РАНХиГС
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Andreu Mas-Colell,
Michael D. Whinston and Jerry R. Green

MICROECONOMIC THEORY

СЕРИЯ «АКАДЕМИЧЕСКИЙ УЧЕБНИК»

Андреу Мас-Колелл,
Майкл Д. Уинстон, Джерри Р. Грин

МИКРОЭКОНОМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Книга 2

Перевод с английского
Под научной редакцией М. И. Левина и Е. В. Покатович

Рекомендуется Российской академией народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации в качестве учебника для студентов ВПО, обучающихся по экономическим направлениям и специальностям, а также для студентов бакалавриата, углубленно изучающих микроэкономику, студентов магистратуры, аспирантов, преподавателей экономических факультетов вузов.
(Основание — приказ Министерства образования и науки №130 от 22 февраля 2012 г.)

Издательский дом ДЕЛО

Москва ◦ 2016

УДК 330.3
ББК 65
М31

Перевод с английского:

Юрий Автономов (гл. 21, 22); Кирилл Букин (гл. 11, 19, Математическое приложение); Владимир Бусыгин (Указатель); Евгения Левина (гл. 7, 8); Глеб Покатович (гл. 12); Елена Покатович (гл. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 13, 14, 15, 16, Указатель); Елена Попова (гл. 8, 9); Данил Федоровых (гл. 23); Михаил Фреер (гл. 20); Надежда Шилова (Введение, гл. 17, 18); Ирина Шевелева (гл. 20, 21, 22)

Мас-Колелл, А., Уинстон, М., Грин, Д.

М31 Микроэкономическая теория. Книга 2 / Андреу Мас-Колелл; Майкл Д. Уинстон; Джерри Р. Грин; пер. с англ.; под науч. ред. М. И. Левина, Е. В. Покатович. — М. : Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2016. — 640 с. — (Академический учебник).

ISBN 978-5-7749-0963-6 (общ.)
ISBN 978-5-7749-1105-9 (кн. 2)

Многие специалисты по микроэкономической теории ожидали появления текста, который смог бы обеспечить сбалансированный и углубленный анализ основ микроэкономики. Мастерски сочетая результаты многолетнего преподавания микроэкономики в Гарвардском университете, Андреу Мас-Колелл, Майкл Уинстон и Джерри Грин выполнили эту задачу, написав потрясающую работу «Микроэкономическая теория». Авторы задались целью создать прочную организационную основу, на которой строится эффективное преподавание микроэкономической теории. Результат представляет беспрецедентную глубину охвата всех существенных тем, позволяя преподавателям микроэкономики формировать свои курсы в соответствии с личными приоритетами и стилями. Такие темы, как автономная теория игр, информационная экономика и теория общего равновесия в условиях неопределенности, получают то внимание, которое соответствует их роли в пределах дисциплины. Авторы посвятили теории игр целый раздел, сделав его самостоятельным, чтобы преподаватели смогли возвращаться к этой теме по мере развития курса и в тот момент, когда им это удобно. Представление материала выполнено ясно, доступно и привлекательно, что позволяет студенту уверенно продвигаться, приобретая знания.

Многочисленные упражнения к каждой главе помогают студентам отточить свои навыки, а словарь терминов, выполненный в качестве приложения к каждой главе и снабженный перекрестными ссылками, отсылающими к предыдущим пяти разделам, предлагает доступное руководство по терминологии предмета. Преподаватели микроэкономики больше не нуждаются в том, чтобы прибегать к лекциям, разбросанным по разным учебникам. Хорошо написанная тремя наиболее влиятельными учеными в этой области «Микроэкономическая теория» привносит полноту и универсальность в изучение предмета аспирантами, чего уже давно не хватало.

УДК 330.3
ББК 65

ISBN 978-5-7749-0963-6 (общ.)
ISBN 978-5-7749-1105-9 (кн. 2)

Оглавление

Часть III. Рыночное равновесие и провалы рынка

Часть IV. Общее равновесие

Часть V. Экономика благосостояния и стимулы

Часть IV

ОБЩЕЕ РАВНОВЕСИЕ

Часть IV посвящена исследованию экономики конкурентного рынка с позиции *общего равновесия*. Используя термин «общее равновесие», мы понимаем под этим как методологический подход, так и саму теорию.

С методологической точки зрения, концепция общего равновесия обладает двумя ключевыми особенностями. Во-первых, в рамках данной концепции экономика рассматривается как *замкнутая взаимосвязанная* система, в которой мы должны одновременно определять равновесные значения всех интересующих переменных. Таким образом, оценивая влияние изменения экономической среды, необходимо пересчитать равновесные значения всего множества эндогенных переменных. Это и составляет основное отличие от концепции *частичного равновесия*, в рамках которой влиянием на эндогенные переменные, напрямую не связанные с рассматриваемой задачей, явным или неявным образом можно пренебречь.

Вторая ключевая особенность концепции общего равновесия состоит в том, что этот подход ставит своей целью уменьшение множества переменных, рассматриваемых как экзогенные, до небольшого числа физических фактов (например, множества экономических агентов, доступных технологий, предпочтений и наделенности различных агентов первоначальным запасом физических благ).

В современном экономическом понимании теория общего равновесия имеет более узкий смысл: это теория определения равновесных цен и количеств в системе совершенно конкурентных рынков. Эту теорию еще нередко называют вальрасианской теорией рынков (в честь Л. Вальраса (L. Walras, 1874)), и ее изложению мы посвятим часть IV. Вальрасианская теория рынков очень амбициозна. В ней предпринимается попытка ни больше ни меньше как предсказать полный вектор конечного потребления и производства на основе только фундаментальных составляющих экономики (таких, как перечень товаров, состояние технологии, предпочтений и первоначальных запасов), а также институциональной предпосылки о том, что цена устанавливается на каждый товар (включая и те, торговля которыми в равновесии не осуществляется), и поведенческой предпосылки о том, что потребители и фирмы принимают цены заданными.

Строго говоря, в главе 10 мы рассматривали специальный случай модели общего равновесия, где проводили анализ равновесия и благосостояния совершенно конкурентных рынков в предположении, что потребители имеют квазилинейные предпочтения. В такой постановке функции спроса потребителей характеризуются нулевым эффектом богатства (за исключением единственного товара, который называется *благом-измерителем*), и, как следствие, анализ отдельного рынка (или небольшой группы рынков) можно трактовать как традиционный анализ частичного равновесия. Существенную долю того, что мы делаем в части IV, можно рассматривать как попытку распространить идеи главы 10 на мир, в котором эффекты богатства весьма значительны, что позволяет сделать модель более реалистичной. С практической точки зрения, применяя анализ равновесия для изучения функционирования экономики в целом или для оценки государственного вмешательства, одновременно воздействующего на большое число рынков, эффектами богатства, как источниками первичной связи между рынками, нельзя пренебрегать, а следовательно, необходимо использование именно концепции общего равновесия.

Несмотря на то что для изучения части IV знание материала главы 10 не является остро необходимым, мы тем не менее настойчиво рекомендуем предварительно с ним ознакомиться, особенно с разделами 10.B–10.D, поскольку этот материал можно рассматривать как введение в анализ ряда основных вопросов, а также как простой и очень полезный аналитический пример. Как мы увидим в различных главах части IV, ряд важных результатов, установленных в главе 10 для квазилинейной экономики, можно распространить на случай предпочтений более общего вида. Однако имеется и много других результатов, для которых это не так. Чтобы понять, почему так происходит, стоит вспомнить, как мы показывали в главах 4 и 10, что поведение группы потребителей с квазилинейными предпочтениями (по одному и тому же благу-измерителю) может быть представлено как поведение репрезентативного потребителя. Это довольно сильное ограничение на агрегированный спрос, и в более общей постановке, рассматриваемой здесь, мы им воспользоваться не сможем.

Важно заметить, что если проводить сравнение с анализом, предпринятым в части III, то концепция общего равновесия ставит определенные ограничения, в рамках которых мы будем работать практически на протяжении всей части IV: это предпосылка о том, что экономические агенты принимают цены заданными и для всех участников рынка цены едины, что предполагает существование рынка для каждого возможного товара (с учетом симметричной информированности участников). Таким образом, во многих отношениях мы не заходим так далеко в нашем исследовании, как в части III, где изучали микроэкономический анализ рынков, провалы рынка и стратегические взаимодействия участников рынка. Поэтому выбор между концептуальной структурой частей III и IV в каком-то смысле отражает текущее состояние передовой фронта микроэкономических исследований.

Часть IV состоит из шести глав.

Глава 15 предваряет изложение теории. Главная цель этой главы – проиллюстрировать вопросы, касающиеся теории общего равновесия, на трех примерах: на примере *экономики с двумя потребителями и двумя благами (представимой ящиком Эджворта)*; *экономики с одним потребителем и одной фирмой* и модели *небольшой открытой экономики*.

В главах 16 и 17 будет изложено ядро формального анализа, представленного в части IV. В главе 16 мы опишем формальную структуру модели общего равновесия, а также введем две центральные концепции рассматриваемой теории: понятие *Парето-оптимальности* и *равновесия с агентами-ценополучателями* (и, в частности, *вальрасианского равновесия*). Эта глава посвящена анализу взаимосвязи между двумя данными концепциями, таким образом, здесь мы применим *нормативный* подход, сосредоточившись на изучении свойств равновесий с агентами-ценополучателями с точки зрения благосостояния этих агентов. Центральная часть данной главы связана с формулировкой и доказательством *фундаментальных теорем благосостояния*.

В главе 17, наоборот, фокус будет смещен в сторону *позитивных* (или *дескриптивных*) свойств вальрасианских равновесий. Мы исследуем ряд вопросов, касающихся прогнозной силы вальрасианской теории, включая проблему существования равновесия, локальной и глобальной единственности, а также сравнительную статику поведения вальрасианских равновесий.

Главы 18–20 посвящены развитию базового анализа, представленного в главах 16 и 17. В главе 18 изучается ряд тем, берущих начало в нормативной теории или кооперативной теории игр: эти темы обладают одним общим свойством – они позволяют лучше понять основы равновесий с агентами-ценополучателями за счет исследования свойств, присущих природе рынков. Мы проанализируем важную теорему об эквивалентном подходе в ядре и глубже исследуем идею вальрасианских равновесий как предельного случая некооперативных равновесий с ростом числа рынков (вопрос, который уже поднимался в разделе 12.F), а также приведем две нормативные характеристики вальрасианских равновесий: одну в терминах *зависть — свободность* (или *анонимность*), а вторую — исходя из *принципа предельной производительности*. В приложении A главы 18 предлагается краткое введение в кооперативную теорию игр.

В главе 19 будет рассмотрено моделирование неопределенности в контексте общего равновесия. Возможность такого моделирования удовлетворительным с теоретической точки зрения способом – один из факторов успеха теории общего равновесия. Здесь мы введем и исследуем такие понятия, как *контингентные блага*, *равновесие Эрроу— Дебре*, *последовательная торговля* (для двухпериодного случая), *равновесие Раднера*, *арбитраж*, *равновесие с рациональными ожиданиями* и *неполные рынки*. Материал данной главы демонстрирует естественную связь с современной теорией финансов.

Глава 20 будет посвящена приложениям теории общего равновесия к динамическим конкурентным экономикам (но в отсутствие неопределенности), а также в этой главе мы обсудим ряд вопросов, специфичных для данной среды. Будут введены такие понятия, как *нетерпение*, *динамическая эффективность*, а также сопоставлены *близорукое* поведение и *максимизация совокупной полезности*. В начале главы мы проанализируем динамическую экономику с репрезентативным потребителем (включая *модель Рамсея — Солоу*), затем обобщим ее на случай конечного числа потребителей и, наконец, в завершении главы будет дано сжатое представление о *модели с перекрывающимися поколениями*. В ходе главы мы исследуем широкий спектр видов динамического поведения. В целом данная глава позволяет проследить естественную связь микроэкономической теории с макроэкономикой.

Современными классическими работами по теории общего равновесия являются работы (Debreu, 1959) и (Arrow, Hahn, 1971). Дальнейшее развитие проблем, которые будут подняты в этой части книги, можно найти в указанных публикациях. Кроме того, мы рекомендуем ознакомиться с энциклопедическими работами (Arrow, Intriligator, 1981, 1982, 1986) и (Hildenbrand, Sonnenschein, 1991), а также со сравнительно недавно вышедшим учебником (Ellickson, 1993). Анализ общего равновесия имеет широкий спектр применений, который мы не затронули в нашей книге, хотя он во многом объясняет важность этой теории. Обзор этих вопросов можно найти в работе (Shoven, Whalley, 1992).

Литература

Arrow K., Hahn, F. (1971). *General Competitive Analysis*. San Francisco: Holden-Day.

Arrow K., Intriligator M., eds. (1981). *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. 1. Amsterdam: North-Holland.

Arrow K., Intriligator M., eds. (1982). *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. 2. Amsterdam: North-Holland.

Arrow K., Intriligator M., eds. (1986). *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. 3. Amsterdam: North-Holland.

Debreu G. (1959). *Theory of Value*. New York: Wiley.

Ellickson B. (1993). *Competitive equilibrium: Theory and Applications*, Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Hildenbrand W., Sonnenschein H., eds. (1991). *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. 4. Amsterdam: North-Holland.

Shoven J., Whalley J. (1992). *Applying General Equilibrium Analysis*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Walras L. (1874). *Elements d'economie politique pure*. Lausanne: Corbaz.

Глава 15. Теория общего равновесия: несколько примеров

15.A. Введение

Цель этой главы — предварительное обсуждение заданной тематики. В ней мы опишем и проанализируем три примера моделей общего равновесия. В этих примерах поднимается ряд вопросов, на которые мы будем пытаться ответить на протяжении всей части IV, а также вводятся базовые концепции и описывается стандартная техника анализа, которую мы активно будем использовать далее.

В большинстве экономик представлено три основных вида деятельности: производство, обмен и потребление. В разделе 15.B мы сосредоточим свое внимание на процессах обмена и потребления. Другими словами, мы проанализируем случай *экономики чистого обмена*, в которой производство отсутствует и все товары, которые в конечном счете потребляются, — это товары, представляющие собой первоначальный запас потребителей. К обоюдной выгоде потребители торгуют первоначальным запасом на рынке. Мы рассмотрим наиболее простой случай задачи обмена — модель с двумя потребителями и двумя благами. Для иллюстрации этой модели мы используем очень удобный графический инструмент — *ящик Эджворта*.

В разделе 15.C в модель добавится производство и мы проанализируем экономику, состоящую из одной фирмы и одного потребителя. На примере этой простой модели мы рассмотрим взаимодействие производственной и потребительской составляющих экономики.

Раздел 15.D посвящен более подробному исследованию производственного сектора экономики: здесь мы обсудим проблему распределения ресурсов между несколькими фирмами. Для того чтобы сконцентрироваться только на этой проблеме, мы рассмотрим случай небольшой открытой экономики, в которой мировые цены производимого выпуска считаются фиксированными: эта модель занимает центральное место в работах по мировой торговле.

В разделе 15.E будут проиллюстрированы возможные сложности и потенциальная опасность адаптации модели частичного равновесия в тех случаях, когда для анализа требуется модель общего равновесия.

Как мы уже отмечали во введении к части IV, по существу, в главе 10 приведен еще один простой пример модели общего равновесия для экономики, в которой все потребители имеют квазилинейные предпочтения.

15.B. Чистый обмен: ящик Эджворта

Экономика чистого обмена (или просто *экономика обмена*) — это экономика, в которой отсутствует производство. Экономическими агентами такой экономики являются потребители, обладающие первоначальным запасом товаров. Экономическая деятельность заключается только в торговле и потреблении.

Простейшая экономика с возможностью прибыльного обмена — это экономика с двумя товарами и двумя потребителями. Этот случай удобно анализировать с помощью графического инструмента, известного как *ящик Эджворта*, который мы будем активно использовать в этом разделе. Всюду в этом разделе будем считать, что потребители ведут себя как ценополучатели (т. е. принимают цены заданными). Хотя это может показаться и несколько странным в случае только двух потребителей, но наша цель здесь — проиллюстрировать некоторые особенности модели общего равновесия наиболее простым из возможных способов[1].

Итак, сначала предположим, что в экономике два потребителя, которых обозначим индексом $i = 1, 2$, и два товара, обозначаемые индексом $l = 1, 2$. Потребительский набор потребителя i имеет вид: $x_i = (x_{1i}, x_{2i})$, где через x_{li} обозначено потребление товара l потребителем i. Предположим, что потребительское множество потребителя i равно $\mathbb{R}^2_+$ и потребитель имеет отношение предпочтения $\succsim_i$ на множестве потребительских векторов из этого множества. Каждый потребитель i обладает первоначальным запасом $\omega_{li} \geq 0$ блага l. Таким образом, вектор первоначальных запасов потребителя i имеет вид $\omega_i = (\omega_{1i}, \omega_{2i})$. Совокупный первоначальный запас блага l в экономике обозначим через $\bar{\omega}_l = \omega_{l1} + \omega_{l2}$; будем считать, что эта величина строго положительна для обоих благ.

Распределение $x \in \mathbb{R}^4_+$ в данной экономике представляет собой набор неотрицательных потребительских векторов всех потребителей: $x = (x_1, x_2) = ((x_{11}, x_{21}), (x_{12}, x_{22}))$. Будем говорить, что распределение *допустимо* в данной экономике, если

$$x_{l1} + x_{l2} \leq \bar{\omega}_l \text{ для всех } l = 1, 2, \qquad (15.B.1)$$

т. е. если совокупное потребление каждого товара не превышает агрегированного запаса этого товара в экономике (заметим, что в данном определении допустимости неявно предполагается, что имеет место свобода расходования товаров).

Допустимые распределения, для которых соотношение (15.B.1) выполняется как равенство, можно назвать также *безотходными*. Безотходные

[1] Можно было бы также считать, что каждый потребитель (возможно, его лучше называть *типом потребителя*) — это не отдельный индивид, а целая большая группа идентичных потребителей. Тогда предпосылка о том, что потребители выступают ценополучателями, представляется более разумной, и в случае когда потребителей обоих типов одинаковое число, анализ, представленный в данном разделе, не претерпит изменений.

допустимые распределения можно изобразить с помощью *ящика Эджворта*, представленного на рис. 15.В.1. В ящике Эджворта у потребителя 1 обычные оси, с началом координат в левом нижнем (юго-западном) углу. А для потребителя 2, наоборот, началом координат является верхний правый (северо-восточный) угол. Для обоих потребителей по вертикальной оси откладывается количество блага 2, а по горизонтальной — количество блага 1. По длине ящик Эджворта имеет размер, равный $\bar{\omega}_1$, совокупному запасу блага 1 в экономике; а по высоте — $\bar{\omega}_2$, совокупному запасу блага 2 в экономике. Любой точке ящика соответствует (безотходное) разделение совокупного запаса между потребителями 1 и 2. Например, на рис. 15.В.1 изображен вектор первоначального запаса $\omega = ((\omega_{11}, \omega_{21}), (\omega_{12}, \omega_{22}))$ обоих потребителей, а также другое возможное безотходное распределение $x = ((x_{11}, x_{21}), (x_{12}, x_{22}))$; (тот факт, что данное распределение является безотходным, означает, что $(x_{12}, x_{22}) = (\bar{\omega}_1 - x_{11}, \bar{\omega}_2 - x_{21})$.

Одна из особенностей теории общего равновесия состоит в том, что богатство потребителей не задано экзогенно: при любых ценах $p = (p_1, p_2)$ богатство потребителя i равно рыночной стоимости его первоначального запаса товаров, $p \cdot \omega_i = p_1\omega_{1i} + p_2\omega_{2i}$. Таким образом, уровень богатства определяется уровнем цен. Следовательно, при данном векторе первоначального запаса потребителя ω_i его бюджетное множество можно рассматривать только как функцию от цен:

$$B_i(p) = \left\{x_i \in \mathbb{R}^2_+ : p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i\right\}.$$

Бюджетные множества двух потребителей довольно просто изобразить в ящике Эджворта. Для этого мы рисуем линию, известную как *бюджетная линия*, которая проходит через точку первоначального запаса ω с наклоном $-(p_1/p_2)$, как показано на рис. 15.В.2. Бюджетное множество потребителя 1 состоит из всех неотрицательных векторов, лежащих ниже бюджетной линии слева (затемненная область на рисунке). Бюджетное множество потребителя 2, с другой стороны, состоит из всех векторов, лежащих выше

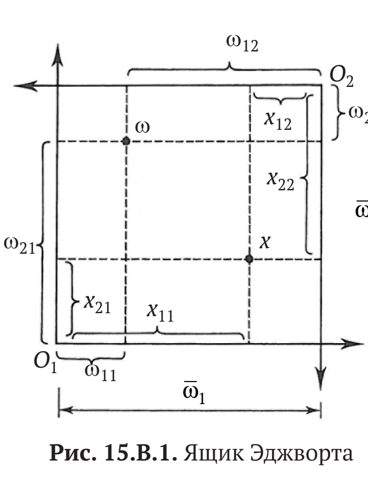


Рис. 15.В.1. Ящик Эджворта

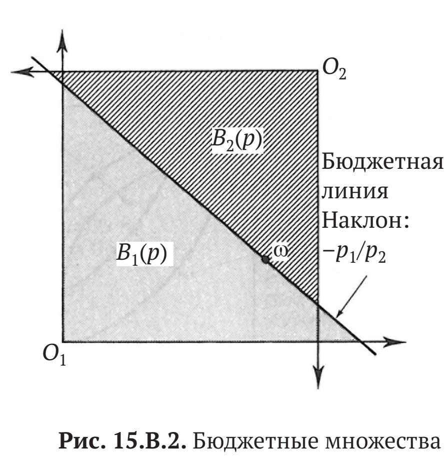


Рис. 15.В.2. Бюджетные множества

этой же бюджетной линии справа, что дает потребителю 2 неотрицательный уровень потребления (заштрихованная область на рисунке)[2]. Заметим, что только распределения, лежащие на бюджетной линии, являются допустимыми для обоих потребителей одновременно при ценах (p_1, p_2)[3].

В ящике Эджворта мы также можем изобразить предпочтения $\succsim_i$ каждого потребителя i, как показано на рис. 15.B.3. Если не сказано обратное, то будем считать, что предпочтения $\succsim_i$ строго выпуклы, непрерывны и строго монотонны (см. обсуждение этих условий в разделах 3.B и 3.C).

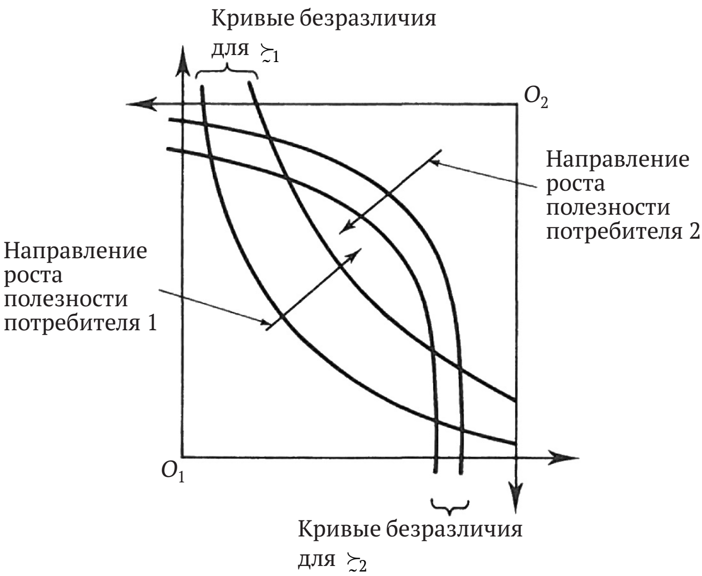


Рис. 15.B.3. Предпочтения в ящике Эджворта

На рис. 15.B.4 показано, как определить потребительский вектор, на который предъявляет спрос потребитель 1 при любых ценах p. При данных ценах p потребитель выбирает наиболее предпочтительный набор в множестве $B_1(p)$, который может быть описан с помощью функции спроса потребителя как $x_1(p, p \cdot \omega_1)$ (это та же функция спроса, которую мы изучали в главах 2–4, но только здесь богатство потребителя составляет $w_1 = p \cdot \omega_1$). Как видно из рис. 15.B.5, изменение вектора цен p приводит к повороту бюджетной линии вокруг точки первоначального запаса ω, и множество потребительских наборов, на которые предъявляется спрос при разных ценах, представляет собой кривую, обозначенную через OC_1, кото-

[2] Обратите внимание, что бюджетные множества потребителей могут выходить за рамки ящика.

[3] Существуют и другие допустимые распределения, которые одновременно доступны потребителям, но в этих распределениях некоторые ресурсы не потребляются ни одним из потребителей и поэтому их невозможно изобразить в ящике Эджворта. Поскольку мы будем считать, что предпочтения являются локально ненасыщаемыми, то такие распределения не будут нас интересовать.

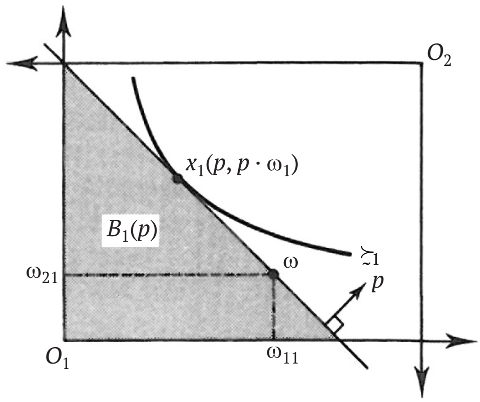


Рис. 15.B.4. Оптимальный набор для потребителя 1 при ценах p

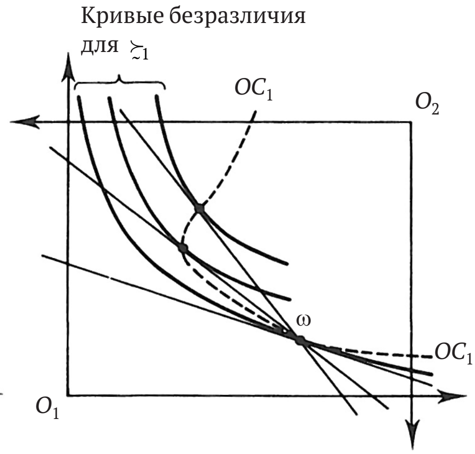


Рис. 15.B.5. Кривая *цена — потребление* потребителя 1

рая называется кривой *цена — потребление* потребителя 1. Обратите внимание, что эта кривая проходит через точку первоначального запаса: поскольку при любом векторе цен p вектор первоначального запаса $\omega_1 = (\omega_{11}, \omega_{21})$ доступен потребителю 1, то отсюда следует, что для потребителя любая точка на кривой цена — потребление по крайней мере не хуже, чем его точка первоначального запаса. Это означает, что кривая *цена — потребление* лежит в верхнем лебеговском множестве точки ω_1, и если кривые безразличия гладкие, то кривая *цена — потребление* должна касаться кривой безразличия потребителя в точке первоначального запаса.

На рис. 15.B.6 представлены наборы, на которые предъявляют спрос оба потребителя при некотором произвольном векторе цен p. Заметим, что в данном случае спрос потребителей не согласован. Совокупный спрос на благо 2 превышает совокупное предложение этого блага в экономике, $\bar{\omega}_2$, тогда как совокупный спрос на благо 1 строго меньше, чем запас блага 1, $\bar{\omega}_1$.

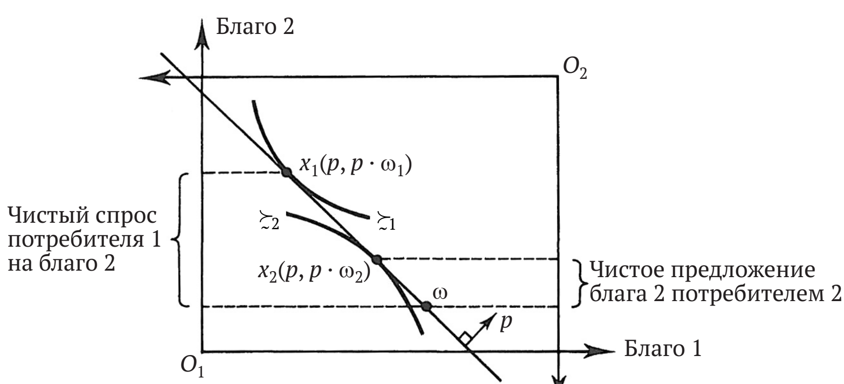


Рис. 15.B.6. Вектор цен, при котором наблюдается избыточный спрос на благо 2 и избыточное предложение блага 1

С другой стороны, можно заметить, что потребитель 1 является *чистым покупателем* (потребителем) блага 2 в том смысле, что он желает потребить это благо в количестве, превышающем имеющийся у него запас. Тогда как потребитель 2 выступает *чистым продавцом* (поставщиком) этого блага (он предъявляет спрос на это благо в количестве меньше имеющегося у него запаса данного блага), но при этом не готов предоставить это благо в количестве, достаточном для удовлетворения потребностей потребителя 1. Таким образом, в ситуации, изображенной на рисунке, наблюдается *избыточный спрос* на благо 2 и, наоборот, *избыточное предложение* блага 1.

В рыночном равновесии, где потребители принимают цены заданными, рынки должны быть сбалансированы. Другими словами, потребители должны иметь возможность приобрести и продать товары в желаемом объеме при действующих рыночных ценах. Таким образом, если один потребитель выступает *чистым покупателем* некоторого блага, то другой должен быть *чистым продавцом* этого блага, причем ровно в том же объеме, т. е. спрос должен быть равен предложению. Итак, мы приходим к концепции равновесия, сформулированной в определении 15.B.1.

Определение 15.B.1. *Вальрасианское (или конкурентное) равновесие* в экономике с двумя потребителями и двумя благами (описываемой ящиком Эджворта) представляет собой вектор цен p^* и распределение $x^* = (x_1^*, x_2^*)$, лежащее в ящике Эджворта, такие что для любого потребителя $i = 1, 2$

$$x_i^* \succsim_i x_i' \text{ для всех } x_i' \in B_i(p^*).$$

Вальрасианское равновесие проиллюстрировано на рис. 15.B.7. На рис. 15.B.7(a) отмечены равновесный вектор цен p^* и равновесное распре-

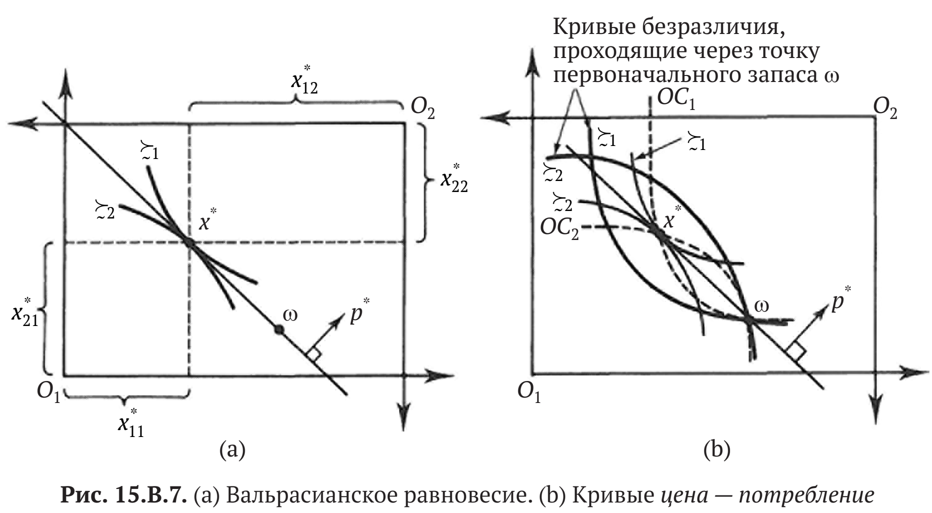


Рис. 15.B.7. (a) Вальрасианское равновесие. (b) Кривые *цена — потребление* потребителей пересекаются в равновесной точке

деление $x^* = (x_1^*, x_2^*)$. Набор, на который предъявляет спрос каждый потребитель i при векторе цен p^* — это набор x_i^*, и чистый спрос одного потребителя на благо в точности равен чистому предложению этого же блага другим потребителем. На рис. 15.B.7(b) представлены также кривые *цена — потребление* для обоих потребителей и их кривые безразличия, проходящие через точку первоначального запаса ω. Обратите внимание, что в любом равновесии кривые цена — потребление данных потребителей должны пересекаться. Действительно, *любое* пересечение кривых цена — потребление в распределении, отличном от точки первоначального запаса ω, соответствует равновесию, поскольку если $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ — это точка пересечения кривых цена — потребление, то x_i^* — оптимальный потребительский набор для каждого потребителя i при бюджетной линии, проходящей через точки ω и x^*.

На рис. 15.B.8 изображено вальрасианское равновесие, где равновесное распределение лежит на границе ящика Эджворта, и здесь опять-таки при равновесном векторе цен p^* спрос потребителей уравновешен.

Заметим, что спрос каждого потребителя однороден нулевой степени по ценам $p = (p_1, p_2)$. Таким образом, если цены удвоятся, то богатство потребителя также возрастет вдвое, а значит, бюджетное множество останется неизменным. Тогда, как видно из определения 15.B.1, если $p^* = (p_1^*, p_2^*)$ — равновесный вектор цен, то вектор цен $\alpha p^* = \left(\alpha p_1^*, \alpha p_2^*\right)$ также будет равновесным при любом $\alpha > 0$. Это означает, что в равновесии можно определить только *относительные* цены p_1^*/p_2^*.

Пример 15.B.1. Пусть каждый потребитель i имеет функцию полезности Кобба — Дугласа вида $u_i(x_{1i}, x_{2i}) = x_{1i}^{\alpha} x_{2i}^{1-\alpha}$, а первоначальные запасы потребителей описываются векторами $\omega_1 = (1, 2)$ и $\omega_2 = (2, 1)$. При векторе цен $p = (p_1, p_2)$ богатство

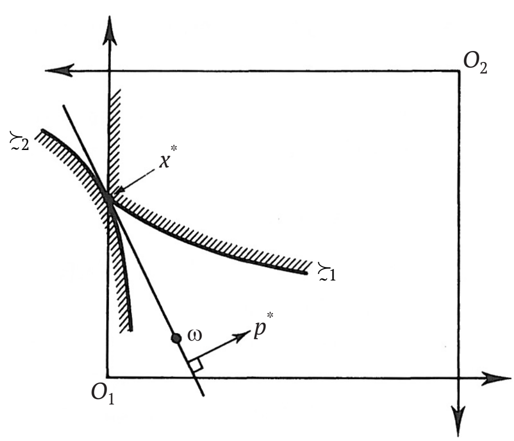


Рис. 15.B.8. Равновесное распределение на границе ящика Эджворта

потребителя 1 равно ($p_1 + 2p_2$) и, следовательно, его спрос описывается кривой цена — потребление (см. пример 3.D.1):

$$OC_1(p) = \left(\frac{\alpha(p_1 + 2p_2)}{p_1},\ \frac{(1-\alpha)(p_1 + 2p_2)}{p_2}\right).$$

Как нетрудно заметить, спрос на первое и второе благо соответственно убывает и возрастает по p_1. Учитывая это, мы и изобразили кривую OC_1 на рис. 15.B.7(b). Аналогично $OC_2(p) = (\alpha(2p_1 + p_2)/p_1,\ (1-\alpha)(2p_1 + p_2)/p_2)$. Для того чтобы найти цены в вальрасианском равновесии, заметим, что при данных ценах совокупный объем потребления блага 1 обоими потребителями должен быть равен 3 ($= \omega_{11} + \omega_{12}$). Таким образом,

$$\frac{\alpha(p_1^* + 2p_2^*)}{p_1^*} + \frac{\alpha(2p_1^* + p_2^*)}{p_1^*} = 3.$$

Решая это уравнение, получаем

$$\frac{p_1^*}{p_2^*} = \frac{\alpha}{1-\alpha}. \tag{15.B.2}$$

Обратите внимание, что при любых ценах ($p_1^*,\ p_2^*$), удовлетворяющих условию (15.B.2), рынок блага 2 также будет уравновешен (убедитесь в этом). Это особенность экономики, представимой ящиком Эджворта: для определения равновесных цен нам необходимо только найти такие цены, при которых сбалансирован один из рынков — другой рынок также будет с необходимостью сбалансирован при этих ценах. Этот факт можно проиллюстрировать в ящике Эджворта: поскольку наборы, на которые предъявляют спрос оба потребителя, лежат на одной бюджетной линии, то, если достигнуто равенство спроса и предложения на рынке товара 1, также будет уравновешен и рынок блага 2. (См. также упражнение 15.B.1.) ■

Ящик Эджворта, несмотря на свою простоту, представляет собой очень мощный инструмент анализа. Практически не найти таких ситуаций или свойств общего равновесия в экономике обмена, которые нельзя было бы проиллюстрировать с его помощью. Рассмотрим, например, вопрос о единственности вальрасианского равновесия. Как мы видели в главе 10, если существует благо-измеритель, относительно которого предпочтения являются квазилинейными, то (при строгой выпуклости предпочтений) равновесное распределение и относительные цены определяются единственным образом. На рис. 15.B.7 равновесие также единственно (см. более подробное обсуждение в упражнении 15.B.2). Однако, как показано на рис. 15.B.9, в ящике Эджворта можно проиллюстрировать и множественность рав-

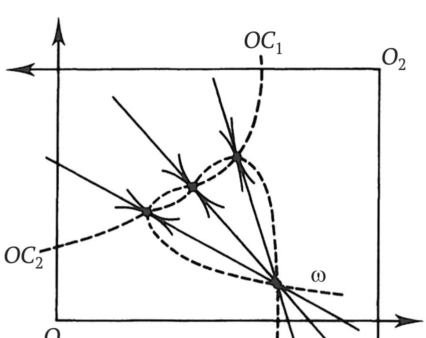


Рис. 15.B.9. Множественность вальрасианских равновесий

новесий. На этом рисунке предпочтения (довольно обычные) таковы, что кривые цена — потребление меняют кривизну и пересекаются несколько раз. В частности, они пересекаются при отношении цен p_1/p_2, равном $^1/_2$, 1 и 2. Для полноты картины мы приводим аналитический пример ситуации, представленной на этом рисунке.

