МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

О.А. Мишулина

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Рекомендовано УМО «Ядерные физика и технологии»
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений

Москва 2011

УДК 519.21(075)
ББК 22.171я7
М71

Мишулина О.А. **Основы теории вероятностей**: учебное пособие. М.: НИЯУ МИФИ, 2011. – 196 с.

Изложены базовые понятия теории случайных событий и случайных величин. Приведены типовые законы распределения вероятностей, применяемые в статистическом анализе данных. Теоретический материал сопровождается многочисленными примерами, которые иллюстрируют основные приемы решения задач по теории вероятностей. По каждой теме курса предложены вопросы и задачи для самоконтроля.

Предназначено для студентов, специализирующихся по прикладной математике и информатике. Книга будет полезна для аспирантов и инженеров как справочное пособие при решении задач прикладного статистического анализа и выполнении статистических вычислений.

Подготовлено в рамках Программы создания и развития НИЯУ МИФИ.

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук, проф. Е.А. Сатаев (ИАТЭ НИЯУ МИФИ),
д-р техн. наук, проф. С.Д. Кулик (НИЯУ МИФИ)

ISBN 978-5-7262-1473-3

Редактор М.В. Макарова

Подписано в печать 15.12.2010. Формат 60x84 1/16
Печ. л. 12,25. Уч.-изд. л. 12,5. Тираж 320 экз.
Изд. № 1/1/37 Заказ № 2

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
115409, Москва, Каширское ш., 31

ООО «Полиграфический комплекс «Курчатовский».
144000, Московская область, г. Электросталь, ул. Красная, д. 42

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс теории вероятностей является базовым при подготовке специалистов по прикладной математике и информатике. Владение основами теории вероятностей необходимо при изучении ряда прикладных математических дисциплин – математической статистики, теории исследования операций, статистического анализа временных рядов, статистического моделирования систем и пр.

Предлагаемое учебное пособие соответствует программе преподавания теории вероятностей студентам факультета «Кибернетика» НИЯУ МИФИ. Учебное пособие включает четыре главы, посвященные случайным событиям, случайным величинам, случайным векторам и типовым законам распределения вероятностей, распространенным в приложениях. В пособии достаточно подробно излагается теория по всем темам курса с доказательствами и комментариями.

Теоретический материал сопровождается многочисленными примерами, которые позволят студентам не только освоить основные приемы решения задач, но и обратить внимание на некоторые положения теории, особенно часто применяемые на практике. По каждой теме курса студентам предлагаются вопросы и задачи для самоконтроля. Ответы к контрольным задачам можно найти в конце книги.

Для приобретения навыков решения практических задач предлагается использовать книги : «Сборник задач по математике для втузов» под ред. Ефимова А.В. (ч. 3 «Теория вероятностей и математическая статистика») и «Теория вероятностей в задачах и упражнениях» Кочеткова Е.С. и Смерчинской С.О., которые наиболее соответствуют содержанию и стилю настоящего учебного пособия.

Глава 1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

§ 1. Понятие случайного события

Теория вероятностей применяется для исследования тех явлений, которые носят массовый характер. Практика показывает, что при многократном наблюдении случайных явлений обнаруживаются определенные закономерности, своего рода устойчивые характеристики, которые свойственны именно массовым явлениям. Классическим примером эффективного применения статистического подхода является газодинамика. Благодаря молекулярному строению газа его состояние может быть представлено как совокупность состояний всех молекул в заданном объеме. Однако физические свойства газа не определяются простой суммой состояний отдельных молекул. Вследствие массовости явления возникают качественно новые закономерности, которые устанавливаются с помощью статистического подхода. Статистический анализ и статистические модели нашли широкое распространение во всех сферах деятельности человека – науке, технике, экономике, бизнесе, принятии решений в конфликтных ситуациях и пр.

Основными понятиями при использовании статистического подхода являются *испытание* (*опыт, эксперимент*) и *случайное событие*.

Изучая определенное явление, исследователь фиксирует условия для его возникновения, которые для получения достоверной информации должны оставаться неизменными в каждом эксперименте, при каждой регистрации измеряемых данных. Назовем совокупность условий проведения эксперимента *комплексом условий* G. Каждое осуществление комплекса условий G будем называть *реализацией*. Например, можно рассмотреть совокупность измерений температуры воздуха, выполненных на определенной метеостанции 1 июня в 12 часов на протяжении всех лет метеорологических наблюдений. Перечисленные условия измерений составляют комплекс условий G, а каждая его реализация предоставляет очередное значение температуры воздуха. В приведенном примере метеорологических измерений исследователю могут быть интересны некоторые *события*. В частности, могут рассматриваться следующие события:

A_1 – температура воздуха не выше 15°;

A_2 – температура воздуха равна 20°;

A_3 – температура воздуха находится в пределах от 20° до 25°.

Обычно события обозначают прописными латинскими буквами A, B, C и т.д., помечая их в случае необходимости нижними индексами.

Если при реализации комплекса условий G изучаемое событие происходит неизбежно, то оно называется *достоверным* и обозначается U. Если же при реализации комплекса условий G событие никогда не происходит, то оно называется *невозможным* и обозначается V. Принятые обозначения для достоверного и невозможного событий происходят от английских слов *universal* и *void*. Далее будут даны соответствующие пояснения.

Детерминированные законы механики, теории электричества и других разделов физики дают многочисленные примеры достоверных и невозможных событий.

Пример 1.1. При нагревании воды до 100° при 760 мм рт. ст. (комплекс условий G) она превращается в пар (событие U).

Пример 1.2. В замкнутом проводнике, движущемся в магнитном поле (комплекс условий G), возникает электрический ток (событие U).

Пример 1.3. При увеличении температуры идеального газа, имеющего постоянные массу и объем (комплекс условий G), его давление падает (невозможное событие V).

Если при реализации комплекса условий G событие A может как произойти, так и не произойти, то оно называется *случайным*. События A_1, A_2, A_3, приведенные выше в примере метеонаблюдений, являются случайными.

Последовательность испытаний (т.е. многократное воспроизведение комплекса условий G) называется *статистическим экспериментом*. Результат статистического эксперимента – последовательность событий, имевших место в каждом из испытаний. Например, при случайном бросании монеты в пяти испытаниях может быть реализована последовательность *ВААВА*, где *А* – выпадение герба; *В* – выпадение решки.

В каждой практической задаче, связанной с реализацией комплекса условий *G*, можно выделить *элементарные события*, которые являются неразложимыми и в одном испытании не могут появляться одновременно. Для элементарных событий обычно используется обозначение ω. Совокупность всех элементарных исходов испытания (элементарных событий) образует *пространство элементарных событий* Ω.

Построение пространства элементарных событий не всегда имеет однозначное и очевидное решение. Выбор множества элементарных событий связан с возможностью описания с их помощью тех событий, которые сформулированы в поставленной задаче. Согласно определению пространства элементарных событий при его построении следует контролировать выполнение следующих требований:

- в каждом испытании непременно реализуется одно событие из пространства элементарных событий;
- если в испытании реализуется некоторое элементарное событие, то никакое другое элементарное событие не происходит;
- произвольное событие, не являющееся элементарным и *соответствующее рассматриваемому в задаче типу*, может быть представлено как подмножество пространства элементарных событий, т.е. происходит всегда, когда в испытании происходит одно из элементарных событий рассматриваемого подмножества.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1.4. Пусть испытание состоит в случайном бросании игральной кости. Естественно считать элементарными исходами ω_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$, которые означают выпадение граней с номерами 1, 2, …, 6 соответственно. Таким образом, в этом примере пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega_i, i = 1, 2, \ldots, 6\}$ является конечным. Событие *A*, состоящее в выпадении грани с четным номером, представляется совокупностью элементарных событий $\omega_2, \omega_4, \omega_6 : A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$.

Пример 1.5. Теперь рассмотрим более сложное испытание с игральной костью. Допустим, что кость бросается несколько раз до первого выпадения грани с номером 5. Пусть в условиях испытаний интерес представляет только число бросаний кости до первого выпадения грани с номером 5. Тогда пространство элементарных событий образует счетное множество: $\Omega = \{\omega_i, i = 1, 2, \ldots\}$, где ω_i – событие, состоящее в том, что грань с номером 5 впервые выпала при i-м бросании игральной кости. Рассмотрим событие B, состоящее в выпадении грани с номером 5 не ранее, чем в десятом бросании кости. Это событие представляется следующим множеством элементарных событий: $B = \{\omega_i, i = 10, 11, \ldots\}$.

Пример 1.6. Рассмотрим испытание, которое состоит в случайном бросании точки в квадрат на плоскости. В этом случае элементарным событием является попадание точки в фиксированное координатное положение в пределах квадрата, которое представляется парой действительных чисел (x, y) (рис. 1.1, *а*).

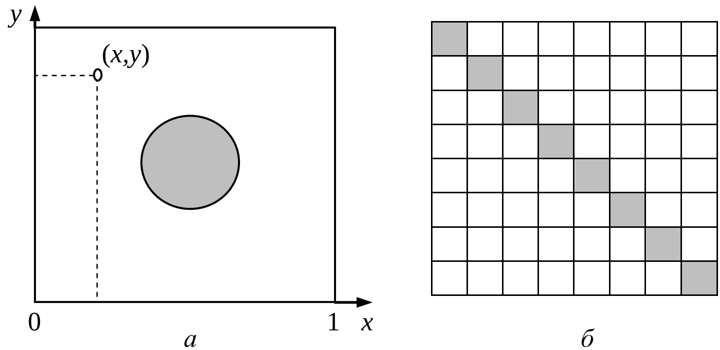


Рис. 1.1. Иллюстрация к примеру 1.6

Поскольку число действительных чисел на отрезке [0; 1] несчетно, несчетным является и множество элементарных событий. Построенное таким образом пространство элементарных событий позволяет описать, например, событие, состоящее в попадании точки в круг заданного радиуса (не больше половины стороны квадрата) с центром, совпадающим с центром квадрата.

Допустим, что квадрат, как шахматная доска, разделен на 64 перенумерованные клетки (рис. 1.1, *б*). Кроме того, предположим, что при бросании точки в квадрат интерес представляют не ее точные координаты (x, y), а номер клетки, в которую она попала. В этом случае множество элементарных событий конечно: $\Omega = \{\omega_i, i = 1, 2, \ldots, 64\}$, где i – номер клетки. Разнообразие событий, которые можно описать в этом пространстве элементарных событий, много меньше, чем в предыдущем случае. Примером события в такой постановке задачи является принадлежность точки одной из клеток главной диагонали (см. рис. 1.1, *б*).

Возвратимся к понятиям достоверного и невозможного событий U и V. Из определения достоверного события U следует, что оно имеет место при реализации любого элементарного события, поэтому представляется как полное (*universal*) множество всех элементарных событий. В то же время невозможное событие V не содержит ни одного элементарного события, так что является пустым множеством (*void*). Отсюда и следуют принятые для достоверного и невозможного событий обозначения.

Контрольные вопросы и задачи

1. Дайте определения достоверного, невозможного и случайного событий.
2. Приведите примеры достоверного, невозможного и случайного событий.
3. Дайте определение и поясните на примере понятие статистического эксперимента.
4. Какими свойствами обладают элементарные события, образующие пространство элементарных событий?
5. Одновременно бросаются две игральные кости. Рассматриваются различные события, связанные с суммой чисел на выпавших гранях. Опишите пространство элементарных событий.
6. Какие элементарные события, определенные в задаче 5, образуют следующее событие A: сумма чисел на выпавших гранях не более 4?
7. Монета случайно бросается до выпадения решки два раза подряд, но производится не более трех бросаний. Опишите пространство элементарных событий.

8. В условиях задачи 7 с использованием предложенного пространства элементарных событий опишите событие A, состоящее в выпадении орла не менее двух раз.

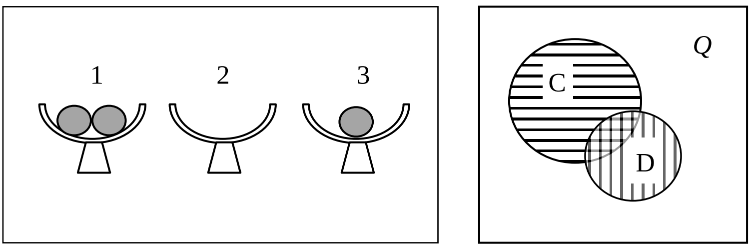
§ 2. Теоретико-множественные операции над событиями

Определение события как подмножества пространства элементарных событий дает основание для рассмотрения отношений между событиями и теоретико-множественных операций над событиями.

Для иллюстрации основных понятий и алгебраических операций над событиями в этом параграфе будут рассмотрены испытания трех типов.

Испытание первого типа состоит в случайном бросании игральной кости (см. пример 1.4). Напомним, что пространство элементарных событий в этом случае содержит шесть событий: $\Omega_1=\{\omega_i,\ i = 1, 2, \ldots, 6\}$.

Испытание второго типа является примером часто используемых в теории вероятностей *урновых моделей*, или *схем урн*. Рассмотрим одну из подобных моделей. Имеются три урны и три шара, каждый из которых абсолютно произвольно попадает в любую из трех урн (рис. 1.2, *а*). Каждая из урн имеет номер (1, 2, 3), а шары ничем не различаются. В каждом испытании нас будет интересовать только число шаров, попавшее в каждую из трех урн.



а *б*

Рис. 1.2. Иллюстрации к испытаниям двух типов:
а – схема урн; *б* – эйлеровы круги (диаграмма Венна)

В примере, представленном на рис. 1.2, *а*, результатом испытания явилось следующее случайное расположение шаров в урнах:

2 – в первой; 0 – во второй и 1 – в третьей. Это одно событие из пространства элементарных событий $\Omega_2=\{\omega_i,\ i = 1, 2, \ldots, 10\}$. В табл. 1.1 приведены все элементарные события ω_i, $i = 1, 2, \ldots, 10$.

Рассмотрим в изложенной схеме урн два события:

A – в первую урну попали два шара;

B – в первую урну попало больше шаров, чем во вторую.

Из табл. 1.1 следует, что $A = \{\omega_8, \omega_9\}$ и $B = \{\omega_5, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}\}$.

Таблица 1.1

Пространство элементарных событий в схеме трех урн

№ урны	Элементарные события									
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	ω_{10}
1	0	0	0	0	1	1	1	2	2	3
2	0	1	2	3	0	1	2	0	1	0
3	3	2	1	0	2	1	0	1	0	0

В испытании третьего типа (рис. 1.2, *б*) на плоскости выделен квадрат *Q* и точка *абсолютно случайно* бросается в этот квадрат (например, координаты точки вычисляются программно с помощью датчика случайных чисел). В квадрате изображены два круга, имеющие горизонтальную и вертикальную штриховки и позволяющие сформулировать разные события. Под событием *C* будем понимать попадание точки в круг с горизонтальной штриховкой, а под событием *D* – с вертикальной. Приведенная на рис. 1.2, *б* геометрическая интерпретация событий обычно называется *эйлеровыми кругами* (*Leonhard Euler*, 1707 – 1783, Швейцария). Иначе подобные схемы называют *диаграммами Венна* по имени английского математика (*John Venn*, 1834 – 1923, Англия), который широко применял графические методы в логико-математической теории.

Перейдем к формулировке операций над событиями.

1. Если в каждом испытании, в котором происходит событие *A*, одновременно происходит и событие *B*, то говорят, что *A* влечет за собой *B*, или $A \subset B$ ($B \supset A$).

Пример 1.7. События A и B, сформулированные ранее в связи с распределением шаров по трем урнам, находятся в отношении $A \subset B$. Практически это означает, что множество $\{\omega_8, \omega_9\}$ (событие A) содержится в множестве $\{\omega_5, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}\}$ (событие B).

2. Если в каждом испытании реализация события A влечет за собой реализацию события B ($A \subset B$) и реализация B – реализацию A ($B \supset A$), т.е. события A и B оба одновременно происходят или не происходят, то они называются *равносильными* (*тождественными*, *эквивалентными*): $A = B$.

3. *Суммой* (или *объединением*) событий A и B называется событие C, состоящее в реализации хотя бы одного из событий A или B: $C = A + B$ или $C = A \bigcup B$.

Операция суммирования (объединения) распространяется на конечное или счетное множество событий A_1, A_2, …: $C = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ или $C = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

На диаграмме Венна (см. рис. 1.2, *б*) событие $E = C + D$ геометрически иллюстрируется областью, отмеченной штриховкой (горизонтальной или вертикальной).

Пример 1.8. Введем события A и B в испытании бросания игральной кости: A – выпадение четной грани; B – выпадение нечетной грани. Тогда суммой событий A и B является достоверное событие: $U = A+B$.

4. *Произведением* (или *пересечением*) событий A и B называется событие C, состоящее в одновременной реализации в испытании событий A и B: $C = AB$ или $C = A \bigcap B$.

Операция произведения (пересечения) распространяется на конечное или счетное множество событий A_1, A_2, …: $C = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ или $C = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

Произведение событий $F = CD$ на диаграмме Венна представлено областью, выделенной двойной штриховкой (см. рис. 1.2, *б*).

Пример 1.9. Выделим следующие три события в схеме урн: A_i – в урну с номером i (i = 1, 2, 3) попало не менее одного шара. Согласно табл. 1.1 можно записать:

$A_1 = \{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}\}$;

$A_2 = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_9\}$;

$A_3 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_6, \omega_8\}$.

Событие $C = A_1\, A_2\, A_3$ состоит из единственного элементарного события $C = \{\omega_6\}$.

Пример 1.10. Если в испытании бросания игральной кости событие A состоит в выпадении четной грани, а B – нечетной грани, то произведением A и B является невозможное событие: $V = AB$.

5. События A и $B = \overline{A}$ называются *противоположными*, если каждый раз при реализации события A событие $\overline{A}$ не происходит и обратно: если событие A не реализуется, то событие $\overline{A}$ имеет место.

Для противоположных событий A и $\overline{A}$ выполняются равенства:

$$A + \overline{A} = U, \quad A\overline{A} = V. \tag{1.1}$$

Пример 1.11. Противоположными в испытании бросания точки в квадрат (см. рис. 1.2, *б*) являются событие $E = C + D$ и событие, геометрически представленное не заштрихованными точками квадрата Q.

Пример 1.12. При бросании игральной кости события, состоящие в выпадении четной и нечетной граней, являются противоположными.

6. *Разностью* событий A и B называется такое событие C, которое реализуется тогда, когда A происходит, а B – не происходит: $C = A - B$.

Разность событий A и B иногда обозначают $A \setminus B$.

Из определения следует, что $C = A\overline{B}$.

Пример 1.13. Пусть при бросании игральной кости событие A означает выпадение четной грани, а B – грани с номером больше 3. Тогда событие $C = A - B$ происходит при выпадении грани с номером 2.

Пример 1.14. Разностью событий

$A_1 = \{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}\}$ и $A_2 = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_9\}$,

введенных ранее применительно к схеме урн (см. пример 1.9), является событие $C = \{\omega_5, \omega_8, \omega_{10}\}$.

7. События A и B называются *несовместными*, если их одновременное появление в одном испытании невозможно: $AB = V$.

В частности, противоположные события несовместны.

Пример 1.15. В испытании бросания точки в квадрат Q рассмотрим события $A = C - CD$ и $B = D - CD$, которые выделены на рис. 1.2, *б* только горизонтальной и только вертикальной штриховкой соответственно. События A и B являются несовместными.

8. Конечное или счетное множество событий $A_1, A_2, \ldots$ образует *полную группу*, если

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = U \text{ или } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = U, \qquad (1.2)$$

т.е. в каждом испытании реализуется хотя бы одно из событий A_i, $i = 1, 2, \ldots$.

Пример 1.16. Рассмотрим в испытании бросания игральной кости события A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, которые для каждого i определены как выпадение грани с номером k, удовлетворяющим неравенству $i \le k \le i + 2$. Таким образом, $A_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $A_2 = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $A_3 = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}$, $A_4 = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. События A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, образуют полную группу событий. Обратим внимание на то, что событие A_1 совместно с событиями A_2 и A_3, событие A_2 – с событиями A_1, A_3 и A_4 и т. д.

9. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют *полную группу попарно несовместных событий*, если $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = U$ и $\forall\, i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$, $A_i A_j = V$.

Множество событий $A_1, A_2, \ldots$ может быть счетным.

Пример 1.17. В испытании бросания точки в квадрат Q события $A_1 = U - (C + D)$, $A_2 = C$ и $A_3 = D - C$ образуют полную группу попарно несовместных событий.

10. Для любых событий $A, B_1, B_2, \ldots, B_n$ справедлив дистрибутивный закон умножения относительно сложения:

$$A \bigcap \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A \bigcap B_i) . \tag{1.3}$$

Для $n = 2$ выражение (1.3) принимает следующую форму:

$$A \bigcap (B_1 \bigcup B_2) = (A \bigcap B_1) \bigcup (A \bigcap B_2) .$$

Принцип доказательства утверждения (1.3) состоит в проверке эквивалентности событий $A \bigcap \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ и $\bigcup_{i=1}^{n} (A \bigcap B_i)$, т.е. в проверке справедливости соотношений:

$$A \bigcap \bigcup_{i=1}^{n} B_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} (A \bigcap B_i) \text{ и } A \bigcap \bigcup_{i=1}^{n} B_i \supset \bigcup_{i=1}^{n} (A \bigcap B_i) .$$

11. Для любых событий $A, B_1, B_2, \ldots, B_n$ справедлив дистрибутивный закон сложения относительно умножения:

$$A \bigcup \bigcap_{i=1}^{n} B_i = \bigcap_{i=1}^{n} A \bigcup B_i . \tag{1.4}$$

Для $n = 2$ выражение (1.4) принимает следующую форму:

$$A \bigcup (B_1 \bigcap B_2) = (A \bigcup B_1) \bigcap (A \bigcup B_2) .$$

Принцип доказательства утверждения (1.4) не отличается от рекомендованного для доказательства утверждения (1.3).

12. Для произвольного события A справедливы равенства:

$$AV = V, \quad A + V = A, \quad AU = A, \quad A + U = U, \tag{1.5}$$

$$A + \overline{A} = U , \quad A\overline{A} = V . \tag{1.6}$$

13. Для произвольного конечного или счетного множества событий $A_1, A_2, \ldots$ справедлив принцип двойственности, который состоит в выполнении следующих двух равенств (законы де Моргана; *Augustus de Morgan,* 1806 – 1871, Шотландия):

$$\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \overline{A_i}. \qquad (1.7)$$

Доказательство справедливости принципа двойственности выполняется так же, как и доказательство утверждения (1.3) – проверкой эквивалентности правой и левой частей равенств (1.7) в соответствии с определением 2.

Контрольные вопросы и задачи

1. Что означает запись: $A \subset B$?
2. Приведите пример событий A и B, связанных отношением $\subset$.
3. Рассматриваются события A, B, C, D, связанные с испытанием случайного бросания игральной кости:

   A – выпала грань с номером 1;

   B – выпала грань с номером 2;

   C – выпала грань с нечетным номером;

   D – выпала грань с простым числом.

   Являются ли события $C\overline{A}$ и $(D - B)$ эквивалентными?
4. Дайте определение суммы (или объединения) событий.
5. Как на диаграмме Венна (эйлеровых кругах) геометрически представляется сумма событий?
6. Чему равна сумма событий $U + V$?
7. Справедливо ли утверждение: $A + A = A$?
8. Дайте определение произведения (или пересечения) событий.
9. Как на диаграмме Венна (эйлеровых кругах) геометрически представляется произведение событий?
10. Чему равно произведение событий UV?
11. Справедливо ли утверждение: $AA = A$?
12. События A и B являются эквивалентными. Укажите, какие из приведенных ниже утверждений Вы считаете справедливыми:

    1) $A - B = A$, 2) $A\overline{B} = V$, 3) $\overline{A} - B = U$, 4) $\overline{A} - B = \overline{A}$.

13. В схеме урн (см. рис. 1.2, *а*) рассматриваются следующие события: A – в первую урну попало более одного шара; B – вторая урна пуста. Какие элементарные исходы содержат события $C = A + B$ и $D = AB$?

14. Известно, что произведение событий A и B не является невозможным событием. Могут ли события A и B быть несовместными?

15. Дайте определение полной группы событий.

16. Приведите пример полной группы, состоящей из трех событий, в испытании бросания точки в квадрат (см. рис. 1.2, *б*).

17. Приведите пример полной группы, состоящей из четырех попарно несовместных событий, в испытании бросания точки в квадрат (см. рис. 1.2, *б*).

18. Докажите справедливость дистрибутивного закона умножения событий относительно сложения.

19. Программа состоит из четырех блоков, в каждом из которых может содержаться ошибка. Обозначим A_i , $i = 1, 2, 3, 4$, события, состоящие в корректности программного кода блока i. Напишите алгебраические выражения, соответствующие следующим событиям: B – хотя бы в одном программном блоке есть ошибка; C – ошибка содержится по крайней мере в двух блоках.

20. В условиях предыдущей задачи дайте словесное описание событий, представленных следующими алгебраическими выражениями: $\overline{B},\ \overline{C},\ B\bigcap C,\ \overline{B}\bigcap C,\ B-C$.

§ 3. Алгебра событий

Аксиоматическое построение теории вероятностей опирается на понятие σ-*алгебры событий* $\mathcal{F}$. Под σ-алгеброй событий $\mathcal{F}$ понимается такой набор событий, построенный на элементарных событиях пространства Ω, который обладает следующими свойствами:

1) достоверное U и невозможное V события принадлежат $\mathcal{F}$;

2) для любого события $A\in \mathcal{F}$ противоположное событие $\overline{A}$ также принадлежит $\mathcal{F}$: $\overline{A} \in \mathcal{F}$;

3) для любой конечной или счетной последовательности событий $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots$, выполняется отношение: $\bigcup\limits_i A_i \in \mathcal{F}$.

Из приведенного определения следует, что для произвольных событий $A_i \in \mathcal{F}$, i = 1, 2, …, выполняется также отношение: $\bigcap_i A_i \in \mathcal{F}$. Для доказательства следует воспользоваться законом де Моргана и свойством 2 σ-алгебры событий. Более того, легко проверить, что любые введенные ранее алгебраические операции над событиями $A_i \in \mathcal{F}$, i = 1, 2, …, приводят к событиям, принадлежащим множеству $\mathcal{F}$. Таким образом, множество событий $\mathcal{F}$ обладает свойством замкнутости относительно рассмотренных в § 2 алгебраических операций над событиями.

Пример 1.18. Рассмотрим простейший пример алгебры событий в испытании бросания игральной кости, если определено только событие A – выпадение четной грани. В этом случае $\mathcal{F} = \{U, V, A, \overline{A}\}$.

Контрольные вопросы и задачи

1. Докажите, что в определении алгебры событий $\mathcal{F}$ достаточно потребовать принадлежности $\mathcal{F}$ только достоверного события U, не налагая такого требования относительно невозможного события V.
2. Докажите, что если события $A, B \in \mathcal{F}$, то событие $C = A - B$ также принадлежит $\mathcal{F}$.
3. Докажите, что для произвольных событий $A_i \in \mathcal{F}$, i = 1, 2, …, выполняется отношение: $\bigcap_i A_i \in \mathcal{F}$.
4. Монета подбрасывается два раза. Результатом испытания считается число выпадений герба. Определите все события, принадлежащие алгебре событий $\mathcal{F}$.

§ 4. Вероятность случайного события. Различные подходы к определению вероятности

На практике замечено, что при выполнении статистического эксперимента, когда комплекс условий G повторяется многократно и наблюдаются реализации случайного события A, имеет место устойчивость частоты появления события A. Пусть комплекс условий G реализовывался n раз, а событие A произошло в m испытаниях из n. Тогда отношение m/n называется частотой события A в n испытаниях:

$$P_n(A) = \frac{m}{n}. \tag{1.8}$$

При увеличении числа испытаний n частота P_n (A) имеет тенденцию стабилизироваться около некоторого числа $P(A)$, которое имеет смысл практической возможности реализации случайного события (рис. 1.3). Величина $P(A)$ рассматривается как мера объективной возможности реализации случайного события и называется *вероятностью события A*. Большие отклонения $P_n(A)$ от $P(A)$ тем менее возможны, чем больше проведено испытаний:

$$\lim_{n\to\infty} P(B) = \lim_{n\to\infty} P(|P(A) - P_n(A)| < \varepsilon) = 1. \tag{1.9}$$

В выражении (1.9) рассматривается вероятность события B, состоящего в отклонении $P_n(A)$ от $P(A)$ менее, чем на ε, где ε – сколь угодно малое положительное число. В практических приложениях значение $P_n(A)$ рассматривается как экспериментальная оценка вероятности события $P(A)$.

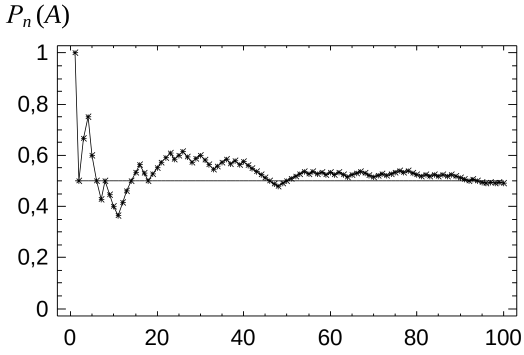


Рис. 1.3. Пример зависимости частоты события A от числа испытаний

Пример 1.19. Имеются результаты многократных измерений скорости ветра v на определенной метеостанции в летний период, выполненных в течение 10 лет. Рассматривается событие A: $v > 25$ м/с. Если рассматриваемое событие наблюдалось 20 раз в 900 измерениях, то экспериментальная оценка $P_{900}(A)$ вероятности ураганного ветра силы более 25 м/с в рассматриваемом географическом пункте в летнее время равна ~ 0,022.

Кроме *экспериментального подхода* к определению вероятности случайного события, при некоторых условиях возможен *классический подход*. В этом случае элементарные события, принадлежащие пространству элементарных событий Ω, должны быть *равновозможными*, т.е. должны обладать таким свойством, что ни одно из них не является более вероятным, чем любое другое. Можно сказать, что с точки зрения возможности своей реализации элементарные события симметричны по отношению к условиям проведения испытания (комплексу условий G). Кроме того, число элементарных событий в Ω должно быть конечным.

Допустим, что элементарные события обладают требуемой симметрией и их общее число равно N. В этих условиях рассмотрим событие A, которое представляет собой множество M равновозможных и несовместных элементарных событий. Согласно классической схеме вероятность события A определяется как отношение числа M элементарных событий, благоприятных появлению события A, к общему числу N элементарных событий:

$$P(A) = \frac{M}{N}\,. \qquad (1.10)$$

Пример 1.20. Рассмотрим эксперимент по случайному распределению трех шаров в трех урнах, приведенный в § 2. Элементарные события, представленные в табл. 1.1, являются равновозможными, а их общее число $N = 10$. Рассмотрим событие $B = \{\omega_5, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}\}$, состоящее в том, что в первую урну попало больше шаров, чем во вторую. Согласно определению события B число элементарных исходов M, благоприятных появлению события B, равно 4. Отсюда следует, что $P(A) = M / N = 0{,}4$.

Пример 1.21. Деревянный куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 маленьких кубиков одинакового размера. Определить вероятность того, что выбранный наудачу маленький кубик будет иметь две окрашенные грани.

Число N равновозможных элементарных событий в рассматриваемом примере равно 1000. Две окрашенные грани имеют кубики, расположенные вдоль ребер и не примыкающие к вершинам куба.

Таких кубиков на каждом ребре 8, а ребер – 12. Таким образом, число M элементарных исходов, благоприятных событию A – выбору кубика с двумя окрашенными гранями, равно 96. Тогда вероятность события A, вычисленная по классической схеме, равна 0,096.

Пример 1.22. Четырехтомное собрание сочинений расположено на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что тома стоят в естественном порядке слева направо или справа налево?

Общее число возможных вариантов расположения томов на полке (число элементарных исходов N) равно $4! = 24$. Условие задачи (случайный порядок расположения томов) предполагает равную возможность всех вариантов. Число M исходов, благоприятных реализации события A – расположению томов в естественном порядке, равно 2. Следовательно, искомая вероятность равна $2 / 24 \approx 0{,}0833$.

Рассмотренные в этом параграфе экспериментальный и классический подходы к определению вероятности случайного события отражают лишь практический смысл понятия вероятности случайного события в прикладных задачах, но не могут служить основой для построения общей теории.

Контрольные вопросы и задачи

1. Что называется частотой события A в n испытаниях?
2. В чем состоит свойство устойчивости частоты события A при многократном повторении испытания?
3. Каким свойством должны обладать элементарные события пространства Ω, чтобы могла быть применена классическая схема расчета вероятности?
4. Как вычисляется вероятность случайного события в классической схеме?
5. Производится испытание, состоящее в случайном расположении трех шаров в трех урнах (см. § 2). Рассматриваются два события: A – в первую и вторую урны попало одинаковое число шаров и B – в первую урну попало больше шаров, чем во вторую. Объясните возможность применения классического подхода для

расчета вероятностей $P(A)$ и $P(B)$. Рассчитайте значения $P(A)$ и $P(B)$.

§ 5. Геометрические вероятности

Классический подход к расчету вероятности случайного события предполагает, что множество равновозможных элементарных исходов конечно. Однако возможно обобщение классического подхода на случай, когда число элементарных исходов бесконечно и несчетно.

Рассмотрим в качестве примера следующее испытание: на отрезок [0; 1] числовой оси случайным образом бросают точку и фиксируют ее положение. Введем случайное событие A, состоящее в попадании точки на отрезок [0,4; 0,6]. Требуется рассчитать вероятность события A. Элементарных исходов в рассматриваемом испытании бесконечно (число точек на отрезке [0; 1]). Бесконечно также и число элементарных событий, благоприятных событию A (число точек на отрезке [0,4; 0,6]). Несмотря на равную вероятность всех элементарных исходов, расчет $P(A)$ по классической схеме (1.10) не представляется возможным.

Обобщение классической схемы расчета вероятности случайного события основано на следующем естественном предположении. Пусть пространство равновозможных элементарных исходов Ω представлено некоторой областью, для которой определена площадь $\text{mes}\,(\Omega) \neq 0$ (длина линии, площадь плоской фигуры, объем тела и пр.). Будем полагать также, что определена площадь $\text{mes}\,(Q)$ подобласти Q пространства элементарных исходов Ω. Подобласть Q представляет событие A_Q, вероятность которого в соответствии с изложенными ранее геометрическими свойствами определяется следующим выражением:

$$P_{A_Q} = \frac{\text{mes}\,(Q)}{\text{mes}\,(\Omega)}. \qquad (1.11)$$

Вероятности, рассчитанные по схеме (1.11), носят название *геометрических*.

В приведенном выше примере mes (Ω) = 1 и mes (Q) = 0,2. Таким образом, $P(A) = 0{,}2$. Рассмотрим дополнительно две задачи, демонстрирующие метод расчета геометрических вероятностей.

Задача о встрече. Два лица A и B договорились о встрече в определенном месте между 12 и 13 ч. Пришедший первым ждет другого не более 20 мин и уходит, если в течение 20 мин встреча не произошла. Чему равна вероятность встречи двух лиц, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти с равной вероятностью в любой момент независимо от прихода другого.

Обозначим x и y моменты прихода лиц A и B к месту встречи. Согласно условиям задачи возможные значения вектора (x, y) образуют квадрат Ω в плоскости X, Y (рис. 1.4), площадь которого mes (Ω) = 1.

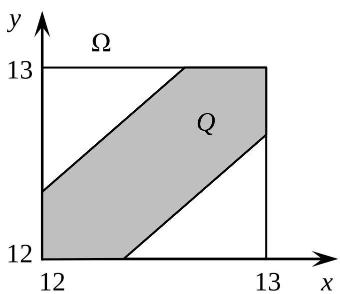


Рис. 1.4. Геометрическая интерпретация "задачи о встрече"

Условием встречи является выполнение неравенства

$$|x - y| \le \frac{1}{3}\text{ ч.}$$

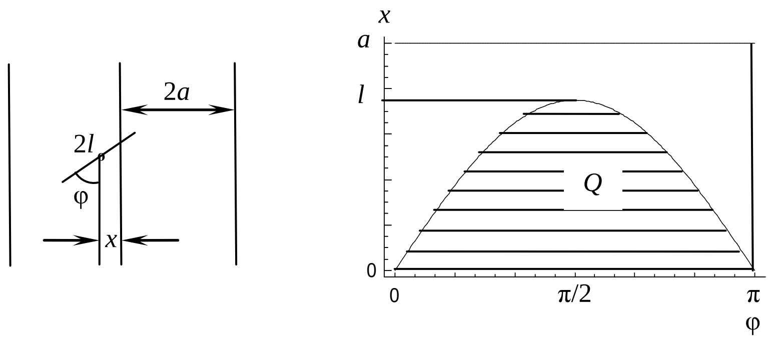
На рис. 1.4 область значений (x, y), благоприятных встрече лиц A и B, закрашена серым цветом и обозначена Q. Площадь этой области $\text{mes}\,(Q) = \dfrac{5}{9}$. Теперь по формуле (1.11) вычисляется искомая вероятность встречи: $\dfrac{\text{mes}\,(Q)}{\text{mes}\,(\Omega)} = \dfrac{5}{9}$.

Задача Бюффона (*Georges-Louis Leclerc de Buffon*, 1707 – 1788, Франция). На лист бумаги нанесены параллельные прямые, отстоящие друг от друга на расстоянии $2a$. На лист наудачу бросают иглу длиной $2l$ ($l < a$). Требуется найти вероятность того, что игла пересечет одну из прямых.

Положение иглы однозначно определяется отклонением x центра иглы до ближайшей из параллельных прямых и углом наклона φ (рис. 1.5, *а*). Под бросанием иглы наудачу понимается, что в испытании могут реализоваться с равной возможностью произвольные значения $x \in [0, a]$, $a > 0$, и $\varphi \in [0, \pi]$. Таким образом, пространство элементарных исходов Ω может быть представлено прямоугольником, площадь которого mes (Ω) = $a\pi$ (рис. 1.5, *б*).

Условие пересечения ближайшей линии иглой может быть представлено неравенством:

$$x < l \sin\varphi. \tag{1.12}$$



а *б*

Рис. 1.5. Иллюстрация к задаче Бюффона:
а – схема испытаний; *б* – условие пересечения линии иглой

На рис. 1.5, *б* область Q значений (x, φ), в которой удовлетворено неравенство (1.12), показана горизонтальной штриховкой. Площадь этой области вычисляется интегрированием:

$$\text{mes}\,(Q) = \int_0^{\pi} l \sin\varphi \, d\varphi = 2l\,.$$

Теперь искомая вероятность пересечения линии иглой вычисляется по формуле расчета геометрических вероятностей:

$$\frac{\text{mes}\,(Q)}{\text{mes}\,(\Omega)} = \frac{2l}{a\pi}\,.$$

Решение задачи Бюффона позволяет экспериментальным *методом статистических испытаний* оценить число π. Для этого следует многократно провести испытания бросания иглы на лист с параллельными прямыми, оценить вероятность p пересечения линий иглой (см. §4), а далее решить уравнение

$$p = \frac{2l}{a\pi}$$

относительно неизвестного значения числа π.

Контрольные вопросы и задачи

1. При каких условиях применим способ геометрического расчета вероятности случайного события?
2. Рассмотрим следующие условия проведения испытаний. Спортсмен целится и стреляет в круглую мишень, радиус которой равен r. Известно, что у спортсмена не случается промахов мимо мишени. Требуется оценить вероятность попадания в круг, центр которого совпадает с центром мишени, а радиус равен $r/2$.

   Почему полученный результат нельзя считать корректным? Какое из требований к испытаниям не соблюдено для применения геометрического подхода к расчету искомой вероятности?
3. В чем состоит способ расчета геометрических вероятностей? Напишите расчетную формулу и объясните содержание всех используемых в ней переменных.
4. Объясните содержание "задачи о встрече". Почему в этой задаче возможен расчет геометрических вероятностей?
5. Решите "задачу о встрече" при некотором изменении условий встречи: если первым к месту встречи приходит лицо A, то оно ждет B не более 10 мин; если первым к месту встречи приходит лицо B, то оно ждет A не более 20 мин.
6. В чем состоит задача Бюффона?
7. Как можно экспериментально оценить значение числа π с использованием результата решения задачи Бюффона?

§ 6. Аксиоматическое построение теории вероятностей

Теория вероятностей как математическая дисциплина основана на системе аксиом. Над аксиоматическим построением теории вероятностей работали *С.Н. Бернштейн* (1880 – 1968, Россия), *Richard Edler von Mises* (1883 – 1953, Австро-Венгрия, США) и другие ученые. Аксиоматика теории вероятностей была завершена в 1933 г. *А.Н. Колмогоровым* (1903 – 1987, Россия).

В основе аксиоматического построения теории вероятностей лежит понятие σ-алгебры событий $\mathcal{F}$ (см. § 3).

Аксиома 1. Каждому случайному событию $A \in \mathcal{F}$ поставлено в соответствие неотрицательное действительное число $P(A)$, называемое его вероятностью.

Аксиома 2. Вероятность достоверного события равна 1:

$$P(U) = 1. \tag{1.13}$$

Аксиома 3. Для любой конечной или счетной последовательности попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, таких, что $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots$, и $A_i A_j = V$, $i \neq j$, выполняется свойство аддитивности вероятности:

$$P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i). \tag{1.14}$$

Из аксиом 1 – 3 вытекает ряд следствий.

Следствие 1. Вероятность невозможного события равна 0: $P(V) = 0$.

Для доказательства рассмотрим события $U, V \in \mathcal{F}$, для которых справедливы равенства $UV = V$ (несовместность) и $U + V = U$. Применяя свойство аддитивности (1.14), получим равенство $P(U) + P(V) = P(U)$, из которого на основании аксиомы 2 следует, что $P(V) = 0$.

Следствие 2. Если $A \in \mathcal{F}$, то

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{1.15}$$

Доказательство основано на применении равенств (1.1):

$$A + \overline{A} = U, \qquad A\,\overline{A} = V,$$

а также аксиом 2 и 3.

Следствие 3. Для любого события $A \in \mathcal{F}$

$$P(A) \in [0;\ 1]. \tag{1.16}$$

Следствие 4. Для произвольных событий $A, B \in \mathcal{F}$, для которых выполнено условие $A \subset B$, справедливо неравенство: $P(A) \leq P(B)$.

Для доказательства следует воспользоваться выражением: $B = A \bigcup \overline{A}B$, в котором события A и $(\overline{A}B)$ несовместны, а далее применить аксиому 3.

Следствие 5. Для произвольных событий $A, B \in \mathcal{F}$ справедливо равенство:

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B). \tag{1.17}$$

Следствие 6. Если события $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots$, образуют полную группу попарно несовместных событий, то справедливо равенство:

$$\sum_i P(A_i) = 1. \tag{1.18}$$

В практических приложениях теории вероятностей при построении вероятностной модели эксперимента необходимо дать ее описание, которое включает: 1) пространство элементарных событий Ω; 2) σ-алгебру событий $\mathcal{F}$; 3) функцию $P(\cdot)$, определенную на множестве событий $\mathcal{F}$. Эта тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P(\cdot))$ называется *вероятностным пространством*.

Рассмотрим простейший случай, когда число элементарных событий пространства Ω конечно и равно N: $\Omega = \{\omega_i, i = 1, 2, \ldots, N\}$. Обозначим p_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, вероятности элементарных исходов:

$$p_i = P(\omega_i). \tag{1.19}$$

Поскольку элементарные события по определению несовместны и образуют полную группу, для них справедливо следующее выражение:

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = 1. \tag{1.20}$$

Для любого события $A \in \mathcal{F}$ его вероятность определяется формулой:

$$P(A) = P\Big(\bigcup_{i:\omega_i \in A} \omega_i\Big) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i. \tag{1.21}$$

Если в рассматриваемом случае элементарные события являются равновозможными, то в силу равенства (1.20)

$$p_i = 1/N,\ i = \overline{1, N}. \tag{1.22}$$

Для равновозможных элементарных событий формула (1.21) для вероятности события A преобразуется к следующему виду:

$$P(A) = M/N, \tag{1.23}$$

где M – число элементарных событий, при реализации которых происходит событие A. Полученное выражение для $P(A)$ совпадает с выражением (1.10), приведенным ранее для классической схемы расчета вероятности случайного события.

