М. Е. Жуковский, Л. Б. Островский, Свойства первого порядка ограниченной кванторной глубины сильно разреженных случайных графов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2017, том 81, выпуск 6, 100–113

DOI: https://doi.org/10.4213/im8557

УДК 519.175.4

М. Е. Жуковский, Л. Б. Островский

Свойства первого порядка ограниченной кванторной глубины сильно разреженных случайных графов

Говорят, что случайный граф подчиняется k-закону нуля или единицы, если для любого свойства, выражаемого формулой первого порядка с кванторной глубиной не более k, вероятность выполнения этого свойства стремится либо к 0, либо к 1. Известно, что случайный граф $G(n,n^{-\alpha})$ подчиняется k-закону нуля или единицы для любого $k\in\mathbb{N}$ и любого положительного иррационального α, а также для любого рационального $\alpha>1$, отличного от $1+1/l$ (для любого натурального числа l). Известно также, что для всех остальных рациональных положительных α при достаточно больших k случайный граф не подчиняется k-закону. В настоящей работе при $\alpha=1+1/l$ получены нижняя и верхняя оценка на наибольшее k, при котором выполнен k-закон нуля или единицы.

Библиография: 20 наименований.

Ключевые слова: случайный граф Эрдеша–Реньи, свойства первого порядка, закон нуля или единицы, игра Эренфойхта.

DOI: https://doi.org/10.4213/im8557

§ 1. Законы нуля или единицы для случайного графа Эрдеша–Реньи

В работе изучается асимптотическое поведение свойств первого порядка случайных графов в модели Эрдеша–Реньи $G(n,p)$ при $p=n^{-\alpha}$, $\alpha>0$.

Пусть $n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant p\leqslant 1$. *Случайный граф в модели Эрдеша–Реньи* [1]–[5] это случайный элемент $G(n,p)$ со значениями во множестве всех неориентированных графов без петель и кратных ребер с множеством вершин $V_n=\{1,\dots,n\}$ и распределением $\mathsf{P}_{n,p}$, определенным формулой

$$\mathsf{P}_{n,p}(G)=p^{|E|}(1-p)^{\binom{n}{2}-|E|}.$$

Говорят, что случайный граф *подчиняется закону нуля или единицы*, если для любого свойства из класса свойств первого порядка $\mathcal{L}$ (см. [4]–[6]) вероятность выполнения этого свойства стремится либо к 0, либо к 1. Рассмотрим класс свойств $\mathcal{L}_k\subset\mathcal{L}$, выражаемых формулами с кванторной глубиной, ограниченной числом k, см. [4], [6]. Если для каждого свойства из этого класса упомянутая вероятность либо стремится к 0, либо к 1, то мы говорим, что случайный граф *подчиняется k-закону нуля или единицы.* В 1988 г. Дж. Спенсер и С. Шела доказали закон нуля или единицы для случайного графа $G(n,n^{-\alpha})$.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 15-01-03530 и РФФИ № 16-31-60052, а также Минобрнауки России (Соглашение № 02.A03.21.0008).

Теорема 1 (см. [7]). *Пусть* α *– иррациональное положительное число. Тогда случайный граф* $G(n, n^{-\alpha})$ *подчиняется закону нуля или единицы. Если* $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]$ *или* $\alpha = 1 + 1/l$ *для некоторого* $l \in \mathbb{N}$, *то граф* $G(n, n^{-\alpha})$ *не подчиняется закону нуля или единицы. Во всех остальных случаях* ($\alpha > 2$ *или* $1 + 1/(l + 1) < \alpha < 1 + 1/l$ *для некоторого* $l \in \mathbb{N}$) *граф* $G(n, n^{-\alpha})$ *подчиняется закону нуля или единицы.*

В 2011 г. М. Е. Жуковский доказал, что при $k \geqslant 3$ и $\alpha \in (0, 1/(k - 2))$ случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k-закону нуля или единицы. Но при этом, если $\alpha = 1/(k-2)$, то случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k-закону нуля или единицы (см. [8], [9]). Что касается значений α, близких к единице, то установлено, что при $k \geqslant 4$ в точках вида $\alpha = 1 - 1/(2^{k-1} + \beta)$, где β – рациональная дробь с числителем, превосходящим 2^{k-1}, k-закон нуля или единицы выполняется, если же β – неотрицательное целое число, не большее $2^{k-1} - 2$, то k-закон нуля или единицы не выполняется (см. [10]). Наконец, в работе [11] доказано, что при $\beta \in \{2^{k-1} - 1, 2^{k-1}\}$ выполнен k-закон.

Таким образом, случай $\alpha \leqslant 1$ является достаточно хорошо изученным (см. также [4], [12]–[14]), и в данной работе мы его не рассматриваем.

Итак, в силу теоремы 1, если $\alpha > 1$ и $\alpha \neq 1 + 1/l$ ни для какого $l \in \mathbb{N}$, то закон нуля или единицы выполнен (а, следовательно, и k-закон для любого натурального k). В данной работе мы отвечаем на вопрос, при каких $l \in \mathbb{N}$ случайный граф $G(n, n^{-1-1/l})$ подчиняется k-закону нуля или единице.

Пусть функция $\mathrm{T}(i)$ определена следующим образом (на множестве натуральных чисел): $\mathrm{T}(0) = 1$, $\mathrm{T}(i) = 2^{T(i-1)}$. Кроме того, для любого натурального числа x обозначим

$$\log^*(x) = \min\{i\colon\ \mathrm{T}(i) \geqslant x\}$$

(т. е. $\log^*(\mathrm{T}(i)) = i$). В § 3 будет доказан следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $k \geqslant 7$ *– натуральное число. Тогда для любого натурального* $l \leqslant 2\,\mathrm{T}(k - 4) - 1$ *случайный граф* $G(n, n^{-1-1/l})$ *не подчиняется* k*-закону нуля или единицы. Более того, существует такая константа* C, *что для любого натурального* $k > 3$ *и* $l \geqslant \mathrm{T}(k + \log^*(k) + 4) + C$ *случайный граф* $G(n, n^{-1-1/l})$ *подчиняется* k*-закону нуля или единицы.*

В основе доказательства лежат методы, которые были использованы в работе [15] при исследовании классов элементарной эквивалентности.

Полное описание чисел $l \in \mathbb{N}$, при которых случайный граф $G(n, n^{-1-1/l})$ подчиняется k-закону нуля или единицы, нам удалось получить при $k = 3$.

