Лабораторная работа № 1
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ MS EXCEL

Цель работы: закрепить навыки постановки типовых задач линейного программирования и освоить методику их решения на основе использования табличного процессора MS Excel.

Краткие теоретические сведения

Ежедневно специалисты в области экономики и менеджмента сталкиваются с задачами оптимизации. Это и премирование штатного расписания, и расчет фонда заработной платы, и планирование рекламной кампании, и еще множество задач, решаемых с помощью методов оптимизации. Наиболее легкими и показательными являются задачи линейной оптимизации.

Линейное программирование – это раздел высшей математики, занимающийся разработкой методов поиска экстремальных значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения.

Задачи линейного программирования относятся к задачам на условный экстремум функции. Однако для исследования линейной функции многих переменных на условный экстремум нельзя применить хорошо разработанные методы математического анализа.

Действительно, пусть необходимо исследовать на экстремум линейную функцию $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ при линейных ограничениях $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ $(i = \overline{1, m})$. Необходимым условием экстремума является $\partial Z / \partial x_j = 0$ $(j = \overline{1, n})$. Но $\partial Z / \partial x_j = c_j$. Отсюда $c_j = 0$ $(j = \overline{1, n})$. Так как все коэффициенты линейной функции не могут быть равны нулю, то внутри области, образованной системой ограничений, экстремальные точки не существуют. Они могут быть только на границе области.

Для решения таких задач разработаны специальные методы линейного программирования, которые особенно широко применяются в экономике.

2.1. Линейная оптимизационная задача

Контрольный пример

Для производства столов и шкафов мебельная фабрика использует необходимые ресурсы. Нормы затрат ресурсов на одно изделие данного вида, прибыль от реализации одного изделия и общее количество имеющихся ресурсов каждого вида приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на одно изделие		Общее количество ресурсов
	Стол	Шкаф	
Древесина 1 вида	0,2	0,1	40
Древесина 2 вида	0,1	0,3	60
Трудоемкость (человеко-часов)	1,2	1,5	371,4
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	6	8	

Определить, сколько столов и шкафов фабрике следует изготовлять, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

Решение

Для решения этой задачи необходимо построить математическую модель. Процесс построения модели можно начать с ответа на следующие три вопроса:

1. Для определения каких величин строится модель?
2. В чем состоит цель, для достижения которой из множества всех допустимых значений переменных выбираются оптимальные?
3. Каким ограничениям должны удовлетворять неизвестные?

В данном случае мебельной фабрике необходимо спланировать объем производства столов и шкафов так, чтобы максимизировать прибыль. Поэтому переменными являются: x1 – количество столов, x2 – количество шкафов

Суммарная прибыль от производства столов и шкафов равна $z=6\,x1+8\,x2$. Целью фабрики является определение среди всех допусти-мых значений x1 и x2 таких, которые максимизируют суммарную при-быль, т.е. целевую функцию z.

Ограничения, которые налагаются на x1 и x2:

- объем производства шкафов и столов не могут быть отрицательным, следовательно $x1, x2 \geq 0$.
- нормы затрат древесины на столы и шкафы не могут превосходить максимально возможный запас данного исходного продукта, следовательно

$$0{,}2x1+0{,}1x2\leq 40,$$

$$0,1x1+0,3x2 \le 60.$$

Кроме того, ограничение на трудоемкость не превышает количества затрачиваемых ресурсов:

$$1,2x1+1,5x2 \le 371,4.$$

Таким образом, математическая модель данной задачи имеет следующий вид:
максимизировать функцию

$$z=6x1+8x2$$

при следующих ограничениях:

$$0,2x1+0,1x2 \le 40$$

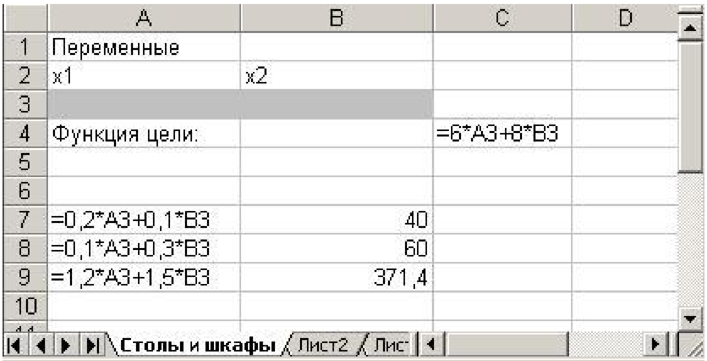
$$0,1x1+0,3x2 \le 60$$

$$1,2x1+1,5x2 \le 371,4.$$

Данная модель является линейной, т.к. целевая функция и ограничения линейно зависят от переменных.

Решение задачи с помощью MS Excel

1. Отвести ячейки А3 и В3 под значения переменных x1 и x2 (рис. 2.1).



