Оглавление

```
library(knitr)
library(tikzDevice)
library(tidyverse)
library(Hmisc)
library(lmtest)
library(apsrtable)
library(xtable)
library(MASS)
library(car)
library(texreg)
library(memisc)
library(sandwich)
library(gridExtra)
library(pander)
library(akima)
# library(fUnitRoots)
library(urca)
library(zoo)
library(tseries)

theme_set(theme_bw())
```

```r
load("pset_data.Rdata")

#' convert an R matrix into a LaTeX output
#' @param a the matrix to be converted
#' @param environment 'pmatrix' or 'bmatrix' from amsmath LaTeX package
#' @param output T/F, whether the output should be printed
#' @return invisible the LaTeX formula
#' @export
#' @examples
#' b <- matrix(1:9, nrow = 3)
#' xmatrix(b)
xmatrix <- function(a, environment = "pmatrix", output = TRUE) {

  # override default alignment for xtable
  xa <- xtable(a, align = rep("", ncol(a) + 1))

  res <- print(xa,
               floating = FALSE,
               tabular.environment = environment,
               hline.after = NULL,
               include.rownames = FALSE,
               include.colnames = FALSE,
               file = "junk.txt")

  res <- paste0("\\ensuremath{", res, "}")

  if (output) {
    cat(res)
  }
  return(invisible(res))
}



#' convert OLS model into LaTeX formula with se or t-stats below coefficients
#' @param model the estimated model
#' @param below 'se' for standard errors, 't' for t-statistics, '' for nothing
#' @param index 'i', any other letter or nothing
#' @param coef.names character vector of alternative coefficient names
#' @param y.name alternative name for the dependent variable
```

```r
#' @param output T/F, whether the output should be printed
#' @return invisible the LaTeX formula
#' @export
#' @examples
#' x <- rnorm(100)
#' y <- rnorm(100)
#' model <- lm(y ~ x)
#' xmodel(model)
#' xmodel(model, below = "t")
#' xmodel(model, index = "")
xmodel <- function(model,
                   below = "se", index = "i", coef.names = NULL,
                   y.name = NULL, output = TRUE) {

  if (is.null(y.name)) {
    y.name <- as.character(formula(model))[2]
  }

  if (is.null(coef.names)) {
    # get Left Hand Side, lhs, of the formula
    lhs <- as.character(formula(model))[3]
    # split by "+" sign
    coef.names <- strsplit(lhs, split = "+", fixed = TRUE)[[1]]
    # remove spaces
    coef.names <- gsub(" ","",coef.names)
  }

  beta.hat <- coef(model)
  k <- length(beta.hat)

  # construct the left hand side of the result
  res.left <- paste0("\\widehat{", y.name, "}")
  if (!index=="") {
    res.left <- paste0(res.left, "_", index)
  }

  if (below=="se") {
    terms.below <- format(coef(summary(model))[, 2], digits = 3)
  }
  if (below=="t") {
```

```
    terms.below <- format(coef(summary(model))[, 3], digits = 3)
  }

  # construct the right hand side of the result
  term.left <- format(abs(beta.hat[1]), digits = 3)
  pm <- ifelse(beta.hat[1] < 0, "-", "")
  if (!below == "") {
    term.left <- paste("\\underset{(", terms.below[1], ")}{",
                       term.left, "}")
  }
  res.right <- paste0(pm, term.left)

  for (i in 2:k) {
    term.left <- format(abs(beta.hat[i]), digits = 3)
    pm <- ifelse(beta.hat[i] < 0, "-", "+")

    if (!below == "") {
      term.left <- paste0("\\underset{(", terms.below[i], ")}{",
                          term.left, "}")
    }

    term.right <- coef.names[i - 1]
    if (!index == "") {
      term.right <- paste0(term.right, "_", index)
    }
    term <- paste0(term.left, "\\cdot ", term.right)
    res.right <- paste0(res.right, pm, term)
  }

  res <- paste0("\\ensuremath{", res.left, "=", res.right, "}")

  if (output) {
    cat(res)
  }
  return(invisible(res))
}
```

Предисловие

В задачнике мы собрали задачи, собранные или придуманные нами за многолетний опыт преподавания эконометрики в Высшей Школе Экономики. Эти задачи полностью покрывают курс эконометрики-1 в бакалавриате и частично — курс эконометрики-2 в магистратуре.

Огромную помощь в создании задачника оказали нам замечательные студенты факультета экономики: Сергей Васильев, Анастасия Тихонова, Анна Тихонова и Артём Языков. Спасибо!

Для поддержки задачника мы создали страничку http://bdemeshev.github.io/empset. На ней можно будет найти список известных нам опечаток и данные, необходимые для решения практических задач. Там же со временем там появятся дополнительные решения или ответы к задачам.

Мы активно пропагандируем изучение программирования для решения эконометрических задач. Именно поэтому мы сознательно открыли весь код R, который использовался для создания данного задачника. Задачи, решение которых однозначно требует использования компьютера, помечены значком [R] . Установить R можно бесплатно с официального сайта http://www.r-project.org, а удобную графическую оболочку R-studio — с сайта http://www.rstudio.com/ide.

Удачи в освоении эконометрики!!!

Дмитрий Борзых, Борис Демешев

Глава 1

МНК без матриц и вероятностей

1.1 Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ — два произвольных вектора. Определите, какие равенства справедливы:

1. $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a}) = 0$;
2. $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2 = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})a_i$;
3. $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}) = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})b_i$;
4. $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$;
5. $\sum_{i=1}^n a_i = n\bar{a}$;
6. $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 - n\bar{a}^2$;
7. $\sum_{i=1}^n a_i^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2$;
8. $\sum_{i=1}^n a_i^2 = (n\bar{a})^2$;
9. $\sum_{i=1}^n \bar{a} = n\bar{a}$;
10. $\sum_{i=1}^n a_i \bar{a} = n\bar{a}^2$;
11. $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})b_i = 0$.

1.2 При помощи метода наименьших квадратов найдите оценку неизвестного параметра θ в следующих моделях:

1. $y_i = \theta + \theta x_i + \varepsilon_i$;
2. $y_i = \theta - \theta x_i + \varepsilon_i$;
3. $\ln y_i = \theta + \ln x_i + \varepsilon_i$;

4. $y_i = \theta + x_i + \varepsilon_i$;
5. $y_i = 1 + \theta x_i + \varepsilon_i$;
6. $y_i = \theta / x_i + \varepsilon_i$;
7. $y_i = \theta x_i + (1-\theta) z_i + \varepsilon_i$.

1.3 Покажите, что для моделей $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$, $z_i = \gamma + \delta x_i + \upsilon_i$ и $y_i + z_i = \mu + \lambda x_i + \xi_i$ МНК-оценки связаны соотношениями $\hat{\mu} = \hat{\alpha} + \hat{\gamma}$ и $\hat{\lambda} = \hat{\beta} + \hat{\delta}$.

1.4 Найдите МНК-оценки параметров α и β в модели $y_i = \alpha + \beta y_i + \varepsilon_i$.

1.5 Рассмотрите модели $y_i = \alpha + \beta(y_i + z_i) + \varepsilon_i$, $z_i = \gamma + \delta(y_i + z_i) + \varepsilon_i$.

1. Как связаны между собой $\hat{\alpha}$ и $\hat{\gamma}$?
2. Как связаны между собой $\hat{\beta}$ и $\hat{\delta}$?

1.6 Как связаны МНК-оценки параметров α, β и γ, δ в моделях $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ и $z_i = \gamma + \delta x_i + \upsilon_i$, если $z_i = 2y_i$?

1.7 Для модели $y_i = \beta_1 x_i + \beta_2 z_i + \varepsilon_i$ решите условную задачу о наименьших квадратах:

$$Q(\beta_1, \beta_2) := \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_1 x_i - \beta_2 z_i)^2 \to \min_{\beta_1 + \beta_2 = 1}.$$

1.8 Даны n пар чисел: (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). Мы прогнозируем y_i по формуле $\hat{y}_i = \hat{\beta} x_i$. Найдите $\hat{\beta}$ методом наименьших квадратов.

1.9 Даны n чисел: y_1, ..., y_n. Мы прогнозируем y_i по формуле $\hat{y}_i = \hat{\beta}$. Найдите $\hat{\beta}$ методом наименьших квадратов.

1.10 Даны n пар чисел: (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). Мы прогнозируем y_i по формуле $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i$. Найдите $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$ методом наименьших квадратов.

1.11 Даны n пар чисел: (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). Мы прогнозируем y_i по формуле $\hat{y}_i = 1 + \hat{\beta} x_i$. Найдите $\hat{\beta}$ методом наименьших квадратов.

1.12 Перед нами два золотых слитка и весы, производящие взвешивания с ошибками. Взвесив первый слиток, мы получили результат 300 грамм, взвесив второй слиток — 200 грамм, взвесив оба слитка — 400 грамм. Оцените вес каждого слитка методом наименьших квадратов.

1.13 Аня и Настя утверждают, что лектор опоздал на 10 минут. Таня считает, что лектор опоздал на 3 минуты. С помощью МНК оцените, на сколько минут опоздал лектор.

1.14 Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0;1]$. Найдите аналог МНК-оценок для регрессии без свободного члена в непрерывном случае. Более подробно: найдите минимум по $\hat{\beta}$ для функции

$$Q(\hat{\beta}) = \int_0^1 (f(x) - \hat{\beta}x)^2\, dx.$$

1.15 Есть двести наблюдений. Вовочка оценил модель $\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x$ по первой сотне наблюдений. Петечка оценил модель $\hat{y} = \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 x$ по второй сотне наблюдений. Машенька оценила модель $\hat{y} = \hat{m}_1 + \hat{m}_2 x$ по всем наблюдениям.

1. Возможно ли, что $\hat{\beta}_2 > 0$, $\hat{\gamma}_2 > 0$, но $\hat{m}_2 < 0$?
2. Возможно ли, что $\hat{\beta}_1 > 0$, $\hat{\gamma}_1 > 0$, но $\hat{m}_1 < 0$?
3. Возможно ли одновременное выполнение всех упомянутых условий?

1.16 Вася оценил модель $y = \beta_1 + \beta_2 d + \beta_3 x + \varepsilon$. Дамми-переменная d обозначает пол, 1 для мужчин и 0 для женщин. Оказалось, что $\hat{\beta}_2 > 0$. Означает ли это, что для мужчин $\bar{y}$ больше, чем $\bar{y}$ для женщин?

1.17 Какие из указанные моделей можно представить в линейном виде?

1. $y_i = \beta_1 + \frac{\beta_2}{x_i} + \varepsilon_i$;
2. $y_i = \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i)$;
3. $y_i = 1 + \frac{1}{\exp(\beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i)}$;
4. $y_i = \frac{1}{1 + \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i)}$;
5. $y_i = x_i^{\beta_2} e^{\beta_1 + \varepsilon_i}$;
6. $y_i = \beta_1 \exp(\beta_2 x_i + \varepsilon_i)$.

1.18 У эконометриста Вовочки есть переменная f_i, которая равна 1, если i-ый человек в выборке — женщина, и 0, если мужчина. Есть переменная m_i, которая равна 1, если i-ый человек в выборке — мужчина, и 0, если женщина. Какие $\hat{y}$ получатся, если Вовочка попытается построить регрессии:

1. y на константу и f;
2. y на константу и m;
3. y на f и m без константы;
4. y на константу, f и m.

1.19 У эконометриста Вовочки есть три переменных: r_i — доход i-го человека в выборке, m_i — пол (1 — мальчик, 0 — девочка) и f_i — пол (1 — девочка, 0 — мальчик). Вовочка оценил две модели

Модель A: $m_i = \beta_1 + \beta_2 r_i + \varepsilon_i$;

Модель B: $f_i = \gamma_1 + \gamma_2 r_i + u_i$.

1. Как связаны между собой оценки $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\gamma}_1$?
2. Как связаны между собой оценки $\hat{\beta}_2$ и $\hat{\gamma}_2$?

1.20 Эконометрист Вовочка оценил линейную регрессионную модель, где y измерялся в тугриках. Затем он оценил ту же модель, но измерял y в мунгу (1 тугрик = 100 мунгу). Как изменятся оценки коэффициентов?

1.21 Возможно ли, что при оценке парной регрессии $y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon$ оказывается, что $\hat{\beta}_2 > 0$, а при оценке регрессии без константы, $y = \gamma x + \varepsilon$, оказывается, что $\hat{\gamma} < 0$?

1.22 Эконометрист Вовочка оценил регрессию y только на константу. Какой коэффициент R^2 он получит?

1.23 Эконометрист Вовочка оценил методом наименьших квадратов модель 1, $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$, а затем модель 2, $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \beta_4 w_i + \varepsilon_i$. Сравните полученные ESS, RSS, TSS и R^2.

1.24 Создайте набор данных с тремя переменными y, x и z со следующими свойствами. При оценке модели $\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x$ получается $\hat{\beta}_2 > 0$. При оценке модели $\hat{y} = \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 x + \hat{\gamma}_3 z$ получается $\hat{\gamma}_2 < 0$. Объясните принцип, руководствуясь которым легко создать такой набор данных.

1.25 У меня есть набор данных с выборочным средним $\bar{y}$ и выборочной дисперсией s_y^2. Как нужно преобразовать данные, чтобы выборочное среднее равнялось 7, а выборочная дисперсия — 9?

1.26 Эконометресса Анжела оценила две парных регрессии $\hat{y}_i = 2 - 3x_i$ и $\hat{x}_i = 5 - \frac{1}{12} y_i$. Найдите R^2 в каждой регрессии и выборочную корреляцию между x_i и y_i.

1.27 На работе Феофан построил парную регрессию по трём наблюдениям и посчитал прогнозы $\hat{y}_i$. Придя домой он отчасти вспомнил результаты:

y_i	$\hat{y}_i$
0	1
6	?
6	?

Поднапрягшись, Феофан вспомнил, что третий прогноз был больше второго. Помогите Феофану восстановить пропущенные значения.

1.28 Вся выборка поделена на две части. Возможны ли такие ситуации:

1. Выборочная корреляция между y и x примерно равна нулю в каждой части, а по всей выборке примерно равна единице;
2. Выборочная корреляция между y и x примерно ранва единице в каждой части, а по всей выборке примерно равна нулю?

Глава 2

Парный МНК без матриц

2.1 Рассмотрим модель $y_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot t + \varepsilon_t$, где ошибки ε_t независимы и равномерны на $[-1; 1]$. С помощью симуляций на компьютере оцените и постройте график функции плотности для $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\sigma}^2$, $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1)$, $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2)$ и $\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$.

2.2 Пусть $y_i = \mu + \varepsilon_i$, где $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, $\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ при $i \neq j$. Найдите:

1. $\mathbb{E}(\bar{y})$;
2. $\mathrm{Var}(\bar{y})$;
3. $\mathbb{E}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2)$;
4. $\mathrm{Var}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2)$, если дополнительно известно, что ε_i нормально распределены.

2.3 Рассматривается модель $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$, $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, $\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ при $i \neq j$. При каких значениях параметров c_i несмещённая оценка $\hat{\beta} = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i / \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ имеет наименьшую дисперсию?

2.4 Пусть $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ и $i = 1, \ldots, 5$ — классическая регрессионная модель. Также имеются следующие данные: $\sum_{i=1}^{5} y_i^2 = 55$, $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 3$, $\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 12$, $\sum_{i=1}^{5} y_i = 15$, $\sum_{i=1}^{5} x_i = 3$.

1. Найдите $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\mathrm{Corr}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$.
2. Найдите TSS, ESS, RSS, R^2, $\hat{\sigma}^2$.
3. Проверьте гипотезу $\begin{cases} H_0 : \beta_2 = 2 \\ H_a : \beta_2 \neq 2 \end{cases}$.

4. Проверьте гипотезу $\begin{cases} H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ H_a : \beta_1 + \beta_2 \neq 1 \end{cases}$.

2.5 Пусть $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ и $i = 1, \ldots, 5$ — классическая регрессионная модель. Также имеются следующие данные: $\sum_{i=1}^5 y_i^2 = 55$, $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 2$, $\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 9$, $\sum_{i=1}^5 y_i = 15$, $\sum_{i=1}^5 x_i = 2$. Используя их, найдите:

1. $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$;
2. $\mathrm{Corr}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$;
3. TSS;
4. ESS;
5. RSS;
6. R^2;
7. $\hat{\sigma}^2$.

Проверьте следующие гипотезы:

1. $\begin{cases} H_0 : \beta_2 = 2 \\ H_a : \beta_2 \neq 2 \end{cases}$;
2. $\begin{cases} H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ H_a : \beta_1 + \beta_2 \neq 1 \end{cases}$.

2.6 Рассмотрите классическую линейную регрессионную модель $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$. Найдите $\mathbb{E}\hat{\beta}$. Какие из следующих оценок параметра β являются несмещёнными:

1. $\hat{\beta} = \frac{y_1}{x_1}$;
2. $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{y_1}{x_1} + \frac{1}{2}\frac{y_n}{x_n}$;
3. $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\left(\frac{y_1}{x_1} + \ldots + \frac{y_n}{x_n}\right)$;
4. $\hat{\beta} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$;
5. $\hat{\beta} = \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1}$;
6. $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{2}\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$;
7. $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{n}\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} + \ldots + \frac{1}{n}\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$;
8. $\hat{\beta} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} + \ldots + \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}\right)$;

9. $\hat{\beta} = \frac{x_1y_1+\ldots+x_ny_n}{x_1^2+\ldots+x_n^2}$;
10. $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{y_n-y_1}{x_n-x_1} + \frac{1}{2n}\left(\frac{y_1}{x_1}+\ldots+\frac{y_n}{x_n}\right)$;
11. $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{y_n-y_1}{x_n-x_1} + \frac{1}{2}\frac{x_1y_1+\ldots+x_ny_n}{x_1^2+\ldots+x_n^2}$;
12. $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}$;
13. $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})(\bar{y}-y_i)}{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}$;
14. $\hat{\beta} = \frac{y_1+2y_2+\ldots+ny_n}{x_1+2x_2+\ldots+nx_n}$;
15. $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n i(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^n i(x_i-\bar{x})}$;
16. $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}$;
17. $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{y_i-\bar{y}}{x_i-\bar{x}}$.

2.7 Рассмотрите классическую линейную регрессионную модель $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$. Найдите $\mathrm{Var}(\hat{\beta})$.

1. $\hat{\beta} = \frac{y_1}{x_1}$;
2. $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{y_1}{x_1} + \frac{1}{2}\frac{y_n}{x_n}$;
3. $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\left(\frac{y_1}{x_1}+\ldots+\frac{y_n}{x_n}\right)$;
4. $\hat{\beta} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$;
5. $\hat{\beta} = \frac{y_n-y_1}{x_n-x_1}$;
6. $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} + \frac{1}{2}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}$;
7. $\hat{\beta} = \frac{x_1y_1+\ldots+x_ny_n}{x_1^2+\ldots+x_n^2}$;
8. $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}$;
9. $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})(\bar{y}-y_i)}{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}$;
10. $\hat{\beta} = \frac{y_1+2y_2+\ldots+ny_n}{x_1+2x_2+\ldots+nx_n}$;
11. $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n i(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^n i(x_i-\bar{x})}$;
12. $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}$;
13. $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{y_i-\bar{y}}{x_i-\bar{x}}$.

2.8 Рассмотрите классическую линейную регрессионную модель $y_i = \beta \cdot i + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$. Какая из оценок $\hat{\beta}$ и $\tilde{\beta}$ является более эффективной?

1. $\hat{\beta} = y_1$ и $\tilde{\beta} = y_2/2$;
2. $\hat{\beta} = y_1$ и $\tilde{\beta} = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}\frac{y_2}{2}$;
3. $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\left(\frac{y_1}{1} + \ldots + \frac{y_n}{n}\right)$ и $\tilde{\beta} = \frac{1\cdot y_1 + \ldots + n\cdot y_n}{1^2 + \ldots + n^2}$.

2.9 На основе 100 наблюдений была оценена функция спроса:

$$\underset{(se)}{\widehat{\ln Q}} = \underset{(0.04)}{0.87} - \underset{(0.02)}{1.23} \ln P$$

Значимо ли коэффициент эластичности спроса по цене отличается от -1? Рассмотрите уровень значимости 5%.

2.10 На основе 100 наблюдений была оценена функция спроса:

$$\underset{(se)}{\widehat{\ln Q}} = \underset{(0.04)}{2.87} - \underset{(0.02)}{1.12} \ln P$$

На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_{\ln P} = -1$ против альтернативной $H_a : \beta_{\ln P} < -1$. Дайте экономическую интерпретацию проверяемой гипотезе и альтернативе.

2.11 Используя годовые данные с 1960 по 2005 г., была построена кривая Филлипса, связывающая уровень инфляции Inf и уровень безработицы $Unem$:

$$\widehat{Inf} = 2.34 - 0.23Unem$$

$$\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\beta}_{Unem})} = 0.04, R^2 = 0.12$$

На уровне значимости 1% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_{Unem} = 0$ против альтернативной $H_a : \beta_{Unem} \neq 0$.

2.12 Пусть $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ и $i = 1, \ldots, 18$ — классическая регрессионная модель, где $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$, $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$. Также имеются следующие данные: $\sum_{i=1}^{18} y_i^2 = 4256$, $\sum_{i=1}^{18} x_i^2 = 185$, $\sum_{i=1}^{18} x_i y_i = 814.25$, $\sum_{i=1}^{18} y_i = 225$, $\sum_{i=1}^{18} x_i = 49.5$. Используя эти данные, оцените эту регрессию и на уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_1 = 3.5$ против альтернативной $H_a : \beta_1 > 3.5$:

1. Приведите формулу для тестовой статистики.
2. Укажите распределение тестовой статистики.
3. Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики.
4. Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается.

5. Сделайте статистический вывод.

2.13 Рассматривается модель $y_i = \mu + \varepsilon_i$, где $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$ и $\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ при $i \neq j$. При каких c_i несмещённая оцека

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$$

имеет наименьшую дисперсию?

2.14 Рассмотрим модель с линейным трендом, $y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \varepsilon_t$. Всего имеется T наблюдений.

1. Найдите МНК оценки коэффициентов.
2. Рассчитайте $\mathbb{E}(\hat{\beta}_i)$ и $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_i)$ в предположениях теоремы Гаусса-Маркова.
3. Верно ли, что оценки $\hat{\beta}_i$ состоятельны?

2.15 Ошибки регрессии ε_i независимы и равновероятно принимают значения $+1$ и -1. Также известно, что $y_i = \beta \cdot i + \varepsilon_i$. Модель оценивается всего по двум наблюдениям.

1. Найдите закон распределения $\hat{\beta}$, RSS, ESS, TSS, R^2.
2. Найдите $\mathbb{E}(\hat{\beta})$, $\mathrm{Var}(\hat{\beta})$, $\mathbb{E}(RSS)$, $\mathbb{E}(ESS)$, $\mathbb{E}(R^2)$.
3. При каком β величина $\mathbb{E}(R^2)$ достигает максимума?

2.16 Рассмотрим модель с линейным трендом без свободного члена, $y_t = \beta t + \varepsilon_t$. Всего имеется T наблюдений.

1. Найдите МНК оценку коэффициента β.
2. Рассчитайте $\mathbb{E}(\hat{\beta})$ и $\mathrm{Var}(\hat{\beta})$ в предположениях теоремы Гаусса-Маркова.
3. Верно ли, что оценка $\hat{\beta}$ состоятельна?

2.17 В модели $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$, где $x_t = \begin{cases} 2, \ t = 1 \\ 1, \ t > 1 \end{cases}$:

1. Найдите МНК-оценку $\hat{\beta}_2$.
2. Рассчитайте $\mathbb{E}(\hat{\beta}_2)$ и $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2)$ в предположениях теоремы Гаусса-Маркова.

3. Верно ли, что оценка $\hat{\beta}_2$ состоятельна?

2.18 В модели $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$, где $x_t = \begin{cases} 1, \; t = 2k+1 \\ 0, \; t = 2k \end{cases}$:

1. Найдите МНК-оценку $\hat{\beta}_2$.
2. Рассчитайте $\mathbb{E}(\hat{\beta}_2)$ и $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2)$ в предположениях теоремы Гаусса-Маркова.
3. Верно ли, что оценка $\hat{\beta}_2$ состоятельна?

2.19 Априори известно, что парная регрессия должна проходить через точку (x_0, y_0).

1. Выведите формулы МНК оценок.
2. В предположениях теоремы Гаусса-Маркова найдите дисперсии и средние оценок.

2.20 Мы предполагаем, что y_t растёт с линейным трендом, то есть $y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \varepsilon_t$. Все предпосылки теоремы Гаусса-Маркова выполнены. В качестве оценки $\hat{\beta}_2$ предлагается $\hat{\beta}_2 = (y_T - y_1)/(T-1)$, где T — общее количество наблюдений.

1. Найдите $\mathbb{E}(\hat{\beta}_2)$ и $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2)$.
2. Совпадает ли оценка $\hat{\beta}_2$ с классической МНК-оценкой?
3. У какой оценки дисперсия выше, у $\hat{\beta}_2$ или классической МНК-оценки?

2.21 Вася работает с детерминистическими регрессорами и считает, что выборочная ковариация $\mathrm{sCov}(y, \hat{y}) = \sum (y_i - \bar{y})(\hat{y}_i - \bar{y})/(n-1)$ это неплохая оценка для $\mathrm{Cov}(y_i, \hat{y}_i)$.

1. Прав ли он?
2. Изменится ли ответ, если регрессоры — стохастические и представляют собой случайную выборку?

2.22 В классической линейной регрессионной модели $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$, дисперсия зависимой переменной не зависит от номера наблюдения, $\mathrm{Var}(y_i) = \sigma^2$. Почему для оценки σ^2 вместо известной из курса математической статистики формулы $\sum (y_i - \bar{y})^2/(n-1)$ используют $\sum \hat{\varepsilon}_i^2/(n-2)$?

2.23 Оценка регрессии имеет вид $\hat{y}_i = 3 - 2x_i$. Выборочная дисперсия x равна 9, выборочная дисперсия y равна 40. Найдите R^2 и выборочные корреляции $\mathrm{sCorr}(x, y)$, $\mathrm{sCorr}(y, \hat{y})$.

2.24 Перед нами два золотых слитка и весы, производящие взвешивания с ошибками. Взвесив первый слиток, мы получили результат 300 грамм, взвесив второй слиток — 200 грамм, взвесив оба слитка — 400 грамм. Предположим, что ошибки взвешивания — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним.

1. Найдите несмещённую оценку веса первого слитка, обладающую наименьшей дисперсией.
2. Как можно проинтерпретировать нулевое математическое ожидание ошибки взвешивания?

2.25 Рассмотрим линейную модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$, где ошибки ε_i нормальны $N(0; \sigma^2)$ и независимы.

1. Верно ли, что y_i одинаково распределены?
2. Верно ли, что $\bar{y}$ — это несмещённая оценка для $\mathbb{E}(y_i)$?
3. Верно ли, что $\sum(y_i - \bar{y})^2/(n-1)$ — несмещённая оценка для σ^2? Если да, то докажите, если нет, то определите величину смещения.

2.26 Модель регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$, в которой ошибки ε_i независимы и нормальны $N(0; \sigma^2)$, оценивается по 22 наблюдениям. Найдите $\mathbb{E}(RSS)$, $\mathrm{Var}(RSS)$, $\mathbb{P}(10\sigma^2 < RSS < 30\sigma^2)$, $\mathbb{P}(10\hat{\sigma}^2 < RSS < 30\hat{\sigma}^2)$.

2.27 Модель регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$, в которой ошибки ε_i независимы и нормальны $N(0; \sigma^2)$, оценивается по 12 наблюдениям. Найдите

1. вероятности $\mathbb{P}(\hat{\beta}_1 > \beta_1)$, $\mathbb{P}(\beta_1 > 0)$, $\mathbb{P}(|\hat{\beta}_1 - \beta_1| < se(\hat{\beta}_1))$, $\mathbb{P}(\hat{\beta}_2 > \beta_2 + se(\hat{\beta}_2))$, $\mathbb{P}(\hat{\beta}_2 > \beta_2 - se(\hat{\beta}_2))$;
2. математические ожидания $\mathbb{E}(\hat{\beta}_1)$, $\mathbb{E}(\hat{\beta}_2)$, $\mathbb{E}(\beta_2)$;
3. закон распределения, математическое ожидание и дисперсию величин
$$\frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2)}},$$

$$\frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_2)}},$$

$$\frac{\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 - \beta_1 - \beta_2}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2)}};$$

4. вероятности $\mathbb{P}(\hat{\sigma} > \sigma)$, $\mathbb{P}(\hat{\sigma} > 2\sigma)$.

2.28 Для модели парной регрессии известны $y = (1, 2, 3, 4, 5)'$ и $\hat{y} = (2, 2, 2, 4, 5)'$. Найдите RSS, TSS, R^2, $\hat{\sigma}^2$.

2.29 В классической парной регрессионной модели $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ с нормально распределенными ошибками, оцениваемой по 30 наблюдениям, дополнительно известно, что $\text{Var}(\varepsilon_7) = 9$. Найдите

1. $\mathbb{E}(\varepsilon_2)$, $\text{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$, $\mathbb{E}(\varepsilon_3^5)$, $\mathbb{E}(\hat{\varepsilon}_5^3)$, $\text{Var}(\hat{\varepsilon}_5)$, $\text{Var}(y_3)$;
2. $\mathbb{P}(\hat{\varepsilon}_2 > \varepsilon_3)$, $\mathbb{P}(\hat{\varepsilon}_1 > 0)$, $\mathbb{P}(\varepsilon_1 > 3)$;
3. $\mathbb{E}(RSS)$, $\text{Var}(RSS)$, $\mathbb{P}(RSS > 200)$.

2.30 В модели парной регрессии придумайте такие наблюдения, чтобы:

1. $R^2 = 0.9$;
2. $R^2 = 0.8$ и регрессия имела вид $\hat{y} = 2 + 3x$.

2.31 Оцененная с помощью линейной модели $y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \varepsilon_t$ методом наименьших квадратов зависимость расходов на питание y от времени, определённого как $t = 1$ для 1995 г., $t = 2$ для 1996 г., ..., $t = 12$ для 2006 г., задана уравнением $\hat{y}_t = 95 + 2.5t$.

Чему были бы равны оценки коэффициентов β_1 и β_2, если бы в качестве t использовались фактические даты (1995 – 2006), а не числа от 1 до 12?

2.32 Пусть есть набор данных (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$, $(x_i > 0, y_i > 0)$, порожденных уравнением $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$, удовлетворяющих условиям стандартной модели парной регрессии. Рассматриваются следующие оценки параметра β_2:

$$\tilde{\beta}_2^a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i},\ \tilde{\beta}_2^b = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$$

Найдите дисперсию и смещение каждой из оценок.

2.33 Уравнение $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$ оценивается по МНК. Может ли коэффициент детерминации быть малым (<0.05), а статистика $t_{\hat{\beta}_2}$ большой (>10)?

2.34 Докажите, что в случае, когда $|\,\mathrm{sCorr}(x, y)| = 1$, линия парной регрессии y на x совпадает с линией парной регрессии x на y.

2.35 Сгенерите выборку из двух зависимых но некоррелированных случайных величин. Можно ли «поймать» зависимость используя парную регрессию?

2.36 Все предпосылки классической линейной модели выполнены, $y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon$. Рассмотрим альтернативную оценку коэффициента β_2,

$$\hat{\beta}_{2,IV} = \frac{\sum z_i(y_i - \bar{y})}{\sum z_i(x_i - \bar{x})}$$

1. Является ли оценка несмещённой?
2. Любые ли z_i можно брать?
3. Найдите $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_{2,IV})$.

2.37 Напишите формулу для оценок коэффициентов в парной регрессии без матриц. Напишите формулу для дисперсий оценок коэффициентов.

2.38 Рассматривается модель линейной регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$, в которой ошибки $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ являются независимыми нормально распределенными случайными величинами с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2. Найдите

1. $\mathbb{P}\left(\varepsilon_1 > 0\right)$;
2. $\mathbb{P}\left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 > 2\sigma^2\right)$;
3. $\mathbb{P}\left(\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2}} > 2\right)$;
4. $\mathbb{P}\left(\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\varepsilon_4^2}} > \frac{5}{4\sqrt{3}}\right)$;
5. $\mathbb{P}\left(\frac{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_3^2+\varepsilon_4^2+\varepsilon_5^2}} < \frac{9}{2}\right)$;
6. $\mathbb{P}\left(\frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2} > 17\right)$.

2.39 В модели парной регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ ошибки ε_i независимы и имеют пуассоновское распределение с параметром λ.

1. Предложите способ несмещённо оценить λ.
2. Являются ли МНК-оценки $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$ несмещёнными? Если оценки являются смещёнными, то предложите несмещённые оценки.

2.40 У Эконометрессы Глафиры было четыре наблюдения и она решила оценить модель парной регрессии:

y	x
5	1
4	2
4	3
3	4

Эконометресса Анжелла решила, что четыре наблюдения — мало, и поэтому учла каждое наблюдение 10 раз, так что в результате у неё вышло 40 наблюдений.

1. Какие оценки коэффициентов получат Анжелла и Глафира? Будут ли значимы оценки коэффициентов в предположении нормальности ошибок?
2. Во сколько раз у Анжеллы и Глафиры отличаются: коэффициенты детерминации, коэффициенты выборочной корреляции между x и y, RSS?

2.41 Эконометрессу Аглаю интересует несмещённая оценка для математического ожидания первого значения зависимой переменной, $\mathbb{E}(y_1) = \beta_1 + \beta_2 x_i$. На ум ей пришло две оценки, фактически измеренное первое наблюдение, y_1, и прогноз первого наблюдения $\hat{y}_1$.

1. Являются ли эти оценки несмещёнными?
2. Какая оценка имеет меньшую дисперсию?

2.42 Что происходит с TSS, RSS, ESS, R^2 при добавлении нового наблюдения? Если величина может изменяться только в одну сторону, то докажите это. Если возможны и рост, и падение, то приведите пример.

2.43 Эконометресса Аглая подглядела, что у эконометрессы Жозефины получился R^2 равный 0.99 по 300 наблюдениям. От чёрной зависти Аглая не может ни есть, ни спать.

1. Аглая добавила в набор данных Жозефины ещё 300 наблюдений с такими же регрессорами, но противоположными по знаку игреками, чем были у Жозефины. Как изменится R^2?
2. Жозефина заметила, что Аглая добавила 300 наблюдений и вычеркнула их, вернув в набор данных в исходное состояние. Хитрая Аглая решила тогда добавить всего одно наблюдение так, чтобы R^2 упал до нуля. Удастся ли ей это сделать?

2.44 В рамках стандартных предпосылок на ε_i найдите $\mathbb{E}(\bar{\varepsilon})$ и $\mathrm{Var}(\bar{\varepsilon})$. Вспомните неравенство Чебышёва и найдите $\mathrm{plim}\,\bar{\varepsilon}$, $\mathrm{plim}\,\frac{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+3\varepsilon_3+\ldots+n\varepsilon_n}{1+2+3+\ldots+n}$.

2.45 В модели $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$, где $x_t = 1/t$.

1. Найдите МНК-оценку $\hat{\beta}_2$.
2. Рассчитайте $\mathbb{E}(\hat{\beta}_2)$ и $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2)$ в предположениях теоремы Гаусса-Маркова.
3. Верно ли, что оценка $\hat{\beta}_2$ состоятельна?

2.46 Зависимая переменная y_i — вес i-го индивида. Единственный регрессор, дамми-переменная x_i, равна 1 для мужчин и 0 для женщин. Модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ оценивается с помощью обыкновенного МНК.

1. Выведите явные формулы для $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $se(\hat{\beta}_1)$, $se(\hat{\beta}_2)$ и соответствующих t-статистик.
2. Проинтерпретируйте полученные результаты.

2.47 Эконометресса Юнона оценила регрессию по 100 наблюдениям и оказалось, что $\hat{y} = 2 + 5x$, а $\bar{y}$ равно 12. После этого она добавила одно наблюдения и переоценила регрессию. Оказалось, что RSS и TSS не изменились.

1. Какое наблюдения она добавила?
2. Как изменились оценки коэффициентов?

2.48 Нарисуйте на плоскости точки так, чтобы при построении парной регрессии оказалось, что:

1. $RSS = 0$, $ESS > 0$;

2. $RSS > 0$, $ESS = 0$;

3. $RSS = 0$, $ESS = 0$.

2.49 Рассмотрим модель парной регрессии. Можно ли добавить одно наблюдение так, чтобы:

1. Оценки $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$ не изменились?

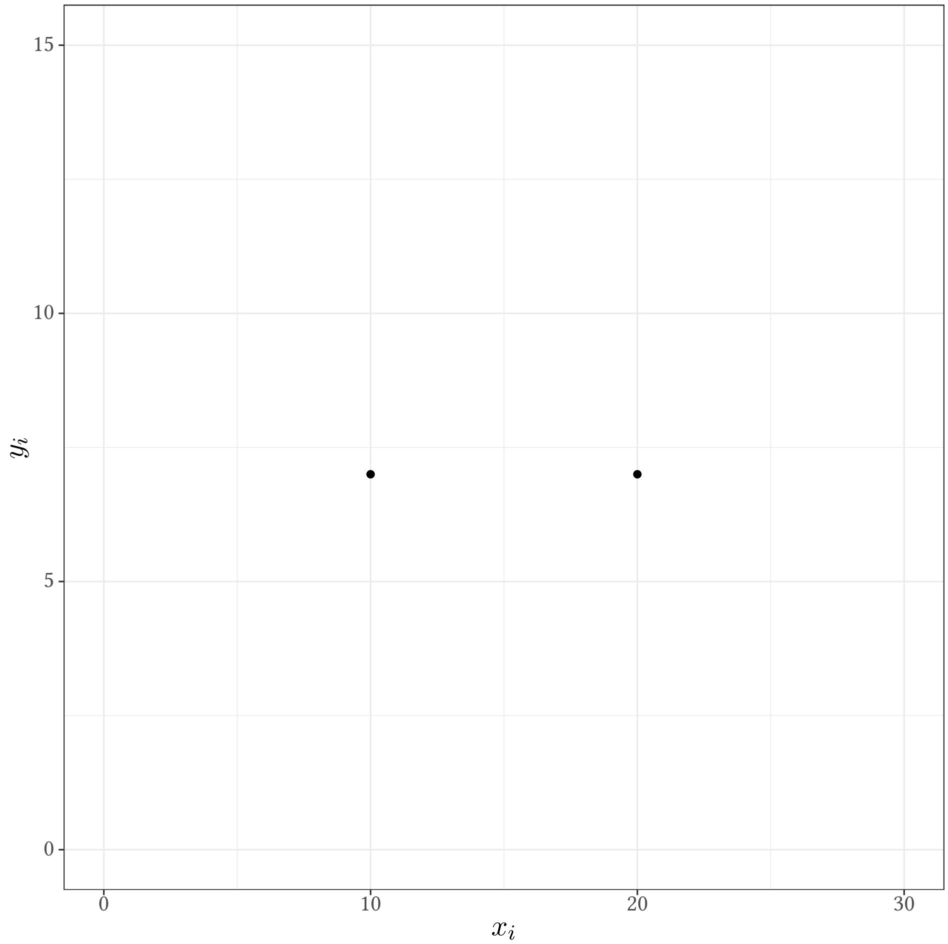
2. Оценка $\hat{\beta}_1$ изменилась, а $\hat{\beta}_2$ — нет?

3. Оценка $\hat{\beta}_2$ изменилась, а $\hat{\beta}_1$ — нет?

2.50 На плоскости изображены оба наблюдения:

```
tikz("../R_plots/two_points_zero_slope.tikz", standAlone = FALSE, bareBones = TRUE)
data_2d <- data_frame(
  x = c(10, 20),
  y = c(7, 7))

qplot(data = data_2d, x = x, y = y) + theme_bw() +
  xlab("$x_i$") + ylab("$y_i$") +
  scale_y_continuous(limits = c(0, 15)) +
  scale_x_continuous(limits = c(0, 30))
invisible(dev.off())
```



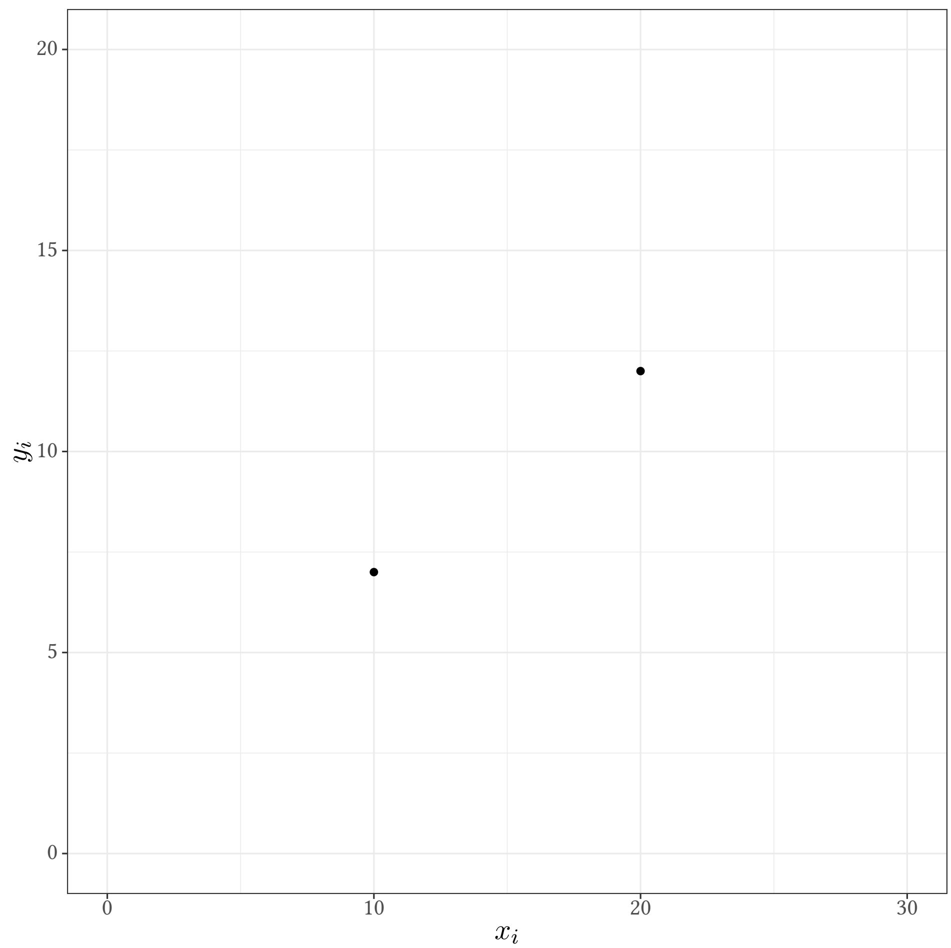
1. Проведите линию регрессии.
2. Найдите все $\hat{y}_i$, RSS, R^2.

2.51 На плоскости изображены оба наблюдения:

```
tikz("../R_plots/two_points_positive_slope.tikz", standAlone = FALSE, bareBones = TRUE)
data_2d <- data_frame(
  x = c(10, 20),
  y = c(7, 12))

qplot(data = data_2d, x = x, y = y) + theme_bw() +
  xlab("$x_i$") + ylab("$y_i$") +
```

```
  scale_y_continuous(limits = c(0, 20)) +
  scale_x_continuous(limits = c(0, 30))
invisible(dev.off())
```



1. Проведите линию регрессии.
2. Найдите RSS, R^2.

2.52 Три точки, прямая $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i$. Даны два расстояния от точек до прямой по вертикали, надо найти третье.

вставить график

2.53 На работе Эконометресса Эвридика построила парную регрессию по трём наблюдениям. На листочек она переписала фактические значения y_i и прогнозные $\hat{y}_i$. К сожалению, когда Эвридика пришла домой, она обнаружила, что слишком неразборчиво записала два значения $\hat{y}_i$:

y_i	$\hat{y}_i$
0	5
10	?
20	?

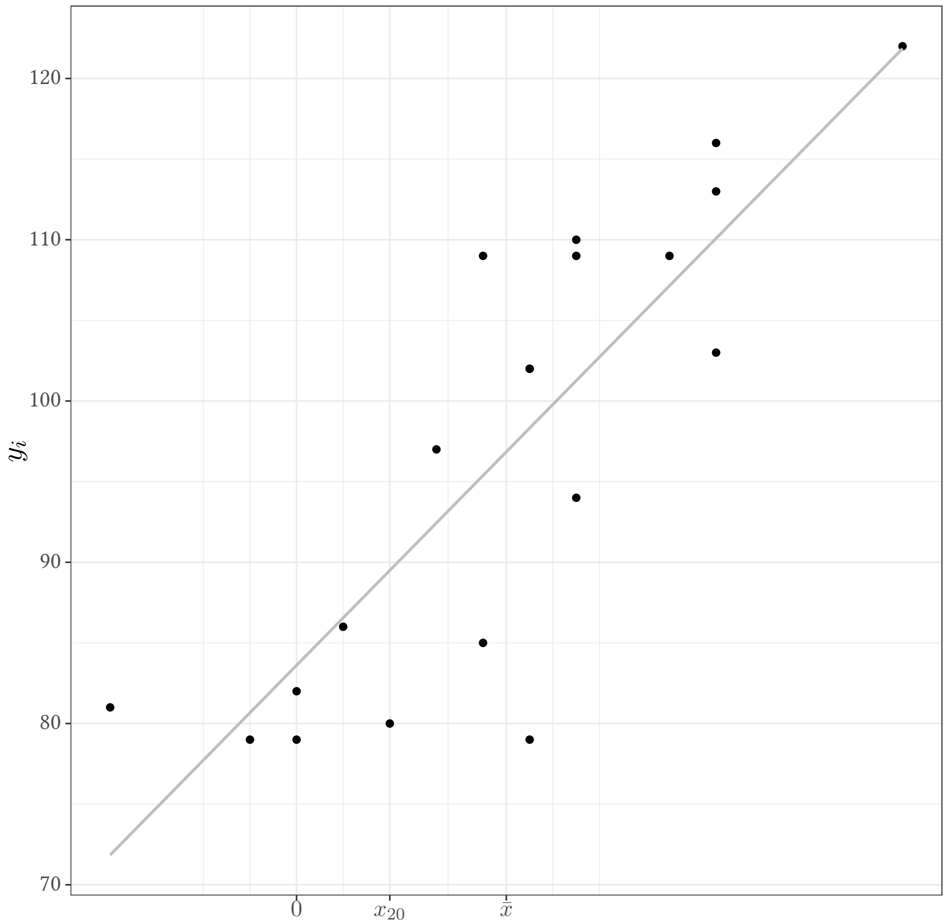
1. Восстановите пропущенные значения.
2. Найдите RSS, ESS, TSS, R^2.

2.54 На плоскости изображены наблюдения и линия регрессии:

```
tikz("../R_plots/regression_on_plot.tikz", standAlone = FALSE, bareBones = TRUE)
set.seed(94)
n_obs <- 20
data_2d <- data_frame(
  x = -20 + rbinom(n_obs, size = 50, prob = 0.5),
  y = 5 + 3 * x + rbinom(n_obs, size = 160, prob = 0.5))

x_bar <- mean(data_2d$x)

qplot(data = data_2d, x = x, y = y) + theme_bw() +
  scale_x_continuous(breaks = c(0, data_2d$x[20], x_bar),
                     labels = c("$0$", "$x_{20}$", "$\\bar x$")) +
  stat_smooth(method = "lm", se = FALSE, col = I("gray")) +
  xlab("") + ylab("$y_i$")
invisible(dev.off())
```



1. Изобразите на плоскости $\hat{y}_{20}$, y_{20}, $\bar{y}$, $\hat{u}_{20}$, $\hat{\beta}_1$.
2. Что произойдёт с каждой из указанных величин при добавлении нового наблюдения равного $(\bar{x}+1, \bar{y}+\hat{\beta}_2)$?

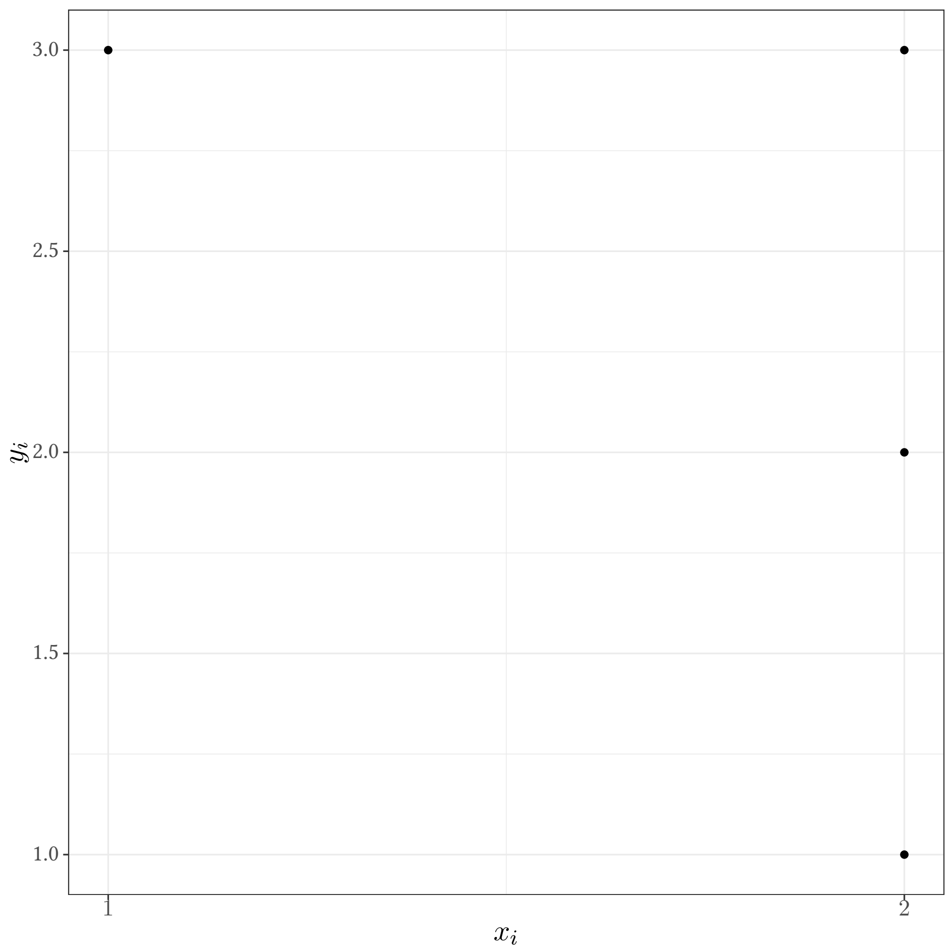
2.55 Имеется всего два наблюдения, $y_1 = 1$, $y_2 = -3$. С помощью критериев AIC и BIC сравните две модели. Модель А: $y_i \sim \mathcal{N}(0;1)$ и независимы, модель Б: $y_i \sim \mathcal{N}(\mu;1)$ и независимы.

2.56 Постройте парную регрессию по четырём наблюдениям:

```
tikz("../R_plots/4_observations.tikz", standAlone = FALSE, bareBones = TRUE)
data_2d <- data_frame(
```

```
  x = c(1, 2, 2, 2),
  y = c(3, 1, 2, 3))

qplot(data = data_2d, x = x, y = y) + theme_bw() +
  scale_x_continuous(breaks = c(0, 1, 2),
  labels = c("$0$", "$1$", "$2$")) +
  xlab("$x_i$") + ylab("$y_i$")
invisible(dev.off())
```



2.57 Исследователь Василий изучает следующий случайный эксперимент. Подбрасывается 10 стандартных игральных кубиков. Количество выпавших единиц — случайная величина X, количество выпавших двоек — Z, суммарное количество четвёрок, пятёрок и шестёрок — Y.

Василий провёл данный эксперимент четыре раза и собрал фактические данные:

x_i	y_i	z_i
2	6	1
1	7	0
1	4	3
2	5	2

Найдите:

1. Теоретическое математическое ожидание $\mathbb{E}(X)$ и выборочное среднее $\bar{x}$.
2. Теоретическую дисперсию $\mathrm{Var}(X)$ и выборочную дисперсию $\widehat{\mathrm{Var}}(x)$.
3. Теоретическую ковариацию $\mathrm{Cov}(X, Y)$ и выборочную ковариацию $\widehat{\mathrm{Cov}}(x, y)$.
4. Теоретическую корреляцию $\mathrm{Corr}(X, Y)$ и выборочную корреляцию $\widehat{\mathrm{Corr}}(x, y)$.
5. Истинные коэффициенты β_1 и β_2 в модели $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i$ и оценки коэффициентов $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$.
6. Истинные коэффициенты γ_1 и γ_2 в модели $x_i = \gamma_1 + \gamma_2 y_i + u_i$ и оценки коэффициентов $\hat{\gamma}_1$ и $\hat{\gamma}_2$.
7. Как связаны между собой $\mathrm{Corr}(X, Y)$, β_2 и γ_2?
8. Как связаны между собой $\widehat{\mathrm{Corr}}(X, Y)$, $\hat{\beta}_2$ и $\hat{\gamma}_2$?
9. Истинные коэффициенты α_1, α_2 и α_3 в модели $y_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 z_i + u_i$ и оценки коэффициентов $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_2$ и $\hat{\alpha}_3$.
10. Истинные коэффициенты δ_1, δ_2 и δ_3 в модели $x_i = \delta_1 + \delta_2 y_i + \delta_3 z_i + u_i$ и оценки коэффициентов $\hat{\delta}_1$, $\hat{\delta}_2$ и $\hat{\delta}_3$.
11. Теоретическую частную корреляцию $\mathrm{pCorr}(X, Y; Z)$ и выборочную частную корреляцию $\widehat{\mathrm{pCorr}}(x, y; z)$.

2.58 Машенька построила парную регрессию по 11 наблюдениям с $R^2 = 0.95$. Чтобы напакостить Машеньке, Вовочка переставил в случайном порядке значения зависимой переменной и предложил Машеньке заново оценить модель.

Какой ожидаемый R^2 получит Машенька?

2.59 Винни-Пух оценивает регрессию $\hat{y}_t = \hat{\beta} y_{t-1}$ с помощью метода наименьших квадратов. Найдите $\mathrm{plim}\, \hat{\beta}$, если

1. y_t независимы и одинаково распределены $\mathcal{N}(0;1)$;
2. y_t независимы и одинаково распределены $\mathcal{N}(1;1)$;
3. y_t независимы и одинаково распределены $\mathcal{N}(t;1)$;
4. y_t независимы и одинаково распределены $\mathcal{N}(1;t)$;
5. y_t независимы и одинаково распределены $\mathcal{N}(t;t)$;
6. $y_t = t$;
7. $y_1 = 1$, а начиная с $t = 2$ все $y_t = 0$;
8. $y_1 = 0$, а начиная с $t = 2$ все $y_t = 1$;
9. $y_t = 1/t$;
10. $y_t = t^2$;
11. $y_t = 2^t$;
12. $y_t = w_1 + w_2 + w_3 + \cdot + w_t$, где w_t независимы и одинаково распределены;
13. y_t — это числа Фибоначчи;

Глава 3

Многомерный МНК без матриц

3.1 Эконометрэсса Ширли зашла в пустую аудиторию, где царил приятный полумрак, и увидела на доске до боли знакомую надпись:

$$\hat{y} = \underset{(2.37)}{1.1} - \underset{(-0.4)}{0.7} \cdot x_2 + \underset{(3.15)}{0.9} \cdot x_3 - \underset{(-0.67)}{19} \cdot x_4$$

Помогите эконометрэссе Ширли определить, что находится в скобках:

1. P-значения;
2. t-статистики;
3. стандартные ошибки коэффициентов;
4. R^2, скорректированный на номер коэффициента;
5. показатели VIF для каждого коэффициента.

3.2 Для нормальной регрессии с 5-ю факторами (включая свободный член) известны границы симметричного по вероятности 80% доверительного интервала для дисперсии σ_ε^2: $[45; 87.942]$.

1. Определите количество наблюдений в выборке.
2. Вычислите $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$.

3.3 Рассмотрим следующую регрессионную модель зависимости логарифма заработной платы индивида $\ln W$ от его уровня образования

Edu, опыта работы Exp, Exp^2, уровня образования его отца $Fedu$, и уровня образования его матери $Medu$:

$$\widehat{\ln W} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 Edu + \hat{\beta}_3 Exp + \hat{\beta}_4 Exp^2 + \hat{\beta}_5 Fedu + \hat{\beta}_6 Medu.$$

Модель регрессии была отдельно оценена по выборкам из 35 мужчин и 23 женщин, и были получены остаточные суммы квадратов RSS_1 = 34.4 и RSS_2 = 23.4 соответственно. Остаточная сумма квадратов в регрессии, оценённой по объединённой выборке, равна 70.3. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу об отсутствии дискриминации в оплате труда между мужчинами и женщинами.

3.4 Рассмотрим следующую регрессионную модель зависимости логарифма заработной платы $\ln W$ от уровня образования Edu, опыта работы Exp, Exp^2:

$$\widehat{\ln W} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 Edu + \hat{\beta}_3 Exp + \hat{\beta}_4 Exp^2.$$

Модель регрессии была отдельно оценена по выборкам из 20 мужчин и 20 женщин, и были получены остаточные суммы квадратов RSS_1 = 49.4 и RSS_2 = 44.1 соответственно. Остаточная сумма квадратов в регрессии, оценённой по объединённой выборке, равна 105.5. На уровне 5% проверьте гипотезу об отсутствии дискриминации в оплате труда между мужчинами и женщинами.

3.5 Ниже приведены результаты оценивания спроса на молоко для модели $y_i = \beta_1 + \beta_2 I_i + \beta_3 P_i + \varepsilon_i$, где y_i – стоимость молока, купленного i–ой семьёй за последние 7 дней (в руб.), I_i – месячный доход i–ой семьи (в руб.), P_i – цена 1 литра молока (в руб.). Вычисления для общей выборки, состоящей из 2127 семей, дали $RSS = 8841601$. Для двух подвыборок, состоящих из 348 городских и 1779 сельских семей, соответствующие суммы квадратов остатков оказались следующими: RSS_1 = 1720236 и RSS_2 = 7099423. Можно ли считать зависимость спроса на молоко от его цены и дохода единой для городской и сельской местности? Ответ обоснуйте подходящим тестом.

3.6 По 52 наблюдениям была оценена следующая зависимость цены квадратного метра квартиры $Price$ (в долларах) от площади кухни K (в квадратных метрах), времени в пути пешком до ближайшего метро M (в минутах), расстояния до центра города C (в км) и наличия рядом с домом лесопарковой зоны P (1 — есть, 0 — нет).

$$\underset{(se)}{\widehat{Price}} = \underset{(3.73)}{16.12} + \underset{(0.14)}{1.7}\,K - \underset{(0.03)}{0.35}\,M - \underset{(0.12)}{0.46}\,C + \underset{(0.98)}{2.22}\,P$$

$$R^2 = 0.78, \sum_{i=1}^{52} (Price_i - \overline{Price})^2 = 278$$

Предположим, что все квартиры в выборке можно отнести к двум категориям: квартиры на севере города (28 наблюдений) и квартиры на юге города (24 наблюдения). Модель регрессии была оценена отдельно только по квартирам на севере и только по квартирам на юге. Ниже приведены результаты оценивания.

Для квартир на севере:

$$\underset{(se)}{\widehat{Price}} = \underset{(3.3)}{14} + \underset{(0.23)}{1.6}\,K - \underset{(0.04)}{0.33}\,M - \underset{(0.22)}{0.4}\,C + \underset{(0.78)}{2.1}\,P, RSS = 21.8$$

Для квартир на юге:

$$\underset{(se)}{\widehat{Price}} = \underset{(3.9)}{16.8} + \underset{(0.4)}{1.62}K - \underset{(0.12)}{0.29}\,M - \underset{(0.23)}{0.51}\,C + \underset{(1.28)}{1.98}\,P, RSS = 19.2$$

На уровне значимости 5% проверьте гипотезу о различии в ценообразовании квартир на севере и на юге.

3.7 По 52 наблюдениям была оценена следующая зависимость цены квадратного метра квартиры $Price$ (в долларах) от площади кухни K (в квадратных метрах), времени в пути пешком до ближайшего метро M (в минутах), расстояния до центра города C (в км) и наличия рядом с домом лесопарковой зоны P (1 — есть, 0 — нет).

$$\underset{(se)}{\widehat{Price}} = \underset{(3.73)}{16.12} + \underset{(0.14)}{1.7}\,K - \underset{(0.03)}{0.35}\,M - \underset{(0.12)}{0.46}\,C + \underset{(0.98)}{2.22}\,P$$

$$R^2 = 0.78, \sum_{i=1}^{52} (Price_i - \overline{Price})^2 = 278$$

Предположим, что все квартиры в выборке можно отнести к двум категориям: квартиры на севере города (28 наблюдений) и квартиры на юге города (24 наблюдения). Пусть S — это фиктивная переменная, равная 1 для домов в южной части города и 0 для домов в северной части города. Используя эту переменную, была оценена следующая регрессия:

$$\underset{(se)}{\widehat{Price}} = \underset{(3.13)}{14.12} + \underset{(0.11)}{0.25}S + \underset{(0.13)}{1.65}K + \underset{(0.14)}{0.17}K \cdot S - \underset{(0.039)}{0.37}M +$$
$$+ \underset{(0.0012)}{0.05}M \cdot S - \underset{(0.13)}{0.44}C - \underset{(0.18)}{0.06}C \cdot S + \underset{(0.88)}{2.27}P - \underset{(0.08)}{0.23}P \cdot S$$

$$R^2 = 0.85$$

На уровне значимости 5% проверьте гипотезу о различии в ценообразовании квартир на севере и на юге.

3.8 На основе квартальных данных с 2003 по 2008 год было получено следующее уравнение регрессии, описывающее зависимость цены на товар P от нескольких факторов:

$$\hat{P}_t = 3.5 + 0.4X_t + 1.1W_t, ESS = 70.4, RSS = 40.5$$

Когда в уравнение были добавлены фиктивные переменные, соответствующие первым трем кварталам года Q_1, Q_2, Q_3, оцениваемая модель приобрела вид:

$$P_t = \beta + \beta_X X_t + \beta_W W_t + \beta_{Q_{1t}} Q_{1t} + \beta_{Q_{2t}} Q_{2t} + \beta_{Q_{3t}} Q_{3t} + \varepsilon_t$$

При этом величина $ESS = \sum(\hat{P}_t - \bar{P})^2$ выросла до 86.4.

1. Аккуратно сформулируйте гипотезу об отсутствии сезонности.
2. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу о наличии сезонности.

3.9 Рассмотрим следующую функцию спроса с сезонными переменными $SPRING$ (весна), $SUMMER$ (лето), $FALL$ (осень):

$$\widehat{\ln Q} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \cdot \ln P + \hat{\beta}_3 \cdot SPRING + \hat{\beta}_4 \cdot SUMMER + \hat{\beta}_5 \cdot FALL$$

$$R^2 = 0.37, n = 20$$

Напишите спецификацию регрессии с ограничениями для проверки статистической гипотезы $H_0 : \beta_3 = \beta_5$. Дайте интерпретацию проверяемой гипотезе. Пусть для регрессии с ограничениями был вычислен коэффициент $R^2_R = 0.23$. На уровне значимости 5% проверьте нулевую гипотезу.

3.10 Рассмотрим следующую функцию спроса с сезонными переменными $SPRING$ (весна), $SUMMER$ (лето), $FALL$ (осень):

$$\widehat{\ln Q} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \cdot \ln P + \hat{\beta}_3 \cdot SPRING + \hat{\beta}_4 \cdot SUMMER + \hat{\beta}_5 \cdot FALL$$

$$R^2 = 0.24, n = 24$$

Напишите спецификацию регрессии с ограничениями для проверки статистической гипотезы $H_0 : \begin{cases} \beta_3 = 0, \\ \beta_4 = \beta_5 \end{cases}$. Дайте интерпретацию проверяемой гипотезе. Пусть для регрессии с ограничениями был вычислен коэффициент $R_R^2 = 0.13$. На уровне значимости 5% проверьте нулевую гипотезу.

3.11 Исследователь собирается по выборке, содержащей месячные данные за 2 года, построить модель линейной регрессии с константой и 3-мя объясняющими переменными. В модель предполагается ввести 3 фиктивные сезонные переменные $SPRING$ (весна), $SUMMER$ (лето) и $FALL$ (осень) на все коэффициенты регрессии. Однако в процессе оценивания статистический пакет вывел сообщение «insufficient number of observations». Объясните, почему имеющегося числа наблюдений не хватило для оценивания параметров модели.

3.12 По данным для 57 индивидов оценили зависимость длительности обучения индивида S от способностей индивида, описываемых обобщённой переменной IQ, и пола индивида, описываемого с помощью фиктивной переменной $MALE$ (равной 1 для мужчин и 0 для женщин), с помощью двух регрессий (в скобках под коэффициентами указаны оценки стандартных отклонений):

$$\underset{(se)}{\hat{S}} = \underset{(0.44)}{6.12} + \underset{(0.088)}{0.147} \cdot IQ, RSS = 2758.6$$

$$\underset{(se)}{\hat{S}} = \underset{(0.73)}{6.12} + \underset{(0.014)}{0.147} \cdot IQ - \underset{(0.933)}{1.035} \cdot MALE + \underset{(0.018)}{0.0166} \cdot (MALE \cdot IQ)$$

Во второй регрессии сумма квадратов остатков равна $RSS = 2090.98$ Зависит ли длительность обучения от пола индивида и почему?

3.13 По данным, содержащим 30 наблюдений, построена регрессия:

$$\hat{y} = 1.3870 + 5.2587 \cdot x + 2.6259 \cdot d + 2.5955 \cdot x \cdot d,$$

где фиктивная переменная d определяется следующим образом:

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{при } i \in \{1, \ldots, 20\}, \\ 0 & \text{при } i \in \{21, \ldots, 30\}. \end{cases}$$

Найдите оценки коэффициентов в модели $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$, построенной по первым 20-ти наблюдениям, т.е. при $i \in \{1, \ldots, 20\}$.

3.14 Выборка содержит 30 наблюдений зависимой переменной y и независимой переменной x. Ниже приведены результаты оценивания уравнения регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ по первым 20-ти и последним 10-ти наблюдениям соответственно:

$$\hat{y} = 4.0039 + 2.6632 \cdot x$$

$$\hat{y} = 1.3780 + 5.2587 \cdot x$$

По имеющимся данным найдите оценки коэффициентов модели, рассчитанной по 30-ти наблюдениям $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \Delta\beta_1 \cdot d_i + \Delta\beta_2 \cdot x_i \cdot d_i + \varepsilon_i$, где фиктивная переменная d определяется следующим образом:

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{при } i \in \{1, \ldots, 20\}, \\ 0 & \text{при } i \in \{21, \ldots, 30\}. \end{cases}$$

3.15 Пусть регрессионная модель имеет вид $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i1} + \beta_3 x_{i2} + \beta_4 x_{i3} + \varepsilon_i, i = 1, \ldots, n$. Тестируемая гипотеза $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$. Запишите, какой вид имеет ограниченная модель для тестирования указанной гипотезы.

3.16 Пусть регрессионная модель имеет вид $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i1} + \beta_3 x_{i2} + \beta_4 x_{i3} + \varepsilon_i, i = 1, \ldots, n$. Тестируемая гипотеза $H_0 : \beta_3 = \beta_4 = 1$. Какая модель из приведённых ниже может выступать в качестве ограниченной для тестирования указанной гипотезы? Если ни одна из них, то запишите свою.

1. $y_i - (x_{i2} + x_{i3}) = \beta_1 + \beta_2 x_{i1} + \varepsilon_i$;
2. $y_i + (x_{i2} - x_{i3}) = \beta_1 + \beta_2 x_{i1} + \varepsilon_i$;
3. $y_i + x_{i2} + x_{i3} = \beta_1 + \beta_2 x_{i1} + \varepsilon_i$;
4. $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i1} + \beta_3 + \beta_4 + \varepsilon_i$.

3.17 Пусть регрессионная модель имеет вид $y_i = \beta_1+\beta_2 x_{i1}+\beta_3 x_{i2}+\beta_4 x_{i3}+\varepsilon_i, i = 1,\ldots,n$. Тестируемая гипотеза $H_0 : \begin{cases}\beta_2+\beta_3+\beta_4 = 1,\\ \beta_3+\beta_4 = 0.\end{cases}$ Какая модель из приведённых ниже может выступать в качестве ограниченной модели для тестирования указанной гипотезы? Если ни одна из них, то запишите свою.

1. $y_i - x_{i1} = \beta_1 + \beta_3(x_{i2} - x_{i3}) + \varepsilon_i$;
2. $y_i - x_{i1} = \beta_1 + \beta_4(x_{i3} - x_{i2}) + \varepsilon_i$;
3. $y_i + x_{i1} = \beta_1 + \beta_3(x_{i2} + x_{i3}) + \varepsilon_i$;
4. $y_i + x_{i1} = \beta_1 + \beta_3(x_{i2} - x_{i3}) + \varepsilon_i$.

3.18 Пусть регрессионная модель имеет вид $y_i = \beta_1+\beta_2 x_{i1}+\beta_3 x_{i2}+\beta_4 x_{i3}+\varepsilon_i, i = 1,\ldots,n$. Тестируемая гипотеза $H_0 : \begin{cases}\beta_2-\beta_3 = 0,\\ \beta_3+\beta_4 = 0.\end{cases}$ Какая модель из приведённых ниже может выступать в качестве ограниченной модели для тестирования указанной гипотезы? Если ни одна из них, то запишите свою.

1. $y_i = \beta_1 + \beta_3(x_{i2} - x_{i1} - x_{i3}) + \varepsilon_i$;
2. $y_i - x_{i1} = \beta_1 + \beta_4(x_{i3} - x_{i2}) + \varepsilon_i$;
3. $y_i = \beta_1 + \beta_3(x_{i1} + x_{i2} + x_{i3}) + \varepsilon_i$;
4. $y_i = \beta_1 + \beta_3(x_{i1} + x_{i2} - x_{i3}) + \varepsilon_i$.

3.19 Известно, что P-значение для коэффициента регрессии равно 0.087, а уровень значимости 0.1. Является ли значимым данный коэффициент в регрессии?

3.20 Известно, что P-значение для коэффициента регрессии равно 0.078, а уровень значимости 0.05. Является ли значимым данный коэффициент в регрессии?

3.21 Известно, что P-значение для коэффициента регрессии равно 0.09. На каком уровне значимости данный коэффициент в регрессии будет признан значимым?

3.22 Ниже приведены результаты оценивания уравнения линейной регрессии зависимости количества смертей в автомобильных катастрофах от различных характеристик:

$$deaths_i = \beta_1 + \beta_2 drivers_i + \beta_3 popden_i + \beta_4 temp + \beta_5 fuel + \varepsilon_i$$

```
model1 <- lm(deaths ~ drivers + popden + temp + fuel, data = MASS::road)
xmodel(model1, below = "se")
report <- summary(model1)
coefficient_table <- report$coefficients
rownames(coefficient_table) <- c("Intercept", "Drivers", "Popden", "Temp", "Fuel")
colnames(coefficient_table) <- c("Estimate", "St.Error", "t value", "P-value")
xtable(coefficient_table)
```

	Estimate	St.Error	t value	P-value
Intercept	-27.10	222.88	-0.12	0.90
Drivers	4.64	0.38	12.30	0.00
Popden	-0.02	0.02	-0.95	0.35
Temp	5.30	4.60	1.15	0.26
Fuel	-0.66	0.87	-0.76	0.45

Перечислите, какие из коэффициентов в регрессии значимы на 5%-ом уровне значимости.

3.23 Была оценена функция Кобба-Дугласа с учётом человеческого капитала H (K — физический капитал, L — труд):

$$\widehat{\ln Q} = 1.4 + 0.46 \ln L + 0.27 \ln H + 0.23 \ln K$$

$$ESS = 170.4, RSS = 80.3, n = 21$$

1. Чему равен коэффициент R^2?
2. На уровне значимости 1% проверьте гипотезу о значимости регрессии в целом.

3.24 На основе опроса 25 человек была оценена следующая модель зависимости логарифма зарплаты $\ln W$ от уровня образования Edu (в годах) и возраста Age:

$$\widehat{\ln W} = 1.7 + 0.5 Edu + 0.06 Age - 0.0004 Age^2$$

$$ESS = 90.3, RSS = 60.4$$

Когда в модель были введены переменные $Fedu$ и $Medu$, учитывающие уровень образования родителей, величина ESS увеличилась до 110.3.

1. Напишите спецификацию уравнения регрессии с учётом образования родителей.
2. Сформулируйте и на уровне значимости 5% проверьте гипотезу о значимом влиянии уровня образования родителей на заработную плату:
   (a) Сформулируйте гипотезу.
   (b) Приведите формулу для тестовой статистики.
   (c) Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0.
   (d) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики.
   (e) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается.
   (f) Сделайте статистический вывод.

3.25 Рассмотрим следующую модель зависимости цены дома $Price$ (в тысячах долларов) от его площади $Hsize$ (в квадратных метрах), площади участка $Lsize$ (в квадратных метрах), числа ванных комнат $Bath$ и числа спален BDR:

$$\widehat{Price} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 Hsize + \hat{\beta}_3 Lsize + \hat{\beta}_4 Bath + \hat{\beta}_5 BDR$$

$$R^2 = 0.218, n = 23$$

Напишите спецификацию регрессии с ограничениями для проверки статистистической гипотезы $H_0 : \beta_3 = 20\beta_4$. Дайте интерпретацию проверяемой гипотезе. Для регрессии с ограничением был вычислен коэффициент $R^2_R = 0.136$. На уровне значимости 5% проверьте нулевую гипотезу.

3.26 Рассмотрим следующую модель зависимости почасовой оплаты труда W от уровня образования $Educ$, возраста Age, уровня образования родителей $Fathedu$ и $Mothedu$:

$$\widehat{\ln W} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 Educ + \hat{\beta}_3 Age + \hat{\beta}_4 Age^2 + \hat{\beta}_5 Fathedu + \hat{\beta}_6 Mothedu$$

$$R^2 = 0.341, n = 27$$

Напишите спецификацию регрессии с ограничениями для проверки статистистической гипотезы $H_0 : \beta_5 = 2\beta_4$. Дайте интерпретацию проверяемой гипотезе. Для регрессии с ограничением был вычислен коэффициент $R_R^2 = 0.296$. На уровне значимости 5% проверьте нулевую гипотезу.

3.27 По данным для 27 фирм исследователь оценил зависимость объёма выпуска y от труда l и капитала k с помощью двух моделей:

$$\ln y_i = \beta_1 + \beta_2 \ln l_i + \beta_3 \ln k_i + \varepsilon_i$$

$$\ln y_i = \beta_1 + \beta_2 \ln(l_i \cdot k_i) + \varepsilon_i$$

Он получил для этих двух моделей суммы квадратов остатков $RSS_1 = 0.851$ и $RSS_2 = 0.894$ соответственно. Сформулируйте гипотезу, которую хотел проверить исследователь. На уровне значимости 5% проверьте эту гипотезу и дайте экономическую интерпретацию.

3.28 Пусть задана линейная регрессионная модель:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \beta_4 w_i + \beta_5 q_i + \varepsilon_i, i = 1, \ldots, 20$$

По имеющимся данным оценены следующие регрессии:

$$\underset{(se)}{\hat{y}_i} = \underset{(0.15)}{10.01} + \underset{(0.06)}{1.05}\, x_i + \underset{(0.04)}{2.06}\, z_i + \underset{(0.06)}{0.49}\, w_i - \underset{(0.06)}{1.31}\, q_i, RSS = 6.85$$

$$\underset{(se)}{\widehat{y_i - x_i - 2z_i}} = \underset{(0.15)}{10.00} + \underset{(0.07)}{0.50}\, w_i - \underset{(0.06)}{1.32}\, q_i, RSS = 8.31$$

$$\underset{(se)}{\widehat{y_i + x_i + 2z_i}} = \underset{(3.62)}{9.93} + \underset{(1.48)}{0.56}\, w_i - \underset{(1.42)}{1.50}\, q_i, RSS = 4310.62$$

$$\underset{(se)}{\widehat{y_i - x_i + 2z_i}} = \underset{(3.26)}{10.71} + \underset{(1.33)}{0.09}\, w_i - \underset{(1.28)}{1.28}\, q_i, RSS = 3496.85$$

$$\underset{(se)}{\widehat{y_i + x_i - 2z_i}} = \underset{(1.25)}{9.22} + \underset{(0.51)}{0.97}\, w_i - \underset{(0.49)}{1.54}\, q_i, RSS = 516.23$$

На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0 : \begin{cases} \beta_2 = 1 \\ \beta_3 = 2 \end{cases}$ против альтернативной гипотезы $H_a : |\beta_2 - 1| + |\beta_3 - 2| \neq 0$.

3.29 Рассмотрим следующую модель зависимости расходов на образование на душу населения от дохода на душу населения, доли населения в возрасте до 18 лет, а также доли городского населения:

$$education_i = \beta_1 + \beta_2 income_i + \beta_3 young_i + \beta_4 urban_i + \varepsilon_i$$

Ниже приведены результаты оценивания уравнения этой линейной регрессии:

```
model1 <- lm(education ~ income + young + urban, data = carData::Anscombe)
xmodel(model1, below = "se")
report <- summary(model1)
coefficient_table <- report$coefficients
rownames(coefficient_table) <- c("Intercept", "Income", "Young", "Urban")
colnames(coefficient_table) <- c("Estimate", "St.Error", "t value", "P-value")
xtable(coefficient_table)
```

$$\widehat{education}_i = -\underset{(64.9199)}{287} + \underset{(0.0093)}{0.0807} \cdot income_i + \underset{(0.1598)}{0.817} \cdot young_i - \underset{(0.0343)}{0.106} \cdot urban_i$$

	Estimate	St.Error	t value	P-value
Intercept	-286.84	64.92	-4.42	0.00
Income	0.08	0.01	8.67	0.00
Young	0.82	0.16	5.12	0.00
Urban	-0.11	0.03	-3.09	0.00

Модель оценивается по 51 наблюдению.