Контрольные вопросы и задачи

1. Сформулируйте первую аксиому теории вероятностей.
2. Почему вторую аксиому называют аксиомой нормировки?
3. Приведите пример, в котором для расчета вероятности случайного события может быть применена третья аксиома (аксиома сложения).
4. Бросаются две игральные кости и считается сумма чисел на выпавших гранях. Рассматриваются два события: A – сумма делится на три без остатка и B – сумма делится на пять без остатка. Можно ли применить аксиому сложения для расчета вероятности события $A + B$?
5. Докажите справедливость следствия 3: для любого события $A \in \mathcal{F}$ вероятность $P(A) \in [0; 1]$.
6. Докажите справедливость следствия 5: для произвольных событий $A, B \in \mathcal{F}$ выполняется равенство:
$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B).$$
7. Сформулируйте и докажите справедливость следствия 6 о вероятностях попарно несовместных событий полной группы.
8. Покажите, что при классическом подходе к определению вероятности случайного события не нарушаются аксиомы теории вероятностей и следствия из них.
9. Покажите, что при экспериментальном подходе к определению вероятности случайного события не нарушаются аксиомы теории вероятностей и следствия из них.
10. Что называется вероятностным пространством?
11. Как рассчитываются вероятности случайных событий в случае, когда пространство элементарных событий конечно?
12. Ответьте на вопрос 11 при дополнительном условии, что элементарные события равновероятны.

§ 7. Комбинаторный метод вычисления вероятностей случайных событий в классической схеме

В § 4 был рассмотрен классический подход к расчету вероятности случайного события. Этот подход применим в том случае, когда элементарные события равновозможны и их общее число конечно. Классический подход определяет вероятность произвольного события A формулой (1.10):

$$P(A) = M/N\ ,$$

где N – общее число элементарных событий; M – число элементарных событий, при реализации любого из которых происходит событие A. В предыдущем параграфе показано, что приведенная формула расчета вероятности события в классической схеме следует из аксиом теории вероятностей.

Существует класс задач, в которых каждое элементарное событие классической схемы может быть проинтерпретировано как один из равновозможных способов выбора m элементов из общего числа n элементов. Условия осуществления выбора (комплекс условий G) должны быть строго определены, так как они влияют как на содержание возможных исходов испытания, так и на их общее число N. Для вычисления значений N и M в рассматриваемом классе задач удобно использовать известные комбинаторные формулы. Рассмотрим на примере вычисление вероятности случайного события комбинаторным методом.

Пример 1.23. В лотерее участвуют 10 супружеских пар. 20 лотерейных билетов, из которых 4 выигрышных, случайно распределяются среди 20-ти участников лотереи. Требуется рассчитать вероятность того, что среди четырех выигравших окажется хотя бы одна супружеская пара (оба супруга).

Результат лотереи можно интерпретировать как случайный выбор m = 4 участников лотереи из общего числа n = 20. Общее число возможных способов осуществления такого выбора (число возможных исходов испытания) равно числу сочетаний C_n^m :

$$N = C_n^m = C_{20}^4 = \frac{20!}{16!4!} = 4845.$$

Все возможные исходы равновероятны и попарно несовместны.

Обозначим A событие, вероятность которого требуется рассчитать: среди выигравших имеется хотя бы одна супружеская пара. Воспользуемся следствием 2 (1.15) из аксиом теории вероятностей и рассчитаем вероятность $P(A)$ через вероятность противоположного события:

$$P(A)=1-P(\overline{A}). \qquad (1.24)$$

Событие $\overline{A}$ означает, что все выигравшие в лотерею принадлежат разным супружеским парам. Число случаев, благоприятных событию $\overline{A}$, определяется выражением:

$$M_{\overline{A}}=C_{10}^4\cdot 2^4 = 3360.$$

Множитель 2^4 отражает возможность выбора любого из супругов каждой пары. Теперь вычисляется $P(\overline{A})$:

$$P(\overline{A}) = \frac{M_{\overline{A}}}{N} = \frac{3360}{4845} \approx 0{,}6935.$$

Далее в соответствии с формулой (1.24) получаем искомую вероятность $P(A) \approx 0{,}3065$.

Рассмотрим различные схемы выбора из n элементов по m и соответствующие формулы комбинаторики.

1. Сочетанием из n элементов по m $(1 \le m \le n)$ называется любая неупорядоченная выборка m различных элементов из общего числа n элементов. Две комбинации (выборки) из m элементов считаются разными, если хотя бы один элемент, входящий в одну комбинацию, не входит в другую.

Число сочетаний C_n^m из n элементов по m, $1 \le m \le n$, вычисляется по следующей формуле:

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (1.25)$$

Можно доопределить C_n^m на случай, когда $m = 0$: поскольку $0! = 1$, в соответствии с формулой (1.25) $C_n^0=1$. Число сочетаний C_n^m обладает следующими свойствами:

$$\begin{gathered} C_n^1=n, \quad C_n^n=1, \quad C_n^m=C_n^{n-m}, \\ C_{n+1}^k=C_n^k+C_n^{k-1}, \quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k=2^n. \end{gathered} \qquad (1.26)$$

2. Размещением из n элементов по m $(1 \le m \le n)$ называется любая упорядоченная выборка m различных элементов из общего

числа n элементов. Две комбинации (выборки) из m элементов считаются разными, если они не совпадают по составу элементов и / или порядку их следования.

Число размещений A_n^m из n элементов по m, $1 \le m \le n$, вычисляется по следующей формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{1.27}$$

3. Размещение из n элементов по n называется перестановкой.

Согласно определению число перестановок n элементов $\mathcal{P}_n$ определяется выражением:

$$\mathcal{P}_n = n! \tag{1.28}$$

В приведенных выше определениях предполагается, что каждый элемент из общего числа n может входить в выборку, состоящую из m элементов, не более одного раза. Если процесс формирования выборки представить как последовательный отбор одного элемента за другим, то перед очередным отбором элемента предыдущий выбранный элемент не возвращается в имеющееся множество. Такая схема выбора называется *схемой без возвращения*. Если же каждый выбранный элемент возвращается в множество перед следующим выбором, то схема выбора называется *схемой с возвращением.* Таким образом, схема выбора с возвращением предполагает возможность неоднократного повторения в выборке одних и тех же элементов, в связи с чем выборки в рассматриваемой схеме называются *выборками с повторениями*.

4. Размещением из n элементов по m ($m \ge 1$) с повторениями называется любая упорядоченная выборка m, возможно, повторяющихся элементов из общего числа n разных типов элементов. Две комбинации (выборки) из m элементов считаются разными, если они не совпадают по составу элементов и / или порядку их следования.

Число размещений $\tilde{A}_n^m$ из n элементов по m с повторениями, $m \ge 1$, вычисляется по следующей формуле:

$$\tilde{A}_n^m = n^m. \tag{1.29}$$

Рассмотрим пример (рис. 1.6). Имеется множество, состоящее из двух букв $\{а, б\}$ (n = 2). Из этого множества случайно выбирается буква и записывается на листе бумаги. Выбранная буква является первой в формируемом слове. Затем *из того же множества* последовательно выбираются (варианты выбора показаны на рис. 1.6 пунктирными линиями) еще три буквы, которые записываются за первой. Возможными исходами такого испытания являются слова "*абба*", "*аааа*", "*баба*" и т.д. (m = 4). Общее число возможных слов равно $2^4 = 16$. В рассмотренном примере $m > n$.

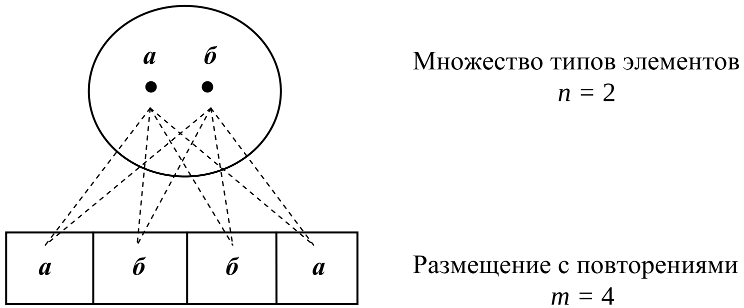


Рис. 1.6. Иллюстрация к формированию размещения с повторениями

5. Сочетанием из n элементов по m ($m \geq 1$) с повторениями называется любая неупорядоченная выборка m, возможно, повторяющихся элементов из общего числа n разных типов элементов. Две комбинации (выборки) из m элементов считаются разными, если они не совпадают по составу элементов.

Число сочетаний из n элементов по m с повторениями $\tilde{C}_n^m$, $m \geq 1$, вычисляется по следующей формуле:

$$\tilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^{n-1}. \tag{1.30}$$

В этой схеме имеются n типов элементов, из которых проводятся m случайных выборов одного из типов. После завершения эксперимента в неупорядоченном множестве выбранных m элементов первый тип будут иметь m_1 элементов, второй – m_2 и т.д., так что

$$\sum_{i=1}^{m} m_i = m\,.$$

Таким образом, каждая возможная комбинация выбора в рассматриваемой схеме характеризуется вектором $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, который характеризует распределение отобранных элементов по типам. Графически удобно представить этот вектор как распределение отобранных элементов по ячейкам, каждая из которых соответствует определенному типу.

Для вывода формулы числа сочетаний с повторениями (1.30) применим следующую интерпретацию задачи (рис. 1.7).

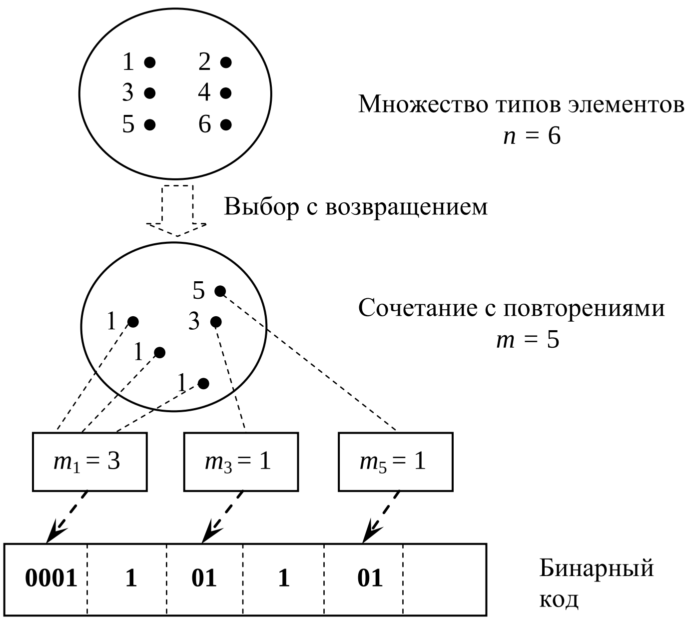


Рис. 1.7. Иллюстрация к выводу формулы
для числа сочетаний с повторениями

Построим код для каждой комбинации, получающейся в результате испытания. Пусть, например, в пяти выборах элементов

(m = 5) из шести типов (n = 6) получены три элемента первого типа, один – третьего и один – пятого (m_1 = 3, m_3 = 1, m_5 = 1, $m_2 = m_4 = m_6$ = 0). Бинарный код содержит 0 и 1: нули означают выбранные элементы любого типа (общее число нулей в коде равно числу выбираемых элементов m), а единицы используются для завершения серии нулей, относящихся к одному типу элементов. Завершающая единица, следующая за элементами (нулями) последнего типа, не ставится, так как она не имеет никакой информационной нагрузки. Таким образом, в рассматриваемом примере бинарный код рассматриваемого сочетания с повторениями равен 0001101101 (см. рис. 1.7). Число нулей перед первой единицей равно m_1 (в примере – 3), а число элементов после последней единицы – m_6 (в примере таких элементов нет). Если k-й тип элементов отсутствует в выборке, то в коде между (k – 1)-й и k-й единицами отсутствуют нули ($1 < k < n$). Число единиц в коде равно (n – 1), а общее число позиций – ($n + m$ – 1).

Такое кодовое представление каждой комбинации дает основание для интерпретации испытания как случайной расстановки (n – 1) единиц в последовательности из ($n + m$ – 1) элементов, т.е. сочетания позиций единиц в бинарном числе с ($n + m$ – 1) разрядами. Общее число таких комбинаций равно C_{n+m-1}^{n-1}, что и доказывает приведенное выше выражение для числа сочетаний с повторениями.

На рис. 1.7 на бинарный код сочетания наложена маска (вертикальные пунктирные линии), которая подчеркивает распределение выбранных элементов по типам (ячейкам).

Статистическая физика дает примеры распределений частиц по ячейкам (типам, энергиям), основанные на разных предположениях о свойствах частиц и условиях их случайного попадания в ячейки. Как и прежде, число ячеек (типов) обозначается n, а число частиц (выбранных элементов) – m.

Статистика Максвелла – Больцмана исходит из того, что каждая из частиц идентифицирована и с равной вероятностью попадает в любую из n ячеек. Таким образом, в каждой ячейке может оказаться любое число частиц от 1 до m . Число разных ситуаций расположения частиц по ячейкам в этой схеме (размещения с повторениями) равно $\tilde{A}_n^m = n^m$.

Статистика Бозе – Эйнштейна предполагает, что частицы неразличимы и попадание каждой равновозможно в любую ячейку. Эта схема соответствует сочетаниям с повторениями, в которой число возможных комбинаций распределения частиц по ячейкам равно $\tilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m-1}^m$.

Статистика Ферми – Дирака также предполагает, что частицы неразличимы. Дополнительно предполагается, что число частиц меньше числа ячеек ($m < n$) и каждая ячейка может быть занята не более, чем одной частицей. Эта схема соответствует стандартным сочетаниям из n элементов по m, в которой общее число возможных комбинаций равно C_n^m.

Рассмотрим на примерах применение формул комбинаторики для расчета вероятностей событий в классической схеме.

Пример 1.24. В связке находятся 20 ключей, из которых только один подходит к замку. Требуется рассчитать вероятность того, что для открывания замка придется испробовать ровно половину ключей из связки.

Ключи отбираются из связки последовательно один за другим. Общее число последовательностей, составленных из n = 20 элементов, равно $N = \mathcal{P}_{20}$ = 20! Каждая из последовательностей – элементарное событие, а все вместе они образуют пространство элементарных событий. Обозначим A событие, которое состоит в том, что замок открывается десятым ключом, т.е. на десятой позиции в последовательности из 20 ключей (элементов) располагается подходящий к замку ключ. Девять предыдущих элементов последовательности и десять последующих могут следовать в произвольном порядке. Это означает, что число M_A событий, благоприятных событию A, равно $\mathcal{P}_{19}$ = 19! Тогда на основании классической схемы расчета вероятности $P(A) = M_A / N$ = 19! / 20! = 0,05.

Тот же результат будет получен при расчете вероятности того, что к замку подойдет первый, второй и т. д. из испытываемых ключей. Эти события являются, таким образом, равновозможными. Кроме того, они несовместны и образуют полную группу. Отсюда следует, что они образуют другое пространство равновероятных элементарных событий, удобное, возможно, при решении другой задачи в аналогичных условиях.

Пример 1.25. В группе 20 студентов. Из 30-ти экзаменационных билетов студент знает лишь 25. Какова вероятность того, что студенту достанется счастливый билет, если он будет отвечать последним?

Предполагается, что преподаватель не возвращает билеты, выбранные предыдущими студентами, т.е. все студенты выбирают разные билеты (схема выбора без возвращения). Хотя практический интерес представляет только последовательность билетов, выбранных двадцатью студентами, рассмотрим виртуальную последовательность номеров тридцати имеющихся билетов. Общее число таких последовательностей $N = \mathcal{P}_{30} = 30!$ Событие A состоит в том, что на 20-й позиции последовательности находится один из 25-ти номеров билетов, а остальные позиции заняты другими номерами в произвольном порядке. Число таких комбинаций $M_A = 25 \cdot 29!$ Тогда $P(A) = M_A / N = 25 \cdot 29! / 30! = 5 / 6$.

Теперь рассмотрим события B и C, состоящие в том, что студент вытаскивает счастливый билет, идя на экзамен пятым и десятым соответственно. Рассуждения, аналогичные предыдущим, приводят к следующему результату: $P(B) = P(C) = 5 / 6$. Существенно, что рассматриваемые события являются совместными.

Пример 1.26. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 наугад составляется трехзначное число без повторяющихся цифр. Какова вероятность того, что составленное число окажется четным?

Можно представить себе процесс формирования случайного трехзначного числа как последовательный выбор без возвращения трех элементов из пяти с упорядочением выбранных элементов. В этом случае общее число N возможных вариантов выбора (трехзначных чисел) составляет $N = A_5^3 = 5!/2!$. Число подобных комбинаций, в которых последняя цифра четная (событие A), составляет $M_A = 2 \cdot A_4^2 = 2 \cdot 4!/2!$. Таким образом, $P(A) = M_A / N = 2 / 5$.

Задача может быть решена и с использованием другого пространства элементарных событий – всех возможных последовательностей из пяти цифр множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Трехзначное случайное число будем считать составленным из первых трех цифр последовательности. В такой интерпретации $N = \mathcal{P}_5 = 5! = 120$, $M_A = 2 \cdot \mathcal{P}_4 = 48$. Отсюда следует, что $P(A) = 2 / 5$.

Пример 1.27. Шары – 3 белых и 6 черных – располагаются в ряд в случайном порядке. Какова вероятность того, что белые шары будут расположены подряд?

Испытание, результатом которого будет определенная последовательность расположения белых и черных шаров, может быть организовано следующим образом. Имеется множество чисел $\{1, 2, \ldots, 9\}$, которые означают возможные номера позиций белых шаров в случайной последовательности девяти белых и черных шаров. Случайным образом выбираются три числа из восьми и на выбранных позициях располагаются белые шары, а остальные позиции занимаются черными шарами. Учитывая неразличимость белых шаров, общее число вариантов их расположения в последовательности равно $N = C_9^3 = 84$. Число случаев, когда белые шары располагаются подряд, равно 6 (номера $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{3, 4, 5\}$ и т. д.). Отсюда следует, что искомая вероятность равна 1 / 14.

Пример 1.28. Из чисел 1, 2, …, 100 наугад одновременно выбирают два числа. Какова вероятность события A, состоящего в том, что одно из них будет меньше 40, а другое – меньше 50?

Общее число вариантов выбора двух чисел без учета порядка их следования (одновременный выбор двух чисел) равно $C_{100}^2 = 4950$. Выбранные числа всегда различны, так как реализуется схема выбора без возвращения. Событие A предполагает, что либо оба числа меньше 40 (событие A'; число таких случаев $C_{39}^2 = 741$), либо одно из чисел меньше 40, а другое находится в диапазоне $40 \div 49$ (событие A''; число таких случаев $39 \cdot 10 = 390$). Существенно, что события A' и A'' несовместны и $A = A' + A''$. Таким образом, общее число равновозможных комбинаций, при реализации которых происходит событие A, равно $741+390 = 1131$. Тогда искомая вероятность равна $P(A) = 1131 / 4950 \approx 0{,}2285$.

Пример 1.29. В партии из 20 приборов, произведенных за рабочую смену, ровно 5 приборов не удовлетворяют техническим требованиям и должны быть признаны бракованными. Инженер группы технического контроля случайно отобрал для контроля четыре прибора. Чему равна вероятность того, что среди отобранных четырех приборов ровно два являются бракованными?

Пусть A – событие, состоящее в том, что среди контрольных приборов окажутся ровно два бракованных. Введем следующие обозначения: $n = 20$ – число приборов в партии; $m = 4$ – число приборов, отобранных для контроля; $k = 5$ – число бракованных приборов в партии; $l = 2$ – число бракованных приборов в контрольной группе в ситуации, когда происходит событие A.

Общее число возможных способов N выбрать 4 контрольных прибора из 20 равно $N = C_n^m = C_{20}^4$. Число способов M выбрать 4 прибора так, чтобы среди них было ровно 2 бракованных, равно $M = C_k^l \cdot C_{n-k}^{m-l} = C_5^2 \cdot C_{15}^2$. Таким образом, искомая вероятность рассчитывается по формуле:

$$P(A) = \frac{C_k^l \cdot C_{n-k}^{m-l}}{C_n^m} = \frac{C_5^2 \cdot C_{15}^2}{C_{20}^4} = \frac{70}{323}.$$

При выполнении вычислений C_n^m для больших значений n и m целесообразно использовать приближенную формулу Стирлинга (*James Stirling*, 1692 – 1770, Шотландия):

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,. \qquad (1.31)$$

Контрольные вопросы и задачи

1. Какие условия должны быть выполнены для расчета вероятности случайного события комбинаторным методом в классической схеме?
2. Что называется сочетанием из n элементов по m?
3. Одновременно производится выбор трех цветных карандашей из пяти, условно обозначенных *К, С, З, Ч, Б*. Приведите два примера сочетаний в рассматриваемой схеме выбора.
4. Напишите формулу, определяющую число сочетаний из n элементов по m.
5. Какими свойствами обладает число сочетаний из n элементов по m?

6. Что называется размещением из n элементов по m?

7. В условии испытания, описанного в вопросе 3, являются ли размещения (*К*, *С*, *Б*) и (*Б*, *К*, *С*) различными?

8. Напишите формулу, определяющую число размещений из n элементов по m.

9. Какое из значений C_n^m или A_n^m больше другого? Во сколько раз?

10. Что называется размещением из n элементов по m с повторениями?

11. Приведите пример испытания и опишите в нем несколько примеров размещений из n элементов по m с повторениями.

12. Напишите формулу, определяющую число размещений из n элементов по m с повторениями.

13. Что называется сочетанием из n элементов по m с повторениями?

14. Приведите пример испытания и опишите в нем несколько примеров сочетаний из n элементов по m с повторениями.

15. Напишите формулу, определяющую число сочетаний из n элементов по m с повторениями.

16. Объясните принцип вывода формулы для числа сочетаний из n элементов по m с повторениями.

17. Объясните интерпретацию выборки элементов с повторениями как распределение элементов по ячейкам.

18. Сформулируйте условия статистики Максвелла – Больцмана распределения частиц по ячейкам. Какое число возможных распределений частиц по ячейкам возможно в этой схеме?

19. Сформулируйте условия статистики Бозе – Эйнштейна распределения частиц по ячейкам. Какое число возможных распределений частиц по ячейкам возможно в этой схеме?

20. Сформулируйте условия статистики Ферми – Дирака распределения частиц по ячейкам. Какое число возможных распределений частиц по ячейкам возможно в этой схеме?

21. Для выполнения лабораторных работ преподаватель случайно разбивает группу студентов на две подгруппы. Какова вероятность того, что два студента Иванов и Петров окажутся в разных подгруппах?

22. Из чисел 1, 2, …, 10 случайно выбираются два числа. Найти вероятность того, что оба выбранных числа будут четными.

23. Пятитомное собрание сочинений поставлено на книжную полку в случайном порядке. Какова вероятность того, что том 3 окажется точно на своем месте?

24. Известно, что в программе, состоящей из четырех модулей, в одном модуле содержится ошибка. Программист тестирует последовательно один модуль за другим в случайном порядке. Какова вероятность того, что ошибка будет найдена в третьем тестируемом модуле?

25. Из 10 белых и 5 черных шаров случайно отбираются и кладутся в урну 9 шаров, а далее из нее случайно извлекается один шар. Какова вероятность того, что выбранный шар будет белым?

§ 8. Условные вероятности. Независимость случайных событий

Рассмотрим два случайных события A и B. Вероятности этих событий $P(A)$ и $P(B)$ определены только основными условиями проведения испытаний (комплексом условий G). Поскольку никакие дополнительные условия на испытание не налагаются, вероятности $P(A)$ и $P(B)$ называются *безусловными*.

Будем рассматривать события A и B, для которых $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$. Допустим, проведено испытание и оказалось, что в нем произошло событие B. При этом дополнительном условии требуется определить вероятность события A. Искомая вероятность обозначается $P(A \mid B)$ и называется *условной вероятностью* события A относительно B (вероятностью события A при условии, что событие B имело место). Безусловную вероятность $P(A)$, рассчитанную без привлечения результата испытания, называют *априорной*, а вероятность $P(A \mid B)$, учитывающую дополнительную информацию о результате испытания, – *апостериорной*.

Аксиомы теории вероятностей не позволяют рассчитать условную вероятность $P(A \mid B)$. Условная вероятность вводится дополнительным определением:

$$P(A \mid B) = P(A \bigcap B) / P(B). \qquad (1.32)$$

В дальнейшем для краткости будем писать:

$$P(A \mid B) = P(AB) / P(B). \qquad (1.33)$$

Можно записать аналогичное выражение и для условной вероятности события B относительно A:

$$P(B \mid A) = P(AB) / P(A). \qquad (1.33')$$

Таким образом, условная вероятность одного события относительно другого определена через безусловные вероятности, связанные с этими событиями.

На рис. 1.8 представлены иллюстрации к формулам (1.32), (1.33). Испытание состоит в случайном бросании точки в квадрат. Пространство элементарных исходов Ω включает все точки в квадрате, а безусловные вероятности $P(A)$ и $P(B)$ согласно методу расчета геометрических вероятностей определяются формулой (1.11):

$$P_A = \frac{\text{mes }(A)}{\text{mes }(\Omega)}, \quad P_B = \frac{\text{mes }(B)}{\text{mes }(\Omega)}, \quad \text{mes }(\Omega) \neq 0. \qquad (1.34)$$

Аналогичным образом вычисляется и условная вероятность $P(A \mid B)$:

$$P(A \mid B) = \frac{\text{mes}\,(AB)}{\text{mes}\,(B)}. \qquad (1.35)$$

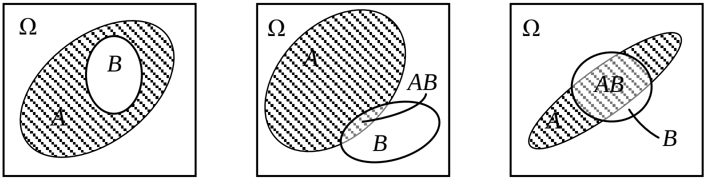
В выражении (1.35) отражен тот факт, что при условии реализации события B пространство элементарных исходов сокращается до множества точек, принадлежащих области B (см. рис. 1.8).

Элементарное преобразование выражения (1.35) приводит к следующему результату:

$$P(A \mid B) = \frac{\text{mes }(AB)}{\text{mes }(B)} = \frac{\text{mes }(AB) / \text{mes }(\Omega)}{\text{mes }(B) / \text{mes }(\Omega)} = \frac{P(AB)}{P(B)}. \qquad (1.36)$$

Таким образом, определение условной вероятности (1.33) не противоречит геометрическому подходу к расчету вероятностей. На рис. 1.8 представлены разные возможные соотношения между величинами $P(A)$ и $P(A \mid B)$.

Рассуждения, изложенные выше применительно к геометрическим вероятностям (формулы (1.34) – (1.36)), могут быть также применены к экспериментальному и классическому подходам к расчету условной вероятности (формулы (1.8) и (1.10) соответственно). И в этих случаях расчетные формулы не противоречат определению условной вероятности (1.33).



$P(A \mid B)=1$ $\quad$ $P(A \mid B) < P(A)$ $\quad$ $P(A \mid B) > P(A)$

Рис. 1.8. Иллюстрация к понятию условной вероятности $P(A \mid B)$

Запишем определение условной вероятности (1.33), (1.33') в следующей форме:

$$P(AB) = P(B)\,P(A \mid B) = P(A)\,P(B \mid A). \tag{1.37}$$

Полученное равенство называется *формулой умножения вероятностей*: вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого относительно первого.

Рассмотрим ряд определений и утверждений, связанных с понятием условной вероятности событий.

1. Случайное событие A называется *независимым* от B, если вероятность события A не зависит от того, произошло ли событие B:

$$P(A) = P(A \mid B). \tag{1.38}$$

На основании определения (1.38), если событие B не зависит от A, то справедливо равенство:

$$P(B) = P(B \mid A). \tag{1.38'}$$

Пример 1.30. В домашней библиотеке историка 30% книг написаны на английском языке, 40% книг посвящены современной истории Ближнего Востока и 10% – написаны на английском языке и посвящены современной истории Ближнего Востока. Из библиотеки случайно выбирается одна книга. Рассматриваются следующие события: A – книга написана на английском языке; B – книга посвящена современной истории Ближнего Востока. Являются ли события A и B независимыми?

Проверим выполнение равенства (1.37) для независимых событий. Согласно условиям задачи $P(A)$ = 0,3; $P(B)$ = 0,4; $P(AB)$ = 0,1. Из определения (1.33) следует, что

$$P(A \mid B) = P(AB) \,/\, P(B) = 0{,}1 \,/\, 0{,}4 = 0{,}25.$$

Следовательно, равенство (1.38) не выполнено, так что события A и B зависимы.

2. Свойство независимости событий A и B является взаимным: если $P(A) = P(A \mid B)$, то и $P(B) = P(B \mid A)$.

Это утверждение следует из формулы умножения вероятностей (1.37):

$$P(B)\,P(A \mid B) = P(A)\,P(B \mid A)\,.$$

Если $P(A) = P(A \mid B) \neq 0$, то последняя формула преобразуется к равенству

$$P(B)\,P(A) = P(A)\,P(B \mid A)\,,$$

из которого и следует, что $P(B) = P(B \mid A)$.

3. Из определения независимости событий следует, что

$$P(AB) = P(A)\,P(B). \tag{1.39}$$

Формула умножения вероятностей может быть обобщена на произведение n событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

4. Вероятность произведения нескольких событий равна произведению их условных вероятностей при условии, что все предыдущие события имели место:

$$P(A_1\,A_2 \ldots A_n) = \\ = P(A_1)\,P(A_2 \mid A_1)\,P(A_3 \mid A_1A_2) \ldots P(A_n \mid A_1A_2 \ldots A_{n-1}). \tag{1.40}$$

Утверждение 4 доказывается методом полной математической индукции. При $n = 2$ оно следует из формулы умножения вероятностей. Допустим справедливость утверждения (1.40) для $(n-1)$:

$$P(A_1\,A_2 \ldots A_{n-1}) = \\ = P(A_1)\,P(A_2 \mid A_1)\,P(A_3 \mid A_1A_2) \ldots P(A_{n-1} \mid A_1A_2 \ldots A_{n-2}). \tag{1.41}$$

Представим событие $B_n = A_1 A_2 \dots A_n$ как произведение событий A_n и $B_{n-1} = A_1 A_2 \dots A_{n-1}$. Тогда на основании формулы умножения вероятностей для двух событий и с учетом предположения (1.41) получаем следующее выражение для вероятности $P(A_1 A_2 \dots A_n)$:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n)= P(B_{n-1} A_n)= P(B_{n-1})\, P(A_n \mid B_{n-1}) =$$
$$=P(A_1 A_2 \dots A_{n-1})\, P(A_м \mid A_1 A_2 \dots A_{n-1}) =$$
$$= P(A_1)\, P(A_2 \mid A_1)\, P(A_3 \mid A_1 A_2) \dots P(A_{n-1} \mid A_1 A_2 \dots A_{n-2})\, P(A_n \mid A_1 A_2 \dots A_{n-1}),$$

которое совпадает с (1.40), что и завершает доказательство.

Заметим, что в связи с коммутативностью операции умножения n событий можно представить событие $B = A_1 A_2 \dots A_n$ $n!$ способами и записать $n!$ соответствующих расчетных формул. В частности, для $n = 3$ можно записать шесть расчетных формул для $P(A_1 A_2 A_3)$:

$$P(A_1 A_2 A_3)= P(A_1)\, P(A_2 \mid A_1)\, P(A_3 \mid A_1 A_2) =$$
$$= P(A_2 A_1 A_3)= P(A_2)\, P(A_1 \mid A_2)\, P(A_3 \mid A_1 A_2) =$$
$$= \dots =$$
$$= P(A_3 A_2 A_1)= P(A_3)\, P(A_2 \mid A_3)\, P(A_1 \mid A_2 A_3).$$

Выбор одной из возможных расчетных формул зависит от условий задачи и обусловливается простотой необходимых вычислений.

Понятие независимости, определенное для двух событий, может быть обобщено на случай n событий $A_1, A_2, \dots, A_n$.

5. События $A_1, A_2, \dots, A_n$ *независимы в совокупности*, если выполнены следующие условия:

$$\begin{gathered} P(A_i A_j) = P(A_i)\, P(A_j),\ 1 \le i < j \le n, \\ P(A_i A_j A_k) = P(A_i)\, P(A_j)\, P(A_k),\ 1 \le i < j < k \le n, \\ \dots, \\ P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)\, P(A_2)\, P(A_3) \dots P(A_n). \end{gathered} \qquad (1.42)$$

Первое равенство в (1.42) означает попарную независимость событий, второе равенство усиливает требование к независимости в каждой тройке событий и т. д.

Можно показать на примере, что попарной независимости недостаточно для того, чтобы события были независимыми в совокупности.

Пример Бернштейна. Представим себе правильный тетраэдр, у которого одна грань окрашена в красный цвет, другая – в зеленый, третья – в синий, а четвертая содержит все три цвета. Испытание состоит в том, что тетраэдр случайно подбрасывается над столом и фиксируется грань, на которую он упал. Введем три события: A – выпадение грани, содержащей красный цвет; B – выпадение грани, содержащей зеленый цвет; C – выпадение грани, содержащей синий цвет. Нетрудно видеть, что в рассматриваемых условиях

$$P(A) = P(B) = P(C) = 0{,}5.$$

Если выпала грань с зеленым цветом, то вероятность того, что она содержит и красный цвет, равна 0,5: $P(A \mid B) = 0{,}5$. Аналогичные равенства можно записать и для других сочетаний цветов:

$$P(B \mid A) = P(A \mid C) = P(C \mid A) = P(B \mid C) = P(C \mid B) = 0{,}5.$$

Поскольку $P(A) = P(A \mid B) = 0{,}5$, заключаем, что события A и B независимы. Подобным образом устанавливаем, что любые два события из A, B, C независимы. Однако из попарной независимости событий не следует их независимость в совокупности, так как $P(ABC) = 0{,}25$ не совпадает с произведением $P(A)P(B)P(C) = 0{,}125$.

Пример 1.31. Буквы разрезной азбуки, из которых составлено слово СТАТИСТИКА, перемешаны. Ребенок, не умеющий читать, случайно отобрал и последовательно расположил четыре буквы. Какова вероятность того, что получилось слово ТАКТ?

Будем рассматривать испытание как последовательный выбор ребенком четырех букв для составления слова. Пусть событие A состоит в составлении слова ТАКТ в результате испытания. Обозначим A_i , $i = 1, 2, 3, 4$, выбор i-й буквы, соответствующей i-й позиции в слове ТАКТ. В частности, A_3 – выбор ребенком третьей буквы К. Тогда $A = A_1 A_2 A_3 A_4$.

Согласно формуле умножения вероятностей

$$P(A_1 A_2 A_3 A_4) = P(A_1)\, P(A_2 \mid A_1)\, P(A_3 \mid A_1 A_2)\, P(A_4 \mid A_1 A_2 A_3),$$

откуда следует, что

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3 A_4) = \frac{3}{10}\,\frac{2}{9}\,\frac{1}{8}\,\frac{2}{7} = \frac{1}{420}.$$

Следующие два утверждения устанавливают связь между несовместными и независимыми событиями.

6. Несовместные события A и B, ни одно из которых не является невозможным, зависимы.

Доказательство утверждения 6 основано на том, что для несовместных событий $AB = V$, поэтому $P(AB) = P(V) = 0$. Допустим, что события A и B независимы, тогда $P(AB) = P(A)P(B) \neq 0$, но это противоречит условию несовместности событий $P(AB) = 0$. Следовательно, события A и B зависимы.

Пример 1.32. В урне находятся один белый и четыре черных шара. Испытание состоит в последовательном выборе двух шаров по схеме без возвращения первого выбранного шара. Рассматриваются два события: A – первый выбранный шар является белым; B – второй выбранный шар является белым. События A и B несовместны: поскольку в урне всего один белый шар, события A и B не могут реализоваться в одном испытании. Следовательно, в соответствии с утверждением 6 события A и B являются зависимыми.

7. Независимые события A и B, ни одно из которых не является невозможным, совместны.

Для доказательства рассмотрим сумму событий $A + B$. Если события несовместны, то по аксиоме сложения (1.14):

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

В общем случае совместных событий справедлива теорема сложения (1.17):

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{1.43}$$

Из независимости событий A и B следует, что $P(AB) = P(A)P(B)$, а из того, что они не являются невозможными – $P(AB) > 0$. Применяя это неравенство к выражению (1.43), получим, что

$$P(A+B) < P(A) + P(B).$$

Таким образом, события A и B совместны.

Пример 1.33. В урне находятся три белых и два черных шара. Испытание состоит в последовательном выборе двух шаров по схеме с возвращением первого выбранного шара. Рассматриваются два события: A – первый выбранный шар является белым; B – второй выбранный шар является белым. События A и B независимы в соответствии с условиями проведения испытания. Они могут реализоваться в одном испытании, следовательно, являются совместными.

Контрольные вопросы и задачи

1. Что называется условной вероятностью события A относительно B?
2. Почему безусловная вероятность события A называется априорной, а условная – апостериорной?
3. Опишите пространство элементарных событий при расчете условной вероятности случайного события.
4. Объясните принцип расчета условной вероятности случайного события в схеме геометрических вероятностей.
5. Покажите, что расчет условной вероятности в классической схеме соответствует определению (1.33).
6. Покажите, что экспериментальный подход к расчету условной вероятности соответствует определению (1.33).
7. Напишите формулу умножения вероятностей двух событий.
8. Дайте определение независимости события A от события B.
9. Объясните, почему свойство независимости двух событий является взаимным.
10. Как записывается формула умножения вероятностей для независимых событий?
11. Напишите формулу умножения вероятностей для n событий.
12. Какой метод используется для доказательства формулы умножения вероятностей для n событий?
13. Какие возможны варианты записи формулы умножения вероятностей для n событий? Чем обусловлен выбор одной из возможных формул при решении прикладных задач?
14. Дайте определение независимости n событий в совокупности.
15. Приведите пример, в котором события попарно независимы, но зависимы в совокупности.

16. Абсолютно симметричная монета подбрасывается до тех пор, пока не выпадет герб. Какова вероятность того, что монету придется подбрасывать ровно 5 раз?

17. Для событий A и B известны следующие вероятности: $P(A) = 0{,}7$; $P(B) = 0{,}2$; $P(AB) = 0{,}14$. Являются ли события A и B несовместными?

18. Для событий A и B известны следующие вероятности: $P(A) = 0{,}7$; $P(B) = 0{,}05$; $P(A + B) = 0{,}75$. Являются ли события A и B независимыми?

19. Являются ли противоположные события зависимыми? Являются ли они совместными?

§ 9. Формула полной вероятности

Допустим, определена полная группа попарно несовместных событий (§ 2, определение 9). Обозначим их H_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Множество гипотез может быть несчетным. В контексте рассматриваемой в этом параграфе задачи события H_i, $i = 1, 2, \ldots, n,$ уместно назвать *гипотезами*. Согласно определению для H_i, $i = 1, 2, \ldots, n,$ справедливы следующие свойства:

$$\bigcup_{i=1}^{n} H_i = U\ ;\quad \forall\, i, j = \overline{1,n}\,,\ i \neq j,\ H_i H_j = V.$$

Таким образом, в испытании непременно реализуется одна (и только одна в силу несовместности гипотез) из рассматриваемых гипотез. Это означает, что произвольное событие A каждый раз при проведении испытания реализуется с одной гипотезой из рассматриваемой группы H_i, $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} AH_i\ . \tag{1.44}$$

В силу попарной несовместности рассматриваемых гипотез события AH_i , $i = 1, 2, \ldots, n$, также несовместны. Это дает возможность применить аксиому сложения вероятностей (1.14):

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i)\,. \tag{1.45}$$

После применения в (1.45) формулы умножения вероятностей получим следующую расчетную формулу для $P(A)$:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A|H_i), \qquad (1.46)$$

которую называют *формулой полной вероятности*.

Таким образом, для расчета полной вероятности события A необходимо знание вероятностей гипотез $P(H_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и условных вероятностей события A относительно гипотез H_i: $P(A \mid H_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

На рис. 1.9 приведена иллюстрация к формуле полной вероятности. Испытание состоит в бросании точки в квадрат. Под событием A понимается попадание точки в затемненный эллипс. В качестве гипотез рассматривается попадание точки в секторы квадрата $H_1, H_2, \ldots, H_5$. Применяя геометрический подход к расчету вероятностей событий, можно проверить справедливость формулы (1.46).

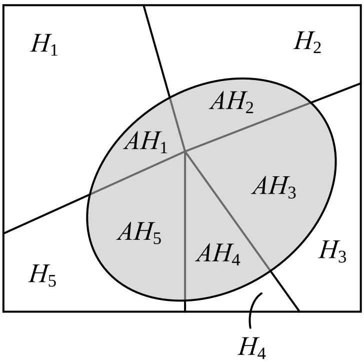


Рис. 1.9. Иллюстрация к формуле полной вероятности

Пример 1.34. Студенты сдают зачет по курсу, который состоит из трех самостоятельных разделов. Билет содержит три вопроса – по одному из каждого раздела курса. Студент с вероятностью 0,7 может ответить на вопрос из раздела 1, с вероятностью 0,5 – из раздела 2 и 0,4 – из раздела 3. Преподаватель учитывает не только количество данных студентом ответов на вопросы билета, но и качество ответов, поэтому оценка преподавателя задана статистически:

если ни на один вопрос билета студент не ответил, то преподаватель ставит оценку "незачет";

если студент ответил на один вопрос из трех, то с вероятностью 0,1 преподаватель ставит "зачет";

если студент ответил на два вопроса из трех, то с вероятностью 0,6 преподаватель ставит "зачет";

если студент ответил на все вопросы билета, то с вероятностью 0,9 преподаватель ставит "зачет".

Требуется найти вероятность того, что студент сдаст зачет.

Рассмотрим событие C_i, $i = 1, 2, 3$, которое состоит в том, что на вопрос i-го раздела студент дал ответ. Замечание о самостоятельности разделов, указанное в формулировке задачи, позволяет заключить, что события C_i, $i = 1, 2, 3$, являются независимыми. Согласно условиям задачи $P(C_1) = 0{,}7$; $P(C_2) = 0{,}5$; $P(C_3) = 0{,}4$.

Событие A, вероятность которого требуется рассчитать, состоит в том, что студент сдал зачет.

Определим четыре гипотезы H_i, $i = 0, 1, 2, 3$, образующие полную группу попарно несовместных событий. Гипотеза H_i означает, что студент ответил на i вопросов билета. Рассчитаем вероятности гипотез:

- $H_0 = \overline{C}_1\,\overline{C}_2\,\overline{C}_3$;
  $P(H_0) = P(\overline{C}_1)\,P(\overline{C}_2)\,P(\overline{C}_3) = 0{,}09$;
- $H_1 = C_1\,\overline{C}_2\,\overline{C}_3 + \overline{C}_1\,C_2\,\overline{C}_3 + \overline{C}_1\,\overline{C}_2 C_3$;
  $P(H_1) = 0{,}7 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}36$;
- $H_2 = C_1\,C_2\,\overline{C}_3 + C_1\,\overline{C}_2\,C_3 + \overline{C}_1\,C_2 C_3$;
  $P(H_2) = 0{,}41$;
- $H_3 = C_1\,C_2\,C_3$;
  $P(H_3) = 0{,}14$.

Обратим внимание на то, что $\sum_{i=0}^{3} P(H_i) = 1$.

В условии задачи заданы следующие условные вероятности: $P(A \mid H_0) = 0$; $P(A \mid H_1) = 0{,}1$; $P(A \mid H_2) = 0{,}6$; $P(A \mid H_3) = 0{,}9$. Теперь с использованием формулы полной вероятности (1.46) получаем искомую вероятность события A: $\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\,P(A|H_i) = 0{,}408$.

Контрольные вопросы и задачи

1. Сформулируйте условия, при которых справедлива формула полной вероятности.
2. Напишите формулу полной вероятности и объясните содержание всех входящих в нее переменных.
3. Приведите вывод формулы полной вероятности.

4. Где в выводе формулы полной вероятности используется несовместность гипотез?

5. Являются ли гипотезы независимыми?

6. Являются ли несовместными события AH_i, $i = 1, 2, \ldots, n$? Дайте объяснение к ответу.

7. Дайте геометрическую интерпретацию формулы полной вероятности.

8. Допустим, что площадь квадрата на рис. 1.9 равна 1, площади секторов квадрата $H_1, H_2, \ldots, H_5$ равны соответственно 0,3; 0,2; 0,25; 0,1; 0,15; а площади секторов эллипса AH_1, $AH_2, \ldots, AH_5$ – 0,05; 0,04; 0,15; 0,08; 0,07. Рассчитайте $P(A)$ двумя способами: как отношение площади эллипса к площади квадрата и по формуле полной вероятности.

9. Пусть событие B может произойти с любым из событий H_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, которые образуют полную группу попарно несовместных событий. Укажите, какие из приведенных ниже равенств являются верными.

$$(1)\ P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid H_i)\,; \qquad (3)\ B = \bigcup_{i=1}^{n} BH_i\,;$$

$$(2)\ B = \bigcup_{i=1}^{n} (B \mid H_i)\,; \qquad (4)\ P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(BH_i)\,.$$

10. В тире имеются пять ружей, вероятности попадания из которых в мишень равны, соответственно, 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Определите вероятность попадания в мишень при одном выстреле, если стрелок берет одно из ружей наудачу.