Теорема 3. *Случайный граф* $G(n, n^{-1-1/l})$ *не подчиняется* 3*-закону нуля или единицы тогда и только тогда, когда* $l \in \{1, \dots, 6\}$.

Теорема 3 доказана в § 4.

§ 2. Вспомогательные утверждения

В этом разделе мы определим основные понятия, которые помогут при доказательстве нашего результата. Рассмотрим граф $G = (V(G), E(G))$ с v вершинами и e ребрами (здесь и далее мы обозначаем $V(G)$ и $E(G)$ множества вершин и ребер графа G соответственно). Обозначим через $a(G)$ число автоморфизмов графа G. Назовем отношение $\rho(G) = e/v$ *плотностью* графа G.

Граф G называется *сбалансированным*, если для любого $H \subset G$, где H является (необязательно индуцированным) подграфом графа G, выполнено неравенство $\rho(H) \leqslant \rho(G)$. Граф G *строго сбалансированный*, если для любого его собственного подграфа H выполнено строгое неравенство.

Имеет место следующее очевидное утверждение.

Предложение 1. *Любое дерево G является строго сбалансированным.*

Сформулируем теорему о количестве копий произвольного фиксированного строго сбалансированного графа в случайном графе. Положим $\rho_{\max} = \max\{\rho(H)\colon H \subseteq G\}$. Введем случайную величину N_G равную количеству копий произвольного графа G в случайном графе.

Теорема 4 (см. [16], [17]). *Пусть G – произвольный граф. Если $p = o(n^{-1/\rho_{\max}(G)})$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}_{n,p}(N_G > 0) = 0.$$

Если же $n^{-1/\rho_{\max}(G)} = o(p)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}_{n,p}(N_G > 0) = 1.$$

Пусть теперь G – строго сбалансированный граф. Если $n^{-1/\rho(G)} = o(p)$, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}_{n,p}\bigl(|N_G - \mathsf{E}_{n,p}N_G| \leqslant \varepsilon \mathsf{E}_{n,p}N_G\bigr) = 1,$$

где $\mathsf{E}_{n,p}$ – математическое ожидание по мере $\mathsf{P}_{n,p}$. Если же $p = n^{-1/\rho(G)}$, то

$$N_G \xrightarrow{d} \xi \sim \mathrm{Pois}\biggl(\frac{1}{a(G)}\biggr).$$

Для графа введем случайную величину F_G равную количеству копий некоторого графа G, содержащихся в нем как компонента связности. Очевидным следствием предложения 1 и теоремы 4 является следующий результат.

Лемма 1. *Пусть $p = n^{-\alpha}$, где $\alpha > 1$. Пусть T такое дерево, что $\alpha < |V(T)|/(|V(T)| - 1)$. Тогда для любого натурального s справедливо, что $\mathsf{P}_{n,p}(F_T \geqslant s) \to 1$, $n \to \infty$.*

Доказательство. Действительно, в силу теоремы 4 в случайном графе $G(n,p)$ с вероятностью, стремящейся к 1, нет циклов. Кроме того, если в некотором дереве $\widetilde{T}$ на 1 вершину больше чем в дереве T, то либо $p = o(n^{-1/\rho_{\max}(\widetilde{T})})$, либо для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что $\overline{\lim}\, \mathsf{P}_{n,p}(N_{\widetilde{T}} > N) < \varepsilon$, либо $\mathsf{E}_{n,p}N_{\widetilde{T}} \to \infty$ и

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_{n,p}N_{\widetilde{T}} &\sim \frac{1}{(|T|+1)!} n^{|V(T)|+1-\alpha|V(T)|} \\ &= o\biggl(\frac{1}{|V(T)|!} n^{|V(T)|-\alpha(|V(T)|-1)}\biggr) = o(\mathsf{E}_{n,p}N_T). \end{aligned}$$

При этом в любом случае $\mathsf{E}_{n,p}N_T \to \infty$ при $n \to \infty$. Лемма доказана.

Для оценки числа изолированных вершин I в случайном графе мы используем следующую лемму.

Лемма 2 (см. [18]). *Пусть существует такая константа* $0 < c < 1$, *что* $p(n) \leqslant c\ln(n)/n$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда для любого* $k > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}_{n,p}(I > k) = 1.$$

Нам также понадобится следующее утверждение.

Лемма 3 (см., например, [1], [2]). *Для любого* $p = o(1/n)$ *с вероятностью, стремящейся к* 1, *случайный граф* $G(n,p)$ *не содержит циклов.*

Так как в настоящей работе мы рассматриваем случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ при $\alpha > 1$, то с вероятностью, стремящейся к 1, рассматриваемый граф является лесом.

Основным средством при доказательстве законов нуля или единицы для свойств первого порядка случайных графов является игра Эренфойхта [19]. Определим эту игру $\mathsf{EHR}(G,H,k)$ на двух графах G и H с количеством раундов, равным k (см., например, [1], [3]–[6]). В ν-м раунде, $1 \leqslant \nu \leqslant k$, Новатор выбирает вершину из любого графа, отличную от уже выбранных (он выбирает либо $x_\nu \in V(G)$, либо $y_\nu \in V(H)$). Затем Консерватор выбирает вершину из другого графа, отличную от уже выбранных. К концу игры выбраны вершины $x_1, \dots, x_k \in V(G)$ и $y_1, \dots, y_k \in V(H)$. Консерватор побеждает в том и только том случае, когда отображение $\phi\colon \{x_1, \dots, x_k\} \to \{y_1, \dots, y_k\}$, переводящее вершину x_ν в вершину y_ν для каждого $\nu \in \{1, \dots, k\}$, является изоморфизмом графов $G_{\{x_1,\dots,x_k\}}$ и $H_{\{y_1,\dots,y_k\}}$.

Пусть $\mathsf{P}_{t,p(t)} \times \mathsf{P}_{m,p(m)}$ – прямое произведение вероятностных мер $\mathsf{P}_{t,p(t)}$, $\mathsf{P}_{m,p(m)}$. Обозначим S_k – свойство, вводимое для пары графов, заключающееся в том, что Консерватор обладает выигрышной стратегией в игре Эренфойхта на этой паре графов с числом раундов, равным k. В нашей работе мы будем опираться на следующее следствие из теоремы Эренфойхта [19] о связи между законами нуля или единицы и описанной игрой.

