Задачи по курсу "Кооперативная теория игр"

1. **Рынок перчаток** Игроки 1 и 2 имеют по одной левой перчатке, 3 и 4 — по правой. Рыночная стоимость одной перчатки — 0, пары (левая+правая) - 1. Т.е. выигрыш коалиции — число пар перчаток, которые она может собрать.

а) Найдите ядро и вектор Шепли для этой игры;

б) Что изменится, если у игрока 1 не одна левая перчатка, а две?

2. **Подземные музыканты.** Оркестр из трех музыкантов (A, B, C) играет в подземном переходе. Поодиночке они могли бы заработать, соответственно, 6, 18 и 30 рублей в час. Играя по двое, они бы получили: A и B — 36, A и C — 48, B и C — 54. А вместе они имеют 72.

а) Будет ли отвергнут равный дележ, и если будет, то какими коалициями?

б) Найдите ядро игры.

в) Является ли игра супераддитивной? Супермодулярной?

г) Найдите все точки Вебера и вектор Шепли. Что из найденного принадлежит ядру?

3. **Парламент.** Конгресс и Сенат состоят из трех членов каждый. Закон принимается только если в обеих палатах набрано большинство.

а) Найдите ядро этой кооперативной игры.

б) Пусть вдобавок имеется еще президент, одобрение которого обязательно. Сколько он получит в ядре? В векторе Шепли?

в) А потом две палаты объединили. Теперь нужно просто 4 голоса из 6 плюс президентское одобрение. Вроде бы, парламент стал сильнее, так как больше выигрывающих коалиций, чем в предыдущем пункте. Как изменилась "зарплата" президента?

4. Рассмотрим простую игру задаваемую голосованием с квотой $(k; 1, \dots, 1)$ — n участников. При каких k в этой игре есть ядро? Если ядра нет, то насколько нужно увеличить выигрыш тотальной коалиции, чтобы ядро появилось? Можно считать, что $1 \le k \le n$ и k — натуральное число.

5. Предположим, что величины затрат на систему водосонабжения для трех городов A, B, C таковы:

Отдельно: A — 120, B — 140, C — 120.

Коалиции: A и B — 170, B и C — 190, A и C — 160.

Все три города вместе — 255.

Будет ли эта игра супемодулярной? Найдите ее ядро и его центр (масс, например). Что изменится, если постройка системы водоснабжения всем тремя городами вместе обойдется не в 255, а в 265 единиц?

6. Рассматривается коллективный объект, обслуживающий 4 потребителей. Структура затрат симметрична — один потребитель — 40 единиц, два — 60, три — 70, все четыре — 80. Доходы агентов от использования объекта таковы: 41 для первого: 24 для второго, 22 для третьего и 12 для четвертого. Сформулируйте соответствующую кооперативную игру и найдите ядро и вектор Шепли.

7. **Охрана.** Имеется 6 производителей A, B, C, D, E, F, каждый из которых может заработать \$1, и два охранника P и Q, не производящих ничего. Коалиция получает суммарную выручку ее участников, но только в том случае, если среди них есть хотя бы один охранник. Иначе приходят грабители и все забирают. Сколько нужно платить охранникам? Ответьте на этот вопрос с точки зрения ядра и вектора Шепли.

8. **Строительство дороги.** Четыре поселка A, B, C, D расположены на берегу большого озера окружностью 120км, причем $AB = 24\,\text{км}$, $BC = 12\,\text{км}$, $CD = 36\,\text{км}$, $DA = 48\,\text{км}$, Каждый поселок нуждается в автомобильном сообщении с тремя остальными, причем кратчайшим путем (так, незамкнутая дорога $BCDA$ не устраивает жителей поселка B, поскольку они хотят ездить в A напрямик). Местные власти решили скинуться и построить кольцевую дорогу вокруг озера, соединяющую поселки. Вопрос состоит в том, как разделить между поселками издержки по строительству 120 км дороги.

а) Для каждой коалиции найдите минимальную протяженность нужной ей дороги. Опишите ядро игры. Является ли игра супермодулярной?

б) Пусть поселки равноправны в переговорном процессе, а затраты делятся, исходя из вектора Шепли. Сколько километров дороги должен профинансировать каждый поселок?

в) Пусть n_A, n_B, n_C, n_D — число жителей в поселках, причем не обязательно $n_A = n_B = n_C = n_D$. Как в этом случае разумно распределить затраты? В каком соотношении должны находиться числа n_A, n_B, n_C, n_D, чтобы все жители платили один и тот же налог на строительство дороги?

9. **Ядро экономики.** Алиса, Берта и Виола имеют по единице товара, который оценивают, соответственно, в 3, 6 и 8 долларов. Густав, Даниил, Евгений и Жорж могли бы купить по единице этого товара и готовы заплатить за него, соответственно, 2, 4, 7 и 9 долларов.

а) Формализуйте эту ситуацию в виде кооперативной игры с побочными платежами (задайте выигрыши коалиций).

б) Пусто ли ядро этой игры?