§ 10. Формула Байеса (теорема гипотез)

Как и в предыдущем параграфе, рассмотрим полную группу попарно несовместных гипотез H_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Предположим, что каждая гипотеза имеет известную априорную вероятность $P(H_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, своей реализации в испытании. Рассматривается событие A, для которого известны условные вероятности относительно гипотез H_i: $P(A \mid H_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Предполагается, что $P(A) > 0$. Произведено испытание, в результате которого произошло событие A. Возникает вопрос: как перераспределились вероятности гипотез при получении информации о том, что произошло событие A? Можно сформулировать вопрос иначе: чему равны апостериорные вероятности гипотез $P(H_i \mid A)$, $i = 1, 2, \ldots, n$?

Ответ на поставленный вопрос дает *формула Байеса* (*Thomas Bayes*, 1702 – 1761, Англия):

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k)}. \tag{1.47}$$

Для вывода формулы Байеса воспользуемся формулой умножения вероятностей, записанной в двух эквивалентных вариантах:

$$P(AH_i) = P(H_i)P(A|H_i) = P(A)P(H_i \mid A). \tag{1.48}$$

Из (1.48) следует, что

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}. \tag{1.49}$$

Используя теперь в знаменателе выражения (1.49) формулу полной вероятности (1.46) для $P(A)$, получим формулу Байеса (1.47).

Доказанное утверждение относительно апостериорных вероятностей гипотез часто называют *теоремой гипотез*. Эта теорема является основой для решения широкого круга прикладных задач оценивания переменных по косвенным измерениям, классификации данных, принятия статистических решений.

Пример 1.35. Радиолокационная станция работает в режиме обнаружения опасной цели. С вероятностью 0,9 в зоне обзора радиолокатора опасная цель отсутствует. Вследствие высокого уровня помех показания радиолокатора не точно соответствуют воздушной обстановке: возможно объявление ложной тревоги или пропуск опасной цели. Известно, что вероятность ложной тревоги (радиолокатор фиксирует наличие цели, в то время как она отсутствует в зоне обзора) равна 0,3, а вероятность пропуска цели (радиолокатор показывает отсутствие цели, в то время как она имеется в зоне обзора) равна 0,2. В результате очередного измерения радиолокатор показал отсутствие цели. Какова вероятность пропуска имеющейся опасной цели?

Рассмотрим две альтернативные гипотезы: H_1 – цель отсутствует и H_2 – цель имеется в зоне обзора. Априорные вероятности гипотез заданы в условии задачи: $P(H_1) = 0{,}9$; $P(H_2) = 0{,}1$. Введем событие A, состоящее в том, что локатор показывает отсутствие цели. Согласно условию задачи $P(A \mid H_1) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$; $P(A \mid H_2) = 0{,}2$. В задаче требуется рассчитать $P(H_2 \mid A)$.

Воспользуемся формулой Байеса (1.47) при $n = 2$:

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2)\,P(A|H_2)}{P(H_1)\,P(A|H_1) + P(H_2)\,P(A|H_2)} = \frac{0{,}02}{0{,}65} \approx 0{,}03.$$

Контрольные вопросы и задачи

1. В чем состоит задача расчета апостериорных вероятностей гипотез?
2. Какие данные необходимы для расчета апостериорных вероятностей гипотез?
3. Напишите формулу Байеса.
4. Приведите доказательство формулы Байеса.
5. В партии, состоящей из пяти изделий, с равной вероятностью может быть 1, 2 или 3 бракованных изделия. Из партии случайно выбрано одно изделие, которое оказалось бракованным. Какова вероятность того, что в партии было два бракованных изделия?
6. В условиях примера 1.34 дайте ответ на следующий вопрос: какова вероятность того, что студент ответил на три вопроса, если известно, что он получил зачет?
7. Чему равна сумма апостериорных вероятностей всех гипотез $\sum_{i=1}^{n} P(H_i|A)$? Проверьте правильность своего ответа в примере, рассмотренном в предыдущем вопросе.

Глава 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

§ 11. Понятие случайной величины

В гл. 1 было показано, что с каждым экспериментом, в котором реализован комплекс условий G, связано пространство элементарных событий Ω. При решении практических задач необходимо вводить детальное описание каждого сложного события, вероятность которого подлежит расчету, и определять множество элементарных событий в его составе. В то же время каждому элементарному событию можно поставить в соответствие некоторое действительное число и дальнейшие вероятностные расчеты выполнять на множестве действительных чисел. Такой подход приводит к понятию *случайной величины*.

Функция $X(\omega)$, определенная на пространстве элементарных событий $\omega \in \Omega$, называется *случайной величиной*.

Таким образом, функция $X(\omega)$ является отображением пространства элементарных событий на множество действительных чисел: $X(\omega)$: $\Omega \to \mathfrak{R}$. В дальнейшем случайные величины будут обозначаться прописными латинскими буквами X, Y, …, а их значения – строчными x, y, ….

Функция $X(\omega)$ должна быть измеримой. Это означает следующее. Рассмотрим на действительной оси $\mathfrak{R}$ произвольные открытые, полуоткрытые или закрытые интервалы $\Delta_{a,b}$ с границами $a, b \in \mathfrak{R}$. Рассмотрим случайное событие $A_{a,b}$, состоящее в попадании значения x случайной величины X в интервал $\Delta_{a,b}$: $x \in \Delta_{a,b}$. Событию $A_{a,b}$ соответствует множество элементарных событий, которым в отображении $X(\omega)$ сопоставлены значения $x \in \Delta_{a,b}$. Свойство измеримости функции $X(\omega)$ состоит в том, что *для любых* $a, b \in \mathfrak{R}$ *событие* $A_{a,b}$ *принадлежит* σ-*алгебре событий* $\mathcal{F}$ (см. § 3). Отсюда следует важный вывод (первая аксиома теории вероятностей): *для любого интервала* $\Delta_{a,b}$ *значений случайной величины определена вероятность ее попадания в этот интервал*.

Если на основании располагаемой информации о свойствах случайной величины X для любого интервала $\Delta_{a,b}$, $a, b \in \mathfrak{R}$, может быть рассчитана вероятность $P(X \in \Delta_{a,b})$, то говорят, что известен *закон распределения вероятностей* (з.р.в.) *случайной величины X*. Формы представления з.р.в. случайной величины могут быть различными. К их числу относятся: функция распределения вероятностей, таблицы (для дискретных случайных величин), плотность распределения вероятностей (для непрерывных случайных величин), характеристическая функция и пр.

В зависимости от особенностей распределения вероятностей случайных величин их разделяют на дискретные, непрерывные или смешанного типа.

Случайная величина X называется *дискретной* (или относится к *дискретному типу*), если множество $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ ее возможных значений конечно или счетно.

Другие типы случайных величин будут определены в § 14.

Рассмотрим несколько примеров случайных величин.

Пример 2.1. Для управления транспортным потоком на автомагистрали установлена видеокамера, по показаниям которой автоматически вычисляется число автомобилей, которые пропущены автомагистралью за каждые десять минут. Можно рассматривать эту характеристику как случайную величину X, а каждое показание установленной системы видеонаблюдения – как очередную реализацию x рассматриваемой случайной величины.

Множество возможных значений рассматриваемой случайной величины конечно: $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$, где значение x_N равно максимальной пропускной способности автомагистрали. Таким образом, случайная величина X является дискретной.

Пример 2.2. Имеется датчик случайных чисел на отрезке [0; 1]. При каждом обращении к датчику он возвращает значение, представленное в десятичной системе счисления. К датчику производится многократное обращение до первого попадания на отрезок [0,25; 0,30] и считается число произведенных обращений. Рассматривается случайная величина X, равная числу обращений к датчику до первого попадания на заданный отрезок. Множество возможных значений рассматриваемой случайной величины X счетно: $\mathcal{X} = \{1, 2, \ldots\}$, следовательно, она относится к дискретному типу.

Пример 2.3. В связи с невозможностью выдержать постоянными параметры тепло- и массообмена химико-технологического процесса показатель X качества очистки производимого химического продукта принимает случайные значения в каждом производственном цикле. Возможными значениями показателя X являются действительные числа на отрезке [0; 1].

В связи с тем, что множество возможных значений $\mathcal{X}$ случайной величины X не является ни конечным, ни счетным, она не относится к дискретному типу. Есть основание полагать, что случайная величина X относится к непрерывному типу.

Пример 2.4. На тренировках по стрельбе из лука по круговой мишени в каждом испытании измеряется расстояние s от точки пересечения стрелой плоскости мишени до центра мишени (случайная величина S). Рассматривается случайная величина R, принимающая значение $r = s$, если $s \leq s_0$, где s_0 – радиус круговой мишени, и $r = s_0$ – если $s > s_0$ (промах). Таким образом, возможные значения r случайной величины R принадлежат отрезку $[0; s_0]$. Как будет показано в § 14, случайная величина R имеет смешанное распределение вероятностей, если вероятность промаха спортсмена отлична от нуля.

Контрольные вопросы и задачи

1. Дайте определение случайной величины.
2. Наложены ли на функцию $X(\omega)$ какие-либо ограничения? Реализует ли она взаимно-однозначное соответствие между элементарными событиями $\omega \in \Omega$ и значениями $x \in \mathcal{X}$ случайной величины X?
3. В чем состоит свойство измеримости функции $X(\omega)$?
4. Что означает понятие закона распределения вероятностей случайной величины?
5. На какие типы подразделяется все множество случайных величин?
6. Дайте определение дискретной случайной величины.
7. Приведите пример дискретной случайной величины. Укажите множество ее возможных значений.
8. Приведите пример случайной величины, не относящейся к дискретному типу. Укажите множество ее возможных значений.

§ 12. Функция распределения вероятностей случайной величины

Рассмотрим множество открытых интервалов $\Delta_{-\infty,x} = (-\infty, x)$, где $x \in \mathfrak{R}$ – произвольное действительное число. Определим для случайной величины X функцию

$$F_X(x) = P(X \in (-\infty, x)) = P(X < x), \qquad (2.1)$$

которая называется *функцией распределения вероятностей* случайной величины X.

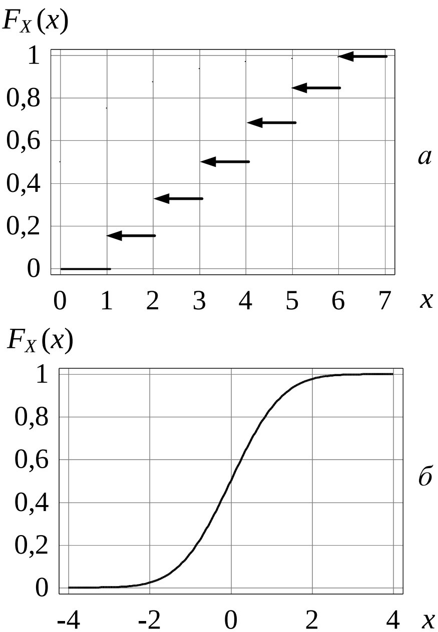


Рис. 2.1. Примеры функций распределения вероятностей случайных величин: *а* – для дискретной; *б* – для непрерывной случайной величины

На рис. 2.1 приведены два примера функций распределения вероятностей.

В первом примере (см. рис. 2.1, *а*) рассматривается случайная величина X, связанная с экспериментом случайного бросания игральной кости. Случайная величина X имеет шесть возможных значений, которые принимаются в соответствии с номером выпавшей грани, и потому относится к дискретному типу. Если значение $x \leq 1$, то согласно определению (2.1) функция распределения вероятностей $F_X(x) = 0$, а при $1 < x \leq 2$ – $F_X(x) = 1/6$. Таким образом, при $x = 1$ функция распределения вероятностей $F_X(x)$ претерпевает разрыв непрерывности и является непрерывной слева. Аналогичные ступенчатые изменения функции $F_X(x)$ наблюдаются при значениях $x = 2, 3, \ldots, 6$. При $x > 6$ функция распределения вероятностей $F_X(x) = 1$.

На втором графике (см. рис. 2.1, *б*) приведена функция $F_X(x)$ для случайной величины, распределенной по закону Гаусса (нормальному закону).

Рассмотрим свойства функции $F_X(x)$.

1. Для любого $x \in \mathfrak{R}$

$$0 \le F_X(x) \le 1. \tag{2.2}$$

Это утверждение следует из определения $F_X(x)$ как вероятности случайного события, состоящего в реализации значения случайной величины X, строго меньшего x.

2. Справедливы следующие равенства:

$$F_X(-\infty) = 0, \quad F_X(\infty) = 1. \tag{2.3}$$

Равенства (2.3) следуют из того, что событие $X < -\infty$ является невозможным, а $X < \infty$ – достоверным.

3. Для любых $x_1 < x_2$

$$P(x_1 \le X < x_2) = P(X \in [x_1, x_2)) = F_X(x_2) - F_X(x_1). \tag{2.4}$$

Для доказательства свойства (2.4) рассмотрим следующие три события: $A = (X \in (-\infty, x_1))$; $B = (X \in [x_1, x_2))$; $C = (X \in (-\infty, x_2))$. Согласно определению события A и B являются несовместными, а их сумма равна событию C: $A + B = C$. Кроме того, $P(A) = F_X(x_1)$ и $P(C) = F_X(x_2)$. Тогда в соответствии с аксиомой сложения вероятностей

$$P(A) + P(B) = P(C)$$

или

$$F_X(x_1) + P(x_1 \le X < x_2) = F_X(x_2), \tag{2.5}$$

откуда и следует равенство (2.4).

4. Функция распределения вероятностей $F_X(x)$ является неубывающей функцией аргумента x.

Утверждение 4 означает, что для любых $x_1 < x_2$ выполняется неравенство:

$$F_X(x_2) - F_X(x_1) \ge 0. \tag{2.6}$$

Справедливость этого неравенства следует из (2.4) и свойства вероятности: $P(x_1 \le X < x_2) \ge 0$.

5. Функция распределения вероятностей $F_X(x)$ непрерывна слева, т.е.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F_X(x) = F_X(x_0). \tag{2.7}$$

Свойство (2.7) следует из того, что согласно определению $F_X(x_0) = P(X < x_0)$, так что правая граница x_0 исключена из интервала (-∞, x_0).

6. Если функция распределения вероятностей имеет скачок при аргументе x_0, то величина скачка равна $P(X = x_0)$:

$$F_X(x_0 + 0) - F_X(x_0) = P(X = x_0). \tag{2.8}$$

Для доказательства утверждения (2.8) следует использовать равенство

$$P(X \le x_0) = P(X < x_0) + P(X = x_0),$$

которое с учетом использованных ранее обозначений эквивалентно равенству (2.8).

Подводя итог изучению свойств функции распределения вероятностей $F_X(x)$, можно сделать вывод, что она является неубывающей, непрерывной слева функцией, принимающей значения в интервале [0, 1]. Верно и обратное высказывание: функция, удовлетворяющая перечисленным выше условиям, может интерпретироваться как функция распределения вероятностей некоторой случайной величины. Подобная интерпретация может быть использована при решении некоторых прикладных задач.

Из приведенных свойств функции распределения вероятностей $F_X(x)$ следует, что с ее помощью можно рассчитать вероятность попадания случайной величины на произвольный открытый, полуоткрытый или закрытый интервал $\Delta_{a,b}$. Это означает, что функция $F_X(x)$ является одним из возможных способов описания закона распределения вероятностей случайной величины.

Равенство (2.5) дает основание называть $F_X(x)$ *функцией накопленных вероятностей*, или *интегральным законом распределения вероятностей*.

Пример 2.5. Пусть на отрезок $[a, b]$ действительной оси случайно бросается точка. Рассматривается случайная величина X, равная координате точки, зафиксированной в эксперименте. Требуется построить функцию распределения вероятностей $F_X(x)$.

Воспользуемся геометрическим подходом к расчету вероятности случайного события $-\infty < X < x$ при $x \in [a, b]$:

$$P(-\infty < X < x) = P(X \in [a, x)) = \text{mes}\,[a, x) \,/\, \text{mes}\,[a, b] = (x - a) \,/\, (b - a).$$

Таким образом, получено, что при $a \le x \le b$

$$F_X(x) = P(a \le X < x) = (x-a)/(b-a). \tag{2.9}$$

Поскольку случайная величина X по определению не принимает значений на интервалах ($-\infty$, a) и (b, ∞), можно записать следующее общее выражение для функции $F_X(x)$:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \in (-\infty,\ a); \\ (x-a)/(b-a), \text{ если } x \in [a,\ b]; \\ 1, \text{ если } x \in (b,\ \infty). \end{cases} \tag{2.10}$$

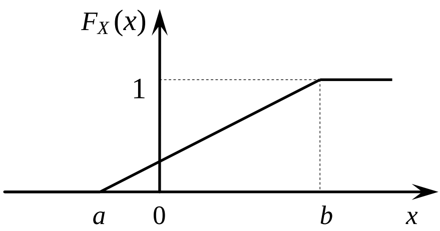


Рис. 2.2. Функция $F_X(x)$ равномерного закона распределения вероятностей на отрезке $[a, b]$

Выражению (2.10) соответствует график, приведенный на рис. 2.2. Закон распределения вероятностей случайной величины X, рассмотренной в примере, называется *равномерным*. Это название обусловлено тем, что вероятность попадания случайной величины X в интервал произвольной заданной длины $d < (b - a)$ не зависит от его положения на отрезке $[a, b]$.

Контрольные вопросы и задачи

1. Дайте определение функции распределения вероятностей случайной величины.

2. Испытание состоит в случайном бросании монеты. Случайная величина X принимает значение 1 при выпадении герба и 0 – при выпадении решетки. Постройте функцию распределения вероятностей $F_X(x)$.

3. К какому типу относится случайная величина X, рассмотренная в предыдущем вопросе?

4. Чему равны значения функции $F_X(x)$ для случайной величины X, описанной в вопросе 2, при аргументах x = 0; 0,5; 1; 1,5?

5. Какова область возможных значений функции распределения вероятностей $F_X(x)$? Дайте объяснение к своему ответу.

6. Как с помощью функции распределения вероятностей рассчитать вероятность попадания случайной величины на интервал?

7. В ответе на вопрос 6 каким предполагается интервал: закрытым, открытым или полуоткрытым?

8. Почему функция распределения вероятностей является неубывающей?

9. Допустим, функция распределения вероятностей изменяется скачком при $x = x_0$. Чему равна величина скачка?

10. Почему функцию распределения вероятностей случайной величины называют функцией накопленных вероятностей?

11. Какими свойствами должна обладать функция, чтобы ее можно было интерпретировать как функцию распределения вероятностей некоторой случайной величины?

12. Чему равна функция $F_X(x)$ равномерно распределенной случайной величины на отрезке $[a, b]$?

13. Почему закон распределения вероятностей, характеризующийся функцией распределения $F_X(x)$, представленной на рис. 2.2, называется равномерным?

14. Почему для случайной величины X, рассмотренной в примере 2.5, вероятность попадания в интервал произвольной заданной длины $d < (b - a)$, принадлежащий отрезку $[a, b]$, не зависит от положения интервала на отрезке $[a, b]$?

15. Чему для случайной величины, равномерно распределенной на отрезке [-10; 10], равна вероятность попадания в интервал $[-1; 3)$; $[-1; 3]$?

§ 13. Дискретное распределение вероятностей

Рассмотрим дискретную случайную величину, для которой согласно определению множество возможных значений конечно или счетно: $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Закон дискретного распределения вероятностей характеризуется последовательностью $p_k = P(X = x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$. Для конечного множества возможных значений $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ распределение вероятностей дискретной случайной величины можно представить в форме таблицы (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Распределение вероятностей дискретной случайной величины

x_k	x_1	x_2	...	x_N
p_k	p_1	p_2	...	p_N

Согласно определению функции распределения вероятностей $F_X(x)$ и ее свойствам для дискретной случайной величины X со значениями x_k, k = 1, 2, … и соответствующими вероятностями $p_k = P(X = x_k)$ функция $F_X(x)$ может быть представлена следующим выражением:

$$F_X(x) = P(X < x) = \sum_{k,\ x_k < x} P(X = x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k 1(x - x_k), \quad (2.11)$$

где функция Хевисайда $1(x - x_k)$ (*Oliver Heaviside*, 1850 – 1925, Англия) определена выражением:

$$1(x - x_k) = \begin{cases} 1, \text{ если } x > x_k; \\ 0, \text{ если } x \le x_k. \end{cases}$$

Таким образом, функция распределения вероятностей дискретной случайной величины является кусочно-постоянной функцией со скачками в точках возможных значений случайной величины и непрерывной слева в этих точках.

События $(X = x_k)$, k = 1, 2, …, образуют полную группу попарно несовместных событий, поэтому выполняется равенство (см. § 2, следствие 6):

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1, \quad (2.12)$$

которое называют *условием нормировки* распределения вероятностей. Из равенства (2.12) следует, что сумма элементов второй строки табл. 2.1 равна 1.

Если множество возможных значений дискретной случайной величины конечно и равно N, а все значения $p_k = 1/N$, k = 1, 2, …, N, то дискретное распределение называется *равномерным*. Подобное распределение имеет рассмотренная в § 12 случайная величина X, связанная с испытанием бросания игральной кости (см. рис. 2.1, *а*).

Рассмотрим примеры дискретных случайных величин, которые следуют из *схемы испытаний Бернулли* (*Jakob Bernoulli*, 1654 – 1705, Швейцария). Так называется последовательность независимых испытаний, в каждом из которых имеются только два возможных исхода, обычно называемые успехом и неудачей. Полагается, что вероятность успеха в одном испытании равна p, а неудачи – $q = 1 - p$. Значение p остается неизменным во всех испытаниях.

Допустим, что выполняются N испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха p в каждом испытании. Рассмотрим случайную величину X, которая равна числу успехов в N испытаниях. Возможными значениями случайной величины X являются 0, 1, …, N. Следуя комбинаторному методу вычисления вероятностей, рассчитаем вероятности $p_k = P(X = k)$, $k = 0, 1, \ldots, N$:

$$p_k = P(X = k) = C_N^k \ p^k \ q^{N-k} = \frac{N!}{k!(N-k)!} \ p^k \ q^{N-k} . \quad (2.13)$$

Заметим, что вероятности p_k , $k = 0, 1, \ldots, N$, удовлетворяют условию нормировки (2.12).

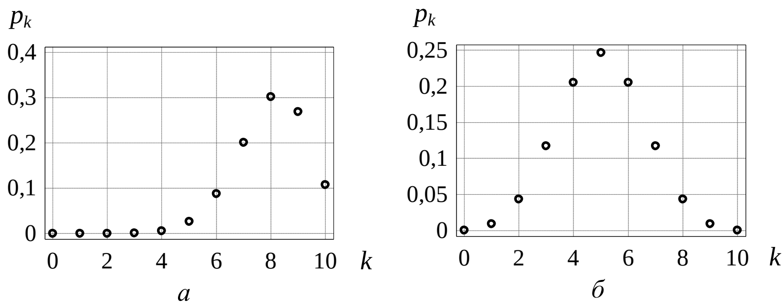


Рис. 2.3. Биномиальное распределение вероятностей:
а) $N = 10$, $p = 0{,}8$; *б*) $N = 10$, $p = 0{,}5$

Закон распределения (2.13), называется *биномиальным*. На рис. 2.3 показаны распределения вероятностей двух биномиальных законов при $N = 10$ и разных значениях вероятности p успеха в одном испытании: $p = 0{,}8$ (см. рис. 2.3, *а*) и $p = 0{,}5$ (см. рис. 2.3, *б*).

Теперь рассмотрим последовательность испытаний Бернулли, которые проводятся до первого успеха. Введем случайную величину Y – число испытаний до первого успеха, включая успешное испытание. Случайная величина Y принимает значения из счетного множества $\mathcal{Y} = \{1, 2, \dots\}$. Вероятность $p_k = P(Y = k) = q^{k-1}p$, где $q = 1 - p$, $k = 1, 2, \dots$. Распределение вероятностей случайной величины Y носит название *геометрического*. В частном случае геометрического распределения, когда $p = q = 0{,}5$; $p_k = 0{,}5^k$; $k = 0, 1, \dots$. На рис. 2.4 для этого частного случая показан фрагмент графика $F_Y(y)$ на интервале $y \le 6$.

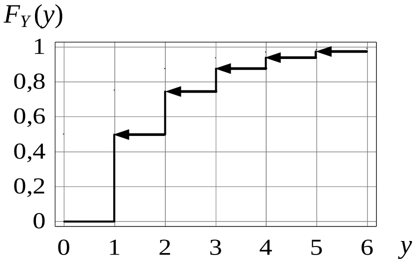


Рис. 2.4. Функция $F_Y(y)$ геометрического распределения при $p = 0{,}5$

Рассмотрим последовательность зависимых испытаний в схеме урн. Допустим, что в урне находятся N шаров, из которых N_1 белых и N_2 черных ($N = N_1 + N_2$). Из урны выбираются n шаров (схема выбора без возвращения). Определим случайную величину Z как число белых шаров в выбранной группе n шаров. Распределение вероятностей случайной величины Z зависит от трех параметров: N, N_1 и n. Возможные значения случайной величины Z образуют множество $\mathcal{Z} = \{z_1 = \max(0, n - N_2), z_2, \dots, z_K = \min(N_1, n)\}$. Применяя комбинаторный метод вычисления вероятности случайного события в классической схеме (см. пример 1.29), получим следующее выражение для $p_k = P(Z = k)$, $k = 1, 2, \dots, K$:

$$p_k = \frac{C_{N_1}^{k} \cdot C_{N-N_1}^{n-k}}{C_N^n}. \tag{2.14}$$

Распределение вероятностей случайной величины Z называется *гипергеометрическим*.

На рис. 2.5 показано распределение вероятностей гипергеометрического закона с параметрами $N = 20$, $N_1 = 13$, $n = 10$. В этом случае $\mathcal{Z} = \{3, 4, \dots, 10\}$ и $K = 8$.

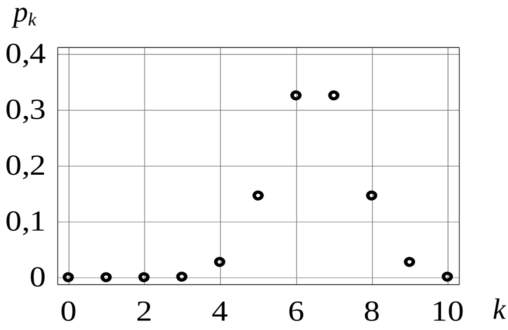


Рис. 2.5. Гипергеометрическое распределение
с параметрами $N = 20$, $N_1 = 13$, $n = 10$

Контрольные вопросы и задачи

1. В форме какой таблицы может быть представлен закон распределения вероятностей дискретной случайной величины с конечным множеством возможных значений?
2. Как может быть записана функция распределения вероятностей дискретной случайной величины с использованием функции Хевисайда?
3. Чему равна величина скачка в точках разрыва функции распределения вероятностей дискретной случайной величины?
4. Запишите условие нормировки для дискретного распределения вероятностей.
5. Дайте определение равномерного распределения дискретной случайной величины.
6. В чем состоит схема испытаний Бернулли?
7. Какое распределение вероятностей называется биномиальным?
8. Приведите пример случайной величины, распределенной по биномиальному закону.
9. Какое распределение вероятностей называется геометрическим?
10. Какое распределение вероятностей называется гипергеометрическим?
11. Покажите на примере, почему случайная величина, распределенная по гипергеометрическому закону, связана с зависимыми испытаниями в отличие от схемы Бернулли.

12. Каким является диапазон возможных значений случайной величины, распределенной по гипергеометрическому закону с параметрами $N = 10$, $N_1 = 3$, $n = 5$?

§ 14. Непрерывное распределение вероятностей

Случайная величина X называется непрерывной, если ее функция распределения вероятностей $F_X(x)$ непрерывна на числовой оси и существует такая неотрицательная функция $f_X(x)$, называемая *плотностью распределения вероятностей*, что для любого $x \in \Re$ выполняется равенство:

$$F_X(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt. \tag{2.15}$$

Чтобы объяснить название плотности распределения вероятностей для функции $f_X(x)$, рассмотрим $P(x \le X < x+\Delta)$, $\Delta > 0$, и предположим, что функция $F_X(x)$ дифференцируема в точке x. Согласно свойству (2.4) функции $F_X(x)$ справедливо равенство:

$$P(x \le X < x+\Delta) = F_X(x+\Delta) - F_X(x).$$

Рассмотрим предел

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{P(x \le X < x+\Delta)}{\Delta} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{F_X(x+\Delta) - F_X(x)}{\Delta} = \frac{dF_X(x)}{dx}.$$

Дифференцирование функции $F_X(x)$ с использованием выражения (2.15) приводит к выражению:

$$\frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x). \tag{2.16}$$

Полученный результат означает, что плотность распределения вероятностей $f_X(x)$ характеризует среднюю, т.е. приходящуюся на единицу длины, вероятность попадания случайной величины в окрестность точки x при стягивании этой окрестности к точке x справа. Возможно, что производные $\frac{dF_X(x+0)}{dx} = f_X(x+0)$ и $\frac{dF_X(x-0)}{dx} = f_X(x-0)$ не совпадают, так что функция плотности вероятностей $f_X(x)$ может быть разрывной.

В связи с тем, что плотность вероятности $f_X(x)$ характеризует локальные свойства распределения вероятностей в окрестности точки x и связана с функцией $F_X(x)$ выражением (2.16), ее называют *дифференциальным законом распределения вероятностей*, в то время как $F_X(x)$ – *интегральным*.

В примере 2.5 § 5 была рассмотрена случайная величина X непрерывного типа, распределенная равномерно на отрезке $[a, b]$ (см. рис. 2.2). Используя выражение (2.10) для функции $F_X(x)$ равномерного закона и свойство (2.16), получим выражение для плотности вероятности равномерно распределенной случайной величины непрерывного типа:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \in (-\infty, a); \\ 1/(b-a), \text{ если } x \in [a, b]; \\ 0, \text{ если } x \in (b, \infty). \end{cases} \qquad (2.17)$$

На рис. 2.6 показаны два графика плотности вероятности (2.17) равномерного закона: $a = -2$, $b = 4$ (график 1); $a = 1$, $b = 3$ (график 2).

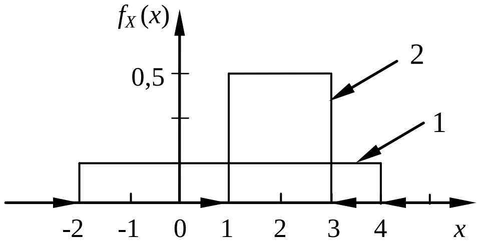


Рис. 2.6. Плотность вероятности равномерного непрерывного распределения вероятностей

Рассмотрим основные свойства функции плотности вероятностей $f_X(x)$.

1. Плотность вероятности $f_X(x)$ является неотрицательной функцией:

$$f_X(x) \ge 0. \qquad (2.18)$$

Это свойство следует из (2.16) и монотонного неубывания функции $F_X(x)$.

2. Для любых $x_1 < x_2$

$$P(x_1 \le X < x_2) = P(X \in [x_1, x_2)) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(t)\, dt. \qquad (2.19)$$

Справедливость равенства (2.19) следует из свойства (2.4) функции $F_X(x)$ и определения (2.15):

$$P(x_1 \le X < x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1) =$$
$$= \int_{-\infty}^{x_2} f_X(t)\,dt - \int_{-\infty}^{x_1} f_X(t)\,dt = \int_{x_1}^{x_2} f_X(t)\,dt\,.$$

Из приведенного свойства следует, что для непрерывной случайной величины вероятность ее попадания в точку равна нулю, т. е. для любого x

$$P(X = x) = 0. \qquad (2.20)$$

3. Вероятность попадания в малую окрестность точки x может оцениваться следующей приближенной формулой:

$$P(x \le X < x+\Delta) \approx f_X(x)\,\Delta\,. \qquad (2.21)$$

Равенство (2.21) следует из выражения

$$P(x \le X < x+\Delta) = \int_{x}^{x+\Delta} f_X(t)\,dt\,,$$

которое написано с использованием свойства (2.19) функции плотности вероятности.

Геометрически равенство (2.21) означает, что с точностью до малой величины порядка $o(\Delta)$ вероятность попадания случайной величины в интервал $[x, x+\Delta)$ равна площади прямоугольника с основанием Δ и высотой $f_X(x)$.

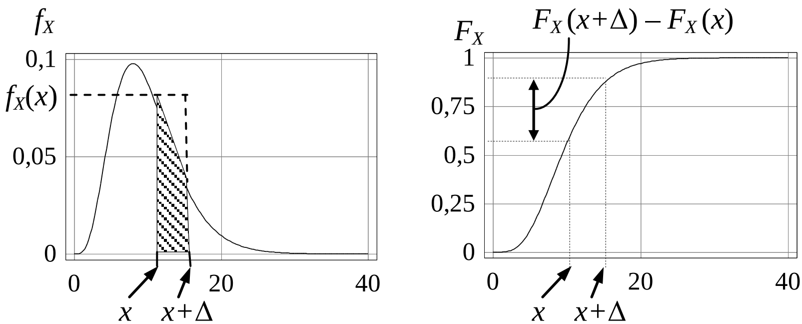


Рис. 2.7. Иллюстрация к расчету вероятности $P(x \le X < x+\Delta)$

На рис. 2.7 показаны плотность вероятности $f_X(x)$ и функция распределения $F_X(x)$ случайной величины X. Вероятность $P(x \le X < x+\Delta)$ представлена на графике $f_X(x)$ заштрихованной областью, а на графике $F_X(x)$ – отрезком длины $(F_X(x+\Delta) - F_X(x))$. Приближенно вероятность $P(x \le X < x+\Delta)$ оценивается площадью изображенного на рис. 2.7 прямоугольника с основанием $[x, x+\Delta]$ и высотой $f_X(x)$.

4. Функция $f_X(x)$ удовлетворяет условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\, dt = 1. \tag{2.22}$$

Свойство нормировки вытекает из равенства (2.3) $F_X(\infty) = 1$ и определения (2.15).

Функциям распределения вероятностей $F_X(x)$ и плотности вероятности $f_X(x)$ может быть дано следующее механическое толкование. Представим бесконечный стержень, вдоль которого распределена масса. Плотность массы стержня в произвольной точке x равна $f_X(x)$. Тогда масса полубесконечной части стержня $(-\infty, x)$ равна $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$, а общая масса стержня равна $F_X(\infty) = 1$.

Пример 2.6. Случайная величина X распределена по *показательному* (или *экспоненциальному*) закону (рис. 2.8), если ее плотность вероятности представлена выражением:

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha \exp(-\alpha x), \text{ если } x \ge 0; \\ 0, \text{ если } x < 0, \end{cases} \tag{2.23}$$

где параметр закона $\alpha > 0$. Согласно определению (2.15)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \begin{cases} 1 - \exp(-\alpha x), \text{ если } x > 0; \\ 0, \text{ если } x \le 0. \end{cases} \tag{2.24}$$

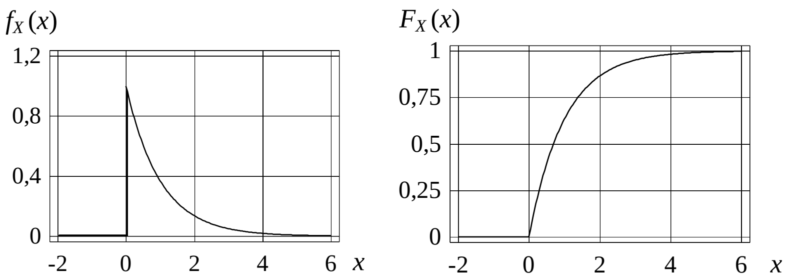


Рис. 2.8. Распределение вероятностей показательного (экспоненциального) закона

Пример 2.7. Непрерывная случайная величина X, распределенная равномерно на отрезке $[–a, a]$ (рис. 2.9), подвергается нелинейному преобразованию $y = \varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} -c, & \text{если } x < -c; \\ x, & \text{если } -c \le x \le c; \\ c, & \text{если } x > c, \end{cases} \tag{2.25}$$

где $a > 0$, $0 < c < a$. Требуется найти распределение вероятностей случайной величины $Y = \varphi(X)$.

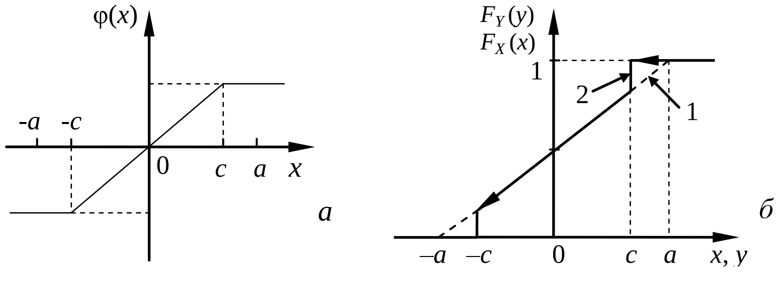


Рис. 2.9. Иллюстрация к примеру 2.7

Нелинейное преобразование (2.25) (см. рис. 2.9, *а*) ограничивает возможные значения случайной величины Y отрезком $[–c, c]$. Случайная величина X распределена равномерно на более широком интервале $[–a, a]$. Функция распределения вероятностей $F_X(x)$ показана на рис. 2.9, *б* пунктирной линией и помечена цифрой 1.

Поставим задачу определения функции $F_Y(y)$.

Значения $y < –c$ невозможны, поэтому $F_Y(y) = 0$ в интервале $(–\infty, –c]$. Обратим внимание на то, что на правой границе интервала $F_Y(–c) = 0$ и обеспечивается непрерывность функции распределения в точке $y = –c$ слева (в соответствии с определением (2.1)).

При значении $y = –c + 0$ функция $F_Y(y)$ претерпевает скачкообразное изменение. Согласно свойству (2.8) функции распределения вероятностей справедливо равенство:

$$F_Y(–c + 0) = F_Y(–c) + P(Y = –c).$$

Поскольку $F_Y(–c) = 0$ и $P(Y = –c) = P(X \le –c) = P(X < –c) = F_X(–c)$, получаем следующее выражение для $F_Y(–c + 0)$ (см. рис. 2.9, *б*):

$$F_Y(–c + 0) = F_X(–c).$$

В интервале $(–c, c]$ выполняется равенство $Y = X$, откуда следует, что в этом интервале функции распределения вероятностей случайных величин Y и X совпадают.

В точке $y = c$ функция $F_Y(y)$ также претерпевает разрыв непрерывности (см. рис. 2.9, *б*):

$$F_Y(c + 0) = F_Y(c) + P(Y = c) = 1.$$

Для любых значений $y > c$ выполняется равенство: $F_Y(y) = 1$.

Таким образом, функция $F_Y(y)$ определена следующим выражением:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, \text{ если } \; y \le -c; \\ F_X(y), \text{ если } \; -c < y \le c; \\ 1, \text{ если } \; y > c. \end{cases} \qquad (2.26)$$

Пример 2.8. В примере 2.4 были введены случайные величины S и R, характеризующие промах спортсмена при стрельбе из лука по круговой мишени радиусом s_0. В каждом испытании измеряется расстояние s от точки пересечения стрелой плоскости мишени до центра мишени. Случайная величина R принимает значение $r = s$, если $s \le s_0$, и $r = s_0$ – если $s > s_0$. Допустим, что случайная величина S с возможными значениями $s \ge 0$ распределена по показательному закону (2.23), (2.24) с известным значением параметра α. Рассмотрим распределение вероятностей случайной величины R.

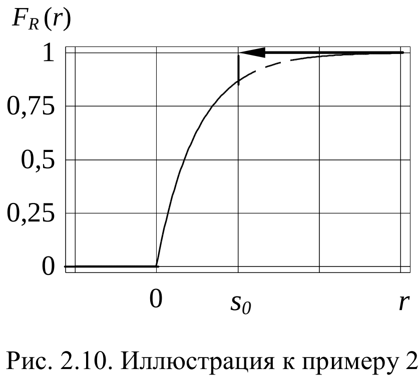


Рис. 2.10. Иллюстрация к примеру 2.8

Следуя подходу, примененному при рассмотрении примера 2.7, получим следующий результат:

$$F_R(r) = \begin{cases} 0, \text{ если } r \le 0; \\ F_S(r) = 1 - \exp(-\alpha\, r), \text{ если } 0 < r \le s_0\,; \\ 1, \text{ если } r > s_0\,. \end{cases} \qquad (2.27)$$

На рис. 2.10 функция $F_R(r)$ показана сплошной жирной линией, а тонкой пунктирной линией – функция распределения вероятностей случайной величины S.

Распределения (2.26), (2.27) не являются ни непрерывными, ни дискретными. Они относится к распределениям *смешанного типа*. В механической интерпретации распределений этого типа масса имеет не только непрерывное распределение вдоль стержня с заданной плотностью, но и точки сгущения, в которых плотность массы бесконечно велика. Заметим, что механической моделью дискретных распределений является сосредоточение единичной массы в конечном или счетном множестве точек, в которых плотность массы бесконечна. Для единообразного математического описания рассмотренных типов распределений вероятностей используется сингулярная δ-функция Дирака (*Paul Adrien Maurice Dirac*, 1902 – 1984, Англия), которая будет определена в следующем параграфе.

Контрольные вопросы и задачи

1. Дайте определение случайной величины непрерывного типа.
2. Как связаны плотность вероятности и функция распределения вероятностей случайной величины непрерывного типа?
3. Объясните происхождение названия "плотность распределения вероятностей"?
4. Дайте механическую интерпретацию плотности вероятности и функции распределения вероятностей.
5. Является ли непрерывность обязательным свойством функции плотности распределения вероятностей для случайной величины непрерывного типа?
6. Дайте пояснения к понятиям "дифференциальный" и "интегральный" законы распределения вероятностей.
7. Напишите выражение для функции плотности вероятности равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$ случайной величины.

8. Дайте механическую интерпретацию равномерного распределения вероятностей.

9. Может ли плотность распределения вероятностей принимать значения больше единицы?

10. Может ли плотность распределения вероятностей принимать отрицательные значения? Дайте обоснование ответа.

11. Как можно рассчитать вероятность попадания непрерывной случайной величины на произвольный интервал $[a, b)$, если известна ее плотность распределения вероятностей?

12. Зависит ли вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал от того, является он открытым, закрытым или полуоткрытым? Дайте обоснование ответа.

13. Как можно приближенно оценить вероятность попадания непрерывной случайной величины в малый интервал, если известна ее плотность распределения вероятностей?

14. В чем состоит свойство нормировки функции плотности вероятности?

15. Как учитывается условие нормировки в механической модели распределения вероятностей?

16. Какую плотность вероятности имеет показательное (экспоненциальное) распределение?

17. Чему равна функция распределения вероятностей показательного закона?

18. Приведите примеры случайных величин, имеющих распределение смешанного типа.

19. Какая механическая интерпретация может быть дана для распределений вероятностей смешанного типа?

20. Рассматривается двустороннее показательное распределение, характеризующееся плотностью вероятности

$$f_X(x) = c\,\exp(-\alpha\,|\,x\,|)\,,\ -\infty < x < \infty.$$

Сравните с распределением, введенным в примере 2.6. Чему равно значение параметра c, если известно значение параметра α?

21. Чему равна функция распределения вероятностей для двустороннего показательного распределения? Напишите выражение и постройте график.

22. Случайная величина X, распределенная по двустороннему показательному закону, подвергается нелинейному преобразова-

нию $Y = \varphi(X)$ (2.25) (см. рис. 2.9, *а*). Получите выражение для функции $F_Y(y)$ и постройте ее график.

23. К какому типу относится распределение F_Y (y), полученное в ответе на предыдущий вопрос?

§ 15. Импульсная δ-функция Дирака. Обобщенное описание плотности распределения вероятностей

Импульсная δ-функция (δ-функция Дирака) позволяет обобщить понятие плотности распределения вероятностей, введенное для непрерывных случайных величин, на случайные величины дискретного и смешанного типов.

Импульсной δ-функцией называется сингулярная функция, которая обладает следующими свойствами:

- $$\delta(t)=\begin{cases}0, & \text{если } t\neq 0;\\ \infty, & \text{если } t=0;\end{cases} \qquad (2.28)$$
- для любого ε > 0 $$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(t)\,dt=1. \qquad (2.29)$$

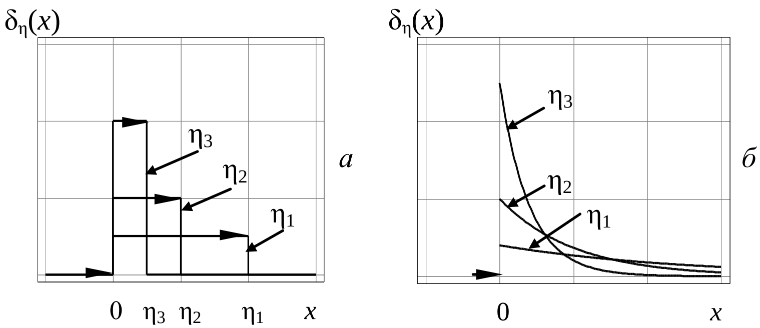


Рис. 2.11. Две модели правосторонней δ-функции

В приложении к теории вероятностей рассматривается δ-функция, которая является пределом обычной в математическом смысле несингулярной функции $\delta_\eta(t)$ при стремлении параметра η к некоторому пределу: $\eta \to \eta_0$. Рассмотрим две такие допредельные модели *правосторонней δ-функции*, которые представлены на рис. 2.11. Первая из моделей функции $\delta(t)$ (см. рис. 2.11, *а*) определена следующим выражением:

$$\delta_\eta(t) = \begin{cases} 1/\eta, \text{ если } 0 \le t < \eta; \\ 0, \text{ если } t < 0 \text{ или } t \ge \eta. \end{cases} \tag{2.30}$$

Для нее при любом $\eta > 0$ выполнено условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\eta(t)\, dt = 1. \tag{2.31}$$

При $\eta \to 0$ $\delta_\eta(t) \to \delta(t)$.

