Вася и Петя играют «дилемму заключенного» в первый раз. Множества 2-5 соответствуют принятию решения в момент времени 2, для каждого из 4 возможных вариантов исхода игры на первом этапе. Следуя формальному определению чистой стратегии в динамической игре, получается, что у Васи (и, соответственно, у Пети) $2^5 = 32$ чистых стратегий. Некоторые из этих стратегий являются эквивалентными. Действительно, рассмотрим Васины стратегии DDHDH и DDDDD. Они отличаются друг от друга только инструкцией относительно действий в информационных множествах 3 и 5. Однако каждая из этих стратегий предполагает действие D в информационном множестве 1, что делает достижение множеств 3 и 5 невозможным, вне зависимости от стратегии, выбранной другим игроком. Формально, DDHDH и DDDDD соответствуют следующему определению:

Определение 21 *Пусть Γ — игра в развернутой форме. Стратегии σ_i, σ_i' игрока i являются эквивалентными, если $u_j(\sigma_i, \sigma_{-i}) = u_j(\sigma_i', \sigma_{-i})$ для всех j, σ_{-i}.*

Можно подсчитать, что в дилемме заключенного, повторенной 2 раза, у каждого игрока 8 неэквивалентных стратегий. При этом совершенное по подыграм равновесие в этой игре одно. Действительно, в каждой из 4 подыгр на втором этапе в равновесии оба игрока выберут H. Это означает, что выигрыш каждого игрока во всей игре равен его выигрышу на первом этапе плюс единица (выигрыш на втором этапе). Следовательно, в момент времени 1 игроки также выберут H. Если «дилемма заключенного» повторяется конечное число раз, то равновесие, совершенное по подыграм, все равно единственно: $(\mathtt{H}, \mathtt{H})$ в каждый момент времени.

Определение 22 Пусть G — игра в нормальной форме, $T > 1$ — натуральное число. Обозначим на $G(T)$ динамическую игру, в которой игра G повторяется T раз, а выигрыш игрока i составляет

$$u_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} u_i(a_t), \tag{2.46}$$

где $a_t \in A$ — действия игроков в момент времени $t = 1, \ldots, T$.

Саму игру G мы будем называть *базовой игрой*, а элементы множества стратегий базовой игры $a \in A$ — действиями. Что мы можем сказать про множество совершенных равновесий в повторяющейся игре?

Теорема 7 *Пусть $G = \langle I, A, U \rangle$ — игра в нормальной форме с единственным равновесием a^*, $T > 1$. Тогда в игре $G(T)$ существует единственное совершенное по подыграм равновесие Нэша, такое, что в каждой подыгре, начинающейся с $t \geq 1$, игроки выберут действия a^*.*

Доказательство этой теоремы ведется по индукции. Все подыгры $G(T)$, начинающиеся в момент времени $t = T$, совпадают с базовой игрой G. Следовательно, все подыгры, начинающиеся с $t = T-1$, совпадают с базовой игрой G, вплоть до прибавления $u(a^*)$ к функциям выигрышей, и равновесные действия в момент $t = T - 1$ тоже будут a^*. По индукции, это верно для всех $t = 1, \ldots, T$.

Что если в базовой игре несколько равновесий? Заметим, что каждому равновесному профилю стратегий в базовой игре соответствует совершенное равновесие в повторяющейся игре, в котором этот профиль играется во все моменты времени (доказательство этого утверждения предлагается в качестве задачи). Однако, как видно из следующего примера, могут существовать и другие равновесия.

Повторяющаяся игра с несколькими равновесиями

Если базовая игра имеет единственное равновесие Нэша, то в конечно повторенной игре на каждом этапе, в любой подыгре реализуется профиль действий, соответствующий равновесию в базовой игре. Убедимся, что для игр с несколькими равновесиями это не так. Рассмотрим такую игру.

		Игрок II		
		A	B	C
Игрок I	A	1,1	5,0	0,0
	B	0,5	4,4	0,0
	C	0,0	0,0	3,3

Как построить множество совершенных по подыграм равновесий в этой игре? В момент времени $t = 2$, игроки должны реализовывать равновесные стратегии: либо $(\mathtt{A}, \mathtt{A})$, либо $(\mathtt{C}, \mathtt{C})$. Причем профиль стратегий, сыгранных в $t = 2$, может зависеть от действий, сыгранных в $t = 1$. Всего в базовой игре возможно 9 профилей действий; каждому профилю действий в момент $t = 1$ соответствует одно из 2 равновесий в $t = 2$. Следовательно, для того, чтобы найти все совершенные равновесия в игре, повторенной 2 раза, нам необходимо найти все равновесия в каждой из $2^9 = 512$ игр, образованных таким образом. Пусть, например, игроки в $t = 2$ реализуют $(\mathtt{C}, \mathtt{C})$ только если в $t = 1$ было реализовано $(\mathtt{B}, \mathtt{B})$. Это соответствует такой игре в $t = 1$:

		Игрок II		
		A	B	C
Игрок I	A	2,2	6,1	1,1
	B	1,6	7,7	1,1
	C	1,1	1,1	4,4

У этой игры два равновесия: $(\mathtt{B}, \mathtt{B})$ и $(\mathtt{C}, \mathtt{C})$. При этом профиль действий $(\mathtt{B}, \mathtt{B})$ не является равновесием в базовой игре. Однако, он может быть реализован в момент времени $t = 1$ повторяющейся игры — если игроки ожидают, что только в этом случае они сыграют Парето-эффективное равновесие $(\mathtt{C}, \mathtt{C})$ в момент времени $t = 2$. Это — еще одно свидетельство того, что ожидания относительно поведения в будущем могут влиять на поведение в настоящем.

Однако, данный подход к конструированию совершенных по подыграм равновесий в конечно повторяющихся играх может быть подвергнут критике. Предположение о том, что каждому из профилей действий в первый момент времени может быть присвоено любое из возможных равновесий во второй момент времени, может показаться слишком смелым, так как в исходной игре одни равновесия могут Парето-доминировать другие; если мы предположим, что игроки в подыграх не будут играть Парето-доминируемые равновесия (то есть будут «передоговариваться»), то множество совершенных по подыграм равновесий сузится. Смотри задачу 17.

2.2.2 Бесконечно повторяющиеся игры

Если всем игрокам известно, что игра закончится через T периодов, то на последнем этапе будут сыграны какие-то равновесные стратегии; используя обратную индукцию, мы получим равновесные стратегии на всех этапах повторяющейся игры.

А если горизонт планирования отсутствует? Предположим, что в любой момент времени существует положительная вероятность того, что в следующий момент времени игра повторится. Такое предположение в ряде случаев вполне уместно. К примеру, вряд ли в планах компании Pepsico — одного из двух основных производителей безалкогольных напитков — предполагается, что к какой-то определенной дате компания должна выйти из бизнеса и прекратить конкуренцию с The Coca-Cola Company. Однако, без сомнения, компания Pepsico будет предпринимать какие-то ответные действия если, например, The Coca Cola Company развяжет очередную ценовую или рекламную войну.

Игровое взаимодействие в таком случае можно моделировать в виде игры, повторяющейся бесконечное число раз, при условии, что выигрыш в каждом следующем периоде дисконтируется с определенной ставкой. В такой постановке использование обратной индукции невозможно. Как мы увидим, множество равновесий в бесконечно повторяющейся игре принципиально отличается от совершенных по подыграм равновесий в той же игре, повторенной конечное число раз.

Для начала дадим определение бесконечно повторяющейся игры.

Определение 23 Пусть $G = \langle I, A, U\rangle$ — игра в нормальной форме. Пусть $\delta < 1$. Обозначим моменты времени за $t = 0, 1, \ldots$. Пусть $a_t \in A$ — действия игроков в момент времени t. Обозначим за

$$\bar{u}_i(\tau) = (1-\delta)\sum_{t=\tau}^{\infty}\delta^{t-\tau}u_i(a_t). \tag{2.47}$$

Обозначим за $G(\delta)$ игру G, повторяемую бесконечное число раз, в которой выигрыш игрока i равен $\bar{u}_i(0)$.

Величина $0 < \delta < 1$ — фактор дисконта. Чем эта величина меньше, тем меньше игроки ценят будущие выигрыши по сравнению с текущими выигрышами. Величина $\bar{u}_i(\tau)$ есть средний выигрыш игрока i начиная с момента времени τ. Предположим, что игрок i в каждый момент времени $t = \tau, \tau+1, \ldots$ получает полезность $\bar{u}_i$. Тогда его *приведенный* или *дисконтированный* выигрыш на момент времени $t = \tau$ как раз будет равен дисконтированному выигрышу в случае, когда игрок в каждый момент времени $t \geq \tau$ получал бы $u_i(a_t)$[6]:

$$\sum_{t=\tau}^{\infty}\delta^{t-\tau}\bar{u}_i(\tau) = \frac{\bar{u}_i(\tau)}{1-\delta} = \sum_{t=\tau}^{\infty}\delta^{t-\tau}u_i(a_t). \tag{2.48}$$

Множество стратегий (пусть даже чистых) в бесконечно повторяющейся игре очень громоздко. Действительно, стратегия должна предписывать, как действовать в зависимости от всех возможных действий игроков в предшествующие периоды — для каждого момента времени $t \geq 0$. В бесконечно повторяющейся игре любая подыгра эквивалентна самой игре. Поэтому мы будем ограничиваться стратегиями, в которых действие игрока в текущий период зависит от действий всех игроков за какое-то конечное число предыдущих периодов.

Определение 24 Пусть $G = \langle I, A, U\rangle$ — игра в нормальной форме. Тогда *марковская стратегия* с памятью T для игрока i есть функция

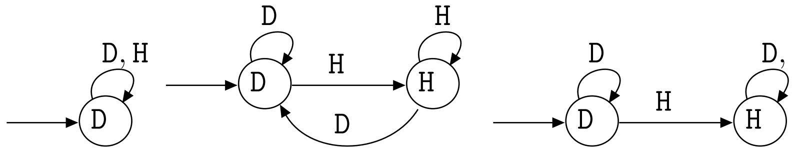
$$m_i : A^T \to A_i, \tag{2.49}$$

которая определяет a_{it} для каждой истории игры длиной T.

На рисунке 2.21 показаны примеры различных марковских стратегий с памятью длиной $T = 1$ для игры «дилемма заключенного» на странице 77:

Стратегия на рисунке 2.21(a) предписывает сделать первый ход `D`, затем все время повторять его, вне зависимости от последующих ходов соперника. На рисунке 2.21(b) показана стратегия «око за око», согласно которой первый ход должен быть `D`, затем каждый раз надо повторять ход, следанный соперником в предыдущий момент времени. Наконец, на рисунке 2.21(c) изображена так называемая «триггерная» или «мрачная» стратегия: в начальный момент времени

[6] Введение функции дисконтированной полезности — на самом деле один из нескольких способов сравнить выигрыш игрока в бесконечно повторяющейся игре при разных профилях стратегий. Этот способ не является единственным. В учебнике Осборна и Рубинштейна (1994) приводятся версии результатов о существовании равновесия для еще двух критериев сравнения выигрышей в бесконечной игре.



(a) Всегда играть D (b) Око за око (c) Триггер

Рис. 2.21: Различные марковские стратегии с памятью $T = 1$.

игрок делает ход D, затем повторять его, пока соперник не сделает ход H. После этого триггерная стратегия предписывает все время ходить H, вне зависимости от дальнейших действий соперника.

Пусть $G = \langle I, A, U\rangle$ игра в стратегической форме. Обозначим за $u(a)$ вектор выигрышей всех игроков. Пусть

$$X = \{x \in \mathbb{R}^N | x = \sum_{a\in A} \alpha_a u(a), \sum_{a\in A} \alpha_a = 1, \alpha_a \geq 0\}. \tag{2.50}$$

Любой вектор из этого множества есть выпуклая комбинация выигрышей игроков при каких-то чистых стратегиях. Очевидно, что любой вектор $x \in X$ будет являться вектором приведенных выигрышей игроков (2.47) для каких-то действий игроков $a_0, a_1, \ldots$.

Обозначим за

$$\underline{u}_i = \min_{a_{-i}\in A_{-i}} \max_{a_i \in A_i} u_i(a_i, a_{-i}) \tag{2.51}$$

минимаксный выигрыш — минимальный выигрыш, который может себе гарантировать игрок i в игре G. Очевидно, что в любом равновесии в повторяющейся игре $G(\delta)$ приведенный выигрыш игрока i не может быть меньше, чем $\underline{u}_i$. Пусть

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^N | y_i > \underline{u}_i\}. \tag{2.52}$$

Тогда верно следующее утверждение.

Теорема 8 Пусть $G = \langle I, A, U\rangle$ игра в стратегической форме. Пусть $u \in X \cap Y$. Тогда существует $\bar{\delta} < 1$, такой, что для всех $\delta \in [\bar{\delta}, 1)$ в повторяющейся игре $G(\delta)$ существует равновесие, в котором приведенные выигрыши игроков равны u.

Этот результат носит название *народной теоремы*, так как его авторство не установлено (сам результат известен с конца 1950х годов).

Приведем пример того, как в повторяющейся игре «дилемма заключенного» можно реализовать приведенные выигрыши, соответствующие действиям (D, D). Пусть оба игрока играют триггерную стратегию. Если ни один из них не отклоняется от своей стратегии, то в каждый момент времени каждый игрок делает ход D. Предположим, что в момент времени $t = 0$ игрок 1 выбрал ход H. Его приведенный (или дисконтированный) выигрыш будет равен

$$\bar{u}_1' = (1-\delta)u_1(\mathtt{H}, \mathtt{D}) + \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t u_1(\mathtt{H}, \mathtt{H}) = (1-\delta)\left(5 + \frac{\delta}{1-\delta}\right), \tag{2.53}$$

так как игрок 2, следуя триггерной стратегии, начиная с момента $t = 1$ будет непременно делать ход H. Условием равновесности триггерной стратегии будет

$$(1-\delta)\left(5 + \frac{\delta}{1-\delta}\right) \leq 3 \text{ или } \delta \geq \frac{1}{2}. \tag{2.54}$$

Если игрок отклоняется от триггерной стратегии, то он получает моментальный выигрыш, так как обманывает второго игрока, который продолжает играть кооперативную стратегию D. Однако начиная со следующего момента времени игрок 2 начинает ему мстить, делая ходы H — и продолжает делать это до бесконечности! Игроку 1 будет выгодно такое развитие событий только если его фактор дисконта δ достаточно мал; в таком случае, сиюминутный выигрыш в первом периоде перевешивает наказание, которое он понесет в последующих периодах.

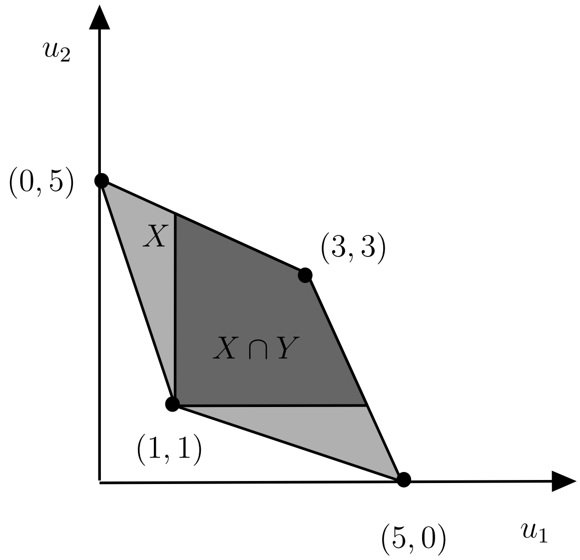


Рис. 2.22: Множества X и Y.

Согласно теореме, любая точка из $X \cap Y$ может быть вектором выигрышей в каком-то равновесии. Рассмотрим, например, пару марковских стратегий, изображенных на рисунке 2.23.

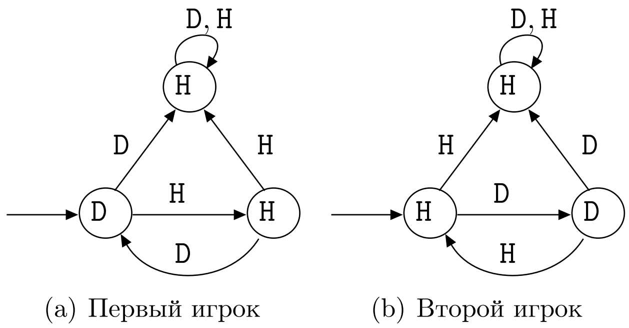


Рис. 2.23: Пара марковских стратегий.

Согласно этой паре стратегий, первый ход в игре должен быть D у первого игрока, H у второго игрока. Второй ход будет H у первого игрока и D у второго, и так далее. Если один из игроков отклонится от своей стратегии, то оба игрока (начиная со следующего хода) будут играть H до бесконечности. Приведенные выигрыши двух игроков при условии, что они играют эти стратегии, будут

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1(0) &= (1-\delta)(0(1+\delta^2+\delta^4+\cdots)+5(\delta+\delta^3+\delta^5+\cdots)) = 5\frac{\delta}{1+\delta} \\
\bar{u}_2(0) &= (1-\delta)(5(1+\delta^2+\delta^4+\cdots)+0(\delta+\delta^3+\delta^5+\cdots)) = 5\frac{1}{1+\delta},
\end{aligned} \tag{2.55}$$

то есть $(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = \frac{1}{1+\delta}(0,5) + \frac{\delta}{1+\delta}(5,0)$. Доказательство народной теоремы основано на том факте, что при достаточно большом δ аналогичным способом можно составить пару стратегий, обеспечивающих выигрыш, произвольно близкий к любой точке из множества X. Если игрок i отклонится от данной стратегии, то все игроки j во все последующие периоды выберут действия μ^i_j, где

$$\mu^i_{-i} = \text{argmin}_{\mu^i_{-i} \in A_{-i}} \max_{a_i \in A_i} u_i(a_i, \mu^i_{-i}) - -- \tag{2.56}$$

действия всех игроков, кроме i, не дающие игроку i получить выигрыш, больший, чем его минимаксный выигрыш $\underline{u}_i$.

Для того, чтобы завершить доказательство народной теоремы, нужно найти δ, при которых существует равновесие. Пусть $m = (m_1, \ldots, m_N)$ — марковские стратегии, дающие средний выигрыш $u \in X \cap Y$ и построенные по типу стратегий (2.21).

Обозначим за $u_{i,max}$ максимальный одноопериодный выигрыш, который игрок i может получить:

$$u_{i,max} = \max_{a \in A} u_i(a) \tag{2.57}$$

По построению, если игрок i отклонится от стратегии m_i в момент времени t, то его выигрыш в каждый последующий момент времени не может превышать $\underline{u}_i$. Также его выигрыш не может быть меньше $\underline{u}_i$. Следовательно, он равен $\underline{u}_i$. Следовательно, игроку не будет выгодно отклониться от стратегии m_i ни в один из моментов времени $\tau \geq 0$, если

$$\tilde{u}_i = \min_{\tau \geq 0} \bar{u}_i(\tau) \geq (1-\delta)(u_{i,max} + \frac{\delta}{1-\delta}\underline{u}_i), \text{ или } \delta \geq \frac{u_{i,max} - \tilde{u}_i}{u_{i,max} - \underline{u}_i}. \tag{2.58}$$

Так как $\bar{u}_i > \underline{u}_i$, мы имеем $\delta < 1$. Условие

$$\delta \geq \max_i \frac{u_{i,max} - \tilde{u}_i}{u_{i,max} - \underline{u}_i} \tag{2.59}$$

обеспечивает нам равновесность всех стратегий из профиля m. Теорема доказана.

При первом рассмотрении, равновесие, полученное при использовании триггерных стратегий, не является совершенным по подыграм. Действительно, допустим, что в момент времени t игрок 1 в повторяющейся дилемме заключенного зачем-то отклонился от кооперативной стратегии `D` и вместо этого сыграл `H`. Согласно триггерной стратегии, начиная с момента времени $t+1$ игрок 2 должен все время играть `H`. Захочет ли он это сделать? Таблица 2.2.2 показывает, какими будут стратегии игроков, если в момент времени $t = 1$ игрок 2 отклонится от триггерной стратегии. Верхние две строки соответствуют случаю, когда игрок 1, начиная с момента времени $t = 2$, будет придерживаться триггерной стратегии; для нижних двух строк, игрок 1 отказывается наказывать игрока 2, и вместо этого продолжает играть `D`.

	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
1	D	H	H	H
2	H	D	H	H
1	D	D	D	D
2	H	D	D	D

Таблица 2.2: Стратегии игроков при отклонении игроком 2 от триггерной стратегии в момент времени $t = 1$.

Как мы видим, при достаточно большом факторе дисконта δ выигрыш 1-го игрока будет больше в том случае, когда он отклонится от триггерной стратегии в момент времени $t = 2$, и не будет наказывать игрока 2. Зная это, игрок 2 в момент времени $t = 1$ может сыграть `H`. Следовательно, если мы хотим, чтобы в совершенном по подыграм равновесии в бесконечно повторяющейся дилемме заключенного в каждый момент времени оба игрока выбирали кооперативные стратегии D, нам необходимы более сложные стратегии, чем триггерные. Равновесная стратегия должна предписывать не только наказание для отклонившегося игрока, но и наказание для игрока, который не стал наказывать отклонившегося, для того, кто не стал наказывать того, кто должен был наказать отклонившегося, и так далее.[7] Фаденберг и Маскин (1986) показали, что условия существования совершенного равновесия с данным вектором выигрышей практически не отличаются от условий Народной Теоремы 8:

Теорема 9 Пусть $G = \langle I, A, U \rangle$ игра в стратегической форме. Пусть $u \in X \cap Y$, размерность множества $X \cap Y$ равна числу игроков N. Тогда существует $\bar{\delta} < 1$, такой, что для всех $\delta \in [\bar{\delta}, 1)$ в повторяющейся игре $G(\delta)$ существует совершенное по подыграм равновесие, в котором дисконтированные выигрыши игроков равны u.

Пусть u — вектор ожидаемых выигрышей, которые мы хотим обеспечить в равновесии. Предположим, для простоты, что существует профиль чистых действий a, такой, что $u(a) = u$. Предположим, что для всех игроков i, профили действий μ^i являются чистыми (полное доказательство этой теоремы можно увидеть в книге Фаденберга и Тироля (стр. 158-160)).

Пусть существует u'_i, принадлежащий внутренности множества $X \cap Y$, и $\epsilon > 0$, такие, что для всех i, мы имеем

$$\underline{u}_i < u'_i < u_i \tag{2.60}$$

и вектор выигрышей

$$u'^i = (u'_i + \epsilon, \ldots, u'_{i-1} + \epsilon, u'_i, u'_{i+1} + \epsilon, \ldots, u'_N) \tag{2.61}$$

принадлежит к $X \cap Y$. Если это множество имеет размерность N, то такие u' и ϵ должны существовать. Будем считать, что для всех i, существует профиль чистых действий a^i, такой, что $u(a^i) = u'^i$; также, существует профиль чистых действий a', такой, что $u(a) = u'$.

Возьмем N, такой, что для всех i,

$$u_{i,max} + N\underline{u}_i < \min_a u_i(a) + N u_i(a'). \tag{2.62}$$

При δ, близкому к 1, каждый игрок предпочтет получить наихудший выигрыш в один момент времени, затем выигрыш u'_i в течение N периодов, нежели однажды получить свой наилучший выигрыш, затем минимаксный выигрыш в течение N периодов. Для нашего примера мы будем иметь $N = 3$.

Рассмотрим такие стратегии игроков.

- Игра начинается в Стадии I. Все играют действие a, пока ровно один из игроков не отклонится. Если игрок i в какой-то момент времени отклонился от действия a_i, то игра переходит в стадию II_i.

- В стадии II_i в течение последующих N периодов игроки реализуют действие m^i. Если в течение N периодов никто из игроков не отклонился от m^i, то игра переходит в стадию III_i. Если игрок j отклонился от действия m^i_j в какой-то момент времени, то игра переходит в стадию II_j.

- Стадия III_i. Все время играть a^i. Если игрок j отклоняется от действия a^i_j, то игра переходит в стадию II_j.

[7]Эта проблема стара как мир. Еще древнеримский поэт Ювенал задавался этим далеко идущим вопросом: «Кто будет сторожить сторожей?» (Сатиры 6, 346-–348).

Докажем, что это есть совершенное по подыграм равновесие. Достаточно показать, что в каждой подыгре ни один из игроков не сможет увеличить свой выигрыш, отклонившись от стратегии в одном периоде.

Определим
$$\tilde{u}_i = (1-\delta)u_{i,max} + \delta(1-\delta^N)\underline{u}_i + \delta^{N+1}u'_i. \tag{2.63}$$
Это — наибольший выигрыш в любой подыгре, в которой игрок i отклонился (так как в любом случя отклонение игрока i переводит игру в Стадию II_i).

Во время Стадии I, игрок i получит не менее чем u_i если он следует своей равновесной стратегии, и не более чем $u_{i,max}$ если он отклонится один раз. В силу (2.62) мы должны иметь $\tilde{u}_i < u'_i$. Так как $u'_i < u_i$, при достаточно больших δ такое отклонение будет невыгодно. Аналогично, если игрок i придерживается равновесной стратегии в стадии III_j, $j \neq i$, то его выигрыш составит $u'_i + \epsilon$. Если он отклонится, то опять получит не более $\tilde{u}_i < u'_i < u'_i + \epsilon$. В стадии III_i, выигрыш игрока i равен u'_i. Отклонившись, он снова не сможет получить больше чем $\tilde{u}_i < u'_i$.

Если игрок i находится в стадии II_j, причем в этой стадии остается играть N' периодов, то его выигрыш будет $(1-\delta^{N'})u_i(\mu^j) + \delta^{N'}(u'_i + \epsilon)$, что при достаточно большем δ превосходит $\tilde{u}_i$ в силу того, что $\epsilon > 0$. Наконец, если игра находится в стадии II_i и остается $N' \leq N$ периодов, то выигрыш игрока i составит $(1-\delta^{N'})\underline{u}_i + \delta^{N'}u'_i$; если он отклониться, то его выигрыш будет не более $(1-\delta^N)\underline{u}_i + \delta^N u'_i \leq (1-\delta^{N'})\underline{u}_i + \delta^{N'}u'_i$.

Доказательство этой теоремы является конструктивным, то есть приводит способ построения совершенных равновесий. Равновесные стратегии строятся по такому принципу: игрок А, отклонившийся от равновесной стратегии, подвергается суровому наказанию (его минимаксной стратегии), на число периодов, достаточное для того, чтобы сделать отклонение невыгодным; затем, игрокам предписывается играть вектор стратегий, дающий некоторый выигрыш. Если игрок В отказывается наказывать игрока А, то он тоже подвергается тому же наказанию — причем после окончания наказания его выигрыш в каждом последующем периоде будет ниже чем в том случае, если бы никто не отклонился от наказания игрока А. Так как размерность множества $X \cap Y$ равна числу игроков, мы можем достичь этого, не снижая выигрыш остальных игроков.

Результаты, похожие на «народную теорему», были получены и для конечных игр. Фактически, речь идет о существовании равновесия с любым вектором выигрыша, превосходящим минимаксный выигрыш. Доказательство существования простого равновесия Нэша предлагается читателю в качестве задачи 16. Народная теорема для конечных игр и совершенных равновесий сформулирована, например, у Осборна и Рубинштейна (1994, стр. 160).

Пример совершенного равновесия в бесконечно повторяющейся игре

Здесь же мы приведем пример пары совершенных по подыграм стратегий для следующей игры, повторяющейся бесконечное число раз:

		Игрок 2			
		A	B	C	D
Игрок 1	A	4,4	0,5	3,2	2,2
	B	5,0	1,1	1,4	2,3
	C	2,1	0,0	2,0	0,0

Пусть мы хотим, чтобы в равновесии в бесконечно повторяющейся игре выигрыш игроков был $u = (4,4)$. Этот выигрыш соответствует действию $a = (\mathtt{A}, \mathtt{A})$ в каждом периоде.

Для этой игры мы имеем $\underline{u}_1 = \underline{u}_2 = 1$, $\mu^1 = (\mathtt{B}, \mathtt{B})$, $\mu^2 = (\mathtt{C}, \mathtt{A})$, так что при достаточно большом δ такое равновесие возможно. Однако заметим, что пара стратегий, полученных с помощью народной теоремы, не будет совершенным по подыграм равновесием. Рассмотрим равновесие, которое предполагает играть $(\mathtt{A}, \mathtt{A})$ пока один из игроков не отклонится, затем играть $(\mathtt{B}, \mathtt{B})$ если отклонился игрок 1, и $(\mathtt{C}, \mathtt{A})$, если отклонился игрок 2. В этом случае, ни в одной подыгре, которая соответствует отклонению 1-го игрока в предыдущие периоды, второй игрок не станет делать ход $a_2 = \mathtt{B}$, так как $u_2(\mathtt{B},\mathtt{B}) < u_2(\mathtt{B},\mathtt{C})$.

Построим совершенное по подыграм равновесие. Возьмем $v' = (2,2) = u(a')$, где $a' = (\mathtt{A},\mathtt{D})$. Пусть $a^1 = (\mathtt{B},\mathtt{D})$, $u^1 = (2,3)$, $a^2 = (\mathtt{A},\mathtt{C})$, $u^2 = (3,2)$. Неравенство (2.62) дает нам $N > 5$. Действуя согласно доказательству Теоремы 9, получим пару марковских стратегий, изображенных на рисунке 2.24.

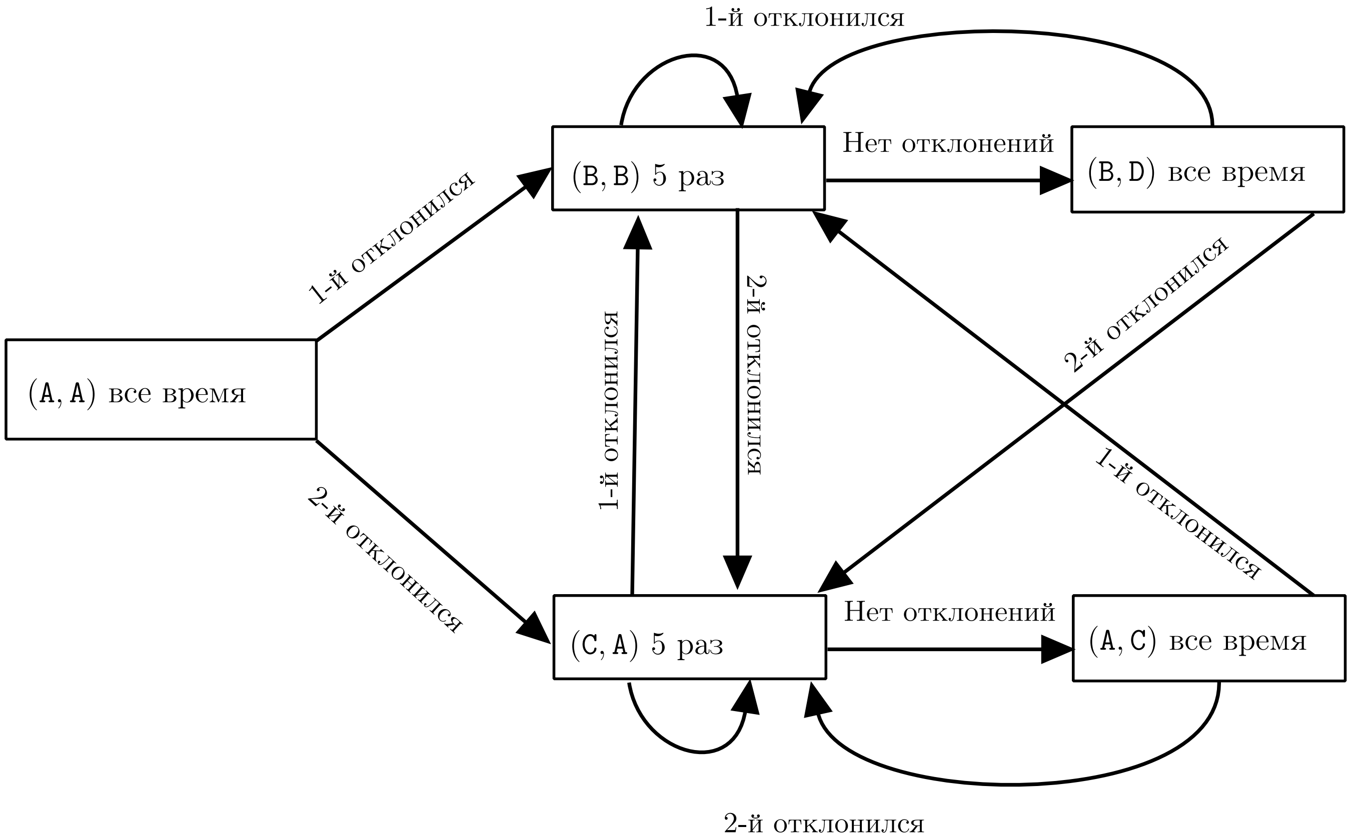


Рис. 2.24: Совершенное по подыграм равновесие

2.2.3 Примеры

Кредитно-денежная политика и инфляционные ожидания

Какая связь между законодательством, регулирующим деятельность центрального банка, и уровнем инфляции? В своей знаменитой работе, Кидленд и Прескотт (1977) предложили элегантную динамическую модель взаимодействия центрального банка, контролирующего кредитно-денежную политику, и всей остальной экономики.

Основная задача центрального банка — контроль за предложением денег в экономике, который осуществляется путем установки различных процентных ставок, операций с государственным долгом, и установки резервных требований для банков. Предложение денег в экономике напрямую связано с уровнем инфляции. Центральный банк, таким образом, вынужден находить компромисс между общественными издержками, вызванными инфляцией, и экономическим ростом, к которому может привести увеличение предложения денег.

Взаимосвязь между инфляцией (или предложением денег) и ВВП можно задать с помощью так называемого уравнения Филипса:

$$y = \bar{y} + b(\pi - \pi^e). \tag{2.64}$$

Здесь, y — ВВП, π — инфляция, π^e — ожидаемый уровень инфляции, $\bar{y}$ — уровень ВВП при уровне инфляции, равному ожидаемому. Почему на ВВП влияет только разница между реализованной и ожидаемой инфляцией? Одно из объяснений состоит в том, что цены на факторы производства (в первую очередь, на труд) обладают определенной жесткостью, то есть не способны немедленно подстраиваться под изменения рыночной конъюнктуры. Контракты на поставку факторов производства (и цены на них) формируются заранее; в них закладываются инфляционные ожидания. Если же инфляция окажется выше, чем предполагалось на момент заключения контракта, то происходит снижение реальных цен на факторы производства, что приводит к увеличению объема продукции, производимого фирмами. Согласно другой теории, увеличение спроса на продукцию отдельного производителя может быть вызвано как ростом денежной массы, так и изменениями предпочтений населения в пользу производимого товара. Производитель должен увеличить планируемый объем выпускаемой продукции только во втором случае (так как в первом случае также должны будут вырасти цены на факторы производства); однако он не знает причин видимого увеличения цен на свою продукцию и поэтому будет вынужден среагировать даже если цены на самом деле выросли в результате денежной эмиссии центральным банком.

Будем считать, что инфляция и ВВП определяются в ходе следующей динамической игры. На первом этапе публика формирует инфляционные ожидания π^e. После того, как эти ожидания сформированы, центральный банк определяет предложение денег, соответственно, и уровень инфляции π (для простоты будем предполагать, что инфляция и предложение денег взаимооднозначны).

Функция полезности центрального банка есть

$$U_b = -(y - y^o)^2 - a(\pi - \pi^o)^2, \tag{2.65}$$

где $y^o > \bar{y}$ — целевой уровень ВВП. Будем предполагать, что $\bar{y} < y^o$, то есть желаемый объем производства в экономике выше того, который будет достигнут при инфляции, равной ожидаемой (возможно, из-за того, что рынки факторов производств товаров не являются полностью конкурентными). Величина $\pi^o = 0$ отражает целевой уровень инфляции, $a > 0$ — то, насколько контроль над инфляцией важен для центрального банка по сравнению со стимулированием ВВП. Функция полезности (или, точнее, функция ущерба) банка квадратична по $\pi - \pi^o$, что отражает наши предположения о возрастающих предельных издержках инфляции: увеличение инфляции с 0% до 1% общество может не заметить, в то время как увеличение инфляции с 10% до 11% будет воспринято как крайне негативное событие.

Полезность публики зависит от того, насколько точен оказался ее прогноз инфляции:

$$U_p = -(\pi - \pi^e)^2. \tag{2.66}$$

Найдем равновесие в этой игре при $\pi^o = 0$. Сначала решим максимизационную задачу центрального банка при данном π^e. Максимизируя

$$U_b = -(\bar{y} + b(\pi - \pi^e) - y^o)^2 - a\pi^2 \tag{2.67}$$

по π, получим стратегию центрального банка, соответствующую совершенному по подыграм равновесию:

$$\pi(\pi^e) = \frac{b}{b^2 + a}(y^o - \bar{y} + b\pi^e). \tag{2.68}$$

Максимизируя U_p по π^e при $\pi = \pi(\pi^e)$, мы получим, что в равновесии

$$\pi^e = \pi = \frac{b}{a}(y^o - \bar{y}). \tag{2.69}$$

и

$$y = \bar{y}. \tag{2.70}$$

Последний результат получен, исходя из предположения о наличии *рациональных ожиданий* у публики: уровень инфляции, который установится в результате проводимой центральным банком кредитно-денежной политики, не может отличаться от ожидаемого (за исключением возможных случайных колебаний, которые не были учтены в этой модели). То есть, например, не может быть так, что ожидаемая инфляция равна 10%, а инфляция, реализуемая центральным банком — 15%. Публика будет предвидеть действия центрального банка и скорректирует свои ожидания.

Полученное равновесие не является Парето-оптимальным. Действительно, того же объема ВВП $\bar{y}$ можно было бы добиться и при $\pi = \pi^o$. Однако этот уровень инфляции *динамически несостоятелен*. Предположим, например, что центральный банк обещает $\pi = \pi^o$ и публика сформирует свои ожидания на уровне $\pi^e = \pi^o$. Тогда у центрального банка будет стимул эти ожидания обмануть, так как $\pi(\pi^o) > \pi^o$. Если мы предполагаем, что не существует институциональных факторов, которые могли бы заставить центральный банк сдержать свое обещание относительно уровня инфляции, то уровень инфляции $\pi = \pi^o$ не может быть реализован.

Какие механизмы могут сдерживать оппортунистическое поведение центрального банка? В первую очередь, банк должен быть огражден от влияния политической конъюнктуры. Законодательная или исполнительная власть может оказывать давление на центральный банк с целью стимулировать экономический рост ценой высокой инфляции; если банк способен противостоять такому давлению, то его обещания сдерживать инфляцию будут более достоверными. Ряд работ (см. например, Алесина и Саммерс, 1993) обнаружил статистически значимую взаимосвязь между низким уровнем инфляции и высокой степенью независимости центрального банка. Также важны правила, регулирующие работу банка. Чем выше a — вес инфляции в целевой функции банка — тем ниже будет инфляция в равновесии. Поэтому так низка была инфляция на протяжении второй половины 20-го века в Германии, где была сильна память о гиперинфляции 1922-1923 годов, и в Новой Зеландии, где законодательно установлено, что глава центрального банка должен уйти в отставку при превышении инфляцией некого заданного барьера.

Согласно Бэрро и Гордону (1983), центральный банк может придерживаться низкого уровня инфляции, если между ним и публикой существует определенный уровень доверия. Если изначально публика доверяет банку и считает, что в ближайшем будущем он не станет преследовать инфляционную политику, то банку может быть невыгодно обманывать ожидания публики, так как это повлечет потерю доверия и рост инфляционных ожиданий.

Этот аргумент можно формализовать в виде бесконечно повторяющейся игры. Пусть на протяжении моментов времени $t = 1, 2, \ldots$ два игрока — банк и публика — играют в такую одноnериодную игру. Изначально, публика ожидает, что банк будет придерживаться политики низкой инфляции: $\pi^e = 0$. Банк в каждый момент времени выбирает, какой уровень инфляции — низкий $\pi_L = \pi^o = 0$ или высокий $\pi_H = \pi(0) = \frac{b}{b^2+a}(y^o - \bar{y})$ — следует реализовывать. Если банк обманывает ожидания публики и реализует $\pi = \pi_H$, то начиная со следующего момента времени, публика ожидает уровень инфляции, соответствующий равновесию в рассмотренной выше динамической модели: $\pi^e = \frac{b}{a}(y^o - \bar{y})$.

Возможно ли, что в бесконечно повторяющейся игре мы будем иметь $\pi = \pi_L$, $\pi^e = \pi_L$ в каждый момент времени? Пусть δ — фактор дисконта для центрального банка. Рассмотрим дисконтированный выигрыш банка в двух случаях: когда он все время придерживается политики низкой инфляции, и когда он отклоняется в момент времени $t = 1$. В первом случае дисконтированный выигрыш центрального банка составит

$$W_{b1} = -\frac{1}{1-\delta}(y^o - \bar{y})^2,$$

во втором —

$$W_{b2} = -(y^o - \bar{y})^2 \frac{a}{b^2 + a} - \frac{\delta}{1 - \delta}(y^o - \bar{y})^2 \left(1 + \frac{b^2}{a}\right).$$

Равновесие с низкой инфляцией возможно, если $W_{b1} \geq W_{b2}$, или

$$\delta \geq \frac{a}{2a + b^2}. \tag{2.71}$$

При прочих равных, центральный банк будет придерживаться политики низкой инфляции при достаточно высоком b или при достаточно малом a, так как в таких случаях равновесная инфляция будет слишком высока.

Практическая ценность стратегии «око за око»

> Жен и детей в таких случаях не переселяют, так как даже в случае «войны» им опасность не угрожает. В другом случае это стало бы наиболее уязвимым местом каждого семейства, и любая подобная операция привела бы к такой же ответной. (М. Пьюзо, «Крестный отец».)

В своей ставшей знаменитой книге «Эволюция кооперации», профессор Мичиганского университета Роберт Аксельрод описывает турнир между компьютерными программами, соревновавшимися в повторяющуюся игру «дилемма заключенного». Каждая программа реализовывала какую-то марковскую стратегию. В первом турнире участвовало 15 программ, представленных различными специалистами в области экономических наук, математики, психологии, информационных технологий. Каждая программа пять раз играла против каждой другой программы, по типу футбольного чемпионата. Число ходов в каждой игре было случайным и в среднем равнялось 150. Успех программы за каждую игру равнялся ее среднему выигрышу за ход. Так же определялся и итоговый рейтинг программы.

Наиболее успешным алгоритмом оказалась самая простая программа — стратегия «око за око». Она сочетала в себе три качества. Во-первых, эта стратегия являлась «хорошей», то есть первый ход был кооперативным; эта программа первой не начинала войну. Во-вторых, если программа - соперник играла некооперативную стратегию H, то стратегия «око за око» немедленно отвечала тем же. Таким образом, эта стратегия не давала себя эксплуатировать. Наконец, в-третьих, стратегия «око за око» обладала короткой памятью. Если соперник переключался с некооперативной стратегии на кооперативную, то «око за око» тоже переключалась на кооперативную стратегию и забывала о прошедшем конфликте. Это позволяло избегать затяжных конфликтов, и позволило стратегии выиграть не только этот турнир, но и следующий, в котором участвовало 63 программы (некоторые из которых содержали более 100 строк кода).

У стратегии «око за око» есть еще одно преимущество, не реализуемое при игре между компьютерными программами, но крайне важное в человеческих отношениях: эта стратегия является понятной другим игрокам. В качестве примера Аксельрод приводит систему негласных договоренностей между отдельными подразделениями враждующих армий, которая существовала на Западном фронте во время Первой мировой войны. На Западном фронте большую часть времени враждующие армии проводили в окопах, разделенные несколькими сотнями метров нейтральной территории. Во время активных боевых действий обе стороны несли огромные потери; однако во времена затишья, солдаты враждующих армий избегали стрелять друг в друга (Аксельрод, стр. 74). Мало того, командиры небольших подразделений часто не позволяли артиллерийским батареям стрелять на поражение, ибо точное попадание во вражеский объект вызывало немедленную ответную реакцию со стороны противника; артиллерийский огонь был предназначен для того, чтобы создать видимость ведения боевых действий и отчитаться перед вышестоящим начальством (которое было расквартировано на достаточном удалении от линии фронта и чья жизнь не находилась в непосредственной опасности). Эта негласная система — получившая название «живи и дай жить другим» — просуществовала почти до конца войны. Британские военачальники стали требовать от своих подчиненных проводить небольшие рейды на вражескую территорию, и в качестве отчета о проделанной работе предъявлять либо захваченных в плен солдат противника, либо собственные человеческие потери. Это разрушило систему взаимного доверия, существовавшую между солдатами противоборствующих сторон. При достаточно большой вероятности нападения со стороны противника, наилучшей стратегией будет вести упреждающий огонь на поражение, вместо того, чтобы стрелять мимо в надежде, что противник не станет стрелять в вас. Такое изменение тактики со стороны британского руководства сделало войну более кровопролитной и ускорило ее конец.

2.2.4 Модель последовательного торга

Повторяющиеся игры могут быть использованы для моделирования процесса принятия компромиссных решений — например, раздела имущества.

Последовательный торг двух игроков

Рассмотрим задачу, предложенную Ариэлем Рубинштейном (1982). Два игрока нашли некоторую сумму денег (скажем, 1 доллар). Они решили, что будут по очереди делать предложения о том, как поделить эту сумму — пока, наконец, не договорятся. То есть в момент времени $t = 1$ первый игрок предлагает поделить эту сумму: взять r_1^1 себе и отдать $(1 - r_1^1)$ второму игроку. Второй игрок наблюдает предложенный r_1 и либо соглашается (A), либо отказывается (R). Если второй игрок соглашается, то игра заканчивается. Если он отказывается, то наступает момент времени $t = 2$. В момент времени $t = 2$ приходит очередь второго игрока предлагать дележ. Пусть r_2^2 и $1 - r_2^2$ — пропорции, в которых второй игрок предлагает поделить исходную сумму. Первый игрок может либо согласится, либо отказаться. Если первый игрок отказывается, то в $t = 3$ снова наступает его очередь предлагать дележ. Пусть r_t^j — доля исходной суммы, которую игрок $j = 1, 2$ предложил игроку 1 в момент времени t ($j = 1$ если t нечетное и $j = 2$ если t четное).

Будем считать, что оба игрока ценят свое время. Коэффициент дисконта для игрока j составляет $\delta_j \in (0, 1)$. То есть если в момент времени T игроки договоряться, то выигрыш игрока 1 составит $U_1 = \delta_1^{T-1} r_T^j$, выигрыш игрока 2 — $U_2 = \delta_2^{T-1}(1 - r_T^j)$, где $j = 1$ если T нечетное, и $j = 2$ если T четное.

Найдем совершенное по подыграм равновесие в этой игре. Пусть V_i — выигрыш игрока i в подыгре, в которой игрок i предлагает дележ. Мы предполагаем, что V_i^t не зависит ни от предыстории ходов в моменты времени $1, \ldots, t - 1$, ни даже от самого момента времени t (только от того, четный он или нечетный). Таким образом, мы ищем *стационарное* равновесие, в котором во всех подыграх стратегии игроков одинаковы.

Предположим, что после предложения игрока 1 игра заканчивается. Следовательно, игрок 1 должен предложить минимальный дележ, на который согласится игрок 2, или

$$1 - r_t^1 = \delta_2 V_2.$$

Если игра заканчивается в тот момент, когда игрок 1 делает предложение, то мы будем иметь

$$V_1 = r_t^1.$$

Аналогично мы получим

$$r_t^2 = \delta_1 V_1 \text{ и } V_2 = 1 - r_t^2$$

для нечетных t. Получается 4 уравнения с 4 неизвестными. Их решение и дает нам совершенное по подыграм равновесие. Игрок 1 предлагает дележ

$$(r_t^1, 1 - r_t^1) = \left(\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}, \frac{\delta_2(1-\delta_1)}{1-\delta_1\delta_2}\right) \tag{2.72}$$

и принимает предложение игрока 2 только если

$$r_t^2 \geq \frac{\delta_1(1-\delta_2)}{1-\delta_1\delta_2}. \tag{2.73}$$

Игрок 2 предлагает дележ

$$(r_t^1, 1 - r_t^1) = \left(\frac{\delta_1(1-\delta_2)}{1-\delta_1\delta_2}, \frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2}\right) \tag{2.74}$$

и принимает предложение игрока 1 только если

$$1 - r_t^1 \geq \frac{\delta_2(1-\delta_1)}{1-\delta_1\delta_2}. \tag{2.75}$$

Можно сделать несколько выводов. Выигрыш игрока в том случае, когда он предлагает дележ первым больше, чем тогда, когда он предлагает дележ вторым. Так как оба игрока ценят время, упущенное в процессе торга ($\delta_i < 1$), то игрок, предлагающий дележ, обладает преимуществом. Действительно, пусть $\delta_1 = \delta_2 = \delta$. Тогда выигрыш первого игрока будет $\frac{1}{1+\delta}$, выигрыш второго игрока — $\frac{\delta}{1+\delta}$. Величина этого преимущества возрастает при убывании δ: при $\delta = 0$ первый игрок забирает себе все; при $\delta = 1$ оба игрока достаточно терпеливы для того, чтобы делящий сразу предложил равный дележ. При этом терпение всегда приносит свои плоды: при разных δ_i, выигрыш как первого, так и второго игрока возрастает с собственной δ и падает с δ другого игрока.