Пример 15.B.2. Пусть функции полезности потребителей имеют вид

$$u_1(x_{11},\ x_{21}) = x_{11} - \frac{1}{8}x_{21}^{-8} \text{ и } u_2(x_{12},\ x_{22}) = -\frac{1}{8}x_{12}^{-8} + x_{22}.$$

Заметим, что функции полезностей потребителей квазилинейны (что, в частности, облегчает вычисление спроса), но по разным благам. Пусть первоначальные запасы потребителей описываются векторами $\omega_1 = (2,\ r)$ и $\omega_2 = (r,\ 2)$, где параметр r выбирается так, чтобы равновесные цены оказались круглыми числами, а именно положим: $r = 2^{8/9} - 2^{1/9} > 0$. В упражнении 15.B.5 вас просят получить кривые цена — потребление для обоих потребителей и убедиться, что они будут иметь следующий вид:

$$OC_1(p_1,\ p_2) = \left(2 + r\left(\frac{p_2}{p_1}\right) - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{8/9},\ \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-1/9}\right) >> 0$$

и

$$OC_2(p_1,\ p_2) = \left(\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{-1/9},\ 2 + r\left(\frac{p_1}{p_2}\right) - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{8/9}\right) >> 0.$$

Обратите внимание, что, как показано на рис. 15.B.9, в отличие от примера 15.B.1, спрос потребителя 1 на благо 1 (и симметрично для потребителя 2) может возрастать по p_1.

Для вычисления равновесия достаточно решить уравнение, где совокупный спрос на второе благо приравнивается его совокупному предложению, т. е.

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-1/9} + 2 + r\left(\frac{p_1}{p_2}\right) - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{8/9} = 2 + r.$$

Тогда при заданном значении r это уравнение имеет три решения относительно p_1/p_2: 2, 1 и $^1/_2$ (убедитесь в этом). ■

Возможно также, что в экономике чистого обмена не существует *ни одного* равновесия по Вальрасу. Например, на рис. 15.B.10(a) изображена ситуация, когда точка первоначального запаса лежит на границе ящика Эджворта (в левом верхнем (или северо-западном) углу). В этой точке потребитель 2 обладает всем запасом блага 1 и желает потреблять только благо 1. Потребитель 1 имеет весь запас блага 2, и его кривая безразличия, проходящая через точку ω_1, $\left\{x_1 \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 \sim_1 \omega_1\right\}$, имеет бесконечный наклон в этой точке (следует заметить, однако, что в точке ω_1 потребитель 1 строго предпочитает получить больше блага 1). В этой ситуации не существует вектора цен p^*, уравновешивающего спрос и предложение. Если $p_2/p_1 > 0$, то для потребителя 2 оптимально остаться в точке первоначального запаса ω_2, тогда как точка первоначального запаса ω_1 не является оптималь-

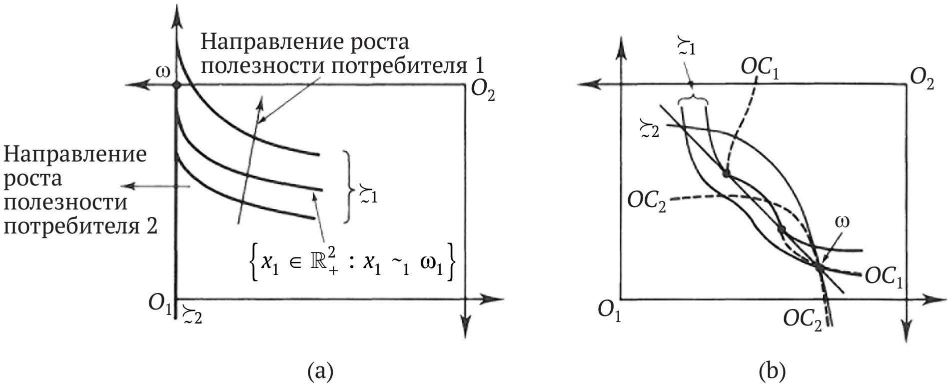


Рис. 15.B.10 (a) и (b). Два примера, когда вальрасианского равновесия не существует

ным набором для потребителя 1 (независимо от того, насколько велика относительная цена первого блага, потребитель 1 всегда предпочитает иметь его в положительном количестве). С другой стороны, спрос потребителя 1 на благо 2 при ценах $p_2/p_1 = 0$ бесконечно велик. Заметим (нам это пригодится в дальнейшем), что предпочтения потребителя 2 в данном примере не являются строго монотонными.

На рис. 15.B.10(b) изображен еще один пример ситуации, когда равновесия не существует. Здесь предпочтения потребителя 1 не являются выпуклыми. В результате кривая цена — потребление потребителя 1 терпит разрыв, и поэтому не существует точек пересечения кривых цена — потребление (кроме точки первоначального запаса, которая не является равновесным распределением в этом примере).

В главе 17 мы рассмотрим условия, выполнение которых гарантирует существование равновесия по Вальрасу.

Равновесие по Вальрасу и благосостояние

В экономической теории центральное место занимает вопрос о том, каковы свойства равновесия с точки зрения благосостояния потребителей. В этом разделе мы сосредоточим свое внимание на концепции Парето-оптимальности, с которой уже сталкивались в главе 10 (см., в частности, раздел 10.B). Экономический исход называется Парето-оптимальным (или Парето-эффективным), если не существует альтернативного допустимого исхода, который для каждого индивида в данной экономике по крайней мере не хуже и хотя бы для одного индивида строго лучше. В определении 15.B.2 эта идея сформулирована для случая экономики чистого обмена с двумя потребителями.

Определение 15.B.2. Распределение x в ящике Эджворта Парето-оптимально (или Парето-эффективно), если не существует другого распределения x' в ящике Эджворта, такого что $x_i' \succsim_i x_i$ для $i = 1, 2$ и $x_i' \succ_i x_i$ для некоторого i.

На рис. 15.B.11(a) изображено распределение x, которое не является Парето-оптимальным. Любое распределение внутри заштрихованной области на рисунке, являющейся пересечением множеств $\left\{x_1' \in \mathbb{R}_+^2 : x_1' \succsim_1 x_1\right\}$ и $\left\{x_2' \in \mathbb{R}_+^2 : x_2' \succsim_2 x_2\right\}$ в ящике Эджворта, представляет собой допустимое распределение, позволяющее обоим потребителям улучшить свое положение по сравнению с x. Тогда как распределение x, представленное на рис. 15.B.11(b), Парето-оптимально, поскольку в этом случае пересечение множеств $\left\{x_i' \in \mathbb{R}_+^2 : x_i' \succsim_i x_i\right\}$ при $i = 1, 2$, состоит только из точки x. Заметим, что для внутреннего Парето-оптимального распределения x в ящике Эджворта кривые безразличия потребителей, проходящие через эту точку, должны касаться друг друга (в случае гладких кривых). На рис. 15.B.11(c) проиллюстрировано Парето-оптимальное распределение x, которое не является внутренним; в такой точке условие касания кривых безразличия может быть не выполнено.

Множество всех Парето-оптимальных распределений называется *множеством Парето*. Пример такого множества представлен на рис. 15.B.12. На этом рисунке также отмечена *контрактная кривая* — часть множества

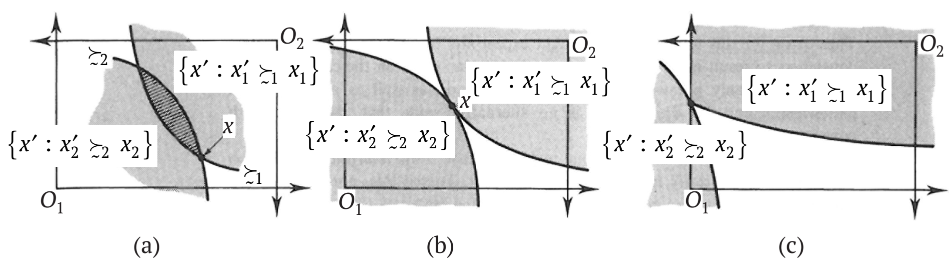


Рис. 15.B.11. (a) Распределение x не является Парето-оптимальным. (b) Распределение x Парето-оптимально. (c) Распределение x Парето-оптимально

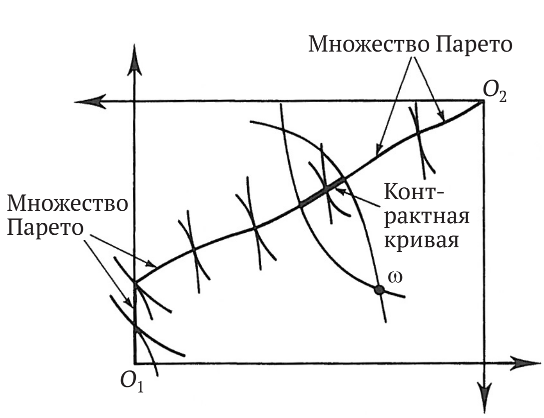


Рис. 15.B.12. Множество Парето и контрактная кривая

Парето, где положение обоих потребителей по крайней мере не хуже, чем в точке их первоначального запаса. Введение термина связано с ожиданием, что исходом торгов будет такая сделка между потребителями, которая соответствует некоторой точке на контрактной кривой: только в этих точках положение обоих потребителей не хуже, чем в точке первоначального запаса, и нет такой альтернативы этим распределениям, в которых положение обоих потребителей в результате торговли могло бы улучшиться.

Теперь убедимся в справедливости простого, но крайне важного факта: *любое вальрасианское равновесное распределение* x^* *обязательно принадлежит множеству Парето*. Действительно, по определению равновесия по Вальрасу бюджетная линия разделяет два множества «по крайней мере не хуже чем», соответствующие равновесному распределению, как показано на рис. 15.B.7(a) и 15.B.8. Единственной общей точкой этих множеств является сама точка x^*. Таким образом, в любом конкурентном равновесном распределении x^* не существует альтернативного допустимого распределения, такого что можно было бы улучшить положение одного потребителя, не ухудшая положения другого. Вывод о том, что равновесные распределения Парето-оптимальны, составляет суть *первой фундаментальной теоремы экономики благосостояния*, и этот результат, как мы увидим далее в главе 16, характеризуется высокой степенью общности. Более того, следует отметить, что поскольку каждому потребителю в вальрасианском равновесии должно быть по крайней мере не хуже, чем если бы он просто потреблял свой первоначальный запас, то любое вальрасианское равновесие лежит на участке множества Парето, соответствующем контрактной кривой.

Первая фундаментальная теорема благосостояния представляет собой для конкурентных рыночных экономик формальное выражение «невидимой руки» Адама Смита. В рамках совершенно конкурентных условий любое равновесное распределение Парето-оптимально, и единственным возможным оправданием вмешательства в экономику с точки зрения благосостояния можно считать достижение дистрибутивных целей.

Вторая фундаментальная теорема экономики благосостояния, которая также подробно будет рассмотрена в главе 16, представляет собой (отчасти) обратный результат. Грубо говоря, она гласит, что *при условии выпуклости предпочтений (которое не требуется в первой теореме благосостояния) планировщик может достичь желаемого Парето-оптимального распределения путем соответствующего перераспределения богатства с помощью паушальных налогов/субсидий, а потом «позволить рынку работать»*. Таким образом, вторая теорема благосостояния дает теоретическое обоснование использования конкурентных рыночных механизмов для достижения дистрибутивных целей.

В определении 15.B.3 приведена формулировка концепции равновесия с паушальным перераспределением богатства.

Определение 15.B.3. Распределение x^* в ящике Эджворта можно реализовать как равновесное в экономике с трансфертами, если существуют такая система цен p^* и денежные трансферты T_1 и T_2, удовлетворяющие условию $T_1 + T_2 = 0$, что для каждого потребителя i выполнено:

$$x_i^* \succsim_i x_i' \text{ для всех } x_i' \in \mathbb{R}_+^2, \text{ таких что } p^* \cdot x_i' \leq p^* \cdot \omega_i + T_i.$$

Обратите внимание, что по определению 15.B.3 сумма трансфертов должна быть равна нулю, т. е. планировщик получает сбалансированный бюджет, просто перераспределив богатство между потребителями.

Вооружившись определением 15.B.3, мы можем привести более формальный вариант второй теоремы благосостояния: если предпочтения потребителей в ящике Эджворта непрерывны, выпуклы и строго монотонны, то *любое Парето-оптимальное распределение можно реализовать как равновесное в экономике с трансфертами*. Этот результат проиллюстрирован на рис. 15.B.13(a), где через ω обозначена точка первоначальных запасов потребителей. Предположим, что по дистрибутивным причинам общество хотело бы реализовать Парето-оптимальное распределение x^*. Тогда, если принципал установит такие денежные трансферты для потребителей, которые сдвинут бюджетную линию в положение, отмеченное на рисунке, то при векторе цен p^* рынки двух данных благ будут уравновешены и равновесным будет распределение x^*.

Следует отметить, что того же результата, который дают денежные трансферты, можно добиться с помощью непосредственного перераспределения первоначального запаса. Как показано на рис. 15.B.3(b), при трансферте в виде блага 1, смещающем вектор первоначального запаса в точку ω', распределение x^* также будет равновесным при ценах p^*. Аналогично можно добиться желаемого исхода при трансферте в виде блага 2, приводящем к изменению первоначального запаса до ω''. В действитель-

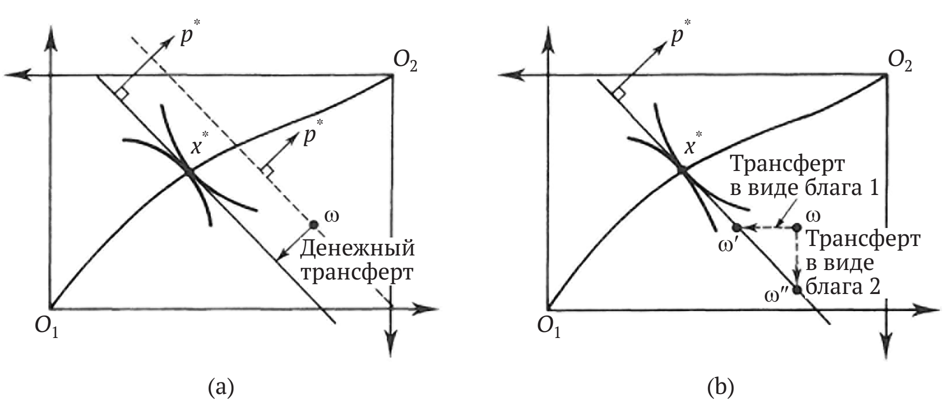


Рис. 15.B.13. Вторая фундаментальная теорема благосостояния.
(a) Применение денежных трансфертов. (b) Применение трансфертов в виде перераспределения первоначального запаса

ности, если бы все товары можно было легко перераспределить между потребителями, то мы с тем же успехом могли бы сместить первоначальный запас непосредственно в точку x^*. Тогда при таком новом первоначальном запасе в вальрасианском равновесии торговля отсутствует[4].

Рис. 15.B.14 иллюстрирует ситуацию, когда вторая теорема благосостояния не работает при невыпуклых предпочтениях. На рисунке Парето-оптимальное распределение $x^* = \left(x_1^*,\ x_2^*\right)$ нельзя реализовать как равновесное в экономике с трансфертами. При такой бюджетной линии, когда потребитель 2 выбирает набор x_2^*, потребитель 1 предпочитает набор, отличный от x_1^* (такой как x_1'). Как оказывается, выпуклость предпочтений — решающая предпосылка второй теоремы благосостояния.

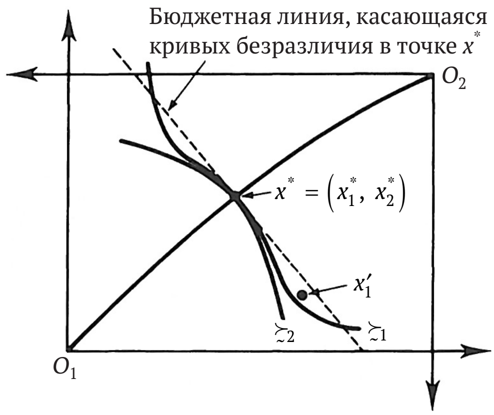


Рис. 15.B.14. Вторая теорема благосостояния при невыпуклых предпочтениях не выполнена

Невыполнение второй теоремы благосостояния в силу других обстоятельств проиллюстрировано на рис. 15.B.10(a). Здесь точка первоначального запаса ω представляет собой Парето-оптимальное распределение, но это распределение нельзя реализовать как равновесное в экономике с трансфертами (убедитесь в этом). В данном случае нарушена предпосылка о строгой монотонности предпочтений потребителей.

Другие примеры экономик обмена в ящике Эджворта можно найти в работе (Newman, 1965).

[4] На практике, однако, перераспределить первоначальные запасы довольно сложно (например, если речь идет о человеческом капитале), и поэтому гораздо важнее возможность осуществления денежных трансфертов (или трансфертов в виде только ограниченного числа товаров). Следует заметить, что такое перераспределение первоначальных запасов, которое непосредственно приводит к желаемому Парето-оптимальному распределению, обладает одной привлекательной особенностью: в этом случае мы можем гарантировать, что x^* — *единственное* равновесное распределение после осуществления трансфертов (вообще говоря, для этого требуется строгая выпуклость предпочтений).

15.С. Экономика с одним потребителем и одним производителем

Теперь включим в модель производство. Для того чтобы сделать это наиболее простым из возможных способов, предположим, что в экономике имеются два экономических агента, принимающие цены заданными, — один потребитель и одна фирма, — и будем считать, что в экономике имеется два блага: труд (или досуг) потребителя и потребительское благо, производимое фирмой[5].

Потребитель имеет непрерывные, выпуклые и строго монотонные предпочтения $\succsim$, определенные на наборах, состоящих из объемов досуга x_1 и потребительского блага x_2. Будем считать, что потребитель имеет первоначальный запас из $\bar{L}$ единиц досуга (например, 24 часа в день) и не имеет запаса потребительского блага.

Фирма использует труд для производства потребительского блага в соответствии с возрастающей строго вогнутой производственной функцией $f(z)$, где z — объем использования фирмой труда как фактора производства. Таким образом, для производства готовой продукции фирма должна нанять потребителя, эффективно приобретая некоторый объем потребительского досуга. Будем считать, что фирма руководствуется максимизацией прибыли, принимая рыночные цены заданными. Обозначим через p цену готовой продукции фирмы, а через w — цену единицы труда, тогда задача фирмы примет вид

$$\max_{z \ge 0} pf(z) - wz. \tag{15.B.1}$$

При ценах (p, w) спрос фирмы на труд составляет $z(p, w)$, выпуск — $q(p, w)$, прибыль — $\pi(p, w)$.

Как мы уже отмечали в главе 5, фирмой владеют потребители. Таким образом, мы предполагаем, что в данном случае рассматриваемый потребитель является единственным собственником фирмы и получает всю ее прибыль $\pi(p, w)$. Как и предпосылка об агентах-ценополучателях, предположение о том, что потребитель нанимается на работу в свою собственную фирму на анонимном рынке труда, может показаться странным в данной модели с двумя агентами. Однако придется с ним смириться: в этом разделе мы рассматриваем наиболее простой из возможных случаев, чтобы на нем проиллюстрировать, как работают более сложные модели общего равновесия с большим числом потребителей[6].

Пусть предпочтения $\succsim$ потребителя представимы функцией полезности $u(x_1, x_2)$, тогда задача потребителя при ценах (p, w) имеет вид

$$\begin{gathered} \max_{(x_1, x_2) \in R^2_+} u(x_1, x_2) \\ \text{при } px_2 \le w(\bar{L} - x_1) + \pi(p,\ w). \end{gathered} \tag{15.C.2}$$

[5] Экономику с одним потребителем иногда называют *экономикой Робинзона Крузо*.

[6] Повторим здесь замечание, сделанное в сноске 1: можно считать, что под фирмой и потребителем в действительности понимается большое число идентичных фирм и потребителей. В конце данного раздела мы еще вернемся к этой интерпретации.

Бюджетное ограничение в задаче (15.C.2) отражает тот факт, что у потребителя имеется два источника дохода: если потребитель предлагает $(\bar{L} - x_1)$ единиц труда при ценах (p, w), то на потребительское благо он может потратить то, что заработает, $w(\bar{L} - x_1)$, плюс прибыль, полученную от фирмы, $\pi(p, w)$. Спрос потребителя, являющийся решением задачи (15.C.2) при ценах (p, w), обозначим через $(x_1(p, w), x_2(p, w))$.

В вальрасианском равновесии при векторе цен (p^*, w^*) рынки потребительского блага и труда уравновешены, т. е. выполнены условия

$$x_2(p^*, w^*) = q(p^*, w^*) \tag{15.C.3}$$

и

$$z(p^*, w^*) = \bar{L} - x_1(p^*, w^*). \tag{15.C.4}$$

На рис. 15.C.1 проиллюстрировано, как работает рассматриваемая экономика с одним потребителем и одной фирмой. На рис. 15.C.1(a) приведена графическая иллюстрация задачи фирмы. Как и в главе 5, мы откладываем объем используемого фирмой труда по горизонтальной оси при отрицательных объемах, а выпуск — по вертикальной оси. Изображено также производственное множество, соответствующее производственной функции $f(z)$, и отмечены оптимальный уровень выпуска и объем использования труда, доставляющие максимум прибыли при ценах (p, w): $z(p, w)$ и $q(p, w)$ соответственно.

На рис. 15.C.1(b) к рисунку из пункта (a) добавлена иллюстрация решения задачи потребителя. Досуг и объем потребительского блага откладываются от начала координат O_c в нижнем левом углу рисунка, который определяется так, чтобы длина отрезка $[O_c, O_f]$ была равна $\bar{L}$, совокупному запасу труда. На рисунке изображено (затемненная область) бюджетное множество потребителя при ценах (p, w) и прибыли $\pi(p, w)$. Заметим, что если индивид потребляет $\bar{L}$ единиц досуга, то, поскольку он не продает труд, он может позволить себе приобрести $\pi(p, w)/p$ единиц потребительского блага. Таким образом, бюджетная линия должна пересекать верти-

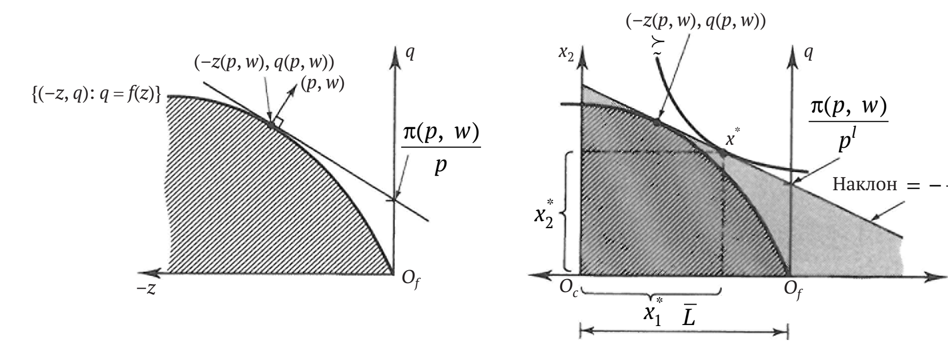


Рис. 15.C.1. (a) Задача фирмы. (b) Задача потребителя

кальную q-ось в точке $\pi(p, w)/p$. За каждую проданную единицу труда потребитель получает w и, значит, может позволить себе приобрести w/p единиц блага x_2. Следовательно, бюджетная линия имеет наклон $-(w/p)$. Обратите внимание, что бюджетная линия потребителя совпадает с изопрофитой фирмы, соответствующей решению задачи максимизации прибыли, проиллюстрированной на рис. 15.C.1(a), т. е. представляет собой множество точек $\{(-z, q)\colon pq - wz = \pi(p, w)\}$, дающих прибыль $\pi(p, w)$.

Цены, отмеченные на рис. 15.C.1(b), не являются равновесными, поскольку при этих ценах имеет место избыточный спрос на труд (фирма хотела бы приобрести больший объем труда, чем готов предложить потребитель) и избыточное предложение потребительского блага. Равновесный вектор цен (p^*, w^*), при котором рынки обоих благ сбалансированы, изображен на рис. 15.C.2.

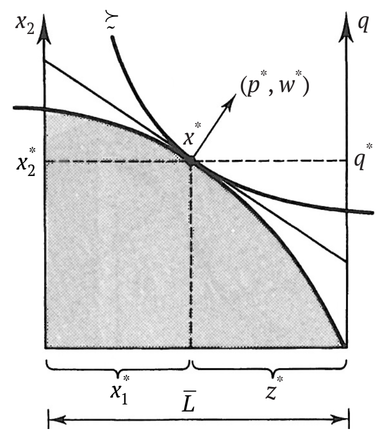


Рис. 15.C.2. Вальрасианское равновесие

Следует отметить очень важный факт, проиллюстрированный на рис. 15.C.2: *некоторая комбинация потребления и досуга может быть равновесной тогда и только тогда, когда она доставляет максимум полезности потребителя при технологических ограничениях и ограничениях на первоначальные запасы для данной экономики*. Другими словами, равновесное распределение — это то же распределение, которое было бы получено, если бы экономикой управлял планировщик, руководствующийся максимизацией благосостояния потребителя. Таким образом, здесь справедливы фундаментальные теоремы экономики благосостояния: любое равновесное по Вальрасу распределение Парето-оптимально и Парето-оптимальное распределение можно реализовать как вальрасианское равновесие[7].

Важность предпосылки о выпуклости технологии для второй теоремы благосостояния проиллюстрирована на рис. 15.C.3(a). На этом рисунке распределение x^* доставляет максимум благосостояния потребителя, но при единственном соотношении цен, при котором набор x^* максимизирует полезность потребителя, фирма не получает даже локального максимума прибыли (т. е. при отношении цен w/p сколь угодно близко к точке x^* существуют такие производственные векторы, которые дают фирме боль-

[7] В экономике с одним потребителем поиск Парето-оптимальных распределений сводится к ответу на вопрос, достигнут ли максимум благосостояния потребителя (при ограничениях допустимости). Заметим, что при принятых предпосылках о выпуклости предпочтений и строгой выпуклости агрегированного производственного множества существует единственный Парето-оптимальный потребительский вектор (и, следовательно, равновесие также единственно).

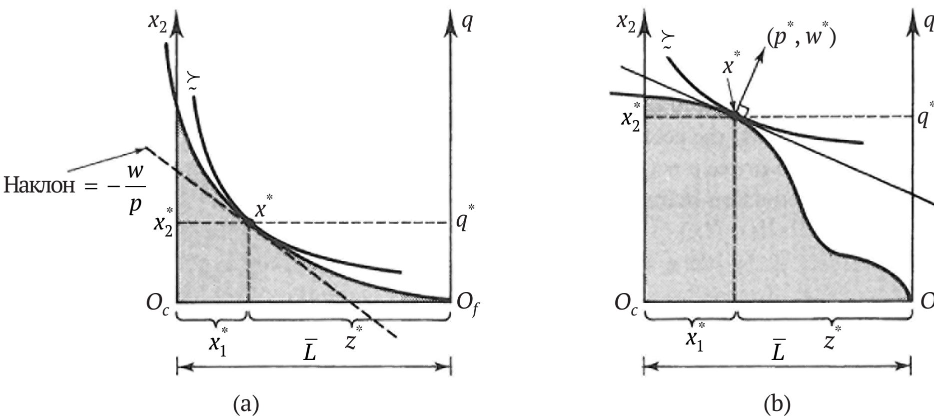


Рис. 15.С.3. (a) Нарушение второй теоремы благосостояния в случае невыпуклой технологии. (b) Первая теорема благосостояния работает даже в случае невыпуклой технологии

шую прибыль). А первая теорема благосостояния, напротив, остается верна даже в случае невыпуклой технологии. Как показано на рис. 15.С.3(b), любое равновесное распределение дает максимальный уровень благосостояния потребителя на допустимом производственном множестве.

При определенных обстоятельствах можно строго обосновать, что модель, исследуемая в данном разделе, представляет собой исход экономики более общего вида, если «фирму» рассматривать как репрезентативного производителя (см. раздел 5.E), а «потребителя» — как репрезентативного потребителя (см. раздел 4.D). Первое возможно всегда, а второе (т. е. существование н-репрезентативного потребителя) требует наложения жестких ограничений. Однако если экономика состоит из многих потребителей с одинаковыми вогнутыми функциями полезности и одинаковыми первоначальными запасами и если общество имеет строго вогнутую функцию общественного благосостояния, в которой данные потребители учтены симметрично, то н-репрезентативный потребитель существует, причем он имеет такую же функцию полезности, как и отдельные потребители, определенную на уровнях потребления в расчете на душу населения[8]. (Мы также можем рассматривать выбор объемов факторов производства и выпуска репрезентативной фирмой в расчете на душу населения.) Подробнее о более общих условиях существования репрезентативного потребителя см. раздел 4.D.

15.D. Модель с производством 2×2

В этом разделе мы рассмотрим пример, иллюстрирующий влияние общего равновесия на производство.

Для начала рассмотрим экономику, в которой производственный сектор состоит из J фирм. Каждая фирма j производит потребительское благо

[8] Чтобы убедиться в этом, обратите внимание на тот факт, что равномерное распределение богатства (которое здесь имеет место в отсутствие любых денежных трансфертов, в силу того что первоначальные запасы потребителей одинаковы) доставляет максимум общественного благосостояния при любом векторе цен и совокупном богатстве.

в объеме q_j напрямую из L первичных (т. е. непроизведенных) ресурсов или факторов производства $z_j = (z_{1j}, \ldots, z_{Lj}) \geq 0$[9]. Производственные возможности фирмы j описываются вогнутой строго возрастающей и дифференцируемой производственной функцией $f_j(z_j)$. Заметьте, что здесь нет промежуточных благ (т. е. таких, которые производятся одной фирмой, а другой используются как фактор производства). В экономике имеется совокупный первоначальный запас L факторов производства $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_L) \gg 0$. Этим первоначальным запасом владеют потребители, а используется он только в качестве факторов производства (т. е. потребители не имеют желания его потреблять).

Для того чтобы сконцентрироваться на исследовании рынков факторов производства в данной экономике, мы предположим, что цены J производимых потребительских благ фиксированы на уровне $p = (p_1, \ldots, p_J)$. Типичным примером такой ситуации является небольшая открытая экономика, такая что выбор объемов производства благ в этой экономике в рамках мировых рынков потребительских благ практически не оказывает влияния на мировые цены на эти блага[10]. Готовая продукция фирм продается на мировых рынках, тогда как факторы производства немобильны и должны быть использованы для производства внутри страны.

Центральный вопрос проводимого нами анализа касается равновесия на рынке факторов производства: другими словами, нам бы хотелось определить равновесные цены факторов производства $w = (w_1, \ldots, w_L)$ и распределение первоначального запаса факторов среди J фирм[11].

При данных ценах готовой продукции $p = (p_1, \ldots, p_J)$ и ценах факторов производства $w = (w_1, \ldots, w_L)$ максимизирующий прибыль производственный план для фирмы j определяется из решения следующей задачи:

$$\max_{z_j \geq 0} p_j f_j(z_j) - w \cdot z_j.$$

Обозначим множество оптимальных наборов факторов производства, на которые фирма предъявляет спрос при ценах (p, w), через $z(p, w) \subset \mathbb{R}^L_+$. Поскольку потребители непосредственно не потребляют свой запас факторов производства, то, если цены факторов производства w_l строго положительны (здесь мы будем рассматривать только этот случай), совокупное предложение факторов составляет $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_L)$. Тогда равновесием на рынке факторов производства в данной экономике при фиксирован-

[9] Некоторые из выпусков могут быть одним и тем же благом, т. е. фирмы j и j' могут производить один и тот же товар.

[10] Случай эндогенного определения цен $p = (p_1, \ldots, p_J)$ (с точностью до множителя) рассмотрен в упражнении 15.D.4.

[11] Следует заметить, что, как только цены факторов производства и их распределение определены, нетрудно определить объем спроса каждого потребителя из его функции спроса при данных экзогенных ценах $p = (p_1, \ldots, p_J)$ и богатстве, полученном от продажи ресурсов и распределения прибыли. Напомним, что рассматриваемая модель является замкнутой, поскольку предполагается, что спрос потребителей полностью удовлетворяется на мировых рынках.

ных ценах готовой продукции p является вектор цен факторов $w^* = (w_1^*, \ldots, w_L^*) >> 0$ и распределение факторов производства

$$(z_1^*, \ldots, z_J^*) = ((z_{11}^*, \ldots, z_{L1}^*), \ldots, (z_{1J}^*, \ldots, z_{LJ}^*)),$$

такие что каждая фирма получает желаемый набор факторов производства при ценах (p, w^*) и все рынки факторов производства уравновешены, т. е.

$$z_j^* \in z_j(p, w) \text{ для всех } j = 1, \ldots, J$$

и

$$\sum_j z_{lj}^* = \bar{z}_l \text{ для всех } l = 1, \ldots, L.$$

В силу вогнутости производственных функций фирм условия первого порядка являются необходимыми и достаточными для характеристики оптимального спроса на факторы. Следовательно, $L(J + 1)$ переменных распределения факторов производства $(z_1^*, \ldots, z_J^*) \in \mathbb{R}_+^{LJ}$ и их цен $w^* = (w_1^*, \ldots, w_L^*)$ составляют равновесие тогда и только тогда, когда эти переменные удовлетворяют следующим $L(J + 1)$ уравнениям (в предположении внутреннего решения):

$$p_j \frac{\partial f_j(z_j^*)}{\partial z_{lj}} = w_l^* \text{ для всех } j = 1, \ldots, J \text{ и } l = 1, \ldots, L \tag{15.D.1}$$

и

$$\sum_j z_{lj}^* = \bar{z}_l \text{ для всех } l = 1, \ldots, L. \tag{15.D.2}$$

Равновесные уровни выпуска готовой продукции равны тогда $q_j^* = f_j(z_j^*)$ для любой фирмы j.

Условия равновесия для готовой продукции и цен факторов производства могут также быть сформулированы в терминах функций издержек фирм $c_j(w, q_j)$ при $j = 1, \ldots, J$. Уровни выпуска $(q_1^*, \ldots, q_J^*) >> 0$ и цены факторов производства $w^* \gg 0$ являются равновесием тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$p_j = \frac{\partial c_j(w^*, q_j^*)}{\partial q_j} \text{ для всех } j = 1, \ldots, J \tag{15.D.3}$$

и

$$\sum_j \frac{\partial c_j(w^*, q_j^*)}{\partial w_l} = \bar{z}_l \text{ для всех } l = 1, \ldots, L. \tag{15.D.4}$$

Условия (15.D.3) и (15.D.4) представляют собой систему из $L + J$ уравнений с $L + J$ эндогенными переменными $(w_1, \ldots, w_L)$ и $(q_1, \ldots, q_J)$. Условия (15.D.3) говорят о том, что каждая фирма должна достигать максимального уровня выпуска при ценах p и w^*. Тогда оптимальный спрос фирмы j на l-й фактор производства составляет $z_{lj}^* = \partial c_j(w, q_j^*) / \partial w_l$ (по лемме Шепарда; см. утверждение 5.C.2). Таким образом, условия (15.D.4) представляют собой условия сбалансированности рынков факторов производства.

Прежде чем переходить к более подробному изучению детерминантов равновесного распределения факторов производства, следует заметить, что в данной модели равновесное распределение факторов $(z_1^*, ..., z_J^*)$ представляет собой в точности такое распределение факторов, какое было бы выбрано максимизирующим доход планировщиком, а следовательно, позволяет нам получить еще одно подтверждение того, что конкурентные равновесные распределения доставляют максимум благосостояния (по первой теореме благосостояния)[12]. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим задачу, с которой сталкивается планировщик, который должен координировать распределение факторов производства в экономике так, чтобы достичь максимума валового дохода от производственной деятельности в данной экономике:

$$\max_{(z_1,...,z_J)\geq 0} \sum_j p_j f_j(z_j) \tag{15.D.5}$$
$$\text{при } \sum_j z_j = \bar{z}.$$

Как сравнить равновесное распределение факторов $(z_1^*, ..., z_J^*)$ с тем, который выберет планировщик? Вспомним из раздела 5.E, что если в экономике имеется J фирм-ценополучателей, то их максимизирующий прибыль выбор будет таким же, как если бы фирмы максимизировали совокупную прибыль, принимая цены готовой продукции и факторов производства заданными. Таким образом, спрос на факторы производства $(z_1^*, ..., z_J^*)$ является решением следующей задачи:

$$\max_{(z_1,...,z_J)\geq 0} \sum_j \left(p_j f_j(z_j) - w^* \cdot z_j\right). \tag{15.D.6}$$

Поскольку $\sum_j z_j^* = \bar{z}$ (по условию уравновешенности рынков), то спрос на факторы производства $(z_1^*, ..., z_J^*)$ также должен быть решением задачи (15.D.6) при дополнительном ограничении $\sum_j z_j = \bar{z}$. Но отсюда следует, что спрос на факторы производства $(z_1^*, ..., z_J^*)$ в действительности является решением задачи (15.D.5): если должно быть выполнено $\sum_j z_j = \bar{z}$,

[12] Следует отметить, что максимизация дохода от производства в экономике в целом может являться целью любого планировщика, желающего максимизировать благосостояние потребителя, поскольку позволяет достичь максимального уровня потребления благ при фиксированных мировых ценах.