	A	B	C	D
1	Переменные			
2	x1	x2		
3				
4	Функция цели:		=6*A3+8*B3	
5				
6				
7	=0,2*A3+0,1*B3	40		
8	=0,1*A3+0,3*B3	60		
9	=1,2*A3+1,5*B3	371,4		
10				

Рис. 2.1. Диапазоны, отведенные под переменные,
целевую функцию и ограничения

2. В ячейку С4 ввести функцию цели: =6 А3+8 В3, в ячейки А7:А9 ввести левые части ограничений:

$$=0,2 \cdot A3+0,1 \cdot B3$$

$$=0,1 \cdot A3+0,3 \cdot B3$$

$$=1,2 \cdot A3+1,5 \cdot B3,$$

а в ячейки В7:В9 – правые части ограничений (рис. 2.1).

3. Выбрать команду **Сервис/Поиск решения** (Tools/Solver) и заполнить открывшееся диалоговое окно **Поиск решения** (Solver) так, как показано на рис. 2.2. Средство поиска решений является одной из надстроек Excel. Если в меню **Сервис** (Too1s) отсутствует команда **Поиск решения** (Solver), то для ее установки необходимо выполнить команду **Сервис/ Надстройки/ Поиск решения** (Tools/Add-ins/Solver). Для ввода ограничений нажмите кнопку **Добавить**.

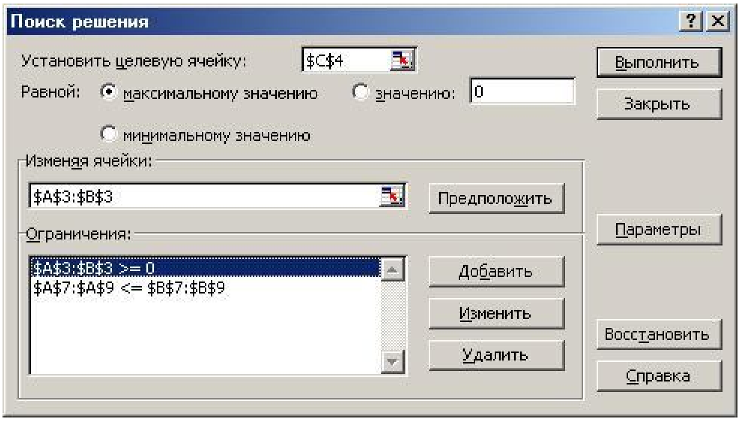


Рис. 2.2. Диалоговое окно **Поиск решения**
задачи о максимизации прибыли на фабрике

Внимание! В диалоговом окне **Параметры поиска решения** (Solver Options) необходимо установить флажок **Линейная модель** (Assume Linear Model) (рис. 2.3).

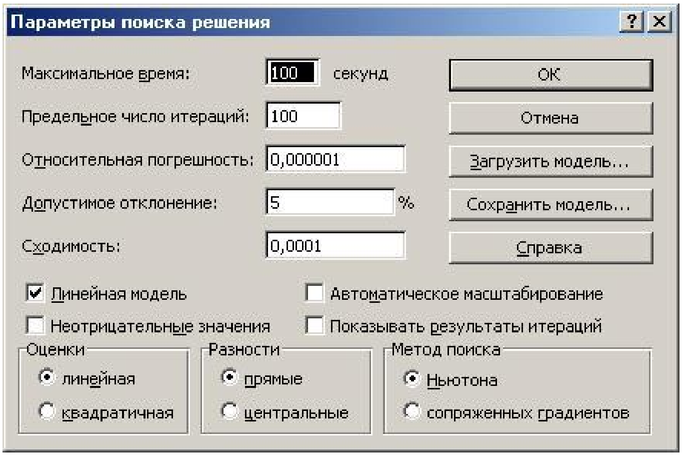


Рис. 2.3. Диалоговое окно **Параметры поиска решения**

4. После нажатия кнопки **Выполнить** (Solve) открывается окно **Результаты поиска решения** (Solver Results), которое сообщает, что решение найдено (рис. 2.4).

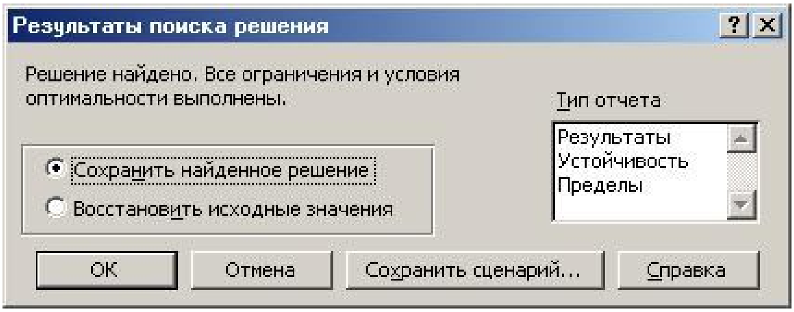


Рис. 2.4. Диалоговое окно **Результаты поиска решения**

5. Результаты расчета задачи представлены на рис. 2.5, из которого видно, что оптимальным является производство 102 столов и 166 шкафов. Этот объем производства принесет фабрике 1940 руб. прибыли.