Такая же игра, но с конечным числом периодов, была рассмотрена Стаалом (1972). Решение в конечной игре, полученное методом обратной индукции, обладает теми же свойствами сравнительной статики, что и в игре с бесконечным горизонтом планирования. В равновесии, в момент времени игрок 1 предлагает некий дележ, на который соглашается второй игрок. При этом при увеличении числа периодов равновесный дележ стремится к равновесному дележу в задаче с бесконечным числом периодов, решенной выше.

Данная пара стратегий является совершенным по подыграм равновесием по построению. Но существуют ли другие совершенные равновесия? Может ли совершенное по подыграм равновесие предполагать, что в разные моменты времени игроки предлагают разные дележи? Оказывается, что нет.

Докажем, что представленное равновесие является единственным. Пусть выигрыши игроков в подыграх V_i^t зависят от t. Обозначим $\underline{V}_i = \inf V_i^t$, $\bar{V}_i^t = \sup V_i^t$. Пусть предложение делает игрок 1. С одной стороны, если от предлагает второму игроку $\delta_2\bar{V}_2$, то игрок 2 обязательно примет его предложение. Следовательно, $\underline{V}_1 \geq 1 - \delta_2\bar{V}_2$. С другой стороны, если первый игрок предлагает второму меньше, чем $\delta_2\underline{V}_2$, то второй игрок наверняка откажется. Следовательно, мы имеем $\bar{V}_1 \leq 1 - \delta_2\underline{V}_2$. Получив аналогичные ограничения для второго игрока, мы приходим к системе неравенств

$$\begin{array}{rcl} \underline{V}_1 & \geq & 1 - \delta_2\bar{V}_2 \\ \bar{V}_1 & \leq & 1 - \delta_2\underline{V}_2 \\ \underline{V}_2 & \geq & 1 - \delta_1\bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 & \leq & 1 - \delta_1\underline{V}_1. \end{array} \tag{2.76}$$

У этой системы существует единственное решение $\underline{V}_1 = \bar{V}_1 = \frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}$, $\underline{V}_2 = \bar{V}_2 = \frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2}$. Таким образом, единственное совершенное по подыграм равновесие в этой игре является стационарным.

Модель последовательного торга при принятии решений несколькими игроками

В предыдущей задаче мы моделировали поведение двух индивидов, по очереди предлагающие дележ некоторого ресурса. Похожий проход применим и в более сложных ситуациях. Бэрон и Фереджон (1989) предложили рассмотреть задачу дележа единицы ресурса между N игроками.

Пусть в каждый момент времени дележ предлагает игрок, выбираемый наугад с равной вероятностью $\frac{1}{N}$. Далее каждый из игроков голосует за или против предложенного дележа. Если за предложенный дележ проголосовало не менее $K \le N$ игроков, то игра заканчивается. Если нет, то право предлагать дележ переходит к следующему наугад выбранному игроку. Пусть дисконт у всех игроков одинаков и равен δ. Мы будем решать эту игру способом, аналогичным использованному в предыдущей задаче.

В отличие от предыдущей задачи, стационарное равновесие не будет единственным равновесием, совершенным по подыграм. Так что мы сразу будем искать решение в классе марковских стратегий с нулевой памятью. Предположим, что равновесие симметричное: в любой подыгре ожидаемый выигрыш игрока зависит только от того, предлагает ли он дележ, или нет. Пусть R — ожидаемый выигрыш игрока, предлагающего дележ; r — ожидаемый выигрыш игрока, не предлагающего дележ, *до того, как дележ предложен.*

Чему равен выигрыш каждого из игроков в подыгре при условии, что предложенный в данный момент времени дележ не принят? С вероятностью $\frac{1}{N}$ игрок будет предлагать дележ и получит выигрыш R. С вероятностью $\frac{N-1}{N}$ его выигрыш составит r. Так что для того, чтобы игрок согласился на предлагаемый дележ в данный момент времени, необходимо, чтобы ему предложили как минимум $\delta(\frac{R}{N} + \frac{r(N-1)}{N})$.

Таким образом, предложенный дележ будет: $1-(K-1)\delta(\frac{R}{N} + \frac{r(N-1)}{N})$ предлагающему; $\delta(\frac{R}{N} + \frac{r(N-1)}{N})$ каждому из остальных $K-1$ игроков, которые должны одобрить дележ; 0 каждому из оставшихся $N-K$ игроков. Симметричность этой игры требует предположения о том, что все $N-1$ игроков, не предлагающих дележ на данном этапе, должны иметь одинаковую вероятность быть включенными в число $K-1$ игроков, которые одобрят дележ. Эта вероятность равна $\frac{K-1}{N-1}$. Следовательно, мы имеем систему уравнений, описывающих стационарное равновесие в этой модели:

$$\begin{aligned} R &= 1-(K-1)\delta\left(\frac{R}{N} + \frac{r(N-1)}{N}\right) \\ r &= \delta\frac{K-1}{N-1}\left(\frac{R}{N} + \frac{r(N-1)}{N}\right). \end{aligned} \tag{2.77}$$

Эта система уравнений имеет решение

$$\begin{aligned} R &= \frac{N-\delta(K-1)}{N} \\ r &= \frac{\delta(K-1)}{N(N-1)}. \end{aligned} \tag{2.78}$$

Выигрыш игрока, которому будет предложено одобрить дележ, составит

$$\delta\left(\frac{R}{N} + \frac{r(N-1)}{N}\right) = \frac{\delta}{N}. \tag{2.79}$$

Как и при последовательном торге двух игроков, равновесный выигрыш предлагающего дележ снижается при увеличении дисконта δ (а выигрыш других игроков — возрастает). Однако даже при $\delta = 1$ у предлагающего игрока может остаться преимущество: $R = \frac{N-K+1}{N} > \frac{K-1}{N(N-1)} = r$. Это происходит, если для одобрения дележа не требуется единогласия ($K < N$), так как в случае недостижения согласия в данный момент времени существует положительная вероятность, что в следующий момент времени игроку будет предложен 0. Выигрыши предлагающего дележ игрока и всех остальных игроков сравняются только в одном случае: если игроки максимально терпеливы ($\delta = 1$), и дележ требует единогласного одобрения ($K = N$).

Приложения

А. Определение игры в развернутой форме.

Определение 25 Игра в развернутой форме есть совокупность Γ следующих объектов:

1. Множества игроков $I = \{1, \cdots, N\} \cup \{$ природа $\}$.

2. Дерева игры — $(X, \vdash)$, где

   (a) X — множество вершин.

   (b) $\vdash$ — отношение наследования: $x \vdash y$ означает «x происходит раньше, чем y». Пусть это отношение обладает следующими свойствами:

      i. $\vdash$ транзитивно: если $x' \vdash x$, $x \vdash x''$, то $x' \vdash x''$.

      ii. $\vdash$ антисимметрично: не выполняется $x \vdash x$. Антисимметричность и транзитивность определяют $\vdash$ как частичный порядок на X.

      iii. Если $x' \vdash x$ и $x'' \vdash x$, то либо $x' \vdash x''$, либо $x'' \vdash x'$.

   (c) Множестно конечных вершин $Z \subset X$: для $z \in Z$, не существует $x \in X$, такой, что $z \vdash x$

   (d) Начальная вершина $o \in X$, такая, что $o \vdash x$ для всех $x \in X$.

3. Функций выигрышей: $u_i : Z \to \mathbf{R}$ для $i = 1, \ldots, N$.

4. Очередности ходов $\dot{l} : X \setminus Z \to I$.

5. Множества действий A. Пусть $A(x)$ — действия, доступные в вершине $x \in X$.

6. Информационных множеств. Пусть H — разбиение $X \setminus Z$ на подмонжества, такое, что

   (a) Для всех $h \in H$, если $x \in h$ и $x' \in h$, то $i(x) = i(x')$, то есть в каждом информационном множестве объединены вершины, в которых ходит только один игрок, и

   (b) Если $x, x' \in h$, то $A(x) = A(x')$. То есть во всех вершинах, входящих в информационное множество, игроку доступен один и тот же набор действий.

Множество X и отношение $\vdash$ определяет направленный граф. Условия на отношение $\vdash$ гарантируют, что граф является *деревом*. Начальная вершина o соответствует моменту начала игры. Каждая вершина, которая не является конечной, означает либо принятие решения одним из игроков, либо случайный ход, который делает природа. Каждая конечная вершина соответствует окончанию игры и какому-то вектору выигрышей игроков. Информационные множества показывают, что известно игрокам о ходах, сделанных ранее другими игроками.

Б. Доказательство теоремы о существовании равновесия в играх с совершенной информацией.

Доказательство этой теоремы проходит по индукции. Пусть Γ — динамическая игра, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_T$ — следующее семейство игр:

1. $\Gamma_1 = \Gamma$.

2. Γ_{t+1} получается из игры Γ_t следующим образом:

   (a) Возьмем вершину $x \in \Gamma_t$, такую, что все вершины, следующие за x, являются конечными. Пусть i — игрок, делающий ход в вершине x. Пусть $Z = \{z_1, \ldots, z_M\}$ — конечные вершины, соответствующие ходам игрока i в вершине x.

   (b) Пусть в вершине $z^* \in Z$ выигрыш игрока i максимален среди всех $z \in Z$. Пусть $s(x)$ — соответствующее действие игрока i. Удалим вершины Z из дерева игры. Объявим x конечной вершиной с выигрышами игроков $u(x) = u(z^*)$.

   (c) Повторяем эту процедуру до тех пор, пока от игры не останется одна начальная вершина o.

Так как игра является конечной, данная процедура определяет ход $s(x)$ для всех вершин x исходной игры Γ. По построению, профиль стратегий s является равновесием. Действительно, пусть игрок i в вершине x выберет действие $s'(x) \neq s(x)$. Будем говорить, что если Γ — игра, s — профиль стратегий и $x \in \Gamma$ — одна из вершин графа игры, то будем говорить, что x лежит на траектории игры при стратегиях s если существует положительная вероятность того, что игра пройдет через вершину x. Если x лежит на траектории игры, то выигрыш игрока i снизится или останется неизменным. Если x не лежит на траектории игры, то выигрыш игрока i останется неизменным.

В. Определение подыгры.

Определение 26 Пусть Γ — игра в развернутой форме, x — неконечная вершина дерева игры, такая, что не существует $x \vdash x'$, $y \not\vdash x$, таких, что x и y принадлежат одному информационному множеству. Обозначим за $\Gamma(x)$ игру, состоящую из вершины x и всех вершин, лежащих ниже ее, и наследующую все остальные свойства (функции выигрышей, очередность ходов и информационные множества) у игры Γ. Будем говорить, что $\Gamma(x)$ — *подыгра* Γ.

2.3 Задачи

1. Используя обратную индукцию, докажите, что в игре «крестики-нолики» каждая из сторон может добиться ничьей.

2. «Девятнадцать» — детская игра, в которой два игрока по очереди называют числа от 1 до 3. Все названные числа суммируются. Когда сумма стангосится равной или превышает 19, игра останавливается. Игрок, на котором остановилась игра, объявляется проигравшим, другой игрок — победителем. Найдите совершенное по подыграм равновесие. Как изменятся стратегии игроков, если игрок, на котором остановилась игра — победитель? Кто выигрывает в каждой игре — тот, кто делает первый ход, или другой игрок?

3. Три негодяя — Блондин (Хороший, **G**), Ангельские Глазки (Плохой, **B**), и Туко (Злой, **U**) устроили дуэль на кладбище, где зарыто миллион долларов. Туко попадает в цель с вероятностью 0.4. Ангельские Глазки попадает с вероятностью 0.8. Блондин никогда

не промахивается. Дуэль реализуется как двухпериодная игра. Каждый выбирает, в кого выстрелить, и стреляет. Оставшиеся в живых после первого выстрела делают еще один выстрел. Затем те, кто остался жив, делят золото поровну между собой. Ценность всего золота для одного игрока равна единице. Выигрыш погибшего равен нулю. Найдите совершенное по подыграм равновесие. Почему Блондину так не везет в равновесии?

4. N голодных львов готовятся съесть антилопу. В львиной стае заведен такой порядок дележа добычи: сначала, в момент времени $t = 1$, самый старый лев решает, съесть ему антилопу, или нет. Если он отказывается есть, то игра заканчивается. Если он съедает антилопу, то в момент времени $t = 2$ следующий по старшинству лев решает: съесть ли первого льва, или нет. Если он отказывается есть, то игра закандивается. Если нет, то третий лев решает, есть ли второго. Так игра продолжается до момента времени $t = N$, когда приходит очередь кормиться самому молодому льву. Предпочтения каждого льва ранжированы следующим образом: поесть и остаться живым, остаться голодным и живым, быть съеденым. Найдите совершенное по подыграм равновесие.

5. Маша и Саша нашли под новогодней елкой 4 подарка: футбольный мяч, куклу Барби, коробку конфет, и конструктор «Лего». Им нужно поделить подарки. Они договорились, что дележ происходит так: сначала Маша берет себе один подарок, потом Саша, потом снова Маша. Саша забирает себе оставшийся подарок. Ценность подарков для Саши и Маши такая:

	конфеты	мяч	конструктор	кукла
Маша	1	2	3	4
Саша	2	3	4	1

   (a) Нарисуйте дерево игры.
   (b) Сколько стратегий у каждого игрока?
   (c) Найдите равновесие в игре, используя обратную индукцию.
   (d) Повторите решение для обратного порядка дележа. Какой порядок более выгоден каждому из игроков?

6. В игре «верю - не верю» на рисунке 2.13, нарисуйте дерево игры и найдите совершенное по подыграм равновесие для каждого из следующих вариантов игры:

   (a) Первый игрок не видит карту, которую берет из колоды; второй игрок не видит карту первого игрока.
   (b) Первый игрок не видит карту, которую берет из колоды; второй игрок видит карту первого игрока.
   (c) Все как в изначальном варианте игры, только теперь в колоде N тузов и K шестерок.

7. (Бен-Порат и Декель, 1992). Два человека готовятся играть в игру «координация» со следующей матрицей выигрышей:

		II	
		L	R
I	L	9,6	0,4
	R	4,0	6,9

До того, как они начинают играть, игрок I принимает решение: стоит ли ему сжечь 2 единицы собственной полезности, или нет. После того, как его выбор наблюдает второй игрок, они играют в однопериодную «координацию».

(a) Перечислите все стратегии обоих игроков.

(b) Нарисуйте дерево игры и найдите все равновесия.

(c) Представьте игру в нормальной форме. Найдите все равновесия, используя итеративное удаление строго и слабо доминируемых стратегий. Как вы можете прокомментировать результат?

8. На кафедре экономики в некотором университете пять профессоров. Секретарь кафедры просит каждого скинуться по 100 рублей для фуршета после заседания кафедры. Для того, чтобы фуршет состоялся, необходимо, чтобы скинулось как минимум три профессора. Деньги, отданные на организацию фуршета, профессорам не возвращаются. Ценность фуршета для каждого профессора — 500 рублей. Найдите совершенное по подыграм равновесия для каждого из следующих двух случаев:

   (a) Профессора по очереди решают, сдавать деньги, или нет. Каждый профессор наблюдает решение всех предыдущих.

   (b) Профессора 1 и 2 сдают деньги первыми (по очереди). Затем, решение (сдавать или не сдавать) одновременно принимают профессора 3–5, причем они не наблюдают решения 1 и 2.

9. У Петра Ивановича есть любимый внук, Вовочка. Текущий доход Вовочки — I_C рублей, Петра Ивановича — I_P рублей. Рассмотрим такую динамическую игру.

   1 этап Вовочка решает, сколько из текущего дохода сберечь на завтрашний день (S).

   2 этап Петр Иванович решает, какого размера наследство оставить Вовочке (B).

   Выигрыш Вовочки таков:
$$U_1 = \ln(I_C - S) + \ln(B + S),$$
   где $I_C - S$ — его потребление в текущем году, $B + S$ — его потребление в будущем. Выигрыш Петра Ивановича:
$$U_2 = \ln(I_P - B) + k(\ln(I_C - S) + \ln(B + S)),$$
   где k отражает степень заботы Петра Иванавича о своем внуке. Решите игру методом обратной индукции. Покажите, что равновесие Парето-неэффекттивно, то есть можно увеличить выигрыш обоих, увеличив S и снизив B.

10. (Вейнгаст, 1997). Общество состоит из диктатора (R) и двух групп граждан (A и B). На первом этапе диктатор решает, стоит ли ему экспроприировать одну из групп, и если да, то какую. Если экспроприации нет, то выигрыш всех трех игроков равен 0. Если диктатор решил провести экспроприацию, то на втором этапе, каждая из групп решает, стоит ли ей бунтовать против диктатора. Бунт удается, только если обе группы решают бунтовать. В таком случае экспроприации не происходит, диктатор несет издержки k, каждая из двух групп получает выигрыш b. Если бунтует только одна группа, то она несет издержки $c > 0$. В добавок к этому, диктатор экспроприирует $x > 0$ у одной из групп (то есть выигрыш диктатора составит x, выигрыш экспроприируемой группы — $-x$ либо $-c - x$. Нарисуйте дерево игры. Найдите все совершенные по подыграм равновесия.

11. Рассмотрим такую динамическую игру.

   (a) Игрок 1 выбирает одно из чисел $\{1, 2\}$.

   (b) Ход случайный. Бросают монету, если выпал «Орел», то второму игроку сообщают, что выбрал первый.

(c) Игрок 2 выбирает одно из чисел $\{3, 4\}$.

(d) Ход случайный. Выбирается наугад одно из чисел $\{1, 2, 3\}$ с вероятностями 0.4, 0.2, 0.4.

В результате игры числа, полученные на 1, 3 и 4 ходах складываются. Если полученная сумма нечетная, то первый игрок выплачивает ее второму игроку. Если сумма четная, то второй игрок платит первому.

Покажите игру в нормальной и развернутой форме. Найдите равновесия.

12. На некотором рынке конкурируют N фирм. Процесс ценообразования устроен следующим образом: в момент времени $t = 1$ фирма 1 выбирает $q_1 \in [0, 100]$, затем в $t = 2$ фирма 2 выбирает $q_2 \in [0, 100]$, и так далее, вплоть до фирмы N в момент времени $t = N$. Выигрыш фирмы i равен $U_i = q_i P - q_i c$, где $P = 100 - \sum_i q_i$. Найдите равновесие, совершенное по подыграм, в котором $q_i > 0$ для всех i. Сравните выигрыши игроков и цену в этом равновесии и равновесии в однопериодной игре, в которой все q_i выбираются одновременно.

13. Пусть Γ — динамическая игра с совершенной информацией, причем для всех игроков i, для любых двух конечных вершин z, z', $u_i(z) \neq u_i(z')$. Докажите, что в этой игре существует единственное совершенное по подыграм равновесие.

14. Пусть G — игра, в которой K равновесий Нэша, причем выигрыши каждого игрока во всех равновесиях одинаковы. Сколько существует совершенных по подыграм равновесий в игре G, повторенной T раз?

15. Пусть G — игра, в которой несколько равновесий Нэша. Докажите, что каждое равновесие в игре G (с равновесным профилем стратегий a) соответствует совершенному по подыграм равновесию в игре G, повторенной конечное число раз, в котором на каждом этапе игроки реализуют a.

16. Докажите следующую версию «народной теоремы». Пусть игра G — игра в нормальной форме, $\hat{a}$ — профиль действий, такой, что для всех i, $u_i(\hat{a}) > \underline{u}_i$. Пусть в игре G существуют два равновесия Нэша, таких, что равновесные выигрыши не совпадают ни для одного из игроков. Пусть существуют N профилей стратегий $(a^i)_{i=1}^N$, таких, что для каждого игрока i, мы имеем $u_i(a^i) < u_i(\hat{a})$ и $u_i(a^j) > u_i(a_i)$ для всех $j \neq i$. Докажите, что для всех ϵ, существует $T^* < \infty$, такое, что для всех $T > T^*$, в игре $G(T)$ существует равновесие Нэша, в котором выигрыш каждого игрока отличается от $u_i(\hat{a})$ не более чем на ϵ. Считайте, что выигрыш в конечно повторяющейся игра задан уравнением (2.47).

17. Рассмотрим такую игру:

	a	b	c	d	e
A	1,1	5,0	0,0	0,0	0,0
B	0,5	4,4	0,0	0,0	0,0
C	0,0	0,0	3,3	0,0	0,0
D	0,0	0,0	0,0	$4,\frac{1}{2}$	0,0
E	0,0	0,0	0,0	0,0	$\frac{1}{2}$,4

(a) Существует ли в этой игре, повторенной два раза, совершенное по подыграм равновесие, в котором на первом ходе игроки реализуют профиль действий (B, b)?

(b) Ужесточим требования к равновесию. Пусть теперь равновесие не только обязано быть совершенным по подыграм. Потребуем, чтобы в каждой подыгре, равновесие не было Парето-доминируемым другим равновесием. То есть будем считать, что в каждой подыгре игроки могут *передоговориться* — перейти к любому другому равновесию, если это устроит обоих игроков. Как изменится ваш ответ? Объясните, как дополнительное требование Парето-эффективности равновесий в подыграх сужает множество выигрышей, которые можно реализовать в совершенном по подыграм равновесии.

18. Иван и Никифор играют в «дилемму заключенных» со следующей матрицей выигрышей:

	X	Y
X	1,1	0,5
Y	5,0	4,4

Вне зависимости от исхода игры, на следующий день игра повторяется, и так до бесконечности. Пусть $\delta < 1$ — фактор дисконта. Определим средний выигрыш игрока i как

$$U_i = (1-\delta)\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u_{it},$$

где u_{it} — выигрыш i в период t.

(a) Покажите, какие средние выигрыши реализуемы в равновесии при достаточно больших δ, а какие — нет.

(b) При каком δ можно реализовать в равновесии средний выигрыш $(4, 4)$?

19. Рассмотрим задачу бесконечно повторяющейся дуополии Курно. Пусть q_{1t}, q_{2t} — количество товара, произведенного фирмами 1 и 2 в момент времени $t = 1, 2, \ldots$, $P_t = a - q_{1t} - q_{2t}$ — функция спроса,

$$U_{it} = P_t q_{it} - c q_{it} -$$

прибыль фирмы $i = 1, 2$ в момент времени t, где $c \geq 0$ — предельные издержки фирмы.

(a) Найдите q^m — объем производства каждой фирмы при условии картельного сговора между фирмами, предполагая, что объемы производства обоих фирм равны.

(b) Найдите $q_1(q_2)$ и $q_2(q_1)$ — функции реакции для каждой из фирм. Найдите q^c — равновесный выпуск каждой из фирм при конкуренции Курно.

(c) Пусть между фирмами существует следующее негласное соглашение: в каждый момент времени каждая фирма производит q^m. Если в момент времени t какая-нибудь из фирм произведет другое количество товара, то начиная с момента времени $t + 1$ негласное соглашение перестает существовать, и выпуск каждой фирмы будет равен q^c. При каком факторе дисконта δ такое соглашение будет устойчивым, то есть возможно равновесие в бесконечно повторяющейся игре, в котором $q_1 = q_2 = q^m$ во все моменты времени?

20. В автомобильной промышленности два производителя: A и B. Кроме того, существует профсоюз автомобильных рабочих. В момент времени 1 профсоюз устанавливает заработную плату w, которую будет получать работник. В момент времени 2 каждая фирма $i = 1, 2$ решает, какое количество q_i машин ей следует произвести. Предположим, что для производства машины требуется один рабочий. Рыночная цена равна $P = 1 - q_1 - q_2$. Прибыль каждой фирмы равна $u_i = Pq_i - wq_i$, выигрыш профсоюза равен суммарной зарплате всех рабочих $U_w = (q_1 + q_2)w$. Найдите совершенное по подыграм равновесие Нэша.

21. (Zakharov, 2009) Два политика соревнуются друг с другом на президентских выборах. В момент времени $t = 1$ каждый политик $i = 1, 2$ выбирает политическую программу $y_i \in [0, 1]$. В момент времени $t = 2$ политики решают, сколько средств следует потратить на избирательную кампанию: e_1, e_2. Далее каждый из избирателей голосует за одного из политиков. Пусть существует континуум избирателей. Каждый избиратель характеризуется своей наилучшей альтернативой альтернативой v. Пусть наилучшие альтернативы избирателей распределены равномерно на $[-w, w]$. Предположим, что полезность избирателя с наилучшей альтернативой v при голосовании за кандидата i равна

$$u_i(v) = -(y_i - v)^2 - \sqrt{e_i}.$$

Будем считать, что избиратель голосует за того кандидата, кто приносит ему бо́льшую полезность.

(a) При данных y_1, y_2, e_1, e_2 найдите V_1, V_2 — доли голосов (от общего числа избирателей), получаемые кандидатами.

(b) Пусть полезность кандидата i равна $V_i - e_i$. Найдите, какими будут e_1, e_2 в совершенном по подыграм равновесии при данных y_1, y_2 (предполагая, без потери общности, что $y_1 \le y_2$. Объясните зависимость e_1, e_2 от w и от $y_2 - y_1$.

(c) Найдите, чему будут равны y_1, y_2 в совершенном по подыграм равновесии. Почему мы не будем иметь $y_1 = y_2$?

22. (по мотивам Akerlof, 1970). Каждая из двух строительных фирм в городе N собирается нанять рабочих. В момент времени $t = 1$ каждая фирма $i = 1, 2$ объявляет зарплату w_i, которую она готова платить за день работы. В городе проживает континуум рабочих. В момент времени $t = 2$ каждый рабочий решает, за какую фирму ему стоит работать (и стоит ли работать вообще).Пусть выигрыш рабочего при работе на фирму i равен w_i. Будем считать, что выигрыш рабочего, если он не работает ни на одну фирму, равен его резервационной зарплате $r \in [0, 1]$. Будем считать, что r равномерно распределен на $[0, 1]$. Если $w_1 = w_2 \ge r$, то рабочий с равной вероятностью работает на каждую из двух фирм.

(a) Пусть w_1, w_2 — заработная плата, предлагаемая фирмами. Пусть $f(r) = \frac{3\alpha}{2}\sqrt{r}$ — производительность труда рабочего с резервационной зарплатой r. Найдите $\bar{f}(r) = E(f(\rho)|\rho \le r)$ — среднюю производительность рабочих, чья резервационная зарплата равна r или ниже.

(b) Пусть целевая функция фирмы i равна прибыли в расчете на одного рабочего. Будем предполагать, что если фирма не производит, то несет небольшие издержки ϵ.

$$U_i = \begin{cases} \bar{f}(w_i) - w_i & , w_i \ge w_{-i} \\ -\epsilon, & w_i < w_{-i}. \end{cases}$$

Найдите равновесные w_1, w_2.

(c) Найдите Парето-оптимальный объем производства. Почему при некоторых значениях α производство в равновесии ниже, чем в Парето-оптимуме? Почему, в частности, самые производительные рабочие не будут работать? При чем здесь неспособность фирм платить бо́льшую зарплату более производительным рабочим?

23. (Гросеклоуз и Снайдер, 1996). Рассмотрим пример на стр. 75–77. Пусть депутат i голосует за предлагаемый лоббистом A законопроект, если $a_i + v > b_i$, где $v > 0$ — выигрыш депутата от реализации этого закона. Найдите совершенное по подыграм равновесие. Чему будет равен размер коалиции лоббиста A?

24. (Розенталь, 1990). Парламент некоторой страны представлен континуумом депутатов. Парламент должен принять решение по некоторму одномерному вопросу (например, установить уровень затрат на некоторый проект). Законотворческий процесс происходит следующим образом. В момент времени $t = 1$ глава парламентского комитета предлагает принять решение $s_1 \in [0, 1]$. В момент времени $t = 2$ депутаты голосуют («за» либо «против»). Выигрыш парламентария составляет $-\beta(s_1 - v)^2$ если проект принимается, и $-\beta(s_0 - v)^2$, если проект не принимается, где $\beta > 0$. Здесь, $s_0 \in [0, 1]$ — статус кво, v — наилучшая альтернатива парламентария. Будем предполагать, что v равномерно распределены на $[0, 1]$. Найдите совершенное по подыграм равновесие в этой игре, если

    (a) Выигрыш главы комитета равен s_1 если проект принят, и s_0 если проект не принят. То есть глава комитета заинтересован в высоком уровне затрат на проект.

    (b) Выигрыш главы комитета равен $-\gamma(s_1 - \bar{s})^2$ если проект принимается, и $-\gamma(s_0 - \bar{s})^2$, если нет, где $\bar{s} \in [0, 1]$ — наилучшая альтернатива главы комитета, $\gamma > 0$. Как равновесный s_1 зависит от $\bar{s}$, s_0? Почему в обоих случаях решение будет неоптимальным, с точки зрения парламентариев? Как изменится ваш ответ, если для принятия предложения s_1 необходима поддержка $\frac{2}{3}$ парламентариев?

25. N свиней толкаются у корыта с кормом. В каждый момент времени, у корыта может находиться только одна свинья. У этой свиньи есть два варианта действий: пассивный (быстро поесть и отбежать в сторону, получив выигрыш V за этот момент времени), либо агрессивный (защищать свое место у корыта от посягательства соседей, получив выигрыш $V - c > 0$). Другие свиньи в этот момент времени не предпринимают никаких действий (и получают нулевой выигрыш). Если свинья выбирает агрессивный вариант действий, то в следующий момент времени она снова окажется у корыта. Если нет, то у корыта окажется одна из N свиней, выбранная наугад. Игра повторяется бесконечное число периодов; фактор дисконта равен δ. Найдите условия существования каждого из двух возможных стационарных равновесий в чистых стратегиях (в первом таком равновесии свиньи всегда ведут себя агрессивно, во втором — всегда пассивно). Объясните, почему при некоторых значениях параметров δ, N, V, c будут существовать оба равновесия.

26. (Бергер и др., 2000). В некоторой республике проходят президентские выборы, в которых принимают участие два кандидата: бывалый и новичок. Стратегия каждого кандидата — это программа, с которой он идет на выборы (см. пример на стр. 1.3.2). Пусть $s_1 \in [0, 1]$ — программа бывалого, $s_2 \in [0, 1]$ — программа новичка. Например, можно считать, что $s = 0$ — крайне левая программа (высокие налоги, высокие затраты на социальную сферу), $s = 1$ — крайне правая политика (низкие налоги). Существует континуум избирателей. Каждый избиратель характеризуется наилучшей альтернативой $v \in [0, 1]$. Величина v равномерно распределена на $[0, 1]$. Пусть выигрыш избирателя с наилучшей альтернативой v при победе бывалого равен
$$U_1(v) = e - \beta(v - s_1)^2,$$
при голосовании за новичка —
$$U_2(v) = -\beta(v - s_2)^2.$$
Величина $e > 0$ отражает то, насколько, при равных политических программах, бывалый кандидат лучше новичка. Пусть $\beta > 0$. Каждый избиратель (по определению) голосует за того кандидата, кто приносит ему бóльшую полезность. Пусть выигрыши кандидатов равны V_1, V_2 — долям голосов, которые они получают на выборах.

    (a) Найдите, как V_1 и V_2 зависят от s_1, s_2. Подсказка: найдите сначала позицию $\tilde{v}$ безразличного избирателя — то есть решение уравнения $U_1(v) = U_2(v)$.

(b) Пусть кандидаты выбирают s_1, s_2 одновременно. Будет ли в этой игре существовать равновесие в чистых стратегиях?

(c) Пусть бывалый кандидат выбирает s_1, затем новичок выбирает s_2. Найдите равновесие. Почему в равновесии программа бывалого кандидата будет близка к центру?

27. Найдите совершенное по подыграм равновесие в задаче последовательного торга с конечным числом периодов (стр. 90). Предположим, что если игроки не приходят к согласию к моменту времени T, то предлагающий дележ игрок забирает себе весь товар. Покажите, что при $T \to \infty$, равновесие сходится к равновесию в задаче с бесконечным числом периодов.

28. Пусть в модели последовательного торга Бэрона-Фереджона (страница 92) все игроки-парламентарии делятся на две группы, численностью $A+B=N$. В каждом периоде, вероятность того, что игрок из первой группы будет предлагать дележ, равняется $\frac{1}{N} < p < \frac{1}{A}$, вероятность того, что дележ предложит кто-нибудь из второй группы — $q = \frac{1-Ap}{B}$. Пусть N, для того, чтобы дележ был утвержден, достаточно поддержки $\frac{N+1}{2}$ парламентариев. Выпишите систему уравнений относительно R_a, r_A, R_B, r_B — стоимостей игры для предлагающего и не предлагающего дележ игрока из каждой группы. Какой дележ будет предложен каждым игроком? Найдите стационарное равновесие. Объясните, почему мы можем иметь $r_A < r_B$.

29. (Смит, 1974) Два самца дерутся из-за партнерши. В каждый момент времени $t = 0, 1, 2, \dots$ каждый из них решает: продолжить ли борьбу, или сдаться. Если в какой-то момент времени один из самцов сдался, а другой - нет, то игра заканчивается, то сдавшийся самец объявляется проигравшим, не сдавшийся — победителем. Если оба самца сдались, то оба проиграли. Если никто не сдался, то игра переходит в следующий период, с дисконтом $\delta < 1$. Ценность победы равна 1, издержки в каждом периоде равны $0 < c < 1$. Найдите все стационарные смешанные равновесия (в которых каждый игрок продолжает борьбу с какой-то вероятностью). Как изменится ваш ответ, если издержки самцов не равны: $0 < c_1 < c_2 < 1$?

30. (Фереджон, 1986) В некоторой стране только что выбрали президента. Действия президента на посту определяются величиной $r \in [0, 1]$. Чем меньше эта величина, тем лучше избирателям, и тем хуже президенту. Например, r может отражать долю своего личного времени, которую президент тратит на не государственные дела, или количестко денег, которое он ворует из государственного бюджета (чем больше ворует, тем больше r). Сразу после выборов, публика ставит президенту следующее условие: он будет переизбран, только если $r \leq \bar{r}$.

(a) Рассмотрим следующую двухпериодную игру. Сначала публика устанавливает $\bar{r}$. Затем президент выбирает r. Если $r > \bar{r}$, то президент проигрывает следующие выборы, и е го выигрыш составляет r. Если $r \leq \bar{r}$, то президент выигрывает следующие выборы, и получает дополнительно δR, где $R > 0$ — выигрыш от переизбрания, $\delta > 0$ — фактор дисконта. Найдите совершенное по подыграм равновесие в этой игре.

(b) Теперь рассмотрим такую бесконечную игру: если президента переизбирают, то публика снова устанавливает $\bar{r}$, после чего президент выбирает r. Если президента не переизбирают, то игра заканчивается. Пусть выигрыш президента равен $U_p = \sum_{t=0}^{\infty} r_t \delta^t$, где r_t — действие президента в момент времени t. Выигрыш избирателей в момент времени t есть $1 - r_t$. Найдите стационарное равновесие, то есть такое, в котором $\bar{r}$ и r одинаковы во всех периодах.

Литература

[1] Abreu, Dilip. 1988. On the Theory of Infinitely Repeated Games with Discounting *Econometrica* 56 (2): 383–396.

[2] Acemoglu, D., and J. Robinson. 2005. *The Economic Origins of Democracy and Dictatorship.* New York: Oxford University Press.

[3] Akerlof, George A. 1970. The market for «lemons»: Quality uncertainty and the market mechanism. *The Quarterly Journal of Economics* 84(3): 488–500

[4] Alesina, Alberto, and Lawrence H. Summers. 1993. Central Bank Independence and Macroeconomic Performance. *Journal of Money, Credit, and Banking* 25: 151–162

[5] Axelrod, R. 1984. *Evolution of Cooperation*. Basic Books.

[6] David P. Baron and John A. Ferejohn. 1989. Bargaining in Legislatures. *The American Political Science Review* 83(4): 1181–1206

[7] Barro, Robert, and David B. Gordon. 1983. A positive theory of monetary policy in a natural rate model. *Journal of Moneraty Economics* 23: 3–30

[8] Elchanan Ben-Porath and Eddie Dekel. 1992. Signaling future actions and the potential for sacrifice. *Journal of Economic Theory* 57(1): 36–51

[9] Benoit, J.P., and V. Krishna. 1994. The Folk Theorems for Repeated Games: A Synthesis. Discussion Papers: New York University.

[10] Berger, Mark M., Michael C. Munger, and Richard F. Potthoff. 2000. The Downsian Model Predicts Divergence. *Journal of Theoretical Politics* 12(2): 228–240

[11] Camerer, C.F. 2003. *Behavioral Game Theory: Experiments in Strategic Interaction*. Princeton: Princeton, NJ

[12] D' Aspremont, C., J.J. Gabszewicz, and J.-F. Thisse. 1979. On Hotelling's 'Stability in Competition'. *Econometrica* 50: 1431–52

[13] Dixit, A. 1979. A Model of Duopoly Suggesting a Theory of Entry Barriers. *Bell Journal of Economics* 10: 20–32

[14] Dixit, A. 1980. The Role of Investment in Entry Deterrence. *Economic Journal* 90: 95–106

[15] Ferejohn, J. 1986. Incumbent performance and electoral control. *Public Choice* 50(1-3): 2–25

[16] Friedman, D.W. 1971. Non-cooperative equilibrium for supergames. *Review of Economic Studies* 38: 1–12

[17] Fudenberg, Drew, and Eric Maskin. 1986. The Folk Theorem in Repeated Games with Discounting and Incomplete Information. *Econometrica* 54(3): 533–554

[18] Fudenberg, D., and J. Tirole. 1991. *Game Theory.* Cambridge, Mass.:MIT Press

[19] Gibbons, Robert. 1992. *Game Theory for Applied Economists.* Princeton University Press

[20] Ghemawat, P. 1997. *Games Businesses Play: Cases and Models.* The MIT Press.

[21] Timothy Groseclose and James M. Snyder. 1996. Buying Supermajorities. *American Political Science Review* 90(2): 303–315

[22] Elizabeth Hoffman, Kevin McCabe and Vernon L. Smith. 1996. Social Distance and Other-Regarding Behavior in Dictator Games. *American Economic Review* 86(3): 653–660

[23] Kydland, Finn E., and Edward C. Prescott. 1977. Rules rather than discretion: The inconsistency of optimal plans. *The Journal of Political Economy* 85: 473–492

[24] McCarthy, N., and A. Meirowitz. 2007. *Political Game Theory: An Introduction.* Cambridge University Press.

[25] McKelvey, R., and T. Palfrey. 1992. An Experimental Study of the Centipede Game. *Econometrica.* 60(4): 803–836

[26] Myerson, R. (1991) *Game theory: Analysis of Conflict.* Harverd University Press

[27] Osborne, Martin, and Ariel Rubinstein. 1994. *A Course in Game Theory.* The MIT Press

[28] Palacios-Huerta, I., and O. Volij. 2009. Field Centipedes. *The American Economic Review* 99(4): 1619–1635

[29] Rabin, M. 1988. Consistency and robustness criteria for game theory. Mimeo, MIT.

[30] Rosenthal, Howard. 1990. The Setter Model. In James M. Enelow and Melvin J. Hinich *Advances in the Spatial Theory of Voting.* Cambridge University Press, Cambridge, MA

[31] Rubinstein, Ariel. 1982. Perfect equilibrium in a bargaining model. *Econometrica* 50: 97–109

[32] J. Schaeffer, N. Burch, Y. Bjornsson, A. Kishimoto, M. Muller, R. Lake, P. Lu, and S. Sutphen. 2007. Checkers Is Solved. *Science* 317 (5844)

[33] Smith, Maynard. 1074. The Theory of Games and the Evolution of Animal Conflict. *Journal of Theoretical Biology* 47(1): 209–221

[34] Spence, M. 1977. Entry, Capacity, and Oligopolistic Pricing. *Bell Journal of Economics* 10: 1–19

[35] Stackelberg, H. 1934. *Marktform und Gleichgewicht.* Vienna: Springer.

[36] Stahl, I. 1972. *Bargaining Theory.* Stockholm School of Economics.

[37] Tirole, J. 1988. *The Theory of Industrial Organization.* The MIT Press.

[38] Vives, X. 1999. *Oligopoly Pricing: Old Ideas and New Tools.* The MIT Press.

[39] Weingast, Barry. 1997. Political Foundations of Democracy and the Rule of Law. *American Political Science Review* 91(2): 245–263

[40] Zakharov, Alexey. 2009. A model of candidate location with endogenous valence. *Public Choice* 138 (3-4): 347–366

Глава 3

Статические игры с неполной информацией

Теплым июньским вечером вы снова вышли погулять в парк. Навстречу вам приближается субъект, угрожающий взорвать и вас, и себя, если вы не отдадите ему свой кошелек. Стоит ли вам отдавать кошелек, или нет? Если хулиган из второй главы принимает окончательное решение — взрывать или не взрывать гранату — после того, как вы решили, отдавать ему кошелек, или нет, и если хулиган предпочитает остаться в живых и без денег, то вы можете не отдавать ему ваши деньги. Но что, если хулиган — сумасшедший, «уличный самурай», для которого смерть представляет бо́льшую ценность, чем жизнь без кошелька? Вы заглядываете в бездонные голубые глаза хулигана, но не можете прочесть его мыслей. Кто он — нормальный человек или псих? Целевая функция хулигана известна только ему самому. Это — его *частная информация.* Игры, в которых целевая функция одного игрока может не быть известна другим игрокам, называются *играми с неполной информацией.*

3.1 Байесовы игры

Два производителя безалкогольных напитков — Coca-Cola и Pepsi — должны принять решение, стоит ли им осваивать новую рыночную нишу — производство энергетических напитков. Pepsi может либо войти на рынок (A), либо нет (B). У Coca-Cola уже освоена часть рынка; она может попытаться расширить свое присутствие (A), или не расширять (B). Издержки компании Coca-Cola при расширении могут быть либо высокими, либо низкими (на 3 единицы ниже). Матрицы выигрышей для двух фирм, в зависимости от уровня издержек Coca-Cola, таковы (Coca-Cola выбирает строки):

Высокие издержки Coca-Cola

	A	B
A	$0, -1$	$2, 0$
B	$2, 1$	$3, 0$

Низкие издержки Coca-Cola

	A	B
A	$3, -1$	$5, 0$
B	$2, 1$	$3, 0$

В первой игре мы имеем одно равновесие (B, A); во второй — одно равновесие (A, B). Однако как поведут себя игроки, если Pepsi не знает уровень издержек компании Coca-Cola? Например, ей известно лишь то, что издержки могут быть высокими с вероятностью θ и низкими с вероятностью $1-\theta$. Сама Coca-Cola, конечно же, знает свои издержки. Ей также известна вероятность θ. Что будет являться описанием равновесия в этой модели? Поскольку Pepsi не может наблюдать издержки своего конкурента, в равновесии она будет придерживаться какой-то (возможно, смешанной) стратегии q (вероятности, с которой она выберет A). Равновесная стратегия компании Coca-Cola будет описываться двумя величинами: p_1 — вероятностью выбрать A в случае, если издержки низкие, и p_2 — вероятность выбрать A при высоких издержках.

Равновесные стратегии q^*, p_1^* и p_2^* должны отвечать следующим условиям. Во-первых, Pepsi не сможет выбрать q', который принесет ей более высокую полезность при данных p_1^*, p_2^*. Во-вторых, Coca-Cola не сможет выбрать p_1', который принесет ей больший выигрыш при низких издержках, и не сможет выбрать p_2', который принесет ей больший выигрыш при высоких издержках.

Функция реакции для Pepsi будет такой:

$$q(p_1, p_2) = \begin{cases} 0, & \theta p_1 + (1-\theta)p_2 > \frac{1}{2} \\ [0,1], & \theta p_1 + (1-\theta)p_2 = \frac{1}{2} \\ 1, & \theta p_1 + (1-\theta)p_2 < \frac{1}{2} \end{cases} \tag{3.1}$$

Для Coca-Cola, мы имеем $p_1^* = p_1(q) = 0$ и $p_2^* = p_2(q) = 1$, так как при обоих уровнях издержек у этой фирмы есть доминирующие стратегии. В итоге мы имеем

$$q^* = q(p_1^*, p_2^*) = \begin{cases} 0, & \theta < \frac{1}{2} \\ [0,1], & \theta = \frac{1}{2} \\ 1, & \theta > \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{3.2}$$

В итоге, решение Pepsi входить на рынок зависит от вероятности того, что у Coca-Cola высокие издержки. Если эта вероятность велика, то Pepsi войдет на рынок. Если вероятность низка, то Pepsi входить не будет.

3.1.1 Определения

Рассмотрим игру между $I = \{1, \ldots, N\}$ игроками. Пусть T_i — множество типов для игрока i. Обозначим $T = \times_{i=1}^N T_i$, $T_{-i} = \times_{j\neq i} T_j$, $t_i \in T_i$, $t \in T$, $t_{-i} \in T_{-i}$. Пусть P — распределение вероятностей на множестве T. Мы предполагаем, что игроку i известен его собственный тип t_i. Что известно игроку i про типы остальных игроков? Условные вероятности определяются по формуле Байеса

$$P(t_{-i}|t_i) = \frac{P(t_i, t_{-i})}{P(t_i)} = \frac{P(t_i, t_{-i})}{\sum_{t_{-i}\in T_{-i}} P(t_i, t_{-i})}. \tag{3.3}$$

Обозначим за A_i множество действий игрока i, $A = \times_{i=1}^N A_i$ множество профилей действий. Тогда функция полезности для игрока i должна определять его выигрыш в зависимости от его типа и от профиля действий, выбранного игроками: $u_i : A \times T_i \to \mathbb{R}$. Обозначим за $u : A \times T \to \mathbb{R} = (u_1, \ldots, u_N)$ профиль выигрышей игроков. В этом определении мы снова (как и в динамических играх) проводим различие между стратегией и действием. Действие игрока — это один из возможных доступных ему ходов. Стратегия — это зависимость хода, который сделает игрок, от его типа.

Пусть $s_i : T_i \to A_i$ — стратегия игрока i, определяющая, какой ход он должен совершить в зависимости от его типа t_i. Обозначим за $s : T \to A$ профиль стратегий игроков. При данном профиле стратегий s, ожидаемый выигрыш игрока i, имеющего тип t_i, равен

$$\tilde{u}_i(s, t_i) = \sum_{t_{-i}\in T_{-i}} P(t_{-i}|t_i) u_i(s_i(t_i), s_{-i}(t_{-i}), t_i). \tag{3.4}$$

Мы теперь можем дать определение игры.

Определение 27 Набор $\langle I, A, T, P, u\rangle$ называется *игрой с неполной информацией* или *байесовой игрой.*

Понятие байесовой игры было введено Харшаньи (1967-1968). Он предложил интерпретировать игру с неполной информацией как игру с полной информацией с большим количеством игроков, в которой каждый игрок соответствует одному типу игрока в исходной игре. Первый ход делает Природа, определяя, какой тип каждого игрока будет задействован. Например, если каждый из двух игроков имеет два типа, то такую статическую игру можно представить как динамическую игру между *четырьмя* игроками, в которой каждый игрок соответствует одному игроку и одному типу в исходной игре.

Определение 28 Пусть $\langle I, A, T, P, u\rangle$ — байесова игра. Равновесием в этой игре является набор стратегий s^*, такой, что для всех i, для всех $a_i' \in A_i$, $t_i \in T_i$,

$$\tilde{u}_i(s^*(\cdot), t_i) \geq \sum_{t_{-i}\in T_{-i}} P(t_{-i}|t_i)u_i(a_i', s_{-i}^*(t_{-i}), t_i). \tag{3.5}$$

Равновесие в такой игре называется *Байесовым равновесием* или *равновесием Байеса-Нэша*. Это определение эквивалентно определению равновесия Нэша для представления байесовой игры, в котором первой ход делает Природа, выбирая тип игроков. Из теоремы о существовании равновесия в конечных играх следует следующее утверждение:

Теорема 10 Пусть $G = \langle I, A, T, P, u\rangle$, причем множества I, A и T конечны. Тогда в этой игре существует равновесие s^*.

Дуополия Курно с неполной информацией

Вернемся к задаче конкуренции двух фирм, рассмотренной в первой главе. Две фирмы решают, сколько товара произвести на продажу. Прибыль каждой фирмы равна ее выручке за вычетом издержек:

$$\begin{aligned} U_1 &= Pq_1 - c_1q_1 \qquad (3.6)\\ U_2 &= Pq_2 - c_2q_2, \qquad (3.7)\end{aligned}$$

где $P = 1 - q_1 - q_2$ — функция спроса. Пусть c_1 известен обеим фирмам. Напротив, c_2 является частной информацией. Он известен только Фирме 2. Первой фирме известно лишь, что эта величина принимает значение c_H с вероятностью θ и c_L с вероятностью $1-\theta$. При этом мы предполагаем, что θ является *всеобщим знанием* — то есть второй фирме известно θ, первой фирма известно, что второй фирме известно θ, и так далее.