Вторая модель (см. рис. 2.11, *б*) представляет собой экспоненциально затухающий импульс, зависящий от параметра $\eta > 0$:

$$\delta_\eta(t) = \begin{cases} \eta \exp(-\eta\, t), \text{ если } t \ge 0; \\ 0, \text{ если } t < 0\,. \end{cases} \tag{2.32}$$

Для функции (2.32) также выполнено требование нормировки (2.31). При $\eta \to \infty$ $\delta_\eta(t) \to \delta(t)$.

Отметим свойство правосторонней δ-функции, важное для дальнейшего изложения. Для произвольной функции $\varphi(t)$, непрерывной в точке x_0, справедливо равенство:

$$\int_a^b \varphi(t)\ \delta(t - x_0)\ dt = \begin{cases} \varphi(x_0), \text{ если } a \le x_0 < b; \\ 0, \text{ если } x_0 < a \text{ или } x_0 \ge b. \end{cases} \tag{2.33}$$

Доказательство справедливости утверждения (2.33) проводится с использованием допредельной модели $\delta_\eta(t)$ и последующим переходом к пределу при $\eta \to \eta_0$.

Частным случаем утверждения (2.33) является $\varphi(t) = 1$, $a = -\infty$, $b = x$:

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(t - x_0)\ dt = \left\{ \begin{matrix} 1, \text{ если } x > x_0; \\ 0, \text{ если } x \le x_0 \end{matrix} \right\} = 1(x - x_0)\,, \tag{2.34}$$

где $1(x - x_0)$ – функция Хевисайда.

Равенство (2.34) можно записать иначе:

$$\frac{d}{dx} 1(x - x_0) = \delta(x - x_0)\,. \tag{2.35}$$

Теперь обратимся к выражению (2.11) для функции распределения вероятностей дискретной случайной величины X с возможными значениями x_k, $k = 1, 2, \ldots$:

$$F_X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k 1(x - x_k)\,. \tag{2.36}$$

Формальное дифференцирование выражения (2.36) с использованием равенства (2.35) приводит к следующему результату:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \delta(x - x_k)\,. \tag{2.37}$$

Таким образом, плотность вероятности дискретной случайной величины равна нулю всюду, кроме конечного или счетного множества точек x_k, k = 1, 2, …, в которых она равна бесконечности.

Аналогичный прием используется и для распределений смешанного типа.

Контрольные вопросы и задачи

1. Дайте определение δ-функция Дирака.
2. Объясните, каким предельным переходом можно получить δ-функцию Дирака?
3. Приведите примеры допредельных моделей δ-функции Дирака.
4. Какое свойство δ-функции Дирака используется для описания плотности вероятности дискретных распределений?
5. Как выражается плотность вероятности дискретных распределений через δ-функцию Дирака?

§ 16. Числовые характеристики случайных величин непрерывного типа

Функция распределения вероятностей $F(x)$ и плотность вероятности $f(x)$ случайной величины X непрерывного типа содержат полное описание ее статистических свойств (в дальнейшем будем опускать нижний индекс X в обозначениях $F(x)$ и $f(x)$, если это не мешает однозначному пониманию текста). При проведении практических исследований нахождение закона распределения вероятностей случайной величины представляет собой достаточно сложную задачу с точки зрения объема необходимых измерений, их сложности и стоимости. Однако в ряде приложений теории вероятностей достаточно знать лишь некоторые числовые характеристики распределения вероятностей. К числу таких характеристик относятся моменты случайной величины.

Проведем аналогию с механикой. Полное описание механических свойств твердого тела, необходимое для моделирования его движения, содержится в распределении масс по объему тела. Для упрощения решения задач, связанных с движением твердого тела, можно ограничиться использованием таких числовых характеристик, как центр масс и моменты инерции. В § 14 распределению вероятностей была дана механическая интерпретация, что служит основанием для введения соответствующих аналогий при рассмотрении числовых характеристик случайных величин.

Рассмотрим произвольную действительную функцию $\xi(X)$ случайной величины X непрерывного типа с возможными значениями $\xi(x)$, $x \in \mathcal{X}$, и известной плотностью вероятности $f(x)$. Математическим ожиданием (или средним значением) функции $\xi(X)$ случайной величины X будем называть

$$\mathrm{M}[\xi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x)\, f(x)\, dx, \tag{2.38}$$

если этот интеграл сходится абсолютно.

Поскольку $f(x)dx$ имеет смысл вероятности попадания случайной величины X в малую окрестность точки x, а $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$, выражение (2.38) можно интерпретировать как среднее возможных значений $\xi(x)$, взвешенных вероятностями $f(x)dx$ этих значений. Отметим, что единица измерения $\mathrm{M}[\xi(X)]$ совпадает с единицей измерения случайной величины $Y = \xi(X)$. Это утверждение следует непосредственно из выражения (2.38), в котором $f(x)dx$ – безразмерная величина, так как является вероятностью события: $X \in [x, x+dx)$. Например, если X измеряется в см, а $Y = X^2$, то $\mathrm{M}[\xi(X)]$ измеряется в см^2.

Математическое ожидание $\mathrm{M}[\xi(X)]$ может не существовать, если $\int_{-\infty}^{\infty} \xi(x)\, f(x)\, dx$ не сходится абсолютно. Например, для распределения Коши

$$f(x) = \frac{\beta}{\pi} \frac{1}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}, \quad -\infty < x < \infty, \tag{2.39}$$

не существует $\mathrm{M}[X^k]$ для $k \geq 1$.

Начальным моментом порядка k непрерывной случайной величины X называется

$$\alpha_k = \mathrm{M}[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k\, f(x)\, dx, \tag{2.40}$$

если интеграл (2.40) сходится абсолютно.

При $k = 0$ на основании свойства нормировки плотности вероятности (2.22) $\alpha_0 = 1$. Начальный момент первого порядка α_1 называется *математическим ожиданием* (или средним значением) случайной величины X и обычно обозначается m_X :

$$\alpha_1 = m_X = \mathrm{M}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx. \tag{2.41}$$

Нижний индекс '$_X$' в обозначении математического ожидания введен в связи с тем, что в этом параграфе будут рассматриваться математические ожидания и других случайных величин. Для обозначения математического ожидания m_X случайной величины X используют также обозначение $\overline{X}$. Если воспользоваться механической интерпретацией плотности вероятности как плотности распределения единичной массы вдоль бесконечного стержня, то m_X соответствует положению центра масс стержня.

Если плотность распределения вероятностей симметрична относительно начала координат: $f(x) = f(-x)$, то для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\alpha_{2k+1} = 0$. Это утверждение следует из определения (2.40) начального момента, нечетности подынтегральной функции и симметричных пределов интегрирования. В частном случае $k = 0$ получаем, что при симметричном распределении вероятностей математическое ожидание $m_X = 0$. Заметим, что для распределения Коши (2.39) математическое ожидание m_X не существует.

Операция центрирования случайной величины X состоит в смещении ее значений на m_X:

$$\overset{\circ}{X} = X - m_X \ . \tag{2.42}$$

Полагая в формуле (2.38) $\xi(X) = X - m_X$, получим, что

$$\mathrm{M}[\overset{\circ}{X}] = 0. \tag{2.43}$$

Центральным моментом порядка k непрерывной случайной величины X называется

$$\mu_k = \mathrm{M}[(\overset{\circ}{X})^k] = \mathrm{M}[(X - m_X)^k] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^k\ f(x)\ dx, \tag{2.44}$$

если интеграл (2.44) сходится абсолютно.

Центральные моменты могут быть выражены через начальные с использованием формулы разложения выражения $(X - m_X)^k$:

$$(X - m_X)^k = \sum_{n=0}^{k} (-1)^{k-n} C_k^n\ m_X^{k-n} X^n, \tag{2.45}$$

где $C_k^n = \dfrac{k!}{n!\,(k-n)!}$. Для вывода выражения будет использовано свойство линейности оператора математического ожидания $\mathrm{M}[\cdot]$, которое следует непосредственно из определения (2.38).

1. Для произвольной константы c и случайной величины X

$$\mathrm{M}[c\,\xi(X)] = c\ \mathrm{M}[\xi(X)], \tag{2.46}$$

если $\mathrm{M}[\xi(X)]$ существует.

2. Для произвольных значений c_n, n = 0, 1, …, k, и случайной величины X

$$\mathrm{M}[\sum_{n=0}^{k} c_n\, \xi_n(X)] = \sum_{n=0}^{k} c_n\, \mathrm{M}[\xi_n(X)], \tag{2.47}$$

если $\mathrm{M}[\xi_n(X)]$, n = 0,1, …, k, существуют.

Воспользуемся разложением (2.45) в выражении (2.44) для центрального момента порядка k и свойствами (2.46), (2.47):

$$\mu_k = \mathrm{M}[(X - m_X)^k] = \mathrm{M}[\sum_{n=0}^{k} (-1)^{k-n} C_k^n\ m_X^{k-n} X^n] =$$

$$= \sum_{n=0}^{k} (-1)^{k-n} C_k^n\ m_X^{k-n}\, \mathrm{M}[X^n] = \sum_{n=0}^{k} (-1)^{k-n} C_k^n\ m_X^{k-n}\, \alpha_n .$$

Таким образом, получено полезное для практического применения выражение:

$$\mu_k = \sum_{n=0}^{k} (-1)^{k-n} C_k^n\ m_X^{k-n}\, \alpha_n . \tag{2.48}$$

Из формулы (2.43) следует, что $\mu_1 = 0$. Центральный момент второго порядка μ_2 называется *дисперсией* случайной величины X и обозначается d_X:

$$d_X = \mu_2 = \mathrm{M}[(\overset{\circ}{X})^2] = \mathrm{M}[(X - m_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 \, f(x)\, dx. \quad (2.49)$$

Как следует из определения (2.49), дисперсия d_X является *мерой рассеяния значений* случайной величины X около ее центра распределения m_X. В теоретических построениях и прикладных задачах часто удобнее использовать числовую характеристику рассеяния

$$\sigma_X = \sqrt{d_X}\,, \quad (2.50)$$

единица измерения которой та же, что и у случайной величины X. Эта характеристика носит название *среднеквадратичного* (или *стандартного*) *отклонения* (с.к.о.). На рис. 2.12 показаны два распределения вероятностей с разными стандартными отклонениями.

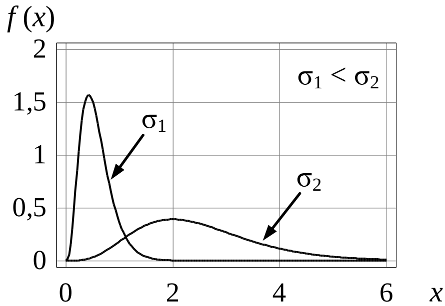


Рис. 2.12. Плотности вероятности
с разными стандартными отклонениями

На основании выражения (2.48) может быть установлена связь между дисперсией и начальным моментом второго порядка:

$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2,$$

которая с учетом принятых обозначений $d_X = \mu_2$ и $\alpha_1 = m_X$ приводится к следующей записи:

$$d_X = \alpha_2 - m_X^2\,. \quad (2.51)$$

При решении практических задач нередко применяется операция стандартизации, которая преобразует случайные величины к определенной шкале. В результате такого преобразования возникает возможность сопоставления распределений вероятностей случайных величин разной природы.

Операция *стандартизации случайной величины* X состоит в ее *центрировании* и *нормировании* (делении на стандартное отклонение):

$$\tilde{X} = \frac{X - m_X}{\sigma_X}, \qquad (2.52)$$

где $\tilde{X}$ означает стандартизованную случайную величину X.

Положив в (2.38) $\xi(X) = \dfrac{X - m_X}{\sigma_X}$, получим равенство:

$$\mathrm{M}[\tilde{X}] = \mathrm{M}\left[\frac{X - m_X}{\sigma_X}\right] = \frac{1}{\sigma_X}\mathrm{M}[X - m_X] = 0.$$

Таким образом, стандартизованная случайная величина центрирована и, следовательно, ее дисперсия (второй центральный момент) равна второму начальному моменту: $d_X = \mathrm{M}[(\tilde{X})^2]$. Элементарные преобразования приводят к следующему результату:

$$d_{\tilde{X}} = \mathrm{M}[(\tilde{X})^2] = \mathrm{M}\left[\frac{(X - m_X)^2}{\sigma_X^2}\right] = \frac{1}{\sigma_X^2}\mathrm{M}[(X - m_X)^2] = 1,$$

т.е. стандартизованная случайная величина имеет единичную дисперсию и, следовательно, единичное стандартное отклонение $\sigma_{\tilde{X}} = 1$. Следует обратить внимание на то, что *стандартизованная случайная величина безразмерна*.

Третий центральный момент μ_3 случайной величины характеризует асимметрию ее распределения вероятностей:

$$\mu_3 = \mathrm{M}[(X - m_X)^3] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^3 f(x)\, dx. \qquad (2.53)$$

Показательное (экспоненциальное) распределение (2.23) (см. рис. 2.8) имеет $\mu_3 > 0$. Симметричные распределения характеризуются значением $\mu_3 = 0$.

Коэффициентом асимметрии случайной величины называют безразмерный параметр

$$\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \qquad (2.54)$$

который нормирован и потому более удобен для характеристики степени асимметрии распределения вероятностей.

С центральным моментом четвертого порядка связана числовая характеристика распределения вероятностей, которая называется *эксцессом* и обозначается ε:

$$\varepsilon = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \tag{2.55}$$

Эксцесс характеризует вид плотности вероятности в окрестности ее максимального значения: чем более "острой" является вершина графика плотности вероятности, тем большее значение принимает эксцесс (рис. 2.13). Для нормального закона распределения вероятностей (закона Гаусса) ε = 0, для равномерного закона ε < 0, а для экспоненциального – ε > 0.

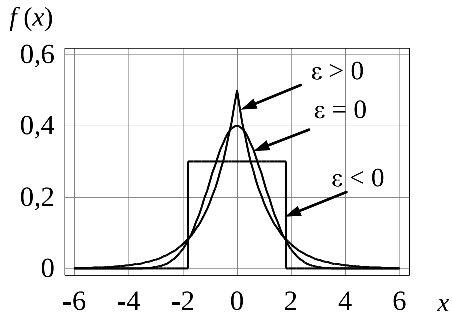


Рис. 2.13. Плотности распределения вероятностей с разными эксцессами

Пример 2.9. Случайная величина распределена по показательному закону с плотностью вероятности (2.23). Рассчитаем ее числовые характеристики m_X, d_X, σ_X, γ.

Согласно определению (2.41) математическое ожидание случайной величины с показательным распределением (2.23) равно

$$m_X = \int_0^{\infty} \alpha x e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha}. \tag{2.56}$$

Для расчета дисперсии d_X воспользуемся определением (2.49):

$$d_X = \int_0^{\infty} \alpha (x - m_X)^2 e^{-\alpha x}\, dx = \int_0^{\infty} \alpha \left(x - \frac{1}{\alpha} \right)^2 e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha^2}. \tag{2.57}$$

Заметим, что с вычислительной точки зрения было бы удобнее рассчитать второй начальный момент $\alpha_2 = \int\limits_0^{\infty} \alpha x^2 e^{-\alpha x}\, dx = \dfrac{2}{\alpha^2}$ и воспользоваться формулой (2.51):

$$d_X = \alpha_2 - m_X^2 = \frac{2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Стандартное отклонение находится по определению (2.50):

$$\sigma_X = \sqrt{d_X} = \frac{1}{\alpha}. \qquad (2.58)$$

Вычисление центрального момента третьего порядка с использованием формулы (2.53) приводит к следующему результату:

$$\mu_3 = \frac{2}{\alpha^3}. \qquad (2.59)$$

Заметим, что для получения выражения (2.59) более рационально с точки зрения расчетов воспользоваться формулой связи третьего центрального и начальных моментов (формула (2.48) при $k = 3$).

Полученное выражение (2.59) подтверждает сделанное ранее замечание, что для показательного закона $\mu_3 > 0$ (принимается во внимание, что $\alpha > 0$). Расчет коэффициента асимметрии по формуле (2.54) приводит к значению $\gamma = 2$.

Пример 2.10. Рассматривается равномерное распределение вероятностей на отрезке $[a, b]$. Рассчитаем числовые характеристики m_X, d_X, σ_X, γ.

Плотность распределения вероятностей равномерного закона определяется формулой (2.17). Расчет математического ожидания выполняется согласно определению (2.41):

$$m_X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int\limits_a^b x \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{a+b}{2}. \qquad (2.60)$$

Вычислим второй начальный момент:

$$\alpha_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \int\limits_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

Дисперсия находится с использованием найденных характеристик m_X и α_2:

$$d_X = \alpha_2 - m_X^2 = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

Теперь находится выражение для стандартного отклонения:

$$\sigma_X = \sqrt{d_X} = (b-a)\big/(2\sqrt{3}).$$

Равномерное распределение является симметричным относительно своего центра $m_X = (a+b)/2$, поэтому коэффициент асимметрии $\gamma = 0$.

В прикладных задачах анализа статистических данных часто применяются числовые характеристики случайных величин, основанные на понятии квантили.

Квантилью непрерывной случайной величины на уровне вероятности p (или порядка p) называется точная верхняя граница x_p множества значений x, для которых выполнено условие:

$$F(x) = P(X < x) = p.$$

Если функция распределения вероятностей $F(x)$ монотонно возрастает, то для любого значения $0 < p < 1$ уравнение $F(x) = p$ имеет единственное решение x_p.

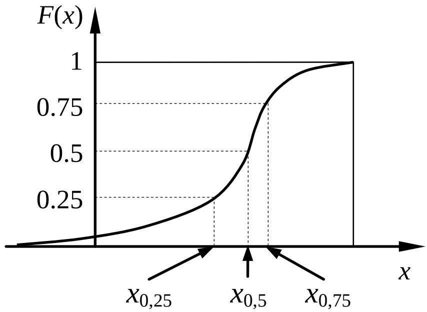


Рис. 2.14. Квартили и медиана распределения вероятностей

На рис. 2.14 показаны квантили $x_{0,25}$, $x_{0,5}$ и $x_{0,75}$. Значения $x_{0,25}$ и $x_{0,75}$ называют *нижней и верхней квартилями* соответственно, а $x_{0,5}$ – *медианой распределения вероятностей*.

В связи с тем, что для непрерывных распределений $P(X = x_{0,5}) = 0$, медиана $x_{0,5}$ удовлетворяет равенству $P(X < x_{0,5}) = P(X > x_{0,5})$. Это равенство дает основание для того, чтобы называть медиану средним значением случайной величины. В общем случае значения медианы и математического ожидания случайной величины не совпадают.

Пример 2.11. Рассматривается показательный закон с функцией распределения вероятностей (2.24) и параметром α. Для нахождения квантили x_p необходимо решить уравнение:

$$1 - \exp(-\alpha x_p) = p,$$

из которого следует, что $x_p = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{1-p}$. В частности, медиана показательного распределения $x_{0.5} = \frac{1}{\alpha} \ln 2$. Поскольку $\ln 2 < 1$, а математическое ожидание показательного распределения (2.56) равно $\frac{1}{\alpha}$, получаем, что в рассматриваемом примере $x_{0.5} < m_X$.

При решении практических задач, связанных с проверкой статистических гипотез и принятием решений, особое значение имеет числовая характеристика, называемая критической точкой распределения вероятностей.

Критической точкой порядка p *распределения вероятностей* непрерывной случайной величины называется действительное число χ_p, удовлетворяющее следующему уравнению:

$$P(X \geq \chi_p) = p. \tag{2.61}$$

Принимая во внимание, что $P(X < \chi_p) = 1 - P(X \geq \chi_p) = 1 - p$, получаем следующую связь критической точки порядка p и квантили порядка $(1 - p)$:

$$x_{1-p} = \chi_p. \tag{2.62}$$

В математической статистике χ_p обычно называют *правой критической точкой* и вводят дополнительные понятия левой и симметричной критических точек. В частности, *симметричная критическая точка* $\tilde{\chi}_p$ *порядка* p непрерывного распределения вероятностей удовлетворяет уравнению

$$P(|X| \geq \tilde{\chi}_p) = p. \tag{2.63}$$

Плотность непрерывного распределения вероятностей характеризуется числовым показателем, называемым *модой*. Под модой понимается то значение случайной величины, для которого плотность распределения максимальна. Если максимум является единственным, то распределение вероятностей называется *унимодальным*. Иначе оно является *полимодальным*.

Если распределение вероятностей непрерывной случайной величины является унимодальным и симметричным, то значения моды, медианы и математического ожидания совпадают.

Контрольные вопросы и задачи

1. Дайте определение математического ожидания произвольной функции $\xi(X)$ случайной величины X непрерывного типа.
2. Какой единицей измерения характеризуется функция плотности вероятности $f(x)$?
3. Случайная величина X представляет собой расход бензина на 100 км пробега автомобиля. Стоимость 1 л бензина составляет a рублей. Какую размерность имеет величина $\mathrm{M}[aX]$?
4. Приведите пример, когда математическое ожидание функции $\xi(X)$ случайной величины X не существует.
5. Что называется начальным моментом порядка k случайной величины?
6. В каких единицах измеряется начальный момент α_k?
7. Чему равно значение α_0?
8. Что называется математическим ожиданием m_X случайной величины X?
9. Случайная величина X имеет равномерное распределение вероятностей на отрезке $[-a, a]$. Чему равно значение α_5?
10. В чем состоит операция центрирования случайной величины?
11. Что называется центральным моментом порядка k случайной величины?
12. Является ли оператор математического ожидания линейным?
13. Как можно выразить центральный момент порядка k через начальные моменты случайной величины?
14. Начальные моменты каких порядков должны быть известны, чтобы с их помощью рассчитать центральный момент порядка k случайной величины?
15. Выразите дисперсию случайной величины через ее начальные моменты.
16. Получите выражение, позволяющее выразить начальный момент произвольного порядка через центральные моменты и математическое ожидание случайной величины.

17. Как называется второй центральный момент случайной величины и что он характеризует?

18. Что называется стандартным отклонением случайной величины и какова его размерность?

19. Напишите выражение, связывающее дисперсию со вторым начальным моментом случайной величины.

20. В чем состоит операция стандартизации случайной величины?

21. Какими свойствами обладает стандартизованная случайная величина?

22. Справедливо ли утверждение, что все моменты стандартизованной случайной величины безразмерны?

23. Что называется коэффициентом асимметрии случайной величины?

24. Приведите примеры распределений вероятностей с нулевым, положительным и отрицательным значениями коэффициента асимметрии. Нарисуйте графики.

25. Что называется эксцессом случайной величины?

26. Какое свойство плотности распределения вероятностей связано с понятием эксцесса?

27. Напишите выражение для стандартизованной случайной величины, имеющей показательное распределение вероятностей с параметром α.

28. Положительную или отрицательную асимметрию имеет показательное распределение вероятностей?

29. Рассматривается распределение вероятностей Лапласа (двустороннее экспоненциальное распределение):

$$f(x) = (\alpha/2)\ e^{-\alpha|x-\beta|},\ -\infty < x < \infty.$$

Рассчитайте значения математического ожидания, дисперсии и стандартного отклонения.

30. Дайте определение квантили порядка p распределения вероятностей непрерывной случайной величины.

31. Чему равна квантиль порядка p = 0,2 равномерного распределения вероятностей на отрезке $[a, b]$ непрерывной случайной величины?

32. Справедливо ли утверждение, что для равномерного распределения вероятностей на отрезке $[a, b]$ непрерывной случайной

величины значения медианы и математического ожидания совпадают? Дайте объяснение к ответу.

33. Чему равна медиана двойного экспоненциального распределения, рассмотренного в вопросе 29?

34. Что называется правой критической точкой порядка p непрерывного распределения вероятностей?

35. Как связаны правая критическая точка и квантиль случайной величины непрерывного типа?

36. Что называется симметричной критической точкой порядка p непрерывного распределения вероятностей?

37. Дайте определение моды непрерывного распределения вероятностей.

38. Какое распределение вероятностей называется унимодальным?

39. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задана выражением:

$$f(x) = \begin{cases} (1/a)\ \ (1-|x|/a), & \text{если } |x| < a; \\ 0, & \text{если } |x| \ge a, \end{cases}$$

где $a > 0$ – параметр распределения вероятностей. Чему равны мода, медиана и математическое ожидание рассматриваемой случайной величины?

40. Докажите, что для унимодального и симметричного распределения вероятностей непрерывной случайной величины значения моды, медианы и математического ожидания совпадают.

§ 17. Числовые характеристики случайных величин дискретного типа

Начальные и центральные моменты, введенные в предыдущем параграфе для описания свойств непрерывных распределений вероятностей, применяются и для случайных величин дискретного типа. Напомним, что дискретные случайные величины имеют конечное или счетное множество возможных значений и характеризуются вероятностями $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$.

Математическое ожидание (или среднее значение) функции $\xi(X)$ дискретной случайной величины X определяется выражением:

$$\mathrm{M}[\xi(X)] = \sum_i \xi(x_i)\, p_i\,. \tag{2.64}$$

Выражение (2.64) согласуется с определением (2.38) для математического ожидания $\mathrm{M}[\xi(X)]$ произвольной непрерывной функции $\xi(X)$ для случайной величины X непрерывного типа. Действительно, если подставить в определение (2.38) выраженную через δ-функцию Дирака плотность вероятности дискретного распределения, то будет получена формула (2.64):

$$\mathrm{M}[\xi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x)\, f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x) \sum_i p_i\, \delta(x - x_i)\, dx =$$

$$= \sum_i p_i \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x)\, \delta(x - x_i)\, dx = \sum_i \xi(x_i)\, p_i .$$

В выводе было использовано свойство (2.33) δ-функции Дирака.

Свойства (2.46) и (2.47), отражающие линейность оператора математического ожидания $\mathrm{M}[\cdot]$, справедливы как для непрерывных, так и для дискретных распределений.

Для дискретных распределений также справедливо равенство (2.48), связывающее начальные и центральные моменты случайной величины и доказанное в § 16 для непрерывных распределений.

Следуя определению (2.64), записываются расчетные выражения для начальных α_k и центральных μ_k моментов дискретной случайной величины:

$$\alpha_k = \mathrm{M}[X^k] = \sum_i x_i^k\; p_i\ , \qquad (2.65)$$

$$\mu_k = \mathrm{M}[(X - m_X)^k] = \sum_i (x_i - m_X)^k\; p_i\, . \qquad (2.66)$$

В формуле (2.66) математическое ожидание (среднее значение) m_X дискретной случайной величины определяется выражением:

$$m_X = \alpha_1 = \sum_i x_i\, p_i\, . \qquad (2.67)$$

Расчетная формула для дисперсии d_X дискретной случайной величины следует из выражения (2.66) при $k = 2$:

$$d_X = \mu_2 = \sum_i (x_i - m_X)^2\, p_i\, . \qquad (2.68)$$

Для описания свойств дискретных распределений используются также числовые характеристики: стандартное отклонение (2.50), коэффициент асимметрии (2.54), эксцесс (2.55), определенные в § 16.

Пример 2.12. Рассматривается дискретная случайная величина X с двумя равновозможными значениями: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $p_1 = P(X = 1) = 0{,}5$; $p_2 = P(X = -1) = 0{,}5$.

Математическое ожидание случайной величины X равно нулю в связи с симметрией рассматриваемого распределения вероятностей, что подтверждается расчетом по формуле (2.67):

$$m_X = \sum_{i=1}^{2} x_i\, p_i = 0.$$

Таким образом, случайная величина X является центрированной, а ее центральные моменты μ_k определяются выражением:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{2} x_i^k\, p_i = 0{,}5(1 + (-1)^k) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \text{ – нечетное;} \\ 1, & \text{если } k \text{ – четное.} \end{cases}$$

Из полученного выражения следует, что дисперсия $d_X = \mu_2 = 1$ и стандартное отклонение $\sigma_X = \sqrt{d_X} = 1$.

Пример 2.13. Рассчитаем математическое ожидание и дисперсию случайной величины, распределенной по биномиальному закону (см. § 13). Напомним, что биномиальное распределение характеризуется двумя параметрами: N – число испытаний Бернулли и p – вероятность успеха в одном испытании. Возможными значениями биномиальной случайной величины являются $0, 1, \ldots, N$, а вероятности этих значений определяются формулой (2.13):

$$p_k = P(X = k) = C_N^k\, p^k\, q^{N-k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}\, p^k\, q^{N-k},$$

где $k = 0, 1, \ldots, N$. Математическое ожидание m_X рассчитывается согласно определению (2.67):

$$m_X = \sum_{k=0}^{N} k\, C_N^k\, p^k\, q^{N-k} = \sum_{k=0}^{N} k\, \frac{N!}{k!(N-k)!}\, p^k\, q^{N-k} =$$

$$= N\, p \sum_{k=1}^{N} \frac{(N-1)!}{(k-1)!((N-1)-(k-1))!}\, p^{k-1}\, q^{(N-1)-(k-1)} =$$

$$= N\, p \sum_{i=0}^{N-1} C_{N-1}^i\, p^i\, q^{(N-1)-i} = Np\,. \qquad (2.69)$$

Для расчета дисперсии биномиального распределения воспользуемся формулой (2.51), которая выражает дисперсию через второй начальный момент и математическое ожидание случайной величины:

$$d_X = \alpha_2 - (m_X)^2 = \sum_{k=0}^{N} k^2 C_N^k \, p^k \, q^{N-k} - (Np)^2 = Np(1-p)\,. \quad (2.70)$$

Контрольные вопросы и задачи

1. Приведите расчетную формулу для математического ожидания произвольной функции случайной величины дискретного типа.
2. Объясните, как связаны расчетные формулы для математического ожидания произвольной функции случайного величины непрерывного и дискретного типов.
3. Напишите выражение для математического ожидания (среднего значения) дискретной случайной величины.
4. Напишите выражение для дисперсии дискретной случайной величины.
5. Справедлива ли для дискретных распределений формула связи начальных и центральных моментов, доказанная ранее для непрерывных распределений?
6. Случайная величина, рассмотренная в примере 2.12, масштабируется с помощью коэффициента $c > 0$: $Y = cX$. Таким образом, равновозможными значениями случайной величины Y являются $+c$ и $-c$. Чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины Y?
7. Чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по биномиальному закону?
8. Дискретная случайная величина распределена по геометрическому закону с параметром p (см. § 13, рис. 2.4). Чему равно ее математическое ожидание?
9. Рассчитайте математическое ожидание и дисперсию случайной величины, распределение вероятностей которой представлено таблицей:

x_k	–1	0	1
p_k	0,3	0,4	0,3

10. Рассматривается "индикаторная" случайная величина, которая принимает значение 1 с вероятностью p и 0 – с вероятностью $(1-p)$. Чему равны ее математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратичное отклонение?

§ 18. Характеристическая функция

Ранее рассматривались функция и плотность распределения вероятностей, в форме которых может быть представлен закон распределения вероятностей случайной величины. Однако эти характеристики распределения вероятностей не являются единственными способами описания закона распределения вероятностей. Часто в практических приложениях и теоретическом анализе удобно представить распределение вероятностей случайной величины ее *характеристической функцией*.

Характеристической функцией $\varphi(\lambda)$ случайной величины X называется математическое ожидание комплексной функции $e^{j\lambda X}$, где λ – действительное число, $-\infty<\lambda<\infty$, $j=\sqrt{-1}$:

$$\varphi(\lambda)=\mathrm{M}[e^{j\lambda X}]. \qquad (2.71)$$

Для непрерывной случайной величины характеристическая функция определена следующим выражением:

$$\varphi(\lambda)=\mathrm{M}[e^{j\lambda X}]=\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\lambda x} f(x)\,dx, \qquad (2.72)$$

а для дискретной –

$$\varphi(\lambda)=\mathrm{M}[e^{j\lambda X}]=\sum_k p_k\, e^{j\lambda x_k}\ , \qquad (2.73)$$

где x_k и p_k – значения дискретной случайной величины и соответствующие вероятности.

Характеристическая функция определена для любого распределения вероятностей. Это следует из свойства нормировки распределения вероятностей:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1 \ \text{ и } \ \sum_k p_k=1$$

для непрерывных и дискретных распределений соответственно, а также ограниченности функции $e^{j\lambda X}$: $|e^{j\lambda X}|<1$.

Из определения следует, что для непрерывной случайной величины характеристическая функция $\varphi(\lambda)$ может рассматриваться как преобразование Фурье плотности распределения вероятностей. Если известна характеристическая функция $\varphi(\lambda)$, то соответствующая плотность распределения вероятностей может быть вычислена по известной формуле обращения для преобразования Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\lambda x} \varphi(\lambda)\, d\lambda\,. \tag{2.74'}$$

Для дискретных случайных величин также существует взаимно-однозначное соответствие между характеристической функцией (2.73) и вероятностями p_k. Если дискретная случайная величина принимает любые целочисленные значения $x_k = \pm k$, то справедливо равенство:

$$p_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda)\, e^{-j\lambda k}\, d\lambda\,. \tag{2.74''}$$

Таким образом, характеристическая функция содержит полную информацию о распределении вероятностей случайной величины и может быть использована для расчета ее любых числовых характеристик.

Рассмотрим основные свойства характеристической функции.

1. Для любого $-\infty<\lambda<\infty$ характеристическая функция $\varphi(\lambda)$ ограничена $|\,\varphi(\lambda)\,| \le 1$ и удовлетворяет условию

$$\varphi(0) = 1.$$

Это утверждение следует непосредственно из определения (2.71) и свойства нормировки распределения вероятностей.

2. Пусть случайная величина X подвергнута линейному преобразованию с произвольными действительными параметрами a и b:

$$Y = aX + b.$$

Тогда характеристические функции $\varphi_X(\lambda)$ и $\varphi_Y(\lambda)$ случайных величин X и Y связаны следующим выражением:

$$\varphi_Y(\lambda) = e^{jb\lambda}\, \varphi_X(a\lambda). \tag{2.75}$$

Утверждение (2.75) следует из определения (2.71) и очевидных преобразований:

$$\varphi_Y(\lambda) = \mathrm{M}[e^{j\lambda Y}] = \mathrm{M}[e^{j\lambda(aX+b)}] = e^{jb\lambda}\, \mathrm{M}[e^{ja\lambda X}] = e^{jb\lambda}\, \varphi_X(a\lambda)\,.$$

В процессе преобразований было использовано доказанное ранее свойство линейности оператора M[·].

3. Характеристическая функция $\varphi_{\overset{o}{X}}(\lambda)$ центрированной случайной величины $\overset{o}{X} = X - m_X$ связана с $\varphi_X(\lambda)$ выражением:

$$\varphi_{\overset{o}{X}}(\lambda) = e^{-jm_X\lambda}\varphi_X(\lambda). \tag{2.76}$$

Равенство (2.76) следует из (2.75) при $b = -m_X$ и $a = 1$, что обусловлено видом линейного преобразования при переходе от случайной величины X к $\overset{o}{X}$.

4. Характеристическая функция $\varphi_{\tilde{X}}(\lambda)$ стандартизованной случайной величины $\tilde{X} = \dfrac{X - m_X}{\sigma_X}$ связана с $\varphi_X(\lambda)$ выражением:

$$\varphi_{\tilde{X}}(\lambda) = e^{-j(m_X/\sigma_X)\lambda}\varphi_X(\lambda/\sigma_X). \tag{2.77}$$

Равенство (2.77) следует из (2.75) при $b = -(m_X/\sigma_X)$ и $a = 1/\sigma_X$, что обусловлено видом линейного преобразования при переходе от случайной величины X к $\tilde{X}$.

5. Если существует начальный момент α_k порядка k случайной величины, то он может быть представлен через ее характеристическую функцию:

$$\alpha_k = (j)^{-k}\,\varphi^{(k)}(0), \tag{2.78}$$

где $\varphi^{(k)}(\lambda) = \dfrac{d^k\varphi(\lambda)}{d\lambda^k}$; $\varphi^{(k)}(0) = \varphi^{(k)}(\lambda)|_{\lambda=0}$.

Для доказательства равенства (2.78) рассмотрим выражение для производной порядка k характеристической функции:

$$\varphi^{(k)}(\lambda) = \frac{d^k}{d\lambda^k}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\lambda x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (jx)^k e^{j\lambda x} f(x)\,dx,$$

$$\varphi^{(k)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} (jx)^k f(x)\,dx = (j)^k\alpha_k.$$

Из последнего выражения и следует равенство (2.78).

6. Характеристическая функция может быть представлена разложением в ряд по начальным моментам случайной величины:

$$\varphi(\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(j\lambda)^k}{k!}\, \alpha_k\,. \tag{2.79}$$

Равенство (2.79) следует из разложения Маклорена характеристической функции

$$\varphi(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda)^k}{k!}\, \varphi^{(k)}(0)$$

и свойства (2.78).

7. Пусть распределение вероятностей является симметричным относительно начала координат: $f(x) = f(-x)$. Тогда характеристическая функция $\varphi(\lambda)$ является действительной и четно-симметричной функцией: $\varphi(\lambda) = \varphi(-\lambda)$.

Доказательство этого утверждения основано на применении формулы Эйлера

$$e^{j\lambda x} = \cos\lambda x + j\sin\lambda x$$

в определении характеристической функции:

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos\lambda x + j\sin\lambda x)\; f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\lambda x\; f(x)\,dx\,.$$

Пример 2.14. Случайная величина распределена по *закону Лапласа* (*двустороннему экспоненциальному распределению*; см. вопрос 29 к § 16) с параметром $\beta = 0$:

$$f(x) = (\alpha/2)\; e^{-\alpha|x|},\ -\infty < x < \infty.$$

Найдем выражение для характеристической функции:

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\lambda x}\; f(x)\; dx = \frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\lambda x}\; e^{-\alpha|x|}\,dx =$$

$$= \frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{j\lambda + \alpha} - \frac{1}{j\lambda - \alpha}\right) = \frac{\alpha^2}{\lambda^2 + \alpha^2}\,.$$

Полученное выражение удовлетворяет свойству $\varphi(0) = 1$. Кроме того, в силу симметрии распределения Лапласа характеристическая функция является действительной и четно-симметричной.

Пример 2.15. Рассматривается "индикаторная" случайная величина, которая принимает значение $x_1 = 1$ с вероятностью $p_1 = p$ и $x_2 = 0$ – с вероятностью $p_2 = (1–p)$. Для определения ее характеристической функции воспользуемся расчетной формулой (2.73):

$$\varphi(\lambda) = \mathrm{M}[e^{j\lambda X}] = \sum_{k=1}^{2} p_k e^{j\lambda x_k} = p e^{j\lambda} + (1-p).$$

Используя обозначение $q = 1 - p$, получим следующее выражение:

$$\varphi(\lambda) = p e^{j\lambda} + q. \qquad (2.80)$$

Пример 2.16. Рассмотрим характеристическую функцию случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[-a, a]$:

$$f(x) = \begin{cases} 1/2a, & -a \le x \le a; \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

По определению (2.72) характеристической функции случайной величины непрерывного типа

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\lambda x} f(x)\, dx = \int_{-a}^{a} e^{j\lambda x} \frac{1}{2a}\, dx = \frac{\sin a\lambda}{a\lambda}.$$

Разложение $\varphi(\lambda)$ в ряд Маклорена

$$\varphi(\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(j\lambda)^{2k}}{(2k)!} \frac{a^{2k}}{2k+1}$$

и применение свойства (2.78) характеристической функции приводят к следующему выражению для центральных моментов случайной величины X (случайная величина X центрирована):

$$\mu_{2k} = a^{2k} / (2k+1), \quad \mu_{2k+1} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Пример 2.17. Характеристическая функция дискретной случайной величины X, распределенной по биномиальному закону (2.13) с параметрами N, p, вычисляется по формуле (2.73):

$$\varphi(\lambda) = \mathrm{M}[e^{j\lambda X}] = \sum_{k=0}^{N} p_k e^{j\lambda x_k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} C_n^k p^k q^{N-k} e^{j\lambda k} = (p e^{j\lambda} + q)^N.$$

Контрольные вопросы и задачи

1. Дайте определение характеристической функции случайной величины.
2. Напишите расчетные формулы для характеристической функции случайных величин дискретного и непрерывного типов.
3. Почему характеристическая функция содержит полную информацию о распределении вероятностей случайной величины и является одной из форм представления закона распределения вероятностей?
4. Является ли характеристическая функция действительной (или комплексной) функцией действительного (или комплексного) аргумента?
5. Как можно восстановить плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины, если известна ее характеристическая функция?
6. Чему равно значение характеристической функции при аргументе $\lambda = 0$?
7. Какому ограничению удовлетворяет абсолютное значение характеристической функции?
8. Как изменится характеристическая функция случайной величины, если ее подвергнуть линейному преобразованию?
9. Случайная величина, имеющая характеристическую функцию $\varphi(\lambda)$, подвергается процедуре стандартизации. Чему равна ее характеристическая функция после стандартизации?
10. Как можно вычислить начальный момент порядка k случайной величины с известной характеристической функцией?
11. При каком типе распределения вероятностей характеристическая функция случайной величины является действительной функцией?
12. Удовлетворяет ли функция $\cos(0{,}5\lambda)$ рассмотренным в § 18 свойствам характеристической функции?
13. Чему равна характеристическая функция индикаторной случайной величины с параметром p?
14. Рассчитайте характеристическую функцию равномерного распределения на отрезке [0; 1].

15. Найдите выражение для характеристической функции случайной величины, распределенной по показательному закону (§ 14, пример 2.6):

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha \exp(-\alpha x), \text{ если } x \geq 0; \\ 0, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

§ 19. Нормальный закон распределения вероятностей (закон Гаусса)

Нормальный закон распределения вероятностей играет особую роль как в теории статистики, так и в прикладных исследованиях при построении статистических моделей случайных явлений. В значительной степени это объясняется тем, что нормальный закон является предельным, к которому при некоторых условиях стремятся другие законы распределения вероятностей.

Непрерывная случайная величина X называется нормально распределенной (или распределенной по закону Гаусса), если ее функция плотности вероятности представлена следующим выражением:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\,\sigma^2}\right), \; -\infty < x < \infty, \qquad (2.81)$$

где m и σ – параметры закона распределения.

Обычно нормальный закон распределения обозначают $N(m, \sigma)$, подчеркивая тем самым его зависимость от двух параметров m и σ.

Множитель $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$ в выражении (2.81) является нормирующим, обеспечивающим равенство:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\,\sigma^2}\right) dx = 1. \qquad (2.82)$$

Убедимся в справедливости равенства (2.82). С этой целью рассмотрим следующее выражение:

$$\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\right]^2 = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x_1-m)^2}{2\,\sigma^2}\right) dx_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x_2-m)^2}{2\,\sigma^2}\right) dx_2 =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{t_1{}^2}{2}\right)dt_1\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{t_2{}^2}{2}\right)dt_2,$$

где $t_1=\dfrac{x_1-m}{\sigma}$, $t_2=\dfrac{x_2-m}{\sigma}$. После перехода к полярным координатам получим следующий результат интегрирования:

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx\right]^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\infty}r\,\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)dr=1,$$

что и доказывает равенство (2.82).

Для выяснения смысла параметров m и σ нормального закона распределения рассчитаем математическое ожидание M[X] и дисперсию D[X]:

$$\mathrm{M}[X]=\int_{-\infty}^{\infty}x\,f(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}x\,\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\,\sigma^2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(z+m)\,\exp\left(-\frac{z^2}{2\,\sigma^2}\right)dz=m,$$

$$\mathrm{D}[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2\,f(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2\,\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\,\sigma^2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}z^2\,\exp\left(-\frac{z^2}{2\,\sigma^2}\right)dz=$$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left[-z\,\exp\left(-\frac{z^2}{2\,\sigma^2}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{z^2}{2\,\sigma^2}\right)dz\right]=\sigma^2.$$

Таким образом, параметры m и σ нормального распределения $N(m,\ \sigma)$ являются соответственно математическим ожиданием и стандартным отклонением. Существенно, что только два первых момента полностью характеризуют нормальное распределение. Следовательно, все другие числовые характеристики могут быть выражены через моменты m и $d=\sigma^2$.

На рис. 2.15, *а* показаны графики плотности распределения нормального закона для трех значений математического ожидания $m = 0, 2, 4$ при фиксированном стандартном отклонении $\sigma = 1$.