то совокупные издержки $w^* \cdot \left(\sum_j z_j \right)$ заданы и задача максимизации совокупной прибыли (15.D.6) сводится к задаче максимизации дохода (15.D.5).

Одним из достоинств только что доказанного свойства является то, что оно может быть использовано для нахождения равновесного распределения факторов производства без необходимости предварительного вычисления равновесных цен факторов; нам просто нужно непосредственно решить задачу (15.D.5). Кроме того, оно позволяет по-новому взглянуть на равновесные цены факторов производства. Действительно, вернемся снова к задаче максимизации совокупной прибыли (15.D.6). Мы можем решать эту задачу, используя иной подход, получив сначала агрегированную производственную функцию в денежных единицах:

$$f(z) = \max_{(z_1,\dots,z_J)\geq 0} p_1 f_1(z_1) + \dots + p_J f_J(z_J) \ \text{ при } \sum_j z_j = z.$$

Тогда агрегированный спрос на факторы производства будет решением следующей задачи: $\max_{z\geq 0}(f(z) - w \cdot z)$. Для каждого фактора l условия первого порядка этой задачи имеют вид: $w_l = \partial f(z)/\partial z_l$. Причем в равновесии агрегированный объем использования фактора l должен быть в точности равен $\bar{z}_l$. Следовательно, равновесная цена фактора l должна быть равна $w_l = \partial f(\bar{z})/\partial z_l$, т. е. *цена фактора производства l должна быть в точности равна его агрегированной предельной производительности (в терминах дохода).* Поскольку производственная функция $f(\cdot)$ вогнута, то сам по себе этот факт дает интересные результаты сравнительной статики. Например, изменение первоначального запаса отдельного фактора производства должно привести к противонаправленному изменению равновесной цены этого фактора.

Добавим некоторой конкретики, рассмотрев случай $J = L = 2$, т. е. будем считать, что в экономике производится два вида готовой продукции из двух первичных факторов производства. Предположим также, что производственные функции $f_1(z_{11}, z_{21})$ и $f_2(z_{12}, z_{22})$ однородны первой степени (т. е. технологии характеризуются постоянной отдачей от масштаба (см. раздел 5.B)). Эта модель называется *моделью с производством* 2×2. В приложениях фактор 1, как правило, трактуется как труд, а фактор 2 как капитал.

Для каждого вектора цен факторов производства $w = (w_1, w_2)$ обозначим через $c_j(w)$ минимальные издержки производства одной единицы блага j, а через $a_j(w) = (a_{1j}(w), a_{2j}(w))$ — комбинацию факторов производства (по предположению, единственную), при которой достигаются эти минимальные издержки. Как вы помните из утверждения 5.C.2, $\nabla c_j(w) = (a_{1j}(w), a_{2j}(w))$.

На рис. 15.D.1(a) изображена изокванта фирмы j,

$$\left\{(z_{1j},\ z_{2j}) \in \mathbb{R}^2_+ : f_j(z_{1j},\ z_{2j}) = 1\right\},$$

а также минимизирующая издержки комбинация факторов $(a_{1j}(w), a_{2j}(w))$. На рис. 15.D.1(b) проиллюстрирована линия уровня функции издержек про-

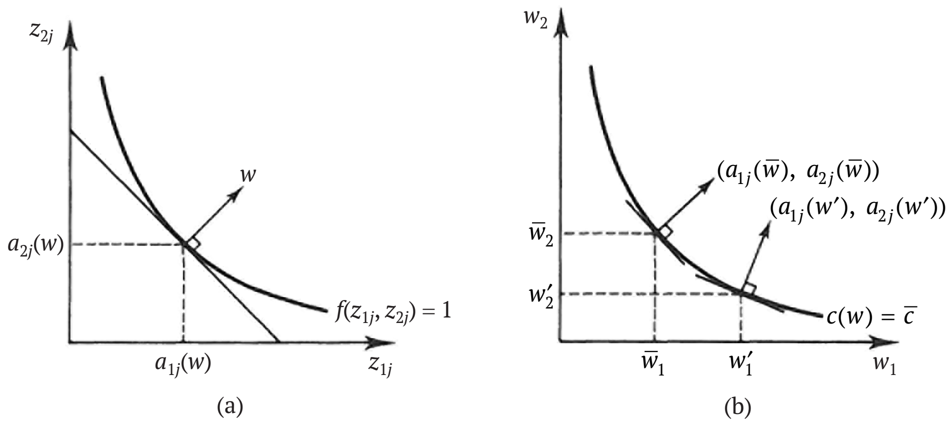


Рис. 15.D.1. (a) Изокванта, соответствующая единичному выпуску. (b) Функция издержек производства единичного выпуска

изводства единичного выпуска $\{(w_1,\ w_2) : c_j(w_1,\ w_2) = \bar{c}\}$. Эта кривая имеет отрицательный наклон, поскольку если w_1 растет, то w_2 должна убывать так, чтобы минимальные издержки производства единицы блага j оставались неизменными. Кроме того, множество $\{(w_1,\ w_2): c_j(w_1,\ w_2) \geq \bar{c}\}$ выпукло, поскольку функция издержек $c_j(w)$ вогнута по w. Заметим также, что вектор нормали $\nabla c_j(\bar{w})$ к данной линии уровня в точке $\bar{w} = (\bar{w}_1,\ \bar{w}_2)$ в точности равен $(a_{1j}(\bar{w}),\ a_{2j}(\bar{w}))$. При движении вдоль данной кривой в сторону увеличения w_1 и уменьшения w_2 отношение $a_{1j}(w)/a_{2j}(w)$ падает.

Рассмотрим сначала эффективные распределения факторов производства в данной модели. На рис. 15.D.2 представлены возможные распределения первоначальных запасов факторов производства между двумя фирмами в ящике Эджворта размерности $\bar{z}_1 \times \bar{z}_2$. Объемы факторов, используемых фирмой 1, откладываются от начала координат в нижнем левом

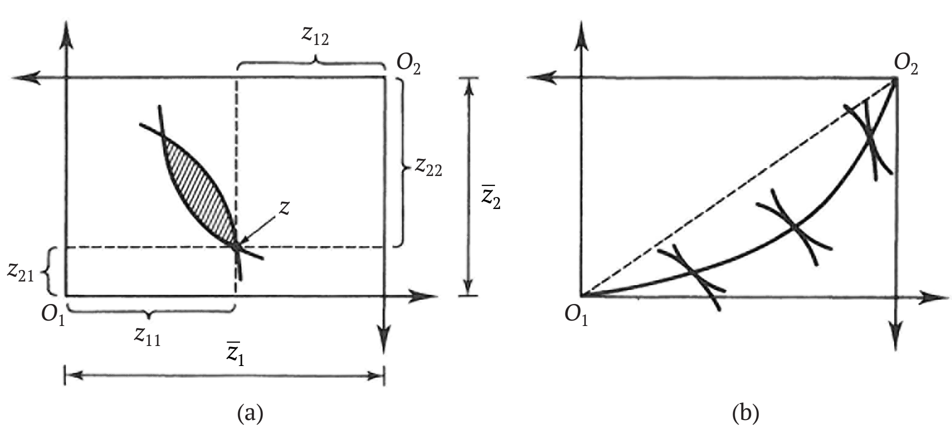


Рис. 15.D.2. (a) Эффективное распределение факторов производства. (b) Множество Парето для факторов производства

(юго-западном) углу ящика Эджворта, а для фирмы 2 — в верхнем правом (северо-восточном) углу. На рисунке также изображены изокванты двух фирм в ящике Эджворта. На рис. 15.D.2(a) показано неэффективное распределение факторов между фирмами, отмеченное на рисунке через z: любое распределение внутри заштрихованной области позволяет обеим фирмам произвести больший уровень выпуска, чем в точке z. А на рис. 15.D.2(b) проиллюстрировано множество Парето-оптимальных распределений факторов производства, т. е. множество таких распределений факторов, для которых при данном совокупном начальном запасе факторов невозможно произвести больше одного блага, не уменьшив при этом выпуск другого блага.

Множество Парето (включая точки начала координат) должно полностью лежать выше или ниже диагонали или совпадать с диагональю ящика Эджворта. Если оно где-то пересекает диагональ, то тогда в силу постоянной отдачи от масштаба изокванты фирм должны касаться друг друга вдоль всей диагонали, а значит, диагональ представляет собой множество Парето (см. также упражнение 15.B.7). Более того, справедливы следующие утверждения, в чем вам предлагается убедиться самостоятельно.

Упражнение 15.D.1. Пусть множество Парето модели с производством 2×2 не совпадает с диагональю ящика Эджворта.

a) Покажите, что в этом случае интенсивность использования факторов (отношение объемов использования фирмой фактора 1 к фактору 2) одной из фирм больше, чем другой, в любой точке, принадлежащей множеству Парето.
b) Покажите, что в этом случае любой луч, выходящий из начала координат любой из фирм, может пересечь множество Парето не более одного раза. Убедитесь, что интенсивность использования факторов и соответствующее отношение цен факторов при движении вдоль множества Парето от одного начала координат к другому изменяются монотонно.

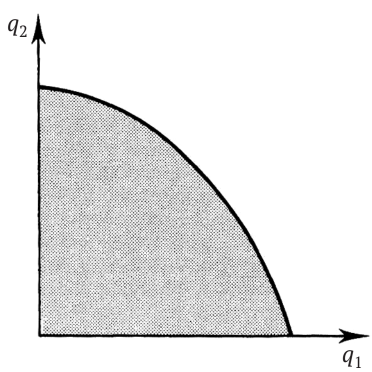


Рис. 15.D.3. Множество производственных возможностей

На рис. 15.D.3 изображено множество неотрицательных пар выпусков (q_1, q_2), которые могут быть произведены из имеющихся в экономике ресурсов. Это множество называется множеством производственных возможностей. Пары выпусков на границе этого множества получены из распределений, лежащих в множестве Парето на рис. 15.D.2(b). (В упражнении 15.D.2 вас просят доказать, что множество производственных возможностей является выпуклым, как показано на рис. 15.D.3.)

Для того чтобы более подробно исследовать детерминанты равновесного распределения факторов (z_1^*, z_2^*) и соответствующие равновесные цены факторов $w^* = (w_1^*, w_2^*)$, мы теперь предположим, что *интенсивность использования факторов* для двух рассматриваемых фирм носит системный характер. В частности, будем считать, что при производстве блага 1 в большей степени по сравнению с производством блага 2 требуется первый фактор. Выражение «в большей степени» конкретизируется в определении 15.D.1.

Определение 15.D.1. В производстве блага 1 относительно более интенсивно используется фактор 1, чем в производстве блага 2, если

$$\frac{a_{11}(w)}{a_{21}(w)} > \frac{a_{12}(w)}{a_{22}(w)}$$

при *всех* ценах факторов $w = (w_1, w_2)$.

Рассмотрим внутреннее равновесие, где уровень производства обоих благ строго положителен (в противном случае будем говорить о равновесии со *специализацией*), и найдем равновесные цены факторов производства. В силу предпосылки о постоянной отдаче от масштаба необходимое условие того, что цены факторов производства (w_1^*, w_2^*) являются равновесными (для внутреннего равновесия), означает, что эти цены должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$c_1(w_1, w_2) = p_1 \text{ и } c_2(w_1, w_2) = p_2. \tag{15.D.7}$$

Другими словами, во внутреннем равновесии цены должны быть равны издержкам производства единицы выпуска. Таким образом, мы получаем систему из двух уравнений с двумя неизвестными — ценами факторов производства w_1 и w_2[13].

На рис. 15.D.4 изображены графики двух функций издержек производства единичного выпуска, удовлетворяющих соотношениям (15.D.7). Согласно (15.D.7) необходимое условие того, что цены факторов производства $(\hat{w}_1, \hat{w}_2)$ являются равновесными (для внутреннего равновесия), состоит в том, что данные кривые издержек пересекаются в точке $(\hat{w}_1, \hat{w}_2)$. Более того, из условия интенсивности использования факторов следует, что в любой точке пересечения кривая издержек фирмы 2 должна быть

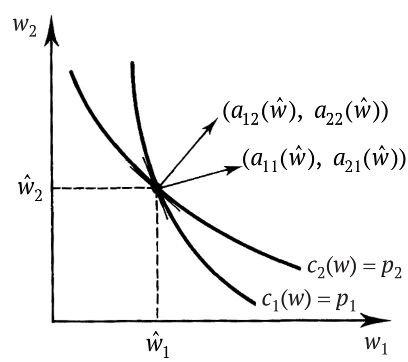


Рис. 15.D.4. Равновесные цены факторов производства и интенсивность использования факторов во внутреннем равновесии

[13] Условия (15.D.7) представляют собой вариант условий (15.D.3) для случая постоянной отдачи от масштаба. Следует заметить, что в силу предпосылки о постоянной отдаче от масштаба условия (15.D.3) не зависят от уровней выпуска $(q_1, \ldots, q_J)$ (для внутреннего равновесия).

более пологой (т. е. иметь меньший отрицательный наклон), чем кривая фирмы 1 (как вы помните, $\nabla c_j(w) = (a_{1j}(w), a_{2j}(w))$). Отсюда следует, что кривые издержек фирм могут пересекаться не более одного раза[14]. Таким образом, согласно условию интенсивности использования факторов существует не более одной пары цен факторов производства, которые могут быть равновесными во внутреннем равновесии[15].

Если равновесные цены факторов w^* известны, то равновесные уровни выпуска можно найти графически путем определения единственного распределения факторов производства (z_1^*, z_2^*) в ящике Эджворта, в котором обе фирмы имеют соответствующие ценам w^* интенсивности использования факторов производства, т. е.

$$\frac{z_{11}^*}{z_{21}^*} = \frac{a_{11}(w^*)}{a_{21}(w^*)} \text{ и } \frac{z_{12}^*}{z_{22}^*} = \frac{a_{12}(w^*)}{a_{22}(w^*)}.$$

Такое построение проиллюстрировано на рис. 15.D.5.

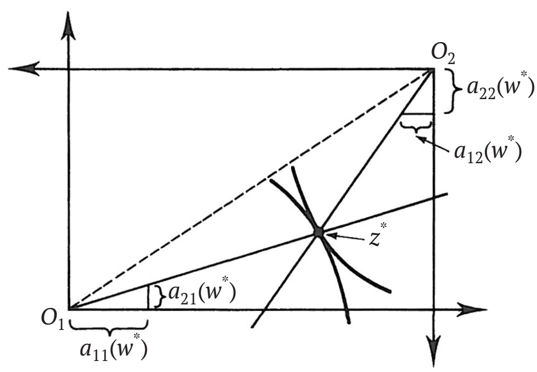


Рис. 15.D.5. Равновесное распределение факторов производства

[14] Если бы кривые пересекались несколько раз, то кривая фирмы 2 должна была бы по крайней мере один раз пересечь кривую фирмы 1 сверху, и в этой точке пересечения кривая фирмы 2 была бы более крутой, чем кривая фирмы 1, что противоречит условию интенсивности использования факторов.

[15] Однако следует заметить, что если некоторый набор цен $(\hat{w}_1, \hat{w}_2)$ является решением уравнений (15.D.7), то этого недостаточно, чтобы гарантировать, что $(\hat{w}_1, \hat{w}_2)$ — равновесные цены факторов. В частности, даже если $(\hat{w}_1, \hat{w}_2)$ является решением (15.D.7), внутреннего равновесия может не существовать. В упражнении 15.D.6 вас просят показать, что при условии интенсивности использования факторов в равновесии производится положительный объем благ тогда и только тогда, когда

$$\frac{a_{11}(\hat{w})}{a_{21}(\hat{w})} > \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} > \frac{a_{12}(\hat{w})}{a_{22}(\hat{w})},$$

где $\hat{w} = (\hat{w}_1, \hat{w}_2)$ — единственное решение системы (15.D.7). Другими словами, интенсивность использования факторов в экономике в целом должна принимать промежуточное значение между интенсивностями использования факторов фирмами, вычисленными на единственной паре цен факторов производства, при которой возможна диверсификация.

Одно из наиболее важных следствий проведенного обсуждения заключается в том, что в модели с производством 2×2 при выполнении условия интенсивности использования факторов производства, до тех пор пока экономика не специализируется на производстве единственного блага (а значит, справедливы соотношения (15.D.7)), равновесные цены факторов производства зависят *только от технологий фирм и цен готовой продукции p*. Таким образом, уровень первоначального запаса имеет значение только в той мере, в какой он определяет, не будет ли экономика специализированной. Этот результат в учебниках, посвященных теории международной торговли, называется *теоремой о выравнивании цен на факторы производства*. В данной теореме формулируются условия (такие, как наличие потребительских благ, участвующих в торговле, идентичность производственных технологий стран и принятие цен заданными), гарантирующие выравнивание цен на факторы, торговля которыми не осуществляется, в не специализирующихся на них странах.

Теперь рассмотрим два упражнения сравнительной статики. Во-первых, попытаемся ответить на вопрос: как изменение цены одной готовой продукции, скажем p_1, влияет на равновесные цены факторов и их распределение? На рис. 15.D.6(a), где представлено соответствующее изменение для ситуации, изображенной на рис. 15.D.4, видно, как происходит изменение цен факторов. Увеличение p_1 приводит к сдвигу кривой издержек фирмы 1 (множества $\{(w_1, w_2): c_1(w_1, w_2) = p_1\}$) вовне, в сторону более высокого уровня цен факторов производства. Точка пересечения двух кривых сдвигается вдоль кривой фирмы 2 в направлении увеличения w_1 и уменьшения w_2.

Формально это дает нам результат, сформулированный в утверждении 15.D.1.

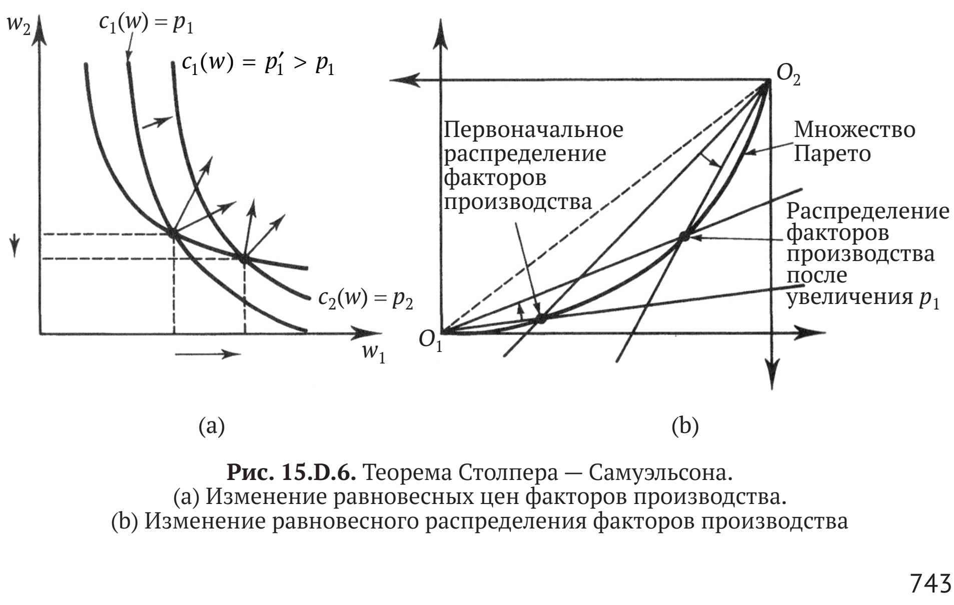


Рис. 15.D.6. Теорема Столпера — Самуэльсона.
(a) Изменение равновесных цен факторов производства.
(b) Изменение равновесного распределения факторов производства

Утверждение 15.D.1 (*теорема Столпера — Самуэльсона*). В экономике с производством 2×2 при предпосылке об интенсивности использования факторов производства, если p_j возрастает, то равновесная цена более интенсивно используемого фактора в производстве блага j также возрастает, тогда как цена другого фактора снижается (в предположении внутреннего равновесия до и после изменения цены)[16].

Доказательство. В иллюстративных целях приведем формальное доказательство, обращаясь к графическому анализу, представленному на рис. 15.D.6. Заметим, что достаточно доказать справедливость результата для инфинитезимального изменения $dp = (1, 0)$.

Дифференцируя условия (15.D.7), получим

$$dp_1 = \nabla c_1(w^*)\cdot dw = a_{11}(w^*)dw_1 + a_{21}(w^*)dw_2,$$

$$dp_2 = \nabla c_2(w^*)\cdot dw = a_{12}(w^*)dw_1 + a_{22}(w^*)dw_2,$$

или в матричной записи:

$$dp = \begin{bmatrix} a_{11}(w^*) & a_{21}(w^*) \\ a_{12}(w^*) & a_{22}(w^*) \end{bmatrix} dw.$$

Обозначим эту матрицу размерности 2×2 через A. Из условия интенсивности использования факторов следует, что $|A| = a_{11}(w^*)a_{22}(w^*) - a_{12}(w^*)a_{21}(w^*) > 0$. Следовательно, существует обратная матрица A^{-1}, и, как нетрудно вычислить, она имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{22}(w^*) & -a_{21}(w^*) \\ -a_{12}(w^*) & a_{11}(w^*) \end{bmatrix}.$$

Таким образом, элементы матрицы A^{-1} положительны на диагонали и отрицательны вне ее. А поскольку $dw = A^{-1}dp$, то отсюда следует, что при $dp = (1, 0)$ имеем $dw_1 > 0$ и $dw_2 < 0$, что и требовалось доказать. ■

Как мы только что видели, если p_1 возрастает, то w_1^*/w_2^* также возрастет. Следовательно, обе фирмы должны двигаться в сторону уменьшения интенсивности использования фактора 1. На рис. 15.D.6(b) изображено

[16] Более сильное утверждение сформулировано в упражнении 15.D.3. Следует также заметить, что, строго говоря, условие интенсивности использования факторов не является необходимым для справедливости данного результата. Причина в том, что, как мы видели в упражнении 15.D.1, во всех Парето-оптимальных распределениях факторов производства фирма, использующая один фактор, скажем фактор 1, более интенсивно, как видно из рис. 15.D.2(b), будет одна и та же. Тогда, если p_1 растет, то, как видно из рис. 15.D.3 и свойств равновесия с точки зрения максимизации совокупного дохода, которые мы раньше обсуждали в этом разделе, выпуск блага 1 возрастает, а блага 2 сокращается. Отсюда следует, что мы двигаемся вдоль множества Парето на рис. 15.D.2(b) в сторону начала координат фирмы 2. Таким образом, вспоминая упражнение 15.D.1, интенсивность использования фактора 1 обеими фирмами снижается. Наконец, поскольку фирма 2 по-прежнему получает нулевую прибыль и цена ее выпуска остается неизменной, то отсюда следует, что w_1^* возрастает, а w_2^* снижается.

результирующее изменение равновесного распределения факторов производства. Как видно из рисунка, равновесное распределение факторов смещается в новую точку во множестве Парето, в которой выпуск блага 1 возрос, а блага 2 — снизился.

Во втором упражнении сравнительной статики предположим, что совокупный запас фактора 1 возрастает с $\bar{z}_1$ до $\bar{z}_1'$. Как это скажется на равновесных ценах факторов производства и уровнях выпуска? Поскольку ни цены готовой продукции, ни технологии не изменились, то цены факторов останутся неизменными (до тех пор пока экономика не станет специализированной). Как следствие, также не изменится и интенсивность использования факторов производства. Таким образом, новое распределение факторов легко определить в наложенных друг на друга ящиках Эджворта на рис. 15.D.7; нам необходимо только найти новое пересечение двух лучей, соответствующих оставшимся неизменными уровням интенсивности использования факторов производства.

Изучение рисунка 15.D.7 приводит нас к результату, представленному в утверждении 15.D.2.

Утверждение 15.D.2 (*теорема Рыбчинского*). В модели с производством 2×2 при предпосылке об интенсивности использования факторов производства, если первоначальный запас некоторого фактора возрастает, то производство того блага, где данный фактор используется относительно более интенсивно, увеличивается, а производство другого блага сокращается (в предположении внутренних равновесий до и после изменения первоначального запаса).

Дальнейшее обсуждение модели с производством 2×2 можно найти, например, в работе (Johnson, 1971).

Рассмотрим случай произвольного числа факторов производства L и производства J благ. При данных ценах выпуска условия нулевой прибыли (т. е. аналог соотношений (15.D.7) в общем случае) представляют собой (нелинейную) систему из J

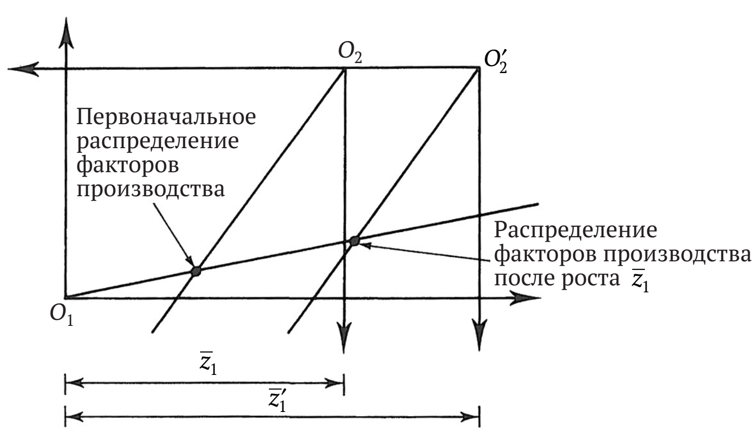


Рис. 15.D.7. Теорема Рыбчинского

уравнений с L неизвестными. Если $L > J$, то неизвестных слишком много и мы не можем ожидать, что только условия нулевой прибыли будут определять цены факторов производства, — будет также важен и совокупный запас факторов. Если же $J > L$, то тогда слишком много уравнений и (при обычных мировых ценах) они не могут выполняться все одновременно. Это означает, что экономика будет специализироваться на производстве некоторого количества благ, равного числу факторов производства L. Множество тех благ, которые в итоге будут производиться, может также зависеть от первоначального запаса факторов производства. Случай $L = J$ представляется слишком похожим на рассмотренную модель 2×2 (анализ которой, как мы видели, весьма информативен), а потому малоинтересным. Тем не менее следует отметить, что в этом случае условия нулевой прибыли будут нелинейными, и поэтому для того, чтобы гарантировать единственность решения (и справедливость соответствующих аналогов теорем Столпера — Самуэльсона и Рыбчинского), необходим более общий вариант условия интенсивности использования факторов производства. Такие обобщения существуют, но их весьма затруднительно проинтерпретировать с экономической точки зрения так же наглядно, как условие интенсивности использования факторов производства в модели 2×2.

15.E. Теории общего и частичного равновесия

Существует ряд задач, которые являются задачами общего равновесия по самой своей природе: довольно сложно представить себе убедительный анализ экономического роста, демографических изменений, международных экономических связей или монетарной политики, ограниченный рамками только некоторого подмножества товаров, без учета реакции экономики в целом.

Модели частичного равновесия рынков или систем взаимосвязанных рынков, напротив, позволяют определить цены, прибыль, уровень производства и другие переменные, представляющие интерес, в предположении, что данные эндогенные величины не оказывают влияния на заданный спрос и кривые издержек. Еще одной переменной, которую в рамках теории общего равновесия рассматривают как эндогенную, является богатство индивидов, а в теории частичного равновесия она, как правило, трактуется как экзогенная.

И если бы анализ общего равновесия оставлял без изменений все прогнозы и выводы, полученные на основе моделей частичного равновесия, то ценность его была бы невелика. Это могло бы быть удобно, поскольку в этом случае мы бы точно знали, что выводы, полученные в рамках анализа частичного равновесия, справедливы, хотя это никак бы не повлияло на наше представление о том, как работают рынки. Однако в действительности все не так просто: выбор методологии зачастую имеет огромное значение. В качестве иллюстрации рассмотрим пример, предложенный в работе (Bradford, 1978), который показывает, что использование анализа частичного равновесия может привести к серьезным заблуждениям. Обсуждение вопроса обоснованности применения теории частичного равновесия см. также в разделах 3.I и 10.G.

Пример налогообложения

Рассмотрим экономику, в которой имеется N городов (где N — большое число). В каждом городе есть одна конкурентная фирма, производящая одно потребительское благо с помощью технологии, представимой строго вогнутой производственной функцией $f(z)$ (как и ранее, мы можем проинтерпретировать это так, как будто в каждом городе имеется много идентичных фирм, чтобы гипотеза о конкурентном поведении фирм выглядела более обоснованной). Производимое потребительское благо, которое для всех городов одинаково, продается на внутреннем рынке. В экономике имеется M единиц труда, предложение которого неэластично: работники получают полезность только от объема потребления блага, производимого фирмами. Работники могут свободно перемещаться из города в город, стремясь получить наибольшую заработную плату. Будем считать, что цена потребительского блага равна 1, а заработную плату в городе n обозначим через w_n.

При условии что работники могут свободно перемещаться в поисках большей заработной платы, в равновесии заработная плата во всех городах должна быть одинакова, т. е. должно быть выполнено: $w_1 = \ldots = w_N = \bar{w}$. В силу симметричности задачи в равновесии каждая фирма наймет M/N единиц труда. В результате равновесная заработная плата составит $\bar{w} = f'(M/N)$, и каждая фирма получит прибыль, равную $f(M/N) - f'(M/N)(M/N)$.

Предположим теперь, что в городе 1 вводится налог на труд, который платит фирма, расположенная в этом городе. Мы хотим проанализировать, как налог скажется на работниках и фирмах (точнее, на собственниках фирм), т. е. мы хотим исследовать, как распределится налоговое бремя. Если ставка налога равна t, а заработная плата в городе 1 — w_1, то спрос фирмы города 1 на труд составит такую величину z_1, что $f'(z_1) = t + w_1$. Здесь следует отметить, что поскольку по условию N велико, то можно предположить, что ставка заработной платы $\bar{w}$ в других городах при этом осталась прежней, не зависящей от изменений, происходящих в городе 1. Более того, в силу абсолютной мобильности труда, отображение предложения труда работниками города 1 должно быть тогда равно 0 при $w_1 < \bar{w}$, ∞ при $w_1 > \bar{w}$ и $[0, \infty]$ при $w_1 = \bar{w}$. Таким образом, в рамках частичного равновесия равновесная заработная плата в городе 1 должна остаться такой же, как в остальных городах, т. е. равной $\bar{w}$, а занятость в городе 1 снизится до уровня z_1, такого что $f'(z_1) = t + \bar{w}$ (это означает, что часть работников уедет работать в другие города). Следовательно, используя подход частичного равновесия для анализа рынка труда в городе 1, мы приходим к выводу, что доход работников остался неизменным, так же как и прибыль всех фирм, кроме расположенной в городе 1, при этом прибыль фирмы из города 1 снизилась. Таким образом, фирмы (точнее собственники фирм) несут все бремя налогов, а работники, в силу мобильности труда и большого числа городов, где фирмы не платят налога на труд, не несут никакого бремени.

К сожалению, используя такой подход, мы допускаем серьезную ошибку, и, как будет показано далее с помощью анализа общего равновесия, на самом деле бремя налогов будут нести не владельцы фирм, а работники.

Теперь посмотрим на ситуацию на рынке труда с точки зрения общего равновесия. Нам известно, что равновесная заработная плата должна быть такова, что $w_1 = \ldots = w_N$, и в равновесии все M единиц труда должны быть заняты. Обозначим через $w(t)$ одинаковую для всех равновесную заработную плату при ставке налога в городе 1, равной t. В силу симметрии все фирмы в городах 2, ..., N предъявят одинаковый спрос на труд, $z(t)$. Обозначим через $z_1(t)$ равновесный уровень спроса на труд в городе 1 при введении в этом городе налога на труд, равного t. Тогда равновесие характеризуется следующими условиями:

$$(N-1)z(t) + z_1(t) = M, \tag{15.E.1}$$

$$f'(z(t)) = w(t), \tag{15.E.2}$$

$$f'(z_1(t)) = w(t) + t. \tag{15.E.3}$$

Рассмотрим влияние (дифференциально) малого изменения налога dt на равновесную заработную плату. Подставляя $z_1(t)$ из (15.E.1) в (15.E.3), дифференцируя по t и вычисляя производные при $t = 0$ (в этой точке $z_1(0) = z(0) = (M/N)$), получаем

$$-f''(M/N)(N-1)z'(0) = w'(0) + 1. \tag{15.E.4}$$

Но из (15.E.2) имеем

$$f''(M/N)z'(0) = w'(0). \tag{15.E.5}$$

Тогда из (15.E.4) и (15.E.5) получаем

$$w'(0) = -\frac{1}{N}.$$

Следовательно, если рассматривать ситуацию в контексте общего равновесия, мы видим, что введение налога в городе 1 приводит к тому, что заработная плата во всех городах снизится. Однако, как нетрудно заметить, с ростом N снижение заработной платы будет стремиться к нулю. Если бы это было единственным расхождением с приведенным выше анализом в рамках частичного равновесия, то данный пример не заслуживал бы особого внимания, поскольку при довольно больших значениях N мы получали бы корректный результат. Но в действительности следствием этого падения заработной платы являются совсем иные, нежели в вышеприведенном анализе, результаты относительно распределения налогового бремени. Итак, рассмотрим влияние изменения налога на совокупную прибыль. В рамках частичного равновесия, как мы видели, работники не несли бремени налогов: все налоговое бремя легло на фирмы. Если обозначить через $\pi(w)$ функцию прибыли репрезентативной фирмы, то изменение совокупной прибыли в результате введения налога составит[17]

$$(N-1)\pi'(\bar{w})w'(0)+\pi'(\bar{w})(w'(0)+1)=\pi'(\bar{w})\left(-\frac{N-1}{N}+\frac{N-1}{N}\right)=0.$$

То есть совокупная прибыль остается неизменной! Таким образом, все бремя налога несут работники, а не собственники фирм. Заметим, что, хотя анализ частичного равновесия дал практически верный результат относительно изменения цен, общий вывод относительно влияния налога оказался принципиально иным[18].

Литература

Bradford D. (1978). Factor prices may be constant but factor returns are not. *Economic Letters*, 199–203.

Johnson H.G. (1971). *The Two-Sector Model of General Equilibrium*. Chicago: Aldine-Atherton.

Newman P. (1965). *The Theory of Exchange*. Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall.

Упражнения

15.B.1^{A}. Рассмотрите экономику обмена с двумя благами и двумя потребителями, в которой оба потребителя имеют локально ненасыщаемые предпочтения. Обозначим через $x_{li}(p)$ спрос потребителя i на благо l при ценах $p=(p_1, p_2)$.

a) Покажите, что $p_1\left(\sum_i x_{1i}(p)-\bar{\omega}_1\right)+p_2\left(\sum_i x_{2i}(p)-\bar{\omega}_2\right)=0$ для всех цен p.

b) Покажите, что если рынок блага 1 уравновешен при ценах $p^* \gg 0$, то при этих ценах рынок блага 2 также будет уравновешен, и, следовательно, p^* — равновесный вектор цен в вальрасианском равновесии.

15.B.2^{A}. Рассмотрите экономику обмена с двумя благами и двумя потребителями, имеющими функции полезности Кобба — Дугласа вида $u_1(x_{11}, x_{21})=x_{11}^{\alpha}x_{21}^{1-\alpha}$ и $u_2(x_{12}, x_{22})=x_{12}^{\beta}x_{22}^{1-\beta}$. Пусть первоначальный запас потребителя i составляет $(\omega_{1i}, \omega_{2i}) \gg 0$, где $i=1, 2$. Найдите равновесное отношение цен и равновесное распределение. Как изменятся эти величины при дифференциально малом изменении ω_{11}?

---

[17] Напомним, что прибыль фирмы в городе 1 равна $\pi(w(t)+t)$.

[18] Заметим, что здесь некорректно было бы считать, что выполнена предпосылка анализа частичного равновесия, состоящая в том, что индивиды тратят лишь небольшую долю дохода на рассматриваемое благо, подробно описанная нами в разделах 3.I и 10.G. В данном примере «потребительские» блага (работа в разных городах) являются совершенно заменяемыми, и, следовательно, мы не можем гарантировать, что доли связанного с ними бюджета действительно малы при любых ценах.

15.B.3$^{\mathbf{B}}$. Покажите с помощью ящика Эджворта, что если потребители имеют локально ненасыщаемые предпочтения, то равновесное по Вальрасу распределение Парето-оптимально.