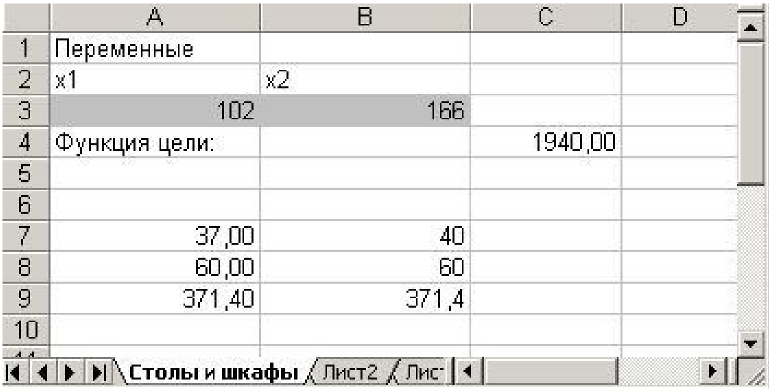


Рис. 2.5. Результаты расчета с помощью средства поиска решений для задачи максимизации выпуска столов и шкафов

Индивидуальное задание

1. Построить математическую модель задачи согласно вашему варианту.
2. Решить задачу с помощью средства MS Excel **Поиск решения**.
3. Сделать соответствующие выводы.

Вариант 1

Для производства двух видов изделий А и В используется токарное, фрезерное и шлифовальное оборудование. Нормы затрат времени для каждого из типов оборудования на одно изделие данного вида приведены в табл. 2.2. В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия.

Таблица 2.2

Тип оборудования	Затраты времени (станко-часов) на обработку одного изделия		Общий фонд полезного рабочего времени
	А	В	
Фрезерное Токарное Шлифовальное	10 5 6	8 10 12	168 180 144
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	14	18	

Определить план выпуска изделий вида А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации.

Вариант 2

На звероферме могут выращиваться черно-бурые лисицы и песцы. Для обеспечения нормальных условий их выращивания используется три вида кормов. Количество корма каждого вида, которое должны ежедневно получать лисицы и песцы, приведено в табл. 2.3. В ней же указаны общее количество корма каждого вида, которое может быть использовано зверофермой, и прибыль от реализации одной шкурки лисицы и песца.

Найти оптимальное соотношение количества кормов и численности поголовья лис и песцов.

Таблица 2.3

Вид корма	Количество единиц корма, которое ежедневно должны получать		Общее количество корма
	А	В	
Вид 1 Вид 2 Вид 3	2 4 6	3 1 7	180 240 426
Прибыль от реализации одной шкурки (руб.)	16	12	

Вариант 3

Для изготовления различных изделий A, B и C предприятие использует три разных вида сырья. Нормы расхода сырья на производство одного изделия каждого вида, цена одного изделия A, B и C, а также общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано предприятием, приведены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

Вид сырья	Норма затрат сырья (кг) на одно изделие			Общее количество сырья (кг)
	A	B	C	
Вид 1 Вид 2 Вид 3	18 6 5	15 4 3	12 8 3	360 192 180
Цена одного изделия (руб.)	9	10	16	

Изделия A, B и C могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), но производство ограничено выделенным предприятию сырьем каждого вида.

Составить план производства изделий, при котором общая стоимость всей произведенной предприятием продукции является максимальной.

Вариант 4

На швейной фабрике для изготовления четырех видов изделий может быть использована ткань трех артикулов. Нормы расхода тканей всех артикулов на пошив одного изделия приведены в табл. 2.5. В ней же указаны имеющиеся в распоряжении фабрики общее количество тканей каждого артикула и цена одного изделия данного вида.

Таблица 2.5

Артикул ткани	Норма расхода ткани (м) на одно изделие вида				Общее количество ткани (м)
	Вид 1	Вид 2	Вид 3	Вид 4	
Артикул 1 Артикул 2 Артикул 3	1 - 4	- 1 2	2 3 -	1 2 4	180 210 800
Цена одного изделия (руб.)	9	6	4	7	

Определить, сколько изделий каждого вида должна произвести фабрика, чтобы стоимость изготовленной продукции была максимальной.

Вариант 5

Фабрика «GRM pie» выпускает два вида каш для завтрака – «Crunchy» и «Chewy». Используемые для производства обоих продуктов ингредиенты в основном одинаковы и, как правило, не являются дефицитными.

Основным ограничением, накладываемым на объем выпуска, является наличие фонда рабочего времени в каждом из трех цехов фабрики.

Управляющему производством Джою Дисону необходимо разработать план производства на месяц. В табл. 2.6 указаны общий фонд рабочего времени и число человеко-часов, требуемое для производства 1 т продукта.

Таблица 2.6

Цех	Необходимый фонд рабочего времени, чел.-ч./г		Общий фонд рабочего времени, чел.-ч. в месяц
	«Crunchy»	«Chewy»	
А. Производство	10	4	1000
В. Добавка приправ	3	2	360
С. Упаковка	2	5	600

Доход от производства 1 т «Crunchy» составляет 150 ф. ст., а от производства «Chewy» – 75 ф. ст. На настоящий момент нет никаких ограничений на возможные объемы продаж. Имеется возможность продать всю произведенную продукцию.