Теорема 5 (см., например, [3]–[5]). *Пусть* k – *произвольное натуральное число. Равенство*

$$\lim_{t,m\to\infty} \mathsf{P}_{t,p(t)} \times \mathsf{P}_{m,p(m)}(S_k) = 1 \qquad (1)$$

справедливо тогда и только тогда, когда случайный граф $G(n,p)$ *подчиняется* k-*закону нуля или единицы.*

§ 3. Доказательство теоремы 2

3.1. Когда не выполнен k-закон нуля или единицы? В этом разделе мы получим нижнюю оценку на наибольшее натуральное l, при котором случайный граф $G(n, n^{-1-1/l})$ не подчиняется k-закону нуля или единицы. Сформулируем ряд необходимых определений и утверждений, которые помогут нам при доказательстве. В данной главе мы будем использовать терминологию и методологию доказательства из работы [15].

Расстоянием $d_G(u, v)$ между двумя вершинами u, v графа G будем называть наименьшее число ребер в пути, соединяющем эти вершины (будем предполагать, что оно равно бесконечности, если вершины находятся в разных компонентах связности графа G). *Диаметром* $d(G)$ графа G будем называть наибольшее расстояние между двумя его вершинами. *Диаметральным путем* в графе G мы назовем простой путь $x_1, \ldots, x_{d(G)+1}$ в нем. Для вершины v графа G можно ввести величину $e_G(v)$ (называемую *эксцентриситет*), равную $\max_{u\in V(G)} d_G(u, v)$. С помощью нее введем для графа G величину $r(G)$ (называемую *радиусом*), равную $\min_{v\in V(G)} e_G(v)$.

Назовем вершину v графа G *центральной*, если $e_G(v) = r(G)$; заметим, что у дерева существует не более двух центральных вершин. Между диаметром графа и его радиусом имеется следующая связь (см., например, [20]): $d(G) \leqslant 2r(G)$.

Укорененное дерево – дерево с некоторой выделенной вершиной, называемой *корнем*. Если T – дерево и $v \in V(T)$, то тогда T_v обозначает укорененное в вершине v дерево. *Изоморфизмом* укорененного дерева T_v на укорененное дерево T_u назовем такой изоморфизм, который переводит вершину v в вершину u. *Автоморфизмом* укорененного дерева назовем изоморфизм его на себя. Назовем укорененное дерево *асимметричным*, если для него не существует нетривиального автоморфизма. *Глубиной укорененного дерева* T_v будем называть (и обозначать $h(T_v)$) эксцентриситет его корня. Если $(v, \ldots, u, w)$ – путь в T_v, то вершина w приходится вершине u *сыном*. Если для некоторого $k \in \mathbb{N}$ в T_v существует путь $x_1, \ldots, x_k$ такой, что для любого $i \in [2, k]$ вершина x_i является сыном вершины x_{i-1}, то тогда будем называть x_k *потомком* вершины x_1. Если $w \in V(T_v)$, то тогда обозначим $T_v(w)$ укорененное поддерево T_v, образованное всеми потомками вершины w и самой вершиной w, являющейся в нем корнем. Если вершина w является сыном вершины $u \in V(T_v)$, то назовем $T_v(w)$ *u-ветвью* дерева T_v. Назовем укорененное дерево T_v *расходящимся*, если для любой вершины $u \in V(T_v)$ все u-ветви T_v попарно неизоморфны. В [15] доказана эквивалентность некоторых определений укорененного расходящегося дерева.

Лемма 4 (см. [15]). *Для укорененного дерева T_v следующие три условия эквивалентны*:

1) *укорененное дерево T_v является расходящимся*;

2) *все v-ветви у T_v являются попарно неизоморфными и каждая из них является расходящимся укорененным деревом*;

3) *T_v является асимметричным деревом.*

Дерево T называется *расходящимся*, если для любой его центральной вершины c укорененное дерево T_c является расходящимся.

Введем функцию $D(G, H)$, определяющую минимальное такое s, что Новатор выигрывает в игре $\mathsf{EHR}(G, H, s)$. Определим величину

$$D(G) = \max_H \{D(G, H) \colon G \text{ и } H \text{ не изоморфны}\}.$$

Сформулируем некоторые вспомогательные утверждения, доказанные в [15].

Лемма 5 (см. [15]). *Предположим, что в некоторых раундах игры Эренфойхта на графах G и H в графе G отмечены вершины x, y так, что для* *выбранных в соответствующих раундах вершин* x', y' *в графе* H *выполнено* $d_G(x,y) < d_H(x',y')$. *Тогда Новатор может завершить игру своей победой не более чем за* $\lceil \log_2(d_G(x,y)) \rceil$ *ходов (помимо уже сыгранных), совершая ходы в этих оставшихся раундах в* G.

В дальнейшем нам понадобится следующая оценка на величину $D(T,T')$.

Лемма 6 (см. [15]). *Пусть* T *и* T' *– два неизоморфных дерева с одинаковыми диаметрами. Тогда если оба дерева расходящиеся, то* $D(T,T') \leqslant r(T)+1$. *В случае же, когда* T *– расходящееся дерево, а* T' *– не расходящееся, выполнено* $D(T,T') \leqslant r(T)+2$.

Стратегия Новатора, используемая в [15] при доказательстве этой леммы, будет применяться нами при доказательстве теоремы, поэтому кратко опишем это доказательство.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $r(T) > r(T')$. Первым ходом Новатор выберет центральную вершину x' в дереве T', Консерватор выберет некоторую вершину x. Тогда вторым ходом Новатор выберет в графе T вершину y такую, что $d_S(x,y) \geqslant r(T) > r(T')$, и, очевидно, по лемме 5 победит в раунде с номером не более чем $\lceil \log_2(r(T)) \rceil + 2 \leqslant r(T)+1$. В дальнейшем будем считать, что $r(T') \geqslant r(T)$. Первым ходом Новатор выберет центральную вершину x в дереве T, а Консерватор – некоторую вершину x'. Если она не является центральной в T', то согласно рассуждениям, аналогичным приведенным выше, Новатор победит в игре не более чем за $r(T)+1$ ход. Далее будем считать, что x' – центральная вершина.