15.B.4$^{\mathbf{C}}$. Рассмотрите экономику обмена с двумя потребителями и двумя благами. Будем говорить, что кривая *цена — потребление* обладает свойством валовой заменимости, если с ростом цены одного товара спрос на него снижается, а спрос на другой товар возрастает.

a) Изобразите в ящике Эджворта кривую *цена — потребление*, обладающую свойством валовой заменимости.

b) Пусть кривые цена — потребление обоих потребителей обладают свойством валовой заменимости. Покажите, что тогда они могут пересечься только один раз (не учитывая пересечения в точке первоначального запаса).

Назовем кривую цена — потребление *нормальной*, если увеличение цены одного товара приводит к росту спроса на этот товар, только если увеличивается спрос на оба товара.

c) Изобразите в ящике Эджворта нормальную кривую цена — потребление, не удовлетворяющую свойству валовой заменимости.

d) Покажите, что существуют предпочтения, порождающие кривые цена — потребление, не являющиеся нормальными. Покажите также, что функция спроса для таких предпочтений не является нормальной (т. е. при некоторых ценах некоторое благо будет инфериорным).

e) Проиллюстрируйте в ящике Эджворта, что если кривая цена — потребление одного потребителя является нормальной, а кривая цена — потребление другого потребителя удовлетворяет свойству валовой заменимости, то данные кривые цена — потребление пересекаются не более одного раза (без учета пересечения в точке первоначального запаса).

f) Покажите, что две нормальные кривые цена — потребление могут пересекаться несколько раз.

15.B.5$^{\mathbf{A}}$. Убедитесь, что кривые цена — потребление из примера 15.B.2 будут именно такими, как утверждается, а также проверьте, что именно такими будут относительные цены.

15.B.6$^{\mathbf{B}}$. (D. Blair) Вычислите равновесия (их более одного) в следующей экономике обмена с двумя потребителями и двумя благами:

$$u_1(x_{11},\ x_{21}) = \left(x_{11}^{-2} + (12\ /\ 37)^3 x_{21}^{-2}\right)^{-1/2} \quad \text{и } \omega_1 = (1, 0),$$

$$u_2(x_{12},\ x_{22}) = \left((12\ /\ 37)^3 x_{12}^{-2} + x_{22}^{-2}\right)^{-1/2} \quad \text{и } \omega_2 = (0, 1).$$

15.B.7$^{\mathbf{C}}$. Покажите, что если в экономике обмена с двумя потребителями и двумя благами оба потребителя имеют непрерывные строго монотонные и строго выпуклые предпочтения, то множество Парето не имеет «дыр», т. е. является связанным. Покажите также, что если предпочтения потребителей к тому же являются гомотетичными, то множество Парето полностью расположено по одну сторону от диагонали ящика Эджворта.

15.B.8[B]. Пусть в экономике обмена с двумя потребителями и двумя благами оба потребителя имеют непрерывные строго выпуклые предпочтения, которые представимы квазилинейной функцией полезности, где первое благо является благом-измерителем. Покажите, что тогда любое Парето-оптимальное распределение внутри ящика Эджворта характеризуется одинаковым потреблением второго блага. Как это связано с материалом главы 10?

15.B.9[B]. Рассмотрите экономику чистого обмена (т. е. экономику без производства) с двумя потребителями, Альфансом (α) и Бетатриксом (β), и двумя благами, Перье (p) и Бри (b). Пусть функции полезности Альфанса и Бетатрикса имеют вид

$$u_\alpha = \min\{x_{p\alpha},\ x_{b\alpha}\} \text{ и } u_\beta = \min\left\{x_{p\beta},\ (x_{b\beta})^{1/2}\right\},$$

где x_{pa} — объем потребления Альфансом Перье и т. д. Первоначально Альфанс обладает запасом, состоящим из 30 единиц Перье (и не имеет запаса Бри), а Бетатрикс обладает запасом в 20 единиц Бри (и не имеет запаса Перье). Потребители не могут потреблять блага в отрицательном объеме. Если оба потребителя принимают цены заданными, то каково будет равновесие?

Предположим теперь, что Альфанс первоначально имеет запас только в 5 единиц Перье, тогда как запас Бетатрикса по-прежнему составляет 20 единиц Бри и 0 единиц Перье. Как изменится ответ в этом случае?

15.B.10[C]. (*Парадокс трансфертов*). В экономике чистого обмена с двумя товарами и двумя потребителями, имеющими непрерывные строго выпуклые и строго монотонные предпочтения, проведите анализ сравнительной статики, рассмотрев изменения благосостояния потребителя 1 при изменении первоначального запаса $\omega_1 = (\omega_{11}, \omega_{21})$ и $\omega_2 = (\omega_{12}, \omega_{22})$.

a) Предположим, что предпочтения потребителей квазилинейны по одному и тому же благу-измерителю. Покажите, что если первоначальные запасы потребителя 1 увеличатся до $\omega_1' >> \omega_1$ при неизменном ω_2, то в равновесии благосостояние потребителя 1 может снизиться. Проинтерпретируйте этот результат и проследите его связь с теорией монополии, выбирающей объемы выпуска.

b) Предположим теперь, что увеличение запаса потребителя 1 происходит за счет трансферта от потребителя 2, т. е. $\omega_1' = \omega_1 + z$ и $\omega_2' = \omega_2 - z$, где $z \geq 0$. При тех же предположениях, что и в пункте (a), покажите, что полезность потребителя 1 не может снизиться.

c) Рассмотрим снова трансферт, описанный в пункте (b), но теперь будем считать, что потребители могут иметь неквазилинейные предпочтения. Пусть трансферт z мал и, соответственно, малы изменения равновесных (относительных) цен. Покажите, что в таком случае полезность потребителя 1 может снизиться (это называется *парадоксом трансфертов*). Для этого достаточно привести графическую иллюстрацию в ящике Эджворта. Проинтерпретируйте полученный результат в терминах эффектов замещения и богатства.

d) Покажите, что в этом примере в ящике Эджворта (но заметьте, что, вообще говоря, не в общем случае) парадокс трансфертов может иметь место только в случае множественности равновесий. (*Подсказка*: приведите иллюстрацию в ящике Эджворта. Покажите, что если трансферт, получаемый потребителем 1, приводит к снижению его полезности, то в отсутствие трансфертов должно существовать равновесие, где потребитель 1 имеет еще более низкий уровень полезности.)

15.C.1$^{\mathbf{B}}$. Это упражнение относится к модели экономики с одной фирмой и одним потребителем, изложенной в разделе 15.C.

a) Докажите, что в экономике с одной фирмой с выпуклой технологией и одним потребителем с выпуклыми предпочтениями равновесный уровень производства единствен.

b) Пусть цена готовой продукции равна 1. Определим функцию избыточного спроса на труд следующим образом:

$$z_1(w) = x_1(w,\ w\bar{L} + \pi(w)) + y_1(w) - \bar{L},$$

где w — заработная плата, $\pi(\cdot)$ — функция прибыли, а $x_1(\cdot,\ \cdot)$ и $y_1(\cdot)$ — функция спроса потребителя на досуг и функция спроса фирмы на труд соответственно. Покажите, что производная функции избыточного спроса необязательно имеет один и тот же знак на всем диапазоне цен, но обязательно отрицательна в окрестности равновесия.

c) Приведите пример существования множественных равновесий в строго выпуклой экономике с одной фирмой и двумя индивидами, каждый из которых обладает только первоначальным запасом труда. (Будем считать, что потребители владеют фирмой в равных долях и, соответственно, делят прибыль пополам). Может ли такая ситуация иметь место, если фирма характеризуется не строго убывающей, а постоянной отдачей от масштаба?

15.C.2$^{\mathbf{A}}$. Рассмотрите экономику с одним потребителем и одним производителем, описанную в разделе 15.C. Найдите равновесные цены, прибыль и уровни потребления при производственной функции $f(z) = z^{1/2}$, функции полезности $u(x_1, x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$ и совокупном запасе труда $\bar{L} = 1$.

15.D.1^B^. В тексте.

15.D.2^A^. Покажите, что в модели с производством 2×2 множество производственных возможностей выпукло (в предположении свободы расходования).

15.D.3^B^. Покажите, что теорему Столпера — Самуэльсона (утверждение 15.D.1) можно усилить до утверждения, что увеличение цены фактора, который используется более интенсивно, пропорционально больше, чем увеличение цены производимого блага (а следовательно, положение потребителя, владеющего только интенсивно используемым фактором, улучшается).

15.D.4^C^. Рассмотрите задачу общего равновесия с двумя потребителями-работниками ($i = 1, 2$), двумя фирмами с вогнутой технологией с постоянной отдачей от масштаба ($j = 1, 2$), двумя факторами производства ($l = 1, 2$) и двумя потребительскими благами ($j = 1, 2$), производимыми соответственно первой и второй фирмами. Пусть в производстве потребительского блага 1 относительно более интенсивно используется фактор 1. Предположим также, что ни один из потребителей не потребляет ни один из факторов. Потребитель 1 владеет одной единицей фактора 1, а потребитель 2 обладает одной единицей фактора 2.

a) Приведите определение равновесия в данной экономике (которая является замкнутой), считая, что экономические агенты принимают цены заданными и фирмы руководствуются максимизацией прибыли.

b) Предположим, что потребитель 1 ценит только второе потребительское благо, а потребителя 2 заботит только количество первого блага. Покажите, что в данном случае возможно не более одного равновесия.

c) Предположим теперь, что потребитель 1 ценит только первое благо, а потребитель 2 — только второе. Покажите, что в этом случае возможна множественность равновесий.
(*Подсказка*: в пунктах (b) и (c) для ответа можно использовать графическую иллюстрацию в ящике Эджворта для факторов производства.)

15.D.5^B^. Покажите, что теорему Рыбчинского (утверждение 15.D.2) можно усилить до утверждения, что пропорциональное увеличение выпуска блага, в производстве которого относительно более интенсивно используется тот фактор, объем которого возрос, больше, чем пропорциональное увеличение первоначального запаса этого фактора.

15.D.6^C^. Рассмотрите модель с производством 2×2 с заданными ценами готовой продукции (p_1, p_2) (можно считать, что это небольшая открытая экономика). Условие интенсивности использования факторов выполнено (в производстве потребительского блага 1 более интенсивно используется фактор 1). Обозначим вектор совокупных запасов через $\bar{z} \in \mathbb{R}^2$.

a) Выпишите условия, характеризующие равновесные цены факторов производства $\left(w_1^*,\ w_2^*\right)$ и уровни выпуска $\left(q_1^*,\ q_2^*\right)$, считая, что возможна специализация экономики.

b) Пусть $\hat{w} = (\hat{w}_1,\ \hat{w}_2)$ — цены факторов производства, такие что для каждого потребительского блага единичные издержки равны цене. Покажите, что необходимое и достаточное условие того, чтобы в равновесии, описанном в пункте (a), было выполнено $\left(q_1^*,\ q_2^*\right) \gg 0$, заключается в том, чтобы вектор $\bar{z}$ принадлежал следующему множеству:

$$\left\{(z_1,\ z_2) \in \mathbb{R}_+^2 : a_{11}(\hat{w})/a_{21}(\hat{w}) > z_1\ /\ z_2 > a_{12}(\hat{w})/a_{22}(\hat{w})\right\},$$

где $a_{lj}(\hat{w})$ — оптимальный уровень использования (при ценах факторов $\hat{w}$) фактора l в производстве одной единицы блага j. Это множество называют *конусом диверсификации*.

c) Однодолларовая изокванта блага j — это множество комбинаций факторов производства, позволяющих произвести объем блага j стоимостью 1 долл. Покажите, что при выполнении условия интенсивности использования факторов однодолларовые изокванты для двух благ могут пересекаться не более одного раза. Используя однодолларовые изокванты, приведите графическую иллюстрацию конуса диверсификации. (*Подсказка*: если бы изокванты пересекались дважды, то существовали бы две точки (по одной на каждой изокванте), пропорциональные друг другу и такие, что наклоны изоквант в этих точках одинаковы.)

d) Если совокупный запас факторов не принадлежит конусу диверсификации, то равновесие будет специализированным. Можете ли вы определить (как функцию от совокупного запаса факторов), на каком благе будет специализироваться экономика и каковы будут цены факторов производства? Убедитесь в выполнении условий, полученных в пункте (a). Для ответа на этот вопрос можно использовать графический анализ, проведенный в пункте (c).

15.D.7$^{\text{B}}$. Пусть в экономике производятся два блага с помощью двух факторов производства. Производственные функции фирм имеют вид

$$f_1(z_{11}, z_{21}) = 2(z_{11})^{1/2} + (z_{21})^{1/2} \text{ и } f_2(z_{12}, z_{22}) = (z_{12})^{1/2} + 2(z_{22})^{1/2}.$$

Международные цены на производимые блага равны $p = (1,\ 1)$. Фирмы принимают цены заданными и руководствуются максимизацией прибыли. Совокупный запас факторов производства составляет $\bar{z} = (\bar{z}_1,\ \bar{z}_2)$. Потребители не потребляют факторы производства. Найдите равновесное распределение факторов

$\left(\left(z_{11}^{*},\ z_{21}^{*}\right),\ \left(z_{12}^{*},\ z_{22}^{*}\right)\right)$ и равновесные цены факторов производства $\left(w_1^{*},\ w_2^{*}\right)$ как функции от $(\bar{z}_1,\ \bar{z}_2)$. Убедитесь, что вы получите один и тот же результат, используя уравнения (15.D.1) и (15.D.2) и решая уравнение (15.D.5).

15.D.8[B]**.** Рассмотрите модель с производством 2×2. Пусть производственные функции фирм имеют вид Кобба — Дугласа:

$$f_1(z_{11}, z_{21}) = (z_{11})^{2/3}(z_{21})^{1/3} \text{ и } f_2(z_{12}, z_{22}) = (z_{12})^{1/3}(z_{22})^{2/3}.$$

На мировом рынке цены производимой продукции равны $p = (1, 1)$, а совокупный запас факторов производства составляет $\bar{z} = (\bar{z}_1,\ \bar{z}_2) >> 0$. Найдите равновесные распределения факторов и цены факторов производства при всех возможных значениях $\bar{z}$. Будьте аккуратны при спецификации области значений векторов совокупного запаса в случае, когда экономика специализируется на производстве единственного товара.

15.D.9[C]**.** (*теорема Хекшера — Олина*). Пусть имеется два потребительских блага, два фактора производства и две страны, A и B. Каждая страна обладает технологией, как в модели с производством 2×2. Технологии производства каждого потребительского блага в обеих странах одинаковы. В технологии производства первого потребительского блага относительно более интенсивно используется фактор 1. Первоначальные запасы факторов в странах A и B составляют $\bar{z}_A \in \mathbb{R}^2_+$ и $\bar{z}_B \in \mathbb{R}^2_+$ соответственно. Предположим, что страна A относительно лучше обеспечена фактором 1, т. е. $\bar{z}_{1A}/\bar{z}_{2A} > \bar{z}_{1B}/\bar{z}_{2B}$. Потребители в обеих странах идентичны и имеют предпочтения, представимые возрастающими, вогнутыми и однородными функциями полезности, зависящими только от объемов потребления двух потребительских благ.

Предположим, что факторы производства немобильны и каждая страна принимает международные цены потребительских благ заданными. Будем считать, что тогда при международных ценах $p = (p_1, p_2)$, во-первых, ни одна из стран не специализируется на выпуске одного блага и, во-вторых, международные рынки потребительских благ уравновешены. Докажите, что страна A должна экспортировать благо 1, т. е. благо, в производстве которого относительно более интенсивно используется тот фактор, которым страна A относительно более богата.

Глава 16. Равновесие и благосостояние

16.A. Введение

Начиная с этой главы мы приступаем к систематическому изучению равновесия в экономиках, где агенты ведут себя как ценополучатели. Мы рассмотрим мир с L товарами, в котором потребители и фирмы взаимодействуют посредством рыночной системы. В этой системе на каждый товар устанавливается своя цена, и экономические агенты принимают эти цены заданными, не зависящими от их индивидуальных действий.

В этой главе мы сосредоточимся на описании базовых свойств равновесий с точки зрения благосостояния. Ряд более сложных проблем экономик благосостояния будет обсуждаться в главе 18 и части V.

В начале главы, разделе 16.B, специфицируется формальная модель экономики, рассматриваемой и в этой главе, и в оставшихся главах части IV. С базовыми составляющими этой модели — товарами, потребителями и фирмами — мы уже сталкивались в части I. Далее в разделе 16.B мы введем основные концепции, которые будут обсуждаться в разных аспектах на протяжении всей главы. Во-первых, мы введем нормативную концепцию *Парето-оптимального распределения*, т. е. такого распределения, когда невозможно улучшить положение какого-либо потребителя, не ухудшив при этом положение какого-либо другого потребителя. Затем мы представим два определения конкурентных равновесий: *вальрасианского* (или *конкурентного*) и его обобщения, *ценового равновесия с трансфертами*. Будет продемонстрировано применение концепции вальрасианского равновесия в случае *экономики с частной собственностью*, в которой богатство потребителя складывается из стоимости его первоначальных запасов и участия в прибыли фирм. В более общей постановке ценовое равновесие с трансфертами допускает любое произвольное распределение богатства среди потребителей.

Оставшиеся разделы данной главы будут посвящены исследованию взаимосвязи между введенными концепциями равновесия и Парето-оптимальностью.

В разделе 16.C мы сформулируем (довольно слабое) условие, при выполнении которого в любом ценовом равновесии с трансфертами (а следовательно, и любом вальрасианском равновесии) распределение Парето-оптимально. Это *первая фундаментальная теорема экономики благосостояния*, формальное выражение свойства «невидимой руки» рынка в конкурентных экономиках, о которой говорил Адам Смит.

Раздел 16.D будет посвящен в некотором смысле обратной задаче. Мы приведем условия (среди которых решающую роль играет выпуклость), при которых любое Парето-оптимальное распределение может быть поддержано как ценовое равновесие с трансфертами. Этот результат известен как *вторая фундаментальная теорема экономики благосостояния*. Эта теорема гласит, что если ее предпосылки выполнены, то, применяя соответствующие паушальные трансферты, центральная власть может в принципе реализовать любое желаемое Парето-оптимальное распределение как равновесие, где все агенты ведут себя как ценополучатели. Кроме того, мы обсудим факторы, ограничивающие применение этого результата на практике.

В разделе 16.E мы рассмотрим задачу максимизации *функции общественного благосостояния* и проследим связь этой задачи с концепцией Парето-оптимума: оказывается, эти два понятия тесно взаимосвязаны.

В разделе 16.F мы возвратимся к анализу концепции Парето-оптимальности и связанных с ней результатов, введя предпосылку о дифференцируемости соответствующих функций и исследуя условия первого порядка. Здесь мы увидим, как можно проинтерпретировать равновесные цены в терминах множителей Лагранжа, или теневых цен, соответствующих задаче поиска Парето-оптимальных распределений.

Несколько приложений рассмотренных концепций и полученных ранее результатов будет представлено в разделе 16.G. Сначала мы рассмотрим несколько примеров, связанных с определенной интерпретацией L товаров, один из которых касается *общественных благ*. Затем мы обсудим возможность применения полученных результатов в случае невыпуклых производственных множеств, что приведет нас к краткому описанию теории *ценообразования на основе предельных издержек*.

В приложении A будут рассмотрены технические вопросы, касающиеся ограниченности множества допустимых распределений и существования Парето-оптимума.

Классическими работами по материалу, изложенному в данной главе, являются работы (Koopmans, 1957; Debreu, 1959; Arrow and Hahn, 1971).

16.B. Базовая модель и определения

В этой главе мы исследуем экономику с L товарами, состоящую из $I > 0$ потребителей и $J > 0$ фирм. Данные L товаров можно интерпретировать самыми различными способами (мы обсудим несколько примеров в разделе 16.G).

Каждый потребитель $i = 1, \ldots, I$ характеризуется потребительским множеством $X_i \subset \mathbb{R}^L$ и отношением предпочтения $\succsim_i$, определенным на множестве X_i. Будем считать, что предпочтения потребителей рациональны (т. е. полны и транзитивны). Подробное обсуждение этих концепций можно найти в главах 1–3.

Каждая фирма $j = 1, \ldots, J$ характеризуется технологией, или производственным множеством, $Y_j \subset \mathbb{R}^L$. Будем считать, что все множества Y_j непусты и замкнуты. Обсуждение производственных множеств и их свойств изложено в главе 5.

Ресурсы товаров в экономике, или *первоначальный запас,* описываются вектором $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_L) \in \mathbb{R}^L$.

Таким образом, основные данные о предпочтениях, технологиях и ресурсах данной экономики описываются набором $\left(\left\{(X_i, \succsim_i\right\}_{i=1}^{I}, \left\{Y_j\right\}_{j=1}^{J}, \bar{\omega}\right)$.

Например, экономике чистого обмена с двумя потребителями и двумя благами, рассмотренной в разделе 15.В, соответствует случай $L = 2$, $I = 2$, $X_1 = X_2 = \mathbb{R}^L_+$, $J = 1$ и $Y_1 = -\mathbb{R}^2_+$ (технология расходования). В более общем случае мы будем говорить, что экономика является *экономикой чистого обмена*, если единственной технологической возможностью является та, что характеризуется свободой расходования, т. е. если $Y_j = -\mathbb{R}^L_+$ при $j = 1, \ldots, J$.

Определение 16.В.1. *Распределение* $(x, y) = (x_1, \ldots, x_I, y_1, \ldots, y_J)$ — это спецификация потребительского вектора $x_i \in X_i$ для каждого потребителя $i = 1, \ldots, I$ и производственного вектора $y_j \in Y_j$ для каждой фирмы $j = 1, \ldots, J$. Распределение (x, y) является *допустимым*, если $\sum\limits_i x_{li} = \bar{\omega}_l + \sum\limits_j y_{lj}$ для любого товара l, т. е. если

$$\sum_i x_i = \bar{\omega} + \sum_j y_j. \tag{16.B.1}$$

Обозначим множество допустимых распределений через

$$A = \left\{(x, y) \in X_1 \times \ldots \times X_I \times Y_1 \times \ldots \times Y_J : \sum_i x_i = \bar{\omega} + \sum_j y_j\right\} \subset \mathbb{R}^{L(I+J)}.$$

Введем понятие общественно желаемого исхода, известного как *Парето-оптимальное* распределение, изучением которого мы и займемся.

Определение 16.В.2. Допустимое распределение (x, y) *Парето-оптимально* (или *Парето-эффективно*), если не существует другого распределения $(x', y') \in A$, которое *доминирует* его *по Парето*, т. е. не существует другого допустимого распределения (x', y'), такого что $x'_i \succsim_i x_i$ для всех i и хотя бы для одного потребителя i $x'_i \succ_i x_i$.

Распределение Парето-оптимально, если ресурсы не тратятся впустую: невозможно улучшить положение одного потребителя, не ухудшив положения какого-то другого. Следует заметить, что концепция Парето-оптимальности не затрагивает вопросы перераспределения благ. Например, в экономике чистого обмена распределение, в котором весь первоначальный запас общества достается одному потребителю, предпочтения которого строго монотонны, с необходимостью является Парето-оптимальным.

В приложении А мы приводим условия, гарантирующие непустоту, замкнутость и ограниченность множества допустимых распределений A и существование Парето-оптимальных распределений.

Экономика с частной собственностью

На протяжении всей части IV мы будем изучать свойства конкурентных *экономик с частной собственностью*. В таких экономиках каждое благо продается и покупается на рынке по общеизвестным ценам, которые потребители и фирмы принимают заданными, не зависящими от их действий. Предполагается также, что при принятии решения потребители руководствуются критерием максимизации их благосостояния, а фирмы — максимизацией прибыли. Богатство потребителей складывается из стоимости их первоначального запаса и долей в прибыли фирм (*акций*), т. е. предполагается, что фирмы принадлежат потребителям[1].

Формально, потребитель i имеет вектор первоначальных запасов $\omega_i \in \mathbb{R}^L$ и обладает долей $\theta_{ij} \in [0, 1]$ в прибыли фирмы j, где $\bar{\omega} = \sum_i \omega_i$ и $\sum_i \theta_{ij} = 1$ для любой фирмы j. Таким образом, основные данные о предпочтениях, технологиях, ресурсах и долях собственности в экономике с частной собственностью описываются набором $\left(\left\{(X_i, \succsim_i\right\}_{i=1}^{I}, \left\{Y_j\right\}_{j=1}^{J}, \left\{(\omega_i, \theta_{i1}, \ldots, \theta_{iJ})\right\}_{i=1}^{I}\right)$.

Концепция равновесия в конкурентной экономике с частной собственностью называется *равновесием по Вальрасу* (или *вальрасианским равновесием*).

Определение 16.B.3. В экономике с частной собственностью, описываемой набором $\left(\left\{(X_i, \succsim_i\right\}_{i=1}^{I}, \left\{Y_j\right\}_{j=1}^{J}, \left\{(\omega_i, \theta_{i1}, \ldots, \theta_{iJ})\right\}_{i=1}^{I}\right)$, распределение (x^*, y^*) и вектор цен $p = (p_1, \ldots, p_L)$ образуют *вальрасианское* (или *конкурентное*) *равновесие*, если:

1) Для любой фирмы j y_j^* доставляет максимум прибыли на множестве Y_j, т. е.

$$p \cdot y_j \leq p \cdot y_j^* \text{ для всех } y_j \in Y_j.$$

[1] Как вы помните из раздела 5.G, при таких предположениях потребители — собственники фирм единодушно выступают за то, чтобы целью фирмы была максимизация прибыли.

2) Для любого потребителя i набор x_i^* является наилучшим при $\succsim_i$ в бюджетном множестве: $\left\{x_i \in X_i : p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} p \cdot y_j^*\right\}$[2].

3) $\sum_i x_i^* = \bar{\omega} + \sum_j y_j^*$.

Условие (1) определения 16.B.3 гласит, что в вальрасианском равновесии фирмы максимизируют свою прибыль при равновесных ценах p. Логика максимизации прибыли подробно обсуждалась в главе 5. Условие (2) говорит о том, что потребители максимизируют свое благосостояние при данных равновесных ценах и уровне богатства, который складывается из стоимости товарных запасов и долей в прибыли фирм. Подробное обсуждение выбора наилучшего согласно предпочтениям набора можно найти в главе 3. Наконец, условие (3) — это условие уравновешенности рынков, т. е. согласно этому условию все потребители и фирмы должны иметь возможность осуществить желаемые сделки по текущим рыночным ценам.

Ценовое равновесие с трансфертами

Цель этой главы — проследить связь между концепцией Парето-оптимального распределения и его поддержкой посредством рыночных взаимодействий агентов, принимающих цену заданной. Поэтому необходимо ввести понятие равновесия, в котором допускается более общий способ формирования уровня богатства потребителя, чем в экономике с частной собственностью. Можно представить ситуацию, когда общественный планировщик может (паушально) перераспределять богатство и, следовательно, агрегированное богатство общества может быть перераспределено между потребителями желаемым образом.

Определение 16.B.4. В экономике, описываемой набором $\left(\left\{(X_i, \succsim_i\right\}_{i=1}^I, \left\{Y_j\right\}_{j=1}^J, \bar{\omega}\right)$, распределение (x^*, y^*) и вектор цен $p = (p_1, \ldots, p_L)$ образуют *ценовое равновесие с трансфертами*, если потребителям можно приписать уровни богатства $(w_1, \ldots, w_I)$, где $\sum_i w_i = p \cdot \bar{\omega} + \sum_j p \cdot y_j^*$, так что:

1) для любой фирмы j y_j^* доставляет максимум прибыли на множестве Y_j, т. е.

$$p \cdot y_j \leq p \cdot y_j^* \text{ для всех } y_j \in Y_j;$$

2) для любого потребителя i набор x_i^* является наилучшим при $\succsim_i$ в бюджетном множестве: $\left\{x_i \in X_i : p \cdot x_i \leq w_i\right\}$;

[2] Фраза «x_i является наилучшим при $\succsim_i$ в множестве B» означает, что набор x_i — лучший выбор согласно предпочтениям потребителя i на бюджетном множестве B, т. е. $x_i \in B$ и $x_i \succsim_i x_i'$ для всех $x_i' \in B$.

3) $\sum_i x_i^* = \overline{\omega} + \sum_j y_j^*$.

Концепция ценового равновесия с трансфертами требует только, чтобы существовало *некоторое* распределение богатства, такое что (x^*, y^*) и вектор цен $p \in \mathbb{R}^L$ образуют равновесие. Она основывается на том, что экономические агенты ведут себя как ценополучатели, без каких-либо гипотез относительно того, как именно формируется уровень богатства потребителей. Заметим, что вальрасианское равновесие является частным случаем равновесия с трансфертами, когда для каждого потребителя i уровень богатства определяется стоимостью его вектора первоначальных запасов ω_i и участием в прибыли фирм $(\theta_{i1}, \ldots, \theta_{ij})$ без каких-либо трансфертов, т. е. при $w_i = p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} p \cdot y_j^*$ для всех $i = 1, \ldots, I$.

16.C. Первая фундаментальная теорема экономики благосостояния

В первой фундаментальной теореме экономики благосостояния формулируются условия, при которых любое распределение в ценовом равновесии с трансфертами, и в частности в вальрасианском равновесии, Парето-оптимально. Для конкурентных рыночных экономик она дает формальное и довольно общее подтверждение постулированного Адамом Смитом свойства рынка, известного как «невидимая рука». Все, что требуется для справедливости этого результата, — простая, довольно слабая предпосылка о *локальной ненасыщаемости предпочтений* (см. раздел 3.B). Обратите внимание, что здесь нет необходимости в каких бы то ни было предположениях о выпуклости.

Напомним определение локально ненасыщаемых предпочтений, введенное в разделе 3.B (определение 3.B.3).

Определение 16.C.1. Отношение предпочтения $\succsim_i$, определенное на потребительском множестве X_i, является *локально ненасыщаемым*, если для любого набора $x_i \in X_i$ и любого $\varepsilon > 0$ существует набор $x_i' \in X_i$, такой что $\|x_i' - x_i\| \le \varepsilon$ и $x_i' \succ_i x_i$.

Интуитивно это можно объяснить так: условие локальной ненасыщаемости будет выполнено, если существуют желаемые товары. Обратите внимание также и на важное следствие из этого условия: если отношение предпочтения $\succsim_i$ является непрерывным и локально ненасыщаемым, то любое замкнутое потребительское множество X_i должно быть неограниченным. В противном случае с необходимостью существует точка глобального (следовательно, и локального) насыщения (см. упражнение 16.C.1).

Утверждение 16.C.1 (*первая фундаментальная теорема экономики благосостояния*). Если предпочтения локально ненасыщаемы и (x^*, y^*, p) — ценовое равновесие с трансфертами, то распределение (x^*, y^*) Парето-оптимально. В частности, любое равновесное вальрасианское распределение Парето-оптимально.

Доказательство. Пусть (x^*, y^*, p) — ценовое равновесие с трансфертами при соответствующих уровнях богатства $(w_1, \ldots, w_I)$, причем $\sum_i w_i = p \cdot \bar{\omega} + \sum_j p \cdot y_j^*$.

Из условия выбора наилучшего набора каждым потребителем в определении ценового равновесия с трансфертами (т. е. части (2) определения 16.B.4) следует, что

$$\text{если } x_i \succ_i x_i^*, \text{ то } p \cdot x_i > w_i. \tag{16.C.1}$$

Другими словами, любой набор, который строго предпочитается потребителем i набору x_i^*, должен быть ему недоступен. Поскольку предпочтения локально ненасыщаемы, то из (16.C.1) следует дополнительное свойство:

$$\text{если } x_i \succsim_i x_i^*, \text{ то } \mathrm{p} \cdot x_i \geq w_i. \tag{16.C.2}$$

То есть любой набор, который по крайней мере не хуже x_i^*, в лучшем случае доступен потребителю, если он полностью потратит свой бюджет. Доказать это свойство довольно просто (вам предлагается это сделать в упражнении 16.C.2).

Теперь рассмотрим распределение (x, y), являющееся Парето-улучшением для распределения (x^*, y^*), т. е. такое, что $x_i \succsim_i x_i^*$ для всех потребителей i и хотя бы для некоторого i $x_i \succ_i x_i^*$. Из 16.C.2 $p \cdot x_i \geq \omega_i$ для любого i и из 16.C.1 $p \cdot x_i > \omega_i$ для некоторого i. Следовательно,

$$\sum_i p \cdot x_i > \sum_i w_i = p \cdot \bar{\omega} + \sum_j p \cdot y_j^*.$$

Более того, поскольку y_j^* максимизирует прибыль фирмы j при векторе цен p, то $p \cdot \bar{\omega} + \sum_j p \cdot y_j^* \geq p \cdot \bar{\omega} + \sum_j p \cdot y_j$. Таким образом,

$$\sum_i p \cdot x_i > p \cdot \bar{\omega} + \sum_j p \cdot y_j. \tag{16.C.3}$$

Но тогда распределение (x, y) не может быть допустимым, поскольку из $\sum_i x_i = \bar{\omega} + \sum_j y_j$ следует $\sum_i p \cdot x_i = p \cdot \bar{\omega} + \sum_j p \cdot y_j$, что противоречит (16.C.3). Таким образом, мы приходим к выводу, что равновесное распределение (x^*, y^*) должно быть Парето-оптимально. ■

В основе доказательства утверждения 16.C.1 лежит следующая идея: в любом допустимом распределении (x, y) совокупные издержки приобретения потребительских наборов $(x_1, \ldots, x_I)$, оцененные по ценам p, должны быть равны богатству общества при этих ценах, т. е. $p \cdot \overline{\omega} + \sum_j p \cdot y_j$. Более того, поскольку предпочтения локально ненасыщаемы, то если распределение (x, y) является Парето-улучшением распределения (x^*, y^*), то совокупные издержки приобретения потребительских наборов $(x_1, \ldots, x_I)$ при ценах p, а следовательно, богатство общества при этих ценах должны превышать совокупную стоимость равновесного потребительского распределения $p \cdot \left(\sum_i x_i^*\right) = p \cdot \overline{\omega} + \sum_j p \cdot y_j^*$. Но в силу максимизации прибыли (см. определение 16.B.4) не существует допустимого уровня производства, который позволял бы достичь стоимости общественного богатства при цене p, которая превышала бы $p \cdot \overline{\omega} + \sum_j p \cdot y_j^*$.

Значимость предпосылки о ненасыщаемости предпочтений для справедливости данного результата проиллюстрирована на рис. 16.C.1. В ситуации, изображенной на рисунке, предпочтения потребителя 1 не удовлетворяют свойству локальной ненасыщаемости (обратите внимание на «толстую» кривую безразличия этого потребителя); распределение x^* является равновесным при векторе цен $p = (p_1, p_2)$ (убедитесь в этом), но не является Парето-оптимальным. Действительно, для потребителя 1 распределение x эквивалентно распределению x^*, а для потребителя 2, имеющего строго монотонные предпочтения, оно строго лучше. (См. в вариант первой теоремы благосостояния, согласующийся с насыщаемостью предпочтений в упражнении 16.C.3.)

Относительно утверждения 16.C.1 следует отметить два момента. Во-первых, хотя может показаться, что этот результат следует из довольно слабых предпосылок, нужно не забывать, что наша теоретическая структура уже включает в себя два сильных предположения: *единые для всех*

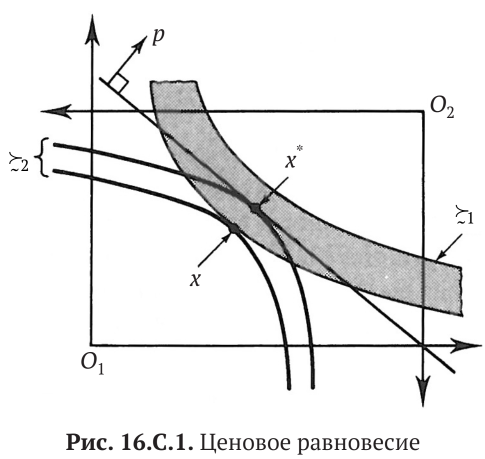


Рис. 16.C.1. Ценовое равновесие с трансфертами, которое не является Парето-оптимальным

цены на товары (полноту рынков) и условие, что экономические агенты ведут себя как *ценополучатели*. В части III мы изучили ряд обстоятельств (экстерналии, рыночную власть и асимметричную информацию), при которых эти условия не выполнены и, как следствие, равновесное распределение становится не Парето-оптимальным. Во-вторых, в первой теореме благосостояния совершенно ничего не говорится о желаемости равновесного распределения с дистрибутивной точки зрения. В разделе 16.D мы рассмотрим вторую фундаментальную теорему экономики благосостояния. Ее результат является в некотором смысле обратным к первой теореме благосостояния, поскольку в этой теореме приводятся условия, при которых любых желаемых дистрибутивных целей можно достичь с помощью конкурентных рынков (с агентами-ценополучателями).

16.D. Вторая фундаментальная теорема экономики благосостояния

Во второй фундаментальной теореме благосостояния приводятся условия, при которых Парето-оптимальное распределение может быть поддержано как ценовое равновесие с трансфертами. Она является в некотором смысле обратной к первой теореме благосостояния, поскольку гласит, что при некоторых предположениях мы можем достичь желаемого Парето-оптимального распределения как рыночного равновесия при использовании соответствующей паушальной схемы перераспределения богатства.