В этой игре мы имеем $T = \{H, L\}$. Дерево игры представлено на рисунке 3.1.

Что является равновесием в этой игре? Фирма 1 обладает только одним возможным уровнем издержек. Следовательно, в равновесии в чистых стратегиях она будет производить какое-то количество товара q_1^*. У Фирмы 2 возможно два уровня издержек; следовательно, нам необходимо найти $q_2^*(H)$ и $q_2^*(L)$ — равновесные выпуски второй фирмы в том случае, когда ее издержки высокие и низкие, соответственно.

Согласно определению, равновесное действие каждой фирмы должно удовлетворять следующим условиям:

1. $q_2^*(H)$ есть решение задачи

$$\max_{q_2} u_2(q_1^*, q_2, H) = (1 - q_1^* - q_2 - c_H)q_2$$

2. $q_2^*(L)$ есть решение задачи

$$\max_{q_2} u_2(q_1^*, q_2, L) = (1 - q_1^* - q_2 - c_L)q_2$$

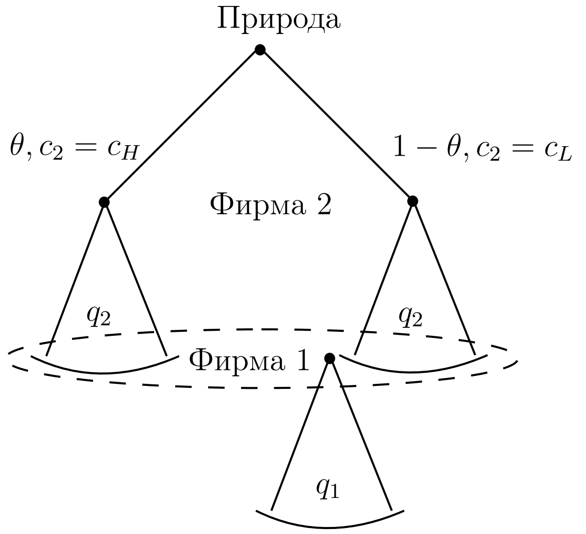


Рис. 3.1: Дерево игры в дуополии Курно с неполной информацией.

3. q_1^* есть решение задачи
$$\max_{q_1} \tilde{u}_1(q_1, q_2^*(L), q_2^*(H)) = \theta(1 - q_1 - q_2^*(H) - c_1)q_1 + (1-\theta)(1 - q_1 - q_2^*(L) - c_1)q_1.$$

Решая эти максимизационные задачи, получим условия первого порядка
$$q_2^*(H) = \frac{1 - q_1^* - c_H}{2} \tag{3.8}$$
$$q_2^*(L) = \frac{1 - q_1^* - c_L}{2} \tag{3.9}$$
$$q_1^* = \frac{1 - \theta q_2^*(H) - (1-\theta)q_2^*(L) - c_1}{2}. \tag{3.10}$$

Решение этих уравнений дает нам
$$q_2^*(H) = \frac{1 - 2c_H + c_1}{3} + \frac{1-\theta}{6}(c_H - c_L) \tag{3.11}$$
$$q_2^*(L) = \frac{1 - 2c_L + c_1}{3} - \frac{\theta}{6}(c_H - c_L) \tag{3.12}$$
$$q_1^* = \frac{1 - 2c_1 + \theta c_H + (1-\theta)c_L}{3}. \tag{3.13}$$

Интересно сравнить равновесный объем производства каждой из фирм в случае полной и неполной информации. Как мы помним, при полной информации в равновесии в модели Курно мы имеем
$$q_2 = \frac{1 - 2c_2 + c_1}{3}.$$

Таким образом, объем производства второй фирмы в случае, если ее издержки высокие, будет выше при неполной информации:
$$q_2^*(H) > \frac{1 - 2c_H + c_1}{3}$$

Получается, что на равновесие влияют не только издержки Фирмы 2, но и тот факт, известно ли Фирме 2, что Фирма 1 знает издержки Фирмы 2. Если Фирма 1 не знает точного уровня c_2, то ее равновесный выпуск будет ниже, чем в том случае, когда ей известно, что $c_2 = c_H$ (так как в первом случае, Фирма 1 будет ожидать, что с вероятностью $1-\theta$ издержки Фирмы 2 будут низкими, а ее выпуск — высоким). Фирма 2, предвидя это, будет производить больше, чем в случае с полной информацией.

Электоральная активность

Почему люди голосуют на выборах? Ведь голосование сопряжено с издержками — потерей времени, которое можно потратить на работу или отдых, а шансов как-то реально повлиять на исход выборов очень мало. Тем не менее, явка на выборах федерального уровня в большинстве стран превышает 50%, то есть люди идут голосовать вопреки теоретическим прогнозам. Этот факт продолжает доставлять много неудобства исследователям, так как теоретико-игровые модели предсказывают, что явка на выборах должна быть крайне низкой. Построение адекватной модели принятия решения «голосовать или остаться дома» остается пока нерешенной теоретической задачей, показывающей ограничения теоретико-игрового анализа человеческого поведения.[1]

Действительно, пусть в выборах участвуют два кандидата, и избиратель решает, голосовать на выборах за своего любимого кандидата, или нет. Пусть B — дополнительный выигрыш, который избирателю сулит победа его любимого кандидата, P — вероятность того, что голос избирателя будет решающим (то есть голоса всех остальных избирателей будут поровну отданы за обоих кандидатов, будем считать, что других избирателей четное число, и все они голосуют за того или другого кандидата). Наконец, пусть c — издержки, связанные с голосованием. В таком случае, избиратель должен проголосовать, только если

$$U = PB - c \geq 0. \tag{3.14}$$

На настоящих выборах, величина B может составлять существенную часть дохода избирателя на протяжении следующего электорального цикла — то есть равняться его заработной плате за несколько недель или даже месяцев (в особенности если разные кандидаты предлагают разную налоговую политику и разный объем субсидий различным группам граждан). Так как в большинстве случаев голосование не требует много времени, величина c не должна превышать значение часовой зарплаты человека. Однако простые расчеты показывают, что при реалистичных предположениях значение p настолько мало, что участие избирателя в выборах не будет оправдано. Получается так называемый «парадокс голосования».[2]

Рассмотрим одноепериодную игру, в которой участвуют $N_1 + N_2$ индивидов — избирателей. Каждый избиратель решает, стоит ли ему проголосовать за одного из двух кандидатов (A или B), либо остаться дома: $S_i = \{A, B, o\}$. Предположим, что избиратели делятся на две группы численностью N_1 и N_2. Каждый избиратель, принадлежащий к первой группе, в случае победы на выборах кандидата A получает выигрыш, равный 1, а в случае победы кандидата B, не получает ничего. Каждый избиратель второй группы аналигичным образом предпочтет, чтобы победил кандидат B. Таким образом, вероятность победы кандидата A есть

$$P_A = \begin{cases} 1, & \#\{i|s_i = A\} > \#\{i|s_i = B\} \\ \frac{1}{2}, & \#\{i|s_i = A\} = \#\{i|s_i = B\} \\ 0, & \#\{i|s_i = A\} < \#\{i|s_i = B\}, \end{cases} \tag{3.15}$$

вероятность победы второго кандидата есть $P_B = 1 - P_A$. В случае, если избиратель i голосует за одного из двух кандидатов, он несет издержки $c_i < \frac{1}{2}$.

Мы попробуем найти равновесие в этой игре для двух случаев — когда издержки каждого избирателя являются публичной информацией, и когда они известны только самому избира-

[1] Обзор литературы поэтой теме можно найти, например, в учебнике Мюллера (2007, гл. 14).

[2] Если предположить, что каждый из остальных избирателей голосует с вероятностью q за первого кандидата, то вероятность того, что голос данного избирателя будет решающим, будет приблизительно $P = \frac{3e^{-2(N-1)(p-0.5)^2}}{2\sqrt{2\pi(N-1)}}$ (согласно Оуэну и Грофману, 1984). Если $q = \frac{1}{2}$, то эта величина будет пропорциональна $\frac{1}{\sqrt{N}}$, то есть при миллионе избирателей вероятность стать решающим будет одна тысячная. Это не так мало — однако если $q \neq \frac{1}{2}$, то картина резко меняется; уже при $q = 0.505$ и $N = 1000000$, мы будем иметь $P \sim 10^{-25}$ — нулевая вероятность со всех практических точек зрения.

телю. Мы покажем, что хотя в первом случае и может существовать равновесие, в котором вероятность явки каждого избирателя высока, во втором случае явка будет обязательно низка[3].

Рассмотрим сначала случай с полной информацией. Пусть издержки у всех избирателей одинаковы: $c_i = c$. Предположим также, что обе группы избирателей имеют одинаковый размер: $N_1 = N_2 = N$. Заметим, что для избирателей первой группы стратегия $s_i = B$ слабо доминируется стратегией $s_i = A$, а для избирателей второй группы, наоборот, $S_i = A$ слабо доминируется $s_i = B$. Следовательно, мы будем предполагать, что у каждого избирателя только две стратегии: голосовать за своего кандидата, и не голсовать.

Будем искать симметричное равновесие в смешанных стратегиях, в котором вероятность, что каждый избиратель проголосует, равна p. Обозначим за $P_w(1,p)$ вероятность того, что победу одержит кандидат A при условии, что один избиратель из первой группы проголосовал, а все остальные избиратели проголосовали с вероятностью p. Пусть $P_w(0,p)$ — вероятость победы кандидата A при условии, что один избиратель из первой группы не проголосовал, а все остальные проголосовали с вероятностью p. Таким образом, выигрыш избирателя равен $P_w(1,p) - c$ если он голосует, и $p_w(0,p)$, если он не голосует. В силу Леммы 6 в равновесии мы обязаны иметь

$$P_w(1,p) - c = P_w(0,p). \tag{3.16}$$

Вероятности $P_w(1,p)$ и $P_w(0,p)$ задаются следующими комбинаторными формулами:

$$\begin{aligned}
P_w(1,p) &= \sum_{i=0}^{N-1}\left(C_i^{N-1}p^i(1-p)^{N-i-1}\sum_{j=0}^{i}C_j^N p^j(1-p)^{N-j}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\left(C_i^{N-1}C_{i+1}^N p^{2i+1}(1-p)^{2N-2i-2}\right),\\
P_w(0,p) &= \sum_{i=1}^{N-1}\left(C_i^{N-1}p^i(1-p)^{N-i-1}\sum_{j=0}^{i-1}C_j^N p^j(1-p)^{N-j}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\left(C_i^{N-1}C_i^N p^{2i}(1-p)^{2N-2i-1}\right)
\end{aligned}\tag{3.17}$$

Можно показать, что для любого $c < \frac{1}{2}$, при достаточно большом N уравнение (3.16) имеет два решения, причем при увеличении N одно решение приближается к нулю, другое — к единице. На рисунке 3.2 показаны решения для $c = 0.35$ и различных N:

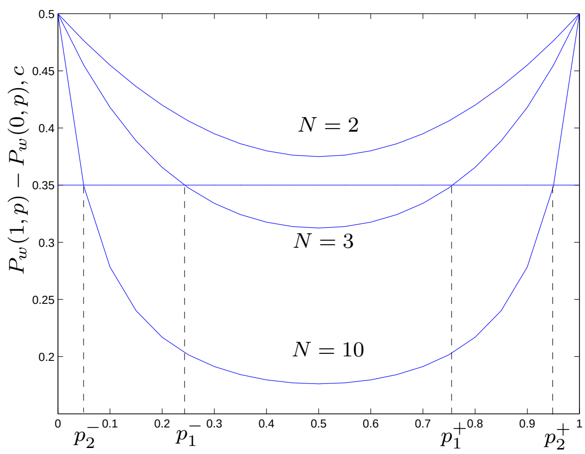


Рис. 3.2: Решение уравнения (3.16) для $c = 0.35$ и разных N.

Получается, что существует два симметричных смешанных равновесия: с высокой и с низкой явкой. В данном примере, для $c = 0.35$ и $N = 2$ равновесий нет, для $N = 3$ существуют два

[3]Первая постановка была рассмотрена Полфри и Розенталем (1983), вторая — Полфри и Розенталем (1985).

равновесия — p_1^- и p_1^+, для $N = 10$ — p_2^- и p_2^+. Наличие равновесия с высокой явкой интуитивно понятно: если избиратель знает, что остальные избиратели почти наверняка проголосуют, и если две группы избирателей примерно одинаковы по размерам, то его голос с большой вероятностью может стать решающим. Получается, что при помощи теоретико-игрового анализа мы нашли объяснение «парадоксу голосования».

Однако, к сожалению, эти выводы рушатся, если мы предположим, что издержки избирателей c_i есть их частная информация. Предположим, что у каждого избирателя c_i — это случайная величина, распределенная на $[0,1]$ с распределением $F(\cdot)$. Стратегией избирателя теперь будет его решение — голосовать или нет — в зависимости от его издержек c_i. Попробуем найти для этой игры симметричное равновесие — то есть равновесие, в котором у всех избирателей одинаковые стратегии — голосовать, если издержки не больше некоторой пороговой величины $\bar{c}$.

Посмотрим, каким условиям должно удовлетворять это равновесие. Во-первых, вероятность того, что отдельно взятый избиратель проголосует, должна быть равна вероятности, что его издержки не больше пороговых:

$$p = F(\bar{c}). \tag{3.18}$$

Во-вторых, избирателю с издержками голосования, равными пороговым, должно быть все равно, голосовать или нет:

$$P_w(1,p) - \bar{c} = P_w(0,p). \tag{3.19}$$

Решение этих двух уравнених изображено на рисунке 3.3.

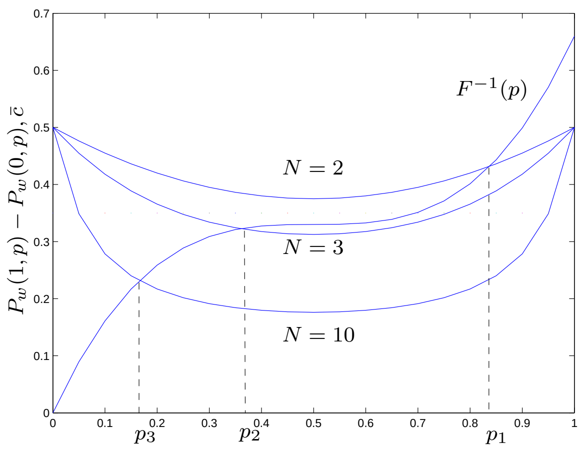


Рис. 3.3: Решение системы уравнений (3.18), (3.19) для разных N.

Можно доказать, что для любой функции распределения $F(\cdot)$ существует хотя бы одно симметричное равновесие при $N \geq 2$. Также можно доказать, что при достаточно большом N равновесие одно, причем при $N \to \infty$ мы имеем $\bar{c} \to 0$ и $p \to 0$, то есть голосуют только избиратели со все более низкими издержками, и доля активных избирателей стремится к нулю.

Тем не менее, теория дает нам несколько эмпирически проверяемых гипотез. Во-первой, явка должна быть выше при маленьком размере элетрората, так как это влияет на вероятность того, что голос избирателя окажется ключевым. Во-вторых (и по той же причине) явка должна быть выше, если у одного из кандидатов нет явного преимущества. Явка должна быть меньше, если высоки издержки голосования (например, если есть правила регистрации избирателей) и выше в том случае, если голосование обязательно (в некоторых странах гражданин, не проголосовавший на выборах, платит штраф). Наконец, когда дело касается парламентских выборов, явка должна быть выше в странах с пропорциональной системой. Все эти выводы находят эмпирическое подтверждение.[4]

3.1.2 Теорема об очищении смешанных равновесий

Как мы заметили в 1-й главе, существует определенная проблема интерпретации смешанных равновесий в играх с полной информацией. Почему игроки будут принимать случайные решения? Ведь в любом равновесии в смешанных стратегиях выигрыш каждого игрока от реализации каждой из его чистых стратегий одинаков. Равновесие требует, чтобы каждый игрок смешивал свои чистые стратегии в определенной пропорции; отклонение от этой пропорции сделает этого игрока уязвимым для действий других игроков. Однако проблема состоит в том, что порой бывает трудно придумать пример реалистичного поведения, в котором чистые стратегии сознательно смешивались бы.

Харшаньи (1973) доказал, что практически в любой игре с полной информацией равновесие в смешанных стратегиях можно рассматривать как предельный случай равновесия в чистых стратегиях в некоторой последовательности игр с неполной информацией. Действительно, предположим, что в некоторой игре выигрыш игрока i при выборе чистой стратегии s_i является (с точки зрения второго игрока) случайной величиной; тогда любая чистая стратегия (то есть решение, что выбрать — X или Y, в зависимости от типа) покажется второму игроку как реализация некоторой смешанной стратегии.

Формально, пусть $G = \langle I, A, u \rangle$ — конечная игра в нормальной форме. Определим для каждой $a_i \in A_i$ случайную величину $t_i^{a_i}$, распределенную на промежутке $[-1, 1]$ с положительной, непрерывно дифференцируемой функцией плотности $f^{a_i}(\cdot)$. Обозначим за $t_i = (t_i^{a_i})_{a_i \in A_i} \in T_i = [-1, 1]^{|A_i|}$ тип игрока i, за $T = \times_{i=1}^{N} T_i$ — множество типов игроков. Тогда функция $f(t) = \prod_{i=1}^{N} f_i(t_i)$ задает плотность на множестве типов T.

Для каждого $\epsilon > 0$ рассмотрим игру с неполной информацией $\tilde{G}(\epsilon)$, в которой выигрыш игрока i при собственном профиле действий $a_i \in A_i$, профиле действий остальных игроков $a_{-i} \in A_{-i}$, и собственном типе t_i равен

$$\hat{u}_i(a_i, a_{-i}, t_i) = u_i(a_i, a_{-i}) + \epsilon t^{a_i}. \tag{3.20}$$

Как будут выглядеть равновесные стратегии в игре $\tilde{G}(\epsilon)$? Пусть s — профиль стратегий игроков. Пусть $p_i^{a_i}(s)$ — вероятность того, что игрок i выберет действие a_i при условии, что t_i неизвестен. Ожидаемый выигрыш игрока j при реализации действия $a_j \in A_j$ будет

$$\tilde{u}_i(a_i, s_{-i}, t_i) = \int_{t_{-i} \in T_{-i}} u_i(a_i, s_{-i}(t_{-i})) df_{-i}(t_{-i}) + \epsilon t_i^{a_i}. \tag{3.21}$$

Следовательно, при данных s_{-i}, почти при всех t_i выигрыш игрока i максимизирован, если он выберет какое-нибудь одно действие.

Пусть $p(s)$ — вероятности того, что игроки будут реализовывать свои чистые действия, при условии, что их типы неизвестны, а s — их стратегии. Результат, полученный Харшаньи, формулируется следующим образом.

Теорема 11 Пусть $G = \langle I, A, u \rangle$ — игра в нормальной форме, a^* — равновесие (возможно, смешанное) в этой игре. Тогда для каждого ϵ существует равновесие s_ϵ^* в игре $\tilde{G}(\epsilon)$, такое, что последовательность $p(s_\epsilon^*)$ сходится к a^* при $\epsilon \to 0$ почти для всех игр G.

То есть почти в каждой игре с полной информацией, каждое равновесие может быть представлено как предел последовательности равновесий в чистых стратегиях в играх с неполной

[4] Например, смотри работу Гейза (2006).

информацией. Исключения составляют случаи, подобные следующему:

	A	B
A	$0,0$	$0,0$
B	$0,0$	$0,0$

В этой вырожденной игре любая пара вероятностей (p,q) будет являться равновесием. Однако рассмотрим игру с такими выигрышами:

	A	B
A	$\epsilon t_1, \epsilon t_2$	$\epsilon t_1, 0$
B	$0, \epsilon t_2$	$0,0$

В этой игре, Игрок 1 получает ϵt_1, если он играет AA, Игрок 2 получает ϵt_2. Получается, что $p = P(\epsilon t_1 \geq 0)$, $q = P(\epsilon t_2 = 0)$. Если t_1 и t_2 распределены на $[-1,1]$ с распределениями $F_1(\cdot)$, $F_2(\cdot)$, то для всех $\epsilon > 0$ мы получим $p = 1 - F_1(0)$, $q = 1 - F_2(0)$, то есть из всего континуума равновесий в исходной игре существует только одно, которое является пределом последовательности равновесий в видоизмененных играх.

Пример: Встреча в метро.

Рассмотрим, как можно реализовать приближение смешанных равновесий чистыми на примере игры «встреча в метро» из Главы 1. Напомним, что в исходной однопериодной игре с полной информацией матрица выигрышей, определяющая функцию выигрыша u, такова:

		Игрок 2	
		A	B
Игрок 1	A	$(2,2)$	$(0,0)$
	B	$(0,0)$	$(1,2)$

Рассмотрим такую игру с неполной информацией. Пусть $\epsilon > 0$. Выигрыш игрока i, в зависимости от его действий a_i и действий другого игрока a_{-i}, равен

$$\tilde{u}_i(a_i, a_{-i}) = \begin{cases} u_i(\mathtt{A}, a_{-i}) + \epsilon t_i, & a_i = \mathtt{A} \\ u_i(\mathtt{B}, a_{-i}), & a_i = \mathtt{B}, \end{cases} \tag{3.22}$$

где величины t_1, t_2 независимо распределены на $[-1,1]$. Найдем равновесие в этой игре.

Пусть p_1, p_2 — вероятности того, что игроки 1 и 2 будут реализовывать действие A. При данном значении p_2, игрок 1 сыграет $a_1 = \mathtt{A}$ если и только если

$$p_2 \cdot (2 + \epsilon t_1) + (1 - p_2)\epsilon t_1 \geq p_2 \cdot 0 + (1 - p_2) \cdot 1. \tag{3.23}$$

Аналогично, игрок 2 сыграет $a_2 = A$ если и только если

$$p_1 \cdot (2 + \epsilon t_2) + (1 - p_1)\epsilon t_2 \geq p_1 \cdot 0 + (1 - p_1) \cdot 2. \tag{3.24}$$

Можно переписать эти условия как условия на t_1 и t_2:

$$\epsilon t_1 \geq 1 - 3p_2, \tag{3.25}$$

$$\epsilon t_2 \geq 2 - 4p_1. \tag{3.26}$$

Учитывая наши предположения о распределении величин t_1 и t_2, можно вывести зависимость p_1, соотвествующую наилучшей реакции первого игрока на стратегию второго игрока, дающую вероятность p_2, и наоборот:

$$p_1(p_2) = P(\epsilon t_1 \geq 1 - 3p_2) = \begin{cases} 0 & p_2 \leq \frac{1-\epsilon}{3} \\ \frac{1}{2} - \frac{1-3p_2}{2\epsilon}, & p_2 \in (\frac{1-\epsilon}{3}, \frac{1+\epsilon}{3}) \\ 1 & p_2 \geq \frac{1+\epsilon}{3}, \end{cases} \tag{3.27}$$

$$p_2(p_1) = P(\epsilon t_2 \geq 2 - 4p_1) = \begin{cases} 0 & p_1 \leq \frac{2-\epsilon}{4} \\ \frac{1}{2} - \frac{1-2p_1}{\epsilon}, & p_1 \in (\frac{2-\epsilon}{4}, \frac{2+\epsilon}{4}) \\ 1 & p_1 \geq \frac{2+\epsilon}{4}. \end{cases} \tag{3.28}$$

При $\epsilon < \sqrt{2}$, у этой системы есть три решения. Во-первых, это $(p_1^*, p_2^*) = (0,0)$. Во-вторых, $(p_1^*, p_2^*) = (1,2)$. В-третьих, p_1^* и p_2^* являются решениями уравнений

$$p_1 = \frac{1}{2} - \frac{1-3p_2}{2\epsilon} \tag{3.29}$$

$$p_2 = \frac{1}{2} - \frac{1-2p_1}{\epsilon}, \tag{3.30}$$

или

$$p_1^* = \frac{\frac{3}{2} + \frac{\epsilon}{4} - \frac{\epsilon^2}{2}}{3-\epsilon^2}$$

$$p_2^* = \frac{1 - \frac{\epsilon^2}{2}}{3-\epsilon^2}. \tag{3.31}$$

Каждое из трех решений соответствует одному равновесию в чистых стратегиях в байесовой игре 3.4.

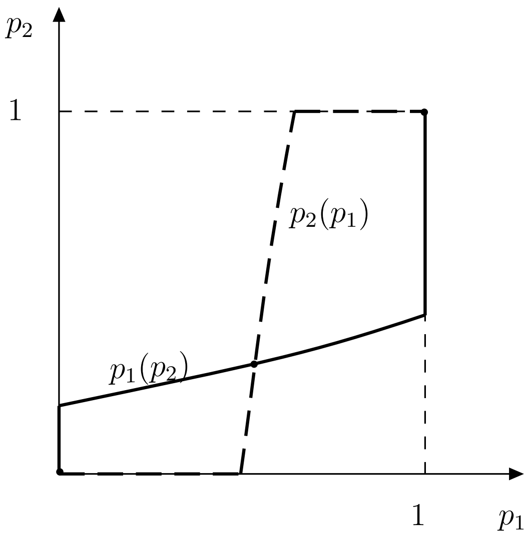


Рис. 3.4: Равновесия в чистых стратегиях в байесовой игре.

В равновесии $(p_1^*, p_2^*) = (0,0)$, оба игрока всегда выбирают $(\mathtt{B}, \mathtt{B})$. В равновесии $(p_1^*, p_2^*) = (1,1)$, они выбирают $(\mathtt{A}, \mathtt{A})$. В равновесии, определенном системой (3.30), стратегии выбираются исходя из (3.26), при $p_1 = p_1^*$, $p_2 = p_2^*$. При этом решение системы (3.30) при $\epsilon \to 0$ сходится к $(p_1, p_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ — равновесие в смешанных стратегиях в исходной игре с совершенной информацией. Таким образом, при снижении степени неполноты информации ϵ чистые стратегии в игре с неполной информацией все больше и больше приближают смешанное равновесие в игре с полной информацией.

3.1.3 Примеры

Производство общественного блага

Рассмотрим задачу производства общественного блага двумя лицами. Предположим, что для производства блага достаточно, чтобы любой из двух игроков принял решение участвовать в его производстве. Матрица выигрышей игроков, в зависимости от их действий, будет такой:

		Игрок 2	
		Производить	Не производить
Игрок 1	Производить	$1-c_1, 1-c_2$	$1-c_1, 1$
	Не производить	$1, 1-c_2$	$0, 0$

Пусть издержки игроков c_1, c_2 являются частной информацией. Предположим, что издержки игрока i равномерно распределены на промежетке $[\underline{c}_i, \bar{c}_i]$, $i = 1, 2$, $0 \le \underline{c}_i < \bar{c}_i \le 1$. Найдем байесово равновесие в этой игре.

Рассмотрим, как выглядят равновесные стратегии для обоих игроков. Пусть вероятность того, что игрок i станет участвовать в производстве блага, равна p_i. Выигрыш игрока i равен $1 - c_i$ если он производит благо, и p_{-i}, если он не производит. Следовательно, вероятность p_i определяется как

$$p_i = P(1 - c_i \ge p_{-i}) = P(c_i \le 1 - p_{-i}) = \begin{cases} 0, & p_{-i} \ge 1 - \underline{c}_i \\ \frac{1 - p_{-i} - \underline{c}_i}{\bar{c}_i - \underline{c}_i}, & p_{-i} \in (1 - \bar{c}_i, 1 - \underline{c}_i) \\ 1, & p_{-i} \le 1 - \bar{c}_i \end{cases} \tag{3.32}$$

Система уравнений

$$p_1 = p_1(p_2), \ p_2 = p_2(p_1) \tag{3.33}$$

имеет три решения: $(p_1^*, p_2^*) = (1, 0)$, $(p_1^*, p_2^*) = (0, 1)$, и (p_1^*, p_2^*), удовлетворяющие условиям

$$p_1 = \frac{1 - p_2 - \underline{c}_1}{\bar{c}_1 - \underline{c}_1} \tag{3.34}$$

$$p_2 = \frac{1 - p_1 - \underline{c}_2}{\bar{c}_2 - \underline{c}_2}. \tag{3.35}$$

Решением этой системы будет

$$p_1^* = \frac{1 - \bar{c}_2 + \underline{c}_1(\bar{c}_2 - \underline{c}_2)}{1 - (\bar{c}_1 - \underline{c}_1)(\bar{c}_2 - \underline{c}_2)} \tag{3.36}$$

$$p_2^* = \frac{1 - \bar{c}_1 + \underline{c}_2(\bar{c}_1 - \underline{c}_1)}{1 - (\bar{c}_1 - \underline{c}_1)(\bar{c}_2 - \underline{c}_2)}. \tag{3.37}$$

Полученные вероятности соответствуют следующим равновесным стратегиям:

1. Игрок 1 всегда производит общественное благо, игрок 2 никогда не производит
2. Игрок 2 всегда производит общественное благо, игрок 1 никогда не производит
3. Игрок i производит общественное благо, если и только если

$$c_i \le \tilde{c}_i = \frac{\bar{c}_i - \bar{c}_{-i}(\bar{c}_i - \underline{c}_i)}{1 - (\bar{c}_1 - \underline{c}_1)(\bar{c}_2 - \underline{c}_2)}. \tag{3.38}$$

В этой задаче существует единственное равновесие, при котором $p_1^*, p_2^* \in (0, 1)$, то есть оба игрока с положительной вероятностью выбирают каждое из двух своих действий. Это — следствия нашего предположения о том, что c_1 и c_2 распределены равномерно. При других распределениях этих величин возможно несколько равновесий.

Двойной аукцион

В то́рговой задаче Нэша[5] (см. задачу 25 в первой главе) продавец и покупатель одновременно называют цены, по которой они хотят купить/продать товар. Пусть p_1 — цена, которую назвал продавец, p_2 — цена, названная покупателем. В случае, когда $p_1 \le p_2$, происходит обмен по цене $p = \frac{p_1+p_2}{2}$; выигрыши продавца и покупателя составят

$$U_1 = \frac{p_1 + p_2}{2} - c \text{ и } U_2 = v - \frac{p_1 + p_2}{2}. \tag{3.39}$$

При $p_1 > p_2$, торговли не происходит, и выигрыши обоих сторон равны нулю.

Четерджи и Сэмюэльсон (1983) проанализировали вариант этой задачи для того случая, когда v и c — частная информация. Предположим, что эти величины равномерно и независимо распределены на $[0,1]$. Стратегиями продавца и покупателя будут зависимости их заявок от оценок: $p_1(c)$ и $p_2(v)$. Ожидаемый выигрыш продавца при данном c и p_1 равен

$$\tilde{U}_1 = P(p_1(c) \le p_2)\left(\frac{p_1(c) + E(p_2|p_1(c) \le p_2)}{2} - c\right). \tag{3.40}$$

Соответственно, для любого $c \in [0,1]$, $p_1(c)$ должно максимизировать U_1. Аналогично, для любого $v \in [0,1]$, $p_2(v)$ должно максимизировать

$$\tilde{U}_2 = P(p_1 \le p_2(v))\left(v - \frac{E(p_1|p_1 \le p_2(v)) + p_2(v)}{2}\right). \tag{3.41}$$

Можно убедиться, что $p_1(c)$ и $p_2(v)$ будут возрастающими функциями. Действительно, возьмем два уровня издержек: c' и c''. Тогда, исходя из оптимальности $p_1(c)$, мы должны иметь

$$P(p_1(c') \le p_2)\left(\frac{p_1(c') + E(p_2|p_1(c') \le p_2)}{2} - c'\right) \ge P(p_1(c'') \le p_2)\left(\frac{p_1(c'') + E(p_2|p_1(c'') \le p_2)}{2} - c'\right) \tag{3.42}$$

и

$$P(p_1(c'') \le p_2)\left(\frac{p_1(c'') + E(p_2|p_1(c'') \le p_2)}{2} - c''\right) \ge P(p_1(c') \le p_2)\left(\frac{p_1(c') + E(p_2|p_1(c'') \le p_2)}{2} - c''\right), \tag{3.43}$$

что дает нам

$$(c'' - c')(P(p_1(c') \le p_2) - P(p_1(c'') \le p_2)) \ge 0, \tag{3.44}$$

то есть $p_1(c'') \ge p_1(c')$ если $c'' \ge c'$.

Сразу отметим, что в этой игре много равновесий. Существует, например, вырожденное равновесие, в котором $p_1^* = 1$ и $p_2^* = 0$. Легко заметить, что и $p_1 = 1$, и $p_2 = 0$ являются достаточными условиями для того, чтобы обмена никогда не происходило (и оба игрока получали нулевой выигрыш). Есть и такое равновесие:

$$p_1 = \begin{cases} \tilde{p}, & c \le \tilde{p} \\ 1, & c > \tilde{p} \end{cases} \text{ и } p_2 = \begin{cases} \tilde{p}, & v \ge \tilde{p} \\ 0, & v < \tilde{p} \end{cases} \tag{3.45}$$

для любого $\tilde{p} \in (0,1)$.

Попробуем ограничить наше внимание линейными стратегиями, когда заявляемая цена является линейной функцией от v или c:

$$p_1 = \alpha_1 + \beta_1 c, \tag{3.46}$$
$$p_2 = \alpha_2 + \beta_2 v. \tag{3.47}$$

Таким образом, стратегия игрока $i = 1, 2$ сводится к параметрам (α_i, β_i). Найдем ожидаемые полезности покупателя и продавца в зависимости от их стратегий.

Пусть покупатель играет линейную стратегию $p_2 = \alpha_2 + \beta_2 v$. Мы имеем

$$\tilde{U}_1 = \frac{\alpha_2 + \beta_2 - p_1}{\beta_2}\left(\frac{p_1 + \frac{p_1 + \alpha_2 + \beta_2}{2}}{2} - c\right), \tag{3.48}$$

[5]Эта задача разбиралась также у Гиббонса (1992) и Тироля и Фаденберга (1991).

так как p_2 равномерно распределена на $[\alpha_2, \alpha_2 + \beta_2]$. Максимизируя $\tilde{U}_1$ по p_1, получим

$$p_1^*(c) = \frac{2}{3}c + \frac{1}{3}(\alpha_2 + \beta_2). \tag{3.49}$$

Аналогично, максимизируя

$$\tilde{U}_2 = \frac{p_2 - \alpha_1}{\beta_1}\left(v - \frac{\frac{p_2+\alpha_1}{2} + p_2}{2}\right) \tag{3.50}$$

по p_2, получим

$$p_2^*(v) = \frac{2}{3}v + \frac{1}{3}\alpha_1. \tag{3.51}$$

Таким образом, наилучший отклик игрока 1 на линейную стратегию игрока 2 — также играть линейную стратегию. Мы не просто нашли равновесие в классе линейных стратегий. Мы нашли пару линейных стратегий, которая является равновесием — учитывая, что каждый из игрок может выбрать любую другую стратегию.

Из (3.51) получим, что $\beta_2 = \frac{2}{3}$ и $\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{3}$. Из (3.51) получим $\alpha_1 = \frac{1}{3}(\frac{\alpha_1}{3} + \frac{2}{3})$, или $\alpha_1 = \frac{1}{4}$, $\beta_1 = \frac{2}{3}$, и $\alpha_2 = \frac{1}{12}$. Является ли полученное равновесие эффективным? Нет. Торговля происходит только в том случае, когда $p_1 \leq p_2$, или $\frac{2}{3}c + \frac{1}{4} \leq \frac{2}{3}v + \frac{1}{12}$, или $c \leq v - \frac{1}{4}$, в то время как Парето-оптимальность предполагает обмен в том случае, если $c \leq v$.

Предвыборная конкуренция с идеологическими кандидатами

В некоторой стране проходят выборы. В них участвуют два кандидата. Предположим, что каждый кандидат может предложить избирателям одну из трех программ: левую, правую, или центристскую. Соответственно, множество действий для каждого кандидата $i = 1, 2$ будет $A_i = \{\mathtt{L}, \mathtt{C}, \mathtt{R}\}$, где $\mathtt{L}$ — левая программа, $\mathtt{C}$ — центральная, $\mathtt{R}$ — правая. Кандидаты не знают предпочтений избирателей. Им известно, что с вероятностью α медианный избиратель будет центристом, с вероятностью $\frac{1-\alpha}{2}$ — левым или правым. Следовательно, вероятность того, что первый кандидат выиграет выборы, зависит от программ кандидатов следующим образом:

		2 кандидат		
		L	C	R
1 кандидат	L	$\frac{1}{2}$	$\frac{1-\alpha}{2}$	$\frac{1}{2}$
	C	$\frac{1+\alpha}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1+\alpha}{2}$
	R	$\frac{1}{2}$	$\frac{1-\alpha}{2}$	$\frac{1}{2}$

Здесь мы предполагаем, что если у кандидатов программы одинаковы, то любой избиратель с равной вероятностью голосует за каждого из кандидатов. Также, если один кандидат левый, а другой - правый, то избиратель-центрист голосует в равной вероятностью за обоих.

Будем считать, что выигрыш каждого кандидата зависит только от того, какова программа победившего кандидата. Кандидат 1 может быть двух типов: центрист или левый: $T_1 = \{\mathtt{L}, \mathtt{C}\}$. Кандидат 2 может быть центристом или правым: $T_2 = \{\mathtt{C}, \mathtt{R}\}$. Пусть β — вероятность того, что каждый из кандидатов является центристом. Будем считать, что типы кандидатов независимы. Выигрыш каждого кандидата составляет 0 если реализовывается программа, равная его типу, -1, если реализуется программа, отличающаяся от его типа на один шаг (например, если кандидат — центрист, а побеждает кандидат с левой программой), и $-c$, если реализуется программа, отличающаяся от его типа на два шага (если кандидат — левый, а победил правый, или наоборот), где $c \geq 2$.

Кандидат 1 не станет выбирать $a_1 = \mathtt{R}$, так как это действие доминируется (причем строго) действием $a_1 = \mathtt{C}$ при обоих типах кандидата 1. Аналогично, второй кандидат не будет играть $\mathtt{L}$. Стратегией канлидата 1 в этой модели будут пара $(p_{\mathtt{L}}, p_{\mathtt{C}})$ — вероятности, что кандидат 1 выберет действие $a_1 = \mathtt{L}$ в случае, если его тип $\mathtt{L}$ или $\mathtt{C}$. Аналогично, стратегией кандидата 2 будет пара $(q_{\mathtt{R}}, q_{\mathtt{C}})$ — вероятности выбрать действие $a_2 = \mathtt{R}$ в зависимости от собственного типа.

Продолжим удалять доминируемые стратегии. Мы знаем, что кандидат 2 никогда не выбирает программу L. Но в таком случае, если $t_1 = \mathtt{C}$, ожидаемый выигрыш кандидата 1 будет максимизирован при $a_1 = \mathtt{C}$ при любых $(q_{\mathtt{R}}, q_{\mathtt{C}})$. Следовательно, $p^*_{\mathtt{C}} = 0$. Аналогично, мы имеем $q^*_{\mathtt{C}} = 0$.

Найдем равновесные p^*_L и q^*_R. Пусть $\tilde{q} = q_R(1-\beta)$ — вероятность того, что кандидат 2 выберет программу $a_2 = \mathtt{R}$ при условии, что его тип неизвестен. Если $t_1 = \mathtt{L}$, то выигрыши кандидата 1, в зависимсости от a_1, будут

$$u_1(\mathtt{L}, \tilde{q}, t_1 = \mathtt{L}) = (1-\tilde{q})(-\frac{1-\alpha}{2}\cdot 0-\frac{1+\alpha}{2}\cdot 1)+\tilde{q}(-\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{2}\cdot c) = -\frac{1}{2}\left((1+\alpha)(1-\tilde{q})+c\tilde{q}\right) \quad (3.52)$$

и

$$u_1(\mathtt{C}, \tilde{q}, t_1 = \mathtt{L}) = (1-\tilde{q})(-1)+\tilde{q}(-\frac{1+\alpha}{2}\cdot 1-\frac{1-\alpha}{2}\cdot c) = -\frac{1}{2}\left(2+\tilde{q}(\alpha+c-c\alpha-1)\right). \quad (3.53)$$

Мы получаем функцию реакции для первого кандидата:

$$p_L = \begin{cases} 0, & q_R > \frac{1-\alpha}{\alpha(c-2)(1-\beta)} \\ [0{,}1], & q_R = \frac{1-\alpha}{\alpha(c-2)(1-\beta)} \\ 1, & q_R < \frac{1-\alpha}{\alpha(c-2)(1-\beta)}. \end{cases} \quad (3.54)$$

Для второго кандидата, аналогичным способом полученная функция реакции будет

$$q_R = \begin{cases} 0, & p_L > \frac{1-\alpha}{\alpha(c-2)(1-\beta)} \\ [0{,}1], & p_L = \frac{1-\alpha}{\alpha(c-2)(1-\beta)} \\ 1, & p_L < \frac{1-\alpha}{\alpha(c-2)(1-\beta)}. \end{cases} \quad (3.55)$$

В зависимости от значений параметров, у нас либо три, либо одно, либо континуум равновесий. Наибольший интерес, с точки зрения анализа сравнительной статики, представляет смешанное равновесие $p^*_L = q^*_R = \frac{1-\alpha}{\alpha(c-2)(1-\beta)}$, которое существует при $\frac{1-\alpha}{\alpha(c-2)(1-\beta)} < 1$.

Если предположить, что игроки будут реализовывать именно это равновесие, то можно сделать следующие выводы относительно $\frac{1-\alpha}{\alpha(c-2)(1-\beta)}$ — вероятности того, что кандидат (например, кандидат 1) будет реализовывать крайнюю (левую, в его случае) программу:

1. При увеличении α вероятность того, что левый кандидат ($t_1 = \mathtt{L}$) предложит левую программу, уменьшится.

2. При увеличении вероятность того, что левый кандидат ($t_1 = \mathtt{L}$) предложит левую программу, уменьшится.

3. При увеличении β вероятность того, что левый кандидат ($t_1 = \mathtt{L}$) предложит левую программу, увеличится.

Последнее наблюдение представляется наиболее интересным. Получается, что кандидат будут чаще предлагать крайнюю программу (L или R), если существует вероятность того, что другой кандидат является центристом. Это происходит отчасти потому, что в силу $c \geq 2$, проигрыш центристу менее болезнен, чем проигрыш с вероятностью $\frac{1}{2}$ другому крайнему кандидату.

3.1.4 Равновесие дискретного отклика.

Идея Харшаньи о соответствии между смешанными стратегиями в играх с полной информацией, и чистыми стратегиями в играх с неполной информацией, недавно нашла применение при анализе данных, полученных в ходе экономических экспериментов. Известно, что довольно часто в реальных ситуациях люди ведут себя иначе, нежели предсказывает экономическая теория. Можно ли расхождение между теорией и действительностью объяснить наличием «дрожащей руки» — ненаблюдаемых изменений функций полезностей игроков? Например, в игре «сороконожка» в равновесии первый игрок сразу забирает минимальный возможный выигрыш (стр. 61). В настоящей игровой ситуации один из игроков забирает выигрыш ближе к середине игры. Можно ли это объяснить тем, что каждый игрок ожидает, что у другого игрока может «дрогнуть рука» (то есть другой игрок сделает неоптимальный ход)? И, наконец, можно ли оценить, насколько сильны на самом деле случайные колебания функций полезности? На эти вопросы может ответить при помощи анализа *равновесий дискретного отклика*, впервые предложенного Маккельви и Полфри (1995).

Пусть $G = \langle I, S, u\rangle$ — конечная игра в нормальной форме. Предположим, что с этой игрой ассоциируется игра с неполной информацией, в которой выигрыш каждого игрока i при каждом профиле чистых стратегий s равен

$$\hat{u}_i(s_i, s_{-i}) = u_i(s_i, s_{-i}) + \epsilon_{s_i}, \tag{3.56}$$

где ε_{s_i} — случайная величина с нулевым матожиданием, отражающая дополнительный выигрыш, который игрок i получает от игры стратегии s_i. Мы предполагаем, что значение величины ϵ_{s_i} известно только игроку i.

Для каждого игрока i мы можем определить *функцию дискретного отклика* $p_i : \Sigma_{-i} \to \Sigma_i$. Эта функция отражает вероятности, с которыми игрок i будет играть каждую из своих чистых стратегий для каждого возможного профиля смешанных стратегий σ_{-i}. Формально, вероятность того, что игрок i сыграет чистую стратегию s_i, есть

$$p_{s_i} = P(\hat{u}_i(s_i, \sigma_{-i}) = \max_{s'_i} \hat{u}_i(s'_i, \sigma_{-i})). \tag{3.57}$$

Следовательно, если остальные игроки не могут наблюдать значения случайных величин ϵ_{s_i} для игрока i, то функция p_i — это их прогноз относительно того, как поведет себя игрок i в зависимости от σ_{-i}. Теперь можно дать определение и самого равновесия.

Определение 29 Пусть G — конечная игра в нормальной форме, p_i — соответствующие функции дискретного отклика. Тогда *равновесие дискретного отклика* — это $p^* = (p_1^*, \dots, p_N^*) \in \Sigma$, такое, что $p_i^* = p_i(p^*)$.

Существует ли это равновесия для произвольной конечной игры? Маккельви и Полфри (1995) показали, что при условии, что распределение величин ϵ имеет плотность, функции p_i являются непрерывными и равновесие дискретного отклика существует.

Логистическоре распределение ошибок.

Рассмотрим важный частный случай, когда все случайные величины ϵ распределены независимо и согласно двойной экспоненциальной функции распределения:

$$P(\epsilon_{s_i} \le x) = e^{-e^{-\lambda x}}. \tag{3.58}$$

Такая случайная величина будет иметь матожидание, равное $\frac{0.5772}{\lambda}$, и стандартное отклонение, равное $\frac{\pi}{\lambda\sqrt{6}}$.

Известно, что в таком случае функции p_i могут быть выписаны в явном виде[6]:

$$p_{s_i} = \frac{e^{\lambda u_i(s_i, \sigma_{-i})}}{\sum_{s' \in S_i} e^{\lambda u_i(s'_i, \sigma_{-i})}}. \tag{3.59}$$

[6]Это — следствие фундаментального результата, доказанного МакФадденом (1973).

Рассмотрим упрощенный пример из работы Полфри, Гоури и Хольта (2001). Есть такая игра 2×2:

		Игрок 2	
		H	L
Игрок 1	H	$2-2c$,$2-2c$	$1-2c$,$1-c$
	L	$1-c$,$1-2c$	$1-c$,$1-c$

Это — игра производства общественного блага при технологии «слабое звено». Два игрока решают, сколько усилий — 1 единицу (L) или 2 единицы (H) потратить на производство общественного блага. Количество произведенного блага равняется минимуму затраченных усилий. Издержки одной единицы усилий равны $c \leq 1$.

При $c \leq 1$ в этой игре два равновесия в чистых стратегиях: (H, H) и (L, L) и одно равновесие в смешанных стратегиях, в котором каждый игрок выбирает H с вероятностью c. То есть в смешанном равновесии, высокий уровень производства общественного блага тем вероятней, чем выше издержки его производства. Этот результат противоинтуитивен. Эксперименты с такими играми (например, Гоури и Хольт, 2005) показывают, что частота, с которой игроки выбирают низкие уровни усилий, возрастает с уровнем издержек c.

Рассмотрим теперь модифицированную игру, в которой к выигрышу каждого игрока $i = 1, 2$ при выборе стратегии $s = \mathtt{H}, \mathtt{L}$ прибавляется ϵ_{is}, распределенный согласно (3.58). Пусть p и q — вероятности, с которыми игроки 1 и 2 выбирают H. Из (3.59) мы получим функции дискретного отклика

$$p(q) = \frac{e^{\lambda(1+q-2c)}}{e^{\lambda(1-c)} + e^{\lambda(1+q-2c)}} = \frac{1}{1+e^{\lambda(c-q)}} \tag{3.60}$$

$$q(p) = \frac{e^{\lambda(1+p-2c)}}{e^{\lambda(1-c)} + e^{\lambda(1+p-2c)}} = \frac{1}{1+e^{\lambda(c-p)}}. \tag{3.61}$$

У системы $p(q) = p$, $q(p) = q$ есть единственное решение, которое симметрично ($p = q$) и задано уравнением

$$p + pe^{\lambda(c-p)} = 1. \tag{3.62}$$

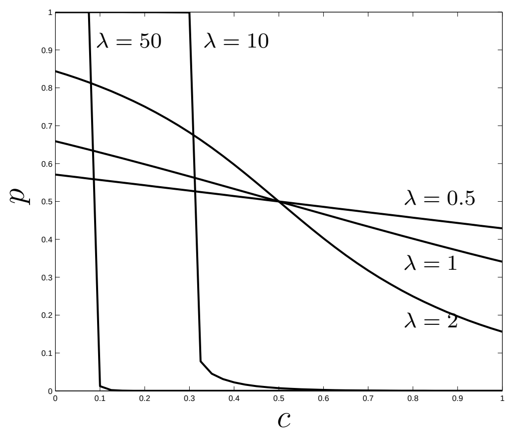


Рис. 3.5: Равновесие дискретного отклика в игре с производством общественных благ.