Предположим, что оба дерева являются расходящимися. Для любого сыгранного раунда i будем обозначать x_i, x'_i вершины, выбранные в нем игроками в графах T и T' соответственно. Докажем по индукции, что для любого $i \geqslant 1$ либо Новатор победит в раунде с номером i, либо $(x_1, x_2, \dots, x_i)$ и $(x'_1, x'_2, \dots, x'_i)$ – простые пути и укорененные деревья $T'_{x'}(x'_i)$ и $T_x(x_i)$ не изоморфны. При $i=1$ это утверждение очевидно. Предположим, что для некоторого i утверждение доказано. Если ровно одна из вершин x_i и x'_i является листом, то Новатор продолжает один из путей и выигрывает. Если же обе вершины x_i и x'_i не являются листьями, то в силу леммы 4 без ограничения общности можно считать, что попарно неизоморфных ветвей у вершины x_i больше чем у вершины x'_i. Поэтому Новатор своим следующим ходом сможет выбрать некоторого сына u вершины x_i так, что для любого сына v вершины x'_i деревья $T'_{x'}(v)$ и $T_x(u)$ не изоморфны. В итоге в некотором раунде $i \leqslant r(T)+1$ получим ситуацию, когда ровно одна из вершин x_i и x'_i является листом.

Пусть, наконец, дерево T' не является расходящимся. В силу леммы 4 найдется такая вершина t' в T', что для любой вершины a, являющейся сыном t', дерево $T'_{x'}(a)$ расходящееся, и вершина t' имеет таких двух сыновей z_1 и z_2, что укорененные деревья $T'_{x'}(z_1)$ и $T'_{x'}(z_2)$ изоморфны. Новатор будет последовательно выбирать вершины в пути $(x', \dots, t', z_1)$. Консерватор должен последовательно выбирать вершины в некотором пути $(x, \dots, t, z)$. Предположим, что $h(T'_{x'}(z_1)) < h(T_x(z))$. Тогда Новатор своими следующими ходами будет продлевать свой путь на $h(T'_{x'}(z))+1$ новые вершины и победит в $r(T)+1$-м раунде. Случай $h(T'_{x'}(z_1)) > h(T_x(z))$ разбирается аналогично, и для него Новатор победит в $r(T)+2$-м раунде. Предположим теперь, что $h(T'_{x'}(z_1)) = h(T_x(z))$.

Если $T'_{x'}(z_1)$ и $T_x(z)$ не изоморфны, то по рассуждениям, приведенным выше, получаем, что Новатор сможет победить в $r(T)+1$-м раунде. Если же $T'_{x'}(z_1)$ и $T_x(z)$ изоморфны, то следующим ходом Новатор выберет вершину z_2, и, аналогично, сможет победить в $r(T)+2$-м раунде. Лемма 6 доказана.

Сформулируем лемму, показывающую, что при фиксированном радиусе r существует расходящееся дерево, имеющее достаточно много вершин и радиус r.

Лемма 7 (см. [15]). *Пусть $i \geqslant 4$. Тогда для любого такого n, что $2i+2 \leqslant n \leqslant 2\,\mathrm{T}(i-1)$, существует расходящееся дерево размера n и радиуса $i+1$.*

Докажем, наконец, первую часть теоремы 2.

Из теоремы 3 (которая будет доказана в следующем разделе) следует, что для $l \leqslant 6$ не выполнен даже 3-закон нуля единицы. Для $l \in \{7, 8\}$ аналогично легко проверяется, что не выполнен 7-закон нуля или единицы. Поэтому будем рассматривать только $l > 8$. Сначала рассмотрим случай, когда $l \geqslant 2k-5$. Покажем, что у Новатора с асимптотической вероятностью, отличной от нуля и единицы, существует выигрышная стратегия в k раундах в игре Эренфойхта на графах $G(n, p(n))$, $G(m, p(m))$, где $p(n) = n^{-1-1/l}$.

Пусть S – расходящееся дерево размера $l+1$ и радиуса $k-2$ (такое дерево существует по лемме 7). Из теоремы 4 следует, что с асимптотической вероятностью, отличной от нуля и единицы, в случайном графе $G(n, n^{-\alpha})$ существует индуцированный подграф, изоморфный S, являющийся компонентой связности. Действительно, с асимптотической вероятностью $1 - e^{-1/a(S)}$ существует подграф, изоморфный S. При этом с асимптотической вероятностью 1 нет ни циклов, ни деревьев с большим числом вершин. Кроме того, с положительной асимптотической вероятностью в $G(m, m^{-\alpha})$ копии графа S нет.

Рассмотрим два графа A и B, каждый из которых является лесом. Пусть, кроме того, дерево S присутствует в A как компонента связности, а в B нет даже такого подграфа. Тогда приведем для Новатора выигрышную стратегию в игре $\mathsf{EHR}(A, B, k)$. Первым ходом Новатор выберет центральную вершину x в компоненте S графа A, Консерватор – некоторую вершину x' в графе B. Пусть S' – компонента связности (дерево) в графе B, которой принадлежит вершина x'.

Предположим, что графы S и S' имеют разные диаметры. Пусть $d(S) < d(S')$. Тогда в следующих двух раундах Новатор выберет вершины y и z (возможно, совпадающие с x') в графе S' так, что $d_{S'}(y, z) = d(S)+1$ и $d_{S'}(x', y) \leqslant d(S)$. Покажем, что такие вершины можно выбрать. Так как $d(S) < d(S')$, то существуют вершины y_1, z_1 такие, что $d_{S'}(y_1, z_1) = d(S)+1$. Если $d_{S'}(x', y_1) \leqslant d(S)$, то мы выбрали необходимые вершины.

Пусть теперь $d_{S'}(x', y_1) > d(S)$. Тогда рассмотрим простой путь между вершинами x' и y_1 и выберем на нем вершины $y = x'$ и z такую, что $d_{S'}(x', z) = d(S)+1$. Получаем, что и в этом случае необходимые вершины нами выбраны. Пусть Консерватор выбирает во втором и третьем раунде вершины y', z'. Если вершина y' не лежит в компоненте связности S, то согласно лемме 5 Новатор победит в $\lceil \log_2(d(S)) \rceil + 3 \leqslant \lceil \log_2(2(k-2)) \rceil + 3 \leqslant k$ раундах (для $k \geqslant 7$). Если же вершина y' лежит в S, то для выбранной в 3 раунде Консерватором вершины z' выполнено $d_S(z', y') \neq d_{S'}(z, y)$ (знак определяется в зависимости от того, лежит ли вершина z' в компоненте связности S), причем минимальное из этих значений не превосходит $d(S)+1$. Далее из леммы 5 следует, что Новатор победит в $\lceil \log_2(d(S)+1)\rceil + 3 \leqslant \lceil \log_2(2(k-2)+1)\rceil + 3 \leqslant k$ раундах. Случай $d(S) > d(S')$ разбирается аналогично.