Для справедливости второй теоремы благосостояния требуются дополнительные предположения по сравнению с первой. Чтобы убедиться в этом, обратимся еще раз к примерам, рассмотренным в главе 15. На рис. 15.C.3(a) мы видели, что в экономике с одним потребителем и одной фирмой, если технология фирмы невыпукла, может оказаться невозможным поддержать Парето-оптимальное распределение как равновесное. На рис. 15.B.14 проиллюстрирована аналогичная ситуация для случая экономики обмена с двумя потребителями, когда предпочтения одного потребителя невыпуклы. Оба эти рисунка наталкивают на мысль, что выпуклость играет важнейшую роль для справедливости второй теоремы благосостояния. Обратите внимание, что выпуклость вовсе не затрагивается в первой теореме благосостояния, рассмотренной в разделе 16.C.

В ящике Эджворта на рис. 15.B.10(a) проиллюстрирован другой случай, когда не найдется таких цен, чтобы поддержать распределение как равновесное. На этом рисунке оба потребителя имеют выпуклые предпочтения, но Парето-оптимальное распределение (ω_1, ω_2) нельзя поддержать как равновесное распределение с трансфертами: ω_2 — оптимальный выбор потребителя 2 при любом векторе цен $p = (p_1, p_2) \geq 0$, когда его богатство равно $w_2 = p \cdot \omega_2$, но ω_1 не является оптимальным выбором потребителя 1 *ни при каком* векторе цен $p \geq 0$ и уровне богатства w_1.

Проблемы, поднятые в приведенных примерах, удобно решать пошагово. Первый шаг — сформулировать вариант второй фундаментальной теоремы, когда случаи, подобные представленным на рис. 15.B.10(a), допустимы, поскольку не противоречат предпосылкам теоремы. Это достигается путем введения концепции *ценового квазиравновесия с трансфертами* — более слабого варианта ценового равновесия с трансфертами. Мы докажем, что если все предпочтения и технологии выпуклы, то любое Парето-оптимальное распределение может быть достигнуто как ценовое квазиравновесие с трансфертами. Второй шаг — привести достаточные условия того, что ценовое квазиравновесие является «полноценным» равновесием. Такое разделение удобно, поскольку первый шаг носит общий характер и выделяет только центральную роль выпуклости, тогда как предположения, сделанные на втором шаге, как правило, вытекают из специфики конкретной рассматриваемой модели.

Определение квазиравновесия с трансфертами (определение 16.D.1) аналогично определению 16.B.4, за исключением того что условие выбора наилучшего согласно предпочтениям набора, из которого следует, что любой набор, предпочитаемый набору x_i^*, должен стоить больше w_i (т. е. «если $x_i \succ_i x_i^*$, то $p \cdot x_i > w_i$»), заменено на более слабое требование, что любой набор, предпочитаемый набору x_i^*, не может стоить меньше w_i (т. е. «если $x_i \succ_i x_i^*$, то $p \cdot x_i \geq w_i$»).

Определение 16.D.1. В экономике, описываемой набором $\left(\left\{(X_i, \succsim_i\right\}_{i=1}^{I}, \left\{Y_j\right\}_{j=1}^{J}, \bar{\omega}\right)$, распределение (x^*, y^*) и вектор цен $p = (p_1, \ldots, p_L) \neq 0$ образуют *ценовое квазиравновесие с трансфертами*, если потребителям можно приписать уровни богатства $(w_1, \ldots, w_I)$, где $\sum_i w_i = p \cdot \bar{\omega} + \sum_j p \cdot y_j^*$, так что

1) для любой фирмы j y_j^* доставляет максимум прибыли на множестве Y_j, т. е.

$$p \cdot y_j \leq p \cdot y_j^* \text{ для всех } y_j \in Y_j;$$

2) для любого потребителя i, если $x_i \succ_i x_i^*$, то $p \cdot x_i \geq w_i$;

3) $\sum_i x_i^* = \bar{\omega} + \sum_j y_j^*$.

Часть (2) определения 16.D.1 следует из условия выбора наилучшего согласно предпочтениям набора из определения ценового равновесия с трансфертами (часть (2) определения 16.B.4): если набор x_i^* является наилучшим согласно предпочтениям на бюджетном множестве: $\left\{x_i \in X_i : p \cdot x_i \leq w_i\right\}$, то не существует такого набора x_i, что $x_i \succ_i x_i^*$ и $p \cdot x_i < w_i$. Следовательно, любое ценовое равновесие с трансфертами является ценовым квазиравновесием с трансфертами, однако, как мы покажем в следующем разделе, обратное неверно.

Заметим также, что, когда предпочтения потребителей локально ненасыщаемы, из части (2) определения 16.D.1 следует, что $p \cdot x_i^* \geq w_i$ для любого потребителя i[3]. Кроме того, из (3) получаем: $\sum_i p \cdot x_i^* = p \cdot \bar{\omega} + \sum_j p \cdot y_j^* = \sum_i w_i$. Следовательно, *если предпочтения локально ненасыщаемы* (а мы всегда исходим из этой предпосылки), *то должно быть выполнено:* $p \cdot x_i^* = w_i$ *для любого потребителя i*. Это означает, что нам нет необходимости явно оговаривать, как формируется богатство потребителя w_i, и можно заменить часть (2) определения 16.D.1 на

2´) если $x_i \succ_i x_i^*$, то $p \cdot x_i \geq p \cdot x_i^*$.

Таким образом, распределение (x^*, y^*) и вектор цен p образуют ценовое квазиравновесие с трансфертами тогда и только тогда, когда выполнены условия (1), (2´) и (3)[4]. Более того, в случае локально ненасыщаемых предпочтений условие (2´) эквивалентно утверждению о том, что набор x_i^* доставляет минимум расходов потребителя на множестве $\{x_i \in X_i : x_i \succsim_i x_i^*\}$ (см. упражнение 16.D.1). Таким образом, при дальнейшем обсуждении в этом разделе условий, при которых ценовое квазиравновесие с трансфертами является ценовым равновесием с трансфертами в случае локально ненасыщаемых предпочтений, мы можем эквивалентно говорить об условиях, при которых из минимизации расходов на множестве $\{x_i \in X_i : x_i \succsim_i x_i^*\}$ следует выбор наилучшего набора на множестве $\{x_i \in X_i : p \cdot x_i \leq p \cdot x_i^*\} = \{x_i \in X_i : p \cdot x_i \leq w_i\}$. ■

В утверждении 16.D.1 приводится один из вариантов второй фундаментальной теоремы благосостояния.

Утверждение 16.D.1 (*вторая фундаментальная теорема экономики благосостояния*). Рассмотрим экономику, описываемую набором $\left(\{(X_i, \succsim_i\}_{i=1}^I, \{Y_j\}_{j=1}^J, \bar{\omega}\right)$, и предположим, что все множества Y_j выпуклы, а отношения предпочтения $\succsim_i$ локально ненасыщаемы и выпуклы (т. е. множество $\{x_i' \in X_i : x_i' \succsim_i x_i\}$ выпукло для любого $x_i \in X_i$). Тогда для каждого Парето-оптимального распределения (x^*, y^*) существует вектор цен $p = (p_1, \ldots, p_L) \neq 0$, такой что (x^*, y^*, p) является ценовым квазиравновесием с трансфертами.

Доказательство. По существу, данное доказательство представляет собой приложение теоремы о разделяющей гиперплоскости к выпуклым множествам (см. раздел M.G математического прило-

[3] Действительно, если предпочтения локально ненасыщаемы и $p \cdot x_i^* < w_i$, то в окрестности набора x_i^* существует набор x_i, такой что $x_i \succ_i x_i^*$ и $p \cdot x_i < w_i$, что противоречит условию (2) определения 16.D.1.

[4] Аналогичные рассуждения применимы и к определению ценового равновесия с трансфертами (определение 16.B.4). Если предпочтения локально ненасыщаемы, то мы получаем эквивалентное определение, убрав явную ссылку на богатство w_i и заменив часть (2) определения на (2´´): если $x_i \succ_i x_i^*$, то $p \cdot x_i > p \cdot x_i^*$. Таким образом, в случае локально ненасыщаемых предпочтений условие (2´´) говорит о том, что набор x_i^* является наилучшим выбором потребителя согласно его предпочтениям на множестве $\{x_i \in X_i : p \cdot x_i \leq p \cdot x_i^*\}$.

жения). Для упрощения восприятия доказательства мы проведем его пошагово.

Начнем с определения для каждого потребителя i множества V_i — множества потребительских наборов, предпочитаемых x_i^*, т. е. $V_i = \left\{ x_i \in X_i : x_i \succ_i x_i^* \right\} \subset \mathbb{R}^L$. Затем введем следующие обозначения:

$$V = \sum_i V_i = \left\{ \sum_i x_i \in \mathbb{R}^L : x_1 \in V_1, \ \ldots, \ x_I \in V_I \right\}$$

и

$$Y = \sum_j Y_j = \left\{ \sum_j y_j \in \mathbb{R}^L : y_1 \in Y_1, \ \ldots, \ y_J \in Y_J \right\}.$$

Таким образом, V — это множество агрегированных потребительских наборов, которые могут быть разделены на I индивидуальных наборов, причем каждый из них предпочитается соответствующим потребителем набору x_i^*. Множество Y — это просто агрегированное производственное множество. Следует заметить, что множество $Y + \{\bar{\omega}\}$ — агрегированное производственное множество со сдвигом начала координат на вектор первоначальных запасов $\bar{\omega}$ — описывает все наборы, доступные для потребления.

Шаг 1. Для любого потребителя i множество V_i выпукло. Пусть $x_i \succ_i x_i^*$ и $x_i' \succ_i x_i^*$. Возьмем число $0 \le \alpha \le 1$. Мы хотим доказать, что $\alpha x_i + (1-\alpha)x_i' \succsim_i x_i^*$. Поскольку предпочтения полны, то без потери общности можно предположить, что $x_i \succsim_i x_i'$. Следовательно, в силу выпуклости предпочтений имеем: $\alpha x_i + (1-\alpha)x_i' \succsim_i x_i'$, откуда по транзитивности следует искомый результат: $\alpha x_i + (1-\alpha)x_i' \succ_i x_i^*$ (вспомните часть (3) утверждения 1.B.1).

Шаг 2. Множества V и $Y + \{\bar{\omega}\}$ выпуклы. Это известный математический результат, который нетрудно доказать: сумма любых двух (а следовательно, и любого числа) выпуклых множеств выпукла.

Шаг 3. $V \cap (Y + \{\bar{\omega}\}) = \varnothing$. Это следствие Парето-оптимальности распределения (x^*, y^*). Если бы существовал вектор, принадлежащий одновременно V и $Y + \{\bar{\omega}\}$, то это бы означало, что при данном первоначальном запасе и технологии можно произвести такой агрегированный выпуск, что каждому потребителю i можно было бы дать потребительский набор, который для него лучше, чем набор x_i^*.

Шаг 4. Существует вектор $p = (p_1, \ldots, p_L) \neq 0$ и число r, такие что $p \cdot z \ge r$ для любого $z \in V$ и $p \cdot z \le r$ для любого $z \in Y + \{\bar{\omega}\}$. Это напрямую следует из теоремы о разделяющей гиперплоскости (см. раздел M.G математического приложения). Этот факт проиллюстрирован на рис. 16.D.1.

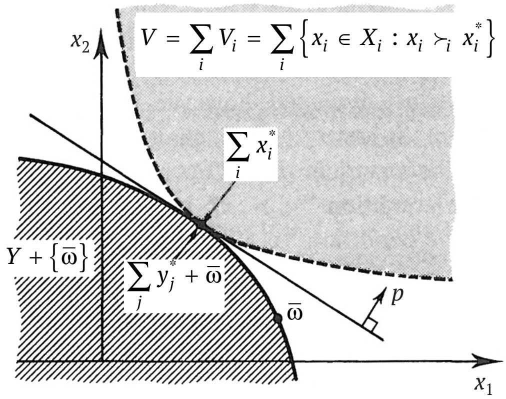


Рис. 16.D.1. Иллюстрация применения теоремы о разделяющей гиперплоскости для доказательства второй теоремы благосостояния

Шаг 5. Если $x_i \succsim_i x_i^*$ *для любого потребителя i, то* $p \cdot \left(\sum_i x_i\right) \geq r$.

Пусть $x_i \succsim_i x_i^*$ для любого потребителя i. В силу локальной ненасыщаемости для любого потребителя i найдется потребительский набор $\hat{x}_i$ сколь угодно близкий к x_i, такой что $\hat{x}_i \succ_i x_i$, и, следовательно, $\hat{x}_i \in V_i$. Тогда $\sum_i \hat{x}_i \in V$ и, значит, $p \cdot \left(\sum_i \hat{x}_i\right) \geq r$, откуда, взяв предел при $\hat{x}_i \to x_i$, получаем $p \cdot \left(\sum_i x_i\right) \geq r$ [5].

Шаг 6. $p \cdot \left(\sum_i x_i^*\right) = p \cdot \left(\bar{\omega} + \sum_j y_j^*\right) = r$. В силу шага 5 имеем: $p \cdot \left(\sum_i x_i^*\right) \geq r$. С другой стороны, $\sum_i x_i^* = \sum_j y_j^* + \bar{\omega} \in Y + \{\bar{\omega}\}$ и, следовательно, $p \cdot \left(\sum_i x_i^*\right) \leq r$. Таким образом, $p \cdot \left(\sum_i x_i^*\right) = r$. И поскольку $\sum_i x_i^* = \bar{\omega} + \sum_j y_j^*$, также выполнено и $p \cdot \left(\bar{\omega} + \sum_j y_j^*\right) = r$.

Шаг 7. Для любой фирмы j выполнено $p \cdot y_j \leq p \cdot y_j^*$ *для любого* $y_j \in Y_j$.
Для любой фирмы j и $y_j \in Y_j$ имеем: $y_j + \sum_{h \neq j} y_h^* \in Y$. Следовательно,

[5] С геометрической точки зрения мы показали, что множество $\sum_i \{x_i \in X_i : x_i \succsim_i x_i^*\}$ содержится в замыкании множества V (см. раздел M.F математического приложения), которое, в свою очередь, содержится в полупространстве $\{v \in \mathbb{R}^L : p \cdot v \geq r\}$.

$$p \cdot \left(\bar{\omega} + y_j + \sum_{h \neq j} y_h^* \right) \leq r = p \cdot \left(\bar{\omega} + y_j^* + \sum_{h \neq j} y_h^* \right).$$

Таким образом, $p \cdot y_j \leq p \cdot y_j^*$.

Шаг 8. Для любого потребителя i если $x_i \succ_i x_i^*$, то $p \cdot x_i \geq p \cdot x_i^*$. Возьмем любой набор x_i, такой что $x_i \succ_i x_i^*$. В силу шагов 5 и 6 имеем

$$p \cdot \left(x_i + \sum_{k \neq i} x_k^* \right) \geq r = p \cdot \left(x_i^* + \sum_{k \neq i} x_k^* \right).$$

Следовательно, $p \cdot x_i \geq p \cdot x_i^*$.

Шаг 9. Уровни богатства $w_i = p \cdot x_i^*$, где $i = 1, \ldots, I$, поддерживают (x^*, y^*, p) как ценовое квазиравновесие с трансфертами. Условия (1) и (2) определения 16.D.1 следуют из шагов 7 и 8, условие (3) — из условия допустимости Парето-оптимального распределения (x^*, y^*). ■

В упражнении 16.D.2 вас просят показать, что для справедливости утверждения 16.D.1 требуется предпосылка о локальной ненасыщаемости предпочтений.

В каком случае ценовое квазиравновесие с трансфертами будет ценовым равновесием с трансфертами? Как показывает пример, изображенный на рис. 15.B.10(a) и воспроизведенный еще раз на рис. 16.D.2, все не так просто. На рис. 16.D.2 продемонстрировано квазиравновесие, соответствующее Парето-оптимальному распределению, обозначенному через x^*. Единственным вектором цен (при нормировке $p_1 = 1$), поддерживающим распределение x^* как квазиравновесное, является вектор $p = (1, 0)$. При таких ценах потребители имеют следующие уровни богатства:

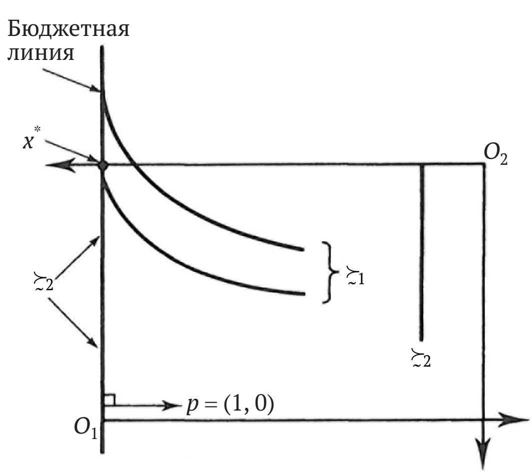


Рис. 16.D.2. Ценовое квазиравновесие, которое не является ценовым равновесием

$w_1 = p \cdot x_1^* = (1,\, 0) \cdot (0,\, x_{21}^*) = 0$ и $w_2 = p \cdot x_2^*$. Однако, хотя потребительский набор x_1^* и удовлетворяет части (2) определения 16.D.1 (действительно, $p \cdot x_1 \geq 0 = w_1$ для *любого* $x_1 \geq 0$), он *не является* наилучшим согласно предпочтениям потребителя 1 в его бюджетном множестве

$$\left\{(x_{11},\, x_{21}) \in \mathbb{R}^2_+ : (1,\, 0) \cdot (x_{11},\, x_{21}) \leq 0\right\} = \left\{(x_{11},\, x_{21}) \in \mathbb{R}^2_+ : x_{11} = 0\right\}.$$

Важная особенность только что рассмотренного примера состоит в том, что богатство потребителя 1 в квазиравновесии равно нулю. Как мы увидим далее, это ключевой момент в ответе на вопрос, будет ли квазиравновесие равновесием. В следующем утверждении приводится достаточное условие, при котором условие «из $x_i \succ_i x_i^*$ следует, что $p \cdot x_i \geq w_i$» эквивалентно условию выбора наилучшего согласно предпочтениям набора «если $x_i \succ_i x_i^*$, то $p \cdot x_i > w_i$».

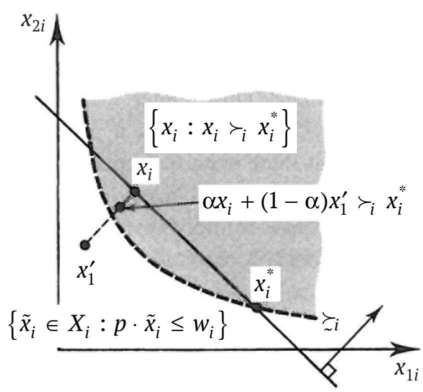


Рис. 16.D.3. Предположим, существует «более дешевый потребительский набор» (т. е. $x_i' \in X_i$, такой что $p \cdot x_i' < w_i$). Тогда, если множество наборов, предпочитаемых набору x_i^*, пересекается с бюджетным множеством (т. е. $p \cdot x_i \leq w_i$ для некоторого $x_i \succ_i x_i^*$), из этого следует, что множество наборов, предпочитаемых набору x_i^*, в действительности пересекается с внутренностью бюджетного множества (т. е. $p \cdot x_i < w_i$ для некоторого $x_i \succ_i x_i^*$).

Утверждение 16.D.2. Пусть множество X_i выпукло, а отношение предпочтения $\succsim_i$ непрерывно. Предположим также, что потребительский вектор $x_i^* \in X_i$, вектор цен p и уровень богатства w_i таковы, что из $x_i \succ_i x_i^*$ следует, что $p \cdot x_i \geq w_i$. Тогда, если существует такой потребительский вектор $x_i' \in X_i$, что $p \cdot x_i' < w_i$ (т. е. *существует более дешевый набор* при (p, w_i)), то это означает, что из $x_i \succ_i x_i^*$ следует, что $p \cdot x_i > w_i$[6].

Доказательство. Идея доказательства проиллюстрирована на рис. 16.D.3 (заметим, что на рисунке предполагается, что $p \cdot x_i^* = w_i$ просто потому, что это наиболее типичный случай, однако для доказательства утверждения этот факт не играет роли). Предположим от противного, что существует такой набор $x_i \succ_i x_i^*$, что $p \cdot x_i = w_i$. По предпосылке о существовании бо-

[6] Если, как во всех рассматриваемых приложениях, предпочтения $\succsim_i$ локально ненасыщаемы и $w_i = p \cdot x_i^*$, то утверждение 16.D.2 дает достаточные условия эквивалентности следующих утверждений: «x_i^* минимизирует расходы при ценах p во множестве $\left\{x_i \in X_i : x_i \succsim_i x_i^*\right\}$» и «$x_i^*$ — наилучший согласно предпочтениям $\succsim_i$ выбор потребителя в бюджетном множестве $\left\{x_i \in X_i : p \cdot x_i \leq p \cdot x_i^*\right\}$».

лее дешевого потребительского набора, существует набор $x_i' \in X_i$, такой что $p \cdot x_i' < w_i$. Тогда для всех $\alpha \in [0, 1)$ имеем: $\alpha x_i + (1 - \alpha)x_i' \in X_i$ и $p \cdot \left(\alpha x_i + (1 - \alpha)x_i'\right) < w_i$[7]. Но если взять α достаточно близким к 1, то из непрерывности $\succsim_i$ будет следовать, что $\alpha x_i + (1 - \alpha)x_i' \succ_i x_i^*$, т. е. приходим к противоречию, поскольку мы нашли такой потребительский набор, который предпочитается набору x_i^* и при этом стоит дешевле w_i. ■

Следует заметить, что в примере, представленном на рис. 16.D.2, в ценовом квазиравновесии, поддерживающем распределение x^*, богатство первого потребителя равно нулю, $w_1 = 0$, и поэтому при (p, w_1) не существует более дешевого набора[8].

Утверждение 16.D.3 является следствием утверждения 16.D.2.

Утверждение 16.D.3. Пусть для любого потребителя i множество X_i выпукло, $0 \in X_i$ и предпочтения $\succsim_i$ непрерывны. Тогда любое ценовое квазиравновесие с трансфертами, в котором $(w_1, \ldots, w_I) >> 0$, является ценовым равновесием с трансфертами.

Рассмотрим следствия утверждения 16.D.3 для экономики чистого обмена, в которой $\bar{\omega} >> 0$, все потребители имеют непрерывные локально ненасыщаемые предпочтения и $X_i = \mathbb{R}_+^L$. В такой экономике в силу свободы расходования и максимизации прибыли в любом ценовом квазиравновесии должно быть выполнено: $p \geq 0$ и $p \neq 0$[9]. Таким образом, при данных предположениях любое ценовое квазиравновесие с трансфертами, в котором $x_i^* >> 0$ для всех i, является ценовым равновесием с трансфертами (поскольку $w_i = p \cdot x_i^* > 0$ для всех i). Однако мы можем сказать и больше. Предположим, кроме того, что предпочтения строго монотонны. Тогда в любом ценовом квазиравновесии с трансфертами $p >> 0$. Действительно, из $p \geq 0$, $p \neq 0$ и $\bar{\omega} >> 0$ следует, что $\sum_i w_i = p \cdot \bar{\omega} > 0$ и, следовательно, $w_i > 0$ для *некоторого* потребителя i. Но тогда, в соответствии с утверждением 16.D.2, этот потребитель должен выбирать из бюджетного множества $\left\{x_i \in \mathbb{R}_+^L : p \cdot x_i \leq w_i\right\}$ наилучший согласно предпочтениям набор, который, в силу строгой монотонности предпочтений, может не найтись, если цены не строго положительны. Поскольку мы знаем, что должно быть выполнено условие $p >> 0$, то отсюда следует вывод, что *любое* ценовое квазиравновесие с трансфертами в данной экономике является ценовым равновесием с трансфертами: если набор потребителя i удовлетворяет условию $x_i^* \neq 0$, то $p \cdot x_i^* = w_i > 0$ и применимо утверждение 16.D.2. С другой стороны, если $x_i^* = 0$, то $w_i = 0$ и искомый результат следует из того, что $x_i^* = 0$ является един-

[7] Аналогично можно показать, что если множество X_i выпукло и функция вальрасианского спроса $x_i(p, w_i)$ хорошо определена, то при (p, w_i) существует более дешевый набор тогда и только тогда, когда существует набор x_i', сколь угодно близкий к набору $x_i(p, w_i)$, такой что $p \cdot x_i' < w_i$. В приложении А главы 3 эта концепция называется *условием существования (локально) более дешевого потребительского набора*.

[8] Заметим также, что в утверждении 16.D.2 обобщается результат утверждения 3.E.1(2), в котором вводится предпосылка о локальной ненасыщаемости, $w_i = p \cdot x_i^* > 0$ и $X_i = \mathbb{R}_+^L$.

[9] Действительно, если $p_l < 0$, то, используя благо l, фирма может получить неограниченно большую прибыль.

ственным вектором, принадлежащим множеству $\left\{x_i \in \mathbb{R}^L_+ : p \cdot x_i \leq 0\right\}$. (В упражнении 16.D.3 вас просят распространить предложенный здесь подход на случай экономики с производством.)

Вторая теорема благосостояния (вместе с утверждениями 16.D.2 и 16.D.3) дает условия, при которых любое Парето-оптимальное распределение может быть реализовано посредством рыночного механизма, а также предлагает строгое концептуальное подтверждение работы с конкурентными рынками даже в вопросах распределительного свойства. Однако важно понимать, с какими ограничениями придется столкнуться, применяя этот теоретический результат на практике.

Во-первых, следует отметить, то центральная власть, желающая реализовать конкретное Парето-оптимальное распределение как равновесное, должна иметь возможность гарантировать, что поддерживающие это распределение цены $(p_1, ..., p_L)$ должны приниматься и фирмами и потребителями как заданные. Если рыночная структура такова, что нельзя гарантировать, что все экономические агенты будут вести себя как ценополучатели (например, поскольку не все экономические агенты малы по сравнению с размерами рынка), то центральная власть должна каким-то образом навязать эти цены либо посредством мониторинга всех сделок, либо предлагая к продаже или покупке любой объем любого блага l по цене p_l.

Во-вторых, центральная власть, желающая применить вторую теорему благосостояния, должна быть очень хорошо информирована. В первую очередь она должна иметь достоверную информацию, позволяющую идентифицировать Парето-оптимальное распределение, которое предполагается реализовать как равновесное, а также правильно вычислить соответствующий поддерживающий вектор цен. Для этого власти должно быть по крайней мере известно статистическое совместное распределение предпочтений, первоначальных запасов и других релевантных характеристик агентов, присутствующих в данной экономике. Однако для корректного вычисления трансферта для каждого потребителя центральная власть должна знать *еще больше*: она должна уметь различать потребителей, наблюдая их частные характеристики (например, предпочтения и первоначальные запасы). Крайне маловероятно, что подобная информация на практике окажется доступной. В результате большая часть трансфертных схем не является паушальной. Например, если центральная власть хотела бы перераспределить богатство, забрав часть его у тех, кто обладает ценными трудовыми навыками, и отдав тем, кто таковых не имеет, то единственный способ осуществить такие трансферты — точно знать, к какому типу относится каждый потребитель, исходя из наблюдаемого *фактического* заработка. Но если трансферты основываются на наблюдаемом заработке, то они перестают быть паушальными по самой своей природе. Индивиды осознают, что, уменьшив свой наблюдаемый заработок, они уменьшат свое налоговое бремя.

Наконец, даже если центральная власть обладает всей необходимой информацией, она должна еще иметь и власть, чтобы реализовать механизм налогов и трансфертов так, чтобы индивиды не могли от них уклониться.

В силу всех этих информационных и организационных ограничений на практике осуществление такого паушального налогообложения крайне затруднительно[10]. Как мы увидим в разделе 18.D, если такой тип трансфертов невозможен, то вторая теорема благосостояния не работает в том смысле, что в обычной экономике только ограниченный диапазон Парето-оптимальных распределений может быть поддержан посредством цен и обычной системы налогообложения. Как правило, схемы перераспределения богатства оказываются *искажающими*, т. е. происходит противопоставление дистрибутивных целей и Парето-оптимальности. Анализ выбора между этими двумя факторами является предметом экономики благосостояния *в условиях второго наилучшего*, некоторые элементы которой представлены в главе 22. (В главе 23 довольно подробно будет рассмотрен вопрос о том, какие распределения реализуемы центральной властью, сталкивающейся с информационными и организационными ограничениями, а какие — нет.)

Подводя итог, следует сказать, что вторая теорема благосостояния является важной точкой отсчета с *теоретической* точки зрения. Но при этом она довольно далека от того, чтобы основывать на ней рекомендации для непосредственного применения на практике. Напротив, указывая на то, что необходимо для достижения желаемого Парето-оптимального распределения, она, можно сказать, предупреждает, что сделать это будет непросто.

В силу вышеизложенного становится очевидно, что во второй теореме благосостояния предпосылка о выпуклости играет центральную роль, и этот вопрос заслуживает отдельного обсуждения. Если количество экономических агентов довольно велико, то вторая теорема благосостояния особенно хорошо интерпретируется. Это связано с тем, что в данном случае экономические агенты ведут себя как ценополучатели (что гарантирует выполнение одной из предпосылок теоремы) в силу действия самих рыночных механизмов (в противном случае неизбежно должен существовать некий централизованный механизм, гарантирующий фиксированность цен). Однако оказывается, что если потребителей много (в пределе — континуум) и если невыпуклость производственного множества в определенном смысле ограниченна, то вторая теорема благосостояния *не* требует предпосылки о выпуклости предпочтений и производственных множеств.

Для того чтобы эта идея стала понятнее, рассмотрим пример экономики с одним потребителем, представленный на рис. 16.D.4, где в силу отсутствия выпуклости

[10] Заметим, что объем требуемого паушального налогообложения зависит не только от уровня конечного богатства ($w_1, \ldots, w_I$), но также и от исходной ситуации. Например, в экономике с частной собственностью чистый трансферт для потребителя i составит $w_i - p \cdot \omega_i - \sum_j \theta_{ij} p \cdot y_j^*$, а значит, он зависит также и от первоначального запаса потребителя. Вальрасианским равновесиям соответствует ситуация, когда налогообложение отсутствует, и чем дальше от вальрасианских уровней богатства мы хотим уйти, тем бóльшие трансферты для этого потребуются.

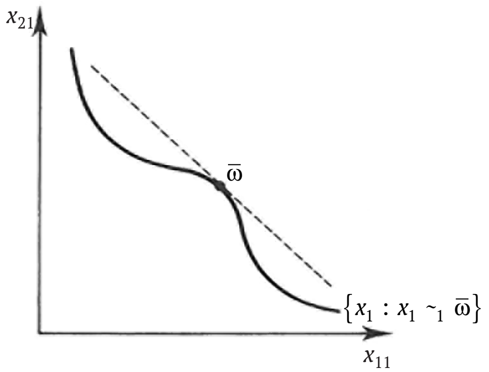


Рис. 16.D.4. Экономика с одним потребителем (без производства), где точка первоначального запаса не может быть поддержана никакими ценами

предпочтений (тривиальное Парето-оптимальное) распределение $x_1 = \bar{\omega}$ невозможно поддержать ценами. Однако если реплицировать данную экономику, так чтобы в ней было *два* потребителя и *удвоенный* совокупный первоначальный запас $2\bar{\omega}$, то распределение $x_1 = x_2 = \bar{\omega}$ также не может быть поддержано ценами, но теперь *данное симметричное распределение более не является Парето-оптимальным*. Как видно из рис. 16.D.5, распределение

$$x_1' = \bar{\omega} + (1, -1) \text{ и } x_2' = \bar{\omega} + (-1, 1)$$

является Парето-улучшением для распределения $x_1 = x_2 = \bar{\omega}$. Из этого, безусловно, не следует, что уже при удвоении любое распределение, которое не может быть поддержано ценами, не является Парето-оптимальным. (На рис. 16.D.6 изображен ящик Эджворта, соответствующий рис. 16.D.5. На этом рисунке распределение x' Парето-оптимально, но по-прежнему не может быть поддержано ценами.) Однако можно показать, что если число реплик достаточно велико, то любое допустимое

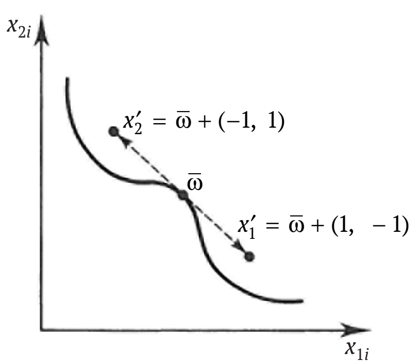


Рис. 16.D.5. Распределение (x_1', x_2') является Парето-улучшением для распределения $(\bar{\omega}, \bar{\omega})$ в дважды реплицированной экономике из рис. 16.D.4

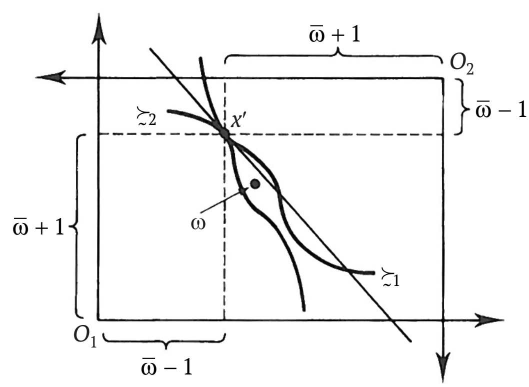


Рис. 16.D.6. Распределение $x' = (x_1', x_2')$ Парето-оптимально, но не может быть поддержано никакими ценами

распределение, которое не может быть поддержано ценами, может быть улучшено по Парето, а следовательно, любой Парето-оптимум должен быть (почти) поддерживаем ценами (подробнее об этом см. в упражнении 16.D.4)[11].

16.E. Парето-оптимальность и оптимум общественного благосостояния

В этом разделе мы обсудим взаимосвязь между концепцией Парето-оптимальности и максимизацией функции общественного благосостояния (более подробнее об этой концепции см. в разделе 4.D и главе 22).

Для данного семейства (непрерывных) функций полезности $u_i(\cdot)$, представляющих предпочтения $\succsim_i$ I потребителей, мы можем описать достижимые уровни полезности в экономике, специфицированной набором $\left(\left\{(X_i,\ \succsim_i\right\}_{i=1}^{I},\ \left\{Y_j\right\}_{j=1}^{J},\ \bar{\omega}\right)$, посредством *множества возможных уровней полезности*:

$$U = \{(u_1, \ldots, u_\mathrm{I}) \in \mathbb{R}^I\text{: существует допустимое распределение } (x, y),\ \text{такое что } u_i \le u_i(x_i),\ \text{где } i = 1, \ldots, I\}.$$

На рис. 16.E.1 это множество изображено для экономики с двумя потребителями. (Обратите внимание, что мы изобразили $U \subset R^I$ как замкнутое множество. В приложении А обсуждаются условия, при которых мы можем гарантировать, что это множество будет действительно замкнутым.)

По определению Парето-оптимальности значения полезности в Парето-оптимальных точках должны принадлежать границе множества возможных уровней полезности[12]. Определим формально *границу Парето*, *UP*, также отмеченную на рис. 16.E.1, следующим образом:

$$UP = \{(u_1, \ldots, u_I) \in U\text{: не существует } (u_1', \ldots, u_I') \in U, \text{ такого что } u_i' \ge u_i \text{ для всех } i \text{ и } u_i' > u_i \text{ для некоторого } i\}.$$

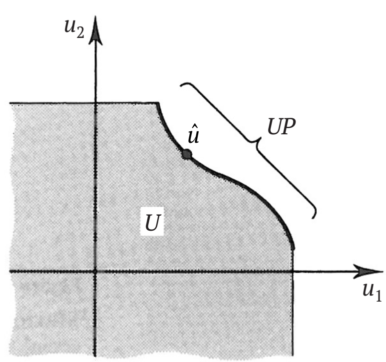


Рис. 16.E.1. Множество возможных уровней полезности

[11] В главе 17 приводятся два факта, которые обосновывают это утверждение. Во-первых, в разделе 17.I мы показываем, что для существования вальрасианского равновесия в большой экономике не требуется (или почти не требуется) выпуклости. Во-вторых, как будет показано в разделе 17.C, вторую теорему благосостояния можно переформулировать в виде утверждения о существовании вальрасианского равновесия в экономиках, где первоначальные запасы распределены определенным образом, и поэтому можно считать, что она следует из условий, гарантирующих существование вальрасианских равновесий в общем случае.

[12] Однако не каждая точка на этой границе должна быть Парето-оптимальной. Вернемся, например, назад к рис. 16.C.1: на этом рисунке значения полезности в точке x^* принадлежат границе множества возможных уровней полезности, поскольку невозможно улучшить положение *обоих* потребителей, но при этом распределение x^* не является Парето-оптимальным.

Теперь нам легче интуитивно понять следующее утверждение.

Утверждение 16.E.1. Допустимое распределение $(x, y) = (x_1, \ldots, x_I, y_1, \ldots, y_J)$ Парето-оптимально тогда и только тогда, когда $(u_1(x_1), \ldots, u_I(x_I)) \in UP$.