На рисунке 3.5 показана зависимость равновесного p от c при разных значениях λ. Действительно, при более высоком значении c, каждый игрок с большей вероятностью выберет L. То есть переход к модели, в которой у полезностей игроков есть случайная (и ненаблюдаемая) компонента ϵ, позволяет нам получить сравнительную статику, которая соответствует как нашей интуиции, так и экспериментальным данным.

При $\lambda \to \infty$, для любого $c > 0$ мы имеем $p \to 0$. Таким образом, в предельном случае мы имеем равновесие, в котором оба игрока реализуют чистые стратегии $(\mathtt{L}, \mathtt{L})$. Это примечательно, поскольку предельный случай для модели со случайной полезностью (одно равновесие) отличается от исходной игры 2×2 (два равновесия).

Оценка параметра λ методом максимального правдоподобия.

Наличие экспериментальных данных позволяет численно оценивать значение параметра λ, определяющего, насколько часто каждый из игроков будет реализовывать разные чистые стратегии. Например предположим, что был поставлен эксперимент, в котором два игрока N раз подряд играли в игру 2×2, в которой денежные платежи обоим игрокам соответствовали матрице выигрышей из предыдущего примера. Пусть $a_{it} \in \{\mathtt{H}, \mathtt{L}\}$ — действие игрока i, наблюдаемое в момент времени t. Насколько вероятно, что мы увидим именно такую последовательность действий игроков при данном значении параметра λ? Пусть $p(\lambda)$ — равновесная вероятность игрока сыграть $\mathtt{H}$, полученная из уравнения (3.62). Пусть игроку 1 известно, что игрок 2 выберет $\mathtt{H}$ с этой вероятностью. Тогда вероятность того, что игрок 1 выберет действие $a \in \{\mathtt{H}, \mathtt{L}\}$, будет равна

$$P_1(a, \lambda) = \begin{cases} p(\lambda), & a = \mathtt{H} \\ 1 - p(\lambda), & a = \mathtt{L}, \end{cases} \tag{3.63}$$

где $p(q)$ определяется из (3.61). Аналогично определим $P_1(a)$.

Если мы предположим, что все величины ϵ независимы, то вероятность, или *правдоподобие* наблюдения последовательности действий $(a_{1t}, a_{2t})_{t=1}^{N}$, будет равна

$$L(\lambda) = \prod_{t=1}^{N} \prod_{i=1}^{2} P_i(a_{it}). \tag{3.64}$$

Максимизируя эту величину по λ, мы получим оценку этого параметра, дающего наибольшее значение функции правдоподобия для наблюдаемых действий игроков.[7]

Равновесие дискретного отклика в динамических играх.

Понятие равновесия дискретного отклика (см. стр. 120–123) можно обобщить и для динамических игр. Маккельви и Полфри (1998) предложили такую схему: пусть для игры в развернутой форме, σ — профиль поведенческих стратегий, h_i — информационное множество игрока i, σ_{-h_i} — поведенческие стратегии всех игроков, кроме игрока i во множестве h_i. Тогда для каждого действия $a \in h_i$, можно определить $u_{i,h_i}(a, \sigma_{-h_i})$ — матожидание выигрыша игрока i, при условии, что он находится в информационном множестве i, выбирает действие a, а во всех остальных информационных множествах игроки реализуют стратегии σ_{-h_i}.

Теперь допустим, что в результате действия a, выбранного игроком i в информационном множестве h_i, к полезности игрока i прибавляется случайная величина ϵ_a. Тогда поведенческая стратегия в информационном множестве h_i определяется стратегиями в остальных множествах:

$$b_i(a|h_i, \sigma_{-h_i}) = P(u_{i,h_i}(a, \sigma_{-h_i}) + \epsilon_a = \max_{a'} u_{i,h_i}(a', \sigma_{-h_i}) + \epsilon_{a'}). \tag{3.65}$$

Равновесием (названным *агентским равновесием дискретного отклика*) будет профиль поведенческих стратегий, в котором стратегия в каждом информационном множестве определяется как (3.65). Нам остается предположить, что каждый игрок знает свои величины ϵ только для

[7] Метод максимального правдоподобия широко используется в эконометрике для анализа моделей бинарного или множественного выбора. Смотри, например, учебник Магнуса, Катышева и Пересецкого (гл. 12).

того информационного множества, в котором он находится. Для информационных множеств, лежащих ниж по траектории игры, игроку известно лишь распределение величин ϵ.

Маккельви и Полфри показали, что равновесие, определенное таким образом, всегда существует. Для случая, когда ошибки распределены согласно (3.58), получен ряд дополнительных результатов. В частности, было показано, что при $\lambda \to \infty$, сувновесие единственно, причем его пределом является секвенциальное равновесие в исходной игре (см. главу IV).

Приведем пример использования равновесия дискретного отклика в игре «сороконожка», изображенной на рисунке 3.1.4.

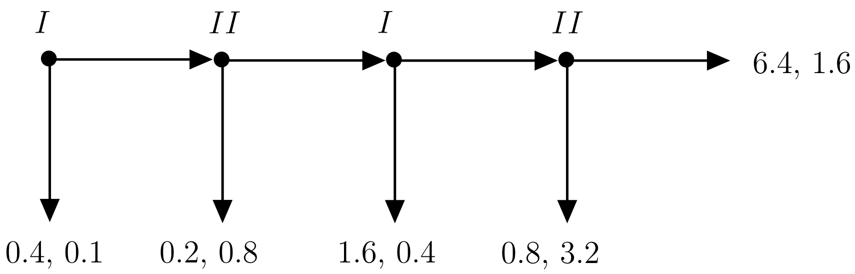


Рис. 3.6: Игра «сороконожка».

Пусть (p_1, p_2) — поведенческая стратегия игрока 1, где p_1 — вероятность сделать ход $\mathtt{T}$ в момент времени $t = 1$, p_2 — вероятность сделать ход $\mathtt{T}$ в момент времени $t = 3$, при условии, что игра не останавливается ранее. Аналогично, обозначим за (q_1, q_2) вероятности, с которыми игрок 2 делает ход $\mathtt{T}$ в моменты времени $t = 2$ и $t = 4$, соответственно.

Предположим, что выигрыш игрока 1 в момент времени $t = 1$ составляет, в зависимости от хода,

$$U_{11}(\mathtt{T}) = 0.4 + \epsilon_{1T} \tag{3.66}$$

$$U_{11}(\mathtt{P}) = 0.2q_1 + (1 - q_1)\,(1.6p_2 + (1 - p_2)\,(0.8q_2 + 6.4(1 - q_2))) + \epsilon_{1P}. \tag{3.67}$$

Предположим, что величины ϵ_{1T} и ϵ_{1P} распределены согласно функции распределения (3.58) с параметром λ. Тогда мы имеем

$$p_1 = \frac{1}{1 + e^{\lambda[0.2q_1 + (1-q_1)(1.6p_2 + (1-p_2)(0.8q_2 + 6.4(1-q_2))) - 0.4]}}. \tag{3.68}$$

Аналогично, выигрыш игрока 1 в момент времени $t = 3$ составит

$$U_{13}(\mathtt{T}) = 1.6 + \epsilon_{3T} \tag{3.69}$$

$$U_{13}(\mathtt{P}) = 0.8q_2 + 6.4(1 - q_2) + \epsilon_{3P}, \tag{3.70}$$

где ϵ_{3T} и ϵ_{3P} распределены согласно функции распределения (3.58) с параметром λ. Тогда мы имеем

$$p_2 = \frac{1}{1 + e^{\lambda[0.8q_2 + 6.4(1-q_2) - 1.6]}}. \tag{3.71}$$

Для игрока 2, мы имеем

$$U_{22}(\mathtt{T}) = 0.8 + \epsilon_{2T} \tag{3.72}$$

$$U_{22}(\mathtt{P}) = 0.4p_2 + (1 - p_2)\,(3.2q_2 + 1.6(1 - q_2)) + \epsilon_{2P} \tag{3.73}$$

и

$$U_{24}(\mathtt{T}) = 3.2 + \epsilon_{4T} \tag{3.74}$$

$$U_{24}(\mathtt{P}) = 1.6 + \epsilon_{4P}. \tag{3.75}$$

Если случайные ошибки для игрока 2 распределены так же, как и для игрока 1, то мы имеем

$$q_1 = \frac{1}{1 + e^{\lambda[0.4p_2 + (1-p_2)(3.2q_2 + 1.6(1-q_2)) - 0.8]}} \tag{3.76}$$

и

$$q_2 = \frac{1}{1 + e^{\lambda[1.6-3.2]}}. \tag{3.77}$$

Система (3.68), (3.71), (3.76), (3.77) имеет единственное решение. Зависимость решения от λ показана на рисунке 3.7. Можно сделать несколько наблюдений. Во-первых, в этой игре для

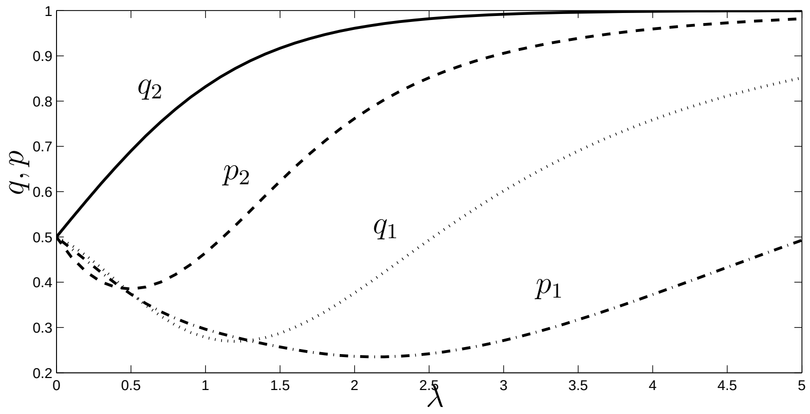


Рис. 3.7: Равновесие в игре «сорокорожка» со стохастическими функциями полезности.

большинства значений λ верно соотношение $p_1 < q_1 < p_2 < q_2$, то есть вероятность того, что игрок выберет действие T и заберет приз тем выше, чем ближе к концу игры мы подходим. Это соответствует тому, что мы наблюдаем в большинстве экономических экспериментов с игрой «сороконожка». Во-вторых, при увеличении λ — то есть при снижении дисперсии функции полезности — поведенческие стратегии игроков стремятся к равновесию в игре с совершенной информацией, в которой игроки всегда забирают приз во всех вершинах игры. Наконец, в-третьих, (и это наиболее интересно) при малых значениях λ вероятности p_1, p_2, q_1 и q_2 *убывают* с λ.

3.2 Дизайн механизмов

Находя равновесие в теоретико-игровой модели, мы даем ответ на вопрос: Как поведут себя игроки, будучи поставленными в определенные условия? Дизайн механизмов — это раздел теории игр, который изучает обратную задачу: Какие правила игры необходимо создать для того, чтобы в равновесии игроки реализовывали данный профиль действий? Задача дизайна механизмов имеет большое практические значение. Проведение аукционов — первый пример, приходящий в голову. Мировой объем торгов на аукционах (как по продажам товаров частным лицам, так и по государственным закупкам) исчисляется сотнями миллиардов долларов в год. Как правильно прописать правила аукциона, чтобы товар был продан по наибольшей цене, а возможность сговора между покупателями была минимальна? Другая область, в которой дизайн механизмов играет важную роль — раздел имущества во время бракоразводных процессов. Бывшие супруги должны договориться, как поделить совместное имущество, которое состоит из большего количества разных предметов. Каждый по-разному ценит разные предметы, и хотелось бы (с точки зрения максимизации суммарного благосостояния), чтобы каждая вещь досталась тому, кто ее больше ценит. Задачей представляется так построить процесс раздела имущества, что каждый супруг на вопрос «во сколько вы оцениваете этот предмет» отвечал бы правдиво.

3.2.1 Определения

Пусть, как и раньше, T — множество типов игроков, P — распределение вероятностей на T. Обозначим за C множество исходов (или состояний). Пусть $A = \times_{i=1}^N A_i$ — множество действий игроков, $g : A \to C$ — функция исхода. Дадим определение.

Определение 30 Набор $M = \langle A, g \rangle$ называется *механизмом.*

Механизм — это правила игры. Например, рассмотрим аукцион первой цены, в котором участвуют два покупателя. Каждый покупатель может сделать любую неотрицательную заявку; товар приобретается покупателем с наибольшей заявкий, по цене этой заявки. Множество действий в таком аукционе будет $A = A_1 \times A_2 = [0, \infty) \times [0, \infty)$. Исход аукциона будет (сумма, заплаченная победителем; победитель) $\in (0, \infty) \times \{0, 1, 2\} = C$, где победитель=0 означает, что заявки были одинаковые, и товар достался каждому покупателю с вероятностью 50%.

Для того, чтобы при данном механизме определить игру с неполной информацией, необходимо знать, как выигрыш игроков зависит от исходов и, в итоге, от действий, которые они предпринимают. Дадим определение.

Определение 31 Пусть $\bar{u}_i : C \times T_i \to \mathbb{R}$ — функция полезности игрока i, определенная на множестве исходов C и на множестве типов T_i. Тогда механизм M определяет игру $G(M) = \langle I, A, T, P, u \rangle$, где $u_i : A \times T_i \to \mathbb{R}$ определяется следующим образом:

$$u_i(a, t_i) = \bar{u}_i(g(a), t_i). \tag{3.78}$$

Вернемся к примеру с аукционом первой цены. Если покупателей всего двое и тип каждого покупателя соответствует максимальной сумме, которую он готов заплатить за продаваемый товар, то получается, что $T = T_1 \times T_2 = [0, \infty) \times [0, \infty)$. Выигрыш покупателя i с типом $t_i \in T_i$ будет

$$u_i = \begin{cases} v_i - a_i, & a_i > a_{-i} \\ \frac{v_1 - a_1}{2}, & a_i = a_{-i} \\ 0, & a_i < a_{-i}. \end{cases} \tag{3.79}$$

Теперь представьте себя на месте продавца. Ваша задача — придумать правила аукциона, такие, что товар будет продан тому покупателю, который готов заплатить больше других, по максимальной цене, которую он готов заплатить. Иными словами, вы хотите, чтобы при каждом данном профиле типов игроков в игре с неполной информацией, которая соответствует аукциону с участием этих игроков, в равновесии реализовывался какой-то конкретный исход. Формализуем вашу задачу.

Определение 32 Назовем функцию $f : T \to C$ *функцией общественного выбора.*

Определение 33 Механизм M *Нэш-реализует* правило общественного выбора f, если для всех $t \in T$, мы имеем $g(s^*(t)) = f(t)$, где s^* — равновесие в игре $G(M)$.

Рассмотрим, в качестве примера, задачу продажи товара на аукционе с двумя покупателями. Пусть действует правило аукциона второй цены: покупатели одновременно делают заявки, товар продается покупателю с наибольшей заявкой, причем платит он сумму, равную наименьшей заявке. В первой главе на странице 9 мы доказали, что в равновесии в этом аукционе заявка каждого покупателя равна его оценке стоимости товара. То есть, если t_1, t_2 — типы покупателей, соответствующие их оценкам стоимости товара, то механизм «аукцион второй цены» Нэш-реализует следующую функцию общественного выбора: если $t_1 > t_2$, продать товар покупателю 1 по цене t_2, если $t_1 = t_2$ — продать товар каждому из двух покупателей с равной вероятностью, если $t_1 < t_2$ — продать покупателю 2 по цене t_1.

Аукцион второй цены эффективен — то есть он справляется с задачей продажи товара тому покупателю, который готов заплатить больше других. Однако, к сожалению для продавца, в аукционе второй цены покупатель практически всегда недоплачивает. Можно ли придумать правила, при которых аукцион принесет продавцу большую прибыль? Возможно ли придумать такой аукцион, в котором покупатель будет отдавать продавцу все, что он готов заплатить?

На первый взгляд, задача дизайна такого механизма выглядит очень сложной. Существует множество различных вариантов организации аукциона: спускающаяся и поднимающаяся торговля, аукционы первой и второй цены, и так далее. Можно ли их всех описать математически? К счастью, оказывается, что можно. Дадим такое определение.

Определение 34 Пусть T — множество типов игроков, C — множество исходов. Механизм $M = \langle A, g \rangle$ является *прямым механизмом* если $A = T$.

Если продолжить пример с продажей товара, то любой прямой механизм будет предполагать, что участие покупателя в аукционе ограничивается сообщением продавцу максимальной суммы, которую он готов заплатить за товар. Следующий результат, полученный, в том числе, Майерсоном (1979), показывает, что в задаче поиска механизма нам достаточно рассматривать только прямые механизмы.

Теорема 12 Пусть f — функция общественного выбора. Пусть существует механизм M, который Нэш-реализует f. Тогда существует прямой механизм $\bar{M}$, который Нэш-реализует f. При этом в игре $G(\bar{M})$, образованной механизмом $\bar{M}$, в равновесии все игроки правдиво сообщают свой тип: $s_i^* = t_i$ для всех i.

Этот результат получил название *принципа выявления*. Доказательство совсем простое. Если существует механизм M, то можно добиться такого же исхода и при прямом механизме $\bar{M}$, когда ведущий говорит каждому игроку: «Скажи мне свой тип, и я сам сыграю за тебя твою равновесную стратегию в механизме M». Каждый игрок честно сообщит ведущему свой тип — иначе, если игрок соврет, то ведущий сыграет за него стратегию, которая может отличаься от равновесной.

Доказательство Теоремы 12.

Пусть механизм $M = \langle A, g \rangle$ Нэш-реализут функцию общественного выбора f. Пусть s^* — равновесие в игре $G(M)$. Возьмем механизм $\bar{M} = \langle T, g' \rangle$, где $g'(t) = s^*(t)$. Тогда для всех i, для всех $a_i' \in A_i$, для всех $t \in T$, мы имеем

$$u_i(s_i^*(t_i), s_{-i}^*(t_{-i}), t_i) \geq u_i(a_i', s_{-i}^*(t_{-i}), t_i), \tag{3.80}$$

из чего следует

$$\bar{u}_i(g(s_i^*(t_i), s_{-i}^*(t_{-i})), t_i) \geq \bar{u}_i(g(a_i', s_{-i}^*(t_{-i})), t_i). \tag{3.81}$$

Следовательно, $a^* = t^*$ является равновесием Нэша в игре $G(\bar{M})$. **Q.E.D.**

3.2.2 Монотонность по Маскину

Что мы можем сказать про то, какие функции общественного выбора можно Нэш-реализовать при помощи какого-то механизма? Дадим такое определение.

Определение 35 Правило общественного выбора f является *монотонным* если для каких-то $t, t' \in T$, таких, что $c = f(t) \neq f(t')$, существует игрок i и исход $b \in C$, такие, что

$$\bar{u}_i(c, t_i) \geq \bar{u}_i(b, t_i) \text{ и } \bar{u}_i(c, t_i') < \bar{u}_i(b, t_i'). \tag{3.82}$$

Иными словами, если при изменении профилей типов меняется исход, который предписан функцией общественного выбора, то должно быть так, что по крайней мере для одного из игроков, предписываемый ранее исход стал менее предпочтительным относительно какого-то другого варианта. Это свойство получило названия монотонности по Маскину, по имени Эрика Маскина, нобелевского лауреата. Им же (Маскин 1977, 1985) был доказан такой результат:

Теорема 13 Пусть f — Нэш-реализуемое правило общественного выбора. Тогда f является монотонным.

Доказательство Теоремы 13.

Пусть правило f является Нэш-реализуемым при помощи механизма $M = \langle A, g\rangle$, причем $f(t) = c$ и $f(t') \neq c$ для некоторых $t, t' \in T$. Тогда существует профиль действий $a \in A$, такой, что

$$\bar{u}_i(g(a_i, a_{-i}), t_i) \geq \bar{u}_i(g(a'_i, a_{-i}), t_i) \tag{3.83}$$

для всех i и для всех $a'_i \in A_i$, то хотя бы для одного i, $a'_i \in A_i$,

$$\bar{u}_i(g(a_i, a_{-i}), t'_i) < \bar{u}_i(g(a'_i, a_{-i}), t'_i), \tag{3.84}$$

то есть g является монотонным. **Q.E.D.**

Пример. Соломонов суд.

Библейская легенда о суде мудрого царя Соломона — ранний и очень известный пример попытки решить задачу дизайна механизма:

> Мудрость свою Соломон показал прежде всего на суде. Вскоре по воцарении его пришли к нему на суд две женщины. Они жили в одном доме, и у каждой было по младенцу. Ночью одна из них своего младенца задавила и подложила его к другой женщине, а живого у той взяла себе. Утром женщины стали спорить: «живой ребенок мой, а мёртвый твой», говорила каждая. Так спорили они и пред царем. Выслушав их, Соломон приказал: «принесите меч». И принесли меч к царю. Соломон сказал: «Рассеките живого ребенка пополам и отдайте половину одной и половину другой». Одна из женщин при этих словах воскликнула: «отдайте лучше ей младенца, но не убивайте его!» Другая же, напротив, говорила: «рубите, пусть не достанется ни ей ни мне». Тогда Соломон сказал: «не убивайте ребенка, а отдайте его первой женщине: она его мать». Народ услышал об этом и стал бояться царя, потому что все увидели, какую мудрость дал ему Бог (Ветхий завет, 3-я книга Царств, гл. 3, ст. 16-—28).

Попробуем формализовать задачу, стоявшую перед Соломоном. Итак, к царю пришли две женщины. Одна из них — мать ребенка. Возможно два состояния природы: $T = \{1, 2\}$, где $t = i$ означает, что i-я женщина является матерью. Всего возможно три исхода судебного спора: $C = \{0, 1, 2\}$, где $c = i > 0$ означает, что ребенок отдан i-й женщине, $c = 0$ — ребенок разрублен пополам. Функция общественного выбора, которую необходимо реализовать, такова: $f(t) = t$.

Предположим, что предпочтения женщин таковы:

$t = 1$**:** $\bar{u}_1(1, 1) > \bar{u}_1(2, 1) > \bar{u}_1(0, 1)$, $\bar{u}_2(2, 1) > \bar{u}_2(0, 1) > \bar{u}_2(1, 1)$,

$t = 2$**:** $\bar{u}_1(1, 2) > \bar{u}_1(0, 2) > \bar{u}_1(2, 2)$, $\bar{u}_2(2, 2) > \bar{u}_2(1, 2) > \bar{u}_2(0, 2)$.

То есть каждая женщина больше всего хочет, чтобы ребенка оставили ей. При этом наихудший вариант для настоящей матери — гибель ребенка, а для обманщицы — проигрыш в суде.

Легко убедиться, что свойство монотонности по Маскину в этой задаче не выполняется. Пусть $c = f(1) = 1$. Тогда не существует такого $b \neq c$, что $\bar{u}_i(c, 1) \geq \bar{u}_i(b, 1)$ но $\bar{u}_i(c, 2) < \bar{u}_i(b, 2)$ для какого-нибудь $i = 1, 2$.

Более наглядно в этом можно убедиться, ограничив внимание прямыми механизмами, в которых Соломон требует каждую женщину назвать свой тип: $A_i = \{1, 2\}$ (мы имеем право так сделать, исходя из принципа выявления). Механизмом в данном случае будет игра 2×2, в которой при каждой паре стратегий $s_1, s_2 \in A_1 \times A_2$ реализуется один из элементов C. При этом, в случае $t = 1$, в равновесии мы должны иметь $a_1 = 1, a_2 = 2$, а при $t = 2$ — $a_1 = 2, a_2 = 1$. Можно проверить, что такую игру построить нельзя.

Почему же в библейском примере царю Соломону удалось принять справедливое решение? Очевидно из-за того, что обманщица просто не догадалась (или не смогла) имитировать реакцию настоящей матери на предложение разрубить ребенка пополам! Так она смогла бы избежать наихудшего для себя исхода, а царь Соломон был бы поставлен в неловкое положение. Мудрость Соломона заключалась не в умении выстраивать механизмы (что в данном случае, как мы видим, ему не помогло бы), а в умении прогнозировать и различать человеческие эмоции.

Пример. Принятие коллективного решения путем опроса.

Вот задача, поставленная Муленом (1980). Необходимо принять решение, учитывающее интересы нечетного числа N человек. Пусть множество возможных решений — единичный отрезок $C = [0, 1]$. Множество типов для каждого человека $i = 1, \ldots, N$ — также единичный отрезок $T_i = [0, 1]$. Пусть выигрыш человека i в том случае, если реализовано решение $c \in C$, равен

$$\bar{u}_i(c, t_i) = -\psi(|c - t_i|), \tag{3.85}$$

где $\psi(\cdot)$ — какая-то возрастающая функция. То есть мы предполагаем, что каждый $i = 1, \ldots, N$ обладает однопиковыми предпочтениями на множестве C, где i — его наилучшая альтернатива. Это предположение, как мы помним по предыдущим примерам, лежит в основе многих моделей как в политологии (C — множество политических программ), так и в экономике (C — множество способов произвести горизонтально дифференцированый товар).

Согласно принципу выявления, каждому механизму, Нэш-реализующему какую-то функцию общественного выбора $f : [0, 1]^N \to [0, 1]$, должен соответствовать прямой механизм $g : [0, 1]^N \to [0, 1]$, то есть правило, согласно которому мы просим каждого человека назвать его тип $\theta_i \in [0, 1]$, а затем на основании сделанных заявлений принять решение.

Предположим, что мы хотим, чтобы принятое решение было равно медианному значению наилучших альтернатив: $f(t) = \mathrm{med}(t_i)$. Легко убедиться, что эта функция общественного выбора удовлетворяет свойству монотонности по Маскину. Пусть t, t' — профили предпочтений с разными медианными значениями, i — медианный агент для профиля t'. Пусть $c = t_i$, $c' = t'_i$ — медианное значение для профиля предпочтений t'. Тогда, очевидно, $u_i(c, t) \geq u_i(c', t)$, но $u_i(c, t') < u_i(c', t')$.

На самом деле, про функцию общественного выбора $f(t) = \mathrm{med}(t_i)$ в этой задаче можно сказать несколько больше. Эта функция реализуема *в доминирующих стратегиях* при помощи механизма $g(\theta) = \mathrm{med}(\theta)$. От есть при использовании медианного механизма $g(\theta)$, стратегия $\theta_i = t_i$ будет слабо доминировать все остальные для любого игрока i и любого $t_i \in T_i$. Доказательство этого утверждения предлагается в качестве задачи.

Пример. Раздел имущества.

В своей популярной книге «Взаимовыгодное решение» политолог Стив Брамс и математик Алан Тейлор описывают различные механизмы раздела имущества — например, при бракоразводном процессе или при заключении мирного соглашения между двумя воюющими сторонами.

Задача дизайна механизма в таких случаях возникает, как мы говорили, из-за того, что делимое имущество неоднородно: у разных сторон могут быть разные оценки предметов, подлежащих разделу. Авторы выделили три критерия, которым должна отвечать процедура раздела.

Во-первых, это критерий отсутствия зависти. Не должно быть такого, чтобы одной из сторон казалось, что на каждый предмет, которой достался ей в результате дележа, существует предмет, который нравится ей еще больше, и который достался другой стороне. Этому критерию не удовлетворяет «балансированное чередование», когда две стороны по очереди берут по одному предмету из общей кучи. Если у обоих сторон одинаковые предпочтения, то вторая сторона будет завидовать первой. Во-вторых, это критерий справедливости. Полезность одной стороны после дележа не должна быть намного больше, чем полезность другой стороны. «Разделяй и выбирай» — классический способов раздела — не отвечает этому критерию. Согласно этому правилу, одна из двух сторон делит все имущество на две кучи; вторая сторона выбирает, какую из куч взять себе, а какую — оставить первой стороне. Если первой стороне известны предпочтения второй, то она должна предложить дележ, который максимизирует полезность второй кучи для для первой стороны, при условии, что полезность первой кучи для второй стороны равна 51%. В реальной жизни, такая эксплуататорская стратегия раздела может породить обратную реакцию. Видя, как его предпочтениями пытаются манипулировать, вторая сторона может поступить «назло» и взять худшую (со своей точки зрения) кучу, только для того, чтобы отомстить первой стороне за попытку получить слишком большой куш. По словам авторов, консультировавших юристов, подобная логика принятия решений при бракоразводных процессах возникает очень часто.

В-третьих, дележ должен быть эффективным. Не должно существовать способа поделить предметы так, чтобы увеличить полезность одной стороны, не снижая полезности другой. Если используется способ «разделяй и выбирай», но первая сторона не знает предпочтения второй, то, скорее всего, дележ будет неэффективным.

Авторы доказали, что если сторон всего две, то существует способ, удовлетворяющий всем трем перечисленным выше критериям. Согласно предложенному механизму, дележ начинается с того, что каждая сторона заявляет, во сколько баллов (из 100 возможных в сумме) она оценивает каждый предмет. При определенном способе раздела, основанном на заявленных сторонами значениях, доминирующей стратегией для каждой стороны является заявить свои истинные предпочтения; этот способ находит применение в юридической практике при реальных спорах о разделе имущества.

Достаточные условия Нэш-реализуемости механизма.

Монотонность является необходимым условием Нэш-реализуемости механизма. Насколько сильными являются дополнительные условия, обеспечивающие достаточность? Оказывается, что функция общественного выбора долждна удовлетворять следующему условию:

Определение 36 Пусть f — функция общественного выбора. Пусть $f(c) = t$, если $\bar{u}_i(c, t_i) > \bar{u}_i(c', t_i)$ для всех $c' \in C$ и для всех игроков, кроме (возможно) одного. Будем говорить, что f обладает *свойством отсутствия вето.*

Был доказан следующий результат:

Теорема 14 Пусть f монотонна и обладает свойством отсутствия вето. Тогда она Нэш-реализуема.

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в учебнике Осборна и Рубинштейна (1994, стр. 187–189).

3.2.3 Теория аукционов: Введение.

Зачем вообще товары продаются с аукционов? Если бы продавец точно знал, сколько каждый покупатель готов заплатить за его товар, то аукцион был бы не нужен. Было бы достаточно подойти к покупателю, который готов предложить самую большую цену, и продать товар именно ему — по максимальной цене, которую этот покупатель готов заплатить. Но души покупателей не прозрачны для глаз продавцов. Глядя в глаза пришедшему по моему объявлению о продаже садового участка человеку, я не могу понять, сколько именно он готов выложить. Это — его частная информация. Ценность участка для покупателя зависит от его вкусов, места проживания, другой его собственности — то есть от вещей, мне не известных. Мало того, если я спрошу его, сколько он готов заплатить за мой участок, то потенциальный покупатель, скорее всего, соврет. Он назовет цену, более низкую, чем его истинная оценка, если он будет знать, что именно по этой цене я готов продать ему участок. Единственное, что его сдерживает — это то, что может найтись другой покупатель, который предложит более высокую цену. Итак, налицо игра с неполной информацией между несколькими покупателями, исходом с которой является факт продажи (или непродажи) предмета, и продажная цена.

Перед вами стоит задача дизайна механизма продажи имеющегося у вас товара. Существует два критерия, по которым можно оценивать, насколько хорошо работает каждый отдельно взятый механизм: ожидаемый доход продавца и эффективность (то есть достается ли продаваемый товар покупателю, имеющему наибольшую оценку). Первый критерий преобладает при устройстве аукционов, на которых продаются товары частных продавцов (например, предметы искусства), а также закупочные аукционы. Второй критерий преобладает при продаже государством лицензий: экономике страны в целом будет выгодно, если, например, право на разработку нефтяного месторождения достанется фирме с наименьшими издержками.

С решениями этих и похожих задач связана теория аукционов — важная и бурно развивающаяся область экономической науки, уже успевшая дать миру нескольких нобелевских лауреатов. Даже краткий обзор литературы в этой области лежит за пределами возможностей данного учебника; желающие могут прочитать книги Кришны (2009), Милгрома (2004) или Клемперера (2004).

Описание некоторых типов аукционов.

Начнем с того, что перечислим основные виды аукционных механизмов.

Аукцион с повышением цены (или английский аукцион). Спросите обывателя: что он представляет себе в первую очередь при слове «аукцион»? Скорее всего, ваш собеседник скажет вам, что видит перед собой переполненный зал. Солидные покупатели в котелках сидят на обитых кожей стульях и потягивают сигары. Продавец, стоя лицом к публике и держа в правой руке молоток, выкрикивает последнюю ставку: Пятьсот долларов раз... Пятьсот долларов два... И вот один из джентльменов в зале поднимает руку и произносит: Пятьсот пятьдесят!

Именно таким образом до сих пор устроена продажа большинства товаров — например, этим правилом пользуются знаменитые аукционные дома Сотби и Кристи. Продавец объявляет стартовую цену (ниже которой продать товар будет нельзя). Каждый покупатель может объявить более высокую, чем текущая, цену; товар продается после того, как желающих поднимать цену больше не осталось. Покупателем является тот, кто назвал самую высокую цену (которую он в итоге и заплатит). В том случае, когда продается не предмет, которым можно пользоваться, а обязательство выполнить какую-либо работу (например, при распределении строительных контрактов), цена в ходе торговли понижаетя, пока не остается одного генерального подрядчика, готового выполнить работу на наименьшую названную цену.

Аукцион со снижением цены (или голландский аукцион). Альтернативный способ продавать товар «с молотка» — объявить за продаваемый товар очень высокую стартовую цену, затем постепенно снижать ее, пока не найдется покупатель, готовый купить товар по названной цене. Этот вид аукциона использовался в Голландии при продаже луковиц тульпана во время знаменитой «тюльпаномании» — пузыря на рынке этих цветов в первой половине 17 века.

Аукцион первой цены. Каждый покупатель, участвующий в аукционе, делает одну заявку, в тайне от остальных покупателей. Тот, чья заявка была выше, объявляется победителем; при этом он уплачивает цену, указанную в его заявке.

Аукцион второй цены. Этот вид аукциона также известен как «аукцион Викри», по имени нобелевского лауреата Уильяма Викри, предложившего эту схему. Как и при аукционе первой цены, каждый покупатель, участвующий в аукционе, делает одну тайную заявку. Тот, чья заявка была выше, объявляется победителем; но при этом он уплачивает цену, указанную в *следующей* заявке. Как мы уже убедились в первой главе (см. стр. 1.1.2), в таком аукционе каждый участник имеет доминирующую стратегию: заявить свою истинную оценку продаваемого товара.

Насколько сильно будут отличаться результаты этих четырех аукционов? Легко убедиться в том, что аукцион первой цены и голландский аукцион на самом деле приведут нас к одному и тому же результату. Например, представим себе, что вы хотите купить картину, которая продается при помощи голландского аукциона. Поскольку вы желаете остаться инкогнито, ваши интересы на аукционе представляет адвокат. Какие инструкции вы ему оставите? Вам достаточно сообщить ему всего одну цифру — цену, при которой следует остановить торговлю. Инструкции для участия в аукционе первой цены будут выглядеть так же: цена, которую нужно указать в заявке. При одинаковых инструкциях результаты двух аукционов будут одинаковы. Например, если при голландском аукционе покупатели решили остановить торговлю на $1000, $800 и $500, то товар будет продан за $1000 покупателю, сделавшему такую заявку. Если при аукционе первой цены заявки равны $1000, $800 и $500, то товар также будет продан покупателю, указавшему в заявке $1000, по той же цене. Будем говорить, что аукцион первой цены *стратегически эквивалентен* голландскому аукциону.

Можно ли провести те же параллели между аукционом второй цены и английским аукционом? И да, и нет. Стратегию торговли на английском аукционе можно формулировать поразному. Однако, при данных стратегиях остальных, каждому отдельно взятому покупателю будет выгодно поднять цену, если названная цена ниже его оценки, и если последним цену поднимал другой покупатель. Таким образом, стратегию покупателя можно свести к однойединственной цифре — сумме, при которой стоит прекращать торговлю. Легко убедиться, что результат английского аукциона будет эквивалентен результату аукциона второй цены, если суммы, при которых покупатели прекращают торговлю в английском аукционе, равны заявкам, сделанным в аукционе второй цены. Данное утверждение, однако, верно только в том случае, когда каждому покупателю известна ценность продаваемого товара.

Предположим, что это не так. Пусть каждому покупателю не известна ценность продаваемого товара; перед аукционом он получает некоторый сигнал относительно этой величины. Такая ситуация может возникнуть, например, при продаже прав на разработку месторождения полезных ископаемых. Каждая фирма, участвующая в тендере, провела геологоразведку и, как следствие, имеет какой-то сигнал относительно доходности этого месторождения. Эти сигналы, очевидно, коррелированы. В таком случае оптимальная стратегия покупателя будет более сложной, чем «торговаться, пока цена не достигнет величины X». Ведь, наблюдая заявки других покупателей, можно получить дополнительную информацию о ценности продаваемого товара.

Дизайн оптимального аукциона для покупателей с конечным множеством типов.

Вы разбирали старые вещи в прабабушкином шкафу, и обнаружили картину[8]. При ближайшем рассмотрении оказалось, что это полотно кисти Пабло Пикассо. Вы объявили о своем желании продать эту картину. С вами связалось два покупателя, готовых ее купить. Из разговоров со специалистами вы поняли, что все потенциальные покупатели делятся на две категории: те, кто готов заплатить не более 3 миллионов долларов, и те, кто готов заплатить не более 4 миллионов. При этом p — это доля покупателей, готовых заплатить 3 миллиона. Оценка покупателем картины — частная информация. Вы не можете, глядя ему в глаза, понять, сколько он готов отдать за эту картину. Если это было бы так, то вам оставалось бы найти покупателя с максимальной оценкой картины, и продать картину именно ему, по его максимальной цене. Но сейчас перед вами стоит непростая задача — выработать правила, которые принесут вам максимальный ожидаемый доход.

Принцип выявления гласит, что достаточно спросить каждого из покупателей, сколько — 3 или 4 миллиона — он готов отдать за эту картину. Так что достаточно придумать правило, согласно которому вы будете решать, кому (и за какую цену) вы продадите картину, в зависимости от того, какие заявки поступили от двух покупателей.

Каким условиям должно удовлетворять ваше правило? Во-первых, вы не можете продать картину двум покупателям сразу (хотя, возможно, картина может и не быть продана). Во-вторых, это правило должно принуждать покупателей правдиво сообщать вам свою оценку продаваемой картины. Согласно принципу выявления, любой результат, который можно реализовать в ходе аукциона, можно реализовать и в качестве равновесия в игре, в которой покупатели сообщают продавцу свои оценки стоимости продаваемого товара — при условии, что это равновесие правдивое. Наконец, ваше правило должно максимизировать ожидаемую стоимость продажи картины.

Сколько параметров необходимо, чтобы полностью описать процедуру продажи картины? С точки зрения нейтрального к риску покупателя, исход аукциона определяется двумя величинами: вероятностью, с которой он выиграет аукцион, и сумму, которую он в итоге заплатит за картину и участие в аукционе. Таким образом, если у нас два типа покупателя, то правила аукциона будут полностью описываться четырьмя параметрами: H и L — ожидаемые суммы, которые заплатят два покупателя (оценивающих картину в 4 и 3 миллиона, соответственно), и h и l — вероятности того, что эти покупатели смогут приобрести картину. Будем ограничиваться симметричными правилами: выигрыш покупателя и вероятность покупки картины зависят только от его заявленной оценки.

Какие существуют ограничения на эти четыре величины? Во-первых, это бюджетное ограничение. У нас всего одна картина. Следовательно, вероятность того, что ее приобретет покупатель, оценка которого неизвестна — то есть $(1-p)h+pl$ — не может превышать $\frac{1}{2}$. Очевидно, что максимум, на что может рассчитывать покупатель с высокой оценкой — это с гарантией купить картину, если у второго покупателя оценка низкая, и купить картину с вероятностью $\frac{1}{2}$, если оценка второго покупателя тоже высокая. Следовательно, $h \leq p+\frac{1}{2}(1+p)$. Аналогично, $l \leq \frac{p}{2}$. В итоге мы имеем

$$\begin{aligned} h &\leq \frac{1}{2}(p+1) \\ l &\leq \frac{p}{2}, \end{aligned} \tag{3.86}$$

так как условие $(1-p)h+pl \leq \frac{1}{2}$ является избыточным.

Условия (3.86) описывают всю полноту исходов различных аукционов. Приведем несколько примеров.

[7]Взято из книги Бинмора (1992, стр. 532–536).

1. Картина продается по фиксированной цене \$4 млн. Тогда $l = 0$, $L = 0$, $h = p + \frac{1}{2}(1-p) = \frac{1}{2}(1+p)$, $H = 2(p+1)$.

2. Аукцион второй цены (он же аукцион Викри). Покупатели делают заявки. Затем тот покупатель, чья заявка была самая высокая, покупает картину по цене следующей заявки. Это дает нам, при условии, что заявки делаются правдиво, $l = \frac{1}{2}p$, $h = \frac{1}{2}(1+p)$, $L = \frac{3}{2}p$, $H = 2 + p$ (в таком аукционе делать правдивые заявки, как мы скоро убедимся, действительно является равновесной стратегией).

3. Модифицированный аукцион второй цены. Покупатели делают заявки. Затем тот покупатель, чья заявка была самая высокая, покупает картину по цене, равной среднему арифметическому цен двух заявок. Это соответствует $l = \frac{1}{2}p$, $h = \frac{1}{2}(1+p)$, $L = \frac{3}{2}p$, $H = 2 + \frac{3}{2}p$.

Второй набор ограничений связан с тем, что оба покупателя должны правдиво сообщить продавцу свои оценки продаваемой картины. Поэтому мы вводим условия *совместимости стимулов*:

$$\begin{aligned} 4h - H &\geq 4l - L \\ 3l - L &\geq 3h - H. \end{aligned} \tag{3.87}$$

В первом неравенстве левая часть соответствует выигрышу покупателя с оценкой \$4 млн, если он сделает заявку \$4 млн.; правая часть — если он сделает заявку \$3 млн. Во втором неравенстве, левая часть соответствует выигрышу покупателя с оценкой \$3 млн, если он сделает заявку \$3 млн; правая часть — если его заявка будет \$4 млн.

Также, ожидаемый выигрыш покупателя каждого типа должен быть неотрицательным. Соответствующие ограничения — так называемые *условия участия* или *условия индивидуальной рациональности* — таковы:

$$\begin{aligned} 4h - H &\geq 0 \\ 3l - L &\geq 0. \end{aligned} \tag{3.88}$$

Если $4h - H < 0$, то покупатель с высокой оценкой просто пройдет мимо и не станет участвовать в аукционе.

Математическое ожидание суммы, которую заплатит покупатель, есть $(1-p)H + pL$. Так как покупателей двое, целевая функция продавца имеет следующий вид:

$$F = 2(1-p)H + 2pL. \tag{3.89}$$

Это позволяет нам формально описать задачу: максимизировать (3.89) при ограничениях (3.86), (3.87), и (3.88).

На первый взгляд это — довольно трудная задача линейного программирования. Однако ее можно существенно облегчить. Обратим внимание на ограничения (3.88). Очевидно, что одно из них должно удовлетворяться со знаком равенства. Предположим обратное. Допустим, что H, L, h, l максимизируют (3.89), причем $4h - H > 0$ и $3l - L > 0$. Возьмем $\epsilon < \min\{4h - H, 3l - L\}$. Возьмем $H' = H + \epsilon$, $L' = L + \epsilon$. Мы видим, что ни ограничения (3.87), ни ограничения (3.88) при этом не нарушаются, но значение целевой функции F возросло. Это противоречит предположению об оптимальности H и L.

Если одно из (3.88) выполняется как равенство, то одно из (3.87) тоже должно выполняться как равенство. Действительно, мы имеем $3(h-l) \leq H - L \leq 4(h-l)$. Если оба неравенства выполняются строго, то можно увеличить выигрыш (увеличив H либо L, в зависимости от того, какое из неравенств (3.88) выполняется со знаком равенства).

Можно легко убедиться, что

$$4h - H = 4l - L \tag{3.90}$$

и

$$3l - L = 0. \tag{3.91}$$

Действительно, в обратном случае мы имеем противоречие: $4h - H = 0 \geq 4l - L \geq 3l - L > 0$. Интуитивно это понятно: ограничение совместимости стимулов должно жестко выполняться именно для того покупателя, который выше ценит продаваемый актив — ведь потенциальный выигрыш от вранья у него выше, чем у покупателя с низкой оценкой.

Уравнения (3.90) и (3.91) сильно упрощают задачу. Целевую функцию мы можем переписать как

$$G = (1 - p)h + (p - \frac{1}{4})l, \tag{3.92}$$

подставив $L = 3l$ и $H = 4h - l$ в (3.89).

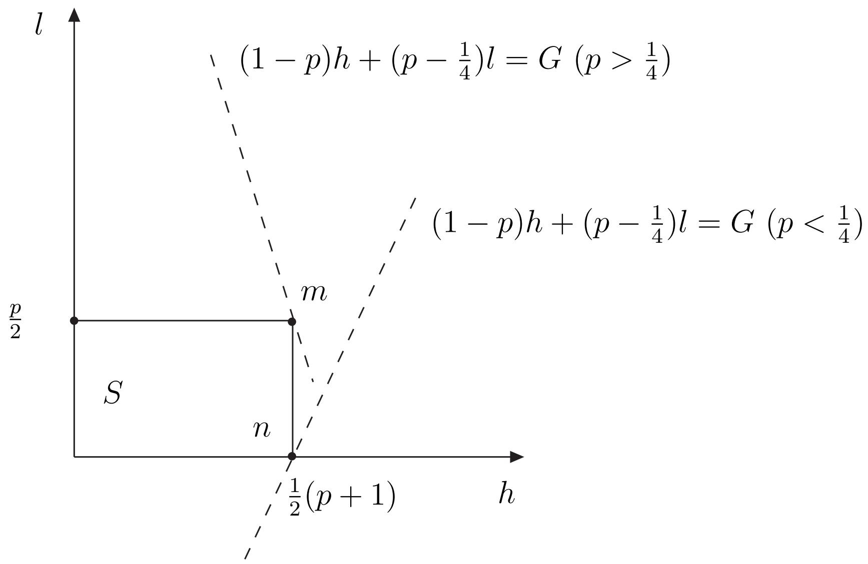


Рис. 3.8: Множество допустимых h, l.

Нам нужно найти максимум функции (3.92) на множестве S, описываемом ограничениями (3.86). Если линейная функция максимизируется на многоугольнике, то решения всегда будут лежать в вершинах этого многоугольника. В нашем случае, возможно два решения.

$p \geq \frac{1}{4}$: Максимум достигается в точке m на рисунке 3.8. Соответственно, мы имеем $\tilde{h} = \frac{1}{2}(1+p)$, $\tilde{l} = \frac{p}{2}$, $\tilde{H} = \frac{3}{2}p + 2$, $\tilde{L} = \frac{3}{2}p$. Выигрыш продавца составляет $\tilde{F} = 4 - p$. Такой выигрыш достижим при модифицированном аукционе Викри.

$p \leq \frac{1}{4}$: Максимум достигается в точке n на рисунке 3.8. Соответственно, мы имеем $\tilde{h} = \frac{1}{2}(1+p)$, $\tilde{l} = 0$, $\tilde{H} = 2(p + 1)$, $\tilde{L} = 0$. Выигрыш продавца составляет $\tilde{F} = 4 - 4p^2$. Такой выигрыш достижим при продаже дома по цене $Q = 4$.

Мы получили так называемое *второе наилучшее* решение задачи аукционера. Выигрыш акционера максимизируется, учитывая тот факт, что оценки продаваемого товара покупателями остаются частной информацией, и ни один из покупателей не может быть принужден к участию в аукционе. Выигрыш в *первом наилучшем* случае, когда товар всегда продается покупателю с наибольшей оценкой, по максимальной цене, составляет $F^* = 4 - p^2$. На рисунке 3.2.3 показаны выигрыши в первом и втором наилучшем случае.

Как мы видим, разница в выигрышах максимальна когда вероятность p равна $\frac{1}{2}$, то есть когда велика неопределенность относительно типа покупателя.

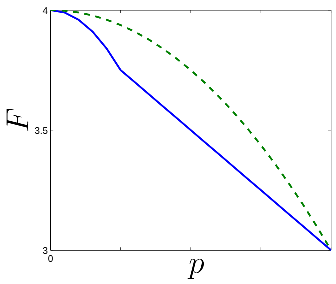


Рис. 3.9: Выигрыш продавца в идеальном случае и в наилучшем реализуемом случае (нижний график).

Аукцион первой цены с континуумом типов.

Выше мы рассмотрели задачу дизайна аукциона. Вы продавали картину, на которую могло быть два типа покупателей. Решением задачи стало оптимальное правило продажи картины, в зависимости от распределения оценок среди покупателей. Однако насколько предположение о наличии только двух видов покупателей соответствует действительности? На самом деле, это предположение означало, что продавцу известно довольно много: покупатель может быть готов заплатить *либо* \$3 миллиона, *либо* \$4 миллиона, но не копейкой больше или меньше. Что еще важнее, мы предположили, что то же самое известно и самим покупателям.