1. Сформулируйте основную и альтернативую гипотезы, которые соответствуют тесту на значимость коэффициента при переменной доход на душу населения в уравнении регрессии.
2. На уровне значимости 10% проверьте гипотезу о значимости коэффициента при переменной доход на душу населения в уравнении регрессии:
   (a) Приведите формулу для тестовой статистики.
   (b) Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0.
   (c) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики.
   (d) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается.
   (e) Сделайте статистический вывод.
3. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_1 = 1$ против альтернативной $H_a : \beta_1 > 1$:

(a) Приведите формулу для тестовой статистики.

(b) Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0.

(c) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики.

(d) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается.

(e) Сделайте статистический вывод.

4. Сформулируйте основную гипотезу, которая соответствует тесту на значимость регрессии в целом

5. На уровне значимости 1% проверьте гипотезу о значимости регрессии в целом, если известно, что $F-$статистика равна 34.81 со степенями свободы 3 и 47, P-значение равно $5.337e^{-12}$:

(a) Приведите формулу для тестовой статистики.

(b) Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0.

(c) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики.

(d) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается.

(e) Сделайте статистический вывод.

Далее приведены результаты оценивания уравнения регрессии без переменной, отражающей долю городского населения:

```
model2 <- lm(education ~ income + young, data = carData::Anscombe)
xmodel(model2, below = "se")
report2 <- summary(model2)
coefficient_table2 <- report2$coefficients
rownames(coefficient_table2) <- c("Intercept", "Income", "Young")
colnames(coefficient_table2) <- c("Estimate", "St.Error", "t value", "P-value")
xtable(coefficient_table2)
```

$$\widehat{education}_i = -\underset{(70.27134)}{301} + \underset{(0.00741)}{0.0612} \cdot income_i + \underset{(0.17327)}{0.836} \cdot young_i$$

	Estimate	St.Error	t value	P-value
Intercept	-301.09	70.27	-4.28	0.00
Income	0.06	0.01	8.25	0.00
Young	0.84	0.17	4.83	0.00

Также известно, что RSS для первой модели равен 33489.35, а для второй модели — 40276.61. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_4 = 0$ против альтернативной $H_0 : \beta_4 \neq 0$:

(a) Приведите формулу для тестовой статистики.

(b) Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0.

(c) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики.

(d) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается.

(e) Сделайте статистический вывод.

3.30 Рассмотрим следующую модель зависимости расходов на образование на душу населения от дохода на душу населения, доли населения в возрасте до 18 лет, а также доли городского населения:

$$education_i = \beta_1 + \beta_2 income_i + \beta_3 young_i + \beta_4 urban_i + \varepsilon_i$$

Модель оценивается по 51 наблюдению. Ниже приведены результаты оценивания уравнения этой линейной регрессии:

```
model1 <- lm(education ~ income + young + urban, data = carData::Anscombe)
xmodel(model1, below = "se")
report <- summary(model1)
coefficient_table <- report$coefficients
rownames(coefficient_table) <- c("Intercept", "Income", "Young", "Urban")
colnames(coefficient_table) <- c("Estimate", "St.Error", "t value", "P-value")
xtable(coefficient_table)
```

$$\widehat{education}_i = - \underset{(64.9199)}{287} + \underset{(0.0093)}{0.0807} \cdot income_i + \underset{(0.1598)}{0.817} \cdot young_i - \underset{(0.0343)}{0.106} \cdot urban_i$$

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
(Intercept)	-286.8388	64.9199	-4.42	0.0001
income	0.0807	0.0093	8.67	0.0000
young	0.8173	0.1598	5.12	0.0000
urban	-0.1058	0.0343	-3.09	0.0034

1. Сформулируйте основную и альтернативую гипотезы, которые соответствуют тесту на значимость коэффициента при переменной доля населения в возрасте до 18 лет в уравнении регрессии

2. На уровне значимости 10% проверьте гипотезу о значимости коэффициента при переменной доля населения в возрасте до 18 лет в уравнении регрессии:
   (a) Приведите формулу для тестовой статистики.
   (b) Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0.
   (c) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики.
   (d) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается.
   (e) Сделайте статистический вывод.

   Далее приведены результаты оценивания уравнения регрессии без переменной, отражающей долю населения в возрасте до 18 лет:

```
model3 <- lm(education ~ income + urban, data = carData::Anscombe)
xmodel(model3, below = "se")
report3 <- summary(model3)
coefficient_table3 <- report3$coefficients
rownames(coefficient_table3) <- c("Intercept", "Income", "Urban")
colnames(coefficient_table3) <- c("Estimate", "St.Error", "t value", "P-value")
xtable(coefficient_table3)
```

$$\widehat{education}_i = \underset{(27.3827)}{25.3} + \underset{(0.0114)}{0.0762} \cdot income_i - \underset{(0.0423)}{0.112} \cdot urban_i$$

	Estimate	St.Error	t value	P-value
Intercept	25.25	27.38	0.92	0.36
Income	0.08	0.01	6.67	0.00
Urban	-0.11	0.04	-2.66	0.01

Также известно, что RSS для первой модели равен 33489.35, а для второй модели — 52132.29. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_3 = 0$ против альтернативной $H_0 : \beta_3 \neq 0$:
   (a) Приведите формулу для тестовой статистики.
   (b) Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0.
   (c) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики.
   (d) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается.

(e) Сделайте статистический вывод.

3.31 Вася построил регрессию оценки за первую контрольную работу на константу, рост и вес студента, $\widehat{kr1}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 height_i + \hat{\beta}_3 weight_i$. Затем построил регрессию оценки за вторую контрольную работу на те же объясняющие переменные, $\widehat{kr2}_i = \hat{\beta}'_1 + \hat{\beta}'_2 height_i + \hat{\beta}'_3 weight_i$. Накопленная оценка считается по формуле $nak_i = 0.25 \cdot kr1_i + 0.75 \cdot kr2_i$. Чему равны оценки коэффициентов в регрессии накопленной оценки на те же объясняющие переменные? Ответ обоснуйте.

3.32 Истинная модель имеет вид $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$. Вася оценивает модель $\hat{y}_i = \hat{\beta} x_i$ по первой части выборки, получает $\hat{\beta}_a$, по второй части выборки — получает $\hat{\beta}_b$ и по всей выборке — $\hat{\beta}_{tot}$. Как связаны между собой $\hat{\beta}_a$, $\hat{\beta}_b$, $\hat{\beta}_{tot}$? Как связаны между собой дисперсии $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_a)$, $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_b)$ и $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_{tot})$?

3.33 Сгенерируйте вектор y из 300 независимых нормальных $\mathcal{N}(10, 1)$ случайных величин. Сгенерируйте 40 «объясняющих» переменных, по 300 наблюдений в каждой, каждое наблюдение — независимая нормальная $\mathcal{N}(5, 1)$ случайная величина. Постройте регрессию y на все 40 регрессоров и константу.

1. Сколько регрессоров оказалось значимо на 5% уровне?
2. Сколько регрессоров в среднем значимо на 5% уровне?
3. Эконометрист Вовочка всегда использует следующий подход: строит регрессию зависимой переменной на все имеющиеся регрессоры, а затем выкидывает из модели те регрессоры, которые оказались незначимы. Прокомментируйте Вовочкин эконометрический подход.

3.34 Мы попытаемся понять, как введение в регрессию лишнего регрессора влияет на оценки уже имеющихся. В регрессии будет 100 наблюдений. Возьмем $\rho = 0.5$. Сгенерим выборку совместных нормальных x_i и z_i с корреляцией ρ. Настоящий y_i задаётся формулой $y_i = 5 + 6x_i + \varepsilon_i$. Однако мы будем оценивать модель $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i + \hat{\beta}_3 z_i$.

1. Повторите указанный эксперимент 500 раз и постройте оценку для функции плотности $\hat{\beta}_1$.
2. Повторите указанный эксперимент 500 раз для каждого ρ от -1 до 1 с шагом в 0.05. Каждый раз сохраняйте полученные 500 значений $\hat{\beta}_1$. В осях $(\rho, \hat{\beta}_1)$ постройте 95%-ый предиктивный интервал для $\hat{\beta}_1$. Прокомментируйте.

3.35 Цель задачи — оценить модель CAPM несколькими способами.

1. Соберите подходящие данные для модели CAPM. Нужно найти три временных ряда: ряд цен любой акции, любой рыночный индекс, безрисковый актив. Переведите цены в доходности.
2. Постройте графики.
3. Оцените модель CAPM без свободного члена по всем наборам данных. Прокомментируйте смысл оцененного коэффициента.
4. Разбейте временной период на два участка и проверьте устойчивость коэффициента бета.
5. Добавьте в классическую модель CAPM свободный член и оцените по всему набору данных. Какие выводы можно сделать?
6. Методом максимального правдоподобия оцените модель с ошибкой измерения $R^m - R^0$, т.е.

   истинная зависимость имеет вид

   $$(R^s - R^0) = \beta_1 + \beta_2(R^*_m - R^*_0) + \varepsilon$$

   величины R^*_m и R^*_0 не наблюдаемы, но

   $$R_m - R_0 = R^*_m - R^*_0 + u$$

3.36 По 47 наблюдениям оценивается зависимость доли мужчин занятых в сельском хозяйстве от уровня образованности и доли католического населения по Швейцарским кантонам в 1888 году.

$$Agriculture_i = \beta_1 + \beta_2 Examination_i + \beta_3 Catholic_i + \varepsilon_i$$

```r
model1 <- lm(Agriculture ~ Examination + Catholic, data = swiss)
coef_t <- coeftest(model1)
dimnames(coef_t)[[2]] <- c("Оценка", "Ст. ошибка",
 "t-статистика", "P-значение")
coef_t <- coef_t[, -4]
coef_t[1, 1] <- NA
coef_t[2, 2] <- NA
coef_t[3, 3] <- NA
xtable(coef_t)
```

	Оценка	Ст. ошибка	t-статистика
(Intercept)		8.72	9.44
Examination	-1.94		-5.08
Catholic	0.01	0.07	

1. Заполните пропуски в таблице.

2. Укажите коэффициенты, значимые на 10% уровне значимости.

3. Постройте 99%-ый доверительный интервал для коэффициента при переменной Catholic.

3.37 Оценивается зависимость уровня фертильности всё тех же швейцарских кантонов в 1888 году от ряда показателей. В таблице представлены результаты оценивания двух моделей.

Модель 1: $Fertility_i = \beta_1 + \beta_2 Agriculture_i + \beta_3 Education_i + \beta_4 Examination_i + \beta_5 Catholic_i + \varepsilon_i$

Модель 2: $Fertility_i = \gamma_1 + \gamma_2 (Education_i + Examination_i) + \gamma_3 Catholic_i + u_i$

```
m1 <- lm(Fertility ~ Agriculture + Education +
  Examination + Catholic, data = swiss)
m2 <- lm(Fertility ~ I(Education + Examination) + Catholic,
  data = swiss)
texreg(list(m1, m2))
```

	Model 1	Model 2
(Intercept)	91.06^{***}	80.52^{***}
	(6.95)	(3.31)
Agriculture	-0.22^{**}	
	(0.07)	
Education	-0.96^{***}	
	(0.19)	
Examination	-0.26	
	(0.27)	
Catholic	0.12^{**}	0.07^{*}
	(0.04)	(0.03)
I(Education + Examination)		-0.48^{***}
		(0.08)
R^2	0.65	0.55
Adj. R^2	0.62	0.53
Num. obs.	47	47
RMSE	7.74	8.56

$^{***}p < 0.001$, $^{**}p < 0.01$, $^{*}p < 0.05$

1. Проверьте гипотезу о том, что коэффициент при $Education$ в модели 1 равен -0.5.

2. На 5% уровне значимости проверьте гипотезу о том, что переменные $Education$ и $Examination$ оказывают одинаковое влияние на $Fertility$.

3.38 По 2040 наблюдениям оценена модель зависимости стоимости квартиры в Москве (в 1000$) от общего метража и метража жилой площади.

```
model1 <- lm(price ~ totsp + livesp, data = flats)
report <- summary(model1)
coef.table <- report$coefficients
rownames(coef.table) <-
  c("Константа", "Общая площадь", "Жилая площадь")
xtable(coef.table)
var.hat <- vcov(model1)
xtable(var.hat, digits = 4)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
Константа	-88.81	4.37	-20.34	0.00
Общая площадь	1.70	0.10	17.78	0.00
Жилая площадь	1.99	0.18	10.89	0.00

Оценка ковариационной матрицы $\mathrm{Var}(\hat{\beta})$ имеет вид

	(Intercept)	totsp	livesp
(Intercept)	19.0726	0.0315	-0.4498
totsp	0.0315	0.0091	-0.0151
livesp	-0.4498	-0.0151	0.0335

1. Проверьте H_0: $\beta_{totsp} = \beta_{livesp}$. В чём содержательный смысл этой гипотезы?
2. Постройте доверительный интервал дли $\beta_{totsp} - \beta_{livesp}$. В чём содержательный смысл этого доверительного интервала?

3.39 По 2040 наблюдениям оценена модель зависимости стоимости квартиры в Москве (в 1000$) от общего метража и метража жилой площади.

```
model1 <- lm(price ~ totsp + livesp, data = flats)
report <- summary(model1)
coef.table <- report$coefficients
rownames(coef.table) <-
  c("Константа", "Общая площадь", "Жилая площадь")
xtable(coef.table)
deviance(model1)
xtable(vcov(model1), digits = 4)
```

	Estimate	Std. Error	t value	P-value
Константа	-88.81	4.37	-20.34	0.00
Общая площадь	1.70	0.10	17.78	0.00
Жилая площадь	1.99	0.18	10.89	0.00

Сумма квадратов остатков равна $RSS = 2.2 \cdot 10^6$. Оценка ковариационной матрицы $\mathrm{Var}(\hat{\beta})$ имеет вид

	(Intercept)	totsp	livesp
(Intercept)	19.0726	0.0315	-0.4498
totsp	0.0315	0.0091	-0.0151
livesp	-0.4498	-0.0151	0.0335

1. Постройте 95%-ый доверительный интервал для ожидаемой стоимости квартиры с жилой площадью 30 м^2 и общей площадью 60 м^2.
2. Постройте 95%-ый прогнозный интервал для фактической стоимости квартиры с жилой площадью 30 м^2 и общей площадью 60 м^2.

3.40 По 2040 наблюдениям оценена модель зависимости стоимости квартиры в Москве (в 1000$) от общего метража, метража жилой площади и дамми-переменной, равной 1 для кирпичных домов.

```
model1 <- lm(price ~ totsp + livesp + brick + brick:totsp +
  brick:livesp, data = flats)
report <- summary(model1)
coef.table <- report$coefficients
xtable(coef.table)
```

	Estimate	Std. Error	t value	P-value
(Intercept)	-66.03	6.07	-10.89	0.00
totsp	1.77	0.12	14.98	0.00
livesp	1.27	0.25	5.05	0.00
brick	-19.59	9.01	-2.17	0.03
totsp:brick	0.42	0.20	2.10	0.04
livesp:brick	0.09	0.38	0.23	0.82

1. Выпишите отдельно уравнения регрессии для кирпичных домов и для некирпичных домов.
2. Проинтерпретируйте коэффициент при $brick_i \cdot totsp_i$.

3.41 По 20 наблюдениям оценивается линейная регрессия $\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x + \hat{\beta}_3 z$, причём истинная зависимость имеет вид $y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon$. Случайная ошибка ε_i имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

1. Найдите вероятность $\mathbb{P}(\hat{\beta}_3 > se(\hat{\beta}_3))$.
2. Найдите вероятность $\mathbb{P}(\hat{\beta}_3 > \sigma_{\hat{\beta}_3})$.

3.42 К эконометристу Вовочке в распоряжение попали данные с результатами контрольной работы студентов по эконометрике. В данных есть результаты по каждой задаче, переменные p_1, p_2, p_3, p_4 и p_5, и суммарный результат за контрольную, переменная kr. Чему будут равны оценки коэффициентов, их стандартные ошибки, t-статистики, P-значения, R^2, RSS, если

1. Вовочка построит регрессию kr на константу, p_1, p_2, p_3, p_4 и p_5;
2. Вовочка построит регрессию kr на p_1, p_2, p_3, p_4 и p_5 без константы.

3.43 Сгенерируйте данные так, чтобы при оценке линейной регрессионной модели оказалось, что скорректированный коэффициент детерминации, R^2_{adj}, отрицательный.

3.44 Для коэффициентов регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \beta_4 w_i + \varepsilon_i$ даны 95%-ые доверительные интервалы: $\beta_2 \in (0.16; 0.66)$, $\beta_3 \in (-0.33; 0.93)$ и $\beta_4 \in (-1.01; 0.54)$.

1. Найдите $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$, $\hat{\beta}_4$.
2. Определите, какие из переменных в регрессии значимы на уровне значимости 5%.

3.45 Для коэффициентов регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \beta_4 w_i + \varepsilon_i$ даны 95%-ые доверительные интервалы: $\beta_2 \in (-0.15; 1.65)$, $\beta_3 \in (0.32; 0.93)$ и $\beta_4 \in (0.14; 1.55)$.

1. Найдите $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$, $\hat{\beta}_4$.
2. Определите, какие из переменных в регрессии значимы на уровне значимости 5%.

3.46 Эконометрэсса Мырли очень суеверна и поэтому оценила три модели:

M1: $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 w_i + \varepsilon_i$ по всем наблюдениям.

M2: $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 w_i + \beta_4 d_i + \varepsilon_i$ по всем наблюдениям, где d_i — дамми-переменная равная 1 для 13-го наблюдения и нулю иначе.

M3: $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 w_i + \varepsilon_i$ по всем наблюдениям, кроме 13-го.

1. Сравните между собой RSS во всех трёх моделях.

2. Есть ли совпадающие оценки коэффициентов в этих трёх моделях? Если есть, то какие?
3. Может ли Мырли не выполняя вычислений узнать ошибку прогноза для 13-го наблюдения при использовании третьей модели? Если да, то как?

3.47 Рассмотрим модель $y_i = \beta_1+\beta_2 x_i+\beta_3 w_i+\beta_4 z_i+\varepsilon_i$. При оценке модели по 24 наблюдениям оказалось, что $RSS = 15$, $\sum(y_i-\bar{y}-w_i+\bar{w})^2 = 20$. На уровне значимости 1% протестируйте гипотезу

$$H_0 : \begin{cases} \beta_2+\beta_3+\beta_4 = 1 \\ \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = 1 \\ \beta_4 = 0 \end{cases}$$

3.48 Модель регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$, в которой ошибки ε_i независимы и нормальны $N(0;\sigma^2)$, оценивается по 13 наблюдениям. Найдите $\mathbb{E}(RSS)$, $\mathrm{Var}(RSS)$, $\mathbb{P}(5\sigma^2 < RSS < 10\sigma^2)$, $\mathbb{P}(5\hat{\sigma}^2 < RSS < 10\hat{\sigma}^2)$.

3.49 Рассмотрим модель регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$, в которой ошибки ε_i независимы и имеют нормальное распределение $N(0,\sigma^2)$. Известно, что выборка в $n = 30$ наблюдений была разбита на три непересекающиеся подвыборки, содержащие $n_1 = 13$, $n_2 = 4$ и $n_3 = 13$ наблюдений. Пусть $\hat{\sigma}^2_j$ — это оценка дисперсии случайных ошибок для регрессии, оцененной по j-ой подвыборке. Найдите

1. $\mathbb{P}(\hat{\sigma}^2_3 > \hat{\sigma}^2_1)$, $\mathbb{P}(\hat{\sigma}^2_1 > 2\hat{\sigma}^2_2)$;
2. $\mathbb{E}(\hat{\sigma}^2_2/\hat{\sigma}^2_1)$, $\mathrm{Var}(\hat{\sigma}^2_2/\hat{\sigma}^2_1)$.

3.50 Рассмотрим модель регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$, в которой ошибки ε_i независимы и имеют нормальное распределение $N(0,\sigma^2)$. Для $n = 13$ наблюдения найдите уровень доверия следующих доверительных интервалов для неизвестного параметра σ^2:

1. $(0; RSS/4.865)$;
2. $(RSS/18.307; RSS/3.940)$;
3. $(RSS/15.987; \infty)$.

3.51 Пусть $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$ — МНК-оценки коэффициентов в регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$, оцененной по наблюдениям $i = 1, \ldots, m$, а $\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$, $\hat{\gamma}$ и $\hat{\delta}$ — МНК-коэффициенты в регрессии $y_i = \mu + \nu x_i + \gamma d_i + \delta x_i d_i + \varepsilon_i$, оцененной по наблюдениям $i = 1, \ldots, n$, где фиктивная переменная d определяется следующим образом

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{при } i \in \{1, \ldots, m\} \\ 0 & \text{при } i \in \{m+1, \ldots, n\} \end{cases}$$

Покажите, что $\hat{\beta}_1 = \hat{\mu} + \hat{\gamma}$ и $\hat{\beta}_2 = \hat{\nu} + \hat{\delta}$.

3.52 Верно ли, что $R^2_{adj} = 1 - (1 - R^2)\frac{n-1}{n-k}$ распределен по $F(n-k, n-1)$? Если да, то объясните, почему, если нет, то тоже объясните, почему.

3.53 Сгенерируйте набор данных, обладающий следующим свойством. Если попытаться сразу выкинуть регрессоры x и z, то гипотеза о их совместной незначимости отвергается. Если вместо этого попытаться выкинуть отдельно x, или отдельно z, то гипотеза о незначимости не отвергается.

3.54 Сгенерируйте набор данных, обладающий следующим свойством. Если попытаться сразу выкинуть регрессоры x и z, то гипотеза о их совместной незначимости отвергается. Если вместо сначала выкинуть отдельно x, то гипотеза о незначимости не отвергается. Если затем выкинуть z, то гипотезы о незначимости тоже не отвергается.

3.55 Напишите свою функцию, которая бы оценивала регрессию методом наименьших квадратов. На вход функции должны подаваться вектор зависимых переменных y и матрица регрессоров X. На выходе функция должна выдавать список из $\hat{\beta}$, $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta})$, $\hat{y}$, $\hat{\varepsilon}$, ESS, RSS и TSS. По возможности функция должна проверять корректность аргументов, например, что в y и X одинаковое число наблюдений и т.д. Использовать lm или glm запрещается.

3.56 Сгенерируйте данные так, чтобы при оценке модели $\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x + \hat{\beta}_3 z$ оказывалось, что $\hat{\beta}_2 > 0$, а при оценке модели $\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x$ оказывалось, что $\hat{\beta}_2 < 0$.

3.57 Предложите способ, как построить доверительный интервал для вершины параболы.

3.58 Скачайте результаты двух контрольных работ по теории вероятностей, https://github.com/bdemeshev/em301/raw/master/datasets/tvims2012_data.csv с описанием данных, https://github.com/bdemeshev/em301/raw/master/datasets/tvims2012_data_description.txt. Наша задача попытаться предсказать результат второй контрольной работы зная позадачный результат первой контрольной, пол и группу студента.

1. Какая задача из первой контрольной работы наиболее существенно влияет на результат второй контрольной?
2. Влияет ли пол на результат второй контрольной?
3. Что можно сказать про влияние группы, в которой учится студент?

3.59 Сформулируйте теорему Гаусса-Маркова.

3.60 Эконометресса Эвридика хочет оценить модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$. К сожалению, она измеряет зависимую переменную с ошибкой. Вместо y_i Эвридика знает значение $y_i^* = y_i + u_i$ и использует его в качестве зависимой переменной при оценке регрессии. Ошибки измерения u_i некоррелированы между собой и с ε_i.

1. Будут ли оценки Эвридики несмещёнными?
2. Могут ли дисперсии оценок Эвридики быть ниже чем дисперсии МНК оценок при использовании настоящего y_i?
3. Могут ли оценки дисперсий оценок Эвридики быть ниже оценок дисперсий МНК оценок при использовании настоящего y_i?

3.61 Эконометресса Ефросинья исследует зависимость удоев от возраста и породы коровы. Она оценила модель

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 age_i + \hat{\beta}_3 d_{1i} + \hat{\beta}_4 d_{2i}$$

Эконометресса Глафира исследует ту же зависимость:

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}'_1 + \hat{\beta}'_2 age_i + \hat{\beta}'_3 d'_{1i} + \hat{\beta}'_4 d'_{2i}$$

но вводит дамми-переменные вводит по-другому:

Порода коровы	d_1	d_2	d'_1	d'_2
Холмогорская	0	0	1	1
Тагильская	1	0	0	1
Ярославская	0	1	1	0

Выразите оценки коэффициентов Глафиры через оценки коэффициентов Ефросиньи.

3.62 Для проверки гипотезы о нормальности ошибок регрессии используют в частности статистику Харке-Бера (Jarque-Bera):

$$JB = \frac{S^2}{6} + \frac{(K-3)^2}{24},$$

где $S = \sum_i^n \hat{\varepsilon}_i^3 / \hat{\sigma}_{ML}^3$ Строго говоря статистика Харке-Бера проверяет гипотезу о том, что скошенность равна нулю, а эксцесс равен 3, т.е. $H_0 : \mathbb{E}(\varepsilon_i^3) = 0$, $\mathbb{E}(\varepsilon_i^4) = 3\sigma^4$. Асимптотически при верной H_0 статистика имеет хи-квадрат распределение с двумя степенями свободы.

По аналогии со статистикой Харке-Бера придумайте асимптотические статистики, которые бы проверяли гипотезы:

1. $H_0 : \mathbb{E}(\varepsilon_i^3) = 0$;
2. $H_0 : \mathbb{E}(\varepsilon_i^4) = 3\sigma^4$;
3. $H_0 : \mathbb{E}(\varepsilon_i^5) = 0$.

Какое асимптотическое распределение при верной H_0 будут иметь придуманные статистики?

3.63 Рассмотрим классическую модель линейной регрессии. Найдите предел по вероятности plim R^2 при условии, что $\sigma^2 \to \infty$.

3.64 В отделении буйнопомешанных 30 больных. В инфекционном отделении 20 больных. Эконометрист Василий из департамента НОБ (науко-образного бреда) построил регрессию температуры больного на константу по каждому отделению в отдельности и по обоим отделениям сразу. По инфекционному отделению $RSS = 15$, по отделению буйнопомешанных $RSS = 25$, по обоим отделениям сразу – $RSS = 80$. Эконометрист Василий хочет получить грант на публикацию в зарубежном рецензируемом журнале статьи, описывающей результаты регрессии по обоим отделениям сразу.

Помогите главврачу с помощью теста Чоу проверить корректность действий эконометриста Василия.

3.65 Все предпосылки классической теоремы Гаусса-Маркова со стохастическими регрессорами для случая независимой выборки выполнены. Является ли оценка $\hat{\sigma}$ несмещённой и состоятельной? Если оценка смещена, то в большую или меньшую сторону относительно σ?

3.66 Аккуратно опишите процедуру сравнения с помощью F-теста двух вложенных (ограниченной и неограниченной) линейных моделей:

1. Сформулируйте H_0 и H_a.
2. Сформулируйте все предпосылки теста.
3. Укажите способ подсчёта тестовой статистики.
4. Укажите закон распределения тестовой статистики при верной H_0.
5. Сформулируйте правило, по которому делается вывод об H_0.

3.67 Чтобы не выдать себя, Джеймс Бонд оценивает с помощью МНК только однопараметрические регрессии вида $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$. Однако он знаком с теоремой Фриша-Вау.

1. Сколько подобных однопараметрических регрессий ему придется оценить, чтобы получить оценку коэффициента β_3 в множественной регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$?
2. Укажите, какие именно регрессии нужно построить для данной цели.

3.68 Известно, что $\mathrm{Corr}(y_i, x_i) = 0$, $\mathrm{Corr}(y_i, z_i) = 0$.

1. Какое максимальное значение может принять корреляция между y_i и линейной комбинацией x_i и z_i?
2. Как изменится ответ, если $\mathrm{Corr}(y_i, z_i) = 0.0001$?

3.69 У эконометрессы Агнессы есть дамми-переменная $male_i$, равная 1 для мужчин, и дамми-переменная $female_i$, равная 1 для женщин. Зависимая переменная y_i — доход индивида.

$$A : \hat{y}_i = \hat{\beta} male_i$$

$$B : \hat{y}_i = \hat{\gamma} female_i$$

$$C : \hat{y}_i = \hat{\alpha}_1 male_i + \hat{\alpha}_2 female_i$$

$$D : \hat{y}_i = \hat{\delta}_1 + \hat{\delta}_2 male_i$$

1. Проинтерпретируйте оценки коэффициентов во всех регрессиях.
2. Как связаны между собой оценки коэффициентов в регрессиях C и D?

3.70 Рассмотрим множественную регрессию с n наблюдениями, k оцениваемыми коэффициентами регрессии и нормально распределёнными ошибками u_i. Исследователь Рустам хочет оценить неизвестный параметр $\sigma^2 = \text{Var}(u_i)$.

1. При каком c оценка $\hat{\sigma}^2 = c \cdot RSS$ будет несмещённой для параметра σ^2?
2. При каком c оценка $\hat{\sigma}^2 = c \cdot RSS$ будет обладать наименьшей среднеквадратичной ошибкой MSE?

3.71 Прогнозируемая переменная не зависит ни от одного регрессора, $y_i = \mu + u_i$, где ошибки u_i нормальны $\mathcal{N}(0; \sigma^2)$ и независимы. Эконометресса Беатриче строит регрессию y_i на константу и еще 5 регрессоров по 51 наблюдению.

1. Как связаны между собой бета и гамма распределения?
2. Как связаны между собой гамма и хи-квадрат распределения?
3. Как связаны между собой R^2 и F-статистика о незначимости регрессии в целом?
4. Как распределена F-статистика?
5. Как распределён R^2?
6. Найдите $\mathbb{E}(R^2)$ и $\text{Var}(R^2)$.

Глава 4

МНК с матрицами и вероятностями

4.1 Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель.

1. Сформулируйте теорему Гаусса-Маркова.
2. Верно ли, что оценка $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$ несмещённая?
3. В условиях теоремы Гаусса-Маркова найдите ковариационную матрицу $\hat{\beta}$.

4.2 Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель и $\tilde{\beta} = ((X'X)^{-1}X' + A)y$ — несмещённая оценка вектора неизвестных параметров β. Верно ли, что $AX = 0$?

4.3 Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель, $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$, $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 I$.

Найдите коэффициент корреляции $\mathrm{Corr}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$.

4.4 Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель, где $\beta = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}$. Пусть $Z = XD$, где $D = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Рассмотрите «новую» регрессионную модель $y = Z\alpha + u$, где $\alpha = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$.

Определите, как выражаются «новые» МНК-коэффициенты через «старые».

4.5 Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель, где $\beta = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}$. Пусть $Z = XD$, где $D = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Рассмотрите «новую» регрессионную модель $y = Z\alpha + u$, где $\alpha = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$.

Определите, как выражаются «новые» МНК-коэффициенты через «старые».

4.6 Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель, где $\beta = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}$. Пусть $Z = XD$, где $D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Рассмотрите «новую» регрессионную модель $y = Z\alpha + u$, где $\alpha = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$.

Определите, как выражаются «новые» МНК-коэффициенты через «старые».

4.7 Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель. Верно ли, что $\hat{\varepsilon}'\hat{y} = 0$ и $\hat{y}'\hat{\varepsilon} = 0$?

4.8 Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель, где $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$, $\text{Var}(\varepsilon) = \sigma_\varepsilon^2 I$. Пусть A — неслучайная матрица размера $k \times k$, $\det(A) \neq 0$. Совершается преобразование регрессоров по правилу $Z = XA$. В преобразованных регрессорах уравнение выглядит так: $y = Z\gamma + u$, где $\mathbb{E}(u) = 0$, $\text{Var}(u) = \sigma_u^2 I$.

1. Как связаны между собой МНК-оценки $\hat{\beta}$ и $\hat{\gamma}$?
2. Как связаны между собой векторы остатков регрессий?
3. Как связаны между собой прогнозные значения, полученные по двум регрессиям?

4.9 Рассмотрим оценку вида $\tilde{\beta} = ((X'X)^{-1} + \gamma I)X'y$ для вектора коэффициентов регрессионного уравнения $y = X\beta + \varepsilon$, удовлетворяющего условиям классической регрессионной модели. Найдите $\mathbb{E}(\tilde{\beta})$ и $\text{Var}(\tilde{\beta})$.

4.10 Верно ли, что при невырожденном преобразовании факторов R^2 не меняется? А именно, пусть заданы две регрессионные модели: $y = X\beta + \varepsilon$ и $y = Z\alpha + u$, где y — вектор размера $n \times 1$, X и Z — матрицы размера $n \times k$, β и α — вектора рамзера $k \times 1$, ε и u — вектора размера $n \times 1$, а также $Z = XD$, $\det(D) \neq 0$. Верно ли, что коэффициенты детерминации представленных выше моделей равны между собой?

4.11 Верно ли, что при невырожденном преобразовании факторов RSS не меняется. А именно, пусть заданы две регрессиионные модели: $y = X\beta + \varepsilon$ и $y = Z\alpha + u$, где y — вектор размера $n \times 1$, X и Z — матрицы размера $n \times k$, β и α — вектора рамзера $k \times 1$, ε и u — вектора размера $n \times 1$, а также $Z = XD$, $\det(D) \neq 0$. Верно ли, что сумма квадратов остатков в представленных выше моделях равны между собой?

4.12 Пусть регрессионная модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$, задана в матричном виде при помощи уравнения $y = X\beta + \varepsilon$, где $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}'$. Известно, что $\mathbb{E}\varepsilon = 0$ и $\text{Var}(\varepsilon) = 4 \cdot I$. Известно также, что:

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Для удобства расчётов ниже приведены матрицы:

$$X'X = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix}.$$

Найдите:

1. $\mathrm{Var}(\varepsilon_1)$;
2. $\mathrm{Var}(\beta_1)$;
3. $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1)$;
4. $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1)$;
5. $\mathbb{E}(\hat{\beta}_1^2) - \beta_1^2$;
6. $\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$;
7. $\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$;
8. $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3)$;
9. $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3)$;
10. $\mathrm{Var}(\beta_2 - \beta_3)$;
11. $\mathrm{Corr}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$;
12. $\widehat{\mathrm{Corr}}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$;
13. $\mathbb{E}(\hat{\sigma}^2)$;
14. $\hat{\sigma}^2$.

4.13 Пусть $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$ — регрессионная модель, где $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$, $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{pmatrix}$, ошибки ε_i независимы и нормально распределены с $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 I$. Для удобства расчётов даны матрицы: $X'X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.3333 & -0.3333 & 0.0000 \\ -0.3333 & 1.3333 & -1.0000 \\ 0.0000 & -1.0000 & 2.0000 \end{pmatrix}.$$

1. Укажите число наблюдений.
2. Укажите число регрессоров в модели, учитывая свободный член.

3. Методом МНК найдите оценку для вектора неизвестных коэффициентов.
4. Найдите $TSS = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$.
5. Найдите $RSS = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$.
6. Чему равен R^2 в модели? Прокомментируйте полученное значение с точки зрения качества оценённого уравнения регрессии.
7. Сформулируйте основную и альтернативную гипотезы, которые соответствуют тесту на значимость переменной x_2 в уравнении регрессии.
8. Протестируйте на значимость переменную x_2 в уравнении регрессии на уровне значимости 10%:
   (a) Приведите формулу для тестовой статистики.
   (b) Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0.
   (c) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики.
   (d) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается.
   (e) Сделайте статистический вывод о значимости переменной x_2.
9. Найдите P-значение, соответствующее наблюдаемому значению тестовой статистики (T_{obs}) из предыдущего пункта. На основе полученного P-значения сделайте вывод о значимости переменной x_2.
10. На уровне значимости 10% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_2 = 1$ против альтернативной $H_a : \beta_2 \neq 1$:
   (a) Приведите формулу для тестовой статистики.
   (b) Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0.
   (c) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики.
   (d) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается.
   (e) Сделайте статистический вывод.
11. На уровне значимости 10% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_2 = 1$ против альтернативной $H_a : \beta_2 > 1$:
   (a) Приведите формулу для тестовой статистики.

(b) Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0.

(c) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики.

(d) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается.

(e) Сделайте статистический вывод.

12. На уровне значимости 10% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_2 = 1$ против альтернативной $H_a : \beta_2 < 1$:

    (a) Приведите формулу для тестовой статистики.

    (b) Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0.

    (c) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики.

    (d) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается.

    (e) Сделайте статистический вывод.

13. Сформулируйте основную гипотезу, которая соответствует тесту на значимость регрессии «в целом».

14. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу о значимости регрессии «в целом»:

    (a) Приведите формулу для тестовой статистики.

    (b) Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0.

    (c) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики.

    (d) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается.

    (e) Сделайте статистический вывод.

15. Найдите P-значение, соответствующее наблюдаемому значению тестовой статистики (T_{obs}) из предыдущего пункта. На основе полученного P-значения сделайте вывод о значимости регрессии «в целом».

16. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_2 + \beta_3 = 2$ против альтернативной $H_a : \beta_2 + \beta_3 \neq 2$:

    (a) Приведите формулу для тестовой статистики.

    (b) Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0.

    (c) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики.

(d) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается.

(e) Сделайте статистический вывод.

17. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_2 + \beta_3 = 2$ против альтернативной $H_a : \beta_2 + \beta_3 > 2$:

    (a) Приведите формулу для тестовой статистики.

    (b) Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0.

    (c) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики.

    (d) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается.

    (e) Сделайте статистический вывод.

18. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_2 + \beta_3 = 2$ против альтернативной $H_a : \beta_2 + \beta_3 < 2$:

    (a) Приведите формулу для тестовой статистики.

    (b) Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0.

    (c) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики.

    (d) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается.

    (e) Сделайте статистический вывод.

4.14 Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель, где $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}, \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{pmatrix}, \mathbb{E}(\varepsilon) = 0, \operatorname{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 I.$$

На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 2$ против альтернативной $H_a : \beta_1 + \beta_2 \neq 2$:

1. Приведите формулу для тестовой статистики.
2. Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0.

3. Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики.
4. Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается.
5. Сделайте статистический вывод.

4.15 По 13 наблюдениям Вася оценил модель со свободным членом, пятью количественными регрессорами и двумя качественными. Качественные регрессоры Вася правильно закодировал с помощью дамми-переменных. Одна качественная переменная принимала четыре значения, другая — пять.

1. Найдите RSS, R^2.
2. Как выглядит матрица $X(X'X)^{-1}X'$?
3. Почему 13 — несчастливое число?

4.16 В рамках классической линейной модели найдите все математические ожидания и все ковариационные матрицы всех пар случайных векторов: ε, y, $\hat{y}$, $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\beta}$. В частности, найдите $\mathbb{E}(\varepsilon)$, $\mathbb{E}(y)$, …и $\mathrm{Cov}(\varepsilon, y)$, $\mathrm{Cov}(\varepsilon, \hat{y})$, …

4.17 Найдите $\mathbb{E}(\sum(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2)$, $\mathbb{E}(RSS)$.

4.18 Используя матрицы $H = X(X'X)^{-1}X'$ и $\pi = \vec{1}(\vec{1}'\vec{1})^{-1}\vec{1}'$ запишите RSS, TSS и ESS в матричной форме.

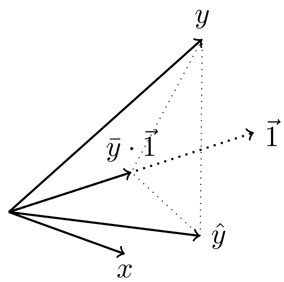
4.19 Найдите $\mathbb{E}(TSS)$, $\mathbb{E}(ESS)$. Надо быть морально готовым к тому, что они выйдут громоздкие.

4.20 Вася строит регрессию y на некий набор объясняющих переменных и константу. Всего он оценивает k коэффициентов бета. А на самом деле $y_i = \beta + \varepsilon_i$. Чему равно $\mathbb{E}(TSS)$, $\mathbb{E}(RSS)$, $\mathbb{E}(ESS)$ в этом случае?

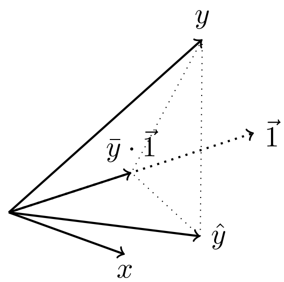
4.21 Рассмотрим классическую линейную модель. Являются ли векторы $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{y}$ перпендикулярными? Найдите $\mathrm{Cov}(\hat{\varepsilon}, \hat{y})$.

4.22 Чему в классической модели регрессии равны $\mathbb{E}(\varepsilon)$, $\mathbb{E}(\hat{\varepsilon})$? Верно ли что $\sum \varepsilon_i$ равна 0? Верно ли что $\sum \hat{\varepsilon}_i$ равна 0?

4.23 Найдите на картинке все перпендикулярные векторы. Найдите на картинке все прямоугольные треугольники. Сформулируйте для них теоремы Пифагора.



4.24 Покажите на картинке TSS, ESS, RSS, R^2, $\mathrm{sCorr}(\hat{y}, y)$, $\mathrm{sCov}(\hat{y}, y)$



4.25 Предложите аналог R^2 для случая, когда константа среди регрессоров отсутствует. Аналог должен быть всегда в диапазоне $[0; 1]$, совпадать с обычным R^2, когда среди регрессоров есть константа, равняться единице в случае нулевого $\hat{\varepsilon}$.

4.26 Вася оценил регрессию y на константу, x и z. А затем, делать ему нечего, регрессию y на константу и полученный $\hat{y}$. Какие оценки коэффициентов у него получатся? Чему будет равна оценка дисперсии коэффицента при $\hat{y}$? Почему оценка коэффициента неслучайна, а оценка её дисперсии положительна?

4.27 При каких условиях $TSS = ESS + RSS$?

4.28 Истинная модель имеет вид $y = X\beta + \varepsilon$. Вася оценивает модель $\hat{y} = X\hat{\beta}$ по первой части выборки, получает $\hat{\beta}_a$, по второй части выборки — получает $\hat{\beta}_b$ и по всей выборке — $\hat{\beta}_{tot}$. Как связаны между собой $\hat{\beta}_a$, $\hat{\beta}_b$, $\hat{\beta}_{tot}$? Как связаны между собой ковариационные матрицы $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_a)$, $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_b)$ и $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_{tot})$?

4.29 Модель линейной регрессии имеет вид $y_i = \beta_1 x_{i,1} + \beta_2 x_{i,2} + u_i$. Сумма квадратов остатков имеет вид $Q\left(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2\right) = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_1 x_{i,1} - \hat{\beta}_2 x_{i,2})^2$.

1. Выпишите необходимые условия минимума суммы квадратов остатков
2. Найдите матрицу $X'X$ и вектор $X'y$ если матрица X имеет вид $X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} \end{pmatrix}$, а вектор y имеет вид $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
3. Докажите, что необходимые условия равносильны матричному уравнению $X'X\hat{\beta} = X'y$, где $\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix}$
4. Предполагая, что матрица $X'X$ обратима, найдите $\hat{\beta}$

4.30 Вася оценил исходную модель:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i$$

Для надежности Вася стандартизировал переменные, т.е. перешёл к $y_i^* = (y_i - \bar{y})/s_y$ и $x_i^* = (x_i - \bar{x})/s_x$. Затем Вася оценил ещё две модели:

$$y_i^* = \beta_1' + \beta_2' x_i^* + u_i'$$

и

$$y_i^* = \beta_2'' x_i^* + u_i''$$

В решении можно считать s_x и s_y известными.

1. Найдите $\hat{\beta}_1'$.
2. Как связаны между собой $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_2'$ и $\hat{\beta}_2''$?
3. Как связаны между собой $\hat{u}_i$, $\hat{u}_i'$ и $\hat{u}_i''$?
4. Как связаны между собой $\widehat{\mathrm{Var}}\left(\hat{\beta}_2\right)$, $\widehat{\mathrm{Var}}\left(\hat{\beta}_2'\right)$ и $\widehat{\mathrm{Var}}\left(\hat{\beta}_2''\right)$?
5. Как выглядит матрица $\widehat{\mathrm{Var}}\left(\hat{\beta}'\right)$?
6. Как связаны между собой t-статистики $t_{\hat{\beta}_2}$, $t_{\hat{\beta}_2'}$ и $t_{\hat{\beta}_2''}$?
7. Как связаны между собой R^2, $R^{2\prime}$ и $R^{2\prime\prime}$?
8. В нескольких предложениях прокомментируйте последствия перехода к стандартизированным переменным.

4.31 Регрессионная модель задана в матричном виде при помощи уравнения $y = X\beta + \varepsilon$, где $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)'$. Известно, что $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$ и $\mathrm{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 \cdot I$. Известно также, что

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для удобства расчетов приведены матрицы

$$X'X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } (X'X)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Укажите число наблюдений.
2. Укажите число регрессоров с учетом свободного члена.
3. Запишите модель в скалярном виде.
4. Рассчитайте $TSS = \sum(y_i - \bar{y})^2$, $RSS = \sum(y_i - \hat{y}_i)^2$ и $ESS = \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2$.
5. Рассчитайте при помощи метода наименьших квадратов $\hat{\beta}$, оценку для вектора неизвестных коэффициентов.
6. Чему равен $\hat{\varepsilon}_5$, МНК-остаток регрессии, соответствующий 5-ому наблюдению?
7. Чему равен R^2 в модели? Прокомментируйте полученное значение с точки зрения качества оцененного уравнения регрессии.
8. Используя приведенные выше данные, рассчитайте несмещённую оценку для неизвестного параметра σ^2 регрессионной модели.
9. Рассчитайте $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta})$, оценку для ковариационной матрицы вектора МНК-коэффициентов $\hat{\beta}$.
10. Найдите $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1)$, несмещённую оценку дисперсии МНК-коэффициента $\hat{\beta}_1$.
11. Найдите $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2)$, несмещённую оценку дисперсии МНК-коэффициента $\hat{\beta}_2$.
12. Найдите $\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$, несмещённую оценку ковариации МНК-коэффициентов $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$.

13. Найдите $\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2)$, $\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2)$, $\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3)$, $\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 - 2\hat{\beta}_3)$.
14. Найдите $\widehat{\text{Corr}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$, оценку коэффициента корреляции МНК-коэффициентов $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$.
15. Найдите $s_{\hat{\beta}_1}$, стандартную ошибку МНК-коэффициента $\hat{\beta}_1$.
16. Рассчитайте выборочную ковариацию y и $\hat{y}$.
17. Найдите выборочную дисперсию y, выборочную дисперсию $\hat{y}$.

4.32 Теорема Фриша-Вау. Регрессоры разбиты на две группы: матрицу X_1 размера $n \times k_1$ и матрицу X_2 размера $n \times k_2$. Рассмотрим две процедуры:

M1. Строим регрессию вектора y на все регрессоры, т.е. оцениваем модель:

$$y = X\beta + \varepsilon = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon$$

M2. Процедура из двух шагов:

   (a) Строим регрессию вектора y на все регрессоры первой группы и получаем вектор остатков M_1y, где $M_1 = I - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'$. Строим регрессию каждого регрессора из второй группы на все регрессоры первой группы и получаем в каждом случае вектор остатков. Эти остатки можно записать матрицей M_1X_2.

   (b) Строим регрессию вектора M_1y на остатки M_1X_2.

   Другими словами мы оцениваем модель:

$$M_1y = M_1X_2\gamma_2 + u$$

1. Верно ли, что МНК оценки коэффициентов $\hat{\beta}_2$ и $\hat{\gamma}_2$ совпадают?
2. Верно ли, что остатки в обеих регрессиях совпадают?

4.33 Всего имеется 100 наблюдений. Для первых 50-ти наблюдений $X'X = \begin{pmatrix} 50 & 300 \\ 300 & 2100 \end{pmatrix}$, $X'y = \begin{pmatrix} 300 & 2000 \end{pmatrix}'$, $y'y = 2100$. По последним 50-ти наблюдениям: $X'X = \begin{pmatrix} 50 & 300 \\ 300 & 2100 \end{pmatrix}$, $X'y = \begin{pmatrix} 300 & 2200 \end{pmatrix}'$, $y'y = 2500$. По первым 50-ти наблюдениям оценивается модель $y_i = \beta_1 + \beta_2x_i + \varepsilon_i$, по последним 50-ти наблюдениям оценивается модель $y_i = \gamma_1 + \gamma_2x_i + \varepsilon_i$. Предположеним, что во всех 100 наблюдениях ε_i независимы и нормальны $N(0;\sigma^2)$. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0: \ \beta = \gamma$.

4.34 Докажите, что МНК-оценки $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$ являются несмещёнными и линейными по переменной y.

4.35 Являются ли МНК-оценки линейными по переменной X?

4.36 Приведите пример несмещённой и линейной по переменной y оценки, отличной от МНК.

4.37 Известно, что в регрессии $y = X\beta + \varepsilon$ не выполняется условие $H\vec{1} = \vec{1}$, где $\vec{1}$ — единичный столбец, а $H = X(X'X)^{-1}X'$, $\pi = \frac{\vec{1}\vec{1}'}{\vec{1}'\vec{1}}$. Какие равенства будут верны?

1. $H\pi = \pi$;
2. $H^2 = H$;
3. $\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i = 0$;
4. $\bar{y} = \bar{\hat{y}}$.

4.38 Какие из данных условий являются необходимыми условиями теоремы Гаусса-Маркова?

1. Правильная специфицикация модели: $y = X\beta + \varepsilon$;
2. Полный ранг матрицы X;
3. Невырожденность матрицы $X'X$;
4. Нормальность распределения случайной составляющей;
5. Пропорциональность ковариационной матрицы случайной составляющей единичной матрице;
6. Наличие в матрице X единичного столбца.

4.39 Для регрессии $y = X\beta + \varepsilon$ с $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$ найдите математическое ожидание квадратичной формы $\varepsilon'\pi\varepsilon$.

4.40 Рассмотрим регрессию, для которой выполнены условия теоремы Гаусса-Маркова. Уравнение регрессии имеет вид $\hat{y} = \hat{\beta}_1 i + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_3 + \hat{\beta}_4 x_4$. Известны следующие данные:

$$X'X = \begin{pmatrix} 100 & 123 & 96 & 109 \\ & 252 & 125 & 189 \\ & & 167 & 146 \\ & & & 168 \end{pmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.03767 & & & \\ -0.06263 & 1.129 & & \\ -0.06247 & 1.107 & 1.110 & \\ 0.1003 & -2.192 & -2.170 & 4.292 \end{pmatrix}$$

$$X'y = \begin{pmatrix} 460 \\ 810 \\ 615 \\ 712 \end{pmatrix}; y'y = 3924$$

1. Найдите $\widehat{\mathrm{Corr}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$.
2. Найдите $\widehat{\mathrm{Corr}}(x_2, x_3)$.
3. Проверьте гипотезу $H_0 : \beta_2 = 0$.

4.41 По данным для 15 фирм ($n = 15$) была оценена производственная функция Кобба-Дугласа: $\ln Q_i = \beta_1 + \beta_2 \ln L_i + \beta_3 \ln K_i + \varepsilon_i$. Полученные оценки:

$$\underset{se}{\widehat{\ln Q}} = \underset{(4.48)}{0.5} + \underset{(0.7)}{0.76} \ln L + \underset{(0.138)}{0.19} \ln K$$

где Q — выпуск, L — трудозатраты, K — капиталовложения. Матрица обратная к матрице регрессоров имеет вид:

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 121573 & -19186 & 3718 \\ -19186 & 3030 & -589 \\ 3718 & -589 & 116 \end{pmatrix}$$

1. Напишите формулу для несмещённой оценки ковариации $\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$ и вычислите её по имеющимся данным, если это возможно.
2. Проверьте $H_0 : \beta_2 + \beta_3 = 1$ при помощи t-статистики. Укажите формулу для статистики, а также число степеней свободы.
3. Постройте 95% доверительный интервал для величины $\beta_2 + \beta_3$.

4.42 Напишите формулу для оценок коэффициентов в множественной регрессии с матрицами. Напишите формулу для ковариационной матрицы оценок.

4.43 Исследователь оценил зависимость длины тормозного пути в футах от скорости автомобиля в милях в час по данным 1920-х годов.

```
model <- lm(dist ~ speed, data = cars)
model_sum <- summary(model)
hat_sigma <- model_sum$sigma
xtable(vcov(model))
```

При построении парной регрессии у него получилась $\hat{\sigma} = 15.4$ и оценка ковариационной матрицы

	(Intercept)	speed
(Intercept)	45.68	-2.66
speed	-2.66	0.17

1. Определите количество наблюдений.
2. Найдите среднюю скорость автомобиля в милях в час.

4.44 Дана оценка ковариацонной матрицы,

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}) = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 4/3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдите $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3)$

4.45 Методом наименьших квадратов по 5 наблюдениям оценивается модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i$. Известно, что

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 4/3 & -1 \\ 0 & -1 & 2.0000 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix},\ TSS = 60$$

Найдите $\hat{\sigma}^2$ и проверьте гипотезу о значимости регрессии в целом на уровне значимости 5%.

4.46 По 30 наблюдениям оценивается модель парной регрессии $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$. Известны матрицы:

$$X'X = \begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 40 \end{pmatrix}, \; X'y = \begin{pmatrix} 40 \\ 70 \end{pmatrix}, \; y'y = 80$$

1. Оцените модель парной регрессии по 30 наблюдениям.
2. К имеющимся 30 наблюдениям добавили ещё одно, $x_{31} = 1$, $y_{31} = 2$. Оцените модель по 31 наблюдению.
3. Проведите тест Чоу на прогнозную силу. То есть проверьте, что зависимость на выборке из 31 наблюдения совпадает с зависимостью по 30 наблюдениям.

4.47 Как известно, $\hat{y} = Hy$, где матрица-шляпница H задаётся формулой $H = X(X'X)^{-1}X'$.

1. Является ли вектор остатков $\hat{\varepsilon}$ собственным вектором матрицы H? Если да, то какое собственное число ему соответствует?
2. Является ли вектор прогнозов $\hat{y}$ собственным вектором матрицы H? Если да, то какое собственное число ему соответствует?
3. Приведите ещё примеры собственных векторов матрицы H и найдите соответствующие им собственные числа.

4.48 Эконометресса Эвелина оценила классическую линейную модель $y_{train} = X_{train}\beta + \varepsilon$ на обучающей выборке из n_{train} наблюдений методом наименьших квадратов. А затем, используя полученную оценку $\hat{\beta}$, Эвелина строит прогноз на тестовой выборке из n_{test} наблюдений. То есть истинные вневыборочные значения вектора y_{test} получаются по формуле $y_{test} = X_{test}\beta + u$. Прогнозы Эвелина строит по формуле $\hat{y}_{test} = X_{test}\hat{\beta}$. Ошибки ε_i и u_j имеют одинаковое распределение и некоррелированы между собой. Найдите математическое ожидание суммы квадратов ошибок прогнозов,

$$\mathbb{E}\left(\sum_i (y_{test,i} - \hat{y}_{test,i})^2\right)$$

4.49 Вениамин оценил модель множественной регрессии. При этом оказалось, что $y_2 = 3$, $\hat{y}_2 = 5$ и $H_{22} = 0.7$, где H — матрица-шляпница, т.е. $H = X(X'X)^{-1}X'$. Вдруг Вениамин отпрянул в ужасе! Он обнаружил, что второе наблюдение было внесено неправильно! Вместо $y_2 = 3$ должно быть $y_2 = 0.3$!

Как изменится $\hat{y}_2$, если исправить неправильно внесённое наблюдение?

4.50 Выпишите в явном виде матрицу-шляпницу $H = X(X'X)^{-1}X'$ для моделей

1. $y_i = \beta + \varepsilon_i$;
2. $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$;
3. $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$.

4.51 Рассмотрим модель $y = X\beta + \varepsilon$, где $\mathbb{E}(\varepsilon|X) = 0$ и $\mathrm{Var}(\varepsilon|X) = \sigma^2 I$.

1. Вспомните или найдите $\mathrm{Var}(\hat{y}|X)$ и $\mathrm{Var}(y|X)$.
2. В каких пределах может лежать произвольный элемент матрицы-шляпницы $H = X(X'X)^{-1}X'$?
3. Вениамин оценил множественную регрессию $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$. А после этого его попросили построить прогноз y для $x = 1$ и $z = 2$. Вениамин неожиданно обнаружил, что в его данных в 42-м наблюдении как раз $x_{42} = 1$, а $z_{42} = 2$. Что ему лучше взять в качестве прогноза, y_{42} или $\hat{y}_{42}$?

4.52 Рассмотрим случайный вектор w, в котором все компоненты независимы и равновероятно равны нулю или единице. Определим вектор v по формуле $v = 1 - w$.

1. Ортогональны ли вектора v и w?
2. Найдите ковариационную матрицу векторов v и w.

4.53 Известна корреляционная матрица случайного вектора x, C. Известен вектор корреляций случайной величины y и вектора x, d.

Найдите максимальную корреляцию между y и линейной комбинацией случайных величин из вектора x

4.54 Имеется всего два наблюдения, $y_1 = 1$, $y_2 = -3$. С помощью критериев AIC и BIC сравните две модели. Модель А: $y_i \sim \mathcal{N}(0; 1)$ и независимы, модель Б: $y_i \sim \mathcal{N}(\mu; 1)$ и независимы.

4.55 Бизнесмен Сидоров предоставляет платные услуги по построению регрессий. Оценка одной регрессии независимо от числа регрессоров стоит 100 рублей. У умного, но бедного студента Петрова нет своего компьютера. У студента Петрова всего 100 рублей, а для курсовой работы ему нужно оценить три регрессии.

Как следует поступить студенту Петрову?

4.56 При описании априорного распределения в TVP-BVAR модели Primiceri возникает примерно следующая задача. Вектор u_t имеет размерность 3×1 и представим в виде $u_t = (u_{1t}, u_{2t}, u_{3t})'$. При $t \neq s$ вектор u_t не зависит от вектора u_s. Распределение вектора u_t не зависит от t. Компоненты вектора u_t зависимы, однако компоненты вектора $v_t = Au_t$ независимы для нижнетреугольной матрицы A вида

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{pmatrix}.$$

Как зная u_1, u_2, ..., u_T оценить неизвестные элементы матрицы A?

4.57 Рассмотрим две модели: $y = X\beta + u$ и $z = X\gamma + v$. В этих двух моделях одинаковые матрицы регрессоров, но разные зависимые переменные. Для каждой модели в отдельности выполнены стандартные предпосылки и $\mathrm{Cov}(u, v) = a \cdot I$. Введём матрицу Y, в которую столбцами поместим y, а затем z, $Y = (y, z)$, и матрицу коэффициентов B, $B = (\beta, \gamma)$. Запись $\vec{B}$ означает векторизацию матрицы B, то есть это столбцы матрицы B, записанные друг под другом в один столбец.

1. Выпишите формулу для $\hat{B}$.
2. Предложите несмещённую оценку для параметра a.
3. Найдите $\mathrm{Var}(\vec{\hat{B}})$.

4.58 доделать!

У аккуратной эконометрессы Авдотьи все объясняющие переменные ортогональны друг другу и центрированы. Сначала Авдотья оценивает парные регрессии игрека на каждую объясняющую переменную x_j по отдельности, $\hat{y}_i = \hat{\beta}_j x_i j$. Затем Авдотья оценивает множественную регрессию на все объясняющие переменные сразу, $\hat{y}_i = \hat{\gamma}_1 x_{i1} + \ldots + \hat{\gamma}_k x_{ik}$.

1. Как связаны коэффициенты при объясняющих переменных в этих регрессиях?
2. Как связаны R^2 в этих регрессиях, если Авдотья дополнительно нормирует регрессоры, чтобы они имели единичную длину?

4.59 Машенька построила регрессию с тремя регрессорами помимо константы и 11-ю наблюдениями с $R^2 = 0.8$. Вовочка назло Машеньке случайно переставляет значения зависимой переменной и просит Машеньку оценить регрессию заново.

Какой ожидаемый R^2 получит Машенька?

4.60 Эконометресса Рапунцель строит регрессию y на X. А эконометрист Флин использует QR-разложение для матрицы X, то есть представляет X в виде $X = QR$. Другими словами, Флин переходит к ортонормированному базису в пространстве столбцов матрицы X: $Q'Q = I$, R — верхнетреугольная обратимая. А затем Флин строит регрессию y на Q.

Верно ли, что Рапунцель и Флин получат одинаковые

1. оценки коэффициентов?
2. прогнозы $\hat{y}$?
3. ковариационные матрицы прогнозов $\mathrm{Var}(\hat{y}|X)$?

Глава 5

Метод максимального правдоподобия

Пусть

$X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка

$x = (x_1, \ldots, x_n)$ — реализация данной случайной выборки

$f_{X_i}(x_i, \theta)$ — плотность распределения случайной величины X_i, $i = 1, \ldots, n$

$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ — вектор неизвестных параметров

$\Theta \subseteq \mathbb{R}^k$ — множество допустимых значений вектора неизвестных параметров

$\mathrm{L}(\theta) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i, \theta)$ — функция правдоподобия

$\ell(\theta) := \ln \mathrm{L}(\theta)$ — логарифмическая функция правдоподобия

Пусть требуется протестировать систему (нелинейных) ограничений относительно вектора неизвестных параметров

$$H_0 : \begin{cases} g_1(\theta) = 0 \\ g_2(\theta) = 0 \\ \ldots \\ g_r(\theta) = 0 \end{cases}$$

где $g_i(\theta)$ — функция, которая задаёт i-ое ограничение на вектор параметров θ, $i = 1, \ldots, r$.

$$\frac{\partial g}{\partial \theta'} = \begin{pmatrix} \partial g_1/\partial \theta' \\ \partial g_2/\partial \theta' \\ \vdots \\ \partial g_r/\partial \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial \theta_k} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_r}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial \theta_k} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g'}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1'}{\partial\theta} & \frac{\partial g_2'}{\partial\theta} & \ldots & \frac{\partial g_r'}{\partial\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial\theta_1} & \frac{\partial g_2}{\partial\theta_1} & \ldots & \frac{\partial g_r}{\partial\theta_1} \\ \frac{\partial g_1}{\partial\theta_2} & \frac{\partial g_2}{\partial\theta_2} & \ldots & \frac{\partial g_r}{\partial\theta_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial g_1}{\partial\theta_k} & \frac{\partial g_2}{\partial\theta_k} & \ldots & \frac{\partial g_r}{\partial\theta_k} \end{pmatrix}$$

$$I(\theta) = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2\ell}{\partial\theta\partial\theta'}\right) = -\mathbb{E}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2\ell}{\partial\theta_1\partial\theta_1} & \frac{\partial^2\ell}{\partial\theta_1\partial\theta_2} & \ldots & \frac{\partial^2\ell}{\partial\theta_1\partial\theta_k} \\ \frac{\partial^2\ell}{\partial\theta_2\partial\theta_1} & \frac{\partial^2\ell}{\partial\theta_2\partial\theta_2} & \ldots & \frac{\partial^2\ell}{\partial\theta_2\partial\theta_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2\ell}{\partial\theta_k\partial\theta_1} & \frac{\partial^2\ell}{\partial\theta_k\partial\theta_2} & \ldots & \frac{\partial^2\ell}{\partial\theta_k\partial\theta_k} \end{pmatrix}$$ — информационная матрица Фишера

$$\frac{\partial\ell}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\ell}{\partial\theta_1} \\ \frac{\partial\ell}{\partial\theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial\ell}{\partial\theta_k} \end{pmatrix}$$

$\Theta_{UR} := \Theta$ — множество допустимых значений вектора неизвестных параметров без учёта ограничений

$\Theta_R := \{\theta \in \Theta : g(\theta) = 0\}$ — множество допустимых значений вектора неизвестных параметров с учётом ограничений

$\hat\theta_{UR} \in \Theta_{UR}$ — точка максимума функции ℓ на множестве Θ_{UR}

$\hat\theta_R \in \Theta_R$ — точка максимума функции ℓ на множестве Θ_R

Тогда для тестирования гипотезы H_0 можно воспользоваться одной из следующих ниже статистик.

$LR := -2(\ell(\hat\theta_R) - \ell(\hat\theta_{UR})) \overset{a}{\sim} \chi^2_r$ — статистика отношения правдоподобия

$W := g'(\hat\theta_{UR}) \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial\theta'}(\hat\theta_{UR}) \cdot I^{-1}(\hat\theta_{UR}) \cdot \frac{\partial g'}{\partial\theta}(\hat\theta_{UR})\right]^{-1} g(\hat\theta_{UR}) \overset{a}{\sim} \chi^2_r$ — статистика Вальда

$LM := \left[\frac{\partial\ell}{\partial\theta}(\hat\theta_R)\right]' \cdot I^{-1}(\hat\theta_R) \cdot \left[\frac{\partial\ell}{\partial\theta}(\hat\theta_R)\right] \overset{a}{\sim} \chi^2_r$ — статистика множителей Лагранжа

5.1 Дядя Вова (Владимир Николаевич) и Скрипач (Гедеван) зарабатывают на Плюке чатлы, чтобы купить гравицапу. Число заработанных за i-ый день чатлов имеет пуассоновское распределение, заработки за разные дни независимы. За прошедшие 100 дней они заработали 250 чатлов.

1. Оцените параметр λ пуассоновского распределения методом максимального правдоподобия.

2. Сколько дней им нужно давать концерты, чтобы оценка вероятности купить гравицапу составила 0.99? Гравицапа стоит пол кц или 2200 чатлов.
3. Постройте 95% доверительный интервал для λ.
4. Проверьте гипотезу о том, что средний дневной заработок равен 2 чатла с помощью теста отношения правдоподобия, теста Вальда, теста множителей Лагранжа.

5.2 Инопланетянин Капп совершил вынужденную посадку на Землю. Каждый день он выходит на связь со своей далёкой планетой. Продолжительность каждого сеанса связи имеет экспоненциальное распределение с параметром λ. Прошедшие 100 сеансов связи в сумме длились 11 часов.

1. Оцените параметр λ экспоненциального распределения методом максимального правдоподобия.
2. Постройте 95% доверительный интервал для λ.
3. Проверьте гипотезу о том, что средняя продолжительность сеанса связи равна 5 минутам с помощью теста отношения правдоподобия, теста Вальда, теста множителей Лагранжа.

5.3 [R] По ссылке http://people.reed.edu/~jones/141/Coal.html скачайте данные о количестве крупных аварий на английских угольных шахтах.

1. Методом максимального правдоподобия оцените две модели:
   (a) Пуассоновская модель: количества аварий независимы и имеют Пуассоновское распределение с параметром λ.
   (b) Модель с раздутым нулём «zero inflated poisson model»: количества аварий независимы, с вероятностью p аварий не происходит вообще, с вероятностью $(1-p)$ количество аварий имеет Пуассоновское распределение с параметром λ. Смысл этой модели в том, что по сравнению с Пуассоновским распределением у события $\{X_i = 0\}$ вероятность выше, а пропорции вероятностей положительных количеств аварий сохраняются. В модели с раздутым нулём дисперсия и среднее количества аварий отличаются. Чему в модели с раздутым нулём равна $\mathbb{P}(X_i = 0)$?
2. С помощью тестов множителей Лагранжа, Вальда и отношения правдоподобия проверьте гипотезу H_0: верна пуассоновская модель против H_a: верна модель с раздутым нулём.

3. Постройте доверительные интервалы для оценённых параметров в обеих моделях.
4. Постройте доверительный интервал для вероятности полного отсутствия аварий по обеим моделям.

5.4 Совместное распределение величин X и Y задано функцией

$$f(x,y) = \frac{\theta(\beta y)^x e^{-(\theta+\beta)y}}{x!}.$$

Величина X принимает целые неотрицательные значения, а величина Y — действительные неотрицательные. Имеется случайная выборка (X_1, Y_1), ...(X_n, Y_n).

С помощью метода максимального правдоподобия оцените

1. θ и β;
2. $a = \theta/(\beta+\theta)$.

5.5 Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из нормального распределения с математическим ожиданием μ и дисперсией ν; $\mu \in \mathbb{R}$ и $\nu > 0$ — неизвестные параметры. Реализация случайной выборки $x = (x_1, \ldots, x_n)$ известна: -2.80, -1.12, -2.27, -1.31, -0.98, -2.15, -1.52, -2.82, -1.19, 0.87.

При помощи теста отношения правдоподобия, теста Вальда и теста множителей Лагранжа протестируйте гипотезу:

$$H_0 : \begin{cases} \mu = 0 \\ \nu = 1 \end{cases}$$

на уровне значимости 5%.

5.6 Пусть p — неизвестная вероятность выпадения орла при бросании монеты. Из 100 испытаний 42 раза выпал «Орел» и 58 — «Решка». Протестируйте на 5%-ом уровне значимости гипотезу о том, что монетка — «правильная» с помощью:

1. теста отношения правдоподобия;
2. теста Вальда;
3. теста множителей Лагранжа.

5.7 Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — реализация случайной выборки из распределения Пуассона с неизвестным параметром $\lambda > 0$. Известно, что выборочное среднее $\overline{x}$ по 80 наблюдениям равно 1.7. Протестируйте на 5%-ом уровне значимости гипотезу $H_0 : \lambda = 2$ с помощью

1. теста отношения правдоподобия
2. теста Вальда
3. теста множителей Лагранжа

5.8 Выпишите в явном виде функцию максимального правдоподобия для модели $y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon$, если $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, A)$. Матрица A устроена по принципу: $\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ при $i \neq j$, и $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2 x_i^2$.

5.9 Выпишите в явном виде функцию максимального правдоподобия для модели $y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon$, если $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, A)$. Матрица A устроена по принципу: $\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ при $i \neq j$, и $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2 |x_i|$.

5.10 Предположим, что в классической линейной модели ошибки имеют нормальное распределение, т.е.

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2,i} + \ldots + \beta_k x_{k,i} + \varepsilon_i$$

где ε_i нормальны $N(0, \sigma^2)$ и независимы

1. Найдите оценки для β и σ^2 методом максимального правдоподобия.
2. Являются ли полученные оценки $\hat{\beta}_{ML}$ и $\hat{\sigma}^2_{ML}$ несмещёнными?
3. Выведите формулу LR-статистики у теста отношения правдоподобия для тестирования гипотезы об адекватности регрессии H_0: $\beta_2 = \beta_3 = \ldots = \beta_k = 0$.

5.11 Наблюдения X_1, ..., X_n независимы и нормальны $N(\mu, 1)$. По 100 наблюдениям оказалось, что $\sum x_i = 200$, $\sum x_i^2 = 900$.

1. Оцените μ методом максимального правдоподобия.
2. Постройте 95% доверительный интервал для μ.
3. Проверьте гипотезу о том, что $\mu = 3$ против альтернативной $\mu \neq 3$ с помощью тестов Вальда, множителей Лагранжа и отношения правдоподобия.
4. Постройте 95% доверительный интервал для неизвестной величины $\mathbb{P}(X_i > 2.5)$.

5.12 Наблюдения X_1, ..., X_n независимы и нормальны $N(0, \sigma^2)$. По 100 наблюдениям оказалось, что $\sum x_i = 200$, $\sum x_i^2 = 900$.

1. Оцените σ^2 методом максимального правдоподобия.
2. Постройте 95% доверительный интервал для σ^2.
3. Проверьте гипотезу о том, что $\sigma^2 = 4$ против альтернативной $\sigma^2 \neq 4$ с помощью тестов Вальда, множителей Лагранжа и отношения правдоподобия.
4. Постройте 95% доверительный интервал для неизвестной величины $\mathbb{P}(X_i > 2.5)$.

5.13 Наблюдения X_1, ..., X_n независимы и нормальны $N(\mu, \sigma^2)$. По 100 наблюдениям оказалось, что $\sum x_i = 200$, $\sum x_i^2 = 900$.

1. Оцените μ и σ^2 методом максимального правдоподобия.
2. Постройте 95% доверительный интервал для μ, σ^2.
3. [R] Проверьте гипотезу о том, что $\sigma^2 = 4$ против альтернативной $\sigma^2 \neq 4$ с помощью тестов Вальда, множителей Лагранжа и отношения правдоподобия.
4. [R] Проверьте гипотезу о том, что $\mu = 3$ против альтернативной $\mu \neq 3$ с помощью тестов Вальда, множителей Лагранжа и отношения правдоподобия.
5. [R] Постройте 95% доверительный интервал для неизвестной величины $\mathbb{P}(X_i > 2.5)$.
6. [R] На графике постройте двумерную 95% доверительную область для вектора (μ, σ^2).

5.14 [R] Эконометрессе Зульфие нравятся жёлтые и красные эмэндэмсины. Она записала цвета сотни случайно выбранных эмэндэмсин. Из сотни оказалось X_1 жёлтых и X_2 красных. Настоящие вероятности обнаружить жёлтую и красную эмэндэмсину неизвестны и равны p_1 и p_2, $p_1 + p_2 < 1$.

1. Оцените неизвестные параметры с помощью максимального правдоподобия в общем виде. Найдите точечное значение оценки, если $X_1 = 20$ и $X_2 = 30$.
2. Оцените ковариационную матрицу оценок правдоподобия двумя способами: простой подстановкой оценок в матрицу Гессе и подстановкой оценок в математическое ожидание матрицы Гессе. Совпадают ли эти два способа в данном случае?

3. Постройте 95% доверительный интервал для каждого неизвестного параметра
4. С помощью теста отношения правдоподобия, теста множителей Лагранжа, теста Вальда проверьте гипотезу H_0: $p_1 = 0.25$ и $p_2 = 0.25$.
5. С помощью теста отношения правдоподобия, теста множителей Лагранжа, теста Вальда проверьте гипотезу H_0: $p_1 = 0.25$
6. С помощью теста отношения правдоподобия, теста множителей Лагранжа, теста Вальда проверьте гипотезу H_0: $p_1 + p_2 = 0.5$. Постройте 95%-ый доверительный интервал для суммы $p_1 + p_2$

5.15 Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ — независимы и одинаково распределены с функцией плотности $f(t) = \frac{\theta \cdot (\ln t)^{\theta-1}}{t}$ при $t \in [1; e]$. По выборке из 100 наблюдений оказалось, что $\sum \ln(\ln(X_i)) = -30$

1. Найдите оценку параметра θ методом максимального правдоподобия.
2. Постройте 95% доверительный интервал для θ.
3. С помощью LR, LM и W теста проверьте гипотезу о том, что $\theta = 1$.

5.16 Величины $X_1, \ldots, X_n$ — независимы и нормально распределены, $N(\mu, \sigma^2)$. По 100 наблюдениям $\sum X_i = 100$ и $\sum X_i^2 = 900$.

1. Найдите ML оценки неизвестных параметров μ и σ^2.
2. Постройте 95%-ые доверительные интервалы для μ и σ^2
3. С помощью LR, LM и W теста проверьте гипотезу о том, что $\sigma^2 = 1$.
4. С помощью LR, LM и W теста проверьте гипотезу о том, что $\sigma^2 = 1$ и одновременно $\mu = 2$.

5.17 Рассмотрим модель регрессии

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ независимы и равновероятно принимают значения $+1$ и -1. При помощи метода максимального правдоподобия оцените β_1, β_2, если $y' = (-1, 1, 2)$.

5.18 Известно, что надои холмогорских коров имеют нормальное распределение со среднем 30 кг молока в день и стандартным отклонением 5 кг в день. Надои ярославских коров имеют нормальное распределение с неизвестными μ и σ^2. Каждая корова в выборке может равновероятно оказаться холмогорской или ярославской.

Эконометресса Глафира хочет оценить параметры μ и σ^2 методом максимального правдоподобия, имея только данные по надоям n коров. Данные о породе коров в выборке отсутствуют.

1. Как выглядит функция правдоподобия?
2. Найдите все глобальные экстремумы функции правдоподобия.
3. Какой из экстремумов выглядит наиболее логичным?

5.19 Исследователь Вениамин пытается понять, как логарифм количества решённых им по эконометрике задач зависит от количества съеденных им пирожков. Для этого он собрал 100 наблюдений. Первые 50 наблюдений — относятся к пирожкам с мясом, а последние 50 наблюдений — к пирожкам с повидлом. Вениамин считает, что ожидаемое количество решённых задач не зависит от начинки пирожков, а только от их количества, т.е. $y_i = \beta x_i + u_i$. Однако он полагает, что для пирожков с мясом — $u_i \sim \mathcal{N}(0; \sigma_M^2)$, а для пирожков с повидлом — $u_i \sim \mathcal{N}(0; \sigma_J^2)$.

1. Выпишите логарифмическую функцию правдоподобия.
2. Выпишите условия первого порядка для оценки β, σ_M^2, σ_J^2.

5.20 После долгих изысканий Вениамин пришёл к выводу, что $\beta = 0$, т.е. что логарифм количества решенных им по эконометрике за вечер задач имеет нормальное распределение y_i с математическим ожиданием ноль. Однако он по прежнему уверен, что дисперсия y_i зависит от того, какие пирожки он ел в этом вечер. Для пирожков с повидлом $y_i \sim \mathcal{N}(0; \sigma_J^2)$, а для пирожков с мясом — $y_i \sim \mathcal{N}(0; \sigma_M^2)$. Всего 100 наблюдений. Первые 50 вечеров относятся к пирожкам с мясом, последние 50 вечеров — к пирожкам с повидлом:

$$\sum_{i=1}^{50} y_i = 10,\ \sum_{i=1}^{50} y_i^2 = 100,\ \sum_{i=51}^{100} y_i = -10,\ \sum_{i=51}^{100} y_i^2 = 300$$

1. Найдите оценки σ_M^2, σ_J^2, которые получит Вениамин.

2. Помогите Вениамину проверить гипотезу $\sigma_M^2 = \sigma_J^2$ с помощью тестов отношения правдоподобия, множителей Лагранжа и Вальда.

5.21 Александр Сергеевич оценил неизвестный параметр θ по 200 наблюдениям методом максимального правдоподобия и получил оценки $\hat{\theta} = 100$ и $se(\hat{\theta}) = 1$. Наталья Николаевна хочет оценить параметр $\gamma = \sqrt{\theta}$.

1. Как выглядит 95%-ый доверительный интервал для θ, полученный Александром Сергеевичем?
2. Наталья Николаевна построила 95%-ый доверительный интервал для γ преобразовав края доверительного интервала для θ. Какой интервал она получила?
3. Помогите Наталье Николаевне получить 95%-ый доверительный интервал для γ симметричный относительно $\sqrt{\hat{\theta}}$.

5.22 Рассматривается модель линейной регрессии $Y_i = \mu + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$, где ε_i — случайные ошибки, представляющие собой независимые нормально распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2. При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценки неизвестных параметров μ и σ^2.

5.23 Рассматривается модель линейной регрессии $Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$, где ε_i — случайные ошибки, представляющие собой независимые нормально распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2. При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценки неизвестных параметров β и σ^2.

5.24 Рассматривается модель линейной регрессии $Y_i = \beta / x_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$, где ε_i — случайные ошибки, представляющие собой независимые нормально распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2. При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценки неизвестных параметров β и σ^2.

5.25 Рассматривается модель линейной регрессии $Y_i = \theta x_i + (1-\theta) z_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$, где x_i и z_i — заданные числа, а ε_i — случайные ошибки, представляющие собой независимые нормально распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2. При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценки неизвестных параметров θ и σ^2.

5.26 Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из показательного (экспоненциального) распределения с неизвестным параметром $\lambda > 0$. Известно, что реализация случайной выборки $x = (x_1, \ldots, x_n)$ состоит из $n = 100$ наблюдений, причём $\sum_{i=1}^{n} x_i = 25$. При помощи теста отношения правдоподобия, теста Вальда и теста множителей Лагранжа протестируйте гипотезу $H_0\colon\ \lambda = 1$ на уровне значимости 5 %.

Глава 6

Логит и пробит

6.1 Случайная величина X имеет логистическое распределение, если её функция плотности имеет вид $f(x) = e^{-x}/(1+e^{-x})^2$.

1. Является ли $f(x)$ чётной?
2. Постройте график $f(x)$.
3. Найдите функцию распределения, $F(x)$.
4. Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$.
5. На какое известный закон распределения похож логистический?

6.2 Логит модель часто формулируют в таком виде:

$$y_i^* = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$$

где ε_i имеет логистическое распределение, и

$$y_i = \begin{cases} 1, \ y_i^* \geqslant 0 \\ 0, \ y_i^* < 0 \end{cases}$$

1. Выразите $\mathbb{P}(y_i = 1)$ с помощью логистической функции распределения.
2. Найдите $\ln\left(\frac{\mathbb{P}(y_i=1)}{\mathbb{P}(y_i=0)}\right)$.

6.3 [R] Сравните на одном графике:

1. функции плотности логистической и нормальной $\mathcal{N}(0, \pi^2/3)$ случайных величин;

2. функции распределения логистической и нормальной $\mathcal{N}(0, \pi^2/3)$ случайных величин.

6.4 Как известно, Фрекен Бок любит пить коньяк по утрам. За прошедшие четыре дня она записала, сколько рюмочек коньяка выпила утром, x_i, и видела ли она в этот день привидение, y_i,

y_i	1	0	1	0	0
x_i	2	0	3	3	0

Зависимость между y_i и x_i описывается логит-моделью,

$$\ln\left(\frac{\mathbb{P}(y_i = 1)}{\mathbb{P}(y_i = 0)}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_i$$

Предположим корректность использования нормального распределения для оценок правдоподобия.

1. Выпишите в явном виде логарифмическую функцию максимального правдоподобия.
2. Выпишите условия первого порядка.
3. [R] Найдите оценки параметров β_1 и β_2.
4. Разложите функцию правдоподобия в ряд Тейлора до второго порядка в окрестности $\beta_2 = 0$ и $\beta_1 = \Lambda^{-1}(\hat{p})$ и найдите примерные оценки β_1 и β_2 без компьютера.
5. Найдите оценку ковариационной матрицы оценок коэффициентов.
6. Постройте доверительные интервалы для параметров β_1 и β_2.
7. Постройте доверительный интервал для склонности увидеть привидение при трёх выпитых рюмках, $\beta_1 + \beta_2 x_i$.
8. Постройте доверительный интервал для вероятности увидеть привидение при трёх выпитых рюмках двумя способами:
   (a) Преобразованием доверительного интервала для склонности
   (b) С помощью дельта-метода
9. Постройте график зависимости спрогнозированной вероятности увидеть приведение от количества рюмок. Фрекен Бок обладает способностью выпить дробное количество рюмок.

10. Постройте график зависимости предельного эффекта количества рюмок на вероятность увидеть приведение.

6.5 При оценке логит модели $\mathbb{P}(y_i = 1) = \Lambda(\beta_1 + \beta_2 x_i)$ по 500 наблюдениям оказалось, что $\hat{\beta}_1 = 0.7$ и $\hat{\beta}_2 = 3$. Оценка ковариационной матрицы коэффициентов имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0.04 & 0.01 \\ 0.01 & 0.09 \end{pmatrix}$$

1. Проверьте гипотезу о незначимости коэффициента $\hat{\beta}_2$.
2. Найдите предельный эффект роста x_i на вероятность $\mathbb{P}(y_i = 1)$ при $x_i = -0.5$.
3. Найдите максимальный предельный эффект роста x_i на вероятность $\mathbb{P}(y_i = 1)$.
4. Постройте точечный прогноз вероятности $\mathbb{P}(y_i = 1)$ если $x_i = -0.5$.
5. Найдите стандартную ошибку построенного прогноза.
6. Постройте 95%-ый доверительный интервал для $\mathbb{P}(y_i = 1)$ двумя способами (через преобразование интервала для $\hat{y}_i^*$ и через дельта-метод).

6.6 Винни-Пух знает, что мёд бывает правильный, $honey_i = 1$, и неправильный, $honey_i = 0$. Пчёлы также бывают правильные, $bee_i = 1$, и неправильные, $bee_i = 0$. По 100 своим попыткам добыть мёд Винни-Пух составил таблицу сопряженности:

	$honey_i = 1$	$honey_i = 0$
$bee_i = 1$	12	36
$bee_i = 0$	32	20

Используя метод максимального правдоподобия Винни-Пух хочет оценить логит-модель для прогнозирования правильности мёда с помощью правильности пчёл:

$$\ln\left(\frac{\mathbb{P}(honey_i = 1)}{\mathbb{P}(honey_i = 0)}\right) = \beta_1 + \beta_2 bee_i$$

1. Выпишите функцию правдоподобия для оценки параметров β_1 и β_2.

2. Оцените неизвестные параметры.
3. С помощью теста отношения правдоподобия проверьте гипотезу о том, правильность пчёл не связана с правильностью мёда на уровне значимости 5%.
4. Держась в небе за воздушный шарик, Винни-Пух неожиданно понял, что перед ним неправильные пчёлы. Помогите ему оценить вероятность того, что они делают неправильный мёд.

6.7 Имеются следующие наблюдения

y_i	1	0	0
x_i	1	2	3

Предположим, что логит модель верна.

1. Существуют ли оценки метода максимального правдоподобия?
2. Что произойдёт, если попробовать оценить эту модель в R?
3. Спасёт ли ситуацию рассмотрение пробит-модели?
4. В рамках байесовского подхода найдите среднее апостериорного распределения коэффициентов при априорном предположении $\beta_1 \sim \mathcal{N}(0, 100^2)$, $\beta_2 \sim \mathcal{N}(0, 100^2)$ и их независимости.

6.8 Из имеющихся 100 наблюдений y_i — 70 единиц и 30 нулей. Александр Македонский оценил логит-модель $\mathbb{P}(y_i = 1) = \mathbb{P}(y_i^* > 0)$, $y_i^* = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$. Затем Александр построил прогнозы $\hat{p}_i$. Чему равна сумма прогнозных значений $\sum_{i=1}^{n} \hat{p}_i$?

6.9 Опишите логит-модель упорядоченного выбора. Выведите выражения для предельных эффектов.

6.10 Приведите пример небольшого набора данных для которого оценки логит модели $\mathbb{P}(y_i = 1) = F(\beta_1 + \beta_2 x_i)$ не существуют. В наборе данных должны присутствовать хотя бы одно наблюдение $y_i = 0$ и хотя бы одно наблюдение $y_i = 1$.

6.11 Почему в пробит-модели предполагается, что $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0; 1)$, а не $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2)$ как в линейной регрессии?

6.12 Методом максимального правдоподобия оценили логит-модель $\hat{y}_i^* = 2 + 3x_i - 5z_i$

1. Оцените вероятность того, что $y_i = 1$ для $\bar{x} = 5$, $\bar{z} = 3.5$.
2. Оцените предельный эффект увеличения x на единицу на вероятность того, что $y_i = 1$ для $\bar{x} = 5$, $\bar{z} = 3.5$.
3. При каком значении x предельный эффект увеличения z на 1 в точке $\bar{z} = 3.5$ будет максимальным?

6.13 Что произойдёт с оценками логит-модели $\mathbb{P}(y_i = 1) = F(\beta_1 + \beta_2 x_i)$, их стандартными ошибками, если у зависимой переменной поменять 0 и 1 местами?

6.14 Установите и подключите пакет Ecdat. Активируйте встроенный набор данных по посещениям врача Doctor и введите бинарную переменную y, для тех семей, у которых был хотя бы один визит.

1. Постройте логит модель для переменной y, в качестве объясняющих выберите переменные $children$, $access$ и $health$. Постройте 90% доверительный интервал для коэффициента при количестве детей.
2. Оцените предельный эффект от увеличения количества детей на одного для среднестатистической семьи.
3. Постройте 90%-ый предиктивный интервал для вероятности посетить доктора для семьи в которой 2 ребенка, $health = 0$ и $access = 0.5$.

Глава 7

Мультиколлинеарность

7.1 Сгенерируйте данные так, чтобы при оценке модели $\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x + \hat{\beta}_3 z$ оказывалось, что по отдельности оценки коэффициентов $\hat{\beta}_2$ и $\hat{\beta}_3$ незначимы, но модель в целом — значима.

7.2 В этом задании нужно сгенерировать зависимую переменную y и два регрессора x и z.

1. Сгенерируйте данные так, чтобы корреляция между регрессорами x и z была больше 0.9, и проблема мультиколлинеарности есть, т.е. по отдельности регрессоры не значимы, но регрессия в целом — значима.
2. А теперь сгенерируйте данные так, чтобы корреляция между регрессорами была по-прежнему больше 0.9, но проблемы мультиколлинеарности бы не было, то есть все коэффициенты были бы значимы.
3. Есть несколько способов, как изменить генерации случайных величин, чтобы перейти от ситуации «a» к ситуации «b». Назовите хотя бы два.

7.3 Исследуем зависимость длины тормозного пути автомобиля от скорости по историческим данным 1920-х годов.