Доказательство. Пусть $(u_1(x_1), \ldots, u_I(x_I)) \notin UP$, тогда существует вектор $(u'_1, \ldots, u'_I) \in U$, такой что $u'_i \geq u_i(x_i)$ для всех i и $u'_i > u_i(x_i)$ хотя бы для одного потребителя i. Но $(u'_1, \ldots, u'_I) \in U$, только если существует допустимое распределение (x', y'), такое что $u_i(x'_i) \geq u'_i$ для всех i. Отсюда следует, что распределение (x', y') является Парето-улучшением распределения (x, y). Докажем в обратную сторону: пусть (x, y) не является Парето-оптимальным распределением. Тогда существует некоторое допустимое распределение (x', y'), которое является его Парето-улучшением, т. е. $u_i(x'_i) \geq u_i(x_i)$ для всех i и $u_i(x'_i) > u_i(x_i)$ хотя бы для одного потребителя i. Следовательно, $(u_1(x_1), \ldots, u_I(x_I)) \notin UP$. ■

Заметим также, что если все X_i и все Y_j выпуклы и если функции полезности $u_i(\cdot)$ вогнуты, то множество возможных уровней полезности U является выпуклым (см. упражнение 16.E.2)[13]. Пример такого множества возможных уровней полезности представлен на рис. 16.E.2.

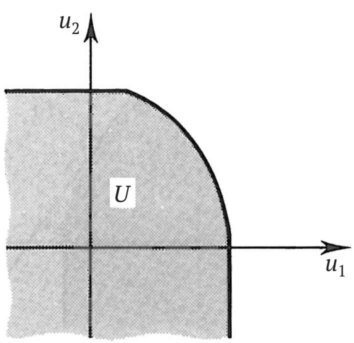


Рис. 16.E.2. Выпуклое множество возможных уровней полезности

Предположим теперь, что дистрибутивные цели общества описываются *функцией общественного благосостояния* $W(u_1, \ldots, u_I)$, приписывающей значение общественной полезности различным возможным векторам полезности I потребителей. Здесь мы рассмотрим только один простой класс функций общественного благосостояния — *линейные* функции вида

$$W(u_1, \ldots, u_I) = \sum_i \lambda_i u_i$$

при некоторых постоянных $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_I)$[14]. Введем обозначение: $u = (u_1, \ldots, u_I)$, тогда мы можем функцию общественного благосостояния записать как $W(u) = \lambda \cdot u$. Поскольку общественное благосостояние не должно убывать с ростом полезности потребителей, то будем считать, что $\lambda \geq 0$.

Имея линейную функцию общественного благосостояния, мы можем найти во множестве возможных уровней полезности U такие точки, в ко-

[13] Можно показать, что при незначительном техническом усилении предпосылки о строгой выпуклости предпочтений (по сути, то же самое условие используется, чтобы гарантировать дифференцируемость функции вальрасианского спроса в приложении А главы 3) в семействе функций полезности $u_i(\cdot)$, описывающих предпочтения $\succsim_i$, существуют такие функции полезности, которые не только квазивогнуты, но также и вогнуты.

[14] Обсуждение функций общественного благосостояния более общего вида предлагается в главе 22.

торых достигается максимум нашей меры общественного благосостояния, решив следующую задачу:

$$\max_{u \in U} \lambda \cdot u. \qquad (16.E.1)$$

Решение задачи (16.E.1) проиллюстрировано на рис. 16.E.3. Как можно предположить, глядя на этот рисунок, справедлив результат, представленный в утверждении 16.E.2.

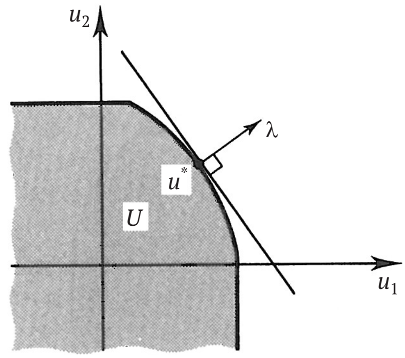


Рис. 16.E.3. Максимизация линейной функции общественного благосостояния

Утверждение 16.E.2. Пусть $u^* = (u_1^*, \ldots, u_I^*)$ — решение задачи максимизации общественного благосостояния (16.E.1) при $\lambda \gg 0$. Тогда $u^* \in UP$, т. е. u^* — вектор полезностей в Парето-оптимальном распределении. Более того, если множество возможных уровней полезности U выпукло, то для любого $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I) \in UP$ существует вектор весов $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_I) \geq 0$, $\lambda \neq 0$, такой что $\lambda \cdot \tilde{u} \geq \lambda \cdot u$ для всех $u \in U$, т. е. такой что $\tilde{u}$ является решением задачи максимизации общественного благосостояния (16.E.1).

Доказательство. Первая часть утверждения доказывается очень просто: если бы вектор u^* не был Парето-оптимальным, то тогда существовал бы вектор $u \in U$, такой что $u \geq u^*$ и $u \neq u^*$, и поскольку $\lambda \gg 0$, то должно выполняться: $\lambda \cdot u > \lambda \cdot u^*$.

Для доказательства второй части заметим, что если $\tilde{u} \in UP$, то $\tilde{u}$ принадлежит границе множества U. По теореме об опорной гиперплоскости (см. раздел M.G математического приложения) существует $\lambda \neq 0$, такое что $\lambda \cdot \tilde{u} \geq \lambda \cdot u$ для всех $u \in U$. Более того, поскольку множество U построено так, что $U - \mathbb{R}_+^I \subset U$, то должно быть выполнено: $\lambda \geq 0$ (действительно, если $\lambda_i < 0$, то, выбрав $u \in U$, таким что $u_i < 0$ и по абсолютной величине достаточно велико, мы могли бы получить $\lambda \cdot u > \lambda \cdot \tilde{u}$). ■

Утверждение 16.E.2 говорит о том, что в экономиках с выпуклыми множествами возможных уровней полезности наблюдается тесная связь между Парето-оптимумом и оптимум линейной функции общественного благосостояния: каждый оптимум линейной функции общественного благосостояния с весами $\lambda \gg 0$ Парето-оптимален, и каждое Парето-оптимальное распределение (а значит, и каждое вальрасианское равновесие) является оптимумом общественного благосостояния при *некоторых* весах $(\lambda_1, \ldots, \lambda_I) \geq 0$[15].

Как обычно, в случае когда множество U невыпукло, мы не можем гарантировать, что Парето-оптимум может быть поддержан как максимум

[15] Во второй части данного утверждения некоторые λ_i могут быть равны нулю по причине, аналогичной той, с которой мы уже сталкивались, характеризуя эффективные производственные векторы в утверждении 5.F.2.

линейной функции общественного благосостояния: примером может служить точка $\hat{u}$ на рис. 16.E.1.

Используя веса в функции общественного благосостояния, соответствующие конкретному Парето-оптимальному распределению (возможно, вальрасианскому равновесию), мы можем рассматривать Парето-оптимум как оптимум общественного благосостояния в некоторой экономике с одним потребителем и одной фирмой. Действительно, пусть (x^*, y^*) — Парето-оптимальное распределение и пусть $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_I) \gg 0$ — вектор весов благосостояния, поддерживающий U в точке $\left(u_1^*\left(x_1^*\right), \ldots, u_I^*\left(x_I^*\right)\right)$. Зададим функцию полезности $u_\lambda(\bar{x})$, определенную на агрегированных потребительских векторах из множества $X = \sum_i X_i \subset \mathbb{R}^L$ следующим образом:

$$u_\lambda(\bar{x}) = \max_{(x_1,\ldots,x_I)} \sum_i \lambda_i u_i(x_i) \tag{16.E.2}$$

$$\text{при } x_i \in X_i \text{ для всех } i \text{ и } \sum_i x_i = \bar{x}.$$

Функция полезности $u_\lambda(\cdot)$ — (прямая) функция полезности н-репрезентативного потребителя (репрезентативного потребителя с нормативной точки зрения) в соответствии с определениями и обсуждениями из раздела 4.D (см., в частности, упражнение 4.D.4). Пусть $Y = \sum_j Y_j$ — агрегированное производственное множество. Тогда пара $\left(\sum_i x_i^*, \sum_j y_j^*\right)$ является решением следующей задачи:

$$\max u_\lambda(\bar{x}) \text{ при } \bar{x} = \bar{\omega} + \bar{y}, \text{ где } \bar{x} \in X, \ \bar{y} \in Y.$$

Решение этой задачи представлено на рис. 16.E.4.

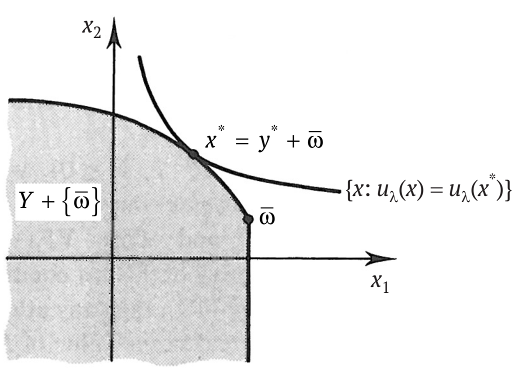


Рис. 16.E.4. Максимизация полезности репрезентативного потребителя

Важно подчеркнуть, что конкретная функция полезности, выбранная для репрезентативного потребителя, зависит от весов $(\lambda_1, \ldots, \lambda_I)$, а следовательно, от рассматриваемого Парето-оптимального распределения.

16.F. Условия первого порядка для Парето-оптимума

Это раздел учебного свойства: мы стараемся не ограничиваться минимальными предпосылками и намеренно излагаем материал медленно и подробно. Вводя предпосылку о дифференцируемости функций, мы показываем, как цены и оптимальные свойства поведения агентов-ценополучателей естественным образом вытекают из анализа условий первого порядка задач поиска Парето-оптимальных распределений. По ходу изложения мы повторяем и обобщаем некоторые аспекты анализа двух фундаментальных теорем благосостояния, проведенного в разделах 16.C и 16.D[16].

Для начала введем ряд предположений: будем считать, что потребительское множество каждого потребителя равно $\mathbb{R}^L_+$, а предпочтения представимы дважды непрерывно дифференцируемой функцией полезности $u_i(x_i)$, причем $\nabla u_i(x_i) >> 0$ для всех x_i (т. е. предпочтения потребителей строго монотонны). Кроме того, введем нормировку $u_i(0) = 0$.

Производственное множество фирмы j имеет вид $Y_j = \left\{y \in \mathbb{R}^L : F_j(y) \leq 0\right\}$, где $F_j(y) = 0$ описывает трансформационную границу для фирмы j. Предположим также, что функции F_j: $\mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируемы, причем $F_j(0) \leq 0$ и $\nabla F_j(y_j) = \left(\partial F_j(y_j)/\partial y_{1j}\ ,\ \dots,\ \partial F_j(y_j)/\partial y_{Lj}\right) >> 0$ для всех $y_j \in \mathbb{R}^L$. Последнее условие означает, что если $F_j(y_j) = 0$, т. е. y_j лежит на трансформационной границе множества Y_j, то любая попытка произвести больший выпуск некоторого блага или использовать меньший объем некоторого фактора приводит к тому, что значение $F_j(\cdot)$ становится положительным, а значит, мы выходим за границы множества Y_j (другими словами, y_j эффективен в производственном множестве Y_j (см. раздел 5.F)[17].

Будем считать также, что предпочтения потребителей и производственные множества выпуклы.

Задача поиска Парето-оптимальных распределений в такой экономике сводится к определению распределений вида

$$(x,\ y) = (x_1,\ \dots,\ x_I,\ y_1,\ \dots,\ y_J) \in \mathbb{R}^{LI}_+ \times \mathbb{R}^{LJ},$$

которые являются решением следующей задачи:

$$\max u_1(x_{11}, \dots, x_{L1}) \tag{16.F.1}$$

[16] Предлагаемый анализ проводится в духе следующих основополагающих работ по данной тематике: (Allais, 1953; Lange, 1942; Samuelson, 1947).

[17] Для наглядности изложения будем считать, что все $F_j(\cdot)$ определены на всем множестве $\mathbb{R}^L$. Следствием этого (с учетом предпосылки $\nabla F_j(y_j) \gg 0$ для всех y_j) является тот факт, что в рамках производственного процесса каждый товар является одновременно и фактором производства, и выпуском. Поскольку такое предположение малореалистично, мы еще раз подчеркиваем, что вводим его исключительно для упрощения изложения.

$$\begin{aligned} \text{при (1) } & u_i(x_{1i}, \ \ldots, \ x_{Li}) \geq \bar{u}_i, \quad i = 2, \ldots, I \\ (2) \ & \sum_i x_{li} \leq \bar{\omega}_l + \sum_j y_{lj}, \quad l = 1, \ldots, L \\ (3) \ & F_j(y_{1j}, \ldots, y_{Lj}) \leq 0, \qquad j = 1, \ldots, J. \end{aligned}$$

В задаче (16.F.1) проблема поиска Парето-оптимума сформулирована как задача максимизации благосостояния потребителя 1, при условии что уровень полезности остальных потребителей не ниже некоторого заданного (ограничения (1)), а также при ресурсных и технологических ограничениях (ограничения (2) и (3) соответственно). Решая задачу (16.F.1) при различных ограничениях на заданный уровень полезности всех потребителей, кроме первого, $(\bar{u}_2, \ \ldots, \ \bar{u}_I)$, мы можем найти все Парето-оптимальные распределения в данной экономике. Действительно, в этом можно убедиться, выполнив упражнение 16.F.1.

Упражнение 16.F.1. Покажите, что любое распределение, являющееся решением задачи (16.F.1), Парето-оптимально, и, наоборот, любое Парето-оптимальное распределение в данной экономике должно быть решением задачи (16.F.1) при *некотором* выборе уровней полезности $(\bar{u}_2, \ \ldots, \ \bar{u}_I)$. (*Подсказка*: воспользуйтесь строгой монотонностью предпочтений.)

Поскольку функции полезности нормированы так, что принимают только неотрицательные значения, то с этого момента будем рассматривать только такие фиксированные уровни полезности, что $\bar{u}_i \geq 0$ для всех i.

Смысл упражнения 16.F.1 становится ясен, если исследовать множество возможных уровней полезности U на рис. 16.F.1. Если мы зафиксируем на неотрицательном уровне полезность потребителя 2, то, максимизируя полезность потребителя 1 при данном ограничении на полезность потребителя 2, мы найдем точку на границе множества возможных уровней полезности U. Варьируя затем значения полезности потребителя 2, мы получим множество Парето-оптимальных точек.

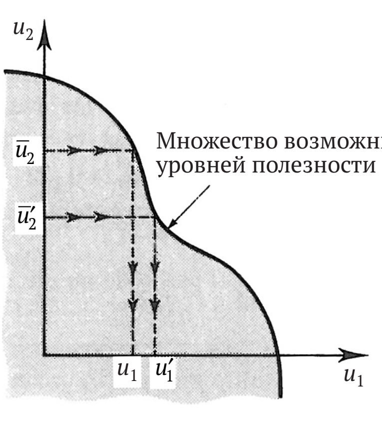


Рис. 16.F.1. Параметризация границы множества возможных уровней полезности при $I = 2$ с помощью заданного уровня полезности потребителя 2

В рамках введенных предположений (как вы помните, $\bar{u}_i \geq 0$ для всех $i \geq 2$) в решении задачи (16.F.1) все ограничения являются связывающими. Обозначим через $(\delta_2, \ldots, \delta_I) \geq 0$, $(\mu_1, \ldots, \mu_L) \geq 0$ и $(\gamma_1, \ \ldots, \ \gamma_J) \geq 0$ множители, соответствующие ограничениям (1), (2) и (3) задачи (16.F.1) соответственно. Положим $\delta_1 = 1$. В упражнении 16.F.2 вас просят убедиться, что необходимые условия первого порядка (Куна — Таккера) задачи (16.F.1) можно переписать в следующем виде (здесь и далее в этом разделе все производные вычислены в решении задачи)[18]:

$$x_{li}: \delta_i \frac{\partial u_i}{\partial x_{li}} - \mu_l \begin{cases} \le 0 \\ = 0, \text{ если } x_{li} > 0 \end{cases} \text{для всех } i, l, \tag{16.F.2}$$

$$y_{lj}: \mu_l - \gamma_j \frac{\partial F_j}{\partial y_{lj}} = 0 \text{ для всех } j, l. \tag{16.F.3}$$

Как хорошо известно из теории Куна — Таккера (см. раздел М.К математического приложения), значение множителя μ_l в оптимальной точке в точности равно увеличению полезности потребителя 1 за счет ослабления соответствующего ограничения, т. е. за счет предельного увеличения доступного совокупного первоначального запаса блага l, $\bar{\omega}_l$. Таким образом, множитель μ_l можно интерпретировать как предельную стоимость или «теневую цену» блага l (в терминах полезности потребителя 1). С другой стороны, множитель δ_i равен предельному изменению полезности потребителя 1 при уменьшении заданного уровня полезности $\bar{u}_i$ для потребителя $i \neq 1$. Таким образом, условие (16.F.2) говорит о том, что во внутреннем оптимуме увеличение полезности любого потребителя i за счет получения дополнительной единицы блага l, взятое с весом (если $i \neq 1$), равным стоимости ослабления ограничения на полезность потребителя i в терминах увеличения полезности потребителя 1, должно быть равно предельной стоимости μ_l блага l.

Аналогично множитель γ_j можно интерпретировать как предельную выгоду от ослабления j-го производственного ограничения или, эквивалентно, как предельные издержки его усиления.

Следовательно, $\gamma_j(\partial F_j / \partial y_{lj})$ — предельные издержки увеличения y_{lj}. Тогда условие (16.F.3) говорит о том, что в оптимуме эти предельные издержки для любой фирмы j должны быть равны предельной выгоде μ_l от блага l.

Если предположить, что решение внутреннее (т. е. $x_i \gg 0$ для всех i), то из условий (16.F.2) и (16.F.3) следует три типа соотношений, которые должны быть выполнены в Парето-оптимуме (см. упражнение 16.F.3):

$$\frac{\partial u_i / \partial x_{li}}{\partial u_i / \partial x_{l'i}} = \frac{\partial u_{i'} / \partial x_{li'}}{\partial u_{i'} / \partial x_{l'i'}} \text{ для всех } i, i', l, l', \tag{16.F.4}$$

$$\frac{\partial F_j / \partial y_{lj}}{\partial F_j / \partial y_{l'j}} = \frac{\partial F_{j'} / \partial y_{lj'}}{\partial F_{j'} / \partial y_{l'j'}} \text{ для всех } j, j', l, l', \tag{16.F.5}$$

[18] Напомним, что для упрощения изложения мы не налагаем ограничений на значения векторов y_j. Заметим также, что из предположения о строгой положительности градиентов функций $u_i(\cdot)$ и $F_j(\cdot)$ следует, что условия регулярности выполнены (см. описание условий первого порядка оптимизационных задач с ограничениями в разделе М.К математического приложения).

$$\frac{\partial u_i/\partial x_{li}}{\partial u_i/\partial x_{l'i}} = \frac{\partial F_j/\partial y_{lj}}{\partial F_j/\partial y_{l'j}} \text{ для всех } i, j, l, l'. \tag{16.F.6}$$

Из условия (16.F.4) следует, что в любом Парето-оптимальном распределении предельные нормы замещения между любой парой благ для всех потребителей должны быть равны (см. рис. 15.B.11(b) и 15.B.12, где приведена иллюстрация для случая двух потребителей и двух благ). Согласно условию (16.F.5) для всех фирм предельные нормы трансформации между каждой парой благ должны быть равны (см. рис. 15.D.2(b), где приведена иллюстрация для случая двух благ и двух фирм). Наконец, условие (16.D.6) говорит о том, что для каждого потребителя предельная норма замещения должна быть равна предельной норме трансформации для каждой фирмы для всех пар благ (иллюстрацию для случая экономики с одним потребителем, одной фирмой и двумя благами см. на рис. 15.C.2).

Условиям (16.F.4)–(16.F.6) соответствуют три типа эффективности Парето-оптимального распределения (см. упражнение 16.F.4).

(1) *Оптимальное распределение доступных благ между потребителями*. Предположим, что мы хотим распределить данный совокупный объем $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_L)$ благ, доступных для потребления, между потребителями так, чтобы максимизировать благосостояние потребителя 1, при условии что уровень полезности потребителей $2, \ldots, I$ должен быть не ниже $(\bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_I)$:

$$\max_{(x_1,\ldots,x_I)} u_1(x_{11}, \ldots, x_{L1}) \tag{16.F.7}$$

$$\text{при (1) } u_i(x_{1i}, \ldots, x_{Li}) \geq \bar{u}_i, \quad i = 2, \ldots, I$$

$$\text{(2) } \sum_i x_{li} \leq \bar{x}_l, \quad l = 1, \ldots, L.$$

Из условий первого порядка этой задачи получаем соотношение (16.F.4).

(2) *Эффективное производство*. Агрегированный производственный вектор должен быть *эффективным* в том смысле, какой вкладывался в это понятие в разделе 5.F, т. е. невозможно перераспределить производственные планы между индивидуальными производственными множествами так, чтобы произвести в совокупности больший уровень выпуска некоторого блага (или использовать это благо в меньшем объеме в качестве фактора производства), не уменьшив при этом выпуск другого блага. В частности, если говорить о первом благе, то это означает, что совокупное производство всех остальных благ должно быть не ниже заданного уровня $(\bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_L)$. Другими словами, мы хотим решить следующую задачу:

$$\max_{(y_1,\ldots,y_J)} \sum_j y_{1j} \tag{16.F.8}$$

$$\text{при (1) } \sum_j y_{lj} \geq \bar{y}_l, \quad l = 2, \ldots, L,$$

$$\text{(2) } F_j(y_j) \leq 0, \quad j = 1, \ldots, J.$$

Из условий первого порядка этой задачи получаем соотношение (16.F.5).

(3) *Оптимальный уровень агрегированного производства*. Мы должны выбрать такой уровень агрегированного производства, который порождает желаемый ассор-

тимент товаров, доступных для потребления. При заданном уровне полезности $(\bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_I)$ обозначим через $u(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_L)$ и $f(\bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_L)$ функции значения задач (16.F.7) и (16.F.8) соответственно. Тогда приходим к следующей задаче:

$$\max_{(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_L)} u(\bar{\omega}_1 + \bar{y}_1, \ldots, \bar{\omega}_L + \bar{y}_L) \tag{16.F.9}$$

$$\text{при } \bar{y}_1 \leq f(\bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_L).$$

Из условий первого порядка этой задачи получаем соотношение (16.F.6).

Для того чтобы проанализировать взаимосвязь условий первого порядка (16.F.2) и (16.F.3) с первой и второй теоремами благосостояния, введем дополнительные предпосылки: будем считать, что все функции полезности $u_i(\cdot)$ квазивогнуты (следовательно, предпочтения потребителей выпуклы) и все функции $F_j(\cdot)$ выпуклы (следовательно, производственные множества выпуклы). Введение этих предпосылок позволяет нам более не беспокоиться об условиях второго порядка, поскольку во всех рассматриваемых максимизационных задачах необходимые условия первого порядка автоматически становятся и достаточными.

Тогда, в рамках введенных предпосылок о дифференцируемости и выпуклости, из условий (16.F.2) и (16.F.3) можно получить вариант двух теорем благосостояния. Во-первых, заметим, что набор (x^*, y^*, p) представляет собой ценовое равновесие с трансфертами (при соответствующих уровнях богатства $w_i = p \cdot x_i^*$, где $i = 1, \ldots, I$) тогда и только тогда, когда выполнены условия первого порядка задач максимизации полезности при бюджетном ограничении:

$$\max_{x_i \geq 0} u_i(x_i)$$

$$\text{при } p \cdot x_i \leq w_i$$

и задач максимизации прибыли:

$$\max_{y_j} p \cdot y_j$$

$$\text{при } F_j(y_j) \leq 0.$$

Обозначим через α_i и β_j соответствующие множители при ограничениях данных задач. Тогда условия первого порядка (вычисленные в точке (x^*, y^*)) можно записать следующим образом:

$$x_{li} : \frac{\partial u_i}{\partial x_{li}} - \alpha_i p_l \begin{cases} \leq 0 \\ = 0, \text{ если } x_{li} > 0 \end{cases} \qquad \text{для всех } i, l, \tag{16.F.10}$$

$$y_{lj} : p_l - \beta_j \frac{\partial F_j}{\partial y_{lj}} = 0 \qquad \text{для всех } j, l^{19}. \tag{16.F.11}$$

[19] В оригинале допущена опечатка: здесь вместо *i*, *l* должно быть *j*, *l*. — *Примеч. пер.*

Если положить $\mu_l = p_l$, $\delta_i = 1/\alpha_i$ и $\gamma_j = \beta_j$, то, как нетрудно заметить, условия (16.F.2)–(16.F.3) совпадут с условиями (16.F.10)–(16.F.11). Поскольку оба множества условий являются необходимыми и достаточными для соответствующих задач, то отсюда следует, что распределение (x^*, y^*) Парето-оптимально тогда и только тогда, когда оно является ценовым равновесием с трансфертами при некотором векторе цен $p = (p_1, \ldots, p_L)$. Более того, следует заметить, что равновесная цена p_l в точности равна μ_l, предельной стоимости блага l в задаче на поиск Парето-оптимума.

Предположим теперь, что все функции полезности $u_i(\cdot)$ вогнуты. Тогда будет интересно проанализировать также условия первого порядка задачи максимизации линейной функции общественного благосостояния (см. раздел 16.E). Итак, рассмотрим следующую задачу:

$$\max_{x,y} \sum_i \lambda_i u_i(x_{1i}, \ \ldots, \ x_{Li}) \tag{16.F.12}$$

$$\text{при (1)} \ \sum_i x_{li} \le \overline{\omega}_l + \sum_j y_{lj}, \qquad l = 1, \ldots, L,$$

$$(2) \ F_j(y_{1j}, \ldots, y_{Lj}) \le 0, \qquad j = 1, \ldots, J,$$

где $\lambda_i > 0$ для всех i. Обозначим через $(\psi_1, \ldots, \psi_L)$ и $(\eta_1, \ldots, \eta_J)$ множители при ограничениях (1) и (2) соответственно. Тогда необходимые и достаточные условия первого порядка этой задачи можно записать следующим образом:

$$x_{li} : \lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial x_{li}} - \psi_l \begin{cases} \le 0 \\ = 0, \text{ если } x_{li} > 0 \end{cases} \qquad \text{для всех } i, l, \tag{16.F.13}$$

$$y_{lj} : \psi_l - \eta_j \frac{\partial F_j}{\partial y_{lj}} = 0 \qquad \text{для всех } j, l. \tag{16.F.14}$$

Заметим, что, положив $\delta_1 = \lambda_i/\lambda_1$, $\mu_l = \psi_l/\lambda_1$ и $\gamma_j = \eta_j/\lambda_1$, мы получим точное соответствие условий (16.F.2)–(16.F.3) условиям (16.F.13)–(16.F.14). Следовательно, любое решение системы (16.F.13)–(16.F.14) является решением (16.F.2)–(16.F.3), а значит, является Парето-оптимальным[20]. И наоборот, любой Парето-оптимум, который при некоторых множителях удовлетворяет условиям (16.F.2)–(16.F.3), также является решением уравнений (16.F.13)–(16.F.14), а значит, и решением задачи (16.F.12) при должном выборе множителей $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_I)$.

Имеет смысл также сравнить условия (16.F.13)–(16.F.14) с условиями первого порядка (16.F.10)–(16.F.11) оптимизационных задач, соответствующих ценовому равновесию с трансфертами. Как нетрудно заметить, эти условия совпадают при выборе $p_l = \psi_l$, $\alpha_i = 1/\lambda_i$ и $\beta_j = \eta_j$. И опять-таки цена p_l равна предельной стоимости блага l для общества. Кроме того, следует

[20] Напомним, что в силу предпосылок о вогнутости-выпуклости условия (16.F.2)–(16.F.3) и (16.F.13)–(16.F.14) являются необходимыми и достаточными для соответствующих задач.

отметить, что множитель α_i, предельная полезность богатства для потребителя i при ценах p и уровне богатства $w_i = p \cdot x_i^*$, равен величине, обратной к λ_i. Таким образом, мы приходим к заключению, сформулированному в утверждении 16.F.1.

Утверждение 16.F.1. При введенных предположениях относительно рассматриваемой экономики (в частности, вогнутости всех $u_i(\cdot)$ и выпуклости всех $F_j(\cdot)$) каждое Парето-оптимальное распределение (и, следовательно, каждое ценовое равновесие с трансфертами) доставляет максимум взвешенной суммы полезностей при ресурсных и технологических ограничениях. Более того, вес λ_i полезности i-го потребителя равен величине, обратной предельной полезности богатства для потребителя i, вычисленной при поддерживающих данное распределение ценах и вмененном богатстве.

16.G. Некоторые приложения

Ниже мы представим несколько приложений идей, изложенных в предыдущих разделах этой главы. Сначала рассмотрим три примера интерпретации пространства товаров. Затем представим модификацию второй теоремы благосостояния, базирующуюся на концепции *ценообразования на основе предельных издержек*.

Интерпретации пространства товаров

До сих пор мы считали, что товары — это некие абстрактно определенные объекты. Это было сделано не ради формализма, а для того чтобы способствовать широкому применению рассматриваемой теории.

Легко представить себе случай, когда товары представляют собой отдельные реальные объекты, которые физически продаются и покупаются на рынке. Однако можно вообразить и множество других интересных ситуаций. Представленная в предыдущих разделах теория очень гибка и позволяет разнообразно интерпретировать товары, потребительские множества, предпочтения и производственные множества.

В главах 19 и 20 подробно обсуждаются два наиболее важных примера: *товары, обусловленные состоянием мира* (контингентные товары), и *датированные товары* (имеющие привязку к определенному моменту времени) соответственно. Для полноты изложения в этом разделе мы скажем несколько слов о контингентных товарах, а затем кратко обсудим два других примера: *выбор вида занятости* и *общественные блага*.

Пример 16.G.1. *Контингентные товары*. Интересный пример использования искусственных товаров в теории общего равновесия возникает в условиях неопределенности. Полное формальное описание этих товаров будет приведено в главе 19, а здесь мы только отметим базовую идею, лежащую в их основе. Смысл в том, что полезность товара может зависеть от заранее неизвестных внешних обстоятельств. Например, медицинская помощь для индивида гораздо более важна в том случае, когда он болеет, чем когда здоров. Поэтому для того чтобы гарантировать эффективное распределение ресурсов, мы должны быть уверены не только в том, что должные товары доставляются должным потребителям, но также и в том, что это происходит при должных обстоятельствах, т. е. в соответствии с реализацией некоторого заранее неопределенного внешнего состояния. Для моделирования задачи распределения ресурсов такого типа мы можем использовать концепцию *контингентного товара*. Такой товар, как медицинская помощь, можно условно разделить на множество разных «искусственных товаров», каждый из которых интерпретируется как «медицинская помощь, предоставленная при обстоятельствах s». Например, предположим, что в экономике I потребителей, каждый из которых ex post может быть либо «болен», либо «здоров». Потребность индивида в медицинской помощи, безусловно, зависит от состояния здоровья. В широкой экономической перспективе существует 2^I различных состояний природы, каждое из которых соответствует определенному состоянию здоровья (болен-здоров) каждого индивида. Следовательно, мы можем представить, что есть 2^I различных товаров, называемых «медицинская помощь», по одному на каждое из возможных состояний. И тогда потребитель, покупающий «медицинскую помощь в состоянии s», получает помощь при наступлении состояния мира s[21].

Одна из сильных сторон теории общего равновесия — способность легко справляться с произвольным числом товаров. Имеется лишь ограниченное число результатов, зависящих от количества товаров, и все они носят частный характер, не влияющий на общую картину. Поэтому, хотя представить себе очень большое число рынков с очень большим числом контингентных товаров довольно сложно, оказывается, что все утверждения о равновесии и благосостоянии, рассмотренные нами, легко приложить к условиям неопределенности (обратите внимание, что мы здесь говорим о теоретической стороне вопроса, а не о практическом применении). В главе 19 мы обсудим эти вопросы гораздо более подробно. ■

Пример 16.G.2. *Выбор вида занятости*. Предположим, что каждый индивид в принципе может преподавать либо экономику, либо филологию. Но не все индивиды одинаково хороши в этих двух профессиях. Один из способов охарактеризовать разницу в сравнительных преимуществах — предположить, что для каждого индивида i существует число $\alpha_i \geq 0$, показывающее, как много «эффективных часов услуг преподавателя экономики» ему потребуется, чтобы произвести «эффективный час преподавателя филологии». Относительно низкое значение α_i говорит о том, что сравнительное преимущество на стороне филологии. Предположим также, что каждый индивид i обладает запасом $\bar{T}_i$ часов преподавания, которые он может предложить. Предположим также, что индивид i за 1 час преподавания может произвести 1 эффективный час услуг экономиста или $1/\alpha_i$ эффективных часов услуг филолога. Будем считать, что имеется единственное потребительское благо, на которое индивид i может потратить свой заработок.

Важно суметь встроить эту задачу в формальную структуру, поскольку нам бы хотелось проанализировать, например, как будут работать конкурентные рынки труда, когда выбор каждого индивида будет касаться не только *объема* предложения труда, но и *профессии*.

Вот как это можно сделать (хотя это не единственно возможный способ): опишем список потребления и эффективных часов труда трехмерным вектором (c_i, t_{ci}, t_{ei}), где c_i — уровень потребления индивида i, а $t_{ci} \leq 0$ и $t_{ei} \leq 0$ — эффективные часы работы

[21] Таким образом, приобретая медицинские услуги, когда он болен, индивид в действительности покупает целый ряд различных «контингентных товаров медицинской помощи» (2^{I-1} из них).

преподавателя филологии и экономики соответственно. Поскольку последние две величины — это объемы услуг, которые индивиды предлагают рынку, то согласно принятой договоренности мы считаем эти величины отрицательными. Тогда потребительское множество индивида i можно определить следующим образом:

$$X_i = \left\{(c_i,\ t_{ci},\ t_{ei}) : c_i \geq 0,\ t_{ci} \leq 0,\ t_{ei} \leq 0,\ \bar{T}_i + t_{ei} + \alpha_i t_{ci} \geq 0\right\}.$$

Условие неположительности можно интерпретировать как невозможность потребления труда. Величина $\bar{T}_i + t_{ei} + \alpha_i t_{ci}$ представляет собой время, доступное для досуга. Предпочтения потребителя i определены на множестве X_i. Поскольку потребительское благо желаемо, то условие локальной ненасыщаемости предпочтений выполнено. Предпосылка о непрерывности и выпуклости предпочтений также вполне естественна. Для того чтобы сделать модель полной, предположим, что имеется производственная функция $f(z_c, z_e)$, преобразующая комбинации факторов производства (z_c, z_e), эффективных часов преподавания филологии и экономики соответственно в потребительское благо.

Теперь у нас есть полная система общего равновесия, используя которую можно попытаться найти ответы на ряд интересных вопросов: если выбор вида занятости диктуется конкурентной (т. е. такой, где экономические агенты ведут себя как ценополучатели) рыночной системой, то будет ли равновесный исход характеризоваться эффективным использованием сравнительных преимуществ? И наоборот, можно ли каждое эффективное распределение по видам занятости поддержать с помощью рыночной системы (добавив, возможно, еще паушальные трансферты)? Как следует из материала разделов 16.C и 16.D, ответ на оба вопроса утвердительный. ■

Пример 16.G.3. *Общественные блага*. Понятие «общественного блага» и более общая концепция «экстерналии» были рассмотрены в главе 11, где мы также ввели понятие «персонализированных» цен[22]. Поэтому здесь мы будем довольно кратки. (Основные ссылки на материалы по общественным благам также даны в главе 11.)

Пусть в экономике I потребителей и два товара: «частное» благо, скажем труд, и общественное благо (представленную здесь модель без существенной модификации можно распространить на случай любого числа частных и общественных благ). *Частное благо* — это благо, подобное тем, которые мы обсуждали до сих пор: единица этого блага может быть потреблена только один раз, поэтому если индивид i ее потребит, то она становится недоступна для потребления другими потребителями. Обозначим через x_{1i} уровень потребления частного блага потребителем i. Однако в случае (чистого) *общественного блага* потребление этого блага индивидом i не снижает его доступность для других потребителей. Таким образом, если обозначить через x_2 совокупный произведенный объем общественного блага, то x_2 без каких-либо дополнительных издержек может быть доступен *каждому* потребителю.

Пусть каждый потребитель имеет потребительское множество $\mathbb{R}^2_+$ и непрерывные, выпуклые локально ненасыщаемые предпочтения $\succsim_i$, определенные на наборах (x_{1i}, x_2). Для завершенности модели будем считать, что в экономике имеется некий объем частного блага $\bar{\omega}_1$ в качестве первоначального совокупного запаса (а запас общественного блага отсутствует) и фирма, которая может из $z \in \mathbb{R}_+$ единиц частного блага произвести общественное благо в соответствии с возрастающей вогнутой производственной функцией $f(z)$.

[22] В действительности материал этой главы носит более общий характер, чем рассмотренный в главе 11, поскольку там мы ограничивались изучением квазилинейной экономики.

Распределение $((x_{11}, \ldots, x_{1I}, x_2), (q, z)) \geq 0$ допустимо, если

$$q \leq f(z),\ \sum_i x_{1i} + z = \bar{\omega}_1 \text{ и } q = x_2.$$

Это допустимое распределение Парето-оптимально, если не существует другого допустимого распределения $\left((x'_{11},\ \ldots,\ x'_{1I},\ x'_2), (q',\ z')\right)$, такого что $(x'_{1i},\ x'_2) \succsim_i (x_{1i},\ x_2)$ для всех i и хотя бы для одного потребителя i $(x'_{1i},\ x'_2) \succ_i (x_{1i},\ x_2)$[23].