Обычно продавец не может рассчитывать на то, что покупатель обязательно будет обладать одним из двух или нескольких типов. Более вероятно, что его оценка может принимать любое значение; в таком случае при моделировании аукциона мы предположим, что множество оценок является интервалом, а представления продавца о типах покупателя описываются функцией распределения на этом интервале.

Предположим, что в аукционе первой цены участвуют N покупателей. Пусть у каждого покупателя оценка продаваемого товара равномерно распределена на промежутке $[0, 1]$. Найдем равновесные стратегии покупателей.

Пусть $b_i(v_i)$ — стратегия покупателя i. Предположим, что $b_i(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемые и строго возрастающие фунции. Будем считать, что покупатели нейтральны к риску. Тогда, для данного значения v_i, выигрыш покупателя i равен

$$\tilde{u}_i = (v_i - b_i(v_i))P(b_i(v_i) > \max_{j\neq i} b_j(v_j)) = (v_i - b_i(v_i)) \prod_{j\neq i} P(b_i(v_i) > b_j(v_j)). \tag{3.93}$$

Используя предположение о том, что $b_j(\cdot)$ являются строго возрастающими, и что v_j равномерно распределены на $[0, 1]$, получим

$$\tilde{u}_i = (v_i - b_i(v_i)) \prod_{j\neq i} P(b_j^{-1}(b_i(v_i)) > v_j) = (v_i - b_i(v_i)) \prod_{j\neq i} b_j^{-1}(b_i(v_i)). \tag{3.94}$$

Теперь сделаем предположение, что равновесие симметрично, то есть для всех игроков j, мы имеем $b_j(\cdot) = b(\cdot)$. Найдем условия первого порядка:

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial b_i(v_i)} = (N-1)(v_i - b_i(v_i))\frac{d}{db_i(v_i)} b^{-1}(b_i(v_i))[b^{-1}(b_i(v_i))]^{N-2} - [b^{-1}(b_i(v_i))]^{N-1} = 0 \tag{3.95}$$

Наша задача — найти симметричное равновесие, то есть мы должны использовать дополнительное условие $b_i(\cdot) = b(\cdot)$. Таким образом, мы получим ответ на вопрос: при каком $b(\cdot)$, ни одному игроку не выгодно отклониться от стратегии $b_i(\cdot) = b(\cdot)$. Мы имеем

$$(N-1)(v_i - b(v_i))\frac{d}{db(v_i)} b^{-1}(b(v_i)) = b^{-1}(b(v_i)). \tag{3.96}$$

Это выражение можно упростить. Так как $\frac{d}{db(v_i)}b^{-1}(b(v_i)) = \frac{1}{b'(v_i)}$ и $b^{-1}(b(v_i)) = v_i$, получим дифференциальное уравнение

$$v_i = (N-1)(v_i - b(v_i))\frac{1}{b'(v_i)} \tag{3.97}$$

или

$$b'(v_i)v_i = (N-1)(v_i - b(v_i)). \tag{3.98}$$

Решением этого уравнения будет

$$b(v_i) = v_i\frac{N-1}{N}. \tag{3.99}$$

Таким образом, стратегии покупателей будут линейными относительно их оценок. Причем при увеличении числа покупателей, равновесная заявка каждого покупателя будет приближаться к его собственной оценке продаваемого товара.

Ожидаемый доход продавца будет равен ожидаемой наибольшей заявке. Наибольная оценка распределена следующим образом:

$$P(\max v_i \leq x) = \prod_{i=1}^{N} P(v_i \leq x) = x^N, \tag{3.100}$$

отсюда имеем матожидание наибольшей оценки:

$$E(\max v_i) = \int_0^1 \left(x^N\right)' x dx = \frac{N}{N+1}. \tag{3.101}$$

Так как $b(v_i) = \frac{N-1}{N}v_i$, ожидаемый доход будет равен

$$R = \frac{N-1}{N}E(\max v_i) = \frac{N-1}{N+1}. \tag{3.102}$$

Ожидаемый доход, как было очевидно, стремиться к максимальной оценке при увеличении числа покупателей.

Аукцион второй цены с континуумом типов.

Итак, если оценки покупателей распределены равномерно на $[0, 1]$, то при каком из двух правил — аукционе первой или второй цены — вам удастся продать товар за бóльшую цену?

Рассмотрим аукцион второй цены между N покупателями. Мы помним, что заявка в таком аукционе равна собственной оценке, так как это — слабо доминирующая стратегия: $b_i = v_i$. Найдем ожидаемый выигрыш продавца. Ожидаемый платеж, который произведет игрок i с оценкой v_i, равен

$$c_i(v_i) = P(v_i = \max_{j=1,\dots,N} v_j)E(\max_{j\neq i} v_j | v_i \geq \max_{j\neq i} v_j). \tag{3.103}$$

Пусть v_j равномерно распределено на $[0, 1]$, и $v_j \leq v_i \leq 1$. Тогда условное распределение v_j будет равномерным на $[0, v_i]$. Следовательно,

$$P(v_j \leq x | v_j \leq v_i) = \frac{x}{v_i}, \tag{3.104}$$

$$P(\max_{j\neq i} v_j \leq x | \max_{j\neq i} v_j \leq v_i) = \frac{x^{N-1}}{v_i^{N-1}} \tag{3.105}$$

для $0 \le x \le v_i$. Мы будем иметь

$$E(\max_{j\neq i} v_j | v_i \ge \max_{j\neq i} v_j) = \int_0^{v_i} \left(\frac{x^{N-1}}{v_i^{N-1}}\right)' x dx = \int_0^{v_i} \frac{N-1}{v_i^{N-1}} x^{N-1} dx = \frac{v_i(N-1)}{N}. \tag{3.106}$$

Так как

$$P(v_i = \max_{j=1,\ldots,N} v_j) = P(v_i \ge \max_{j\neq i} v_j) = v_i^{N-1}, \tag{3.107}$$

мы имеем

$$c_i(v_i) = \frac{v_i^N(N-1)}{N}. \tag{3.108}$$

Ожидаемая сумма, которую получит продавец, равна сумме ожидаемых платежей покупателей:

$$R = \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 c_i(v) dv = \frac{N-1}{N+1}, \tag{3.109}$$

то есть с точки зрения продавца все равно, какой аукцион — первой или второй цены — следует использовать.

3.2.4 Аукционы: эквивалентность доходов.

Совпадение ожидаемых доходов в аукционах первой и второй цены была подмечена еще в основополагающей работе Викри (1961). Однако в дальнейшем было показано, что это — частный случай более широкой закономерности. На самом деле, выигрыши покупателей совпадают для многих аукционов. Этот результат, носящий название *теоремы об эквивалентности доходов*, является ключевым в теории аукционов, и был впервые сформулирован в работах Майерсона (1981) и Райли и Сэмюэльсона (1981):

Теорема 15 Пусть в аукционе участвуют N покупателей, нейтральных к риску. Оценки покупателей v_i независимо и одинаково распределены на промежутке $[\underline{v}, \bar{v}]$ с ненулевой плотностью $f(v)$ и функцией распределения $F(v)$. Пусть для каждого из двух прямых аукционных механизмов в равновесии верно следующее:

1. Если $v_i > \max_{j\neq i} v_j$, то товар достается покупателю i.
2. Если $v_i = \underline{v}$, то ожидаемый выигрыш покупателя i равен нулю.

Тогда в этих двух аукционах ожидаемые выигрыши продавца и покупателя с данной оценкой v будут одинаковы.

Докажем эту теорему. Пусть $P_i(v)$ — вероятность того, что покупатель i с оценкой v станет победителем аукциона, при условии, что все покупатели используют свои равновесные стратегии. Согласно предположению (1), мы имеем

$$P_i(v) = P(v_i > \max_{j\neq i} v_j) = (F(v))^{N-1}, \tag{3.110}$$

то есть для любых двух аукционов, удовлетворяющих условиям теоремы, эти величины совпадают.

Обозначим за $S_i(v)$ выигрыш покупателя i с оценкой v. Согласно принципу выявления, мы можем ограничиться рассмотрением прямых механизмов, в которых покупатель i в равновесии сообщает продавцу свою оценку v_i. Аукцион второй цены является таким прямым механизмом; в аукционе первой цены в равновесии заявка монотонно возрастает с оценкой, то есть фактически покупатель также сообщает свою оценку продавцу.

Мы предполагаем, что покупатели нейтральны к риску. Следовательно, выигрыш покупателя i можно записать следующим образом:

$$S_i(v) = vP_i(v) - c_i(v), \tag{3.111}$$

где $c_i(v)$ — математическое ожидание суммы, которую покупатель i с оценкой v выплатит в ходе аукциона.

Если покупатель i с оценкой v сообщит продавцу, что его оценка равна $\tilde{v}$, то его выигрыш будет

$$\tilde{S}_i(v, \tilde{v}) = vP_i(\tilde{v}) - c_i(\tilde{v}). \tag{3.112}$$

Согласно принципу выявления, мы предполагаем, что в равновесии покупатель правдиво сообщает продавцу свою оценку. То есть функция $\tilde{S}(v, \tilde{v})$ достигает максимума по $\tilde{v}$ при $\tilde{v} = v$. Так как мы предполагаем, что у распределения типов игроков ненулевая плотность на $[\underline{v}, \bar{v}]$, функция $P_i(v)$ является дифференцируемой. Так что мы получаем

$$\left.\frac{\partial \tilde{S}_i(v, \tilde{v})}{\partial \tilde{v}}\right|_{\tilde{v}=v} = vP_i'(v) - c_i'(v) = 0. \tag{3.113}$$

С другой стороны, из определения (3.111) мы имеем

$$S_i'(v) = vP_i'(v) + P_i(v) - c_i'(v). \tag{3.114}$$

Подставив (3.113) в (3.114), получаем, что

$$S_i'(v) = P_i(v). \tag{3.115}$$

Интегрируя (3.115), мы можем в явном виде выписать функцию выигрыша:

$$S_i(v) = S_i(\underline{v}) + \int_{\underline{v}}^{v} P_i(x) dF(x). \tag{3.116}$$

Так как мы предполагаем, что $S_i(\underline{v}) = 0$, то выигрыш каждого покупателя зависит только от P_i, то есть он не зависит от аукционного механизма. Остается показать то же самое для ожидаемого дохода продавца R. Уравнения (3.116) и (3.110) дают нам ожидаемую сумму, которую платит покупатель i с оценкой v:

$$c_i(v) = vP_i(v) - S_i(v) = vP_i(v) - \int_{\underline{v}}^{v} P_i(x) dF(x). \tag{3.117}$$

Ожидаемый доход продавца равен сумме матожиданий этих величин:

$$R = \sum_{i=1}^{N} \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} c_i(x) dF(x). \tag{3.118}$$

Эта величина зависит только от распределения типов $F(v)$. Теорема доказана.

Пример. Аукцион первой цены со всеобщей выплатой.

Используем теорему об эквивалентности для нахождения равновесных стратегий в таком аукционе. Пусть N — число покупателей. Оценка v_i ценности продаваемого товара для каждого покупателя i равномерно распределена на промежутке $[0, 1]$. Пусть b_i — заявка покупателя i. Пусть выигрыш покупателя i равен

$$\tilde{u}_i = v_i P(b_i(v_i) > \max_{i \neq j} b_j(v_j)) - b_i(v_i), \tag{3.119}$$

то есть победителем аукциона объявляется игрок с максимальной заявкой, причем *все* игроки (в том числе и проигравшие) платят свои заявки.

Такие механизмы распределения ресурсов наблюдаются, например, при лоббировании. Допустим, что есть несколько желающих получить некий ресурс. Каждый соискатель прикладывает определенный объем усилий для его получения. Победитель — тот, кто приложил больше усилий. При этом проигравшие не получают компенсации за те усилия, которые они потратили.[9]

Найдем равновесные стратегии в такой игре. Мы можем использовать теорему об эквивалентности доходов, так как, во-первых, игрок с нулевой заявкой может гарантировать нулевой выигрыш, и во-вторых, игрок с наибольшей заявкой (и наибольшей оценкой) будет объявлен победителем, и получит ресурс с вероятностью 1.

Уравнение (3.108) дает нам ожидаемую сумму, которую заплатит покупатель с оценкой v_i в аукционе второй цены, в котором N покупателей, и оценки каждого покупателя равномерно распределены на $[0,1]$. Но, согласно теореме об эквивалентности, это же уравнение должно давать нам ожидаемую сумму, которую заплатит покупатель и в аукционе первой цены со всеобщей выплатой! Поскольку в таком аукционе покупатель платит вне зависимости от того, победил он или нет, это и есть его равновесная стратегия:

$$b_i(v_i) = \frac{v_i^N(N-1)}{N}. \tag{3.120}$$

Таким образом, мы решили задачу, не прибегая к решению дифференциальных уравнений, что было бы необходимо, если бы мы не знали теоремы об эквивалентности.

3.2.5 Примеры.

Аукционы с резервационной ценой.

Вы продаете картину, но хотите, чтобы сумма, заплаченная победителем аукциона, не была меньше, чем некоторая минимальная цена $r > 0$. Рассмотрим, как выигрыши покупателей и продавца в таком аукционе зависят от резервационной цены r.

Пусть вы решили, что на аукционе должно действовать правило второй цены, с поправкой на минимальную цену r. То есть, например, если покупателей всего двое и их заявки $b_1 \le b_2 < r$, то картина не продается. Если их заявки $b_1 < r \le b_2$, то покупатель 2 платит r. И если $r \le b_1 < b_2$, то покупатель 2 платит b_1. Рассуждая аналогично задаче на стр. 9, убедимся, что равновесные (по слабому доминированию) заявки будут $b_i = v_i$, как и при $r = 0$. Очевидно, что таких же стратегий покупатели будут придерживаться и при английском аукционе с повышением заявок: продолжать торговаться, пока текущая цена не превысит собственную оценку.

Пусть на картину претендует всего N покупателей; оценка каждого равномерно распределена на $[0,1]$. Какими будут ожидаемые выигрыши продавца и покупателей? Для решения этой задачи мы не можем использовать теорему об эквивалентности доходов и сказать, что выигрыши будут такими же, как и при отсутствии резервационной цены. Причина тому — нарушение одного из условий теоремы об эквивалентности, а именно, что товар с вероятностью 1 достается покупателю с наибольшей оценкой. Если все оценки меньше, чем r, то товар не достанется никому.

Какая резервационная цена принесет продавцу максимальный ожидаемый доход? С одной стороны, при высокой r велика вероятность, что картина останется непроданной. С другой, чем выше r, тем больше ожидаемая цена, которую заплатит победитель (если он будет).

[9]Эта постановка похожа на задачу о борьбе за ренту, рассмотренную на стр. 34. В отличие от той задачи мы предполагаем, что приложение наибольшего усилия гарантирует победу ($\gamma = \infty$), но оценка каждого игрока — его частная информация.

Найдем ожидаемую сумму, выплачиваемую покупателем i с оценкой v_i. Она равна

$$c_i(v_i) = P(v_i \geq \max_{j \neq i}, v_i \geq r) E(\max\{\max_{j \neq i} v_j, r\} | v_i \geq \max_{j \neq i}, v_i \geq r). \tag{3.121}$$

Получим

$$P(v_i \geq \max_{j \neq i}, v_i \geq r) = \begin{cases} v_i^{N-1}, & v_i \geq r \\ 0, & v_i < r. \end{cases} \tag{3.122}$$

Найдем условное матожидание суммы, заплаченной победителем. Теперь эта величина не может быть меньше r. Мы имеем

$$E(\max\{\max_{j \neq i} v_j, r\} | v_i \geq \max_{j \neq i}, v_i \geq r) = r \cdot \frac{r^{N-1}}{v_i^{N-1}} + \int_r^v \left(\frac{x^{N-1}}{v_i^{N-1}} \right)' x dF(x) = \frac{R^N}{v_i^{N-1}} + \frac{N-1}{N v_i^{N-1}} (v_i^N - r^N), \tag{3.123}$$

где $\frac{r^{N-1}}{v_i^{N-1}}$ — вероятность того, что $\max_{j \neq i} \leq r$. Таким образом,

$$c_i(v_i) = \begin{cases} \frac{N-1}{N} v_i^N + \frac{r^N}{N}, & v_i \geq r \\ 0, & v_i < r. \end{cases} \tag{3.124}$$

Как и в задаче с $r = 0$, ожидаемый выигрыш продавца будет равен сумме матожиданий платежей всех игроков:

$$R = \sum_{i=1}^N \int_r^1 c_i(v_i) = r^N(1-r) + \frac{N-1}{N+1}(1 - r^{N+1}) = \frac{N-1}{N+1} + r^N(1 - \frac{2N}{N+1} r). \tag{3.125}$$

Максимизируем это выражение по r:

$$\frac{dR}{dr} = N r^{N-1} - 2N r^N = N r^{N-1}(1 - 2r). \tag{3.126}$$

Получается, что выигрыш продавца максимизируется при

$$r^* = \frac{1}{2}. \tag{3.127}$$

При равномерно распределенных оценках, приход дополнительного покупателя не влияет на оптимальную резервационную цену. Важно ли, какой тип аукциона — первой или второй цены — выберет продавец, при условии, что резервационная цена одинакова для обоих аукционов? Нет, из-за теоремы об эквивалентности доходов. Немного модифицируя теорему можно показать, что во всех аукционах, в которых покупатель с наибольшей оценкой приобретает товар с вероятностью 1 при условии, что его оценка выше резервационной, доходы покупателей и продавца одинаковы (см. задачу 15).

Интересное наблюдение можно сделать, сравнивая доходы продавца в аукционе с резервационной ценой и без нее. Максимальный доход, который продавец может получить при $r = \frac{1}{2}$, есть

$$R^* = \frac{N-1}{N+1} + \frac{1}{2^N} \frac{1}{N+1}. \tag{3.128}$$

Очевидно, что при увеличении числа покупателей дополнительный выигрыш от введения резервационной цены снижается, так как при увеличении числа покупателей возрастает матожидание второй заявки. Также, увеличение числа покупателей на одного дает больший эффект, чем введение резервационной цены. Для случая с равномерно распределенными оценками в этом легко убедиться; для общего случая это было доказано Буловым и Клемперером (1996).

Применение аукционов на практике: Опыт продажи частот для связи 3G.

В 2000-2001 годах прошли первые в Европе государственные аукционы по продаже частот на мобильную связь третьего поколения. Покупателями на этих аукционах были операторы мобильной связи, продавцами — государства. Итоги аукционов показывают, насколько велико может быть влияние правил аукциона на итоговую цену, по которой продается товар, и то, кто в итоге окажется покупателем.

В таблице 3.1 показано, какую сумму выручило правительство каждой из стран.

Страна	Цена, евро/чел	Индекс	Страна	Цена, евро/чел	Индекс
Великобритания	650	1200	Бельгия	45	600
Нидерланды	170	900	Дания	95	400
Германия	615	900	Греция	45	500
Австрия	100	750			
Италия	240	750			
Швейцария	20	700			

Таблица 3.1: Выручка от продажи частот 3G (евро на душу населения) и индекс Dow Jones European Telecom Index на момент аукциона.

При том, что подушевой доход в этих странах отличается не более чем в полтора раза, поступления в государственный бюджет отличались более чем в 10 раз. Самая большая выручка — 650 евро на одного потенциального абонента в Великобритании — более чем в 30 раз превышали 20 евро за абонента, вырученные в Швейцарии. Это очень много даже несмотря на то, что на момент проведения аукциона в Швейцарии цены на акции телекоммуникационных компаний сильно упали (индекс, отражающий цены на эти акции, составлял 1200 на момент проведения аукциона в Великобритании, и 700 на момент проведения аукциона в Швейцарии).

Согласно мнению Поля Клемперера, известного ученого, консультировавшего организаторов аукциона в Великобритании, существуют два наиболее важных момента, которые необходимо учитывать при организации аукциона. Во-первых, это привлечение покупателей. Правила аукциона не должны быть такими, чтобы у «слабых» покупателей (то есть у покупателей с низкой оценкой) не было шансов на победу. Иначе такие покупатели (например, маленькие фирмы, или фирмы, для которых мобильная связь не является профильным бизнесом) вообще не примут решение об участии в аукционе. Это снизит конкуренцию для «сильных» игроков — то есть, в нашем случае, для крупных телекоммуникационных компаний, уже имеющих развитую инфраструктуру (и потому несущих более низкие издержки при освоении лицензии). Во-вторых, правила аукциона должны затруднять возможность сговора между покупателями; в частности, аукцион не должен давать покупателю возможность подавать своими заявками сигналы другим покупателям. Например, при наличии возможности приобретения одного лота несколькими покупателями сразу покупатель может указать за какой лота он готов торговаться, а за какой — нет (аукцион с повышением цены таким образом более уязвим, чем акуцион с закрытыми заявками).

Клемперер приписывает успех британского аукциона наличию пяти неделимых лицензий и наличию правила, по которому одна из лицензий обязательно должна достаться фирме, не присутствовавшей ранее на рынке мобильной связи. Аукцион в Великобритании был таким успешным во многом еще и потому, что он был первым в своем роде. На каждом следующем аукционе, покупатели — телекоммуникационные компании — учитывали ошибки своих предшественников в других странах, и находили способы торговаться более консервативно, что приводило к снижению цен, по которымс продавались лицензии. Также, потенциальные покупатели стали более трезво оценивать свои шансы на победу, что привело к снижению числа участников в последующих аукционах.

Организаторы аукциона в Швейцарии допустили роковую ошибку, разрешив совместные заявки со стороны нескольких фирм. В результате совместных заявок число претендентов сократилось с 9 до 4, при наличии всего 4 лицензий! В итоге, все лоты ушли по резервационной цене, которая была очень низкой.

3.3 Задачи

1. Рассмотрим такую игру. Первый ход делает Природа, которая решает, в какую из двух игр 2×2 будут играть два игрока. Пусть p — вероятность, с которой Природа выбирает игру 1. Потом игрок 1 (но не игрок 2) узнает тип игры. Затем игрок 1 и игрок 2 одновременно выбирают $a_1, a_2 \in \{A, B\}$. Найдите все равновесия Байеса-Нэша.

   Игра 1

	A	B
A	$2,2$	$0,0$
B	$0,0$	$0,0$

   Игра 2

	A	B
A	$0,0$	$0,0$
B	$0,0$	$1,1$

2. (Петерс, 2008, стр. 67). Игрок 1 может быть одного из двух типов: t_1 и t_1', Игрок 2 — t_2 либо t_2'. Условные вероятности двух типов таковы: $p(t_2|t_1) = 1$, $p(t_2|t_1') = \frac{3}{4}$, $p(t_1|t_2) = \frac{3}{4}$, $p(t_1|t_2') = 0$. Пусть у Игрока 1 два действия — `T` и `B`, у Игрока 2 — `L` и `R`. Выигрыши игроков в зависимости от их типов и действий таковы:

   $t_1 t_2$:

	L	R
T	$2,2$	$0,0$
B	$3,0$	$1,1$

   $t_1' t_2$:

	L	R
T	$2,2$	$0,0$
B	$0,0$	$1,1$

   $t_1' t_2'$:

	L	R
T	$2,2$	$0,0$
B	$0,0$	$1,1$

   Найдите все равновесия в этой игре.

3. «Меньше знаешь — крепче спишь» (Осборн 2009, стр. 284–285). Пусть существуют два состояния природы, t_1 и t_2. Оба состояния равновероятны. Состояние игры неизвестно ни одному из игроков. Выигрыши игроков, в зависимости от их стратегий и от состояния природы, таковы:

   t_1:

	L	M	R
T	$2,2x$	$1,0$	$1,3x$
B	$3,2$	$0,0$	$0,3$

   t_2:

	L	M	R
T	$2,2x$	$1,3x$	$1,0$
B	$0,0$	$1,3$	$0,0$

   Пусть $0 < x < \frac{1}{2}$

   (a) Найдите равновесие.

   (b) Найдите равновесие, если игроку 2 известно t_2. В каком равновесии выигрыш игроков будет выше? Почему?

4. Рассмотрим такую игру:

	I	N
I	$-1,-1$	$1+\theta_1, 0$
N	$0, 1+\theta_2$	$0,0,$

   где θ_1, θ_2 — независимы и равномерно распределены на $[-\epsilon, \epsilon]$. Мы предполагаем, что θ_1 известно только игроку 1, θ_2 — только игроку 2. Найдите равновесие в этой игре. С какой вероятностью игроки будут выбирать действие `I`? Найдите предел этой вероятности при $\epsilon \to 0$.

5. (Гоури, Хольт и Полфри, 2003). Рассмотрим игру «инспекция» с такой матрицей выигрышей:

	L	R
L	$x, -1$	$-1, 1$
R	$-1, 1$	$1, -1$

где $x > 0$.

(a) Найдите равновесие Нэша в смешанных стратегиях для $x = 1$ и $x = 9$. Как вы думаете, будет ли равновесие Нэша давать разумный прогноз поведения игроков при $x > 0$? В частности, будет ли на самом деле вероятность того, что игрок 1 сыграет L, не зависеть от x?

(b) Теперь пусть игрок i, выбирая действие $s_i \in \{\mathtt{L}, \mathtt{R}\}$, получает дополнительный выигрыш ϵ_{s_i}, распределенный согласно (3.58). Найдите равновесие дискретного отклика для нескольких значений $x > 1$ и $\lambda > 0$. Почему теперь вероятность того, что игрок 1 сыграет L будет положительно зависеть от x?

6. В деревне проживают 3 жителя. Для производства общественного блага необходимо участие как минимум двух из них. Если общественное благо произведено, то выигрыш каждого составит 1 единицу. Издержки участия в производстве блага составляют c_i единиц для i-го участника. Пусть c_i независимо и равномерно распределены на $[0, 1]$. Найдите байесово равновесие.

7. (Тироль и Фаденберг 1991, стр. 237–238). Каждая из двух фирм решает, входить ли ей на рынок, или нет. Издержки входа на рынок для фирмы i составляют $c_i \in [0, \infty)$, распределенные согласно функции распределения $F(\cdot)$ с плотностью $f(\cdot)$. Выигрыш каждой фирмы составит $\Pi_m - c_i$ если она одна вошла на рынок, $\Pi_d - c_i$ если на рынке две фирмы, и 0 если фирма не вошла на рынок, где $\Pi_m > \Pi_d > 0$. Найдите байесово равновесие.

8. (Остен-Смит и Бэнкс, 1996). Трибунал из трех судей должен решить, виновен подсудимый ($\omega = G$), или нет ($\omega = I$). До начала процесса каждому судье известно, что подсудимый виновен с вероятностью $\pi > \frac{1}{2}$. В ходе процесса каждый судья получает сигнал относительно виновности подсудимого $\theta_i \in \{I, G\}$. Пусть p — вероятность того, что судья получит верный сигнал. То есть $P(\omega = G|\theta_i = G) = P(\omega = I|\theta_i = I) = p$. После получения сигналов, каждый из судей выносит вердикт v_i: виновен или невиновен. Решение суда определяется правилом простого большинства. Выигрыш каждого из судей равен 1 если в итоге принято правильное решение, и 0 если решение неправильное. Найдите, при каких значениях p и π в равновесии возможно «честное» голосование, когда $v_i(\theta_i = I) = I$ и $v_i(\theta_i = G) = G$.

9. Двое судей должны решить, оправдать (A) или обвинить (C) подсудимого. Каждый судья получает сигнал, виновен подсудимый, или нет. Пусть $\theta_i \in \{I, G\}$ — сигнал, полученный судьей $i = 1, 2$. Пусть p — вероятность того, что подсудимый невиновен. Если подсудимый невиновен, то каждый судья i получает сигнал $t_i = I$ с вероятностью 1. Если подсудимый виновен, то $t_i = I$ с вероятностью $\frac{1}{2}$ и $t_i = G$ с вероятностью $\frac{1}{2}$. Подсудимый будет осужден, только если оба судьи обвинят его. Выигрыш судьи составляет 1 если принято правильное решение (осужден виновный или оправдан невиновный), 0 если оправдан виновный, и $a < 1$ если осужден невиновный. Найдите байесово равновесие.

10. На рынке мобильной телефонной связи присутствуют две фирмы. Предположим, что фирмы конкурируют друг с другом путем объявления цен p_1, p_2 (в рублях за минуту) на свои услуги (см. задачу 21 ко Главе 1). Фирма $i = 1, 2$ дальше обязуется обслужить всех клиентов, желающих приобрести ее услуги по ее цене p_i. Спрос на продукцию фирмы i есть $q_i = a - p_i - bp_j$. Издержки производства нулевые для обеих фирм. Чувствительность

спроса i-й фирмы относительно цены j-й фирмы либо низка, либо высока, то есть b_i равен либо b_L, либо b_H, где $b_H > b_L$. Вероятность того, что $b_i = b_H$, равна θ. Типы фирм — независимые случайные величины. Найдите байесово равновесие.

11. Рассмотрим задачу с конкуренцией Курно на стр. 109-110. Пусть издержки Фирмы 1 равны c_1, а издержки c_2 Фирмы 2 равны c_H с вероятостью θ и c_L с вероятностью $1-\theta$. Пусть с вероятностью π фирма 1 узнает c_2 (при этом фирма 2 не знает, известно ли c_2 фирме 1). Найдите равновесие, которое будет состоять из $q_1(0)$ (выпуск фирмы 1, если ей не известен c_2), $q_1(H)$ (выпуск фирмы 1, если ей известно, что $c_2 = H$), $q_1(L)$ (выпуск фирмы 1, если ей известно, что $c_2 = L$), $q_2(H)$ и $q_2(L)$.

12. (Мулен 1980). Рассмотрим задачу принятия коллективного решения путем опроса на стр. 129). Докажите, что функция общественного выбора $f(t) = \mathrm{med}(t)$ реализуема в доминирующих стратегиях при помощи механизма $g(\theta) = \mathrm{med}(\theta)$, то есть при использовании этого механизма, $\theta_i = t_i$ является слабо доминирующей стратегией для всех i, всех $t_i \in [0,1]$.

13. Пусть $M = \langle A, g\rangle$ — механизм. Пусть $f_M(t) \subset C$ — множество исходов, которые достигаются как равновесие в доминирующих стратегиях при механизме M для данного t. Докажите, что для всех t, $f_M(t)$ содержит не более одного элемента.

14. Докажите *Теорему Мэя* (May, 1950). Пусть $C = \{-1, 1\}$. Пусть для каждого игрока i, мы имеем $T_i = \{-1, 1\}$, где $t_i = -1$ означает, что игрок i предпочитает исход -1 исходу 1. Пусть $f : T \to C$ — функция общественного выбора, обладающая следующими свойствами:

    (a) Симметричность. $f(t_1, \cdots, t_N) = -f(-t_1, \cdots, -t_N)$ для всех $t \in T$.

    (b) Анонимность. $f(t_1, \cdots, t_N) = \bar{f}(\sum_i t_i)$, то есть от перестановки игроков исход не меняется.

    (c) Существует $t \in T$, такое, что $f(t) = 1$, и $t' \in T$, такое, что $f(t') = -1$.

    Докажите, что при нечетном N единственная функция, удовлетворяющая этим свойствам — это *правило большинства*: $f(t)$ равна знаку $\sum_i t_i$, а при четном N таких функций общественного выбора не существует.

15. Докажите, что во всех аукционах с резервационной ценой, в которых покупатель с наибольшей оценкой приобретает товар с вероятностью 1 при условии, что его оценка выше резервационной, доходы покупателей и продавца одинаковы.

16. Рассмотрим аукцион первой цены, в котором участвуют два покупателя. Оценки продаваемого товара для двух покупателей равномерно распределены на $[0,1]$ и $[0,V]$, где $V > 0$.

    (a) Найдите равновесные заявки покупателей.

    (b) Будет ли аукцион первой цены в таком случае эффективен — то есть будет ли товар всегда продан покупателю с наибольшей оценкой?

17. Городская администрация продает с аукциона 2 земельных участка. Участки совершенно одинаковы. На аукционе присутствуют 3 покупателя. Каждый покупатель готов купить ровно один участок. Заявка каждого покупателя — сумма, которую он готов заплатить за участок. Оценка каждого участника аукциона — случайная величина, равномерно распределенная на $[0,1]$. Найдите равновесные заявки, если

(a) Участки продаются покупателям с двумя самыми высокими заявками, по цене третьей заявки.

(b) Участки продаются покупателям с двумя самыми высокими заявками, по цене этих заявок.

18. Рассмотрим игру «война на выживание». Два человека дерутся друг с другом. Каждый человек $i = 1, 2$, до начала драки, решил, какое максимальное время s_i он готов драться. Следовательно, если $s_1 < s_2$, то побеждает второй человек, причем они дерутся в течение времени s_1. Если игрок i — победитель, то он получает приз θ_i, где θ_i — частная информация. Величины θ_i равномерно распределена на $[0, \bar{\theta}]$. В добавок, каждый человек несет издержки, равные времени, которое он дрался. Используя теорему об эквивалентности доходов в аукционе, найдите, как равновесное s_i зависит от θ_i. Что, если игроков $N > 2$?

19. (Клемперер, 2004). В 1991 году Вице-президент США Дэниэл Куэйл предложил реформировать юридическую систему этой страны. Целью заявленной реформы было уменьшить количество средств, которые американцы тратили на судебные разбирательства. По новым правилам, проигравшая гражданский процесс сторона должна была выплатить выигравшей стороне сумму, равную определенному проценту собственных издержек (по старым правилам, после окончания процесса компенсаций не было). Будем моделировать гражданский судебный процесс как аукцион с двумя участниками. Предположим, что победителем процесса является сторона с более высокими издержками b_i. Пусть ценность победы v_i для каждой стороны — случайная величина, равномерно распределенная на $[0, 1]$. Выигрыш победившей стороны равен $v_i - b_i + kb_{-i}$, проигравшей стороны — $-(1 + k)b_i$, где $k > 0$ — процент от судебных издержек, выплачиваемый проигравшей стороной победителю (при старых правилах мы имели $k = 0$).

(a) Скажите, приведут ли новые правила к снижению судебных издержек?

(b) Найдите, чему равны затраты стороны, в зависиомсти от ее оценки $v \in [0, 1]$.

(c) В некоторых европейских странах, проигравшая сторона должна компенсировать часть издержек победителю. Будут ли затраты в таком случае выше или ниже, чем в системе без компенсации?

20. Три деревни решают, строить ли плотину на порядком обмелевшей местной речке. Множество исходов C выглядит так:

a Оставить все как есть. Издержки этого варианта равны $c_a = 0$.

b Построить маленькую плотину, это позволит решить проблемы с водой для орошения полей. Издержки этого варианта равны $c_b = 60$.

c Построить маленькую плотину и шлюз для небольших судов. Это не только решает проблему с орошением, но и позволяет без проблем подниматься вверх по реке на лодке. Издержки этого варианта равны $c_c = 120$.

d Построить большую плотину и поставить мини-электростанцию. Большая плотина в довесок к орошению и судоходству позволяет производить электричество в достаточном количестве для всех трех деревень, но часть ценных полей оказывается затопленными. Издержки этого варианта равны $c_d = 300$.

У каждого игрока существуют два типа: $T_1 = T_2 = T_3 = \{1, 2\}$. Типы игроков равновероятны и распределены независимо. Пусть $R_i(j, t)$ — доход игрока $i = 1, 2, 3$ при реализации варианта $j = a, b, c, d$, если тип этого игрока равен $t = 1, 2$. Нам известно следующее:

(a) Первый вариант приносит нулевой выигрыш всем игрокам.

(b) Первая деревня находится непосредственно около предполагаемой области затопления и ясно, что для них важно нормальное судоходство и пойменные луга. Но непонятно, насколько они готовы променять луга на электричество.

Так что
$$(R_1(a,1), R_1(b,1), R_1(c,1), R_1(d,1)) = (0, 15, 30, 81)$$
и
$$(R_1(a,2), R_1(b,2), R_1(c,2), R_1(d,2)) = (0, 15, 30, 57).$$

(c) Вторая деревня находится далеко от реки и для них очень критично орошение, от дешевого электричества они тоже не откажутся, но вот нужно ли им судоходство?

Таким образом,
$$(R_2(a,1), R_2(b,1), R_2(c,1), R_2(d,1)) = (0, 30, 63, 105)$$
и
$$(R_2(a,2), R_2(b,2), R_2(c,2), R_2(d,2)) = (0, 30, 42, 105).$$

(d) Третья деревня — самая большая и успешная, поэтому всем очевидно, что и судоходство, и дешевое электричество важны для её жителей, но вот готовы ли они в поте лица работать ради орошения полей при том, что у них самих есть озеро под боком – большой вопрос.

Соответственно,
$$(R_3(a,1), R_3(b,1), R_3(c,1), R_3(d,1)) = (0, 30, 45, 135)$$
и
$$(R_3(a,2), R_3(b,2), R_3(c,2), R_3(d,2)) = (0, 12, 45, 135).$$

Предположим, что мы хотим реализовать функцию общественного выбора, максимизирующую суммарных доход деревень, минус издержки:
$$f(t_1, t_2, t_3) = arg \max_{j \in \{a,b,c,d\}} R_1(j, t_1) + R_2(j, t_2) + R_3(j, t_3) - c_j.$$

При определении индивидуальных полезностей деревень от выбора проекта предполагаем, что издержки от строительства распределяются поровну между деревнями.

(a) Определите оптимальный исход для каждого набора типов игроков.

(b) Пусть для принятия решения используется «наивный» механизм: то есть каждую деревню спрашивают, во сколько они ценят каждый исход (или какой из двух типов истинный), после чего реализуется заданная выше функция общественного выбора. Выгодно ли хоть какой-то из деревень сообщать неправду если все остальные сообщают правду?

(c) Пусть выбор проекта осуществляется в соответствии с механизмом Кларка (издержки по-прежнему делятся поровну):

  i. Найдите дополнительные платежи для каждого набора типов игроков.
  ii. Найдите вероятность реализации каждого из 4-х исходов.
  iii. Все ли деревни захотят участвовать в таком механизме?

Литература

[1] Simon P. Anderson, Jacob K. Goeree and Charles A. Holt. 2001. Minimum-Effort Coordination Games: Stochastic Potential and Logit Equilibrium. *Games and Economic Behavior* 34(2): 177–199

[2] Austen-Smith, David, and Jeffrey Banks. 1996. Information Aggregetion, Rationality, and the Condorcet Jury Theorem. *American Political Science Review* 90: 34–45

[3] Binmore, Kenneth. *Fun and Games: A Text of Game Theory.* D.C. Hearth. 1992.

[4] Steven J. Brams and Alan D. Taylor. *The Win-Win Solution: Guaranteeing Fair Shares to Everybody.* W.W. Norton. New York 2000

[5] Jeremy Bulow and Paul Klemperer. 1996. Auctions Versus Negotiations. *The American Economic Review* 86(1): 180–194

[6] Chatterjee, K., and W. Samuelson. 1983. Bargaining under incomplete information. *Operations Research* 31: 835–851

[7] Fudenberg, D., and J. Tirole. 1991. *Game Theory.* Cambridge, Mass.:MIT Press

[8] Benny Geys. 2006. Explaining voter turnout: A review of aggregate-level research. *Electoral studies* 25(4): 637–663

[9] Gibbons, Robert. 1992. *Game Theory for Applied Economists.* Princeton University Press

[10] Jacob K. Goeree and Charles A. Holt. 2005. An experimental study of costly coordination. *Games and Economic Behavior* 51(2): 349–364

[11] Jacob K. Goeree, Charles A. Holt, and Thomas Palfrey. 2003. Risk averse behavior in asymmetric matching pennies game. *Game and Economic Behavior*, 45, 97–113

[12] Harsanyi, J. 1967-1968. Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players. *Management Science* 14: 159–182, 320–334, 486–502

[13] Harsanyi, J. 1973. Games with randomly disturbed payoffs: A new rationale for mixed-strategy equilibrium points. *International Journal of Game Theory* 2(1): 1–23

[14] Vijay Krishna. 2009. *Auction theory. Second edition.* Academic Press

[15] Klemperer, Paul. 1999. Auction Theory: A Guide to Literature. *Journal of Economic Surveys* 13(3): 227–286

[16] Klemperer, Paul. 2004. *Auctions: Theory and Practice.* Princeton University Press

[17] Maskin, E. 1977. Nash equilibrium and welfare optimality. Mimeo, MIT

[18] Maskin, Erik. 1985. “The Theory of Implementation in Nash Equilibrium: A Survey” pp. 177–204 in *Social Goals and Social Organization* (L. Hurwitz, D. Schmeidler, and H. Sonnenschein, eds.) Cambridge: Cambridge University Press

[19] McFadden, Daniel. 1974. Conditional Logit Analysis of Qualitative Choice Behavior. In P. Zarembeka (ed.) *Frontiers in Econometrics,* New York: Academic Press.

[20] McKelvey Richard D. and Palfrey Thomas R. 1995. Quantal Response Equilibria for Normal Form Games. *Games and Economic Behavior* 10(1): 6–38

[21] Paul Milgrom. 2004. *Putting Auction THeory to Work.* Cambridge University Press.

[22] Moulin, H. 1980. On strategy-proofness and single-peakedness. *Public Choice* 35(4): 437–455

[23] Myerson, R. 1979. Incentive Compatibility and the Bargaining Problem. *Econometrica* 56: 1191–1220

[24] Myerson, R. 1981. Optimal Auction Design. *Mathematics of Operations Research* 6: 58–73

[25] Osborne, Martin. 2009. *Introduction to Game Theory: International Edition,* New York: Oxford University Press.

[26] Owen, Guillermo, and Bernard Grofman. 1984. To vote or not to vote: The paradox of nonvoting. *Public Choice* 42(3): 311–325

[27] Thomas R. Palfrey and Howard Rosenthal. 1983. A strategic calculus of voting. *Public Choice* 41(1): 7–53

[28] Thomas R. Palfrey and Howard Rosenthal.1985. Voter Participation and Strategic Uncertainty. *The American Political Science Review* 79(1): 62–78

[29] Peters, Hans. 2008. *Game Theory: A Multi-Lavel Approach.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg

[30] Riley, John F. and William F. Samuelson. 1981. Optimal Auctions. *The American Economic Review* 71(3): 381–392

[31] Vickrey, William. 1961. Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders. *The Journal of Finance* 16(1): 8–37

[32] Я.Р. Магнус, П.К. Катышев и А.А. Пересецкий. Эконометрика. Начальный курс: Учебник. М.: Дело, 2005

[33] Д. Мюллер. Общественный выбор III. М.: ГУ ВШЭ, 2007

[34] Печерский С.А. и А.А. Беляева. Теория игр для экономистов: Вводный курс. Учебное пособие. — СПб.: Изд-Во Европейского Ун-та в С.-Петербурге, 2001

Глава 4

Динамические игры с неполной информацией

Представьте себя в роли сотрудника крупной компании, который должен принять решение, взять или не взять на работу молодого университетского выпускника. Вы провели собеседование; соискатель вам понравился, однако вы до конца не можете понять, насколько хорошо он сможет подойти вашей компании. Возможно, этот молодой человек трудолюбив и готов работать ночи напролет; в таком случае, он со временем сможет принести компании солидную прибыль. Но он может оказаться и лентяем, не желающим ответственно подходить к выполнению своих обязанностей; в таком случае он будет обузой. К тому моменту, когда выясниться, насколько этот человек подходит вашей компании, будет потеряно много времени. Итак, правильным решением будет принять соискателя на работу, если он трудолюбив, и не принимать, если он — лентяй. К сожалению, характер соискателя вам неизвестен; вы не можете выяснить этот вопрос за то короткое время, которое вам отпущено на собеседование.

К счастью вам известно, что соискатель закончил очень престижный ВУЗ. Вы знаете, что этот ВУЗ не позволяет «халявы» и закончить его можно, только если студент потратит очень много времени на учебу, отказывая себе в вечеринках, гулянках и прочих различных соблазнах, которые жизнь ставит перед людьми в дни их юности. Вы знаете, что ленивый студент не станет поступать в такой ВУЗ *даже если* ему известно, что диплом этого ВУЗа необходим для того, чтобы получить хорошую работу (то есть, например, такую работу, какую предлагаете вы). Ленивый студент, учась в таком ВУЗе, будет нести слишком высокие издержки, связанные с тем, что ему придется все время заставлять себя учиться. В то же время трудолюбивый студент может учиться, учиться и учиться, не испытывая при этом слишком большего дискомфорта. Для такого человека издержки учебы в приличном ВУЗе не слишком высоки; возможность получить хорошую работу после окончания оправдывают эти издержки. Получается так, что в данном престижном ВУЗе учатся только самые талантливые и трудолюбивые студенты; мало того, наличие диплома этого ВУЗа *сигнализирует* стороннему наблюдателю ненаблюдаемую частную информацию относительно обладателя диплома — его трудолюбие. Еще раз посмотрев резюме, вы принимаете решение взять молодого человека на работу.

Приведенный выше пример является динамической игрой, поскольку студент, выбирая ВУЗ для поступления, делает это раньше, чем работодатель рашает, принять его на работу, или нет. Однако это также и игра с неполной информацией: тип студента (трудолюбивый или ленивый) неизвестен работодателю. Многие другие игровые взаимодействия также обладают этими атрибутами. Инвесторам и обывателям может быть неизвестно, насколько власти (и, в особенности, центральный банк страны) действительно заинтересованы в контроле над инфляцией. Лоббист знает больше о последствиях продвигаемой им политики, чем парламентарий, который должен принять решение, продвигать ли предлагаемые лоббистом меры в обмен на его поддержку. Избиратели не знают, действительно ли кандидат в президенты настолько решительно настроен на больбу с коррупцией. Рассмотрение игровых моделей таких задач потребует от нас новых аналитических методов.

4.1 Определение равновесий и их существование

При анализе динамической игры с неполной информацией мы сталкиваемся с проблемой, как правильно определить равновесие. В динамических играх с полной информацией мы были вынуждены ввести понятие совершенного по подыграм равновесия, так как нахождение всех «простых» равновесий Нэша в динамической игре иногда давало нам слишком много решений, некоторые из которых были для нас неприемлемы из-за того, что предполагали наличие заведомо невыполнимых угроз со стороны некоторых игроков. Однако в играх с неполной информацией совершенное по подыграм равновесие нас уже не устраивает. Рассмотрим игру на рисунке 4.1:

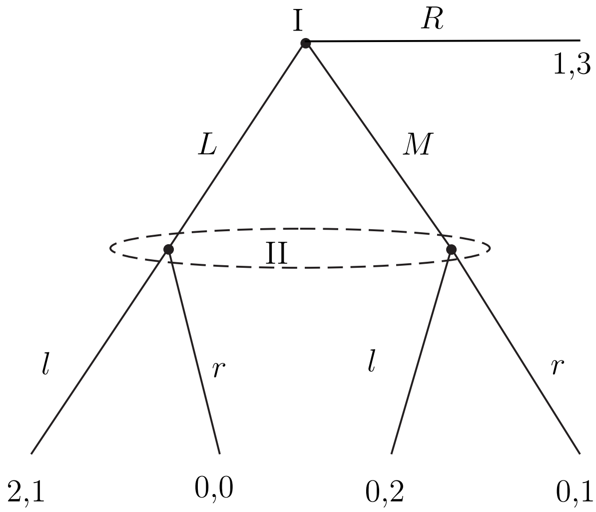


Рис. 4.1: Равновесие (R, r) не является рациональным.

Формально, в этой игре всего одна подыгра, соответствующая всему дереву игры. Таким образом, получается, что любое равновесие в этой игре будет совершенным по подыграм, в том числе и равновесие (R, r). Однако очевидно, что это равновесие неадекватно. Почему игрок II сделает ход r в своем информационном множестве? Конечно, это информационное множество лежит вне траектории игры, которая заканчивается на первом же ходе игрока I. Однако будет ли игрок II делать ход r если по какой-то причине игрок I не сыграет R? Пусть μ — вероятность того, что игрок I сделал ход L при условии того, что он сделал либо ход L, либо ход M. Тогда условное матожидание полезности игрока II при ходе l будет равна $\mu + 2(1 - \mu)$, при ходе l — $1 - \mu$. Выходит, что при любом $\mu \in [0, 1]$, игроку II выгодно делать ход l в том случае, если игрок I все-таки не сыграл R. Равновесие (R, r) не соответствует критерию, очень похожему на критерий совершенства по подыграм. Обещая играть r, игрок II фактически выставляет игроку I невыполнимую угрозу. При этом формально равновесие является совершенным по подыграм; очевидно, что нам необходимо более сильное условие равновесности для того, чтобы отсечь такие нежелательные «равновесия».

Вот еще один пример игры, в которой существуют нехорошие (с точки зрения интуитивному соответствию рациональности игроков), но, формально, совершенные по подыграм равновесия. В игре «ослик Зелтена» (рисунок 4.2) есть нежелательное равновесие (D, a, L). Действительно, если игрок I отклонится от равновесной стратегии и сделает ход A, то ход a перестанет быть оптимальным для игрока II. Равновесие (A, a, R) отвечает нашему критерию. Игра проходит через все информационные множества, в каждом из которых соответствующий игрок делает оптимальный для себя ход, при данных ходах остальных игроков.