Плотность распределения является симметричной функцией относительно $x = m$. Изменение математического ожидания приводит к параллельному переносу вдоль координатной оси x графика плотности вероятности. Мода нормального распределения совпадает со значением математического ожидания m. На рис. 2.15, *б* показаны соответствующие графики функции распределения нормального закона.

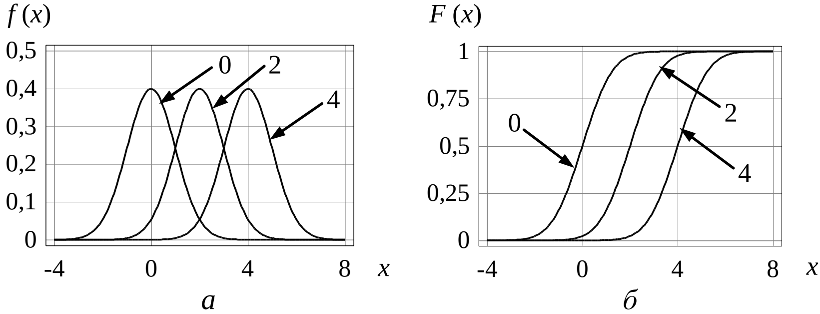


Рис. 2.15. Распределение вероятностей нормального закона для трех значений $m = 0, 2, 4$ при $\sigma = 1$: *а* – плотность распределения, *б* – функция распределения вероятностей

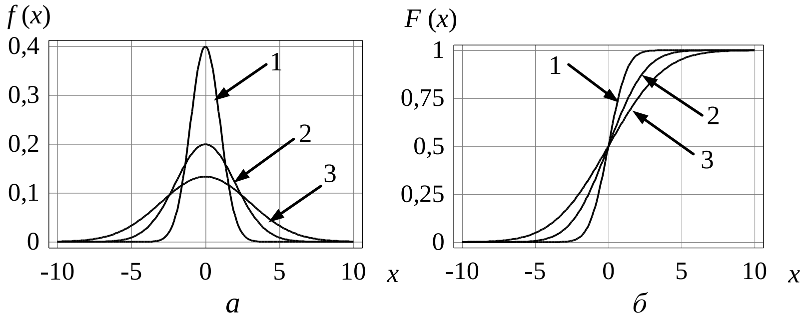


Рис. 2.16. Распределение вероятностей нормального закона для трех значений $\sigma = 1, 2, 3$ при $m = 0$: *а* – плотность вероятности; *б* – функция распределения вероятностей

На рис. 2.16, *а* представлено влияние параметра σ на форму графика плотности вероятности. Три показанные на рисунке графика соответствуют значениям $\sigma = 1, 2, 3$ и фиксированному математическому ожиданию $m = 0$. На рис. 2.16, *б* показаны соответствующие графики функции распределения нормального закона.

Чтобы получить выражение для функции распределения вероятностей нормального закона, воспользуемся известной формулой связи $F(x)$ и $f(x)$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx .$$

Тогда для функции $F(x)$ получим следующее выражение:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\,\sigma^2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} \exp\left(-\frac{z^2}{2} \right) dz = \qquad (2.83)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} \exp\left(-\frac{z^2}{2} \right) dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{x-m}{\sigma}} \exp\left(-\frac{z^2}{2} \right) dz .$$

Функция распределения закона Гаусса не выражается в элементарных функциях. Определим следующую функцию:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} \exp\left(-\frac{z^2}{2} \right) dz , \qquad (2.84)$$

которую называют *функцией Лапласа*, или *интегралом вероятностей*. Для преобразования выражения (2.83) для $F(x)$ используем очевидные свойства функции Лапласа:

$$\Phi(x) = -\Phi(-x) \quad \text{и} \quad \Phi(\infty) = 1/2 . \qquad (2.85)$$

Последнее свойство следует из равенства (2.82) при $m = 0$ и $\sigma = 1$ и симметрии подынтегральной функции. В результате преобразований получаем следующее выражение:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma} \right). \qquad (2.86)$$

Выражение (2.86) для функции распределения вероятностей $F(x)$ позволяет записать расчетную формулу для вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в произвольный интервал $[\alpha, \beta)$:

$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right). \quad (2.87)$$

Заметим, что в силу непрерывности нормального распределения вероятность попадания случайной величины в фиксированную точку равна нулю и, следовательно, формула (2.87) определяет также вероятности $P(\alpha \le X \le \beta)$ и $P(\alpha < X < \beta)$.

Рассмотрим вероятность попадания нормальной случайной величины в интервал $(m - \varepsilon, m + \varepsilon)$, расположенный симметрично относительно математического ожидания. Для получения расчетной формулы воспользуемся выражением (2.87) и свойством (2.85) нечетной симметрии функции Лапласа:

$$P(m - \varepsilon \le X < m + \varepsilon) = P(m - \varepsilon < X < m + \varepsilon) =$$

$$= F(m + \varepsilon) - F(m - \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Таким образом, получена следующая расчетная формула:

$$P(|x - m| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \quad (2.88)$$

Функция Лапласа табулирована, что позволяет выполнить некоторые показательные расчеты:

$$P(|x - m| < \sigma) = 2\Phi(1) \approx 0{,}8627;$$

$$P(|x - m| < 2\sigma) = 2\Phi(2) \approx 0{,}9545;$$

$$P(|x - m| < 3\sigma) = 2\Phi(3) \approx 0{,}9973;$$

$$P(|x - m| < 4\sigma) = 2\Phi(4) \approx 0{,}99994.$$

Из приведенных расчетов, в частности, следует, что с вероятностью 0,9973 нормально распределенная случайная величина отклоняется от своего математического ожидания не более, чем на 3σ.

Характеристическая функция нормально распределенной случайной величины рассчитывается согласно определению (2.71):

$$\varphi(\lambda) = \mathrm{M}[e^{j\lambda X}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\lambda x} \exp\left(-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2}\right) dx =$$

$$= e^{j\lambda m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2\,\sigma^2} + j\lambda y \right) dy = \exp\left(j\lambda m - \frac{\lambda^2 \sigma^2}{2} \right). \quad (2.89)$$

Центрированная случайная величина $\overset{o}{X} = X - m_X$, распределенная нормально, имеет характеристическую функцию

$$\varphi_0(\lambda) = \exp\left(-\frac{\lambda^2 \sigma^2}{2} \right). \qquad (2.90)$$

Ранее было установлено, что разложением характеристической функции в ряд Маклорена можно определить моменты случайной величины (2.79). Представим $\varphi_0(\lambda)$ рядом Маклорена:

$$\varphi_0(\lambda) = \exp\left(-\frac{\lambda^2 \sigma^2}{2} \right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\lambda^{2k} \sigma^{2k}}{2^k\, k!} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(j\lambda)^{2k}}{(2k)!} \sigma^{2k} (2k-1)!!, \qquad (2.91)$$

где $(2k-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2k-1)$. Поскольку коэффициентами при $\frac{(j\lambda)^k}{(k)!}$ в разложении Маклорена характеристической функции $\varphi_0(\lambda)$ центрированной случайной величины являются ее центральные моменты, получаем на основании разложения (2.91) следующие выражения для центральных моментов нормально распределенной случайной величины:

$$\mu_{2k+1} = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\mu_{2k} = (2k-1)!!\, \sigma^{2k},\ \ k = 1, 2, \ldots . \qquad (2.92)$$

Из (2.92) при $k = 2$ получаем выражение для четвертого центрального момента:

$$\mu_4 = 3\sigma^4,$$

откуда следует, что эксцесс, определенный выражением (2.55), для нормально распределенной случайной величины равен нулю.

Допустим, что нормально распределенная случайная величина X подвергнута линейному преобразованию $Y = aX + b$. Возникает вопрос: какому распределению вероятностей подчиняется случайная величина Y? Для ответа на поставленный вопрос воспользуемся доказанным ранее свойством (2.75), которое устанавливает, что характеристические функции $\varphi_X(\lambda)$ и $\varphi_Y(\lambda)$ случайных величин X и Y связаны следующим выражением:

$$\varphi_Y(\lambda) = e^{jb\lambda}\, \varphi_X(a\lambda).$$

Согласно выражению (2.89)

$$\varphi_X(\lambda) = \exp\left(j\lambda m_X - \frac{\lambda^2 \sigma_X^2}{2} \right),$$

откуда следует, что

$$\varphi_Y(\lambda) = \exp\left(j\lambda(m_X + b) - \frac{\lambda^2 a^2 \sigma_X^2}{2} \right).$$

Полученное выражение для характеристической функции $\varphi_Y(\lambda)$ означает, что случайная величина Y распределена, как и X, по закону Гаусса, но имеет другие параметры:

$$m_Y = m_X + b, \quad \sigma_Y = |a|\, \sigma_X .$$

Контрольные вопросы и задачи

1. Чему равна плотность вероятности нормально распределенной случайной величины?
2. Покажите, что плотность вероятности нормального закона удовлетворяет условию нормировки.
3. Какова область возможных значений нормально распределенной случайной величины?
4. От каких параметров зависит нормальный закон распределения вероятностей?
5. Объясните, почему начальные и центральные моменты произвольного порядка нормально распределенной случайной величины выражаются через математическое ожидание и стандартное отклонение.
6. Чем различаются графики плотности вероятности нормального распределения случайных величин, характеризующихся разными математическими ожиданиями и одинаковыми стандартными отклонениями?
7. Как изменится форма графика плотности вероятности нормально распределенной случайной величины, если увеличить ее стандартное отклонение?

8. Напишите выражение для функции распределения вероятностей закона Гаусса.

9. Дайте определение функции Лапласа.

10. Какими свойствами обладает функция Лапласа? Нарисуйте ее график.

11. Напишите выражение для вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в произвольный интервал $[\alpha, \beta)$. Зависит ли эта вероятность от включения или исключения из интервала граничных точек?

12. Укажите для нормально распределенной случайной величины интервал, расположенный симметрично относительно центра распределения вероятностей, в который она попадает с вероятностью, превышающей 0,95.

13. Напишите выражение для характеристической функции нормально распределенной случайной величины.

14. На основании какого свойства характеристической функции могут быть найдены моменты случайной величины?

15. Чему равны центральные моменты нечетного порядка для нормально распределенной случайной величины?

16. Чему равны центральные моменты четного порядка для нормально распределенной случайной величины?

17. Чему равен эксцесс нормального распределения вероятностей? Дайте обоснование к своему ответу.

18. Как изменяется закон распределения вероятностей при линейном преобразовании нормально распределенной случайной величины?

Глава 3. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕКТОРЫ

§ 20. Распределение вероятностей случайного вектора

При решении прикладных задач обычно каждый объект, явление или испытание характеризуется не одним числом, а совокупностью n чисел. Например, технические характеристики компьютера включают в себя тактовую частоту процессора, тип материнской платы, объем оперативной памяти и пр. Метеосводка содержит ряд показателей: скорость ветра, температуру и влажность воздуха, атмосферное давление и пр. Допустим, что таких показателей n. Назовем их $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Они образуют вектор $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, где $\mathbf{col}(\cdot)$ означает вектор-столбец (column), координаты которого записаны строкой. Если показатели $X_1, X_2, \ldots, X_n$ являются случайными величинами, то в совокупности они образуют *случайный вектор* $\mathbf{X}$ размерности n, или n-*мерную случайную величину* $\mathbf{X}$.

Возможные значения случайного вектора $\mathbf{X}$ будем обозначать $\boldsymbol{x} = \mathbf{col}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Обратим внимание на то, что координаты случайного вектора могут иметь разную физическую природу и измеряться в различных единицах.

Свойства случайного вектора $\mathbf{X}$ в общем случае не исчерпываются свойствами его отдельных случайных координат $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Это объясняется возможной статистической или функциональной зависимостью рассматриваемых случайных величин.

Статистические свойства случайного вектора $\mathbf{X}$ полностью определяются его n-мерной *функцией распределения вероятностей* $F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\begin{aligned} F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i < x_i)\right) = \\ &= P((X_1 < x_1)\bigcap(X_2 < x_2)\bigcap\cdot\ldots\cdot\bigcap(X_n < x_n)). \end{aligned} \tag{3.1}$$

В формуле (3.1) под знаком вероятности стоит произведение событий $(X_i < x_i)$, i = 1, 2, …, n. В частности, для двумерного случайного вектора (n = 2) функция распределения вероятностей $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ при аргументах (a_1, a_2) представляет собой вероятность $P((X_1 < a_1) \bigcap (X_2 < a_2))$ попадания случайного вектора $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2)$ в прямоугольник, заштрихованный на рис. 3.1, *а*.

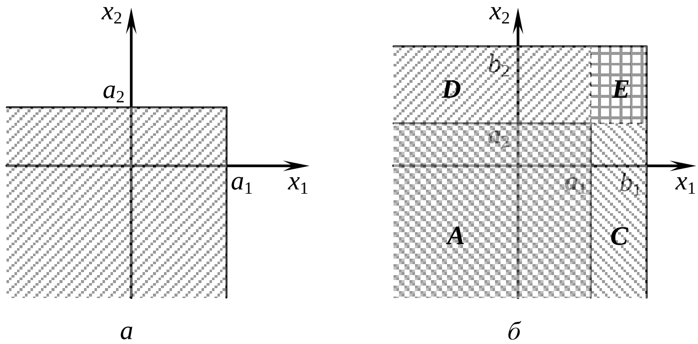


Рис. 3.1. Иллюстрация к определению (3.1) (*а*) и свойству (3.6) (*б*) функции распределения вероятностей $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$

В дальнейшем будем также использовать краткую форму для обозначения функции распределения вероятностей случайного вектора: $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)$ или $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ в зависимости от контекста.

Рассмотрим основные свойства функции $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)$, справедливые для любых типов распределений вероятностей.

1. Для любых $x_i \in \mathfrak{R}$, i = 1, 2, …, n,

$$0 \le F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n) \le 1. \tag{3.2}$$

Это утверждение следует из определения $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ как вероятности случайного события, состоящего в одновременном выполнении событий $(X_i < x_i)$, i = 1, 2, …, n.

2. Справедливы следующие равенства:

$$F_{\mathbf{X}}(\infty, \infty, ..., \infty) = 1, \;\; F_{\mathbf{X}}(-\infty, -\infty, ..., -\infty) = 0. \tag{3.3}$$

Здесь и далее используются следующие краткие обозначения:

$$F_{\mathbf{X}}(\infty, \infty, ..., \infty) = \lim_{x_1, x_2, ..., x_n \to \infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n),$$

$$F_{\mathbf{X}}(-\infty, -\infty, ..., -\infty) = \lim_{x_1, x_2, ..., x_n \to -\infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Равенства (3.3) следуют из того, что событие $\bigcap_{i=1}^{n}(X_i < \infty)$ является достоверным, а $\bigcap_{i=1}^{n}(X_i < -\infty)$ – невозможным.

Первое из равенств (3.3) отражает *условие нормировки* вероятности, распределенной на множестве возможных значений случайного вектора.

3. Пусть $\mathbf{X}$ – n-мерный случайный вектор. Тогда для любого k, $1 \le k \le n$, и произвольных значений $x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_n$ вероятность события $\left((a_k \le X_k < b_k) \bigcap_{i=1,\ i \ne k}^{n} (X_i < x_i) \right)$, $a_k < b_k$, определяется выражением:

$$P\left((a_k \le X_k < b_k) \bigcap_{i=1,\ i \ne k}^{n} (X_i < x_i) \right) = \tag{3.4}$$
$$= F_{\mathbf{X}}(x_1, ..., x_{k-1}, b_k, x_{k+1}, ..., x_n) - F_{\mathbf{X}}(x_1, ..., x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, ..., x_n).$$

Равенство (3.4) следует из представления случайного события $\left((X_k < b_k) \bigcap_{i=1,\ i \ne k}^{n} (X_i < x_i) \right)$ суммой двух несовместных событий:

$$\left((X_k < b_k) \bigcap_{i=1,\ i \ne k}^{n} (X_i < x_i) \right) =$$
$$= \left((X_k < a_k) \bigcap_{i=1,\ i \ne k}^{n} (X_i < x_i) \right) + \left((a_k \le X_k < b_k) \bigcap_{i=1,\ i \ne k}^{n} (X_i < x_i) \right)$$

и последующего применения формулы сложения вероятностей для несовместных событий.

Для $n = 2$ формула (3.4) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} &k = 1: P((a_1 \le X_1 < b_1) \bigcap (X_2 < x_2)) = F_{\mathbf{X}}(b_1, x_2) - F_{\mathbf{X}}(a_1, x_2), \\ &k = 2: P((X_1 < x_1) \bigcap (a_2 \le X_2 < b_2)) = F_{\mathbf{X}}(x_1, b_2) - F_{\mathbf{X}}(x_1, a_2). \end{aligned} \tag{3.5}$$

4. Рассмотрим для двумерной случайной величины $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2)$ случайное событие $E = ((a_1 \le X_1 < b_1) \bigcap (a_2 \le X_2 < b_2))$. Это случайное событие состоит в попадании случайной величины **X** в прямоугольник, заштрихованный на рис. 3.1, *б* прямой сеткой.

Вероятность события E определяется выражением:

$$\begin{aligned} P(E) = P((a_1 \le X_1 < b_1) \bigcap (a_2 \le X_2 < b_2)) = \\ = F_{\mathbf{X}}(b_1,\ b_2) - F_{\mathbf{X}}(b_1,\ a_2) - F_{\mathbf{X}}(a_1,\ b_2) + F_{\mathbf{X}}(a_1,\ a_2). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Для доказательства равенства (3.6) рассмотрим следующие случайные события, которые выделены на рис. 3.1, *б* разной штриховкой:

$$A = ((X_1 < a_1) \bigcap (X_2 < a_2)); \quad B = ((X_1 < b_1) \bigcap (X_2 < b_2));$$

$$C = ((a_1 \le X_1 < b_1) \bigcap (X_2 < a_2)); \quad D = ((X_1 < a_1) \bigcap (a_2 \le X_2 < b_2)).$$

Случайные события A, C, D и E несовместны и связаны равенством: $B = A + C + D + E$. Раскрывая вероятности событий A, B, C, D и E с использованием равенств (3.5) и применяя простейшие преобразования, получим равенство (3.6).

5. Вероятность попадания случайного вектора в прямоугольный параллелепипед, определенная в (3.6) для двумерного случайного вектора, может быть обобщена на случай вектора произвольной размерности n:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} (a_k \le X_k < b_k)\right) = \Delta_{x_1}^{a_1, b_1} \Delta_{x_2}^{a_2, b_2} \ldots \Delta_{x_n}^{a_n, b_n} F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{3.7}$$

где оператор $\Delta_x^{a,b} \varphi(x)$ определен выражением:

$$\Delta_x^{a,b} \varphi(x) = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Равенство (3.7) может быть установлено методом математической индукции.

6. Одномерная функция распределения вероятностей $F_{X_i}(x_i)$ координаты X_i случайного вектора **X** может быть получена из известной функции $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в соответствии с равенством:

$$F_{X_i}(x_i) = F_{\mathbf{X}}(\infty, \ldots, \infty, x_i, \infty, \ldots, \infty). \tag{3.8}$$

7. Для любого подвектора $\mathbf{X}' = \mathbf{col}(X_1, X_2, \ldots, X_m)$, $m < n$, вектора $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ справедливо равенство:

$$F_{\mathbf{X}'}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_m, \infty, \ldots, \infty). \tag{3.9}$$

Равенства (3.8) и (3.9) называют *условиями согласованности*.

8. Для любого k, $1 \le k \le n$,

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_{k-1}, -\infty, x_{k+1}, \ldots, x_n) = 0. \tag{3.10}$$

Утверждения (3.8) – (3.10) следуют непосредственно из определения n-мерной функции распределения вероятностей.

9. Функция распределения вероятностей непрерывна слева по каждому из своих аргументов:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to x_k - 0} F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \\ &= F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Равенство (3.11) объясняется тем, что в определении (3.1) функции распределения вероятностей $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ события $(X_k < x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, заданы строгими неравенствами.

10. Функция распределения вероятностей n-мерного случайного вектора не убывает по каждому из своих аргументов при фиксированных остальных:

$$\begin{aligned} &F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \le \\ &\le F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_{k-1}, b_k, x_{k+1}, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{3.12}$$

если $a_k < b_k$, $1 \le k \le n$.

Доказательство этого свойства использует полученное ранее равенство (3.4) и принципиально не отличается от доказательства свойства неубывания одномерной функции распределения вероятностей (§ 12, формула (2.6)).

Контрольные вопросы и задачи

1. Что называется случайным вектором?
2. Дайте определение функции распределения вероятностей случайного вектора.
3. Приведите геометрическую иллюстрацию события, вероятность которого представляет собой значение функции распределения вероятностей двумерного случайного вектора.

4. Почему функция распределения вероятностей является ограниченной функцией?

5. Чему равны значения функции распределения вероятностей при значениях всех аргументов $+\infty$ и $-\infty$?

6. Напишите выражение, определяющее вероятность попадания координаты X_k n-мерного случайного вектора **X** в интервал $[a_k, b_k)$ и одновременном выполнении неравенств $(X_i < x_i)$, $i \neq k$, для всех других координат.

7. Ответьте на предыдущий вопрос при условии $n = 2$ и дайте геометрическую иллюстрацию к ответу.

8. Как выразить с помощью функции распределения вероятностей двумерного случайного вектора **X** вероятность его попадания в прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными осям координат? Докажите справедливость приведенного равенства.

9. Как можно получить функцию распределения вероятностей одной координаты X_k n-мерного случайного вектора, если известна его функция распределения вероятностей?

10. Известна функция распределения вероятностей $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, x_3)$ случайного вектора размерности 3. Напишите равенство, позволяющее определить совместную функцию распределения вероятностей координат X_1 и X_3.

11. Запишите в форме неравенства свойство неубывания функции распределения вероятностей случайного вектора по каждому из своих аргументов при фиксированных других? Приведите доказательство.

§ 21. Случайный вектор дискретного типа. Табличное описание распределения вероятностей

Случайный вектор $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ относится к *дискретному типу*, если множество его возможных значений, имеющих ненулевые вероятности реализации, конечно или счетно. В этом случае каждая координата X_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, вектора **X** принадлежит конечному или счетному множеству $\mathcal{X}_k$, а множество $\mathcal{X}$ возможных значений случайного вектора представляет собой все комбинации возможных значений его координат: $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \ldots \times \mathcal{X}_n$.

Введем обозначение x_{k,i_k} для значений случайной величины X_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, $i_k = 1, 2, \ldots$. Если случайная величина X_k имеет конечное множество возможных значений N_k, то $i_k = 1, 2, \ldots, N_k$.. В этом случае множество значений координат случайного вектора удобно представить таблицей (табл. 3.1). Длина каждой строки таблицы (количество затемненных ячеек в строке) определяется числом возможных значений соответствующей случайной величины.

Таблица 3.1

Значения координат n-мерного случайного вектора

Случайная величина	Значения						
X_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	$\cdots$	x_{1k}	$\cdots$	x_{1,N_1}
X_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	$\cdots$	x_{2,N_2}		
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
X_k	x_{k1}	x_{k2}	x_{k3}	$\cdots$	$\cdots$	x_{k,N_k}	
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
X_n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	$\cdots$	x_{n,N_n}		

С использованием принятой системы обозначений произвольное значение случайного вектора x записывается в следующей форме: $x = (x_{1,i_1}, x_{2,i_2}, \ldots, x_{n,i_n})$. Закон распределения вероятностей дискретного случайного вектора полностью определяется заданием вероятностей

$$p_{\mathbf{X}}(i_1, i_2, \ldots, i_n) = P((X_1 = x_{1,i_1}) \bigcap (X_2 = x_{2,i_2}) \bigcap \ldots \bigcap (X_n = x_{n,i_n})) =$$

$$= P(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k = x_{k,i_k})), \qquad (3.13)$$

где $i_k = 1,2, \ldots, N_k$.; $k = 1, 2, \ldots, n$. На основании известных вероятностей $p_{\mathbf{X}}(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ может быть рассчитана функция распределения вероятностей $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для случайного вектора **X** дискретного типа. Согласно определению (3.1)

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i < x_i)) =$$

$$= \sum_{\substack{i_1=1\\ x_{1,i_1}<x_1}}^{N_1} \sum_{\substack{i_2=1\\ x_{2,i_2}<x_2}}^{N_2} \dots \sum_{\substack{i_n=1\\ x_{n,i_n}<x_n}}^{N_n} p_{\mathbf{X}}(i_1, i_2, \dots, i_n). \tag{3.14}$$

Использование функции Хевисайда (см. § 13) позволяет упростить выражение (3.14):

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \tag{3.15}$$

$$= \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \dots \sum_{i_n=1}^{N_n} p_{\mathbf{X}}(i_1, i_2, \dots, i_n) 1(x_1 - x_{1,i_1}) 1(x_2 - x_{2,i_2}) \dots 1(x_n - x_{n,i_n}).$$

Условие нормировки (3.3) для дискретного распределения вероятностей записывается в форме следующего равенства:

$$\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \dots \sum_{i_n=1}^{N_n} p_{\mathbf{X}}(i_1, i_2, \dots, i_n) = 1. \tag{3.16}$$

Зная распределение вероятностей $p_{\mathbf{X}}(i_1, i_2, \dots, i_n)$ n-мерного случайного вектора, можно найти распределение вероятностей произвольного подвектора **X**' размерности $m < n$. В частности,

$$p_{\mathbf{X}'}(i_1, i_2, \dots, i_m) = P((X_1 = x_{1,i_1}) \bigcap (X_2 = x_{2,i_2}) \bigcap \dots \bigcap (X_m = x_{m,i_m})) =$$

$$= \sum_{i_{m+1}=1}^{N_{m+1}} \cdots \sum_{i_n=1}^{N_n} p_{\mathbf{X}}(i_1, i_2, \dots, i_m, i_{m+1}, \dots, i_n), \tag{3.17'}$$

$$p_{X_m}(i_m) = P(X_m = x_{m,i_m}) =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{N_1} \dots \sum_{i_{m-1}=1}^{N_{m-1}} \sum_{i_{m+1}=1}^{N_{m+1}} \cdots \sum_{i_n=1}^{N_n} p_{\mathbf{X}}(i_1, i_2, \dots, i_n). \tag{3.17''}$$

Формулы (3.17') и (3.17'') соответствуют *условиям согласованности* (3.9), используемым для дискретных многомерных распределений при их описании функцией $p_{\mathbf{X}}(i_1, i_2, \dots, i_n)$.

В частном случае двумерного случайного вектора $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2)$ распределения вероятностей его координат X_1 и X_2

$$p'(i_1) = P(X_1 = x_{1,i_1}), \quad p''(i_2) = P(X_2 = x_{2,i_2})$$

рассчитываются по следующим формулам, аналогичным (3.17):

$$p'(i_1)=\sum_{i_2=1}^{N_2} p(i_1,\, i_2)\,,\quad p''(i_2)=\sum_{i_1=1}^{N_1} p(i_1,\, i_2)\,. \qquad (3.18)$$

Распределения вероятностей $p'(i_1)$ и $p''(i_2)$, называемые в теории вероятностей *маргинальными распределениями* (распределения любого подвектора случайного вектора), удобно иллюстрируются в таблице (табл. 3.2). В таблице приняты следующие обозначения:

$$p_{i_1,i_2}=p(i_1,\, i_2);\quad p'_{i_1}=p'(\,i_1)=\sum_{i_2=1}^{N_2} p_{i_1,i_2}\,;$$
$$p''_{i_2}=p''(i_2)=\sum_{i_1=1}^{N_1} p_{i_1,i_2}\,. \qquad (3.19)$$

Таблица 3.2

Дискретное распределение вероятностей
двумерного случайного вектора

X_1	X_2				p'
	x_{21}	x_{22}	…	x_{2,N_2}	
x_{11}	p_{11}	p_{12}	…	p_{1,N_2}	p'_1
x_{12}	p_{21}	p_{22}	…	p_{2,N_2}	p'_2
…	…	…	…	…	…
x_{1,N_1}	$p_{N_1,1}$	$p_{N_1,2}$	…	p_{N_1,N_2}	p'_{N_1}
p''	p''_1	p''_2	…	p''_{N_2}	$\sum=1$

Маргинальные распределения p' и p'' случайных величин X_1 и X_2 представлены соответственно в крайнем правом столбце и нижней строке табл. 3.2. Согласно формуле (3.19) значения $p'_{i_1},\ i_1=1,\, 2,\, ...,\, N_1$, и $p''_{i_2},\ i_2=1,\, 2,\, ...,\, N_2$, получаются суммированием элементов соответствующих строк или столбцов матрицы. Сумма элементов последнего столбца табл. 3.2 равна единице, что отражает свойство нормировки маргинального распределения p'. По аналогичной причине равна единице сумма элементов последней строки табл. 3.2, что отражено записью $\sum=1$.

Пусть $D \subset \mathcal{X}$ представляет собой некоторое подмножество значений вектора **X**. Вероятность $p_D = P(\mathbf{X} \in D)$ рассчитывается суммированием вероятностей $p_{\mathbf{X}}(i_1, i_2, ..., i_n)$ для тех значений вектора **X**, которые принадлежат *D*:

$$p_D = \sum_{\substack{i_1=1 \\ (x_{1,i_1},}}^{N_1} \sum_{\substack{i_2=1 \\ x_{2,i_2}, \,...,}}^{N_2} \cdots \sum_{\substack{i_n=1 \\ x_{n,i_n}) \in D}}^{N_n} p_{\mathbf{X}}(i_1, i_2, ..., i_n). \tag{3.20}$$

Пример 3.1. В табл. 3.3 представлены вероятности $p_{i_1,i_2} = p(i_1, i_2)$ значений двумерного случайного вектора $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2)$. Случайная величина X_1 может принимать значения 0 и 2, а X_2 – значения –1, 0 и 1.

Таблица 3.3

Распределение вероятностей двумерного случайного вектора

X_1	X_2		
	$x_{21} = -1$	$x_{22} = 0$	$x_{23} = 1$
$x_{11} = 0$	$p_{11} = 0{,}05$	$p_{12} = 0{,}15$	$p_{13} = 0{,}25$
$x_{12} = 2$	$p_{21} = 0{,}10$	$p_{22} = 0{,}15$	$p_{23} = 0{,}30$

Требуется рассчитать двумерную функцию распределения вероятностей $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)$, а также одномерные распределения $F_{X_1}(x_1)$ и $F_{X_2}(x_2)$ координат случайного вектора.

Расчет функции распределения вероятностей $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)$ производится в соответствии с формулой (3.14). Для дискретной случайной величины функция $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)$ является кусочно-постоянной. На рис. 3.2 приведена иллюстрация к результату расчета. Области постоянных значений функции отмечены штриховкой с указанием значений функции. Все возможные значения вектора **X** выделены на рис. 3.2 точками. Результат расчета демонстрирует неубывание функции $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)$ по каждому из аргументов при фиксированном другом.

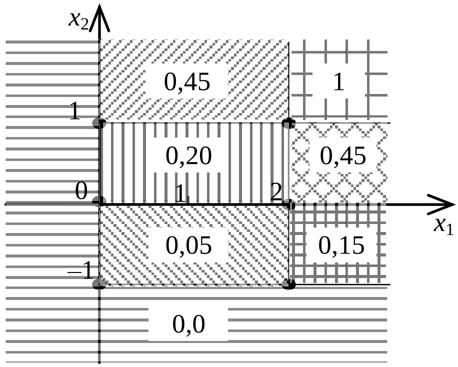


Рис. 3.2. Иллюстрация к расчету функции распределения вероятностей $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ случайного вектора

Одномерные распределения $F_{X_1}(x_1)$ и $F_{X_2}(x_2)$ координат случайного вектора $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2)$ могут быть рассчитаны с использованием формул (3.19) для маргинальных распределений $p'_{i_1}, i_1 = 1, 2,$ и $p''_{i_2}, i_2 = 1, 2, 3$. Результат расчета распределений p' и p'' приведен в табл. 3.4.

Таблица 3.4

Маргинальные распределения p' и p''

Распределение p'			Распределение p''			
i_1	1	2	i_2	1	2	3
x_{1,i_1}	0	2	x_{2,i_2}	–1	0	1
p'_{i_1}	0,45	0,55	p''_{i_2}	0,15	0,3	0,55

Функции распределения вероятностей $F_{X_1}(x_1)$ и $F_{X_2}(x_2)$, являющиеся накопленными вероятностями распределений p' и p'' (см. § 13), описываются следующими выражениями:

$$F_{X_1}(x_1) = 0{,}45 \cdot 1(0 - x_1) + 0{,}55 \cdot 1(2 - x_1),$$
$$F_{X_2}(x_2) = 0{,}15 \cdot 1(-1 - x_2) + 0{,}3 \cdot 1(0 - x_2) + 0{,}55 \cdot 1(1 - x_2). \quad (3.21)$$

Тот же результат может быть получен на основании функции двумерного распределения $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)$ (см. рис. 3.2) с использованием условия согласованности (3.9). В условиях примера условие согласованности приводит к следующим равенствам:

$$F_{X_1}(x_1) = F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)\Big|_{x_2 > 1},$$

$$F_{X_2}(x_2) = F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)\Big|_{x_1 > 2}. \qquad (3.22)$$

Принимая во внимание полученные значения функции $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)$ (см. рис. 3.2), несложно убедиться, что результаты расчетов по формулам (3.21) и (3.22) совпадают.

Контрольные вопросы и задачи

1. Что называется случайным вектором дискретного типа? Дайте определение.
2. Какая система обозначений используется для возможных значений координат случайного вектора дискретного типа?
3. Как в принятой системе обозначений записывается одно произвольное значение случайного вектора из множества возможных значений?
4. Дайте определение распределения вероятностей $p_{\mathbf{X}}(i_1, i_2, ..., i_n)$. Объясните смысл переменных $i_1, i_2, ..., i_n$.
5. Как можно представить распределение вероятностей двумерного случайного вектора в форме таблицы?
6. Приведите расчетную формулу для функции распределения вероятностей $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)$, использующую распределение вероятностей $p_{\mathbf{X}}(i_1, i_2, ..., i_n)$.
7. Запишите условие нормировки вероятностей $p_{\mathbf{X}}(i_1, i_2, ..., i_n)$.
8. Что называется маргинальным распределением случайного вектора?
9. Каким выражением определяется распределение вероятностей для первой координаты двумерного случайного вектора, если известно распределение $p_{\mathbf{X}}(i_1, i_2)$?
10. Напишите расчетную формулу, позволяющую определить распределение вероятностей любого подвектора дискретного

n-мерного случайного вектора с известным распределением $p_{\mathbf{X}}(i_1, i_2, ..., i_n)$.

11. Как для n-мерной дискретной случайной величины **X** рассчитать вероятность реализации значения, принадлежащего подмножеству D множества $\mathcal{X}$ ее возможных значений?

12. Функция распределения вероятностей двумерного случайного вектора **X** дискретного типа представлена в табл. 3.5.

Таблица 3.5

Функция распределения вероятностей случайного вектора дискретного типа

X_1	X_2			
	$x_2 \le 1$	$1 < x_2 \le 3$	$3 < x_2 \le 5$	$5 < x_2$
$x_1 \le 2$	0	0	0	0
$2 < x_1 \le 4$	0	0,15	0,25	0,5
$4 < x_1$	0	0,25	0,75	1

На основании данной таблицы:

а) определите множество возможных значений координат X_1 и X_2 случайного вектора;

б) постройте таблицу вероятностей $p_{i_1,i_2} = p(i_1, i_2)$;

в) найдите одномерные распределения p'_{i_1} и p''_{i_2}.

§ 22. Случайный вектор непрерывного типа. Плотность распределения вероятностей случайного вектора

Случайный вектор непрерывного типа является обобщением понятия одномерной непрерывной случайной величины (§ 14). Случайный вектор **X** размерности n относится к непрерывному типу, если его функция распределения вероятностей $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)$ непрерывна в n-мерном пространстве и существует такая неотрицательная функция $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)$, называемая плотностью распределения вероятностей, что

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} ... \int_{-\infty}^{x_n} f_{\mathbf{X}}(s_1, s_2, ..., s_n)\, ds_1\, ds_2 ... ds_n . \quad (3.23)$$

Применяя оператор $\dfrac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}$ к левой и правой частям равенства (3.23), получим следующее выражение для $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)$:

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\partial^n F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1 \, \partial x_2 \ldots \partial x_n}. \qquad (3.24)$$

Воспользуемся определением производной порядка n функции $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)$:

$$\frac{\partial^n F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1 \, \partial x_2 \ldots \partial x_n} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ i=1,2,...,n}} \frac{1}{\Delta x_1 \, \Delta x_2 \ldots \Delta x_n} \Delta_{x_n}^{x_n, x_n + \Delta x_n} \Delta_{x_{n-1}}^{x_{n-1}, x_{n-1} + \Delta x_{n-1}} \times \ldots \times$$

$$\times \ldots \times \Delta_{x_1}^{x_1, x_1 + \Delta x_1} F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n) = \qquad (3.25)$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ i=1,2,...,n}} \frac{1}{\Delta x_1 \, \Delta x_2 \ldots \Delta x_n} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (x_i \le X_i < x_i + \Delta x_i) \right).$$

Здесь использован оператор $\Delta_x^{a,b} \varphi(x) = \varphi(b) - \varphi(a)$, введенный в § 20, и свойство (3.7) функции распределения вероятностей случайного вектора. На основании равенств (3.24) и (3.25) можно записать следующее выражение для плотности распределения вероятностей случайного вектора непрерывного типа:

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n) =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ i=1,2,...,n}} \frac{1}{\Delta x_1 \, \Delta x_2 \ldots \Delta x_n} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (x_i \le X_i < x_i + \Delta x_i) \right). \qquad (3.26)$$

Полученное выражение позволяет интерпретировать плотность распределения вероятностей $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)$ как среднюю, т.е. приходящуюся на единицу объема, вероятность попадания случайного вектора **X** в окрестность точки $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Эта интерпретация и объясняет название функции $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)$ – плотность распределения вероятностей.

Из выражения (3.26) следует приближенная формула:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(x_i \le X_i < x_i + \Delta x_i)\right) \approx f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)\Delta x_1 \Delta x_2 \dots \Delta x_n, \qquad (3.27)$$

которая обобщает свойство (2.21) (см. § 14) скалярных случайных величин непрерывного типа.

Рассмотрим ряд дополнительных свойств плотности распределения вероятностей $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)$.

1. Вероятность попадания случайного вектора **X** в произвольную квадрируемую область D, для которой $S_D = \iint\limits_{(x_1, x_2, ..., x_n) \in D} \dots \int dx_1\, dx_2\, \dots\, dx_n \ne 0$, определяется выражением:

$$P(\mathbf{X} \in D) = \iint\limits_{(x_1, x_2, ..., x_n) \in D} \dots \int f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n. \qquad (3.28)$$

Выражение (3.28) выводится с использованием формулы (3.27).

2. Вероятность попадания случайного вектора **X** в прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными осям координат, определяется выражением:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n}(a_k \le X_k < b_k)\right) = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\dots\int_{a_n}^{b_n} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n. \qquad (3.29)$$

Формула (3.29) является частным случаем (3.28).

3. Плотность распределения вероятностей $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)$ удовлетворяет условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n = 1. \qquad (3.30)$$

Равенство (3.30) следует из условия нормировки для функции $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)$ в форме (3.3) и определения (3.23).

4. Одномерная плотность распределения вероятностей $f_{X_m}(x_m)$ координаты X_m случайного вектора **X** может быть полу-

чена при известной функции $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)$ в соответствии с равенством:

$$f_{X_m}(x_m) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1 ... dx_{m-1}\, dx_{m+1} ... dx_n. \tag{3.31}$$

Утверждение (3.31) следует из свойства (3.8) (см. § 20) функции $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)$ и определения (3.23).

В частности, для $n = 2$ плотности распределения $f_{X_1}(x_1)$ и $f_{X_2}(x_2)$ координат X_1 и X_2 случайного вектора $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2)$ определяются выражениями:

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)\, dx_2\,; \quad f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)\, dx_1\,. \tag{3.32}$$

Равенство (3.31) обобщается на любой подвектор случайного вектора **X**.

5. Для любого подвектора $\mathbf{X}' = \mathbf{col}(X_1, X_2, \ldots, X_m)$, $m < n$, вектора $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ справедливо равенство:

$$f_{\mathbf{X}'}(x_1, x_2, ..., x_m) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_{m+1} ... dx_n\,. \tag{3.33}$$

Утверждение (3.33) соответствует свойству (3.9) функции $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)$ (см. § 20).

Равенства (3.31) и (3.33), как и соответствующие равенства (3.8) и (3.9) для функции $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)$, называются *условиями согласованности*, записанными для функции плотности вероятности $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)$. Равенство (3.33) является полным аналогом равенства (3.17') для n-мерного распределения дискретного типа.

6. Если область Q распределения вероятностей случайного вектора **X** непрерывного типа не является квадрируемой ($S_Q = 0$), то $P(\mathbf{X} \in Q) = 0$.

В частности, для случайного вектора, распределенного в плоскости (X_1, X_2), вероятность его попадания на произвольную линию равна нулю.

Рассмотрим еще одно очевидное свойство функции плотности $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)$, вытекающее из ее интегрируемости (3.23).

7. Для любого $1 \le m \le n$ справедливо равенство:

$$\lim_{x_1, x_2, ..., x_m \to -\infty} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 .$$

Пример 3.2. Рассмотрим двумерный случайный вектор $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2)$, плотность распределения вероятностей которого $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)$ постоянна в некоторой квадрируемой области Q:

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \begin{cases} c, \text{ если } x \in Q; \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases} \tag{3.34}$$

Распределение (3.34) называется *равномерным в области* Q.

Для определения значения константы c применим условие нормировки (3.30):

$$1 = \iint_{x \in Q} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = c \iint_{x \in Q} dx_1\, dx_2 = c\, S_Q ,$$

откуда следует, что $c = 1/S_Q$. Поскольку область Q является квадрируемой, площадь $S_Q \ne 0$.

Допустим, что область Q является прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат: $(-1 \le x_1 \le 1)$, $(-2 \le x_2 \le 2)$. Тогда $S_Q = 8$ и $c = 1/8$, так что плотность равномерного распределения описывается выражением:

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1/8, \text{ если } x_1 \in [-1; 1] \text{ и } x_2 \in [-2; 2]; \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases} \tag{3.35}$$

Выражения для плотностей распределения $f_{X_1}(x_1)$ и $f_{X_2}(x_2)$ выводятся с использованием свойства (3.32):

$$f_{X_1}(x_1) = \begin{cases} 1/2, \text{ если } x_1 \in [-1; 1]; \\ 0, \text{ иначе,} \end{cases} \tag{3.36}$$

$$f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} 1/4, \text{ если } x_2 \in [-2; 2]; \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases} \tag{3.37}$$

Полученные выражения свидетельствуют о равномерном распределении координат X_1 и X_2. Таким образом, если случайный вектор $\mathbf{X}$ = $\mathbf{col}(X_1, X_2)$ распределен равномерно в прямоугольнике со сторонами, параллельными осям координат, то и координаты случайного вектора распределены равномерно (см. формулу (2.17), § 14).

Найдем выражение для функции распределения вероятностей $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)$, используя определение (3.23):

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \\ = \begin{cases} 0, \text{ если } x_1 \le -1, -\infty < x_2 < \infty \\ \qquad\qquad \text{или } -\infty < x_1 < \infty, x_2 \le -2; \\ 1/8\,(x_1+1)(x_2+2), \text{ если } -1 < x_1 \le 1, -2 < x_2 \le 2; \\ 1/2\,(x_1+1), \text{ если } -1 < x_1 \le 1, x_2 > 2; \\ 1/4\,(x_2+2), \text{ если } x_1 > 1, -2 < x_2 \le 2; \\ 1, \text{ если } x_1 > 1, x_2 > 2. \end{cases} \tag{3.38}$$

Определим одномерные функции распределения $F_{X_1}(x_1)$ и $F_{X_2}(x_2)$ с использованием формул (3.8), (3.9):

$$F_{X_1}(x_1) = \begin{cases} 0, \text{ если } x_1 \le -1; \\ 1/2\,(x_1+1), \text{ если } -1 < x_1 \le 1; \\ 1, \text{ если } x_1 > 1, \end{cases} \tag{3.39}$$

$$F_{X_2}(x_2) = \begin{cases} 0, \text{ если } x_2 \le -2; \\ 1/4\,(x_2+2), \text{ если } -2 < x_2 \le 2; \\ 1, \text{ если } x_2 > 2. \end{cases} \tag{3.40}$$

Пример 3.3. Плотность распределения вероятностей двумерного случайного вектора $\mathbf{X}$ = $\mathbf{col}(X_1, X_2)$ задана выражением

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \begin{cases} c\,(x_1+x_2), \text{ если } x_1, x_2 \in [0;\, 1]; \\ 0, \text{ иначе}, \end{cases} \tag{3.41}$$

где c – неизвестная константа. Таким образом, случайный вектор распределен в квадрате Q: $x_1, x_2 \in [0;\, 1]$. Требуется вычислить значение константы c и определить плотности распределений случайных величин X_1 и X_2.