Пусть, наконец, $d(S) = d(S')$. Тогда применим для Новатора стратегию, которая использовалась при доказательстве леммы 6. Заметим, что так как для любого i Новатор выбирает вершину в i-м раунде так, что она смежна с вершиной, выбранной в одном из предыдущих $(i-1)$ раундах, то Консерватор ни в одном из раундов игры при такой стратегии Новатора не сможет выбрать вершину, лежащую в компоненте связности, отличной от S или S'. Тогда, используя лемму 6, получаем, что Новатор выиграет в k раундах.

Так как графы $G(n,p(n))$ и $G(m,p(m))$ с асимптотической вероятностью единица являются лесами, и с асимптотической вероятностью, отличной от нуля и единицы, ровно в одном из этих графов присутствует граф S (и, кроме того, является компонентой связности), то из теоремы 5 получаем, что при $l \in [2k-5, 2\,\mathrm{T}(k-4)-1]$ случайный граф не подчиняется k-закону нуля или единицы. Заметим, что k-закон не выполнен при $l \in \{2k-5, 2k-4\}$ для всех $k \geqslant 7$. Так как из невыполнимости k-закона следует невыполнимость $\widehat{k}$-закона при всех $\widehat{k} > k$, то k-закон нарушается и при всех $l \in \{9, \dots, 2k-5\}$. Тем самым, нижняя оценка доказана.

3.2. Когда выполнен k-закон нуля или единицы? В этом разделе мы установим верхнюю оценку на наименьшее натуральное l, при котором случайный граф $G(n, n^{-1-1/l})$ подчиняется k-закону нуля или единицы (докажем вторую часть теоремы 2).

Введем для двух графов G и H отношение эквивалентности $\equiv_k$. Будем писать $G \equiv_k H$ (и говорить, что графы являются *k-элементарно эквивалентными*), если Консерватор имеет выигрышную стратегию в игре $\mathsf{EHR}(G,H,k)$.

В [15] доказано следующее утверждение.

Лемма 8 (см. [15]). *Пусть T – дерево. Тогда для некоторого $C > 0$ и любого $k \geqslant 1$ существует дерево T' с не более, чем $\mathrm{T}(k+2+\log^*(k)) + C$ вершинами такое, что $T \equiv_k T'$.*

Рассмотрим два графа A и B, каждый из которых является лесом. Пусть, кроме того, любое дерево размера не более чем $U(k) := \mathrm{T}(k+2+\log^*(k))+C$ присутствует как компонента связности хотя бы k раз в каждом из графов. Покажем тогда, что Консерватор имеет выигрышную стратегию в игре $\mathsf{EHR}(A,B,k)$.

Пусть в некотором раунде Новатор выберет вершину x, лежащую в компоненте связности S графа A (для графа B рассуждения аналогичны), в которой пока не было выбранных вершин. По лемме 8 в графе B существуют компоненты связности $S_1, \dots, S_k$ такие, что для $i \in [1,k]$ выполнено $S_i \equiv_k S$. Назовем такие компоненты *выделенными*. Так как всего в игре k раундов, то мы можем выбрать некоторую выделенную компоненту S_r, в которой до данного момента не было выбранных вершин. Будем говорить, что компоненте S *соответствует* компонента S_r. Далее, Консерватор выбирает вершину y в графе S_r согласно первому раунду своей выигрышной стратегии в игре $\mathsf{EHR}(S, S_r, k)$ (которая существует, так как графы S, S_r являются k-элементарно эквивалентными).

Пусть теперь в компоненте связности S есть выбранные вершины. Тогда ей в графе B уже соответствует некоторая компонента S_r. Консерватор следующим ходом выберет вершину y согласно выигрышной стратегии в игре $\mathsf{EHR}(S, S_r, k)$ (количество сыгранных раундов равно числу вершин, выбранных в графе S). Отсюда получаем, что Консерватор имеет выигрышную стратегию в игре $\mathsf{EHR}(A, B, k)$.

Пусть $l > U(k)$, $p = n^{-1-1/l}$. Так как графы $G(n, p(n))$ и $G(m, p(m))$ с асимптотической вероятностью единица являются лесами, и из леммы 1 следует, что любое дерево размера не большего, чем l, присутствует хотя бы k раз в каждом из них как отдельная компонента с асимптотической вероятностью единица, то из теоремы 5 получаем, что граф $G(n, p)$ подчиняется k-закону нуля или единицы.

§ 4. Доказательство теоремы 3

Из теоремы 4 следует, что для случайного графа $G(n, n^{-2})$ свойство существования двух вершин, соединенных ребром, будет выполняться с отличной от 0 и 1 асимптотической вероятностью. Очевидно, что это свойство можно записать с помощью формулы первого порядка кванторной глубины 2. Тогда при $l = 1$ не выполнен 3-закон нуля или единицы.

Всюду далее P_m – свойство содержать простой путь на m вершинах, $p = n^{-1-1/l}$. Заметим, что из теоремы 4 и предложения 1 следует, что случайный граф $G(n, p)$ обладает свойством P_{l+1} с асимптотической вероятностью, отличной от 0 или 1.

Пусть $l = 2$. Так как свойство P_3, очевидно, можно задать с помощью формулы первого порядка кванторной глубины 3, то случайный граф $G(n, p)$ не подчиняется 3-закону нуля или единицы.

