

Адыгейский государственный университет
Магистерская программа «Современная теория игр»
Алгоритмическая теория игр, весна 2019
Правила получения оценки за курс

Изначальная оценка ставится из расчёта 100 баллов, правила перевода в 5-балльную систему будут определены позже. 50 баллов даётся за решение зачётных задач (может быть больше при решении сложных задач), 50 баллов — за эссе. Эссе может носить как математический, так и научно-популярный характер. В первом случае должна быть изложена некоторая тема: какие в ней изучаются понятия, какие теоремы известны, и т.д. Хотя бы для одной из теорем должно быть изложено доказательство. Во втором случае формальных доказательств не требуется, но охват должен быть более широким, и должно быть больше сказано о неформальном смысле теорем. Можно также в качестве эссе подготовить исторический обзор.

Возможные источники тем для эссе:

- Блог Ноама Нисана <https://agtb.wordpress.com>
- Книга "Algorithmic game theory"
- Книга "Economics and Computation"
- Архивы конференций SAGT, WINE, EC и др.

Зачётных задач предлагается 9. Каждая задача оценивается в 10 баллов. В зачёт идут 7 наилучшим образом решённых задач. Задачи и эссе принимаются по почте musatych@gmail.com **двумя файлом в формате PDF** (Один файл с эссе, другой с решениями задач. Можно написать эссе и набрать решения в TeX е или Word'e, либо отсканировать или сфотографировать написанное от руки, собрав всё в PDF, либо скомбинировать разные способы. При фотографировании следите за резкостью, контрастностью и балансом белого. Фотографии на камеру мобильного телефона при искусственном освещении не всегда выглядят приемлемо. Архивы с фотографиями, а также плохо читаемые PDF проверяться не будут). Совместное решение и обсуждение задач допускается и даже одобряется, но тексты решений необходимо записывать самостоятельно. Обнаруженные списанные решения не засчитываются всем авторам.

Комментарии по задачам: задачи 1–3 должны быть простыми, решаются при помощи несложных рассуждений или модификации конструкций, которые мы прошли в классе. Задачи 4–6 средние: они сложные на первый взгляд, но простые, если хорошо изучить тему. Задачи 7–9 уже требуют серьёзной работы и вычислений, но отдельные пункты могут быть простыми.

Адыгейский государственный университет
Магистерская программа «Современная теория игр»
Алгоритмическая теория игр, весна 2019
Зачётные задачи

1. Рассмотрим задачу о справедливом дележе для N агентов. Какое максимальное количество пар завидующих агентов может быть при пропорциональном дележе? (Если зависть взаимная, то пара считается дважды).

Указание: сначала докажите, что при пропорциональном дележе участник не может завидовать всем остальным. А можно ли сделать так, чтобы он завидовал почти всем? И будут ли участники влиять друг на друга?

2. Придумайте задачу о маршрутизации делимого трафика, в которой цена анархии равна в точности 1.2.

Указание: нужно модифицировать цифры в одной из стандартных конструкций (пример Пигу или парадокс Браесса).

3. N деревень, расположенные вдоль реки, решают, в какой из них построить мост. Полезность i -й деревни от наличия моста в j -й равна u_{ij} и известна только жителям этой деревни. Как при помощи механизма Викри–Кларка–Гровса определить, где строить мост?

Указание: нужно записать общественное благосостояние и подставить в общую формулу для механизма VCG.

4. Граф называется *эйлеровым*, если существует цикл, проходящий ровно один раз по каждому ребру. *Остовным деревом* связного графа называется подграф, который одновременно является деревом (т.е. связным графом без циклов). Докажите, что для эйлерова графа задача поиска по одному разбиению рёбер на остовные деревья другого такого разбиения лежит в **PPA**.

Указание: в эйлеровом графе любой разрез (множество рёбер, идущих из некоторого множества вершин в его дополнение) чётен (т.е. состоит из чётного числа рёбер. Почему? Достаточно вспомнить определение эйлерова цикла, который обязан найтись в эйлеровом графе), поэтому если из остова дерева убрать ребро, то найдётся (какой чётности?) число способов восстановить остовное дерево, добавив ребро. Теперь в качестве вершин большого графа нужно взять наборы остовных деревьев в исходном графе, в которых рёбер суммарно столько же, сколько в исходном графе, а повторяется не больше одного ребра. К этому большому графу и нужно применять принцип **PPA**.