Для вычисления значения константы c воспользуемся условием нормировки (3.30): $1 = c\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (x_1 + x_2)\ dx_1\, dx_2 = c$.

Расчет плотности распределений $f_{X_1}(x_1)$ и $f_{X_2}(x_2)$ по формулам (3.32) с учетом $c = 1$ приводит к следующему результату:

$$f_{X_1}(x_1) = \begin{cases} 0, \text{ если } x_1 \le 0,\ x_1 > 1; \\ (x_1 + 1/2), \text{ если } 0 < x_1 \le 1, \end{cases} \tag{3.42}$$

$$f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} 0, \text{ если } x_2 \le 0,\ x_2 > 1; \\ (x_2 + 1/2), \text{ если } 0 < x_2 \le 1. \end{cases} \tag{3.43}$$

Пример 3.4. Для плотности распределения (3.41), рассмотренной в примере 3.3, рассчитаем вероятность попадания случайного вектора $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2)$ в квадрат Q': $x_1,\ x_2 \in [0;\ 0{,}5]$.

Согласно формуле (3.29)

$$P((0 \le X_1 < 0{,}5) \bigcap (0 \le X_2 < 0{,}5)) = \int\limits_0^{0{,}5}\int\limits_0^{0{,}5} (x_1 + x_2)\ dx_1\, dx_2 = 0{,}125.$$

Пример 3.5. Определим функцию распределения вероятностей $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)$ для случайного вектора, рассмотренного в примере 3.3.

На основании определения случайного вектора непрерывного типа (3.23)

$$F_{\mathbf{X}}(x_1,\ x_2) = \int\limits_{-\infty}^{x_1}\int\limits_{-\infty}^{x_2} f_{\mathbf{X}}(s_1,\ s_2)\ ds_1\, ds_2 =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ если } x_1 \le 0 \text{ или } x_2 \le 0; \\ 1/2\ (x_1 x_2^2 + x_2 x_1^2), \text{ если } x_1 \in (0;\ 1],\ x_2 \in (0; 1]; \\ 1/2\ (x_1 + x_1^2), \text{ если } x_1 \in (0;\ 1],\ x_2 > 1; \\ 1/2\ (x_2 + x_2^2), \text{ если } x_1 > 1,\ x_2 \in (0;\ 1]; \\ 1, \text{ если } x_1 > 1,\ x_2 > 1. \end{cases} \tag{3.44}$$

Рассчитаем вероятность попадания случайного вектора $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2)$ в квадрат Q': $(x_1,\ x_2 \in [0;\ 0{,}5])$, используя свойство (3.6) функции распределения вероятностей (3.39):

$$P((0 \le X_1 < 0{,}5) \bigcap (0 \le X_2 < 0{,}5)) =$$
$$= F_{\mathbf{X}}(0{,}5;\ 0{,}5) - F_{\mathbf{X}}(0{,}5;\ 0) - F_{\mathbf{X}}(0;\ 0{,}5) + F_{\mathbf{X}}(0;\ 0).$$

Вычисления приводят к результату, совпадающему с полученным ранее с помощью известной плотности распределения вероятностей: $P((0 \le X_1 < 0{,}5) \bigcap (0 \le X_2 < 0{,}5)) = F_{\mathbf{X}}(0{,}5;\ 0{,}5) = 0{,}125.$

Применяя свойство (3.8) к выражению (3.44), получим одномерные функции распределения вероятностей $F_{X_1}(x_1)$ и $F_{X_2}(x_2)$:

$$F_{X_1}(x_1) = F_{\mathbf{X}}(x_1,\ \infty) = F_{\mathbf{X}}(x_1,\ 1) =$$
$$= \begin{cases} 0, \text{ если } x_1 \le 0; \\ 1/2\ (x_1 + x_1^2), \text{ если } x_1 \in (0;\ 1]; \\ 1, \text{ если } x_1 > 1, \end{cases} \tag{3.45}$$

$$F_{X_2}(x_2) = F_{\mathbf{X}}(\infty,\ x_2) = F_{\mathbf{X}}(1,\ x_2) =$$
$$= \begin{cases} 0, \text{ если } x_2 \le 0; \\ 1/2\ (x_2 + x_2^2), \text{ если } x_2 \in (0;\ 1]; \\ 1, \text{ если } x_2 > 1. \end{cases} \tag{3.46}$$

Полученные выражения соответствуют свойствам одномерных функций распределения вероятностей случайных величин: они являются неубывающими, непрерывными слева (в данном примере – непрерывными) функциями, принимающими значения на отрезке [0; 1] (§ 12).

Контрольные вопросы и задачи

1. Укажите условия, при которых n-мерный случайный вектор относится к непрерывному типу.
2. Что послужило основанием для того, чтобы назвать функцию $f_{\mathbf{X}}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ плотностью распределения вероятностей случайного вектора?

3. Как можно с использованием функции $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)$ приближенно оценить вероятность попадания случайного вектора в окрестность точки $(x_1, x_2, ..., x_n)$? Приведите обоснование к ответу.

4. Как определить плотность распределения $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)$, если известна функция распределения вероятностей $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)$ случайного вектора?

5. Как рассчитать вероятность попадания случайного вектора $\mathbf{X} = \mathbf{col}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в произвольную квадрируемую область D, если известна его плотность распределения вероятностей $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)$?

6. Какой формулой определяется вероятность попадания случайного вектора $\mathbf{X} = \mathbf{col}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в n-мерный прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными осям координат?

7. Чему равна вероятность попадания двумерного случайного вектора непрерывного типа на произвольную линию в плоскости (X_1, X_2)?

8. Напишите условие нормировки распределения вероятностей, которому удовлетворяет функция $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)$.

9. В чем состоит условие согласованности распределений вероятностей, выраженное через n-мерную функцию плотности $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)$?

10. Напишите условия согласованности для частного случая распределения двумерного случайного вектора непрерывного типа.

11. Чему равна функция $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)$, если хотя бы один из ее аргументов стремится к $-\infty$? Приведите доказательство.

12. Какое распределение n-мерного случайного вектора непрерывного типа называется равномерным?

13. Двумерный случайный вектор непрерывного типа распределен равномерно в прямоугольнике со сторонами, параллельными осям координат. Каким является закон распределения вероятностей его координат?

14. Случайный вектор $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2)$ принимает значения в квадрате Q: $(x_1, x_2 \in [0;\ 2])$ и имеет следующую плотность распределения вероятностей:

$$f_{\mathbf{X}}(x_1,\, x_2) = \begin{cases} c\ (x_1 x_2 + x_2^2), \text{ если } x_1,\, x_2 \in [0;\, 2]; \\ 0, \text{ иначе}, \end{cases}$$

где c – неизвестная константа. Определите значение константы c и рассчитайте значения вероятностей следующих событий:

$$A = ((0 \le X_1 < 1) \bigcap (0 \le X_2 < 1)); \quad B = (0 \le X_1 < 1); \quad C = (0 \le X_2 < 1).$$

Напишите выражения для $F_{\mathbf{X}}(x_1,\, x_2)$, $F_{X_1}(x_1)$, $F_{X_2}(x_2)$, $f_{X_1}(x_1)$ и $f_{X_2}(x_2)$.

§ 23. Условные распределения вероятностей. Независимость случайных величин

Рассмотрим случайную величину X_1, для которой известна функция распределения вероятностей $F_{X_1}(x_1)$. Допустим, что некоторое событие A содержательно связано со случайной величиной X_1, так что появление или непоявление события A влияет на распределение вероятностей случайной величины X_1. В этом случае вводят *условное распределение вероятностей* случайной величины X_1 относительно события A (в предположении, что событие A имело место), которое обозначают $F_{X_1|A}(x_1)$:

$$F_{X_1|A}(x_1) = P(X_1 < x_1 \,|\, A).$$

Распределение $F_{X_1}(x_1)$, не связанное ни с какими условиями, уместно назвать *безусловным*. Например, на коэффициент упругости стали (случайная величина X_1) влияет время ее выдержки при отжиге в технологическом процессе (случайная величина X_2). В связи с этим известное значение $X_2 = x_2$ (событие A) предоставляет дополнительную информацию для коррекции распределения вероятностей случайной величины X_1. Можно предположить, что в этом примере безусловное распределение $F_{X_1}(x_1)$ не совпадает с условным распределением относительно события $X_2 = x_2$:

$$F_{X_1}(x_1) \ne F_{X_1|X_2}(x_1 \,|\, X_2 = x_2).$$

Заметим, что аргументом условной функции распределения вероятностей $F_{X_1|X_2}(x_1|X_2 = x_2)$ является x_1, в то время как x_2 – параметр распределения. В теории вероятностей принята краткая нотация для условной функции распределения: $F_{X_1|X_2}(x_1|x_2)$.

Пусть известно совместное распределение вероятностей $F_{\mathbf{X}}(x_1,\, x_2)$ случайных величин X_1 и X_2 непрерывного типа. Определим условную функцию распределения $F_{X_1|X_2}(x_1|x_2)$ следующим предельным выражением:

$$F_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \lim_{\Delta x_2 \to 0} P(X_1 < x_1 \,|\, x_2 \le X_2 < x_2 + \Delta x_2). \tag{3.47}$$

Применим для преобразования правой части выражения (3.47) известные свойства условных вероятностей событий и совместной плотности распределения $f_{\mathbf{X}}(x_1,\, x_2)$:

$$F_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{P((X_1 < x_1) \bigcap (x_2 \le X_2 < x_2 + \Delta x_2))}{P(x_2 \le X_2 < x_2 + \Delta x_2)} =$$

$$= \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{\int\limits_{-\infty}^{x_1} ds_1 \int\limits_{x_2}^{x_2+\Delta x_2} f_{X_1,X_2}(s_1,\, s_2)\, ds_2}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} ds_1 \int\limits_{x_2}^{x_2+\Delta x_2} f_{X_1,X_2}(s_1,\, s_2)\, ds_2} = \tag{3.48}$$

$$= \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{\int\limits_{-\infty}^{x_1} f_{X_1,X_2}(s_1,\, x_2)\, \Delta x_2\, ds_1}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2}(s_1,\, x_2)\, \Delta x_2\, ds_1} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{x_1} f_{X_1,X_2}(s_1,\, x_2)\, ds_1}{f_{X_2}(x_2)}.$$

Условная плотность распределения $f_{X_1|X_2}(x_1|x_2)$ по аналогии с (2.16) и (3.24) связана с функцией $F_{X_1|X_2}(x_1|x_2)$ равенством:

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{\partial F_{X_1|X_2}(x_1|x_2)}{\partial x_1}.$$

После дифференцирования выражения (3.48) получим следующий результат:

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\int\limits_{-\infty}^{x_1} f_{X_1,X_2}(s_1, x_2)\, ds_1}{f_{X_2}(x_2)} = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}.$$

Таким образом, получено следующее выражение:

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1|X_2}(x_1|x_2)\, f_{X_2}(x_2). \qquad (3.49)$$

Справедливо также и выражение:

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = f_{X_2|X_1}(x_2|x_1)\, f_{X_1}(x_1). \qquad (3.50)$$

Можно обобщить равенства (3.49), (3.50) на случай n-мерного случайного вектора $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, который представлен своими подвекторами $\mathbf{X}'$ и $\mathbf{X}''$:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{col}(X_1, X_2, \ldots, X_m),\ \mathbf{X}'' = \mathbf{col}(X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots, X_n),$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{col}(\mathbf{X}'^{\mathrm{T}}, \mathbf{X}''^{\mathrm{T}}).$$

Для этого случая справедливо равенство:

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= f_{X_1,X_2,\ldots,X_m|X_{m+1},X_{m+2},\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_m \mid x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n) \times$$

$$\times\, f_{X_{m+1},X_{m+2},\ldots,X_n}(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n). \qquad (3.51)$$

Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называются *независимыми*, если для любых областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$ числовой оси события $(X_1 \in D_1)$, $(X_2 \in D_2)$, …, $(X_n \in D_n)$ являются независимыми в совокупности, т.е. выполняется равенство (см. (1.42), § 8):

$$P((X_1 \in D_1) \cap (X_2 \in D_2) \cap \ldots \cap (X_n \in D_n)) =$$

$$= P(X_1 \in D_1)\, P(X_2 \in D_2) \ldots P(X_n \in D_n). \qquad (3.52)$$

В частности, если области D_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, таковы, что событие $X_k \in D_k$ состоит в выполнении условия $X_k < x_k$, то для независимых событий выполняется равенство:

$$P((X_1 < x_1) \cap (X_2 < x_2) \cap \ldots \cap (X_n < x_n)) =$$

$$= P(X_1 < x_1)\, P(X_2 < x_2) \ldots P(X_n < x_n). \qquad (3.53)$$

Равенство (3.53) означает следующее свойство функции распределения вероятностей $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1)\, F_{X_2}(x_2) \ldots F_{X_n}(x_n). \qquad (3.54)$$

Отсюда следует аналогичное свойство плотности распределения вероятностей для независимых случайных величин:

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \ldots f_{X_n}(x_n). \quad (3.55)$$

Выполнение равенств (3.54), (3.55) для любых значений $x_1, x_2, ..., x_n$ является необходимым и достаточным условием независимости случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Рассмотрим равенство (3.55) для двух независимых случайных величин ($n = 2$):

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2). \quad (3.56)$$

С другой стороны, плотность распределения $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)$ может быть представлена выражениями (3.49), (3.50). Сравнение выражения (3.56) с общим представлением плотности распределения (3.49), (3.50) приводит к выводу, что в случае независимости случайных величин X_1 и X_2 справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} &f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = f_{X_1}(x_1), \\ &f_{X_2|X_1}(x_2|x_1) = f_{X_2}(x_2). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Таким образом, для независимых случайных величин X_1 и X_2 их условные и безусловные распределения совпадают. Аналогичным свойством обладают распределения координат случайного вектора при $n > 2$.

Пример 3.6. Случайные величины X_1 и X_2 непрерывного типа распределены равномерно в прямоугольнике со сторонами, параллельными осям координат. В примере 3.2 приведены выражения для совместной плотности распределения $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)$ (3.35) и одномерных плотностей $f_{X_1}(x_1)$ (3.36) и $f_{X_2}(x_2)$ (3.37). Анализ этих выражений показывает, что для любых аргументов x_1, x_2 выполнено равенство (3.56). Следовательно, случайные величины X_1 и X_2 являются независимыми.

Заметим, что согласно условию независимости случайных величин в форме (3.54) должно также выполняться равенство:

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2). \quad (3.58)$$

Приведенные в примере 3.2 выражения для совместной и одномерных функций распределения вероятностей (3.38) – (3.40) удовлетворяют равенству (3.58).

Пример 3.7. Случайные величины X_1 и X_2 непрерывного типа распределены по следующему закону:

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, \text{ если } \min(x_1, x_2) \le 0; \\ \min(x_1, x_2), \text{ если } 0 < \min(x_1, x_2) \le 1; \\ 1, \text{ если } \min(x_1, x_2) > 1. \end{cases} \quad (3.59)$$

Требуется установить, являются ли случайные величины X_1 и X_2 независимыми. С этой целью определим одномерные распределения $F_{X_1}(x_1)$, $F_{X_2}(x_2)$ и проверим выполнение равенства (3.58).

Выражения для $F_{X_1}(x_1)$, $F_{X_2}(x_2)$ находятся из (3.59) с использованием условий согласованности (3.8):

$$F_{X_1}(x_1) = F_{X_1,X_2}(x_1, \infty) = \begin{cases} 0, \text{ если } x_1 \le 0; \\ x_1, \text{ если } 0 < x_1 \le 1; \\ 1, \text{ если } x_1 > 1, \end{cases} \quad (3.60)$$

$$F_{X_2}(x_2) = F_{X_1,X_2}(\infty, x_2) = \begin{cases} 0, \text{ если } x_2 \le 0; \\ x_2, \text{ если } 0 < x_2 \le 1; \\ 1, \text{ если } x_2 > 1. \end{cases} \quad (3.61)$$

Полученные выражения свидетельствуют о равномерном распределении каждой из случайных величин X_1 и X_2 в интервале [0; 1].

Несложно проверить, что распределения (3.59) – (3.61) не удовлетворяют условию (3.58) независимости случайных величин. Следовательно, случайные величины X_1 и X_2 зависимы. В данном примере между случайными величинами имеется функциональная связь: $X_1 = X_2$.

Пример 3.8. Рассмотрим плотность распределения вероятностей двумерного случайного вектора **X** (3.41) (пример 3.3) и соответствующие одномерные плотности распределения (3.42), (3.43) его координат X_1 и X_2. В связи с тем, что равенство (3.56) в этом примере не выполнено, случайные величины X_1 и X_2 являются зависимыми.

Условные распределения, введенные для случайных величин непрерывного типа, могут быть определены и для случайных величин дискретного типа.

Рассмотрим случай двумерного случайного вектора с распределением $p_{X_1,X_2}(i_1, i_2)$, $i_k = 1, 2, \ldots, N_k$, $k = 1, 2$. Определим условное распределение случайной величины X_1 относительно X_2:

$$p_{X_1|X_2}(i_1 \mid i_2) = P(X_1 = x_{1,i_1} \mid X_2 = x_{2,i_2}). \tag{3.62}$$

Аргументом условного распределения $p_{X_1|X_2}(i_1 \mid i_2)$ является индекс i_1, а индекс i_2 является параметром. В связи с этим условие нормировки для распределения $p_{X_1|X_2}(i_1 \mid i_2)$ записывается в следующей форме:

$$\sum_{i_1=1}^{N_1} p_{X_1|X_2}(i_1 \mid i_2) = 1. \tag{3.63}$$

Аналогично определяется условное распределение случайной величины X_2 относительно X_1:

$$p_{X_2|X_1}(i_2 \mid i_1) = P(X_2 = x_{2,i_2} \mid X_1 = x_{1,i_1}).$$

В соответствии с формулой умножения вероятностей

$$\begin{aligned} p_{X_1,X_2}(i_1, i_2) &= p_{X_1}(i_1)\, p_{X_2|X_1}(i_2 \mid i_1) = \\ &= p_{X_2}(i_2)\, p_{X_1|X_2}(i_1 \mid i_2). \end{aligned} \tag{3.64}$$

В общем случае n-мерного случайного вектора $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ дискретного типа условное распределение подвектора $\mathbf{X}' = \mathbf{col}(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ $(m < n)$ относительно подвектора $\mathbf{X}'' = \mathbf{col}(X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots, X_n)$ определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} &p_{\mathbf{X}'|\mathbf{X}''}(i_1, i_2, \ldots, i_m \mid i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n) = \\ &= P\left(\bigcap_{k=1}^{m} (X_k = x_{k,i_k}) \mid \bigcap_{l=m+1}^{n} (X_l = x_{l,i_l}) \right). \end{aligned} \tag{3.65}$$

Безусловное распределение вектора $\mathbf{X}$ выражается через условное распределение вектора $\mathbf{X}' | \mathbf{X}''$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &p_{\mathbf{X}}(i_1, i_2, \ldots, i_n) = \\ &= p_{\mathbf{X}''}(i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n)\, p_{\mathbf{X}'|\mathbf{X}''}(i_1, i_2, \ldots, i_m \mid i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n) = \\ &= p_{\mathbf{X}'}(i_1, i_2, \ldots, i_m)\, p_{\mathbf{X}''|\mathbf{X}'}(i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n \mid i_1, i_2, \ldots, i_m). \end{aligned}$$

Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ дискретного типа независимы, если для любых $i_k = 1, 2, \ldots, N_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, справедливо равенство:

$$p_{\mathbf{X}}(i_1, i_2, ..., i_n) = \prod_{k=1}^{n} p_{X_k}(i_k). \qquad (3.66)$$

Для независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ дискретного типа безусловное распределение $p_{\mathbf{X}'}(i_1, i_2, ..., i_m)$ совпадает с условным распределением $p_{\mathbf{X}'|\mathbf{X}''}(i_1, i_2, ..., i_m \,|\, i_{m+1}, i_{m+2}, ..., i_n)$ при любом $m < n$:

$$p_{\mathbf{X}'}(i_1, i_2, ..., i_m) = p_{\mathbf{X}'|\mathbf{X}''}(i_1, i_2, ..., i_m \,|\, i_{m+1}, i_{m+2}, ..., i_n). \qquad (3.67)$$

В частности, при $n = 2$ для независимых случайных величин X_1, X_2 справедливы равенства:

$$\begin{aligned} p_{X_1}(i_1) &= p_{X_1|X_2}(i_1 \,|\, i_2), \\ p_{X_2}(i_2) &= p_{X_2|X_1}(i_2 \,|\, i_1). \end{aligned} \qquad (3.68)$$

Пример 3.9. Распределение вероятностей двумерного случайного вектора дискретного типа задано табл. 3.6.

Таблица 3.6

Распределение вероятностей двумерного случайного вектора

X_1	X_2		
	$x_{21} = 0$	$x_{22} = 1$	$x_{23} = 2$
$x_{11} = 0$	$p_{11} = 0{,}0$	$p_{12} = 0{,}03$	$p_{13} = 0{,}05$
$x_{12} = 1$	$p_{21} = 0{,}18$	$p_{22} = 0{,}14$	$p_{23} = 0{,}08$
$x_{13} = 2$	$p_{31} = 0{,}20$	$p_{32} = 0{,}17$	$p_{33} = 0{,}15$

Требуется рассчитать условные распределения $p_{X_1|X_2}(i_1 \,|\, i_2)$, $p_{X_2|X_1}(i_2 \,|\, i_1)$ и проверить, являются ли случайные величины X_1 и X_2 независимыми.

Для расчета условных распределений с использованием равенств (3.64) необходимо рассчитать безусловные распределения

$p_{X_1}(i_1)$ и $p_{X_2}(i_2)$. Они рассчитываются в соответствии с теорией, изложенной в § 21. Результаты расчета приведены во второй и третьей строках табл. 3.7. В первой строке указаны значения случайных величин X_1 и X_2, которые принадлежат одному и тому же множеству {0, 1, 2}. В строках 4 – 7 указаны условные распределения $p_{X_1|X_2}(i_1 \mid X_2 = k)$, k = 0, 1, 2, и $p_{X_2|X_1}(i_2 \mid X_1 = 0)$, рассчитанные в соответствии с равенствами (3.64). Из табл. 3.7 следует, что

$$p_{X_1}(i_1) \neq p_{X_1|X_2}(i_1 \mid X_2 = 0),$$
$$p_{X_2}(i_2) \neq p_{X_2|X_1}(i_2 \mid X_1 = 0).$$

Следовательно, случайные величины X_1 и X_2 являются зависимыми.

Таблица 3.7

Безусловные и условные распределения вероятностей случайных величин X_1 и X_2

1	x_{1i}, x_{2i}	0	1	2
2	$p_{X_1}(i_1)$	0,08	0,40	0,52
3	$p_{X_2}(i_2)$	0,38	0,34	0,28
4	$p_{X_1\|X_2}(i_1 \mid X_2 = 0)$	0,0	0,474	0,526
5	$p_{X_1\|X_2}(i_1 \mid X_2 = 1)$	0,088	0,412	0,500
6	$p_{X_1\|X_2}(i_1 \mid X_2 = 2)$	0,178	0,286	0,536
7	$p_{X_2\|X_1}(i_2 \mid X_1 = 0)$	0,0	0,375	0,625

Контрольные вопросы и задачи

1. Что называется условным распределением вероятностей случайной величины X относительно события A?
2. Дайте определение условной функции распределения вероятностей случайной величины X_1 относительно X_2.

3. Запишите свойство нормировки для условной функции распределения вероятностей случайной величины X_1 относительно X_2.

4. Каким равенством связаны условные функция и плотность распределения вероятностей случайной величины X_1 относительно X_2, если рассматриваемые случайные величины относятся к непрерывному типу?

5. Как выразить плотность распределения вероятностей двумерного случайного вектора $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2)$ непрерывного типа через условную и безусловную плотности распределения его координат?

6. Ответьте на вопрос 5, если случайный вектор непрерывного типа имеет размерность $n > 2$?

7. Дайте определение независимости случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

8. Каким свойством характеризуются функция и плотность распределения вероятностей n-мерного случайного вектора $\mathbf{X}$, если его координаты являются независимыми случайными величинами непрерывного типа?

9. Выполнение какого условия может послужить критерием при проверке независимости двух случайных величин?

10. Случайные величины X_1 и X_2 независимы и характеризуются следующими плотностями распределения вероятностей:

$$f_{X_1}(x_1) = \begin{cases} 1/2, \text{ если } x_1 \in [-1; 1]; \\ 0, \text{ если } x_1 \notin [-1; 1], \end{cases}$$

$$f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} \exp(-x_2), \text{ если } x_2 \geq 0; \\ 0, \text{ если } x_2 < 0. \end{cases}$$

Напишите выражение для функции распределения $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)$.

11. Дайте определение условного распределения вероятностей случайной величины X_1 относительно X_2, если рассматриваемые случайные величины относятся к дискретному типу.

12. Запишите свойство нормировки для условного дискретного распределения вероятностей.

13. Каким свойством характеризуется распределение вероятностей n-мерного случайного вектора $\mathbf{X}$ дискретного типа, если его координаты являются независимыми случайными величинами?

14. Для распределения вероятностей, приведенного в табл. 3.6 (пример 3.9), рассчитайте $p_{X_2|X_1}(i_2 \mid X_1 = 1)$, $p_{X_2|X_1}(i_2 \mid X_1 = 2)$ и убедитесь, что случайные величины X_1 и X_2 являются зависимыми.

§ 24. Числовые характеристики случайного вектора

Понятие математического ожидания произвольной функции $\xi(X)$ случайной величины X, определенное в § 16 для скалярного аргумента X, может быть обобщено на случай функции $\xi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ нескольких случайных аргументов.

Математическим ожиданием произвольной функции $\xi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ случайных аргументов $X_1, X_2, \ldots, X_n$ непрерывного типа называется

$$\mathrm{M}[\xi(X_1, X_2, \ldots, X_n)] =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n . \tag{3.69}$$

Для дискретных распределений случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ математическое ожидание функции $\xi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ определяется следующим выражением:

$$\mathrm{M}[\xi(X_1, X_2, \ldots, X_n)] =$$
$$= \sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2}\ldots\sum_{i_n=1}^{N_n} p_{\mathbf{X}}(i_1, i_2, \ldots, i_n)\, \xi(x_{1,i_1}, x_{2,i_2}, \ldots, x_{n,i_n}) . \tag{3.70}$$

Математическое ожидание $\mathrm{M}[\xi(X_1, X_2, \ldots, X_n)]$ существует, если интеграл (или ряд) в формулах (3.69), (3.70) абсолютно сходится. Таким образом, математическое ожидание функции n случайных аргументов, как и в случае скалярного аргумента, является средним всех ее возможных значений, взвешенных соответствующими вероятностями.

Смешанным начальным моментом $\alpha^{(\mathbf{X})}_{r_1, r_2, \ldots, r_n}$ порядка $(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)$ для случайного вектора $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, где $r_1, r_2, \ldots, r_n$ – натуральные числа, называется

$$\alpha^{(\mathbf{X})}_{r_1, r_2, \ldots, r_n} = \mathrm{M}[X_1^{r_1}\, X_2^{r_2} \ldots X_n^{r_n}]. \tag{3.71}$$

Для непрерывно распределенного случайного вектора **X**

$$\alpha^{(\mathbf{X})}_{r_1, r_2, \ldots, r_n} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \, \ldots \, x_n^{r_n} \; f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \, dx_1 \, dx_2 \, \ldots \, dx_n \, , \qquad (3.72)$$

а в случае дискретного распределения

$$\alpha^{(\mathbf{X})}_{r_1, r_2, \ldots, r_n} = \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \ldots \sum_{i_n=1}^{N_n} p_{\mathbf{X}}(i_1, i_2, \ldots, i_n) \; x^{r_1}_{1, i_1} \, x^{r_2}_{2, i_2} \, \ldots \, x^{r_n}_{n, i_n} \; . \qquad (3.73)$$

Если в выражениях (3.72), (3.73) для $\alpha^{(\mathbf{X})}_{r_1, r_2, \ldots, r_n}$ положить $r_m = 0, \; m = \overline{1, n}, \; k \neq m,$ то получим начальный момент порядка r_k случайной величины X_k:

$$\alpha^{(\mathbf{X})}_{0, \ldots 0, r_k, 0, \ldots, 0} = \mathrm{M}[X_k^{r_k}] = \alpha^{(X_k)}_{r_k} =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x_k^{r_k} \; f_{X_k}(x_k) \, dx_k - \text{для непрерывного распределения;} \\ \displaystyle\sum_{i_k=1}^{N_k} p_{X_k}(i_k) \; x^{r_k}_{k, i_k} \; - \text{для дискретного распределения.} \end{cases} \qquad (3.74)$$

При выводе формулы (3.74) применены свойства плотности распределения $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (3.31) случайного вектора непрерывного типа и свойство (3.17) распределения $p_{\mathbf{X}}(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ дискретного случайного вектора.

Полагая в (3.74) $r_k = 1, \; k = \overline{1, n},$ получим выражение для математического ожидания координаты X_k случайного вектора **X**:

$$\alpha^{(\mathbf{X})}_{0, \ldots 0, 1, 0, \ldots, 0} = \mathrm{M}[X_k^{r_k}] = \alpha^{(X_k)}_{1} = m_{X_k} \, .$$

Математическим ожиданием случайного вектора называется вектор

$$\mathrm{M}[\mathbf{X}] = \mathbf{m}_{\mathbf{X}} = \mathbf{col}(\, m_{X_1}, \, m_{X_2}, \ldots, m_{X_n} \,). \qquad (3.75)$$

Центрированным случайным вектором $\overset{\circ}{\mathbf{X}}$ называется отклонение вектора **X** от своего математического ожидания:

$$\overset{\circ}{\mathbf{X}} = \mathbf{X} - \mathrm{M}[\mathbf{X}] = \mathbf{col}((X_1 - m_{X_1}), (X_2 - m_{X_2}), \ldots, (X_n - m_{X_n})). \quad (3.76)$$

Смешанным центральным моментом $\mu^{(\mathbf{X})}_{r_1, r_2, \ldots, r_n}$ порядка $(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)$ для случайного вектора $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется

$$\mu^{(\mathbf{X})}_{r_1, r_2, \ldots, r_n} = \mathrm{M}[(X_1 - m_{X_1})^{r_1} (X_2 - m_{X_2})^{r_2} \ldots (X_n - m_{X_n})^{r_n}]. \quad (3.77)$$

Смешанный центральный момент второго порядка

$$k_{lm} = \mathrm{M}[(X_l - m_{X_l})(X_m - m_{X_m})] \quad (3.78)$$

называется *ковариационным моментом* случайных величин X_l и X_m, где $l, m = \overline{1, n}$, $l \neq m$.

Согласно определению (3.78) и формулам (3.69) и (3.70) расчета математического ожидания для непрерывных и дискретных распределений ковариационный момент k_{lm} определяется следующими выражениями:

$$k_{lm} = \\ = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x_l - m_{X_l})(x_m - m_{X_m}) f_{X_l, X_m}(x_l, x_m)\, dx_l\, dx_m \; - \\ \qquad \text{– для непрерывного распределения;} \\ \sum\limits_{i_l = 1}^{N_l} \sum\limits_{i_m = 1}^{N_m} p_{X_l, X_m}(i_l, i_m)\, (x_{l, i_l} - m_{X_l})(x_{m, i_m} - m_{X_m}) \; - \\ \qquad \text{– для дискретного распределения.} \end{cases} \quad (3.79)$$

Согласно определению (3.78) при $l = m$ ковариационный момент k_{mm} равен дисперсии случайной величины X_m:

$$k_{mm} = \mathrm{M}[\,(X_m - m_{X_m})^2] = d_{X_m}. \quad (3.80)$$

Ковариационные моменты k_{lm}, $l, m = \overline{1, n}$, образуют *ковариационную матрицу* $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{K} = (k_{lm};\;\; l, m = \overline{1, n}). \quad (3.81)$$

Согласно определению (3.78) $k_{lm} = k_{ml}$, поэтому ковариационная матрица является симметричной: **K** = $\mathbf{K}^{\mathrm{T}}$. Здесь верхний индекс «т» означает транспонирование матрицы.

Определение ковариационной матрицы можно записать с использованием выражения (3.75) в следующей краткой форме:

$$\mathbf{K} = \mathrm{M}[(\mathbf{X} - \mathbf{m_X})(\mathbf{X} - \mathbf{m_X})^{\mathrm{T}}]. \tag{3.82}$$

Заметим, что ковариационный момент k_{lm} измеряется в единицах, определяемых произведением единиц измерения случайных величин X_l и X_m. Более удобным в использовании является *нормированный ковариационный момент*, или *коэффициент корреляции* r_{lm}:

$$r_{lm} = \frac{k_{lm}}{\sqrt{k_{ll}\, k_{mm}}} = \frac{k_{lm}}{\sqrt{d_{X_l}\, d_{X_m}}} = \frac{k_{lm}}{\sigma_{X_l}\, \sigma_{X_m}}, \tag{3.83}$$

где σ_{X_l}, σ_{X_m} – стандартные отклонения случайных величин X_l и X_m. Покажем, что коэффициент корреляции r_{lm} случайных величин X_l и X_m совпадает с ковариационным моментом нормированных случайных величин $\tilde{X}_l = (X_l - m_{X_l})/\sigma_{X_l}$, $\tilde{X}_m = (X_m - m_{X_m})/\sigma_{X_m}$, который обозначим $\tilde{k}_{lm}$:

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{lm} &= \mathrm{M}\left[\frac{(X_l - m_{X_l})}{\sigma_{X_l}} \frac{(X_m - m_{X_m})}{\sigma_{X_m}}\right] = \\ &= \frac{1}{\sigma_{X_l}\sigma_{X_m}} \mathrm{M}[(X_l - m_{X_l})(X_m - m_{X_m})] = \frac{k_{lm}}{\sigma_{X_l}\sigma_{X_m}} = r_{lm}. \end{aligned} \tag{3.84}$$

Коэффициент корреляции r_{lm} является безразмерной величиной.

Симметричная матрица, образованная коэффициентами корреляции r_{lm}, где $l, m = \overline{1, n}$, называется *корреляционной матрицей* **R**:

$$\mathbf{R} = (r_{lm};\ l, m = \overline{1, n}).$$

Как следует из определения (3.83), корреляционная матрица симметрична: **R** = $\mathbf{R}^{\mathrm{T}}$, а ее диагональные элементы равны единице.

Пример 3.10. Распределение вероятностей двумерного случайного вектора дискретного типа задано табл. 3.8.

Таблица 3.8

Распределение вероятностей двумерного случайного вектора

X_1	X_2	
	$x_{21} = -1$	$x_{22} = 1$
$x_{11} = -1$	$p_{11} = 0{,}2$	$p_{12} = 0{,}3$
$x_{12} = 1$	$p_{21} = 0{,}1$	$p_{22} = 0{,}4$

Рассчитаем коэффициент корреляции r_{12} случайных величин X_1 и X_2.

Согласно формуле (3.83)

$$r_{12} = \frac{k_{12}}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}}. \tag{3.85}$$

Таким образом, требуется предварительно рассчитать ковариационный момент k_{12} и стандартные отклонения σ_{X_1}, σ_{X_2} случайных величин X_1 и X_2. Расчет одномерных распределений случайных величин X_1 и X_2 выполняется в соответствии с теорией, изложенной в § 21. Результаты расчета приведены в табл. 3.9.

Таблица 3.9

Распределения вероятностей случайных величин X_1 и X_2

1	x_{1i}, x_{2i}	–1	1
2	$p_{X_1}(i_1)$	0,5	0,5
3	$p_{X_2}(i_2)$	0,3	0,7

На основании распределений $p_{X_1}(i_1)$ и $p_{X_2}(i_2)$ рассчитываются числовые характеристики случайных величин X_1 и X_2:

$$m_{X_1} = 0;\ m_{X_2} = 0{,}4;\ \sigma_{X_1} = 1;\ \sigma_{X_2} \approx 0{,}92.$$

Ковариационный момент k_{12} вычисляется в соответствии с определением (3.79) при $l=1$, $m = 2$, $N_1 = 2$, $N_2 = 2$:

$$k_{12} = \sum_{i_1=1}^{2} \sum_{i_2=1}^{2} p_{X_1, X_2}(i_1, i_2)\,(x_{1,i_1} - m_{X_1})(x_{2,i_2} - m_{X_2}) = 0{,}2.$$

Дальнейший расчет коэффициента корреляции по формуле (3.85) приводит к следующему результату: $r_{12} \approx 0{,}22$.

Контрольные вопросы и задачи

1. Дайте определение математического ожидания произвольной функции $\xi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ непрерывно распределенных случайных аргументов $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
2. По какой формуле рассчитывается математическое ожидание произвольной функции $\xi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ дискретно распределенных случайных аргументов $X_1, X_2, \ldots, X_n$?
3. Что называется смешанным начальным моментом порядка $(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)$ для случайного вектора $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$?
4. По каким формулам рассчитывается смешанный начальный момент $\alpha^{(\mathbf{X})}_{r_1, r_2, \ldots, r_n}$ для случайного вектора $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ в случаях непрерывного и дискретного распределений?
5. Что называется математическим ожиданием случайного вектора?
6. Как выполняется операция центрирования случайного вектора?
7. Как определяется смешанный центральный момент $\mu^{(\mathbf{X})}_{r_1, r_2, \ldots, r_n}$ порядка $(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)$ для случайного вектора $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$?
8. По каким формулам рассчитывается смешанный центральный момент $\mu^{(\mathbf{X})}_{r_1, r_2, \ldots, r_n}$ для случайного вектора $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ в случаях непрерывного и дискретного распределений?
9. Что называется ковариационным моментом случайных величин X_l и X_m?
10. В каких единицах измеряется ковариационный момент случайных величин X_l и X_m?

11. По каким формулам производится расчет ковариационного момента случайных величин X_l и X_m в случаях распределений непрерывного и дискретного типов?

12. Что называется ковариационной матрицей случайного вектора $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$?

13. Что представляют собой диагональные элементы ковариационной матрицы?

14. Дайте определение коэффициента корреляции случайных величин X_l и X_m?

15. В каких единицах измеряется коэффициент корреляции случайных величин X_l и X_m?

16. Распределение вероятностей двумерного случайного вектора дискретного типа задано табл. 3.10.

Таблица 3.10

Распределение вероятностей двумерного случайного вектора

X_1	X_2		
	$x_{21} = -1$	$x_{22} = 0$	$x_{23} = 1$
$x_{11} = -1$	$p_{11} = 0$	$p_{12} = 0{,}1$	$p_{13} = 0{,}3$
$x_{12} = 1$	$p_{21} = 0{,}3$	$p_{22} = 0{,}2$	$p_{23} = 0{,}1$

Рассчитайте числовые характеристики m_{X_1}, m_{X_2}, σ_{X_1}, σ_{X_2} и коэффициент корреляции r_{12} случайных величин X_1 и X_2.

17. Что называется корреляционной матрицей случайного вектора $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и какова ее размерность?

18. Что представляют собой диагональные элементы корреляционной матрицы?

§ 25. Основные теоремы о моментах случайного вектора

В предыдущем параграфе для случайного вектора $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ с заданным распределением вероятностей были определены числовые характеристики – моменты. В практических приложениях наиболее часто используются моменты первого и второго порядков: математические ожидания, дисперсии, ковариации и корреляции координат случайного вектора. В этом параграфе будут рассмотрены их свойства, которые не только позволят более рационально построить для них вычислительную процедуру в условиях решаемой задачи, но и помогут дать содержательную интерпретацию полученных расчетных значений моментов.

Первая из теорем характеризует оператор математического ожидания $M[\cdot]$ как линейный оператор.

1. Для произвольного распределения вероятностей случайного вектора $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, для которого существует $M[\mathbf{X}] = \mathbf{m}_\mathbf{X} = \mathbf{col}(m_{X_1}, m_{X_2}, \ldots, m_{X_n})$, выполняется равенство:

$$M\left[\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i\, M[X_i], \tag{3.86}$$

где c_i, $i = \overline{1, n}$, – заданные константы.

Свойство (3.86) может быть записано в векторной форме:

$$M[\mathbf{c}^\mathrm{T}\mathbf{X}] = \mathbf{c}^\mathrm{T} M[\mathbf{X}] = \mathbf{c}^\mathrm{T}\mathbf{m}_\mathbf{X}, \tag{3.87}$$

где $\mathbf{c} = \mathbf{col}(c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

Равенство (3.86) следует непосредственно из определения (3.69), (3.70) математического ожидания произвольной функции $\xi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ случайных аргументов $X_1, X_2, \ldots, X_n$ для распределений непрерывного и дискретного типов при подстановке $\xi(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$.

В частном случае $c_i = 1$, $i = \overline{1, n}$, равенство (3.86) принимает следующий вид:

$$M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \sum_{i=1}^{n} m_{X_i}. \tag{3.88}$$

Обобщением (3.86) является следующее утверждение.

2. Для произвольного распределения вероятностей случайного вектора $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, для которого существует $M[\mathbf{X}] = \mathbf{m}_\mathbf{X} = \mathbf{col}(m_{X_1}, m_{X_2}, \ldots, m_{X_n})$, и произвольной неслучайной матрицы $\mathbf{A}$ размерности $[m\times n]$ выполняется равенство

$$M[\mathbf{AX}] = \mathbf{A}M[\mathbf{X}] = \mathbf{A}\mathbf{m}_\mathbf{X}. \tag{3.89}$$

3. Математическое ожидание произведения произвольных функций $\xi_i(X_i)$, $i=\overline{1,\,n}$, независимых случайных величин X_i, $i=\overline{1,\,n}$, равно произведению их математических ожиданий:

$$\mathrm{M}\left[\prod_{i=1}^{n}\xi_i(X_i)\right]=\prod_{i=1}^{n}\mathrm{M}[\xi_i(X_i)]=\prod_{i=1}^{n}m_{\xi_i}\ . \tag{3.90}$$

При доказательстве равенства (3.90) используется свойство совместного распределения вероятностей независимых случайных величин в форме (3.55) для непрерывных распределений и (3.66) – для дискретных. В частности, для непрерывных распределений

$$\mathrm{M}\left[\prod_{i=1}^{n}\xi_i(X_i)\right]=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\xi_1(x_1)\xi_2(x_2)\ldots\xi_n(x_n)\,f_{\mathbf{X}}(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\xi_i(x_i)\quad f_{X_1}(x_1)\,f_{X_2}(x_2)\ldots\,f_{X_n}(x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\xi_1(x_1)\,f_{X_1}(x_1)\,dx_1\int_{-\infty}^{\infty}\xi_2(x_2)\,f_{X_2}(x_2)\,dx_2\,\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\xi_n(x_n)\,f_{X_n}(x_n)\,dx_n=$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\mathrm{M}[\xi_i(X_i)]=\prod_{i=1}^{n}m_{\xi_i}\ .$$

При $\xi_i(X_i)=X_i$, $i=\overline{1,\,n}$, равенство (3.90) принимает следующий вид:

$$\mathrm{M}\left[\prod_{i=1}^{n}X_i\right]=\prod_{i=1}^{n}\mathrm{M}[X_i]=\prod_{i=1}^{n}m_{X_i}\ .$$

4. Для произвольного распределения вероятностей случайного вектора $\mathbf{X}=\mathbf{col}(X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_n)$, для которого существуют дисперсии $\mathrm{D}[X_i]$, $i=\overline{1,\,n}$, выполняется равенство:

$$\mathrm{D}\left[\sum_{i=1}^{n}c_iX_i\right]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}c_i\,c_j\,k_{ij}\ , \tag{3.91}$$

где c_i, $i=\overline{1,\,n}$, – заданные константы.

Доказательство равенства (3.91) использует определение дисперсии и утверждение (3.86):

$$\mathrm{D}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right] =$$

$$= \mathrm{M}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} c_i (X_i - m_{X_i})\right)^2\right] = \mathrm{M}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j (X_i - m_{X_i})(X_j - m_{X_j})\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j \, \mathrm{M}[(X_i - m_{X_i})(X_j - m_{X_j})] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_i \, c_j \, k_{ij} \, .$$

Равенство (3.91) может быть записано в векторно-матричной форме:

$$\mathrm{D}[\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}] = \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \mathrm{K} \, \mathbf{c},$$

где $\mathbf{c} = \mathbf{col}(c_1, c_2, ..., c_n)$.

При n = 1 для произвольной константы c и $X_1 = X$ равенство (3.91) преобразуется к виду:

$$\mathrm{D}[cX] = c^2 \, \mathrm{D}[X] = c^2 d_X \, . \tag{3.92}$$

Здесь учтено свойство (3.80) ковариационного момента: k_{mm} = d_{X_m}, которое в рассматриваемом случае принимает вид k_{11} = d_X .

5. Ковариационный момент независимых случайных величин равен нулю.