Пусть $l = 3$. Из леммы 3 с асимптотической нулевой вероятностью в графе $G(n, p)$ присутствуют циклы длины 3, поэтому с асимптотической вероятностью 1 простой путь на 4 вершинах существует при условии истинности следующей формулы кванторной глубины 3:

$$\begin{aligned}(\exists x_1((\exists x_2 \exists x_3((x_1 \sim x_3) \wedge (x_2 \sim x_3) \wedge (x_2 \neq x_1)))\\ \wedge (\exists x_2 \exists x_3((x_1 \sim x_3) \wedge (x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \neq x_3))))).\end{aligned}$$

Обозначим L свойство, выраженное этой формулой, $\widetilde{\Omega}_n$ – множество графов из Ω_n, в которых содержится цикл. Очевидно, что если существует простой путь на 4 вершинах, то и свойство L выполнено. Поэтому

$$\mathsf{P}_{n,p}(P_4) \leqslant \mathsf{P}_{n,p}(L) = \mathsf{P}_{n,p}(L \cap \widetilde{\Omega}_n) + \mathsf{P}_{n,p}\big(L \cap \overline{\widetilde{\Omega}_n}\big) \leqslant \mathsf{P}_{n,p}(P_4) + \mathsf{P}_{n,p}(\widetilde{\Omega}_n).$$

Вероятности слева и справа стремятся к одному и тому же числу, отличному от 0 и 1. Таким образом, случайный граф $G(n, p)$ не подчиняется 3-закону нуля или единицы.

Пусть $l = 4$. Из леммы 3 с асимптотической нулевой вероятностью в графе $G(n, p)$ присутствуют циклы длины меньшей 7, поэтому с асимптотической вероятностью 1 свойство P_5 выполнено при условии истинности следующей формулы кванторной глубины 3:

$$\begin{aligned}(\exists x_1((\exists x_2\exists x_3((x_2\sim x_1)\wedge(x_1\sim x_3)\wedge(x_2\neq x_3)))\\ \wedge(\forall x_2\exists x_3((x_2\sim x_1)\to((x_2\sim x_3)\wedge(x_3\neq x_1)))))).\end{aligned}$$

Обозначим через L свойство, выраженное этой формулой, $\widetilde{\Omega}_n$ – множество графов из Ω_n, в которых содержится цикл длины, меньшей 7, либо присутствует дерево на 6 вершинах. Очевидно,

$$\mathsf{P}_{n,p}(P_4)-\mathsf{P}_{n,p}(\widetilde{\Omega}_n)\leqslant\mathsf{P}_{n,p}(L)=\mathsf{P}_{n,p}(L\cap\widetilde{\Omega}_n)+\mathsf{P}_{n,p}\big(L\cap\overline{\widetilde{\Omega}_n}\big)\leqslant\mathsf{P}_{n,p}(P_4)+\mathsf{P}_{n,p}(\widetilde{\Omega}_n).$$

Вероятности слева и справа стремятся к одному и тому же числу, отличному от 0 и 1. Таким образом, случайный граф $G(n,p)$ не подчиняется 3-закону нуля или единицы.

Пусть $l=5$. Из леммы 3 с асимптотической нулевой вероятностью в графе $G(n,p)$ присутствуют циклы длины меньшей 7, поэтому с асимптотической вероятностью 1 случайный граф обладает свойством P_6 при условии истинности следующей формулы кванторной глубины 3:

$$\begin{aligned}(\exists x_1((\exists x_2\exists x_3((x_2\sim x_1)\wedge(x_3\sim x_1)\wedge(x_2\neq x_3)))\\ \wedge(\forall x_2\exists x_3((x_1\sim x_2)\to((x_3\sim x_2)\wedge(x_3\neq x_1))))\\ \wedge(\exists x_2(\exists x_3((x_1\sim x_3)\wedge(x_3\sim x_2)\wedge(x_2\neq x_1)))\\ \wedge(\exists x_3((x_3\not\sim x_1)\wedge(x_3\sim x_2))))))).\end{aligned}$$

Далее, аналогично случаю $l=4$ получаем, что граф $G(n,p)$ не подчиняется 3-закону нуля или единицы.

Если, наконец, $l=6$, то из леммы 3 с асимптотической вероятностью 1 случайный граф $G(n,p)$ обладает свойством P_7 при условии истинности следующей формулы кванторной глубины 3:

$$\begin{aligned}(\exists x_1((\exists x_2\exists x_3((x_1\sim x_2)\wedge(x_1\sim x_3)\wedge(x_2\neq x_3)))\\ \wedge(\forall x_2((x_1\sim x_2)\to(\exists x_3((x_2\sim x_3)\wedge(x_3\neq x_1)))))\\ \wedge(\forall x_2((\exists x_3((x_3\sim x_2)\wedge(x_3\sim x_1)\wedge(x_2\neq x_1)))\\ \to(\exists x_4((x_2\sim x_4)\wedge(x_1\not\sim x_4))))))).\end{aligned}$$

Аналогично случаю $l=4$ получаем, что граф $G(n,p)$ не подчиняется 3-закону нуля или единицы.

Далее покажем, что при $l>6$ случайный граф $G(n,n^{-1-1/l})$ подчиняется 3-закону нуля или единицы. Пусть $p=n^{-\alpha}$, где $1<\alpha<7/6$. Докажем, что у Консерватора с асимптотической вероятностью 1 существует выигрышная стратегия в игре Эренфойхта с числом раундов, равным 3, на графах $G(n,p(n))$ и $G(m,p(m))$. Отсюда и из теоремы 5 будет следовать выполнение 3-закона нуля или единицы.

Введем для произвольной вершины a и произвольного графа S (содержащего эту вершину) вектор $\mathbf{x}_S(a)$ из 5 булевых значений так, что i-й элемент вектора равен 0 тогда и только тогда, когда формула с номером i из следующего списка пяти занумерованных формул является ложной для графа S:

1) $(\exists y\exists z((a\sim y)\wedge(a\sim z)\wedge(y\neq z)))$;

2) $(\exists y \exists z((a \sim y) \wedge (y \sim z) \wedge (a \neq z)))$;
3) $(\exists y((a \sim y) \wedge (\forall z((z \neq a) \to (y \not\sim z)))))$;
4) $(\exists y \exists z((z \sim a) \wedge (a \not\sim y) \wedge (y \sim z) \wedge (a \neq y) \wedge (\forall t((y \sim t) \to (t = z)))))$;
5) $(\exists y \exists z((z \sim a) \wedge (a \not\sim y) \wedge (y \sim z) \wedge (a \neq y) \wedge (\exists t((y \sim t) \wedge (t \neq z)))))$.

Введем следующие обозначения: $\mathrm{leaf}_S(a)$ – функция, которая равна 1, если вершина a является листом в графе S, и 0 – иначе; $\mathrm{isolate}_S(v)$ – функция, которая равна 0, если вершина v имеет степень 0 в графе S, и равна 1 – иначе.