Требуется сформулировать модель линейного программирования, максимизирующую общий доход фабрики за месяц, и реализовать решение этой модели.

Вариант 6

Оливер А. Петерс скоро уйдет на пенсию, и ему предстоит решить, как поступить с единовременным пособием, которое в соответствии с пенсионной программой будет предоставлено ему фирмой. М-р Петерс и его супруга намерены предпринять длительную поездку в Австралию к своей дочери сроком на два года, поэтому любые сделанные в настоящий момент инвестиции будут свободны для использования на данный период. Очевидно, цель м-ра Петерса состоит в максимизации общего дохода от вложений, полученного за двухлетний период.

Мистера Петерса проконсультировали, что наилучшим вариантом вложения инвестиций был бы инвестиционный фонд, и в настоящее время он рассматривает возможность помещения инвестиций в один из таких фондов, состоящий из инвестиций трех типов – A, B и C. Сумма единовременного пособия составит 25000 ф. ст., однако мистер Петерс считает, что нет необходимости вкладывать в данный инвестиционный фонд все деньги; часть из них он намерен перевести на свой счет жилищ-но-строительного кооператива, который гарантирует ему 9% годовых.

По мнению бухгалтера фирмы, мистеру Петерсу следует попытаться распределить свои инвестиции таким образом, чтобы обеспечить как получение дохода, так и рост капитала. Поэтому ему посоветовали не менее 40% от общей суммы вложить в вариант A и перевести на свой счет. Для обеспечения значительного роста капитала не менее 25% общей суммы денежных средств, вложенных в инвестиционный фонд, необходимо поместить в проект B, однако вложения в B не должны превышать 35% общего объема вложений в инвестиционный фонд ввиду высокой вероятности риска, соответствующей проекту B. Кроме того, для сохранности капитала в проекты A и C следует вложить не менее 50% средств, помещаемых в инвестиционный фонд.

В настоящее время проект A позволяет получать 10% годовых и обеспечивает 1% роста капитала, проект B предполагает рост капитала в 15%; проект C дает 4% годовых и 5%-й рост капитала.

Требуется, учитывая цель м-ра Петерса, сформулировать модель линейного программирования, показывающую, как следует распределить сумму единовременного пособия между различными проектами инвестиций.

Вариант 7

Китайская компания с ограниченной ответственностью по производству гусеничных механизмов выпускает пять сходных друг с другом товаров – A, B, C, D и E. В табл. 2.7 представлены расходы ресурсов, необходимых для выпуска единицы каждого товара, а также недельные запасы каждого ресурса и цены продажи единицы каждого продукта.

Таблица 2.7

Ресурсы	Товар					Недельный запас ресурсов
	A	B	C	D	E	
Сырье, кг	6,00	6,50	6,10	6,10	6,40	35000
Сборка, ч	1,00	0,75	1,25	1,00	1,00	6000
Обжиг, ч	3	4,50	6	6	4,50	30000
Упаковка, ч	0,50	0,50	0,50	0,75	1,00	4000
Цена продажи, ф. ст.	40	42	44	48	52	

Известны также издержки, связанные с использованием каждого вида ресурсов:

сырье – 2,10 ф. ст. за 1 кг;

сборка – 3,00 ф. ст. за 1 ч;

обжиг – 1,30 ф. ст. за 1 ч;

упаковка – 8,00 ф. ст. за 1 ч.

Требуется сформулировать задачу линейного программирования таким образом, чтобы в качестве переменных как целевой функции, так и ограничений выступали ресурсы. Кратко сформулировать предпосылки применения модели. Для максимизации элементов, составляющих прибыль за неделю, следует использовать компьютерный пакет прикладных программ.

Вариант 8

Нефтяная компания «РТ» для улучшения эксплуатационных качеств и снижения точки замораживания дизельного топлива, которое она производит, добавляет в него определенные химикаты. В каждом бензобаке объемом 1000 л должно содержаться не менее 40 мг химической добавки X, не менее 14 мг химической добавки Y и не менее 18 мг химической добавки Z. Необходимые химические добавки в форме готовых смесей поставляют «РТ» две химические компании A и B. В табл. 2.8 приведено содержание химических добавок в каждом продук-те, поставляемом указанными компаниями.

Таблица 2.8

Продукт	Химические добавки, мг/л		
	X	**У**	**Z**
A	4	2	3
B	5	1	1

Стоимость продукта A – 1,50 ф. ст. за 1 л, а продукта B – 3,00 ф. ст. за 1 л. Требуется найти ассортиментный набор продуктов A и B, минимизирующий общую стоимость добавленных в топливо химикатов.