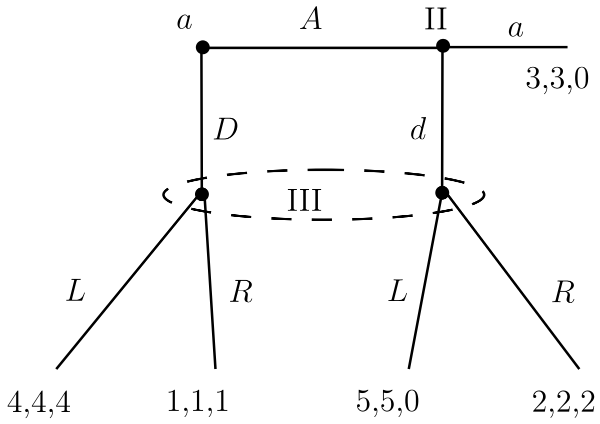


Рис. 4.2: Ослик Зелтена

Для того чтобы анализировать динамические игры с неполной информацией, нам необходимо решить три теоретические задачи. Во-первых необходимо сформулировать концепцию равновесия, более строгую, чем совершенное по подыграм равновесие Нэша. Это равновесие должно исключать нерациональное поведение игроков в информационных множествах, лежащих вне траектории игры (как, например, (R, r) в игре на рисунке 4.1). Во-вторых необходимо выяснить вопрос существования такого равновесия для какого-то максимально широкого класса игр — например, для конечных игр. И наконец нужно получить удобный способ проверки равновесий на соответствие этому критерию.

В этом разделе мы решим все три обозначенные задачи. Сначала мы сформулируем понятие сильного и слабого секвенциального равновесия. Далее мы докажем существование сильного секвенциального равновесия, введя еще одно — более строгое — понятие совершенного равновесия, и доказав его сущестование[1]. Наконец, мы введем определение важного подкласса игр — игр с наблюдаемыми действиями — и удобного, с точки зрения анализа, понятия совершенного баейсового равновесия для этих игр, и сформулируем условия его эквивалентности секвенциального равновесия.

Почему нам необходимо проделать все эти действия? Очень многие задачи в экономике и политической науке можно свести к играм с наблюдаемыми действиями. Проделанная работа даст нам возможность анализировать эти задачи, используя удобное в работе определение совершенного байесового равновесия. При этом мы будем уверены, что, с одной стороны, такое равновесие всегда существует, и, с другой стороны, определение такого равновесия достаточно строгое для того, чтобы исключить возможность нерационального поведения.

4.1.1 Сильное и слабое секвенциальное равновесие

Каким формальным критериям не удовлетворяют примеры на рисунке 4.1 и 4.2? Дадим определение.

Определение 37 Пусть Γ — игра в развернутой форме, h — информационное множество в этой игре. Назовем *верой* μ_h распределение вероятностей на вершинах, входящих в h. Обозначим за $\mu = (\mu_h)$ *веру* (или *систему вер*) в игре Γ — распределение вероятностей для каждого информационного множества.

Вера игрока в информационном множестве отражает его представление о том, в какой именно вершие множества он в данный момент находится. По возможности, она должна отражать

[1]Определение секвенциального равновесия и доказательство большинства связанных с ним утверждений принадлежит Крепсу и Уилсону (1982). Определение совершенного байесового равновесия в достаточно общей форме можно найти в работе Тироля и Фаденберга (1991).

его представления о стратегиях других игроков.

Определение 38 Пусть Γ — игра в развернутой форме, σ — профиль поведенческих стратегий в этой игре. Пусть μ — система вер. Будем говорить, что μ *слабо согласована* с σ если для всех информационных множеств h, таких, что при σ существует положительная вероятность попадания игры в h, для всех вершин $a \in h$, верно следующее:

$$\mu_h(a) = \frac{P(a|\sigma)}{P(h|\sigma)}, \tag{4.1}$$

где $P(a|\sigma)$ — вероятность того, что траектория игры пройдет через вершину a, $P(h|\sigma) = \sum_{b\in h} P(b|\sigma)$ — вероятность того, что траектория игры пройдет через информационное множество h.

Если система вер согласована с поведенческой стратегией, то для всех информационных множеств, через которые траектория игры проходит с положительной вероятностью, вера вычисляется по правилу Байеса. На рисунке 4.3 показан пример игры в развернутой форме и поведенческой стратегии.

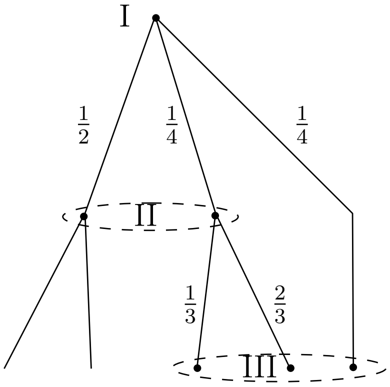


Рис. 4.3: Пример игры и поведенческих стратегий.

Построим систему вер, согласованную с этой стратегией. Для информационного множества игрока II, вера будет

$$\mu_{II} = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}, \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right). \tag{4.2}$$

Для информационного множества игрока III мы имеем

$$\mu_{III} = \left(\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}, \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}, \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}\right) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right). \tag{4.3}$$

В каждом информационном множестве, оптимальное действие игрока должно зависить от веры в этом информационном множестве. Пусть σ — профиль поведенческих стратегий, μ — система вер. Пусть h — информационное множество, в котором игрок i делает ход. Определим за $u_{i,h}(\sigma|\mu_h)$ ожидаемый выигрыш игрока i при условии, что игра достигла множества h. Будем говорить, что σ_i *секвенциально рациональна* относительно μ, если для всех σ_i', $u_{i,h}(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_{i,h}(\sigma_i', \sigma_{-i})$. Можно дать следующее определение равновесия:

Определение 39 *Пара (σ, μ) является слабо секвенциальным равновесием, если σ секвенциально рациональна относительно μ, и μ слабо согласована с σ.*

В примере на рисунке 4.1, профиль стратегий (R, r) не согласован ни с какой системой вер: при любом μ, игрок II должен выбрать действие l. Однако определение слабой согласованности вер ничего не говорит про те случаи, когда одно из информационных множеств лежит вне траектории игры. Такое может произойти только если в некоторых информационных множествах какие-то действия играются с нулевой вероятностью; соответственно, потребуется сформулировать более жесткий критерий в отношении системы вер, чем слабая согласованность.

Назовем σ *вполне смешанным* профилем стратегий, если в каждом информационном множестве каждое действие реализуется с положительной вероятностью. Для такого σ, уравнение (4.1) определяет веру для каждого информационного множества. Дадим такое определение.

Определение 40 Пусть σ — профиль поведенческих стратегий. Будем говорить, что система вер μ является *сильно согласованной* с σ, если существует последовательность вполне смешанных профилей $\sigma^n \to \sigma$, таких, что $\mu^n \to \mu$, где μ^k — система вер, слабо согласованная с профилем стратегий σ^k.

Сильная согласованность требует, чтобы вера являлась пределом последовательности вер, полученных из сходящихся к стратегии σ профилей стратегий.

Дадим определение, аналогичное Определению 39:

Определение 41 Пара (σ, μ) является *сильно секвенциальным равновесием*, если σ секвенциально рациональна относительно μ, и μ сильно согласована с σ.

На рисунке 4.4 приведен пример игры, для которой существует равновесие, которое является слабо секвенциальным, однако условие сильной секвенциальности не выполняется.

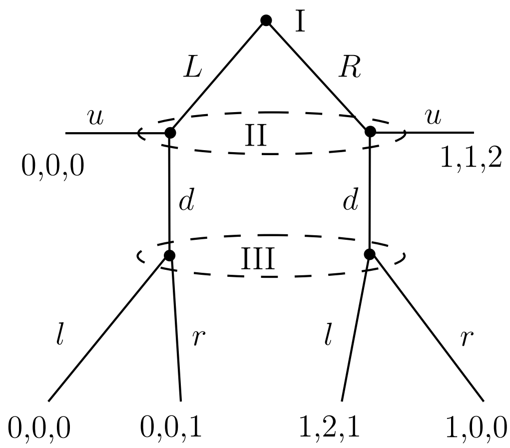


Рис. 4.4: Пример игры, для которой слабо секвенциальное равновесие не является сильно секвенциальным.

Профиль стратегий (R, u, r) является слабо секвенциальным равновесием в совокупности с системой вер $\mu_{II} = 0$ и $\mu_{III} > \frac{1}{2}$ (вера указывает вероятность оказаться в левой вершине информационного множества). Действительно, информационное множество игрока III лежит вне траектории игры, так что мы можем придумать любую веру для этого множества.

Почему слабо секвенциальное равновесие в этой игре плохо соотносится с предположением о рациональности игроков? Как говорилось выше, игрок III выберет действие r только если $\mu_{III} > \frac{1}{2}$. Если первый игрок выбирает R, а второй — u, то вероятность попадания в информационное множество III равна нулю, так что по правилу Байеса в качестве веры в этом информационном множестве мы можем выбрать любое распределение вероятностей на его вершинах. Однако какова вероятность оказаться в левой вершине множества III *при условии, что один из игроков I и II отклонится от заданной стратегии*? Для того, чтобы мы оказались в правой вершине множества III, достаточно, чтобы дрогнула рука у игрока II, и он сыграл d вместо u. Однако для того, чтобы мы оказались в левой вершине, необходимо, чтобы и игрок I, и игрок II отклонились от заданных стратегий. Если вероятности того, что каждый из первых двух игроков отклонится, малы, и если отклонения независимы друг от друга, то скорее всего мы окажемся в правой вершине, то есть мы должны иметь $\mu_{III} = 0$.

Формально, пусть $(\sigma_{1k}, \sigma_{2k}, \sigma_{3k})_{k=1}^{\infty}$ — последовательность поведенческих стратегий, сходящаяся к (R, u, r). То есть $\sigma_{1k} \to 0$, $\sigma_{2k} \to 0$, и $\sigma_{3k} \to 1$, причем $\sigma_{ik} \in (0, 1)$ для $i = 1, 2, 3$. По правилу Байеса, мы имеем

$$\mu_{IIIk} = \frac{\sigma_{2k}\sigma_{1k}}{\sigma_{2k}\sigma_{1k} + \sigma_{2k}(1 - \sigma_{1k})} = \sigma_{1k} \to 0. \tag{4.4}$$

Получается, что для некоторого $\bar{k} > 0$, мы будем иметь $\mu_{IIIk} < \frac{1}{2}$ для всех $k > \bar{k}$, то есть действие r игрока III не будет являться секвенциально рациональным. Однако существует равновесие (R, d, l), являющееся сильно секвенциальным: в этом равновесии, игра проходит через все информационный множества.

4.1.2 Совершенное (относительно «дрожащей руки») равновесие

Мы сформулировали понятие секвенциального равновесия. Оно обобщает понятие совершенства по подыграм для динамических игр с неполной информацией. Однако пока не был затронут вопрос существования такого равновесия. Для того, чтобы дать на него ответ, нам придется ввести еще одно определение равновесия, более строгое, чем секвенциальное равновесие, и доказать его существование.

Потребуем от равновесия, чтобы стратегия каждого игрока была наилучшим ответом не только на профиль стратегий остальных игроков, но и на какой-то слегка видоизмененный профиль стратегий: игрок не должен отклоняться от своей стратегии, если у других игроков немного «задрожали руки». Вот соответствующее определение равновесия, выдвинутое Зелтеном (1975):

Определение 42 Пусть G — игра в нормальной форме. Пусть σ — профиль стратегий, причем существует последовательность σ^n вполне смешанных профилей стратегий, таких, что

1. $\sigma^n \to \sigma$,
2. Для всех k, для всех i, σ_i является наилучшим ответом на σ_{-i}^k.

Будем называть σ *совершенным* (или *совершенным относительно дрожащей руки*) равновесием.

Верно следующее утверждение:

Теорема 16 Пусть G — конечная игра в нормальной форме. Тогда в этой игре существует равновесие, совершенное относительно дрожащей руки.

Доказательство этого утверждения достаточно длинное; оно потребует введения альтернативных определений совершенного равновесия и доказательства эквивалентности между ними. Полностью текст доказательства прыиеден в приложении на стр. 186-188.

В приеденной ниже координационной игре каждое из трех равновесий является совершенным:

		II	
		A	B
I	A	1,1	0,0
	B	0,0	1,1

Пусть p и q — вероятности сыграть $\mathtt{A}$ для игроков I и II. Возьмем равновесие $(p, q) = (0, 0)$. Тогда последовательность $\sigma^k = (\epsilon_k, \epsilon_k)$ при $\epsilon \to 0$ удовлетворяет условию Определения 42. Аналогично, $\sigma^k = (1 - \epsilon_k, 1 - \epsilon_k)$ удовлетворяет тому же условию. Для равновесия $(p, q) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, существует единственная такая последовательность $\sigma_k = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Вовсе не обязательно, чтобы σ^* являлся бы наилучшим ответом на любую последовательность $\sigma^k \to \sigma^*$. Если мы потребует этого, то равновесия, скоре всего, не будет существовать, так как это, очевидно, потребует наличия равновесия в доминирующих стратегиях.

Однако в следующем примере не все равновесия являются совершенными:

		II	
		A	B
I	A	10,0	1,1
	B	10,10	0,10

Здесь есть два равновесия: $(\mathtt{A}, \mathtt{B})$ и $(\mathtt{B}, \mathtt{A})$. Второе из них предполагает, что игрок II реализует слабо доминируемую стратегию $\mathtt{A}$. Оно не является совершенным относительно дрожащей руки, так как если игрок I реализует $\mathtt{A}$ с положительной вероятностью, то игроку II выгодно отклониться и сыграть $\mathtt{B}$.

Вообще, слабо доминируемая стратегия не может играться в совершенном относительно дрожащей руки равновесии. Действительно, пусть S_i — множество чистых стратегий игрока i, $s_i \in S_i$ — слабо доминируемая стратегия, которую мы предполагаем равновесной, $s'_i \in S_i$ слабо доминирует s_i, то есть для всех $s_{-i} \in S_{-i}$ мы имеем $u_i(s_i, s_{-i}) \leq u_i(s'_i, s_{-i})$. Пусть $u_i(s_i, s'_{-i}) < u_i(s'_i, s'_{-i})$ для какого-то s_{-i}. Стратегия s_i может быть наилучшим ответом на какой-то смешанный профиль стратегий σ_{-i} только если s'_{-i} играется с нулевой вероятностью.

Рассмотрим игру Γ в развернутой форме. Пусть σ^* — совершенное равновесие.

Теорема 17 *Пусть Γ — игра в развернутой форме, G — игра в нормальной форме, соответствующая ей. Пусть σ^* — совершенное равновесие в G. Тогда существует вера μ, такая, что (μ, σ) — сильно секвенциальное равновесие в Γ.*

Таким образом, любое совершенное равновесие является сильно секвенциальным. Обратное неверно: существуют случаи, когда равновесие является сильно секвенциальным, но не совершенным.

Как следствие Теорем 16 и 17, мы доказали еще одну:

Теорема 18 *Пусть Γ — игра с полной памятью. Тогда в ней существует сильно секвенциальное равновесие.*

4.1.3 Игры с наблюдаемыми действиями

Рассмотрим такой класс игр с несовершенной информацией. Игроки ходят по очереди, причем все ходы всех игроков наблюдаемы; при этом частной информацией является только тип игрока, определяющий его предпочтения относительно различных исходов игры. В такой игре порядок ходов определяется так же, как и в игре с совершенной информацией, причем множество ходов, доступных игроку на каждом этапе игры, не зависит от его типа. Предположм также, что начальное распределение вероятностей P одинаково для всех игроков; кроме того, типы игроков независимы.

Формально, мы можем дать такое определение:

Определение 43 Пусть Γ — игра в развернутой форме с совершенной информацией, $T = T_i \times \cdots \times T_N$ — множество типов игроков, $P = P_1 \times \cdots \times P_N$ — распределение вероятностей на T, u_i — функция полезностей игрока i, определяющая его выигрыш в зависимости от конечной вершины и его типа t_i, $u = (u_i)_{i=1}^N$. Тогда $\langle \Gamma, T, P, u \rangle$ — *игра с наблюдаемыми действиями.*

Чему соответствуют вершины в информационных множествах в такой игре? Пусть в информационном множестве h делает ход игрок i. Ему известна предыстория игры, но неизвыестны типы остальных игроков. Соответственно, каждая вершина информационного множества h соответствует множеству остальных игроков T_{-i}. Вера μ_h в информационном множестве h — это распределение вероятностей на множестве игроков T_{-i}. Пусть μ_{hj} — распределение вероятностей на множестве T_j типов j-го игрока в информационном множестве h.

Следуя Фаденбергу и Тиролю (1991), дадим такое определение.

Определение 44 Пусть (μ, σ) — система вер и поведенческая стратегия для игры с наблюдаемыми действиями. Назовем систему вер μ *разумной* относительно σ если выполняется следующее:

1. μ слабо согласована с σ.
2. Пусть h и h' — информационные множества, такие, что в множество h' можно попасть одним ходом из множества h. Пусть игрок k не делает ход ни в h, ни в h'. Тогда $\mu_{hi} = \mu_{h'i}$.
3. Пусть h — информационное множество, в котором делает ход игрок i. Тогда $\mu_h = \prod_{j \neq i} \mu_{hj}$. Если o — начальная вершина, i — игрок, делающий первых ход, то $\mu_o = P_{-i}$.

Третье требование означает, что в каждом информационном множестве, веры игрока i относительно типов остальных игроков являются независимыми. В совокупности со вторым требованием, это означает, что пока какой-то игрок не делает хода, остальные игроки не узнают про него ничего нового; таким образом, делая ход, игрок может менять представления игроков только о своем типе, но не о типах остальных игроков.

Определение 45 Пусть (σ, μ) — профиль поведенческих стратегий и система вер, такие, что μ является разумной относительно σ, а σ — секвенциально рациональна относительно μ. Тогде (σ, μ) — *совершенное байесово равновесие.*

Байесово равновесие — намного более удобное для работы опрелеление, чем сильное секвенциальное равновесие. Доказать, что система вер μ является разумной относительно σ гораздо легче, чем доказать сильную согласованность, так как нам не требуется доказывать что-то относительно сходящихся последовательностей. С другой стороны, сильное секвенциальное равновесие отвечает довольно строгому критерию реализма: если равновесие является сильно секвенциальным, то оно не будет «паталогическим» — как, например, слабо секвенциальное равновесие на (R, u, r) рисунке 4.4. Поэтому представляется интересным такой вопрос: в каком случае мы, найдя совершенное байесово равновесие, можем быть уверены, что это равновесие является сильно секвенциальным?

Тироль и Фаденберг (1991) доказали такой результат:

Теорема 19 Пусть Γ — игра с наблюдаемыми действиями, (σ, μ) — совершенное байесово равновесие. Тогда (σ, μ) — сильно секвенциальное равновесие, если в игре Γ не более двух ходов, либо у каждого игрока есть не более двух типов.

4.2 Сигнальные игры

На окраине рабочего квартала большего города есть заведение, в котором можно вкусно поесть и выпить. За столиком у окна сидит хулиган — наглый и невоспитанный молодой человек, любящий приставать к проходящим мимо него людям. В заведение заходит человек средних лет

Рис. 4.5: Диаграмма множеств равновесий в динамических играх.

и направляется к барной стойке. Хулиган смотрит на него, пытаясь понять, какой характер у пришельца, и какой жизненный опыт у него за плечами. Если он слабак — интеллигент, выросший в центре города, в тепличных условиях — то хулиган с удовольствием нахамит ему и попытается с ним подраться. Но что, если пришелец крутой и сам вырос на рабочих окраинах? В таком случае хулинган знает, что лучше с ним не связываться: можно получить сдачи. Вошедший подходит к барной стойке. Хулиган знает, что крутой парень с рабочих окраин в такой ситуации обычно заказывает бутылку пива, а интеллигент из центра города — чашку кофе. Вошедший заказал пиво. Означает ли это, что вошедший — крутой парень, с которым лучше не связываться? Или, может быть, это — интеллигент, который заказал нелюбимый напиток для того, чтобы походить на крутого и ввести хулигана в заблуждение?

4.2.1 Определение

Данная ситуация является частным случаем игры с наблюдаемыми действиями, с двумя игроками, последовательно делающими ходы. Она соответствует вот такому определению:

Определение 46 *Сигнальная игра это игра с наблюдаемыми действиями, в которой*

1. *Два игрока — ведущий S и получатель R,*

2. *У получателя один тип, у ведущего — больше одного,*

3. *Первый ход делает ведущий, второй ход — получатель.*

Действительно, ведущий — тип которого неизвестен — может сигнализировать свой тип второму игроку, выбирая какой-то наблюдаемое действие. Как, например, напиток, выбранный вошедшим в кафе посетитетем, сигнализирует хулигану его тип, или как наличие или ответствие престижного диплома у соискателя может на самом деле давать сигнал относительно его трудолюбия.

Мы знаем, что наличие только двух ходов в игре с наблюдаемыми действиями — достаточное условие для того, чтобы совершенное байесово равновесие было секвенциальным. Переформулируем понятие равновесия для сигнальной игры. Обозначим за T все типы игрока S. Пусть M множество действий (или сигналов) для этого игрока. Пусть $m : T \to M$ — стратегия игрока S, предписывающее определенное действие в зависимости от типа.

У игрока R будет $\#\{M\}$ информационных множеств, по одному для каждого возможного сигнала, который может послать игрок S. Пусть $\mu(t_i|m_j)$ — вера игрока R относительно того, что игрок S имеет тип $t_i \in T$ при условии, что его первый ход был $m_j \in M$. Обозначим за A множество действий игрока R. Пусть $a : M \to A$ — стратегия игрока R, предписывающее действие в зависимости от сигнала, испущенного игроком S. Обозначим за $u_S(t, m, a)$ и $u_R(t, m, a)$ полезности двух игроков.

Байесово равновесие, данное в Определении 45, можно переформулировать следующим образом.

Определение 47 Совершенное байесово равновесие в чистых стратегиях[2] в сигнальной игре есть набор $(m^*(\cdot), a^*(\cdot), \mu(\cdot|\cdot))$, такой, что

1. Для любого $m \in M$, $a^*(m)$ максимизирует ожидаемый выигрыш игрока R при системе вер $\mu(\cdot|\cdot)$, то есть для всех $a' \in A$,
$$\sum_{t \in T} \mu(t|m) u_R(t, m, a^*(m)) \geq \sum_{t \in T} \mu(t|m) u_R(t, m, a'). \tag{4.5}$$

2. Для всех $t \in T$, действие игрока S $m^*(t)$ максимизирует его выигрыш при условии, что игрок R будет играть равновесную стратегию $a^*(\cdot)$:
$$u_S(t, m^*(t), a^*(m^*(t))) \geq u_S(t, m', a^*(m')) \tag{4.6}$$
для всех $m' \in M$.

3. Для всех $m \in M$, таких, что если существует $t \in T$, такой, что $m^*(t) = m$, вера игрока R после хода m определяется по правилу Байеса:
$$\mu(t|m) = \frac{p(t)}{\sum_{t' \in T} p(t')}, \tag{4.7}$$
где $p(t)$ — вероятность, что игрок S имеет тип $t \in T$.

Первые два требования в этом равновесии — секвенциальная рациональность игроков. Третье требование — согласованность системы вер со стратегиями игроков.

4.2.2 Простой пример сигнальной игры.

Вернемся к игре, описанной в начале данного раздела. Хулиган является игроком R, пришелец — игроком S. Хулиган обладает единственным типом, у пришельца два типа — 1 (крутой, с вероятностью p) и 2 (слабак, с вероятностью $1-p$). Базовая игра состоит из двух этапов: сначала пришедший решает, какой напиток ему заказать — H (пиво) или L (кофе), затем хулиган решает, драться с пришедшим, или нет (h или l). Выигрыш пришедшего (вне зависимости от его типа) равен 1 если ему удается избежать драки и 0 если ему пришлось драться. Дополнительно, он несет издержки $c > 0$ если ему приходится пить нелюбимый напиток (кофе для крутого и пиво для слабака). Хулиган получает выигрыш 1 если он принимает правильное, со своей точки зрения, решение (драться со слабаком и не драться с крутым) и 0 если принятое решение оказалось неправильным. Дерево этой игры изображено на рисунке 4.6.

Пусть $m(1), m(2) \in \{H, L\}$ — ходы первого игрока в зависимости от его типа. Пусть $a(H), a(L) \in \{h, l\}$ — ходы второго игрока в зависимости от того, каким был ход первого игрока. Найдем совершенное байесово равновесие.

1. Для нахождения равновесия в этой игре мы должны ввести веры $\mu_H, \mu_L \in [0, 1]$. Первая из этих двух величин — вероятность, с которой вошедший имеет тип 1 в том случае, если он купил кофе. Вторая величина — вероятность, с которой вошедший имеет тип 1 в том случае, если он купил пиво. Система вер является согласованной со стратегией игрока S, если она удовлетворяет следующим условиям:

[2] Определить совершенное байесово равновесие в смешанных стратегиях почти так же просто; потребуется только немного по-другому определить понятие согласованности системы вер, что мы и сделаем в одном из последующих примеров.

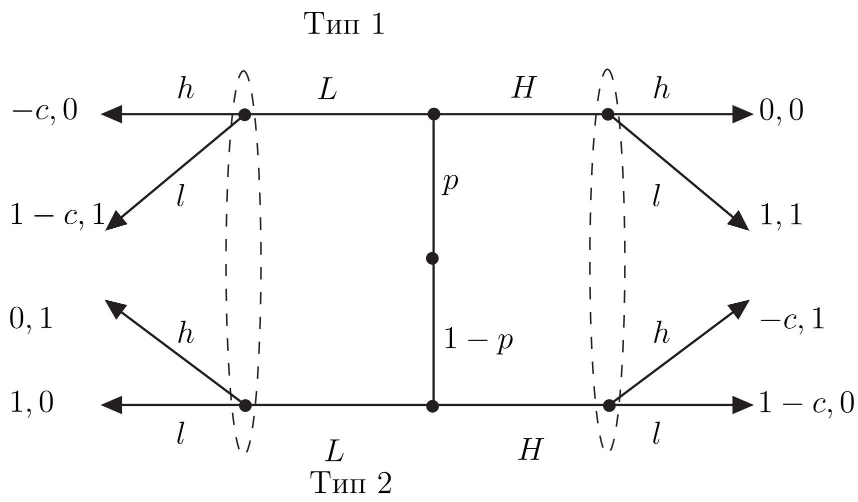


Рис. 4.6: Игра «пиво или кофе?»

(a) $\mu_H = p, \mu_L \in [0,1]$ если $m(1) = H, m(2) = H$,

(b) $\mu_H = 1, \mu_L = 0$ если $m(1) = H, m(2) = L$

(c) $\mu_H = 0, \mu_L = 1$ если $m(1) = L, m(2) = H$,

(d) $\mu_H \in [0,1], \mu_L = p$ если $m(1) = L, m(2) = L$.

2. Найдем, каким условиям удовлетворяет стратегия игрока R, если она рациональна относительно системы вер (μ_H, μ_L). Ожидаемый выигрыш хулигана *в информационном множестве* H — то есть если ход игрока S был H — при собственном ходе h равен

$$E(u_R(\cdot, H, h)) = \mu_H \cdot u_R(1, H, h) + (1 - \mu_H) \cdot u_R(2, H, h) = 1 - \mu_H,$$

а при собственном ходе l —

$$E(u_R(\cdot, H, l)) = \mu_H \cdot u_R(1, H, l) + (1 - \mu_H) \cdot u_R(2, H, l) = \mu_H.$$

Аналогично получим выигрыши в информационном множестве L.

Следовательно, для $m \in \{H, L\}$ мы должны иметь

$$a(m) = \begin{cases} h, & \mu_m < \frac{1}{2} \\ \{h, l\}, & \mu_m = \frac{1}{2} \\ l, & \mu_m > \frac{1}{2} \end{cases} \tag{4.8}$$

3. Каким должна быть стратегия игрока S, в зависимости от стратегии игрока R? При $c < 1$ мы получим

$$(m(1), m(2)) = \begin{cases} (H, L), & a(H) = h, a(L) = h \\ (L, L), & a(H) = h, a(L) = l \\ (H, H), & a(H) = l, a(L) = h \\ (H, L), & a(H) = l, a(L) = l \end{cases} \tag{4.9}$$

При $c > 1$ мы будем иметь $(m(1), m(2)) = (H, L)$ вне зависимости от $a(H)$ и $a(L)$.

Равновесием в этой игре является набор $(m^*(1), m^*(2), a^*(H), a^*(L), \mu_H^*, \mu_L^*)$, удовлетворяющий всем трем перечисленным выше условиям. Число и тип равновесий зависят от значения переметра c:

1. Если $c < 1$ и $p \geq \frac{1}{2}$, то равновесия два:
   (a) $m^*(1) = m^*(2) = H$, $a^*(H) = l$, $a^*(L) = h$, $\mu_H^* = p$, $\mu_L^* \in [0, \frac{1}{2}]$.
   (b) $m^*(1) = m^*(2) = L$, $a^*(H) = h$, $a^*(L) = l$, $\mu_L^* = p$, $\mu_H^* \in [0, \frac{1}{2}]$.
2. Если $c < 1$ и $p < \frac{1}{2}$, то равновесия в чистых стратегиях нет.
3. Если $c > 1$, то равновесие в чистых стратегиях одно: $m^*(1) = H, m^*(2) = L, a^*(H) = l, a^*(L) = h, \mu_H^* = 1, \mu_L^* = 0$.

Мы видим, что возможны два типа равновесий. Первые два равновесия являются *смешивающими*, в которых игроки S разных типов выбирают одно и то же действие. То есть, в нашей истории, это означает, что и крутой, и слабак будут заказывать один и тот же напиток. В каком случае это возможно? Во-первых, необходимо, чтобы число крутых было достаточно большим ($p \geq \frac{1}{2}$). В таком случае хулиган, видя, что вошедший заказывает «то же, что и все», поостережется нападать, так как вероятность нарваться на «крутого» будет слишком велика. Во-вторых необходимо, чтобы издержки от употребления нелюбимого напитка были ниже, чем издержки от драки. Если оба типа игроков заказывают один и тот же напиток, то обязательно получится так, что для одного из них этот напиток будет нелюбимым. Если издержки от употребления нелюбимого напитка слишком высоки, то он сможет увеличить свой выигрыш, выбрав свой любимый напиток — даже если ему придется после этого подраться.

Второй тип равновесий — *разделяющие*, в которых игроки S разных типов выбирают разные действия. В нашем случае, такое равновесие одно, в котором крутой будет выбирать пиво, а слабак — кофе. Такое равновесие будет возсожно, если издержки от употребления нелюбимого напитка более высоки, чем издержки от драки.

Что же происходит в том случае, если $c < 1$ и $p < \frac{1}{2}$? Равновесия в чистых стратегиях нет, однако согласно теореме должно существовать совершенное равновесие, которое обязательно будет предполагать наличие у хотя бы одного из игроков смешанных стратегий. Попробуем найти равновесие в смешанных стратегиях в этой игре. Пусть $q_1, q_2 \in [0, 1]$ — вероятности, с которыми игрок S выбирает действие H в том случае, когда его тип равен 1 или 2, соответственно. По правилу Байеса, вера игрока R в информационном множестве H будет равна

$$\mu_H = \frac{pq_1}{pq_1 + (1-p)q_2} \tag{4.10}$$

при условии того, что $pq_H > 0$ или $(1-p)q_L > 0$, и $\mu_H \in [0, 1]$ в обратном случае. Аналогично, получим

$$\mu_L = \frac{p(1-q_1)}{p(1-q_1) + (1-p)(1-q_2)} \tag{4.11}$$

при условии того, что $pq_H > 0$ или $(1-p)q_L > 0$, и $\mu_L \in [0, 1]$ в обратном случае.

Пусть v_H, v_L — вероятности, с которыми игрок R выберет действие h в информационных множествах H и L, соответственно. Найдем функцию реакции игрока R. Эта функция будет определена относительно вер μ_H, μ_L:

$$v_H = \begin{cases} 1, & \mu_H < \frac{1}{2} \\ [0{,}1], & \mu_H = \frac{1}{2} \\ 0, & \mu_H > \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{4.12}$$

$$v_L = \begin{cases} 1, & \mu_L < \frac{1}{2} \\ [0{,}1], & \mu_L = \frac{1}{2} \\ 0, & \mu_L > \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{4.13}$$

Наконец, найдем ожидаемый выигрыш игрока S в зависимости от его типа и выбираемого им действия. При типе 1 и действии H мы имеем

$$E(u_S(1,H)) = 1 - v_H. \tag{4.14}$$

Аналогично,

$$E(u_S(2,H)) = 1 - v_H - c,\ E(u_S(1,L)) = 1 - v_L - c,\ E(u_S(2,L)) = 1 - v_L. \tag{4.15}$$

В равновесии мы обязаны иметь

$$q_1 = \begin{cases} 1, & 1 - v_H > 1 - v_L - c \\ [0,1], & 1 - v_H = 1 - v_L - c \\ 0, & 1 - v_H < 1 - v_L - c. \end{cases} \tag{4.16}$$

и

$$q_2 = \begin{cases} 1, & 1 - v_H - c > 1 - v_L \\ [0,1], & 1 - v_H - c = 1 - v_L \\ 0, & 1 - v_H - c < 1 - v_L. \end{cases} \tag{4.17}$$

Равновесием будет любой вектор $(q_1, q_2, v_H, v_L, \mu_H, \mu_L)$, удовлетворяющий условиям (4.10), (4.11), (4.13), (4.13), (4.16) и (4.17).

4.2.3 Сигнализирование на рынке труда.

В 1999 году я закончил Российскую Экономическую Школу — весьма престижную магистерскую программу по экономике. Учиться там было непросто, однако уровень моих однокурсников был также очень высок. Большая часть из них за плечами имела хорошее техническое образование — Механико-математический или Физический факультеты МГУ, МФТИ, МИФИ. Остальные были лучшими представителями гуманитарных ВУЗов: Экономического факультета МГУ, ВШЭ. После окончания, студент РЭШ может рассчитывать на высокую зарплату в частном секторе; средняя стартовая зарплата выпускника РЭШ намного превышает аналогичные показатели для других ВУЗов с открытым набором. Почему работодатели готовы платить бо́льшие деньги выпускнику престижного вуза? Это происходит из-за того, что образование является инвестицией в человеческий капитал и повышает производительность работника и, следовательно, его привлекательность для работодателя? Или это происходит потому, что в такой программе, как РЭШ, учиться очень сложно, и что туда изначально поступают только самые сильные студенты? Ответ, скорее всего, лежит где-то посередине. Однако последней из перечисленных двух причин может быть вполне достаточно. Таков был аргумент, впервые предложенный Майклом Спенсом (1973): образование служит сигналом того, что обладатель «корочек» является высокопроизводительным работником.

Рассмотрим такую игру.

1. В момент времени $t = 0$ Природа определяет тип работника: высокопроизводительный $\theta = \theta_H$, или низкопроизводительный $\theta = \theta_L$. Пусть p — вероятность того, что $\theta = \theta_H$.

2. В момент времени $t = 1$ работник решает, сколько усилий ему следует потратить на приобретение образования. Пусть $e \geq 0$ — уровень образования работника. Эта величина является наблюдаемой, в отлиичие от θ, которая является частной информацией, и известна только самому работнику.

3. В момент времени $t = 2$ каждая из двух фирм предлагает работнику контракт $w(e)$, увязывающий заработную плату с количеством полученного образования.

4. В момент времени $t = 3$ работник решает, предложение какой из двух фирм ему стоит принять.

Уровень усилий e можно интерпретировать, как качество образования, получаемого работником. В наше время, все заканчивают среднюю школу; большинство вакансий требует наличие высшего образования, продолжительность которого, как правило, стандартизирована и составляет от 4 до 6 лет. Однако качество образования может сильно отличаться от одного ВУЗа к другому, и качество образования, как правило, тесно связано с тем, насколько легко студенту учиться в этом ВУЗе. Сложность учебной программы, мотивация преподавателей, лояльность преподавателей и учебной части к студентам, готовность отчислять неуспевающих, и толерантность по отношению к списыванию — все это определяет, насколько много радо работать ради того, чтобы получить заветный диплом. А работать не хочется — ведь то же самое время можно потратить на клубы, кино, игру в преферанс и покер, поездки на море, и еще Бог знает на что. Но надо учиться — не в последнюю очередь для того, чтобы «сойти за умного», тем более если работодателям известно, в каких ВУЗах учиться тяжело, а в каких — нет.

Выигрыш фирмы, если она взяла на работу человека с производительностью θ, равен

$$U = \theta - w. \tag{4.18}$$

Прибыль равна нулю, если работник не принял ее предложение.

Будем считать, что выигрыш работника равен зарплате минус издержки на получение образования:

$$u(w, e, \theta) = w - c(e, \theta), \tag{4.19}$$

где w — зарплата, e — уровень образования, θ — тип работника.

Сделаем два предположения относительно функции издержек $c(e, \theta)$. Во-первых будем считать, что более производительный работник тратит меньше усилий на получение данного уровня образования: $c(e, \theta_L) > c(e, \theta_H)$ для всех $e \geq 0$, причем $c(0, \theta_L) = c(0, \theta_H) = 0$. Во-вторых предположим, что каждая дополнительная единица образования более затратна для менее производительного работника: $c_e(e, \theta_L) > c_e(e, \theta_H)$ для всех $e \geq 0$. Из последнего свойства следует, что если для каких-то w и e мы имеем $u(w, e, \theta_H) = u(w, e, \theta_L) = \bar{u}$, то ни для каких других w' и e' мы не будем иметь $u(w', e', \theta_H) = u(w', e', \theta_L) = \bar{u}$. В системе координат e-w, кривые безразличия работников друх типов не будут пересекаться более одного раза (рисунок 4.2.3).

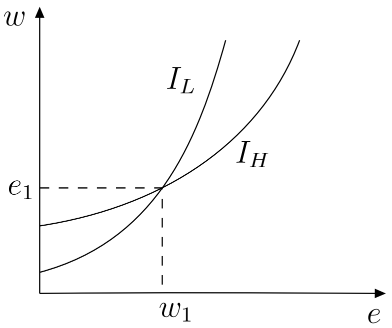


Рис. 4.7: Свойство однократного пересечения кривых безразличия.

На данном рисунке показаны I_H и I_L — кривые безразличия производительного и непроизводительного работника, соответствующие уровню полезности $\bar{u} = u(w_1, e_1, \theta_H) = u(w_1, e_1, \theta_L)$

Для нахождения байесова равновесия в этой игре, нам необходимо знать

1. e_H, e_L — уровни образования, выбранные работниками с производительностью θ_H и θ_L.

2. $\mu(e) = \mu(\theta = \theta_H | e)$ — вера каждой из фирм при данном e.

3. $w_1(e)$, $w_2(e)$ — какую зарплату каждая фирма предложит, в зависимости от уровня образования.

Прибыль фирмы, взявшей работника с уровнем образования e, будет равна ожидаемой производительности этого работника $\mu(e)\theta_H + (1-\mu(e))\theta_L$ минус зарплата $\mu(e)$. Так как фирмы две, прибыль в равновесии должна быть равна нулю. Действительно, если $w_1(e) < \mu(e)\theta_H + (1-\mu(e))\theta_L$ и $w_2(e) < w_1(e)$, то вторая фирма может предложить зарплату $w_2(e) = w_1(e) + \epsilon$ и получить положительную прибыль. Следовательно, в равновесии мы будем иметь

$$w_1(e) = w_2(e) = \mu(e)\theta_H + (1-\mu(e))\theta_L. \tag{4.20}$$

Рассмотрим сначала *разделяющее равновесие*, в котором $e_H \neq e_L$. Так как вера $\mu(e)$ должна находиться согласно правилу Байеса, мы должны иметь $\mu(e_H) = 1$ и $\mu(e_L) = 0$. Это позволяет нам сделать первую часть следующего утверждения:

Утверждение 1 *В разделяющем равновесии, мы имеем*

1. $w_L = w(e_L) = \theta_L$ *и* $w_H = w(e_H) = \theta_H$.
2. $e_L = 0$.

Вторая часть утверждения следует из того, что если $e_L > 0$, то работник может увеличить свой выигрыш, взяв $e'_L = 0$:

$$u(w(e_L), e_L, \theta_L) = \theta_L - c(e_L, \theta_L) < \mu(0)\theta_H + (1-\mu(0))\theta_L - c(0, \theta_L), \tag{4.21}$$

так как c убывает по e.

Чему равен уровень образования производительного работника e_H? Он должет отвечать двум условиям. Во-первых, он не должен быть слишком низким, иначе низкопроизводительный работник также захочет выбрать уровень образования e_H для того, чтобы получить зарплату θ_H. То есть должно выполняться следующее неравенство:

$$u(\theta_L, 0, \theta_L) \geq u(\theta_H, e_H, \theta_L). \tag{4.22}$$

Во-вторых, e_H не должен быть слишком высоким, иначе высокопроизводительный работник предпочтет уровень образования e_L и зарплату θ_L. Это означает, что мы должны иметь

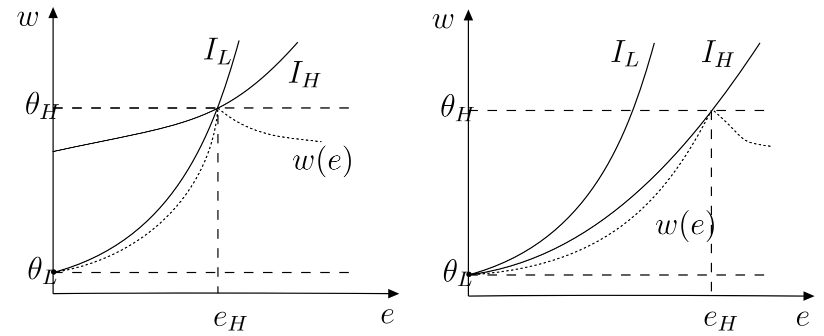
$$u(\theta_H, e_H, \theta_H) \geq u(\theta_L, 0, \theta_H). \tag{4.23}$$

Для того, чтобы определить равновесие, нам осталось выбрать функцию веры $\mu(e)$. По правилу Байеса мы должны иметь $\mu(e_L) = 0$, $\mu(e_H) = 1$. Нам осталось определить, как должна выглядеть функция $\mu(e)$ для $e \neq 0$, $e \neq 1$, то есть *вне траектории игры*. Для того, чтобы $e_L = 0$ и e_H были равновесными стратегиями, нам необходимо, чтобы они максимизировали функции полезностей работника с производительностью θ_L и θ_H при условии того, что фирмы устанавливают зарплату согласно (4.20). То есть, для всех $e \geq 0$, мы будем иметь

$$\begin{aligned} \mu(e)\theta_H + (1-\mu(e))\theta_L - c(e, \theta_L) &\leq u(\theta_L, 0, \theta_L) \\ \mu(e)\theta_H + (1-\mu(e))\theta_L - c(e, \theta_H) &\leq u(\theta_H, e_H, \theta_H). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Графически, весь диапазон возможных решений нашей задачи представлен на рисунках 4.8(a), 4.8(b).

На рисунке 4.8(a), неравенство (4.22) выполняется со знаком равенства. На рисунке 4.8(b), со знаком равенства выполняется (4.23). В обоих случаях нас устраивает любая вера $\mu(e)$, такая, что график функции $w(e)$ целиком лежит ниже кривых безразличия I_H и I_L.



(a) Самый маленький возможный e_H

(b) Самый большой возможный e_H

Рис. 4.8: Разделяющие равновесия в сигнальной игре на рынке труда

В *смешивающем равновесии*, работники обоих типов выберут один и тот же уровень образования e^*. Заработная плата в равновесии будет равняться

$$w^* = w(e^*) = p\theta_H + (1-p)\theta_L, \tag{4.25}$$

где p — доля высокопроизводительных работников. Заметим, что при нахождении разделяющего равновесия величина p нами не использовалась: если e_H удовлетворял условиям (4.22), (4.23), то для любого $p \in (0,1)$ существовала функция веры, которая давала нам разделяющее равновесие (например, если $\mu(e) = 0$ при $e < e_H$ и $\mu = 1$ при $e \geq e_H$).

Каким условиям должен удовлетворять e^*? Мы должны иметь

$$u(w^*, e^*, \theta_L) \geq \mu(e)\theta_H + (1-\mu(e))\theta_L - c(e, \theta_L) \tag{4.26}$$

для всех e. Аналогичное условие должно выполняться для производительного работника.

Минимальный возможный уровень образования в смешивающем равновесии — нулевой. Действительно, возьмем, например, такую функцию веры:

$$\mu(e) = p, \tag{4.27}$$

то есть когда уровень образования не дает работодателю никакой информации относительно работника. При такой вере, работники обоих типов выберут $e_L = e_H = 0$. Таким образом, $\mu(0)$ будет соответствовать правилу Байеса.

Какой максимальный возможный уровень образования в смешивающем равновесии? Предположим, что $\mu(e) = 0$ при $e < e^*$. Тогда условие (4.26) будет выполняться, если

$$w^* - c(e^*, \theta_L) \geq \theta_L - c(0, \theta_L). \tag{4.28}$$

На рисунке 4.9 показано смешивающее равновесие с $e = \bar{e}$ — максимальным возможным равновесным уровнем образования.

4.2.4 Дополнительные ограничения на равновесия в сигнальных играх.

В прошлом примере мы рассмотрели возможность существования смешивающих равновесий в модели сигнализирования на рынке труда. Мы показали, что существует много таких равновесий, для каждого $e \in [0, \bar{e}]$.

Разнообразие равновесий — как смешивающих, так и разделяющих — есть следствие того, что мы можем произвольно задавать функцию веры $\mu(e)$ для неравновесных значений e. Например, смешивающее равновесие, изображенное на рисунке 4.9, перестает существовать, если

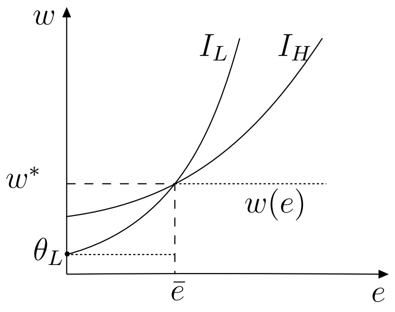


Рис. 4.9: Смешивающее равновесие с максимальным $e = \bar{e}$.

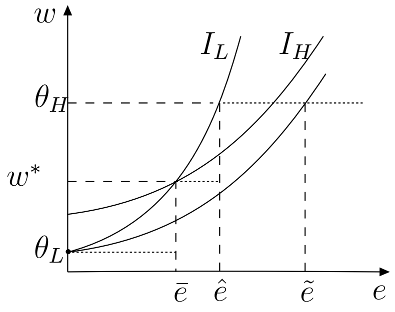


Рис. 4.10: Пример функции веры, которое не дает смешивающее равновесие при $e^* = \bar{e}$.

мы зададим в качестве функции веры любую функцию, в которой $\mu(e) = 1$ при $e \in (\hat{e}, \tilde{e}]$, где $\tilde{e}$ удовлетворяет $\theta_H - c(\tilde{e}, \theta_H) = \theta_L - c(0, \theta_H)$ — как, например, на рисунке 4.10:

В этом конкретном примере функция веры имеет вид:

$$\mu(e) = \begin{cases} 0, & e < \bar{e} \\ p, & e \in [\bar{e}, \hat{e}) \\ 1, & e > \hat{e}. \end{cases} \tag{4.29}$$

Почему такая функция веры более реалистична, чем та, которая приведена на рисунке 4.9? Потому, что она лучше отражает наши предположения о рациональности игроков. Действительно, предположим, что мы наблюдаем работника с уровнем образования, превышающем $\bar{e}$. Может ли это быть работник с низким уровнем производительности $\theta = \theta_L$? Скорее всего, нет. Даже если предположить, что работнику неизвестна функция веры работодателей $\mu(e)$ — и, соответственно, зависимость $w(e)$ заработной платы от уровня образования — он все равно никогда не выберет $e > \hat{e}$, поскольку образование $e = 0$ даст ему более высокий уровень полезности, даже если если работнику предложат максимально возможную зарплату $w = \theta_H$, что соответствует вере $\mu(e) = 1$. Получается, что для низкопроизводительного работника любой уровень образования $e > \hat{e}$ доминируется образованием $e = 0$.

Для высокопроизводительного работника доминируется любой уровень образования, превышающий $\tilde{e}$. Следовательно, если работник демонстрирует уровень образования $e \in (\hat{e}, \tilde{e}]$, то разумно предположить, что он — высокопроизводительный, то есть $\mu(e) = 1$. Иными словами, во всех случаях, когда образование для одного типа работников является доминируемым, а для другого — нет, функция веры задается однозначно. Но в таком случае, $e = \bar{e}$ не может быть равновесием, так как высокопроизводительный работник сможет увеличить свою полезность, выбрав $e > \hat{e}$ и получая зарплату $w(e) = \theta$.

