Повторяющиеся игры. Принцип однократного отклонения. Дуэли

Информационным множеством называется множество вершин, управляемых одним игроком при условии, что он не может определить, в какой из вершин он находится. В частности, информационное множество M должно удовлетворять следующим условиям (условия 2)-4) — т. н. *совершенство памяти*):

1) поддеревья, начинающиеся с вершин информационного множества, изоморфны (с точки зрения структуры и соответствия вершин игрокам).

2) если в позиции x игрок может попасть в позицию y, то x и y не входят в одно информационное множество игрока

3) если игрок в позиции x может сделать два хода, один из которых приведет к вершине z, а другой к вершине z', то z и z' не входят в одно информационное множество этого игрока;

4) если y и y' находятся в разных информационных множествах, а z и z' встречаются после y и y' соответственно, то z и z' также расположены в разных информационных множествах.

Задача 1. Предположим, мы играем два раза подряд в дилемму заключенного с матрицей выигрыша:

	молчать	сознаться
молчать	$2,2$	$0,3$
сознаться	$3,0$	$1,1$

Как ее формализовать в качестве игры в нормальной и развернутой формах? Сколько будет стратегий у каждого игрока? Какие равновесия по Нэшу будут в этой игре?

Пусть G — игра в нормальной форме, $T > 1$ — натуральное число, $G(T)$ — (динамическая) игра, в которой G повторяется T раз. Выигрыш в $G(T)$ определяется как

$$u_i = \sum_{t=1}^{T} u_i(s(t)),$$

где $s(t)$ — профиль стратегий в момент времени $t = 1, \ldots, T$.

Задача 2. (*Повторяющаяся игра с одним равновесием*) Докажите, что если в игре G в нормальной форме существует единственное равновесие Нэша, то в повторяющейся игре $G(T)$ есть единственное равновесие, совершенное на подыграх. Как оно устроено?

Задача 3. (*Повторяющаяся игра с несколькими равновесими*) Рассмотрим игру G:

	A	B	C
A	$1,1$	$5,0$	$0,0$
B	$0,5$	$4,4$	$0,0$
C	$0,0$	$0,0$	$3,3$

а) Найдите равновесия по Нэшу (в чистых стратегиях) в G. **б)** Верно ли, что в $G(2)$ такое же количество равновесий в чистых стратегиях?

Пусть теперь игра G повторяется не конечное, а бесконечное число раз. Надо определить выигрыши игроков. Пусть $s(t)$ — профили стратегий в момент времени t. Зафиксируем *фактор дисконта* $0 < \delta < 1$, и введём обозначение

$$\overline{u}_i = (1-\delta)\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u_i(s(t)).$$

Обозначим через $G(\delta)$ игру G, повторяемую бесконечное число раз, в которой выигрыш i-ого игрока равен $\overline{u}_i$.

Задача 4. Рассмотрим бесконечно повторяющуюся дилемму заключённого

	D	H
D	$2,2$	$0,5$
H	$5,0$	$1,1$

и определим следующие стратегии игрока

всегда играть D чтобы не случилось, играем D;

око за око отвечаем H на H, D на D;

триггер играем D, до первого хода H противника, потом играем H.

а) Какие из этих стратегий могут быть равновесными в $G(\delta)$?

Можно ли достичь в игре $G(\delta)$ равновесия, в котором выигрыш игрока равен **б)** 1; **в)** 2; **г)** $\frac{3}{2}$; **д)** $\frac{4}{3}$?

Пусть $G = \langle N, S, U\rangle$ — игра в нормальной форме,

$$X = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x = \sum_{s\in S} \alpha_s u(s), \sum_{s\in S} \alpha_s = 1, \alpha_s \geqslant 0\}$$

— выпуклая комбинация выигрышей игроков при чистых стратегиях,

$$Y = \{y \in X \mid y_i > \min_{s_{-i}\in S_{-i}} \max_{s_i\in S_i} u_i(s_i, s_{-i})\}$$

— множество допустимых выигрышей.