Рассмотрим доказательство этого утверждения на примере независимых случайных величин X_1 и X_2 непрерывного типа:

$$k_{12} = \mathrm{M}[(X_1 - m_{X_1})(X_2 - m_{X_2})] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_{X_1})(x_2 - m_{X_2}) \, f_{X_1}(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_{X_1})(x_2 - m_{X_2}) \, f_{X_1}(x_1) \, f_{X_2}(x_2) \, dx_1 \, dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_{X_1}) \, f_{X_1}(x_1) \, dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} (x_2 - m_{X_2}) \, f_{X_2}(x_2) \, dx_2 = 0.$$

В последнем из равенств учтено, что математическое ожидание центрированной случайной величины равно нулю. Доказательство можно упростить, если применить доказанное ранее свойство (3.90).

Следует обратить внимание на то, что из равенства нулю ковариационного момента двух случайных величин не следует их независимость.

Пример 3.11. Рассмотрим две случайные величины X_1 и X_2 , связанные функционально: $X_2 = (X_1)^2$. Допустим, что случайная величина X_1 распределена симметрично и, следовательно, имеет все начальные моменты нечетного порядка, равные нулю (см. § 16). В том числе равно нулю и ее математическое ожидание, т.е. случайная величина X_1 центрирована. Тогда математическое ожидание случайной величины X_2 в соответствии с ее определением равно дисперсии d_{X_1} . Рассчитаем ковариационный момент k_{12}, используя приведенное свойство моментов случайной величины X_1:

$$k_{12} = M[X_1(X_2 - d_{X_1})] = M[X_1(X_1^2 - d_{X_1})] = M[X_1^3] - d_{X_1} M[X_1] = 0.$$

Таким образом, функционально зависимые случайные величины могут иметь нулевой ковариационный момент.

Следствием утверждения 5 являются приводимые далее свойства ковариационной и корреляционной матриц.

6. Ковариационная матрица **K** случайного вектора **X** с независимыми компонентами является диагональной:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} = d_{X_1} & & & 0 \\ & k_{22} = d_{X_2} & & \\ 0 & & \ldots & \\ & & & k_{nn} = d_{X_n} \end{pmatrix}. \quad (3.93)$$

7. Корреляционная матрица **R** случайного вектора **X** с независимыми компонентами является единичной:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ 0 & & \ldots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.94)$$

8. Дисперсия суммы попарно независимых случайных величин $X_i,\ i=\overline{1,\ n}$, равна сумме их дисперсий:

$$\mathrm{D}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}[X_i]. \qquad (3.95)$$

Для доказательства утверждения (3.95) используется (3.91) и равенство нулю ковариационных моментов независимых случайных величин.

Пример 3.12. Рассмотрим дисперсию суммы попарно независимых случайных величин $X_i,\ i=\overline{1,\ n}$, взвешенных коэффициентами $c_i=\pm 1,\ i=\overline{1,\ n}$:

$$\mathrm{D}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right]=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}[c_i X_i]=\sum_{i=1}^{n} c_i^2\,\mathrm{D}[X_i]=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}[X_i].$$

В частности, при n = 2

$$\mathrm{D}[X_1+X_2]=\mathrm{D}[X_1-X_2]=\mathrm{D}[-X_1+X_2]=\mathrm{D}[X_1]+\mathrm{D}[X_2].$$

9. Коэффициент корреляции r_{12} случайных величин X_1 и X_2 удовлетворяет неравенству

$$|r_{12}|\le 1. \qquad (3.96)$$

Для доказательства утверждения рассмотрим нормированные случайные величины $\tilde{X}_1=(X_1-m_{X_1})/\sigma_{X_1}$, $\tilde{X}_2=(X_2-m_{X_2})/\sigma_{X_2}$. Рассчитаем для них $\mathrm{D}[\tilde{X}_1\pm\tilde{X}_2]$, используя равенства (3.84), (3.91):

$$\mathrm{D}[\tilde{X}_1\pm\tilde{X}_2]=\mathrm{D}[\tilde{X}_1]+\mathrm{D}[\tilde{X}_2]\pm 2r_{12}. \qquad (3.97)$$

Учитывая, что дисперсия случайной величины неотрицательна, а для нормированной случайной величины она равна единице, получим на основании (3.97) следующее неравенство:

$$1\pm r_{12}\ge 0, \qquad (3.98)$$

которое эквивалентно выполнению условия $|r_{12}|\le 1$, что и требовалось доказать.

10. Коэффициент корреляции r_{12} случайных величин X_1 и X_2, для которых $\sigma_{X_1},\sigma_{X_2}\ne 0$, принимает значения $r_{12}=\pm 1$ тогда и

только тогда, когда случайные величины X_1 и X_2 линейно зависимы, т.е.

$$X_1 = aX_2 + b, \tag{3.99}$$

где $a \neq 0$ и b – произвольные константы.

Начнем с доказательства того, что из равенства $r_{12} = \pm 1$ следует линейная зависимость случайных величин X_1 и X_2.

Согласно равенству (3.97) при $r_{12} = +1$ получаем

$$\mathrm{D}[\tilde{X}_1 - \tilde{X}_2] = \mathrm{D}[\tilde{X}_1] + \mathrm{D}[\tilde{X}_2] - 2r_{12} = 0,$$

что возможно только в случае, когда $\tilde{X}_1 - \tilde{X}_2 = c$, где c – некоторая константа. Это означает наличие следующей линейной зависимости случайных величин X_1 и X_2:

$$\frac{(X_1 - m_{X_1})}{\sigma_{X_1}} - \frac{(X_2 - m_{X_2})}{\sigma_{X_2}} = c,$$

или в другой форме:

$$X_1 = \frac{\sigma_{X_1}}{\sigma_{X_2}} X_2 + \left(m_{X_1} + c\sigma_{X_1} - \frac{\sigma_{X_1}}{\sigma_{X_2}} m_{X_2} \right).$$

Полагая $a = \dfrac{\sigma_{X_1}}{\sigma_{X_2}}$ и $b = m_{X_1} + c\sigma_{X_1} - \dfrac{\sigma_{X_1}}{\sigma_{X_2}} m_{X_2}$, получим линейную зависимость (3.99).

Аналогично доказывается наличие линейной зависимости случайных величин X_1 и X_2 при $r_{12} = -1$.

Перейдем к доказательству второй части утверждения 10: если случайные величины X_1 и X_2 линейно зависимы, т.е. выполнено равенство (3.99), то $r_{12} = \pm 1$.

Используя свойства оператора математического ожидания, получаем, что

$$m_{X_1} = \mathrm{M}[aX_2 + b] = a m_{X_2} + b.$$

Тогда центрированные случайные величины $\overset{\circ}{X}_1$ и $\overset{\circ}{X}_2$ связаны следующим равенством:

$$\overset{\circ}{X}_1 = a \overset{\circ}{X}_2 . \tag{3.100}$$

Из равенства (3.100) с использованием свойства (3.92), получим:

$$d_{X_1} = a^2 d_{X_2}, \quad \sigma_{X_1} = |a| \sigma_{X_2}. \tag{3.101}$$

Теперь воспользуемся определением коэффициента корреляции r_{12} и применим равенства (3.100), (3.101):

$$r_{12} = \frac{1}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} \mathrm{M}[\overset{\circ}{X}_1 \overset{\circ}{X}_2] = \frac{a\,(\sigma_{X_2})^2}{|a|\,(\sigma_{X_2})^2} = \operatorname{sign} a = \begin{cases} 1, & \text{если } a > 0; \\ -1, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Доказательство утверждения 10 завершено.

Свойства 9 и 10 коэффициента корреляции позволяют сделать вывод, значение $|\, r_{12} \,|$ может рассматриваться как *мера линейной зависимости* случайных величин.

Пример 3.13. Случайные величины X_1 и X_2 независимы и имеют равные математические ожидания $m_{X_1} = m_{X_2} = m$ и дисперсии $d_{X_1} = d_{X_2} = d \neq 0$. Требуется найти коэффициент корреляции r_{YZ} случайных величин $Y = \alpha X_1 + \beta X_2$ и $Z = \alpha X_1 - \beta X_2$.

Поскольку $m_Y = \alpha m_{X_1} + \beta m_{X_2}$, $m_Z = \alpha m_{X_1} - \beta m_{X_2}$, устанавливаем следующие выражения для $\overset{\circ}{Y}, \overset{\circ}{Z}$:

$$\overset{\circ}{Y} = \alpha \overset{\circ}{X}_1 + \beta \overset{\circ}{X}_2, \quad \overset{\circ}{Z} = \alpha \overset{\circ}{X}_1 - \beta \overset{\circ}{X}_2.$$

Используя независимость случайных величин X_1 и X_2 и равенство их дисперсий, получим следующие выражения для ковариационного момента и дисперсий случайных величин Y и Z:

$$k_{YZ} = M[\overset{\circ}{Y}\overset{\circ}{Z}] = (\alpha^2 - \beta^2)\, d,$$

$$d_Y = d_Z = (\alpha^2 + \beta^2)\, d.$$

Отсюда следует выражение для коэффициента корреляции:

$$r_{YZ} = (\alpha^2 - \beta^2)/(\alpha^2 + \beta^2).$$

Контрольные вопросы и задачи

1. Сформулируйте свойство линейности оператора математического ожидания. Напишите это свойство в скалярной и векторной формах.

2. Докажите свойство линейности оператора математического ожидания для случайного вектора непрерывного типа.

3. Чему равно математическое ожидание разности двух случайных величин?

4. Чему равно математическое ожидание случайного вектора $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$, где $\mathbf{X}$ – случайный вектор размерности n, а $\mathbf{A}$ – неслучайная матрица размерности $[m \times n]$?

5. Чему равно математическое ожидание произведения независимых случайных величин X_i, $i = \overline{1, n}$?

6. Напишите расчетную формулу для $\mathrm{D}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right]$ и приведите ее доказательство.

7. Запишите расчетную формулу для $\mathrm{D}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right]$ в векторно-матричной форме.

8. Как изменится дисперсия скалярной случайной величины, если ее отмасштабировать с помощью коэффициента c?

9. Является ли равенство нулю ковариационного момента случайных величин X_1 и X_2 необходимым условием их независимости?

10. Следует ли из равенства нулю ковариационного момента случайных величин X_1 и X_2 их независимость?

11. Справедливо ли равенство:

$$k_{12} = \mathrm{M}[\overset{\circ}{X}_1 \overset{\circ}{X}_2] = \mathrm{M}[\overset{\circ}{X}_1 X_2]?$$

12. Какими свойствами обладает ковариационная матрица случайного вектора с независимыми компонентами?

13. Какими свойствами обладает корреляционная матрица случайного вектора с независимыми компонентами?

14. Чему равна дисперсия суммы попарно независимых случайных величин?

15. Докажите, что $\mathrm{D}[X_1 + X_2] = \mathrm{D}[X_1 - X_2]$.

16. Какова область возможных значений коэффициента корреляции случайных величин? Приведите доказательство.

17. Является ли равенство $|r_{12}|=1$ необходимым условием линейной зависимости случайных величин X_1 и X_2? Приведите доказательство.

18. Является ли равенство $|r_{12}|=1$ достаточным условием линейной зависимости случайных величин X_1 и X_2? Приведите доказательство.

19. Чему равен коэффициент корреляции r_{12}, если случайные величины X_1 и X_2 связаны равенством $X_1=-3X_2+5$?

20. Случайный вектор $\mathbf{X}=\mathbf{col}(X_1, X_2)$ имеет математическое ожидание $\mathbf{m}_\mathbf{X}=\mathbf{col}(m_{X_1}, m_{X_2})$ и ковариационную матрицу

$$\mathbf{K}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Чему равна дисперсия случайной величины $Y = 2X - 3Y + 3$?

§ 26. Условные моменты случайного вектора

Рассмотрим двумерный случайный вектор $\mathbf{X}=\mathbf{col}(X_1, X_2)$ непрерывного типа с совместной плотностью распределения вероятностей $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$. В § 23 было введено понятие условной плотности распределения вероятностей случайной величины X_1 относительно условия $X_2=x_2$: $f_{X_1|X_2}(x_1|x_2)$.

Условное математическое ожидание произвольной функции $\xi(X_1)$ случайной величины X_1 при условии, что случайная величина X_2 приняла значение x_2, определяется следующим выражением:

$$\mathrm{M}[\xi(X_1)|X_2=x_2]=\int_{-\infty}^{\infty}\xi(x_1)\,f_{X_1|X_2}(x_1|x_2)\,dx_1 . \qquad (3.102)$$

Если $\xi(X_1) = X_1$, то получим условное математическое ожидание случайной величины X_1 относительно события $X_2=x_2$:

$$m_{X_1|X_2}(x_2)=\mathrm{M}[X_1|X_2=x_2]=\int_{-\infty}^{\infty}x_1\,f_{X_1|X_2}(x_1|x_2)\,dx_1. \quad (3.103)$$

Функция $m_{X_1|X_2}(x_2)$ называется *регрессией случайной величины* X_1 на X_2. В частности, функция $m_{X_1|X_2}(x_2)$ может быть линейной:

$$m_{X_1|X_2}(x_2) = a x_2 + b\,.$$

Тогда a и b называются коэффициентами линейной регрессии.

Поскольку X_2 является случайной величиной, то можно усреднить значения $m_{X_1|X_2}(x_2)$ с плотностью $f_{X_2}(x_2)$. Результатом усреднения будет безусловное математическое ожидание случайной величины X_1:

$$\mathrm{M}_{X_2}[m_{X_1|X_2}(X_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} m_{X_1|X_2}(x_2)\, f_{X_2}(x_2)\, dx_2 = m_{X_1}\,. \qquad (3.104)$$

Справедливость приведенного равенства показывается прямой подстановкой выражения (3.103) для $m_{X_1|X_2}(x_2)$ в (3.104) и использованием свойств (3.32) и (3.49) совместной плотности распределения $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$.

Заметим, что в случае независимости случайных величин X_1 и X_2

$$m_{X_1|X_2}(x_2) = m_{X_1}\,,$$

т.е. условное и безусловное математические ожидания случайной величины X_1 совпадают.

Если в формуле (3.102) положить $\xi(X_1) = (X_1 - m_{X_1|X_2}(x_2))^2$, то получим выражение для условной дисперсии случайной величины X_1 относительно события $X_2 = x_2$:

$$d_{X_1|X_2}(x_2) = \mathrm{M}[(X_1 - m_{X_1|X_2}(x_2))^2 \mid X_2 = x_2]. \qquad (3.105)$$

Величина $d_{X_1|X_2}(x_2)$ называется также *остаточной дисперсией* случайной величины X_1 при $X_2 = x_2$. Она отражает ту меру неопределенности (рассеяния) значения случайной величины X_1, которая осталась после измерения $X_2 = x_2$. Средняя остаточная дисперсия $\bar{d}_{X_1|X_2}$ вычисляется усреднением условной дисперсии $d_{X_1|X_2}(x_2)$ по значениям случайной величины X_2:

$$\mathrm{M}_{X_2}[d_{X_1|X_2}(X_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} d_{X_1|X_2}(x_2)\, f_{X_2}(x_2)\, dx_2 = \bar{d}_{X_1|X_2}\,.$$

Функция регрессии $m_{X_1|X_2}(x_2)$ является наилучшей в средне-квадратичном смысле оценкой значения случайной величины X_1, если известно значение $X_2 = x_2$:

$$\mathrm{M}[(X_1 - m_{X_1|X_2}(x_2))^2] = \min_{h(x_2)} \mathrm{M}[(X_1 - h(x_2))^2].$$

Это свойство широко используется в теории статистического оценивания и прикладных задачах статистики.

Приведенные определения и свойства условных моментов, рассмотренные выше для случайных величин непрерывного типа, справедливы и для дискретных случайных величин.

Обобщим понятие условного математического ожидания на случайные векторы $\mathbf{X} = \mathbf{col}(\mathbf{X}'^{\mathrm{T}}, \mathbf{X}''^{\mathrm{T}})$, $\mathbf{X}' = \mathbf{col}(X_1, X_2, \ldots, X_m)$, $\mathbf{X}'' = \mathbf{col}(X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots, X_n)$. Условным математическим ожиданием $m_{X_i|\mathbf{X}''}(\mathbf{x}'')$ случайной величины X_i, $i = \overline{1, m}$, при условии, что случайная величина $\mathbf{X}''$ приняла значение $\mathbf{x}''$, называется:

$$\begin{aligned} m_{X_i|\mathbf{X}''}(\mathbf{x}'') &= m_{X_i|\mathbf{X}''}(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n) = \\ &= \mathrm{M}\left[X_i \mid \bigcap_{k=m+1}^{n} (X_k = x_k) \right]. \end{aligned} \tag{3.106}$$

Вектор условного математического ожидания $\mathbf{m}_{\mathbf{X}'|\mathbf{X}''}(\mathbf{x}'')$ определяется выражением:

$$\mathbf{m}_{\mathbf{X}'|\mathbf{X}''}(\mathbf{x}'') = \mathbf{col}(m_{X_1|\mathbf{X}''}(\mathbf{x}''), m_{X_2|\mathbf{X}''}(\mathbf{x}''), \ldots, m_{X_m|\mathbf{X}''}(\mathbf{x}''))$$

и называется *функцией регрессии* вектора $\mathbf{X}'$ на вектор $\mathbf{X}''$.

Пример 3.14. В примере 3.9 было рассмотрено дискретное распределение вероятностей двух статистически зависимых случайных величин X_1 и X_2 на множестве возможных значений {0, 1, 2} каждой из них. Для расчета условных математических ожиданий $m_{X_1|X_2}(x_2)$, $x_2 = 0, 1, 2$, используем формулу

$$m_{X_1|X_2}(x_2) = \sum_{i_1=0}^{2} i_1\, p_{X_1|X_2}(i_1 \mid X_2 = x_2).$$

Воспользуемся фрагментом табл. 3.7, в котором приведены необходимые для расчетов безусловные и условные распределения случайных величин X_1 и X_2:

1	x_{1i} , x_{2i}	0	1	2
2	$p_{X_1}(i_1)$	0,08	0,40	0,52
3	$p_{X_2}(i_2)$	0,38	0,34	0,28
4	$p_{X_1\|X_2}(i_1 \| X_2 = 0)$	0,0	0,474	0,526
5	$p_{X_1\|X_2}(i_1 \| X_2 = 1)$	0,088	0,412	0,500
6	$p_{X_1\|X_2}(i_1 \| X_2 = 2)$	0,178	0,286	0,536

Расчет регрессии X_1 на X_2 приводит к следующему результату:

$$m_{X_1|X_2}(0) = 1{,}526;\quad m_{X_1|X_2}(1) = 1{,}412;\quad m_{X_1|X_2}(2) = 1{,}354.$$

Проверим выполнение равенства (3.104), согласно которому усреднение $m_{X_1|X_2}(x_2)$ по значениям случайной величины X_2 приводит к безусловному математическому ожиданию m_{X_1}. С этой целью рассчитаем

$$\mathrm{M}_{X_2}[m_{X_1|X_2}(X_2)] = \sum_{i_2=0}^{2} m_{X_1|X_2}(i_2)\ p_{X_2}(i_2)$$

с использованием приведенного во фрагменте таблицы распределения $p_{X_2}(i_2)$:

$$\mathrm{M}_{X_2}[m_{X_1|X_2}(X_2)] = 0{,}38 \cdot 1{,}526 + 0{,}34 \cdot 1{,}412 + 0{,}28 \cdot 1{,}354 = 1{,}44.$$

Проведем расчет математического ожидания m_{X_1}:

$$m_{X_1} = \sum_{i_1=0}^{2} i_1\, p_{X_1}(i_1) = 0 \cdot 0{,}08 + 1 \cdot 0{,}40 + 2 \cdot 0{,}52 = 1{,}44.$$

Равенство (3.104) выполнено.

Контрольные вопросы и задачи

1. Что называется условным математическим ожиданием произвольной функции $\xi(X_1)$ случайной величины X_1 при условии, что случайная величина X_2 приняла значение x_2? Напишите определение для случайных величин непрерывного и дискретного типов.

2. Что называется регрессией случайной величины X_1 на X_2?

3. Напишите выражение для линейной регрессии X_1 на X_2.

4. Как безусловное математическое ожидание m_{X_1} случайной величины X_1 связано с условным математическим ожиданием $m_{X_1|X_2}(x_2)$? Приведите доказательство.

5. Чему равно условное математическое ожидание случайной величины X_1 относительно X_2 в случае независимости случайных величин? Приведите доказательство.

6. Что называется остаточной дисперсией случайной величины X_1 при $X_2 = x_2$?

7. Как вычисляется средняя остаточная дисперсия X_1 относительно X_2?

8. Какое свойство функции регрессии X_1 на X_2 широко используется в теории статистического оценивания и прикладных задачах статистики?

9. Как обобщается понятие функции регрессии на векторные случайные величины?

10. Напишите общее выражение для функции линейной регрессии случайной величины X_1 на вектор $\mathbf{X}' = \mathbf{col}(X_2, X_3, \ldots, X_n)$.

§ 27. Характеристическая функция случайного вектора

Понятие характеристической функции скалярной случайной величины, введенное в § 18, обобщается на векторные случайные величины.

Характеристической функцией n-мерного случайного вектора $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется комплексная функция $\varphi_{\mathbf{X}}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ n действительных аргументов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$:

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \mathrm{M}\left[e^{j\sum_{i=1}^{n}\lambda_i X_i} \right]. \tag{3.107}$$

Определение (3.107) можно записать в краткой векторной форме:

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathrm{M}[e^{j\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}}], \tag{3.108}$$

где $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{col}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Отметим основные свойства характеристической функции случайного вектора. Эти свойства будут далее иллюстрироваться на примере распределений непрерывного типа.

1. Для любых $-\infty<\lambda_i<\infty,\ i=\overline{1,n},$ характеристическая функция $\varphi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\lambda})$ ограничена $|\,\varphi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\lambda})\,|\le 1$ и удовлетворяет условию

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) = 1. \tag{3.109}$$

Это утверждение следует из определения (3.108)

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}...\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{j\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i X_i} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1\, dx_2\, ...\, dx_n \tag{3.110}$$

и свойства нормировки распределения вероятностей.

2. Характеристическая функция случайного вектора $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ с независимыми компонентами $X_1, X_2, \ldots, X_n$ равна произведению их характеристических функций:

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \prod_{i=1}^{n}\varphi_{X_i}(\lambda_i)\,. \tag{3.111}$$

Сформулированное утверждение основано на свойстве (3.90) оператора математического ожидания, в котором произвольная функция $\xi_i(X_i)$ положена равной $e^{j\lambda_i X_i}$:

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \mathrm{M}\left[e^{j\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i X_i}\right] = \prod_{i=1}^{n}\mathrm{M}[e^{j\lambda_i X_i}] = \prod_{i=1}^{n}\varphi_{X_i}(\lambda_i)\,.$$

3. Характеристическая функция суммы независимых случайных величин $Z = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ равна произведению их характеристических функций:

$$\varphi_Z(\lambda) = \prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(\lambda)\,. \tag{3.112}$$

Для доказательства равенства (3.112) применяется определение (2.71) характеристической функции $\varphi_Z(\lambda)$ скалярной случайной величины Z и свойство (3.90) оператора математического ожидания:

$$\varphi_Z(\lambda) = \mathrm{M}\left[e^{j\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] = \mathrm{M}\left[\prod_{k=1}^{n} e^{j\lambda X_k}\right] = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{M}[e^{j\lambda X_k}] = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(\lambda).$$

4. Если случайный вектор $\mathbf{Y}$ размерности m является линейным преобразованием случайного вектора $\mathbf{X}$ размерности n

$$\mathbf{Y} = \mathbf{AX} + \mathbf{B},$$

где $\mathbf{A}$ – матрица размерности $[m\times n]$; $\mathbf{B}$ – вектор размерности m, то

$$\varphi_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\lambda}) = e^{j\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}} \varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}). \tag{3.113}$$

Действительно, используя определение характеристической функции и свойства оператора математического ожидания, получим:

$$\varphi_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathrm{M}[e^{j\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}}] = \mathrm{M}[e^{j\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\mathbf{AX}+\mathbf{B})}] =$$

$$= e^{j\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}} \mathrm{M}[e^{j\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{AX}}] = e^{j\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}} \varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}).$$

5. Если случайный вектор $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ имеет смешанный начальный момент $\alpha^{(\mathbf{X})}_{r_1, r_2, \ldots, r_n}$ порядка $(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)$, где $r_1, r_2, \ldots, r_n$ – натуральные числа, то он равен

$$\alpha^{(\mathbf{X})}_{r_1, r_2, \ldots, r_n} =$$

$$= (j)^{-(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)} \left. \frac{\partial^{(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)} \varphi_{\mathbf{X}}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)}{\partial \lambda_1^{r_1}\, \partial \lambda_2^{r_2} \ldots \partial \lambda_n^{r_n}} \right|_{\substack{\lambda_i = 0, \\ i = 1, 2, \ldots, n}}. \tag{3.114}$$

Этот результат может быть получен дифференцированием левой и правой частей равенства (3.110) по переменным $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

6. Плотность распределения вероятностей случайного вектора $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ непрерывного типа может быть определена с помощью его характеристической функции по формуле обратного преобразования:

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n) = \tag{3.115}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} ... \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-j\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i} \varphi_{\mathbf{X}}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \, ... \, d\lambda_n .$$

Контрольные вопросы и задачи

1. Дайте определение характеристической функции n-мерного случайного вектора.
2. Напишите расчетные выражения для характеристической функции случайных векторов непрерывного и дискретного типов.
3. Какова область возможных значений абсолютной величины характеристической функции?
4. Каким свойством обладает характеристическая функция случайного вектора с независимыми компонентами? Приведите доказательство для случайного вектора дискретного типа.
5. Выведите выражение для характеристической функции $\varphi_{\overset{\circ}{\mathbf{X}}}(\boldsymbol{\lambda})$ центрированного случайного вектора $\overset{\circ}{\mathbf{X}}$, если известна характеристическая функция $\varphi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\lambda})$.
6. Чему равна характеристическая функция суммы независимых случайных величин?
7. Как определить характеристическую функцию случайного вектора **Y** размерности m, если он является линейным преобразованием **Y** = **AX** + **B** случайного вектора **X** размерности n с известной характеристической функцией $\varphi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\lambda})$?
8. Как можно вычислить начальный момент $\alpha^{(\mathbf{X})}_{r_1, r_2, ..., r_n}$ порядка $(r_1 + r_2 + ... + r_n)$ для случайных величин $(X_1, X_2, …, X_n)$ при известной характеристической функции случайного вектора $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2, …, X_n)$?
9. Как рассчитать плотность распределения вероятностей случайного вектора $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2, …, X_n)$ непрерывного типа, если известна его характеристическая функция $\varphi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\lambda})$?

10. Пусть случайный вектор $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ с известной характеристической функцией $\varphi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\lambda})$ представлен своими подвекторами $\mathbf{X}'$ и $\mathbf{X}''$: $\mathbf{X} = \mathbf{col}(\mathbf{X}'^{\mathrm{T}}, \mathbf{X}''^{\mathrm{T}})$, где $\mathbf{X}' = \mathbf{col}(X_1, X_2, \ldots, X_m)$, $\mathbf{X}'' = \mathbf{col}(X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots, X_n)$. Как определить характеристическую функцию $\varphi_{\mathbf{X}'}(\boldsymbol{\lambda}')$ подвектора $\mathbf{X}'$?

§ 28. Нормальный закон распределения вероятностей случайного вектора

В § 19 был изучен нормальный закон распределения вероятностей скалярной случайной величины X (закон Гаусса). Перейдем к изучению многомерного нормального распределения.

Случайный вектор $\mathbf{X} = \mathbf{col}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ распределен по нормальному закону, если совместная плотность распределения вероятностей $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)$ приводится к виду

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\mathbf{K}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^{\mathrm{T}} \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{x}-\mathbf{m})\right), \quad (3.116)$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{col}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $\mathbf{m} = \mathbf{col}(m_1, m_2, \ldots, m_n)$; $m_i = \mathrm{M}[X_i]$, $i = \overline{1, n}$; $\mathbf{K}$ – ковариационная матрица случайного вектора $\mathbf{X}$; $\mathbf{K}^{-1}$ – обратная ковариационная матрица; $|\mathbf{K}|$ – определитель ковариационной матрицы.

Характеристическая функция $\varphi_{\mathbf{X}}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ нормального случайного вектора $\mathbf{X}$, вычисляемая в соответствии с определением (3.108), равна

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \varphi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\lambda}) = \exp\left(j\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda}\right), \quad (3.117)$$

где $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{col}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. В скалярной форме выражение (3.117) принимает вид

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \exp\left[j\sum_{i=1}^{n}\lambda_i m_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}k_{il}\lambda_i\lambda_l\right]. \quad (3.118)$$

Из выражений (3.116), (3.117) следует, что многомерное нормальное распределение зависит только от математического ожидания $\mathbf{m}$ и ковариационной матрицы $\mathbf{K}$ случайного вектора. Это означает, что любые моменты выше второго порядка для нормального закона выражаются через моменты первого и второго порядков.

Рассмотрим случайный вектор $\mathbf{Y}$ размерности m, который является линейным преобразованием нормально распределенного случайного вектора $\mathbf{X}$ размерности n: $\mathbf{Y} = \mathbf{AX} + \mathbf{B}$, где $\mathbf{A}$ – матрица размерности $[m \times n]$; $\mathbf{B}$ – вектор размерности m. Обозначим через $\mathbf{m_X}$ и $\mathbf{K_X}$ математическое ожидание и ковариационную матрицу вектора $\mathbf{X}$. Поставим задачу нахождения закона распределения случайного вектора $\mathbf{Y}$. Согласно свойству (3.113) характеристической функции случайного вектора

$$\varphi_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\lambda}) = \exp(j\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{B})\,\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}).$$

После использования выражения (3.117) для характеристической функции $\varphi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\lambda})$ и простейших преобразований получим выражение для $\varphi_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\lambda})$:

$$\varphi_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\lambda}) = \exp\left(j\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\mathbf{Am_X} + \mathbf{B}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{AK_X}\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} \right).$$

Отсюда следует, что вектор $\mathbf{Y}$ распределен по нормальному закону и имеет математическое ожидание $\mathbf{m_Y} = \mathbf{Am_X} + \mathbf{B}$ и ковариационную матрицу $\mathbf{K_Y} = \mathbf{AK_X}\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. Таким образом, получен важный теоретический результат:

Любое линейное преобразование нормально распределенного случайного вектора подчинено также нормальному закону распределения. В частности, сумма нормально распределенных случайных величин распределена также по нормальному закону.

Рассмотрим более подробно нормальное распределение двумерного случайного вектора. Согласно выражению (3.116)

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{k_{11}\,k_{22} - k_{12}^2}} \times \qquad (3.119')$$

$$\times \exp\left(-\frac{k_{22}(x_1 - m_1)^2 - 2k_{12}(x_1 - m_1)(x_2 - m_2) + k_{11}(x_2 - m_2)^2}{2(k_{11}\,k_{22} - k_{12}^2)} \right).$$

При выводе выражения (3.119) было учтено, что для ковариационной матрицы $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$ определитель $|\mathbf{K}| = (k_{11}\, k_{22} - k_{12}^2)$, а обратная матрица $\mathbf{K}^{-1} = \dfrac{1}{|\mathbf{K}|} \begin{pmatrix} k_{22} & -k_{12} \\ -k_{21} & k_{11} \end{pmatrix}$. Предполагается, что $|\mathbf{K}| \neq 0$.

Обычно $f_{\mathbf{X}}(x_1,\, x_2)$ записывается в форме, использующей коэффициент корреляции $r_{12} = \rho = \dfrac{k_{12}}{\sqrt{k_{11}\, k_{22}}} = \dfrac{k_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$:

$$f_{\mathbf{X}}(x_1,\, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times \tag{3.119''}$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x_1 - m_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(x_2 - m_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right).$$

Интегрированием $f_{\mathbf{X}}(x_1,\, x_2)$ по переменной x_2 можно получить выражение для плотности распределения $f_{X_1}(x_1)$ случайной величины X_1:

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_1 - m_1)^2}{\sigma_1^2} \right). \tag{3.120'}$$

Аналогичным способом устанавливается плотность распределения $f_{X_2}(x_2)$:

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_2 - m_2)^2}{\sigma_2^2} \right). \tag{3.120''}$$

Таким образом, каждый компонент нормально распределенного случайного вектора распределен по нормальному закону.

Найдем условную плотность распределения $f_{X_2|X_1}(x_2\,|x_1)$. Согласно рассмотренному ранее свойству (3.50) условная плотность

$$f_{X_2|X_1}(x_2\,|x_1) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1,\, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}.$$

Использование выражений (3.119''), (3.120'') для нормального распределения приводит к следующему результату:

$$f_{X_2|X_1}(x_2\,|x_1) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi\,(1-\rho^2)}}\exp\left(-\frac{\left(x_2-(m_2+\rho(\sigma_2/\sigma_1)(x_1-m_1)\right)^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\right). \qquad (3.121)$$

Из полученного выражения следует, что случайная величина X_2 при условии $X_1 = x_1$ подчинена также по нормальному закону с условным математическим ожиданием

$$m_{X_2|X_1}(x_1) = m_2 + \rho(\sigma_2/\sigma_1)(x_1 - m_1) \qquad (3.122)$$

и условной дисперсией

$$d_{X_2|X_1}(x_1) = \sigma_2^2(1-\rho^2)\,. \qquad (3.123)$$

Таким образом, функция регрессии $m_{X_2|X_1}(x_1)$ случайной величины X_2 на X_1 является линейной, а остаточная дисперсия $d_{X_2|X_1}(x_1)$ постоянна.

Рассмотрим линии, на которых плотность $f_{\mathbf{X}}(x_1,\, x_2)$ двумерного нормального вектора постоянна. Из выражения (3.119) следует, что линии постоянного значения плотности описываются уравнением

$$\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2} = c^2, \qquad (3.124)$$

где c – некоторая постоянная. На рис. 3.3 показано семейство эллипсов, описываемых уравнением (3.124). Центр эллипсов, называемый *центром рассеяния*, находится в точке с координатами (m_1, m_2). Оси симметрии эллипсов указаны на рис. 3.3 штриховыми линиями. Угол наклона одной из осей симметрии к горизонтальной оси равен α и зависит от коэффициента корреляции ρ. При $\rho = 0$ (для независимых слу-

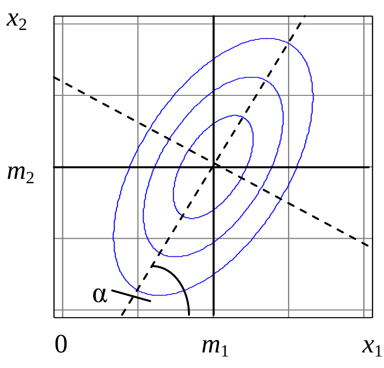


Рис. 3.3. Эллипсы равных вероятностей для нормального закона

чайных величин X_1 и X_2) оси симметрии эллипсов параллельны осям координат. Можно показать, что $\mathrm{tg}2\alpha = \dfrac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}$.

В § 25 было доказано, что понятия независимости и некоррелированности случайных величин не являются тождественными: если случайные величины независимы, то их коэффициент корреляции равен нулю, но из равенства нулю коэффициента корреляции не следует независимость случайных величин (пример 3.11). Несложно убедиться, что при подстановке в выражение (3.119”) значения $\rho = 0$ совместная плотность распределения

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)$$

при любых аргументах x_1 и x_2. Отсюда следует, что в случае совместного нормального распределения случайных величин X_1 и X_2 из отсутствия между ними корреляции следует их независимость.

Контрольные вопросы и задачи

1. Дайте определение нормально распределенного случайного вектора. Поясните все использованные в определении обозначения.
2. От каких параметров зависит многомерный нормальный закон распределения вероятностей?
3. Чему равна характеристическая функция n-мерного нормально распределенного случайного вектора?
4. Используя ответ на контрольный вопрос 10 к § 27, покажите, что любой подвектор **X'** нормально распределенного случайного вектора **X** подчинен также нормальному закону распределения.
5. Докажите, что сумма компонентов нормально распределенного случайного вектора распределена по нормальному закону.
6. Напишите выражение для плотности нормального распределения двумерного случайного вектора. Перечислите параметры, от которых она зависит.
7. Какую формулу следует применить для определения условной плотности распределения случайной величины X_2 относи-

тельно случайной величины X_1 в предположении их совместного нормального распределения?

8. Чему равна условная плотность распределения случайной величины X_2 относительно случайной величины X_1 в условиях предыдущего вопроса?

9. Допустим, что случайные величины X_1, X_2 распределены совместно по нормальному закону с известными параметрами и проведено измерение $X_1 = x_1$. Чему равен наилучший прогноз значения случайной величины X_2?

10. Как зависит точность прогноза (см. вопрос 9) от коэффициента корреляции ρ?

11. Как связаны понятия независимости и некоррелированности для компонентов нормально распределенного случайного вектора?

12. Напишите уравнения линий, на которых плотность распределения двумерного нормального вектора постоянна. Дайте характеристику этих линий.

13. Закон распределения вероятностей двумерного случайного вектора характеризуется функцией плотности следующего вида:

$$f(x_1,\, x_2) = \frac{1}{\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}\,(x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2)\right).$$

Рассчитайте значения параметров m_1, m_2, σ_1, σ_2, ρ. Напишите выражение для плотности распределения вероятностей случайной величины X_1.

Глава 4. ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. ТИПОВЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 29. Распределение вероятностей функции случайного аргумента

В § 14 рассматривались задачи нахождения закона распределения вероятностей функции $Y = \varphi(X)$ случайного аргумента X, для которого распределение вероятностей известно (примеры 2.7, 2.8). Простота функциональной зависимости позволила путем несложных рассуждений построить функцию распределения вероятностей $F_Y(y)$ по известной функции $F_X(x)$. В этом параграфе будет рассмотрена более общая задача.

Рассмотрим произвольную непрерывную функцию $Y = \varphi(X)$ случайной величины X непрерывного типа. Предположим известным дифференциальный закон распределения вероятностей $f_X(x)$ случайной величины X. Задача состоит в определении закона распределения вероятностей случайной величины Y.

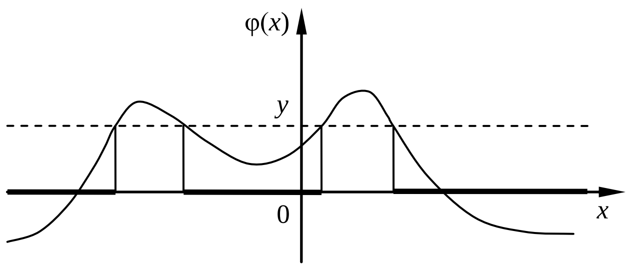


Рис. 4.1. Иллюстрация к расчету функции распределения вероятностей $F_Y(y)$

По определению функции распределения вероятностей

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(\varphi(X) < y) = \int\limits_{\varphi(x)<y} f_X(x)\,dx, \tag{4.1}$$

где интеграл распространен на все интервалы числовой оси, на которых выполнено неравенство $\varphi(x) < y$. На рис. 4.1 эти интервалы выделены жирными линиями.

Если функция $\varphi(x)$ является монотонной, область интегрирования в формуле (4.1) состоит из одного интервала, одна из границ которого равна $x = \varphi^{-1}(y)$, где $\varphi^{-1}(y)$ – обратная функция по отношению к $y = \varphi(x)$. В частности, для монотонно возрастающей функции $\varphi(X)$ из выражения (4.1) следует, что

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\varphi^{-1}(y)} f_X(x)\,dx = F_X(\varphi^{-1}(y)). \tag{4.2}$$

Дифференцированием выражения (4.2) по переменной y получим формулу для плотности распределения вероятностей $f_Y(y)$:

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = f_X(\varphi^{-1}(y)) \cdot (\varphi^{-1}(y))', \tag{4.3}$$

где $(\varphi^{-1}(y))' = \dfrac{d\,\varphi^{-1}(y)}{dy}$.

Для монотонно убывающей функции $y = \varphi(x)$ аналогичным способом получим выражение:

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = -f_X(\varphi^{-1}(y)) \cdot (\varphi^{-1}(y))'. \tag{4.4}$$

Таким образом, для случая произвольной монотонной функции $y = \varphi(x)$ на основании (4.2) и (4.3) можно получить следующее общее выражение для $f_Y(y)$:

$$f_Y(y) = f_X(\varphi^{-1}(y)) \cdot |(\varphi^{-1}(y))'|. \tag{4.5}$$

Пример 4.1. Случайная величина Y является результатом нелинейного преобразования $Y = \varphi(X) = -2\ln X$ случайной величины X, которая распределена равномерно на отрезке [0; 1]. Задача состоит в определении плотности распределения вероятностей $f_Y(y)$.

Из условий задачи следует, что $\varphi(x)$ является монотонно убывающей функцией, а ее возможные значения принадлежат области $[0, \infty)$. Поэтому при $y < 0$ $f_Y(y) = 0$, а при $y \geq 0$ $f_Y(y)$ определяется формулой (4.4):

$$f_Y(y) = -f_X(\varphi^{-1}(y)) \cdot (\varphi^{-1}(y))' = -(e^{-0,5y})' = 0,5\, e^{-0,5y},$$

в которой использовано постоянное значение $f_X(x) = 1$ плотности равномерного распределения в интервале [0; 1]. Таким образом, получено показательное (экспоненциальное) распределение, которое рассматривалось в § 14 (пример 2.6, параметр $\alpha = 0{,}5$).

Рассмотрим случай, когда случайные величины X и Y связаны линейно: $y = ax + b$, т.е. $\varphi(x) = ax + b$. Тогда $\varphi^{-1}(y) = \dfrac{y-b}{a}$ и в соответствии с формулой (4.5)

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right). \tag{4.6}$$

Таким образом, при линейном преобразовании случайной величины график ее функции плотности сдвигается по оси абсцисс и масштабируется.

Рассмотрим линейное преобразование при нормировании случайной величины X: $\tilde{X} = \varphi(X) = \dfrac{X-m}{\sigma}$. Применение формулы (4.6) приводит к следующему выражению для плотности нормированной случайной величины $\tilde{X}$:

$$f_{\tilde{X}}(x) = \sigma\, f_X(\sigma x + m) . \tag{4.7}$$

Пример 4.2. Случайная величина X, распределенная по нормальному закону $N(m, \sigma)$ с математическим ожиданием m и стандартным отклонением σ, подвергается линейному преобразованию $Y = aX + b$. Используя формулу (2.81) для плотности вероятности $f_X(x)$ нормального закона

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\,\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < \infty,$$

и выражение (4.6), получим после простейших преобразований функцию плотности $f_Y(y)$:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,|a|\,\sigma} \exp\left(-\frac{(y-b-am)^2}{2a^2\sigma^2} \right), \; -\infty < y < \infty .$$

Из полученного выражения следует, что случайная величина Y также распределена нормально с математическим ожиданием $(am + b)$ и стандартным отклонением $|a|\sigma$: $N(am + b, |a|\sigma)$. Этот результат был получен ранее в § 19 другим методом – с использованием характеристической функции нормального распределения вероятностей.

Перейдем к рассмотрению нелинейного преобразования $Y = \varphi(x)$ случайной величины X дискретного типа, распределение которой задано вероятностями $p_k = P(X = x_k)$, $k \in \mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ – множество значений индекса k. Случайная величина Y распределена также дискретно с возможными значениями $y_k = \varphi(x_k)$, $k \in \mathcal{K}$, среди которых могут быть одинаковые. Рассмотрим множество уникальных значений y_k, $k \in \mathcal{K}'$, $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$. Тогда распределение вероятностей случайной величины Y определяется выражением:

$$q_k = P(Y = y_k) = \sum_{i:\, \varphi(x_i) = y_k} p_i \;, \; k \in \mathcal{K}'. \tag{4.8}$$

При компьютерном моделировании систем, функционирующих в условиях случайных воздействий, возникает проблема генерации случайной выборки данных с заданным законом распределения вероятностей $F_Y(y)$. Для создания такой случайной выборки в программных пакетах имеется только датчик псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на отрезке [0; 1]. Таким образом, имеется случайная величина X с законом распределения

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ x, & \text{если } x \in (0;\, 1]; \\ 1, & \text{если } x > 1 \end{cases} \tag{4.9}$$

и требуется путем ее некоторого нелинейного преобразования $\varphi(X)$ получить случайную величину Y с заданным распределением $F_Y(y)$.

Допустим, что функция $F_Y(y)$ является монотонно возрастающей, так что между значениями аргумента и функции имеется взаимно-однозначное соответствие. Покажем, что поставленная задача решается при нелинейном преобразовании $Z = \varphi(X) = F_Y^{-1}(X)$. Иначе говоря, случайная величина Z имеет требуемый закон распределения вероятностей:

$$F_Z(y) = P(Z < y) = F_Y(y). \tag{4.10}$$

Учитывая применяемое нелинейное преобразование, получим

$$F_Z(y) = P(\varphi(X) < y) = P(F_Y^{-1}(X) < y) = P(X < F_Y(y)) = F_Y(y).$$

На последнем шаге приведенных выше преобразований использовано определение (4.9) равномерного закона распределения вероятностей. Таким образом, равенство (4.10) выполнено и задача генерации случайной выборки с заданным распределением вероятностей решена.