10. **Игра голосования aka простая игра.** Каждый из игроков обладает некоторым количеством голосов. Коалиция может заработать 1, если сумма голосов всех ее участников не меньше квоты и 0 в противном случае. Будет ли ядро в играх голосования

а) (2;1,1,1);

б) (6;4,3,2,1);

в) (6;6,3,2,1);

г) (6;6,6,2,1).

(Первое число в скобках — квота, отделенная точкой с запятой, остальные числа — количества голосов, которыми обладают игроки).

д)*. Закончите и докажите утверждение: ядро игры голосования непусто, если и только если...

11. Докажите, что ядро произвольной кооперативной игры — выпуклый многогранник.

12. Докажите, что ядро супермодулярной игры совпадает с выпуклой оболочкой элементов, упомянутых в доказательстве теоремы существования (они называются точками Вебера).

13. Приведите пример игры, в которой ядро не пусто, но вектор Шепли не лежит в ядре.

14. **Симметричные игры.** Назовем кооперативную игру с трансферабельной полезностью *симметричной*, если выигрыш $v(K)$ коалиции K зависит только от ее численности $k = |K|$. Без ограничения общности считаем, что $v(N) = N$. Какой должна быть функция $v(k)$ для того, чтобы ядро было непустым? Чтобы игра была супермодулярной?

15. Пусть игроков всего 3. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие непустоты ядра в терминах функции v.

16. Пусть Ядро игры с трансферабельной полезностью не пусто. Припишем каждой коалиции S (кроме тотальной) положительное число δ_S, такое, что $\sum_{S:i\in S}\delta_S = 1$. Докажите, что

$$\sum_{S\subset N}\delta_S v(S) \leq V(N).$$

δ_S можно рассматривать, как долю времени, которую игроки работают на коалицию S. Обратное утверждение называется теоремой Бондаревой и доказывается сложнее.

17. **Разложение по элементарным играм.** В кооперативной игре v с побочными платежами участвуют игроки 1, 2, 3. Выигрыши коалиций заданы следующим образом: $v(1) = 4$, $v(2) = 9$, $v(3) = 4$, $v(1,2) = 15$, $v(1,3) = 12$, $v(2,3) = 13$, $v(1,2,3) = 20$.

а) Найдите разложение этой игры по базису из элементарных игр v_S, $S \subseteq \{1,2,3\}$.

б) Как из найденного разложения получить вектор Шепли?

18. **а**) Докажите, что любую игру можно представить в виде суммы элементарных игр с некоторыми коэффициентами (это задача по линейной алгебре).

б) При каких условиях коэффициенты разложения будут неотрицательны?

19. **Потоки в сетях.** Рассмотрим транспортную сеть. Каждый из игроков контролирует часть ее ребер. Выигрыш коалиции — поток через сеть, которую контролируют ее участники. Докажите, что эта игра имеет непустое ядро. Указание: вспомните про минимальный разрез.

20. **Игра производства.** Введем в игру m ресурсов. Игрок i обладает некоторым набором ресурсов w_i. Из любого набора ресурсов можно произвести товаров на некоторую (возможно, нулевую) сумму, которая задается производственной функцией $f(w)$. Выигрыш коалици S равен

$$v(S) = f\left(\sum_{i \in S w_i}\right),$$

т.е. тому, что может произвести коалиция S, объединив свои ресурсы.

а) Как записать игру "потоки в сетях", как игру производства?

б) Докажите, что если игра производственная функция вогнута и однородна со степенью 1, то соответствующая кооперативная игра сбалансированна и, следовательно, имеет непустое ядро.

21. Докажите, что игра v супермодулярна тогда и только тогда, когда для любых коалиций $S \subset T$ и любого игрока $i \notin T$

$$v(S+i) - v(S) \leq v(T+i) - v(T).$$

Это свойство называется "эффект снежного кома". Подумайте, почему оно разумно.

22. Игра голосования-2. n избираетелей имеют строгие предпочтения относительно m кандидатов. Исход игры — выбор одного из кандидатов. коалиция может заблокировать кандидата А, если в ней больше половины избирателей и существует кандидат В, которого все избиратели, входящие в коалицию, считают лучше А. Будет ли в этой игре ядро при таких предпочтениях избирателей:

$$\textbf{а)} \quad n = m = 3; \quad \begin{array}{l} P(1) = A, B, C; \\ P(2) = B, C, A; \\ P(3) = C, A, B; \end{array}$$

$$\textbf{б)} \quad n = m = 3; \quad \begin{array}{l} P(1) = A, B, C; \\ P(2) = B, A, C; \\ P(3) = C, A, B; \end{array}$$

в) $n = 4, m = 3;\quad \begin{array}{l} P(1) = A, B, C; \\ P(2) = B, C, A; \\ P(3) = C, A, B; \\ P(4) = A, B, C; \end{array}$

г) $n = 4, m = 3;\quad \begin{array}{l} P(1) = A, B, C; \\ P(2) = B, C, A; \\ P(3) = C, A, B; \\ P(4) = A, C, B; \end{array}$

д) $n = 5, m = 3;\quad \begin{array}{l} P(1) = A, B, C; \\ P(2) = B, C, A; \\ P(3) = C, A, B; \\ P(4) = A, B, C; \\ P(5) = B, C, A; \end{array}$

е) Докажите, что если n нечетно, ядро состоит не более, чем из одного элемента.