Вариант 9

Администрация компании «Nemesis Company», осуществляя рационализаторскую программу корпорации, приняла решение о слиянии двух своих заводов в Аббатсфилде и Берчвуде. Предусматривается закрытие завода в Аббатсфилде и за счет этого – расширение производственных мощностей предприятия в Берчвуде. На настоящий момент распределение рабочих высокой и низкой квалификации, занятых на обоих заводах, является следующим (табл. 2.9).

Таблица 2.9

Квалификация	Аббатсфилд	Берчвуд
Высокая Низкая	200 300	100 200
Итого	500	300

В то же время после слияния завод в Берчвуде должен насчитывать 240 рабочих высокой и 320 рабочих низкой квалификации.

После проведения всесторонних переговоров с привлечением руководителей профсоюзов были выработаны следующие финансовые соглашения:

1. Все рабочие, которые попали под сокращение штатов, получат выходные пособия следующих размеров:

Квалифицированные рабочие – 2000 ф. ст.;

Неквалифицированные рабочие – 1500 ф. ст.

2. Рабочие завода в Аббатсфилде, которые должны будут переехать, получат пособие по переезду в размере 2000 ф. ст.

3. Во избежание каких-либо преимуществ для рабочих Берчвудского завода доля бывших рабочих завода в Аббатсфилде на новом предпри-ятии должна совпадать с долей бывших рабочих Берчвудского завода.

Требуется построить модель линейного программирования, в которой определяется, как осуществить выбор работников нового предприятия из числа рабочих двух бывших заводов таким образом, чтобы минимизировать общие издержки, связанные с увольнением и переменой места жительства части рабочих. В процессе формализации следует использовать следующие переменные:

S1 – число квалифицированных рабочих, переведенных на новую работу с завода в Аббатсфилде,

S2 – число квалифицированных рабочих, переведенных на новую работу с завода в Берчвуде;

U1 – число неквалифицированных рабочих, переведенных на новую работу с завода в Аббатсфилде;

U2 – число неквалифицированных рабочих, переведенных на новую работу с завода в Берчвуде.

Вариант 10

Компания «Bermuda Paint» – частная промышленная фирма, специализирующаяся на производстве технических лаков. Представленная ниже табл. 2.10 содержит информацию о ценах продажи и соответствующих издержках производства единицы полировочного и матового лаков.

Таблица 2.10

Лак	Цена продажи 1 галлона, ф. ст.	Издержки производства 1 галлона, ср. ст.
Матовый	13,0	9,0
Полировочный	16,0	10,0

Для производства 1 галлона матового лака необходимо затратить 6 мин трудозатрат, а для производства одного галлона полировочного ла-ка – 12 мин. Резерв фонда рабочего времени составляет 400 чел.-ч. в день. Размер ежедневного запаса необходимой химической смеси равен 100 ун-циям, тогда как ее расход на один галлон матового и полировочного лаков составляет 0,05 и 0,02 унции соответственно. Технологические возможности завода позволяют выпускать не более 3000 галлонов лака в день.

В соответствии с соглашением с основным оптовым покупателем компания должна поставлять ему 5000 галлонов матового лака и 2500 гал-лонов полировочного лака за каждую рабочую неделю (состоящую из 5 дней). Кроме того, существует профсоюзное соглашение, в котором ого-варивается минимальный объем производства в день, равный 2000 галло-нов. Администрации данной компании необходимо определить еже-дневные объемы производства каждого вида лаков, которые позволяют получать максимальный общий доход.

Требуется построить и решить линейную модель для производственной проблемы, с которой столкнулась компания. Для исходной задачи (не учитывающей сверхурочные работы) определить промежуток изменения показателя единичного дохода за 1 галлон полировочного лака, в котором исходное оптимальное решение остается прежним.

2.2. Транспортная задача

Контрольный пример

Фирма имеет 4 фабрики и 5 центров распределения ее товаров. Фабрики фирмы располагаются в Денвере, Бостоне, Новом Орлеане и Далласе с производственными возможностями 200, 150, 225 и 175 единиц продукции ежедневно соответственно. Центры распределения товаров фирмы располагаются в Лос-Анджелесе, Далласе, Сент-Луисе, Вашингтоне и Атланте с потребностями в 100, 200, 50, 250 и 150 единиц продукции ежедневно соответственно. Хранение на фабрике единицы продукции, не поставленной в центр распределения, обходится в $0,75 в день, а штраф за просроченную поставку единицы продукции, заказанной потребителем в центре распределения, но там не находящейся, равен $2,5 в день. Стоимость перевозки единицы продукции с фабрик в пункты распределения приведена в табл. 2.14.

Таблица 2.14

		1	2	3	4	5
		Лос-Анджелес	Даллас	Сен-Луис	Вашингтон	Атланта
1	Денвер	1,50	2,00	1,75	2,25	2,25
2	Бостон	2,50	2,00	1,75	1,00	1,50
3	Новый Орлеан	2,00	1,50	1,50	1,75	1,75
4	Даллас	2,00	0,50	1,75	1,75	1,75

Необходимо так спланировать перевозки, чтобы минимизировать суммарные транспортные расходы.