```
ggplot(data = cars, aes(x = speed, y = dist)) + geom_point() +
  labs(title = "Зависимость длины тормозного пути",
  x = "Скорость, миль в час", y = "Длина пути, футов")
```

Известны результаты оценивания нецентрированной регрессии:

```
cars_model <- lm(dist ~ speed + I(speed^2) + I(speed^3), data = cars)
cars_table <- as.table(coeftest(cars_model))
rownames(cars_table) <-
  c("Константа", "speed", "speed^2", "speed^3")
xtable(cars_table)
cars_vcov <- vcov(cars_model)
rownames(cars_vcov) <-
  c("Константа", "speed", "speed^2", "speed^3")
colnames(cars_vcov) <- rownames(cars_vcov)
xtable(cars_vcov)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
Константа	-19.51	28.41	-0.69	0.50
speed	6.80	6.80	1.00	0.32
speed^2	-0.35	0.50	-0.70	0.49
speed^3	0.01	0.01	0.91	0.37

Ковариационная матрица коэффициентов имеет вид:

	Константа	speed	speed^2	speed^3
Константа	806.86	-186.20	12.88	-0.27
speed	-186.20	46.26	-3.35	0.07
speed^2	12.88	-3.35	0.25	-0.01
speed^3	-0.27	0.07	-0.01	0.00

1. Проверьте значимость всех коэффициентов и регрессии в целом.
2. Постройте 95%-ый доверительный интервал для $\mathbb{E}(dist)$ при $speed = 10$.
3. Постройте 95%-ый доверительный интервал для $\mathbb{E}(\partial dist/\partial speed)$ при $speed = 10$.
4. Как выглядит уравнение регрессии, если вместо $speed$ использовать центрированную скорость? Известно, что средняя скорость равна 15.4.
5. С помощью регрессии с центрированной скоростью ответьте на предыдущие вопросы.

7.4 Пионеры, Крокодил Гена и Чебурашка собирали металлолом несколько дней подряд. В распоряжение иностранной шпионки, гражданки Шапокляк, попали ежедневные данные по количеству собранного металлолома: вектор g — для Крокодила Гены, вектор h — для Чебурашки и вектор x — для Пионеров. Гена и Чебурашка собирали вместе, поэтому выборочная корреляция $\text{sCorr}(g, h) = -0.9$. Гена и Чебурашка собирали независимо от Пионеров, поэтому выборочные корреляции $\text{sCorr}(g, x) = 0$, $\text{sCorr}(h, x) = 0$. Если регрессоры g, h и x центрировать и нормировать, то получится матрица $\tilde{X}$.

1. Найдите параметр обусловленности матрицы $(\tilde{X}'\tilde{X})$.
2. Вычислите одну или две главные компоненты (выразите их через вектор-столбцы матрицы. $\tilde{X}$), объясняющие не менее 70% общей выборочной дисперсии регрессоров.
3. Шпионка Шапокляк пытается смоделировать ежедневный выпуск танков, y. Выразите оценки коэффициентов регрессии $y = \beta_1 + \beta_2 g + \beta_3 h + \beta_4 x + \varepsilon$ через оценки коэффициентов регрессии на главные компоненты, объясняющие не менее 70% общей выборочной дисперсии.

7.5 Для модели $y_i = \beta x_i + \varepsilon$ рассмотрите модель гребневой регрессии с коэффициентом λ.

1. Выведите формулу для $\hat{\beta}_{rr}$.
2. Найдите $\mathbb{E}(\hat{\beta}_{rr})$, смещение оценки $\hat{\beta}_{rr}$.
3. Найдите $\text{Var}(\hat{\beta}_{rr})$, $MSE(\hat{\beta}_{rr})$.
4. Всегда ли оценка $\hat{\beta}_{rr}$ смещена?
5. Всегда ли оценка $\hat{\beta}_{rr}$ имеет меньшую дисперсию, чем $\hat{\beta}_{ols}$?
6. Найдите такое λ, что $MSE(\hat{\beta}_{rr}) < MSE(\hat{\beta}_{ols})$.

7.6 Известно, что в модели $y = X\beta + \varepsilon$ все регрессоры ортогональны.

1. Как выглядит матрица $X'X$ в случае ортогональных регрессоров?
2. Выведите $\hat{\beta}_{rr}$ в явном виде.
3. Как связаны между собой $\hat{\beta}_{rr}$ и $\hat{\beta}_{ols}$?

7.7 Для модели $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$ выведите в явном виде $\hat{\beta}_{lasso}$.

7.8 Предположим, что для модели $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4} + \varepsilon_i$ выборочная корреляционная матрица регрессоров x_2, x_3, x_4 имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & r & r \\ r & 1 & r \\ r & r & 1 \end{pmatrix}$$

1. Найдите такое значение $r^* \in (-1; 1)$ коэффициента корреляции, при котором $\det C = 0$.
2. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы C при корреляции равной найденному r^*.
3. Найдите число обусловленности матрицы C при корреляции равной найденному r^*.
4. Сделайте вывод о наличии мультиколлинеарности в модели при корреляции равной найденному r^*.

7.9 Предположим, что для модели $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4} + \beta_5 x_{i5} + \varepsilon_i$ выборочная корреляционная матрица регрессоров x_2, x_3, x_4 и x_5 имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & r & r & r \\ r & 1 & r & r \\ r & r & 1 & r \\ r & r & r & 1 \end{pmatrix}$$

1. Найдите такое значение $r^* \in (-1; 1)$ коэффициента корреляции, при котором $\det C = 0$.
2. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы C при корреляции равной найденному r^*.
3. Найдите число обусловленности матрицы C при корреляции равной найденному r^*.
4. Сделайте вывод о наличии мультиколлинеарности в модели при корреляции равной найденному r^*.

7.10 Эконометресса Фатима оценивает модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$. Известно, что $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 76)$. Про регрессоры известно, что $\sum(x_i - \bar{x})^2 = 10$, $\sum(z_i - \bar{z})^2 = 20$, а выборочная корреляция между ними равна $\mathrm{sCorr}(x, z) = 0.9$.

Найдите $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2)$, $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_3)$

7.11 Эконометресса Алевтина перешла от исходных регрессоров к трём главным компонентам, z_1, z_2 и z_3. И далее посчитала коэффициенты вздутия дисперсии, VIF_j, для главных компонент. Чему они оказались равны?

7.12 С помощью трёх-кратной кросс-валидации выберите наилучшее из двух λ, 1 или 10, в гребневой регрессии $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$:

y_i	x_i
1	1
5	1
5	2

7.13 Известно, что выборочная корреляция между переменными x и z равна 0.9.

1. Найдите коэффициенты VIF для x и z в регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$.
2. В каких пределах могут лежать коэффициенты VIF для x и z в регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \beta_4 w_i + \varepsilon_i$?

7.14 Эконометресса Мишель построила регрессию, затем рассчитала прогноз и построила 90%-ый предиктивный интервал. И после этого с ужасом обнаружила, что в данных есть мультиколлинеарность. Тогда Мишель с целью уменьшения дисперсии прогнозов решила перейти к ортогональным переменным. Вместо трёх исходных регрессоров Мишель использовала три главных компоненты в новой регрессии.

1. Как изменятся прогнозы?
2. Как изменится 90%-ый предиктивный интервал?

7.15 Известна матрица выборочных ковариаций трёх переменных. Для удобства будем считать, что переменные уже центрированы.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Выразите первую и вторую главные компоненты через три исходных переменных.
2. Выразите первую и вторую главные компоненты, через три исходных переменных, если перед методом главных компонент переменные необходимо стандартизировать.

7.16 Василий строит регрессию количества съедаемого мороженого y_i (в кг) на константу и дамми-переменную d_i, равную 1 для мужчин и 0 для женщин. Однако в выборке у Василия только мужчины, поэтому Василий использует гребневую регрессию и LASSO.

1. Какие оценки β_1 и β_2 Василий получит в зависимости от штрафного коэффициента λ, если Василий не штрафует β_1? Какие прогнозы получит Василий?
2. Как изменится результат, если Василий штрафует за β_1?
3. Как изменятся ответы на предыдущие вопросы, если в выборке у Василия только женщины?

Глава 8

Гетероскедастичность

8.1 Что такое гетероскедастичность? Гомоскедастичность?

8.2 В модели $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ присутствует гетероскедастичность вида $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2 x_i^2$. Как надо преобразовать исходные регрессоры и зависимую переменную, чтобы устранить гетероскедастичность?

8.3 В модели $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ присутствует гетероскедастичность вида $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \lambda |x_i|$. Как надо преобразовать исходные регрессоры и зависимую переменную, чтобы устранить гетероскедастичность?

8.4 Известно, что после деления каждого уравнения регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ на x_i^2 гетероскедастичность ошибок была устранена. Какой вид имела дисперсия ошибок, $\mathrm{Var}(\varepsilon_i)$?

8.5 Известно, что после деления каждого уравнения регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ на $\sqrt{x_i}$ гетероскедастичность ошибок была устранена. Какой вид имела дисперсия ошибок, $\mathrm{Var}(\varepsilon_i)$?

8.6 Диаграмма рассеяния стоимости квартиры в Москве (в 1000$) и общей площади квартиры имеет вид:

Здесь виснет чанк кода!

```
ggplot(flats, aes(x = totsp, y = price)) + geom_point() +
  labs(x = "Общая площадь, кв. м.",
  y = "Цена квартиры, 1000\\$")
```

Какие подходы к оцениванию зависимости имеет смысл посоветовать исходя из данного графика?

8.7 По наблюдениям $x = (1, 2, 3)'$, $y = (2, -1, 3)'$ оценивается модель $y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon$. Ошибки ε гетероскедастичны и известно, что $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2 \cdot x_i^2$.

1. Найдите оценки $\hat{\beta}_{ols}$ с помощью МНК и их ковариационную матрицу.
2. Найдите оценки $\hat{\beta}_{gls}$ с помощью обобщенного МНК и их ковариационную матрицу.

8.8 Для линейной регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$ была выполнена сортировка наблюдений по возрастанию переменной x. Исходная модель оценивалась по разным частям выборки:

Выборка	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	RSS
$i = 1, \ldots, 30$	1.21	1.89	2.74	48.69
$i = 1, \ldots, 11$	1.39	2.27	2.36	10.28
$i = 12, \ldots, 19$	0.75	2.23	3.19	5.31
$i = 20, \ldots, 30$	1.56	1.06	2.29	14.51

Известно, что ошибки в модели являются независимыми нормальными случайными величинами с нулевым математическим ожиданием. Протестируйте ошибки на гетероскедастичность на уровне значимости 5%.

8.9 Для линейной регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$ была выполнена сортировка наблюдений по возрастанию переменной x. Исходная модель оценивалась по разным частям выборки:

Выборка	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	RSS
$i = 1, \ldots, 50$	1.16	1.99	2.97	174.69
$i = 1, \ldots, 21$	0.76	2.25	3.18	20.41
$i = 22, \ldots, 29$	0.85	1.81	3.32	3.95
$i = 30, \ldots, 50$	1.72	1.41	2.49	130.74

Известно, что ошибки в модели являются независимыми нормальными случайными величинами с нулевым математическим ожиданием. Протестируйте ошибки на гетероскедастичность на уровне значимости 1%.

8.10 Для линейной регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$ была выполнена сортировка наблюдений по возрастанию переменной x. Исходная модель оценивалась по разным частям выборки:

Выборка	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	RSS
$i = 1, \ldots, 30$	0.96	2.25	3.44	52.70
$i = 1, \ldots, 11$	1.07	2.46	2.40	5.55
$i = 12, \ldots, 19$	1.32	1.01	2.88	11.69
$i = 20, \ldots, 30$	1.04	2.56	4.12	16.00

Известно, что ошибки в модели являются независимыми нормальными случайными величинами с нулевым математическим ожиданием. Протестируйте ошибки на гетероскедастичность на уровне значимости 5%.

8.11 Для линейной регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$ была выполнена сортировка наблюдений по возрастанию переменной x. Исходная модель оценивалась по разным частям выборки:

Выборка	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	RSS
$i = 1, \ldots, 50$	0.93	2.02	3.38	145.85
$i = 1, \ldots, 21$	1.12	2.01	3.32	19.88
$i = 22, \ldots, 29$	0.29	2.07	2.24	1.94
$i = 30, \ldots, 50$	0.87	1.84	3.66	117.46

Известно, что ошибки в модели являются независимыми нормальными случайными величинами с нулевым математическим ожиданием. Протестируйте ошибки на гетероскедастичность на уровне значимости 5%.

8.12 Рассмотрим линейную регрессию $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$ по 50 наблюдениям. При оценивании с помощью МНК были получены результаты: $\hat{\beta}_1 = 1.21$, $\hat{\beta}_2 = 1.11$, $\hat{\beta}_3 = 3.15$, $R^2 = 0.72$.

Оценена также вспомогательная регрессия: $\hat{\varepsilon}_i^2 = \delta_1 + \delta_2 x_i + \delta_3 z_i + \delta_4 x_i^2 + \delta_5 z_i^2 + \delta_6 x_i z_i + u_i$. Результаты оценивания следующие: $\hat{\delta}_1 = 1.50$, $\hat{\delta}_2 = -2.18$, $\hat{\delta}_3 = 0.23$, $\hat{\delta}_4 = 1.87$, $\hat{\delta}_5 = -0.56$, $\hat{\delta}_6 = -0.09$, $R^2_{aux} = 0.36$

Известно, что ошибки в модели являются независимыми нормальными случайными величинами с нулевым математическим ожиданием. Протестируйте ошибки на гетероскедастичность на уровне значимости 5%.

8.13 Объясните, с какой целью используются стандартные ошибки в форме Уайта. Приведите развернутый ответ. Верно ли, что стандартные ошибки в форме Уайта позволяют

1. устранить гетероскедастичность?
2. корректно тестировать гипотезы относительно коэффициентов регрессии в условиях гетероскедастичности?

8.14 Объясните, с какой целью используются стандартные ошибки в форме Невье–Веста. Приведите развернутый ответ. Верно ли, что стандартные ошибки в форме Невье–Веста позволяют

1. устранить гетероскедастичность?
2. корректно тестировать гипотезы относительно коэффициентов регрессии в условиях гетероскедастичности?

8.15 Рассматривается модель $y_t = \beta_1 + \varepsilon_t$, где ошибки ε_t — независимые случайные величины с $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$ и $\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = t$. Найдите наиболее эффективную оценку неизвестного параметра β_1 в классе линейных по y и несмещённых оценок.

8.16 Рассматривается модель $y_t = \beta_1 + \varepsilon_t$, где ошибки ε_t — независимые случайные величины с $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$ и $\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = t^2$. Найдите наиболее эффективную оценку неизвестного параметра β_1 в классе линейных по y и несмещённых оценок.

8.17 Рассматривается модель $y_t = \beta_1 x_t + \varepsilon_t$, где ошибки ε_t — независимые случайные величины с $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$ и $\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = t$. Найдите наиболее эффективную оценку неизвестного параметра β_1 в классе линейных по y и несмещённых оценок.

8.18 Рассматривается модель $y_t = \beta_1 x_t + \varepsilon_t$, где ошибки ε_t — независимые случайные величины с $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$ и $\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = t^2$. Найдите наиболее эффективную оценку неизвестного параметра β_1 в классе линейных по y и несмещённых оценок.

8.19 Докажите, что в условиях гетероскедастичности МНК-оценки остаются несмещёнными.

8.20 Оценка коэффициентов обобщенного МНК имеет вид $\hat{\beta}_{GLS} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y$, где $V = \mathrm{Var}(\varepsilon)$. Совпадает ли оценка $\hat{\beta}_{GLS}$ с оценкой обычным МНК в условиях гомоскедастичности?

8.21 Модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ оценивается по трём наблюдениям, $y = (9, 3, 6)$, $x = (1, 2, 4)$. Имеется гетероскедастичность вида $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2 x_i^2$, ошибки ε_i нормально распределены.

1. Оцените β с помощью МНК, проигнорировав гетероскедастичность. Постройте 95% доверительный интервал для каждого коэффициента, проигнорировав гетероскедастичность.
2. Оцените β с помощью обобщенного МНК, учитывая гетероскедастичность. Постройте 95% доверительный интервал для каждого коэффициента, учитывая гетероскедастичности.

8.22 Рассмотрим модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$, где ошибки ε_i некоррелированы, $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma_i^2$. Предлагается два способа оценить коэффициенты модели:

WLS. Взвешенный метод наименьших квадратов. Поделим каждое уравнение $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ на σ_i. Затем обычным методом наименьших квадратов в преобразованной модели $y_i/\sigma_i = \beta_1 \cdot 1/\sigma_i + \beta_2 x_i/\sigma_i + \varepsilon_i/\sigma_i$ найдем оценки $\hat{\beta}_{WLS}$.

GLS. Обобщенный метод наименьших квадратов. Оценки $\hat{\beta}_{GLS}$ находим по формуле $\hat{\beta}_{GLS} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y$, где

$$V = \mathrm{Var}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

1. Докажите, что в матричном виде преобразование взвешенного МНК записывается как $V^{-1/2}y = V^{-1/2}X\beta + V^{-1/2}\varepsilon$.
2. Верно ли, что $\hat{\beta}_{WLS} = \hat{\beta}_{GLS}$?
3. Найдите $\mathbb{E}(\hat{\beta}_{WLS})$, $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_{WLGS})$
4. В явном виде выпишите $\hat{\beta}_{2,WLS}$.

8.23 Рассмотрим модель регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$, в которой ошибки ε_i независимы и имеют нормальное распределение $N(0, \sigma^2)$. Для $n = 200$ наблюдений найдите

1. вероятность того, что статистика Уайта окажется больше 10;
2. ожидаемое значение статистики Уайта;
3. дисперсию статистики Уайта.

8.24 Найдите число коэффициентов во вспомогательной регрессии, необходимой для выполнения теста Уайта, если число коэффициентов в исходной регрессии равно k, включая свободный член.

8.25 По 35 наблюдениям сотрудники НИИ оценили уравнение регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ и рассчитали остатки ε_i. После того они приступили к диагностике возможных недостатков модели, обнаружили гетероскедастичность и решили её побороть.

1. Самый младший научный сотрудник выдвинул предположение, что стандартное отклонение случайной составляющей может быть выражено так: $\sigma_{\varepsilon,i} = a x_i$, где a — неизвестный коэффициент. Каким образом нужно преобразовать исходное уравнение регрессии, чтобы избавиться от гетероскедастичности?
2. Профессор решил перепроверить результаты и оценил регрессию:
$$\hat{e}_i^2 = -0.3 + 0.08 x_i - 0.01 x_i^2, R^2 = 0.15.$$
Свидетельствует ли полученный профессором результат о наличии гетероскедастичности?

8.26 Пусть $y_t = \beta x_t + \varepsilon$ где $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$ и известно, что оценки для параметров $\tilde{\beta} = (\sum_{t=1}^n y_t) / (\sum_{t=1}^n x_t)$ являются наилучшими (в смысле минимума дисперсии) среди линейных несмещённых оценок параметра β. Чему равна в этом случае матрица ковариаций вектора ε с точностью до пропорциональности?

8.27 Для регрессии $y = X\beta + \varepsilon$ с $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon) = \Sigma \neq \sigma^2 I$, оцененной с помощью обобщённого метода наименьших квадратов, найдите ковариационную матрицу $\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_{GLS}, \varepsilon)$

8.28 Найдите наиболее эффективную оценку коэффициента β_1 для модели $y_i = \beta + \varepsilon$, $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$, $\mathbb{E}(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2 / x_i$, $x_i > 0$ в классе линейных несмещённых оценок

8.29 Исследователь оценил регрессионную модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \beta_4 w_i + \varepsilon_i$ и провёл диагностику различных проблемных явлений. Результаты его стараний приведены ниже:

Здесь виснет чанк кода!

```
n <- 200
x <- rnorm(n)
z <- rnorm(n)
w <- rnorm(n)
eps <- abs(x2)*rnorm(n)
y <- 2 + 3 * x - 3 * z + 1 * w + eps
model <- lm(y ~ x + z + w)
resid <- resid(model)
plot1 <- qplot(x, abs(resid),
  xlab = "Переменная $x$",
  ylab = "Модуль остатков")
plot2 <- qplot(head(resid, -1),
      tail(resid, -1),
      xlab = "Остаток $\\varepsilon_{t-1}$",
      ylab = "Остаток $\\varepsilon_{t}$")
grid.arrange(plot1, plot2, ncol = 2)
```

$VIF_x = 1.06, VIF_z = 1.07, VIF_w = 1.02$

1. Определите, какие проблемные явления обнаружил исследователь. Обоснуйте свой ответ.
2. Найдите коэффициент детерминации для регрессии $x_i = \gamma_1 + \gamma_2 z_i + \gamma_3 w_i + u_i$.

8.30 В модели $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$ предполагается гетероскедастичность вида $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \exp(\gamma_1 + \gamma_2 x_i)$ и нормальность ошибок.

1. Сформулируйте гипотезу о гомоскедастичности с помощью коэффициентов.
2. Выведите в явном виде оценку максимального правдоподобия при предположении о гомоскедастичности.
3. Выпишите условия первого порядка для оценки максимального правдоподобия без предположения о гомоскедастичности.
4. Выведите в явном виде формулу для LM теста множителей Лагранжа.

8.31 Рассмотрим модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$, где $y = (1, 3, 3)'$ и $x = (0, 0, 1)$.

1. Найдите $\hat{\beta}$ и $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta})$ в предположении гомоскедастичности.
2. Найдите оценку Уайта ковариационной матрицы $\widehat{\mathrm{Var}}_{White}(\hat{\beta})$.
3. Найдите оценку HC3 ковариационной матрицы $\widehat{\mathrm{Var}}_{HC3}(\hat{\beta})$.
4. Найдите оценку взвешенного МНК, $\hat{\beta}_{WLS}$, и оценку её ковариационной матрицы, $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_{WLS})$, в предположении, что $\mathrm{Var}(\varepsilon_i|X) = \sigma^2 \cdot (4 + 5x_i)$.

Подсказка: формулы для разных типов оценок ковариационной матрицы можно найти, например, в [Zei04].

8.32 Имеются наблюдения

	x	y
1	0.00	-1.00
2	2.00	1.00
3	2.00	0.00

Предположим, что $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ и регрессоры неслучайные.

Для удобства приведены матрицы

$$X'X = \begin{pmatrix} 3.00 & 4.00 \\ 4.00 & 8.00 \end{pmatrix},\ (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.00 & -0.50 \\ -0.50 & 0.38 \end{pmatrix},\ (X'X)^{-1}X' = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ -0.50 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$$

А также:

$$H = X(X'X)^{-1}X' = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.50 & 0.50 \\ 0.00 & 0.50 & 0.50 \end{pmatrix},\ y'y = 2,\ X'y = \begin{pmatrix} 0.00 \\ 2.00 \end{pmatrix}$$

1. Найдите оценки коэффициентов с помощью МНК и оценку их ковариационной матрицы предполагая независимость и гомоскедастичность ошибок.
2. Найдите две робастных к гетероскедастичности оценки ковариационной матрицы оценок МНК: в форме Уайта и в форме HC3.
3. Предположим, что дисперсии первых двух наблюдений равны, а дисперсия третьего наблюдения в 4 раза больше. Найдите оценки взвешенного МНК и оценку их ковариационной матрицы.
4. Предположим, что дисперсии первых двух наблюдений равны, а дисперсия третьего наблюдения в 4 раза больше. Также предположим, что $\mathrm{Corr}(\varepsilon_2, \varepsilon_3) = 0.5$, а остальные корреляции между

ошибками равны 0. Найдите оценки обобщенного МНК и оценку их ковариационной матрицы.

5. Аккуратно объясните, с какой целью используются робастные оценки ковариационной матрицы, например, оценка Уайта. Ответ «для борьбы с гетероскедастичностью» не оценивается. Как конкретно и при каких условиях можно использовать робастные оценки ковариационной матрицы?
6. Аккуратно объясните, с какой целью вместо МНК используется обобщенный МНК. Ответ «для борьбы с гетероскедастичностью» не оценивается. Что конкретно даёт обобщенный МНК, чего не даёт обычный МНК и при каких условиях?

8.33 Предположим, что y_i независимы, нормально распределены и имеют одинаковое математическое ожидание μ.

1. Предложите эффективную оценку для μ, предполагая, что y_i гомоскедастичны.
2. Предложите эффективную оценку для μ, предполагая, что $Var(y_i) = 1/i^2$.

8.34 Рассмотрим модель со стохастическими регрессорами $y = X\beta + \varepsilon$. При этом $\mathbb{E}(\varepsilon|X) = 0$, как и положено, однако ошибки ε хитро зависят друг от друга, и поэтому $\mathrm{Var}(\varepsilon|X)$ есть некоторая известная недиагональная матрица V. Несмотря на нарушение предпосылок теоремы Гаусса-Маркова Чак Норрис использует обычный МНК для получения оценок $\hat{\beta}$.

Найдите $\mathbb{E}(\hat{\beta}|X)$, $\mathrm{Var}(\hat{\beta}|X)$ и $\mathrm{Cov}(\hat{y}, \hat{\varepsilon}|X)$.

8.35 Рассмотрим модель $y_i = 2 + 3x_i + \varepsilon_i$. Предположим, что $x_i \sim \mathcal{N}(5; 9)$ и $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0; 1)$ и независимы. Исследователь Вениамин утверждает, что эту модель можно записать в виде

$$y_i^* = \beta_1 + \beta_2 x_i^* + \varepsilon_i^*,$$

где $y_i^* = \exp(y_i)$, $x_i^* = \exp(x_i)$ и регрессор x_i^* некоррелирован с ошибкой ε_i^*.

Если Вениамин прав, то найдите:

1. коэффициенты β_1 и β_2;

2. условную по x_i^* и безусловную дисперсию ошибок ε_i^*.
3. Почему при гетероскедастичности иногда помогает переход к логарифмам?

Подсказка: Если величина Z имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, то случайная величина $W = \exp(Z)$ имеет лог-нормальное распределение и $\mathbb{E}(W) = \exp(\mu + \sigma^2/2)$, $\operatorname{Var}(W) = (\exp(\sigma^2) - 1)\exp(2\mu + \sigma^2)$.

8.36 Эконометресса Прасковья использует традиционную оценку ковариационной матрицы, а эконометресса Мелони — оценку Уайта.

Какие оценки дисперсии $\hat\beta_1$ и формулы для t-статистики получат Прасковья и Мелони в модели $y_i = \beta_1 + u_i$?

8.37 Эконометресса Прасковья использует традиционную оценку ковариационной матрицы, а эконометресса Мелони — оценку Уайта.

Обе эконометрессы оценивают модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 d_i + u_i$, где d_i — дамми-переменная, равна 0 или 1. Дамми-переменная делит выборку на две части. Обозначим количество наблюдений в «нулевой» части как n_0, среднее — как $\bar y_0$, и общую сумму квадратов — как TSS_0. Аналогичные величины для «единичной» части выборки — n_1, $\bar y_1$ и TSS_1. И для всей выборки — n, $\bar y$, TSS.

1. Найдите оценки $\hat\beta_1$ и $\hat\beta_2$.
2. Найдите оценки $\widehat{\operatorname{Var}}(\hat\beta_1)$ и $\widehat{\operatorname{Var}}_W(\hat\beta_1)$. Верно ли, что $\widehat{\operatorname{Var}}_W(\hat\beta_1) \geqslant \widehat{\operatorname{Var}}(\hat\beta_1)$?
3. Найдите оценки $\widehat{\operatorname{Var}}(\hat\beta_2)$ и $\widehat{\operatorname{Var}}_W(\hat\beta_2)$. Верно ли, что $\widehat{\operatorname{Var}}_W(\hat\beta_2) \geqslant \widehat{\operatorname{Var}}(\hat\beta_2)$?
4. Найдите оценки $\widehat{\operatorname{Cov}}(\hat\beta_1, \hat\beta_2)$ и $\widehat{\operatorname{Cov}}_W(\hat\beta_1, \hat\beta_2)$.
5. Найдите оценки $\widehat{\operatorname{Var}}(\hat\beta_1 + \hat\beta_2)$ и $\widehat{\operatorname{Var}}_W(\hat\beta_1 + \hat\beta_2)$.

8.38 Храбрый исследователь Василий строит регрессию переменной $y = (2, 8, 8)'$ на переменную $x = (1, 2, 3)'$ без константы, то есть $\hat y_i = \hat\beta x_i$.

1. Найдите оценку коэффициента $\hat\beta$ с помощью МНК;
2. Найдите матрицу-шляпницу H, превращающую y в $\hat y$, $\hat y = Hy$.
3. Оцените $\operatorname{Var}(\hat\beta)$ без корректировки на потенциальную гетероскедастичность;

4. Оцените $\text{Var}(\hat{\beta})$ используя корректировку HC0, то есть с помощью оценки дисперсии случайной ошибки $\widehat{\text{Var}}(u_i) = \hat{u}_i^2$;
5. Оцените $\text{Var}(\hat{\beta})$ используя корректировку HC1 (как по умолчанию в STATA или с опцией Huber-White with d.f. Adjustment в Eviews), то есть с помощью оценки дисперсии случайной ошибки $\widehat{\text{Var}}(u_i) = \hat{u}_i^2 \cdot \frac{n}{n-k}$;
6. Оцените $\text{Var}(\hat{\beta})$ используя корректировку HC3 (как по умолчанию в пакете sandwich в R), то есть с помощью оценки дисперсии случайной ошибки $\widehat{\text{Var}}(u_i) = \hat{u}_i^2 \cdot \frac{1}{(1-H_{ii})^2}$;

8.39 Храбрый исследователь Василий строит регрессию переменной $y = (2, 4, 0)'$ на переменную $x = (1, 2, 3)'$ и константу, то есть $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i$.

1. Найдите оценку коэффициентов $\hat{\beta}$ с помощью МНК;
2. Найдите матрицу-шляпницу H, превращающую y в $\hat{y}$, $\hat{y} = Hy$.
3. Оцените $\text{Var}(\hat{\beta})$ без корректировки на потенциальную гетероскедастичность;
4. Оцените $\text{Var}(\hat{\beta})$ используя корректировку HC0, то есть с помощью оценки дисперсии случайной ошибки $\widehat{\text{Var}}(u_i) = \hat{u}_i^2$;
5. Оцените $\text{Var}(\hat{\beta})$ используя корректировку HC1 (как по умолчанию в STATA или с опцией Huber-White with d.f. Adjustment в Eviews), то есть с помощью оценки дисперсии случайной ошибки $\widehat{\text{Var}}(u_i) = \hat{u}_i^2 \cdot \frac{n}{n-k}$;
6. Оцените $\text{Var}(\hat{\beta})$ используя корректировку HC3 (как по умолчанию в пакете sandwich в R), то есть с помощью оценки дисперсии случайной ошибки $\widehat{\text{Var}}(u_i) = \hat{u}_i^2 \cdot \frac{1}{(1-H_{ii})^2}$;

8.40 Эконометр Антоний исследует зависимость надоя коров в литрах в год, y_i, от дамми-переменной x_i, отвечающей за прослушивание коровами ежедневно Девятой симфонии, $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i$. Антоний раздобыл следующие данные:

Подвыборка	Размер	$\sum y_i$	$\sum y_i^2$
$x_i = 0$	$n_0 = 100$	200	4000
$x_i = 1$	$n_1 = 100$	300	5000

1. Найдите МНК-оценки β_1 и β_2;

2. Постройте 95%-ый доверительный интервал для β_2 предполагая гомоскедастичность u_i;
3. Найдите робастную к гетероскедастичности оценку $\widehat{\mathrm{Var}}_{HC0}(\hat{\beta})$;
4. Найдите робастную к гетероскедастичности оценку $\widehat{\mathrm{Var}}_{HC3}(\hat{\beta})$;
5. Постройте 95%-ый доверительный интервал для β_2 с помощью скорректированной $se_{HC0}(\hat{\beta}_2)$;
6. Дополнительно предположив, что $\mathrm{Var}(u_i|x_i) = \sigma^2(1 + 3x_i)$, найдите эффективную оценку $\hat{\beta}_2$ и постройте доверительный интервал для неё.

8.41 В оригинальном тесте Бройша-Пагана на гетероскедастичность два шага. Сначала строится основная регрессия y_i на некоторые регрессоры и получаются остатки $\hat{u}_i$. На втором шаге строится регрессия квадрата остатков $\hat{u}_i$ на переменные, от которых потенциально зависит условная дисперсия $\mathrm{Var}(u_i|Z)$. Статистика Бройша-Пагана считается как $BP = ESS/2$, где ESS — объяснённая сумма квадратов регрессии второго шага. Оригинальный тест Уайта считается как $W = nR^2$, где R^2 — коэффициент детерминации регрессии второго шага.

1. Найдите отношение $\frac{nR^2}{ESS/2}$;
2. Найдите предел по вероятности $\mathrm{plim}\, \frac{nR^2}{ESS/2}$;
3. Какое распределение имеют статистики BP и W?
4. Какой вид имеет статистика множителей Лагранжа?

распотрошить статью BP на задачу, статья о похожести BP и W, отдельно Коэнкера про студентизированную версию

Глава 9

Ошибки спецификации

9.1 По 25 наблюдениям при помощи метода наименьших квадратов оценена модель $\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x + \hat{\beta}_3 z$, для которой $RSS = 73$. При помощи вспомогательной регрессии $\hat{\hat{y}} = \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 x + \hat{\gamma}_3 z + \hat{\gamma}_4 \hat{y}^2$, для которой $RSS = 70$, выполните тест Рамсея на уровне значимости 5%.

9.2 По 20 наблюдениям при помощи метода наименьших квадратов оценена модель $\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x + \hat{\beta}_3 z$, для которой $R^2 = 0.7$. При помощи вспомогательной регрессии $\hat{\hat{y}} = \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 x + \hat{\gamma}_3 z + \hat{\gamma}_4 \hat{y}^2$, для которой $R^2 = 0.75$, выполните тест Рамсея на уровне значимости 5%.

9.3 По 30 наблюдениям при помощи метода наименьших квадратов оценена модель $\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x + \hat{\beta}_3 z$, для которой $RSS = 150$. При помощи вспомогательной регрессии $\hat{\hat{y}} = \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 x + \hat{\gamma}_3 z + \hat{\gamma}_4 \hat{y}^2 + \hat{\gamma}_5 \hat{y}^3$, для которой $RSS = 120$, выполните тест Рамсея на уровне значимости 5%.

9.4 По 35 наблюдениям при помощи метода наименьших квадратов оценена модель $\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x + \hat{\beta}_3 z$, для которой $R^2 = 0.7$. При помощи вспомогательной регрессии $\hat{y} = \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 x + \hat{\gamma}_3 z + \hat{\gamma}_4 \hat{y}^2 + \hat{\gamma}_5 \hat{y}^3$, для которой $R^2 = 0.8$, выполните тест Рамсея на уровне значимости 5%.

9.5 Используя 80 наблюдений, исследователь оценил две конкурирующие модели: $\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x + \hat{\beta}_3 z$, в которой $RSS_1 = 36875$ и $\widehat{\ln y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x + \hat{\beta}_3 z$, в которой $RSS_2 = 122$.

Выполнив преобразование $y_i^* = y_i / \sqrt[n]{\prod y_i}$, исследователь также оценил две вспомогательные регрессии: $\hat{y}^* = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x + \hat{\beta}_3 z$, в которой $RSS_1^* = 239$ и $\widehat{\ln y^*} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x + \hat{\beta}_3 z$, в которой $RSS_2^* = 121$.

Завершите тест Бокса-Кокса на уровне значимости 5%.

9.6 Используя 40 наблюдений, исследователь оценил две конкурирующие модели: $\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x + \hat{\beta}_3 z$, в которой $RSS_1 = 250$ и $\widehat{\ln y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x + \hat{\beta}_3 z$, в которой $RSS_2 = 12$.

Выполнив преобразование $y_i^* = y_i / \sqrt[n]{\prod y_i}$, исследователь также оценил две вспомогательные регрессии: $\hat{y}^* = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x + \hat{\beta}_3 z$, в которой $RSS_1^* = 20$ и $\widehat{\ln y}^* = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x + \hat{\beta}_3 z$, в которой $RSS_2^* = 25$.

Завершите тест Бокса-Кокса на уровне значимости 5%.

9.7 Почему при реализации теста Бокса-Кокса на компьютере предпочтительнее использовать формулу $y_i^* = \exp(\ln y_i - \sum \ln y_i / n)$, а не формулу $y_i^* = y_i / \sqrt[n]{\prod y_i}$?

9.8 Обследовав выборку из 27 домохозяйств, исследователь оценил уравнение регрессии:

$$\frac{\widehat{Exp_i}}{Size_i} = 926 + 235 \frac{1}{Size_i} + 0.3 \frac{Income_i}{Size_i}$$

где Exp_i — месячные затраты i-го домохозяйства на питание в рублях, $Income_i$ — месячный доход домохозяйства (также в рублях), $Size_i$ — число членов домохозяйства. Известен коэффициент детерминации, $R^2 = 0.3$.

1. Каково, согласно оценённой модели, ожидаемое различие в затратах на питание между двумя домохозяйствами с одинаковым доходом, первое из которых больше второго на одного человека?
2. Известно, что нормировка переменных модели на размер семьи $Size_i$ была проведена с целью устранения гетероскедастичности в модели $Exp_i = \beta_1 + \beta_2 Size_i + \beta_3 Income_i + \varepsilon_i$. Какое предположение сделал исследователь о виде гетероскедастичности?
3. Для проверки правильности выбранной спецификации было оценено ещё одно уравнение:

$$\widehat{\frac{\widehat{Exp_i}}{Size_i}} = 513 + 1499 \frac{1}{Size_i} + 0.5 \frac{Income_i}{Size_i} - 0.001 \left(\frac{\widehat{Exp_i}}{Size_i} \right)^2$$

Известно, что $R^2 = 0.4$. Даёт ли эта проверка основание считать модель исследователя неверно специфицированной? Используйте уровень значимости 1%

9.9 Мартовский Заяц и Безумный Шляпник почти всё время пьют чай. Известно, что количество выпитого за день чая (в чашках) зависит от количества пирожных (в штуках) и печенья (в штуках). Алиса, гостившая у героев в течение 25 дней, заметила, что если оценить зависимость выпитого чая от закуски для Мартовского Зайца и Шляпника, то получится регрессия с $RSS = 11.5$:

$$\widehat{Tea}_i = 6 + 0.5Biscuit_i + 1.5Cake_i$$

Чтобы понять, удачную ли модель она построила, Алиса оценила ещё одну регрессию с $RSS = 9.5$:

$$\widehat{\widehat{Tea}}_i = 12.7 + 0.65Biscuit_i - 0.8Cake_i - 0.59\widehat{Tea}_i^2 + 0.03\widehat{Tea}_i^3$$

Помогите Алисе понять, верную ли спецификацию модели она выбрала:

1. Проведите подходящий тест.
2. Сформулируйте основную и альтернативную гипотезы.
3. Алиса решила проверить первоначальную короткую модель на наличие гетероскедастичности с помощью теста Уайта. Выпишите уравнение регрессии, которое она должна оценить.

Глава 10

Метод инструментальных переменных

Экзогенность, $\mathbb{E}(\varepsilon \mid x) = 0$
Предопределённость, $\mathbb{E}(\varepsilon_t \mid x_t) = 0$ для всех t

10.1 Настоящая зависимость между y_i и x_i имеет вид $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$, где ε_i независимы и равновероятно принимают значения -1 и $+1$. Эконометресса Аврора оценивает коэффициент β по двум наблюдениям. Аврора не знает чему равны настоящие x_i, вместо них она наблюдает значения $x_i^* = x_i + u_i$, где u_i — ошибки измерения, поэтому она строит регрессию y_i на x_i^*. Ошибки измерения регрессора, u_i, независимы и равновероятно принимают значения -1 и $+1$. Величины u_i и ε_j независимы.

1. Выведите явную формулу для оценки $\hat{\beta}$.
2. Чему равно u_i^2? Чему равно ε_i^2?
3. Найдите $\mathbb{E}(\hat{\beta})$, если $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.
4. Найдите $\mathbb{E}(\hat{\beta})$, если $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$.
5. Интуитивно объясните, как меняется смещение с ростом расстояния между x_1 и x_2.

10.2 Известна совместная функция плотности пары величин X_i, Y_i

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, \ x \in [0; 1], \ y \in [0; 1] \\ 0, \ \text{иначе} \end{cases}$$

Найдите

1. $\mathbb{E}(X_i)$, $\mathbb{E}(Y_i)$, $\text{Var}(X_i)$, $\text{Var}(Y_i)$, $\text{Cov}(X_i, Y_i)$;
2. $\mathbb{E}(Y_i \mid X_i)$, $\mathbb{E}(X_i \mid Y_i)$;
3. Вася оценивает модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ по огромному количеству наблюдений. Чему примерно у него окажутся равны $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\sigma}^2$, $\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_2)$? Чему равно $\mathbb{E}(\hat{\beta}_2)$?

10.3 Задан совместный закон распределения случайных величин x и ε:

	$\varepsilon = -2$	$\varepsilon = -1$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = -2$
$x = 1$	0.2	0.3	0	0
$x = 2$	0	0	0.3	0.2

Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon)$, $\mathbb{E}(\varepsilon \mid x)$, $\text{Cov}(\varepsilon, x)$, $\text{Cov}(\varepsilon, x|x)$

10.4 Приведите примеры дискретных случайных величин ε и x, таких, что

1. $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$, $\mathbb{E}(\varepsilon \mid x) = 0$, но величины зависимы. Чему в этом случае равно $\text{Cov}(\varepsilon, x)$?
2. $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$, $\text{Cov}(\varepsilon, x) = 0$, но $\mathbb{E}(\varepsilon \mid x) \neq 0$. Зависимы ли эти случайные величины?

10.5 Эконометресса Агнесса хочет оценить модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$, но, к сожалению, величина x_i ненаблюдаема. Вместо неё доступна величина x_i^*. Величина x_i^* содержит ошибку измерения, $x_i^* = x_i + a_i$. Известно, что $\text{Var}(x_i) = 9$, $\text{Var}(a_i) = 4$, $\text{Var}(\varepsilon_i) = 1$. Величины x_i, a_i и ε_i независимы.

Агнесса оценивает регрессию $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i^*$ с помощью МНК.

1. Найдите $\text{plim}\, \hat{\beta}_2$.
2. Являются ли оценки, получаемые Агнессой, состоятельными?

10.6 ошибка измерения и коррелированная инструментальная ?

допридумывать задачу на инструментальные

10.7 Эконометресса Анжелла хочет оценить модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 w_i + \varepsilon_i$, но, к сожалению, величина w_i ненаблюдаема. Известно, что $\text{Var}(x_i) = 9$, $\text{Var}(w_i) = 4$, $\text{Var}(\varepsilon_i) = 1$ и $\text{Cov}(x_i, w_i) = -2$. Случайная составляющая не коррелированна с регрессорами.

За неимением w_i Анжелла оценивает регрессию $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i$ с помощью МНК.

1. Найдите $\operatorname{plim} \hat{\beta}_2$.
2. Являются ли оценки, получаемые Агнессой, состоятельными?

10.8 Насяльника хочет оценить модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$, к сожалению, величина x_i ненаблюдаема. Вместо неё доступны x_i^a, померянный Равшаном, и x_i^b, померянный Джумшутом. Естественно, x_i^a и x_i^b содержат ошибку измерения, $x_i^a = x_i + a_i$, $x_i^b = x_i + b_i$. Известно, что $\operatorname{Var}(x_i) = \sigma_x^2$, $\operatorname{Var}(a_i) = \sigma_a^2$, $\operatorname{Var}(b_i) = \sigma_b^2$, $\operatorname{Var}(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2$. Величины x_i, a_i, b_i и ε_i независимы.

1. Найдите асимптотическое смещение оценки $\hat{\beta}_2$ для следующих случаев:
   (a) С помощью МНК оценивается модель $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i^a$.
   (b) С помощью МНК оценивается модель $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i^b$.
   (c) С помощью МНК оценивается модель $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \frac{x_i^a + x_i^b}{2}$
   (d) Методом инструментальных переменных оценивается модель $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i^a$, в роли инструмента выступает x_i^b.
   (e) Методом инструментальных переменных оценивается модель $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i^b$, в роли инструмента выступает x_i^a.
2. Какой из методов даёт наибольшее смещение? Наименьшее смещение?
3. Какой из вариантов применения инструментальных переменных предпочтительнее с точки зрения дисперсии получаемой оценки $\hat{\beta}_2$?

10.9 Наблюдения представляют собой случайную выборку. Известна истинная ковариационная матрица и математическое ожидание:

$$\operatorname{Var}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 16 \end{pmatrix},\ \mathbb{E}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

1. Найдите $\operatorname{plim} \hat{\beta}_1$ и $\operatorname{plim} \hat{\beta}_2$ в регрессии $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i$.
2. Найдите $\operatorname{plim} \hat{\beta}_1$ и $\operatorname{plim} \hat{\beta}_2$ в регрессии $\hat{x}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 y_i$.

10.10 Наблюдения представляют собой случайную выборку. Известна истинная ковариационная матрица:

$$\operatorname{Var}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 1 & 16 & -1 \\ 2 & -1 & 25 \end{pmatrix}$$

1. Найдите plim $\hat{\beta}_2$ в модели $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 z_i$.
2. Найдите plim $\hat{\mu}_2$ в модели $\hat{x}_i = \hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2 z_i$.
3. Найдите plim $\hat{\gamma}_2$ в модели $\hat{y}_i = \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 x_i + \hat{\gamma}_3 z_i$.

10.11 Рассмотрим классическую линейную регрессионную модель:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$$

1. Огюст Люмьер утверждает, что при нестохастических регрессорах математические ожидания $\mathbb{E}(y_i)$ различны. Луи Люмьер утверждает, что при стохастических регрессорах и предпосылке о том, что наблюдения являются случайной выборкой, все $\mathbb{E}(y_i)$ равны между собой. Кто из них прав?
2. Помогите Луи Люмьеру найти plim $\hat{\varepsilon}_1$ и plim $\hat{y}_1$.

10.12 Рассмотрим классическую линейную регрессионную модель:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$$

Наблюдения является случайной выборкой. Истинная коварицция $\mathrm{Cov}(x_i, z_i)$ равна нулю. Мы оцениваем с помощью МНК две регрессии.

Регрессия 1:

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i + \hat{\beta}_3 z_i$$

Регрессия 2:

$$\hat{y}_i = \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 x_i$$

1. Верно ли, что $\hat{\beta}_2$ совпадает с $\hat{\gamma}_2$?
2. Верно ли, что plim $\hat{\beta}_2 =$ plim $\hat{\gamma}_2$?

10.13 Наблюдения представляют собой случайную выборку. Зависимые переменные y_{t1} и y_{t2} находятся из системы:

$$\begin{cases} y_{t1} = \beta_{11} + \beta_{12} x_t + \varepsilon_{t1} \\ y_{t2} = \beta_{21} + \beta_{22} z_t + \beta_{23} y_{t1} + \varepsilon_{t2} \end{cases},$$

где вектор ошибок ε_t имеет совместное нормальное распределение

$$\varepsilon_t \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Эконометресса Анжела оценивает с помощью МНК первое уравнение, а эконометресса Эвридика — второе.

1. Найдите пределы по вероятности получаемых ими оценок.
2. Будут ли оценки состоятельными?

10.14 Эконометресса Венера оценивает регрессию

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i,$$

А на самом деле $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 x_i^2 + w_i$, причём $x_i \sim \mathcal{N}(0; 1)$ и ошибки $w_i \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2)$. Все остальные предпосылки теоремы Гаусса-Маркова выполнены.

1. Будут ли оценки $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$, получаемые Венерой, несмещёнными?
2. Будут ли оценки $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$, получаемые Венерой, состоятельными?

10.15 Вектора (x_1, u_1), (x_2, u_2), …независимы и одинаково распределены. Также известно, что $x_i \sim \mathcal{N}(10; 9)$ и $\mathbb{E}(u_i|x_i) = 0$.

Найдите plim $\left(\frac{1}{n}x'x\right)^{-1}$, plim $\frac{1}{n}x'u$ и plim$(x'x)^{-1}x'u$

10.16 Возможно ли, что $\mathbb{E}(x_i|u_i) = 0$ и $\mathbb{E}(u_i|x_i) = 0$, но при этом x_i и u_i зависимы?

10.17 В некотором интституте на некотором факультете задумали провести эксперимент: раздать студентам учебники разных цветов случайным образом и посмотреть на итоговую успеваемость по эконометрике. Учебники есть двух цветов: зелёненькие и красненькие. Поэтому модель имеет вид:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 green_i + u_i$$

Здесь y_i — результат по эконометрике, $green_i$ — дамми-переменная на зелёный учебник и u_i — прочие характеристики студента. Зелёные и красненькие учебники планировалось раздавать равновероятно. Однако библиотекарь всё прошляпил и разрешил студентам самим выбирать учебник, какой понравится. В результате вместо переменной $green_i$ получилась переменная $green_i^*$. Известно, что $\mathbb{E}(green_i^*) = \alpha$ и Cov$(green_i^*, u_i) = \gamma$.

Де-факто оценивалась модель

$$\hat{y}_i = \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 green_i^*$$

1. Найдите $\operatorname{plim}\hat{\theta}_1$, $\operatorname{plim}\hat{\theta}_2$.
2. Найдите $\mathbb{E}\hat{\theta}_1$, $\mathbb{E}\hat{\theta}_2$.

10.18 Придумайте такие случайные величины x_1, x_2, u_1, что x_1 и x_2 независимы и одинаково распределены, причём $\mathbb{E}(u_1|x_1) = 0$, а $\mathbb{E}(u_1|x_1, x_2) \neq 0$.

10.19 Рассмотрим классическую парную регрессию со стохастическим регрессором. Всего три наблюдения:

y_1	x_1
y_2	x_2
y_3	x_3

1. Соедините линиями независимые случайные величины.
2. Соедините линиями одинаково распределённые случайные величины.

10.20 Исследователь Кирилл хочет посчитать вероятность того, что температура за окном z больше нуля. Кирилл видит показания градусника, $z + \varepsilon$, где ε — ошибка измерения. Случайные величины z и ε независимы, ошибка измерения ε распределена симметрично около нуля. Кирилл задумался о поведении функции $h(t) = \mathbb{P}(z > 0|z + \varepsilon = t)$.

1. Верно ли, что $h(t)$ неубывающая функция?
2. Найдите $h(t)$ если z и ε имеют совместное нормальное распределение с $z \sim \mathcal{N}(\mu_z, \sigma_z^2)$, $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0; 1)$.

Глава 11

Временные ряды

11.1 Что такое автокорреляция?

11.2 На графике представлены данные по уровню озера Guро́н в футах в 1875-1972 годах:

```
level <- LakeHuron
df <- tibble(level, obs = 1875:1972)
n <- nrow(df) # used later for answers
v.acf <- acf(level, plot = FALSE)$acf
v.pacf <- pacf(level, plot = FALSE)$acf
acfs.df <- tibble(lag = c(1:15, 1:15),
  acf = c(v.acf[2:16], v.pacf[1:15]),
  acf.type = rep(c("ACF", "PACF"), each = 15))
model <- arima(level, order = c(1, 0, 1))
resids <- model$residuals
resid.acf <- acf(resids, plot = FALSE)$acf
ggplot(df, aes(x = obs, y = level)) + geom_line() +
  labs(x = "Год", y = "Уровень озера (футы)")
```

График автокорреляционной и частной автокорреляционной функций:

Здесь виснет чанк кода!

```
ggplot(acfs.df, aes(x = lag, y = acf, fill = acf.type)) +
  geom_bar(position = "dodge", stat = "identity") +
 xlab("Лаг") + ylab("Корреляция") +
 guides(fill = guide_legend(title = NULL))+
 geom_hline(yintercept = 1.96/sqrt(nrow(df)))+
 geom_hline(yintercept = -1.96/sqrt(nrow(df)))
```

1. Судя по графикам, какие модели класса ARMA или ARIMA имеет смысл оценить?
2. По результатам оценки некоей модели ARMA с двумя параметрами, исследователь посчитал оценки автокорреляционной функции для остатков модели. Известно, что для остатков модели первые три выборочные автокорреляции равны соответственно 0.0047, -0.0129, -0.0630. С помощью подходящей статистики проверьте гипотезу о том, что первые три корреляции ошибок модели равны нулю.

11.3 Винни-Пух пытается выявить закономерность в количестве придумываемых им каждый день ворчалок. Винни-Пух решил разобраться, является ли оно стационарным процессом, для этого он оценил регрессию

$$\Delta\hat{y}_t = \underset{(0.5)}{4.5} - \underset{(0.1)}{0.4}\,y_{t-1} + \underset{(0.5)}{0.7}\,\Delta y_{t-1}$$

Из-за опилок в голове Винни-Пух забыл, какой тест ему нужно провести, то ли Доктора Ватсона, то ли Дикого Фуллера.

1. Аккуратно сформулируйте основную и альтернативную гипотезы.
2. Проведите подходящий тест на уровне значимости 5%.
3. Сделайте вывод о стационарности ряда.
4. Почему Сова не советовала Винни-Пуху пользоваться широко применяемым в Лесу t-распределением?

11.4 Рассматривается модель $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t1} + \ldots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t$. Ошибки ε_t гомоскедастичны, но в них возможно присутствует автокорреляция первого порядка, $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$. При известном числе наблюдений T на уровне значимости 5% сделайте статистический вывод о наличии автокорреляции в следующих случаях:

1. $T = 25$, $k = 2$, $DW = 0.8$;
2. $T = 30$, $k = 3$, $DW = 1.6$;
3. $T = 50$, $k = 4$, $DW = 1.8$;
4. $T = 100$, $k = 5$, $DW = 1.1$.

11.5 По 100 наблюдениям была оценена модель линейной регрессии $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$. Оказалось, что $RSS = 120$, $\hat{\varepsilon}_1 = -1$, $\hat{\varepsilon}_{100} = 2$, $\sum_{t=2}^{100} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1} = -50$. Найдите DW и ρ.

11.6 Применима ли статистика Дарбина-Уотсона для выявления автокорреляции в следующих моделях:

1. $y_t = \beta_1 x_t + \varepsilon_t$;
2. $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$;
3. $y_t = \beta_1 + \beta_2 y_{t-1} + \varepsilon_t$;
4. $y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 y_{t-1} + \varepsilon_t$;
5. $y_t = \beta_1 t + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$;
6. $y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 x_t + \beta_4 x_{t-1} + \varepsilon_t$?

11.7 По 21 наблюдению была оценена модель линейной регрессии $\underset{(se)}{\hat{y}} = \underset{(0.3)}{1.2} + \underset{(0.18)}{0.9} \cdot y_{t-1} + \underset{(0.01)}{0.1} \cdot t$, $R^2 = 0.6$, $DW = 1.21$. Протестируйте гипотезу об отсутствии автокорреляции ошибок на уровне значимости 5%.

11.8 По 24 наблюдениям была оценена модель линейной регрессии $\underset{(se)}{\hat{y}} = \underset{(0.01)}{0.5} + \underset{(0.02)}{2} \cdot t$, $R^2 = 0.9$, $DW = 1.3$. Протестируйте гипотезу об отсутствии автокорреляции ошибок на уровне значимости 5%.

11.9 По 32 наблюдениям была оценена модель линейной регрессии $\underset{(se)}{\hat{y}} = \underset{(2.5)}{10} + \underset{(0.5)}{2.5} \cdot t - \underset{(0.01)}{0.1} \cdot t^2$, $R^2 = 0.75$, $DW = 1.75$. Протестируйте гипотезу об отсутствии автокорреляции ошибок на уровне значимости 5%.

11.10 Рассмотрим модель $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t1} + \ldots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t$, где ε_t подчиняются автокорреляционной схеме первого порядка, то есть:

1. $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$, $-1 < \rho < 1$;
2. $\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = const$, $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = const$;
3. $\mathrm{Var}(u_t) = \sigma^2$, $\mathbb{E}(u_t) = 0$;
4. Величины u_t независимы между собой;
5. Величины u_t и ε_s независимы, если $t \geqslant s$.

Найдите:

1. $\mathbb{E}(\varepsilon_t)$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_t)$;
2. $\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h})$;
3. $\mathrm{Corr}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h})$.

11.11 Ошибки в модели $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$ являются автокоррелированными первого порядка, $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$. Шаман-эконометрист Ойуун выполняет два камлания-преобразования. Поясните смысл камланий:

1. Камлание А, при $t \geqslant 2$, Ойуун преобразует уравнение к виду $y_t - \rho y_{t-1} = \beta_1(1-\rho) + \beta_2(x_t - \rho x_{t-1}) + \varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1}$;
2. Камлание Б, при $t = 1$, Ойуун преобразует уравнение к виду $\sqrt{1-\rho^2}y_1 = \sqrt{1-\rho^2}\beta_1 + \sqrt{1-\rho^2}\beta_2 x_1 + \sqrt{1-\rho^2}\varepsilon_1$.

11.12 Пусть y_t — стационарный процесс. Верно ли, что стационарны процессы:

1. $z_t = 2y_t$;
2. $z_t = y_t + 1$;
3. $z_t = \Delta y_t$;
4. $z_t = 2y_t + 3y_{t-1}$?

11.13 Известно, что временной ряд y_t порожден стационарным процессом, задаваемым соотношением $y_t = 1 + 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$. Имеется 1000 наблюдений. Вася построил регрессию y_t на константу и y_{t-1}. Петя построил регрессию на константу и y_{t+1}. Какие примерно оценки коэффициентов они получат?

11.14 Рассмотрим следующий AR(1)-ARCH(1) процесс, $y_t = 1 + 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$,
$\varepsilon_t = \nu_t \cdot \sigma_t$
ν_t независимые $N(0;1)$ величины.
$\sigma_t^2 = 1 + 0.8\varepsilon_{t-1}^2$
Также известно, что $y_{100} = 2$, $y_{99} = 1.7$

1. Найдите $\mathbb{E}_{100}(\varepsilon_{101}^2)$, $\mathbb{E}_{100}(\varepsilon_{102}^2)$, $\mathbb{E}_{100}(\varepsilon_{103}^2)$, $\mathbb{E}(\varepsilon_t^2)$.
2. $\mathrm{Var}(y_t)$, $\mathrm{Var}(y_t|\mathcal{F}_{t-1})$.
3. Постройте доверительный интервал для y_{101}:
   (a) проигнорировав условную гетероскедастичность;
   (b) учтя условную гетерескедастичность.

11.15 Пусть x_t, $t = 0, 1, 2, \ldots$ - случайный процесс и $y_t = (1 + \mathrm{L})^t x_t$. Выразите x_t с помощью y_t и оператора лага L.

11.16 Пусть F_n — последовательность чисел Фибоначчи. Упростите величину

$$F_1 + C_5^1 F_2 + C_5^2 F_3 + C_5^3 F_4 + C_5^4 F_5 + C_5^5 F_6$$

11.17 Пусть y_t, $t = \ldots - 2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ - случайный процесс. И $y_t = x_{-t}$. Являются ли верными рассуждения:

1. $\mathrm{L}y_t = \mathrm{L}x_{-t} = x_{-t-1}$;
2. $\mathrm{L}y_t = y_{t-1} = x_{-t+1}$?

11.18 Представьте процесс AR(1), $y_t = 0.9y_{t-1} - 0.2y_{t-2} + \varepsilon_t$, где ε_t — белый шум с единичной дисперсией, в виде модели состояние-наблюдение.

1. Выбрав в качестве состояний вектор $\begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{pmatrix}$
2. Выбрав в качестве состояний вектор $\begin{pmatrix} y_t \\ \hat{y}_{t,1} \end{pmatrix}$

Найдите дисперсии ошибок состояний.

11.19 Представьте процесс MA(1), $y_t = \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1}$, где ε_t — белый шум с единичной дисперсией, в виде модели состояние-наблюдение.

1. $\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_{t-1} \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} \\ 0.5\varepsilon_t \end{pmatrix}$

11.20 Представьте процесс ARMA(1,1), $y_t = 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$, где процесс ε_t — белый шум с единичной дисперсией, в виде модели состояние-наблюдение.

Вектор состояний имеет вид x_t, x_{t-1}, где $x_t = \frac{1}{1-0.5L}\varepsilon_t$.

11.21 Рекурсивные коэффициенты

1. Оцените модель вида $y_t = a + b_t x_t + \varepsilon_t$, где $b_t = b_{t-1}$.
2. Сравните графики filtered state и smoothed state.
3. Сравните финальное состояние b_T с коэффициентом в обычной модели линейной регрессии, $y_t = a + bx_t + \varepsilon_t$.

доделать state-space задачу

11.22 Пусть u_t — независимые нормальные случайные величины с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2. Известно, что $\varepsilon_1 = u_1$, $\varepsilon_t = u_1 + u_2 + \ldots + u_t$. Рассмотрим модель $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$.

1. Найдите $\mathrm{Var}(\varepsilon_t)$, $\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s)$, $\mathrm{Var}(\varepsilon)$.
2. Являются ли ошибки ε_t гетероскедастичными?
3. Являются ли ошибки ε_t автокоррелированными?
4. Предложите более эффективную оценку вектора коэффициентов регрессии по сравнению МНК-оценкой.
5. Результаты предыдущего пункта подтвердите симуляциями Монте-Карло на компьютере.

11.23 Найдите безусловную дисперсию GARCH-процессов

1. $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t$, $\sigma_t^2 = 0.1 + 0.8\sigma_{t-1}^2 + 0.1\varepsilon_{t-1}^2$;
2. $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t$, $\sigma_t^2 = 0.4 + 0.7\sigma_{t-1}^2 + 0.1\varepsilon_{t-1}^2$;
3. $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t$, $\sigma_t^2 = 0.2 + 0.8\sigma_{t-1}^2 + 0.1\varepsilon_{t-1}^2$.

11.24 Являются ли верными следующие утверждения?

1. GARCH-процесс является процессом белого шума, условная дисперсия которого изменяется во времени.

2. Модель GARCH(1,1) предназначена для прогнозирования меры изменчивости цены финансового инструмента, а не для прогнозирования самой цены инструмента.
3. При помощи GARCH-процесса можно устранять гетероскедастичность.
4. Безусловная дисперсия GARCH-процесса изменяется во времени.
5. Модель GARCH(1,1) может быть использована для прогнозирования волатильности финансовых инструментов на несколько торговых недель вперёд.

11.25 Рассмотрим GARCH-процесс $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t$, $\sigma_t^2 = k + g_1\sigma_{t-1}^2 + a_1\varepsilon_{t-1}^2$. Найдите

1. $\mathbb{E}(z_t)$, $\mathbb{E}(z_t^2)$, $\mathbb{E}(\varepsilon_t)$, $\mathbb{E}(\varepsilon_t^2)$;
2. $\operatorname{Var}(z_t)$, $\operatorname{Var}(\varepsilon_t)$, $\operatorname{Var}(\varepsilon_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$;
3. $\mathbb{E}(\varepsilon_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$, $\mathbb{E}(\varepsilon_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1})$, $\mathbb{E}(\sigma_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1})$;
4. $\mathbb{E}(z_t z_{t-1})$, $\mathbb{E}(z_t^2 z_{t-1}^2)$, $\operatorname{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1})$, $\operatorname{Cov}(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-1}^2)$;
5. $\lim_{h\to\infty} \mathbb{E}(\sigma_{t+h}^2 \mid \mathcal{F}_t)$.

11.26 Используя 500 наблюдений дневных логарифмических доходностей y_t , была оценена GARCH(1,1)-модель: $\hat{y}_t = -0.000708 + \hat{\varepsilon}_t$, $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t$, $\sigma_t^2 = 0.000455 + 0.6424\sigma_{t-1}^2 + 0.2509\varepsilon_{t-1}^2$. Также известно, что $\hat{\sigma}_{499}^2 = 0.002568$, $\hat{\varepsilon}_{499}^2 = 0.000014$, $\hat{\varepsilon}_{500}^2 = 0.002178$. Найдите

1. $\hat{\sigma}_{500}^2$, $\hat{\sigma}_{501}^2$, $\hat{\sigma}_{502}^2$;
2. Волатильность в годовом выражении в процентах, соответствующую наблюдению с номером $t = 500$.

11.27 Докажите, что в условиях автокорреляции ошибок МНК-оценки остаются несмещёнными.

11.28 Продавец мороженного оценил динамическую модель объёмов продаж:

$$\ln \hat{Q}_t = 26.7 + 0.2 \ln \hat{Q}_{t-1} - 0.6 \ln P_t$$

Здесь Q_t — число проданных в день t вафельных стаканчиков, а P_t — цена одного стаканчика в рублях. Продавец также рассчитал остатки $\hat{e}_t$.

1. Чему, согласно полученным оценкам, равна долгосрочная эластичность объёма продаж по цене?
2. Предположим, что продавец решил проверить наличие автокорреляции первого порядка с помощью теста Бройша-Годфри. Выпишите уравнение регрессии, которое он должен оценить.

11.29 Рассматривается модель $y_t = \mu + \varepsilon_t$, $t = 1, \ldots, T$, где $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$, случайные величины $\varepsilon_0, u_1, \ldots, u_T$ независимы, причём $\varepsilon_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/(1-\rho^2))$, $u_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Имеются наблюдения $y' = (1, 2, 0, 0, 1)$.

1. Выпишите функцию правдоподобия
$$\mathrm{L}(\mu, \rho, \sigma^2) = f_{Y_1}(y_1) \prod_{t=2}^{T} f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t|y_{t-1}).$$
2. Найдите оценки неизвестных параметров модели максимизируя условную функцию правдоподобия
$$\mathrm{L}(\mu, \rho, \sigma^2 | Y_1 = y_1) = \prod_{t=2}^{T} f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t|y_{t-1}).$$

11.30 Была оценена AR(2) модель
$$\hat{y}_t = 2.3 + 0.8y_{t-1} - 0.2y_{t-2}.$$
Дополнительно известно, что $se(\hat{\beta}_{y_{t-1}}) = 0.3$ и $\hat{\rho}_1 = 0.7$. Найдите $se(\hat{\beta}_{y_{t-2}})$ и $\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{y_{t-2}}, \hat{\beta}_{y_{t-1}})$.

11.31 Рассмотрите следующие два утверждения:

- GARCH-процесс является слабо стационарным процессом;
- GARCH-процесс является процессом с изменяющейся во времени условной дисперсией.

Поясните смысл каждого из них. Объясните, почему между ними нет противоречия.

11.32 Предложите способ, при помощи которого из моделей GARCH(1,1) и GARCH(2,1) можно выбрать лучшую.

11.33 Опишите тест, при помощи которого можно выявить необходимость использовать GARCH-модель.

11.34 Рассматривается GARCH(1,1)-процесс $\sigma_t^2 = 1 + 0.8 \cdot \sigma_{t-1}^2 + 0.1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2$. Известно, что $\sigma_T^2 = 9$, $\varepsilon_T = -2$. Найдите

- $\mathbb{E}(\sigma_{T+1}^2 | \mathcal{F}_T)$;
- $\mathbb{E}(\sigma_{T+2}^2 | \mathcal{F}_T)$;
- $\mathbb{E}(\sigma_{T+3}^2 | \mathcal{F}_T)$.

11.35 Рассмотрите два ряда цен интересующих вас финансовых инструментов, действующих в одной отрасли. Примером могут выступать цены обыкновенных акций Сбербанка и ВТБ. По данным для выбранных инструментов, содержащим не менее 250 наблюдений (за одни и тот же промежуток времени), рассчитайте при помощи GARCH-модели историческую волатильность в годовом выражении в процентах.

- В одних координатных осях постройте графики полученных волатильностей.
- На основании графика, построенного в пункте (а), сделайте качественный вывод относительно риска каждого финансового инструмента.
- Для каждого из выбранных инструментов постройте прогноз волатильности (в годовом выражении в процентах) на три торговых дня вперед.