Будем говорить, что граф обладает свойством P, если в нем более 10 вершин, из которых хотя бы 3 изолированные, нет циклов и для любой вершины a существуют отличные от нее вершины b и c, соединенные ребром, но с которыми вершина a не смежна. Пусть A и B – произвольные графы, обладающие свойством P. Покажем, что если в игре $\mathsf{EHR}(A, B, 3)$ Консерватор на первый ход Новатора x в графе A может ответить вершиной x' в графе B такой, что $\mathbf{x}_A(x) = \mathbf{x}_B(x')$, то Консерватор имеет выигрышную стратегию в этой игре.

Действительно, пусть первым ходом Консерватор выбирает вершину x' такую, что $\mathbf{x}_A(x) = \mathbf{x}_B(x')$. Далее, если Новатор выбирает вторым ходом вершину z, находящуюся на расстоянии не большем 2 от x (для x' рассуждения аналогичны), то Консерватор отвечает на его ход вершиной z', находящейся на расстоянии $d_B(x', z') = d_A(x, z)$ такой, что $\mathrm{leaf}_A(z) = \mathrm{leaf}_B(z')$. Это возможно благодаря выбору вершины x'.

Рассмотрим теперь третий ход Новатора. Пусть он выбирает вершину t в графе A (для B рассуждения аналогичны). Если вершина t не смежна с вершинами x и z, то Консерватор на данный ход ответит вершиной t' в графе B не смежной с вершинами x' и z' (такая вершина найдется из свойства P). Если же t соединена с x, а с z не соединена (для z рассуждения аналогичны), то Консерватор выберет в 3-м раунде вершину t', соединенную с x' и несоединенную с z'.

Покажем, что так выбрать t' можно. Так как $\mathbf{x}_A(x) = \mathbf{x}_B(x')$, то существуют две вершины m и n, соединенные с x'. Так как в графе B нет циклов, то из этих двух вершин можно выбрать вершину, несоединенную с z'. Эту вершину и выберет Консерватор в 3-м раунде. Аналогично, если Новатор выбирает вершину t смежную с x и z, то Консерватор также выберет вершину t' смежную с x' и z'. Это можно сделать в силу соответствующего выбора вершин x, x', z, z'. Если же вершина t будет смежна только с z, то Консерватор также выберет вершину t' смежную с z', но не смежную с x' (это можно сделать, так как $\mathrm{leaf}_A(z) = \mathrm{leaf}_B(z')$ и в графе B нет циклов).

Итак, в этом случае Консерватор сможет выбрать вершину в 3-м раунде так, что полученные графы будут изоморфны (причем существует изоморфизм, сохраняющий порядок выбранных вершин).

Если же вторым ходом Новатор выберет вершину z так, что $d_A(x, z) > 2$, то Консерватор должен выбрать вершину z' такую, что $d_B(z', x') > 2$ и $\mathrm{isolate}_B(z') = \mathrm{isolate}_A(z)$. Поясним, почему такую вершину можно выбрать. Если z – изолированная вершина, то это очевидно. Если же вершина z не изолирована, то тогда, так как граф обладает свойством P, в графе B можно выбрать две смежные между собой вершины a и b, с которыми вершина x' не смежна. Тогда, так как в графе B нет циклов, среди вершин a и b найдется такая вершина z', что $d_B(x', z') > 2$. Ее и должен во втором раунде выбрать Консерватор.

Пусть третьим ходом Новатор выбирает вершину t в графе A (для B рассуждения аналогичны). Если вершина t смежна с x, то Консерватор на данный ход ответит вершиной t', смежной с x' (такая вершина найдется так как $\mathbf{x}_A(x) = \mathbf{x}_B(x')$). Если же вершина t соединена с z, то Консерватор должен выбрать вершину t', соединенную с z' (такую вершину можно выбрать так как $\mathrm{isolate}_B(z') = \mathrm{isolate}_A(z)$). С обеими вершинами z и x вершина t не может быть смежной, так как $d_A(x, z) > 2$. Если же t не соединена с вершинами x и z, то Консерватор выберет в 3-м раунде вершину t', несоединенную с вершинами x' и z' (такая вершина найдется так как граф B содержит как минимум 3 изолированные вершины). Итак, и в этом случае Консерватор сможет выбрать вершину в третьем раунде так, что полученные графы будут изоморфны (причем существует изоморфизм, сохраняющий порядок выбранных вершин).

Из лемм 1–3 следует, что случайный граф $G(n, p)$ обладает свойством P с асимптотической вероятностью 1.

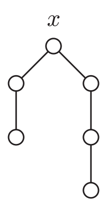

Рис. 1. $(0, 1, 1)$

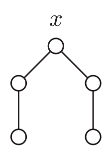

Рис. 2. $(0, 1, 0)$

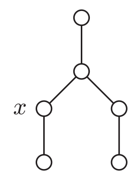

Рис. 3. $(1, 1, 1)$

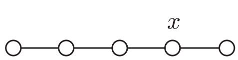

Рис. 4. $(1, 0, 1)$

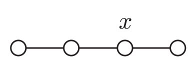

Рис. 5. $(1, 1, 0)$

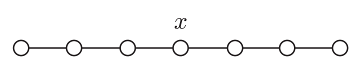

Рис. 6. $(0, 0, 1)$

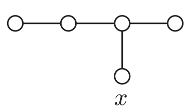

Рис. 7

Осталось показать, что для каждого возможного вектора v значений из 5 булевых чисел (соответствующего выполнимости 5 свойств, перечисленных выше) в случайном графе $G(n, p)$ с асимптотической вероятностью 1 существует вершина x такая, что $\mathbf{x}_{G(n,p)}(x) = v$. Допустим, что первые два элемента вектора v равны 1. Также заметим, что из элементов с номерами 4 и 5, хотя бы один равен единице, так как второй элемент вектора v равен единице. Для каждого возможного значения вектора v на рис. 1–6 (для каждого графа тремя цифрами помечена истинность свойств 3–5) приведены графы X и вершины x, для которых $\mathbf{x}_X(x) = v$. Из леммы 1 следует, что каждый из данных подграфов существует в случайном графе как отдельная компонента связности с асимптотической вероятностью 1.