Поскольку данная модель сбалансирована (суммарный объем произведенной продукции равен суммарному объему потребностей в ней), то в этой модели не надо учитывать издержки, связанные как со складированием, так и с недопоставками продукции. В противном случае в модель нужно было бы ввести:

- в случае перепроизводства – фиктивный пункт распределения, стоимость перевозок единицы продукции в который полагается равной стоимости складирования, а объемы перевозок объемам складирования излишков продукции на фабриках;
- в случае дефицита – фиктивную фабрику, стоимость перевозок единицы продукции с которой полагается равной стоимости штрафов за недопоставку продукции, а объемы перевозок – объемам недопоставок продукции в пункты распределения.

Для решения данной задачи построим ее математическую модель:

$$Z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} c_{ij} x_{ij} .$$

Неизвестными в данной задаче являются объемы перевозок. Пусть x_{ij} – объем перевозок с i-й фабрики в j-й центр распределения. Функция цели – это суммарные транспортные расходы, т. е. где c_{ij} – стоимость перевозки единицы продукции с i-й фабрики j-й центр распределения.

Неизвестные в данной задаче должны удовлетворять следующим ограничениям:

- Объемы перевозок не могут быть отрицательными.
- Так как модель сбалансирована, то вся продукция должна быть вывезена с фабрик, а потребности всех центров распределения должны быть полностью удовлетворены.

В результате имеем следующую модель:

$$Z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} c_{ij} x_{ij}$$ – минимизировать при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = b_{ij} , j \in [1,5]$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i \in [1,4],\ j \in [1,5$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = a_i , i \in [1,4],$$

где a_{ij} – объем производства на i-й фабрике, bj – спрос в j-м центре распределения.

Решение задачи с помощью MS Excel

1. Ввести данные, как показано на рис. 2.6.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1,5	2	1,75	2,25	2,25			
2	2,5	2	1,75	1	1,5			
3	2	1,5	1,5	1,75	1,75			
4	2	0,5	1,75	1,75	1,75			
5								
6						0	200	
7						0	150	
8						0	225	
9						0	175	
10	0	0	0	0	0	0		
11	100	200	50	250	150			
12								

Транспортная задача / Лист3

Рис. 2.6. Исходные данные транспортной задачи

В ячейки A1:E4 введены стоимости перевозок. Ячейки A6:E9 отведены под значения неизвестных (объемы перевозок). В ячейки G6:G9 введены объемы производства на фабриках, а в ячейки A11:E11 введена потребность в продукции в пунктах распределения. В ячейку F10 введена целевая функция =СУММПРОИЗВ(A1:E4; A6:E9).

В ячейки A10:E10 введены формулы

=СУММ(A6:A9)

=СУММ(B6:B9)

=СУММ(C6:C9)

=СУММ(D6:D9)

=СУММ(E6:E9), определяющие объем продукции, ввозимой в центры распределения.

В ячейки F6:F9 введены формулы

=СУММ(A6:E6)

=СУММ(A7:E7)

=СУММ(A8:E8)

=СУММ(A9:E9), вычисляющие объем продукции, вывозимой с фабрик.

2. Выбрать команду **Сервис/Поиск решения** (Tools/Solver) и заполнить открывшееся диалоговое окно **Поиск решения** (Solver), как показано на рис. 2.7.

Внимание! В диалоговом окне **Параметры поиска решения** (Solver Options) необходимо установить флажок **Линейная модель** (Assume Linear Model).

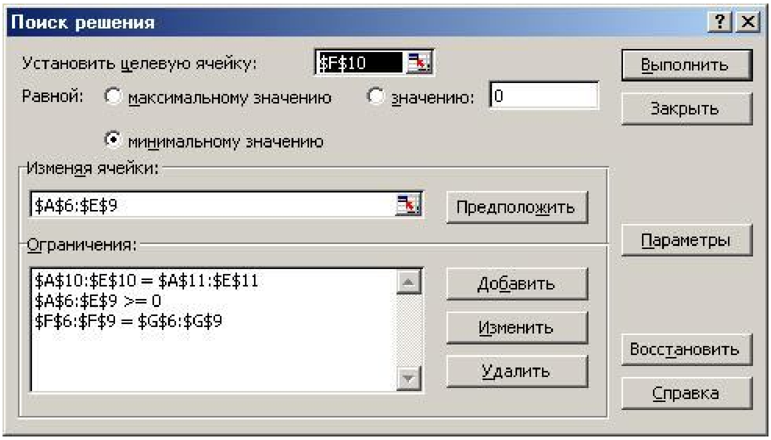
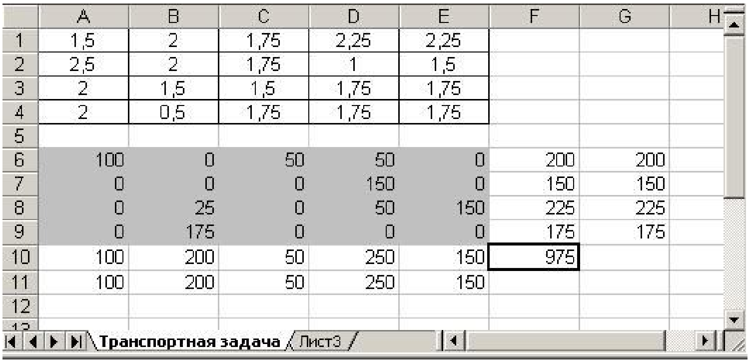