11.36 Имеются данные $y = (1,\ 2,\ 0,\ 0,\ 2,\ 1)$. Предполагая модель с автокоррелированной ошибкой, $y_t = \mu + \varepsilon_t$, где $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$ с помощью трёх тестов, LM, LR и Вальда, проверьте гипотезы:

1. H_0: $\rho = 0$;
2. H_0: $\mu = 0$;
3. H_0: $\begin{cases} \rho = 0 \\ \mu = 0 \\ \sigma^2 = 1 \end{cases}$.

11.37 Процесс x_t — это процесс y_t, наблюдаемый с ошибкой, т.е. $x_t = y_t + \nu_t$. Ошибки ν_t являются белым шумом и не коррелированы с y_t.

1. Является ли процесс x_t MA(1) процессом, если y_t — MA(1) процесс? Если да, то как связаны их автокорреляционные функциии?
2. Является ли процесс x_t стационарным AR(1) процессом, если y_t — стационарный AR(1) процесс? Если да, то как связаны их автокорреляционные функциии?

11.38 Пусть ε_t — белый шум. Рассмотрим процесс $y_t = 2 + 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$ с различными начальными условиями, указанными ниже.

1. Найдите $\mathbb{E}(y_t)$, $\mathrm{Var}(y_t)$ и определите, является ли процесс стационарным, если:
   (a) $y_1 = 0$;
   (b) $y_1 = 4$;
   (c) $y_1 = 4 + \varepsilon_1$;
   (d) $y_1 = 4 + \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_1$.
2. Как точно следует понимать фразу «процесс $y_t = 2 + 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$ является стационарным»?

11.39 Рассмотрим модель $y_t = \beta x_t + \varepsilon_t$, где $\varepsilon_1 = u_1$ и $\varepsilon_t = u_t + u_{t-1}$ при $t \geqslant 2$. Случайные величины u_i независимы с $\mathbb{E}(u_i) = 0$ и $\mathrm{Var}(u_i) = \sigma^2$.

1. Найдите $\mathrm{Var}(\varepsilon_t)$.
2. Являются ли ошибки ε_t гетероскедастичными?
3. Найдите $\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$.
4. Являются ли ошибки ε_t автокоррелированными?
5. Как выглядит матрица $\mathrm{Var}(\varepsilon)$?
6. Рассмотрим оценку
$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}.$$
Является ли она несмещённой для β? Является ли она эффективной в классе линейных по y несмещённых оценок?
7. Если приведенная $\hat{\beta}$ не является эффективной, то приведите формулу для эффективной оценки.

11.40 Верно ли, что при удалении из стационарного ряда каждого второго наблюдения получается стационарный ряд?

11.41 У эконометрессы Ефросиньи был стационарный ряд. Ей было скучно и она подбрасывала неправильную монетку, выпадающую орлом с вероятностью 0.7. Если выпадал орёл, она оставляла очередной y_t, если решка — то зачёркивала. Получается ли у Ефросиньи стационарный ряд?

11.42 Имеется временной ряд, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{101}$. Величины ε_t нормально распределены, $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, и независимы. Построим график этого процесса.

1. Является ли этот процесс белым шумом?
2. Сколько в среднем раз график пересекает ось абсцисс?
3. Оцените вероятность того, что график пересечет ось абсцисс более 60 раз.

11.43 Рассмотрим стационарный AR(1) процесс $y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$, где $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Иммется ряд y_1, y_2, ..., y_{101}. Построен график этого процесса. Как от ρ зависит математическое ожидание количества пересечений графика с осью абсцисс?

11.44 Рассмотрим процессы:

1. Процесс скользящего среднего:
$$y_t = \varepsilon_t + 2\varepsilon_{t-1} + 3$$
2. Процесс случайного блуждания со смещением:
$$\begin{cases} z_t = \varepsilon_t + z_{t-1} + 3 \\ z_0 = 0 \end{cases}$$
3. Процесс с трендом:
$$w_t = 2 + 3t + \varepsilon_t$$
4. Еще один процесс:
$$r_t = \begin{cases} 1, \text{ при четных t} \\ -1, \text{ при нечетных t} \end{cases}$$
5. Приращение случайного блуждания
$$s_t = \Delta z_t$$

6. Приращение процесса с трендом

$$d_t = \Delta w_t$$

Для каждого из процессов найдите $\mathbb{E}(y_t)$, $\text{Var}(y_t)$, $\text{Corr}(y_t, y_{t-k})$.

Являются ли процессы стационарными?

11.45 Эконометресса Антуанетта построила график автоковариационной функции временного ряда и распечатала его:

Здесь виснет чанк кода!

```
acf.df <- data.frame(lag = 1:10, acf = c(11, 5, 3, 1, -2, 2, 1, 2, 0, 1))
ggplot(acf.df, aes(x = lag, y = acf)) +
  geom_bar(stat = "identity") +
 xlab("Лаг") + ylab("ACF") +
 guides(fill = guide_legend(title = NULL))
```

Потом она с ужасом обнаружила, что до презентации исследования остается совсем мало времени, а распечатать надо было график автокорреляционной функции. Что надо исправить Антуанетте на графике, чтобы успеть еще сделать причёску и макияж (это очень важно для презентации)?

11.46 Билл Гейтс оценил модель $y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 y_{t-1} + \varepsilon_t$ с помощью МНК. Значение статистики Дарбина-Уотсона оказалось равно $DW = 0.55$. Какой из этого следует вывод об автокорреляции ошибок первого порядка?

Глава 12

Метод опорных векторов

12.1 Имеются три наблюдения A, B и C:

	x	y
A	1	-2
B	2	1
C	3	0

1. Найдите расстояние AB и косинус угла ABC.
2. Найдите расстояние AB и косинус угла ABC в расширенном пространстве с помощью гауссовского ядра с $\sigma = 1$.
3. Найдите расстояние AB и косинус угла ABC в расширенном пространстве с помощью полиномиального ядра второй степени.

12.2 Переход из двумерного пространства в расширяющее задан функцией

$$f : (x_1, x_2) \to (1, x_1, x_2, 3x_1x2, 2x_1^2, 4x_2^2).$$

Найдите соответствующую ядерную функцию.

12.3 Ядерная функция имеет вид

$$K(x, y) = x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2.$$

Как может выглядеть функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ переводящие исходные векторы в расширенное пространство?

12.4 На плоскости имеются точки двух цветов. Красные: $(1, 1)$, $(1, -1)$ и синие: $(-1, 1)$, $(-1, -1)$.

1. Найдите разделяющую гиперплоскость методом опорных векторов при разных C.
2. Укажите опорные вектора.

12.5 На плоскости имеются точки двух цветов. Красные: $(1, 1)$, $(1, -1)$ и синие: $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ и $(2, 0)$.

1. Найдите разделяющую гиперплоскость методом опорных векторов при разных C.
2. Укажите опорные вектора.

12.6 Ядерная функция, скалярное произведение в расширяющем пространстве, имеет вид $K(\vec{a}, \vec{b}) = \exp(-|\vec{a} - \vec{b}|^2)$.

Имеются вектора $\vec{a} = (1, 1, 1)$ и $\vec{b} = (1, 2, 0)$.

Найдите длину векторов и косинус угла между ними в исходном и расширяющем пространстве.

12.7 Рассмотрим два вектора, $v_1 = (1, 1, 2)$ и $v_2 = (1, 1, 1)$. Переход в спрямляющее пространство осуществляется с помощью гауссовской ядерной функции с параметром σ, $k(v_1, v_2) = \exp(-\sigma|v_1 - v_2|^2)$.

1. Как от σ зависят длины векторов в спрямляющем пространстве?
2. Как от σ зависит угол между векторами в спрямляющем пространстве?

12.8 Эконометресса Авдотья решила использовать метод опорных векторов с гауссовским ядром с параметром $\sigma = 1$ и штрафным коэффициентом $C = 1$. Соответственно, она минимизировала целевую функцию

$$\frac{w'w}{2} + C\sum_{i=1}^{n} \xi_i,$$

где разделяющая плоскость задаётся $w'x - w_0 = 0$, а ξ_i — размеры «заступа» за разделяющую полосу.

Затем Автдотья подумала, что неплохо бы выбрать наилучшие C и σ. Ей лень было использовать кросс-валидацию, поэтому Авдотья минимизировала данную функцию по $C \geqslant 0$ и $\sigma \geqslant 0$. Какие значения она получила?

12.9 Задан вектор $w = (2, 3)$ и число $w_0 = 7$.

1. Нарисуйте прямые $\langle w, x\rangle = w_0$, $\langle w, x\rangle = w_0 + 1$, $\langle w, x\rangle = w_0 - 1$.
2. Найдите ширину полосы между $\langle w, x\rangle = w_0 + 1$ и $\langle w, x\rangle = w_0 - 1$.
3. Найдите расстояние от точки $(5, 6)$ до прямой $\langle w, x\rangle = w_0 - 1$.

12.10 Заданы две прямые, l_0: $x^{(1)} + 3x^{(2)} = 9$ и l_1: $x^{(1)} + 3x^{(2)} = 13$. Найдите подходящий вектор w и число w_0 так, чтобы прямая l_0 записывалась как $\langle w, x\rangle = w_0 - 1$, а прямая l_1 как $\langle w, x\rangle = w_0 + 1$.

12.11 Даны наблюдения

$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	y
1	0	0
2	0	0
0	3	1
0	4	1

1. Нарисуйте разделяющую полосу наибольшей ширины.
2. Решите задачу оптимизации

$$\min_{w, w_0} \frac{1}{2}\langle w, w\rangle$$

при ограничении: для $y_i = 1$ выполнено условие $\langle w, x\rangle \geqslant w_0 + 1$, а для $y_i = 0$ выполнено условие $\langle w, x\rangle \leqslant w_0 - 1$.

3. Для точки $x = (x^{(1)}, x^{(2)}) = (1, 1)$ найдите значение $\langle w, x\rangle - w_0$ и постройте прогноз $\hat{y}$.

12.12 По картинке качественно решите задачу разделения точек:

Здесь виснет чанк кода!

```r
n_obs <- 2000
svm_df <- data_frame(x = runif(n_obs, min = -20, max = 20), y = runif(n_obs, min = -20, max = 20))
svm_df <- dplyr::filter(svm_df, (y > x + 10) | (y < x - 10))
svm_df <- mutate(svm_df, type = ifelse(y > x + 10, 1, 0))
more_points <- data_frame(x = c(0, 5, 5), y = c(0, 5, 0), type = c(1, 1, 0))
svm_df <- bind_rows(svm_df, more_points)
```

```
ggplot(data = svm_df, aes(x = x, y = y)) +
  geom_point(aes(shape = factor(type))) + theme_bw() + guides(shape = guide_legend(title = "Тип
```

Целевая функция имеет вид:

$$\min_{w,w_0} \frac{1}{2}w'w + C\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

Уравнение разделяющей поверхности — $w'x = w_0$, уравнения краёв полосы: $w'x = w_0 + 1$ и $w'x = w_0 - 1$. Нарушителями считаются наблюдения, которые попали на нейтральную полосу или на чужую территорию. Здесь $\xi_i = |w| \cdot d_i$, где d_i — длина «заступ» наблюдения за черту «своих».

1. Как пройдёт разделяющая полоса при $C = 1$? Найдите w, w_0, и величины штрафов ξ_i.
2. Как пройдёт разделяющая полоса при $C = +\infty$? Найдите w, w_0, и величины штрафов ξ_i.

Глава 13

Классификационные деревья и алгоритм случайного леса

13.1 Для случайных величин X и Y найдите индекс Джини и энтропию.

X	0	1
$\mathbb{P}()$	0.2	0.8

,

Y	0	1	5
$\mathbb{P}()$	0.2	0.3	0.5

13.2 Случайная величина X принимает значение 1 с вероятностью p и значение 0 с вероятностью $1-p$.

1. Постройте график зависимости индекса Джини и энтропии от p.
2. Являются ли функции монотонными? выпуклыми?
3. При каком p энтропия и индекс Джини будут максимальны?

13.3 Кот Леопольд анкетировал 20 мышей по трём вопросам: x — «Одобряете ли Вы непримиримую к котам позицию Белого и Серого?», y — «Известно ли Вам куда пропала моя любимая кошка Мурка?» и z — «Известны ли Вам настоящие имена Белого и Серого?» Результаты опроса в таблице:

	x	y	z
1	no	no	yes
2	no	yes	yes
3	yes	yes	yes
4	yes	yes	no
5	no	no	no
6	no	yes	yes
7	no	no	yes
8	no	no	no
9	yes	no	yes
10	yes	no	yes
11	no	no	no
12	yes	yes	yes
13	no	yes	yes
14	no	yes	no
15	yes	no	no
16	yes	no	yes
17	no	no	no
18	no	yes	no
19	no	yes	no
20	yes	no	no

```
set.seed(1975)
x <- sample(c("yes", "no"), size = 20, rep = TRUE)
y <- sample(c("yes", "no"), size = 20, rep = TRUE)
z <- sample(c("yes", "no"), size = 20, rep = TRUE)
xtable(data_frame(x, y, z))
```

1. Какой фактор нужно использовать при прогнозировании y, чтобы минимизировать энтропию?

2. Какой фактор нужно использовать при прогнозировании y, чтобы минимизировать индекс Джини?

13.4 Постройте регрессионное дерево для набора данных:

y_i	x_i
5	0
6	1
4	2
100	3

Критерий деления узла на два — минимизация RSS. Дерево строится до трёх терминальных узлов.

13.5 Постройте регрессионное дерево для набора данных:

y_i	x_i
100	1
102	2
103	3
50	4
55	5
61	6
70	7

Критерий деления узла на два — минимизация RSS. Узлы делятся до тех пор, пока в узле остаётся больше двух наблюдений.

13.6 Дон-Жуан предпочитает брюнеток. Перед Новым Годом он посчитал, что в записной книжке у него 20 блондинок, 40 брюнеток, две рыжих и восемь шатенок. С Нового Года Дон-Жуан решил перенести все сведения в две записные книжки, в одну — брюнеток, во вторую — остальных.

Как изменились индекс Джини и энтропия в результате такого разбиения?

13.7 Машка пять дней подряд гадала на ромашке, а затем выкладывала очередную фотку «Машка с ромашкой» в инстаграмчик. Результат гадания — переменная y_i, количество лайков у фотки — переменная x_i. Постройте классификационное дерево.

y_i	x_i
плюнет	10
поцелует	11
поцелует	12
к сердцу прижмёт	13
к сердцу прижмёт	14

Дерево строится до идеальной классификации. Критерий деления узла на два — максимальное падение индекса Джини.

13.8 У Винни-Пуха есть 100 песенок (кричалок, вопелок, пыхтелок и сопелок). Каждый день он выбирает и поёт одну из них равновероятно наугад. Одну и ту же песенку он может петь несколько раз. Сколько в среднем песенок оказываются неспетыми за 100 дней?

13.9 По данной диаграмме рассеяния постройте классификационное дерево для зависимой переменной y:

```
set.seed(42)
df <- tibble(x = runif(400), z = runif(400))
df$y <- factor(ifelse(df$x > 0.25 & df$z > 0.5, "yes", "no"))
qplot(data = df, x = x, y = z, col = y, shape = y) +
  geom_vline(xintercept = 0.25) + geom_hline(yintercept = 0.5)
```

Дерево необходимо построить до идеальной классификации, в качестве критерия деления узла на два используйте минимизацию индекса Джини.

13.10 Рассмотрим табличку:

y_i	x_i	z_i
y_1	1	2
y_2	1	2
y_3	2	2
y_4	2	1
y_5	2	1
y_6	2	1
y_7	2	1

Сколько существует принципиально разных классификационных деревьев для данного набора данных?

13.11 Исследовательница Мишель строит классификационное дерево для бинарной переменной y_i. Может ли при разбиении узла на два расти индекс Джини? Энтропия?

13.12 Приведите примеры наборов данных, для которых индекс Джини равен 0, 0.5 и 0.999.

13.13 Рассмотрим задачу построения классификационного дерева для бинарной переменной y_i. Приведите пример такого набора данных, что никакое разбиения стартового узла на два не снижает индекс Джини, однако двух разбиений достаточно, чтобы снизить индекс Джини до нуля.

Глава 14

Линейная алгебра

14.1 Возведите каждую из следующих матриц в каждую из степеней $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, -1, 100.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

14.2 Найдите ортогональную проекцию и ортогональную составляющую (перпендикуляр) вектора u_1 на линейное подпространство $L = \mathcal{L}(u_2)$, порождённое вектором u_2, если

1. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
2. $u_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
3. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

14.3 Найдите обратные матрицы ко всем матрицам, представленным ниже.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;
3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

4. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

14.4 Найдите ранг следующих матриц в зависимости от значений параметра λ:

1. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1-2\lambda \\ 1+\lambda & 1+3\lambda \end{pmatrix}$;
3. $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$;
4. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$.

14.5 Пусть $\vec{1} = (1, \ldots, 1)'$ — вектор из n единиц и $\pi = \vec{1}(\vec{1}'\vec{1})^{-1}\vec{1}'$. Найдите:

1. $\operatorname{tr}(\pi)$ и $\operatorname{rank}(\pi)$;
2. $\operatorname{tr}(I-\pi)$ и $\operatorname{rank}(I-\pi)$.

14.6 Пусть X — матрица размера $n \times k$, где $n > k$, и пусть $\operatorname{rank}(X) = k$. Верно ли, что матрица-шляпница $H = X(X'X)^{-1}X'$ симметрична и идемпотентна?

14.7 Пусть X — матрица размера $n \times k$, где $n > k$, и пусть $\operatorname{rank}(X) = k$. Верно ли, что каждый столбец матрицы-шляпницы $H = X(X'X)^{-1}X'$ является собственным вектором матрицы H? Если да, то какое собственное число ему соответствует?

14.8 Пусть X — матрица размера $n \times k$, где $n > k$, пусть $\operatorname{rank}(X) = k$ и $H = X(X'X)^{-1}X'$. Верно ли, что каждый вектор-столбец u, такой что $X'u = 0$, является собственным вектором матрицы-шляпницы H? Если да, то какое собственное число ему соответствует?

14.9 Верно ли, что для любых матриц A размера $m \times n$ и матриц B размера $n \times m$ выполняется равенство $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$?

14.10 Какие собственные значения могут быть у симметричной и идемпотентной матрицы?

14.11 Пусть H — матрица размера $n \times n$, $H' = H$, $H^2 = H$. Верно ли, что $\operatorname{rank}(H) = \operatorname{tr}(H)$?

14.12 Верно ли, что для симметричной матрицы собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны?

14.13 Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы $H = X(X'X)^{-1}X'$, если

1. $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$;
2. $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$;
3. $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;
4. $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

14.14 Приведите пример таких A и B, что $\det(AB) \neq \det(BA)$.

14.15 Для матриц-проекторов $\pi = \vec{1}(\vec{1}'\vec{1})^{-1}\vec{1}'$ и $H = X(X'X)^{-1}X'$ найдите $\operatorname{tr}(\pi)$, $\operatorname{tr}(H)$, $\operatorname{tr}(I - \pi)$, $\operatorname{tr}(I - H)$.

14.16 Выпишите в явном виде матрицы $X'X$, $(X'X)^{-1}$ и $X'y$, если

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ и } X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}.$$

14.17 Выпишите в явном виде матрицы π, πy, $\pi\varepsilon$, $I-\pi$, если $\pi = \vec{1}(\vec{1}'\vec{1})^{-1}\vec{1}'$.

14.18 Формула Фробениуса. Матрицу A размера $(n+m)\times(n+m)$ разрезали на 4 части: $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$. Кусок A_{11} имеет размер $n\times n$ и обратим, кусок A_{22} имеет размер $m\times m$. Известно, что A — обратима и $A^{-1} = B$. На аналогичные по размеру и расположению части разрезали матрицу $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$.

1. Каковы размеры кусков A_{12} и A_{21}?
2. Чему равно $B_{22}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$?

14.19 Спектральное разложение. Симметричная матрица A размера $n\times n$ имеет n собственных чисел λ_1, …, λ_n с собственными векторами u_1, …, u_n. Докажите, что A можно представить в виде $A = \sum \lambda_i u_i u_i'$.

14.20 Найдите определитель, след, собственные значения, собственные векторы и число обусловленности матрицы A. Также найдите A^{-1}, $A^{-1/2}$ и $A^{1/2}$.

1. $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$;
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;
3. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$;
4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;
5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;
6. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
7. $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$;

8. $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

14.21 В этом упражнении исследуется связь определителя, следа и собственных значений. Везде имеются ввиду действительные собственные значения с учетом кратности.

1. Приведите пример матрицы для которой след равен сумме собственных значений.
2. Приведите пример матрицы для которой след не равен сумме собственных значений.
3. Верно ли, что для симметричной матрицы след всегда равен сумме собственных значений?
4. Приведите пример матрицы для которой определитель равен произведению собственных значений.
5. Приведите пример матрицы для которой определитель не равен произведению собственных значений.
6. Верно ли, что для симметричной матрицы определитель всегда равен произведению собственных значений?

14.22 Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы строевого леса размера $n \times n$. Матрица строевого леса — это матрица, состоящая только из единиц.

14.23 Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы $A = vv'$, где v — вектор-столбец размера $n \times 1$.

14.24 Пусть S — матрица строевого леса, т.е. матрица размера $n \times n$, состоящая только из единиц, а y — вектор размера $n \times 1$. Найдите Sy, S^2, S^{2015}, $(I - \frac{1}{n}S)^2$, $(I - \frac{1}{n}S)^{2015}$.

14.25 Верно ли, что собственные числа матриц $X'X$ и XX' совпадают? Известно, что v — это собственный вектор матрицы $X'X$. Найдите какой-нибудь собственный вектор матрицы XX'.

14.26 Рассмотрим систему уравнений $X\beta = y$. Здесь y — известный вектор размера $n \times 1$, β — неизвестный вектор размера $k \times 1$, и X — известная матрица размера $n \times k$ полного ранга.

Цель задачи состоит в том, чтобы понять, как концепция единственного решения системы уравнений распространяется на случай, когда решений вообще нет или когда их бесконечно много.

1. При каких условиях система имеет одно решение? ни одного? бесконечно много?
2. Решите систему в случае квадратной X полного ранга.
3. Если решений нет, то найдите наилучшее приближение к решению, то есть такое β при котором длина $(y - X\beta)$ минимальна.
4. Если решений бесконечно много, то найдите решение с наименьшей длиной.

14.27 Известно, что матрица M идемпотентная. В каком случае она может быть обратимой?

Глава 15

Случайные векторы

15.1 Пусть $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)'$ — случайный вектор доходностей пяти ценных бумаг. Известно, что $\mathbb{E}(y') = (5, 10, 20, 30, 40)$, $\mathrm{Var}(y_1) = 0$, $\mathrm{Var}(y_2) = 10$, $\mathrm{Var}(y_3) = 20$, $\mathrm{Var}(y_4) = 40$, $\mathrm{Var}(y_5) = 40$ и

$$\mathrm{Corr}(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.3 & -0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.3 & 1 & 0.3 & -0.2 \\ 0 & -0.2 & 0.3 & 1 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & -0.2 & 0.3 & 1 \end{pmatrix}$$

С помощью компьютера найдите ответы на вопросы:

1. Какая ценная бумага является безрисковой?
2. Найдите ковариационную матрицу $\mathrm{Var}(y)$.
3. Найдите ожидаемую доходность и дисперсию доходности портфеля, доли ценных бумаг в котором равны соответственно:
   (a) $\alpha = (0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)'$;
   (b) $\alpha = (0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4)'$;
   (c) $\alpha = (0.0, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1)'$.
4. Составьте из данных бумаг пять некоррелированных портфелей.

15.2 Пусть $i = (1, \ldots, 1)'$ — вектор из n единиц, $\pi = i(i'i)^{-1}i'$ и $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)' \sim \mathcal{N}(0, I)$.

1. Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon'\pi\varepsilon)$, $\mathbb{E}(\varepsilon'(I-\pi)\varepsilon)$ и $\mathbb{E}(\varepsilon\varepsilon')$.
2. Как распределены случайные величины $\varepsilon'\pi\varepsilon$ и $\varepsilon'(I-\pi)\varepsilon$?

3. Запишите выражения $\varepsilon'\pi\varepsilon$ и $\varepsilon'(I-\pi)\varepsilon$, используя знак суммы.

15.3 Пусть $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $H = X(X'X)^{-1}X'$, случайные величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ независимы и одинаково распределены $\sim \mathcal{N}(0, 1)$.

1. Найдите распределение случайной величины $\varepsilon' H \varepsilon$, где $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}'$.
2. Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon' H \varepsilon)$.
3. При помощи таблиц найдите такое число q, что $\mathbb{P}(\varepsilon' H \varepsilon > q) = 0.1$.

15.4 Пусть $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $H = X(X'X)^{-1}X'$, случайные величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ независимы и одинаково распределены $\sim \mathcal{N}(0, 1)$.

1. Найдите распределение случайной величины $\varepsilon' H \varepsilon$, где $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}'$
2. Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon' H \varepsilon)$
3. При помощи таблиц найдите такое число q, что $\mathbb{P}(\varepsilon' H \varepsilon > q) = 0.1$

15.5 Пусть $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $H = X(X'X)^{-1}X'$, случайные величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ независимы и одинаково распределены $\sim \mathcal{N}(0, 1)$.

1. Найдите распределение случайной величины $\varepsilon' H \varepsilon$, где $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}'$.
2. Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon' H \varepsilon)$.
3. При помощи таблиц найдите такое число q, что $\mathbb{P}(\varepsilon' H \varepsilon > q) = 0.1$.

15.6 Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbb{E}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Var}(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbb{E}(y)$, $\mathrm{Var}(y)$ и $\mathbb{E}(z)$, если

1. $y = x - \mathbb{E}(x)$;
2. $y = \operatorname{Var}(x)x$;
3. $y = \operatorname{Var}(x)(x - \mathbb{E}(x))$;
4. $y = \operatorname{Var}(x)^{-1}(x - \mathbb{E}(x))$;
5. $y = \operatorname{Var}(x)^{-1/2}(x - \mathbb{E}(x))$;
6. $z = (x - \mathbb{E}(x))' \operatorname{Var}(x)(x - \mathbb{E}(x))$;
7. $z = (x - \mathbb{E}(x))' \operatorname{Var}(x)^{-1}(x - \mathbb{E}(x))$;
8. $z = x' \operatorname{Var}(x)x$;
9. $z = x' \operatorname{Var}(x)^{-1}x$.

15.7 Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbb{E}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\operatorname{Var}(x) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbb{E}(y)$, $\operatorname{Var}(y)$ и $\mathbb{E}(z)$, если

1. $y = x - \mathbb{E}(x)$;
2. $y = \operatorname{Var}(x)x$;
3. $y = \operatorname{Var}(x)(x - \mathbb{E}(x))$;
4. $y = \operatorname{Var}(x)^{-1}(x - \mathbb{E}(x))$;
5. $y = \operatorname{Var}(x)^{-1/2}(x - \mathbb{E}(x))$;
6. $z = (x - \mathbb{E}(x))' \operatorname{Var}(x)(x - \mathbb{E}(x))$;
7. $z = (x - \mathbb{E}(x))' \operatorname{Var}(x)^{-1}(x - \mathbb{E}(x))$;
8. $z = x' \operatorname{Var}(x)x$;
9. $z = x' \operatorname{Var}(x)^{-1}x$.

15.8 Известно, что случайные величины x_1, x_2 и x_3 имеют следующие характеристики:

1. $\mathbb{E}(x_1) = 5$, $\mathbb{E}(x_2) = 10$, $\mathbb{E}(x_3) = 8$;
2. $\operatorname{Var}(x_1) = 6$, $\operatorname{Var}(x_2) = 14$, $\operatorname{Var}(x_3) = 1$;
3. $\operatorname{Cov}(x_1, x_2) = 3$, $\operatorname{Cov}(x_1, x_3) = 1$, $\operatorname{Cov}(x_2, x_3) = 0$.

Пусть случайные величины y_1, y_2 и y_3, представляют собой линейные комбинации случайных величин x_1, x_2 и x_3:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ y_2 = 7x_1 - 4x_2 + x_3 \\ y_3 = -2x_1 - x_2 + 4x_3 \end{cases}$$

1. Выпишите математическое ожидание и ковариационную матрицу случайного вектора $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}'$.
2. Напишите матрицу A, которая позволяет перейти от случайного вектора $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}'$ к случайному вектору $y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}'$.
3. С помощью матрицы A найдите математическое ожидание и ковариационную матрицу случайного вектора $y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}'$.

15.9 Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — случайные величины, такие что $\mathrm{Var}(\xi_1) = 2$, $\mathrm{Var}(\xi_2) = 3$, $\mathrm{Var}(\xi_3) = 4$, $\mathrm{Cov}(\xi_1, \xi_2) = 1$, $\mathrm{Cov}(\xi_1, \xi_3) = -1$, $\mathrm{Cov}(\xi_2, \xi_3) = 0$. Пусть $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{pmatrix}'$. Найдите $\mathrm{Var}(\xi)$ и $\mathrm{Var}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)$.

15.10 Пусть $h = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$; $\mathbb{E}(h) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\mathrm{Var}(h) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $z_1 = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbb{E}(z_1)$ и $\mathrm{Var}(z_1)$.

15.11 Пусть $h = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$; $\mathbb{E}(h) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\mathrm{Var}(h) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $z_2 = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbb{E}(z_2)$ и $\mathrm{Var}(z_2)$.

15.12 Пусть $h = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$; $\mathbb{E}(h) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\mathrm{Var}(h) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $z_3 = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{E}\xi_1 \\ \mathbb{E}\xi_2 \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbb{E}(z_3)$ и $\mathrm{Var}(z_3)$.

15.13 Пусть r_1, r_2 и r_3 — годовые доходности трёх рисковых финансовых инструментов. Пусть α_1, α_2 и α_3 — доли, с которыми данные инструменты входят в портфель инвестора. Считаем, что $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1$ и $\alpha_i \geqslant 0$ для всех $i = 1, 2, 3$. Пусть $r = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix}'$, $\mathbb{E}(r) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}'$, $\mathrm{Var}(r) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$. Параметры $\{a_i\}$ и $\{c_i\}$ известны.

1. Найдите годовую доходность портфеля U инвестора.
2. Докажите, что дисперсия доходности портфеля равна $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \alpha_i c_{ij} \alpha_j$.

3. Для случая $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.5$, $\alpha 3 = 0.4$, $\mathbb{E}(r) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.06 & 0.05 \end{pmatrix}'$,

$$\mathrm{Var}(r) = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 & -0.005 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ -0.005 & 0 & 0.0025 \end{pmatrix}$$

найдите $\mathbb{E}(U)$ и $\mathrm{Var}(U)$.

15.14 Пусть $h = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}; \mathbb{E}(h) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathrm{Var}(h) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; z_3 = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{E}\xi_1 \\ \mathbb{E}\xi_2 \end{pmatrix}; z_4 = \mathrm{Var}(h)^{-1/2} z_3$. Найдите $\mathbb{E}(z_4)$ и $\mathrm{Var}(z_4)$.

15.15 Пусть $h = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}; \mathbb{E}(h) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \mathrm{Var}(h) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; z_3 = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{E}\xi_1 \\ \mathbb{E}\xi_2 \end{pmatrix}; z_4 = \mathrm{Var}(h)^{-1/2} z_3$. Найдите $\mathbb{E}(z_4)$ и $\mathrm{Var}(z_4)$.

15.16 Случайные величины w_1 и w_2 независимы с нулевым ожиданием и единичной дисперсией. Из них составлено два вектора, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ и $z = \begin{pmatrix} -w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}$

1. Являются ли векторы w и z перпендикулярными?
2. Найдите $\mathbb{E}(w)$, $\mathbb{E}(z)$.
3. Найдите $\mathrm{Var}(w)$, $\mathrm{Var}(z)$, $\mathrm{Cov}(w, z)$.

15.17 Рассмотрим случайный вектор $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)'$. Для каждой из возможных ситуаций приведите пример:

1. Возможно ли, что $E(w) = 0$ и $\sum w_i = 0$?
2. Возможно ли, что $E(w) \neq 0$ и $\sum w_i = 0$?
3. Возможно ли, что $E(w) = 0$ и $\sum w_i \neq 0$?
4. Возможно ли, что $E(w) \neq 0$ и $\sum w_i \neq 0$?

15.18 Известна ковариационная матрица вектора $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$,

$$\mathrm{Var}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Найдите четыре различных матрицы A, таких что вектор $v = A\varepsilon$ имеет некоррелированные компоненты с единичной дисперсией, то есть $\mathrm{Var}(A\varepsilon) = I$.

15.19 Известно, что $\mathrm{Corr}(X, Z) = 0.7$, $\mathrm{Corr}(X, Y) = 0.6$. В каких пределах может лежать корреляция $\mathrm{Corr}(Y, Z)$?

Глава 16

Многомерное нормальное распределение

16.1 Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)' \sim \mathcal{N}(0, I)$ и матрица A представлена ниже. Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon' A \varepsilon)$ и распределение случайной величины $\varepsilon' A \varepsilon$.

1. $\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$;

3. $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$;

4. $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$;

5. $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$;

6. $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$;

7. $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

8. $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

9. $\begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

10. $\begin{pmatrix} 0.2 & -0.4 & 0 \\ -0.4 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

16.2 Пусть $\vec{1} = (1, \ldots, 1)'$ — вектор из n единиц, $\pi = \vec{1}(\vec{1}'\vec{1})^{-1}\vec{1}'$ и $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)' \sim \mathcal{N}(0, I)$.

1. Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon'\pi\varepsilon)$, $\mathbb{E}(\varepsilon'(I-\pi)\varepsilon)$ и $\mathbb{E}(\varepsilon\varepsilon')$.
2. Как распределены случайные величины $\varepsilon'\pi\varepsilon$ и $\varepsilon'(I-\pi)\varepsilon$?
3. Запишите выражения $\varepsilon'\pi\varepsilon$ и $\varepsilon'(I-\pi)\varepsilon$, используя знак суммы.

16.3 Пусть $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $H = X(X'X)^{-1}X'$, случайные величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ независимы и одинаково распределены $\sim \mathcal{N}(0, 1)$.

1. Найдите распределение случайной величины $\varepsilon'H\varepsilon$, где $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}'$.
2. Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon'H\varepsilon)$.
3. При помощи таблиц найдите такое число q, что $\mathbb{P}(\varepsilon'H\varepsilon > q) = 0.1$.

16.4 Пусть $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $H = X(X'X)^{-1}X'$, случайные величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ независимы и одинаково распределены $\sim \mathcal{N}(0, 1)$.

1. Найдите распределение случайной величины $\varepsilon'H\varepsilon$, где $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}'$.

2. Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon' H\varepsilon)$.
3. При помощи таблиц найдите такое число q, что $\mathbb{P}(\varepsilon' H\varepsilon > q) = 0.1$.

16.5 Пусть $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $H = X(X'X)^{-1}X'$, случайные величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ независимы и одинаково распределены $\sim \mathcal{N}(0, 1)$.

1. Найдите распределение случайной величины $\varepsilon' H\varepsilon$, где $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}'$.
2. Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon' H\varepsilon)$.
3. При помощи таблиц найдите такое число q, что $\mathbb{P}(\varepsilon' H\varepsilon > q) = 0.1$.

16.6 Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)' \sim \mathcal{N}(0, I)$. Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon' H\varepsilon)$ и распределение случайной величины $\varepsilon' H\varepsilon$, если $H = X(X'X)^{-1}X'$ и матрица X' представлена ниже.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;
3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;
5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

16.7 Пусть $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$, $i = (1, \ldots, 1)'$ — вектор из n единиц, $\pi = i(i'i)^{-1}i'$, X — матрица размера $n \times k$, $H = X(X'X)^{-1}X'$. Найдите:

1. $\mathbb{E}(\varepsilon'(H - \pi)\varepsilon)$;
2. $\mathbb{E}(\varepsilon'(I - \pi)\varepsilon)$;
3. $\mathbb{E}(\varepsilon' H\varepsilon)$;

4. $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2)$.

16.8 Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)' \sim \mathcal{N}(0, 4I)$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите:

1. $\mathbb{E}(\varepsilon' A \varepsilon)$;
2. $\mathbb{E}(\varepsilon'(I - A)\varepsilon)$.

16.9 Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}'$ — случайный вектор, имеющий двумерное нормальное распределение с математическим ожиданием $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}'$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Найдите Σ^{-1}.
2. Найдите $\Sigma^{-1/2}$.
3. Найдите математическое ожидание и ковариационную матрицу случайного вектора $y = \Sigma^{-1/2} \cdot (x - \mu)$.
4. Какое распределение имеет вектор y из предыдущего пункта?
5. Найдите распределение случайной величины $q = (x - \mu)' \cdot \Sigma^{-1} \cdot (x - \mu)$.

16.10 Пусть $z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}' \sim \mathcal{N}(0, I_{3x3})$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}'$,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

1. Найдите $\mathbb{E}x$ и $\operatorname{Var}(x)$ случайного вектора $x = A \cdot z + b$.
2. Найдите распределение случайного вектора x.
3. Найдите $\mathbb{E}q$ случайной величины $q = z' \cdot K \cdot z$.
4. Найдите распределение случайной величины q.

16.11 Известно, что $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, I)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)'$. Матрица $A = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$.

1. Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon' A \varepsilon)$.
2. Как распределена случайная величина $\varepsilon' A \varepsilon$?

16.12 Известно, что $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, A)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)'$. Матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, матрица $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Как распределен вектор $h = B\varepsilon$?
2. Найдите $A^{-1/2}$.
3. Как распределен вектор $u = A^{-1/2}\varepsilon$?

Глава 17

Задачи по программированию

Все наборы данных доступны по ссылке https://github.com/bdemeshev/em301/wiki/Datasets.

17.1 Начиная с какого знака в числе $\pi = 3.1415\ldots$ можно обнаружить твой номер телефона? Первый 10 миллионов знаков числа π можно найти на сайте http://code.google.com/p/pc2012-grupo-18-turma-b/downloads/list. Если не хватает, то миллиард знаков, файл размера примерно в 1 гигабайт, доступен по ссылке http://stuff.mit.edu/afs/sipb/contrib/pi/. Настоящие челябинцы рассчитывают π самостоятельно. Краткая история о том, как маньяки считали π до 10 миллиардов знаков и потеряли полгода из-за сбоев компьютерного железа, http://www.numberworld.org/misc_runs/pi-10t/details.html.

17.2 Отряд Иосифа Флавия из 40 воинов, защищающий город Йодфат, блокирован в пещере превосходящими силам римлян. Чтобы не сдаться врагу, воины стали по кругу и договорились, что сами будут убивать каждого третьего, пока не погибнут все. При этом двое воинов, оставшихся последними в живых, должны были убить друг друга. Хитренький Иосиф Флавий, командующий этим отрядом, хочет определить, где нужно встать ему и его товарицу, чтобы остаться последними. Не для того, чтобы убить друг друга, а чтобы сдать крепость римлянам. Напишите программу, которая для n воинов вставших в круг определяет, какие двое останутся последними, если будут убивать каждого k-го.

17.3 Напишите программу, которая печатает сама себя.

17.4 Задача Макар-Лиманова. У торговца 55 пустых стаканчиков, разложенных в несколько стопок. Пока нет покупателей он развлекается: берет верхний стаканчик из каждой стопки и формирует из них новую стопку. Потом снова берет верхний стаканчик из каждой стопки и формирует из них новую стопку и так далее.

1. Напишите функцию makar_step. На вход функции подаётся вектор количества стаканчиков в каждой стопке до перекладывания. На выходе функция возвращает количества стаканчиков в каждой стопке после одного перекладывания.
2. Изначально стаканчики были разложены в две стопки, из 25 и 30 стаканчиков. Как разложатся стаканчики если покупателей не будет достаточно долго?

17.5 Напишите программу, которая находит сумму элементов побочной диагонали квадратной матрицы.

17.6 Напишите функцию, которая по матрице X и вектору y для модели $Y = X\beta + \varepsilon$ вычисляет значение статистики Дарбина-Уотсона.

17.7 Напишите функцию, которая по матрице X и вектору y для модели $Y = X\beta + \varepsilon$ вычисляет оценки дисперсии коэффициентов, скорректированные на гетероскедастичность по формуле Уайта

$$\widehat{\mathrm{Var}}_{White}(\hat{\beta}_j) = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2 \hat{u}_{ij}^2}{RSS_j},$$

где $\hat{u}_{ij}$ — остатки в линейной регрессии фактора x_j на остальные регрессоры, а RSS_j — сумма квадратов остатков в этой регрессионной модели.

17.8 Напишите функцию, которая по матрице X и вектору y для модели $Y = X\beta + \varepsilon$ вычисляет оценки ковариационной матрицы коэффициентов, скорректированную на гетероскедастичность по формуле Уайта:

$$\widehat{\mathrm{Var}}_{White}(\hat{\beta}_{OLS}) = (X'X)^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2 X_{i\cdot}' X_{i\cdot}\right)(X'X)^{-1},$$

где $X_{i\cdot}$ — i-ая строка матрицы X.

17.9 Напишите программу, которая по заданной матрице регрессоров X возвращает матрицу Z, столбцами которой являются все столбцы матрицы X , «квадраты» столбцов матрицы X, а также перекрестные «произведения» столбцов матрицы X.

17.10 Напишите функцию, которая по матрице X и вектору y возвращает значение статистики Уайта.

17.11 Напишите функцию, которая по матрице X, вектору y и уровню значимости реализует тест Уайта.

17.12 Напишите функцию, которая по матрице X, вектору y и количеству лагов L находит оценку ковариационной матрицу коэффициентов, скорректированную на гетероскедастичность и автокорреляцию по формуле Невье-Веста:

$$\widehat{\mathrm{Var}}_{NW}(\hat{\beta}_{OLS}) = (X'X)^{-1}\hat{S}(X'X)^{-1},$$

где

$$\hat{S} = \sum_{t=1}^{n} \hat{\varepsilon}_t^2 X'_{t\cdot} X_{t\cdot} + \sum_{j=1}^{L} w_j \left(\sum_{t=j+1}^{n} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-j} (X'_{t\cdot} X_{t-j\cdot} + X'_{t-j\cdot} X_{t\cdot}) \right),$$

где ε_t — остатки в регрессии $y = X\beta + \varepsilon$, а $X_{t\cdot}$ — строка номер t матрицы X. Напишите две версии данной функции, для разных способов рассчета весов w_j:

1. $w_j = 1 - j/L$
2. $$w_j = \begin{cases} 1 - \frac{6j^2}{(1+L)^2} + \frac{6j^3}{(1+L)^3}, \text{ если } j \leqslant (1+L)/2 \\ 2\left(1 - \frac{j}{1+L}\right)^2, \text{ если } j > (1+L)/2 \end{cases}$$

Глава 18

Обобщённый метод моментов и бутстрэп

18.1 Величины X_i равномерны на отрезке $[-a; 3a]$ и независимы. Есть несколько наблюдений, $X_1 = 0.5$, $X_2 = 0.7$, $X_3 = -0.1$.

1. Найдите $\mathbb{E}(X_i)$ и $\mathbb{E}(|X_i|)$.
2. Постройте оценку метода моментов, используя $\mathbb{E}(X_i)$.
3. Постройте оценку метода моментов, используя $\mathbb{E}(|X_i|)$.
4. Постройте оценку обобщёного метода моментов используя моменты $\mathbb{E}(X_i)$, $\mathbb{E}(|X_i|)$ и взвешивающую матрицу.

$$W = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Найдите оптимальную теоретическую взвешивающую матрицу для обобщённого метода моментов
6. Постройте двухшаговую оценку обобщённого метода моментов, начав со взвешивающей матрицы W
7. С помощью полученных оценок постройте 95%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра a

18.2 Величины X_i имеют Пуассоновское распределение с параметром λ и независимы. Есть несколько наблюдений, $X_1 = 5$, $X_2 = 7$, $X_3 = 1$.

1. Найдите $\mathbb{E}(X_i)$ и $\mathbb{E}((X_i - \bar{X})^2)$.
2. Постройте оценку метода моментов, используя $\mathbb{E}(X_i)$.

3. Постройте оценку метода моментов, используя $\mathbb{E}((X_i - \bar{X})^2)$.
4. Постройте оценку обобщёного метода моментов используя моменты $\mathbb{E}(X_i)$, $\mathbb{E}((X_i - \bar{X})^2)$ и взвешивающую матрицу.

$$W = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Найдите оптимальную теоретическую взвешивающую матрицу для обобщённого метода моментов.
6. Постройте двухшаговую оценку обобщённого метода моментов, начав со взвешивающей матрицы W.

18.3 Винни-Пух и Пятачок оценивают неизвестный параметр правильности пчёл θ. Когда Винни-Пух проводит очередное измерение параметра правильности, он получает значение X_i нормально распределенное вокруг неизвестного параметра, $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$. Когда Пятачок проводит измерение параметра правильности, он получает значение Y_i, также нормально распределенное вокруг θ, но имеющее большую дисперсию, $Y_i \sim \mathcal{N}(\theta, 4)$. Различные измерения независимы между собой.

1. Найдите $\mathbb{E}(X_i)$ и постройте соответствующую оценку метода моментов.
2. Найдите $\mathbb{E}(Y_i)$ и постройте соответствующую оценку метода моментов.
3. Используя два указанных момента найдите обобщённую оценку метода моментов для взвешивающей матрицы

$$W = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

4. Найдите оптимальную взвешивающую матрицу W.

18.4 Начинающий футболист делает независимые удары по воротам. С вероятностью θ он попадает левее ворот, с вероятностью 2θ — правее ворот и попадает с вероятностью $1 - 3\theta$. Из n ударов он попал N_L раз левее ворот и N_R раз — правее.

1. Найдите $\mathbb{E}(N_L)$ и постройте соответствующую оценку θ методом моментов.

2. Найдите $\mathbb{E}(N_R)$ и постройте соответствующую оценку θ методом моментов.
3. Используя два указанных момента постройте оценку обобщённого метода моментов со взвешивающей матрицей

$$W = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

4. Найдите оптимальную теоретическую взвешивающую матрицу.
5. Для каждой из найденных оценок постройте 95%-ый доверительный интервал, если $N_L = 10$, $N_R = 30$, $n = 200$.

18.5 Можно ли получить МНК-оценки в классической задаче регрессии как оценки обобщённого метода моментов? Можно ли получить оценки метода максимального правдоподобия как оценки обобщённого метода моментов?

18.6 Для распределения

Z	1	3	7
$\mathbb{P}(\cdot)$	0.1	0.3	0.6

найдите квантили уровней 0.05, 0.1, 0.3, 0.4, 0.95.

18.7 Рассмотрим модель $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$, где $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$ и $\mathrm{Cov}(x_i, y_i) = 0$ при $i \neq j$.

Имеется всего два наблюдения:

y	x
3	1
4	2

1. Постройте таблицу распределения бутстрэповской оценки β_*.
2. Постройте график функции распределения бутстрэповской оценки β_*.
3. Для бутстрэповской оценки найдите квантили уровней 0.025, 0.1, 0.3, 0.7, 0.8, 0.95.
4. Постройте 95%-ый бутстрэповский интервал для параметра β.
5. При помощи построенного бутстрэповского интервала проверьте гипотезу H_0: $\beta = 0$ на уровне значимости $\alpha = 0.05$.

18.8 Рассматривается модель линейной регрессии $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$. Имеются следующие наблюдения $x_1 = 3, x_2 = 4, y_1 = 2, y_2 = 1$.

1. Постройте таблицу распределения бутстрэповской оценки $\hat{\beta}_*$.
2. Найдите математическое ожидание бутстрэповской оценки $\hat{\beta}_*$.
3. Постройте функцию распределения бутстрэповской оценки $\hat{\beta}_*$.
4. Для найденной в предыдущем пункте функции распределения $F_{\hat{\beta}_*}(x)$ найдите квантили уровней: $0.025, 0.1, 0.3, 0.8, 0.975$.
5. Для неизвестного параметра β постройте 95%-ый бутстрэповский доверительный интервал.
6. При помощи доверительного интервала, полученного в предыдущем пункте, протестируйте гипотезу о значимости коэффициента β на уровне значимости 5%.

18.9 Рассматривается модель линейной регрессии $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$. В следующей таблице приведены наблюдения

x	y
1	2
3	4
5	6
7	8

С помощью компьютера выполните следующие задания:

1. Найдите приближенно математическое ожидание бутстрэповской оценки $\hat{\beta}_*$.
2. Для неизвестного параметра β постройте 95%-ый бутстрэповский доверительный интервал.
3. При помощи доверительного интервала, полученного в предыдущем пункте, протестируйте гипотезу о значимости коэффициента β на уровне значимости 5%.

18.10 Рассматривается модель линейной регрессии $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$. В следующей таблице приведены наблюдения

x	y
1	2
3	4
5	6
7	8
9	10

С помощью компьютера выполните следующие задания:

1. Найдите приближенно математическое ожидание бутстрэповской оценки $\hat{\beta}_*$.
2. Для неизвестного параметра β постройте 95%-ый бутстрэповский доверительный интервал.
3. При помощи доверительного интервала, полученного в предыдущем пункте, протестируйте гипотезу о значимости коэффициента β на уровне значимости 5%.

18.11 Допустим, что в GMM количество оцениваемых параметров равно количеству моментных условий.

1. Чему равно минимальное значение целевой функции GMM?
2. Совпадают ли оценки GMM и оценки обычного метода моментов?

Глава 19

Устав проверки гипотез

1. Условия применимости теста;
2. Формулировка H_0, H_a и уровня значимости α;
3. Формула расчета и наблюдаемое значения статистики, S_{obs};
4. Закон распределения S_{obs} при верной H_0;
5. Область, в которой H_0 не отвергается;
6. Точное P-значение;
7. Статистический вывод о том, отвергается ли H_0 или нет.

В качестве статистического вывода допускается только одна из двух фраз:

- Гипотеза H_0 отвергается;
- Гипотеза H_0 не отвергается.

Остальные фразы считаются неуставными.

Глава 20

Решения и ответы к избранным задачам

1.1.

1. Верно:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - \bar{a}) = \sum_{i=1}^{n} a_i - n \cdot \bar{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i = 0$$

2. Верно:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-\bar{a})^2 = \sum_{i=1}^{n}(a_i-\bar{a})(a_i+\bar{a}) = \sum_{i=1}^{n}(a_i-\bar{a})a_i+\bar{a}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(a_i - \bar{a})}_{=0} = \sum_{i=1}^{n}(a_i-\bar{a})a_i$$

3. Верно:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}) = \sum_{i=1}^{n}(a_i - \bar{a})b_i - \bar{b}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(a_i - \bar{a})}_{=0} = \sum_{i=1}^{n}(a_i - \bar{a})b_i$$

4. А вот это неверно! (следует из предыдущего пункта)

5. Верно

6. Верно

7. Неверно

8. Неверно

9. Верно

10. Верно:
$$\sum_{i=1}^{n} a_i \bar{a} = \frac{n}{n} \bar{a} \sum_{i=1}^{n} a_i = n\bar{a} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} = n\bar{a}^2$$

11. Неверно (см. пунк 3)

1.2.

1. $\hat{\theta} = \sum y_i(1 + x_i) / \sum(1 + x_i)^2$

   Стандартная процедура МНК:
$$RSS = \sum \varepsilon_i^2 = \sum (y_i - \theta - \theta x_i)^2 \to \min_{\theta}$$
$$\frac{\partial RSS}{\partial \theta} = 2 \sum (y_i - \theta - \theta x_i)(-1 - x_i)$$
$$\sum \left(y_i - \hat{\theta} - \hat{\theta} x_i\right)(-1 - x_i) = 0$$
$$\sum y_i(-1 - x_i) + \hat{\theta} \sum (-1 - x_i)^2 = 0$$
$$\hat{\theta} = \frac{\sum y_i(1 + x_i)}{\sum (1 + x_i)^2}$$

2. $\hat{\theta} = \sum (y_i(1 - x_i)) / \sum(1 - x_i)^2$

3. $\hat{\theta} = \left(\sum \ln(y_i/x_i)\right)/n$

4. $\hat{\theta} = \left(\sum(y_i - x_i)\right)/n$

5. $\hat{\theta} = \sum ((y_i - 1)x_i) / \sum x_i^2$

6. $\hat{\theta} = \sum(y_i/x_i^2) / \sum(1/x^3)$

7. $\hat{\theta} = \sum ((y_i - z_i)(x_i - z_i)) / \sum (x_i - z_i)^2$

1.3. Заметим, что $y_i + z_i = \underbrace{(\alpha+\gamma)}_{\mu} + \underbrace{(\beta+\delta)}_{\lambda} x_i + u_i$.

Если оценить данную модель при помощи МНК, получим как раз то, что нужно доказать.

1.4. $\hat{\alpha} = 0,\ \hat{\beta} = 1$

1.5. Рассмотрим регрессию суммы $(y_i + z_i)$ на саму себя. Естественно, в ней

$$\widehat{y_i + z_i} = 0 + 1 \cdot (y_i + z_i).$$

Отсюда получаем, что $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} = 0$ и $\hat{\beta} + \hat{\delta} = 1$.

1.6.

Исходя из условия, нужно оценить методом МНК коэффициенты двух следующих моделей:

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$

$$y_i = \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2} x_i + \frac{1}{2} v_i$$

Заметим, что на минимизацию суммы квадратов остатков коэффициент $1/2$ не влияет, следовательно:

$$\hat{\gamma} = 2\hat{\alpha},\ \hat{\delta} = 2\hat{\beta}$$

1.7. Выпишем задачу:

$$\begin{cases} RSS = \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - \beta_1 x_i - \beta_2 z_i)^2 \to \min\limits_{\beta_1, \beta_2} \\ \beta_1 + \beta_2 = 1 \end{cases}$$

Можем превратить ее в задачу минимизации функции одного аргумента:

$$RSS = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i - \beta_2 (z_i - x_i))^2 \to \min_{\beta_2}$$

Выпишем условия первого порядка:

$$\frac{\partial RSS}{\partial \beta_2} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - x_i - \hat{\beta}_2 (z_i - x_i))(x_i - z_i) = 0$$

Отсюда:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)(x_i - z_i) + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n}(z_i - x_i)^2 = 0 \Rightarrow \hat{\beta}_2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - x_i)(z_i - x_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}(z_i - x_i)^2}$$

А оценка β_1 найдется из соотношения $\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 = 1$.

1.8. $\hat{\beta} = \sum x_i y_i / \sum x_i^2$

1.9. Нужно решить задачу:

$$RSS = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta)^2 \to \min_{\beta}$$

Условия первого порядка:

$$\frac{\partial RSS}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - \hat{\beta}) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i - n\hat{\beta} = 0$$

Поэтому

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \bar{y}$$

1.10. $\hat{\beta}_2 = \sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) / \sum(x_i - \bar{x})^2$, $\hat{\beta}_1 = \bar{y} - \hat{\beta}_2 \bar{x}$

1.11. Имеем следующую задачу:

$$RSS = \sum_{i}(y_i - 1 - \beta x_i)^2 \to \min_{\beta}$$

Откуда сразу все находим:

$$\frac{\partial RSS}{\partial \beta} = \sum_{i} 2(y_i - 1 - \hat{\beta} x_i)(-x_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i}(y_i - 1 - \hat{\beta} x_i) x_i = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i} x_i y_i - \sum_{i} x_i - \hat{\beta} \sum_{i} x_i^2 = 0 \Rightarrow \hat{\beta} = \frac{\sum_i x_i(y_i - 1)}{\sum_i x_i^2}$$

1.12. Обозначив вес первого слитка за β_1, вес второго слитка за β_2, а показания весов за y_i, получим, что

$$y_1 = \beta_1 + \varepsilon_1,\ y_2 = \beta_2 + \varepsilon_2,\ y_3 = \beta_1 + \beta_2 + \varepsilon_3$$

Тогда

$$(300 - \beta_1)^2 + (200 - \beta_2)^2 + (400 - \beta_1 - \beta_2)^2 \to \min_{\beta_1,\ \beta_2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{800}{3},\ \hat{\beta}_2 = \frac{500}{3}$$

1.13.

Ане, Насте и Тане нужно оценить модель $y_i = \beta + \varepsilon_i$. Для этого они должны решить следующую задачу:

$$RSS = 2(10 - \beta)^2 + (3 - \beta)^2 \to \min_{\beta}$$

$$\frac{\partial RSS}{\partial \beta} = -4(10 - \beta) - 2(3 - \beta)$$

Условия первого порядка:

$$-4(10 - \hat{\beta}) - 2(3 - \hat{\beta}) = 0$$

$$20 - 2\hat{\beta} + 3 - \hat{\beta} = 0$$

$$3\hat{\beta} = 23$$

$$\hat{\beta} = \frac{23}{3}$$

1.14. Условие первого порядка $\int_0^1 -2x(f(x) - \hat{\beta}x)\,dx = 0$, получаем

$$\hat{\beta} = \frac{\int_0^1 xf(x)\,dx}{\int_0^1 x^2\,dx}$$

$$\hat{\beta} = \left(\int_0^1 f(x)xdx\right) / \left(\int_0^1 x^2dx\right)$$

1.15.

1. Проявите воображение! Все зависит от данных. Например, может быть вот так:

```r
tikz("../R_plots/aggregate_regression.tikz", standAlone = FALSE, bareBones = TRUE)
n <- 100;
s <- rep(c(0, 4), c(n/2, n/2));
x <- c(1 + runif(n/2), runif(n/2));
y <- 2 * x + s + rnorm(n, sd = 0.15)


plot(x, y, type = "n", frame = "FALSE")
points(x[1 : (n/2)], y[1 : (n/2)], pch = 21,
       col = "black", bg = "ForestGreen", cex = 2)
points(x[(n/2 + 1) : n], y[(n/2 + 1) : n],
       pch = 21, col = "black", bg = "SkyBlue", cex = 2)

modelV1 <- lm(y ~ x + s)
# модели по 1:100 и 101:200 в отдельности
abline(coef(modelV1)[1], coef(modelV1)[2], lwd = 3)
abline(coef(modelV1)[1] + 4 * coef(modelV1)[3],
       coef(modelV1)[2], lwd = 3)
modelV2 <- lm(y ~ x)
# общая модель
abline(modelV2, lwd = 2, col = "red")
invisible(dev.off())
```

2. Так тоже бывает:

```r
tikz("../R_plots/aggregate_regression_b.tikz", standAlone = FALSE, bareBones = TRUE)
n <- 100;
s <- rep(c(0, 4), c(n/2, n/2));
```

```
x <- c(runif(n/2), 1 + runif(n/2));
y <- -2 * x + s + rnorm(n, sd = 0.15)

plot(x, y, type = "n", frame = FALSE)
points(x[1 : (n/2)], y[1 : (n/2)], pch = 21,
      col = "black", bg = "ForestGreen", cex = 2)
points(x[(n/2 + 1) : n], y[(n/2 + 1) : n], pch = 21,
      col = "black", bg = "SkyBlue", cex = 2)

modelV1 <- lm(y ~ x + s)
# модели по 1:100 и 101:200 в отдельности
abline(coef(modelV1)[1], coef(modelV1)[2], lwd = 3)
abline(coef(modelV1)[1] + 4 * coef(modelV1)[3], coef(modelV1)[2], lwd = 3)
modelV2 <- lm(y ~ x)
# общая модель
abline(modelV2, lwd = 2, col = "red")
invisible(dev.off())
```

3. А вот так не бывает!

1.16. Нет. Коэффициенты можно интерпретировать только «при прочих равных», т.е. при равных x. Из-за разных x может оказаться, что у мужчин $\bar{y}$ меньше, чем $\bar{y}$ для женщин.

1.17. Модель можно представить в линейном виде, когда неизвестные параметры входят в нее линейно.

1. Обозначим $z_i = 1/x_i$, и готово.
2. Возьмем логарифм от обеих частей...
3. Вычтем единицу из обеих частей и снова логарифм...
4. Перевернем обе части уравнения, вычтем единицу и прологарифмируем...
5. Вместо x_i возьмем e^{x_i} и прологарифмируем...
6. Вместо β_1 возьмем e^{β_1} и прологарифмируем...

1.18. Пусть $\bar{y}_m$ — среднее значение y по выборке для мужчин, $\bar{y}_f$ — среднее значение y по выборке для женщин. Тогда

1. $\hat{y} = \bar{y}_m + (\bar{y}_m - \bar{y}_f) \cdot f$

   Оцениваемая модель:

   $$y_i = \beta_1 + \beta_2 f_i + \varepsilon_i$$

   Стандартная процедура МНК:

   $$RSS = \sum \varepsilon_i^2 = \sum (y_i - \beta_1 - \beta_2 \cdot f_i)^2 \to \min_{\beta_1, \beta_2}$$

   $$\frac{\partial RSS}{\partial \beta_1} = 2 \sum (y_i - \beta_1 - \beta_2)(-1)$$

   $$\frac{\partial RSS}{\partial \beta_2} = 2 \sum (y_i - \beta_1 - \beta_2)(-f_i)$$

   Условия первого порядка:

   $$\sum \left(y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 \cdot f_i\right) = 0$$

   $$\sum \left(\left(y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 \cdot f_i\right) \cdot f_i\right) = 0$$

   Осталось немного поработать с оператором суммирования. Обозначим за k — число женщин в нашей выборке объемом n, мужчин тогда будет $n - k$. Тогда

   $$\sum \left(y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 \cdot f_i\right) = k\bar{y}_f + (n-k)\bar{y}_m - n\hat{\beta}_1 - k\hat{\beta}_2 = 0$$

   $$\sum \left(\left(y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 \cdot f_i\right) \cdot f_i\right) = k\bar{y}_f - k\hat{\beta}_1 - k\hat{\beta}_2 = 0$$

   Отсюда легко ищутся оценки коэффициентов:

   $$\hat{\beta}_1 = \bar{y}_m, \ \hat{\beta}_2 = \bar{y}_f - \bar{y}_m$$

   Следовательно:

   $$\hat{y} = \bar{y}_m + (\bar{y}_f - \bar{y}_m) \cdot f$$

2. $\hat{y} = \bar{y}_f + (\bar{y}_m - \bar{y}_f) \cdot m$

3. $\hat{y} = \bar{y}_m \cdot m + \bar{y}_f \cdot f$

4. Условия первого порядка линейного зависимы — мультиколлинеарность. МНК-оценки здесь не единственны.

1.19. Если сложить попарно m_i и f_i, то в сумме всегда выйдет единица. А оценки, полученные при помощи метода наименьших квадратов линейны по объясняемой переменной, то есть оценки коэффициентов модели $m_i + f_i \sim \ldots$ это суммы соответствующих оценок из двух разных моделей. Но они должны получиться равными 1 и 0 соответствнно (так как зависимая переменная — вектор из единиц). Поэтому $\hat{\beta}_1 + \hat{\gamma}_1 = 1$, $\hat{\beta}_2 + \hat{\gamma}_2 = 0$.

1.20. Все оценки коэффициентов увеличатся в 100 раз.

1.21. Да, возможно:

```
tikz("../R_plots/with_and_without_c.tikz", standAlone = FALSE, bareBones = TRUE)
x <- c(rnorm(n, mean = 4, sd = 2))
y <- x - 7 + runif(n, min = -1, max = 1)

plot(x,y, pch = 21, bg = "ForestGreen",
   col = "black", xlim = c(0,10), ylim = c(-5,3))
abline(coef(lm(y ~ x))[1], coef(lm(y ~ x))[2], lwd = 2)
abline(0, coef(lm(y ~ 0 + x))[1] , lwd = 2)
labels <- c("With intercept", "Without intercept")
text(c(7.5, 1.5), c(2, 0.4), labels)
coef(lm(y ~ x))
coef(lm(y ~ 0 + x))
invisible(dev.off())
```

1.22. Так как $\hat{y} = \hat{\beta} = \bar{y}$, то $R^2 = 0$.

1.23. Вспомним формулу для TSS:

$$TSS = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

Так как значения y остались теми же, $TSS_1 = TSS_2$.

$$RSS = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \qquad ESS = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

Добавление еще одного регрессора не уменьшит точность оценки, то есть $RSS_2 \leqslant RSS_1$, $ESS_2 \geqslant ESS_1$.

Соответственно, коэффициент $R^2 = ESS/TSS$ не уменьшится, то есть $R_2^2 \geqslant R_1^2$.

1.24. Интересный результат, [Lea75]: смена знака коэффициента перед x при удалении переменной z не может произойти, если абсолютное значение t-статистики коэффициента перед z в регрессии с регрессорами x и z меньше абсолютного значения t-статистики коэффициента перед x. Пример такого набора данных:

```
set.seed(777)
y <- 1:50
z <- y + rnorm(length(y), 0, 0.01)
x <- y + rnorm(length(y), 0, 1)
m_short <- lm(y ~ x)
m_long <- lm(y ~ x + z)
texreg(list(m_short, m_long))
```

	Model 1	Model 2
(Intercept)	0.04	-0.00
	(0.27)	(0.00)
x	1.00^{***}	-0.00
	(0.01)	(0.00)
z		1.00^{***}
		(0.00)
R^2	1.00	1.00
Adj. R^2	1.00	1.00
Num. obs.	50	50
RMSE	0.94	0.01

$^{***}p < 0.001$, $^{**}p < 0.01$, $^{*}p < 0.05$

Таблица 20.1: Statistical models

1.25. $y_i^* = 7 + 3(y_i - \bar{y})/s_y$ Нужно вспомнить свойства математического ожидания и дисперсии и провести следующие преобразования:

$$\tilde{y}_i = \frac{y_i - \bar{y}}{s_y} \Rightarrow \mathbb{E}[\tilde{y}] = 0, \ \ \mathrm{Var}(\tilde{y}) = 1$$

$$y_i^* = \tilde{y}_i \cdot 3 + 7 \Rightarrow \mathbb{E}[y^*] = 7, \ \ \mathrm{Var}(y^*) = 9$$

1.26.

R^2 одинаков для этих моделей. Докажем это в общем виде.

R^2 для модели $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i$:

$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{y} - \hat{\beta}_2 \bar{x} + \hat{\beta}_2 x_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\hat{\beta}_2^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} =$

$= \frac{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\right)^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right)^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\right)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} =$

$= \hat{\beta}_2 \hat{\alpha}_2$

Если проделать те же действия для модели $\hat{x}_i = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 x_i$, мы получим тот же результат.

$R^2 = -3 \cdot \frac{-1}{12} = \frac{1}{4}$.

Также можно заметить, что $\widehat{\mathrm{Corr}}^2 = R^2$. То есть, выборочная корреляция равна $-1/2$, так как коэффициенты отрицательные (между y и x отрицательная зависимость).

1.27. На две неизвестных a и b нужно два уравнения. Эти два уравнения — ортогональность вектора остатков плоскости регрессоров. А именно:

$$\begin{cases} \sum_i (y_i - \hat{y}_i) = 0 \\ \sum_i (y_i - \hat{y}_i)\hat{y}_i = 0 \end{cases}$$

В нашем случае

$$\begin{cases} -1 + (6-a) + (6-b) = 0 \\ -1 + (6-a)a + (6-b)b = 0 \end{cases}$$

Решаем квадратное уравнение и получаем два решения: $a = 4$ и $a = 7$. Итого: $a = 4$, $b = 7$.

1.28. Обе ситуации возможны.

2.1. Даешь симуляции!

```
tikz("../R_plots/uniform_errors.tikz", standAlone = FALSE, bareBones = TRUE)

n <- 100 # количество наблюдений
m <- 100 # можно менять количество прогонов
         # и радоваться!
x <- rnorm(n, 5, 1)

b1 <- rep(0, m)
b2 <- rep(0, m)
sHatSquared <- rep(0, m)
varB1 <- rep(0, m)
varB2 <- rep(0, m)
Cov <- rep(0, m)

for(i in 1:m) {
  y <- 1 + 2 * x + runif(n, -1, 1)        # остатки распределены как надо
```

```
  b1[i] <- coef(lm(y ~ x))[[1]]
  b2[i] <- coef(lm(y ~ x))[[2]]
  sHatSquared[i] <- sum((summary(lm(y ~ x))$resid)^2) / (n - 2)
  varB1[i] <- vcov(lm(y ~ x))[1, 1]
  varB2[i] <- vcov(lm(y ~ x))[2, 2]
  Cov[i] <- vcov(lm(y ~ x))[1, 2]
}

palette(c("ForestGreen", "olivedrab", "SkyBlue", "tomato3", "navy", "brown"))
par(mfrow = c(2, 3))

toPlot <- data.frame(b1 = b1, b2 = b2, sHatSquared = sHatSquared,
                     varB1 = varB1, varB2 = varB2, Cov = Cov)

for(i in 1:ncol(toPlot))          # построим все одним махом
{
  hist(toPlot[, i], prob = TRUE, main = "",
       xlab = colnames(toPlot)[i], ylim = c(0, max(density(toPlot[, i])$y)) )
  lines(density(toPlot[, i]), col = i, lwd = 4)
}

invisible(dev.off())
```

2.2.

1. $\mathbb{E}(\bar{y}) = \mu$
2. $\mathrm{Var}(\bar{y}) = \sigma^2/n$
3. $\mathbb{E}\left(\sum(y_i - \bar{y})^2/n\right) = \sigma^2(n-1)/n$

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum(y_i - \bar{y})^2\right) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum y_i^2 - \frac{2}{n}\bar{y}\sum y_i + \bar{y}^2\right) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum y_i^2 - \bar{y}^2\right) =$$

$$= \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 - \frac{1}{n}\sigma^2 = \sigma^2\frac{n-1}{n}$$

4. Сумма $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ имеет хи-квадрат распределение с $(n-1)$ степенью свободы, её дисперсия равна $2(n-1)\cdot\sigma^4$.

2.3. Данная модель удовлетворяет условиям теоремы Гаусса-Маркова, поэтому оценка $\hat{\beta}$ методом наименьших квадратов будет эффективной. Найдем ее:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta x_i)^2 \to \min_{\beta} \Rightarrow \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Поэтому ответ следующий: $c_i = c \cdot x_i$, $c \neq 0$.

2.4.

1.

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})y_i}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum x_i y_i - \bar{y}\sum x_i}{\sum x_i^2 - 2\bar{x}\sum x_i + n\bar{x}^2} = 2.5$$

$$\hat{\beta}_1 = \bar{y} - \hat{\beta}_2\bar{x} = 1.5$$

2.

$$\mathrm{Corr}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = \frac{\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) \cdot \mathrm{Var}(\hat{\beta}_2)}} = \frac{\mathrm{Cov}(\bar{y} - \hat{\beta}_2\bar{x}, \hat{\beta}_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\bar{y} - \hat{\beta}_2\bar{x}) \cdot \mathrm{Var}(\hat{\beta}_2)}} =$$

$$= \frac{-\bar{x} \cdot \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_2)}{\bar{x} \cdot \sqrt{\left(\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2)\right)^2}} = -1$$

3.

$$TSS = \sum(y_i - \bar{y})^2 = \sum y_i^2 - 2\bar{y}\sum y_i + n\bar{y}^2 = 10$$

4.

$$ESS = \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \sum(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i)^2 - 2\bar{y}\sum(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i) + n\hat{y}^2 =$$

$$= n \cdot \hat{\beta}_1^2 + 2 \cdot \hat{\beta}_1 \cdot \hat{\beta}_2 \sum x_i + \hat{\beta}_2^2 \sum x_i^2 - 2\bar{y}\left(n\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \sum x_i\right) + n\bar{y}^2 = 7.5$$

5.

$$RSS = TSS - ESS = 2.5$$

6.

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 0.75$$

7.
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS}{n-2} = \frac{5}{6}$$

Проверяем гипотезы:

1. $\begin{cases} H_0 : \beta_2 = 2 \\ H_a : \beta_2 \neq 2 \end{cases}$

   Уровень значимости выберем $\alpha = 5\,\%$.

   Формула расчета статистики:

$$T = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_{2,0}}{\sqrt{\widehat{\operatorname{Var}}(\hat{\beta}_2)}}$$

$$T = \frac{\hat{\beta}_2 - 2}{\sqrt{\widehat{\operatorname{Var}}(\hat{\beta}_2)}} \overset{H_0}{\sim} t_{n-2}$$

   Нам нужна дисперсия оценки коэффициента при x_i:

$$\operatorname{Var}(\hat{\beta}_2) = \operatorname{Var}\left(\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right) = \operatorname{Var}\left(\frac{\sum(x_i-\bar{x})y_i}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right)^2 \operatorname{Var}\left(\sum(x_i-\bar{x})y_i\right) = \left(\frac{1}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right)^2 \sum(x_i-\bar{x})^2 \operatorname{Var}(y_i) =$$
$$= \frac{\sigma^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}$$

   Истинную дисперсию ошибок мы не знаем, поэтому используем ее оценку, которую мы знаем:

$$\widehat{\operatorname{Var}}(\hat{\beta}_2) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2} \approx 0.694$$

   Наблюдаемое значение статистики:

$$T = 0.6$$

   Правое критическое значения при выбранном уровне значимости равно t_crit = 3.18.

```
t_crit <- qt(1 - 0.05/2, df = 5 - 2)
```

Проверяем, попадает ли наблюдаемое значение статистики в область, в которой H_0 не отвергается.

Итак, наблюдаемое значение статистики не попало в критическую область, следовательно, гипотеза H_0 не отвергается.

Находим P-значение, p_value = 0.59.

```
t_obs <- 0.6
p_value <- 2 * (1 - pt(t_obs, df = 3))
```

2. $\begin{cases} H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ H_a : \beta_1 + \beta_2 \neq 1 \end{cases}$

Уровень значимости выберем $\alpha = 5\,\%$.

Формула расчета статистики:

$$T = \frac{(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2) - (\beta_1 + \beta_2)_0}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2)}}$$

$$T = \frac{(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2) - 1}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2)}} \overset{H_0}{\sim} t_{n-2}$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) = \mathrm{Var}\left(\bar{y} - \hat{\beta}_2 \bar{x}\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\sum y_i + \bar{x}^2\,\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) = \frac{1}{n}\sigma^2 + \bar{x}^2 \cdot \frac{\sigma^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} =$$

$$= \sigma^2 \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 + n\bar{x}^2}{n \sum (x_i - \bar{x})^2} = \sigma^2 \frac{\sum x_i^2 - 2\bar{x}\sum x_i + 2n\bar{x}^2}{n\sum (x_i - \bar{x})^2} = \sigma^2 \frac{\sum x_i^2}{n \sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = \mathrm{Cov}(\bar{y} - \hat{\beta}_2 \bar{x}, \hat{\beta}_2) = \frac{1}{n}\mathrm{Cov}\left(\sum y_i, \hat{\beta}_2\right) - \bar{x}\,\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) =$$

$$= \mathrm{Cov}\left(\sum y_i, \frac{\sum (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}\right) - \bar{x} \cdot \frac{\sigma^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} =$$

$$= \sigma^2 \cdot \frac{\sum(x_i - \bar{x})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} - \bar{x} \cdot \frac{\sigma^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \sigma^2 \frac{-\bar{x}}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

Итак:

$$\begin{gathered}
\operatorname{Var}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2) = \operatorname{Var}(\hat{\beta}_1) + \operatorname{Var}(\hat{\beta}_2) + 2\operatorname{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = \\
= \sigma^2 \left(\frac{\sum x_i^2}{n\sum(x_i - \bar{x})^2} + \frac{1}{\sum(x_i - \bar{x})^2} - \frac{2\bar{x}}{\sum(x_i - \bar{x})^2} \right) = \sigma^2 \cdot \frac{\sum x_i^2 - 2\sum x_i + n}{n\sum(x_i - \bar{x})^2} = \\
= \sigma^2 \cdot \frac{\sum(x_i - 1)^2}{n\sum(x_i - \bar{x})^2} \quad (20.1)
\end{gathered}$$

$$\widehat{\operatorname{Var}}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2) = \hat{\sigma}^2 \cdot \frac{\sum(x_i - 1)^2}{n\sum(x_i - \bar{x})^2} \approx 0.278$$

Наблюдаемое значение статистики:

$$T \approx 5.692$$

Критические значения при выбранном уровне значимости, t_crit = 3.18.

```
t_crit <- qt(1 - 0.05/2, df = 5 - 2)
```

Проверяем, попадает ли наблюдаемое значение статистики в область, в которой H_0 не отвергается.

Итак, наблюдаемое значение статистики попадает в критическую область, следовательно, гипотеза H_0 отвергается в пользу альтернативной.

Находим P-значени, p_value = 0.01.

```
t_obs <- 5.692
p_value <- 2 * (1 - pt(t_obs, df = 3))
```

2.5. Если по-честному решить задачу минимизации RSS, получим следующие результаты:

$$\beta_2 = \frac{\operatorname{Cov}(x, y)}{\operatorname{Var}(x)} = \frac{\sum_i x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2}, \quad \beta_1 = \bar{y} - \beta_2 \bar{x}$$

Поэтому:

1. $\hat{\beta}_1 = 2.5$, $\hat{\beta}_2 = 2$
2.
$$\operatorname{Corr}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = \frac{\operatorname{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)}{\sqrt{\operatorname{Var}(\hat{\beta}_1)}\sqrt{\operatorname{Var}(\hat{\beta}_2)}} = \frac{\operatorname{Cov}(\bar{y} - \hat{\beta}_2\bar{x}, \hat{\beta}_2)}{\sqrt{\operatorname{Var}(\bar{y} - \hat{\beta}_2\bar{x})}\sqrt{\operatorname{Var}(\hat{\beta}_2)}} = \frac{\bar{x}(-\operatorname{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_2))}{\bar{x}\sqrt{\operatorname{Var}(\hat{\beta}_2)}\sqrt{\operatorname{Var}(\hat{\beta}_2)}} = -1$$
3. $TSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\bar{y}\sum_{i=1}^n y_i + n\bar{y}^2 = 55 - 2 \cdot \frac{15}{5} \cdot 15 + 5 \cdot \left(\frac{15}{5}\right)^2 = 10$
4. $ESS = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n \hat{y}_i^2 - 2\bar{y}\sum_{i=1}^n \hat{y}_i + n\bar{y}^2$
   Для начала посчитаем $\sum_{i=1}^n \hat{y}_i^2$ и $\sum_{i=1}^n \hat{y}_i$:
$$\sum_{i=1}^n \hat{y}_i = \sum_{i=1}^n (\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i) = n\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n x_i = 5 \cdot \frac{5}{2} + 2 \cdot 2 = 16.5$$
$$\sum_{i=1}^n \hat{y}_i^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i)^2 = n\hat{\beta}_1^2 + 2\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n x_i + \hat{\beta}_2^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = 5 \cdot \frac{25}{4} + 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 59.25$$
   Отсюда:
$$ESS = 59.5 - 2 \cdot \frac{15}{5} \cdot 16.5 + 5 \cdot \left(\frac{15}{5}\right)^2 = 5.5$$
5.
$$RSS = TSS - ESS = 10 - 5.5 = 4.5$$
6.
$$R^2 = \frac{RSS}{TSS} = 0.45$$
7.
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS}{n-k} = \frac{4.5}{5-2} = 1.5$$

Будем проверять гипотезу:

$$\begin{cases} H_0: & \beta_2 = 2 \\ H_a: & \beta_2 \neq 2 \end{cases}$$

Строим статистику:

$$\frac{\hat{\beta}_2 - 2}{se(\hat{\beta}_2)} \sim t_{n-k}$$

В нашем случае она равна нулю, поэтому гипотеза H_0 не отвергается. Вообще, для значений около 0 гипотеза H_0 не отвергается, а для значений далеких (в зависимости от уровня значимости) от нуля — отвергается.