Разберем теперь случай, когда хотя бы один из первых двух элементов v равен 0. Предположим, что второй элемент v равен 0, а первый – 1. Тогда приведем для каждого возможного в данном случае вектора v вершину x и граф X, для которых $\mathbf{x}_X(x) = v$. Так как свойство 2 для вершины x не выполнено, то нет вершин, находящихся от нее на расстоянии 2. Также, так как свойство 1 для вершины x выполнено, то получаем, что x соединен с некоторым листом. Таким образом, в этом случае вектор v может принимать единственное значение $(1, 0, 1, 0, 0)$. Для пути на трех вершинах X, в которой x является центральной вершиной, выполнено $\mathbf{x}_X(x) = v$.

Пусть теперь первый элемент v равен 0, а второй – 1. Тогда вершина x не соединена ни с каким листом. Так как существует вершина, находящаяся на расстоянии 2 от x, то вектор v может принимать только три из возможных значений: $(0, 1, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 1, 1)$.

Для простого пути на четырех вершинах X, в котором x является концевой вершиной, вектор $\mathbf{x}_X(x)$ принимает значение $(0, 1, 0, 0, 1)$. Для пути на трех вершинах, в котором x является концевой вершиной, вектор $\mathbf{x}_X(x)$ принимает значение $(0, 1, 0, 1, 0)$. Для графа X, приведенного на рис. 7, вектор $\mathbf{x}_X(x)$ принимает значение $(0, 1, 0, 1, 1)$. Из леммы 1 следует, что каждый из этих подграфов с асимптотической вероятностью 1 присутствует в случайном графе $G(n, p)$ как отдельная компонента связности. Если же два первых элемента вектора v равны нулю, то это достигается только в случае, если x является изолированной вершиной, либо находится в компоненте связности размера 2. Асимптотическая вероятность появления в случайном графе $G(n, p)$ таких компонент равна 1.

Список литературы

1. S. Janson, T. Łuczak, A. Ruciński, *Random graphs*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2000, xii+333 pp.
2. B. Bollobás, *Random graphs*, 2nd ed., Cambridge Stud. Adv. Math., **73**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001, xviii+498 pp.
3. Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, БИНОМ. Лаборатория знаний, М., 2007, 320 с.; пер. с англ.: N. Alon, J. H. Spencer, *The probabilistic method*, 2nd ed., Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2000, xviii+301 pp.
4. М. Е. Жуковский, А. М. Райгородский, “Случайные графы: модели и предельные характеристики”, *УМН*, **70**:1(421) (2015), 35–88; англ. пер.: M. E. Zhukovskii, A. M. Raigorodskii, “Random graphs: models and asymptotic characteristics”, *Russian Math. Surveys*, **70**:1 (2015), 33–81.
5. J. Spencer, *The strange logic of random graphs*, Algorithms Combin., **22**, Springer-Verlag, Berlin, 2001, x+168 pp.
6. Н. К. Верещагин, А. Шень, *Языки и исчисления*, МНЦМО, М., 2000, 286 с.
7. S. Shelah, J. Spencer, “Zero-one laws for sparse random graphs”, *J. Amer. Math. Soc.*, **1**:1 (1988), 97–115.
8. М. Е. Жуковский, “Законы нуля или единицы для формул первого порядка с ограниченной кванторной глубиной”, *Докл. РАН*, **436**:1 (2011), 14–18; англ. пер.: M. E. Zhukovskii, “Zero-one laws for first-order formulas with a bounded quantifier depth”, *Dokl. Math.*, **83**:1 (2011), 8–11.
9. M. Zhukovskii, “Zero-one k-law”, *Discrete Math.*, **312**:10 (2012), 1670–1688.
10. М. Е. Жуковский, “Расширение k-закона нуля или единицы”, *Докл. РАН*, **454**:1 (2014), 23–26; англ. пер.: M. E. Zhukovskii, “Extension of the zero-one k-law”, *Dokl. Math.*, **89**:1 (2014), 16–19.

11. М. Е. Жуковский, “О наибольшей критической точке в k-законе нуля или единицы”, *Матем. сб.*, **206**:4 (2015), 13–34; англ. пер.: M. E. Zhukovskii, “The largest critical point in the zero-one k-law”, *Sb. Math.*, **206**:4 (2015), 489–509.
12. М. Е. Жуковский, “О 4-законе нуля или единицы для случайного графа Эрдеша–Реньи”, *Матем. заметки*, **97**:2 (2015), 203–216; англ. пер.: M. E. Zhukovskii, “On the zero-one 4-law for the Erdős–Rényi random graphs”, *Math. Notes*, **97**:2 (2015), 190–200.
13. М. Е. Жуковский, А. Д. Матушкин, “Универсальный k-закон нуля или единицы”, *Матем. заметки*, **99**:4 (2016), 511–525; англ. пер.: M. E. Zhukovskii, A. D. Matushkin, “Universal zero-one k-law”, *Math. Notes*, **99**:4 (2016), 511–523.
14. М. Е. Жуковский, А. Е. Медведева, “Когда не выполнен k-закон нуля или единицы?”, *Матем. заметки*, **99**:3 (2016), 342–349; англ. пер.: M. E. Zhukovskii, A. E. Medvedeva, “When does the zero-one k-law fail?”, *Math. Notes*, **99**:3 (2016), 362–367.
15. O. Pikhurko, J. Spencer, O. Verbitsky, “Succinct definitions in the first order theory of graphs”, *Ann. Pure Appl. Logic*, **139**:1-3 (2006), 74–109.
16. P. Erdős, A. Rényi, “On the evolution of random graphs”, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, **5** (1960), 17–61.
17. B. Bollobás, “Threshold functions for small subgraphs”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **90**:2 (1981), 197–206.
18. J. Spencer, “Threshold functions for extension statements”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **53**:2 (1990), 286–305.
19. A. Ehrenfeucht, “An application of games to the completeness problem for formalized theories”, *Fund. Math.*, **49** (1960/1961), 129–141.
20. О. Оре, *Теория графов*, 2-е изд., Наука, М., 1980, 336 с.; пер. с англ.: O. Ore, *Theory of graphs*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1962, x+270 pp.

Максим Евгеньевич Жуковский
(Maksim E. Zhukovskii)
Московский физико-технический институт
(государственный университет),
Московская область, г. Долгопрудный;
Российский университет дружбы народов, г. Москва
E-mail: zhukmax@gmail.com

Поступило в редакцию
29.03.2016
30.10.2016

Лев Борисович Островский
(Lev B. Ostrovskii)
ООО “Яндекс”
E-mail: lev_sky@mail.ru