Рис. 2.7. Диалоговое окно **Поиск решения** для транспортной задачи

3. После нажатия кнопки **Выполнить** (Solve) средство поиска решений находит оптимальный план поставок продукции и соответствующие ему транспортные расходы (рис. 2.8).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1,5	2	1,75	2,25	2,25			
2	2,5	2	1,75	1	1,5			
3	2	1,5	1,5	1,75	1,75			
4	2	0,5	1,75	1,75	1,75			
5								
6	100	0	50	50	0	200	200	
7	0	0	0	150	0	150	150	
8	0	25	0	50	150	225	225	
9	0	175	0	0	0	175	175	
10	100	200	50	250	150	975		
11	100	200	50	250	150			
12								

Рис. 2.8. Оптимальное решение транспортной задачи

Индивидуальное задание

1. Построить математическую модель задачи согласно вашему варианту.
2. Решить задачу с помощью средства MS Exscel **Поиск решения**.
3. Сделать соответствующие выводы.

Вариант 1

Решить транспортную задачу со следующими условиями (табл. 2.15).

Таблица 2.15

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B1	B2	B3	B4	
A1	3	4	6	1	460
A2	5	1	2	3	340
A3	4	5	8	1	300
Потребности	350	200	450	100	

Вариант 2

Для строительства трех объектов используется кирпич, изготовляемый на трех заводах. Ежедневно каждый из заводов может изготовлять 100, 150 и 50 усл. ед. кирпича. Ежедневные потребности в кирпиче на каждом из строящихся объектах соответственно равны 75, 80, 60 и 85 усл. ед. Известны также тарифы перевозок 1 усл. ед. кирпича с каждого с заводов к каждому из строящихся объектов:

$$\begin{array}{r} \\ C = \\ 8\ 10 \end{array}\begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ & 20 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок кирпича к строящимся объектам, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Вариант 3

На трех железнодорожных станциях скопилось 120, 110 и 130 незагруженных вагонов. Эти вагоны необходимо перегнать на железнодорожные станции В1, В2, В3, В4 и В5. На каждой из этих станций потребность в вагонах соответственно равна 80, 60, 70, 100 и 50. Тарифы перевозок задаются матрицей

$$\begin{array}{r} \\ C = \\ 8\ 9 \end{array}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & & 3 & & \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ 4 \end{array}.$$

Составить такой план перегонок вагонов, при котором общая стоимость была бы минимальной.

Вариант 4

Компания «Royal Wedgetoun Pottery» специализируется на выпуске трех видов продукции (бокалы, чашки и вазы). Она получила заказы, которые необходимо выполнить в течение следующей недели. Размеры заказов следующие:

Продукт	Размер заказа, единиц
Бокалы	4000
Чашки	2400
Вазы	1000

В распоряжении компании имеются три станка, на каждом из которых можно выпускать любой из указанных видов продукции с одинаковой производительностью. Однако единичные затраты по каждому виду продукции варьируют в зависимости от используемого станка. В табл. 2.16 приведены единичные издержки (ф. ст.) по каждому станку:

Таблица 2.16

Станок	Бокалы	Чашки	Вазы
A	1,20	1,30	1,10
B	1,40	1,30	1,50
C	1,10	1,00	1,30

Кроме того, известно, что производственные мощности станков B и C на следующую неделю составят 3000 единиц, а станка A – 2000 единиц.

Требуется, используя транспортную модель, найти план производства для видов продукции и станков, минимизирующий общую стоимость производства. Определить значение минимальной стоимости.

Если найденное оптимальное решение не единственное, нужно привести другие варианты решений, которым соответствует минимальная стоимость производства. Если бы менеджер по производству захотел, чтобы в производственном плане было как можно меньше изменений в производстве изделий на различных станках, то какое оптимальное решение вы бы порекомендовали?

Вариант 5

Компания «Orange Computer» производит только один вид продукции – матричные печатающие устройства, которые в настоящее время являются дефицитом. Четыре основных покупателя – это крупные специализированные компьютерные универмаги, расположенные в Аббатстауне, Бесвиче, Карлике и Денстоуне, уже подали заявки, общий размер которых превышает общие производственные мощности трех заводов компании в Рексфорде, Сидоне и Тристроне. Компания должна принять решение о том, как распределить производственные мощности, чтобы получить максимальную прибыль. После того, как каждый принтер тщательно упакован в мягкую упаковку, предохраняющую его от каких-либо повреждений, его помещают в отдельную коробку. В табл. 2.17 приведены значения стоимости транспортировки одной единицы от каждого завода-производителя в каждый специализированный универмаг (ф. ст.):