Теперь проверим гипотезу:

$$\begin{cases} H_0: & \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ H_a: & \beta_1 + \beta_2 \neq 1 \end{cases}$$

То есть, гипотеза H_0 говорит, что верна ограниченная модель, а гипотеза H_a утверждает обратное. Оценим ограниченную модель и посчитаем статистику:

$$\frac{(RSS_r - RSS_{un})/q}{RSS_{un}/(n-k)} \sim F_{q,n-k}$$

где q — количество линейно-независимых ограничений (в нашем случае $q = 1$), n — количество наблюдений (одинаковое для обеих моделей) и k — количество оцениваемых коэффициентов в неограниченной модели ($k = 2$). Итак, $\beta_1 = 1 - \beta_2$:

$$RSS = \sum_{i=1}^{5} (y_i - 1 + \beta_2 - \beta_2 x_i)^2 \to \min_{\beta_2}$$

$$\frac{\partial RSS}{\partial \beta_2} = \sum_{i=1}^{5} 2(y_i - 1 + \hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_2 x_i)(1 - x_i) = 0 \Rightarrow$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^5 y_i - \sum_{i=1}^5 y_i x_i + \sum_{i=1}^5 x_i - 5}{2\sum_{i=1}^5 x_i + \sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5} = \frac{15 - 9 + 2 - 5}{2 \cdot 5 + 2 - 5} = \frac{3}{7} \Rightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{4}{7}$$

Тогда RSS для данной модели:

$$RSS = \sum_{i=1}^{5} \left(y_i - \frac{4}{7} - \frac{3}{7} x_i \right)^2 = \dots = \sum_{i=1}^{5} y_i^2 - \frac{8}{7} \sum_{i=1}^{5} y_i - \frac{6}{7} \sum_{i=1}^{5} y_i x_i + \frac{80}{49} + \frac{24}{49} \sum_{i=1}^{5} x_i + \frac{9}{49} \sum_{i=1}^{5} x_i^2 =$$

$$= 55 - \frac{8}{7} \cdot 15 - \frac{6}{7} \cdot 9 + \frac{80}{49} + \frac{24}{49} \cdot 2 + \frac{9}{49} \cdot 2 = \frac{1128}{49}$$

Соответственно, статистика:

$$\frac{(23-4.5)/1}{4.5/(5-2)} \approx 12.3$$

По построению статистики, гипотеза H_0 должна быть отвергнута, если значение статистики слишком сильно отличается от нуля. Найдем критическое значение при уровне значимости 5%, f_crit = 10.13.

```
f_crit <- qf(p = 0.95, df1 = 1, df2 = 3)
```

Вывод: H_0 отвергается.

2.6.

$$y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum y_i x_i}{\sum x_i^2}$$

$$\mathbb{E}\hat{\beta} = \mathbb{E}\left(\frac{\sum(\beta x_i + \varepsilon_i)x_i}{\sum x_i^2}\right) = \frac{1}{\sum x_i^2}\left(\beta\sum x_i^2 + \mathbb{E}\varepsilon_i x_i\right) =$$

$$= \frac{1}{\sum x_i^2}\left(\beta\sum x_i^2 + \mathrm{Cov}(\varepsilon_i, x_i) + \mathbb{E}e_i\mathbb{E}x_i\right) = \beta$$

1. Несмещённая.

$$\mathbb{E}\hat{\beta} = \mathbb{E}\left(\frac{y_1}{x_1}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{\beta x_1 + \varepsilon_1}{x_1}\right) = \beta + \frac{1}{x_1}\mathbb{E}\varepsilon_1 = \beta$$

2. Несмещённая.
3. Несмещённая.
4. Несмещённая.

$$\mathbb{E}\hat{\beta} = \mathbb{E}\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{y_1 + \ldots + y_n}{x_1 + \ldots + x_n}\right) = \beta + \mathbb{E}\left(\frac{\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n}{x_1 + \ldots + x_n}\right) = \beta$$

5. Несмещённая.

$$\mathbb{E}\hat{\beta} = \mathbb{E}\left(\frac{y_n - y_1}{x_n - x_1}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{\beta(x_n - x_1) + \varepsilon_n - \varepsilon_1}{x_n - x_1}\right) = \beta + \frac{1}{x_n - x_1}\mathbb{E}(\varepsilon_n - \varepsilon_1) = \beta$$

6. Несмещённая.

7. Смещённая.

$$\mathbb{E}\hat{\beta} = \underbrace{\frac{1}{n}\beta + \ldots + \frac{1}{n}\beta}_{\text{всего } n-1 \text{ членов}} = \frac{n-1}{n}\beta$$

8. Несмещённая.

9. Несмещённая.

$$\mathbb{E}\hat{\beta} = \mathbb{E}\left(\frac{x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n}{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\right) = \frac{1}{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\mathbb{E}\left(\beta x_1^2 + x_1\varepsilon_1 + \ldots + \beta x_n^2 + x_n\varepsilon_n\right) = \beta$$

10. Несмещённая. Линейная комбинация несмещённых оценок с суммой весов, равной 1, — несмещённая оценка.

11. Несмещённая.

12. Несмещённая.

$$\mathbb{E}\hat{\beta} = \mathbb{E}\left(\frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}\right) = \frac{1}{\sum(x_i - \bar{x})^2}\mathbb{E}\sum(x_i - \bar{x})y_i = \beta\cdot\frac{\sum(x_i - \bar{x})x_i}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \beta$$

13. Смещённая.

14. Несмещённая.

15. Несмещённая.

$$\mathbb{E}\hat{\beta} = \mathbb{E}\left(\frac{\sum i(y_i - \bar{y})}{\sum i(x_i - \bar{x})}\right) = \frac{\sum i\mathbb{E}(y_i - \bar{y})}{\sum i(x_i - \bar{x})} = \frac{\sum i(\beta x_i - \beta\bar{x})}{\sum i(x_i - \bar{x})} = \beta$$

16. Несмещённая.

17. Несмещённая.

2.7. В классической модели выполнены все предпосылки теоремы Гаусса-Маркова. Поэтому, во всех пунктах легко показывается, что возникающие в формулах ковариации будут равны 0. Более того, так как x_i детерминированы, частенько будут возникать константы, которые не влияют на дисперсию.

1.
$$\operatorname{Var}(\hat{\beta}) = \operatorname{Var}\left(\frac{\beta x_1 + \varepsilon_1}{x_1}\right) = \operatorname{Var}\left(\beta + \frac{\varepsilon_1}{x_1}\right) = \frac{1}{x_1^2}\sigma^2$$

2.
$$\operatorname{Var}(\hat{\beta}) = \operatorname{Var}\left(\frac{1}{2}\left(\beta + \frac{\varepsilon_1}{x_1}\right) + \frac{1}{2}\left(\beta + \frac{\varepsilon_2}{x_2}\right)\right) = \operatorname{Var}\left(\frac{\varepsilon_1}{2x_1} + \frac{\varepsilon_2}{2x_2}\right) = \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}\right)$$

3. По аналогии с предыдущим пунктом:
$$\operatorname{Var}(\hat{\beta}) = \operatorname{Var}\left(\frac{\varepsilon_1}{nx_1} + \cdots + \frac{\varepsilon_n}{nx_n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}\sum_i \frac{1}{x_i^2}$$

4.
$$\operatorname{Var}(\hat{\beta}) = \operatorname{Var}\left(\frac{\sum_i(\beta x_i + \varepsilon_i)}{n\bar{x}}\right) = \frac{1}{n^2\bar{x}^2}\cdot\operatorname{Var}\left(\underbrace{\beta\sum_i x_i}_{const} + \sum_i \varepsilon_i\right) = \frac{\sigma^2}{n\bar{x}^2}$$

5.
$$\operatorname{Var}(\hat{\beta}) = \frac{1}{(x_n - x_1)^2}\operatorname{Var}(y_n - y_1) = \frac{1}{(x_n - x_1)^2}\operatorname{Var}(\varepsilon_n - \varepsilon_1) = \frac{2\sigma^2}{(x_n - x_1)^2}$$

6.
$$\operatorname{Var}(\hat{\beta}) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(x_2 - x_1)^2}\operatorname{Var}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \frac{1}{(x_n - x_{n-1})^2}\operatorname{Var}(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1})\right) =$$
$$= \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1}{(x_1 - x_2)^2} + \frac{1}{(x_n - x_{n-1})^2}\right)$$

7.
$$\operatorname{Var}(\hat{\beta}) = \operatorname{Var}\left(\frac{\sum_i(\beta x_i + \varepsilon_i)x_i}{\sum_i x_i^2}\right) = \operatorname{Var}\left(\beta + \frac{\sum_i \varepsilon_i x_i}{\sum_i x_i^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{\left(\sum_i x_i^2\right)^2}\sum_i \operatorname{Var}(x_i\varepsilon_i) = \frac{\sigma^2}{\sum_i x_i^2}$$

8.

$$\operatorname{Var}(\hat{\beta}) = \operatorname{Var}\left(\beta + \frac{\sum\limits_i (x_i - \bar{x})\varepsilon_i}{\sum\limits_i (x_i - \bar{x})^2}\right) = \frac{1}{\left(\sum\limits_i (x_i - \bar{x})^2\right)^2} \sum_i \operatorname{Var}\left((x_i - \bar{x})\varepsilon_i\right) = \frac{\sigma^2}{\sum\limits_i (x_i - \bar{x})^2}$$

9. Если аккуратно все сделать, — результат тот же, что и в предыдущем пункте.

10.

$$\operatorname{Var}(\hat{\beta}) = \operatorname{Var}\left(\frac{\sum\limits_i i y_i}{\sum\limits_i i x_i}\right) = \operatorname{Var}\left(\beta + \frac{\sum\limits_i i\varepsilon_i}{\sum\limits_i i x_i}\right) = \frac{1}{\left(\sum\limits_i i x_i\right)^2} \sum_i \operatorname{Var}(i\varepsilon_i) = \frac{\sigma^2 \sum\limits_i i^2}{\left(\sum\limits_i i x_i\right)^2}$$

11.

$$\operatorname{Var}(\hat{\beta}) = \operatorname{Var}\left(\frac{\sum\limits_i i(y_i - \bar{y})}{\sum\limits_i i(x_i - \bar{x})}\right) = \operatorname{Var}\left(\frac{\sum\limits_i i(\beta x_i + \varepsilon_i) - \frac{\sum i}{n}\sum(\beta x_i + \varepsilon_i)}{\sum\limits_i i(x_i - \bar{x})}\right) =$$

$$= \operatorname{Var}\left(\beta + \frac{\sum\limits_i (i - \frac{n+1}{2})\varepsilon_i}{\sum\limits_i i(x_i - \bar{x})}\right) = \frac{\sigma^2 \sum\limits_i \left(i - \frac{n+1}{2}\right)^2}{\left(\sum\limits_i i(x_i - \bar{x})\right)^2}$$

12.

$$\operatorname{Var}(\hat{\beta}) = \operatorname{Var}\left(\beta + \frac{1}{n}\sum_i \frac{\varepsilon_i}{x_i}\right) = \frac{\sigma^2}{n^2}\sum_i \frac{1}{x_i^2}$$

13.

$$\hat{\beta} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\beta x_i + \varepsilon_i - \frac{1}{n}\sum\limits_i y_i}{x_i - \bar{x}} = \frac{1}{n}\sum_i \left(\beta + \frac{\varepsilon_i - \frac{1}{n}\sum\limits_i \varepsilon_i}{x_i - \bar{x}}\right) = \beta + \frac{1}{n}\sum_i \frac{\varepsilon_i - \frac{1}{n}\sum\limits_i \varepsilon_i}{x_i - \bar{x}}$$

Рассмотрим отдельно величину:

$$\operatorname{Var}\left(\varepsilon_i - \frac{1}{n}\sum_i \varepsilon_i\right) = \sigma^2 + \frac{1}{n^2} n\sigma^2 - 2 \cdot \frac{1}{n}\operatorname{Cov}\left(\varepsilon_i, \sum_i \varepsilon_i\right) =$$

$$= \sigma^2 + \frac{1}{n}\sigma^2 - \frac{2}{n}\left(\sum_{j\neq i} \mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) + \mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_i)\right) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

И вот настал торжественный момент:

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}) = \frac{1}{n^2}\sum_i \mathrm{Var}\left(\frac{\varepsilon_i - \frac{1}{n}\sum_i \varepsilon_i}{x_i - \bar{x}}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_i \frac{1}{(x_i-\bar{x})^2}\frac{n-1}{n}\sigma^2 = \frac{\sigma^2(n-1)}{n^3}\sum_i \frac{1}{(x_i-\bar{x})^2}$$

2.8. Все оценки несмещённые. Замечаем, что

$$\tilde{\beta} = \frac{1\cdot y_1 + \ldots + n\cdot y_n}{1^2 + \ldots + n^2} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2},$$

то есть это классическая МНК-оценка, обладающая наименьшей дисперсией среди несмещённых оценок.

В третьем пункте можно сделать и «в лоб»:

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}) = \sigma^2 \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right) \geqslant \sigma^2\frac{1}{n^2}$$

$$\mathrm{Var}(\tilde{\beta}) = \sigma^2 \frac{1}{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2} \leqslant \sigma^2 \frac{1}{n^2}$$

1. $\tilde{\beta}$

$$\mathrm{Var}\,\hat{\beta} = \mathrm{Var}\,(\beta + \varepsilon_i) = \sigma^2$$

$$\mathrm{Var}\,\tilde{\beta} = \mathrm{Var}\left(\beta + \frac{\varepsilon_i}{2}\right) = \frac{\sigma^2}{4}$$

2. $\tilde{\beta}$

$$\mathrm{Var}\,\hat{\beta} = \sigma^2$$

$$Var\tilde{\beta} = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}\frac{y_2}{2}\right) = \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{16}\sigma^2 = \frac{5}{16}\sigma^2$$

3. $\tilde{\beta}$

$$\mathrm{Var}\,\hat{\beta} = \frac{1}{n^2}\left(1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right)\sigma^2$$

$$\mathrm{Var}\,\tilde{\beta} = \frac{\sigma^2}{1 + 4 + \ldots + n^2}$$

$$\frac{1+4+\ldots+n^2}{n^2}\left(1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)>1 \Rightarrow \operatorname{Var}\hat{\beta}>\operatorname{Var}\tilde{\beta}$$

2.9. Данная модель получается логарифмированием функции спроса вида:

$$Q(P)=\frac{e^a}{P^b}$$

Такие функции спроса примечательны постоянной эластичностью, которая равна b. Соответственно, нужно проверить, значимо ли коэффициент $\hat{\beta}_2 = -1.23$ отличается от -1. Строим статистику и смотрим на квантиль t-распределения:

$$\frac{\hat{\beta}_2-\beta_2}{s.e(\hat{\beta}_2)}\sim t_{100-2}\Rightarrow\frac{-1.23-(-1)}{0.02}=-11.5$$

Если значение статистики будет слишком далеко от 0, меньше -t_crit = -1.98, или больше t_crit = 1.98, то различия значимы.

```
t_crit <- qt(0.025, df = 98)
```

Вывод: значимо.

2.10. Формула расчета статистики:

$$T=\frac{\hat{\beta}_{\log P}-\beta_{\log P,0}}{se\left(\hat{\beta}_{\log P}\right)}$$

$$T=\frac{\hat{\beta}_{\log P}-(-1)}{se\left(\hat{\beta}_{\log P}\right)}\overset{H_0}{\sim} t_{100-2}$$

Наблюдаемое значение статистики:

$$T=-6$$

Проверим гипотезу с помощью P-значения, p_value = $3.3\cdot 10^{-8}$:

```
p_value <- 2 * pt(-6, df = 98)
```

Гипотеза отвергается в пользу альтернативной на уровне значимости 5 %.

Экономическая интерпретация проверяемой гипотезы — присутствует ли единичная эластичность на рынке? Альтернатива — спрос эластичный, то есть объем спроса изменяется на больший процент, чем цена.

2.11. Просто строим t-статистику и считаем нужные квантили:

$$\frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{s.e(\hat{\beta}_2)} \sim t_{45-2} \Rightarrow \frac{-0.23 - 0}{0.04} = -5.75$$

Нужно сравнить с t_crit = -2.695.

```
t_crit <- qt(0.005, df = 43)
```

Видим, что статистика слишком сильно отличается от нуля. Вывод: гипотеза H_0 отвергается.

2.12.

1. Формула расчета статистики:

$$T = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{1,0}}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1)}}$$

2. Распределение тестовой статистики при верной H_0:

$$T = \frac{\hat{\beta}_1 - 3.5}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1)}} \overset{H_0}{\sim} t_{n-2}$$

3. Для вычисления наблюдаемого значения тестовой статистики необходимо найти $\hat{\beta}_1$ и $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1)$ (выводы формул смотри в решении задачи 2.4):

$$\hat{\beta}_1 = \bar{y} - \hat{\beta}_2\bar{x} = \bar{y} - \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}\bar{x} = \bar{y} - \frac{\sum x_i y_i - \bar{y}\sum x_i}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}\bar{x} = 1.5$$

$$\mathrm{Var}\,\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i^2}{n(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2)}\sigma^2 \approx 0.21\sigma^2$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\bar{y} - \hat{\beta}_1}{\bar{x}} = 4$$

$$RSS = \sum (y_i - 1.5 - 4x_i)^2 =$$

$$= \sum y_i^2 + 18 \cdot 1.5^2 + 16 \sum x_i^2 - 3 \sum y_i - 8 \sum y_i x_i + 12 \sum x_i = 661.5$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS}{n-k} \approx 41.34$$

$$\widehat{\mathrm{Var}} \hat{\beta}_1 \approx 8.68$$

$$T_o \approx -0.68$$

4. Основная гипотеза не отвергается на $[-2.12, 2.12]$.

5. Нулевая гипотеза не отвергается на уровне значимости 5 %.

2.13.

Оценка, имеющая наименьшую дисперсию в каком-то классе оценок, называется эффективной оценкой в этом классе. В данной модели выполняются все предпосылки теоремы Гаусса-Маркова, поэтому МНК оценка будет эффективной. Для случая регрессии на константу оценка имеет вид:

$$\hat{\mu} = \frac{\sum\limits_i y_i}{n}$$

Отсюда сразу получаем: $c_i = \frac{1}{n}$.
Можно также решить задачу условной минимизации.

2.14.

1. Классические формулы для парной регрессии:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

2. Оценки несмещённы, дисперсия задаётся стандартными формулами.

3. Несмещённые оценки, дисперсия стремится к нулю, следовательно, оценки состоятельны.

2.15.

1. Из МНК получаем:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_i i y_i}{\sum_i i^2} = \frac{\sum_i i(\beta i + \varepsilon_i)}{\sum_i i^2} = \beta + \frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}{5}$$

Так как ошибки независимы и каждая из них равновероятно принимает значения -1 и 1, возможны всего 4 варианта, каждый с вероятностью $\frac{1}{4}$:

$\hat{\beta}$	$\beta - \frac{3}{5}$	$\beta - \frac{1}{5}$	$\beta + \frac{1}{5}$	$\beta + \frac{3}{5}$
$\mathbb{P}(\cdot)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Заметим, что $\hat{y}_i = \beta \cdot i + \dfrac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}{5} \cdot i + \varepsilon_i$, поэтому:

$$RSS = (y_1 - \hat{y}_1)^2 + (y_2 - \hat{y}_2)^2 = \frac{\varepsilon_1^2 + 4\varepsilon_1\varepsilon_2 + 4\varepsilon_2^2}{5}$$

RSS	$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$
$\mathbb{P}(\cdot)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Так же по определению можем посчитать TSS:

$$TSS = \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + \beta}{2}\right)^2$$

$\hat{\beta}$	$\frac{\beta^2}{2}$	$\frac{(\beta-2)^2}{2}$	$\frac{(\beta+2)^2}{2}$
$\mathbb{P}(\cdot)$	0.5	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

2. Заметим, что $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \mathbb{E}(\varepsilon_i^2) = 1$, $\mathbb{E}(\varepsilon_1\varepsilon_2) = 0$. Поэтому:

$$\mathbb{E}(\hat{\beta}) = \beta, \quad \mathrm{Var}(\hat{\beta}) = \mathrm{Var}\left(\beta + \frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}{5}\right) = \frac{5\,\mathrm{Var}(\varepsilon_i)}{25} = \frac{1}{5}, \quad \mathbb{E}(RSS) = 1$$

2.16.

1. $\hat{\beta} = 6\sum_{i=1}^{T} iy_i/(T(T+1)(2T+1))$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{T} iy_i}{\sum_{i=1}^{T} i^2} = \beta + \frac{\sum_{i=1}^{T} i\varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{T} i^2}$$

2. $\mathbb{E}\hat{\beta} = \beta$, $\operatorname{Var}\hat{\beta} = \sigma^2/\sum i^2 = 6\sigma^2/(T(T+1)(2T+1))$

3. Оценка является состоятельной.

2.17. Несостоятельна.

2.18.

1.
$$\hat{\beta}_2 = \begin{cases} \frac{2}{T}(\sum_{i=2k+1} y_i - \sum_{i=2k} y_i), & T - \text{четное;} \\ \frac{2}{T+1}\sum_{i=2k+1} y_i - \frac{2}{T-1}\sum_{i=2k} y_i, & T - \text{нечетное.} \end{cases}$$

2.
$$\mathbb{E}\hat{\beta}_2 = \beta_2$$
$$\operatorname{Var}\hat{\beta}_2 = \begin{cases} \frac{4}{T}\sigma^2, & T - \text{четное;} \\ \frac{4T}{T^2-1}\sigma^2, & T - \text{нечетное.} \end{cases}$$

3. Оценка является состоятельной.

2.19.

1. Нужно решить задачу условной минимизации:

$$\begin{cases} RSS = \sum_i (y_i - \beta_1 - \beta_2 x_i)^2 \to \min_{\beta_1, \beta_2} \\ y_0 = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_0 \end{cases}$$

Можем воспользоваться условием и останется только одна переменная $\hat{\beta}_2$:
$$\sum_i (y_i - y_0 + \hat{\beta}_2 x_0 - \hat{\beta}_2 x_i)^2 \to \min_{\hat{\beta}_2}$$

Решение будет слудующее:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum\limits_i (x_i - x_0)(y_i - y_0)}{\sum\limits_i (x_i - x_0)^2}, \qquad \hat{\beta}_1 = y_0 - \hat{\beta}_2 x_0$$

2. А теперь придется немного повозиться:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum\limits_i x_i(\beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i) - x_0 \sum\limits_i (\beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i) - y_0 \sum\limits_i x_i + n x_0 y_0}{\sum\limits_i (x_i - x_0)^2} =$$

$$= \frac{\beta_1(\sum\limits_i x_i - n x_0) + \beta_2(\sum\limits_i x_i^2 - x_0 \sum\limits_i x_i) + \sum\limits_i x_i \varepsilon_i - x_0 \sum\limits_i \varepsilon_i - y_0 \sum\limits_i x_i + n x_0 y_0}{\sum\limits_i (x_i - x_0)^2}$$

Отсюда:

$$\mathbb{E}(\hat{\beta}_2) = \frac{\beta_1(\sum\limits_i x_i - n x_0) + \beta_2(\sum\limits_i x_i^2 - x_0 \sum\limits_i x_i) - y_0 \sum\limits_i x_i + n x_0 y_0}{\sum\limits_i (x_i - x_0)^2}$$

$$\operatorname{Var}(\hat{\beta}_2) = \operatorname{Var}\left(const + \frac{\sum\limits_i (x_i - x_0)\varepsilon_i}{\sum\limits_i (x_i - x_0)^2} \right) = \frac{\sigma^2}{\sum\limits_i (x_i - x_0)^2}$$

$$\mathbb{E}(\hat{\beta}_1) = y_0 - x_0 \cdot \mathbb{E}(\hat{\beta}_2), \qquad \operatorname{Var}(\hat{\beta}_1) = x_0^2 \cdot \operatorname{Var}(\hat{\beta}_2)$$

Вроде бы равносильно переносу начала координат и применению результата для регрессии без свободного члена. Должна остаться несмещённость.

2.20.

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\beta_1 + \beta_2 T + \varepsilon_T - \beta_1 - \beta_2 - \varepsilon_1}{T - 1} = \beta_2 + \frac{1}{T-1}(\varepsilon_T - \varepsilon_1)$$

1.

$$\mathbb{E}\hat{\beta}_2 = \beta_2$$

$$\operatorname{Var} \hat{\beta}_2 = \frac{2}{(T-1)^2}\sigma^2$$

2. Нет, не совпадает.

$$\hat{\beta}_{2,OLS} = \frac{\sum_{i=1}^{T}(i-\bar{i})y_i}{\sum_{i=1}^{T}(i-\bar{i})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{T}(i-\bar{i})(\beta_1+\beta_2 i+\varepsilon_i)}{\sum_{i=1}^{T}(i-\bar{i})^2} = \beta_2 + \frac{\sum_{i=1}^{T}(i-\bar{i})\varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{T}(i-\bar{i})^2}$$

3.

$$\operatorname{Var}\hat{\beta}_{2,OLS} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{T}(i-\bar{i})^2}\sigma^2$$

$$\sum_{i=1}^{T}(i-\bar{i})^2 = \sum_{i=1}^{T} i^2 - T\bar{i}^2 = \frac{T(T+1)(2T+1)}{6} - T\frac{(T+1)^2}{4} = \frac{T(T+1)(T-1)}{12}$$

$$\operatorname{Var}\hat{\beta}_{2,OLS} = \frac{12}{T(T+1)(T-1)}\sigma^2$$

Для всех $T > 3$: $\operatorname{Var}\hat{\beta}_{2,OLS} < \operatorname{Var}\hat{\beta}_2$. Для $T \in \{2,3\}$ дисперсии одинаковы.

2.21.

1. Не прав. Ковариация $\operatorname{Cov}(y_i, \hat{y}_i)$ зависит от i, это не одно неизвестное число, для которого можно предложить одну оценку.

2.

2.22. Формула $\sum(y_i-\bar{y})^2/(n-1)$ неприменима так как $\mathbb{E}y_i$ не является константой и зависит от x_i.

2.23. R^2 — это отношение выборочных дисперсий $\hat{y}$ и y.

$$R^2 = \frac{4\cdot 9}{40} = 0.9$$

$$\operatorname{sCorr}(x,y) = -\sqrt{R^2} \approx -0.949$$

$$\operatorname{sCorr}(\hat{y},y) = \sqrt{R^2} \approx 0.949$$

2.24.

1. Оценим следующую модель:

$$y_i = \beta_1 \cdot \xi_i + \beta_2 \cdot \eta_i + \varepsilon_i,$$

где y_i — результат взвешивания; ξ_i — дамми-переменная, равная единице, если на весах есть первый слиток; η_i — дамми-переменная, равная единице, если на весах есть второй слиток.

Задача минимизации суммы квадратов остатков выглядит следующим образом:

$$(300 - \beta_1)^2 + (200 - \beta_2)^2 + (400 - \beta_1 - \beta_2)^2 \to \min_{\beta_1, \beta_2}$$

Решая систему условий первого порядка, находим, что

$$\hat{\beta}_1 = \frac{800}{3}, \hat{\beta}_2 = \frac{500}{3}$$

Так как предпосылки теоремы Гаусса-Маркова выполняются, то оценки коэффициентов являются несмещёнными и обладают наименьшей дисперсией в классе линейных оценок. Следовательно, несмещённая оценка веса первого слитка, обладающая наименьшей дисперсией, равна $800/3$.

2. Интерпретация — отсутствие систематической ошибки весов.

2.25.

1. Нет.
2. Нет.
3. Нет.

2.26. При нормальности ошибок выполнено свойство:

$$\frac{RSS}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-k}$$

Зная свойства хи-квадрат распределения, легко найти необходимые математическое ожидание и дисперсию.

$$\mathbb{E}RSS = (n-k)\sigma^2 = 20\sigma^2$$

$$\operatorname{Var} RSS = 2(n-k)\sigma^4 = 40\sigma^4$$

$$\mathbb{P}\left(10 < \frac{RSS}{\sigma^2} < 30\right) \approx 0.898$$

```
pchisq(30, 20) - pchisq(10, 20)
```

$$\mathbb{P}\left(10\hat{\sigma}^2 < \hat{\sigma}^2(n-k) < 30\hat{\sigma}^2\right) = 1$$

2.27.

1. $$\mathbb{P}(\hat{\beta}_1 > \beta_1) = \mathbb{P}\left(\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{se(\hat{\beta}_1)} > 0\right) = \frac{1}{2}$$

   $\mathbb{P}(\beta_1 > 0)$ равна либо 0 либо 1, но мы этого не знаем и никогда не узнаем.

   $$\mathbb{P}(|\hat{\beta}_1 - \beta_1| < se(\hat{\beta}_1)) = \mathbb{P}(|Z| < 1) \approx 0.66, \quad Z \sim t_{12-2}$$

   Посчитаем в R:

```
pt(1, df = 10) - pt(-1, df = 10)
```

$$\mathbb{P}\left(\frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{se(\hat{\beta}_2)} > 1\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{se(\hat{\beta}_2)} < 1\right) \approx 0.17$$

```
1 - pt(1, df = 10)
```

$$\mathbb{P}\left(\frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{se(\hat{\beta}_2)} > -1\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{se(\hat{\beta}_2)} < 1\right) \approx 0.83$$

```
pt(1, df = 10)
```

2. Выполнены предпосылки теоремы Гаусса-Маркова, поэтому оценки МНК несмещённые: $\mathbb{E}(\hat{\beta}_1) = \beta_1$, $\mathbb{E}(\hat{\beta}_2) = \beta_2$. А $\mathbb{E}(\beta_2) = \beta_2$, независимо от предпосылок.

3. Первая величина $\sim \mathcal{N}(0,1)$, вторая и третья $\sim t_{10}$.

4.

$$\mathbb{P}(\hat{\sigma} > \sigma) = \mathbb{P}(\hat{\sigma}^2 > \sigma^2) = \mathbb{P}\left(\frac{RSS}{n-k} > \sigma^2\right) = \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{RSS}{\sigma^2}}_{Z} > 10\right) \approx 0.44, \quad Z \sim \chi^2_{10}$$

```
1 - pchisq(10, df = 10)
```

Аналогично, $\mathbb{P}(\hat{\sigma} > 2\sigma) \approx 1.69 \cdot 10^{-5}$ равна:

```
1 - pchisq(40, df = 10)
```

2.28.

$$RSS = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y})^2 = 2$$

$$TSS = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 = 10$$

$$R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 0.8$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS}{n-k} = \frac{2}{3}$$

2.29. В классической модели все ошибки распределены одинаково, поэтому условие $\mathrm{Var}(\varepsilon_7) = 9$ означает, что $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0,9)$. Из этого следует, что МНК оценки $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$ так же будут нормально распределены.

1. $\mathbb{E}(\varepsilon_2) = 0$, $\mathrm{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$, $\mathbb{E}(\varepsilon_3^5) = 0$, как и все нечетные начальные моменты симметричного относительно нулевого матожидания распределения. Остатки регрессии так же будут распределены нормально, как линейная комбинация нормально распределенных случайных величин. $\mathbb{E}(e_i) = \mathbb{E}[(\beta_1 - \hat{\beta}_2) + (\beta_2 - \hat{\beta}_2)x_i + \varepsilon_i] = 0$, так как МНК оценки $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$ — несмещённые. То есть все остатки распределены нормально с 0 матожиданием, поэтому все нечетные начальные моменты будут равны нулю. Отсюда: $\mathbb{E}(e_5^3) = 0$. $\mathrm{Var}(y_3) = \mathrm{Var}(\beta_1 + \beta_2 x_3 + \varepsilon_3) = \mathrm{Var}(\varepsilon_3) = 9$.

Теперь посчитаем дисперсию e_5. Это будет не слишком просто:

$$\mathrm{Var}(e_5) = \mathrm{Var}(y_5 - \hat{y}_5) = \mathrm{Var}(\beta_1 - \hat{\beta}_1 + \beta_2 x_5 - \hat{\beta}_2 x_5 + \varepsilon_5) =$$

$$= \mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) + x_5^2 \cdot \mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) + \mathrm{Var}(\varepsilon_5) + 2x_5 \cdot \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) - 2\,\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_1, \varepsilon_5) - 2x_5 \cdot \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_2, \varepsilon_5)$$

Разберемся с каждым слагаемым в отдельности:

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) = \mathrm{Var}\left(\frac{\sum\limits_i (x_i - \bar{x})y_i}{\sum\limits_i (x_i - \bar{x})^2}\right) = \frac{1}{\left(\sum\limits_i (x_i - \bar{x})^2\right)^2} \sum_i \mathrm{Var}((x_i - \bar{x})y_i) = \frac{\sigma^2}{\sum\limits_i (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) = \mathrm{Var}(\frac{1}{n}\sum_i y_i - \hat{\beta}_2 \bar{x}) = \frac{1}{n^2}\sum_i \mathrm{Var}(y_i) + \bar{x}^2\,\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) - 2\bar{x}\frac{1}{n}\sum_i \mathrm{Cov}(y_i, \hat{\beta}_2)$$

Здесь и для дальнейших вычислений нам пригодится следующий факт:

$$\sum_i \mathrm{Cov}(y_i, \hat{\beta}_2) = \sum_i \mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \hat{\beta}_2) = 0$$

Докажем его:

$$\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_2, \varepsilon_j) = \mathrm{Cov}\left(\frac{\sum\limits_i (x_i - \bar{x})y_i}{\sum\limits_i (x_i - \bar{x})^2}, \varepsilon_j\right) = \frac{1}{\sum\limits_i (x_i - \bar{x})^2}\sum_i \mathrm{Cov}((x_i - \bar{x})y_i, \varepsilon_j) =$$

$$= \frac{1}{\sum\limits_i (x_i - \bar{x})^2}\sum_i (x_i - \bar{x})\,\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \frac{(x_j - \bar{x})\sigma^2}{\sum\limits_i (x_i - \bar{x}^2)}$$

Поэтому:

$$\sum_i \mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \hat{\beta}_2) = \sum_j \frac{(x_j - \bar{x})\sigma^2}{\sum_i (x_i - \bar{x}^2)} = \frac{\sigma^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \sum_j (x_j - \bar{x}) = 0$$

И возвращаясь к дисперсии $\hat{\beta}_1$:

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{n} + \bar{x}^2 \frac{\sigma^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}$$

Теперь остальные выражения:

$$\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = \mathrm{Cov}(\bar{y} - \bar{x}\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_2) = \frac{1}{n} \sum_i \mathrm{Cov}(y_i, \hat{\beta}_2) - \bar{x} \cdot \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_2) = -\frac{\bar{x}\sigma^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_1, \varepsilon_5) = \mathrm{Cov}(\bar{y} - \hat{\beta}_2 \bar{x}, \varepsilon_5) = \frac{1}{n} \sum_i \mathrm{Cov}(y_i, \varepsilon_5) - \bar{x} \cdot \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_2, \varepsilon_5) = \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\bar{x}(x_5 - \bar{x})\sigma^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}$$

Подставив все что мы получили в исходное выражение, получим:

$$\mathrm{Var}(e_5) = \sigma^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{\sigma^2 (x_5 - \bar{x})^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}$$

2. $\mathbb{P}(e_2 > \varepsilon_3) = \mathbb{P}(e_2 - \varepsilon_3 > 0) = \frac{1}{2}$, так как величина $e_2 - \varepsilon_3$ распределена нормально с нулевым матожиданием. Аналогично, $\mathbb{P}(e_1 > 0) = \frac{1}{2}$. А третью вероятность можно посчитать следующим образом:

$$e_1 \sim \mathcal{N}\left(0, \underbrace{\sigma^2 \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{(x_1 - \bar{x})^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}\right)}_{A}\right) \Rightarrow \mathbb{P}(e_1 > 3) = \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{e_1}{\sqrt{A}}}_{Z} > \frac{3}{\sqrt{A}}\right)$$

$$Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

3.

$$\mathbb{E}(RSS) = \mathbb{E}\left(\sum_i e_i^2\right) = \sum_i \mathbb{E}(e_i^2) = \sum_i \operatorname{Var}(e_i) = \sum_i \left(\sigma^2\left(1-\frac{1}{n}\right) - \frac{\sigma^2(x_i-\bar{x})^2}{\sum_i (x_i-\bar{x})^2}\right) =$$

$$= \sigma^2(n-2)$$

$\operatorname{Var}\left(\frac{RSS}{\sigma^2}\right) = 2(n-k)$, так как эта величина имеет распределение χ^2_{n-k}

Поэтому:

$$\operatorname{Var}(RSS) = 2\sigma^4(n-k)$$

$$\mathbb{P}(RSS > 200) = \mathbb{P}\left(\frac{RSS}{\sigma^2} > \frac{200}{\sigma^2}\right) = \mathbb{P}\left(Z > \frac{200}{9}\right), \quad Z \sim \chi^2_{30-2}$$

2.30. Можно взять четыре наблюдения равноотстоящих по вертикали от данной прямой. Подбирая остатки, добиваемся нужного R^2.

2.31. $\hat{\beta}_1 = -4890$ и $\hat{\beta}_2 = 2.5$.

$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \dots & \dots \\ 1 & 12 \end{pmatrix}$ — матрица исходных регрессоров; $\tilde{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1+1994 \\ 1 & 2+1994 \\ \dots & \dots \\ 1 & 12+1994 \end{pmatrix}$ — матрица новых регрессоров.

$\tilde{X} = X \cdot D$, где $D = \begin{pmatrix} 1 & 1994 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Итак, уравнение регрессии с новыми регрессорами имеет вид $y = \tilde{X}\beta + \varepsilon$ и МНК-оценки коэффициентов равны:

$$\hat{\beta} = \left(\tilde{X}'\tilde{X}\right)^{-1}\tilde{X}'y = \left([XD]'[XD]\right)^{-1}[XD]'y =$$
$$= D^{-1}(X'X)^{-1}(D')^{-1}D'X'y = D^{-1}(X'X)^{-1}X'y$$

$$\hat{\beta} = D^{-1}\hat{\beta}_{old} = \begin{pmatrix} 1 & -1994 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 95 \\ 2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4890 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

2.32.

$$\tilde{\beta}_2^a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i}{x_i} = \beta_2 + \frac{1}{n}\beta_1\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon_i}{x_i}$$

$$\text{Bias}_{\beta_2}\left[\tilde{\beta}_2^a\right] = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)\beta_1 = \overline{\left(\frac{1}{x}\right)}\cdot\beta_1$$

$$\text{Var}\,\tilde{\beta}_2^a = \left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}\right)\sigma^2 = \overline{\left(\frac{1}{x^2}\right)}\cdot\frac{\sigma^2}{n}$$

$$\tilde{\beta}_2^b = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{n\beta_1 + \beta_2\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \beta_2 + \frac{\beta_1}{\bar{x}} + \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{x}}$$

$$\text{Bias}_{\beta_2}\left[\tilde{\beta}_2^b\right] = \frac{1}{\bar{x}}\cdot\beta_1$$

$$\text{Var}\,\tilde{\beta}_2^b = \left(\frac{1}{\bar{x}}\right)^2\cdot\frac{\sigma^2}{n}$$

Мы можем существенно упростить решение, воспользовавшись матричным представлением:

$$\tilde{\beta}_2^a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix}\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_n}\end{pmatrix} y$$

$$
\mathbb{E}\tilde{\beta}_2^a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{E}y_i}{x_i} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix}\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \ldots & \frac{1}{x_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbb{E}y_1\\ \mathbb{E}y_2\\ \vdots \\ \mathbb{E}y_n\end{pmatrix} =
$$

$$
\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \ldots & \frac{1}{x_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1+\beta_2 x_1\\ \beta_1+\beta_2 x_2\\ \vdots \\ \beta_1+\beta_2 x_n\end{pmatrix} =
$$

$$
\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \ldots & \frac{1}{x_n}\end{pmatrix}\left[\beta_1\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix} + \beta_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}\right] = \frac{\beta_1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k} + \beta_2
$$

Значит, смещение для первой оценки равно $\frac{\beta_1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}$.

$$
\operatorname{Var}(\tilde{\beta}_2^a) = \operatorname{Var}\left(\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \ldots & \frac{1}{x_n}\end{pmatrix} y\right) =
$$

$$
\frac{1}{n^2}\begin{pmatrix}\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \ldots & \frac{1}{x_n}\end{pmatrix}\operatorname{Var}(y)\begin{pmatrix}\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \ldots & \frac{1}{x_n}\end{pmatrix}' =
$$

$$
\frac{1}{n^2}\begin{pmatrix}\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \ldots & \frac{1}{x_n}\end{pmatrix}\operatorname{Var}(\varepsilon)\begin{pmatrix}\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \ldots & \frac{1}{x_n}\end{pmatrix}' =
$$

$$
\frac{1}{n^2}\begin{pmatrix}\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \ldots & \frac{1}{x_n}\end{pmatrix}\sigma_\varepsilon^2 I\begin{pmatrix}\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \ldots & \frac{1}{x_n}\end{pmatrix}' =
$$

$$
\frac{\sigma_\varepsilon^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k^2}
$$

Перейдём ко второй оценке.

$$
\tilde{\beta}_2^b = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{1}{\bar{x}}\frac{1}{n}\begin{pmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\end{pmatrix} y
$$

$$\mathbb{E}\tilde{\beta}_2^b = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{1}{\bar{x}}\frac{1}{n}\begin{pmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\end{pmatrix}\mathbb{E}y = \frac{1}{\bar{x}}\frac{1}{n}\begin{pmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1+\beta_2x_1\\ \beta_1+\beta_2x_2\\ \vdots\\ \beta_1+\beta_2x_n\end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{\bar{x}}\frac{1}{n}\begin{pmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\end{pmatrix}\left[\beta_1\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix} + \beta_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}\right] =$$

$$\frac{1}{n}\frac{\beta_1 n}{\bar{x}} + \frac{1}{n}\frac{\beta_2\sum x_i}{\bar{x}} = \frac{\beta_1}{\bar{x}} + \beta_2$$

Значит, смещение равно $\frac{\beta_1}{\bar{x}}$.

$$\mathrm{Var}(\tilde{\beta}_2^b) = \frac{1}{\bar{x}^2}\frac{1}{n^2}\begin{pmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\end{pmatrix}\mathrm{Var}(y)\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{\bar{x}^2}\frac{1}{n^2}\begin{pmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\end{pmatrix}\mathrm{Var}(\varepsilon)\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\bar{x}^2 n}$$

2.33. Известно, что для парной регрессии $t_2^2 = \frac{R^2}{(1-R^2)/(n-2)}$. Поэтому из выражения $t_2^2 = \frac{0.05^2}{(1-0.05^2)/(n-2)} = \frac{0.05^2(n-2)}{1-0.05^2}$ становится очевидным, что при надлежащем выборе числа наблюдений можно сделать величину $t_{\hat{\beta}_2}$ сколь угодно большой.

Например, сгенерируем такие данные искусственно:

```
set.seed(777) # на удачу!
x <- rnorm(100000, mean = 0, sd = 1)
eps <- rnorm(100000, mean = 0, sd = 10)
y <- 0 + 1 * x + eps
```

```
model <- lm(y ~ x)
report <- summary(model)
report$r.squared
```

Здесь $R^2 = 0.01$, а $t = 31.8$.

2.34.

Пусть линия парной регрессии y на x имеет вид

$$\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x,$$

а линия парной регрессии x на y имеет вид

$$\hat{x} = \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 y$$

Нам достаточно показать, что

$$\hat{\beta}_1 = -\frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_2}, \quad \hat{\beta}_2 = \frac{1}{\hat{\gamma}_2}$$

Поехали!

$$|\operatorname{sCorr}(x, y)| = 1$$

$$(\operatorname{sCov}(x, y))^2 = \operatorname{sVar} x \cdot \operatorname{sVar} y$$

$$\left(\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\right)^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum (y_i - \bar{y})^2$$

$$\frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \cdot \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = 1$$

$$\hat{\beta}_2 \cdot \hat{\gamma}_2 = 1$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{1}{\hat{\gamma}_2}$$

$$\hat{\gamma}_1 = \bar{x} - \hat{\gamma}_2 \bar{y}$$

$$\frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_2} = \frac{\bar{x}}{\hat{\gamma}_2} - \bar{y} = \hat{\beta}_2 \bar{x} - \bar{y} = \bar{y} - \hat{\beta}_1 - \bar{y} = -\hat{\beta}_1$$

2.35. Да, если строить регрессию функции от y на функцию от x. А если строить регрессию просто y на x, то оценка наклона будет распределена симметрично около нуля.

2.36.

1. Да, является.

$$\hat{\beta}_{2,IV} = \frac{\sum (z_i\beta_2(x_i-\bar{x}) + z_i(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}))}{\sum z_i(x_i-\bar{x})} = \beta_2 + \frac{1}{\sum z_i(x_i-\bar{x})} \cdot \sum z_i(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon})$$

$$\mathbb{E}\hat{\beta}_{2,IV} = \beta_2$$

2. Любые кроме констант, иначе знаменатель оценки будет равен нулю.

3. Мы воспользуемся следующим свойством:

$$\sum z_i(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}) = \sum (z_i-\bar{z})(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}) = \sum (z_i-\bar{z})\varepsilon_i$$

$$\operatorname{Var}\hat{\beta}_{2,IV} = \frac{\sum (z_i-\bar{z})^2}{(\sum (z_i-\bar{z})x_i)^2} \cdot \sigma^2$$

2.37.

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \bar{y} - \hat{\beta}_2\bar{x}$$

$$\operatorname{Var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}$$

2.38. Вспомните про t, χ^2, F-распределения:

1. $1/2$.

2. 0.37

```
1 - pchisq(q = 2, df = 2)
```

3.

$$\mathbb{P}\left(\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2}} > 2\right) = \mathbb{P}\left(\frac{(\varepsilon_1/\sigma)}{\sqrt{1/2\cdot((\varepsilon_2/\sigma)^2+(\varepsilon_3/\sigma)^2)}} > 2\sqrt{2}\right) \approx 0.05$$

```
1 - pt(q = 2 * sqrt(2), df = 2)
```

4. 0.15

```
1 - pt(q = 5 / 4, df = 3)
```

5. $(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2) \sim \mathcal{N}(0, 5\sigma^2)$

   Итого, 0.98.

```
pt(q = 9 / 2 * sqrt(3) / sqrt(5), df = 3)
```

6. 0.028

```
pt(q = -sqrt(34), df = 2) + (1 - pt(q = sqrt(34), df = 2))
```

2.39. $\hat{\lambda} = RSS/(n-2)$ т.к. $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \lambda$. Оценка $\hat{\beta}_2$ является несмещённой, но $\mathbb{E}(\hat{\beta}_1) = \beta_1 + \lambda$. Можно предложить несмещённую оценку $\hat{\beta}_1' = \hat{\beta}_1 - RSS/(n-2)$.

Можем рассмотреть модель в следующем виде:

$$y_i = \beta_1 + \lambda + \beta_2 x_i + \tilde{\varepsilon}_i, \quad \text{где } \tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_i - \lambda$$

Теперь математическое ожидание от ошибок $\mathbb{E}(\tilde{\varepsilon}_i) = 0$, то есть предпосылки теоремы Гаусса-Маркова выполнены. Поэтому МНК оценки будут несмещёнными, а дисперсию ошибок можно оценить как $\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS}{n-2}$. Вспомним, что для пуассоновского распеределения $\mathbb{E}(X) = \mathrm{Var}(X) = \lambda$. Поэтому

$$\frac{RSS}{n-2} = \widehat{\mathrm{Var}}(\tilde{\varepsilon}_i) = \widehat{\mathrm{Var}}(\varepsilon_i - \lambda) = \widehat{\mathrm{Var}}(\varepsilon_i) = \hat{\lambda}$$

Далее, несмещённая оценка $\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_{mod1} - \lambda$, а для $\hat{\beta}_2$ оценки в модифицированной модели и в первоначальной будут несмещёнными.

2.40.

	Model 1	Model 2
(Intercept)	4.50	4.50^{***}
	(1.31)	(0.30)
x	-0.30	-0.30^{**}
	(0.48)	(0.11)
R^2	0.16	0.16
Adj. R^2	-0.25	0.14
Num. obs.	4	40
RMSE	1.07	0.78

$^{***}p < 0.001$, $^{**}p < 0.01$, $^{*}p < 0.05$

Таблица 20.2: Statistical models

```
df1 <- data.frame(x = c(1, 2, 3, 4), y = c(5, 3, 3, 4))
df2 <- data.frame(y = rep(df1$y, 10), x = rep(df1$x, 10))
m1 <- lm(data=df1, y ~ x)
m2 <- lm(data=df2, y ~ x)
texreg(list(m1, m2))
```

2.41. Прогноз $\hat{y}_1$ имеет меньшую дисперсию, чем фактический y_1. Интуитивно можно сказать, что оценка $\hat{y}_1$ использует максимальный объём информации, все наблюдения. Обе оценки являются несмещёнными.

2.42. Пусть $\bar{y}$ — средний y до добавления нового наблюдения, $\bar{y}'$ — после добавления нового наблюдения. Будем считать, что изначально было n наблюдений. Заметим, что

$$\bar{y}' = \frac{(y_1 + \ldots + y_n) + y_{n+1}}{n+1} = \frac{n\bar{y} + y_{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1}\bar{y} + \frac{1}{n+1}y_{n+1}$$

Покажем, что TSS может только увеличится при добавлении нового наблюдения (остается неизменным при $y_{n+1} = \bar{y}$):

$$TSS' = \sum_{i=1}^{n+1}(y_i - \bar{y}')^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y} + \bar{y} - \bar{y}')^2 + (y_{n+1} - \bar{y}')^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 + n(\bar{y} - \bar{y}')^2 + (y_{n+1} - \bar{y}')^2 = TSS + \frac{n}{n+1}(y_{n+1} - \bar{y})^2$$

Следовательно, $TSS' \geqslant TSS$.

Также сумма RSS может только вырасти или остаться постоянной при добавлении нового наблюдения. Действительно, новое $(n+1)$-ое слагаемое в сумме неотрицательно. А сумма n слагаемых минимальна при старых коэффициентах, а не при новых.

ESS и R^2 могут меняться в обе стороны. Например, рассмотрим ситуацию, где точки лежат симметрично относительно некоторой горизонтальной прямой. При этом $ESS = 0$. Добавим наблюдение — ESS вырастет, удалим наблюдение — ESS вырастет.

2.43.

1. R^2 упал до нуля.

2. Да, можно. Если добавить точку далеко слева внизу от исходного набора данных, то наклон линии регрессии будет положительный. Если далеко справа внизу, то отрицательный. Будем двигать точку так, чтобы поймать нулевой наклон прямой. Получим $ESS = 0$.

2.44.

$$\mathbb{E}\bar{\varepsilon} = 0$$

$$\operatorname{Var}\bar{\varepsilon} = \sigma^2/n$$

$$\operatorname{plim}\bar{\varepsilon} = \mathbb{E}\bar{\varepsilon} = 0,$$

так как по неравенству Чебышева для любого $a > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|\bar{\varepsilon} - \mathbb{E}\bar{\varepsilon}| \geqslant a\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Var}\bar{\varepsilon}}{a^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{na^2} = 0$$

Обозначим

$$\varphi = \frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \ldots + n\varepsilon_n}{1 + 2 + \ldots + n}$$

Тогда

$$\mathbb{E}\varphi = 0$$

$$\operatorname{Var}\varphi = \frac{(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)}{(1 + 2 + \ldots + n)^2}\sigma^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)/6}{(n(n+1)/2)^2}\sigma^2 = \frac{4(2n+1)}{6n(n+1)}\sigma^2 \to 0$$

Рассуждая так же, как и для $\bar{\varepsilon}$, мы получаем, что

$$\text{plim}\varphi = \mathbb{E}\varphi = 0$$

$\text{Var}(\bar{\varepsilon}) = \sigma^2/n$, $\text{plim}\,\bar{\varepsilon} = 0$

2.45. Не состоятельна:

$$\text{plim}\,\hat{\beta}_2 = \beta_2 + \frac{6}{\pi^2}\varepsilon_1 + \frac{6}{2\pi^2}\varepsilon_2 + \ldots$$

Замечание: условия $\lim \text{Var}(\hat{\beta}_2) \neq 0$ недостаточно для доказательства несостоятельности и $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$.

2.46.

1. Из базовых формул для простой регрессии можно получить, что

$$\hat{\beta}_2 = \bar{y}_m - \bar{y}_f$$

$$\hat{\beta}_1 = \bar{y}_f$$

где $\bar{y}_m$ — средний вес по мужчинам, $\bar{y}_f$ — средний вес по женщинам.

Пусть в нашей выборке m мужчин, f женщин, и вектор y упорядочен так, что сначала идут мужчины, а затем женщины.

$$RSS = \sum_{i=1}^{m}(y_i - \bar{y}_m)^2 + \sum_{i=m+1}^{m+f}(y_i - \bar{y}_f)^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS}{m+f-2}$$

Отсюда легко получить необходимые стандартные отклонения и t-статистики.

$$se\left(\hat{\beta}_1\right) = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{f}}$$

$$se\left(\hat{\beta}_2\right) = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{m} + \frac{\hat{\sigma}^2}{f}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{m+f}{mf}}\hat{\sigma}$$

$$t_{\hat{\beta}_1} = \frac{\bar{y}_f}{\hat{\sigma}/\sqrt{f}}$$

$$t_{\hat{\beta}_2} = \sqrt{\frac{mf}{m+f}} \cdot \frac{\bar{y}_m - \bar{y}_f}{\hat{\sigma}}$$

2. При всей своей бессмысленности, гипотеза $\beta_1 = 0$ — это гипотеза о том, что средний вес женщин равен нулю. Гипотеза $\beta_2 = 0$ — это гипотеза о нулевой разнице между средними весами мужчин и жинщин.

2.47. Добавила наблюдение, лежащее на линии регрессии и с $y_{n+1} = \bar{y}$, то есть $(2, 12)$. Оценки никак не изменились.

2.48.

1. $RSS = 0$, $ESS > 0$, точки лежат на негоризонтальной прямой
2. $RSS > 0$, $ESS = 0$, точки не на прямой, но линия регрессии горизонтальна, например, точки лежат симметрично относительно горизонтальной прямой. Например, $x = (-1, -1, 1, 1)'$, $y = (-1, 1, -1, 1)'$.
3. $RSS = 0$, $ESS = 0$, точки лежат на горизонтальной прямой

2.49.

1. Добавляем средние арифметические, $(\bar{x}, \bar{y})$.
2. Да, если зафиксировать добавляемый y_+ и плавно менять добавляемый x_+, то можно поймать момент, когда новый наклон совпадёт со старым.
3. Возьмём произвольный набор точек. Добавим точку «от фонаря». Поменяется наклон и новая прямая пересечёт старую. Перенесём вдоль оси x точки так, чтобы новая точка пересечения легла на вертикальную ось.

2.50.

2.51.

2.52. Вспомним, что сумма остатков регрессии равна нулю.

2.53. Остатки $\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i$ должны быть ортогональны вектору из единичек и вектору $\hat{y}$. То есть получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \sum_i (y_i - \hat{y}_i) = 0 \\ \sum_i (y_i - \hat{y}_i)\hat{y}_i = 0 \end{cases}$$

2.54. Добавляемое наблюдение лежит на линии регрессии, поэтому ничего не изменится.

2.55. $RSS_A = 1^2 + (-3)^2 = 10$, $RSS_B = 2^2 + 2^2 = 8$. $k_A = 0$, $k_B = 1$.

2.56. $\hat{y}_i = 4 - x_i$

2.57. $\mathbb{E}(X) = 10/6$, $\mathrm{Var}(X) = 50/6$.

2.58. Без ограничения общности центрируем исходные переменные. Значения регрессора обозначим x_i, исходную зависимую переменную $\tilde{y}_i$, а переставленную в случайном порядке y_i. По условию $\sum y_i^2 = \sum \tilde{y}_i^2$.

Фиксируем исходные переменные и находим:

$$\mathbb{E}(R^2|\tilde{y}) = \mathbb{E}\left(\frac{(\sum x_i y_i)^2}{\sum x_i^2 \sum y_i^2}\right) = \frac{\mathrm{Var}(\sum x_i y_i|\tilde{y})}{\sum x_i^2 \sum y_i^2}$$

Для начала найдём дисперсию отдельного игрека:

$$\mathrm{Var}(y_i|\tilde{y}) = \frac{\sum \tilde{y}_i^2}{n} = \frac{\sum y_i^2}{n}$$

А теперь из $\mathrm{Cov}(y_1, \sum y_i|\tilde{y}) = 0$ найдём и дисперсию нужной суммы:

$$\mathrm{Var}(\sum x_i y_i|\tilde{y}) = \mathrm{Var}(y_i|\tilde{y})\left(\sum x_i^2 - \sum_{i\neq j} x_i x_j \frac{1}{n-1}\right) = \mathrm{Var}(y_i|\tilde{y})\frac{n}{n-1}\sum x_i^2 = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i^2}{n-1}$$

Заканчиваем подсчёт,

$$\mathbb{E}(R^2|\tilde{y}) = \frac{1}{n-1}$$

Следовательно, и $\mathbb{E}(R^2) = \frac{1}{n-1} = 0.1$.

2.59.

3.1. t-статистики, только они бывают отрицательными из перечисленных вариантов.

3.2.

1. Поскольку $\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2(n-k)}{\sigma_\varepsilon^2} \sim \chi^2(n-k)$, где $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{RSS}{n-k}$, $k = 5$. $\mathbb{P}(\chi_l^2 < \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2} < \chi_u^2) = 0.8$. Преобразовав, получим $\mathbb{P}(\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2(n-5)}{\chi_u^2} < \sigma_\varepsilon^2 < \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2(n-5)}{\chi_l^2}) = 0.8$, где $\chi_u^2 = \chi_{n-5;0.1}^2$, $\chi_l^2 = \chi_{n-5;0.9}^2$ — соответствующие квантили. По условию $\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2(n-5)}{\chi_l^2} = A = 45$, $\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2(n-5)}{\chi_u^2} = B = 87.942$. Поделим B на A, отсюда следует $\frac{\chi_u^2}{\chi_l^2} = 1.95426$. Перебором квантилей в таблице для хи-квадрат распределения мы находим, что $\frac{\chi_{30;0.1}^2}{\chi_{30;0.9}^2} = \frac{40.256}{20.599} = 1.95426$. Значит, $n-5 = 30$, отсюда следует, что $n = 35$.

2. $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 45\frac{\chi_u^2}{n-5} = 45\frac{40.256}{30} = 60.384$

Решение в R:

```
the_grid <- tibble(df = 1:200, left = qchisq(0.1, df),
             right = qchisq(0.9, df), ratio = right / left,
             penalty = (ratio - 87.942 / 45)^2)

df_ans <- the_grid$df[which.min(the_grid$penalty)]
```

Количество степеней свободы $n-5$ должно быть равно 30.

3.3.

Упорядочим нашу выборку таким образом, чтобы наблюдения с номерами с 1 по 35 относились к мужчинам, а наблюдения с номерами с 36 по 58 относились к женщинам. Тогда уравнение

$$\ln W_i = \beta_1 + \beta_2 Edu_i + \beta_3 Exp_i + \beta_4 Exp_i^2 + \\ \beta_5 Fedu_i + \beta_6 Medu_i + \varepsilon_i, i = 1, \dots, 35$$

соответствует регрессии, построенной для подвыборки из мужчин, а уравнение

$$\ln W_i = \gamma_1 + \gamma_2 Edu_i + \gamma_3 Exp_i + \gamma_4 Exp_i^2 + \\ \gamma_5 Fedu_i + \gamma_6 Medu_i + \varepsilon_i, i = 36, \dots, 58$$

соответствует регрессии, построенной для подвыборки из женщин. Введем следующие переменные:

$$d_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{–ое наблюдение соответствует мужчине,} \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$dum_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{–ое наблюдение соответствует женщине,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Рассмотрим следующее уравнение регрессии:

$$\ln W_i = \beta_1 d_i + \gamma_1 dum_i + \beta_2 Edu_i d_i + \gamma_2 Edu_i dum_i + \beta_3 Exp_i d_i + \\ \gamma_3 Exp_i dum_i + \beta_4 Exp_i^2 d_i + \gamma_4 Exp_i^2 dum_i + \beta_5 Fedu_i d_i + \gamma_5 Fedu_i dum_i + \\ \beta_6 Medu_i d_i + \gamma_6 Medu_i dum_i + \varepsilon_i, i = 1, \dots, 58$$

Гипотеза, которую требуется проверить в данной задаче, имеет вид

$$H_0 : \begin{cases} \beta_1 = \gamma_1, \\ \beta_2 = \gamma_2, \\ \dots \\ \beta_6 = \gamma_6 \end{cases} \quad H_1 : |\beta_1 - \gamma_1| + |\beta_2 - \gamma_2| + \dots + |\beta_6 - \gamma_6| > 0.$$

Тогда регрессия

$$\begin{aligned}\ln W_i = \beta_1 d_i + \gamma_1 dum_i + \beta_2 Edu_i d_i + \gamma_2 Edu_i dum_i + \beta_3 Exp_i d_i + \\ \gamma_3 Exp_i dum_i + \beta_4 Exp_i^2 d_i + \gamma_4 Exp_i^2 dum_i + \beta_5 Fedu_i d_i + \\ \gamma_5 Fedu_i dum_i + \beta_6 Medu_i d_i + \gamma_6 Medu_i dum_i + \varepsilon_i, i = 1, \ldots, 58\end{aligned}$$

по отношению к основной гипотезе H_0 является регрессией без ограничений, а регрессия

$$\begin{aligned}\ln W_i = \beta_1 + \beta_2 Edu_i + \beta_3 Exp_i + \beta_4 Exp_i^2 + \\ \beta_5 Fedu_i + \beta_6 Medu_i + \varepsilon_i, i = 1, \ldots, 58\end{aligned}$$

является регрессией с ограничениями.

Кроме того, для решения задачи должен быть известен следующий факт:

$RSS_{UR} = RSS_1 + RSS_2$, где RSS_{UR} — это сумма квадратов остатков в модели:

$$\begin{aligned}\ln W_i = \beta_1 d_i + \gamma_1 dum_i + \beta_2 Edu_i d_i + \gamma_2 Edu_i dum_i + \beta_3 Exp_i d_i + \\ \gamma_3 Exp_i dum_i + \beta_4 Exp_i^2 d_i + \gamma_4 Exp_i^2 dum_i + \beta_5 Fedu_i d_i + \\ \gamma_5 Fedu_i dum_i + \beta_6 Medu_i d_i + \gamma_6 Medu_i dum_i + \varepsilon_i, i = 1, \ldots, 58\end{aligned}$$

RSS_1 — это сумма квадратов остатков в модели:

$$\begin{aligned}\ln W_i = \beta_1 + \beta_2 Edu_i + \beta_3 Exp_i + \beta_4 Exp_i^2 + \\ \beta_5 Fedu_i + \beta_6 Medu_i + \varepsilon_i, i = 1, \ldots, 35\end{aligned}$$

RSS_2 — это сумма квадратов остатков в модели:

$$\begin{aligned}\ln W_i = \gamma_1 + \gamma_2 Edu_i + \gamma_3 Exp_i + \gamma_4 Exp_i^2 + \\ \gamma_5 Fedu_i + \gamma_6 Medu_i + \varepsilon_i, i = 36, \ldots, 58\end{aligned}$$

1. Тестовая статистика:

$$T = \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/q}{RSS_{UR}/(n-m)},$$

где RSS_R – сумма квадратов остатков в модели с ограничениями;

RSS_{UR} – сумма квадратов остатков в модели без ограничений;

q – число линейно независимых уравнений в основной гипотезе H_0;

n – общее число наблюдений;

m – число коэффициентов в модели без ограничений

2. Распределение тестовой статистики при верной H_0:

$$T \sim F(q, n-m)$$

3. Наблюдаемое значение тестовой статистики:

$$T_{obs} = \frac{(70.3 - (34.4 + 23.4))/6}{(34.4 + 23.4)/(58 - 12)} = 1.66$$

4. Область, в которой H_0 не отвергается:

$$[0; T_{cr}] = [0; 2.3]$$

5. Статистический вывод:

   Поскольку $T_{obs} \in [0; T_{cr}]$, то на основе имеющихся данных мы не можем отвергнуть гипотезу H_0 в пользу альтернативной H_1. Следовательно, имеющиеся данные не противоречат гипотезе об отсутствии дискриминации на рынке труда между мужчинами и женщинами.

3.4.

3.5. Для ответа на вопрос задачи, а именно, можно или нет считать зависимость спроса на молоко от его цены и дохода единой для городской и сельской местностей, воспользуемся гипотезой о нескольких ограничениях. Тогда:

- Ограниченная («короткая») модель, то есть та модель, которая предполагает выполнение нулевой гипотезы, имеет вид :

$$R : y_i = \beta_1 + \beta_2 I_i + \beta_3 P_i + \epsilon_i$$

$$RSS_R = RSS = 8841601$$

- Для того чтобы записать спецификацию неограниченной («длинной») модели, которая пердполагает разные β_i для городской и сельской местностей, введем дополнительную переменную d_i, такую что:

$$d_i = \begin{cases} 1, \text{город;} \\ 0, \text{село} \end{cases}$$

  Пусть коэффициенты для городской местности отличаются на некоторое Δ_i, тогда неограниченная модель имеет вид:

$$UR : y_i = \beta_1 + \Delta_1 d_i + (\beta_2 + \Delta_2 d_i) I_i + (\beta_3 + \Delta_3 d_i) P_i + \epsilon_i$$

$$RSS_{UR} = RSS_1 + RSS_2 = 1720236 + 7099423 = 8819659$$

- Гипотезы:

$$H_0 = \begin{cases} \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = 0 \\ \Delta_3 = 0 \end{cases} \quad H_a : \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 > 0$$

- Тестовая статистика имеет вид:

$$F = \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/q}{RSS_{UR}/(n-m)}$$

  где q — число линейно независимых уранений в нулевой гипотезе H_0;
  n — общее число наблюдений;
  m — число коэффициентов в неограниченной модели

- Распределение тестовой статистики при верной H_0:

$$F_{cr} \sim (F_{\alpha,q,n-m})$$

- Расчётное значение тестовой статистики $F_{obs} = 1.758$, $F_{cr} \approx 2.61$

- Так как $F_{obs} < F_{cr}$, гипотеза H_0 не отвергается.

Вывод: зависимость спроса на молоко от его цены и дохода для городской и сельской местностей можно считать единой.

3.6.

3.7. Задача решается аналогично предыдущем задачам, к примеру, 3.3, 3.5.

Главное отличие заключается в том, что вместо значений RSS_R и RSS_{UR} даются значения соответствующих R^2, также следует вспомнить, что $\sum_{i=1}^{n=52}(Price_i - \overline{Price})^2 = 278$ ни что иное, как TSS, которое, в свою очередь, не зависит от спецификации модели, то есть $TSS_R = TSS_{UR} = TSS$. Тогда можно выразитьRSS моделей:

$$\begin{cases} R^2 = \frac{ESS}{TSS} \\ TSS = ESS + RSS \end{cases} \rightarrow \begin{cases} RSS_R = TSS(1 - R_R^2) = 278(1 - 0.78) \approx 61.16 \\ RSS_{UR} = TSS(1 - R_{UR}^2) = 278(1 - 0.85) \approx 41.7 \end{cases}$$

Находим расчётное значение F-статистики

$$F_{obs} = \frac{(61.16 - 41.7)/5}{41.7/(52 - 10)} \approx 3.92$$

Находим критическое значение F-статистики

$$F_{cr} \sim F_{0.05,5,42} \approx 2.44$$

Получаем, что $F_{obs} > F_{cr}$, и, следовательно, H_0 отвергается в пользу альтернативной гипотезы на уровне значимости 5%.

Вывод: гипотеза об одинаковом ценообразовании квартир на севере и на юге отвергается на уровне значимости 5%.

3.8. Для начала найдём число наблюдений. Будем считать, что данные есть с первого кваратала 2003 года по четвёртый квартал 2008 года. Тогда

$$n = (2008 - 2003 + 1) \cdot 4 = 24$$

1. $$H_0 : \begin{cases} \beta_{Q_{1t}} = 0 \\ \beta_{Q_{2t}} = 0 \\ \beta_{Q_{3t}} = 0 \end{cases} \qquad H_a : \beta_{Q_{1t}}^2 + \beta_{Q_{2t}}^2 + \beta_{Q_{3t}}^2 > 0$$

2. Поскольку ограниченная и неограниченная модели оценивались по одной и той же выборке, $TSS_R = TSS_{UR} = 70.4 + 40.5 = 110.9$.

Тогда можно найти $RSS_{UR} = 110.9 - 86.4 = 24.5$. Теперь посчитаем F-статистику, которая при верности H_0 имеет распределение $F_{3,18}$:

$$F_{obs} = \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/q}{RSS_{UR}/(n - k_{UR})} = \frac{(40.5 - 24.5)/3}{24.5/(24 - 6)} \approx 3.91$$

Так как $F_{obs} > F_{crit} = 3.16$, основная гипотеза отвергается.

3.9. Спецификация модели :

$$\widehat{\ln Q} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \ln P + \hat{\beta}_3(SPRING + SUMMER) + \hat{\beta}_5 FALL$$

Интерпретация: осень так же влияет на логарифм величины спроса, как и весна. Задача решается аналогично задачам 3.7, 3.5

$$\begin{cases} R^2 = \frac{ESS}{TSS} \\ TSS = ESS + RSS \\ TSS_R = TSS_{UR} = TSS \end{cases}$$

Находим расчётное и наблюдаемое значение F-статистики

$$\begin{cases} F_{obs} = \frac{(R^2_{UR} - R^2_R)/q}{(1 - R^2_{UR})/(n-m)} \approx 3.3 \\ F_{cr} = F_{0.05,1,15} \approx 4.54 \end{cases}$$

Следовательно, $F_{obs} < F_{cr}$ и H_0 не отвергается на уровне значимости 5%.

Вывод: гипотеза H_0 о равном влиянии осени и весны на логарифм спроса не отвергается на уровне значимости 5%.

3.10. Смысл гипотезы: летом и осенью одинаковая зависимость и одинаковая зависимость зимой и весной. Ограниченная модель: $\widehat{\ln Q} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \cdot \ln P + \hat{\beta}_3 d$, где d равна 1 для лета и осени. Наблюдаемое значение статистики $F_{obs} = 1.375$, критическое, $F_{cr} = 3.52$.

```
qf(0.95, df1 = 2, df2 = 19)
```

Гипотеза не отвергается.

3.11. Наблюдений: 12. Коэффициентов: $4 \cdot 4 = 16$.

3.12.

3.13. $\hat{\beta}_1 = 1.3870 + 2.6259 = 4.0129$, $\hat{\beta}_2 = 5.2587 + 2.5955 = 7.8542$

3.14. $y_i = \beta_1 + \beta_2(x_{i1} + x_{i2} + x_{i3}) + \epsilon_i$

3.15. $y_i = \beta_1 + \beta_2(x_{i1} + x_{i2} + x_{i3}) + \epsilon_i$

3.16. 1

3.17. 1,2

3.18. 4

3.19. Значим.

3.20. Не значим.

3.21. $\alpha > 0.09$

3.22. Только коэффициент при переменной Drivers.

3.23. Из формул

$$\begin{cases} R^2 = \frac{ESS}{TSS} \\ TSS = ESS + RSS \end{cases}$$

получаем $R^2 = \frac{170.4}{(170.4+80.3)} \approx= 0.68$

Тестируемые гипотезы:

$$H_0 = \begin{cases} \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = 0 \\ \beta_4 = 0 \end{cases} \quad H_a : \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2 > 0$$

Так как по условию задачи проверяем значимость модели в целом, следовательно ограниченная модель — регрессия на константу, таким образом:

$$\begin{cases} \widehat{y_i} = \bar{y} \\ RSS_R = \sum_{i=1}^n (y_i - \widehat{y_i})^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y_i})^2 = TSS \\ RSS_{UR} = TSS(1 - R^2_{UR}) \\ TSS_{UR} = TSS_R = TSS \end{cases}$$

Получаем, $F_{obs} = \frac{R^2_{UR}/q}{(1-R^2_{UR})/(n-m)}$

Значения статистик:

$$\begin{cases} F_{obs} \approx 12.04 \\ F_{cr} = F(0.01, 3, 17) \approx 5.185 \end{cases}$$

Отсюда, $F_{obs} > F_{cr}$, и H_0 отвергается на уровне значимости 1%.

Вывод: гипотеза H_0 отвергается на уровне значимости 1%, следовательно модель в целом значима.

3.24.

Ограниченная модель (Restricted model):

$$\ln W_i = \beta + \beta_{Edu} Edu_i + \beta_{Age} Age_i + \beta_{Age^2} Age_i^2 + \varepsilon_i$$

Неограниченная модель (Unrestricted model):

$$\ln W_i = \beta + \beta_{Edu} Edu_i + \beta_{Age} Age_i + \beta_{Age^2} Age_i^2 + \\ \beta_{Fedu} Fedu_i + \beta_{Medu} Medu_i + \varepsilon_i$$

По условию $ESS_R = 90.3$, $RSS_R = 60.4$, $TSS = ESS_R + RSS_R = 90.3 + 60.4 = 150.7$. Также сказано, что $ESS_{UR} = 110.3$. Значит, $RSS_{UR} = TSS - ESS_{UR} = 150.7 - 110.3 = 40.4$

1. Спецификация:

$$\ln W_i = \beta + \beta_{Edu} Edu_i + \beta_{Age} Age_i + \beta_{Age^2} Age_i^2 + \\ \beta_{Fedu} Fedu_i + \beta_{Medu} Medu_i + \varepsilon_i$$

2. Проверка гипотезы

(a) $H_0: \begin{cases} \beta_{Fedu} = 0 \\ \beta_{Medu} = 0 \end{cases} \quad H_a: |\beta_{Fedu}| + |\beta_{Medu}| > 0$

(b) $T = \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/q}{RSS_{UR}/(n-k)}$, где $q = 2$ — число линейно независимых уравнений в основной гипотезе H_0, $n = 25$ — число наблюдений, $k = 6$ — число коэффициентов в модели без ограничения

(c) $T \sim F(q; n-k)$

(d) $T_{obs} = \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/q}{RSS_{UR}/(n-k)} = \frac{(60.4-40.4)/2}{40.4/(25-6)} = 4.70$

(e) Нижняя граница равна 0, верхняя граница равна 3.52

(f) Поскольку $T_{obs} = 4.70$, что не принадлежит промежутку от 0 до 3.52, то на основе имеющихся данных можно отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 5%. Таким образом, образование родителей существенно влияет на заработную плату.

3.25.

$$\widehat{Price} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 Hsize + 20\hat{\beta}_4 Lsize + \hat{\beta}_4 Bath + \hat{\beta}_5 BDR$$

Размер участка в 20 раз сильнее влияет на цену дома, чем число ванных комнат.

$$\begin{cases} R^2 = \frac{ESS}{TSS} \\ TSS = ESS + RSS \\ TSS_R = TSS_{UR} = TSS \end{cases}$$

$$\begin{cases} RSS_R = TSS(1 - R^2_R) \\ RSS_{UR} = TSS(1 - R^2_{UR}) \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} F_{obs} = \frac{(R^2_{UR} - R^2_R)/q}{(1 - R^2_{UR})/(n-m)} = \frac{(0.218-0.136)/1}{(1-0.218)/18} \approx 1.887 \\ F_{cr} = F_{0.05,1,18} \approx 4.41 \end{cases}$$

$F_{obs} < F_{cr}$ и, следовательно, H_0 не отвергается на уровне значимости 5%.

Вывод: гипотеза H_0 о том, что размер участка в 20 раз сильнее влияет на цену дома, чем число ванных комнат, не отвергается на уровне значимости 5%.

3.26.

3.27. $H_0 : \beta_2 = \beta_3$ — труд и капитал вносят одинаковый вклад в выпуск фирмы.

$$\begin{cases} F_{obs} = \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/q}{RSS_{UR}/(n-m)} = \frac{(0.894-0.851)/1}{0.851/(27-3)} \approx 1.213 \\ F_{cr} = F_{0.05,1,24} \approx 4.26 \end{cases}$$

Получаем, что $F_{obs} < F_{cr}$, и, следовательно, H_0 не отвергается на уровне значимости 5%

Вывод: гипотеза H_0, предполагающая, что труд и капитал вносят одинаковый вклад в выпуск фирмы, не отвергается на уровне значимости 5%.

3.28. Здесь $RSS_R = 8.31$, $RSS_{UR} = 6.85$.

3.29.

1. $$\begin{cases} H_0 : \beta_2 = 0 \\ H_a : \beta_2 \neq 0 \end{cases}$$

2. (a) $t = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{se(\beta_i)}$
   (b) $t_{\alpha,n-m} = t_{0.05,47}$
   (c) $t = \frac{0.08-0}{0.0093} \approx 8.67$
   (d) $[-t_{cr}, t_{cr}]$
   (e) гипотеза H_0 отвергается, так как P-значение равно нулю; можно честно посчитать $t_{cr} = t_{0.05,47}$ или вспомнить, что при количестве наблюдений больше 30, t-распределение похоже на нормальное, для которого квантиль на уровне 5% примерно равна 1.67 и $F_{\text{наб}} > F_{cr}$. Гипотеза H_0 отвергается, следовательно коэффициент β_2 значим на уровне значимости 10%.