ж) Опишите, какм условиям должен удовлетворять этот кандидат. Он называется **победителем Кондорсе**.

Индексы влияния

23. В следующих голосованиях с квотой и вычислите индексы Банцафа и Шепли—Шубика:

а) $(51; 35, 35, 30)$,

б) $(20; 10, 10, 1)$,

в) $(3; 1, 1, 1, 2)$,

г) $(20; 10, 10, 10, 1)$,

д) $(51; 26, 26, 26, 22)$,

е) $(51; 40, 30, 20, 10)$,

ж) $(12; 5, 5, 2, 2, 1)$,

з) $(16; 9, 9, 7, 3, 1, 1)$,

и) $(6; 1, 1, 1, 2, 3, 3)$,

к) $(5; 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$,

л) $(6; 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

м) $(11; 4, 4, 4, 4, 1, 1, 1, 1)$;

н) $(11; 6, 5, 4, 3, 2, 1)$.

24. Приведите пример 10 неотрицательных рациональных чисел, дающих в сумме 1, которые не могут быть индексами влияния

а) Банцафа;

б) Шепли—Шубика

для простой игры с 10 участниками.

25. Проверьте, выполняется ли теорема о среднем для индекса Банцафа на примере

а) игры $(q; 3, 1, 1)$;

б) ГД РФ.

26. Докажите теорему о среднем в случае

а) суммы, а не интеграла;

б) интегрирования не от 0, а от половины суммы всех голосов.

Парадоксы влияния

Основная идея пропорционального представительства состоит в том, что число мест в парламенте, полученное партией в результате выборов, должно быть пропорционально числу избирателей, проголосовавших за эту партию. Можно предположить, что и влияние партии (что бы мы под ним не понимали) должно быть пропорционально числу полученных ею мест в парламенте. Однако, в противоречии с интуицией, влияние не может быть пропорционально числу голосов.

Например, в голосованиях с квотой $(51; 33, 33, 33)$ и $(51; 49, 48, 3)$ для принятия решения необходима поддержка двух или трех партий, т.е. влияние всех партий одинаково. Но распределение голосов разительно отличается.

Более того, невозможно так изменить избирательную систему, чтобы влияние партии (какой бы индекс влияния под ним не понимался бы) было пропорционально числу поданных за нее голосов. Действительно, если партий только две (A и B), то числа голосов, поданных за них, могут соотноситься как угодно, но простых игр (если считать, что $v(\varnothing) = 0$, $v(N) = 1$) возможно только 4:

1-2) Если $v(\{A\}) = v(\{B\}) = 0$ или $v(\{A\}) = v(\{B\}) = 1$, то по аксиоме анонимности влияния партий равны;

3-4) Если $v(\{A\}) = 1$, $v(\{B\}) = 0$ или наоборот, то партия B (соответственно, A) будет болваном в игре v и по аксиоме болвана ее влияние будет равно 0.

Итак, влияние либо делится поровну, либо полностью достается одной из партий, распределение влияния, например, "60 на 40" невозможно.

Приведенные ниже свойства влияния встречаются реже, но изначально описывались именно как парадоксы.

Парадокс размера (Paradox of size) Пусть простая игра записана, как голосование с квотой. Представим себе, что два игрока решили объединить свои голоса. Тогда логично предположить, что их влияние должно быть не меньше, чем сумма их влияний в исходной игре. Но это не всегда так.

27. Приведите пример для индекса Шепли—Шубика.

Более того, возможно усиление этого парадокса.

Парадокс блокирования. В этой же ситуации логично ожидать, что влияние образовавшегося блока не меньше влияния любого из игроков в исходной игре. Но и это утверждение в общем случае неверно.

Рассмотрим голосование с квотой $(11; 6, 5, 1, 1, 1, 1, 1)$. Пусть блок образуют первый и последний игроки, т.е. игра становится голосованием с квотой $(11; 7, 5, 1, 1, 1, 1)$.

28. Вычислите индекс Банцафа в обеих играх и убедитесь в парадоксе.

Парадокс перераспределения. В результате перераспределения голосов участников голосования с квотой может случиться так, что число голосов одного из игроков уменьшится, но его влияние увеличится.

Рассмотрим два голосования с квотой — (8;3,3,3) и (8;6,2,1). Второе голосование можно получить из первого, передав первому игроку два голоса от третьего и один от второго.

29. Вычислите индексы Банцафа и Шепли-Шубика в обеих играх и убедитесь в парадоксе.

Парадокс нового участника. Представим себе, что к голосованию с квотой добавили нового участника с некоторым числом голосов, причем ни квота, ни число голосов других участников не изменилось. Тогда "по справедливости" влияние "старых участников" должно либо уменьшиться, либо не измениться. Но это не всегда так.

Рассмотрим голосование с квотой $(5; 3, 2, 2)$ и добавим к нему четвертого игрока с одним голосом.

30. Вычислите индексы Банцафа и Шепли-Шубика в обеих играх и убедитесь в парадоксе.