Таблица 2.17

	«Аббатстаун»	«Бесвич»	«Карлик»	«Денстоун»
Рексфорд	22	24	22	30
Сидон	24	20	18	28
Тристрон	26	20	26	24

Поскольку все четыре специализированных универмага расположены в различных частях страны и, следовательно, стоимость транспортировки продукции между заводами-производителями и универмагами различна, а также ввиду некоторых различий в издержках производства каждого из четырех заводов, существующая структура цен предусматривает возможность установления различных цен для каждого из четырех универмагов. В настоящее время установлены следующие цены за единицу продукции: 230 ф. ст. в Аббатстауне, 235 ф. ст. в Бесвиче, 225 ф. ст. в Карлике и 240 ф. ст. в Денстоуне. Издержки производства на единицу продукции составляют 150 ф. ст. на заводах в Рексфорде и Тристроне и 155 ф. ст. на заводе в Сидоне.

Требуется сформировать матрицу, состоящую из входящих в прибыль единичных доходов, соответствующих каждой паре перевозок с заводов-производителей в универмаги.

Значения спроса в Аббатстауне, Бесвиче, Карлике и Денстоуне равны 850, 640, 380 и 230 единицам соответственно. Производственные мощности позволяют производить на заводе в Рексфорде 625, в Сидо-не – 825, а в Тристроне – 450 принтеров. Используя алгоритм решения транспортной задачи, определить оптимальное распределение перевозок. Определить соответствующую оптимальному решению прибыль.

Вариант 6

Решить транспортную задачу со следующими условиями (табл. 2.18).

Таблица 2.18

Мощности поставщиков	Мощности потребителей			
	250	100	150	50
80	6	6	1	4
320	8	30	6	5
100	5	4	3	30
50	9	9	9	9

Вариант 7

Решить транспортную задачу. А – вектор мощностей поставщиков, В – вектор мощностей потребителей, С – матрица транспортных издержек на единицу груза:

$$A = (300;\ 350;\ 150;\ 200)$$

$$B = (400;\ 400;\ 200)$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вариант 8

Решить транспортную задачу. А – вектор мощностей поставщиков, В – вектор мощностей потребителей, С – матрица транспортных издержек на единицу груза:

$$A = (20;\ 30;\ 40;\ 20)$$

$$B = (40;\ 40;\ 20)$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 9

Решить транспортную задачу со следующими условиями (табл. 2.19):

Таблица 2.19

Поставщики	Мощность поставщиков	Потребители и их спрос			
		1	2	3	4
		20	110	40	110
1	60	1	2	5	3
2	120	1	6	5	2
3	100	6	3	7	4

Вариант 10

Решить транспортную задачу со следующими условиями (табл. 2.20):

Таблица 2.20

Поставщики	Мощность поставщиков	Потребители и их спрос		
		1	2	3
		60	60	50
1	50	2	3	2
2	70	2	4	5
3	60	6	5	7

Вариант 11

Решить транспортную задачу со следующими условиями (табл. 2.21):

Таблица 2.21

Поставщики	Мощность поставщиков	Потребители и их спрос			
		1	2	3	4
		450	250	100	100
1	200	6	4	4	5
2	300	6	9	5	8
3	100	8	2	10	6

Вариант 12

Решить транспортную задачу со следующими условиями (табл. 2.22):

Таблица 2.22

Мощности поставщиков	Мощности потребителей			
	15	25	8	12
25	2	4	3	6
18	3	5	7	5
12	1	8	4	5
15	4	3	2	8

Вариант 13

Решить транспортную задачу со следующими условиями (табл. 2.23):

Таблица 2.23

Поставщики	Мощность поставщиков	Потребители и их спрос			
		1	2	3	4
		50	50	40	60
1	30	5	4	6	3
2	70	4	5	5	8
3	70	7	3	4	7

Вариант 14

Решить транспортную задачу со следующими условиями (табл. 2.24):

Таблица 2.24

Мощности поставщиков	Мощности потребителей			
	15	25	8	12
95	5	4	13	9
35	2	7	9	8
55	9	7	11	7
75	1	6	1	1

Вариант 15

Решить транспортную задачу со следующими условиями (табл. 2.25):

Таблица 2.25

Мощности поставщиков	Мощности потребителей			
	50	10	20	40
30	5	6	1	2
50	3	1	5	2
20	8	4	2	5
20	6	5	2	4

Контрольные вопросы

1. Какого типа задачи могут быть решены с помощью линейного программирования?
2. Что понимается под оптимальным решением?
3. Что такое условный экстремум функции?
4. Что такое целевая функция?
5. При каких условиях математическую модель можно назвать ли-нейной?
6. Опишите процесс решения задачи линейного программирования средствами MS Excel.
7. Опишите процесс решения средствами транспортной задачи при использовании **Поиск решения** MS Excel.
8. В чем отличие функций минимизации и максимизации при их задании в **Поиске решения** MS Excel?
9. Перечислите отличительные особенности решения транспортной задачи.
10. Опишите процесс формирования системы ограничений при ре-шении задач линейного программирования.