3. (a) $t = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{se(\beta_i)}$
   (b) $t_{\alpha,n-m} = t_{0.05,47}$
   (c) $t = \frac{-287-1}{64.92} \approx -4.42$
   (d) $(-\infty, t_{cr}]$

(e) гипотеза H_0 отвергается, так как P-значение равно нулю; аналогично 2(e) $t_{cr} = t_{0.05,47} \approx 1.67$ и $F_{\text{наб}} > F_{cr}$. Гипотеза H_0 отвергается, следовательно коэффициент β_1 значим на уровне значимости 5%.

4.

$$H_0 = \begin{cases} \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = 0 \\ \beta_4 = 0 \end{cases} \qquad H_a : \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2 > 0$$

5. (a) $F = \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/q}{RSS_{UR}/(n-m)}$
   (b) $F_{\alpha,q,n-m} = F_{0.01,3,47}$
   (c) $F = 34.81$
   (d) $[0, F_{cr}]$
   (e) гипотеза H_0 отвергается, так как P-значение примерно равно 0, точнее меньше $(5.337 \cdot 10^{-12})$; можно вычислить $F_{cr} = F_{0.01,3,47} \approx 4.23$. Следовательно, $F_{\text{наб}} > F_{cr}$ и H_0 отвергается, и регрессия в целом значима на уровне значимости 1%.

6. (a) $F = \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/q}{RSS_{UR}/(n-m)}$
   (b) $F_{\alpha,q,n-m} = F_{0.05,3,47}$
   (c) $F \approx 9.525$
   (d) $[0, F_{cr}]$
   (e) гипотеза H_0 отвергается, так как $F_{cr} = F_{0.05,3,47} \approx 4.047$ и $F_{\text{наб}} > F_{cr}$, следовательно коэффициент β_4 значим на уровне значимости 5%.

3.30.

3.31. $0.25\hat{\beta}_1 + 0.75\hat{\beta}_1'$, $0.25\hat{\beta}_2 + 0.75\hat{\beta}_2'$ и $0.25\hat{\beta}_3 + 0.75\hat{\beta}_3'$

3.32. Сами оценки коэффициентов никак детерминистически не связаны, но при большом размере подвыборок примерно равны. А дисперсии связаны соотношением $\text{Var}(\hat{\beta}_a)^{-1} + \text{Var}(\hat{\beta}_b)^{-1} = \text{Var}(\hat{\beta}_{tot})^{-1}$

3.33. В среднем ложно значимы должны быть 5% регрессоров, то есть 2 регрессора.

3.34.

3.35.

3.36.

3.37.

3.38.

```
est.se <- sqrt(var.hat[2, 2] + var.hat[3, 3] - 2 * var.hat[2, 3])
hb <- model1$coefficients
est.diff <- hb[2] - hb[3]
est.diff - 1.96 * est.se
est.diff + 1.96 * est.se
```

Из оценки ковариационной матрицы находим, что $se(\hat{\beta}_{totsp} - \hat{\beta}_{livesp}) = 0.27$.

Исходя из $Z_{crit} = 1.96$ получаем доверительный интервал, $[-0.82; 0.23]$.

Вывод: при уровне значимости 5% гипотеза о равенстве коэффициентов не отвергается.

3.39.

3.40.

3.41.

1. $\mathbb{P}(\hat{\beta}_3 > se(\hat{\beta}_3)) = \mathbb{P}(t_{17} > 1) = 0.166$

   ```
   1 - pt(1, 17)
   ```

2. $\mathbb{P}(\hat{\beta}_3 > \sigma_{\hat{\beta}_3}) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) > 1) = 0.159$

   ```
   1 - pnorm(1)
   ```

3.42. В обоих случаях можно так подобрать коэффициенты $\hat{\beta}$, что $kr_i = \widehat{kr}_i$. А именно, идеальные прогнозы достигаются при $\hat{\beta}_{p_1} = 1$, $\hat{\beta}_{p_2} = 1$, $\hat{\beta}_{p_3} = 1$, $\hat{\beta}_{p_4} = 1$, $\hat{\beta}_{p_5} = 1$ и (в первой модели) $\hat{\beta}_1 = 0$. Отсюда $RSS = 0$, $ESS = TSS$, поэтому $R^2 = 1$ даже в модели без свободного члена. Получаем $\hat{\sigma}^2 = 0$, поэтому строго говоря t статистики и P-значения не существуют из-за деления на ноль.

На практике при численной минимизации RSS оказывается, что t-статистики коэффициентов при задачах принимают очень большие значения, а соответствующие P-значения крайне близки к нулю. В первой модели особенной на практике будет t статистика свободного члена. В силу неопределенности вида $0/0$ свободный коэффициент на практике может оказаться незначим.

3.43.

$$R^2_{adj} = 1 - (1 - R^2)\frac{n-1}{n-k}$$

Следовательно, при R^2 близком к 0 и большом количестве регрессоров k может оказаться, что $R^2_{adj} < 0$.

Например,

```
set.seed(42)
y <- rnorm(200, sd = 15)
X <- matrix(rnorm(2000), nrow = 200)
model <- lm(y ~ X)
report <- summary(model)
report$adj.r.squared
```

3.44. $\hat{\beta}_2 = 0.41$, $\hat{\beta}_3 = 0.3$, $\hat{\beta}_4 = -0.235$, переменная x значима.

3.45. $\hat{\beta}_2 = 0.75$, $\hat{\beta}_3 = 0.625$, $\hat{\beta}_4 = 0.845$, переменные z и w значимы

3.46. $RSS_1 > RSS_2 = RSS_3$, в моделях два и три, ошибка прогноза равна $\hat{\beta}_4$

3.47. Сначала заметим, что в основной гипотезе есть зависимые ограничения, оставим только независимые:

$$H_0 : \begin{cases} \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = 1 \\ \beta_4 = 0 \end{cases}$$

Ограниченная модель имеет вид:

$$y_i = \beta_1 + w_i + \varepsilon_i$$

Введём замену $\tilde{y}_i = y_i - w_i$ и получим оценку коэффициента β_1:

$$\hat{\beta}_1 = \bar{\tilde{y}}_i = \bar{y} - \bar{w}$$

Теперь можно найти RSS_R:

$$RSS_R = \sum_{i=1}^{24} (y_i - \hat{\tilde{y}}_i)^2 = \sum_{i=1}^{24} (y_i - \bar{y} + \bar{w} - w_i)^2 = 20$$

Осталось найти значение F-статистики, которая при верной H_0 имеет распределение $F_{3,20}$:

$$F_{obs} = \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/q}{RSS_{UR}/(n - k_{UR})} = \frac{(20-15)/3}{15/(24-4)} = 2.(2)$$

Так как $F_{obs} < F_{crit} = 3.09$, оснований отвергать нулевую гипотезу нет.

3.48. $RSS/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-k}$, $\mathbb{E}(RSS) = (n-k)\sigma^2$, $\text{Var}(RSS) = 2(n-k)\sigma^4$, $\mathbb{P}(5\sigma^2 < RSS < 10\sigma^2) \approx 0.451$

3.49. $\mathbb{P}(\hat{\sigma}_3^2 > \hat{\sigma}_1^2) = 0.5$, $\mathbb{P}(\hat{\sigma}_1^2 > 2\hat{\sigma}_2^2) = 0.5044$, $\mathbb{E}(\hat{\sigma}_2^2/\hat{\sigma}_1^2) = 1.25$, $\text{Var}(\hat{\sigma}_2^2/\hat{\sigma}_1^2) = 4.6875$

3.50. 90% во всех пунктах

3.51. Поскольку $\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$, $\hat{\gamma}$ и $\hat{\delta}$ являются МНК-коэффициентами в регрессии $y_i = \mu + \nu x_i + \gamma d_i + \delta x_i d_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$, то для любых μ, ν, γ и δ имеет место

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\mu} - \hat{\nu}x_i - \hat{\gamma}d_i - \hat{\delta}x_i d_i - \varepsilon_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu - \nu x_i - \gamma d_i - \delta x_i d_i - \varepsilon_i)^2 \quad (20.2)$$

Перепишем неравенство (20.2) в виде

$$\sum_{i=1}^{m}(y_i - (\hat{\mu} + \hat{\gamma}) - (\hat{\nu} + \hat{\delta})x_i)^2 + \sum_{i=m+1}^{n}(y_i - \hat{\mu} - \hat{\nu}x_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{m}(y_i - (\mu + \gamma) - (\nu + \delta)x_i)^2 + \sum_{i=m+1}^{n}(y_i - \mu - \nu x_i)^2 \quad (20.3)$$

Учитывая, что неравенство (20.3) справедливо для всех μ, ν, γ и δ, то оно останется верным для $\mu = \hat{\mu}$, $\nu = \hat{\nu}$ и произвольных γ и δ. Имеем

$$\sum_{i=1}^{m}(y_i - (\hat{\mu} + \hat{\gamma}) - (\hat{\nu} + \hat{\delta})x_i)^2 + \sum_{i=m+1}^{n}(y_i - \hat{\mu} - \hat{\nu}x_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{m}(y_i - (\hat{\mu} + \gamma) - (\hat{\nu} + \delta)x_i)^2 + \sum_{i=m+1}^{n}(y_i - \hat{\mu} - \hat{\nu}x_i)^2$$

Следовательно

$$\sum_{i=1}^{m}(y_i - (\hat{\mu} + \hat{\gamma}) - (\hat{\nu} + \hat{\delta})x_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{m}(y_i - (\hat{\mu} + \gamma) - (\hat{\nu} + \delta)x_i)^2$$

Обозначим $\tilde{\beta}_1 := \hat{m u} + \gamma$ и $\tilde{\beta}_2 := \hat{\nu} + \delta$. В силу произвольности γ и δ коэффициенты $\tilde{\beta}_1$ и $\tilde{\beta}_2$ также произвольны. тогда для любых $\tilde{\beta}_1$ и $\tilde{\beta}_2$ выполнено неравенство:

$$\sum_{i=1}^{m}(y_i - (\hat{\mu} + \hat{\gamma}) - (\hat{\nu} + \hat{\delta})x_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{m}(y_i - \tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_2 x_i)^2$$

которое означает, что $\hat{\mu}+\hat{\gamma}$ и $\hat{\nu}+\hat{\delta}$ являются МНК-оценками коэффициентов β_1 и β_2 в регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$, оцененной по наблюдениям $i = 1, \ldots, m$, то есть $\hat{\beta}_1 = \hat{\mu} + \hat{\gamma}$ и $\hat{\beta}_2 = \hat{\nu} + \hat{\delta}$.

3.52. Не верно, поскольку R^2_{adj} может принимать отрицательные значения, а $F(n-k, n-1)$ — не может.

3.53. Сгенерируйте сильно коррелированные x и z.

3.54.

3.55.

3.56.

3.57. bootstrap, дельта-метод.

3.58.

3.59.

3.60. При наличии ошибок в измерении зависимой переменной оценки остаются несмещёнными, их дисперсия растет. Однако оценка дисперсии может случайно оказаться меньше. Например, могло случиться, что ошибки u_i случайно компенсировали ε_i.

3.61.

3.62.

3.63. 0

3.64. Проводим тест Чоу.

3.65. Несмещённой является $\hat{\sigma}^2$, поэтому $\hat{\sigma}$ смещена, но состоятельна.

3.66.

3.67.

1. 6
2. Сначала «очищаем» все переменные от вектора констант

   - y на константу, откуда получим $\tilde{y}$
   - x на константу, откуда получим $\tilde{x}$
   - z на константу, откуда получим $\tilde{z}$

   Затем «очищенные» от констант переменные «очищаем» от x:

   - $\tilde{y}$ на $\tilde{x}$, получаем $\tilde{\tilde{y}}$
   - $\tilde{z}$ на $\tilde{x}$, получаем $\tilde{\tilde{z}}$

   И из финальной регрессии $\tilde{\tilde{y}}$ на $\tilde{\tilde{z}}$ полуичм $\hat{\beta}_3$.

3.68. 0 и 1

3.69.

3.70. $c = 1/(n-k)$. Заметим, что $RSS/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-k}$, поэтому:

$$MSE = \mathrm{Var}(\hat{\sigma}^2) + bias^2(\hat{\sigma}^2) = \sigma^4 \cdot (c^2 2(n-k) + (c(n-k)-1)^2).$$

Минимизируя по c получаем $c = 1/(n-k+2)$.

3.71. Коэффициент R^2 имеет бета-распределение.

4.1.

1. В случае нестохастических регрессоров:

   Пусть дана регрессионная модель $y = X\beta + \varepsilon$ с k регрессорами, включая свободный член, и n наблюдениями, и

   (a) регрессионная модель правильно специфицирована;
   (b) $\mathrm{rank}(X) = k$;
   (c) X не являются стохастическими;
   (d) $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$;
   (e) $\mathrm{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 I$;

то $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$ являются лучшими оценками в классе линейных несмещённых оценок, то есть BLUE-оценками.

В случае стохастических регрессоров:

Пусть дана регрессионная модель $y = X\beta + \varepsilon$ с k регрессорами, включая свободный член, и n наблюдениями, и

(a) регрессионная модель правильно специфицирована;

(b) $\mathrm{rank}(X) = k$;

(c) $\mathbb{E}(\varepsilon|X) = 0$;

(d) $\mathrm{Var}(\varepsilon|X) = \sigma^2 I$;

то $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$ являются лучшими оценками в классе линейных несмещённых оценок, то есть BLUE-оценками.

2. Да, верно. В самом деле,

$$\mathbb{E}(\hat{\beta}) = \mathbb{E}((X'X)^{-1}X'y) = (X'X)^{-1}X'\mathbb{E}(y) = (X'X)^{-1}X'\mathbb{E}(X\beta+\varepsilon) = \\ = (X'X)^{-1}X'X\mathbb{E}(\beta) + (X'X)^{-1}X'\underbrace{\mathbb{E}(\varepsilon)}_{=0} = \beta$$

3.

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}) = \mathrm{Var}((X'X)^{-1}X'y) = (X'X)^{-1}X'\,\mathrm{Var}(y)((X'X)^{-1}X')' = \\ = (X'X)^{-1}X'\,\mathrm{Var}(X\beta + \varepsilon)X(X'X)^{-1}$$

Так как β является константой, то $\mathrm{Var}(X\beta) = 0$. Тогда

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}X'\,\mathrm{Var}(X\beta + \varepsilon)X(X'X)^{-1} = \\ = (X'X)^{-1}X'\,\mathrm{Var}(\varepsilon)X(X'X)^{-1} = (X'X)^{-1}X'\sigma^2 X(X'X)^{-1} = \\ = \sigma^2(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1} = \sigma^2(X'X)^{-1}$$

4.2. Да, в общем случае (кроме случая $\beta = 0$ это верно. Так как $\tilde{\beta}$ является несмещённой, то $\mathbb{E}(\tilde{\beta}) = \beta$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\tilde{\beta}) = \mathbb{E}(((X'X)^{-1}X' + A)y) = \mathbb{E}[((X'X)^{-1}X' + A)(X\beta + \varepsilon)] = \\ = \mathbb{E}(((X'X)^{-1}X' + A)X\beta) + ((X'X)^{-1}X' + A)\underbrace{\mathbb{E}(\varepsilon)}_{=0} = \\ = \mathbb{E}((X'X)^{-1}X'X\beta + AX\beta) = \beta + AX\beta\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(\tilde{\beta}) = \beta$$

$$\beta + AX\beta = \beta$$

$$AX\beta = 0$$

Значит, либо $AX = 0$, либо $\beta = 0$.

Заметим, что при $\beta = 0$ при любом AX оценка $\tilde{\beta}$ будет несмещённой.

4.3.

$$X'X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1.5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) = \mathrm{Var}(\hat{\beta})_{[1,1]} = \sigma^2$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) = \mathrm{Var}(\hat{\beta})_{[2,2]} = 1.5\sigma^2$$

$$\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = \mathrm{Var}(\hat{\beta})_{[1,2]} = -\sigma^2$$

$$\mathrm{Corr}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = \frac{\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1)}\,\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2)} = \frac{\sigma^2}{\sigma \cdot \sqrt{1.5}\sigma} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Показательно, что значения y здесь не используются.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

```
X <- matrix(c(1, 1, 1, 0, 1, 1), nrow = 3,
 byrow = FALSE)
y <- c(1, 2, 3)
```

4.4.

$$\hat\beta = (X'X)^{-1}X'y$$
$$X'X\hat\beta = X'y$$
$$\hat\alpha = (D'X'XD)^{-1}D'X'y$$

поэтому

$$\hat\alpha = (D'X'XD)^{-1}D'X'y = (D'X'XD)^{-1}D'X'X\hat\beta = (D'X'XD)^{-1}D'X'XDD^{-1}\hat\beta = D^{-1}\hat\beta$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \hat\alpha_1 = \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 \\ \hat\alpha_2 = \beta_2 - \beta_3 \\ \hat\alpha_3 = \beta_3 \end{cases}$$

```
alpha <- matrix(c(1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1), nrow = 3, byrow = FALSE)
```

4.5.

$$\hat\beta = (X'X)^{-1}X'y$$
$$X'X\hat\beta = X'y$$
$$\hat\alpha = (D'X'XD)^{-1}D'X'y$$

поэтому

$$\hat\alpha = (D'X'XD)^{-1}D'X'y = (D'X'XD)^{-1}D'X'X\hat\beta = (D'X'XD)^{-1}D'X'XDD^{-1}\hat\beta = D^{-1}\hat\beta$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \hat\alpha_1 = \beta_1 - \beta_2 \\ \hat\alpha_2 = \beta_2 - \beta_3 \\ \hat\alpha_3 = \beta_3 \end{cases}$$

```
alpha2 <- matrix(c(1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1), nrow = 3, byrow = FALSE)
```

4.6.

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$
$$X'X\hat{\beta} = X'y$$
$$\hat{\alpha} = (D'X'XD)^{-1}D'X'y$$

поэтому

$$\hat{\alpha} = (D'X'XD)^{-1}D'X'y = (D'X'XD)^{-1}D'X'X\hat{\beta} = (D'X'XD)^{-1}D'X'XDD^{-1}\hat{\beta} = D^{-1}\hat{\beta}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_1 = \beta_1 \\ \hat{\alpha}_2 = \beta_2 - \beta_3 \\ \hat{\alpha}_3 = \beta_3 \end{cases}$$

```
alpha3 <- matrix(c(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1), nrow = 3, byrow = FALSE)
```

4.7. Да, верно.

$$\begin{aligned} &\hat{\varepsilon}'\hat{y} = (y-\hat{y})'\hat{y} = (y-X\hat{\beta})'X\hat{\beta} = (y-X(X'X)^{-1}X'y)'X(X'X)^{-1}X'y = \\ &= ((I-X(X'X)^{-1}X')y)'X(X'X)^{-1}X'y = y'(I-X(X'X)^{-1}X')X(X'X)^{-1}X'y = \\ &= y'(X(X'X)^{-1}X'-X(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}X')y = y'(X(X'X)^{-1}X'-X(X'X)^{-1}X')y = 0 \end{aligned}$$

Да, верно.

$$\hat{y}'\hat{\varepsilon} = (\hat{\varepsilon}'\hat{y})' = 0$$

так как выше доказано, что $he'\hat{y} = 0$.

4.8.

1.

$$\hat{\gamma} = (Z'Z)^{-1}Z'y = A^{-1}(X'X)^{-1}(A')^{-1}A'X'y = \\ A^{-1}(X'X)^{-1}X'y = A^{-1}\hat{\beta}$$

2. $\hat{u} = y - Z\hat{\gamma} = y - XAA^{-1}\hat{\beta} = y - X\hat{\beta} = \hat{\varepsilon}$

3. Пусть $z^0 = \begin{pmatrix}1 & z_1^0 & \ldots & z_{k-1}^0\end{pmatrix}$ — вектор размера $1 \times k$ и $x^0 = \begin{pmatrix}1 & x_1^0 & \ldots & x_{k-1}^0\end{pmatrix}$ — вектор размера $1 \times k$. Оба эти вектора представляют собой значения факторов. Тогда $z^0 = x^0 A$ и прогнозное значение для регрессии с преобразованными факторами равно $z^0\hat{\gamma} = x^0 A A^{-1}\hat{\beta} = x^0\hat{\beta}$ прогнозному значению для регрессии с исходными факторами.

4.9.

1.

$$\mathbb{E}(\tilde{\beta}) = ((X'X)^{-1} + \gamma I)X'\mathbb{E}(y) = \\ ((X'X)^{-1} + \gamma I)X'X\beta = \beta + \gamma X'X\beta$$

2.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\tilde{\beta}) = \mathrm{Var}(((X'X)^{-1} + \gamma I)X'y) = \\ \mathrm{Var}(((X'X)^{-1} + \gamma I)X'\varepsilon) = \\ (((X'X)^{-1} + \gamma I)X')\,\mathrm{Var}(\varepsilon)(((X'X)^{-1} + \gamma I)X')' = \\ (((X'X)^{-1} + \gamma I)X')\sigma_\varepsilon^2 I(((X'X)^{-1} + \gamma I)X')' = \\ \sigma_\varepsilon^2((X'X)^{-1} + \gamma I)X'X((X'X)^{-1} + \gamma I) = \\ \sigma_\varepsilon^2((X'X)^{-1} + \gamma I)(I + \gamma X'X) = \\ \sigma_\varepsilon^2((X'X)^{-1} + 2\gamma I + \gamma^2 X'X)\end{aligned}$$

4.10. Да, верно.

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{TSS - RSS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS}$$

$$TSS = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = y'\left(I - \frac{\vec{1}'}{\vec{1}^2}\right)y$$

не зависит от X.

$$RSS_a = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = y'(I - X(X'X)^{-1}X')y$$

$$RSS_b = y'(I - Z(Z'Z)^{-1}Z')y = y'(I - XD(D'X'XD)^{-1}D'X')y =$$

так как D является квадратной и невырожденной, то используя формулу $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, получим:

$$RSS_b = y'(I - XD(D'X'XD)^{-1}D'X')y = y'(I - XDD^{-1}(X'X)^{-1}D'^{-1}D'X')y = \\ = y'(I - X(X'X)^{-1}X')y = RSS_a$$

Значит,

$$R_a^2 = 1 - \frac{RSS_a}{TSS_a} = 1 - \frac{RSS_b}{TSS_b} = R_b^2$$

4.11. Да, верно.

$$RSS_1 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = y'(I - X(X'X)^{-1}X')y$$

$$RSS_2 = y'(I - Z(Z'Z)^{-1}Z')y = y'(I - XD(D'X'XD)^{-1}D'X')y =$$

так как D является квадратной и невырожденной, то используя формулу $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, получим:

$$RSS_2 = y'(I - XD(D'X'XD)^{-1}D'X')y = y'(I - XDD^{-1}(X'X)^{-1}D'^{-1}D'X')y = \\ = y'(I - X(X'X)^{-1}X')y = RSS_1$$

4.12.

1. $\mathrm{Var}(\varepsilon_1) = \mathrm{Var}(\varepsilon)_{(1,1)} = 4 \cdot I_{(1,1)} = 4$
2. $\mathrm{Var}(\beta_1) = 0$, так как β_1 — детерминированная величина.
3. $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) = \sigma^2(X'X)^{-1}_{(1,1)} = 0.5\sigma^2 = 0.5 \cdot 4 = 2$
4. $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1) = \hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}_{(1,1)} = 0.5\hat{\sigma}^2_{(1,1)} = 0.5\frac{RSS}{5-3} = 0.25RSS = 0.25y'(I - X(X'X)^{-1}X')y = 0.25 \cdot 1 = 0.25$
   $\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS}{n-k} = \frac{1}{2}$.

5. Так как оценки МНК являются несмещёнными, то $\mathbb{E}(\hat{\beta}) = \beta$, значит:

$$\mathbb{E}(\hat{\beta}_1) - \beta_1^2 = \mathbb{E}(\hat{\beta}_1) - (\mathbb{E}(\hat{\beta}_1))^2 = \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1) = 0.25$$

6. $\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = \sigma^2 (X'X)^{-1}_{(2,3)} = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

7. $\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta})_{(2,3)} = \hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1}_{(2,3)} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

8. $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3) = \mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) + \mathrm{Var}(\hat{\beta}_3) + 2\,\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = \sigma^2 ((X'X)^{-1}_{(2,2)} + (X'X)^{-1}_{(3,3)} + 2(X'X)^{-1}_{(2,3)} = 4(1 + 1.5 + 2 \cdot (-0.5)) = 6$

9. $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3) = \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2) + \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_3) + 2\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = \hat{\sigma}^2 ((X'X)^{-1}_{(2,2)} + (X'X)^{-1}_{(3,3)} + 2(X'X)^{-1}_{(2,3)} = \frac{1}{2} \cdot 1.5 = 0.75$

10. $\mathrm{Var}(\beta_2 - \beta_3) = 0$

11. $\mathrm{Corr}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = \frac{\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2)\,\mathrm{Var}(\hat{\beta}_3)}} = \frac{-2}{\sqrt{4 \cdot 6}} = -\frac{\sqrt{6}}{6}$

12. $\widehat{\mathrm{Corr}}(\beta_2, \beta_3) = \frac{\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2)\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_3)}} = \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}}} = -\frac{\sqrt{6}}{6}$

13. $(n-k)\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-k}$.

$$\mathbb{E}\left((n-k)\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right) = n - k$$

$$\mathbb{E}\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right) = 1$$

$$\mathbb{E}(\hat{\sigma}^2) = 2$$

14. $\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS}{n-k} = \frac{1}{2}$

4.13.

```
x <- matrix(c(1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1), nrow = 5, byrow = FALSE)
y <- matrix(c(1, 2, 3, 4, 5), nrow = 5, byrow = FALSE)
xx <- crossprod(x)
xx_inv <- solve(xx)
```

1. $n = 5$

2. $k = 3$

3. $\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{pmatrix} = (X'X)^{-1}X'y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. $TSS = 10$

5. $RSS = 2$

6. $R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 0.8$. R^2 высокий, построенная эконометрическая модель хорошо описывает данные

7. Основная гипотеза – $H_0 : \beta_2 = 0$, альтернативная гипотеза – $H_a : \beta_2 \neq 0$

8. Проверка гипотезы

   (a) $T = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2)}} = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}}; n = 5; k = 3$

   (b) $T \sim t(n-k); n = 5; k = 3$

   (c) $T_{obs} = \frac{\hat{\beta}_2 - 0}{\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2)}} = \frac{\hat{\beta}_2 - 0}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}} = \frac{2-0}{\sqrt{\frac{2}{5-3}1.3333}} = 1.7321$

   (d) Нижняя граница $= -2.920$, верхняя граница $= 2.920$

   (e) Поскольку $T_{obs} = 1.7321$, что принадлежит промежутку от -2.920 до 2.920, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 10%

9. P-значение равно $\mathbb{P}(|T| > |T_{obs}|) = 2F_T(|T_{obs}|)$, где $F_T(|T_{obs}|)$ – функция распределения t-распределения с $n - k = 5 - 3 = 2$ степенями свободы в точке $|T_{obs}|$, 0.2253. Поскольку P-значение превосходит уровень значимости 10%, то основная гипотеза – $H_0 : \beta_2 = 0$ не может быть отвергнута

10. Проверка гипотезы

    (a) $T = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2)}} = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}}; n = 5; k = 3$

    (b) $T \sim t(n-k); n = 5; k = 3$

    (c) $T_{obs} = \frac{\hat{\beta}_2 - 1}{\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2)}} = \frac{\hat{\beta}_2 - 1}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}} = \frac{2-1}{\sqrt{\frac{2}{5-3}1.3333}} = 0.8660$

(d) Нижняя граница $= -2.920$, верхняя граница $= 2.920$

(e) Поскольку $T_{obs} = 0.8660$, что принадлежит промежутку от -2.920 до 2.920, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 10%

11. Проверка гипотезы

(a) $T = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_2)}} = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}}; n = 5; k = 3$

(b) $T \sim t(n-k); n = 5; k = 3$

(c) $T_{obs} = \frac{\hat{\beta}_2 - 1}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_2)}} = \frac{\hat{\beta}_2 - 1}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}} = \frac{2-1}{\sqrt{\frac{2}{5-3}1.3333}} = 0.8660$

(d) Нижняя граница $= -\infty$, верхняя граница $= 1.8856$

(e) Поскольку $T_{obs} = 0.8660$, что принадлежит промежутку от $-\infty$ до 1.8856, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 10%

12. Проверка гипотезы

(a) $T = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_2)}} = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}}; n = 5; k = 3$

(b) $T \sim t(n-k); n = 5; k = 3$

(c) $T_{obs} = \frac{\hat{\beta}_2 - 1}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_2)}} = \frac{\hat{\beta}_2 - 1}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}} = \frac{2-1}{\sqrt{\frac{2}{5-3}1.3333}} = 0.8660$

(d) Нижняя граница $= -1.8856$, верхняя граница $= +\infty$

(e) Поскольку $T_{obs} = 0.8660$, что принадлежит промежутку от -1.8856 до $+\infty$, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 10%

13. Основная гипотеза — $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$, альтернативная гипотеза — $H_a : |\beta_2| + |\beta_3| > 0$

14. Проверка гипотезы

(a) $T = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-k}{k}; n = 5; k = 3$

(b) $T \sim F(n-k); n = 5; k = 3$

(c) $T_{obs} = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-k}{k} = \frac{0.8}{1-0.8} \cdot \frac{5-3}{2} = 4$

(d) Нижняя граница $= 0$, верхняя граница $= 19$

(e) Поскольку $T_{obs} = 4$, что принадлежит промежутку от 0 до 19, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 5%. Следовательно, регрессия в целом незначима. Напомним, что $R^2 = 0.8$, то есть он высокий. Но при этом регрессия в целом незначима. Такой эффект может возникать при малом объёме выборки, например, таком, как в данной задаче

15. P-значение равно $\mathbb{P}(|T| > |T_{obs}|) = 2F_T(|T_{obs}|)$, где $F_T(|T_{obs}|)$ — функция распределения F—распределения с $k = 3$ и $n - k = 5 - 3 = 2$ степенями свободы в точке T_{obs}, 0.2. Поскольку P-значение превосходит уровень значимости 10%, то основная гипотеза — $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$ не может быть отвергнута. Таким образом, регрессия в целом незначима

16. Проверка гипотезы

    (a) $T = \frac{\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3-(\beta_2+\beta_3)}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3)}}$, где $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3) = \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2) + \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_3) + 2\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_2; \hat{\beta}_3) = \hat{\sigma}^2[(X'X)^{-1}]_{22}+2\hat{\sigma}^2[(X'X)^{-1}]_{23}+\hat{\sigma}^2[(X'X)^{-1}]_{33} = \frac{RSS}{n-k}([(X'X)^{-1}]_{22} + 2[(X'X)^{-1}]_{23} + [(X'X)^{-1}]_{33})$

    (b) $T \sim t(n-k); n = 5; k = 3$

    (c) $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3) = \frac{RSS}{n-k}([(X'X)^{-1}]_{22}+2[(X'X)^{-1}]_{23}+[(X'X)^{-1}]_{33}) = \frac{2}{5-3}(1.3333 + 2(-1.0000) + 2.0000) = 1.3333$. Тогда $T_{obs} = \frac{\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3-2}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3)}} = \frac{2+1-2}{\sqrt{1.3333}} = 0.8660$

    (d) Нижняя граница $= -4.3027$, верхняя граница $= 4.3027$

    (e) Поскольку $T_{obs} = 0.8660$, что принадлежит промежутку от -4.3027 до 4.3027, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 5%

17. Проверка гипотезы

    (a) $T = \frac{\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3-(\beta_2+\beta_3)}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3)}}$, где $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3) = \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2) + \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_3) + 2\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_2; \hat{\beta}_3) = \hat{\sigma}^2[(X'X)^{-1}]_{22}+2\hat{\sigma}^2[(X'X)^{-1}]_{23}+\hat{\sigma}^2[(X'X)^{-1}]_{33} = \frac{RSS}{n-k}([(X'X)^{-1}]_{22} + 2[(X'X)^{-1}]_{23} + [(X'X)^{-1}]_{33})$

    (b) $T \sim t(n-k); n = 5; k = 3$

    (c) $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3) = \frac{RSS}{n-k}([(X'X)^{-1}]_{22}+2[(X'X)^{-1}]_{23}+[(X'X)^{-1}]_{33}) = \frac{2}{5-3}(1.3333 + 2(-1.0000) + 2.0000) = 1.3333$. Тогда $T_{obs} = \frac{\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3-2}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3)}} = \frac{2+1-2}{\sqrt{1.3333}} = 0.8660$

(d) Нижняя граница $= -\infty$, верхняя граница $= 2.9200$

(e) Поскольку $T_{obs} = 0.8660$, что принадлежит промежутку от $-\infty$ до 2.9200, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 5%

18. Проверка гипотезы

(a) $T = \frac{\hat\beta_2+\hat\beta_3-(\beta_2+\beta_3)}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_2+\hat\beta_3)}}$, где $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_2+\hat\beta_3) = \widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_2) + \widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_3) + 2\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat\beta_2;\hat\beta_3) = \hat\sigma^2[(X'X)^{-1}]_{22}+2\hat\sigma^2[(X'X)^{-1}]_{23}+\hat\sigma^2[(X'X)^{-1}]_{33} = \frac{RSS}{n-k}([(X'X)^{-1}]_{22}+2[(X'X)^{-1}]_{23}+[(X'X)^{-1}]_{33})$

(b) $T \sim t(n-k); n = 5; k = 3$

(c) $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_2+\hat\beta_3) = \frac{RSS}{n-k}([(X'X)^{-1}]_{22}+2[(X'X)^{-1}]_{23}+[(X'X)^{-1}]_{33}) = \frac{2}{5-3}(1.3333 + 2(-1.0000) + 2.0000) = 1.3333$. Тогда $T_{obs} = \frac{\hat\beta_2+\hat\beta_3-2}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_2+\hat\beta_3)}} = \frac{2+1-2}{\sqrt{1.3333}} = 0.8660$

(d) Нижняя граница $= -2.9200$, верхняя граница $= +\infty$

(e) Поскольку $T_{obs} = 0.8660$, что принадлежит промежутку от -2.9200 до $+\infty$, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 5%

4.14.

```
x <- matrix(as.integer(c(1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1)),
 nrow = 5, byrow = FALSE, dimnames = NULL)
y <- matrix(as.integer(c(1, 2, 3, 4, 5)), nrow = 5, byrow = FALSE, dimnames = NULL)
```

1. $T = \frac{\hat\beta_1+\hat\beta_2-(\beta_1+\beta_2)}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_1+\hat\beta_2)}}$, где $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_1+\hat\beta_2) = \widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_1) + \widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_2) + 2\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat\beta_1;\hat\beta_2) = \hat\sigma^2[(X'X)^{-1}]_{11} + 2\hat\sigma^2[(X'X)^{-1}]_{12} + \hat\sigma^2[(X'X)^{-1}]_{22} = \frac{RSS}{n-k}([(X'X)^{-1}]_{11} + 2[(X'X)^{-1}]_{12} + [(X'X)^{-1}]_{22}), \beta_1+\beta_2 = 2$

2. $T \sim t_{n-k}; n = 5; k = 3$

3. Смотри матрицы в номере 4.12. $\hat\beta = (X'X)^{-1}X'y = (1.5\ \ 2.0\ \ 1.5)'$. $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_1+\hat\beta_2) = \frac{1}{2}(0.5+1+2\cdot(-0.5)) = \frac{1}{4}$. $T = \frac{1.5+2-2}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 3$.

4. Так как проверяется знак «равно» в гипотезе, то нижняя граница $-\infty$, а верхняя граница $+\infty$.

5. $t_{0.95,2} = 2.9199 < T$, значит, гипотеза отвергается на уровне значимости 5%.

4.15.

1. $RSS = 0$, $R^2 = 1$, так как в регрессии у Васи 13 (1+5+(4-1)+(5-1)) переменных, которые точно подстраиваются под данные.

2. Эта матрица является единичной размер 13 на 13, что нетрудно понять из формулы $RSS = y'(I - X(X'X)^{-1}X')y$.

3. На сегодняшний день среди исследователей нет единого мнения о происхождении трискайдекафобии (боязнь числа 13).

   По одной из версий, число 13 может считаться «плохим» уже только потому, что оно больше 12, числа, которое является священным у многих народов.

   Кроме того, существует библейское предание, косвенно связанное с числом 13 — на тайной вечере Иуда Искариот, апостол, предавший Иисуса, сидел за столом тринадцатым. С этим преданием связывают самую распространенную в XIX веке примету, связанную с числом 13 — если за обеденным столом собрались 13 человек, один из них умрет в течение года после трапезы. Позже в христианстве распространилось апокрифическое убеждение, что Сатана был 13-м ангелом.

   Источник: https://ru.wikipedia.org/wiki/Трискайдекафобия

4.16. $\text{Var}(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X'X)^{-1}$

4.17. $(n-1)\sigma^2$, $(n-k)\sigma^2$

4.18. $TSS = y'(I - \pi)y$, $RSS = y'(I - H)y$, $ESS = y'(H - \pi)y$

4.19. $\mathbb{E}(TSS) = (n-1)\sigma^2 + \beta' X'(I - \pi)X\beta$

4.20. $(n-1)\sigma^2$, $(n-k)\sigma^2$, $(k-1)\sigma^2$

4.21. Вспомним, что $\text{Var}(y) = \text{Var}(X\beta + \varepsilon) = \text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2$

$$\text{Cov}(\hat{\varepsilon}, \hat{y}) = \text{Cov}(y - \hat{y}, \hat{y}) = \text{Cov}(y - X(X'X)^{-1}X'y, y) = \text{Var}(y) - \text{Cov}(X(X'X)^{-1}X'y, y)$$

$\mathrm{Cov}(\hat{\varepsilon}, \hat{y}) = \sigma^2 - X(X'X)^{-1}X' \mathrm{Var}(y) X(X'X)^{-1}X' = \sigma^2(I - X(X'X)^{-1}X')$

и если $X(X'X)^{-1}X'$ не равна единичной, то векторы $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{y}$ не являются перпендикулярными. Это может произойти только в случае, когда $RSS = 0$, то есть в случае, когда существующие переменные абсолютно точно описывают данные.

4.22. $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$, $\mathbb{E}(\hat{\varepsilon}) = 0$, $\sum \varepsilon_i$ может оказаться равной нулю только случайно, в нормальной модели это происходит с вероятностью 0, $\sum \hat{\varepsilon}_i = 0$ в модели со свободным членом

4.23. $\sum y_i^2 = \sum \hat{y}_i^2 + \sum \hat{\varepsilon}_i^2, TSS = ESS + RSS,$

4.24. $\mathrm{sCorr}(\hat{y}, y) = \frac{\mathrm{sCov}(\hat{y},y)}{\sqrt{\mathrm{sVar}(\hat{y})\,\mathrm{sVar}\,(y)}}$
$\mathrm{sCorr}(\hat{y}, y)^2 = \frac{(\mathrm{sCov}(\hat{y},y))^2}{\mathrm{sVar}(\hat{y})\,\mathrm{sVar}\,(y)}$
$R^2 \cdot TSS/(n-1) \cdot ESS/(n-1) = (\mathrm{sCov}(\hat{y}, y))^2 = (\mathrm{sCov}(\hat{y} - \bar{y}, y - \bar{y}))^2$
Отсюда можно понять, что ковариация для двухмерного случая равна произведению длин векторов $\hat{y} - \bar{y}$ и $y - \bar{y}$ — $\sqrt{ESS}$ и $\sqrt{TSS}$ на косинус угла между ними ($\sqrt{R^2}$). Геометрически скалярное произведение можно изобразить как произведение длин одного из векторов на проекцию второго вектора на первый. Если будет проецировать $y - \bar{y}\vec{1}$ на $\hat{y} - \bar{y}\vec{1}$, то получим как раз ESS — тот квадрат на рисунке, что уже построен.
$\mathrm{sCov}(\hat{y}, y) = \sqrt{ESS^2/(n-1)^2} = ESS/(n-1)$

4.25. Спроецируем единичный столбец на «плоскость», обозначим его $1'$. Делаем проекцию y на «плоскость» и на $1'$. Далее аналогично.

4.26. Проекция y на $\hat{y}$ это $\hat{y}$, поэтому оценки коэффициентов будут 0 и 1. Оценка дисперсии $\frac{RSS}{(n-2)ESS}$. Нарушены предпосылки теоремы Гаусса-Маркова, например, ошибки новой модели в сумме дают 0, значит коррелированы.

4.27. Либо в регрессию включена константа, либо единичный столбец (тут была опечатка, столбей) можно получить как линейную комбинацию регрессоров, например, включены дамми-переменные для каждого возможного значения качественной переменной.

4.28. Сами оценки коэффициентов никак детерминистически не связаны, но при большом размере подвыборок примерно равны. А ковариационные матрицы связаны соотношением $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_a)^{-1} + \mathrm{Var}(\hat{\beta}_b)^{-1} = \mathrm{Var}(\hat{\beta}_{tot})^{-1}$

4.29.

1.
$$\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} \to \min_{\hat{\beta}}$$
$$(y-\hat{y})'(y-\hat{y}) \to \min_{\hat{\beta}}$$
$$(y-X\hat{\beta})'(y-X\hat{\beta}) \to \min_{\hat{\beta}}$$
$$y'y-\hat{\beta}'X'y-y'X\hat{\beta}+\hat{\beta}'X'X\hat{\beta} \to \min_{\hat{\beta}}$$

Воспользуемся тем, что : $\frac{\partial x'A}{\partial x'} = A'$, $\frac{\partial Ax}{\partial x'} = A$, $\frac{\partial x'Ax}{\partial x'} = x'(A'+A)$
Условие первого порядка:
$$-2(X'y)' + (X'X + (X'X)')\hat{\beta}' = 0$$
$$-2X'y + 2\hat{\beta}X'X = 0$$

2. $X'X = \begin{pmatrix} x_{1,1} \ldots x_{n,1} \\ x_{1,2} \ldots x_{n,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_{n,1}^2 & x_{1,1}x_{1,2}\ldots x_{n,1}x_{n,2} \\ x_{1,1}x_{1,2}\ldots x_{n,1}x_{n,2} & \sum_{i=1}^n x_{n,2}^2 \end{pmatrix}$

$X'y = \begin{pmatrix} x_{1,1} \ldots x_{n,1} \\ x_{1,2} \ldots x_{n,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,1}y_1 \ldots x_{n,1}y_n \\ x_{1,2}y_1 \ldots x_{n,2}y_n \end{pmatrix}$

3. Условие первого порядка:
$$-2(X'y)' + \hat{\beta}'(X'X + (X'X)') = 0$$
$$-2X'y + 2X'X\hat{\beta} = 0$$

и
$$X'y = X'X\hat{\beta}$$
$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

4.

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{n,1}^2 & x_{1,1}x_{1,2}\ldots x_{n,1}x_{n,2} \\ x_{1,1}x_{1,2}\ldots x_{n,1}x_{n,2} & \sum_{i=1}^{n} x_{n,2}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_{1,1}y_1\ldots x_{n,1}y_n \\ x_{1,2}y_1\ldots x_{n,2}y_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_{n,1}^2 \sum_{i=1}^{n} x_{n,2}^2 - (x_{1,1}x_{1,2} + \ldots + x_{n,1}x_{n,2})^2} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{n,2}^2 & -x_{1,1}x_{1,2} + \ldots + x_{n,1}x_{n,2} \\ -x_{1,1}x_{1,2} + \ldots + x_{n,1}x_{n,2} & \sum_{i=1}^{n} x_{n,1}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1,1}y_1 + \ldots + x_{n,1}y_n \\ x_{1,2}y_1 + \ldots + x_{n,2}y_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_{n,1}^2 \sum_{i=1}^{n} x_{n,2}^2 - (x_{1,1}x_{1,2} + \ldots + x_{n,1}x_{n,2})^2} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{n,2}^2(x_{1,1}y_1 + \ldots + x_{n,1}y_n) - (x_{1,1}x_{1,2} + \ldots + x_{n,1}x_{n,2})(x_{1,2}y_1 + \ldots + x_{n,2}y_n) \\ -(x_{1,1}y_1 + \ldots + x_{n,1}y_n)(x_{1,1}x_{1,2} + \ldots + x_{n,1}x_{n,2}) + \sum_{i=1}^{n} x_{n,1}^2(x_{1,2}y_1 + \ldots + x_{n,2}y_n) \end{pmatrix}$$

4.30.

Ахтунг! Истинные дисперсии в формуле оценок!

1. $\hat{\beta}_1' = \bar{y}^* - \hat{\beta}_2'\bar{x}^* = \overline{y - \bar{y}} - \hat{\beta}_2'(\overline{x - \bar{x}}) = 0$

2. $\hat{\beta}_2' = \frac{\mathrm{Cov}(y^*,x^*)}{\mathrm{Var}(x^*)} = \frac{\mathrm{Cov}(y-\bar{y},x-\bar{x})s_x/s_y}{\mathrm{Var}(x-\bar{x})} = \frac{\mathrm{Cov}(y,x)s_x/s_y}{\mathrm{Var}(x)} = \frac{s_x}{s_y}\hat{\beta}_2$

   $\hat{\beta}_2'' = \frac{\overline{x^*y^*}}{\overline{\bar{x}^2}} = \frac{\mathrm{Cov}(x^*y^*)+\bar{x^*}\bar{y^*}}{\mathrm{Var}(x^*)+\bar{x^*}} = \frac{\mathrm{Cov}(y^*,x^*)}{\mathrm{Var}(x^*)} = \hat{\beta}_2' = \frac{s_x}{s_y}\hat{\beta}_2$

3. $\hat{u}_i' = y_i^* - \hat{y}_i^* = y_i^* - \hat{\beta}_1' - \hat{\beta}_2'x_i^* = y_i^* - \frac{s_x}{s_y}\hat{\beta}_2x_i^* = \frac{y_i-\bar{y}-\hat{\beta}_2(x_i-\bar{x})}{s_y} = \frac{y_i-\hat{\beta}_2x_i-(\bar{y}-\hat{\beta}_2\bar{x})}{s_y} = \frac{y_i-\hat{\beta}_2x_i-\hat{\beta}_1}{s_y} = \frac{\hat{u}_i}{s_y}$

   $\hat{u}_i'' = y_i^* - \hat{y}_i^* = y_i^* - \hat{\beta}_2''x_i^* = y_i^* - \frac{s_x}{s_y}\hat{\beta}_2'x_i^* = \frac{y_i-\bar{y}-\hat{\beta}_2(x_i-\bar{x})}{s_y} = \frac{y_i-\hat{\beta}_2x_i-(\bar{y}-\hat{\beta}_2\bar{x})}{s_y} = \frac{y_i-\hat{\beta}_2x_i-\hat{\beta}_1}{s_y} = \frac{u_i}{s_y} = \hat{u}_i'$

4. $RSS = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 = s_y^2 \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i'^2 = s_y^2 RSS'$, $RSS' = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i'^2 = RSS''$.

   $X'X = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix}$

   $X'X_{new} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})/s_x \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})/s_x & \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2/s_x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})/ \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2)/s_x & \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2/ \end{pmatrix}$
   $\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & (\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2)/s_x^2 \end{pmatrix}$

$\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_2) = \frac{RSS_1}{n-2}(X'X)^{-1}_{(2,2)} = \frac{RSS_2 s_y^2}{n-2}\frac{1}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & -\sum_{i=1}^n x_i \\ -\sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix}_{(2,2)} =$
$\frac{RSS_2 s_y^2}{n-2}\frac{n}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{RSS_2 s_y^2}{n-2}\frac{n/s_x^2}{(n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2)/s_x^2} = \widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_2')\frac{s_y^2}{s_x^2}$
$\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_2') = \frac{RSS_2}{n-2}(X'X_{new})^{-1}_{(2,2)} = \frac{RSS_3}{n-1}(X'X_{new})^{-1}_{(2,2)}\frac{n-1}{n-2} = \widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_2'')\frac{n-1}{n-2}$

5. $\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}') = \frac{RSS_2}{n-2}(X'X_{new})^{-1} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i^* - \hat{\beta}_1' - \hat{\beta}_2' x_i^*)^2}{n-2}\begin{pmatrix} (\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2)/s_x^2 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$

   где $\hat{\beta}' = (X'X_{new})^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})y_i \end{pmatrix}$, в частности, $\hat{\beta}_1' = 0$.

6. $t_{\hat{\beta}_2} = \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_2)}} = \frac{\hat{\beta}' s_y/s_x}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_2')} s_y/s_x} = t_{\hat{\beta}_2'} = \sqrt{\frac{n-2}{n-1}}t_{\hat{\beta}_2''}$

7. $TSS' = TSS'' = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{s_y^2} = \frac{TSS}{s_y^2}$.

   $R'^2 = R''^2$, так как соответствующие TSS и RSS равны.

   $R^2 = \frac{RSS}{TSS} = \frac{s_y^2 RSS'}{TSS' s_y^2} = \frac{RSS}{TSS} = R'^2$

8. При переходе к стандартизированным переменным изменяются оценки коэффициентов и остатки регрессии пропорционально стандартным отклонениям переменным. Также перестаёт играет роль регрессор-свободный член, так как матожидание эндогенной переменной становится равной 0. Также при переходе к стандартизированным переменным можно снизить оценку дисперсии переменных, так как можно убрать регрессор-свободный член. Качество регрессий по R^2 не изменяется.

4.31.

1. $n = 5$

2. $k = 3$

3. $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u_i$

4. $RSS = y'(I - X(X'X)^{-1}X')y = 2, TSS = (1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2 = 4+1+0+1+4 = 10, ESS = TSS - RSS = 8.$

5. $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}'$

6. $\hat{\varepsilon}_5 = y_5 - \hat{y}_5 = 5 - 2 - 2x_1^{(5)} - x_2^{(5)} = 5 - 2 - 2 - 1 = 0$.

7. $R^2 = \frac{ESS}{TSS}\frac{8}{10} = 0.8$. R^2 высок, модель регрессии хорошо описывает данные.

8. Несмещённая оценка — $\hat{\sigma}^2$. $\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS}{n-k} = \frac{2}{5-3} = 1$.

9. $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2(X'X)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

10. $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1) = \frac{1}{3}$

11. $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2) = \frac{4}{3}$

12. $\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = -\frac{1}{3}$

13. $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2) = \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1) + \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2) + 2\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} - 2 \cdot \frac{1}{3} = 1$

    $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2) = \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1) + \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2) - 2\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

    $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3) = \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1) + \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2) + \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_3) + 2\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) + 2\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_3) + 2\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = \frac{1}{3}(1 + 4 + 6 - 2 - 6) = 1$

    $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 - 2\hat{\beta}_3) = \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1) + \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2) + 4\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_3) + 2\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) - 4\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_3) - 4\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = \frac{1}{3}(1 + 4 + 4 \cdot 6 - 1 + 12) = \frac{40}{3}$

14. $\hat{\mathrm{Corr}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = \frac{\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1) \cdot \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1)}} = \frac{-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3}}} = -\frac{1}{2}$

15. $s_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1)} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

16. $\hat{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \bar{\hat{y}} = 3$

    $\mathrm{sCov}(y, \hat{y}) = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}}_i)}{n-1} = \frac{(1-3)(2-3)+(2-3)(2-3)+(3-3)(2-3)+(4-3)(4-3)+(5-3)(5-3)}{4} = \frac{2+1+1+4}{4} = 2$

17. $\mathrm{sVar}(y) = \frac{\sum_{i=1}^n (y - \bar{y})^2}{n-1} = \frac{(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2}{4} = \frac{4+1+0+1+4}{4} = 2.5$, $\mathrm{sVar}(\hat{y}) = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y} - \bar{\hat{y}})^2}{n-1} = \frac{(2-3)^2+(2-3)^2+(2-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2}{4} = 2$.

4.32. Подсказка: запишите матрицу X как блочную и, пользуясь матричным выражением для $\hat{\beta}$ и формулой Фробениуса, найдите $\hat{\beta}_2$.

1. Да, верно. $X = (X_1 X_2)$ — блочная матрица. Аналогично, $\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix}$ — блочная матрица (хотя на самом деле вектор).

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y = ((X_1X_2)'(X_1X_2))^{-1}(X_1X_2)'y =$$
$$= \left(\begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \end{pmatrix}(X_1X_2)\right)^{-1}\begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} y$$

Запишем и докажем формулу Фробениуса для обращения блочных матриц.

Формула Фробениуса:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BH^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BH^{-1} \\ -H^{-1}CA^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix}$$

где $H = D - CA^{-1}B$.

Докажем формулу, обращая матрицу методом Гаусса. Умножим слева на $\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} A & B & I & 0 \\ C & D & 0 & I \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} I & A^{-1}B & A^{-1} & 0 \\ C & D & 0 & I \end{array}\right) =$$

вычтем из второй строки первую, умноженную на C

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} I & A^{-1}B & A^{-1} & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B & -CA^{-1} & I \end{array}\right) =$$

умножим слева на $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} I & A^{-1}B & A^{-1} & 0 \\ 0 & I & -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{array}\right) =$$

вычтем из первой строки вторую, умноженную на $A^{-1}B$.

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} I & 0 & A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ 0 & I & -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{array} \right)$$

Значит,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BH^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BH^{-1} \\ -H^{-1}CA^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix}$$

По формуле Фробениуса получим, что

$$\begin{pmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{pmatrix}^{-1} = \left(\begin{array}{cc} (X_1'X_1)^{-1} + (X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2H^{-1}X_2'X_1(X_1'X_1)^{-1} & -(X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2H \\ -H^{-1}X_2'X_1(X_1'X_1)^{-1} & H^{-1} \end{array} \right.$$

где $H = X_2'X_2 - X_2'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2$. Верхняя строка в данном пункте не важна, и сейчас её опустим. Заметим, что

$$H = X_2'X_2 - X_2'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2 = X_2'(I - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1')X_2 = X_2'M_1X_2$$

Итак,

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} y =$$
$$= \begin{pmatrix} ? & ? \\ -H^{-1}X_2'X_1(X_1'X_1)^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} y =$$
$$= \begin{pmatrix} ? \\ -H^{-1}X_2'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1' + H^{-1}X_2' \end{pmatrix} y =$$
$$= \begin{pmatrix} ? \\ H^{-1}X_2'(I - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1') \end{pmatrix} y =$$
$$= \begin{pmatrix} ? \\ H^{-1}X_2'M_1y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ (X_2'M_1X_2)^{-1}X_2'M_1y \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta}_2 = (X_2'M_1X_2)^{-1}X_2'M_1y$$

Заметим свойства матрицы-проектора M_1.

$$M_1' = (I - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1')' = I - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1' = M_1$$

$$(M_1)^2 = (I - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1')^2 = I - 2X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1' + X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1' \cdot X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1' = \\ = I - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1' = M_1$$

Значит,

$$\hat{\beta}_2 = (X_2'M_1X_2)^{-1}X_2'M_1y = (X_2'M_1M_1X_2)^{-1}X_2'M_1M_1y = (X_2'M_1'M_1X_2)^{-1}X_2'M_1'M_1y = \\ = ((M_1X_2)'M_1X_2)^{-1}(M_1X_2)'M_1y$$

но ведь и

$$\hat{\gamma}_2 = ((M_1X_2)'M_1X_2)^{-1}(M_1X_2)'M_1y$$

Значит, $\hat{\beta}_2 = \hat{\gamma}_2 = ((M_1X_2)'M_1X_2)^{-1}(M_1X_2)'M_1y$, что и требовалось доказать.

2. Да, верно.

$$\hat{y} = X_1\hat{\beta}_1 + X_2\hat{\beta}_2$$

$$M_1\hat{\varepsilon} = M_1y - M_1\hat{y} = M_1y - M_1(X_1\hat{\beta}_1 + X_2\hat{\beta}_2) = M_1y - M_1X_2\hat{\beta}_2 - M_1X_1\hat{\beta}_1$$

$$M_1X_1 = (I - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1')X_1 = X_1 - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'X_1 = 0$$

$$M_1\hat{\varepsilon} = M_1y - M_1X_2\hat{\beta}_2 = M_1y - M_1X_2\hat{\gamma}_2 = \hat{u}$$

$$M_1\hat{\varepsilon} = M_1(y - \hat{y}) = M_1(I - X(X'X)^{-1}X')y = (I - X(X'X)^{-1}X')y$$

так как M_1 ортогональное дополнение к X_1, а $(I - X(X'X)^{-1}X')y$ уже лежит в ортогональном дополнении к X_1, так как $I - X(X'X)^{-1}X'$ ортогональное дополнение к к прямой сумме пространств X_1 и $X_2 - X_1 \oplus X_2$.

4.33.

Подсказка: в задаче следует применить тест Чоу.

Посчитаем RSS в каждой из моделей

$$RSS = y'(I - X(X'X)^{-1}X')y = y'y - y'X(X'X)^{-1}X'y = y'y - (X'y)'(X'X)^{-1}X'y$$

$RSS_1 = 2000 - 1933.33 = \frac{500}{3}$
$RSS_2 = 2500 - 2333.33 = \frac{500}{3}$
$X'X = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix}$, $X'y = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{100} y_i \\ \sum_{i=1}^{100} x_i y_i \end{pmatrix}$ значит, новый $X'X = \begin{pmatrix} 100 & 600 \\ 600 & 4200 \end{pmatrix}$ а новый $X'y = \begin{pmatrix} 600 \\ 4200 \end{pmatrix}$.
$y'y = \sum_{i=1}^{100} y_i^2 = (y'y)_{1st} + (y'y)_{2nd} = 4600$
$RSS_{pooled} = 4600 - 4200 = 400$
Тест Чоу $\frac{(RSS_{pooled} - RSS_1 - RSS_2)/k}{(RSS_1 + RSS_2)/(n-2k)} = \frac{(400 - 500/3 - 500/3)/2}{1000/3/96} = \frac{96}{10} = 9.6 > 3.09 = F_{2,96}$ гипотеза о том, что $\beta = \gamma$ отвергается.

4.34. Докажем несмещённость МНК-оценок.

$$\mathbb{E}\hat{\beta} = \mathbb{E}\left((X'X)^{-1}X'y\right) = (X'X)^{-1}X'\mathbb{E}(y) =$$

$$= (X'X)^{-1}X'\mathbb{E}(X\beta + \varepsilon) = (X'X)^{-1}X'X\beta = \beta$$

Обозначим $\varphi(X, y) = (X'X)^{-1}X'y$. Тогда $\hat{\beta} = \varphi(X, y)$. Покажем, что функция φ линейна по переменной y.

1. $\varphi(X, \lambda \cdot y) = (X'X)^{-1}X'(\lambda \cdot y) = \lambda(X'X)^{-1}X'y = \lambda \cdot \varphi(X, y)$

2. $\varphi(X, y + z) = (X'X)^{-1}X'(y + z) = (X'X)^{-1}X'y + (X'X)^{-1}X'z = \varphi(X, y) + \varphi(X, z)$

Что и требовалось доказать.

4.35. Нет, так как для функции $\varphi(X, y) = (X'X)^{-1}X'y$ не выполнено, например, свойство однородности по переменной X. Действительно,

$$\varphi(X, \lambda \cdot y) = ((\lambda \cdot X)'(\lambda \cdot X))^{-1}(\lambda \cdot X)'y = \frac{1}{\lambda} \cdot (X'X)^{-1}X'y = \frac{1}{\lambda}\varphi(X, y)$$

.

4.36. $\tilde{\beta} = (X'CX)^{-1}X'Cy$, где

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$$

4.37. $H\vec{1} = \vec{1} \Leftrightarrow H\pi = \pi$ поскольку, если матрицу π записать по столбцам $\pi = \frac{1}{n}\begin{pmatrix}\vec{1} & \vec{1} & \ldots & \vec{1}\end{pmatrix}$, то можно записать следующую цепочку равенств $H\pi = H\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\vec{1} & \vec{1} & \ldots & \vec{1}\end{pmatrix} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix}H\vec{1} & H\vec{1} & \ldots & H\vec{1}\end{pmatrix} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix}\vec{1} & \vec{1} & \ldots & \vec{1}\end{pmatrix} \Leftrightarrow H\vec{1} = \vec{1}$.

Свойство $H^2 = H$ имеет место независимо от выполнимости условия $H\vec{1} = \vec{1}$. Действительно, $H^2 = X(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}X' = X(X'X)^{-1}X' = H$.

Рассмотрите пример $y = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}'$, $x = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}'$. Постройте регрессию $y = \beta x + \varepsilon$ без свободного члена. Убедитесь, что $\sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i = 0$ и $\bar{y} = \bar{\hat{y}} = 0$, но $H\vec{1} \neq \vec{1}$.

Ответ: $H\pi = \pi$

4.38. (1), (2), (3), (5)

4.39.

$$\mathbb{E}(\varepsilon'\pi\varepsilon) = \mathbb{E}(\mathrm{tr}[\varepsilon'\pi\varepsilon]) = \mathbb{E}(\mathrm{tr}[\pi\varepsilon\varepsilon']) = \mathrm{tr}[\pi\mathbb{E}(\varepsilon\varepsilon')] =$$

$$\mathrm{tr}[\pi\,\mathrm{Var}(\varepsilon)] = \mathrm{tr}\left[\frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \sigma_n^2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$\frac{1}{n}\,\mathrm{tr}\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \ldots & \sigma_n^2 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \ldots & \sigma_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \ldots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

4.40.

1.

$$RSS = \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}y'(I-H)y = y'y - y'Hy = y'y - y'X(X'X)^{-1}X'y;$$

При этом $y'y = 3924$, а

$$y'X(X'X)^{-1}X'y =$$

$$\begin{pmatrix} 460 & 810 & 615 & 712 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.038 & -0.063 & -0.063 & 0.100 \\ -0.063 & 1.129 & 1.107 & -2.192 \\ -0.063 & 1.107 & 1.110 & -2.170 \\ 0.100 & -2.192 & -2.170 & 4.292 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 460 \\ 810 \\ 615 \\ 712 \end{pmatrix} = 3051.2$$

Итого, $RSS = 3924 - 3051.2 = 872.8$

$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon} = \frac{RSS}{n-k} = \frac{872.8}{100-4} = 9.0917$

$\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2_{\varepsilon}(X'X)^{-1} \Rightarrow \widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = -0.56939$, $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1) = 0.34251$, $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2) = 10.269$

$\widehat{\mathrm{Corr}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = \frac{\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1)}\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2)}} = -0.30361$

2. (указание) $\widehat{\mathrm{Corr}}(x_2, x_3) = \frac{\sum(x_{i2}-\overline{x}_2)(x_{i3}-\overline{x}_3)}{\sqrt{\sum(x_{i2}-\overline{x}_2)}\sqrt{\sum(x_{i3}-\overline{x}_3)}}$. Все необходимые величины можно извлечь из матрицы $X'X$ – это величины $\sum x_{i2}$ и $\sum x_{i3}$, а остальное – из матрицы $X'(I-\pi)X = X'X - X'\pi X = X'X - (\pi X)'\pi X$. При этом имейте в виду, что $\pi X = \begin{pmatrix} 1 & \overline{x}_1 & \overline{x}_2 & \overline{x}_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \overline{x}_1 & \overline{x}_2 & \overline{x}_3 \end{pmatrix}$ и $\overline{x}_1 = 1.23$, $\overline{x}_2 = 0.96$, $\overline{x}_3 = 1.09$

3. $\begin{pmatrix}\hat\beta_1\\ \hat\beta_2\\ \hat\beta_3\\ \hat\beta_4\\ \hat\beta_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.03767 & -0.06263 & -0.06247 & 0.1003\\ -0.06263 & 1.129 & 1.107 & -2.192\\ -0.06247 & 1.107 & 1.110 & -2.170\\ 0.1003 & -2.192 & -2.170 & 4.292\end{pmatrix}\begin{pmatrix}460\\810\\615\\712\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0.40221\\ 6.1234\\ 5.9097\\ -7.5256\end{pmatrix}$

   $t = \frac{\hat\beta_2}{\sqrt{\mathrm{Var}(\hat\beta_2)}} \sim t_{100-4}$

   $t = \frac{\hat\beta_2}{\sqrt{\mathrm{Var}(\hat\beta_2)}} = \frac{6.1234}{\sqrt{10.269}} = 1.9109 \Rightarrow \hat\beta_2$ — не значим.

4.41.

1. $\widehat{\mathrm{Cov}}\begin{pmatrix}\hat\beta_1\\ \hat\beta_2\\ \hat\beta_3\end{pmatrix} = \hat\sigma^2_\varepsilon(X'X)^{-1}$ — несмещённая оценка для ковариационной матрицы

   МНК-коэффициентов. Действительно, $\mathbb{E}\widehat{\mathrm{Cov}}\begin{pmatrix}\hat\beta_1\\ \hat\beta_2\\ \hat\beta_3\end{pmatrix} = \mathbb{E}\hat\sigma^2_\varepsilon(X'X)^{-1} =$

   $\sigma^2_\varepsilon(X'X)^{-1} = \mathrm{Cov}\begin{pmatrix}\hat\beta_1\\ \hat\beta_2\\ \hat\beta_3\end{pmatrix}$. Поэтому искомая оценка $\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat\beta_2, \hat\beta_3) =$

   $\hat\sigma^2_\varepsilon\left[(X'X)^{-1}\right]_{23}$, где $\left[(X'X)^{-1}\right]_{23}$ — элемент матрицы $(X'X)^{-1}$, расположенный во второй строке, 3-м столбце.

   Заметим, что $\hat\sigma^2_{\hat\beta_2} = \hat\sigma^2_\varepsilon\left[(X'X)^{-1}\right]_{22} \Rightarrow 0.7^2 = \hat\sigma^2_\varepsilon\cdot(3030) \Rightarrow \hat\sigma^2_\varepsilon = 0.00016172$

   Значит, $\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat\beta_2, \hat\beta_3) = 0.00016172\cdot(-589) = -0.095253$.

2. $t = \frac{\hat\beta_2+\hat\beta_3-\beta_2-\beta_3}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_2+\hat\beta_3)}} \sim t_{n-k}$

   Требуется проверить $H_0 : \beta_2 + \beta_3 = 1$.

   $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_2+\hat\beta_3) = \widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_2) + \widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_3) + 2\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat\beta_2, \hat\beta_3) = 0.7^2 + 0.138^2 + 2\cdot 0.095253 = 0.319044$

   $t = \frac{\hat\beta_2+\hat\beta_3-\beta_2-\beta_3}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_2+\hat\beta_3)}} = \frac{0.76+0.19-1}{\sqrt{0.319044}} = -0.088520674$

Значит, гипотеза не отвергается на любом разумном уровне значимости.

3. Мы знаем, что $\frac{\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3-\beta_2-\beta_3}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3)}} \sim t_{n-k} = t_{15-3}$, поэтому построить доверительный интервал для $\beta_2 + \beta_3$ не составляет труда. $\mathbb{P}\left(\left|\frac{\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3-\beta_2-\beta_3}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3)}}\right| < t^*\right) = 0.95$

Обозначим $se = \sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3)}$, тогда:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\left|\frac{\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3-\beta_2-\beta_3}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3)}}\right| < t^*\right) = \\
&\qquad \mathbb{P}\left(-t^*se < \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 - \beta_2 - \beta_3 < t^*se\right) = \\
&\qquad \mathbb{P}\left(-t^*se - (\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3) < -\beta_2 - \beta_3 < -(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3) + t^*se\right) = \\
&\qquad \mathbb{P}\left((\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3) + t^*se > \beta_2 + \beta_3 > (\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3) - t^*se\right)
\end{aligned}$$

Отсюда получаем доверительный интервал

$$\begin{aligned}
&\beta_2 + \beta_3 \in \\
&\qquad [(0.76 + 0.19) - 2.16 \cdot 0.319; (0.76 + 0.19) + 2.16 \cdot 0.319]
\end{aligned}$$

Или $0.26 < \beta_2 + \beta_3 < 1.639$

4.42.

Метод наименьших квадратов:

$$\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} \to \min_{\hat{\beta}}$$

$$(y - \hat{y})'(y - \hat{y}) \to \min_{\hat{\beta}}$$

$$(y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta}) \to \min_{\hat{\beta}}$$

$$y'y - \hat{\beta}'X'y - y'X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} \to \min_{\hat{\beta}}$$

Воспользуемся тем, что : $\frac{\partial x'A}{\partial x'} = A'$, $\frac{\partial Ax}{\partial x'} = A$, $\frac{\partial x'Ax}{\partial x'} = x'(A'+A)$ Условие первого порядка:

$$-2(X'y)' + (X'X + (X'X)')\hat{\beta}' = 0$$

$$-2X'y + 2\hat{\beta}X'X = 0$$

и

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(\hat{\beta}) = \operatorname{Var}((X'X)^{-1}X'y) = (X'X)^{-1}X' \operatorname{Var}(y)((X'X)^{-1}X')' = \\ = (X'X)^{-1}X' \operatorname{Var}(X\beta + \varepsilon)X(X'X)^{-1}\end{aligned}$$

Так как β является константой, то $\operatorname{Var}(X\beta) = 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}X' \operatorname{Var}(X\beta + \varepsilon)X(X'X)^{-1} = \\ = (X'X)^{-1}X' \operatorname{Var}(\varepsilon)X(X'X)^{-1} = (X'X)^{-1}X'\sigma^2X(X'X)^{-1} = \\ = \sigma^2(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1} = \sigma^2(X'X)^{-1}\end{aligned}$$

4.43. Находим $X'X$, её элементы и есть то, что нужно.

4.44.

$$\operatorname{Var}(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2-\hat{\beta}_3) = \operatorname{Var}(\hat{\beta}1)+\operatorname{Var}(\hat{\beta}2)+\operatorname{Var}(\hat{\beta}3)+2\operatorname{Cov}(\hat{\beta}1,\hat{\beta}2)-2\operatorname{Cov}(\hat{\beta}1,\hat{\beta}3)-2\operatorname{Cov}(\hat{\beta}2,\hat{\beta}3)$$

$$\operatorname{Var}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3) = 1/3 + 4/3 + 2 - 2/3 + 2 = 5$$

4.45. Из того, что $\operatorname{Var}(\hat{\beta}) = \sigma^2 \cdot (X'X)^{-1}$ видно, что $\sigma^2 = \frac{1}{3}$.
$RSS = \sigma^2 \cdot (n-k) = 1/3 \cdot 2 = 2/3$

$$R^2 = 49\frac{1}{3}/50 = 148/150$$

$F = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)} = \frac{148/2}{2/2} = 74$ $F^{crit}_{0.05,2,2} = 19 < 74$ гипотеза отвергается, регрессия значима.

4.46.

1. $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y = \frac{1}{110}\begin{pmatrix} 40 & -10 \\ -10 & 30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 40 \\ 70 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 \\ 17 \end{pmatrix}$

2. $X'X = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{pmatrix}$

   Теперь $X'X = \begin{pmatrix} 31 & 11 \\ 11 & 41 \end{pmatrix}$,

   $X'y = \begin{pmatrix} 1\ldots1 & 1 \\ X_{old, no\ ones} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{old} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 72 \end{pmatrix}$

   $$\hat{\beta}^* = \frac{1}{1150}\begin{pmatrix} 41 & -11 \\ -11 & 31 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 42 \\ 72 \end{pmatrix} = \frac{1}{115}\begin{pmatrix} 93 \\ 177 \end{pmatrix}$$

3. $RSS = y'(I - X(X'X)^{-1}X')y = y'y - y'X(X'X)^{-1}X'y = y'y - (X'y)'(X'X)^{-1}X'y$

   $RSS_{old} = 80 - \begin{pmatrix} 40 & 70 \end{pmatrix}\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 \\ 17 \end{pmatrix} < 0$

   что-то здесь не так

4.47. У $\hat{\varepsilon}$ собственное число — $\lambda = 0$, у $\hat{y}$ собственное число — $\lambda = 1$. Например, столбцы матрицы X или их линейные комбинации являются собственными векторами с числом $\lambda = 1$.

4.48. $\sigma^2(n_{test} + \mathrm{tr}((X'X)^{-1}Z'Z))$

проверить формулу!

4.49.

$$\hat{y}_2^{new} = \hat{y}_2^{old} + H_{22}\Delta y_2 = 5 + 0.7(-2.7) = 3.11$$

4.50.

1. $H = \frac{1}{n}S$, где S — матрица строевого леса, то есть матрица из единиц размера $n\times n$.
2. $H = \begin{pmatrix} x_1^2\sum x_i^2 & x_1\cdot x_2\sum x_i^2 & \ldots & x_1\cdot x_n\sum x_i^2 \\ x_1\cdot x_2\sum x_i^2 & x_2^2\sum x_i^2 & \ldots & x_2\cdot x_n\sum x_i^2 \\ \ldots \\ x_1\cdot x_n\sum x_i^2 & x_2\cdot x_n\sum x_i^2 & \ldots & x_n^2\sum x_i^2 \end{pmatrix}$
3. …

4.51. $0\leqslant H_{ii}\leqslant 1$, лучше взять $\hat{y}_{42}$

Сделаем вектор-«пробник» w, где на первой позиции 1, а остальные — нули. Заметим, что $w'Hw = H_{11}$. С другой стороны, $w'Hw = w'H'Hw = (Hw)'Hw \geqslant 0$. Аналогично, $w'(I-H)w = 1 - H_{11}\geqslant 0$.

4.52. Да, ортогональны, т.к. $\sum v_i w_i = 0$. $\mathrm{Cov}(v, w) = -0.25I$.

4.53. $d'C^{-1}d$

4.54. $RSS_A = 1^2 + (-3)^2 = 10$, $RSS_B = 2^2 + 2^2 = 8$. $k_A = 0$, $k_B = 1$.

4.55. Трюк идейно такой, на примере одной объясняющей переменной:

1. Мы хотим оценить две регрессии: y_a на x_a и y_b на x_b.
2. Записываем y_a, а под ним y_b, получаем y.
3. Напротив y_a регрессорами будут x_a и столбец нулей.
4. Напротив y_b регрессорами будут столбец нулей и x_b.
5. Строим одну регрессию

$$y_i = \beta_a d_{ai} x_{ai} + \beta_b d_{bi} x_{bi} + u_i.$$

4.56. Чтобы оценить a_{21} — построить регрессию u_{2t} на u_{1t} и взять оценку коэффициента с противоположным знаком.

Чтобы оценить a_{31}, a_{32} — построить регрессию u_{3t} на u_{1t} и u_{2t} и взять оценки коэффициентов с противоположным знаком.

4.57.

$$\hat{B} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$\hat{a} = \hat{u}'\hat{v}/(n-k)$$

4.58. При ортогональных регрессорах $\hat{\beta}_j = \hat{\gamma}_j$. Если регрессоры дополнительно стандартизированы, то $R^2 = R_1^2 + \ldots + R_j^2$.

4.59. Заметим, что R^2 не изменится, если перейти к ортонормальному базису в пространстве регрессоров. В этом базисе, кстати, окажется, что $R^2 = \frac{\hat{\beta}'\hat{\beta}}{TSS}$. В силу ортогональности регрессоров R^2 распадётся в сумму R_j^2, где R_j^2 — коэффициент в регрессии зависимой переменной на константу и j-ый регрессор.

В силу соответствующей одномерной задачи $\mathbb{E}(R_j^2) = \frac{1}{n-1}$. Следовательно, $\mathbb{E}(R^2) = \frac{k-1}{n-1} = \frac{3}{10}$.

4.60. Коэффициенты выйдут разные, а прогнозы и ковариационные матрицы прогнозов — одинаковые. Заметим, что:

$$X'X = R'Q'QR = R'R.$$

Матрица-шляпница для Рапунцель:

$$H_X = X(X'X)^{-1}X' = QR(R'R)^{-1}R'Q' = QRR^{-1}R'^{-1}R'Q' = QQ'.$$

Матрица-шляпница для Флина:

$$H_Q = Q(Q'Q)^{-1}Q' = QIQ' = QQ'.$$

Осталось вспомнить, что всё определяется матрицей-шляпницей, $\hat{y} = Hy$, $\operatorname{Var}(\hat{y}|X) = \sigma^2 H$.

5.1.

Пусть X_i — число заработанных за i-ый день чатлов. По условию $X_i \sim Pois(\lambda)$

Реализация случайной выборки: $\sum_{i=1}^{100} x_i = 250$

Функция максимального правдоподобия:

$$L\left(\lambda, x_1, \ldots, x_{100}\right) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = x_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_{100} = x_{100}) =$$

$$= \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda^{x_{100}}}{x_{100}!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\sum x_i}}{x_1! \cdot \ldots \cdot x_{100}!} e^{-100\lambda}$$

Логарифмическая функция максимального правдоподобия:

$$\ell\left(\lambda, x_1, \ldots, x_{100}\right) = \sum x_i \cdot \log \lambda - 100\lambda - \log\left(x_1! \cdot \ldots \cdot x_{100}!\right)$$

1. $\hat{\lambda} = 2.5$
$$\frac{\partial \ell(\cdot)}{\partial \lambda} = \frac{\sum x_i}{\lambda} - 100$$
Из условия первого первого порядка:
$$\frac{250}{\hat{\lambda}} - 100 = 0$$
$$\hat{\lambda} = 2.5$$
Заметим, что $\hat{\lambda} > 0$, следовательно, то, что мы выполняли безусловную оптимизацию вместо условной (хотя должны были, учитывая, что $\lambda > 0$), не повлияло на решение.

2. $k = 838$, где k — минимальное необходимое число дней.
$$\hat{\mathbb{P}}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i > 2200\right) = 0.99$$
$$\hat{\mathbb{P}}\left(\frac{\sum_{i=1}^{k} X_i - \hat{\lambda} \cdot k}{\sqrt{\hat{\lambda} \cdot k}} > \frac{2200 - \hat{\lambda} \cdot k}{\sqrt{\hat{\lambda} \cdot k}}\right) = 0.99$$
Из ЦПТ:
$$\frac{\sum_{i=1}^{k} X_i - \lambda \cdot k}{\sqrt{\lambda \cdot k}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Значит:

$$\frac{2200 - \hat{\lambda} \cdot k}{\sqrt{\hat{\lambda} \cdot k}} = x0.99,$$

где $x_{0.99} \approx 2.3263 - 99\,\%$ квантиль нормального распределения.