Теорема 1. (Народная теорема) *Пусть $G = \langle N, S, U\rangle$, $u \in Y$, $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое $\delta^* < 1$, что для всех $\delta \in [\delta^*, 1)$ в игре $G(\delta)$ существует равновесие в чистых стратегиях, в которых приведённый выигрыш каждого игрока отличается от u_i не больше, чем на ε.*

Однократным отклонением от профиля стратегий σ называется профиль σ' такой, что

(1) для всех игроков, кроме игрока i стратегии совпадают

(2) для i существует история τ и момент времени t , в который стратегии $\sigma(i)$ и $\sigma'(i)$ отличаются (при наличии истории τ), во все остальные моменты времени и истории эти стратегии совпадают.

Игрок i называется *отклоняющимся.*

Теорема 2. (Принцип однократного отклонения) *Профиль стратегий σ является SPE-равновесием тогда и только тогда, когда не существует однократного отклонения, приносящего выгоду тому отклоняющемуся игроку.*

Формализация игры дуэль. Имеются N игроков. У каждого из них есть вероятность промахнуться: $0 < \alpha_1, \ldots, \alpha_n < 1$ (α, β, γ, если игроков не больше трёх). Выигрыш в игре — вероятность выжить.

Модель «война». В каждый момент времени $t = 1, 2, \ldots$ игроки одновременно стреляют в одного из противников. Последний выживший получает выигрыш 1, остальные получают выигрыш 0.

Модель «война или мир». В каждый момент времени $t = 1, 2, \ldots$ игроки одновременно стреляют в одного из противников или «в воздух». Последний выживший получает выигрыш 1, остальные получают выигрыш 0. При этом, если в какой-то момент времени все игроки выстрелят в воздух одновременно, игра прекращается и все получают 0.

Мы ищем равновесия в стационарных стратегиях, а именно таких, что при данном множестве выживших игроков, цель игрока фиксирована. Другими словами, стационарная стратегия задаётся отображением из $2^{\{1,\ldots,N\}} \setminus \emptyset \to \{1, \ldots, n\}$ (будем считать, что стрельба в себя= стрельба в воздух).

Задача 5. Рассмотрим игру двух игроков A и B с вероятностями промаха α и β соответственно. Докажите, что выигрыши игроков в модели «война» находятся по формуле: $P_{A,AB} = \frac{\beta(1-\alpha)}{1-\alpha\beta}$, $P_{B,AB} = \frac{\alpha(1-\beta)}{1-\alpha\beta}$.

Задача 6. Найдите стационарные равновесия в дуэли двух игроков в модели «война или мир».

Задача 7. Рассмотрим игру трёх игроков. Из предыдущих пунктов ясно, какими стратегиями пользуются игроки, если в живых осталось двое. При игре втроём, если никто не стреляет в воздух, есть два вида стратегий: «стрельба по кругу» и «двое друг в друга, оставшихся в одного из них».

Докажите, что «стрельба по кругу» является равновесием для игроков с равными вероятностями промаха $\alpha = \beta = \gamma = p$ **а)** без учёта стрельбы в воздух; **б)** с учётом стрельбы в воздух.

в) Пусть $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = \gamma = \frac{1}{3}$. Найдите выигрыши игроков, и определите равновесия в данной игре с учётом и без учёта стрельбы в воздух.

г) Докажите, что ни при каких α, β, γ стрельба в воздух не будет равновесием в данной игре.

д) Найдите граничные условия, при которых происходит переход от равновесия: каждый стреляет в самого сильного, кроме себя; стрельба по кругу.

Задача 8. Докажите, что при игре n игроков с вероятностями промаха p равновесные стационарные стратегии устроены следующим образом: в каждого игрока кто-то стреляет (конечно, мы допускаем возможность стрельбы в воздух).