Дадим формальное определение критерия, которому не удовлетворяет равновесие $e^* = \bar{e}$:

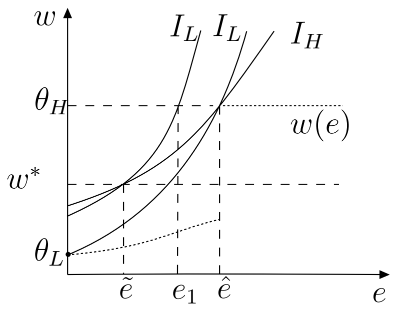
Определение 48 Пусть G — сигнальная игра, A — множество действий игрока R. Пусть $a \in A^* \subseteq A$ если a максимизирует ожидаемый выигрыш игрока R при какой-то системе вер $\mu(\cdot|\cdot)$. Пусть $t \in T$, M_t — множество недоминируемых действий для игрока типа t, то есть $m \in$

M_t, если не существует $m' \in M$, такой, что $u_S(t, m, a) < u_S(t, m', a)$ для всех $a \in A^*$. Будем говорить, что байесово равновесие $(m^*(\cdot), a^*(\cdot), \mu(\cdot|, \cdot))$ удовлетворяет *критерию доминирования*, если $\mu(t|m) = 0$ для всех t, m, таких, что

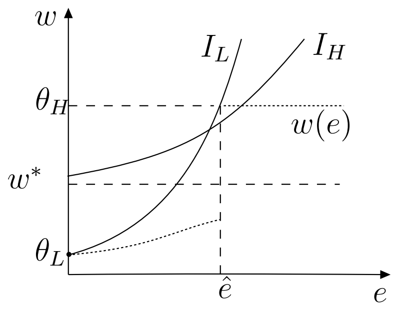
1. $m \neq M_t$,

2. Существует t', такой, что $m \in M_{t'}$.

На рисунке 4.11(a) показано смешивающее равновесие с наибольшим возможным уровнем образования $e = \tilde{e}$. Для любого $e \leq \tilde{e}$, мы будем иметь $u(w^*, e, \theta_H) > u(\theta_H, e', \theta_H)$ при $e' > \hat{e}$. Следовательно, высокопроизводительный работник не станет выбирать уровень образования e', даже если он принесет ему максимально возможную зарплату θ_H. Так как критерий доминирования ничего не говорит нам про то, какой должна быть вера работодателя при $e \leq \hat{e}$, мы вправе определить функцию веры таким образом, чтобы получить нужное нам равновесие (как, например, на данном рисунке).



(a) Равновесия существуют.



(b) Отсутствие равновесия, удовлетворяющего критерию.

Рис. 4.11: Равновесия в сигнальной игре и критерий доминирования.

На рисунке 4.11(b) показана ситуация, когда смешивающего равновесия, которое удовлетворяло бы критерию доминирования, не существует. Даже если $e = 0$, то все равно существует уровень образования e', который, во-первых, дает высокопроизводительному работнику бóльшую полезность при зарплате $w = \theta_H$, чем образование $e = 0$ и зарплата w^*, и, во-вторых, дает низкопроизводительному работнику *меньшую* полезность (при зарплате $w = \theta_H$), чем образование $e = 0$ при зарплате $w = \theta_L$. Так как мы обязаны иметь $\mu(e) = 1$ при $e > \hat{e}$, высокопроизводительный работник не станет соглашаться на зарплату w^*, даже если она дается ему при нулевых затратах на приобретение образования.

Критерий доминирования — далеко не самое строгое ограничение, позволяющее отсеивать нежелательные равновесия. Например, вернемся к рисунку 4.11(a). Предположим, что к работодателю приходит работник с неравновесным уровнем образования $e \in (e_1, \hat{e}]$. Зачем этому человеку понадобилось получать образование e? Возможно, что этот человек не знает, как устроена система вер $\mu(e)$ у работодателя, за исключением точки равновесия $\mu(\hat{e}) = p$. Таким образом, этот работник мог иметь ошибочное представление о том, какую зарплату ему предложат, если он получит уровень образования e. Но тогда этот человек не может иметь тип θ_L. Даже если он рассчитывает получить максимальную возможную зарплату — θ_H — его полезность все равно будет выше при равновесном уровне образования e^* и равновесной зарплате w^*. Следовательно, для всех $e \in (e_1, \hat{e}]$, мы должны иметь $\mu(e) = 1$.

Функция веры, изображенная на рисунке 4.11(a), не удовлетворяет «интуитивному критерию» для байесова равновесия, сформулированному Чоу и Крепсом (1987):

Определение 49 Пусть G — сигнальная игра, A — множество действий игрока R. Пусть $a \in A^* \subseteq A$ если a максимизирует ожидаемый выигрыш игрока R при какой-то системе вер $\mu(\cdot|\cdot)$.

Пусть $E = (m^*(\cdot), a^*(\cdot), \mu(\cdot|,\cdot))$ — байесово равновесие в игре G. Пусть $t \in T$, $m \in M$. Будем говорить, что m *доминируется в равновесии* E *для типа* t, если для всех $a \in A^*$,

$$u_S(t, m^*(t), a^*(m^*(t))) > u_S(t, m, a). \tag{4.30}$$

Пусть M_{Et} — множество действий для игрока типа t, недоминируемых в равновесии E. Будем говорить, что байесово равновесие $E = (m^*(\cdot), a^*(\cdot), \mu(\cdot|,\cdot))$ удовлетворяет *интуитивному критерию*, если $\mu(t|m) = 0$ для всех t, m, таких, что

1. $m \neq M_{Et}$,

2. Существует t', такой, что $m \in M_{Et'}$.

На самом деле, любое смешивающее равновесие в сигнальной игре на рынке труда не удовлетворяет этому критерию. Это следует из того, что для любого e^*, мы имеем $u(\theta_H, e', \theta_H) > u(w^*, e^*, \theta_H)$ и $u(\theta_H, e', \theta_L) < u(w^*, e^*, \theta_L)$, для всех $e' \in (e_1, \hat{e})$, где $u(w^*, e^*, \theta_L) = u(\theta_H, e_1, \theta_L)$ и $u(w^*, e^*, \theta_H) = u(\theta_H, \hat{e}, \theta_H)$.

Рассмотрим еще один пример игры, в которой «интуитивный критерий» позволит нам избавиться от интуитивно нежелательного равновесия (которое при этом является совершенным байесовым).

Диктатор одной маленькой банановой республики думает, как ему поступить с видным оппозиционным политиком. Он знает, что у политика может быть подпольный бизнес (1)— однако может быть так, что никакого бизнеса у оппозиционера нет (2). Диктатор решает, стоит ли ему завести уголовное дело на оппозиционера и посадить его (h), или оставить его в покое (l). Если у оппозиционера есть бизнес, то диктатору выгоднее посадить его; если бизнеса нет — то выгоднее оставить в покое (так как в таком случае уголовное дело будет выглядеть чисто политическим).

Оппозиционер имеет возможность, до того, как диктатор сделает свой ход, опубликовать декларацию, свидетельствующую об отсутствии скрытых доходов (H), либо не публиковать декларации (L). Данные, указанные в декларации, будут подтверждены или опровергнуты только после того, как диктатор решит, что делать с политиком. Если у оппозиционера нет бизнеса, то его выигрыш увеличится на 1 в том случае, если он опубликует декларацию. Если же у политика бизнес есть, то его выигрыш будет на 1 больше в том случае, если он не будет публиковать декларацию (так как в обратном случае он будет пойман на вранье). Если оппозиционер остается на свободе, он дополнительно получает выигрыш, равный 2. Диктатор знает, что у оппозиционера бизнес есть с вероятностью $p = \frac{1}{4}$. Дерево этой игры изображено на рисунке 4.12.

Рассмотрим, какие смешивающие равновесия существуют в этой игре. Если возможно равновесие, в котором $m(1) = H$ и $m(2) = H$, то мы должны иметь $\mu_H = \frac{1}{4}$ и $a(H) = l$, так как $E(u_R(\cdot, H, h)) = \frac{1}{4} < \frac{3}{4} = E(u_R(\cdot, H, l))$. Так как выигрыш оппозиционера должне быть выше в информационном множестве H, мы должны иметь $a_L = h$. Это, в свою очередь, налагает ограничения на веру μ_L в информационном множестве L (которая не задается правилом Байеса, так как при $m(1) = H$ и $m(2) = H$ вероятность попадания вомножество L равна нулю). Таким образом, из

$$E(u_R(\cdot, L, h)) = \mu_L \leq 1 - \mu_L = E(u_R(\cdot, L, l))$$

мы получаем, что в равновесии (которое, как выяснилось, существует) мы обязаны иметь $\mu_L \in [0, \frac{1}{2}]$.

Рассмотрим, есть ли второе смешивающее равновесие с $m(1) = L$ и $m(2) = L$. Аналогично мы получаем $\mu_L = \frac{1}{4}$, $a(L) = l$, и $a(H) = h$. Ограничения на веру μ_H в информационном множестве H таковы:

$$E(u_R(\cdot, H, h)) = \mu_H \geq 1 - \mu_H = E(u_R(\cdot, H, l)),$$

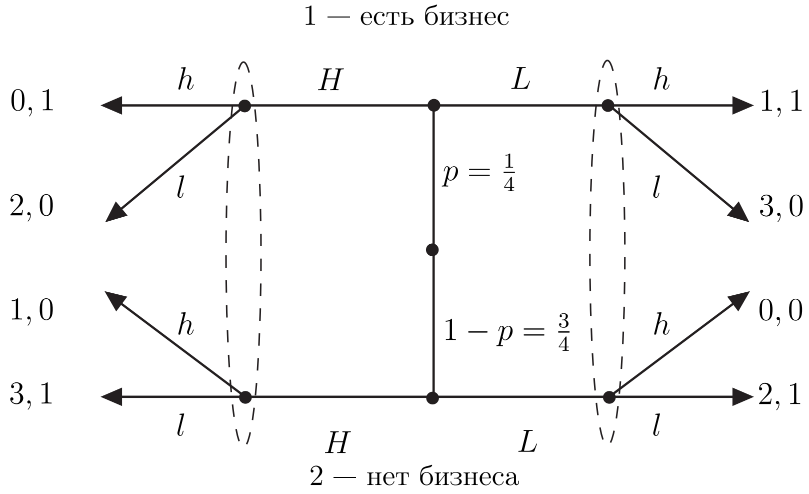


Рис. 4.12: Диктатор и оппозиционер.

что дает нам $\mu_H \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Итак, у нас есть два равновесия:

1. $m^*(1) = H$, $m^*(2) = H$, $a^*(H) = l$, $a^*(L) = h$, $\mu_H^* = \frac{1}{4}$, $\mu_L^* \in [0, \frac{1}{2}]$, и

2. $m^*(1) = L$, $m^*(2) = L$, $a^*(H) = h$, $a^*(L) = l$, $\mu_H^* \in [\frac{1}{2}, 1]$, $\mu_L^* = \frac{1}{4}$.

Оба эти равновесия — по построению — являются совершенными байесовыми равновесиями. Однако одно из этих равновесий выглядит менее правдоподобно. Во втором равновесии оппозиционер отказывается от декларации о доходах вне зависимости от того, есть ли у него бизнес, или нет. При этом диктатор будет готов посадить оппозиционера в тюрьму, если тот предъявит декларацию, так как сданная декларация о доходах будет расцениваться как сигнал, свидетельствующий о том, что у оппозиционера есть подпольный бизнес (ибо $\mu_H \geq \frac{1}{2}$).

Последнее предположение кажется неестественным. Со стороны диктатора будет неразумным предполагать, что оппозиционер, имеющий подпольный бизнес, станет публиковать декларацию о своих доходах. Ведь для оппозиционера, имеющего тип 1 (то есть подпольного коммерсанта) действие H (декларация) в равновесии доминируется действием L (не подавать декларацию), так как при действии H *любое* ответное действие диктатора принесет ему меньшую выгоду (2 или 0), чем ту, которую он будет иметь в равновесии (3). Равновесие не соответствует «интуитивному критерию», так как в этом равновесии $\mu_H > 0$, то есть вера относительно доминируемого действия отлична от нуля.

4.2.5 Игры с сообщениями.

Сигнал сам по себе может не нести никаких издержек для игроков. Представьте себе, например, что вы стоите на железнодорожной станции и ждете электричку. Вместе с вами стоит большая толпа народа, стремящаяся попасть на тот же поезд. Все знают, что поезд придет на одну из двух платформ, но никто не знает, на какую; каждый должен решить, на какую из двух платформ ему бежать. Но вот на вокзале появляется пассажир, про которого известно, что он знает, куда придет электричка. Что он скажет? Выигрыш (как его, так и других пассажиров) будет зависеть только от того, куда придет поезд (то есть от информации, известной вошедшему человеку), и от того, кто на какую платформу побежит (то есть от действий пассажиров), но не от того, что скажет вошедший (если, конечно же, ему не грозит расправа за введение других людей в заблуждение). Эта ситуация удовлетворяет следующему определению:

Определение 50 *Игра с сообщениями* — это такая сигнальная игра, в которой

1. Множество действий игрока S равно множеству его типов: $M = T$.
2. Выигрыши обоих игроков не зависят от сигналов (действий первого игрока): $u_S(t,m,a) = u_S(t,a)$, $u_R(t,m,a) = u_R(t,a)$.

Первым, наиболшее очевидным, результатом является существование смешивающего равновесия в любой игре с сообщениями:

Теорема 20 Пусть G — игра с сообщениями. Тогда в ней существует совершенное байесово равновесие, в котором

$$\mu(t|m) = p(t), \tag{4.31}$$

$$a(m) = \mathrm{argmax}_a \sum_t p(t) u_R(t,a), \tag{4.32}$$

и

$$m(t) = \bar{m} \tag{4.33}$$

для какой-то $\bar{m} \in M$.

Легко убедиться, что это действительно равновесие. Действие a является оптимальным по определению, а система вер для $m = \bar{m}$, то есть на траектории игры, выводится по правилу Байеса. Так как для всех m, m' мы имеем $a(m) = a(m')$, то также верно, что $u_S(t, m', a(m')) = u_S(t, m, a(m))$, что соответствует определению равновесия.

Такое равновесие является неинформативным, так как вера игрока R не зависит от сообщений m. Все возможные отклонения от сигнала $\bar{m}$ воспринимаются как «пустой треп»: увидев сигнал $m \neq \bar{m}$, игрок R считает, что у каждого типа игрока S была одинаковая вероятность совершить такое отклонение. Таким образом, сообщения игрока S не оказывают влияния на веру игрока R, которая равна априорному распределению типов игроков $p(\cdot)$.

Пример. Вот игра с сообщениями, в которой существует разделяющее равновесие:

		Игрок S	
		t_1	t_2
Игрок R	a_1	1,1	0,0
	a_2	0,0	1,1

Заметим, что это — не матричная запись статической игры, известная нам по Главе 1. Игроки ходят по очереди; каждый столбец соответствует одному из двух типов Игрока 1, каждая строка — одному из двух возможных действий Игрока 2. Множество возможных сигналов для Игрока 1 совпадает с множеством его типов, но выигрыш игроков зависит только от типа Игрока 1, но не от его сигнала. Пусть $p(t_1) \in (0,1)$. Очевидно, что равновесием является $m(t_1) = t_1$, $m(t_2) = 2$, $a(m_1) = a_1$, $a(m_2) = a_2$.

Пример. Рассмотрим теперь игру с сообщениями, в которой у игрока S три возможных типа, которые равновероятны, а у игрока R — три варианта действий. Пусть выигрыши игроков таковы:

		Игрок S		
		t_1	t_2	t_3
Игрок R	a_1	0,1	0,0	0,0
	a_2	1,0	1,2	1,0
	a_3	0,0	0,0	2,1

В такой игре в равновесии информация не может раскрываться полностью. Действительно, пусть игрок S правдиво сообщает свои типы: $m(t_1) = t_1$, $m(t_2) = t_2$, $m(t_3) = t_3$. Тогда игрок R будет реагировать на эти сообщения следующим образом: $a(t_1) = a_1$, $a(t_2) = a_2$, $a(t_3) = a_3$.

Однако $u_S(t_1, a(t_1)) < u_S(t_1, a(t_2))$, то если игрок R верит в то, что игрок S правдиво сообщает свой тип, и игрок S имеет тип t_1, то игроку S выгодно соврать, назвавшись типом t_2.

Тем не менее существует равновесие, в котором $m(t_3) = t_3$. Сообщение $m(t_3) = t_3$ будет достоверным: если $a(t_3) = a_3$, то игроку S не будет выгодно сообщать $m(t_1) = t_3$ или $m(t_2) = t_3$. Можно продолжить построение этого равновесия. Предположим, что игрок R, получив сигнал t_1, с равной вероятностью считает, что игрок S имеет тип t_1 или t_2. При такой системе вер, оптимальными действиями игрока R будет $a(t_1) = a(t_2) = a_2$. При сигналах $m(t_1) = m(t_2)t_1$ или $m(t_1) = m(t_2) = t_2$ такая система вер будет оправдана с точки зрения правила Байеса. Например, при $m(t_1) = m(t_2)t_1$,

$$P(t_1 = 1|m_1) = \frac{p(t_1)}{p(t_1) + p(t_2)} = \frac{1}{2}. \tag{4.34}$$

Мы получаем равновесие, в котором происходит частичное раскрытие информации: игрок R не может отличить игрока S типа t_1 от игрока типа t_2, но если игрок S имеет тип t_3, то это становится известно.

?????????????????????????????????

4.3 Примеры

4.3.1 Раскрытие информации в играх с сообщениями

В двух примерах на страницах 170–172 мы рассмотрели простые примеры игр с сообщениями. В первой такой игре возможно равновесие с полным раскрытием информации, когда игрок R всегда узнает тип игрока S. Во второй игре этого не происходит — игрок R не может отличить t_1 от t_2. Почему в одних играш происходит раскрытие информации, а в других — нет? Общая закономерность здесь такова: чем сильнее совпадают интересы двух игроков, тем больше информации раскрывается. В первом примере мы видели полное совпадение интересов, во втором — частичное (если S имеет тип t_3, то полезности обоих игроков максимизируются при $a = a_3$, если t_1 или t_2 — то не все так просто). В случае, когда интересы не совпадают — как, например, в следующем примере — будет существовать только смешивающее равновесие:

		Игрок S		
		t_1	t_2	t_3
Игрок R	a_1	0,0	0,1	1,0
	a_2	0,1	1,0	0,0
	a_3	1,0	0,0	0,1

Рассмотрим более общую модель, предложенную Кроуфордом и Собелем (1982). Пусть t — некая случайная величина, равномерно распределенная на отрезка $[0, 1]$. Значение этой величины известно игроку S, но не игроку R. Пусть $a \in [0, 1]$ — действие, предпринимаемое игроком R. Выигрыши игроков зависят от t и a следующим образом:

$$\begin{aligned} u_S(t, a) &= -(a - (t + b))^2 \\ u_R(t, a) &= -(a - t)^2. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Таким образом, фукнция полезности выигрыш каждого игрока является однопиковой по a, причем наилучшая альтернатива — величина, известная только игроку S; предпочтения игроков отличаются на величину b.

Можно привести много жизненных примеров такой игры. Например, игрок S является экспертом в одной из областей экономической политики, скажем, председателем соотвествующего парламентского комитета. Он потратил много времени на изучение своей предметной области, и поэтому именно ему известна величина t — оптимальная на данный момент времени политика. Игрок R в таком случае будет представитель большинства в парламенте, который и определяет величину a — политику, которая будет реализована. Проблема состоит в том, что интересы парламентского большинства могут отличаться от интересов председателя комитета. Пусть, например, речь идет о необходимой величине сокращения или увеличения расходов на образование. Председатель комитета может сам быть из профессорской среды, что делает его склонным рекомендовать более высокие затраты на образование, чем порекомендовал бы человек с другим прошлым. Это не может не быть известно парламентскому большинству, которое обязано учитывать разницу во взглядах — выражаемую в нашей модели величиной b — при принятии решения. Получется так, что при $b > 0$ у нас не может быть полного раскрытия информации. Если мы предположим, что большинство верит председателю комитета и проводит ту политику, которую он рекомендует — $a = t$ — то председатель комитета будет врать, максимизируя свою полезность при $m = t + b$. Но если он ведет себя таким образом, то большинство будет учитывать эту разницу во взглядах, выбирая действие $a = t - b$.

Предположим, что стратегия игрока S имеет следующий вид. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — подмножества $[0,1]$, такие, что $X_i \cap X_j = \emptyset$ и $X_1 \cup \ldots \cup X_n = [0,1]$. Будем считать, что игрок S играет смешанную стратегию: если $t \in X_i$, то сигнал $m(t)$ игрока S будет случайной величиной, равномерно распределенной на X_i. Обозначим за $\bar{x}_i$ матожидание случайной величина, равноверно распределенной на X_i:

$$\bar{x}_i = \int_{x \in X_i} x dx. \tag{4.36}$$

Каким будет реакция игрока R на такую сигнальную стратегию? Вера игрока R определяется по правилу Байеса для всех $m \in [0,1]$: если $m \in X_i$, то тип игрока S будет случайной величиной, равномерно распределенной на X_i. Тогда задача игрока R —

$$\max_{a(m)} \int_{t \in X_i} u_r(t, a(m)) dt = - \int_{t \in X_i} (a(m) - t)^2 dt, \tag{4.37}$$

что дает нам решение

$$a(m) = \int_{t \in X_i} t dt = \bar{x}_i \tag{4.38}$$

при $t \in X_i$.

Теперь убедимся, что в любом совершенном байесовом равновесии мы обязаны иметь $X_i = [x_i, x_{i+1})$ и $\bar{x}_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ для каких-то $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 1$. Если $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$ и для каких-то $t_1 \in X_1, t_2 \in X_2$ мы имеем $t_1 > t_2$, то мы получаем противоречие: либо $|x_1 - (t_1 + b)| > |x_2 - (t_1 + b)|$, либо $|x_2 - (t_2 + b)| > |x_1 - (t_2 + b)|$. Этого не может быть в равновесии, ибо мы получим $u_S(t_1, a(m(t_1))) < u_S(t_1, a(m(t_2)))$, либо $u_S(t_2, a(m(t_2))) < u_S(t_2, a(m(t_1)))$.

Если $t = x_i$, то должно выполняться равенство

$$u_s(t, \bar{x}_i) = u_s(t, \bar{x}_{i+1}). \tag{4.39}$$

Если это не так, то мы не получим равновесия. Пусть, например, $u_s(x_i, \bar{x}_i) > u_s(x_i, \bar{x}_{i+1})$. Тогда, в силу непрерывности u_s, существует $\epsilon > 0$, такой, что $u_s(x_i + \epsilon, \bar{x}_i) > u_s(x_i + \epsilon, \bar{x}_{i+1})$, что противоречит нашему предположению о том, что x_i лежит на границе множеств X_i и X_{i+1}, определяющих сигнальную стратегию игрока S. Перепишем (4.39) как

$$x_i + b - \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} - x_i - b, \tag{4.40}$$

откуда получим

$$x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} + 4b. \tag{4.41}$$

Получается, что каждый отрезок X_{i+1} на $4b$ единиц длиннее предыдущего (рисунок 4.13). Для того, чтобы найти равновесие, нам необходимо найти $x_1, \ldots, x_{n+1}$, такие, что $x_n = 1$, и выполняется (4.41) для всех $i = 1, \ldots, n-1$.

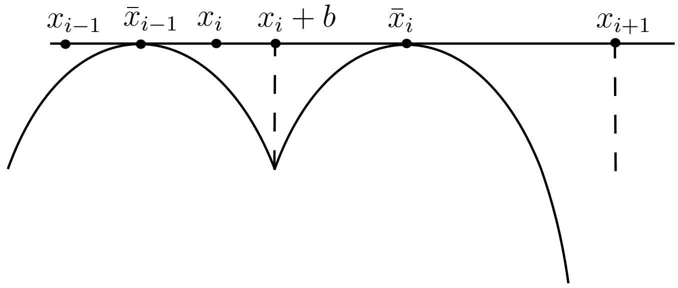


Рис. 4.13: Соотношение x_i и x_{i+1} в игре с сообщениями.

Если $x_0 = 0$, то мы получим $(x_2 - x_1) = x_1 + 4b$, $(x_3 - x_2) = x_1 + 8b$, и так далее, вплоть до $(1 - x_{n-1}) = x_1 + 4(n-1)b$. Суммируя, получается

$$1 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = nx_1 + 2n(n-1)b. \qquad (4.42)$$

Равновесие с частичным раскрытием информации существует, если есть $x_1 \in (0, 1)$ и целое число $n \geq 2$, которые удовлетворяют уравнению (4.42) для данного $b > 0$.

Мы можем посмотреть, как степень раскрытия информации в равновесии зависит от параметра b, опретеляющего соответствие интересов двух игроков. Чем выше n, тем больше вероятность того, что информации раскрывается. Можно дать формальное определение «раскрытию информации», как матожиданию разности между проводимой политикой a и сигналом t, получаемым игроком S. Формально, мы определим

$$I_r(n) = \int_{t=0}^{1} |a(m(t)) - t| dt = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(x_1 + 4(i-1)b)^2. \qquad (4.43)$$

Для равновесия, в котором $n = 1$, то есть раскрытия информации не происходит, мы имеем $a(m(t)) = \frac{1}{2}$ для всех t, и, соответственно, $I_r(1) = \frac{1}{4}$. Для $n = 2$, уравнение (4.42) дает нам $x_1 = \frac{1-4b}{2}$. Равновесие существует только при $b < \frac{1}{4}$, то есть даже для минимального уровня раскрытия информации необходимо, чтобы интересы двух игроков были достаточно схожи. В таком случае, мы получим $I_r(2) = \frac{1}{4}(x_1^2 + (1-x_1)^2) = \frac{1}{8} + 2b^2 < \frac{1}{4}$. Очевидно, что чем n — то есть число категорий сигналов t, между которыми может различать игрок R — тем меньше I_r. Однако равновесие высоким n возможно только при достаточно малом b. Действительно, из (4.42) и $x_1 > 0$ мы получаем, что $2n(n-1)b < 1$. Равновесие с $n = 3$ возможно при $b < \frac{1}{12}$, с $n = 4$ — при $b < \frac{1}{24}$, и так далее. Можно получить и аналогичное условие на максимальный n, возможный в равновесии:

$$n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{2}{b}}. \qquad (4.44)$$

При $b \to 0$, мы получаем возможность все большего раскрытия информации. Будет ли исход игры оптимальным по Парето при достаточно большом b? Для оптимальности по Парето необходимо, чтобы для всех t, не существовало такой $a' \in [0, 1]$, что $u_R(t, a') \geq u_R(t, a(m(t)))$ и $u_S(t, a') \geq u_S(t, a(m(t)))$, хотя бы с одним строго выполняющемся неравенством. Это означает, что для всех t, мы должны иметь $a(m(t)) \in [t, t + b]$. Но это условие не выполняется при всех положительных b: например, мы всегда получим $\bar{x}_{i-1} = a(x_i) < x_i < x_i + b$. Мы в очередной раз убеждаемся, что асимметрия информации вредит обоим игрокам.

4.3.2 Экономическая теория политического популизма

Неравенство доходов свойственно большинству развивающихся стран. Неудивительно, что часто политическая программа президентского кандидата призывает к перераспределению доходов в пользу малоимущих слоев населения. Однако, раз за разом, демократически выбранные политики - «популисты» принимают слишком жествие меры, которые в краткосрочной перспективе действительно дают снижение неравенства, но в среднесрочной — приводят к макроэкономическому кризису. Как правило, такая «популистская» политика состоит в чрезмерном росте государственных расходов. Этот рост финансируется за счет двух источников. Во-первых, это рост налогообложения, создающий отрицательные стимулы для развития бизнеса. Во-вторых, это увеличение государственного долга, которгое может привести к долговому кризису — дефолту на рынке государственных облигаций, снижению стоимости национальной валюты, и болезненному снижению государственных расходов, либо включению «печатного станка» и высокой инфляции. В итоге положение широких слоев населения — во имя которых и проводились радикальные реформы — на самом деле ухудшается, хотя не настолько, насколько ухудшается положение элиты и среднего класса.

Если рассматривать политическую программу кандидата как точку на шкале «лево-право», где левая политика предполагает распределение от богатых к малоимущим, то по сути получается, что некоторые кандидаты занимают ультра-левую позицию, более левую, чем предпочтения большинства населения. При этом основой риторики таких политиков — как во время избирательной кампании, так и после нее — является проводимая ими борьба за интересы простого народа против небольшой и привилегированногй элиты. Пожалуй, наиболее известным политиком такого плана является Уго Чавес в Венесуэле — однако список можно продолжить: Боливия (Эво Моралес), Перу (Алан Гарсиа), Эквадор (Рафаэт Коррера), и так далее.

Конечно же, такие вещи всегда имеют простое объяснение: народ (а, подчас, и сам политик) не имеют представления о том, во какие последствия будут иметь предлагаемые реформы в ближайшем будущем. Возможно, что отчасти это так и есть. Однако такой ход рассуждения не приветствуется в академической среде: ведь при помощи выборочных предположений о нерациональности тех или иных игроков можно объяснить практически все происходящее в нашем мире. Бóльшим и более интересным вызовом всегда является нахождение формального объяснения. Как должна быть устроена система стимулов и информационная структура, чтобы такое могло произойти с рациональными, все понимающими избирателями и политиками?

Асемоглу, Егоров и Сонин (2011) объясняют этот феномен, не прибегая к предположению о нерациональности политиков или избирателей. Дело в том, что в странах Латинской Америки — как и во многих других странах — политики часто маскируют свои истинные интересы. Бывает так, что кандидат в президенты обещает проводить справедливую по отношению к большинству граждан политику, а в итоге оказывается агентом влияния небольшой и очень богатой элиты, и проводит политику, направленную на обогащение немногих за счет большинства (как правило, это достигается за счет низких налогов, попустительства коррупции, и поддержке монополий). Как политику убедить своих граждан, что он — не волк в овечьей шкуре, что его собственные предпочтения действительно совпадают с интересами граждан? Возможный способ так сделать — после избрания начать проводить политику, совершенно неприемлемую для потенциального представителя интересов элиты. Настолько неприемлемую, что публика станет рассуждать так: «Наш президент, господин X, действительно хочет того же, чего хотим мы. Если бы он представлял интересы ненавистных нам богачей, то не стал бы себя так вести — даже если это позволило бы ему нас обмануть и заставить нас избрать его на новый срок».

Рассмотрим формальную модель, проводящую эту аргументацию. Пусть существуют четыре игрока — находящийся у власти президент, его возможный преемник, и две группы граждан: большинство и элита. В момент времени $t = 1$ президент выбирает, какую экономическую программу $y_1 \in \mathbb{R}$ ему следует проводить. В момент времени $t = 2$ происходят выборы: большинство решает, оставить президента у власти, или избрать нового. В момент времени $t = 3$ переизбранный президент (или новоизбранный преемник) проводят политику $y_2 \in \mathbb{R}$. Затем реализуются выигрыши.

Полезность гражданина зависит от проводимой политики в обоих периодах, и от того, к какой из групп (большинство или элита) он принадлежит. Для представителя большинства выигрыш равен

$$u_m(y_1, y_2) = -(y_1 - v_m)^2 - (y_2 - v_m)^2, \tag{4.45}$$

а для представителя элиты —

$$u_e(y_1, y_2) = -(y_1 - v_e)^2 - (y_2 - v_e)^2, \tag{4.46}$$

где v_m, v_e — наилучшие альтернативы каждого из двух типов граждан. Таким образом, граждане обладают однопиковыми предпочтениями относительно политики. Будем считать, что большинство предпочитает более левую политику (то есть больше перераспределения), чем элита: $v_m = 0 < v_e$.

Выигрыш президента равен

$$U_p(a_p, y_1, y_2, I_p) = -(y_1 - a_p)^2 - (y_2 - a_p)^2 + bI_p, \tag{4.47}$$

где величина I_p равна 1, если президент был переизбран на второй срок, и 0, если он не был переизбран. Величина a_p отражает наилучшую альтернативу президента. Таким образом, мы предполагаем, что президент заинтересован как в реализации какой-то конкретной политики, так и в должности как таковой; величина $b > 0$ отражает ценность президентского кресла. Аналогично, выигрыш претендента равен

$$U_p = -(y_2 - a_c)^2 + b(1 - I_p), \tag{4.48}$$

где a_c — наилучная альтернатива конкурента. Мы будем считать, что в первом периоде полезность претендента равна нулю (так как он не делает в этом периоде никаких ходов).

Пусть наилучшая альтернатива кандидата является частной информацией. Избирателю известно лишь, что v_i принимает значение $v_m = 0$ с вероятностью p и $v_e > 0$ с вероятностью $1-p$. Будем считать, что случайные величины a_p и a_c являются независимыми.

Рассмотрим задачу максимизации выигрыша переизбранным или новоизбранным президентом в момент времени $t = 3$. Так как игра заканчивается в этот момент времени, мы имеем $y_2 = v_p$ для переизбранного президента и $y_2 = v_c$ для новоизбранного.

Пусть

$$\mu(y) = P(v_1 = v_m) - \tag{4.49}$$

вера избирателей относительно того, что президент имеет тип v_m.

Ожидаемый выигрыш представителя большинства равен

$$E(u_m) = -(y_1 - v_m)^2 - \mu(y_1)(v_p - v_m)^2 - (1 - \mu(y_1))(v_e - v_m)^2 \tag{4.50}$$

при переизбрании президента, и

$$E(u'_m) = -(y_1 - v_m)^2 - p(v_p - v_m)^2 - (1 - p)(v_e - v_m)^2 \tag{4.51}$$

при избрании нового. Таким образом, президент будет переизбран, только если $\mu(y_1) \geq p$.

Найдем разделяющее равновесие. Пусть y^*_{1m}, y^*_{1e} — равновесная политика президента во время первого президентского срока (в момент времени $t = 1$), в зависимости от его наилучшей альтернативы (v_m или v_e). В разделяющем равновесии мы обязаны иметь $\mu(y^*_{1m} = 1$, $\mu(y^*_{1e}) = 0$. Соответственно, мы будем иметь $I_P = 1$ при $y_1 = y^*_{1m}$ и $I_p = 0$ при $y_1 = y^*_{1e}$.

Так как в разделяющем равновесии президент, имеющий наилучшую альтернативу $a_p = v_e$, не переизбирается, его полезность максимизируется при выборе $y_1 = v_e$. Предположим, что $y_{1m}^* < y_{1e}^* = v_e$. Возьмем систему следующую вер:

$$\mu(y_1) = \begin{cases} 1, & y_1 \le y_{1m}^* \\ 0, & y_1 > y_{1m}^* \end{cases} \tag{4.52}$$

Посмотрим, при каком y_{1m}^* мы получим совершенное байесово равновесие. Необходимо, чтобы выигрыш президента с $a_p = v_e$ был выше при $y_1 = v_e$ и неизбрании, чем при $y_1 = y_{1m}^*$ и переизбрании:

$$U_p(v_e, v_e, \cdot, 0) \ge \max_{y_1 \le y_{1m}^*} U_p(v_e, y_1, v_e, 1), \tag{4.53}$$

ибо, в силу (4.52), президент переизбиратеся если и только если $y_1 \le y_{1m}^*$. Так как $U_p(v_e, y_1, v_e, 1)$ убывает по y_1 при $y_1 < v_e$, мы можем переписать (4.53) как

$$U_p(v_e, v_e, \cdot, 0) = -pv_e^2 \ge -(v_e - y_{1m}^*)^2 + b = U_p(v_e, y_{1m}^2, v_e, 1), \tag{4.54}$$

или

$$y_{1m}^* \le v_e - \sqrt{b + pv_e^2}. \tag{4.55}$$

Мы получили следующий результат. При $b > (1-p)v_e^2$, в разделяющем равновесии политика президента, имеющего одинаковые предпочтения с (левым) большинством своих избирателей, должна быть более левой, чем собственно эти предпочтения. Это необходимо для того, чтобы политик мог убедить избирателей в том, что при наступлении второго президентского срока он внезапно не предаст их интересы, оказавшить на самом деле проводником интересов элит, «волком в овечьей шкуре» с $a_p = v_e$. Каков смысл условия $b > (1-p)v_e^2$? Во-первых, ценность президентского кресла b должна быть достаточно большой — иначе президент от элиты, имеющий $a_p = v_e$, не будет готов имитировать радикально левую политику для того, чтобы обмануть избирателей и переизбраться. Во-вторых, вероятность p того, что предпочтения президента совпадают с предпочтениями большинства избирателей, должна быть низка. И, наконец, в-третьих, предпочтения элиты не должны слишком сильно отличаться от предпочтений большинства. Полезность избирателей и политиков убывает пропорционально квадрату расстояния между их наилучшей альтернативой и реализуемой политикой. Если разница между позициями элиты и большинства будет слишком большой, то издержки, связанные с имитацией поведения «народного» политика, будут слишком высоки.

Найдем второе условие для разделяющего равновесия. Политика y_{1m}^* не должна быть слишком левой, иначе «народный» президент с $a_p = v_m = 0$ просто предпочтет выбрать $y_1 = 0$, упуская возможность избраться на второй срок. Данное условие будет таким:

$$U_p(v_m, y_{1m}^*, v_m, 1) \ge U_p(v_m, v_m, \cdot, 0), \tag{4.56}$$

или

$$-y_{1m}^{*2} + b \ge -(1-p)v_e^2, \tag{4.57}$$

или

$$|y_{1m}^*| \le \sqrt{b + (1-p)v_e^2}. \tag{4.58}$$

Из условий (4.55) и (4.58) следует, что при $b \le (1-p)v_e^2$ разделяющее равновесие с системой вер (4.52) всегда существует, а при $b > (1-p)v_e^2$, необходимым и достаточным условием существования разделяющего равновесия является

$$-\sqrt{b - (1-p)v_e^2} \le v_e - \sqrt{pv_e^2 + b}. \tag{4.59}$$

Это условие всегда выполняется; следовательно, разделяющее равновесие существует всегда, причем при $b > (1-p)v_e^2$ в *любом* таком равновесии с системой вер (4.52) мы будем иметь

$y^*_{1m} < 0$, то есть политик, чьи интересы совпадают с интересами большинства избирателей, будет реализовывать политику более радикальную, чем та, которую предпочитает большинство избирателей и он сам.[3]

4.3.3 Репутация и кредитно-денежная политика центрального банка

Вернемся к задаче установки кредитно-денежной политики центральным банком, рассмотренную на стр. 86–89. Напомним, что в этой задаче рассмотрена двухпериодная игра, в которой сначала публика выбирает уровень инфляционных ожиданий, затем центральный банк реализует кредитно-денежную политику, определяющую уровень инфляции. Показано, что при определенных предположениях относительно целевых функций публики и центрального банка, в совершенном по подыграм равновесии уровень инфляции будет неоптимально высок. В рассмотренной задаче Парето-оптимальным уровнем инфляции является нулевая инфляция; однако если публика ожидает нулевую инфляцию, то у центрального банка будет стимул обмануть эти ожидания для того, чтобы добиться увеличения ВВП. Публика, зная, что центральный банк будет вести себя подобным образом, предвидит такой (положительный) уровень инфляции, что выигрыш центрального банка от установки уровня инфляции выше ожидаемого полностью компенсируется его проигрышем от высокой инфляции.

Существуют ли силы, могущие заставить центральный банк *достоверно* обещать публике низкую инфляцию? Один из таких механизмов — репутационный. Если центральный банк обладает репутацией принципиального борца с высокой инфляцией, то публика может верить его обещаниям не поднимать цены. Обманув ожидания публики однажды, центральный банк сможет добиться временного повышения ВВП, но при этом потеряет репутацию: в будущем публика будет знать, что центральный банк будет пытаться стимулировать ВВП при помощи кредитно-денежной политики, и будет ожидать высокую инфляцию. Таким образом, репутация принципиального сторонника низкой инфляции может быть выгодна для руководителя центрального банка, *даже если* эта репутация не соответствует действительности. Это рассуждение впервые было предложено Бэрро (1986) и Бакусои и Дриффилом (1985). Теоретико-игровая модель, рассмотреная здесь и формализующая это рассуждение, взята из учебника Ромера (2006, стр. 511–514).

Пусть взаимодействие центрального банка и публики происходит на протяжении двух периодов. В каждый момент времени $t = 1, 2$, публика формирует инфляционный ожидания π^e_t; затем центральный банк определяет уровень инфляции π_t. ВВП в момент времени t задается уравнением Филлипса

$$y_t = \bar{y} + b(\pi_t - \pi^e_t). \tag{4.60}$$

В игре существует три игрока: публика в момент времени $t = 1$, публика в момент времени $t = 2$, и центральный банк. Выигрыш публики в момент времени t равен

$$U_{pt} = -(\pi^e_t - \pi_t)^2. \tag{4.61}$$

Центральный банк может быть двух типов. Первый тип — оппортунист, имеющий функцию полезности

$$U_b = y_1 - \bar{y} - \frac{a}{2}(\pi_1 - \pi_o)^2 + \beta\left(y_2 - \bar{y} - \frac{a}{2}(\pi_2 - \pi_o)^2\right), \tag{4.62}$$

[3] Приведенная здесь модель является адаптацией работы Асемоглу, Егорова и Сонина (2011). В исходной работе модель строилась несколько по-другому. Предполагалось, что избиратели не наблюдают политику y_1, реализуемую президентом в момент времени $t = 1$. Вместо этого им становится известна величина $z = y_1 + e$, где e — не наблюдаемая избирателями случайная величина, распределенная с нулевым матожиданием и ненулевой плотностью $f(\cdot)$ на $(-\infty, \infty)$. Таким образом, если y_{1m} и y_{1e} — политика, реализуемая президентом каждого из двух типов, то для любого y_1, вера определяется однозначно по правилу Байеса: $\mu(z_1) = \frac{f(z-y_1)}{f(z-y_1)+f(z-y_2)}$. Это дает нам единственное равновесие, но несколько усложняет доказательство его существования и анализ сравнительной статики. В исходной формулировке, качественная зависимость политики «народного» кандидата от параметров модели та же, что и для условия (4.55).

где $\pi^o = 0$ — оптимальный уровень инфляции[4], $\beta < 1$ — фактор дисконта. Второй тип центрального центрального банка — принципиальный борец с инфляцией, который устанавливает $\pi_1 = \pi_2 = 0$ вне зависимости от того, каковы инфляционные ожидания публики. Пусть p — вероятность того, что центральный банк окажется оппортунистом.

Если центральный банк является принципиальным борцом с инфляцией, то его поведение не определяется внутри модели. Нас интересует, как поведет себя банк-оппортунист. Рассмотрим, сначала, поведение оппортуниста в момент времени $t = 2$. Перепишем его целевую функцию как

$$U_b = b(\pi_1 - \pi_1^e) - \frac{a}{2}\pi_1^2 + \beta\left(b(\pi_2 - \pi_2^e) - \frac{a}{2}\pi_2^2\right). \tag{4.63}$$

Максимизируя (4.63) по π_2, получим

$$\pi_2^* = \frac{b}{a}. \tag{4.64}$$

Найдем теперь π_2^e. Пусть λ — вера публики относительно того, что центральный банк имеет тип 1 после момента времени $t = 1$. Математическое ожидание выигрыша публики в момент времени $t = 2$ будет равно

$$E(U_p 2) = -(1-\lambda)\pi_2^e - \lambda\left(\pi_2^e - \frac{b}{a}\right)^2. \tag{4.65}$$

Соответственно уровень ожидаемой инфляции, максимизирующий $E(U_{p2})$, будет равен

$$\pi_2^e(\lambda) = \lambda\frac{b}{a}. \tag{4.66}$$

Найдем λ. Очевидно, что если $\pi_1 \neq 0$, то $\lambda = 0$ (поскольку принципиальный банкир всегда выбирает нулевую инфляцию). Очевидно, что для банкива второго типа любая стратегия, предполагающая $\pi_1 \notin \{0, \frac{b}{a}\}$, будет доминироваться стратегией, в которой $\pi_1 = \frac{b}{a}\}$. Следовательно, у банкира второго типа π_1 может принимать только два значения: 0 и $\frac{b}{a}$. Пусть банкир второго типа играет стратегию, которая предполагает выбор $\pi_1 = 0$ с вероятностью q. Вера публики может быть найдена по правилу Байеса

$$\lambda = \frac{qp}{1-p+qp}, \tag{4.67}$$

где qp — вероятность того, что банк будет иметь первый тип *и* выберет нулевую инфляцию, $1-p$ — вероятность того, что банк будет иметь второй тип (что автоматически означает $\pi_1 = 0$).

Найдем выигрыш центрального банка, если в момент времени $t = 1$ он выбирает $\pi_1 = 0$. Мы получим

$$\begin{aligned} W_0(q) &= -b\pi_1^e + \beta\left(b\left(\frac{b}{a} - \lambda\frac{b}{a}\right) - \frac{a}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2\right) \\ &= \beta\frac{b^2}{a}\left(\frac{1}{2} - \frac{qp}{1-p+qp}\right) - b\pi_1^e. \end{aligned} \tag{4.68}$$

Если в момент времени $t = 1$ центральный банк выбирает $\pi_1 = \frac{b}{a}$, то его выигрыш будет равен

$$\begin{aligned} W_1(q) = W_1 &= \left(b\left(\frac{b}{a} - \pi_1^e\right) - \frac{a}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2\right) - \beta\frac{a}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{b^2}{a}(1-\beta) - b\pi_1^e. \end{aligned} \tag{4.69}$$

[4]Эта функция полезности немного отличается от функции (2.65), рассмотренной в примере на стр. 86–89. В данном случае функция полезности центрального банка является линейной по ВВП (а не квадратичной, как в прошлом примере). Это упрощение не критично для основного результата, который основан на предположении, что целевая функция центрального банка нелинейно зависит от уровня инфляции.

Заметим, что $W_0(q)$ убывает по q, W_1 не зависит от q. Всего возможно три равновесия:

1. Равновесие, в котором $q = 0$, то есть $\pi_1 = 0$. Это возможно, если $W_0(1) \geq W_1$, или
$$\beta \leq \frac{1}{2}. \tag{4.70}$$

2. Равновесие, в котором $q = 1$, то есть $\pi_1 = \frac{b}{a}$. Это возможно, если $W_0(0) \leq W_1$, или
$$\beta \geq \frac{1}{2}\frac{1}{1-p}. \tag{4.71}$$

3. Равновесие, в котором $q \in (0, 1)$, то есть центральный банк играет смешанную стратегию. Вероятность q будет решением уравнения
$$W_0(q) = W_1, \tag{4.72}$$
или
$$q = \frac{1-p}{p}(2\beta - 1). \tag{4.73}$$
Такое равновесие возможно, если
$$\frac{1}{2} < \beta < \frac{1}{2}\frac{1}{1-p}. \tag{4.74}$$

Идея, изложенная в этой модели, достаточно проста (низкая инфляция сегодня означает низкие инфляционные ожидания на завтрашний день), и устойчива к альтернативным специфицифям модели. Одним из выводов сравнительной статики состоит в том, что на инфляцию влияет фактор дисконта центрального банка: низкоинфляционное равновесие возможно только при при достаточно высоком β, то есть если банк ценит будущий период достаточно высоко по сравнению с сегодняшним.

Эмпирические исследования подтверждают предположение о том, что предпочтения центрального банка могут влиять на уровень инфляции. Алесина и Саммерс (1993) показали, что инфляция значимо зависит от степени независимости центрального банка. В тех странах, где председатель центрального банка назначается редко и на долгий срок, а также не вынужден отчитываться перед парламентом или исполнительной властью, инфляция ниже. Действительно, если центральный банк подвержен влиянию политической конъюнктуры (которая может требовать, например, краткосрочных мер по увеличению темпов роста экономики), то в таких случаях ожидаемый (и, следовательно, реальный) уровень инфляции будет выше.

4.3.4 Подотчетность политиков и выборы.

Бизли и Смарт (2007), Бэрро (1971), Фереджон (1986)

Рассмотрим некоторую страну, в которой политик (президент) должен, в течение двух электоральных циклов, принять решение относительно того, как распределять налоги, собранные с населения, между производством общественных благ и нецелевым использованием (то бишь воровством). Пусть игра имеет следующую структуру.

Этап 1 Природа определяет типы действующего президента $t_1 \in \{b, g\}$ и его конкурента на выборах $t_1' \in \{b, g\}$. Каждый политик может быть одного из двух типов: честный (g), или коррупционер (b). Типы политиков независимы, причем $P(t_1 = g) = P(t_2 = g) = \pi$.

Этап 2 Действующий президент решает, какова должна быть ставка налогообложения $\tau_1 \in [0,1]$, и как следует собранные налоги перераспределить между производством общественных благ и нецелевыми расходами s_1. Пусть

$$\tau_1 = \theta G_1 + s_1, \tag{4.75}$$

где G_1 — объем производства общественного блага во время первого электорального цикла, θ — издержки производства 1 единицы общественного блага, s_1 — объем коррупции в первом электоральном цикле. Величина θ может принимать значения $\theta \in \{H, L\}$, причем $P(\theta = H) = q$. Значение этой величины известно только действующему президенту.