Решая квадратное уравнение, получим:

$$n \approx 837.4228$$

Значит, для того, чтобы с вероятностью не меньше 99 % купить гравицапу, необходимо дать, как минимум, 838 концертов.

3. $\lambda \in [2.19, 2.81]$

Так как оценки метода максимального правдоподобия асимптотически нормальны, то:

$$\hat{\lambda} \overset{\text{ac}}{\sim} \mathcal{N}\left(\lambda, \operatorname{Var}\hat{\lambda}\right)$$

Для оценки дисперсии можем использовать оценку информационной матрица Фишера:

$$\widehat{\operatorname{Var}}\hat{\lambda} = \left(\hat{I}\left(\hat{\lambda}\right)\right)^{-1}$$

$$\widehat{\operatorname{Var}}\hat{\lambda} = -\left(-\frac{\sum x_i}{\hat{\lambda}^2}\right)^{-1} = \frac{\hat{\lambda}^2}{\sum x_i} = 0.025$$

Границы 95 % доверительного интервала:

```
left <- 2.5 + qnorm(0.025) * sqrt(0.025)
right <- 2.5 + qnorm(0.975) * sqrt(0.025)
```

Итак:

$$\lambda \in [2.190102, 2.809898]$$

4. $\begin{cases} H_0 : \lambda = 2 \\ H_a : \lambda \neq 2 \end{cases}$

Значение логарифмической функции правдоподобия в неограниченной модели:

$$\ell(\hat{\lambda}_{UR}) = 250 \cdot \log 2.5 - 100 \cdot 2.5 - \log\left(x_1! \cdot \ldots \cdot x_{100}!\right) \approx -20.92732 - \log\left(x_1! \cdot \ldots \cdot x_{100}!\right)$$

Значение логарифмической функции правдоподобия в ограниченной модели:

$$\ell(\hat{\lambda}_{UR}) = 250 \cdot \log 2 - 100 \cdot 2 - \log (x_1! \cdot \ldots \cdot x_{100}!) \approx -26.7132 - \log (x_1! \cdot \ldots \cdot x_{100}!)$$

Применяем **тест отношения правдоподобия**:

$$LR = 2 \left(\ell(\hat{\lambda}_{UR}) - \ell(\hat{\lambda}_R) \right) \overset{H_0}{\sim} \chi^2_q$$

Наблюдаемое значение LR-статистики:

$$LR = 2 \left(-20.92732 - \log (x_1! \cdot \ldots \cdot x_{100}!) - (-26.7132 - \log (x_1! \cdot \ldots \cdot x_{100}!)) \right) = 5.78588$$

При 5 % уровне значимости гипотеза отвергается в пользу альтернативной, P-значение примерно равно 0.02:

```
p_value <- 1 - pchisq(5.78588, df = 1)
```

Применяем **тест Вальда**:

$$W = \left(g\left(\hat{\lambda}_{UR}\right)\right)' \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial \lambda'} \left(\hat{\lambda}_{UR}\right) \cdot \widehat{I}^{-1} \left(\hat{\lambda}_{UR}\right) \cdot \frac{\partial g'}{\partial \lambda} \left(\hat{\lambda}_{UR}\right) \right)^{-1} \cdot g\left(\hat{\lambda}_{UR}\right) \overset{H_0}{\sim} \chi^2_q$$

В нашей задаче:

$$g\left(\hat{\lambda}_{UR}\right) = \hat{\lambda}_{UR} - 2 = 0.5$$

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda} \left(\hat{\lambda}_{UR}\right) = 1$$

$$\left(\hat{I}\left(\hat{\lambda}_{UR}\right)\right)^{-1} = -0.025$$

$$W = 0.5 \cdot (0.025)^{-1} \cdot 0.5 = 10$$

При 5 % уровне значимости гипотеза отвергается в пользу альтернативной, P-значение меньше 1%:

```
p_value <- 1 - pchisq(10, df = 1)
```

Применяем **тест множителей Лагранжа**:

$$LM = \left(\frac{\partial \ell}{\partial \theta}\left(\hat{\theta}_R\right)\right)' \cdot \widehat{I}^{-1}\left(\hat{\theta}_R\right) \cdot \left(\frac{\partial \ell}{\partial \theta}\left(\hat{\theta}_R\right)\right) \overset{H_0}{\sim} \chi^2_q$$

Здесь:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda}\left(\hat{\lambda}_R\right) = \frac{250}{2} - 100 = 25$$
$$\left(\hat{I}\left(\hat{\lambda}_R\right)\right)^{-1} = \frac{4}{250} = 0.016$$
$$LM = 25 \cdot 0.016 \cdot 25 = 10$$

При 5 % уровне значимости гипотеза отвергается в пользу альтернативной, P-значение меньше 1%:

```
p_value <- 1 - pchisq(10, df = 1)
```

5.2. Эта задача решается в том же ключе, что и предыдущая!

1. Пусть X_i — продолжительность i-го сеанса связи. Запишем функцию правдоподобия для экспоненциально распределенных случайных величин, возьмем логарифм, найдем максимум полученной функции (в минутах):

$$\mathrm{L}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda \exp(-\lambda X_i)$$

$$l(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \to \max_{\lambda}$$

$$\frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}} = 0.15$$

2. Построим доверительный интервал, пользуясь тем, что для экспоненциального распределения $\mathbb{E}(X_i) = 1/\lambda, \mathrm{Var}(X_i) = 1/\lambda^2$:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n/\lambda}{\sqrt{n/\lambda^2}}\right| \leqslant a\right) = 0.95$$

$$0.12 \leqslant \lambda \leqslant 0.18$$

3. Проверяем гипотезу $H_0 : 1/\lambda = 5$.

   - Тест отношения правдоподобия. Нулевая гипотеза отвергается.

$$\mathrm{LR} = -2(\ell(0.2) - \ell(0.15)) = 8 > 3.84$$

   - Тест Вальда. Нулевая гипотеза отвергается.

$$\mathrm{W} = \left(\hat{\lambda}_{UR} - 0.2\right)^2 \left(-E\left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda^2}\right)_{UR}\right)^{-1} = 11.11 > 3.84$$

   - Тест множителей Лагранжа. Нулевая гипотеза упорно отвергается.

$$\mathrm{LM} = \left(\frac{\partial \ell}{\partial \lambda}\right)_R^2 \left(\left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda^2}\right)_R\right)^{-1} = 10.24 > 3.84$$

5.3.

5.4. $\hat{\theta} = 1/\bar{Y}$, $\hat{\beta} = \bar{X}/\bar{Y}$, $\hat{a} = 1/(1+\bar{X})$

5.5. В данном примере мы имеем

$\theta = \begin{pmatrix}\mu & \nu\end{pmatrix}'$ — вектор неизвестных параметров

$\Theta = \mathbb{R} \times (0; +\infty)$ — множество допустимых значений вектора неизвестных параметров

Функция правдоподобия имеет вид:

$$\mathrm{L}(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\nu}\right\} =$$
$$(2\pi)^{-n/2} \cdot \nu^{-n/2} \cdot \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{2\nu}\right\}$$

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ell(\theta) := \ln \mathrm{L}(\theta) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\nu - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\nu}$$

$\Theta_{UR} = \Theta$

$\Theta_R = \{(0,1)\}$

Из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial\ell}{\partial\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}{\nu} = 0 \\ \frac{\partial\ell}{\partial\nu} = -\frac{n}{2\nu} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\nu^2} = 0 \end{cases}$$

находим

$\hat\theta_{UR} = (\hat\mu_{UR}, \hat\nu_{UR})$, где $\hat\mu_{UR} = \overline{x} = -1.5290$, $\hat\nu_{UR} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 = 1.0603$

$\hat\theta_R = (\hat\mu_R, \hat\nu_R) = (0,1)$

По имеющимся данным находим

$\ell(\hat\theta_R) = -\frac{10}{2}\ln(2\pi) - \frac{10}{2}\ln 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-0)^2}{2\cdot 1} = -26.1804$

$\ell = -\frac{10}{2}\ln(2\pi) - \frac{10}{2}\ln(1.0603) - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i+1.5290)^2}{2\cdot 1.0603} = -14.4824$

$LR = -2(\ell(\hat\theta_R) - \ell) = -2\cdot(-26.1804 + 14.4824) = 23.3959$

Критическое значение χ^2 распределения с двумя степенями свободы, отвечающее уровню значимости 5%, равно 5.9915. Следовательно, тест отношения правдоподобия говорит о том, что гипотеза H_0 должна быть отвергнута.

Для выполнения тестов Вальда и множителей Лагранжа нам понадобится информационная матрица Фишера

$\frac{\partial^2\ell}{\partial\mu^2} = -\frac{n}{v}$, $\frac{\partial^2\ell}{\partial\nu\partial\mu} = -\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}{\nu^2}$, $\frac{\partial^2\ell}{\partial\nu^2} = \frac{n}{2\nu^2} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\nu^3}$

$\mathbb{E}\frac{\partial^2\ell}{\partial\nu\partial\mu} = -\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(x_i-\mu)}{\nu^2} = 0$, $\mathbb{E}\frac{\partial^2\ell}{\partial\nu^2} = \frac{n}{2\nu^2} - \frac{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(x_i-\mu)^2}{\nu^3} = \frac{n}{2\nu^2} - \frac{n\nu}{\nu^3} = -\frac{n}{2\nu^2}$

$$I(\theta) = -\mathbb{E}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2\ell}{\partial\mu^2} & \frac{\partial^2\ell}{\partial\nu\partial\mu} \\ \frac{\partial^2\ell}{\partial\nu\partial\mu} & \frac{\partial^2\ell}{\partial\nu^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n}{\nu} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\nu^2} \end{pmatrix}$$

$$I(\hat\theta_{UR}) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\hat\nu_{UR}} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\cdot\hat\nu_{UR}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{1.0603} & 0 \\ 0 & \frac{10}{2\cdot 1.0603^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.4307 & 0 \\ 0 & 4.4469 \end{pmatrix}$$

$$g(\hat\theta_{UR}) = \begin{pmatrix} \hat\mu_{UR} - 0 \\ \hat\nu_{UR} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5290 - 0 \\ 1.0603 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5290 \\ 0.0603 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g}{\partial\theta'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial\mu} & \frac{\partial g_1}{\partial\nu} \\ \frac{\partial g_2}{\partial\mu} & \frac{\partial g_2}{\partial\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g'}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial\mu} & \frac{\partial g_2}{\partial\mu} \\ \frac{\partial g_1}{\partial\nu} & \frac{\partial g_2}{\partial\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$W = g'(\hat\theta_{UR}) \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial \theta'}(\hat\theta_{UR}) \cdot I^{-1}(\hat\theta_{UR}) \cdot \frac{\partial g'}{\partial \theta}(\hat\theta_{UR})\right]^{-1} g(\hat\theta_{UR}) =$

$\begin{pmatrix} -1.5290 & 0.0603 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9.4307 & 0 \\ 0 & 4.4469 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1.5290 \\ 0.0603 \end{pmatrix} =$
22.0635

Тест Вальда также говорит о том, что на основании имеющихся наблюдений гипотеза H_0 должна быть отвергнута.

$I(\hat\theta_R) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\hat\nu_R} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2 \cdot \hat\nu_R^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{1} & 0 \\ 0 & \frac{10}{2 \cdot 1^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$\frac{\partial \ell}{\partial \theta}(\hat\theta_R) = \begin{pmatrix} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat\mu_R)}{\hat\nu_R} \\ -\frac{n}{2 \cdot \hat\nu_R} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat\mu_R)^2}{2 \cdot \hat\nu_R^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - 0)}{1} \\ -\frac{10}{2 \cdot 1} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - 0)^2}{2 \cdot 1^2} \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} -15.29 \\ 11.9910 \end{pmatrix}$

$LM = \left[\frac{\partial \ell}{\partial \theta}(\hat\theta_R)\right]' \cdot I^{-1}(\hat\theta_R) \cdot \left[\frac{\partial \ell}{\partial \theta}(\hat\theta_R)\right] = \begin{pmatrix} -15.29 & 11.9910 \end{pmatrix} =$
$\cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -15.29 \\ 11.9910 \end{pmatrix} = 52.1354$

Тест множителей Лагранжа также указывает на то, что гипотеза H_0 должна быть отвергнута.

5.6. В данной задаче мы имеем:

$\theta = p$ — вектор неизвестных параметров

$\Theta = (0, 1)$ — множество допустимых значений вектора неизвестных параметров

Функция правдоподобия имеет вид:

$$\mathrm{L}(\theta) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_\theta(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^n p^{x_i} \cdot (1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot (1-p)^{n - \sum_{i=1}^n x_i}$$

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ell(\theta) := \ln \mathrm{L}(\theta) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \cdot \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^n x_i\right) \cdot \ln(1-p)$$

$\Theta_{UR} = \Theta$

$\Theta_R = \{0.5\}$

Решая уравнение правдоподобия

$$\frac{\partial \ell}{\partial p} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p} - \frac{n - \sum_{i=1}^n x_i}{1-p} = 0$$

получаем

$\hat{\theta}_{UR} = \hat{p}_{UR}$, где $\hat{p}_{UR} = \overline{x} = 0.42$

$\hat{\theta}_R = \hat{p}_R = 0.5$

По имеющимся данным находим

$\ell(\hat{\theta}_R) = 42 \cdot \ln(0.5) + (100-42) \cdot \ln(1-0.5) = -69.3147$

$\ell(\hat{\theta}_{UR}) = 42 \cdot \ln(0.42) + (100-42) \cdot \ln(1-0.42) = -68.0292$

$LR = -2(\ell(\hat{\theta}_R) - \ell) = -2 \cdot (-69.3147 + 68.0292) = 2.5710$

Критическое значение χ^2 распределения с одной степенью свободы, отвечающее за 5% уровень значимости, равно 3.8414. Следовательно, тест отношения правдоподобия говорит о том, что на основании имеющихся данных, основная гипотеза $H_0 : p = 0.5$ не может быть отвергнута.

Для выполнения тестов Вальда и множителей Лагранжа нам понадобится информационная матрица Фишера

$\frac{\partial^2 \ell}{\partial p^2} = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p^2} - \frac{n-\sum_{i=1}^n x_i}{(1-p)^2}$

$I(\theta) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial p^2}\right] = -\mathbb{E}\left[-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p^2} - \frac{n-\sum_{i=1}^n x_i}{(1-p)^2}\right] = -\left(-\frac{np}{p^2} - \frac{n-np}{(1-p)^2}\right) = \frac{n}{p(1-p)}$

$I(\hat{\theta}_{UR}) = \frac{n}{\hat{p}_{UR}(1-\hat{p}_{UR})} = \frac{100}{0.42 \times (1-0.42)} = 172.4138$

$g(\hat{\theta}_{UR}) = \hat{\theta}_{UR} - 0.5 = 0.42 - 0.5 = -0.08$

$\frac{\partial g}{\partial \theta'} = 1'$, $\frac{\partial g'}{\partial \theta} = 1$

$W = g'(\hat{\theta}_{UR}) \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial \theta'}(\hat{\theta}_{UR}) \cdot I^{-1}(\hat{\theta}_{UR}) \cdot \frac{\partial g'}{\partial \theta}(\hat{\theta}_{UR})\right]^{-1} g(\hat{\theta}_{UR}) = [-0.08]' \cdot [1' \cdot 172.4138^{-1} \cdot 1]^{-1} \cdot [-0.08] = 2.6272$

Тест Вальда также говорит о том, что гипотеза H_0 не отвергается.

$I(\hat{\theta}_R) = \frac{n}{\hat{p}_R(1-\hat{p}_R)} = \frac{100}{0.5 \times (1-0.5)} = 400$

$\frac{\partial \ell}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\hat{p}_R} - \frac{n-\sum_{i=1}^n x_i}{1-\hat{p}_R} = \frac{42}{0.5} - \frac{100-42}{1-0.5} = -32$

$LM = \left[\frac{\partial \ell}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R)\right]' \cdot I^{-1}(\hat{\theta}_R) \cdot \left[\frac{\partial \ell}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R)\right] = [-32]' \cdot [400]^{-1} \cdot [-32] = 2.56$

Согласно тесту множителей Лагранжа, основная гипотеза H_0 не может быть отвергнута.

5.7. В данной задаче мы имеем

$\theta = \lambda$ — вектор неизвестных параметров

$\Theta = (0, +\infty)$ — множество допустимых значений вектора неизвестных параметров

Функция правдоподобия имеет вид:

$$\mathrm{L}(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_\theta(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{x_1! \ldots x_n!} e^{-\lambda n}$$

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$l(\theta) := \ln \mathrm{L}(\theta) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \cdot \ln \lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!) - \lambda n$$

$\Theta_{UR} = \Theta$
$\Theta_R = \{2\}$
Решая уравнение правдоподобия

$$\frac{\partial \ell}{\partial p} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda} - n = 0$$

получаем
$\hat{\theta}_{UR} = \hat{\lambda}_{UR}$, где $\hat{\lambda}_{UR} = \overline{x} = 1.7$
$\hat{\theta}_R = \hat{p}_R = 2$
По имеющимся данным находим
$\ell(\hat{\theta}_R) = (80 \cdot 1.7) \cdot \ln(2) - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!) - 2 \cdot 80 = -65.7319$
$\ell(\hat{\theta}_{UR} = (80 \cdot 1.7) \cdot \ln(1.7) - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!) - 1.7 \cdot 80 = -63.8345$
$LR = -2(\ell(\hat{\theta}_R) - \ell(\hat{\theta}_{UR})) = -2 \cdot (-65.7319 + 63.8345) = 3.7948$

Критическое значение χ^2 распределения с одной степенью свободы, отвечающее за 5% уровень значимости, равно 3.8414. Следовательно, тест отношения правдоподобия говорит о том, что на основании имеющихся данных, основная гипотеза $H_0 : \lambda = 2$ не может быть отвергнута.

Для выполнения тестов Вальда и множителей Лагранжа нам понадобится информационная матрица Фишера
$\frac{\partial^2 \ell}{\partial p^2} = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda^2}$
$I(\theta) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial p^2}\right] = -\mathbb{E}\left[-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda^2}\right] = -\left(-\frac{n\lambda}{\lambda^2}\right) = \frac{n}{\lambda}$
$I(\hat{\theta}_{UR}) = \frac{n}{\hat{\lambda}_{UR}} = \frac{80}{1.7} = 47.0588$
$g(\hat{\theta}_{UR}) = \hat{\theta}_{UR} - 2 = 1.7 - 2 = -0.3$
$\frac{\partial g}{\partial \theta'} = 1'$, $\frac{\partial g'}{\partial \theta} = 1$
$W = g'(\hat{\theta}_{UR}) \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial \theta'}(\hat{\theta}_{UR}) \cdot I^{-1}(\hat{\theta}_{UR}) \cdot \frac{\partial g'}{\partial \theta}(\hat{\theta}_{UR})\right]^{-1} g(\hat{\theta}_{UR}) = [-0.3]' \cdot [1' \cdot 47.0588^{-1} \cdot 1]^{-1} \cdot [-0.3] = 4.2352$

Поскольку наблюдаемое значение статистики Вальда превосходит критическое значение 3.8414, то гипотеза H_0 должна быть отвергнута.

$I(\hat{\theta}_R) = \frac{n}{\hat{\lambda}_R} = \frac{80}{2} = 40$

$\frac{\partial \ell}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\hat{\lambda}_R} - n = \frac{80 \cdot 1.7}{2} - 80 = -12$

$LM = \left[\frac{\partial \ell}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R)\right]' \cdot I^{-1}(\hat{\theta}_R) \cdot \left[\frac{\partial \ell}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R)\right] = [-12]' \cdot [40]^{-1} \cdot [-12] = 3.6$

Согласно тесту множителей Лагранжа, основная гипотеза H_0 не может быть отвергнута.

5.8. Для того чтобы записать функцию правдоподобия, найдем параметры распределения случайных величин y_i. Величины распределены нормально, так как задаются линейной функцией только от нормально распределенных случайных величин ϵ_i. Посчитаем математическое ожидание и дисперсию:

$$\mathbb{E}(y_i) = \mathbb{E}(\beta_1 + \beta_2 x_i + \epsilon_i) = \beta_1 + \beta_2 x_i$$
$$\mathrm{Var}(y_i) = \mathrm{Var}(\beta_1 + \beta_2 x_i + \epsilon_i) = \mathrm{Var}(\epsilon_i) = \sigma^2 x_i^2$$
$$y_i \sim \mathcal{N}(\beta_1 + \beta_2 x_i, \sigma^2 x_i^2)$$

Теперь, используя формулу для функции плостности нормального распределения, можем в явном виде записать функцию правдоподобия:

$$\mathrm{L} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma |x_i| \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(y_i - \beta_1 - \beta_2 x_i)^2}{2\sigma^2 x_i^2}\right)$$

5.9. Посчитаем математическое ожидание и дисперсию:

$$\mathbb{E}(y_i) = \mathbb{E}(\beta_1 + \beta_2 x_i + \epsilon_i) = \beta_1 + \beta_2 x_i$$
$$\mathrm{Var}(y_i) = \mathrm{Var}(\beta_1 + \beta_2 x_i + \epsilon_i) = \mathrm{Var}(\epsilon_i) = \sigma^2 |x_i|$$
$$y_i \sim \mathcal{N}(\beta_1 + \beta_2 x_i, \sigma^2 |x_i|)$$

Функция правдоподобия:

$$\mathrm{L} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 |x_i|}} \exp\left(\frac{-(y_i - \beta_1 - \beta_2 x_i)^2}{2\sigma^2 |x_i|}\right)$$

5.10.

1. Для того, чтобы найти оценки для β и σ^2 методом максимального правдоподобия, составим сначала функцию правдоподобия:

$$\mathbb{E}(y_i) = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki}$$
$$\mathrm{Var}(y_i) = \sigma^2$$

$$\mathrm{L} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-(y_i - x_i'\beta)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ell = n \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i'\beta)^2 \to \max_{\beta,\sigma^2}$$

Решим задачу максимизации:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta} = \frac{1}{\sigma^2}(y_i - x_i'\beta)x_i = 0 \Rrightarrow \hat{\beta}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = \frac{-n\sqrt{2\pi\sigma^2}}{2\sqrt{2\pi(\sigma^2)^3}} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i\beta)^2}{2(\sigma^2)^2} = 0 \Rrightarrow \hat{\sigma}^2_{ML} = \frac{\mathrm{RSS}}{n}$$

2. Проверим, являются ли полученные оценки несмещёнными.

$$\mathbb{E}(\hat{\beta}_{ML}) = \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{E}(y_i)}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{E}(x_i'\beta + \epsilon)}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{\beta \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \beta$$

Таким образом, оценки максимального правдоподобия $\hat{\beta}_{ML}$ совпадают с полученными с помощью метода наименьших квадратов и являются несмещёнными.

Можно заметить, что полученная оценка дисперсии $\hat{\sigma}^2_{ML}$ не совпадает с несмещённой оценкой метода наименьших квадратов и является смещённой:

$$\mathbb{E}(\hat{\sigma}^2_{ML}) = \mathbb{E}\left(\frac{\mathrm{RSS}}{n}\right) = \frac{n-k}{n}\mathbb{E}(\hat{\sigma}^2_{OLS}) = \frac{n-k}{n} s^2$$

3. Ограниченный и неограниченный векторы параметров будут иметь вид: $\hat{\theta}_{UR} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{2,ML} \\ \vdots \\ \hat{\beta}_{k,ML} \\ \hat{\sigma}^2_{ML} \end{pmatrix}$ и $\hat{\theta}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hat{\sigma}^2_R \end{pmatrix}$. Найдём $\hat{\sigma}^2_R$:

$$\ell(\beta_2 = \ldots = \beta_k = 0, \sigma^2) = \frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n y_i^2 \to \max_{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{2\sigma^4}\bigg|_{\sigma^2=\hat{\sigma}^2_R} = 0$$

$$\hat{\sigma}^2_R = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n}$$

Тогда мы можем выписать $\ell(\hat{\theta}_R)$ и $\ell(\hat{\theta}_{UR})$. Выпишем их в матричном виде для удобства:

$$\ell(\hat{\theta}_R) = \frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\frac{y'y}{n} - \frac{1}{2\frac{y'y}{n}}y'y = \frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\frac{y'y}{n} - \frac{n}{2}$$

$$\ell(\hat{\theta}_{UR}) = \frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\frac{(y-\hat{y})'(y-\hat{y})}{n} - \frac{1}{2\frac{(y-\hat{y})'(y-\hat{y})}{n}}(y-\hat{y})'(y-\hat{y})$$

$$= \frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\frac{(y-\hat{y})'(y-\hat{y})}{n} - \frac{n}{2}$$

В итоге получаем выражение для LR статистики:

$$LR = 2\left(-\frac{n}{2}\ln\frac{y'y}{n} + \frac{n}{2}\ln\frac{(y-\hat{y})'(y-\hat{y})}{n}\right) = n\ln\frac{(y-\hat{y})'(y-\hat{y})}{y'y}$$

5.11.

1. Оценим параметр μ с помощью метода максимального правдоподобия. Функция правдоподобия:

$$\mathrm{L} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-(X_i-\mu)^2}{2}\right)$$

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ell = n \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \to \max_{\mu}$$

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \bar{X} = 2$$

2. Построим доверительный интервал:

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}} \right| \leqslant a \right) = 0.95$$

Из таблицы для стандартного нормального распределения получаем $a = 1.96$, решаем неравенство относительно μ:

$$1.8 \leqslant \mu \leqslant 2.2$$

3. Проверим гипотезу $H_0 : \mu = 3$.

- LR-тест отвергает основную гипотезу:

$$\mathrm{LR} = -2 \left(-0.5 \sum_{i=1}^{n} (X_i - 3)^2 + 0.5 \sum_{i=1}^{n} (X_i - 2)^2 \right) = 100 > \chi^2_1 = 3.84$$

- Тест Вальда при ограничении $\mu - 3 = 0$ отвергает основную гипотезу:

$$\mathrm{W} = (-1)^2 \left(-\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu^2} \right)_{UR} \right) = n = 100 > \chi^2_1 = 3.84$$

- LM-тест также отвергает основную гипотезу:

$$\mathrm{LM} = \left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - 3n)^2 \right) \left(-\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu^2} \right)_{R}^{-1} \right) = 100 > \chi^2_1 = 3.84$$

4. Построим доверительный интервал для вероятности $\mathbb{P}(X_i > 2.5)$:

$$\mathbb{P}(X_i > 2.5) = 1 - \mathbb{P}(X_i < 2.5) = 1 - \mathbb{P}(X_i - \mu < 2.5 - \mu) = 1 - \Phi_{0,1}(2.5 - \mu)$$

В предыдущем пункте мы нашли доверительный интервал для μ : $1.8 \leqslant \mu \leqslant 2.2$.

Таким образом, с 95% уверенностью искомая вероятность лежит в пределах:

$$0.24 \leqslant \mathbb{P}(X_i > 2.5) \leqslant 0.38$$

5.12.

1. Оценим параметр σ^2 с помощью метода максимального правдоподобия. Функция правдоподобия:

$$\mathrm{L} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-X_i^2}{2\sigma^2}\right)$$

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ell = n \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \to \max_{\sigma^2}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} = 9$$

2. Построим доверительный интервал. Воспользуемся тем фактом, что:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$$

Тогда, пользуясь табличными значениями для хи-квадрат распределения, получаем следующее неравенство:

$$\mathbb{P}\left(74.22 \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\sigma^2} \leqslant 129.56\right) = 0.95$$

Решаем неравенство относительно σ^2:

$$6.95 \leqslant \sigma^2 \leqslant 12.13$$

3. Проверим гипотезу $H_0 : \sigma^2 = 4$. Посчитаем статистики для трех тестов.

   - $\text{LR} = -2\left(\ln(4) - \ln(9)\right) = 43.9$
   - $\text{W} = \frac{900}{9^2}(5)^2 = 277.78$
   - $\text{LM} = 0.018\left(\frac{900}{4} - 100\right)^2 = 281.25$

   Все три рассчитанных статистики превышают табличное значение для одного ограничения: $\chi^2_1 = 3.84$, поэтому все три теста отвергают нулевую гипотезу.

4. Построим доверительный интервал для вероятности $\mathbb{P}\left(X_i > 2.5\right)$:

$$\mathbb{P}\left(X_i > 2.5\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X_i < 2.5\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X_i}{\sqrt{\sigma^2}} < \frac{2.5}{\sqrt{\sigma^2}}\right) = 1 - \Phi_{0,1}\left(\frac{2.5}{\sqrt{\sigma^2}}\right)$$

   В предыдущем пункте мы нашли доверительный интервал для σ : $6.95 \leqslant \sigma^2 \leqslant 12.13$.

   Таким образом, с 95% уверенностью искомая вероятность лежит в пределах:

$$0.17 \leqslant \mathbb{P}(X_i > 2.5) \leqslant 0.24$$

5.13.

1. Оценим параметры μ, σ^2 с помощью метода максимального правдоподобия. Функция правдоподобия:

$$\text{L} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-\left(X_i - \mu\right)^2}{2\sigma^2}\right)$$

   Логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ell = n\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \mu\right)^2 \to \max_{\mu,\sigma^2}$$

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = 2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \hat{\mu})^2}{n} = 5$$

2. Построим доверительные интервалы для параметров μ и σ^2. Доверительный интервал для математического ожидания в случае неизвестной дисперсии строится, используя статистику:

$$\frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{S} \sim t_{n-1}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1} = 5.05$$

Тогда, пользуясь табличными значениями для распределения Стьюдента, получаем следующее неравенство:

$$\mathbb{P}\left(-1.98 \leqslant \frac{2-\mu}{0.225} \leqslant 1.98\right) = 0.95$$

Решаем неравенство относительно μ:

$$1.55 \leqslant \mu \leqslant 2.45$$

Приступим к интервалу для дисперсии. Построение доверительного интервала для дисперсии в случае неизвестного математического ожидания использует статистику:

$$\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

В качестве границ используем табличные значения хи-квадрат распределения, получаем следующее неравенство:

$$\mathbb{P}\left(73.36 \leqslant \frac{99 \cdot 5.05}{\sigma^2} \leqslant 128.42\right) = 0.95$$

Решаем неравенство относительно σ^2:

$$3.84 \leqslant \sigma^2 \leqslant 6.8$$

5.14. $\hat{p}_1 = X_1/n$, $\hat{p}_2 = X_2/n$.

5.15.

1. Функция правдоподобия:

$$\mathcal{L} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta(\ln X_i)^{\theta-1}}{X_i}$$

Логарифм функции правдоподобия:

$$\ln \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} \left[\ln\left(\theta(\ln X_i)^{\theta-1}\right) - \ln X_i\right] = \sum_{i=1}^{n}[\ln\theta + (\theta-1)\ln\ln X_i - \ln X_i] = n\ln\theta + (\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln\ln X_i - \sum_{i=1}^{n}\ln X_i$$

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \ln\ln X_i$$

FOC:

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{n}{\hat{\theta}_{ML}} = -\sum_{i=1}^{n}\ln\ln X_i \Rightarrow \hat{\theta}_{\mathrm{ML}} = -\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\ln X_i}$$

Подставим имеющиеся данные: $-\frac{n}{\sum \ln\ln X_i} = -\frac{100}{-30} = \frac{10}{3}$.

2. Так как оценки ММП асимптотически нормальны, то для нахождения доверительного интервала достаточно найти стандартное отклонение параметра и домножить на квантиль двухстороннего распределения: $\mathbb{P}\left(\left\{|\hat{\theta}-\theta| \leqslant z_{0.025}\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\theta})}\right\}\right) = 0.95$. Известно, что $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\theta}) = -\boldsymbol{H}^{-1}|_{\hat{\theta}}$. Матрица $\boldsymbol{H}$ — это матрица вторых производных логарифма функции правдоподобия.

$$\boldsymbol{H} = \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta^2} = -\frac{n}{\theta^2} \Rightarrow -\boldsymbol{H}^{-1} = \frac{\theta^2}{n} \Rightarrow \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\theta}) = \frac{100/9}{100} = \frac{1}{9} \Rightarrow \hat{\sigma}_\theta = \frac{1}{3}$$

Следовательно, с вероятностью 0.95 θ лежит в интервале $\frac{10}{3} \pm 1.96 \cdot \frac{1}{3} \approx \frac{10}{3} \pm \frac{2}{3}$, или [2.680; 3.987].

3. Тест Вальда выглядит следующим образом:

$$W = \big(\mathbf{c}(\theta) - \boldsymbol{q}\big)'(\boldsymbol{C}\boldsymbol{I}^{-1}(\theta)\boldsymbol{C}')^{-1}\big(\mathbf{c}(\theta) - \boldsymbol{q}\big) \overset{\mathcal{H}_0}{\sim} \chi^2_r$$

За $\boldsymbol{C}$ обозначено $\frac{\partial \mathbf{c}(\theta)}{\partial \theta}$, за $\boldsymbol{I}$ — информационная матрица Фишера $\left(\boldsymbol{I}(\theta) = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta^2}\right)\right)$. В данном случае $\theta = \theta$, и нулевая гипотеза $\mathbf{c}(\theta) = \boldsymbol{q}$ выглядит как $\theta = 1$ ($\mathbf{c}(\theta) = \theta$) — одномерный случай, одна степень свободы хи-квадрата, $W \overset{\mathcal{H}_0}{\sim} \chi^2_1$. $\mathbf{c}'(\theta) = 1$, поэтому расчётная статистика выглядит следующим образом:

$$W = (\hat{\theta} - \theta_0)\frac{n}{\theta^2}(\hat{\theta} - \theta_0) = \left(\frac{10}{3} - 1\right) \cdot \frac{100}{100/9} \cdot \left(\frac{10}{3} - 1\right) = 49$$

Тест отношения правдоподобия:

$$LR = -2\big(\ln \mathcal{L}_{\mathrm{R}} - \ln \mathcal{L}_{\mathrm{UR}}\big) \overset{\mathcal{H}_0}{\sim} \chi^2_r$$

$$LR = -2\left(\left[n \ln \theta_0 + (\theta_0 - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln \ln X_i - \cancel{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}\right] - \left[n \ln \hat{\theta} + (\hat{\theta} - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln \ln X_i - \sum_{i=1}^{n}\right.\right.$$

$$= -2\left(\cancel{100 \ln 1} \cancel{+ (1-1)(-30)} - 100 \ln \frac{10}{3} - \left(\frac{10}{3} - 1\right)(-30)\right) = -2\left(-100 \ln \frac{10}{3} + \frac{7}{3} \cdot 30\right)$$

Тест множителей Лагранжа:

$$LM = \boldsymbol{S}(\theta_0)'\boldsymbol{I}^{-1}(\theta_0)\boldsymbol{S}(\theta_0) \overset{\mathcal{H}_0}{\sim} \chi^2_r$$

$\boldsymbol{S} = \frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta}\Big|_{\theta_0}$. В точке θ_0 значение частной производной логарифма функции правдоподобия равно $\frac{100}{1} - 30 = 70$, $\boldsymbol{I}^{-1}(\theta_0) = \frac{\theta_0^2}{n} = \frac{1}{100}$, откуда

$$LM = 70 \cdot \frac{1}{100} \cdot 70 = 49$$

Для уровня значимости 5 % критическое значение χ^2_1 равно ≈ 3.84, поэтому во всех трёх тестах гипотеза $\mathcal{H}_0\colon \theta = 1$ отвергается.

5.16.

1.

$$\theta = \begin{pmatrix} \mu \\ \sigma^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \ln\mathcal{L} = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$$

$$\text{FOC:} \quad \frac{\partial\ln\mathcal{L}}{\partial\mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu), \quad \frac{\partial\ln\mathcal{L}}{\partial(\sigma^2)} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial^2\ln\mathcal{L}}{\partial\mu^2} = -\frac{n}{\sigma^2}, \quad \frac{\partial^2\ln\mathcal{L}}{\partial\mu\,\partial(\sigma^2)} = -\frac{1}{(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu), \quad \frac{\partial^2\ln\mathcal{L}}{\partial(\sigma^2)^2} = \frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{1}{(\sigma^2)^3}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$$

Так как даны $\sum X_i$ и $\sum X_i^2$, можно вывести, что $\sum(X_i-\mu)^2 = \sum X_i^2 - \sum 2\mu X_i + \sum\mu^2 = \sum X_i^2 - 2\mu\sum X_i + n\mu^2$.

Из условий первого порядка следует, что ММП-оценка матожидания $\hat{\mu}_{\text{ML}}$ — это выборочное среднее, а дисперсии $\hat{\sigma}^2_{\text{ML}}$ — выборочная дисперсия (без коррекции на одну степень свободы):

$$\hat{\mu}_{\text{ML}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{100}{100} = 1, \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = \frac{1}{100}(900-2\cdot1\cdot100+100\cdot1^2) = \frac{800}{100} = 8$$

2.

$$\boldsymbol{I}(\theta) = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2\ln\mathcal{L}}{\partial\theta^2}\right), \quad \boldsymbol{I}(\hat{\theta}) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\hat{\sigma}^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2(\hat{\sigma}^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{100}{8} & 0 \\ 0 & \frac{100}{128} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{I}^{-1}(\hat{\theta}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{25} & 0 \\ 0 & \frac{32}{25} \end{pmatrix}$$

Так как ММП-оценки асимптотически нормальны, то 95%-й доверительный интервал для вектора неизвестных параметров выглядит как

$$\begin{pmatrix} \hat{\mu} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\mu})} \\ \hat{\sigma}^2 \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\mu})} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \pm 1.96\sqrt{\frac{2}{25}} \\ 8 \pm 1.96\sqrt{\frac{32}{25}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} [0.446; 1.554] \\ [5.783; 10.217] \end{pmatrix}$$

3. Тест Вальда:

$$W = \left(c(\sigma^2) - \sigma_0^2\right)'(\boldsymbol{C}\boldsymbol{I}^{-1}(\theta)\boldsymbol{C}')^{-1}\left(c(\sigma^2) - \sigma_0^2\right) \overset{\mathcal{H}_0}{\sim} \chi^2_r$$

$\frac{\partial c}{\partial \sigma^2} = 1$, поэтому

$$W = \left(8-1\right)^2 \frac{n}{2(\sigma^2)^2} = 49 \cdot \frac{100}{128} \approx 38.28$$

Тест отношения правдоподобия:

$$LR = -2\left(\ln \mathcal{L}_{\mathrm{R}} - \ln \mathcal{L}_{\mathrm{UR}}\right) \overset{\mathcal{H}_0}{\sim} \chi^2_r$$

$$LR = -2\left(\ln \mathcal{L}(\sigma_0^2) - \ln \mathcal{L}(\hat{\sigma}^2)\right) = -2\left(-\frac{n}{2}\ln \sigma_0^2 - \frac{1}{2\sigma_0^2}\cdot 800 + \frac{n}{2}\ln \hat{\sigma}^2 + \frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\cdot 800\right) =$$
$$-2\left(\cancel{-50\ln 1} - \frac{1}{2}\cdot 800 + 50\ln 8 + \frac{1}{16}\cdot 800\right) \approx 492$$

Тест множителей Лагранжа:

$$LM = \boldsymbol{S}(\sigma_0^2)'\boldsymbol{I}^{-1}(\sigma_0^2)\boldsymbol{S}(\sigma_0^2) \overset{\mathcal{H}_0}{\sim} \chi^2_r$$

$$\boldsymbol{I}(\sigma_0^2) = \frac{n}{2(\sigma_0^2)^2} = 50, \quad \boldsymbol{S}(\sigma_0^2) = \left.\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial(\sigma^2)}\right|_{\sigma_0^2} = -\frac{100}{2} + \frac{1}{2}\cdot 800 = 350$$

$$LM = 350^2 \cdot \frac{1}{50} = 2450$$

Для уровня значимости 5 % критическое значение χ^2_1 равно $\approx$ 3.84, поэтому во всех трёх тестах гипотеза $\mathcal{H}_0\colon \sigma^2 = 1$ отвергается.

4. Тест Вальда выглядит следующим образом:

$$W = \left(\mathbf{c}(\hat{\theta}) - \boldsymbol{q}\right)'(\boldsymbol{C}\boldsymbol{I}^{-1}(\hat{\theta})\boldsymbol{C}')^{-1}\left(\mathbf{c}(\hat{\theta}) - \boldsymbol{q}\right) \overset{\mathcal{H}_0}{\sim} \chi^2_r$$

За $\boldsymbol{C}$ обозначено $\frac{\partial \mathbf{c}(\theta)}{\partial \theta}$, за $\boldsymbol{I}$ — информационная матрица Фишера $\left(\boldsymbol{I}(\theta) = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta^2}\right)\right)$. В данном случае нулевая гипотеза $\mathbf{c}(\theta) = \boldsymbol{q}$ записывается как $\mathbf{c}(\theta) = \begin{pmatrix}\mu \\ \sigma^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 \\ 1\end{pmatrix}$, поэтому все статистики имеют две степени свободы хи-квадрата. $\boldsymbol{C} = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix}\frac{\partial c_1}{\partial \mu} & \frac{\partial c_2}{\partial \mu} \\ \frac{\partial c_1}{\partial \sigma^2} & \frac{\partial c_2}{\partial \sigma^2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{c}(\theta) - \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix}1 \\ 8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 \\ 7\end{pmatrix}$, поэтому расчётная статистика выглядит следующим образом:

$$W = \begin{pmatrix}-1 & 7\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{100}{8} & 0\\ 0 & \frac{100}{128}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}-1\\ 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{25}{2} & 0\\ 0 & \frac{25}{32}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 7\end{pmatrix} = 50.78$$

Тест отношения правдоподобия:

$$LR = -2\big(\ln\mathcal{L}_{\mathrm{R}} - \ln\mathcal{L}_{\mathrm{UR}}\big) \overset{\mathcal{H}_0}{\sim} \chi^2_r$$

$$\begin{aligned} LR &= -2\big(\ln\mathcal{L}(\boldsymbol{q}) - \ln\mathcal{L}(\hat\theta)\big) = \\ &= -2\left(-\frac{n}{2}\ln\sigma_0^2 - \frac{1}{2\sigma_0^2}\left(\sum X_i^2 - 2\mu_0\sum X_i + n\mu_0^2\right) + \frac{n}{2}\ln\hat\sigma^2 + \frac{1}{2\hat\sigma^2}\left(\sum X_i^2 - 2\hat\mu\sum X_i + n\hat\mu^2\right)\right) = \\ &= -2\left(\cancel{-\frac{100}{2}\ln 1} - \frac{1}{2}(900\cancel{-2\cdot 2\cdot 100 + 100\cdot 2^2}) + \frac{100}{2}\ln 8 + \frac{1}{16}(900 - 2\cdot 1\cdot 100 + 100\cdot 1)\right) \approx 592 \end{aligned}$$

Тест множителей Лагранжа:

$$LM = \boldsymbol{S}(\theta_0)'\boldsymbol{I}^{-1}(\theta_0)\boldsymbol{S}(\theta_0) \overset{\mathcal{H}_0}{\sim} \chi^2_r$$

$$\boldsymbol{I}(\theta_0) = \begin{pmatrix}\frac{n}{\sigma_0^2} & 0\\ 0 & \frac{n}{2(\sigma_0^2)^2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}100 & 0\\ 0 & 50\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{I}^{-1}(\theta_0) = \begin{pmatrix}\frac{1}{100} & 0\\ 0 & \frac{1}{50}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}(\theta_0) = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_0^2}(100 - 100\mu_0)\\ -\frac{100}{2\sigma_0^2} + \frac{1}{2(\sigma_0^2)^2}(900 - 200\mu_0 + 100\mu_0^2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-100\\ 400\end{pmatrix}$$

$$LM = \begin{pmatrix}-100 & 400\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{100} & 0\\ 0 & \frac{1}{50}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-100\\ 400\end{pmatrix} = 3300$$

Для уровня значимости 5 % критическое значение χ^2_2 равно $\approx$ 5.99, поэтому во всех трёх тестах гипотеза $\mathcal{H}_0\colon \theta = \theta_0$ отвергается.

5.17. Заметим, что $y_1 = \beta_1 + \varepsilon_1$ и $y_2 = \beta_1 + \varepsilon_2$, Но ε_1 может отличаться от ε_2 максимум на два, поэтому получаем, что $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = +1$ и $\hat\beta_1 = 0$. Стоит отметить, что в данной модели и $\beta_1 = 0$. Далее получаем, что $y_3 = 1 + \beta_2 + \varepsilon_3$

и отсюда следует два варианта для $\hat{\beta}_2$. То есть единственной оценки $\hat{\beta}_2$ методом правдоподобия не получается, существует два максимума у функции правдоподобия, $\hat{\beta}_2 = 0$ и $\hat{\beta}_2 = 2$.

5.18. Увы, никакой. Все экстремумы имеют вид $\hat{\mu} = x_i$, $\hat{\sigma} = 0$, при этом функция правдподобия равна бесконечности.

5.19.

5.20.

5.21.

5.22. $\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \bar{Y}$, $\quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(Y_i - \bar{Y}\big)^2 = \frac{RSS}{n}$.

5.23. $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, $\quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(Y_i - \hat{\beta}x_i\big)^2 = \frac{RSS}{n}$.

5.24. $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{x_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}}$, $\quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(Y_i - \hat{\beta}/x_i\big)^2 = \frac{RSS}{n}$.

5.25. Поскольку $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0,\, \sigma^2)$, то $Y_i = \theta x_i + (1-\theta) z_i + \varepsilon_i \sim \mathcal{N}\theta x_i + (1-\theta)z_i,\, \sigma^2)$, а значит,

$$f_{Y_i}(y_i;\, \theta,\, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{\big(y_i - \theta x_i - (1-\theta)z_i\big)^2}{2\sigma^2}\right\}, \qquad i = 1,\, \ldots,\, n.$$

Стало быть, функция правдоподобия имеет вид

$$L(y_1,\, \ldots,\, y_n;\, \theta,\, \sigma^2) = f_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1,\, \ldots,\, y_n;\, \theta,\, \sigma^2) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f_{Y_i}(y_i;\, \theta,\, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{\big(y_i - \theta x_i - (1-\theta)z_i\big)^2}{2\sigma^2}\right\} =$$

$$= (2\pi)^{-n/2}\cdot(\sigma^2)^{-n/2}\cdot\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}\big(y_i - \theta x_i - (1-\theta)z_i\big)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

а значит, логарифмическая функция правдоподобия

$$\ell(y_1,\, \ldots,\, y_n;\, \theta,\, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\big(y_i - \theta x_i - (1-\theta)z_i\big)^2}{2\sigma^2}.$$

Найдем точку максимума логарифмической функции правдоподобия:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ell}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = 0; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial \ell}{\partial \theta} = -\frac{\sum_{i=1}^n 2\left(y_i - \theta x_i - (1-\theta) z_i\right) \cdot \left(-x_i + z_i\right)}{2\sigma^2} = 0, \\ \frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^n \left(y_i - \theta x_i - (1-\theta) z_i\right)^2}{2\sigma^4}. \end{cases}$$

Решением первого уравнения системы является

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)(y_i - z_i)}{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2}.$$

Выражая из второго уравнения системы параметр σ^2 и подставляя в полученную формулу вместо параметра θ найденную выше оценку $\widehat{\theta}$, приходим к выражению для оценки параметра σ^2:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(y_i - \widehat{\theta} x_i - (1 - \widehat{\theta}) z_i\right)^2.$$

5.26. Имеем:

$\theta = \lambda$ — вектор неизвестных параметров;

$\Theta = (0;\, +\infty)$ — множество допустимых значений вектора неизвестных параметров.

Функция правдоподобия имеет вид

$$L(x_1, \ldots, x_n;\ \theta) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i;\ \theta) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda(x_1 + \ldots + x_n)}.$$

Логарифмическая функция правдоподобия

$$\ell(x_1,\ \ldots,\ x_n; \theta) := \ln L(x_1,\ \ldots\ , x_n; \theta) = n \ln \lambda - \lambda(x_1 + \ldots + x_n).$$

$\Theta_{UR} = \Theta$, $\Theta_R = \{1\}$.

Из уравнения

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - (x_1 + \ldots + x_n) = 0$$

находим $\hat{\theta}_{UR} = \hat{\lambda}_{UR} = \frac{n}{x_1 + \ldots + x_n} = \frac{100}{25} = 4$.

$\hat{\theta}_R = \hat{\lambda}_R = 1$.

По имеющимся данным находим

$$\ell_R(x_1, \ldots, x_n; \hat{\theta}_R) = 100 \ln 1 - 1 \cdot 25 = -25,$$

$$\ell_{UR}(x_1, \ldots, x_n; \hat{\theta}_{UR}) = 100 \ln 4 - 4 \cdot 25 \approx 38.63,$$

$$LR = -2 \cdot (\ell_R(x_1, \ldots, x_n; \hat{\theta}_R) - \ell_{UR}(x_1, \ldots, x_n; \hat{\theta}_{UR})) = -2 \cdot (-25 - 38.63) \approx 127.26.$$

Критическая точка χ^2-квадрат распределения с одной степенью свободы, отвечающая уровню значимости 5 %, равна 3.84. Следовательно, тест отношения правдоподобия говорит о том, что основная гипотеза H_0 должна быть отвергнута.

Для выполнения тестов Вальда и множителей Лагранжа нам понадобится информационная матрица Фишера.

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2},$$

$$I(\theta) = -\mathbb{E}\left[\tfrac{\partial^2 l}{\partial \lambda^2}\right] = \tfrac{n}{\lambda^2},$$

$$I(\hat{\theta}_{UR}) = \tfrac{n}{\lambda^2_{UR}} = \tfrac{100}{16}.$$

$$c(\theta) = \lambda, \quad q = 1,$$

$$\frac{\partial c}{\partial \theta} = \frac{\partial c}{\partial \theta^T} = 1,$$

$$c(\hat{\theta}_{UR}) - q = \hat{\lambda}_{UR} - q = 4 - 1 = 3,$$

$$W = \left[c(\hat{\theta}_{UR}) - q\right]^T \cdot \left[\left.\frac{\partial c}{\partial \theta^T}\right|_{\theta = \hat{\theta}_{UR}} \cdot I^{-1}(\hat{\theta}_{UR}) \cdot \left.\frac{\partial c}{\partial \theta}\right|_{\theta = \hat{\theta}_{UR}}\right]^{-1} \cdot \left[c(\hat{\theta}_{UR}) - q\right] =$$

$$= 3 \cdot \left[1 \cdot \left(\tfrac{100}{16}\right)^{-1} \cdot 1\right]^{-1} \cdot 3 = \tfrac{900}{16} \approx 56.25.$$

Тест Вальда также говорит о том, что на основании имеющихся наблюдений гипотеза H_0 должна быть отвергнута.

$$I(\hat{\theta}_R) = \frac{n}{\lambda_R^2} = \frac{100}{1} = 100,$$

$$\left.\frac{\partial \ell_{UR}}{\partial \theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}_R} = \frac{n}{\hat{\lambda}_R} - (x_1 + \ldots + x_n) = \frac{100}{1} - 25 = 75,$$

$$LM = \left[\left.\frac{\partial l_{UR}}{\partial \theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}_R}\right]^T \cdot I^{-1}(\hat{\theta}_R) \cdot \left[\left.\frac{\partial l_{UR}}{\partial \theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}_R}\right] =$$

$$= 75 \cdot (100)^{-1} \cdot 75 = \frac{75 \cdot 75}{100} = 56.25.$$

Тест множителей Лагранжа также указывает на то, что гипотеза H_0 должна быть отвергнута.

6.1. $f(x)$ чётная, $\mathbb{E}(X) = 0$, $\text{Var}(X) = \pi^2/3$, логистическое похоже на $N(0, \pi^2/3)$

6.2. $\ln\left(\frac{\mathbb{P}(y_i=1)}{\mathbb{P}(y_i=0)}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_i$.

6.3.

6.4.

6.5. $z = \frac{\hat{\beta}_2}{se(\hat{\beta}_2)} = \frac{3}{0.3} = 10$, H_0 отвергается. Предельный эффект равен $\hat{\beta}_2 \Lambda'(-0.8) \approx 0.642$. Для нахождения $se(\hat{\mathbb{P}})$ найдём линейную аппроксимацию для $\Lambda(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x)$ в окрестности точки $\hat{\beta}_1 = 0.7$, $\hat{\beta}_2 = 3$. Получаем

$$\Lambda(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x) \approx \Lambda(\beta_1 + \beta_2 x) + \Lambda'(\beta_1 + \beta_2 x)(\hat{\beta}_1 - \beta_1) + \Lambda'(\beta_1 + \beta_2 x)x(\hat{\beta}_2 - \beta_2).$$

6.6. Для краткости введем следующие обозначения: $y_i = honey_i$, $d_i = bee_i$[1].

[1] Y_i — случайный Мёд, y_i — реализация случайного Мёда (наблюдаемый Мёд)

1. Функция правдоподобия имеет следующий вид:

$$\mathrm{L}(\beta_1, \beta_2) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{\beta_1,\beta_2}\left(\{Y_i = y_i\}\right) =$$
$$\prod_{i:y_i=0} \mathbb{P}_{\beta_1,\beta_2}\left(\{Y_i = 1\}\right) \cdot \prod_{i:y_i=1} \mathbb{P}_{\beta_1,\beta_2}\left(\{Y_i = 0\}\right) =$$
$$\prod_{i:y_i=1} \Lambda(\beta_1 + \beta_2 d_i) \cdot \prod_{i:y_i=0} [1 - \Lambda(\beta_1 + \beta_2 d_i)] =$$
$$\prod_{i:y_i=1,d_i=1} \Lambda(\beta_1 + \beta_2) \cdot \prod_{i:y_i=1,d_i=0} \Lambda(\beta_1) \cdot \prod_{i:y_i=0,d_i=1} [1 - \Lambda(\beta_1 + \beta_2)] \cdot$$
$$\cdot \prod_{i:y_i=0,d_i=0} [1 - \Lambda(\beta_1)] =$$
$$\Lambda(\beta_1 + \beta_2)^{\#\{i:y_i=1,d_i=1\}} \cdot \Lambda(\beta_1)^{\#\{i:y_i=1,d_i=0\}} \cdot [1 - \Lambda(\beta_1 + \beta_2)]^{\#\{i:y_i=0,d_i=1\}} \cdot$$
$$\cdot [1 - \Lambda(\beta_1)]^{\#\{i:y_i=0,d_i=0\}}$$

где

$$\Lambda(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

логистическая функция распределения, $\#A$ означает число элементов множества A.

2. Введём следующие обозначения:

$$a = \Lambda(\beta_1)$$

$$b = \Lambda(\beta_1 + \beta_2)$$

Тогда с учетом имеющихся наблюдений функция правдоподобия принимает вид:

$$\mathrm{L}(a, b) = b^{12} \cdot a^{32} \cdot (1 - b)^{36} \cdot (1 - a)^{20}$$

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ell(a, b) = \ln \mathrm{L}(a, b) = 12 \ln b + 32 \ln a + 36 \ln(1 - b) + 20 \ln(1 - a)$$

Решая систему уравнений правдоподобия

$$\begin{cases} \frac{\partial \ell}{\partial a} = \frac{32}{a} - \frac{20}{1-a} = 0 \\ \frac{\partial \ell}{\partial b} = \frac{12}{b} - \frac{36}{1-b} = 0 \end{cases}$$

получаем $\hat{a} = \frac{8}{13}$, $\hat{b} = \frac{1}{4}$. Находим $\hat{\beta}_{1,UR} = \ln\left(\frac{\hat{a}}{1-\hat{a}}\right) = \ln\left(\frac{8}{5}\right) = 0.47$. Далее получаем, что $\hat{\beta}_{1,UR} + \hat{\beta}_{2,UR} = \ln\left(\frac{\hat{b}}{1-\hat{b}}\right)$. Следовательно, $\hat{\beta}_{2,UR} = \ln\left(\frac{\hat{b}}{1-\hat{b}}\right) - \hat{\beta}_{1,UR} = \ln\left(\frac{1}{3}\right) - \ln\left(\frac{8}{5}\right) = -1.57$.

3. Гипотеза, состоящая в том, что правильность Мёда не связана с правильностью пчёл, формализуется как $H_0 : \beta_2 = 0$. Протестируем данную гипотезу при помощи теста отношения правдоподобия. Положим в функции правдоподобия $\mathrm{L}(\beta_1, \beta_2)$ $\beta_2 = 0$. Тогда получим

$$\mathrm{L}(a, b = a) = a^{32+12} \cdot (1-a)^{20+36}$$

В этом случае логарифмическая функция правдоподобия имеет вид:

$$\ell(a, b = a) := \mathrm{L}(a, b = a) = 44 \ln a + 56 \ln(1-a)$$

Решаем уравнение правдоподобия

$$\frac{\partial \ell}{\partial a} = \frac{44}{a} - \frac{56}{1-a} = 0$$

и получаем $\hat{a} = \frac{11}{25}$. Следовательно, $\hat{\beta}_{1,R} = -0.24$ и $\hat{\beta}_{2,R} = 0$.

Статистика отношения правдоподобия имеет вид:

$$LR = -2(\ell(\hat{\beta}_{1,R}, \hat{\beta}_{2,R}) - \ell(\hat{\beta}_{1,UR}, \hat{\beta}_{2,UR}))$$

и имеет асимптотическое χ^2 распределение с числом степеней свободы, равным числу ограничений, составляющих гипотезу H_0, то есть в данном случае $LR \overset{a}{\sim} \chi^2_1$.

Находим наблюдаемое значение статистики отношения правдоподобия:

$$\ell(\hat{\beta}_{1,R}, \hat{\beta}_{2,R}) = \ell(\hat{a}_R, \hat{b}_R = \hat{a}_R) = 44 \ln \hat{a}_R + 56 \ln[1 - \hat{a}_R] = 44 \ln\left[\frac{11}{25}\right] + 56 \ln\left[1 - \frac{11}{25}\right] = -68.59$$

$$\ell(\hat\beta_{1,UR},\hat\beta_{2,UR})=\ell(\hat a_{UR},\hat b_{UR})=$$
$$12\ln\hat b_{UR}+32\ln\hat a_{UR}+36\ln[1-\hat b_{UR}]+20\ln[1-\hat a_{UR}]=$$
$$12\ln\left[\frac{1}{4}\right]+32\ln\left[\frac{8}{13}\right]+36\ln\left[1-\frac{1}{4}\right]+20\ln\left[1-\frac{8}{13}\right]=-61.63$$

Следовательно, $LR=-2(-68.59+61.63)=13.92$, при этом критическое значение χ^2 распределения с одной степенью свободы для 5% уровня значимости равна 3.84. Значит, на основании теста отношения правдоподобия гипотеза $H_0:\beta_2=0$ должна быть отвергнута. Таким образом, данные показывают, что, в действительности, правильность мёда связана с правильностью пчёл.

4.

$$\hat{\mathbb{P}}\{honey=0|bee=0\}=1-\hat{\mathbb{P}}\{honey=1|bee=0\}=$$
$$1-\frac{\exp\{\hat\beta_{1,UR}+\hat\beta_{2,UR}\cdot 0\}}{1+\exp\{\hat\beta_{1,UR}+\hat\beta_{2,UR}\cdot 0\}}=$$
$$1-\frac{\exp\{\ln\left(\frac{8}{5}\right)\}}{1+\exp\{\ln\left(\frac{8}{5}\right)\}}=1-0.62=0.38$$

6.7. в теории оценки не существуют, в R получатся некие точечные оценки, достаточно далеко лежащие от нуля с огромными стандартными ошибками и P-значением близким к 1.

6.8. Из условий первого порядка для метода максимального правдоподобия следует, что $\sum_{i=1}^n y_i=\sum_{i=1}^n \hat p_i=70$.

6.9.

6.10.

6.11. Если в пробит-уравнении ненаблюдаемой переменной домножить все коэффициенты и стандартную ошибку на произвольную константу, то в результате получится ровно та же модель. Следовательно, модель с $\varepsilon_i\sim\mathcal{N}(0;\sigma^2)$ не идентифицируема. Поэтому надо взять какое-то нормировочное условие. Можно взять, например, $\beta_2=42$, но традиционно берут $\varepsilon_i\sim\mathcal{N}(0;1)$.

6.12. Предельный эффект максимален при $x = 31/6$, достигается он при максимальной производной $\Lambda'(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2 x+\hat{\beta}_3 z)$, то есть при $\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2 x+\hat{\beta}_3 z = 0$.

6.13.

6.14.

```
data <- mutate(Ecdat::Doctor, y = ifelse(1, 0, doctor > 0))
```

7.1.

7.2. увеличить количество наблюдений, уменьшить дисперсию случайной ошибки

7.3.

7.4.

7.5.

7.6.

7.7.

7.8. $r^* = -1/2$

7.9. $r^* = -1/3$

7.10. $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{RSS_2} = 40$, $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_3) = \frac{\sigma^2}{RSS_3} = 20$, а $RSS_j = (1 - R_j^2) \cdot TSS_j$. При этом в парной регрессии x на z или z на x коэффициенты R^2 равны и равны квадрату выборочной корреляции, то есть $R_j^2 = 0.81$.

7.11. 1, т.к. все главные компоненты ортогональны

7.12.

7.13. $VIF = 1/0.19$, $VIF \geqslant 1/0.19$

7.14. Никак, Мишель сделала линейную замену регрессоров, $\tilde{X} = X \cdot A$, где A — обратима.

7.15.

7.16.

8.1. Рассмотрим вопрос на примере парной регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$. Можно выделить условную и безусловную гетероскедастичность. Безусловная — $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) \neq const$. Условная — $\mathrm{Var}(\varepsilon_i | x_i) \neq const$.

Условная и безусловная дисперсии связаны соотношением:

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \mathbb{E}(\mathrm{Var}(\varepsilon_i | x_i)) + \mathrm{Var}(\mathbb{E}(\varepsilon_i | x_i))$$

То есть при условии $\mathbb{E}(\varepsilon_i | x_i) = 0$ из условной гомоскедастичности следует безусловная.

Удобно изучать гетероскедастичность при парадигме стохастических регрессоров, а именно, предполагать, что наблюдения представляют собой случайную выборку. В этой ситуации получаются одновременно условно гетероскедастичные и безусловно гомоскедастичные ошибки.

8.2. Поделить зависимую переменную и каждый регрессор, включая единичный столбец, на $|x_i|$.

8.3. Поделить зависимую переменную и каждый регрессор, включая единичный столбец, на $\sqrt{|x_i|}$.

8.4. $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = c x_i^4$

8.5. $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = c x_i$

8.6. По графику видно, что с увеличением общей площади увеличивается разброс цены. Поэтому разумно, например, рассмотреть следующие подходы:

1. Перейти к логарифмам, т.е. оценивать модель $\ln price_i = \beta_1 + \beta_2 \ln totsp_i + \varepsilon_i$.

2. Оценивать квантильную регрессию. В ней угловые коэффициенты линейной зависимости будут отличаться для разных квантилей переменной $price$.

3. Обычную модель линейной регрессии с гетероскедастичностью вида $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2 totsp_i^2$.

8.7.

8.8. Протестируем гетероскедастичность ошибок при помощи теста Голдфельда- Квандта. $H_0 : \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, $H_a : \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = f(x_i)$

1. Тестовая статистика $GQ = \frac{RSS_3/(n_3-k)}{RSS_1/(n_1-k)}$, где $n_1 = 11$ — число наблюдений в первой подгруппе, $n_3 = 11$ — число наблюдений в последней подгруппе, $k = 3$ — число факторов в модели, считая единичный столбец.

2. Распределение тестовой статистики при верной H_0: $GQ \sim F_{n_3-k, n_1-k}$

3. Наблюдаемое значение $GQ_{obs} = 1.41$

4. Область, в которой H_0 не отвергается: $GQ \in [0; 3.44]$

5. Статистический вывод: поскольку $GQ_{obs} \in [0; 3.44]$, то на основании имеющихся наблюдений на уровне значимости 5% основная гипотеза H_0 не может быть отвергнута. Таким образом, тест Голдфельда-Квандта не выявил гетероскедастичность.

8.9. Протестируем гетероскедастичность ошибок при помощи теста Голдфельда- Квандта. $H_0 : \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, $H_a : \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = f(x_i)$

1. Тестовая статистика $GQ = \frac{RSS_3/(n_3-k)}{RSS_1/(n_1-k)}$, где $n_1 = 21$ — число наблюдений в первой подгруппе, $n_3 = 21$ — число наблюдений в последней подгруппе, $k = 3$ — число факторов в модели, считая единичный столбец.

2. Распределение тестовой статистики при верной H_0: $GQ \sim F_{n_3-k, n_1-k}$

3. Наблюдаемое значение $GQ_{obs} = 6.49$

4. Область, в которой H_0 не отвергается: $GQ \in [0; 3.12]$

5. Статистический вывод: поскольку $GQ_{obs} \notin [0; 3.12]$, то на основании имеющихся наблюдений на уровне значимости 1% основная гипотеза H_0 отвергается. Таким образом, тест Голдфельда-Квандта выявил гетероскедастичность.

8.10. Протестируем гетероскедастичность ошибок при помощи теста Голдфельда- Квандта. $H_0 : \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, $H_a : \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = f(x_i)$

1. Тестовая статистика $GQ = \frac{RSS_3/(n_3-k)}{RSS_1/(n_1-k)}$, где $n_1 = 11$ — число наблюдений в первой подгруппе, $n_3 = 11$ — число наблюдений в последней подгруппе, $k = 3$ — число факторов в модели, считая единичный столбец.

2. Распределение тестовой статистики при верной H_0: $GQ \sim F_{n_3-k,n_1-k}$

3. Наблюдаемое значение $GQ_{obs} = 2.88$

4. Область, в которой H_0 не отвергается: $GQ \in [0; 3.44]$

5. Статистический вывод: поскольку $GQ_{obs} \in [0; 3.44]$, то на основании имеющихся наблюдений на уровне значимости 5% основная гипотеза H_0 не может быть отвергнута. Таким образом, тест Голдфельда-Квандта не выявил гетероскедастичность.

8.11. Протестируем гетероскедастичность ошибок при помощи теста Голдфельда- Квандта. $H_0 : \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, $H_a : \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = f(x_i)$

1. Тестовая статистика $GQ = \frac{RSS_3/(n_3-k)}{RSS_1/(n_1-k)}$, где $n_1 = 21$ — число наблюдений в первой подгруппе, $n_3 = 21$ — число наблюдений в последней подгруппе, $k = 3$ — число факторов в модели, считая единичный столбец.

2. Распределение тестовой статистики при верной H_0: $GQ \sim F_{n_3-k,n_1-k}$

3. Наблюдаемое значение $GQ_{obs} = 5.91$

4. Область, в которой H_0 не отвергается: $GQ \in [0; 2.21]$

5. Статистический вывод: поскольку $GQ_{obs} \notin [0; 2.21]$, то на основании имеющихся наблюдений на уровне значимости 5% основная гипотеза H_0 отвергается. Таким образом, тест Голдфельда-Квандта выявил гетероскедастичность.

8.12. Протестируем гетероскедастичность ошибок при помощи теста Уайта. $H_0 : \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, $H_a : \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \delta_1 + \delta_2 x_i + \delta_3 z_i + \delta_4 x_i^2 + \delta_5 z_i^2 + \delta_6 x_i z_i$.

1. Тестовая статистика $W = n \cdot R^2_{aux}$, где n — число наблюдений, R^2_{aux} — коэффициент детерминации для вспомогательной регрессии.

2. Распределение тестовой статистики при верной H_0: $W \sim \chi^2_{k_{aux}-1}$, где $k_{aux} = 6$ — число регрессоров во вспомогательной регрессии, считая константу.

3. Наблюдаемое значение тестовой статистики: $W_{obs} = 18$

4. Область, в которой H_0 не отвергается: $W \in [0; W_{crit}] = [0; 11.07]$

5. Статистический вывод: поскольку $W_{obs} \notin [0; 11.07]$, то на основании имеющихся наблюдений на уровне значимости 5% основная гипотеза H_0 отвергается. Таким образом, тест Уайта выявил гетероскедастичность.

8.13.

8.14.

8.15.

8.16.

8.17.

8.18.

8.19.

$$\mathbb{E}(\hat{\beta}|X) = \mathbb{E}((X'X)^{-1}X'y|X) = (X'X)^{-1}X'\mathbb{E}(X\beta + u|X) = \beta + \mathbb{E}(u|X) = \beta$$

8.20.

8.21.

8.22.

8.23. $0.0752, 5, 10$

8.24. $k(k+1)/2$

8.25.

8.26. Известно, что оценки параметров, получаемые по обобщённому методу наименьших квадратов, являются наилучшими, поэтому:

$$\operatorname{Var}(\varepsilon) = const \cdot \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

8.27.

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(\hat{\beta}_{GLS}, \varepsilon) &= \operatorname{Cov}\left((X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}y, \varepsilon\right) = \\ &= \operatorname{Cov}\left((X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}\varepsilon, \varepsilon\right) = \\ &= (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}\operatorname{Cov}(\varepsilon, \varepsilon) = \\ &= (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}\Sigma = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\end{aligned}$$

8.28. Для нахождения эффективной оценки воспользуемся взвешенным методом наименьших квадратов. Разделим каждое из уравнений $y_i = \beta + \varepsilon$ на корень из дисперсии ε_i с тем, чтобы ошибки в полученных уравнениях имели равные дисперсии (в этом случае можно будет сослаться на т. Гаусса-Маркова). Итак, после деления i-го уравнения на величину $\sqrt{x_i}/\sigma_\varepsilon$, мы получаем:

$$\begin{pmatrix} y_1\sqrt{x_1}/\sigma_\varepsilon \\ y_2\sqrt{x_2}/\sigma_\varepsilon \\ \ldots \\ y_n\sqrt{x_n}/\sigma_\varepsilon \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} \sqrt{x_1}/\sigma_\varepsilon \\ \sqrt{x_2}/\sigma_\varepsilon \\ \ldots \\ \sqrt{x_n}/\sigma_\varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1\sqrt{x_1}/\sigma_\varepsilon \\ \varepsilon_2\sqrt{x_2}/\sigma_\varepsilon \\ \ldots \\ \varepsilon_n\sqrt{x_n}/\sigma_\varepsilon \end{pmatrix}$$

Поскольку условия т. Гаусса-Маркова для последней модели выполнены, то МНК-оценка для последней модели будет наиболее эффективной. Поэтому

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i\sqrt{x_i}/\sigma_\varepsilon)(\sqrt{x_i}/\sigma_\varepsilon)}{\sum_{i=1}^n (\sqrt{x_i}/\sigma_\varepsilon)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i}{\sum_{i=1}^n x_i}$$

8.29.

8.30. В предположении о гомоскедастичности, $\gamma_2 = 0$, оценка правдоподобия совпадает с МНК-оценкой, значит $\hat{\beta} = \sum y_i x_i / \sum x_i^2$. И $\hat{\sigma}_i^2 = RSS/n$, значит $\hat{\gamma_1} = \ln(RSS/n)$.

8.31. Решение средствами пакета sandwich

```r
df <- tibble(y = c(1, 3, 3), x = c(0, 0, 1))

model <- lm(data = df, y ~ x)
coef(model)
# residuals
resid(model)


vcov(model)
vcovHC(model) # should fail
vcovHC(model, type = "HC0")
# help(vcovHC)
```

Решение с ручным подсчётом матриц

```
y <- c(1, 3, 3)
X <- cbind(rep(1, 3), c(0, 0, 1))

hat_beta <- solve(t(X) %*% X) %*% t(X) %*% y
hat_beta


# by hand Var(hat_beta)
y_hat <- X %*% hat_beta
e_hat <- y - y_hat
RSS <- sum((y - y_hat)^2)
vcov_ols <- RSS / (3 - 2) * solve(t(X) %*% X)
vcov_ols

# crossprod(X) is just synonym for t(X) %*% X

H <- X %*% solve(crossprod(X)) %*% t(X)
H

diag(H)

S_hat_white <- diag(as.vector(e_hat^2))
S_hat_HC3 <- diag(as.vector(e_hat^2)/(1 - diag(H))^2)
S_hat_HC3 # look at the problem

# vcov White
solve(crossprod(X)) %*% t(X)  %*% S_hat_white %*% X %*% solve(crossprod(X))
# vcov HC3
solve(crossprod(X)) %*% t(X)  %*% S_hat_HC3 %*% X %*% solve(crossprod(X))
```

8.32.

```
df <- tibble(x = c(0, 2, 2), y = c(-1, 1, 0))
xtable(df)
X <- model.matrix(y ~ x, data = df)
y <- df$y
XX <- t(X) %*% X
```

```
XX_inv <- solve(XX)
XX_X <- XX_inv %*% t(X)
H <- X %*% XX_X
```

8.33. при гомоскедастичности $\hat{\mu} = \bar{y}$, при гетероскедастичности

$$\hat{\mu} = \frac{\sum \tilde{x}_i \tilde{y}_i}{\sum \tilde{x}_i^2} = \frac{\sum i^2 \cdot y_i}{\sum i^2}$$

8.34. $\mathbb{E}(\hat{\beta}|X) = \beta$

8.35.

8.36. Одинаковые.

8.37.

$$\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1) = TSS \frac{1}{n_0} \frac{1}{n-2}$$

$$\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1) = TSS_0 \frac{n}{n_0} \frac{1}{n_0} \frac{1}{n-2}$$

8.38.

1. $\hat{\beta} = 3$, $\hat{u} = (-1, 2, -1)'$
2. $H = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$
3. $\widehat{\mathrm{Var}}(u) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
4. $\widehat{\mathrm{Var}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. $\widehat{\mathrm{Var}}(u) = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{pmatrix}$

6. $\widehat{\mathrm{Var}}(u) = 14^2 \begin{pmatrix} 1/13^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4/10^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5^2 \end{pmatrix}$

8.39.

1. $\hat{\beta} = (4, -1)'$, $\hat{u} = (-1, 2, -1)'$

8.40.

8.41.

9.1. Змаетим, что модель $\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x + \hat{\beta}_3 z$ — ограниченная, $RSS_R = 73$, а модель $\hat{\hat{y}} = \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 x + \hat{\gamma}_3 z + \hat{\gamma}_4 \hat{y}^2$ — неограниченная, $RSS_{UR} = 70$. Проверяем гипотезу

$$H_0 : \gamma_4 = 0$$

Посчитаем F-статистику, которая при верной H_0 имеет распределение $F_{1,21}$:

$$F_{obs} = \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/q}{RSS_{UR}/(n - k_{UR})} = \frac{(73 - 70)/1}{70/(25 - 4)} = 0.9$$

Поскольку $F_{obs} < F_{crit} = 4.32$, оснований отвергать H_0 нет.

9.2. Аналогично предыдущей задаче:

$$R : \hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x + \hat{\beta}_3 z, R^2_R = 0.7$$

$$UR : \hat{\hat{y}} = \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 x + \hat{\gamma}_3 z + \hat{\gamma}_4 \hat{y}^2, R^2_{UR} = 0.75$$

Проверяем гипотезу

$$H_0 : \gamma_4 = 0$$

Посчитаем F-статистику, которая при верной H_0 имеет распределение $F_{1,16}$:

$$F_{obs} = \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/q}{RSS_{UR}/(n - k_{UR})} = \frac{(R^2_{UR} - R^2_R)/q}{(1 - R^2_{UR})/(n - k_{UR})} = \frac{(0.75 - 0.7)/1}{(1 - 0.75)/(20 - 4)} = 3.2$$

Поскольку $F_{obs} < F_{crit} = 4.49$, оснований отвергать H_0 нет.

9.3. Задача решается аналогично 9.1, но теперь проверяется гипотеза с двумя ограничениями:

$$H_0 : \begin{cases} \gamma_4 = 0 \\ \gamma_5 = 0 \end{cases}$$

Посчитаем F-статистику, которая при верной H_0 имеет распределение $F_{2,25}$:

$$F_{obs} = \frac{(150 - 120)/2}{120/(35 - 5)} = 6.25$$

Поскольку $F_{obs} > F_{crit} = 3.39$ основная гипотеза отвергается.

9.4. Аналогично задаче 9.2. Проверяемая гипотеза:

$$H_0 : \begin{cases} \gamma_4 = 0 \\ \gamma_5 = 0 \end{cases}$$

F-статистика, которая при верной H_0 имеет распределение $F_{2,20}$:

$$F_{obs} = \frac{(11.5 - 9.5)/2}{9.5/20} = 2.1$$

Так как $F_{obs} < F_{crit} = 3.49$, нет оснований отвергать H_0.

9.5. H_0 : модели (1) и (2) имеют одинаковое качество, H_1 : модели (1) и (2) имеют разное качество, то есть одна из моделей лучше,

1. Тестовая статистика:
$$T = \frac{n}{2}\left|\ln \frac{RSS_2^*}{RSS_1^*}\right|$$
.

2. Распределение тестовой статистики:
$$T \underset{H_0,asy}{\sim} \chi_1^2$$
.

3. Наблюдаемое значение тестовой статистики

$$T_{obs} = \frac{80}{2}\left|\ln\frac{121}{239}\right| \approx 27.23$$

.

4. Область, в которой H_0 не отвергается:

$$[0;\ T_{cr}] = [0;\ qchisq(0.95,\ df = 1)] = [0;\ 3.84]$$

.

5. Статистический вывод: поскольку

$$T_{obs} \notin [0;\ T_{cr}]$$

, гипотеза H_0 отвергается в пользу гипотезы H_1. Стало быть, из того, что

$$RSS_1^* > RSS_2^*$$

следует, что модель (1*) хуже модели (2*), а значит, модель (1) хуже модели (2). Таким образом, тест Бокса–Кокса говорит о том, что предпочтительнее модель с логарифмом — модель (2).

9.6. H_0 : модели (1) и (2) имеют одинаковое качество, H_1 : модели (1) и (2) имеют разное качество, то есть одна из моделей лучше,

1. Тестовая статистика:

$$T = \frac{n}{2}\left|\ln\frac{RSS_2^*}{RSS_1^*}\right|$$

.

2. Распределение тестовой статистики:

$$T \underset{H_0,asy}{\sim} \chi_1^2$$

.