Рассмотрим еще одну полезную для практического применения задачу, связанную с нелинейным преобразованием случайного вектора. Допустим, имеются n независимых случайных величин X_i, $i = \overline{1, n}$, распределенных по известным законам $F_i(x)$, $i = \overline{1, n}$. Случайная величина Y определена нелинейным преобразованием

$$Y = \max(X_i, i = \overline{1, n}). \tag{4.11}$$

Найдем функцию распределения вероятностей случайной величины Y. Согласно определению

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i < y)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i < y) = \prod_{i=1}^{n} F_i(y).$$

В приведенном выводе вероятность произведения событий заменена произведением их вероятностей благодаря независимости рассматриваемых случайных величин.

В частном случае, когда все случайные величины X_i, $i = \overline{1, n}$, распределены одинаково, т.е. $F_i(x) = F(x)$, $i = \overline{1, n}$, справедливо выражение:

$$F_Y(y) = (F(y))^n. \tag{4.12}$$

Полученный результат означает, что если y_p является квантилью распределения $F(y)$ порядка p (см. гл. 2, § 16), то для распределения $F_Y(y)$ значение y_p будет квантилью порядка p^n. При обработке экспериментальных данных этот вывод используется для выделения и удаления грубых положительных выбросов.

Аналогичный подход применяется при исследовании распределения вероятностей случайной величины $Z = \min(X_i, i = \overline{1, n})$ при тех же предположениях относительно распределений случайных величин X_i, $i = \overline{1, n}$:

$$F_Z(z) = P(Z < z) = 1 - P(Z \geq z) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \geq z)\right) =$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i \geq z) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_i(z)).$$

В частном случае $F_i(x) = F(x)$, $i = \overline{1, n}$,

$$F_Z(z) = 1 - (1 - F(z))^n.$$

Контрольные вопросы и задачи

1. Как определить интегральный закон распределения вероятностей случайной величины Y, если она является результатом нелинейного функционального преобразования $\varphi(X)$ случайной величины X непрерывного типа с известной плотностью вероятности $f_X(x)$?
2. В условиях вопроса 1 какой формулой определяется плотность распределения вероятностей $f_Y(y)$ случайной величины Y?
3. Как уточняется формула для $f_Y(y)$, если известно, что функция $Y = \varphi(X)$ является монотонной (убывающей или возрастающей)?
4. Выведите выражение для плотности распределения вероятностей случайной величины Y, полученной линейным преобразованием случайной величины X с известной плотностью вероятности $f_X(x)$?

5. Случайная величина X, распределенная равномерно на отрезке $[c, d]$, подвергается линейному преобразованию $Y = aX + b$, $a > 0$. Каким является распределение вероятностей случайной величины Y?

6. Как найти плотность распределения вероятностей $f_{\tilde{X}}(x)$ нормированной случайной величины $\tilde{X}$, если известна плотность $f_X(x)$ случайной величины X?

7. Как рассчитать распределение вероятностей случайной величины Y, которая является результатом нелинейного преобразования случайной величины X дискретного типа?

8. Задана случайная величина X с возможными значениями $x_k = k$, $k \in \{-1; 0; 1\}$, и распределением вероятностей: $p_{-1} = p_1 = 0{,}3$; $p_0 = 0{,}4$. Случайная величина Y является результатом нелинейного преобразования $Y = X^2$. Каким является распределение вероятностей случайной величины Y?

9. Как можно сгенерировать выборку случайных чисел с заданным распределением вероятностей, располагая генератором равномерно распределенных на отрезке [0; 1] случайных чисел?

10. Какое нелинейное преобразование нужно применить к случайной величине, распределенной равномерно на отрезке [0; 1], чтобы получить случайную величину, распределенную по дифференциальному закону

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0{,}5\cos y, & \text{если } y \in [-\pi/2,\ \pi/2]; \\ 0, & \text{иначе?} \end{cases}$$

11. Как ставится задача нахождения закона распределения вероятностей для максимального значения среди случайных величин? Сформулируйте задачу и дайте обозначения для всех используемых переменных.

12. Чему равна в условиях предыдущего вопроса функция распределения вероятностей для максимального значения среди случайных величин?

13. Ответьте на вопросы 11 и 12, если рассматривается не максимальное, а минимальное значение случайных величин?

14. Случайные величины X_1 и X_2 независимы и равномерно распределены на отрезке [0; 1]. Случайная величина Y определена выражением $Y = \max\{X_1, X_2\}$. Чему равна медиана $y_{0,5}$ распределе-

ния $F_Y(y)$ случайной величины Y? Сравните полученное значение с медианой равномерного распределения на отрезке [0; 1].

§ 30. Композиция распределений случайных величин

Рассмотрим случайную величину $Z = X + Y$, являющуюся суммой двух случайных величин с заданной совместной плотностью распределения $f(x, y)$. По определению функции распределения вероятностей

$$F_Z(z) = P(Z < z) = P(X + Y < z) =$$

$$= \iint\limits_{x+y<z} f(x,\ y)\ dx\ dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{z-x} f(x,\ y)\ dy. \qquad (4.13)$$

Дифференцированием (4.13) по переменной z получаем выражение для плотности распределения $f_Z(z)$:

$$f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,\ z-x)\ dx. \qquad (4.14)$$

Формулы (4.13) и (4.14) определяют *композицию* двух распределений.

В частном случае, когда случайные величины X и Y независимы и имеют плотности распределения $f_X(x)$ и $f_Y(y)$,

$$f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\ f_Y(z-x)\ dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_Y(x)\ f_X(z-x)\ dx, \quad (4.15)$$

т.е. плотность вероятности суммы двух независимых случайных величин равна свертке их функций плотности.

Пример 4.3. Случайные величины X и Y независимы и имеют одинаковые показательные распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{если } x \ge 0; \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Применение формулы (4.15) дает следующее выражение для плотности вероятности суммы $Z = X + Y$:

$$f_Z(z) = \begin{cases} ze^{-z}, & \text{если } z \ge 0; \\ 0, & \text{если } z < 0. \end{cases}$$

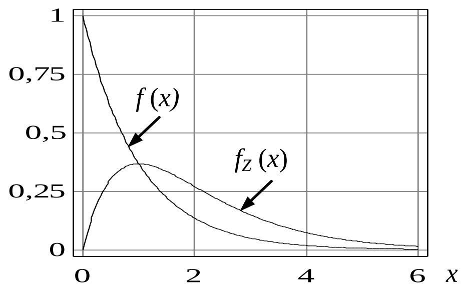


Рис.4.2. Композиция двух показательных распределений

На рис. 4.2 представлены графики плотностей вероятности $f(x)$ отдельных слагаемых и их суммы $f_Z(x)$. Можно показать, что при увеличении числа независимых слагаемых закон распределения вероятностей суммы приближается к закону Гаусса. Эта тенденция наблюдается на рис. 4.2.

Если сумма независимых случайных величин, как и отдельные слагаемые, подчинены одному и тому же типу закона распределения вероятностей, то этот закон называется *композиционно устойчивым*. Ранее было показано (§ 28), что сумма нормально распределенных случайных величин (даже необязательно независимых) распределена также по нормальному закону. Следовательно, закон Гаусса является композиционно устойчивым.

В примере 4.3 слагаемые распределены по показательному закону, а их сумма имеет распределение другого типа, так что показательный закон не относится к композиционно устойчивым.

Композиционную устойчивость распределения удобно проверять по его характеристической функции, так как характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению их характеристических функций.

Проверим композиционную устойчивость биномиального закона распределения. В примере 2.17 (§ 18) было показано, что биномиальное распределение $B(N, p)$ с параметрами N, p (N – число испытаний; p – вероятность успеха в одном испытании) имеет характеристическую функцию $\varphi(\lambda) = (pe^{j\lambda} + q)^N$, где $q = 1 - p$. Пусть суммируются две независимые биномиальные случайные величины X_1 и X_2 с общим значением параметра p и разными значениями параметров N_1 и N_2. Тогда их характеристические функции равны

$$\varphi_1(\lambda) = (pe^{j\lambda} + q)^{N_1}, \quad \varphi_2(\lambda) = (pe^{j\lambda} + q)^{N_2},$$

а характеристическая функция суммы $Y = X_1 + X_2$ равна произведению характеристических функций слагаемых:

$$\varphi_Y(\lambda) = \varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda) = (pe^{j\lambda} + q)^{N_1+N_2}.$$

Из полученного выражения заключаем, что случайная величина Y распределена также по биномиальному закону $B(N_1 + N_2, p)$. Следовательно, биномиальное распределение при фиксированном значении параметра p является композиционно устойчивым.

Контрольные вопросы и задачи

1. Что называется композицией двух распределений?
2. Как найти плотность распределения суммы двух случайных величин в условиях, когда они: *а*) статистически зависимы; *б*) независимы?
3. Какой закон распределения вероятностей называется композиционно устойчивым?
4. Приведите примеры композиционно устойчивых законов распределения вероятностей.
5. Почему распределение Лапласа не является композиционно устойчивым? Приведите обоснование с использованием выражения для характеристической функции закона Лапласа (см. § 18, пример 2.14).

§ 31. Распределение Пуассона

Распределение Пуассона может быть установлено предельным переходом от биномиального распределения $B(N, p)$ при $N \to \infty$, $p \to 0$ и одновременно $Np = \mu = \text{const}$. Тогда возможными значениями случайной величины становятся 0, 1, 2, …, а закон распределения вероятностей зависит от единственного параметра μ.

Напомним (§ 13), что случайная величина X, распределенная по биномиальному закону с параметрами N, p, характеризуется вероятностями

$$p_k = P(X = k) = C_N^k\, p^k q^{N-k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}\, p^k q^{N-k}$$

своих возможных значений $k = \overline{0, N}$, где $q = 1 - p$. Характеристическая функция биномиального распределения равна

$$\varphi(\lambda) = \sum_{k=0}^{N} C_n^k p^k q^{N-k} e^{j\lambda k} = (p e^{j\lambda} + q)^N .$$

Введем для случайной величины X, распределенной по закону Пуассона, обозначения $\tilde{p}_k = P(X = k), k = \overline{0, \infty}$, и $\tilde{\varphi}(\lambda)$ для характеристической функции. Предельным переходом в выражениях для p_k и $\varphi(\lambda)$ при $N \to \infty$, $Np = \mu$, получим $\tilde{p}_k$ и $\tilde{\varphi}(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_k &= \lim_{\substack{N\to\infty \\ Np=\mu}} \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} = \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{\mu^k}{k!} \left(1 - \frac{\mu}{N}\right)^N = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}, \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\lambda) &= \lim_{\substack{N\to\infty \\ Np=\mu}} (p e^{j\lambda} + 1 - p)^N = \\ &= \lim_{\substack{N\to\infty \\ Np=\mu}} \left(1 + \frac{\mu}{N}(e^{j\lambda} - 1)\right)^N = e^{\mu\,(\exp(j\lambda)-1)} . \end{aligned} \tag{4.17}$$

Рассмотрим две независимые случайные величины X_1 и X_2, распределенные по закону Пуассона с параметрами μ_1 и μ_2. Согласно свойству характеристической функции их сумма $Y = X_1 + X_2$ имеет характеристическую функцию $\varphi_Y(\lambda)$, равную произведению характеристических функций слагаемых:

$$\varphi_Y(\lambda) = e^{(\mu_1+\mu_2)\,(\exp(j\lambda)-1)} .$$

Отсюда следует, что закон Пуассона является композиционно устойчивым. Этого и следовало ожидать, так как допредельный закон – биномиальный – является композиционно устойчивым, как показано в предыдущем параграфе.

Распределение Пуассона характеризуется математическим ожиданием $m = \mu$ и дисперсией $d = \mu$. Этот результат может быть установлен прямыми вычислениями или предельным переходом от соответствующих характеристик биномиального распределения.

Распределение Пуассона связано с изучением потока событий, получившего название *пуассоновского потока*. Эта математическая модель хорошо описывает ряд физических, биологических, социальных и прочих процессов. Например, поток отказов технического оборудования в непрерывном технологическом процессе, поток космических частиц на поверхность околоземной космической станции, поток военных конфликтов в истории земной цивилизации, поток сообщений информационного агентства и пр. Пуассоновский поток характеризуется моментами наблюдения событий. Выделим на оси времени произвольные непересекающиеся интервалы $[t_i, t_{i+1})$, $t_i < t_{i+1}$, $i \in \overline{1, \infty}$. Обозначим $E_k(t_i, t_{i+1})$ ситуацию, состоящую в том, что в интервал $[t_i, t_{i+1})$ попало ровно k событий потока. Для пуассоновского потока удовлетворены следующие условия.

1. Моменты появления событий распределяются на оси времени независимо друг от друга, так что при любом $n > 0$ для любых $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ и произвольных непересекающихся интервалов $[t_{i_1}, t_{i_1+1}), [t_{i_2}, t_{i_2+1}), \ldots, [t_{i_n}, t_{i_n+1})$ случайные события $E_{k_1}(t_{i_1}, t_{i_1+1}), E_{k_2}(t_{i_2}, t_{i_2+1}), \ldots, E_{k_n}(t_{i_n}, t_{i_n+1})$ независимы.

Сформулированное условие называют *отсутствием последействия*.

Введем обозначение

$$p_k(t_i, t_{i+1}) = P(E_k(t_i, t_{i+1})). \tag{4.18}$$

Тогда условие отсутствия последействия можно записать в виде:

$$\begin{gathered} P(E_{k_1}(t_{i_1}, t_{i_1+1}) \cdot E_{k_2}(t_{i_2}, t_{i_2+1}) \cdot \ldots \cdot E_{k_n}(t_{i_n}, t_{i_n+1})) = \\ = P(E_{k_1}(t_{i_1}, t_{i_1+1})) \cdot P(E_{k_2}(t_{i_2}, t_{i_2+1})) \cdot \ldots \cdot P(E_{k_n}(t_{i_n}, t_{i_n+1})) = \\ = p_{k_1}(t_{i_1}, t_{i_1+1}) \cdot p_{k_2}(t_{i_2}, t_{i_2+1}) \cdot \ldots \cdot p_{k_n}(t_{i_n}, t_{i_n+1}). \end{gathered}$$

2. Вероятность попадания на малый интервал времени Δ более одного события потока является малой величиной более высокого порядка, чем Δ:

$$\sum_{k=2}^{\infty} p_k(t, t+\Delta) = o(\Delta).$$

Это условие означает *ординарность потока событий*.

3. Вероятность попадания на малый интервал времени Δ ровно одного события потока пропорциональна длине интервала с точностью до бесконечно малой более высокого порядка, чем Δ:

$$p_1(t,\ t+\Delta) = \lambda(t)\Delta + o(\Delta).$$

Характеристика $\lambda(t)$ называется *интенсивностью потока событий*. Если $\lambda(t)$ = const, то поток событий называется *стационарным*.

В условиях 1 – 3 случайная величина X, равная числу событий потока на заданном временном интервале ($t_1,\ t_2$), подчиняется закону распределения Пуассона (4.16) с параметром

$$\mu = \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t)\ dt,$$

так что при λ = const для любого значения t'

$$p_k(t',\ t'+t) = P(E_k(t',\ t'+t)) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}\ e^{-\lambda t}. \qquad (4.19)$$

Для стационарного пуассоновского потока событий с интенсивностью λ случайный интервал времени T между двумя последовательными событиями распределен по экспоненциальному закону:

$$F_T(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0; \\ 1 - e^{-\lambda t}, & \text{если } t \ge 0. \end{cases}$$

Этот результат устанавливается из следующих рассуждений. Пусть зафиксирован некоторый момент времени t'. Согласно свойству отсутствия последействия момент появления следующего события не зависит от предыстории появления событий до момента t', а вероятность отсутствия событий в интервале $(t',\ t'+t)$ равна согласно (4.19) $p_0(t',\ t'+t) = e^{-\lambda t}$. Тогда

$$F_T(t) = P(T < t) = 1 - P(E_0(t',\ t'+t)) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0; \\ 1 - e^{-\lambda t}, & \text{если } t \ge 0, \end{cases}$$

что показывает экспоненциальный закон распределения случайного времени T ожидания очередного события потока. Если в момент времени t' было зарегистрировано событие, то полученный экспоненциальный закон относится к распределению случайного времени между двумя последовательными событиями.

Из приведенных рассуждений следует замечательное свойство пуассоновского потока событий: среднее время ожидания события в пуассоновском потоке не зависит от того, сколько времени до настоящего момента ожидание уже продолжалось.

Контрольные вопросы и задачи

1. Какая существует связь между биномиальным и пуассоновским законами распределения вероятностей?
2. Какова область возможных значений случайной величины, распределенной по закону Пуассона?
3. Чему равна вероятность p_k того, что случайная пуассоновская величина примет значение k? Чему равна эта вероятность, если $k = 0$?
4. Приведите вывод выражения для вероятности $\tilde{p}_k = P(X = k),\ k = \overline{0, \infty}$, для пуассоновской случайной величины X.
5. Чему равно математическое ожидание случайной величины, распределенной по закону Пуассона? Дайте обоснование ответа.
6. Чему равна дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона? Дайте обоснование ответа.
7. Почему пуассоновское распределение является композиционно устойчивым?
8. Приведите примеры пуассоновского потока событий.
9. В чем состоит условие отсутствия последействия для потока событий?
10. Что означает условие ординарности потока событий?
11. Дайте определение интенсивности потока событий.
12. В каком случае поток событий является стационарным?
13. Каким является распределение вероятностей случайного числа событий на интервале длины t для стационарного потока?
14. Как распределено время между двумя последовательными событиями стационарного пуассоновского потока? Напишите выражение и приведите доказательство.
15. Чему равно среднее время ожидания события для пуассоновского потока событий с параметром интенсивности λ?

§ 32. Распределение Рэлея

Распределению Рэлея (*John Strutt, 3rd Baron Rayleigh*, 1842 – 1919, Великобритания) $R(\sigma^2)$ подчиняется квадрат центрированной нормально распределенной случайной величины с дисперсией σ^2: $X = Y^2$, где $Y \sim N(0;\ \sigma)$. Плотность вероятности закона Рэлея равна

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}}\, e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}, \quad x > 0. \tag{4.20}$$

Начальные моменты для распределения Рэлея могут быть представлены в следующей форме (см. формулу (2.92)):

$$\alpha_k = \mathrm{M}[X^k] = \mathrm{M}[Y^{2k}] = (2k-1)!!\ \sigma^{2k}, \tag{4.21}$$

где $(2k-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ \ldots\ \cdot(2k-1)$. Из формулы (4.21) следует, что

$$\mathrm{M}[X] = m = \sigma^2,$$
$$\alpha_2 = \mathrm{M}[X^2] = 3\sigma^4. \tag{4.22}$$

Используя известную формулу $d = \alpha_2 - m^2$, получим выражение для дисперсии распределения Рэлея $d = 2\sigma^4$.

Если в некотором эксперименте реализуется случайная величина X с известными значениями m и σ, то случайная величина

$$Y = \tilde{X}^2 = \left(\frac{X-m}{\sigma}\right)^2$$

подчиняется закону Рэлея $R(1)$.

§ 33. Гамма-распределение

Рассмотрим сумму независимых случайных величин X_i, $i = \overline{1, n}$, с одинаковым показательным распределением с параметром α:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i\ .$$

Таким образом, рассматривается композиция одинаковых показательных распределений. Вычисление плотности вероятности случайной величины Y приводит к следующему результату:

$$f(x)=\alpha\frac{(\alpha x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha x},\quad x>0\,. \tag{4.23}$$

Наиболее просто этот результат может быть получен с использованием характеристической функции показательного закона распределения.

Распределение вероятностей (4.23) называют *гамма-распределением с целочисленным параметром* n. Обычно плотность распределения $f(x)$ (4.23) записывают в следующей форме:

$$f(x)=\alpha\frac{(\alpha x)^{n-1}}{\Gamma(n)}e^{-\alpha x},\ x>0, \tag{4.24}$$

где $\Gamma(n)$ – гамма-функция, определяемая выражением:

$$\Gamma(g)=\int\limits_0^{\infty}u^{g-1}e^{-u}du\,. \tag{4.25}$$

Для целочисленного аргумента $n > 0$ справедливо равенство

$$\Gamma(n+1)=n!, \tag{4.26}$$

которое использовано при написании выражения (4.24). Отметим, что для гамма-функции справедливо рекуррентное выражение:

$$\Gamma(g)=(g-1)\Gamma(g-1),\ g>0.$$

Кроме того, $\Gamma(1)=1$ и $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.

Для расчета математического ожидания и дисперсии гамма-распределения воспользуемся известными значениями характеристик показательного распределения случайных величин $X_i,\, i=\overline{1,\, n}$ (см. § 16, пример 2.9): $m_{X_i}=1/\alpha;\ d_{X_i}=1/\alpha^2$. Поскольку Y является композицией независимых случайных величин $X_i,\, i=\overline{1,\, n}$, получаем следующие числовые характеристики гамма-распределения:

$$\mathrm{M}[Y]=n/\alpha,\quad \mathrm{D}[Y]=n/\alpha^2. \tag{4.27}$$

Пусть случайные величины Y_1 и Y_2 независимы и имеют гамма-распределения с одним и тем же значением параметра α и целочисленными параметрами n_1 и n_2 соответственно. Рассмотрим случайную величину $Z = Y_1 + Y_2$. Несложно установить, что в этом случае Z может быть представлена как сумма $(n_1 + n_2)$ независимых слагаемых, распределенных по показательному закону, и, следовательно, имеет гамма-распределение с целочисленным параметром $(n_1 + n_2)$. Это означает, что гамма-распределение обладает композиционной устойчивостью.

Заменим в выражении (4.24) для плотности распределения вероятностей целочисленный параметр n на произвольный действительный параметр $\nu > 0$. В этом случае будет получена функция

$$f(x) = \alpha \frac{(\alpha x)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} e^{-\alpha x}, \quad x > 0, \quad \nu > 0, \tag{4.28}$$

которая обладает свойствами плотности распределения вероятностей. Полученное распределение носит название *гамма-распределения с действительным параметром* ν $(\nu > 0)$.

Рассмотрим математическое ожидание для гамма-распределения с действительным параметром $\nu > 0$:

$$\begin{gathered} m = \int_0^\infty x\, f_\nu(x)\, dx = \int_0^\infty \frac{(\alpha x)^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\alpha x}\, dx = \\ = \frac{\nu}{\alpha} \int_0^\infty \frac{\alpha(\alpha x)^{(\nu+1)-1}}{\Gamma(\nu+1)} e^{-\alpha x}\, dx = \frac{\nu}{\alpha} \int_0^\infty f_{\nu+1}(x)\, dx = \frac{\nu}{\alpha}. \end{gathered} \tag{4.29}$$

Здесь нижний индекс ν и $(\nu + 1)$ в обозначении плотности распределения вероятностей указывает на параметр гамма-распределения.

Аналогично можно получить выражение для дисперсии

$$d = \nu / \alpha^2. \tag{4.30}$$

Формулы (4.29), (4.30) обобщают приведенные ранее формулы (4.27) для числовых характеристик гамма-распределения с целочисленным параметром.

Для гамма-распределения с действительным параметром также справедливо свойство композиционной устойчивости, отмеченное ранее для гамма-распределения с целочисленным параметром. Оно состоит в том, что если Y_1 и Y_2 независимы, характеризуются общим значением параметра α и имеют гамма-распределения с параметрами ν_1 и ν_2, то их сумма $Z = Y_1 + Y_2$ имеет гамма-распределение с параметром ($\nu_1 + \nu_2$).

Рассмотрим частный случай гамма-распределения при $\nu = \frac{1}{2}$:

$$f_{\frac{1}{2}}(x) = \alpha \frac{(\alpha x)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} e^{-\alpha x}, \quad x > 0.$$

Учитывая приведенное выше равенство $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ и полагая $\alpha = \dfrac{1}{2\sigma^2}$, получим

$$f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}, \qquad x > 0.$$

Приведенное выражение для $f_{\frac{1}{2}}(x)$ совпадает с плотностью распределения вероятностей (4.20) для закона Рэлея. Таким образом, распределение Рэлея является частным случаем гамма-распределения при значении действительного параметра $\nu = \frac{1}{2}$.

§ 34. Распределение χ^2

Рассмотрим сумму квадратов n независимых нормально распределенных случайных величин X_i, $i = \overline{1, n}$, с параметрами 0, σ^2 (нормальное распределение вероятностей $N(0, \sigma)$):

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i . \qquad (4.31)$$

Здесь $Y_i = X_i^2$, $i = \overline{1, n}$, независимы и подчинены закону Рэлея, являющемуся частным случаем гамма-распределения с параметрами $\alpha = \dfrac{1}{2\,\sigma^2}$ и $\nu = \frac{1}{2}$.

Используя приведенное в предыдущем параграфе свойство композиционной устойчивости гамма-распределения, приходим к выводу, что случайная величина X (4.31) имеет гамма-распределение с параметром $\dfrac{n}{2}$:

$$f(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{(2\sigma^2)^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}, \quad x > 0. \tag{4.32}$$

Распределение (4.32) носит название χ^2-*распределения* с n степенями свободы. Множитель σ^2 является масштабным и в статистических таблицах полагается равным единице ($\alpha = \frac{1}{2}$):

$$f(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0. \tag{4.33}$$

На основании (4.29), (4.30) при $\nu = \dfrac{n}{2}$, $\alpha = \dfrac{1}{2}$ получаем математическое ожидание и дисперсию χ^2-распределения:

$$m = \mathrm{M}[\chi^2] = n, \quad \mathrm{D}[\chi^2] = 2n. \tag{4.34}$$

На рис. 4.3 приведена серия графиков плотности χ^2-распределения. Для $n > 2$ плотность распределения является унимодальной функцией с максимумом при $x = n - 2$.

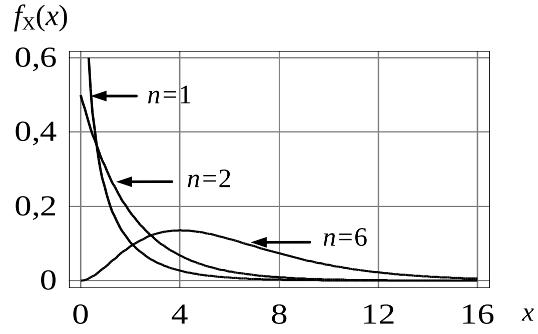


Рис. 4.3. Плотность χ^2-распределения вероятностей
с n степенями свободы

Рассмотрим статистическую модель, в которой возникает распределение χ^2 с n степенями свободы. Допустим, что производятся n независимых наблюдений нормально распределенной случайной величины X с параметрами m и σ^2. Можно интерпретировать этот эксперимент как наблюдение n независимых случайных величин X_i, $i = \overline{1, n}$, с одинаковыми законами распределения $N(m, \sigma^2)$. Проведем их нормирование:

$$\tilde{X}_i = \frac{X_i - m}{\sigma}, \; i = \overline{1, n},$$

и рассмотрим случайную величину Z:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_i^2 . \tag{4.35}$$

Поскольку $\tilde{X}_i$, $i = \overline{1, n}$, имеют распределение $N(0, 1)$ и независимы, случайная величина Z распределена по закону χ^2 с n степенями свободы.

§ 35. Распределение χ

Рассмотрим случайную величину Z, которая распределена по закону χ^2 с n степенями свободы, т.е. имеющую гамма-распределение с параметрами $\alpha = \frac{1}{2}$, $\nu = \frac{n}{2}$ (4.33). Рассмотрим случайную величину $Y = \sqrt{Z}$. Вычислим интегральный закон распределения вероятностей $F_Y(y)$, $y > 0$:

$$F_Y(y) = P(\sqrt{Z} < y) = P[Z < y^2] = \int_0^{y^2} f_Z(z)\,dz\,.$$

Тогда

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = 2y\, f_Z(y^2) = \frac{2y^{n-1} e^{-\frac{y^2}{2}}}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad y > 0. \quad (4.36)$$

Распределение вероятностей (4.36) случайной величины Y называется χ-*распределением*.

При $n = 3$ χ-распределение называют *распределением Максвелла*. На основании формулы (4.36) и равенства $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \sqrt{\pi}/2$ плотность распределения Максвелла определяется выражением:

$$f_Y(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, y^2 e^{-\frac{y^2}{2}}, \qquad y > 0.$$

Принимая во внимание сделанное в конце предыдущего параграфа замечание (4.35) относительно математической модели χ^2-распределения, можно дать χ-распределению следующую геометрическую интерпретацию. Распределению χ подчиняется длина радиуса-вектора в евклидовом пространстве, если проекции вектора на оси координат случайны, независимы и одинаково распределены по нормальному закону $N(0, 1)$.

В математической статистике применяют χ-распределение, отмасштабированное с помощью постоянного коэффициента $1/\sqrt{n}$, где n – число степеней свободы распределения. Случайная величина $Y' = Y/\sqrt{n}$ подчинена *распределению* $\chi/\sqrt{n}$ с плотностью

$$f_{Y'}(y) = \sqrt{n}\, f_{Y'}(\sqrt{n}y) = \sqrt{2n}\,\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\, y\right)^{n-1} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{ny^2}{2}}. \qquad (4.37)$$

В выводе выражения (4.37) применено доказанное ранее правило расчета плотности распределения вероятностей случайной величины после ее линейного преобразования.

§ 36. Функция распределения частного. Распределение Стьюдента

Определим случайную величину T как частное от деления двух независимых случайных величин:

$$T = \frac{X}{Y'}, \tag{4.38}$$

где X – нормированная нормально распределенная случайная величина $N(0,\ 1)$, а Y' имеет $\chi/\sqrt{n}$-распределение с n степенями свободы. Предполагается, что случайные величины X и Y' независимы. Найдем выражение для функции распределения вероятностей $F_T(t)$:

$$F_T(t) = P\left(\frac{X}{Y'} < t\right) = \iint\limits_{\frac{x}{y} < t} f(x, y)\, dx dy, \tag{4.39}$$

где $f(x, y)$ – совместная плотность распределения случайных величин X и Y'.

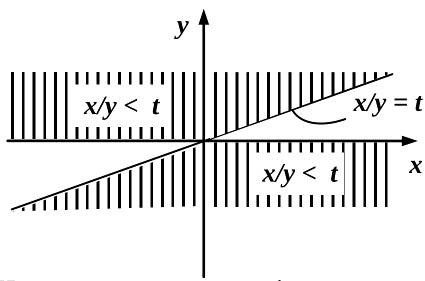


Рис. 4.4. Иллюстрация к расчету функции распределения вероятностей частного от деления двух случайных величин

На рис. 4.4 показана область интегрирования в выражении (4.39), которая состоит из двух частей. Это позволяет провести дальнейшие преобразования выражения (4.39):

$$F_T(t)=\int_0^{\infty}dy\int_{-\infty}^{yt}f(x,y)\,dx+\int_{-\infty}^{0}dy\int_{yt}^{\infty}f(x,y)\,dx\,.$$

После дифференцирования по переменной t получим выражение для плотности распределения $f_T(t)$:

$$f_T(t)=\int_0^{\infty}y\,f(yt,y)\,dy-\int_{-\infty}^{0}y\,f(yt,y)\,dy\,.$$

Поскольку случайные величины X и Y' независимы, можно записать:

$$f_T(t)=\int_0^{\infty}y\,f_X(yt)\,f_{Y'}(y)\,dy-\int_{-\infty}^{0}y\,f_X(yt)\,f_{Y'}(y)\,dy\,. \qquad (4.40)$$

Таким образом, получено выражение для плотности распределения частного от деления двух независимых случайных величин. После подстановки в выражение (4.40) функций плотности для распределений случайных величин X и Y' и интегрирования получим следующее выражение:

$$f_T(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}. \qquad (4.41)$$

Распределение (4.41) носит название *распределения Стьюдента* с n степенями свободы, или *t-распределения* (*William Sealy Gosset*, псевдоним *Student*, 1876 – 1937, Англия). Заметим, что случайная величина T может принимать любые действительные значения в интервале $(-\infty,\infty)$.

Математическое ожидание случайной величины, распределенной по закону Стьюдента, равно нулю в силу симметрии плотности распределения вероятностей, а дисперсия для $n > 2$ равна $n/(n-2)$.

При $n = 1$ плотность распределения (4.41) приводится к виду:

$$f_T(t)=\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+t^2}\,. \qquad (4.42)$$

Это распределение вероятностей является частным случаем *распределения Коши* (2.39) при значениях параметров $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Функция распределения вероятностей $F_T(t)$ закона Коши (4.42) определяется выражением:

$$F_T(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} t\,. \qquad (4.43)$$

Для случайной величины, распределенной по закону Коши, не существует математического ожидания, дисперсии и моментов более высокого порядка.

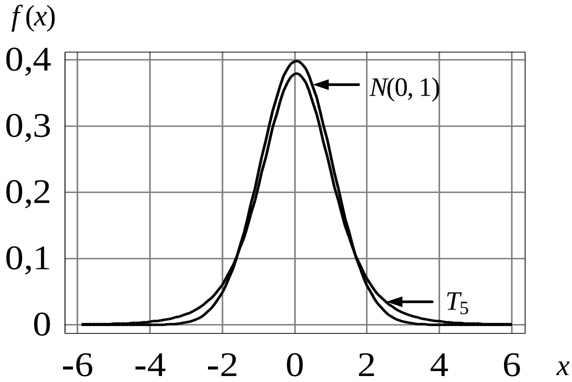


Рис. 4.5. Графики плотности распределения вероятностей нормального закона $N(0, 1)$ и закона Стьюдента T_5

При увеличении числа n степеней свободы t-распределение приближается к нормальному распределению $N(0, 1)$ (рис. 4.5).

§ 37. Распределение Фишера

Рассмотрим две независимые случайные величины X и Y, каждая из которых имеет χ^2-распределение с параметрами n_1 и n_2 соответственно. Введем случайную величину Z:

$$Z = \frac{X}{n_1} : \frac{Y}{n_2} = \frac{X \cdot n_2}{Y \cdot n_1}\,. \qquad (4.44)$$

Случайная величина Z подчинена *распределению Фишера* (*Ronald Aylmer Fisher*, 1890 – 1962, Великобритания) с плотностью вероятности

$$f(z) = C_0\, z^{\frac{n_1}{2}-1}\left[1 + \frac{n_1}{n_2} z\right]^{-\frac{1}{2}(n_1+n_2)}, \qquad (4.45)$$

где $$C_0 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n_1 + n_2)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n_1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}n_2\right)} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{1}{2}n_1}.$$

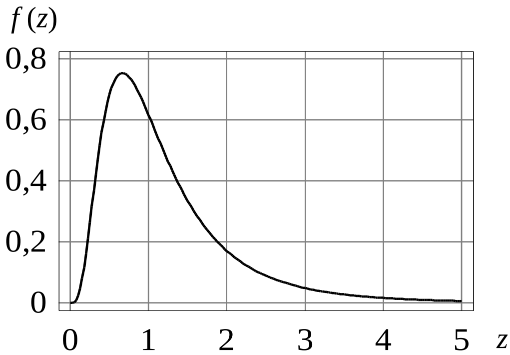


Рис.4.6. Плотность распределения вероятностей закона Фишера с параметрами $n_1 = n_2 = 10$

На рис. 4.6 приведен график плотности распределения вероятностей для закона Фишера, который обычно называют *F-распределением* и обозначают $F(n_1, n_2)$. Параметры n_1 и n_2 называются степенями свободы распределения Фишера. Отметим, что случайная величина $1/Z$ распределена также по закону Фишера, но с обратным порядком следования параметров n_2 и n_1, т.е. имеет распределение $F(n_2, n_1)$.

Если $n_1 = n_2 = n$, то для любого n медиана распределения Фишера равна единице. Это означает, что семейство графиков функции распределения вероятностей для разных n пересекается в одной точке, в которой $z = 1$ и $F(1) = 0,5$ (рис. 4.7). Соответствующее семейство графиков плотности распределения вероятностей показано на рис. 4.8.

На графиках рис. 4.8 видно, что при увеличении чисел степеней свободы n_1 и n_2 плотность распределения $f(z)$ концентрируется около значения $z = 1$.

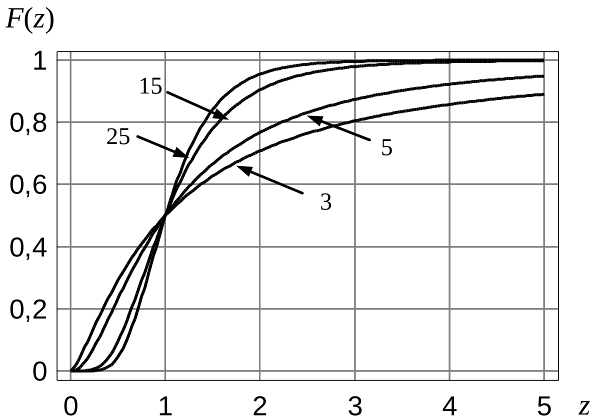


Рис. 4.7. Функция распределения вероятностей закона Фишера
для $n_1 = n_2 = 3, 5, 15, 25$

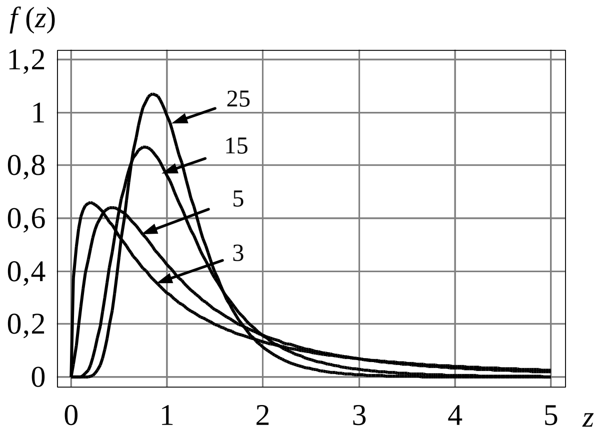


Рис. 4.8. Плотность распределения вероятностей закона Фишера
для $n_1 = n_2 = 3, 5, 15, 25$

Распределение Фишера широко применяется в дисперсионном анализе. В статистических приложениях случайная величина Z (4.44) называется *отношением дисперсий*.

Контрольные вопросы и задачи

1. Как связана случайная величина, распределенная по закону Рэлея, с нормальной случайной величиной?
2. Какова область возможных значений случайной величины, распределенной по закону Рэлея?
3. Выведите общую формулу (4.21) для начальных моментов распределения Рэлея.
4. Композиция каких распределений порождает гамма-распределение с целочисленным параметром?
5. Какова область возможных значений случайной величины, имеющей гамма-распределение?
6. Какие параметры имеет гамма-распределение?
7. Чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей гамма-распределение с целочисленным параметром? Приведите обоснование ответа.
8. Почему гамма-распределение является композиционно устойчивым?
9. Что называется гамма-распределением с действительным параметром?
10. Чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей гамма-распределение с действительным параметром?
11. Как формулируется свойство композиционной устойчивости гамма-распределения с действительным параметром?
12. При каких значениях параметров гамма-распределение совпадает с распределением Рэлея?
13. Какое преобразование независимых нормально распределенных случайных величин приводит к случайной величине, имеющей χ^2-распределение?
14. Какой параметр характеризует χ^2-распределение?
15. Принимая во внимание формулу связи случайной величины X, имеющей χ^2-распределение, с независимыми нормально распределенными и нормированными случайными величинами, выве-

дите выражения (4.34) для математического ожидания и дисперсии случайной величины X.

16. Выведите выражение, связывающее функцию плотности χ -распределения с известной плотностью χ^2 -распределения.

17. Какую геометрическую интерпретацию можно дать случайным величинам, имеющим χ^2 - и χ -распределения?

18. Выведите выражение для плотности распределения частного от деления двух независимых случайных величин с известными плотностями распределения вероятностей.

19. Частным от деления каких случайных величин является случайная величина, имеющая распределение Стьюдента?

20. Какими параметрами характеризуется распределение Стьюдента?

21. Что называется распределением Коши?

22. Что можно сказать о начальных и центральных моментах порядка $k \geq 1$ для распределения Коши?

23. К какому распределению стремится распределение Стьюдента, если число степеней свободы стремится к бесконечности?

24. Частным от деления каких случайных величин является случайная величина, имеющая распределение Фишера?

25. Какими параметрами характеризуется распределение Фишера?

26. Какова область возможных значений случайной величины, распределенной по закону Фишера?

27. Случайная величина Z распределена по закону Фишера с параметрами 5, 10. Какому закону распределения вероятностей подчиняется случайная величина $1/Z$?

ОТВЕТЫ НА КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

Глава 1

§ 1

5. Результаты опыта (i, j) и (j, i) не различаются, поэтому $\Omega =$ $= \{\omega_{ij}, i = \overline{1, 6}, j \geq i\}$, где ω_{ij} – на гранях выпали числа i и j. **6.** $A = \{\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{22}\}$. **7.** Обозначим "$o$" и "$p$" – выпадение орла и выпадение решки. Тогда Ω = {ω_1 = "ooo", ω_2 = "oop", ω_3 = "opo", ω_4 = "opp", ω_5 = "poo", ω_6 = "pop", ω_7 = "pp"}. **8.** $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5\}$.

§ 2

3. Да. **12.** 4. **13.** $C = \{\omega_1, \omega_5, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}\}$, $D = \{\omega_8, \omega_{10}\}$.

§ 5

2. Попадания в разные точки мишени не являются равновозможными. **5.** 29/72.

§ 7

21. $\frac{10}{19}$. **22.** $\frac{2}{9}$. **23.** 0,2. **24.** 0,25. **25.** $\frac{2}{3}$.

§ 8

16. 1/32. **17.** Нет. **18.** Нет. **19.** Зависимы, несовместны.

§ 9

9. 3; 4. **10.** 0,7.

§ 10

5. 1/3. **6.** ~ 0,31. **7.** 1.

Глава 2

§ 14

20. Следует воспользоваться условием нормировки. $c = \alpha/2$.

§ 16

16. $\alpha_k = \sum_{n=0}^{k} C_k^n \, m_X^{k-n} \, \mu_n$ $(\mu_0 = 1)$. **27.** $\tilde{X} = \alpha X - 1$. **29.** $m = \beta$; $d = 2/\alpha^2$; $\sigma = \sqrt{2}\,/\alpha$. **32.** Да.

§ 17

8. $1/p$. **9.** 0; 0,6. **10.** $m_X = p$; $d_X = p(1-p)$; $\sqrt{p(1-p)}$.

§ 18

12. Да. **14.** $\frac{1}{j\lambda}(e^{j\lambda}-1)=e^{j0{,}5\lambda}\frac{\sin 0{,}5\lambda}{0{,}5\lambda}$. **15.** $\frac{\alpha}{\alpha-j\lambda}$.

Глава 3

§ 21

12. X_1: 2, 4; X_2: 1, 3, 5.

X_1	X_2		
	1	3	5
2	0,15	0,1	0,25
4	0,1	0,4	0,0

p': 0,5; 0,5.
p'': 0,25; 0,5; 0,25.

§ 22

14. c = 3/28; $P(A)$ = 1/16; $P(B)$ = 11/28; $P(C)$ = 5/28.

§ 24

16. $m_{X_1}=0{,}2$; $m_{X_2}=0{,}1$; $\sigma_{X_1}=1$; $\sigma_{X_2}=0{,}83$;
$k_{12}=-0{,}52$; $r_{12}=-0{,}63$.

§ 25

9. Да. **10.** Нет. **11.** Да. **19.** –1. **20.** 72.

§ 27

5. $\varphi_{\overset{\circ}{\mathbf{X}}}(\boldsymbol{\lambda})=e^{-j\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{m}_{\mathbf{X}}}\varphi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\lambda})$, где $\mathbf{m}_{\mathbf{X}}=\mathrm{M}[\mathbf{X}]$.

10. $\varphi_{\mathbf{X}'}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)=\varphi_{\mathbf{X}}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\Big|_{\substack{\lambda_i=0,\\ i=\overline{(m+1),\,n}}}$.

§ 28

13. $m_1=m_2=0$, $\sigma_1=\sqrt{5}/2$, $\sigma_2=1/2$, $\rho=-1/\sqrt{5}$.

$$f(x_1)=\sqrt{\frac{2}{5\pi}}\exp\left(-\frac{2x_1^2}{5}\right).$$

Глава 4

§ 29

5. Равномерное распределение на отрезке $[ac+b,\ ad+b]$, $a>0$.
8. $y_0=0$; $y_1=1$; $P(Y=y_0)=0{,}4$; $P(Y=y_1)=0{,}6$. **10.** $\arcsin(2x-1)$.
14. $y_{0,5}\approx 0{,}71$.

§ 31

15. $1/\mu$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: УРСС, 2003.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Academia, 2005.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2003.
4. Куликов Е.И. Прикладной статистический анализ. М.: Радио и связь, 2003.
5. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: УРСС, 2005.
6. Сборник задач по математике для втузов / Под ред. А.В. Ефимова. Ч.3: Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1990.
7. Кочетков Е.С., Смерчинская С.О. Теория вероятностей в задачах и упражнениях. М.: Форум, 2008.
8. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. М.: Academia, 2004.
9. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшее образование, 2006.