5. Пусть требуется справедливо разделить «пересоленный пирог», «грязную работу» или «заражённый участок земли», т.е. что-то с отрицательной ценностью. Определите понятие пропорционального дележа в этом случае и переложите для него протокол последнего уменьшающего. Докажите, что свойство пропорциональности выполняется.

Указание: интересы участников теперь противоположные тому, что раньше: чем меньше доля, тем лучше. Но нужно всё раздать. Протокол последнего уменьшающего превратится в протокол последнего увеличивающего. Если всё равно не получается, читайте книгу Economics and Computation.

6. На аукционе второй цены продаётся картина. Оценка первого игрока распределена равномерно на $[0, 2]$, а второго — на $[1, 3]$. Установка какой резервной (т.е. минимальной, начальной) цены максимизирует доход продавца?

Указание: резервная цена означает следующее: если оба игрока её превысили, то победитель платит вторую цену, если превысил только один, то он платит резервную,

если никто не превысил, то товар остаётся у продавца. Составьте функцию $p(x, y)$, которую получит продавец, если оценки равны x и y , соответственно. Она должна быть определена в прямоугольнике $[0, 2] \times [1, 3]$ и быть кусочно-линейной, а резервная цена r будет параметром. Двойной интеграл (внимательно посчитайте его, не перепутав пределы интегрирования) от этой функции будет ожидаемой прибылью продавца. Теперь его нужно максимизировать по резервной цене.

7. (Продажа мест в отеле на аукционе) В отеле две свободных комнаты: одноместная и двухместная. В отель приезжают $N \geq 3$ потенциальных постояльца. Каждый из них оценивает одноместную комнату в V_i , а место в двухместной — в $\frac{2}{3}V_i$. Все оценки распределены независимо и равномерно на $[0, 1]$.

- а) Определите механизм Викри–Кларка–Гровса и посчитайте ожидаемый доход владельца отеля. Можно ли его имплементировать, не спрашивая напрямую об оценках (например, через восходящий аукцион)?
- б) Пусть обслуживание каждой комнаты стоит $C > 0$. Как изменится механизм? Будет ли в среднем дефицит или излишек?

8. Все жители города А (их континуум) работают в городе Б. Утром они одновременно решают, ехать им на работу на машине или на электричке. Дорога на электричке занимает 30 минут, а на машине — $20 + 40x$ минут, где x — доля жителей, решивших поехать на машине. Билет на электричку стоит 1 единицу, поездка на машине стоит 3 единицы. Поездка на машине по сравнению с электричкой приносит случайный бонус, распределённый равномерно от -1 до 5. Потеря лишних 10 минут приносит случайный ущерб от 0 до 2. Бонус и ущерб распределены независимо, их размер жители узнают утром перед поездкой.

- а) Какая доля жителей поедет на машине в равновесии?
- б) Какая доля жителей, перемещающихся на машине, будет общественно оптимальной?
- в) Какую плату за пользование дорогой нужно установить, чтобы привести ситуацию в общественный оптимум?
- г) Власти вводят систему «Паркуйся и езжай», при которой можно приехать на станцию, оставить там машину и дальше бесплатно ехать на электричке. В этом случае житель получает только половину бонуса от поездки на машине. Приблизит ли такая система равновесие к оптимуму или отдалит?

9. (Барнаул и Новосибирск, задача А.В.Савватеева) Рассмотрим два города, Барнаул и Новосибирск, с населением B и N соответственно ($B < N$). Жители городов обдумывают образование и финансирование одного или двух футбольных клубов. Если футбольных клубов два, то каждый из них расположен в своём городе, и жители каждого города делят издержки G на поддержание его функционирования поровну.

Если же футбольный клуб один, то расположен он будет непременно в Новосибирске (где больше народу) и жители Барнаула будут платить за перемещение, по t за каждую единицу пути на каждого жителя. Расстояние между городами примем за единицу.

Кроме того, какая бы структура ни была предложена, любое сообщество жителей обоих городов может отказаться от финансирования, создав свой собственный клуб

и разместив его в том из городов, где живёт больше членов этого сообщества (при равенстве годится любая точка дороги Барнаул—Новосибирск).

Побочных платежей нет. Футбол всем нужен как воздух.

- а) Опишите условия, при которых система из двух клубов, по одному в каждом городе, будет устойчивой.
- б) Опишите условия, при которых устойчивой является централизованная система с одним клубом.
- в) Опишите зону хаоса (в частности, докажите, что в этой зоне вообще никакая система устойчивой не будет — не только система из одного или двух клубов, но и произвольное разбиение жителей этой пары городов на болельщические группировки нескольких клубов).