3. Наблюдаемое значение тестовой статистики

$$T_{obs} = \frac{40}{2}\left|\ln\frac{25}{20}\right| \approx 4.46$$

.

4. Область, в которой H_0 не отвергается:

$$[0;\ T_{cr}] = [0;\ qchisq(0.95,\ df = 1)] = [0;\ 3.84]$$

.

5. Статистический вывод: поскольку

$$T_{obs} \notin [0;\ T_{cr}]$$

, гипотеза H_0 отвергается в пользу гипотезы H_1. Стало быть, из того, что

$$RSS_1^* < RSS_2^*$$

следует, что модель (1*) лучше модели (2*), а значит, модель (1) лучше модели (2). Таким образом, тест Бокса–Кокса говорит о том, что предпочтительнее модель без логарифма — модель (1).

9.7. Чтобы избежать переполнения при подсчёте произведения всех y_i

9.8.

9.9.

10.1. Замечаем, что $u_i^2 = \varepsilon_i^2 = 1$. Считаем:

$$\mathbb{E}(\hat{\beta} \mid x_1, x_2) = \mathbb{E}\left(\frac{x_1^*}{(x_1^*)^2 + (x_2^*)^2}\right)\mathbb{E}(y_1) + \mathbb{E}\left(\frac{x_2^*}{(x_1^*)^2 + (x_2^*)^2}\right)\mathbb{E}(y_2)$$

В обоих случаях $\mathbb{E}(y_1) = 0$. Получаем, $\mathbb{E}(\hat{\beta} \mid x_1 = 0,\, x_2 = 1) = 0.2\beta$, $\mathbb{E}(\hat{\beta} \mid x_1 = 0,\, x_2 = 2) = 0.8\beta$. Интуитивно объясняем: рисуем прямую по двум точкам. Мы знаем абсциссы точек с точностью ± 1. Если точки близки, то это может сильно менять оценку наклона, если точки далеки, то случайность слабо влияет на наклон.

10.2.

10.3.

10.4.

10.5.

10.6.

10.7.

10.8.

10.9.

10.10.

10.11. Оба правы, $\operatorname{plim} \hat{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1$ и $\operatorname{plim} \hat{y}_1 = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i$.

10.12. В общем случае $\hat{\beta}_2 \neq \hat{\gamma}_2$, однако $\operatorname{plim} \hat{\beta}_2 = \operatorname{plim} \hat{\gamma}_2$.

10.13.

10.14. Оценки будут несмещёнными и состоятельными. Вызвано это тем, что $u_i = \beta_3 x_i^2 + w_i$ некоррелировано с x_i.

10.15. $\operatorname{plim} \left(\frac{1}{n} x'x\right)^{-1} = 109^{-1}$, $\operatorname{plim} \frac{1}{n} x'u = 0$ и $\operatorname{plim}(x'x)^{-1} x'u = 0$

10.16. Да, например, равномерное распределение (u_i, x_i) на круге или на окружности. Или равновероятное на восьми точках, $(\pm 1, \pm 1)$, $(\pm 2, \pm 2)$.

10.17.

10.18. Например, можно взять $u_1 = x_2$, и все величины $\mathcal{N}(0; 1)$.

10.19. Одинаково распределены: $y_1 \sim y_2 \sim y_3$, $x_1 \sim x_2 \sim x_3$. Независимы переменные с разными номерами.

10.20.

1. В общем случае функция $h(t)$ может быть немонотонной. Например, ошибка ε равновероятно принимает значения -100, -1, 1 и 100, а погода за окном равновероятно принимает значения -99 и 1. Тогда знание того, что $z + \varepsilon = 0$, позволяет сделать вывод, что $z = 1$, а знание того, что $z + \varepsilon = 1$, приводит к выводу $z = -99$.

2. Сначала находим $\mathbb{E}(z|z+\varepsilon)$ и $\text{Var}(z|z+\varepsilon)$, а затем ответ выражается через стандартную нормальную функцию распределения F.

11.1. Наличие ненулевой корреляции между y_t и y_{t-s}.

11.2.

1. Процесс $AR(2)$, т.к. две первые частные корреляции значимо отличаются от нуля, а гипотезы о том, что каждая последующая равна нулю не отвергаются.

2. Можно использовать одну из двух статистик

$$\text{Ljung-Box} = n(n+2)\sum_{k=1}^{3}\frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k} = 0.43$$

```
n * (n + 2) * sum(resid.acf[2:4]^2/ ((n - 1) : (n - 3)))
```

$$\text{Box-Pierce} = n\sum_{k=1}^{3}\hat{\rho}_k^2 = 0.41$$

```
n * sum(resid.acf[2:4]^2)
```

Критическое значение хи-квадрат распределения с 3-мя степенями свободы для $\alpha = 0.05$ равно $\chi^2_{3,crit} = 7.81$.

```
qchisq(0.95, df = 3)
```

Вывод: гипотеза H_0 об отсутствии корреляции ошибок модели не отвергается.

11.3.

1. H_0: ряд содержит единичный корень, $\beta = 0$; H_a: ряд не содержит единичного корня, $\beta < 0$

2. $ADF = -0.4/0.1 = -4$, $ADF_{crit} = -2.89$, H_0 отвергается.

```
qunitroot(0.05, N = 100, trend = "c", statistic = "t")
```

3. Ряд стационарен.

4. При верной H_0 ряд не стационарен, и t-статистика имеет не t-распределение, а распределение Дики-Фуллера.

11.4.

11.5.

11.6.

11.7.

11.8.

11.9.

11.10.

1. $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2/(1-\rho^2)$;

2. $\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = \rho^h \cdot \sigma^2/(1-\rho^2)$;

3. $\mathrm{Corr}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = \rho^h$.

11.11.

11.12. Все линейные комбинации стационарны.

11.13. Они будут примерно одинаковы. Оценка наклона определяется автоковариационной функцией.

11.14.

11.15. $x_t = (1 - \mathrm{L})^t y_t$

11.16. $F_n = \mathrm{L}(1+\mathrm{L})F_n$, значит $F_n = \mathrm{L}^k(1+\mathrm{L})^k F_n$ или $F_{n+k} = (1+\mathrm{L})^k F_n$

11.17. а - неверно, б - верно.

11.18.

11.19.

11.20.

11.21.

11.22.

11.23. 1, 2, 2

11.24.

11.25.

11.26.

11.27. Несмещённость доказывается с помощью подсчёта $\mathbb{E}(\hat{\beta})$, а предпосылка о $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$ при автокорреляции ошибок не нарушена.

11.28.

11.29.

1. Поскольку имеют место соотношения $\varepsilon_1 = \rho\varepsilon_0 + u_1$ и $Y_1 = \mu + \varepsilon_1$, то из условия задачи получаем, что $\varepsilon_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/(1-\rho^2))$ и $Y_1 \sim \mathcal{N}\mu, \sigma^2/(1-\rho^2))$. Поэтому

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/(1-\rho^2)}} \exp\left(-\frac{(y_1-\mu)^2}{2\sigma^2/(1-\rho^2)}\right).$$

Далее, найдем $f_{Y_2|Y_1}(y_2|y_1)$. Учитывая, что $Y_2 = \rho Y_1 + (1-\rho)\mu + u_2$, получаем $Y_2|\{Y_1 = y_1\} \sim \mathcal{N}\rho y_1 + (1-\rho)\mu, \sigma^2)$. Значит,

$$f_{Y_2|Y_1}(y_2|y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_2-\rho y_1-(1-\rho)\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Действуя аналогично, получаем, что для всех $t \geqslant 2$ справедлива формула

$$f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t|y_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_t-\rho y_{t-1}-(1-\rho)\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Таким образом, находим функцию правдоподобия

$$\mathrm{L}(\mu, \rho, \sigma^2) = f_{Y_T,\ldots,Y_1}(y_T, \ldots, y_1) = f_{Y_1}(y_1)\prod_{t=2}^{T} f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t|y_{t-1}),$$

где $f_{Y_1}(y_1)$ и $f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t|y_{t-1})$ получены выше.

2. Для нахождения неизвестных параметров модели запишем логарифмическую условную функцию правдоподобия:

$$\ell(\mu, \rho, \sigma^2|Y_1 = y_1) = \sum_{t=2}^{T} \log f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t|y_{t-1}) =$$

$$= -\frac{T-1}{2}\log(2\pi) - \frac{T-1}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{T}(y_t-\rho y_{t-1}-(1-\rho)\mu)^2.$$

Найдем производные функции $\ell(\mu, \rho, \sigma^2|Y_1 = y_1)$ по неизвестным параметрам:

$$\frac{\partial\ell}{\partial\mu} = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{T} 2(y_t-\rho y_{t-1}-(1-\rho)\mu)\cdot(\rho-1),$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \rho} = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{T} 2(y_t - \rho y_{t-1} - (1-\rho)\mu)\cdot(\mu - y_{t-1}),$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = -\frac{T-1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{t=2}^{T}(y_t - \rho y_{t-1} - (1-\rho)\mu)^2.$$

Оценки неизвестных параметров модели могут быть получены как решение следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ell}{\partial \mu} = 0, \\ \dfrac{\partial \ell}{\partial \rho} = 0, \\ \dfrac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем, что

$$\sum_{t=2}^{T} y_t - \hat{\rho}\sum_{t=2}^{T} y_{t-1} = (T-1)(1-\hat{\rho})\hat{\mu},$$

откуда

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{t=2}^{T} y_t - \hat{\rho}\sum_{t=2}^{T} y_{t-1}}{(T-1)(1-\hat{\rho})} = \frac{3 - \hat{\rho}\cdot 3}{4\cdot(1-\hat{\rho})} = \frac{3}{4}.$$

Далее, если второе уравнение системы переписать в виде

$$\sum_{t=2}^{T}(y_t - \hat{\mu} - \hat{\rho}(y_{t-1} - \hat{\mu}))(y_{t-1} - \hat{\mu}) = 0,$$

то легко видеть, что

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{T}(y_t - \hat{\mu})(y_{t-1} - \hat{\mu})}{\sum_{t=2}^{T}(y_{t-1} - \hat{\mu})^2}.$$

Следовательно, $\hat{\rho} = -1/11 = -0.0909$.

Наконец, из третьего уравнения системы

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=2}^{T}(y_t - \hat{\rho} y_{t-1} - (1-\hat{\rho})\hat{\mu})^2.$$

Значит, $\hat{\sigma}^2 = 165/242 = 0.6818$. Ответы: $\hat{\mu} = 3/4 = 0.75$, $\hat{\rho} = -1/11 = -0.0909$, $\hat{\sigma}^2 = 165/242 = 0.6818$.

11.30. Рассмотрим модель без константы. Тогда ковариационная матрица коэффициентов пропорциональна матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & -\hat{\rho}_1 \\ -\hat{\rho}_1 & 1 \end{pmatrix}$$

11.31.

11.32.

11.33.

11.34.

11.35.

11.36.

Для простоты закроем глаза на малое количество наблюдений и как индейцы пираха будем считать, что пять — это много.

11.37.

11.38. Процесс стационарен только при $y_1 = 4 + \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_1$. Фразу нужно понимать как «у стохастического разностного уравнения $y_t = 2 + 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$ есть стационарное решение».

11.39.

1. $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_1) = \sigma^2$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = 2\sigma^2$ при $t \geqslant 2$. Гетероскедастичная.
2. $\mathrm{Cov}(e_t, e_{t+1}) = \sigma^2$. Автокоррелированная.
3. $\hat{\beta}$ — несмещённая, неэффективная

4. Более эффективной будет $\hat{\beta}_{gls} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y$, где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Матрица V известна с точностью до константы σ^2, но в формуле для $\hat{\beta}_{gls}$ неизвестная σ^2 сократится.

Другой способ построить эффективную оценку — применить МНК к преобразованным наблюдениям, т.е. $\hat{\beta}_{gls} = \frac{\sum x_i' y_i'}{\sum x_i'^2}$, где $y_1' = y_1$, $x_1' = x_1$, $y_t' = y_t - y_{t-1}$, $x_t' = x_t - x_{t-1}$ при $t \geqslant 2$.

11.40. Да, стационарный.

11.41. Да, получается.

11.42. Да, процесс ε_t — белый шум. Количество пересечений оси, величина N, распределена биномиально, $Bin(n = 100, p = 1/2)$, $\mathbb{E}(N) = 50$.

11.43. Среднее количество пересечений равно 50 помножить на вероятность того, что два соседних y_t разного знака. Найдём вдвое меньшу вероятность, $\mathbb{P}(y_1 > 0, y_2 < 0)$.

11.44.

11.45. Приписать нолики и точки на вертикальной оси.

11.46. В данном случае статистика DW не применима, так как есть лаг y_{t-1} среди регрессоров.

12.1.

1. $|AB| = \sqrt{10}$, $\cos(ABC) = \frac{1}{\sqrt{5}}$
2. $|AB| = 1$, $\cos(ABC) = e^{-8}$

12.2. $K(x,y) = 1 + x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_1x_2 \cdot 3y_1y_2 + 2x_1^2 \cdot 2y_1^2 + 4x_2^2 \cdot 4y_2^2$

12.3. $f(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2^2, \sqrt{2}x_1x_2)$

12.4.

12.5.

12.6. В исходном пространстве: $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = \sqrt{5}$, $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{0.6}$.

В расширяющем пространстве: $|h(\vec{a})| = 1$, $|h(\vec{b})| = 1$, $\cos(h(\vec{a}), h(\vec{b})) = e^{-2}$.

12.7. Длина равна 1 и не зависит от σ. При $\sigma \approx 0$ вектора примерно совпадают, при больших σ вектора примерно ортогональны.

12.8. $C = 0$ и $\sigma = +\infty$

12.9.

1. Нужно нарисовать прямые $2x_1 + 3x_2 = 7$, $2x_1 + 3x_2 = 8$, $2x_1 + 3x_2 = 6$.
2. $2/\sqrt{13}$
3. $22/\sqrt{13}$

12.10. $w = (1/2, 1/2)$, $w_0 = 5.5$

12.11.

12.12.

13.1. $I_X = 1 - 0.2^2 - 0.8^2 = 0.32$, $H(X) = -(0.2\ln 0.2 + 0.8\ln 0.8) \approx 0.5$
$I_Y = 1 - 0.2^2 - 0.3^2 - 0.5^2 = 0.62$, $H(Y) = -(0.2\ln 0.2 + 0.3\ln 0.3 + 0.5\ln 0.5) \approx 1.03$

13.2. $I = 2p(1-p)$, энтропия и индекс Джини максимальны при $p = 0.5$.

13.3.

13.4. Первое разбиение по порогу $x_i < 2.5$, второе — по $x_i < 1.5$.

13.5. Первое разбинение по порогу $x_i < 3.5$. Левый лист разбивается по порогу $x_i < 5.5$, правый — по порогу $x_i < 1.5$.

13.6. Было: $I = 1 - \left(\frac{20}{70}\right)^2 - \left(\frac{40}{70}\right)^2 - \left(\frac{2}{70}\right)^2 - \left(\frac{8}{70}\right)^2 = \frac{708}{1225} \approx 0.58$,
$H = -\left(\frac{20}{70}\ln\frac{20}{70} + \frac{40}{70}\ln\frac{40}{70} + \frac{2}{70}\ln\frac{2}{70} + \frac{8}{70}\ln\frac{8}{70}\right) \approx 1.03$.
Стало: $I_L = 0, I_R = 1 - \left(\frac{20}{30}\right)^2 - \left(\frac{2}{30}\right)^2 - \left(\frac{8}{30}\right)^2 = 0.48, I = \frac{40}{70}\cdot 0 + \frac{30}{70}\cdot 0.48 \approx 0.21$,
$H_L = 0$, $H_R = -\left(\frac{20}{30}\ln\frac{20}{30} + \frac{2}{30}\ln\frac{2}{30} + \frac{8}{30}\ln\frac{8}{30}\right) \approx 0.8$, $H = \frac{40}{70}\cdot 0 + \frac{30}{70}\cdot 0.8 \approx 0.34$.

13.7. Первое разбиение по порогу $x_i < 12.5$, второе — по порогу $x_i < 10.5$.

13.8. $100 \cdot \left(\frac{99}{100}\right)^{100} \approx 100/e \approx 37$

13.9. Сначала делим по z, потом по x, так как индекс Джини в таком порядке падает сильнее.

13.10.

13.11. Нет, в силу выпуклости функций.

13.12. Все y_i одинаковые; поровну y_i двух типов; 1000 разных типов y_i, по одному наблюдению каждого типа.

13.13.

y_i	x_i	z_i
1	1	1
1	2	2
0	1	2
0	2	1

14.1.

```
ma1 <- matrix(as.integer(c(1, 1, 1, 2)), nrow = 2, ncol = 2,
  byrow = FALSE, dimnames = NULL)
m1 <- matrix(as.integer(c(4, 1, 1, 2)), nrow = 2, ncol = 2,
  byrow = FALSE, dimnames = NULL)
```

14.2.

14.3.

```
A <- matrix(as.integer(c(1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1)), nrow = 3, ncol = 3,
  byrow = FALSE, dimnames = NULL)
B <- matrix(as.integer(c(1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1)), nrow = 3, ncol = 3,
  byrow = FALSE, dimnames = NULL)
C <- matrix(as.integer(c(0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0)), nrow = 3, ncol = 3,
  byrow = FALSE, dimnames = NULL)
D <- matrix(c(0, 1, 0, 0, 0, 1, "a", 0, 0), nrow = 3, ncol = 3,
  byrow = FALSE, dimnames = NULL)
```

14.4.

14.5.

14.6. Да, $H' = H$ и $H^2 = H$.

14.7. Поскольку $H \cdot H = H$, то каждый столбец матрицы — это собственный вектор с собственным числом 1.

14.8. Да, $Hu = X(X'X)^{-1}X'u = 0$.

14.9. Да.

14.10. Только 0 или 1.

14.11. Да.

14.12. Да.

14.13.

```
a <- matrix(as.integer(c(1, 2, 3, 4)), nrow = 4, ncol = 1,
  byrow = FALSE, dimnames = NULL)
b <- matrix(as.integer(c(1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4)), nrow = 4,
  ncol = 2, byrow = FALSE, dimnames = NULL)
c <- matrix(as.integer(c(1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1)), nrow = 4, ncol = 3,
  byrow = FALSE, dimnames = NULL)
d <- matrix(as.integer(c(1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1)), nrow = 4,
  ncol=4, byrow = FALSE, dimnames = NULL)
```

Матрица H — это матрица-шляпница, проектор. Собственные числа у неё — 0 и 1. Единице соответствуют столбцы матрицы X и их линейные комбинации. Нулю соответствуют вектора, ортогональные одновременно всем столбцам матрицы X.

14.14. Например, $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, 0, 1)'$.

14.15. $\mathrm{tr}(I) = n$, $\mathrm{tr}(\pi) = 1$, $\mathrm{tr}(H) = k$

14.16.

14.17.

14.18. $n \times m$, $m \times n$, I

14.19.

14.20.

14.21.

14.22. Собственные векторы — все векторы с нулевой суммой компонент, $\lambda = 0$, векторы из одинаковых чисел, $\lambda = n$.

14.23. Собственные векторы — все векторы перпендикулярные v, $\lambda = 0$, векторы пропорциональные v, $\lambda = |v|^2$.

14.24.

14.25. $X'Xv = \lambda v$, следовательно $XX'Xv = Xv$ и $w = Xv$ — собственный вектор матрицы XX'.

14.26. Если матрица X обратима, то $\beta = X^{-1}y$.

Если решений нет, то наилучшее приближение к решению — это $\beta = (X'X)^{-1}X'y$

Если решений бесконечно много, то решение с наименьшей длиной — это $\beta = X(XX')^{-1}y$.

14.27. Только если $M = I$. Доказательство. Если $M^2 = M$, и M — обратима, то, домножив обе части равенства на M^{-1}, получим $M = I$.

15.1.

15.2.

15.3.

```
a <- matrix(as.integer(c(1, 2, 3, 4)), nrow = 4, ncol = 1,
  byrow = FALSE, dimnames = NULL)
```

15.4.

```
b <- matrix(as.integer(c(1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4)), nrow = 4, ncol = 2,
  byrow = FALSE, dimnames = NULL)
```

15.5.

```
c <- matrix(as.integer(c(1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1)), nrow = 4, ncol = 3,
  byrow = FALSE, dimnames = NULL)
```

15.6.

```
ex <- c(1, 2)
varx <- matrix(as.integer(c(2, 1, 1, 2)), nrow = 2,
  byrow = FALSE, dimnames = NULL)
```

15.7.

```
ex1 <- c(1, 4)
varx1 <- matrix(as.integer(c(4, 1, 1, 4)), nrow = 2,
  byrow = FALSE, dimnames = NULL)
```

15.8.

15.9. По определению ковариационной матрицы:

$$\operatorname{Var}(\xi) = \begin{pmatrix} \operatorname{Var}(\xi_1) & \operatorname{Cov}(\xi_1,\xi_2) & \operatorname{Cov}(\xi_1,\xi_3) \\ \operatorname{Cov}(\xi_2,\xi_1) & \operatorname{Var}(\xi_2) & \operatorname{Cov}(\xi_2,\xi_3) \\ \operatorname{Cov}(\xi_3,\xi_1) & \operatorname{Cov}(\xi_3,\xi_2) & \operatorname{Var}(\xi_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Var}(\xi_1+\xi_2+\xi_3) = \operatorname{Var}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}\right) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \operatorname{Var}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 9$$

15.10.

$$\mathbb{E}(z_1) = \mathbb{E}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{E}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Var}(z_1) = \operatorname{Var}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \operatorname{Var}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}' =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}' =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

15.11. $\mathbb{E}(z_2) = \mathbb{E}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{E}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Поскольку $z_2 = z_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, где z_1 — случайный вектор из предыдущей задачи, то $\mathrm{Var}(z_2) = \mathrm{Var}(z_1)$. Сдвиг случайного вектора на вектор-константу не меняет его ковариационную матрицу.

15.12. *В данном примере проиллюстрирована процедура центрирования случайного вектора — процедура вычитания из случайного вектора его математического ожидания.*

$\mathbb{E}(z_3) = \mathbb{E}\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{E}\xi_1 \\ \mathbb{E}\xi_2 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{E}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} - \mathbb{E}\begin{pmatrix} \mathbb{E}\xi_1 \\ \mathbb{E}\xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}\xi_1 \\ \mathbb{E}\xi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{E}\xi_1 \\ \mathbb{E}\xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Заметим, что вектор z_3 отличается от вектора h сдвигом на вектор-константу $\begin{pmatrix} \mathbb{E}\xi_1 \\ \mathbb{E}\xi_2 \end{pmatrix}$, поэтому $\mathrm{Var}(z_3) = \mathrm{Var}(h)$.

15.13.

15.14.

15.15.

15.16.

15.17. Каждый из вариантов возможен.

15.18.

15.19. Корреляционная матрица должна быть положительно определена. Получаем квадратное неравенство.

16.1.

```
a <- matrix(c(2/3, -1/3, 1/3, -1/3, 2/3, 1/3, 1/3, 1/3, 2/3),
 nrow = 3, ncol = 3, byrow = FALSE, dimnames = NULL)
e <- matrix(c(2/3, -1/3, -1/3, -1/3, 2/3, -1/3, -1/3, -1/3, 2/3),
 nrow = 3, ncol = 3, byrow = FALSE, dimnames = NULL)
b <- matrix(c(1/3, 1/3, -1/3, 1/3, 1/3, -1/3, -1/3, -1/3, 1/3),
 nrow = 3, ncol = 3, byrow = FALSE, dimnames = NULL)
f <- matrix(c(1/3, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3),
 nrow = 3, ncol = 3, byrow = FALSE, dimnames = NULL)
h <- matrix(c(1/2, 0, -1/2, 0, 0, 0, -1/2, 0, 1/2), nrow = 3,
 ncol = 3, byrow = FALSE, dimnames = NULL)
g <- matrix(c(1/2, 0, 1/2, 0, 1, 0, 1/2, 0, 1/2), nrow = 3,
 ncol = 3, byrow = FALSE, dimnames = NULL)
i <- matrix(c(1/2, -1/2, 0, -1/2, 1/2, 0, 0, 0, 1), nrow = 3,
 ncol = 3, byrow = FALSE, dimnames = NULL)
j <- matrix(c(1/2, 1/2, 0, 1/2, 1/2, 0, 0, 0, 0), nrow = 3,
 ncol = 3, byrow = FALSE, dimnames = NULL)
c <- matrix(c(0.8, 0.4, 0, 0.4, 0.2, 0, 0, 0, 1), nrow = 3,
 ncol = 3, byrow = FALSE, dimnames = NULL)
d <- matrix(c(0.2, -0.4, 0, -0.4, 0.8, 0, 0, 0, 0), nrow = 3,
 ncol = 3, byrow = FALSE, dimnames = NULL)
```

16.2.

16.3.

```
a <- matrix(as.integer(c(1, 2, 3, 4)), nrow = 4, ncol = 1,
 byrow = FALSE, dimnames = NULL)
```

16.4.

```
b <- matrix(as.integer(c(1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4)), nrow = 4,
 ncol = 2, byrow = FALSE, dimnames = NULL)
```

16.5.

```
c <- matrix(as.integer(c(1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1)),
  nrow = 4, ncol = 3, byrow = FALSE, dimnames = NULL)
```

16.6.

```
A <- matrix(as.integer(c(1, 1, 1)), nrow = 1, ncol = 3,
  byrow = FALSE, dimnames = NULL)
B <- matrix(as.integer(c(1, 2, 3)), nrow = 1,
  ncol = 3, byrow = FALSE, dimnames = NULL)
C <- matrix(as.integer(c(1, 0, 1, 0, 1, 1)), nrow = 2,
  ncol = 3, byrow = FALSE, dimnames = NULL)
D <- matrix(as.integer(c(1, 1, 1, 2, 1, 3)), nrow = 2,
  ncol = 3, byrow = FALSE, dimnames = NULL)
E <- matrix(as.integer(c(1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1)), nrow = 3,
  ncol = 3, byrow = FALSE, dimnames = NULL)
```

16.7.

16.8.

```
m_a <- matrix(as.integer(c(4, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 2)),
  nrow = 3, ncol = 3, byrow = FALSE, dimnames = NULL)
```

16.9.

16.10.

16.11. По χ^2-распределению.

16.12. $u \sim \mathcal{N}(0, I)$

17.1.

17.2.

17.3.

17.4.

17.5.

17.6.

17.7.

17.8.

17.9.

17.10.

17.11.

17.12.

18.1.

18.2.

18.3.

18.4.

18.5. да, да

18.6. $q_{0.05} = 1$, $q_{0.1} = 3$, $q_{0.3} = 3$, $q_{0.4} = 7$, $q_{0.95} = 7$.

18.7. Случай 1:

y	x
3	1
3	1

Здесь $\beta_* = 3$.
Случай 2:

y	x
3	1
4	2

Здесь $\beta_* = 11/5$.
Случай 3:

y	x
4	2
3	1

Здесь $\beta_* = 11/5$.
Случай 4:

y	x
4	2
4	2

Здесь $\beta_* = 2$.
Таблица распределения:

β_*	2	11/5	3
$\mathbb{P}(\cdot)$	1/4	2/4	1/4

По определению квантили, $q_a = \min\{x | F(x) > a\}$. Получаем: $q_{0.025} = 2$, $q_{0.1} = 2$, $q_{0.3} = 2$, $q_{0.7} = 11/5$, $q_{0.8} = 3$, $q_{0.975} = 3$.

Получаем 95%-ый бутстрэповский интервал $[q_{0.025}; q_{0.975}] = [2; 3]$.

Замечаем, что $0 \notin [2; 3]$, поэтому гипотеза H_0: $\beta = 0$ отвергается.

18.8.

1.

$\hat{\beta}_*$	1/4	2/5	2/3
$\mathbb{P}_{\hat{\beta}_*}$	1/4	2/5	1/4

2. $\mathbb{E}[\hat{\beta}_*] = 103/240$

3. $$F_{\hat{\beta}_*}(x) = \begin{cases} 0 & , x \leqslant 1/4 \\ 1/4 & , 1/4 < x \leqslant 2/5 \\ 3/4 & , 2/5 < x \leqslant 2/3 \\ 1 & 2/3 < x \end{cases}$$

4. $Q_{\hat{\beta}_*}(0.025) = 1/4$, $Q_{\hat{\beta}_*}(0.1) = 1/4$, $Q_{\hat{\beta}_*}(0.3) = 2/5$, $Q_{\hat{\beta}_*}(0.8) = 2/3$, $Q_{\hat{\beta}_*}(0.975) = 2/3$

5. $\left[Q_{\hat{\beta}_*}(0.025); Q_{\hat{\beta}_*}(0.975)\right] \approx [1/4; 2/3]$

6. $0 \notin \left[Q_{\hat{\beta}_*}(0.025); Q_{\hat{\beta}_*}(0.975)\right]$, следовательно, коэффициент β значим

18.9.

```r
X <- c(1, 3, 5, 7)
Y <- c(2, 4, 6, 8)

Z <- cbind(Y, X)

SL <- 0.05

n <- length(X)
k <- 1


S <- 10^4
b_BOOT <- matrix(0, nrow = k, ncol = S)


set.seed(777) # На удачу!!!
for (s in 1:S) {
  Z_boot <- Z[sample(n, replace = TRUE), ]
  Y_boot <- Z_boot[, 1]
  X_boot <- Z_boot[, -1]
  model <- lm(Y_boot ~ 0 + X_boot)
  b_BOOT[, s] <- coef(model)
```

```
}

mean_b_boot <- mean(b_BOOT)

CI_b_boot <- matrix(0, nrow = k, ncol = 2)

for (j in 1:k) {
  CI_b_boot[j, 1] <- quantile(b_BOOT[j, ], SL/2)
  CI_b_boot[j, 2] <- quantile(b_BOOT[j, ], 1 - SL/2)
}
```

1. $\mathbb{E}[\hat{\beta}_*] \approx 1.22$
2. $\left[Q_{\hat{\beta}_*}(0.025); Q_{\hat{\beta}_*}(0.975)\right] \approx [1.15; 1.40]$
3. $0 \notin \left[Q_{\hat{\beta}_*}(0.025); Q_{\hat{\beta}_*}(0.975)\right]$, следовательно, коэффициент β значим

18.10.

1. $\mathbb{E}[\hat{\beta}_*] \approx 1.165$
2. $\left[Q_{\hat{\beta}_*}(0.025); Q_{\hat{\beta}_*}(0.975)\right] \approx [1.12; 1.29]$
3. $0 \notin \left[Q_{\hat{\beta}_*}(0.025); Q_{\hat{\beta}_*}(0.975)\right]$, следовательно, коэффициент β значим

18.11. Минимум равен 0. Совпадают, так как моментные условия выполнены как точные равенства.

Глава 21

Таблицы

Таблицы с разрешения автора взяты со страницы http://www.york.ac.uk/depts/maths/tables/sources.htm

Нормальное распределение

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Хи-квадрат распределение

ν	0.1%	0.5%	1.0%	2.5%	5.0%	10.0%	12.5%	20.0%	25.0%	33.3%	50.0%
1	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.025	0.064	0.102	0.186	0.455
2	0.002	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.267	0.446	0.575	0.811	1.386
3	0.024	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	0.692	1.005	1.213	1.568	2.366
4	0.091	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.219	1.649	1.923	2.378	3.357
5	0.210	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	1.808	2.343	2.675	3.216	4.351
6	0.381	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	2.441	3.070	3.455	4.074	5.348
7	0.598	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	3.106	3.822	4.255	4.945	6.346
8	0.857	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	3.797	4.594	5.071	5.826	7.344
9	1.152	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	4.507	5.380	5.899	6.716	8.343
10	1.479	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	5.234	6.179	6.737	7.612	9.342
11	1.834	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	5.975	6.989	7.584	8.514	10.341
12	2.214	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	6.729	7.807	8.438	9.420	11.340
13	2.617	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	7.493	8.634	9.299	10.331	12.340
14	3.041	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	8.266	9.467	10.165	11.245	13.339
15	3.483	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	9.048	10.307	11.037	12.163	14.339
16	3.942	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	9.837	11.152	11.912	13.083	15.338
17	4.416	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	10.633	12.002	12.792	14.006	16.338
18	4.905	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	11.435	12.857	13.675	14.931	17.338
19	5.407	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	12.242	13.716	14.562	15.859	18.338
20	5.921	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	13.055	14.578	15.452	16.788	19.337
21	6.447	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	13.873	15.445	16.344	17.720	20.337
22	6.983	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	14.695	16.314	17.240	18.653	21.337
23	7.529	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	15.521	17.187	18.137	19.587	22.337
24	8.085	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	16.351	18.062	19.037	20.523	23.337
25	8.649	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	17.184	18.940	19.939	21.461	24.337
26	9.222	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	18.021	19.820	20.843	22.399	25.336
27	9.803	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	18.861	20.703	21.749	23.339	26.336
28	10.391	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	19.704	21.588	22.657	24.280	27.336
29	10.986	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	20.550	22.475	23.567	25.222	28.336
30	11.588	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	21.399	23.364	24.478	26.165	29.336
35	14.688	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	25.678	27.836	29.054	30.894	34.336
40	17.916	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	30.008	32.345	33.660	35.643	39.335
45	21.251	24.311	25.901	28.366	30.612	33.350	34.379	36.884	38.291	40.407	44.335
50	24.674	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	38.785	41.449	42.942	45.184	49.335
55	28.173	31.735	33.570	36.398	38.958	42.060	43.220	46.036	47.610	49.972	54.335
60	31.738	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	47.680	50.641	52.294	54.770	59.335

Хи-квадрат распределение

ν	60.0%	66.7%	75.0%	80.0%	87.5%	90.0%	95.0%	97.5%	99.0%	99.5%	99.9%
1	0.708	0.936	1.323	1.642	2.354	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828
2	1.833	2.197	2.773	3.219	4.159	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.816
3	2.946	3.405	4.108	4.642	5.739	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	4.045	4.579	5.385	5.989	7.214	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.467
5	5.132	5.730	6.626	7.289	8.625	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750	20.515
6	6.211	6.867	7.841	8.558	9.992	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.458
7	7.283	7.992	9.037	9.803	11.326	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.322
8	8.351	9.107	10.219	11.030	12.636	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.125
9	9.414	10.215	11.389	12.242	13.926	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	10.473	11.317	12.549	13.442	15.198	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588
11	11.530	12.414	13.701	14.631	16.457	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757	31.264
12	12.584	13.506	14.845	15.812	17.703	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300	32.910
13	13.636	14.595	15.984	16.985	18.939	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819	34.528
14	14.685	15.680	17.117	18.151	20.166	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319	36.123
15	15.733	16.761	18.245	19.311	21.384	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801	37.697
16	16.780	17.840	19.369	20.465	22.595	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267	39.252
17	17.824	18.917	20.489	21.615	23.799	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718	40.790
18	18.868	19.991	21.605	22.760	24.997	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156	42.312
19	19.910	21.063	22.718	23.900	26.189	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582	43.820
20	20.951	22.133	23.828	25.038	27.376	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997	45.315
21	21.991	23.201	24.935	26.171	28.559	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401	46.797
22	23.031	24.268	26.039	27.301	29.737	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796	48.268
23	24.069	25.333	27.141	28.429	30.911	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181	49.728
24	25.106	26.397	28.241	29.553	32.081	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559	51.179
25	26.143	27.459	29.339	30.675	33.247	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928	52.620
26	27.179	28.520	30.435	31.795	34.410	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290	54.052
27	28.214	29.580	31.528	32.912	35.570	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645	55.476
28	29.249	30.639	32.620	34.027	36.727	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993	56.892
29	30.283	31.697	33.711	35.139	37.881	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336	58.301
30	31.316	32.754	34.800	36.250	39.033	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672	59.703
35	36.475	38.024	40.223	41.778	44.753	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275	66.619
40	41.622	43.275	45.616	47.269	50.424	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766	73.402
45	46.761	48.510	50.985	52.729	56.052	57.505	61.656	65.410	69.957	73.166	80.077
50	51.892	53.733	56.334	58.164	61.647	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490	86.661
55	57.016	58.945	61.665	63.577	67.211	68.796	73.311	77.380	82.292	85.749	93.168
60	62.135	64.147	66.981	68.972	72.751	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952	99.607

Распределение Стьюдента, t

ν	60.0%	66.7%	75.0%	80.0%	87.5%	90.0%	95.0%	97.5%	99.0%	99.5%	99.9%
1	0.325	0.577	1.000	1.376	2.414	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31
2	0.289	0.500	0.816	1.061	1.604	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	0.277	0.476	0.765	0.978	1.423	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215
4	0.271	0.464	0.741	0.941	1.344	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.267	0.457	0.727	0.920	1.301	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.265	0.453	0.718	0.906	1.273	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.263	0.449	0.711	0.896	1.254	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.262	0.447	0.706	0.889	1.240	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.261	0.445	0.703	0.883	1.230	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.260	0.444	0.700	0.879	1.221	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.260	0.443	0.697	0.876	1.214	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.259	0.442	0.695	0.873	1.209	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.259	0.441	0.694	0.870	1.204	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.258	0.440	0.692	0.868	1.200	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.258	0.439	0.691	0.866	1.197	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.258	0.439	0.690	0.865	1.194	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.257	0.438	0.689	0.863	1.191	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.257	0.438	0.688	0.862	1.189	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.257	0.438	0.688	0.861	1.187	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.257	0.437	0.687	0.860	1.185	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.257	0.437	0.686	0.859	1.183	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.256	0.437	0.686	0.858	1.182	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.256	0.436	0.685	0.858	1.180	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.256	0.436	0.685	0.857	1.179	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	0.256	0.436	0.684	0.856	1.178	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	0.256	0.436	0.684	0.856	1.177	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	0.256	0.435	0.684	0.855	1.176	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	0.256	0.435	0.683	0.855	1.175	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	0.256	0.435	0.683	0.854	1.174	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0.256	0.435	0.683	0.854	1.173	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
35	0.255	0.434	0.682	0.852	1.170	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340
40	0.255	0.434	0.681	0.851	1.167	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
45	0.255	0.434	0.680	0.850	1.165	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281
50	0.255	0.433	0.679	0.849	1.164	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
55	0.255	0.433	0.679	0.848	1.163	1.297	1.673	2.004	2.396	2.668	3.245
60	0.254	0.433	0.679	0.848	1.162	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
∞	0.253	0.431	0.674	0.842	1.150	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

Распределение Фишера, F

$\nu_2 \backslash \nu_l$	q	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
1	0.500	1.50	1.71	1.82	1.89	1.94	1.98	2.00	2.04	2.07	2.09	2.12	2.15	2.17	2.20
	0.600	2.63	2.93	3.09	3.20	3.27	3.32	3.36	3.41	3.45	3.48	3.52	3.56	3.59	3.64
	0.667	4.00	4.42	4.64	4.78	4.88	4.95	5.00	5.08	5.13	5.18	5.24	5.29	5.33	5.39
	0.750	7.50	8.20	8.58	8.82	8.98	9.10	9.19	9.32	9.41	9.50	9.58	9.67	9.74	9.85
	0.800	12.0	13.1	13.6	14.0	14.3	14.4	14.6	14.8	14.9	15.0	15.2	15.3	15.4	15.6
2	0.500	1.00	1.13	1.21	1.25	1.28	1.30	1.32	1.35	1.36	1.38	1.39	1.41	1.42	1.44
	0.600	1.50	1.64	1.72	1.76	1.80	1.82	1.84	1.86	1.88	1.89	1.91	1.92	1.94	1.96
	0.667	2.00	2.15	2.22	2.27	2.30	2.33	2.34	2.37	2.38	2.40	2.42	2.43	2.45	2.47
	0.750	3.00	3.15	3.23	3.28	3.31	3.34	3.35	3.38	3.39	3.41	3.43	3.44	3.46	3.48
	0.800	4.00	4.16	4.24	4.28	4.32	4.34	4.36	4.38	4.40	4.42	4.43	4.45	4.47	4.48
3	0.500	0.88	1.00	1.06	1.10	1.13	1.15	1.16	1.18	1.20	1.21	1.23	1.24	1.25	1.27
	0.600	1.26	1.37	1.43	1.47	1.49	1.51	1.52	1.54	1.55	1.56	1.57	1.58	1.59	1.60
	0.667	1.62	1.72	1.77	1.80	1.82	1.83	1.84	1.86	1.87	1.88	1.89	1.90	1.90	1.91
	0.750	2.28	2.36	2.39	2.41	2.42	2.43	2.44	2.44	2.45	2.46	2.46	2.47	2.47	2.47
	0.800	2.89	2.94	2.96	2.97	2.97	2.97	2.98	2.98	2.98	2.98	2.98	2.98	2.98	2.98
4	0.500	0.83	0.94	1.00	1.04	1.06	1.08	1.09	1.11	1.13	1.14	1.15	1.16	1.18	1.19
	0.600	1.16	1.26	1.31	1.34	1.36	1.37	1.38	1.40	1.41	1.42	1.43	1.43	1.44	1.45
	0.667	1.46	1.55	1.58	1.61	1.62	1.63	1.64	1.65	1.65	1.66	1.67	1.67	1.68	1.68
	0.750	2.00	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08
	0.800	2.47	2.48	2.48	2.48	2.47	2.47	2.47	2.46	2.46	2.45	2.44	2.44	2.43	2.43
5	0.500	0.80	0.91	0.96	1.00	1.02	1.04	1.05	1.07	1.09	1.10	1.11	1.12	1.13	1.15
	0.600	1.11	1.20	1.24	1.27	1.29	1.30	1.31	1.32	1.33	1.34	1.34	1.35	1.36	1.37
	0.667	1.38	1.45	1.48	1.50	1.51	1.52	1.53	1.53	1.54	1.54	1.54	1.55	1.55	1.55
	0.750	1.85	1.88	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.88	1.88	1.88	1.87
	0.800	2.26	2.25	2.24	2.23	2.22	2.21	2.20	2.19	2.18	2.18	2.17	2.16	2.15	2.13
6	0.500	0.78	0.89	0.94	0.98	1.00	1.02	1.03	1.05	1.06	1.07	1.08	1.10	1.11	1.12
	0.600	1.07	1.16	1.20	1.22	1.24	1.25	1.26	1.27	1.28	1.29	1.29	1.30	1.31	1.31
	0.667	1.33	1.39	1.42	1.44	1.44	1.45	1.45	1.46	1.46	1.47	1.47	1.47	1.47	1.47
	0.750	1.76	1.78	1.79	1.79	1.78	1.78	1.78	1.77	1.77	1.76	1.76	1.75	1.75	1.74
	0.800	2.13	2.11	2.09	2.08	2.06	2.05	2.04	2.03	2.02	2.01	2.00	1.98	1.97	1.95
7	0.500	0.77	0.87	0.93	0.96	0.98	1.00	1.01	1.03	1.04	1.05	1.07	1.08	1.09	1.10
	0.600	1.05	1.13	1.17	1.19	1.21	1.22	1.23	1.24	1.24	1.25	1.26	1.26	1.27	1.27
	0.667	1.29	1.35	1.38	1.39	1.40	1.40	1.41	1.41	1.41	1.41	1.41	1.42	1.42	1.42
	0.750	1.70	1.72	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.69	1.68	1.68	1.67	1.66	1.66	1.65
	0.800	2.04	2.02	1.99	1.97	1.96	1.94	1.93	1.92	1.91	1.89	1.88	1.86	1.85	1.83
8	0.500	0.76	0.86	0.91	0.95	0.97	0.99	1.00	1.02	1.03	1.04	1.05	1.07	1.07	1.09
	0.600	1.03	1.11	1.15	1.17	1.19	1.20	1.20	1.21	1.22	1.22	1.23	1.24	1.24	1.25
	0.667	1.26	1.32	1.35	1.36	1.36	1.37	1.37	1.37	1.37	1.38	1.38	1.38	1.37	1.37
	0.750	1.66	1.67	1.66	1.66	1.65	1.64	1.64	1.63	1.62	1.62	1.61	1.60	1.59	1.58
	0.800	1.98	1.95	1.92	1.90	1.88	1.87	1.86	1.84	1.83	1.81	1.80	1.78	1.76	1.74

Распределение Фишера, F

$\nu_2\backslash\nu_l$	q	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
9	0.500	0.75	0.85	0.91	0.94	0.96	0.98	0.99	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.08
	0.600	1.02	1.10	1.13	1.15	1.17	1.18	1.18	1.19	1.20	1.21	1.21	1.22	1.22	1.22
	0.667	1.24	1.30	1.32	1.33	1.34	1.34	1.34	1.34	1.35	1.35	1.35	1.34	1.34	1.34
	0.750	1.62	1.63	1.63	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53
	0.800	1.93	1.90	1.87	1.85	1.83	1.81	1.80	1.78	1.76	1.75	1.73	1.71	1.70	1.67
10	0.500	0.74	0.85	0.90	0.93	0.95	0.97	0.98	1.00	1.01	1.02	1.03	1.05	1.06	1.07
	0.600	1.01	1.08	1.12	1.14	1.15	1.16	1.17	1.18	1.18	1.19	1.19	1.20	1.20	1.21
	0.667	1.23	1.28	1.30	1.31	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.31
	0.750	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.50	1.48
	0.800	1.90	1.86	1.83	1.80	1.78	1.77	1.75	1.73	1.72	1.70	1.68	1.66	1.65	1.62
11	0.500	0.74	0.84	0.89	0.93	0.95	0.96	0.98	0.99	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06
	0.600	1.00	1.07	1.11	1.13	1.14	1.15	1.16	1.17	1.17	1.18	1.18	1.18	1.19	1.19
	0.667	1.22	1.27	1.29	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.29
	0.750	1.58	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.45
	0.800	1.87	1.83	1.80	1.77	1.75	1.73	1.72	1.69	1.68	1.66	1.64	1.62	1.60	1.57
12	0.500	0.73	0.84	0.89	0.92	0.94	0.96	0.97	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04	1.06
	0.600	0.99	1.07	1.10	1.12	1.13	1.14	1.15	1.16	1.16	1.17	1.17	1.17	1.18	1.18
	0.667	1.21	1.26	1.27	1.28	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.28	1.28	1.27
	0.750	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.45	1.44	1.42
	0.800	1.85	1.80	1.77	1.74	1.72	1.70	1.69	1.66	1.65	1.63	1.61	1.59	1.57	1.54
13	0.500	0.73	0.83	0.88	0.92	0.94	0.96	0.97	0.98	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05
	0.600	0.98	1.06	1.09	1.11	1.13	1.13	1.14	1.15	1.15	1.16	1.16	1.16	1.17	1.17
	0.667	1.20	1.25	1.26	1.27	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.27	1.27	1.27	1.26
	0.750	1.55	1.55	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.43	1.42	1.40
	0.800	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.68	1.66	1.64	1.62	1.60	1.58	1.56	1.54	1.51
14	0.500	0.73	0.83	0.88	0.91	0.94	0.95	0.96	0.98	0.99	1.00	1.01	1.03	1.04	1.05
	0.600	0.98	1.05	1.09	1.11	1.12	1.13	1.13	1.14	1.14	1.15	1.15	1.16	1.16	1.16
	0.667	1.19	1.24	1.26	1.26	1.27	1.27	1.27	1.27	1.27	1.26	1.26	1.26	1.25	1.24
	0.750	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43	1.41	1.40	1.38
	0.800	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.65	1.64	1.62	1.60	1.58	1.56	1.53	1.51	1.48
15	0.500	0.73	0.83	0.88	0.91	0.93	0.95	0.96	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03	1.05
	0.600	0.97	1.05	1.08	1.10	1.11	1.12	1.13	1.13	1.14	1.14	1.15	1.15	1.15	1.15
	0.667	1.18	1.23	1.25	1.25	1.26	1.26	1.26	1.26	1.26	1.25	1.25	1.25	1.24	1.23
	0.750	1.52	1.52	1.51	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.41	1.40	1.38	1.36
	0.800	1.80	1.75	1.71	1.68	1.66	1.64	1.62	1.60	1.58	1.56	1.54	1.51	1.49	1.46
16	0.500	0.72	0.82	0.88	0.91	0.93	0.95	0.96	0.97	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04
	0.600	0.97	1.04	1.08	1.10	1.11	1.12	1.12	1.13	1.13	1.14	1.14	1.14	1.14	1.14
	0.667	1.18	1.22	1.24	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.24	1.24	1.23	1.22
	0.750	1.51	1.51	1.50	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.41	1.40	1.38	1.37	1.34
	0.800	1.78	1.74	1.70	1.67	1.64	1.62	1.61	1.58	1.56	1.54	1.52	1.49	1.47	1.43
17	0.500	0.72	0.82	0.87	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.01	1.02	1.03	1.04
	0.600	0.97	1.04	1.07	1.09	1.10	1.11	1.12	1.12	1.13	1.13	1.13	1.14	1.14	1.14
	0.667	1.17	1.22	1.23	1.24	1.24	1.24	1.24	1.24	1.24	1.24	1.23	1.23	1.22	1.21
	0.750	1.51	1.50	1.49	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.37	1.36	1.33
	0.800	1.77	1.72	1.68	1.65	1.63	1.61	1.59	1.57	1.55	1.53	1.50	1.48	1.46	1.42

Распределение Фишера, F

$\nu_2 \backslash \nu_l$	q	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
18	0.500	0.72	0.82	0.87	0.90	0.93	0.94	0.95	0.97	0.98	0.99	1.00	1.02	1.02	1.04
	0.600	0.96	1.04	1.07	1.09	1.10	1.11	1.11	1.12	1.12	1.13	1.13	1.13	1.13	1.13
	0.667	1.17	1.21	1.23	1.24	1.24	1.24	1.24	1.24	1.23	1.23	1.23	1.22	1.22	1.21
	0.750	1.50	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.40	1.39	1.38	1.36	1.34	1.32
	0.800	1.76	1.71	1.67	1.64	1.62	1.60	1.58	1.55	1.53	1.51	1.49	1.46	1.44	1.40
19	0.500	0.72	0.82	0.87	0.90	0.92	0.94	0.95	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02	1.04
	0.600	0.96	1.03	1.07	1.09	1.10	1.10	1.11	1.12	1.12	1.12	1.13	1.13	1.13	1.13
	0.667	1.16	1.21	1.22	1.23	1.23	1.23	1.23	1.23	1.23	1.23	1.22	1.22	1.21	1.20
	0.750	1.49	1.49	1.47	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.38	1.37	1.35	1.33	1.30
	0.800	1.75	1.70	1.66	1.63	1.61	1.58	1.57	1.54	1.52	1.50	1.48	1.45	1.43	1.39
20	0.500	0.72	0.82	0.87	0.90	0.92	0.94	0.95	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03
	0.600	0.96	1.03	1.06	1.08	1.09	1.10	1.11	1.11	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12
	0.667	1.16	1.21	1.22	1.23	1.23	1.23	1.23	1.23	1.22	1.22	1.22	1.21	1.20	1.19
	0.750	1.49	1.48	1.47	1.45	1.44	1.43	1.42	1.40	1.39	1.37	1.36	1.34	1.32	1.29
	0.800	1.75	1.70	1.65	1.62	1.60	1.58	1.56	1.53	1.51	1.49	1.47	1.44	1.41	1.37
21	0.500	0.72	0.81	0.87	0.90	0.92	0.94	0.95	0.96	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03
	0.600	0.96	1.03	1.06	1.08	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12
	0.667	1.16	1.20	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.21	1.20	1.20	1.19
	0.750	1.48	1.48	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.35	1.33	1.32	1.28
	0.800	1.74	1.69	1.65	1.61	1.59	1.57	1.55	1.52	1.50	1.48	1.46	1.43	1.40	1.36
22	0.500	0.72	0.81	0.87	0.90	0.92	0.93	0.95	0.96	0.97	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03
	0.600	0.96	1.03	1.06	1.08	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.11	1.12	1.12	1.12	1.12
	0.667	1.16	1.20	1.21	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.21	1.21	1.21	1.20	1.19	1.18
	0.750	1.48	1.47	1.45	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.37	1.36	1.34	1.32	1.31	1.28
	0.800	1.73	1.68	1.64	1.61	1.58	1.56	1.54	1.51	1.49	1.47	1.45	1.42	1.39	1.35
23	0.500	0.71	0.81	0.86	0.90	0.92	0.93	0.95	0.96	0.97	0.98	1.00	1.01	1.02	1.03
	0.600	0.95	1.02	1.06	1.07	1.09	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.11	1.11	1.11	1.11
	0.667	1.15	1.20	1.21	1.22	1.22	1.22	1.22	1.21	1.21	1.21	1.20	1.19	1.19	1.17
	0.750	1.47	1.47	1.45	1.43	1.42	1.41	1.40	1.38	1.37	1.35	1.34	1.32	1.30	1.27
	0.800	1.73	1.68	1.63	1.60	1.57	1.55	1.53	1.51	1.49	1.46	1.44	1.41	1.38	1.34
24	0.500	0.71	0.81	0.86	0.90	0.92	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.01	1.01	1.03
	0.600	0.95	1.02	1.06	1.07	1.08	1.09	1.10	1.10	1.10	1.11	1.11	1.11	1.11	1.11
	0.667	1.15	1.19	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.20	1.20	1.19	1.18	1.17
	0.750	1.47	1.46	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.36	1.35	1.33	1.31	1.29	1.26
	0.800	1.72	1.67	1.63	1.59	1.57	1.55	1.53	1.50	1.48	1.46	1.43	1.40	1.38	1.33
25	0.500	0.71	0.81	0.86	0.89	0.92	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.03
	0.600	0.95	1.02	1.05	1.07	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.11	1.11	1.11
	0.667	1.15	1.19	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.20	1.20	1.19	1.19	1.18	1.16
	0.750	1.47	1.46	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.37	1.36	1.34	1.33	1.31	1.29	1.25
	0.800	1.72	1.66	1.62	1.59	1.56	1.54	1.52	1.49	1.47	1.45	1.42	1.39	1.37	1.32
26	0.500	0.71	0.81	0.86	0.89	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.03
	0.600	0.95	1.02	1.05	1.07	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.10	1.10	1.11	1.11	1.10
	0.667	1.15	1.19	1.20	1.21	1.21	1.21	1.21	1.20	1.20	1.20	1.19	1.18	1.18	1.16
	0.750	1.46	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.35	1.34	1.32	1.30	1.28	1.25
	0.800	1.71	1.66	1.62	1.58	1.56	1.53	1.52	1.49	1.47	1.44	1.42	1.39	1.36	1.31

Распределение Фишера, F

$\nu_2 \backslash \nu_l$	q	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
27	0.500	0.71	0.81	0.86	0.89	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.ga	0.99	1.00	1.01	1.03
	0.600	0.95	1.02	1.05	1.07	1.08	1.08	1.09	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10
	0.667	1.14	1.19	1.20	1.21	1.21	1.21	1.20	1.20	1.20	1.19	1.19	1.18	1.17	1.16
	0.750	1.46	1.45	1.43	1.42	1.40	1.39	1.38	1.36	1.35	1.33	1.32	1.30	1.28	1.24
	0.800	1.71	1.66	1.61	1.58	1.55	1.53	1.51	1.48	1.46	1.44	1.41	1.3a	1.35	1.30
28	0.500	0.71	0.81	0.86	0.89	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02
	0.600	0.95	1.02	1.05	1.07	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10
	0.667	1.14	1.18	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.19	1.19	1.18	1.17	1.15
	0.750	1.46	1.45	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.36	1.34	1.33	1.31	1.29	1.27	1.24
	0.800	1.71	1.65	1.61	1.57	1.55	1.52	1.51	1.48	1.46	1.43	1.41	1.37	1.35	1.30
29	0.500	0.71	0.81	0.86	0.89	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02
	0.600	0.95	1.02	1.05	1.06	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10
	0.667	1.14	1.18	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.19	1.19	1.18	1.17	1.17	1.15
	0.750	1.45	1.45	1.43	1.41	1.40	1.38	1.37	1.35	1.34	1.32	1.31	1.29	1.27	1.23
	0.800	1.70	1.65	1.60	1.57	1.54	1.52	1.50	1.47	1.45	1.43	1.40	1.37	1.34	1.29
30	0.500	0.71	0.al	0.86	0.89	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02
	0.600	0.94	1.01	1.05	1.06	1.07	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.10	1.10	1.09
	0.667	1.14	1.18	1.19	1.20	1.20	1.20	1.20	1.19	1.19	1.19	1.18	1.17	1.16	1.15
	0.750	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.35	1.34	1.32	1.30	1.28	1.26	1.23
	0.800	1.70	1.64	1.60	1.57	1.54	1.52	1.50	1.47	1.45	1.42	1.39	1.36	1.34	1.28
60	0.500	0.70	0.80	0.85	0.88	0.90	0.92	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01
	0.600	0.93	1.00	1.03	1.04	1.05	1.06	1.06	1.07	1.07	1.07	1.07	1.07	1.07	1.06
	0.667	1.12	1.16	1.17	1.17	1.17	1.17	1.17	1.16	1.16	1.15	1.14	1.13	1.12	1.10
	0.750	1.42	1.41	1.38	1.37	1.35	1.33	1.32	1.30	1.29	1.27	1.25	1.22	1.20	1.15
	0.800	1.65	1.59	1.55	1.51	1.48	1.46	1.44	1.41	1.38	1.35	1.32	1.29	1.25	1.18
80	0.500	0.70	0.80	0.85	0.88	0.90	0.91	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.99	1.00	1.01
	0.600	0.93	0.99	1.02	1.04	1.05	1.06	1.06	1.06	1.07	1.07	1.07	1.06	1.06	1.05
	0.667	1.11	1.15	1.16	1.17	1.17	1.16	1.16	1.16	1.15	1.14	1.13	1.12	1.11	1.08
	0.750	1.41	1.40	1.38	1.36	1.34	1.32	1.31	1.29	1.27	1.26	1.23	1.21	1.18	1.12
	0.800	1.64	1.58	1.53	1.50	1.47	1.44	1.42	1.39	1.37	1.34	1.31	1.27	1.23	1.16
100	0.500	0.70	0.79	0.84	0.88	0.90	0.91	0.92	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	1.01
	0.600	0.92	0.99	1.02	1.04	1.05	1.05	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.04
	0.667	1.11	1.15	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16	1.15	1.15	1.14	1.13	1.12	1.10	1.07
	0.750	1.41	1.39	1.37	1.35	1.33	1.32	1.30	1.28	1.27	1.25	1.23	1.20	1.17	1.11
	0.800	1.64	1.58	1.53	1.49	1.46	1.43	1.41	1.38	1.36	1.33	1.30	1.26	1.22	1.14
120	0.500	0.70	0.79	0.84	0.88	0.90	0.91	0.92	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	1.01
	0.600	0.92	0.99	1.02	1.04	1.04	1.05	1.05	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.05	1.04
	0.667	1.11	1.15	1.16	1.16	1.16	1.16	1.15	1.15	1.14	1.13	1.13	1.11	1.10	1.06
	0.750	1.40	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.30	1.28	1.26	1.24	1.22	1.19	1.16	1.10
	0.800	1.63	1.57	1.52	1.48	1.45	1.43	1.41	1.37	1.35	1.32	1.29	1.25	1.21	1.12
∞	0.500	0.69	0.79	0.84	0.87	0.89	0.91	0.92	0.93	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00
	0.600	0.92	0.98	1.01	1.03	1.04	1.04	1.04	1.05	1.05	1.05	1.05	1.04	1.04	1.00
	0.667	1.10	1.13	1.14	1.15	1.14	1.14	1.14	1.13	1.13	1.12	1.11	1.09	1.07	1.00
	0.750	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.29	1.28	1.25	1.24	1.22	1.19	1.16	1.13	1.00
	0.800	1.61	1.55	1.50	1.46	1.43	1.40	1.38	1.34	1.32	1.29	1.25	1.21	1.16	1.00

Распределение Фишера, F

$\nu_2\backslash\nu_l$	q	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
1	0.900	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	59.1	59.7	60.5	61.0	61.5	62.0	62.6	63.0	63.3
	0.950	199.	216.	225.	230.	234.	237.	239.	242.	244.	246.	248.	250.	252.	254.
	0.975	800.	864.	900.	922.	937.	948.	957.	969.	977.	985.	993.			
	0.990														
	0.999														
2	0.900	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.39	9.41	9.43	9.44	9.46	9.47	9.49
	0.950	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5
	0.975	39.0	39.2	39.2	39.3	39.3	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.5	39.5	39.5
	0.990	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	100.	100.	100.	100.	100.	100.	100.	99.5
	0.999	999.	999.												
3	0.900	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.23	5.22	5.20	5.18	5.17	5.15	5.13
	0.950	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.79	8.74	8.70	8.66	8.62	8.58	8.53
	0.975	16.0	15.4	15.1	14.9	14.7	14.6	14.5	14.4	14.3	14.3	14.2	14.1	14.0	13.9
	0.990	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.2	27.1	26.9	26.7	26.5	26.4	26.1
	0.999	149.	141.	137.	135.	133.	132.	131.	129.	128.	127.	126.	125.	125.	123.
4	0.900	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.92	3.90	3.87	3.84	3.82	3.79	3.76
	0.950	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	5.96	5.91	5.86	5.80	5.75	5.70	5.63
	0.975	10.6	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.84	8.75	8.66	8.56	8.46	8.38	8.26
	0.990	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.5	14.4	14.2	14.0	13.8	13.7	13.5
	0.999	61.2	56.2	53.4	51.7	50.5	49.7	49.0	48.0	47.4	46.8	46.1	45.4	44.9	44.1
5	0.900	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.30	3.27	3.24	3.21	3.17	3.15	3.10
	0.950	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.74	4.68	4.62	4.56	4.50	4.44	4.36
	0.975	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.62	6.52	6.43	6.33	6.23	6.14	6.02
	0.990	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.1	9.89	9.72	9.55	9.38	9.24	9.02
	0.999	37.1	33.2	31.1	29.8	28.8	28.2	27.6	26.9	26.4	25.9	25.4	24.9	24.4	23.8
6	0.900	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.94	2.90	2.87	2.84	2.80	2.77	2.72
	0.950	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.06	4.00	3.94	3.87	3.81	3.75	3.67
	0.975	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.46	5.37	5.27	5.17	5.07	4.98	4.85
	0.990	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.87	7.72	7.56	7.40	7.23	7.09	6.88
	0.999	27.0	23.7	21.9	20.8	20.0	19.5	19.0	18.4	18.0	17.6	17.1	16.7	16.3	15.7
7	0.900	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.70	2.67	2.63	2.59	2.56	2.52	2.47
	0.950	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.64	3.57	3.51	3.44	3.38	3.32	3.23
	0.975	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.76	4.67	4.57	4.47	4.36	4.28	4.14
	0.990	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.62	6.47	6.31	6.16	5.99	5.86	5.65
	0.999	21.7	18.8	17.2	16.2	15.5	15.0	14.6	14.1	13.7	13.3	12.9	12.5	12.2	11.7
8	0.900	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.54	2.50	2.46	2.42	2.38	2.35	2.29
	0.950	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.35	3.28	3.22	3.15	3.08	3.02	2.93
	0.975	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.29	4.20	4.10	4.00	3.89	3.81	3.67
	0.990	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.81	5.67	5.52	5.36	5.20	5.07	4.86
	0.999	18.5	15.8	14.4	13.5	12.9	12.4	12.0	11.5	11.2	10.8	10.5	10.1	9.80	9.33

Распределение Фишера, F

$\nu_2 \backslash \nu_l$	q	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
9	0.900	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.22	2.16
	0.950	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.14	3.07	3.01	2.94	2.86	2.80	2.71
	0.975	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	3.96	3.87	3.77	3.67	3.56	3.47	3.33
	0.990	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.26	5.11	4.96	4.81	4.65	4.52	4.31
	0.999	16.4	13.9	12.6	11.7	11.1	10.7	10.4	9.89	9.57	9.24	8.90	8.55	8.26	7.81
10	0.900	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.32	2.28	2.24	2.20	2.16	2.12	2.06
	0.950	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	2.98	2.91	2.84	2.77	2.70	2.64	2.54
	0.975	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.72	3.62	3.52	3.42	3.31	3.22	3.08
	0.990	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.85	4.71	4.56	4.41	4.25	4.11	3.91
	0.999	14.9	12.6	11.3	10.5	9.93	9.52	9.20	8.75	8.45	8.13	7.80	7.47	7.19	6.76
11	0.900	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.25	2.21	2.17	2.12	2.08	2.04	1.97
	0.950	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.85	2.79	2.72	2.65	2.57	2.51	2.40
	0.975	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.53	3.43	3.33	3.23	3.12	3.03	2.88
	0.990	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.54	4.40	4.25	4.10	3.94	3.81	3.60
	0.999	13.8	11.6	10.3	9.58	9.05	8.66	8.35	7.92	7.63	7.32	7.01	6.68	6.42	6.00
12	0.900	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.97	1.90
	0.950	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.75	2.69	2.62	2.54	2.47	2.40	2.30
	0.975	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.37	3.28	3.18	3.07	2.96	2.87	2.72
	0.990	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.30	4.16	4.01	3.86	3.70	3.57	3.36
	0.999	13.0	10.8	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.29	7.00	6.71	6.40	6.09	5.83	5.42
13	0.900	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.14	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.85
	0.950	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.67	2.60	2.53	2.46	2.38	2.31	2.21
	0.975	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.25	3.15	3.05	2.95	2.84	2.74	2.60
	0.990	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.10	3.96	3.82	3.66	3.51	3.37	3.17
	0.999	12.3	10.2	9.07	8.35	7.86	7.49	7.21	6.80	6.52	6.23	5.93	5.63	5.37	4.97
14	0.900	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.10	2.05	2.01	1.96	1.91	1.87	1.80
	0.950	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.60	2.53	2.46	2.39	2.31	2.24	2.13
	0.975	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.15	3.05	2.95	2.84	2.73	2.64	2.49
	0.990	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	3.94	3.80	3.66	3.51	3.35	3.22	3.00
	0.999	11.8	9.73	8.62	7.92	7.44	7.08	6.80	6.40	6.13	5.85	5.56	5.25	5.00	4.60
15	0.900	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.06	2.02	1.97	1.92	1.87	1.83	1.76
	0.950	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.54	2.48	2.40	2.33	2.25	2.18	2.07
	0.975	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.06	2.96	2.86	2.76	2.64	2.55	2.40
	0.990	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.80	3.67	3.52	3.37	3.21	3.08	2.87
	0.999	11.3	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47	6.08	5.81	5.53	5.25	4.95	4.70	4.31
16	0.900	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.03	1.99	1.94	1.89	1.84	1.79	1.72
	0.950	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.49	2.42	2.35	2.28	2.19	2.12	2.01
	0.975	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	2.99	2.89	2.79	2.68	2.57	2.47	2.32
	0.990	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.69	3.55	3.41	3.26	3.10	2.97	2.75
	0.999	11.0	9.01	7.94	7.27	6.80	6.46	6.19	5.81	5.55	5.27	4.99	4.70	4.45	4.06
17	0.900	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.00	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76	1.69
	0.950	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.45	2.38	2.31	2.23	2.15	2.08	1.96
	0.975	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.92	2.82	2.72	2.62	2.50	2.41	2.25
	0.990	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.59	3.46	3.31	3.16	3.00	2.87	2.65
	0.999	10.7	8.73	7.68	7.02	6.56	6.22	5.96	5.58	5.32	5.05	4.77	4.48	4.24	3.85

Распределение Фишера, F

$\nu_2 \backslash \nu_l$	q	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
18	0.900	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	1.98	1.93	1.89	1.84	1.78	1.74	1.66
	0.950	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.41	2.34	2.27	2.19	2.11	2.04	1.92
	0.975	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.87	2.77	2.67	2.56	2.44	2.35	2.19
	0.990	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.51	3.37	3.23	3.08	2.92	2.78	2.57
	0.999	10.4	8.49	7.46	6.81	6.35	6.02	5.76	5.39	5.13	4.87	4.59	4.30	4.06	3.67
19	0.900	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76	1.71	1.63
	0.950	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.38	2.31	2.23	2.16	2.07	2.00	1.88
	0.975	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.82	2.72	2.62	2.51	2.39	2.30	2.13
	0.990	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.43	3.30	3.15	3.00	2.84	2.71	2.49
	0.999	10.2	8.28	7.27	6.62	6.18	5.85	5.59	5.22	4.97	4.70	4.43	4.14	3.90	3.51
20	0.900	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.94	1.89	1.84	1.79	1.74	1.69	1.61
	0.950	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.35	2.28	2.20	2.12	2.04	1.97	1.84
	0.975	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.77	2.68	2.57	2.46	2.35	2.25	2.09
	0.990	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.37	3.23	3.09	2.94	2.78	2.64	2.42
	0.999	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44	5.08	4.82	4.56	4.29	4.00	3.76	3.38
21	0.900	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.92	1.87	1.83	1.78	1.72	1.67	1.59
	0.950	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.32	2.25	2.18	2.10	2.01	1.94	1.81
	0.975	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.73	2.64	2.53	2.42	2.31	2.21	2.04
	0.990	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.31	3.17	3.03	2.88	2.72	2.58	2.36
	0.999	9.77	7.94	6.95	6.32	5.88	5.56	5.31	4.95	4.70	4.44	4.17	3.88	3.64	3.26
22	0.900	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.90	1.86	1.81	1.76	1.70	1.65	1.57
	0.950	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.30	2.23	2.15	2.07	1.98	1.91	1.78
	0.975	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.70	2.60	2.50	2.39	2.27	2.17	2.00
	0.990	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.26	3.12	2.98	2.83	2.67	2.53	2.31
	0.999	9.61	7.80	6.81	6.19	5.76	5.44	5.19	4.83	4.58	4.33	4.06	3.78	3.54	3.15
23	0.900	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.89	1.84	1.80	1.74	1.69	1.64	1.55
	0.950	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.27	2.20	2.13	2.05	1.96	1.88	1.76
	0.975	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.67	2.57	2.47	2.36	2.24	2.14	1.97
	0.990	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.21	3.07	2.93	2.78	2.62	2.48	2.26
	0.999	9.47	7.67	6.70	6.08	5.65	5.33	5.09	4.73	4.48	4.23	3.96	3.68	3.44	3.05
24	0.900	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.88	1.83	1.78	1.73	1.67	1.62	1.53
	0.950	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.25	2.18	2.11	2.03	1.94	1.86	1.73
	0.975	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.64	2.54	2.44	2.33	2.21	2.11	1.94
	0.990	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.17	3.03	2.89	2.74	2.58	2.44	2.21
	0.999	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99	4.64	4.39	4.14	3.87	3.59	3.36	2.97
25	0.900	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.87	1.82	1.77	1.72	1.66	1.61	1.52
	0.950	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.24	2.16	2.09	2.01	1.92	1.84	1.71
	0.975	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.61	2.51	2.41	2.30	2.18	2.08	1.91
	0.990	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.13	2.99	2.85	2.70	2.54	2.40	2.17
	0.999	9.22	7.45	6.49	5.89	5.46	5.15	4.91	4.56	4.31	4.06	3.79	3.52	3.28	2.89
26	0.900	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.86	1.81	1.76	1.71	1.65	1.59	1.50
	0.950	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.22	2.15	2.07	1.99	1.90	1.82	1.69
	0.975	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.59	2.49	2.39	2.28	2.16	2.05	1.88
	0.990	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.09	2.96	2.81	2.66	2.50	2.36	2.13
	0.999	9.12	7.36	6.41	5.80	5.38	5.07	4.83	4.48	4.24	3.99	3.72	3.44	3.21	2.82

Распределение Фишера, F

$\nu_2 \backslash \nu_l$	q	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
27	0.900	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.85	1.80	1.75	1.70	1.64	1.58	1.49
	0.950	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.20	2.13	2.06	1.97	1.88	1.81	1.67
	0.975	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.57	2.47	2.36	2.25	2.13	2.03	1.85
	0.990	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.06	2.93	2.78	2.63	2.47	2.33	2.10
	0.999	9.02	7.27	6.33	5.73	5.31	5.00	4.76	4.41	4.17	3.92	3.66	3.38	3.14	2.75
28	0.900	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.84	1.79	1.74	1.69	1.63	1.57	1.48
	0.950	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.19	2.12	2.04	1.96	1.87	1.79	1.65
	0.975	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.55	2.45	2.34	2.23	2.11	2.01	1.83
	0.990	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.03	2.90	2.75	2.60	2.44	2.30	2.06
	0.999	8.93	7.19	6.25	5.66	5.24	4.93	4.69	4.35	4.11	3.86	3.60	3.32	3.09	2.69
29	0.900	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.83	1.78	1.73	1.68	1.62	1.56	1.47
	0.950	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.18	2.10	2.03	1.94	1.85	1.77	1.64
	0.975	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.53	2.43	2.32	2.21	2.09	1.99	1.81
	0.990	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.00	2.87	2.73	2.57	2.41	2.27	2.03
	0.999	8.85	7.12	6.19	5.59	5.18	4.87	4.64	4.29	4.05	3.80	3.54	3.27	3.03	2.64
30	0.900	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.82	1.77	1.72	1.67	1.61	1.55	1.46
	0.950	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.16	2.09	2.01	1.93	1.84	1.76	1.62
	0.975	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.51	2.41	2.31	2.20	2.07	1.97	1.79
	0.990	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	2.98	2.84	2.70	2.55	2.39	2.25	2.01
	0.999	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.82	4.58	4.24	4.00	3.75	3.49	3.22	2.98	2.59
60	0.900	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.71	1.66	1.60	1.54	1.48	1.41	1.29
	0.950	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	1.99	1.92	1.84	1.75	1.65	1.56	1.39
	0.975	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.27	2.17	2.06	1.94	1.82	1.70	1.48
	0.990	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.63	2.50	2.35	2.20	2.03	1.88	1.60
	0.999	7.77	6.17	5.31	4.76	4.37	4.09	3.86	3.54	3.32	3.08	2.83	2.55	2.32	1.89
80	0.900	2.37	2.15	2.02	1.92	1.85	1.79	1.75	1.68	1.63	1.57	1.51	1.44	1.38	1.24
	0.950	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	1.95	1.88	1.79	1.70	1.60	1.51	1.32
	0.975	3.86	3.28	2.95	2.73	2.57	2.45	2.35	2.21	2.11	2.00	1.88	1.75	1.63	1.40
	0.990	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.55	2.42	2.27	2.12	1.94	1.79	1.49
	0.999	7.54	5.97	5.12	4.58	4.20	3.92	3.70	3.39	3.16	2.93	2.68	2.41	2.16	1.72
100	0.900	2.36	2.14	2.00	1.91	1.83	1.78	1.73	1.66	1.61	1.56	1.49	1.42	1.35	1.21
	0.950	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.93	1.85	1.77	1.68	1.57	1.48	1.28
	0.975	3.83	3.25	2.92	2.70	2.54	2.42	2.32	2.18	2.08	1.97	1.85	1.71	1.59	1.35
	0.990	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.50	2.37	2.22	2.07	1.89	1.74	1.43
	0.999	7.41	5.86	5.02	4.48	4.11	3.83	3.61	3.30	3.07	2.84	2.59	2.32	2.08	1.62
120	0.900	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.65	1.60	1.54	1.48	1.41	1.34	1.19
	0.950	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.91	1.83	1.75	1.66	1.55	1.46	1.25
	0.975	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.16	2.05	1.94	1.82	1.69	1.56	1.31
	0.990	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.47	2.34	2.19	2.03	1.86	1.70	1.38
	0.999	7.32	5.78	4.95	4.42	4.04	3.77	3.55	3.24	3.02	2.78	2.53	2.26	2.02	1.54
∞	0.900	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.60	1.55	1.49	1.42	1.34	1.26	1.00
	0.950	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.83	1.75	1.67	1.57	1.46	1.35	1.00
	0.975	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.05	1.94	1.83	1.71	1.57	1.43	1.00
	0.990	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.32	2.18	2.04	1.88	1.70	1.52	1.00
	0.999	6.91	5.42	4.62	4.10	3.74	3.47	3.27	2.96	2.74	2.51	2.27	1.99	1.73	1.00

Глава 22

Правила виноделов

1. Дробную часть числа отделяй от целой точкой: 3.14 — хорошо, $3{,}14$ — плохо. Это нарушает русскую традицию, но облегчает копирование-вставку в любой программный пакет.

2. Существует длинное тире, —, которое отличается от просто дефиса - и нужно, чтобы разделять части предложения. Инструкция в картинках по набору тире :)

3. Выключные формулы следует окружать \[…\]. Никаких $$…$$!

4. Про остальные окружения: для системы уравнений подойдёт cases, для формул на несколько строк – multline*, для нумерации – enumerate.

5. Русский текст внутри формулы нужно писать в \text{…}.

6. Для многоточий существует команда \ldots.

7. В преамбуле определены сокращения! Самые популярные: \P, \E, \Var, \Cov, \Corr, \cN.

8. Названия функций тоже идут со слэшем: \ln, \exp, \cos…

9. Таблицы нужно оформлять по стандарту booktabs. Самый удобный способ сделать это – зайти на tablesgenerator и выбрать там опцию booktabs table style вместо default table style.

10. Уважай букву ё – ставь над ней точки! :)

11. Если к задаче нужно добавить рисунок, то лучше это делать с помощью окружения minipage:

```
\begin{minipage}{0.6\textwidth}
\begin{center}
\includegraphics[scale=0.4]{файл_картинки}
\end{center}
\captionof{figure}{Текст подписи :)}
\end{minipage}
```

Глава 23

Обозначения

n — количество наблюдений
k — количество регрессоров, считая константу
$X_{n\times k}$
$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$
$$\hat{y} = \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{pmatrix}$$
$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$
$\hat{\varepsilon} = y - \hat{y}$
$\hat{\sigma}^2 = RSS/(n-k)$
$RSS = \sum \hat{\varepsilon}_i^2$
$TSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$
$ESS = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$

Глава 24

Источники мудрости

[Zei04] Achim Zeileis. "Econometric computing with HC and HAC covariance matrix estimators". В: (2004). URL: https://cran.r-project.org/web/packages/sandwich/vignettes/sandwich.pdf. Пакет sandwich для R и разные оценки ковариационной матрицы оценок коэффициентов.

[Lea75] Edward E Leamer. "A result on the sign of restricted least-squares estimates". В: *Journal of Econometrics* 3.4 (1975), с. 387—390. Про смену знака оценки коэффициента при удалении переменной.

Todo list