Теперь опишем эту модель, используя другой подход, базирующийся, говоря формальным языком, на искусственном сведении общественных благ к частным, что в итоге позволяет применить результаты разделов 16.C–16.D. «Трюк» заключается в том, что вводится понятие персонализированного товара x_{2i} для каждого потребителя i, который следует понимать как «товар 2, получаемый i-м потребителем». Формально потребитель i заботится только о благе 1 и i-м персонализированном товаре. Поэтому обозначим потребительский набор потребителя через $x_i = (x_{1i},\ x_{2i})$. Тогда можно считать, что отдельная фирма производит *совместный* набор персонализированных товаров в соответствии с технологией, позволяющей произвести эти товары в постоянной пропорции, т. е. (выпуклое) производственное множество фирмы имеет вид

$$Y = \left\{(-z,\ q_1,\ \ldots,\ q_I) \in \mathbb{R}_+^{I+1} : z \geq 0 \text{ и } q_1 = \ldots = q_I = q \leq f(z)\right\}.$$

При такой переинтерпретации благ данная модель вписывается в формат, рассмотренный в этой главе. А ценовое равновесие с трансфертами для этой искусственной экономики называется *равновесием Линдаля*[24].

Определение 16.G.1. *Равновесие Линдаля* в экономике с общественными благами — это ценовое равновесие с трансфертами в искусственной экономике с персонализированными товарами. Т. е. распределение $\left(x_1^*,\ \ldots,\ x_I^*,\ q^*,\ z^*\right) \in \mathbb{R}^{2I} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и система цен $(p_1, p_{21}, \ldots, p_{2I}) \in \mathbb{R}^{I+1}$ образуют равновесие Линдаля, если существует множество уровней богатства $(w_1, \ldots, w_I)$, удовлетворяющих условию $\sum_i w_i = \sum_i p_1 x_{1i}^* + \left(\sum_i p_{2i}\right) q^* - p_1 z^*$ и таких, что

1) $q^* \leq f(z^*)$ и $\left(\sum_i p_{2i}\right) q^* - p_1 z^* \geq \left(\sum_i p_{2i}\right) q - p_1 z$ для всех (q, z), где $z \geq 0$ и $q \leq f(z)$.
2) Для любого потребителя i набор $x_i^* = \left(x_{1i}^*,\ x_{2i}^*\right)$ является наилучшим в соответствии с предпочтениями $\succsim_i$ на множестве $\left\{(x_{1i},\ x_{2i}) \in X_i : p_1 x_{1i} + p_{2i} x_{2i} \leq w_i\right\}$.
3) $\sum_i x_{1i}^* + z^* = \bar{\omega}_1$ и $x_{2i}^* = q^*$ для любого потребителя i.

[23] В оригинальном тексте допущена опечатка: в последних двух соотношениях в правой части выражения не должны содержать штрих. — *Примеч. пер.*

[24] Более корректно было бы назвать его *равновесием Линдаля с трансфертами*.

Согласно первой и второй фундаментальным теоремам благосостояния любое равновесие Линдаля Парето-оптимально и любое Парето-оптимальное распределение можно реализовать как равновесие Линдаля (при соответствующих трансфертах богатства и, возможно, с поправкой на квазиравновесие)[25]. Но здесь важно понимать, что, в отличие от экономик с большим числом агентов, где каждый агент мал относительно размера рынка в целом, на рынках персонализированных благ потребителя нельзя считать малым, поскольку на своем персонализированном рынке он является единственным покупателем блага. Увеличивая число потребителей, мы, в соответствии с определением, увеличиваем число товаров. И в результате оказывается крайне маловероятно, что предпосылка о том, что потребитель принимает цены заданными, играющая решающую роль в теоремах благосостояния, будет выполнена. Следовательно, дескриптивное содержание такой концепции равновесия невысоко.

Тем не менее по-прежнему вызывает некоторый интерес вторая теорема благосостояния. В частности, она говорит о том, что если центральная власть может навязать цены участникам рынка, то имеется механизм добровольных покупок общественного блага, позволяющий достичь желаемого Парето-оптимального распределения. Однако и здесь возникают дополнительные сложности, порождаемые особенностями общественных благ: во-первых, для вычисления персонализированных поддерживающих цен недостаточно статистической информации (например, информации о распределении предпочтений среди всех потребителей в экономике). Персонализация цен требует знания частной информации каждого потребителя. А получение этой информации может быть весьма затруднительным, поскольку индивиды зачастую не имеют стимула сообщать достоверную информацию (см. более подробно об этой проблеме главы 11 и 23). Во-вторых, для того чтобы на персонализированных рынках работал добровольный механизм, индивиды должны ожидать получить именно тот объем общественного блага, который они приобретают. А следовательно, чтобы общественное благо было *исключаемым*, должна существовать некоторая процедура, предотвращающая полное или частичное использование общественного блага кем-либо, кто за него не платил. Во многих случаях такое исключение из потребления осуществить очень трудно или вообще невозможно (как, например, в случае национальной обороны). ■

[25] Пусть производственная функция $f(\cdot)$ дифференцируема, а кривые безразличия гладкие. Рассмотрим внутреннее равновесие Линдаля. Тогда из условия выбора наилучшего согласно предпочтениям набора следует, что $p_{2i}/p_1 = -MRS_{21}^i$, где MRS_{21}^i — предельная норма замещения блага 1 на благо 2 для потребителя i. Аналогично из максимизации прибыли фирмы получаем: $\sum_i p_{2i}/p_1 = -MRT_{21}$, где MRT_{21} — предельная норма трансформации блага 1 в благо 2 (предельные издержки выпуска в терминах фактора производства). Следовательно, в любом равновесии Линдаля должно быть выполнено: $\sum_i MRS_{21}^i = MRT_{21}$, а это не что иное, как условие Самуэльсона, характеризующее оптимальное распределение общественного блага (см. вывод этого условия для случая квазилинейных предпочтений в разделе 11.G).

Невыпуклые технологии производства и ценообразование на основе предельных издержек

Вторая теорема благосостояния сталкивается с трудностями в случае невыпуклых производственных множеств (в этом разделе мы не касаемся предпосылки о выпуклости со стороны потребителя). В первую очередь невыпуклость производственного множества вследствие наличия постоянных издержек или возрастающей отдачи от масштаба приводит к ситуации, когда на рынке господствует небольшое число крупных фирм (предельный случай, когда эффективность производства требует только одной фирмы, — «естественная монополия»), что делает предпосылку о том, что фирмы ведут себя как ценополучатели, крайне малоправдоподобной. Однако даже если эту предпосылку можно считать выполненной (например, в силу того что центральная власть способна оказывать влияние на цены), то может оказаться, что по-прежнему нет возможности поддержать данное Парето-оптимальное распределение ценами. Примеры подобных ситуаций приведены на рис. 15.C.3(a) и 16.G.1. На рис. 16.G.1 при том единственном отношении цен, когда можно было бы локально поддержать уровень производства y^* как равновесный, фирма несет потери и скорее предпочтет вообще свернуть производство. С другой стороны, на рис. 15.C.3(a) нельзя гарантировать максимизацию прибыли даже локально (обсуждение этого случая приведено в разделе 15.C).

Однако несмотря на то что отсутствие выпуклости и может стать препятствием для поддержания Парето-оптимального уровня производства как максимизирующего прибыль выбора, тем не менее при предпосылках о дифференцируемости, введенных в разделе 16.F, мы можем использовать полученные в этом разделе необходимые условия первого порядка, чтобы сформулировать более слабый вариант второй теоремы благосостояния (см. упражнение 16.G.1).

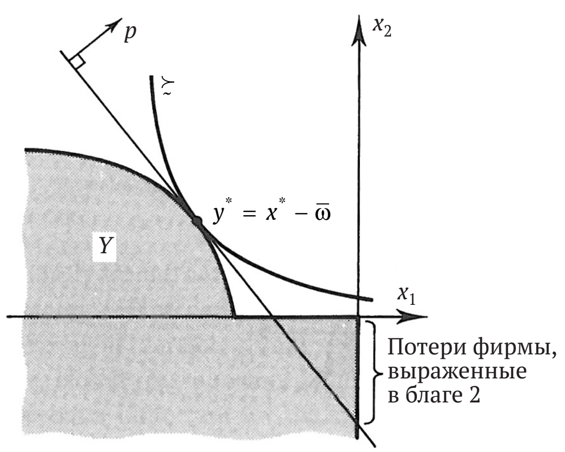


Рис. 16.G.1. Фирма несет потери при ценах, которые локально поддерживают Парето-оптимальное распределение

Утверждение 16.G.1. Пусть базовые предпосылки, принятые в разделе 16.F., выполнены[26] и, кроме того, все потребители имеют выпуклые предпочтения (так что функции полезности квазивогнуты). Если (x^*, y^*) — Парето-оптимальное распределение, то существует вектор цен $p = (p_1, ..., p_L)$ и уровни богатства $(w_1, ..., w_I)$, где $\sum_i w_i = p \cdot \bar{\omega} + \sum_j p \cdot y_j^*$, такие что

1) для любой фирмы j имеем

$$p = \gamma_j \nabla F_j(y_j^*) \text{ для некоторого } \gamma_j > 0, \tag{16.G.1}$$

2) для любого потребителя i набор x_i^* является наилучшим в соответствии с предпочтениями $\succsim_i$ в бюджетном множестве

$$\{x_i \in X_i : p \cdot x_i \le w_i\},$$

3) $\sum_i x_i^* = \bar{\omega} + \sum_j y_j^*$.

Тип равновесия, представленный условиями (1)–(3) утверждения 16.G.1, называется *равновесием с ценами, равными предельным издержкам, и трансфертами*. Такая терминология восходит к технологии с одним выпуском и одним фактором производства[27].

Упражнение 16.G.2. Пусть в экономике имеются только два блага: фактор производства и готовая продукция. Покажите, что в этом случае условие (16.G.1) говорит о том, что цена фактора производства должна быть равна цене готовой продукции, умноженной на предельную производительность фактора, или, что эквивалентно, цена готовой продукции должна равняться предельным издержкам.

Как мы уже отмечали, из условия (16.G.1) *не* следует, что производственный план $\left(y_1^*, ..., y_J^*\right)$ максимизирует прибыль фирм, принимающих цены заданными. Это условие говорит лишь о том, что небольшие изменения производственных планов не оказывают влияния первого порядка на прибыль. Однако небольшие изменения могут по-прежнему оказывать влияние второго порядка (как на рис. 15.C.3, где в равновесии с ценами, равными предельным издержкам, фирма в действительности выбирает среди эффективных выпусков такой уровень производства, который *минимизирует* прибыль), но в любом случае значительные изменения могут увеличить прибыль (как на рис. 16.G.1). Таким образом, для реализации распределения (x^*, y^*) как равновесного может потребоваться вмешательство регулирующих органов, предотвращающих попытки менеджеров

[26] То есть те предпосылки, которые позволяют получить условия (16.F.2) и (16.F.3).

[27] Следует отметить, что в общем случае термин *равновесие с ценами, равными предельным издержкам*, строго говоря, неверен (почему это так, разъясняется в упражнении 16.G.3). Однако такая терминология общепринята и мы будем ее придерживаться.

фирм с невыпуклыми технологиями максимизировать прибыль при данных ценах p[28].

Развернутое обсуждение поднятых в этом разделе проблем можно найти в книге (Quinzii, 1992).

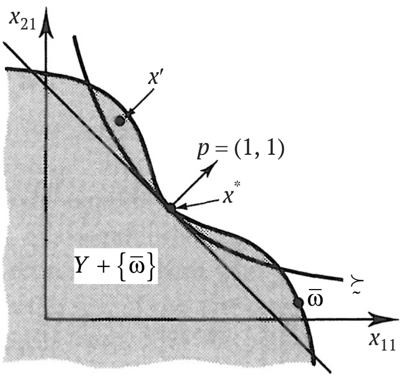


Рис. 16.G.2. Равновесие с ценами, равными предельным издержкам, необязательно Парето-оптимально

Следует отметить, что результат, обратный утверждению 16.G.1, гарантирующий, что каждое равновесие с ценами, равными предельным издержкам, Парето-оптимально, вообще говоря, *неверен*. На рис. 16.G.2, например, представлена экономика с одним потребителем и фирмой с невыпуклым производственным множеством. Здесь через x^* обозначено равновесие с ценами, равными предельным издержкам, и трансфертами при системе цен $p = (1, 1)$. Однако распределение x' приносит потребителю бо́льшую полезность. Грубо говоря, это связано с тем, что при ценообразовании на основе предельных издержек пренебрегают условиями второго порядка, а следовательно, может оказаться, что, как и в распределении x^*, условия второго порядка задачи максимизации полезности общества не выполнены. В результате выполнение условий первого порядка (которые в случае рис. 16.G.2 означают касание кривой безразличия и производственного множества) не гарантируют Парето-оптимальности распределения (более подробно об этом — в упражнении 16.G.4).

Приложение А. Технические свойства множества допустимых распределений

Множество допустимых распределений имеет вид

$$A = \Big\{(x_1,\ \ldots,\ x_I,\ y_1,\ \ldots,\ y_J) \in$$
$$\in X_1 \times \ldots \times X_I \times Y_1 \times \ldots \times Y_J\ :\ \sum_i x_i = \bar{\omega} + \sum_j y_j \Big\} \subset \mathbb{R}^{LI} \times \mathbb{R}^{LJ}.$$

Рассматриваемая нами экономическая проблема не была бы столь интересна, если бы в экономике не существовало допустимых распределений или если бы мы могли предоставить каждому потребителю неограниченно большой потребительский вектор. Поэтому мы считаем, что множество A непусто, ограниченно и, более того, замкнуто (т. е. представляет собой непустой компакт). В главе 17, где эти технические моменты становятся особенно важны для анализа существования вальрасианских равно-

[28] Если вновь обратиться к рис. 16.G.1, то планировщик мог бы достичь желаемого исхода, просто запретив фирме закрывать производство и, наоборот, позволив ей максимизировать прибыль при «поддерживающих» ценах (здесь предполагается, что фирма будет действовать как ценополучатель; в противном случае регулятору также придется насаждать эти цены).

весий, мы введем именно такие предпосылки. Поэтому было бы полезно хотя бы один раз выписать множество достаточных условий выполнения этих базовых свойств.

Утверждение 16.AA.1. Предположим, что

1) каждое множество X_i:
   1.1) замкнуто;
   1.2) ограничено снизу (т. е. существует $r > 0$, такое что $x_{li} > -r$ для любых l и i; другими словами, ни один потребитель не может предложить на рынке произвольно большое количество какого-либо блага);
2) каждое множество Y_j замкнуто. Более того, агрегированное производственное множество $Y = \sum_j Y_j$ [29]
   2.1) выпукло;
   2.2) удовлетворяет свойству возможности бездействия (т. е. $0 \in Y$);
   2.3) удовлетворяет свойству отсутствия рога изобилия (т. е. $y \geq 0$ и из $y \in Y$ следует, что $y = 0$);
   2.4) необратимо (т. е. из $y \in Y$ и $-y \in Y$ следует, что $y = 0$).

Тогда множество допустимых распределений A замкнуто и ограниченно (т. е. существует число $r > 0$, такое что $|x_{li}| < r$ и $|y_{lj}| < r$ для всех i, j, l и для любого распределения $(x, y) \in A$. Если кроме того $-\mathbb{R}^L_+ \subset Y$ и мы можем выбрать $\hat{x}_i \in X_i$ для любого i так, чтобы было выполнено $\sum_i \hat{x}_i \leq \bar{\omega}$, то множество A непусто.

Доказательство. Доказательство этого утверждения довольно трудоемко, поэтому мы его приводить не станем. Однако все же стоит сказать несколько слов относительно логики этого результата.

Что касается непустоты множества, то здесь все довольно очевидно, поскольку для каждого потребителя i у нас есть набор $\hat{x}_i \in X_i$ и $\sum_i \hat{x}_i - \bar{\omega} \in -\mathbb{R}^L_+ \subset Y$. Таким образом, распределение с индивидуальными уровнями потребления $(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_I)$ и вектором агрегированного производства $\sum_i \hat{x}_i - \bar{\omega}$ допустимо.

Аналогично замкнутость множества A — прямое следствие предпосылок о замкнутости потребительских и производственных множеств (см. упражнение 16.AA.1).

Осталось показать, что множество A ограничено. Для упрощения понимания предположим, что $J = 1$ и $X_i = \mathbb{R}^L_+$ для любого потребителя i (если множества X_i ограничены снизу, то в случае потребительских множеств общего вида рассуждения будут аналогичны). На рис. 16.AA.1 изображено множество допустимых агрегированных

[29] См. раздел 5.B, где обсуждаются условия (2.1)–(2.4).

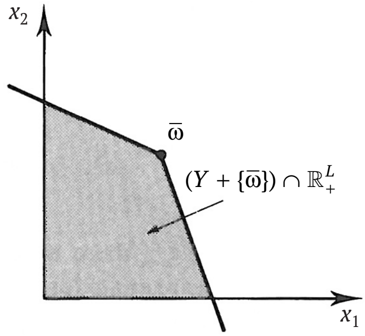


Рис. 16.AA.1. Множество допустимых агрегированных потребительских векторов является компактом

потребительских наборов $(Y + \{\overline{\omega}\}) \cap \mathbb{R}^L_+$, т. е. множество неотрицательных векторов, полученных путем смещения начала координат множества Y на $\overline{\omega} \geq 0$. Как видно из рисунка, это множество может быть неограниченным сверху только в том случае, если множество Y содержит неотрицательные ненулевые векторы, а следовательно, не выполняется свойство отсутствия «рога изобилия».

Следует, однако, учитывать, что вышеизложенные рассуждения зависят от трех фактов: $0 \in Y$, множество Y замкнуто и множество Y выпукло (см. упражнение 16.AA.2). Заметим, что если множество допустимых агрегированных наборов ограничено, то тем более допустимы индивидуальные уровни потребления и множество допустимых производственных планов (поскольку $J = 1$, то мы получаем это множество простым вычитанием $\overline{\omega}$ из каждого допустимого вектора агрегированного потребления). Следовательно, множество A ограничено.

Случай нескольких производственных множеств требует более тонкого подхода, и именно здесь на выручку приходит предпосылка о необратимости. Проводя неформальные рассуждения, подобно тому как мы это делали в предыдущем параграфе, можно вывести ограниченность допустимого *агрегированного* производства и допустимого индивидуального потребления. Теперь единственный случай, когда неограниченность возможна на индивидуальном производственном уровне при условии ограниченности в агрегированном случае, — это ситуация, когда неограниченность одного индивидуального производственного плана, грубо говоря, погашается неограниченностью другого. Однако это бы означало, что технология рассматриваемой экономики (т. е. агрегированное производственное множество) допускает обратимость некоторых технологий (см. подробнее в упражнении 16.AA.3). Кстати, можно также показать, что необратимость вместе с другими введенными предпосылками дает замкнутость множества Y, и поэтому в действительности не было необходимости отдельно вводить это предположение. ■

Утверждение 16.AA.2 демонстрирует важное следствие компактности множества допустимых распределений для вида множества возможных уровней полезности.

Утверждение 16.AA.2. Пусть множество допустимых распределений A непусто, замкнуто и ограничено, а функции полезности потребителей $u_i(\cdot)$ непрерывны. Тогда множество возможных уровней полезности U замкнуто и ограничено сверху.

Доказательство. Заметим, что $U = U' - \mathbb{R}^L_+$, где

$$U' = \left\{(u_1(x_1),\ \ldots,\ u_I(x_I)) : (x,\ y) \in A\right\} \subset \mathbb{R}^L.$$

Таким образом, U' является образом компактного множества A для непрерывной функции, а значит, также является компактным множеством (см. раздел M.F математического приложения). Из этого сразу следует, что множество $U = U' - \mathbb{R}^L_+$ замкнуто и ограниченно.

Литература

Allais M. (1953). *Traite d'economie pure. Paris*: Publications du CNRS.

Arrow K., Hahn F. (1971). *General Competitive Analysis*. San Francisco: Holden-Day.

Debreu G. (1959). *Theory of Value*. New York: Wiley.

Koopmans T. (1957). *Three Essays on the State of Economic Science*. New York: McGraw-Hill.

Lange O. (1942). The foundation of welfare economics// *Econometrica* **10**, 215–228.

Quinzii M. (1992). *Increasing Returns and Efficiency*. New York: Oxford University Press.

Samuelson P. (1947). *Foundations of Economic Analysis*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Упражнения

16.C.1$^{\mathbf{B}}$. Покажите, что если потребительское множество $X_i \subset \mathbb{R}^L$ непусто, замкнуто и ограничено, а отношение предпочтения $\succsim_i$ на множестве X_i непрерывно, то отношение предпочтения $\succsim_i$ не может быть локально ненасыщаемым. (*Подсказка*: покажите, что непрерывная функция полезности, описывающая предпочтения $\succsim_i$, должна достигать максимума на множестве X_i; см. раздел M.F математического приложения.)

16.C.2$^{\mathbf{A}}$. Пусть отношение предпочтения $\succsim_i$ локально ненасыщаемо и x_i^* — наилучший выбор потребителя согласно предпочтениям $\succsim_i$ на множестве $\{x_i \in X_i : p \cdot x_i \leq w_i\}$. Докажите, что тогда выполнено следующее условие: если $x_i \succsim_i x_i^*$, то $p \cdot x_i \geq w_i$.

16.C.3$^{\mathbf{B}}$. В этом упражнении вас просят доказать первую теорему благосостояния при предпосылках, согласующихся с насыщением. Пусть все потребительские множества X_i непусты и выпуклы, а предпочтения всех потребителей $\succsim_i$ строго выпуклы (т. е. если $x_i' \succsim_i x_i$ и $x_i' \neq x_i$, то $\alpha x_i' + (1 - \alpha)x_i \succ_i x_i$ для любого $0 < \alpha < 1$). Докажите следующие утверждения:

a) Каждый потребитель i может иметь не более одной точки глобального насыщения, и предпочтения локально ненасыщаемы при любом потребительском наборе, отличном от этой единственной точки глобального насыщения.

b) Любое ценовое равновесие с трансфертами Парето-оптимально.

16.C.4[A]**.** Пусть у каждого индивида существует «функция удовольствия», $u_i(x_i)$, зависящая только от его личного потребления. Полезность каждого индивида положительно зависит от его собственного «удовольствия», а также от «удовольствия» всех остальных потребителей в соответствии с функцией полезности вида

$$U_i(x_1, \ldots, x_I) = U_i(u_1(x_1), u_2(x_2), \ldots, u_I(x_I)).$$

Покажите, что если $x = (x_1, \ldots, x_I)$ — Парето-оптимальное распределение в соответствии с $U_i(\cdot)$, то $(x_1, \ldots, x_I)$ — также Парето-оптимум в соответствии с u_i. Означает ли это, что общество альтруистов может использовать конкурентные рынки для достижения Парето-оптимума? Зависят ли ваши рассуждения от вогнутости функций u_i и U_i?

16.D.1[A]**.** Покажите, что если предпочтения локально ненасыщаемы, то утверждение «если $x_i \succ_i x_i^*$, то $p \cdot x_i \geq p \cdot x_i^*$» эквивалентно условию «$x_i^*$ минимизирует расходы при векторе цен p на множестве $\left\{x_i \in X_i : x_i \succsim_i x_i^*\right\}$».

16.D.2[B]**.** Приведите пример экономики с одной фирмой и одним потребителем, в которой производственное множество выпукло, отношение предпочтения непрерывно и выпукло, но тем не менее существует Парето-оптимальное распределение, которое не может быть поддержано ни как ценовое равновесие с трансфертами, ни как ценовое квазиравновесие с трансфертами. Какое условие утверждения 16.D.1 не выполняется в этом случае?

16.D.3[B]**.** Рассмотрите экономику, в которой потребители имеют непрерывные строго монотонные предпочтения (а потребительские множества имеют вид: $X_i = \mathbb{R}^L_+$). Предположим также, что возможно строго положительное производство, т. е. существуют такие $y_j \in Y_j$, что $\sum_j y_j + \bar{\omega} >> 0.$ Докажите, что любое ценовое квазиравновесие с трансфертами должно быть ценовым равновесием с трансфертами. (*Подсказка*: покажите сначала, что для некоторого потребителя i $w_i > 0$, а затем докажите, что $p >> 0$.)

16.D.4[C]**.** Рассмотрите экономику обмена с двумя благами и r одинаковыми потребителями. Пусть потребительское множество совпадает с $\mathbb{R}^2_+$, индивидуальные первоначальные запасы таковы, что $\omega \in \mathbb{R}^2_{++}$, а предпочтения непрерывны, строго монотонны, но необязательно выпуклы. Покажите, что симметричное распределение, в котором каждый потребитель получает свой первоначальный запас, либо является вальрасианским равновесием (при некотором векторе цен p), либо, если это не так, при достаточно большом r это распределение не Парето-оптимально. (*Подсказка*: можно начать рассмотрение с более простого дифференцируемого случая.)

16.E.1[B]. Для данного множества возможных уровней полезности U обозначим через $U' \subset U$ его подмножество, содержащее допустимые распределения:

$$U' = \{(u_1(x_1),\ \ldots,\ u_I(x_I)) : \sum_i x_i = \sum_j y_j + \overline{\omega} \text{ для некоторого } y_j \in Y_j\}.$$

(В отличие от U' множество U допускает свободу расходования полезности.)

a) Приведите пример экономики обмена с двумя благами и двумя потребителями, демонстрирующий, что возможна такая ситуация, когда точка из множества U' принадлежит границе множества U, но *не* является Парето-оптимальной.

b) Предположим теперь, что все множества Y_j удовлетворяют свойству свободы расходования и $0 \in Y_j$. Предположим также, что для любого потребителя i $X_i = \mathbb{R}^L_+$[30], а предпочтения $\succsim_i$ непрерывны и строго монотонны. Покажите, что тогда любая граничная точка множества U, принадлежащая множеству U', Парето-оптимальна. (*Подсказка*: положите $u_i(0) = 0$ для всех i и покажите, что $U' = U \cap \mathbb{R}^L_+$. Затем покажите, что, если $u \in U$ — Парето-оптимум и $0 \leq u' \leq u$, где $u' \neq u$, то мы можем достичь u' с излишком благ по сравнению с u.)

c) Рассмотрите экономику обмена, в которой потребительские множества равны $\mathbb{R}^L_+$, предпочтения непрерывны и локально ненасыщаемы, а вектор совокупных первоначальных запасов строго положителен. Покажите, что в такой экономике, если $u = (u_1, \ldots, u_I)$ — вектор полезностей, соответствующих ценовому квазиравновесию с трансфертами, то u не может принадлежать внутренности множества U, т. е. не существует допустимого распределения, позволяющего получить бо́льшую полезность *каждому* потребителю. (*Подсказка*: покажите, что $w_i > 0$ для некоторого потребителя i, а затем примените утверждение 16.D.2.)

16.E.2[B]. Покажите, что в экономике с выпуклыми производственными и потребительскими множествами и вогнутыми функциями полезности потребителей множество возможных уровней полезности U выпукло.

16.F.1[B]. В тексте.

16.F.2[A]. Выведите условия первого порядка (16.F.2) и (16.F.3) для задачи (16.F.1).

16.F.3[A]. Выведите условия (16.F.4), (16.F.5) и (16.F.6) из условий первого порядка (16.F.2) и (16.F.3).

16.F.4[A]. Выведите условия первого порядка (16.F.4), (16.F.5) и (16.F.6) для задач (16.F.7), (16.F.8) и (16.F.9) соответственно.

[30] Ошибка в оригинальном тексте: вместо $X_i = \mathbb{R}^I_+$ должно быть $X_i = \mathbb{R}^L_+$. — *Примеч. пер.*

16.G.1^A. Докажите утверждение 16.G.1, используя условия первого порядка (16.F.2) и (16.F.3).

16.G.2^A. В тексте.

16.G.3^B. Приведите графическую иллюстрацию для экономики с одним потребителем, одной фирмой, двумя факторами производства и одним выпуском, в которой в (единственном) равновесии с ценами, равными предельным издержкам, издержки *не* минимизируются. (*Подсказка*: выберите такую производственную функцию, чтобы условие квазивогнутости не выполнялось.)

16.G.4^B. Покажите, что при общей постановке задачи в разделе 16.G, если имеется единственный потребитель (возможно, н-репрезентативный потребитель) с выпуклыми предпочтениями, то существует по крайней мере одно равновесие с ценами, равными предельным издержкам, которое оптимально.

16.G.5^Б. Пусть в некоторой экономике имеется два товара: образование (e) и еда (f), производимые с помощью труда (L) и земли (T) в соответствии со следующими производственными функциями:

$$e = (\min\{L, T\})^2 \text{ и } f = (LT)^{1/2}.$$

Предположим, что в экономике есть только один потребитель с функцией полезности

$$u(e, f) = e^{\alpha} f^{(1-\alpha)}$$

и первоначальным запасом (ω_L, ω_T). Для простоты вычислений будем считать, что $\omega_L = \omega_T = 1$ и $\alpha = {}^1\!/_2$.

a) Найдите оптимальное распределение первоначальных запасов в производственных целях.

b) Понимая, что производство образования характеризуется возрастающей отдачей от масштаба, правительство приняло решение осуществлять надзор за сферой образования и финансировать ее деятельность посредством паушального налога на потребителя. Потребление образования конкурентно в том смысле, что потребитель может выбрать любой желаемый уровень образования и объем потребления еды по текущим ценам. Пищевая промышленность конкурентна как со стороны производства, так и со стороны спроса. Предполагая, что отрасль образования минимизирует издержки, найдите предельные издержки образования в оптимуме. Покажите, что если данная стоимость образования объявлена наряду с паушальным налогом, направленным на покрытие дефицита, когда образовательный сектор производит оптимальный объем при данной цене на продукцию, то выбор уровня образования потребителем будет оптимальным.

c) Какова величина паушального налога, необходимого для централизации этого оптимума, при использовании подхода, описанного в пункте (b)?

Предположим теперь, что в экономике имеется два потребителя с одинаковыми предпочтениями, описываемыми приведенной выше функцией полезности. Пусть один потребитель владеет всеми земельными ресурсами, а другой — всеми трудовыми. В рассматриваемом обществе произвольные паушальные налоги невозможны. Существует закон, который гласит, что любой дефицит государственного предприятия должен покрываться с помощью налога на стоимость земли.

d) Выпишите трансферт, выплачиваемый владельцем земли, как функцию от планируемого государством производства образования.

e) Найдите равновесие с ценами, равными предельным издержкам в данной экономике, причем трансферты должны согласовываться с функцией трансферта, полученной в пункте (d). Будет ли это равновесие Парето-оптимальным?

16.AA.1$^{\mathrm{A}}$. Покажите, что если все множества X_i и все множества Y_j замкнуты, то множество допустимых распределений A также замкнуто.

16.AA.2$^{\mathrm{B}}$. Покажите, что множество $(Y + \{\bar{\omega}\}) \cap \mathbb{R}^L_+$ является компактом, если выполнены следующие четыре предпосылки: (1) множество Y замкнуто; (2) множество Y выпукло; (3) $0 \in Y$ и (4) если $v \in Y \cap \mathbb{R}^L_+$, то $v = 0$. Приведите графическую иллюстрацию четырех примеров, демонстрирующих невозможность исключения ни одной из этих четырех предпосылок.

16.AA.3$^{\mathrm{B}}$. Пусть множество $Y = Y_1 + Y_2 \subset \mathbb{R}^L_+$ удовлетворяет условиям, приведенным в упражнении **16.AA.2**, и, кроме того, $0 \in Y_1$ и $0 \in Y_2$. Покажите, что если Y удовлетворяет свойству необратимости, то множество $\{y_1 \in Y_1 : y_1 + y_2 + \bar{\omega} \geq 0$ для некоторого $y_2 \in Y_2\}$ ограничено.

Глава 17. Позитивная теория равновесия

17.A. Введение

В этой главе будет изучена предсказательная сила вальрасианского равновесия, однако теперь это будет сделано с точки зрения позитивного подхода, а не нормативного, как это было в главе 16.

В разделе 17.B будут рассмотрены основные концепции: мы вспомним модель *экономики с частной собственностью* и определение *вальрасианского равновесия* в том виде, в котором они были даны в разделе 16.B. Далее введем понятие функции *агрегированного избыточного спроса* и при достаточно строгих предположениях опишем вальрасианское равновесие как решение соответствующих уравнений. Это и станет методом, который мы будем использовать в течение всей главы для исследования вальрасианского равновесия (в приложении A мы обсудим другую полезную систему уравнений, основывающуюся на понятии благосостояния агента).

Раздел 17.C (и в более общем виде — приложение B) посвящен поиску условий, гарантирующих существование вальрасианского равновесия. Найденный интересный набор условий убедит нас в том, что искомый объект существует, при этом основным условием будет *выпуклость* оптимизационных задач экономических агентов.

В разделах 17.D и 17.H мы рассматриваем различные свойства найденных равновесий. Обычно существует конечное число равновесий, каждое из которых локально изолировано. Более того, их количество окажется нечетным, а сами они разделяются на два типа согласно знаку их «индекса». В разделе 17.E мы столкнемся с трудностями: без дальнейших усилений предположений относительно предпочтений, первоначальных запасов и технологий мы больше ничего не сможем предсказать: поведение функций избыточного спроса и, следовательно, свойства равновесий мы должны довольствоваться фактами, установленными в разделе 17.D. То же нас поджидает и в разделе 17.F, но уже в связи с вопросом о единственности равновесия, в разделе 17.G — в связи со сравнительной его статикой, и в разделе 17.H — с устойчивостью процесса «нащупывания» равновесия (tâtonnement stability). Поэтому целью перечисленных разделов будет поиск интересных достаточных условий, гарантирующих единственность и устойчивость равновесий, а также хорошие результаты сравнительной статики. Общая тема этих разделов — роль двух достаточных условий — *слабой аксиомы выявленных предпочтений для агрегатов* (слабая аксиома выявленных предпочтений — это один из способов продемонстрировать, что эффекты богатства не могут в агрегате перевесить положительного влияния эффектов замещения) и *валовой заменимости* (способ сказать об отсутствии строгой взаимодополняемости товаров в экономике).

В разделе 17.I мы возвратимся к изучению роли выпуклости для гарантирования существования вальрасианского равновесия. Для этого мы покажем, что «невыпуклости», которые достаточно малы по отношению ко всей экономике (мы рассматриваем пример неделимой машины), не могут явиться препятствием для (почти) существования равновесий, даже если они «большие» с точки зрения конкретного агента.

Эта глава интересна как с методологической, так и с содержательной стороны, поскольку, во-первых, посвящена важному теоретическому разделу — вальрасианскому равновесию, а, во-вторых, вопросы, которые в ней ставятся (например, существует ли равновесие в данной экономике, является ли оно типично изолированным, является ли оно единственным, устойчивым и как оно реагирует на системные шоки), и методы, используемые при доказательствах, значительные для любой теории равновесия.

17.B. Равновесие: определения и основные уравнения

Концепция экономики с частной собственностью была уже описана в разделе 16.B. В этой экономике существует I потребителей и J производителей. Каждый i-й потребитель характеризуется потребительским множеством $X_i \subset \mathbb{R}^L$ и отношениями предпочтения $\succsim_i$ на этом множестве, вектором первоначального запаса $\omega_i \in \mathbb{R}^L$ и долей в j–й фирме $\theta_{ij} \geq 0$ (при этом $\sum_i \theta_{ij} = 1$). Каждая j-я фирма, в свою очередь, характеризуется производственным множеством $Y_j \subset \mathbb{R}^L$. *Распределением* в такой экономике будет называться следующий набор из векторов производства и потребления:

$$(x, y) = (x_1, \ldots, x_I, y_1, \ldots, y_J) \in X_1 \times \ldots \times X_I \times Y_1 \times \ldots \times Y_J.$$

Объектом исследования в данной главе будет понятие *вальрасианского равновесия*, которое мы будем считать положительным результатом работы системы рынков, в которых потребители и фирмы являются ценополучателями, а богатство потребителей зависит от их первоначальных запасов и долей в прибыли фирмы. Формальное определение вальрасианского равновесия было уже введено (определение 16.B.3), но мы его здесь повторим.

Определение 17.B.1. Для экономики с частной собственностью, заданной в виде $\left(\left\{(X_i, \succsim_i)\right\}_{i=1}^{I}, \left\{Y_j\right\}_{j=1}^{J}, \left\{\omega_i, \theta_{i1}, \ldots, \theta_{iJ}\right\}_{i=1}^{I}\right)$, распределение (x^*, y^*) и вектор цен $p = (p_1, \ldots, p_L)$ составляют вальрасианское равновесие (или конкурентное, или равновесие ценополучения), если:

1) для любых j, $y_j^* \in Y_j$ максимизирует прибыль фирмы на Y_j, т. е. $p \cdot y_j \le p \cdot y_j^*$ для всех $y_j \in Y_j$;
2) для любых i, $x_i^* \in X_i$ является наилучшим при $\succsim_i$ в бюджетном множестве
$$\left\{x_i \in X_i : p \cdot x_i \le p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} p \cdot y_j^*\right\};$$[1]
3) $\sum_i x_i^* = \sum_i \omega_i + \sum_j y_j^*$.

Для целей формального анализа крайне полезно выразить равновесие как решение системы уравнений, что мы далее и сделаем. При этом мы введем несколько сильных предположений с целью упростить анализ.