Этап 3 Проходят выборы. Публика выбирает, кто должен стать следующим президентом: действующий президент, или претендент.

Этап 4 Наступает следующий электоральный цикл. Новоизбранный президент решает, какой должна быть ставка налогообложения $\tau_2 \in [0,1]$, и как следует собранные налоги перераспределить между производством общественных благ и нецелевыми расходами s_2. Как и раньше, действует ограничение

$$\tau_2 = \theta G_2 + s_2, \tag{4.76}$$

Целевая функция публики в момент времени $s = 1, 2$ равна

$$U_s^p = 1 - \tau_s + u(G_s), \tag{4.77}$$

где $u' > 0$, $u'' < 0$.[5] Определим задачу максимизации благосостояния публики при данном $\theta \in \theta_H, \theta_L$:

$$\max_{s,G,t} U^p = 1 - \tau + u(G) \text{ при ограничениях } \tau = \theta G + s,\ s \geq 0 \text{ и } \tau \in [0,1]. \tag{4.78}$$

Очевидно, что в таком случае $s = 0$. Мы будем получим условия первого порядка

$$u'(G) = \theta \tag{4.79}$$

при

4.3.5 Моральный риск.

Вы — хозяин небольшой фирмы, торгующей воздушными шариками в парке Горького. Для того, чтобы ваш павильон работал, вам необходим продавец. Однако, взяв на работу продавца, вы не можете контролировать качество его работы. Например, продавец может целый день спать за прилавком, а может и добросовестно относиться к своим обязанностям, зазывая покупателей и стараясь продать как можно больше шариков. Вам известен только результат работы продавца: выручка. Как вас следует строить свои отношения с продавцом? Как компенсация, которую вы платите продавцу, должна зависеть от суммы выручки, которая определяется числом проданных воздушных шариков, если вы хотите максимизировать свою прибыль, при этом добившись, чтобы продавец все-таки работал добросовестно?

Существенная сложность этой задачи состоит в том, что количество проданных шариков зависит не только от добросовестности продавца, но и от других факторов, также не наблюдаемых Вами: числа посетителей в парке, их настроении, погоде, и так далее. Здесь существенен

[5] Выигрыш публики есть квазилинейная функция от объема потребления частных благ $1 - t_s$ и объема потребления общественных благ G_s. Мы, без потери общности, предполагаем, что облагаемый налогом доход равен 1.

следующий вопрос: существует ли такой (низкий) объем продаж, который ни при каких обстоятельствах не может быть достигнут, если продавец ведет себя добросовестно, но возможен, если продавец ленится? В таком случае вам, хозяину, достаточно назначить продавцу достаточно суровое наказание за объем продаж, который может быть достигнут *только* в случае недобросовестного исполнения продавцом своих обязанностей. Добросовестное исполнение продавцом своих обязанностей всегда связано с дополнительными издержками; однако если возможна ситуация, в которой продавца можно уличить в недобросовестном поведении, то при достаточно суровом наказании он будет работать добросовестно (конечно же, при условии, что его ожидаемая зарплата будет не ниже, чем альтернативный выигрыш, который он может получить, вовсе отказавшись от работы).

Итак предположим[6], что игра между хозяином и продавцом имеет два периода. В момент времени $t = 1$ хозяин объявляет продавцу, сколько он ему заплатит в зависимости от того, какую выручку π он покажет в конце дня. В момент времени $t = 2$ продавец решает, стоит ли ему работать добросовестно ($e = H$), работать недобросоветсно ($e = L$), или не работать ($e = N$). Прибыль, показанная продавцом в конце дня, есть случайная величина, распределение которой зависит от уровня усилий продавца e. Пусть $F(\cdot|H)$ и $F(\cdot|L)$ функции распределения выручки при добросовестном и недобросовестном поведении продавца. Мы будем считать, что в обоих случаях π распределен на $[0, 1]$, причем оба распределения имеют ненулевую плотность $f(\cdot|H)$ и $f(\cdot|L)$. Добросовестная работа приносит большую выручку; это отражено в нашем предположении, что $F(\pi|H) \le F(\pi|L)$ для всех $\pi \in [0, 1]$.

Рассмотрим сначала наиболее простой вариант задачи, когда хозяин имеет возможность наблюдать за действиями продавца. В таком случае, зарплата продавца может зависеть как от выручки, которую он показал, так и от его добросовестности. Пусть $w_H(\cdot)$ и $w_L(\cdot)$ — зарплаты (зависящие от π), которые хозяин выплачивает в том случае, если продавец выбирает $e = H$ либо $e = L$.

Выигрыш продавца зависит от его зарплаты и от его добросовестности. Пусть $v(w)$ — выигрыш продавца при зарплате w и недобросовестном поведении, $v(w) - c$ — при зарплате w и добросовестном поведении. Будем считать, что $v' > 0$ и $v'' < 0$. Таким образом, ожидаемый выигрыш продавца равен

$$U_2 = \begin{cases} \int v(w_H(\pi))f(\pi|H)d\pi - c, & e = H \\ \int v(w_L(\pi))f(\pi|L)d\pi, & e = L \\ \bar{u}, & e = N, \end{cases} \tag{4.80}$$

где $\bar{u}$ — гарантированный уровень зарплаты, которую продавец может получить на альтернативной работе. Выигрыш хозяина будет

$$U_2 = \begin{cases} \int(\pi - w_H(\pi))f(\pi|H)d\pi, & e = H \\ \int(\pi - w_L(\pi))f(\pi|L)d\pi, & e = L \\ 0, & e = N. \end{cases} \tag{4.81}$$

Предположим, что хозяин хочет добиться уровня усилий $e = L$. Его задача — найти $w_L(\pi)$ и $w_H(\pi)$, максимизирующий

$$\int (\pi - w_L(\pi))f(\pi|L)d\pi \tag{4.82}$$

при ограничениях

$$\int v(w_H(\pi))f(\pi|H)d\pi - c \le \int v(w_L(\pi))f(\pi|L)d\pi \tag{4.83}$$

и

$$\int v(w_L(\pi))f(\pi|L)d\pi \ge \bar{u}. \tag{4.84}$$

[6]Этот пример следует Масколлелю, Уинстону и Грину (1993, глава 14.B).

Легко убедиться (что предлагается сделать в качестве упражнения), что решением этой задачи будет установление заработной платы, не зависящей от объема продаж: $w_L(\pi) = \bar{u}$ и $w_H(\pi) \leq \bar{u}+c$. Аналогично, если хозяин хочет, чтобы продавец выбрал $e = H$, то он установит заработную плату $w_H = \bar{u} + c$ и $w_L \leq \bar{u}$. Таким образом, будет верно следующее:

1. Полезность продавца всегда равна полезности на альтернативной работе $\bar{u}$.

2. Предложенный хозяиным контракт парето-эффективен, то есть он максимизирует суммарный выигрыш продавца и хозяина $U_1 + U_2$ по всем возможным $e \in \{L, H\}$ и $w(\cdot)$.

Намного интересней тот случай, когда любой уровень продаж, возможный при недобросовестном поведении, также возможен, если продавец ведет себя добросовестно. У него всегда есть «отмазка». Как бы мало товара он не продал, он всегда может сослаться на то, что он старался, как мог, но день выдался хуже некуда. В таком случае, если слишком сильно наказывать продавца за низкие продажи, то можно и вовсе лишиться работника, так как низкие продажи возможны и в том случае, если он работает добросовестно. Теперь, заработная плата не может зависеть от прилагаемых продавцом усилий, но только от показанной им выручки. Обозначим заработную плату, предлагаемую хозяиным, за $w(\cdot)$. Ожидаемые выигрыши продавца и хозяина будут

$$U_2 = \begin{cases} \int v(w(\pi))f(\pi|H)d\pi - c, & e = H \\ \int v(w(\pi))f(\pi|L)d\pi, & e = L \\ \bar{u}, & e = N, \end{cases} \tag{4.85}$$

где $\bar{u}$ — гарантированный уровень зарплаты, которую продавец может получить на альтернативной работе. Выигрыш хозяина будет

$$U_2 = \begin{cases} \int(\pi - w(\pi))f(\pi|H)d\pi, & e = H \\ \int(\pi - w(\pi))f(\pi|L)d\pi, & e = L \\ 0, & e = N. \end{cases} \tag{4.86}$$

Сразу заметим, что хозяин всегда может предложить контракт, при котором работник выберет уровень усилий $e = L$. Пусть зарплата не зависит от выручки и обеспечивает полезность, равную полезности на альтернативной работе: $\bar{w} = v^{-1}(\bar{u})$. При такой стратегии хозяина, одним из равновесных ответов продавца будет $e = L$.

Возможен ли контракт, при котором работник выберет уровень усилий $e = H$? При данном $w(\pi)$, необходимо, чтобы выполнялось следующие условия:

$$\int v(w(\pi))f(\pi|H)d\pi - c \;\; \geq \;\; \int v(w(\pi))f(\pi|L)d\pi \tag{4.87}$$

$$\int v(w(\pi))f(\pi|H)d\pi - c \;\; \geq \;\; \bar{u}. \tag{4.88}$$

Соответственно, в совершенном по подыграм равновесии хозяин должен решать следующую задачу:

$$\max_{w(\cdot)} \int (\pi - w(\pi))f(\pi|H)d\pi \tag{4.89}$$

при условиях (4.87) и (4.88), которые должны выполняться при всех $\pi \in [0, 1]$. Выпишем лагранжиан для этой задачи:

$$\begin{aligned} L = \int(\pi - w(\pi))f(\pi|H)d\pi \;\; &+ \;\; \lambda\left(\int v(w(\pi))f(\pi|H)d\pi - c - \int v(w(\pi))f(\pi|L)d\pi\right) + \\ &+ \;\; \mu\left(\int v(w(\pi))f(\pi|H)d\pi - c - \bar{u}\right). \end{aligned} \tag{4.90}$$

Условием первого порядка должно быть

$$\frac{\partial L}{\partial w(\pi)} = 0 \tag{4.91}$$

для всех $\pi \in [0, 1]$. Следовательно, в любом совершенном по подыграм равновесии, в котором $e = H$, мы должны иметь

$$-f(\pi|H) + \lambda v'(w(\pi))(f(\pi|H) - f(\pi|L)) + \mu v'(w(\pi))f(\pi|H) = 0, \tag{4.92}$$

или

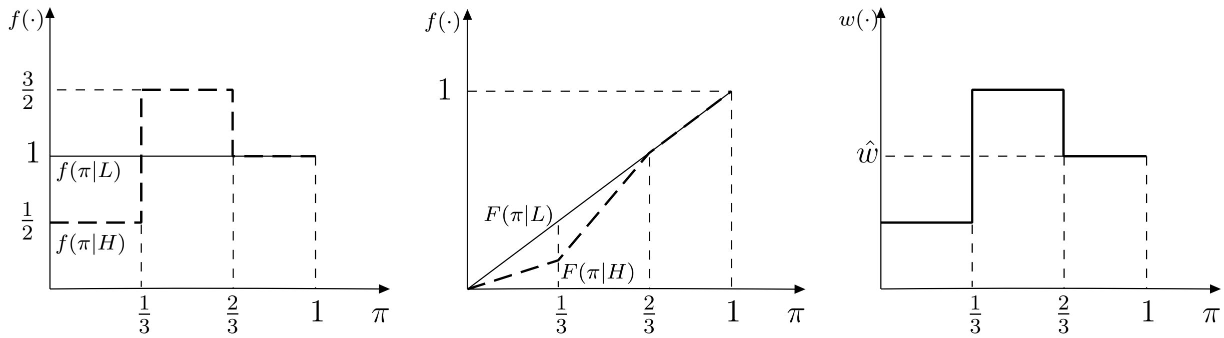
$$\frac{1}{v'(w(\pi))} = \mu + \lambda\left(1 - \frac{f(\pi|H)}{f(\pi|L)}\right) \tag{4.93}$$

для каких-то $\mu \geq 0$, $\lambda \geq 0$.

Убедимся, что в любом равновесии мы должны иметь $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Так как $F(\pi|H) \leq F(\pi|L)$ для всех $\pi \in [0, 1]$, причем $F(0|H) = F(0|L) = 0$ и $F(1|H = F(1|L) = 1$, для какого-то $\pi \in (0, 1)$ мы должны иметь $f(\pi|L) > f(\pi|H)$. Но, если $\mu = 0$, то, в силу того, что $\lambda \geq 0$, мы получим $v'(w(\pi)) \leq 0$ для данного π, что противоречит нашему предположению, что $v' > 0$. Если же $\lambda = 0$, то w не зависит от π. Однако при фиксированной зарплате работник должен выбрать $e = L$.

Получается, что оба условия (4.87) и (4.88) выполняются как равенства. Из того, что $\mu > 0$ и $\lambda > 0$, следует такой интересный факт. Пусть $\hat{w}$ — решение уравнения $\frac{1}{v'(w)} = \lambda$, то есть зарплата при π, таком, что $f(\pi|H) = f(\pi|L)$. Тогда получается, что $w(\pi) < \hat{w}$ если $f(\pi|H) < f(\pi|L)$ и $w(\pi) > \bar{w}$, если $f(\pi|H) > f(\pi|L)$. Оптимальный контракт, предлагаемый владельцем, предлагает бóльшее вознаграждение за прибыль π *в том случае, если этот уровень прибыли более вероятен при добросовестном поведении продавца.* Уровень зарплаты при оптимальном контракте при прибыли π зависит от $\frac{f(\pi|H)}{f(\pi|L)}$ — отношения правдоподобия получения такого уровня прибыли при добросовестном и недобросовестном поведении продавца.

Это не означает, что более высокая прибыль обязательно должна компенсироваться более высокой зарплатой. Напротив, рассмотрим пример на рисунках 4.14(a)-4.14(c).



(a) Функция плотности распределения прибыли (b) Функция распределения прибыли (c) Зарплата в зависимости от прибыли

В этом случае, прибыль от 0 до $\frac{1}{3}$ более вероятна при низком уровне усилий, прибыль от $\frac{1}{3}$ до $\frac{2}{3}$ — при высоком, и прибыль от $\frac{2}{3}$ до 1 равновероятна при обоих уровнях усилий. Соотвественно, вознаграждение за прибыль в диапазоне от $\frac{1}{3}$ до $\frac{2}{3}$ должно быть самым высоким, а за прибыль в диапазоне от 0 до $\frac{1}{3}$ — самым низким. Согласно условию (4.93), при равновесном контракте $w(\pi)$, зарплата есть линейная функция от отношения правдоподобия $\frac{f(\pi|H)}{f(\pi|L)}$. Монотонность отношения правдоподобия (см. Милгром, 1981) не следует из того, что $F(\pi|H) \leq F(\pi|L)$.

Мы пришли к следующему выводу: Для того, чтобы обеспечить добросовестность усилий со стороны продавца и при этом максимизировать свою прибыль, хозяин должен предложить контракт, который обеспечивает продавцу уровень выигрыша $\bar{u}$ (4.88) и делает его безразличным между выбором $e = L$ и $e = H$ (4.87). При этом ожидаемое значение заработной платы будет больше, чем в том случае, когда уровень усилий продавца наблюдаем (см. задачу **??**). Будет ли при этом прибыль хозяина выше или ниже, чем в том случае, когда он просто предложит продавцу зарплату, равную $\bar{u}$ (и, таким образом, максимизирует свою прибыль при уровне усилий $e = L$)? Это зависит от конкретных значений параметров нашей модели.

Рассмотрим пример. Пусть π принимает значения от 0 до 1, причем функции плотности распределения прибыли имеют вид

$$\begin{aligned} f(\pi|L) &= 1 \\ f(\pi|H) &= \begin{cases} \frac{1}{2} & ,\pi \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{3}{2} & ,\pi \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{aligned} \tag{4.94}$$

Пусть полезность продавца, в зависимости от его зарплаты, равна $v(w) = \sqrt{(}w)$.

Найдем ожидаемый доход хозяина при низком и высоком уровне усилий продавца. Мы имеем

$$\begin{aligned} R_L &= \int \pi f(\pi|L) d\pi = \frac{1}{2} \\ R_H &= \int \pi f(\pi|H) d\pi = \frac{5}{8}. \end{aligned} \tag{4.95}$$

Пусть хозяин решает предложить продавцу контракт, обеспечивающий уровень усилий $e = L$. Мы будем иметь $v(\bar{w}) = \bar{u}$, или $\bar{w} = \bar{u}^2$. Такой контракт будет приносить продавцу ожидаемую прибыль

$$\Pi_L = R_L - \bar{w} = \frac{1}{2} - \bar{u}^2, \tag{4.96}$$

причем прибыль будет положительной при $\bar{u} < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Пусть теперь хозяин решил предложить контракт, при котором продавец выберет уровень усилий $e = H$. Согласно (4.93), он предложит зарплату w_1 если продавец покажет прибыль $\pi \in [0, \frac{1}{2})$, и зарплату $w_2 > w_1$ если $\pi \in [\frac{1}{2}, 1]$. Так как условия (4.87) и (4.88) оба выполняются со знаком равенства, мы можем найти w_1 и w_2 напрямую. Мы имеем

$$\int v(w(\pi)) f(\pi|H) d\pi = \frac{1}{4}\sqrt{w_1} + \frac{3}{4}\sqrt{w_2} \tag{4.97}$$

и

$$\int v(w(\pi)) f(\pi|L) d\pi = \frac{1}{2}\sqrt{w_1} + \frac{1}{2}\sqrt{w_2}. \tag{4.98}$$

Подставив полученные величины в (4.87) и (4.88), выполняемые со знаком равенства, мы получим

$$\begin{aligned} w_1 &= (\bar{u} - 2c)^2, \\ w_2 &= (\bar{u} + 2c)^2. \end{aligned} \tag{4.99}$$

Ожидаемая прибыль хозяина при этом будет равна

$$\Pi_H = R_H - \frac{1}{4}w_1 - \frac{3}{4}w_2 = \frac{5}{8} - \bar{u}^2 - 4c^2 - 2\bar{u}c. \tag{4.100}$$

Итак, в равновесии хозяин предложит следующий контракт, в зависимости от c и $\bar{u}$:

1. $\frac{1}{8} \geq 4c^2 + 2\bar{u}c$, $\frac{5}{8} - \bar{u}^2 - 4c^2 - 2\bar{u}c \geq 0$: Контракт с $e = H$, предлагающий w_1 при $\pi \in [0, \frac{1}{2})$ и w_2 при $\pi \in [\frac{1}{2}, 1]$.

2. $\frac{1}{8} < 4c^2 + 2\bar{u}c$, $\bar{u} < \frac{1}{\sqrt{2}}$: Контракт с $e = L$, предлагающий $\bar{w}$ вне зависимости от прибыли.

3. Любой другой случай: Продавец не может обеспечить себе положительную прибыль. Например, он получает нулевую прибыль, предлагая зарплату, меньшую, чем $\bar{u}$.

Приложение.

Доказательство Теоремы 16 о существовании совершенного равновесия.

Сначала дадим два альтернативных определения совершенного равновесия. Первое из них приводится у Зелтена (1975), второе — у Майерсона (1978).

Пусть G — конечная игра в нормальной форме, $\epsilon < \epsilon_0 = \min_i \frac{1}{|S_i|}$. Пусть Σ_i^ϵ — множество всех смешанных стратегий игрока i, в котором каждая чистая стратегия играется с вероятностью, не меньшей, чем ϵ.

Определение 51 *Пусть G — игра в нормальной форме, $\epsilon < \epsilon_0$. Пусть $G^\epsilon = \langle I, \Sigma^\epsilon, u\rangle$, $\sigma^{*\epsilon}$ — равновесие в игре G^ϵ. Назовем его ϵ-ограниченным равновесием.*

Совершенное равновесие можно определить относительно σ^ϵ:

Определение 52 *Пусть $\epsilon_k \to 0$ — последовательность, $\epsilon_k < \epsilon_0$. Будем говорить, что σ — совершенное равновесие, если он является пределом какой-то последовательности $\sigma^{*\epsilon_k}$.*

Для того, чтобы ввести третье по счету определение совершенного равновесия, понадобится еще одно вспомогательное понятие.

Определение 53 *Профиль стратегий σ^ϵ называется ϵ-совершенным равновесием, если он является вполне смешанным, и если для всех i, для всех $s_i \in S_i$, если существует такое $s_i' \in S_i$, что*

$$u_i(s_i, \sigma_{-i}^\epsilon) < u_i(s_i', \sigma_{-i}^\epsilon),$$

то $\sigma_i^\epsilon(s_i) \leq \epsilon$.

Здесь не задана минимальная вероятность, с которой играются чистые стратегии каждого из игроков и не требуется, чтобы равновесная стратегия была наилучшим ответом на профиль стратегий других игроков (как в ϵ-ограниченном равновесии в Определении 51), но требуется, чтобы «неэффективные» стратегии игрались с малой вероятностью. Определим совершенное равновесие как предел ϵ-совершенных:

Определение 54 *Профиль стратегий σ^* называется совершенным равновесием, если существует последовательность $\epsilon_k \to 0$, $\epsilon_k < \epsilon_0$, что σ^* будет пределом последовательности ϵ_k-совершенных равновесий:*

$$\sigma^* = \lim_{k\to\infty} \sigma^{\epsilon_k}$$

Опять же, выбирая разные последовательности мы будем получать различные равновесия. Теперь докажем эквивалентность всех трех определений совершенных равновесий.

Лемма 8 *Определения 42, 52, 54 совершенного равновесия эквивалентны.*

Доказательство леммы 8.

Докажем, что из определения 52 следует определение 54, из 54 — 42, и, замыкая круг, из 42 следует 52.

1. Определение 52⇒ Определение 54. Пусть σ^ϵ — ϵ-ограниченное равновесие. Докажем, что оно будет ϵ-совершенным. Первое свойство определения 53 выполняется автоматически, а второе следует из свойств максимума линейной функции. Пусть для каких-то двух чистых стратегий i-го игрока s_i' и s_i'' верно, что $u_i(s_i', \sigma_{-i}^\epsilon) < u_i(s_i'', \sigma_{-i}^\epsilon)$. Пусть стратегия s_i' играется с вероятностью $\sigma_i(s_i')$, строго большей, чем ϵ. Определим

$$\bar{\sigma}_i(s_i) = \begin{cases} \sigma_i^\epsilon(s_i), & \text{если } s_i \neq s_i',\ s_i \neq s_i'', \\ \varepsilon, & \text{если } s_i = s_i', \\ \sigma_i^\epsilon(s_i'') + \sigma_i^\epsilon(s_i') - \epsilon, & \text{если } s_i = s_i''. \end{cases}$$

Заметим, что $\bar{\sigma}_i \in \Sigma_i^\epsilon$. Так как

$$u_i(s_i', \sigma_{-i}^\epsilon) < u_i(s_i'', \sigma_{-i}^\epsilon) \text{ и } \sigma_i^\epsilon(s_i') > \epsilon, \tag{4.101}$$

получим

$$(\sigma_i^\epsilon(s_i') - \epsilon)u_i(s_i', \sigma_{-i}^\epsilon) < (\sigma_i^\epsilon(s_i') - \epsilon)u_i(s_i'', \sigma_{-i}^\epsilon), \tag{4.102}$$

или

$$\sigma_i^\epsilon(s_i')u_i(s_i', \sigma_{-i}^\epsilon) + \epsilon u_i(s_i'', \sigma_{-i}^\epsilon) < \epsilon u_i(s_i', \sigma_{-i}^\epsilon) + \sigma_i^\epsilon(s_i')u_i(s_i'', \sigma_{-i}^\epsilon), \tag{4.103}$$

из чего следует $u_i(\sigma^\epsilon) < u_i(\bar{\sigma}_i, \sigma_{-i}^\epsilon)$.

Это противоречит предположению о том, что σ_i^ϵ является наилучшим из множества Σ_i^ϵ ответом на σ_{-i}^ϵ. Следовательно, любое ϵ - ограниченное равновесие является ϵ - совершенным. Для завершения доказательства этого пункта остаётся лишь заметить, что в случае полного совпадения сходящихся последовательностей их пределы равны.

2. Определение 54⇒ Определение 42. Возьмем последовательность $\epsilon_k \to 0$ и σ^{ϵ_k} — соответствующею последовательность ϵ_k - совершенных равновесий, удовлетворяющих определению 54. Тогда, используя свойства предела последовательности, разобьём все чистые стратегии i-го игрока на два класса: те, для которых $\sigma_i^{\epsilon_k}(s_i) > d$ для всех $k \geq k_0$ и какой-то $d > 0$, не зависящей от k (обозначим этот класс как S_i'), и те, для которых $\sigma_i^{\epsilon_k}(s_i) \to 0$ при $k \to \infty$ (обозначим этот класс как S_i''). Заметим, что в смешанной стратегии σ_i^* с положительной вероятностью играбтся только чистые стратегии из S_i'. Множество S_i' непусто в силу конечности числа стратегий i-го игрока и того, что $\sum\limits_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$. Тогда любая стратегия i-го игрока s_i' из множества S_i' должна быть наилучшим ответом на профиль смешанных стратегий других игроков $\sigma_{-i}^{\epsilon_k}$ при $k \geq k_0$. Действительно, иначе существовала бы такая смешанная стратегий $\bar{\sigma}_i \in \Sigma_i$, что $u_i(\bar{\sigma}_i, \sigma_{-i}^{\epsilon_k}) > u_i(s_i', \sigma_{-i}^{\epsilon_k})$. Но отсюда следует существование чистой стратегии i-го игрока $\bar{s}_i \in S_i$, для которой выполнено:

$$u_i(\bar{s}_i, \sigma_{-i}^{\epsilon_k}) > u_i(s_i', \sigma_{-i}^{\epsilon_k}).$$

Тогда, согласно определению 54, выполняется $\sigma_i^{\epsilon_k}(s_i') < \epsilon_k$ и не может быть такого, что $\sigma_i^{\epsilon_k}(s_i') > d$. Мы пришли к противоречию.

Так как любая стратегий из множества S_i' является наилучшим ответом на последовательность профилей $\sigma_{-i}^{\epsilon_k}$ при $k \geqslant k_0$, то σ_i^* тоже является наилучшим ответом на любой элемент данной последовательности.

3. Определение 42⇒ Определение 52. Пусть σ_k — последовательность профилей вполне смешанных стратегий, отвечающих определению 42, σ^* — предел этой последовательности. Снова разобьём все стратегии i-го игрока на два класса. Пусть $s_i \in S_i'$ если $\sigma^*(s_i) > 0$

и $s_i \in S_i''$ в противном случае. Заметим, что множество S_i' непусто. Для каждого $s_i \in S_i$ определим последовательность $\epsilon_k'(s_i)$ таким образом:

$$\epsilon_k'(s_i) = \begin{cases} 1/k, & \text{если } s_i \in S_i', \\ \sigma_k(s_i), & \text{если } s_i \in S_i''. \end{cases} \tag{4.104}$$

Возьмем

$$\epsilon_k' = \max_{i, s_i \in S_i} \epsilon_k'(s_i) \tag{4.105}$$

По нашему предположению σ_i^* является наилучшим ответом на любой элемент последовательности σ_i^k, то есть решением задачи

$$\max_{\sigma_i \in \Sigma_i} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^{\epsilon}) \tag{4.106}$$

Из свойств максимальности линейной функции при линейных ограничениях, существует $c > 0$, такое, что:

$$u_i(s_i, \sigma_{-i}^{\epsilon}) = c \tag{4.107}$$

для всех $s_i \in S_i'$ и

$$u_i(s_i, \sigma_{-i}^{\epsilon}) \le c \tag{4.108}$$

для всех $s_i \in S_i''$.

Тогда по крайней мере одно из решений исходной системы будет иметь вид (при достаточно больших k):

$$\sigma^{\epsilon_k}(s_i) = \begin{cases} \sigma^*(s_i) - \frac{\sum\limits_{s_i \in S_i''} \epsilon_k(s_i)}{|S_i'|}, & \text{если } s_i \in S_i', \\ \epsilon_k(s_i), & \text{если } s_i \in S_i''. \end{cases} \tag{4.109}$$

Для завершения доказательства остаётся лишь заметить, что $\epsilon_k = \max\limits_{i, s_i \in S_i} \epsilon_k(s_i) \to 0$ при $k \to \infty$ и $\sigma^{\epsilon_k} \to \sigma^*$ при $\epsilon_k \to 0$.

Q.E.D.

Теперь мы готовы доказать теорему о существовании равновесия, совершенного относительно дрожащей руки. Для этого нам достаточно доказать существование равновесия, определенного любым из трех использованных нами способов. Проще всего это сделать, исходя из Определения 52:

Лемма 9 *Пусть G — игра в нормальной форме. Тогда для любой последовательности $\epsilon_k \to 0$, $\epsilon_k < \epsilon_0$, существует совершенное равновесие согласно определению (52).*

Доказательство леммы 9.

Для любой конечной игры G и для любого ϵ существует равновесие $\sigma^{*\epsilon}$ в игре G^{ϵ}. Действительно, множества стратегий Σ_i^{ϵ} являются выпуклыми и компактными; далее доказательство эквивалентно доказательству существования равновесия Нэша.

Множество всех смешанных профилей компактно (как декартово произведение конечного числа компактных множеств). По определению компактности, из любой последовательности точек компактного множества можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу этого множества. Выбрав такую подпоследовательность из последовательности $\sigma^{*\epsilon_k}$, получим σ^* качестве ее предела. Оно и будет равновесием по Определению 52. **Q.E.D.**

В силу Леммы 8, это утверждение эквивалентно утверждению Теоремы 16.

4.4 Задачи

1. Опишите множество всех слабо секвенциальных равновесий в игре «ослик Зелтена» (рисунок 4.2). Будут ли все эти равновесия сильно секвенциальными?

2. Докажите, что слабо доминируемые стратегии не могут входить в совершенное равновесие с положительной вероятностью.

3. Пусть G — игра в нормальной форме, причем ни у одного из игроков нет слабо доминируемых стратегий. Верно ли, что любое равновесие Нэша в игре G будет совершенным?

4. Пусть G — игра двух игроков с нулевой суммой, σ^* — равновесие Нэна. Верно ли, что σ^* — совершенное равновесие?

5. Рассмотрим игру на рисунке 4.14. Найдите все равновесия Нэша. Все слабо секвенциальные равновесия. Все сильно секвенциальные равновесия.

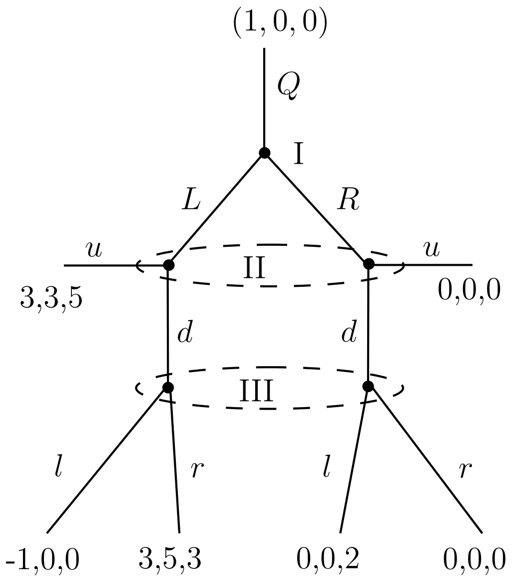


Рис. 4.14: Найдите все равновесия.

6. Найти все равновесия по Нэшу и все совершенные равновесия в следующей игре:

	L	C	R
U	$2,3$	$1,1$	$1,2$
M	$0,0$	$4,2$	$1,1$
D	$1,1$	$2,1$	$1,1$

7. Найдите совершенное байесово равновесие для следующей игры с сообщениями:

Игрок S

Игрок R		t_1	t_2	t_3
	a_1	$0,1$	$0,0$	$0,0$
	a_2	$1,0$	$1,2$	$0,0$
	a_3	$0,0$	$0,0$	$2,1$

Внимание: столбцы матрицы соответствуют *типам* игрока S. Все три типа игрока S равновероятны.

8. (Безли и Прат, 2006). Глава некоторого государства — президент — избиратеся всенародным голосованием. Известно, что президент может быть одного из двух типов: честный ($\theta = g$) или жулик ($\theta = b$). Пусть $\gamma \in (0, 1)$ — вероятность того, что президент является жуликом. Выигрыш каждого избирателя от нахождения честного кандидата у власти равен 1 за каждый период. Выигрыш от нахождения у власти жулика равен 0. Пусть в стране также существуют n СМИ. Перед выборами каждое СМИ i получает сигнал $s_i \in \{b, g\}$. Известно, что сигналы независимы, причем $P(s_i = g|\theta = g) = 1$ и $P(s_i = b|\theta = b) = q \in [0, 1]$. То есть q — вероятность того, что отдельно взятое СМИ получит достоверную информацию о том, что президент — жулик. Рассмотрим игру, происходящую в три этапа.

   Этап 1 Президенту становится известен его тип θ. СМИ получают сигналы s_i. Президент наблюдает сигналы; затем каждому СМИ i, получившему сигнал $s_i = b$, президент предлагает сумму $t_i \in [0, \infty)$ в обмен на то, что это СМИ не опубликует имеющуюся у него информацию.

   Этап 2 Каждое СМИ i, получившее сигнал $s_i = b$, решает, опубликовать имеющуюся информацию, или нет. Пусть I — все СМИ, получившие сигнал b, $\bar{I} \in I$ — все СМИ, получившие сигнал b и решившие опубликовать полученную информацию. Если $s_i = b$, то выигрыш СМИ i составит t_i/τ если оно решит не публиковать информацию, и $a/|\bar{I}|$ в обратном случае. Здесь $\tau > 0$ отражает транзакционные издержки, связанные с попыткой президента установить контроль над СМИ. Если хотя бы один СМИ публикует информацию, то всем избирателям становится известно, что президент — жулик.

   Избиратели голосуют, решая, переизбрать президента, или выбрать альтернативного кандидата, который является жуликом с вероянтостью γ. Выигрыш президента составляет $r - \sum_{i \in I} t_i$ если его переизбирают, и $-\sum_{i \in I} t_i$, если нет. Найдите равновесие в этой игре для двух случаев: когда СМИ наблюдает сигнал, получаемый другим СМИ, и когда сигналы — частная информация.

9. Рассмотрим задачу морального риска на стр. 181-185.

   (a) Пусть хозяин решил предложить контракт, при котором продавец выберет уровень усилий $e = H$. Покажите, что ожидаемая заработная плата будет выше, чем $\bar{u} + c$ — зарплата, которую продавец будет получать за $e = H$ в случае, если уровень его усилий наблюдаем.

   (b) Пусть продавец нейтрален к риску: $v(w) = w$. Как изменится оптимальный контракт? Будет ли он всегда Парето-эффективным?

10. Рассмотрим задачу сигнализирования на рынке труда на стр. 163-166. Предположим теперь, что производительность работника зависит от уровня образования, полученного им. Пусть работник, имеющий тип θ_H и уровень образования e, производит $y(e, \theta_H) = \theta_H + e\eta_H$, работник типа θ_L — $y(e, \theta_L) = \theta_L + e\eta_L$, где $\eta_H > \eta_L > 0$. Пусть издержки образования равны $c_H e^2$ для производительного работника, и $c_L e^2$ для непроизводительного, где $c_L > c_H > 0$.

    (a) Пусть $(e_L, e_H, \mu(e), w(e))$ — разделяющее равновесие. Чему равно e_L? Найдите максимальное и минимальное значение e_H. Какие ограничения накладываются на функцию веры $\mu(e)$?

    (b) Найдите e, при которых возможны смешивающие равновесия в этой задаче.

11. Рассмотрим задачу сигнализирования на рынке труда на стр. 163-166. Докажите, что существует единственное разделяющее равновесие, удовлетворяющее интуитивному крителию Чоу и Крепса (1987).

12. В игре с сообщениями выигрыши игроков зависят от t и a следующим образом:

		Игрок S	
		t_1	t_2
Игрок R	a_1	x,1	y,0
	a_2	z,0	w,1

При каких значениях x, y, w, и z в этой игре существует разделяющее равновесие? Найдите его.

13. (Крепс, Милгром, Робертс и Уилсон, 1982) Два человека, Петя и Вася, играют в дилемму заключенного два раза подряд. Их выигрыш на первом этапе и на втором этапе таковы: ??????????????????

1 этап

		Петя	
		Молчать	Сдаться
Вася	Молчать	$2,2$	$0,3$
	Сдаться	$3,0$	$1,1$

2 этап

		Петя	
		Молчать	Сдаться
Вася	Молчать	$2,2$	$0,x$
	Сдаться	$x,0$	$1,1$

где $x > 2$. Игроки могут быть двух типов:

(a) Оппортунист — обыкновенный стратегический игрок в нашем понимании.

(b) “Кремень” — в момент времени $t = 1$ молчит. В момент времени $t = 2$ сдается если и только если другой игрок сдался в момент времени $t = 1$.

Вася является оппортунистом. Петя — “кремень” с вероятностью p и оппортунист с вероятностью $1 - p$ (ему самому его тип известен). Найдите совершенное байесово равновесие в этой игре.

14. (Гиббонс 1992 стр. 250) Владимир и Михаил — партнеры по бизнесу. Доля Владимира составляет s, доля Михаила — $1 - s$. Они решили прекратить партнерство. Согласно договоренностям, сначала Владимир должен назвать Михаил свою оценку стоимости всего бизнеса p. Затем Михаил должен решить — либо купить долю Владимира за ps рублей, либо продать ему свою долю за $p(1 - s)$ рублей. Величина, в которую каждый партнер оценивает бизнес — частная информация, однако известно, что оценки — независимые случайные величины, равномерно распределенные на $[0, 1]$. Найдите совершенное байесово равновесие.

15. Рассмотрите модель политического популизма на стр. 175-178. Существуют ли в этой игре смешивающие равновесия?

16. (Нейлбаф, 1987). Иван Иванович думает, подать ли ему гражданский иск против Ивана Никифоровича. Если дело дойдет до суда, Иван Никифорович должен будет выплатить Ивану Ивановичу d рублей. Эта величина известна только Ивану Никифоровичу; с точки зрения Ивана Ивановича, она равноверно распределена на $[0, 1]$. Судебные издержки составляют $c < \frac{1}{2}$ для истца и 0 для защитника. Динамика игры такова.

(a) Истец (Иван Иванович) предлагает защитнику (Ивану Никифоровичу) решить дело полюбовно и заплатить ему s.

(b) Если защитник соглашается, то игра заканчивается. Выигрыши составляют s для истца и $-s$ для защитника.

(c) Если защитник отказался уладить дело, то истец решает, подать ли дело в суд, или отказаться от претензий. В случае суда, выигрыши сторон составляют $d-c$ для истца и $-d$ для защитника. Если истец отказывается судиться, то оба игрока получают нулевой выигрыш.

Найдите совершенное байесово равновесие, следуя такому плану:

(a) Рассмотрим третий этап игры. Предположим, что Иван Иванович считает, что Иван Никифорович согласится уладить дело если и только если $d > d^*$, для некоторой d^*. Как решение истца Ивана Ивановича зависит от d^*?

(b) Рассмотрим второй этап. Иван Никифорович получил предложение s и считает, что в случае отказа Иван Иванович подаст на него в суд с вероятностью p. Как решение Ивана Никифоровича зависит от p и s? Если игра начинается на втором этапе, то каким будет совершенное Байесово равновесие при $s < 2c$? При $S > 2c$?

(c) Найдите равновесие во всей игре при $c < \frac{1}{3}$ и при $\frac{1}{3} > c > \frac{1}{2}$.

17. В игре с сообщениями на стр. 172–174, игрок R решил делегировать игроку S право принимать решение. То есть теперь мы имеем $a = t + b$. Увеличится ли выигрыш игрока R в результате такого перераспределения полномочий? Изменится ли ваш ответ, если $u_R = -|a - t|$?

18. (Маккарти и Мейровиц, 2007, стр. 249) Существуют два игрока: Общество и правящий им диктатор. В каждый из моментов времени $t = 1, 2$ общество решает, стоит ли ему восставать против диктатора (R), либо не восставать (C). Если общество восстало (R), то диктатор принимает решение: r (применить репрессии), либо a (пойти на уступки). Если общество не восстает, то диктатор ничего не делает в этот момент времени. Выигрыш общества в каждый момент времени составляет 1 если диктатор идет на уступки, -1 если он применяетрепрессии, и 0 если восстания не происходит. Существуют два состояния природы, соответствующие характеру диктатора: мягкому (M) или жесткому (H). Выигрыш мягкого диктатора составляет 0 в случае, если протестов не происходит, -2 в случае уступок, и -3 в случае применения им репрессивных мер. Выигрыш жесткого диктатора в каждом из этих трех случаев составляет 0, -3 и -2. Пусть p_0 — вероятность того, что диктатор является мягким.

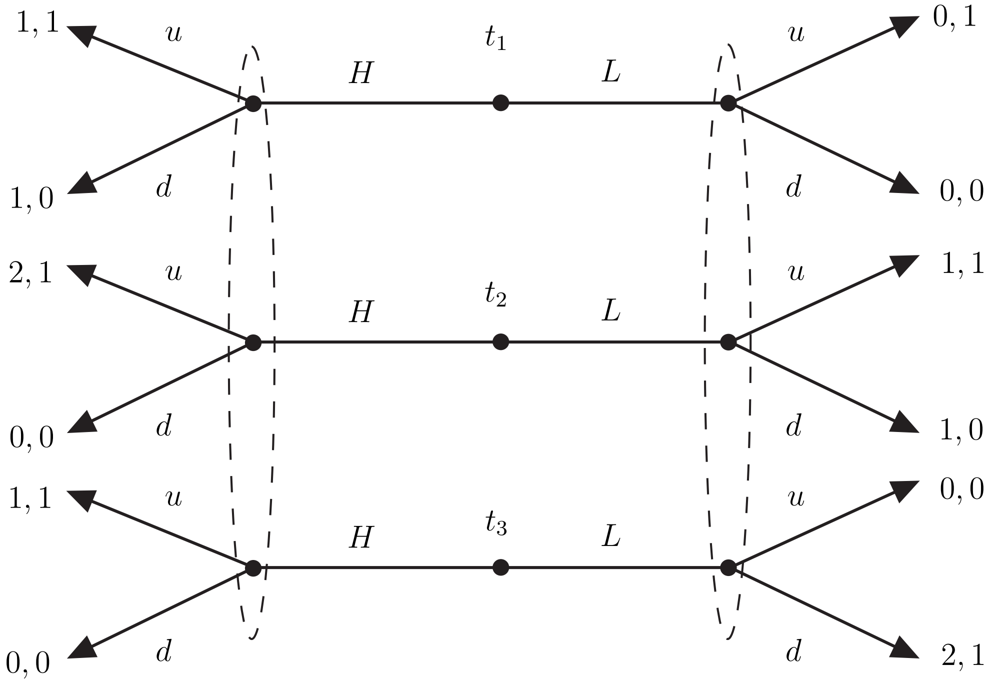
(a) Пусть p_1 — вера общества на начало момента времени $t = 2$ относительно того, что диктатор имеет тип M. Как действие общества в момент времени $t = 2$ зависит от p_1?

(b) При каком p_0 существует равновесие с такими стратегиями игроков: мягкий диктатор в обоих периодах идет на уступки, жесткий диктатор в обоих периодах применяет репрессии, а общество восстает в первом периоде и восстает вовтором только если в первом периоде не было репрессий.

(c) При каком p_0 существует равновесие с такими стратегиями игроков: мягкий диктатор в первом периоде применяет репрессии, а во втором — идет на уступки, жесткий диктатор в обоих периодах применяет репрессии, а общество восстает в первом периоде и восстает вовтором только если в первом периоде не было репрессий. Соответствует ли это равновесие «интуитивному критерию»?

(d) При каком p_0 существует равновесие с такими стратегиями игроков: мягкий диктатор в первом периоде применяет репрессии, а во втором — идет на уступки, жесткий диктатор в обоих периодах применяет репрессии, а общество не восстает в первом периоде и восстает вовтором только если в первом периоде не было репрессий. Соответствует ли это равновесие «интуитивному критерию»?

19. Рассмотрим следующую сигнальную игру:



Все три типа игрока 1 равновероятны. Найдите все совершенные байесовы равновесия.

20. (Мюнстер, 2009). Две фирмы решают, сколько средств вложить в разработку технологии, которая позволит ее обладателю получить патент. Пусть a_{it} — количество средств, вложенное фирмой $i = 1, 2$ в момент времени $t = 1, 2$. Пусть вероятность того, что фирма i будет обладать патентом в момент времени t равна $p_{it} = \frac{a_{it}}{a_{1t}+a_{2t}}$. Суммарный выигрыш фирмы i равен

$$u_i = V_i(p_{i1} + p_{i2}) - a_{i1} - a_{i2},$$

Пусть $V_1 = 1$. Пусть $V_2 = 1$ с вероятностью p и $V_2 = R > 1$ с вероятностью $1 - p$.

(a) Убедитесь, что совершенное по подыграм секвенциальное равновесие есть набор $(a_{11}, a_{12}(\cdot), a^1_{21}, a^1_{22}, a^R_{21}, a^R_{22}, \mu(\cdot))$, где $a_{12}(\cdot)$ — средства, вложенные фирмой 1 в момент времени $t = 2$ в зависимости от средств, вложенных фирмой 2 в момент времени $t = 1$, a^v_{2t} — средства, вложенные фирмой 2 в момент времени t в зависимости от ее оценки $v \in \{1, R\}$, и $\mu(\cdot)$ — вера фирмы 1 относительно того, что $V_2 = 1$, в зависимости от средств, вложенных фирмой 2 в момент времени $t = 1$.

(b) Пусть функция веры у фирмы 1 задана как

$$\mu(a_{21}) = \begin{cases} 0, & a_{21} \geq \bar{a} \\ 1, & a_{21} < \bar{a} \end{cases}$$

Пусть $R = 4$. Найдите p, при котором существует разделяющее равновесие.

Литература

[1] Daron Acemoglu, Georgy Egorov, and Konstantin Sonin. 2011. A Political Theory of Populism. MIT Department of Economics Working Paper.

[2] Alesina, Alberto, and Lawrence Summers. 1993. Central Bank Independence and Macroeconomic Performance. *Journal of Money, Credit, and Banking* 20: 63–82

[3] Backus, David, and John Drifill. 1985. Inflation and Reputation. *American Economic Review* 75: 530–538

[4] Barro, Robert. 1973. The control of politicians: An economic model. *Public Choice* 14(1): 19–42

[5] Barro, Robert. 1986. Reputation in a Monetary Policy with Incomplete Information. *Journal of Monetary Economics* 17: 3–20

[6] Besley, Timothy, and Andrea Prat. 2006. Handcuffs for the grabbing hand? Media capture and government accountability. *American Economic Review* 96(3): 720–736

[7] Besley, Timothy, and Michael Smart. 2007. Fiscal restraints and voter welfare. *Journal of Public Economics* 91 (3-4): 755–773

[8] In-Koo Cho and David M. Kreps. 1987. Signaling Games and Stable Equilibria. *Quarterly Journal of Economics* 102(2): 179–221

[9] Vincent P. Crawford and Joel Sobel. 1982> Strategic Information Transmission. *Econometrica* 50(6): 1431–1451

[10] Ferejohn, J. 1986. Incumbent performance and electoral control. *Public Choice* 50(1-3): 2–25

[11] Drew Fudenberg and Jean Tirole. 1991. Perfect Bayesian and Sequential Equilibrium. *Journal of Economic Theory* 53: 236–250

[12] R.Gibbons. *Game Theory for Applied Economists.* Princeton University Press. 1992

[13] David Kreps, Paul Milgrom, John Roberts, and Robert Wilson. 1982. Rational cooperation in the finitely repeated prisoners' dilemma. *Journal of Economic Theory* 27(2): 245–252

[14] David Kreps and Robert Wilson. 1982. Sequential Equilibria. *Econometrica* 50(4): 863–894

[15] MasCollel,A., M. Whinstoon, and J. Green. (1995) *Microeconomics Theory* Oxford University Press

[16] McCarthy, N., and A. Meirowitz. 2007. *Political Game Theory: An Introduction.* Cambridge University Press.

[17] Paul R. Milgrom. 1981. Good News and Bad News: Representation Theorems and Applications *The Bell Journal of Economics* 12(2): 380–391

[18] Munster, Johannes. 2009. Repeated Contests with Asymmetric Information. *Journal of Public Economic Theory* 11(1): 89–118

[19] Roger Myerson. 1978. Refinements of the Nash equilibrium concept. *International Journal of Game Theory* 7: 73–80

[20] Barry Nalebuff. 1987. Credible Pretrial Negotiations. *Rand Journal of Economics* 18: 198–210

[21] Romed, David. *Advanced Macroeconomics, 3rd edition.* McGraw-Hill, 2006

[22] Reinhard Selten. 1975. Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. *International Journal of Game Theory* 4(1): 25-55

[23] Spence, Michael. 1973. Job Market Signaling. *Quarterly Journal of Economics* 87(3): 355–374