Экономика обмена и функции избыточного спроса

Начнем вывод таких уравнений с изучения чистой экономики обмена. Это экономика, в которой возможные виды производственной деятельности находятся в свободном пользовании. Запишем это формально. Пусть $J = 1$ и $Y_1 = -\mathbb{R}^L_+$. Предположим сначала, что $X_i = \mathbb{R}^L_+$ и предпочтения потребителей *непрерывны, строго выпуклы и локально ненасыщаемы* (скоро последнее требование мы усилим до требования о строгой монотонности предпочтений), а их начальные запасы строго положительны, т. е. $\sum_i \omega_i \gg 0$.

Тогда три условия из определения 17.B.1 можно переписать так: набор из распределений $\left(x^*, y^*\right) = \left(x_1^*, \ldots, x_I^*, y_1^*\right)$ и цен $p \in \mathbb{R}^L$ составляет вальрасианское равновесие тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

(1′) $y_1^* \le 0$, $p \cdot y_1^* = 0$ и $p \ge 0$,

(2′) $x_i^* = x_i(p, p \cdot \omega_i)$ для всех i (где $x_i(\cdot)$ — функция вальрасианского спроса i-го потребителя),

(3′) $\sum_i x_i^* - \sum_i \omega_i^* = y_1^*$.

Условие (1′) здесь единственное, не являющееся очевидным, и в упражнении 17.B.1 читателю предлагается доказать связь этого условия с условием (1) из определения 17.B.1.

Следующее утверждение есть прямое следствие условий (1′) и (3′).

Утверждение 17.B.1. В экономике чистого обмена, в которой предпочтения потребителей непрерывны, строго выпуклы и локально ненасыщаемы, вектор цен $p \ge 0$ будет равновесным по Вальрасу тогда и только тогда, когда выполняется неравенство:
$$\sum_i (x_i(p, p \cdot \omega_i) - \omega_i) \le 0. \tag{17.B.1}$$

[1] Выражение «x_i является наилучшим при $\succsim_i$ в множестве B» означает, что x_i — это выбор i-го потребителя на множестве B, максимизирующий его предпочтения, т. е. $x_i \succsim_i x_i'$ для всех $x_i' \in B$.

Доказательство: выполнение неравенства (17.B.1) в вальрасианском равновесии в описанной экономике непосредственно следует из всех трех условий.

Докажем, что обратное тоже верно. Предположим, что неравенство 17.B.1 выполнено. Если при этом $y_1^* = \sum_i \left(x_i(p,\ p\cdot\omega_i) - \omega_i\right)$ и $x_i^* = x_i(p,\ p\cdot\omega_i)$, то $\left(x_1^*,\ \ldots,\ x_I^*,\ y_1^*\right)$ и p удовлетворяют условиям (1′)–(3′). В частности, заметим, что $p\cdot y_1^* = p\cdot\sum_i\left(x_i(p,\ p\cdot\omega_i) - \omega_i\right) = \sum_i\left(p\cdot x_i(p,\ p\cdot\omega_i) - p\cdot\omega_i\right) = 0$, где последнее равенство выполнено, поскольку в силу локальной ненасыщаемости предпочтений $p\cdot x_i(p, p\cdot\omega_i) = p\cdot\omega_i$ для всех i. ■

Вектор $x_i(p, p\cdot\omega_i) - \omega_i \in \mathbb{R}^L$ представляет собой чистый, или *избыточный*, спрос i-го потребителя на каждый товар x, и это есть разница между тем количеством товара, которым он хочет обладать, и тем, которое содержится в его первоначальном запасе. Условие 17.B.1 показывает, что полезно знать сумму всех избыточных спросов по всем потребителям как функцию от цен.

Определение 17.B.2. *Функцией избыточного спроса i-го потребителя* называется функция $z_i(p) = x_i(p, p\cdot\omega_i) - \omega_i$, где $x_i(p, p\cdot\omega_i)$ — функция вальрасианского спроса i-го потребителя. Тогда функцией (*агрегированного*) избыточного спроса в экономике будет называться функция $z(p) = \sum\limits_i z_i(p)$.

Область определения этой функции — множество неотрицательных векторов цен.

Теперь переформулируем утверждение 17.B.1, используя введенные определения:

«Вектор цен $p \in \mathbb{R}_+^L$ является равновесным тогда и только тогда, когда

$$z(p) \le 0». \tag{17.B.1′}$$

Заметим, что если p — это вектор цен вальрасианского равновесия в чистой экономике обмена с локально ненасыщаемыми предпочтениями агентов, то $p \ge 0$, $z(p) \le 0$ и $p\cdot z(p) = \sum_i p\cdot z_i(p) = \sum_i\left(p\cdot x_i(p,\ p\cdot\omega_i) - p\cdot\omega_i\right) = 0$ (последнее равенство следует из свойства локальной ненасыщаемости). Итак, теперь выполнено не только $z_l(p) \le 0\ \forall\, l$, но верно и следующее утверждение: если $p_l > 0$, то $z_l(p) = 0$. Это означает, что в равновесии предложение товара l может быть избыточным ($z_l(p) < 0$), но только если этот товар бесплатен (т. е. только если $p_l = 0$)[2].

Упростим анализ, усилив требования к предпочтениям потребителя. Для этого до конца этой главы (исключая раздел 17.I и приложение B) будем считать, что для всех i на множестве $X_i = \mathbb{R}_+^L$ *отношения предпочтения $\succsim_i$ не только непрерывны и строго выпуклы, но и строго монотонны.*

[2] Например, товар l может быть не «благом», а «антиблагом». Тогда ожидаемо, что цена на него будет равна нулю, спрос на него окажется также нулевым, а избыточное предложение $z_l(\text{p}) = \omega_l > 0$ будет ликвидировано с использованием имеющейся технологии.

Строгая монотонность предпочтений подразумевает, что равновесный вектор цен будет строго положительным ($p >> 0$), иначе решение задачи потребителя даст спрос на бесконечное количество бесплатного товара. В таком случае при строго монотонных предпочтениях будем называть *вектор цен* $p = (p_1, \ldots, p_L)$ *равновесным* (*по Вальрасу*), если и только если он приводит рынки в равновесие, то есть тогда и только тогда, когда он является решением системы из L уравнений с L неизвестными:

$$z_l(p) = 0 \text{ для всех } l = 1, \ldots, L, \tag{17.B.2}$$

$$\text{или, в более компактной форме, } z(p) = 0.$$

Ниже мы изучим свойства вальрасианских равновесий, изучая свойства именно этой системы уравнений. Заметим, что мы могли бы это сделать и на основе свойств других систем уравнений. Например, подобная важная система рассматривается в приложении А. В ней исследуются свойства богатства, рассмотренные в главе 16.

Далее в этой главе нам понадобится следующее утверждение.

Утверждение 17.B.2. Пусть отношения предпочтения $\succsim_i$ каждого i-го потребителя на множестве $X_i = \mathbb{R}^L_+$ непрерывны, строго выпуклы и строго монотонны. Пусть также $\sum_i \omega_i \gg 0.$ Тогда для любого строго положительного вектора цен $p >> 0$ определена функция агрегированного избыточного спроса, которая обладает следующими свойствами:

(1) $z(\cdot)$ непрерывна,
(2) $z(\cdot)$ однородна первой степени,
(3) $p \cdot z(p) = 0$ для всех p (выполняется *закон Вальраса*),
(4) существует число $s > 0$, такое что $z_l(p) > -s$ для любого товара l и всех цен p,
(5) если $p^n \to p$, где $p \neq 0$ и $p_l = 0$ для некоторого l, то $\max\left\{z_1\left(p^n\right), \ \ldots, \ z_L\left(p^n\right)\right\} \to \infty$.

Доказательство. За исключением свойства (5) остальные свойства следуют собственно из самого определения и из свойств функций спроса[3]. Ограничение в свойстве (4) — следствие неотрицательности спроса (т. е. того, что $X_i = \mathbb{R}^L_+$), поскольку общие чистые продажи любого товара l агентом не могут превышать первоначального запаса этого товара. Доказательство свойства (5) предлагается в качестве упражнения 17.B.2 в конце этой главы. Интуитивное объяснение здесь следующее: с приближением некоторых цен к нулю потребитель, богатство которого стремится к строго положительному пределу (заметим, что в силу выполнения неравенства $p \cdot \left(\sum_i \omega_i\right) > 0$ в экономике будет существовать по крайней мере один такой потре-

[3] Заметим, что функция будет обладать свойствами (1)–(4), даже если мы потребуем выполнения только свойства локальной ненасыщаемости предпочтений.

битель) и чьи предпочтения строго монотонны, будет готов потребить количества некоторых товаров, цена на которые снижается до нуля, стремящиеся к бесконечности (но это не относится ко всем товарам, поскольку отношение цен все еще будет важно). ■

Наконец, заметим, что выполнение закона Вальраса гарантирует, что рынки будут уравновешены (т. е. для любого l будет верно $z_l(p) = 0$), поэтому достаточно проверить, что уравновешены *все рынки кроме любого одного*. В частности, если $p \gg 0$ и $z_1(p) = \ldots = z_{L-1}(p) = 0$, то, поскольку $p \cdot z(p) = \sum_l p_l z_l(p) = 0$ и $p_L > 0$, должно выполняться $z_L(p) = 0$. Таким образом, вектор из $L - 1$ избыточных спросов на $L - 1$ товаров, записанный как $\hat{z}(p) = \left(z_1(p), \ \ldots, \ z_{L-1}(p)\right)$, дает строго положительный вектор цен в вальрасианском равновесии тогда и только тогда, когда $\hat{z}(p) = 0$.

Экономика с производством

Распространим подход, основанный на уравнениях избыточного спроса, на общий случай экономики с производством. Допустим для начала, что производственное множество замкнуто, строго выпукло, ограничено сверху. В этом случае для любого строго положительного вектора цен $p \gg 0$ мы можем найти максимальную прибыль фирмы $\pi_j(p)$ и соответствующий (максимизирующий эту прибыль) выпуск $y_j(p)$. Тогда выражение

$$\bar{z}(p) = \sum_i x_i\left(p, \ p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij}\pi_j(p)\right) - \sum_i \omega_i - \sum_j y_j(p) \qquad (17.B.3)$$

будет описывать *функцию избыточного спроса в экономике с производством*. Вектор цен p будет равновесным тогда и только тогда, когда он удовлетворяет системе уравнений $\bar{z}(p) = 0$. Ниже в упражнении 17.B.4 читателю будет предложено доказать, что при выполнении достаточно слабого предположения о том, что начальные запасы товаров позволяют выпускать строго положительный выпуск, эта функция обладает свойствами (1)–(5) утверждения 17.B.2.

Заметим, что если производственное множество не ограничено сверху, то для некоторых строго положительных векторов цен функция $\bar{z}(p)$ может не быть определена (поскольку для некоторых j прибыль может быть бесконечной). Тем не менее в любом случае равновесный вектор цен будет характеризоваться выполнением условия $\bar{z}(p) = 0$.

Случаи нестрого выпуклых производственных множеств более сложны, потому что для них зависимость $y_j(p)$ может перестать быть однозначной. Вместе с тем они важны как с теоретической, так и с практической точек зрения. К ним, в частности, относятся случаи постоянной отдачи от масштаба. Потому мы бы не хотели удалять их из поля зрения введением вышеперечисленных ограничений. При этом в указанных случаях производственное множество не является строго выпуклым и не ограничено сверху (за исключением тривиального случая, в котором нет никакого строго положительного объема выпуска). Тогда можно было бы рассматривать равновесия как нули *отображения избыточного спроса в экономике с производством,* определенного соотношением (17.B.3) для строго положительных цен[4]. Отображения, однако, не дают «хороших» систем уравнений (например, они не могут быть дифференцируемы), поэтому часто удобно в таких случаях найти решения расширенной системы уравнений, включающей как потребление, так и производство в рассматриваемой экономике. Проиллюстрируем вышесказанное.

Чтобы показать, как составляется расширенная система уравнений, рассмотрим случай, в котором производство «линейно» в том смысле, который вкладывается в это понятие в приложении A в главе 5. Пусть некоторая технология производства в экономике характеризуется наличием J элементарных производственных процессов $a_1, \ldots, a_j \in \mathbb{R}^L$. Агрегированное производственное множество тогда описывается следующим образом:

$$Y = \left\{ y \in \mathbb{R}^L : y \leq \sum_j \alpha_j a_j \text{ для некоторых } \left(\alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_J \geq 0\right) \right\}.$$

Поскольку предпочтения агента строго монотонны, в равновесии не будет «даровых» товаров (т. е. вектор цен должен быть обязательно строго положительным). Кроме того, производство должно максимизировать прибыль, и в случае постоянной отдачи от масштаба эта прибыль должна быть нулевой. Таким образом, набор (p, α), состоящий из неотрицательного вектора цен и вектора интенсивностей $\alpha \in \mathbb{R}^J_+$, будет являться равновесием в данной экономике тогда и только тогда, когда они удовлетворяют следующим условиям:

$$z(p) - \sum_j \alpha_j a_j = 0 \tag{17.B.4}$$

и

$$p \cdot a_j \leq 0, \alpha_j(p \cdot a_j) = 0 \text{ для всех } j, \tag{17.B.5}$$

где $z(\cdot)$ — функция агрегированного избыточного спроса, заданная определением 17.B.2. Заметим, что условие (17.B.5) можно представить в виде системы уравнений, заменив $p \cdot a_j \leq 0, \alpha_j(p \cdot a_j) = 0$ на $\alpha_j p \cdot a_j + \max\{0, p \cdot a_j\} = 0$. Более общий случай, в котором интенсивности непрерывно взаимозаменяемы, рассмотрен в упражнении 17.B.5.

Заметим, что по крайней мере для случая выпуклых технологий мы без потери общности можем рассматривать весь производственный сектор в экономике как одну фирму, использующую технологию с постоянной отдачей от масштаба. Действительно, из утверждения 5.B.2 следует, что, если мы добавим каждой фирме по дополнительному, специфическому для этой фирмы фактору производства, мы всегда можем предположить, что Y_j обладает постоянной отдачей от масштаба (и при этом мы преобразуем доли каждого потребителя в прибыли j-й фирмы, превратив их в первоначальные запасы физического ресурса). Поскольку в равновесии прибыли фирм равны нулю, для нахождения благосостояния потребителей не нужно более считать эти фирмы различными. Более того, такая необходимость исчезает и при поиске оптимальных производственных решений. Как мы уже видели в разделе 5.E, мы могли бы работать и с агрегированной «репрезентативной» фирмой $Y = \sum_j Y_j$.

Постоянная отдача от масштаба единственной Y может быть интерпретирована в терминах некоторого долгосрочного знания, свободно доступного любому агенту

---

[4] Вектор цен p будет равновесным тогда и только тогда, когда $0 \in \bar{z}(p)$.

в экономике (т. е. каждому потребителю), — нужного для организации фирм или просто для производства внутри домохозяйства. Можно было бы сделать еще один шаг вперед и обойтись без отдельного рассмотрения фирм и условий максимизации прибыли: в упражнении 17.B.6 будет предложено, например, переформулировать определение вальрасианского равновесия в терминах двухэтапного процесса, в котором на первом этапе потребители выбирают вектор $v_i \in \mathbb{R}^L$ на бюджетном ограничении $p \cdot v_i \leq p \cdot \omega_i$ (при условии уравновешения рынка $\sum_i v_i = \sum_i \omega_i$), а на втором каждый i-й игрок использует вектор v_i и технологию Y для производства внутри домохозяйства наиболее предпочтительной потребительской корзины[5].

17.C. Существование вальрасианского равновесия

Позитивный подход предполагает поиск ответа на вопрос, при каких условиях рассматриваемая теоретическая модель будет обладать решением. Такую постановку вопроса называют проблемой *существования* (равновесия). Концептуально, гарантия существования равновесия означает, что наша формулировка равновесия самосогласована, т. е. логически непротиворечива, а математическая модель «правильна», т. е. отвечает поставленным целям — выявлению соответствующих условий существования. Поэтому, хотя теорема о существовании еще не является финальным аккордом при изучении равновесия, она в некотором смысле представляет собой дверь в мир экономического анализа[6].

Существование вальрасианского равновесия может быть установлено для достаточно общего случая, и мы это сделаем в приложении B. Здесь же в целях поддержания единой логики главы будет изучен частный случай чистой экономики обмена, рассматриваемой в терминах избыточного спроса.

В разделе 17.B мы уже видели, что для функции избыточного спроса $z(\cdot)$ в экономике обмена, в которой $\sum_i \omega_i \gg 0$, а предпочтения потребителей непрерывные, строго выпуклые и строго монотонные, выполняются свойства (1)–(5) утверждения 17.B.2. Покажем теперь, что *любая* функция $z(\cdot)$, обладающая этими пятью свойствами, позволяет получить решение, т. е. найти вектор цен, такой что $z(p) = 0$. Таким образом, мы утверждаем, что при выполнении условий с (1) по (5) решение всегда найдется.

Для простоты предположим, что существует только два товара ($L = 2$). Тогда существование равновесия доказывается легко. Сначала, используя однородность нулевой степени функции $z(\cdot)$ (условие (2) утверждения 17.B.2),

[5] Этот процесс формально сводит экономику с производством к экономике, где имеет место только обмен, но при этом не подразумевается, что такая индуцированная экономика обмена удовлетворяет всем сильным предположениям, которые были использованы в этой главе.

[6] Следует подчеркнуть, что обнаруженный набор условий, обеспечивающих существование вальрасианского равновесия, еще не означает («автоматически»), что такое равновесие будет иметь место всегда, когда предпочтения, первоначальные запасы и технологии удовлетворяют предпосылкам из теоремы существования: поведенческая предпосылка о восприятии цен как заданных и институциональная предпосылка о полноте рынков обязаны также быть выполненными. В свою очередь, если требования к предпочтениям, первоначальным запасам и технологиям, содержащиеся в теореме существования, не выполнены, то, возможно, существующее в таких условиях равновесие может быть совсем иным, нежели то, которые мы ищем.

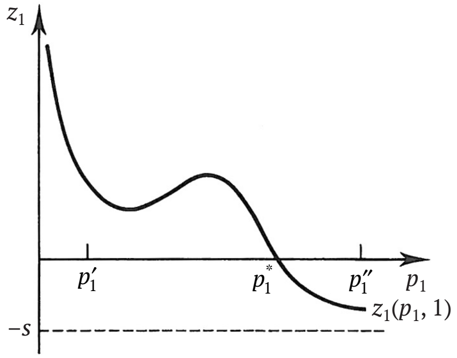


Рис. 17.C.1. Доказательство существования равновесия для случая $L = 2$

пронормируем цену второго товара и будем искать вектор цен в виде $(p_1, 1)$. Тогда по закону Вальраса (условие (3) утверждения 17.B.2) равновесие можно получить, решив единственное уравнение $z_1(p_1, 1) = 0$. Графически решение этого уравнения с одной неизвестной представлено на рис. 17.C.1[7].

Для достаточно малых p_1' верно неравенство $z_1(p_1', 1) > 0$; для достаточно больших p_1'', наоборот, $z_1(p_1'', 1) < 0$. Эти ограничения следуют из свойств (4) и (5) утверждения 17.B.2, поскольку товаром с положительным избыточным спросом становится такой, относительная цена которого очень низка[8]. Поскольку функция $z_1(p_1, 1)$ непрерывна (условие (1) утверждения 17.B.2), должно существовать промежуточное значение $p_1^* \in \left[p_1', p_1''\right]$, где $z_1\left(p_1^*, 1\right) = 0$, а тогда должен существовать и равновесный вектор цен.

Случай с более чем двумя товарами сложнее с математической точки зрения, и мы воспользуемся для его рассмотрения теоремой о неподвижной точке Какутани (см. раздел M.I математического приложения) и выведем утверждение 17.C.1. Нужно сказать, что в ходе доказательства этого утверждения используется некоторый технический прием: подразумевается, что избыточный спрос не определен, если цены на некоторые товары нулевые. Читатель тем не менее может лучше понять суть теоремы Какутани из утверждения 17.C.2, поскольку для его доказательства используется очень простой случай функций избыточного спроса, определенных при всех ненулевых и неотрицательных ценах.

Утверждение 17.C.1. Пусть функция $z(p)$ определена для всех строго положительных векторов цен $p \in \mathbb{R}^L_{++}$ и удовлетворяет условиям (1)–(5) утверждения 17.B.2. Тогда система уравнений $z(p) = 0$ будет иметь решение. Таким образом, вальрасианское равновесие существует в лю-

[7] Заметим, что на рисунке график представлен в более знакомом для математиков виде, где значения независимой переменной p_1 отложены по горизонтальной оси. Обычное для моделей частичного равновесия откладывание цен по вертикальной оси, которого мы придерживались в части III, является традиционным для теории Маршалла (Marshall, 1920), в которой цены являются зависимыми переменными.

[8] В частности, условие (4) предполагает, что объемы планируемых продаж ограничены. По закону Вальраса объемы планируемых покупок тоже должны быть ограничены. Поскольку по условию (5) объемы *некоторых* покупок перестают быть ограниченными при $p_1 \to 0$, получается, что это именно товар 1, спрос на который перестает быть ограниченным при $p_1 \to 0$. Таким образом, $z_1(p_1', 1) > 0$ для достаточно малых p_1'. Симметрично при $p_1 \to \infty$ (что при условии однородности функции избыточного спроса нулевой степени эквивалентно случаю $p_2 \to 0$ при фиксированной цене на первое благо) для достаточно высоких цен p_1'' должно выполняться $z_2(p_1'', 1) > 0$, а отсюда и $z_1(p_1'', 1) < 0$.

бой экономике чистого обмена, в которой $\sum_i \omega_i \gg 0$ и каждый агент обладает непрерывными, строго выпуклыми и строго монотонными предпочтениями.

Доказательство. Для удобства сначала пронормируем цены и обозначим через

$$\Delta = \left\{ p \in \mathbb{R}^L_+ : \sum_l p_l = 1 \right\}$$

единичный симплекс на множестве $\mathbb{R}^L$. Поскольку функция $z(\cdot)$ однородна нулевой степени, мы можем ограничиться поиском равновесия среди векторов цен в Δ. Заметим, однако, что функция $z(\cdot)$ хорошо определяется только для векторов цен из следующего множества:

$$\text{внутренность множества } \Delta = \{p \in \Delta \colon p_l > 0 \text{ для всех } l\}.$$

Дальнейшие рассуждения проведем в пять этапов. Первые два этапа позволят нам построить отражение $f(\cdot)$ из Δ в Δ. На третьем этапе докажем, что любая неподвижная точка $f(\cdot)$, т. е. p^*, такое что $p^* \in f(p^*)$, верно, что $z(p^*) = 0$. На четвертом этапе докажем, что $f(\cdot)$ выпуклозначна и полунепрерывна сверху (т. е. имеет замкнутый график). И наконец, на пятом этапе мы применим теорему Какутани о неподвижной точке для того, чтобы показать, что такое p^* для $p^* \in f(p^*)$ существует.

Будем далее обозначать векторы, являющиеся элементами множества $f(p) \subset \Delta$, буквой q.

Шаг 1. Построение отображения неподвижной точки для внутренних точек p из Δ. Пусть для всех $p >> 0$ верно:

$$f(p) = \{q \in \Delta \colon z(p) \cdot q \geq z(p) \cdot q' \text{ для всех } q' \in \Delta\},$$

т. е. для каждого «предлагаемого» p «встречное предложение», определяемое отображением $f(p)$, — это любой вектор цен q, который среди всех доступных векторов цен (т. е. всех векторов, содержащихся в Δ), доставляет максимум функции избыточного спроса. Экономический смысл конструкции $f(\cdot)$ таков: это правило, по которому цены стремятся в направлении избавления от избыточного спроса, т. е. приписывает наивысшие цены товарам, избыточный спрос на которые наибольший. В частности, выполнено соотношение:

$$f(p) = \{q \in \Delta \colon q_l = 0, \text{ если } z_l(p) < \max\{z_1(p), \ldots, z_L(p)\}\}.$$

Заметим, что если $z(p) \neq 0$ при $p >> 0$, то по закону Вальраса $z_l(p) < 0$ для некоторых l и $z_{l'}(p) > 0$ для некоторых других $l' \neq l$. Таким образом, для таких p для любого $q \in f(p)$ верно, что $q_l = 0$ для некоторого l. Для $z(p) \neq 0$ $f(p)$ является подмножеством границы множества Δ. Наоборот, если $z(p) = 0$, то $f(p) = \Delta$.

Шаг 2. Построение отображения неподвижной точки для граничных точек p из Δ. Если $p \in$ границе Δ, то пусть

$$f(p) = \{q \in \Delta\colon p \cdot q = 0\} = \{q \in \Delta\colon q_l = 0, \text{ если } p_l > 0\}.$$

Поскольку $p_l = 0$ для некоторых l, то множество $f(p)$ непустое. Заметим, что ни одна из цен из границы Δ не может быть неподвижной точкой, т. е. невозможно одновременно выполнение «$p \in$ границе Δ» и $p \in f(p)$, поскольку $p \cdot p > 0$, а $p \cdot q = 0$ для всех $q \in f(p)$.

Шаг 3. Неподвижная точка $f(\cdot)$ *как равновесие*. Предположим, что $p^* \in f(p^*)$. Как уже было отмечено на втором шаге, такой вектор цен не может принадлежать границе множества Δ. Таким образом, $p^* \gg 0$. При этом если $z(p^*) \neq 0$, то, как это следует из первого шага, $f(p^*)$ является подмножеством границы множества Δ, что несовместимо с утверждением о том, что $p^* \in f(p^*)$ и что $p^* \gg 0$. Поэтому если $p^* \in f(p^*)$, то мы должны получить, что $z(p^*) = 0$.

Шаг 4. Выпуклозначность и полунепрерывность сверху отображения неподвижной точки. Чтобы доказать выпуклозначность, заметим, что и тогда, когда вектор цен $p \in$ внутренности Δ, и когда он принадлежит границе Δ, $f(p)$ является линией (множеством) уровня линейной функции, определенной на выпуклом множестве Δ (т. е. множеством вида $\{q \in \Delta\colon \lambda \cdot q = k\}$, где k — скаляр и вектор λ принадлежит $\mathbb{R}^L$), и поэтому выпукло (в упражнении 17.C.1 читателю предлагается более подробно проверить выполнение этого свойства)[9].

Чтобы доказать полуопределенность сверху (см. часть M.M математического приложения, где дано определение этого термина), проверим, что $p^n \to p$, $q^n \to q$ при $q^n \in f(p^n)$ для всех n. Необходимо показать, что $q \in f(p)$. Возможны два варианта: когда p принадлежит внутренности Δ и когда p принадлежит граничной части Δ.

Если p принадлежит внутренности Δ, то для достаточно больших значений n верно, что $p^n \gg 0$. Из того, что $q^n \cdot z(p^n) \geq q' \cdot z(p^n)$ для всех $q' \in \Delta$, а также из непрерывности функции $z(\cdot)$ следует, что $q \cdot z(p) \geq q' \cdot z(p)$ для всех q'. Таким образом, получаем, что $q \in f(p)$.

Теперь предположим, что вектор p принадлежит границе Δ. Возьмем любое l, такое что $p_l > 0$. Покажем, что для достаточно больших значений n будет верно: $q_l^n = 0$, а потому должно быть выполнено и $q_l = 0$, откуда сразу следует, что $q \in f(p)$. Поскольку $p_l > 0$, существует значение $\varepsilon > 0$, такое что $p_l^n > \varepsilon$ для достаточно больших n. Если

[9] Заметим также, что для любого $p \in \Delta$ множество $f(p)$ всегда является гранью симплекса Δ, т. е. оно представляет собой одно из подмножеств Δ, заключенное в конечный набор единичных координат. Для $p \in$ границе Δ, вектор $f(p)$ — грань Δ, заключенная в нулевых координатах p. Для $p \in$ внутренности Δ, $f(p)$ — грань, заключенная в координатах товаров с максимальным избыточным спросом.

к тому же p^n принадлежит границе Δ, то $q_l^n = 0$ по определению $f(p^n)$. Если же, напротив, $p^n >> 0$, то мы можем задействовать условия (4) и (5) утверждения 17.B.2: для достаточно больших n должно выполняться неравенство:

$$z_l(p^n) < \max\{z_1(p^n), \ldots, z_L(p^n)\},$$

откуда снова получаем, что $q_l^n = 0$. Чтобы проверить, выполняется ли это неравенство, заметим, что, как следует из условия (5), правая его часть стремится к бесконечности с ростом n (поскольку $p \in$ границе Δ, некоторые цены стремятся к нулю при $n \to \infty$). При этом правая часть неравенства ограничена сверху, поскольку если она положительна, то

$$z_l(p^n) \le \frac{1}{\varepsilon} p_l^n z_l(p^n) = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{l' \ne l} p_{l'}^n z_{l'}(p^n) < \frac{s}{\varepsilon} \sum_{l' \ne l} p_{l'}^n < \frac{s}{\varepsilon},$$

где s — граница избыточного предложения, заданная условием (4)[10]. Подводя итог, заключим, что для p^n, достаточно близких к границе множества Δ, максимальный спрос соответствует некоторым благам, цены на которые близки к нулю. Поэтому для достаточно больших значений n любой вектор $q^n \in f(p^n)$ будет придавать ненулевой «вес» только тем товарам, цены на которые будут стремиться к нулю, но это гарантирует, что $p \cdot q = 0$, а отсюда что и $q \in f(p)$.

Шаг 5. Существование неподвижной точки. Теорема Какутани о неподвижной точке (см. раздел M.I математического приложения) утверждает, что выпуклозначное полунепрерывное сверху отображение из непустого, компактного, выпуклого множества имеет неподвижную точку. Поскольку множество Δ непустое, выпуклое и компактное и поскольку $f(\cdot)$ — выпуклозначное и полунепрерывное сверху отображение из Δ в Δ, делаем вывод, что в нем будет существовать p^*, такой что $p^* \in \Delta$ и $p^* \in f(p^*)$. ■

Полезно проверить, например, какие из пяти условий утверждения 17.B.2 не выполняются для функций избыточного спроса в распределениях в ящике Эджворта на рис. 15.B.10(a) и (b), в которых, как мы уже видели, вальрасианского равновесия не существует. Что касается рисунка 15.B.10(b), то предпочтения агента на нем невыпуклы, и поэтому $z(\cdot)$ не является функцией, не будем поэтому даже обсуждать ее непрерывность[11]. На рис. 15.B.10(a) не выполняется свойство (5): для любого набора цен, такого что $\left(p_1^n,\ p_2^n\right) \to \left(1,\ 0\right)$, избыточный спрос остается ограниченным. Заметим, что

[10] Неформально, последняя цепочка неравенств говорит о том, что расходы на благо l ограничены, поскольку они должны быть профинансированы (ограниченной) стоимостью избыточного предложения, а, значит, не могут быть больше этой стоимостью.

[11] Следует отметить, что равновесие все еще существовало бы, если бы $z(\cdot)$ была выпуклозначным и полунепрерывным сверхуотображением, однако представленный на рис. 15.B.10(b) избыточный спрос не удовлетворяет свойству выпуклозначности.

в пределе потребитель один, его благосостояние положительно, однако его предпочтения хотя и монотонны, но не строго монотонны.

Чтобы лучше понять теорему о неподвижной точке, рассмотрим утверждение 17.C.2, в котором ограничения ослаблены за счет того, что рассматриваются непрерывные, однородные нулевой степени функции избыточного спроса, удовлетворяющие закону Вальраса и определенные для всех положительных векторов цен. Предпочтения индивида непрерывны и строго выпуклы, а соответствующая функция избыточного спроса не совместима с монотонностью предпочтений, но может быть получена для локально ненасыщаемых предпочтений. Вспомним также, что в том случае, когда во множество рассматриваемых векторов цен входят и нулевые, в условии равновесия $z(p) \le 0$ (см. выражение 17.B.1′).

Утверждение 17.C.2: Предположим, что функция $z(p)$ определена на ненулевых, неотрицательных векторах цен $p \in \mathbb{R}^L_+$ и удовлетворяет условиям (1)–(3) утверждения 17.B.2 (т. е. непрерывна, однородна нулевой степени и удовлетворяет закону Вальраса). Тогда существует вектор цен p^*, такой что $z(p^*) \le 0$.

Доказательство. Однородность функции нулевой степени позволяет нам ограничить поиски равновесия единичным симплексом $\Delta = \left\{ p \in \mathbb{R}^L_+ : \sum_l p_l = 1 \right\}$.

Определим на Δ функцию $z^+(\cdot)$ следующим образом: $z_l^+(p) = \max\left\{ z_l(p),\ 0 \right\}$. Заметим, что $z^+(\cdot)$ непрерывна и что из равенства $z^+(p) \cdot z(p) = 0$ следует, что $z(p) \le 0$.

Введем дополнительное обозначение: $\alpha(p) = \sum_l \left[p_l + z_l^+(p) \right]$. Тогда $\alpha(p) \ge 1$ для всех p.

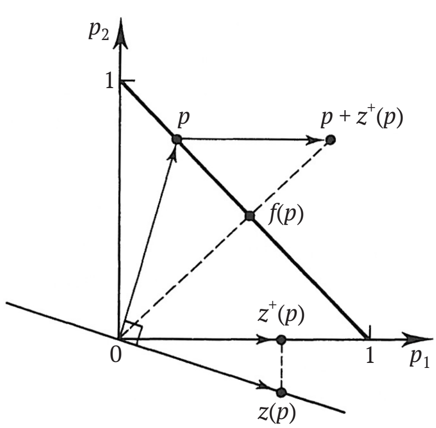


Рис. 17.C.2. Функция неподвижной точки (иллюстрация к утверждению 17.C.2)

Определим непрерывную функцию $f(\cdot)$ на замкнутом выпуклом множестве Δ в виде:

$$f(p) = [1/\alpha(p)](p + z^+(p)).$$

Заметим, что интуитивно понятно, что такая функциональная зависимость предполагает, что цена товара, на который предъявляется избыточный спрос, будет расти. График построения такой функции для случая двух товаров показан на рис. 17.C.2.

По теореме Брауэра (Brouwer) о неподвижной точке (см. раздел M.I математического приложения) существует $p^* \in \Delta$, такое что $p^* = f(p^*)$. Покажем, что $z(p^*) \leq 0$.

Согласно закону Вальраса,

$$0 = p^* \cdot z(p^*) = f(p^*) \cdot z(p^*) = [1/\alpha(p^*)]z^+(p^*) \cdot z(p^*).$$

Таким образом, $z^+(p^*) \cdot z(p^*) = 0$. Как мы уже видели, это подразумевает, что $z(p^*) \leq 0$. ■

Утверждение 17.C.1 справедливо не только для экономики обмена. Например, в разделе 17.B (и упражнении 17.B.4) мы показали, что если производственные множества замкнуты, строго выпуклы и ограничены сверху (и если из начального запаса может быть произведена положительная агрегированная потребительская корзина), то функция избыточного спроса с производством $\bar{z}(\cdot)$ удовлетворяет всем условиям утверждения 17.B.2. Это означает, что из утверждения 17.C.1 также следует, что вальрасианское равновесие существует и в этом случае.

Следует также заметить, что утверждение 17.C.1 справедливо и для выпуклозначного полунепрерывного сверху *отображения* $z(p)$, удовлетворяющего (соответствующим образом модифицированным) условиям (2)–(5) утверждения 17.B.2. Тогда существует вектор цен p, такой что $0 \in z(p)$ (более подробно этот случай рассмотрен в упражнении 17.C.2).

Тем не менее, несмотря на то что, согласно утверждению 17.C.1, равновесие существует, явным образом равновесные цены или распределения из утверждения не выводятся. Вопрос о том, как же найти, собственно, само равновесие, был впервые поднят в работе Скарфа (Scarf, 1973). Сегодня нам известно уже несколько таких подходов, и они используются для решения прикладных задач, в которых нахождение равновесия является основной целью. Обзор таких подходов представлен, например, в работе Шоувена и Уэлли (Shoven, Whaley, 1992).

Вторая теорема благосостояния из раздела 16.D может рассматриваться как частный случай полученного здесь результата. Чтобы это проверить, предположим, что распределение $x = (x_1, \dots, x_I)$ является Парето-оптимальным распределением в чистой экономике обмена, удовлетворяющим в том числе и условиям утверждения 17.C.1. Тогда из утверждения 17.C.1 получаем, что в экономике с начальными запасами благ $\omega_i = x_i$ для всех i существует вальрасианское равновесие, состоящее из набора цен p и распределений $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_I)$. Из Парето-оптимальности распределения $x = (x_1, \dots, x_I)$, в свою очередь, следует, что $\hat{x}_i \sim_i x_i$ для всех i. Но поскольку распределение $\hat{x}_i$ представляет собой оптимальный спрос i-го потребителя при ценах p и богатстве $w_i = p \cdot \omega_i = p \cdot x_i$, то x_i также должно быть оптимальным спросом i-го потребителя для набора цен и богатства $(p, p \cdot x_i)$, это и будет равновесием с трансфертами в терминах определения 16.B.4[12].

---

[12] То, что вторая теорема благосостояния может рассматриваться как результат теорем существования вальрасианского равновесия, верно и вне экономик, изучаемых в данном разделе.

17.D. Локальная единственность и теорема об индексе

Мы нашли в разделе 17.C (и приложении B) условия, гарантирующие существование вальрасианского равновесия, и теперь приступим к изучению его единственности (или множественности).

С точки зрения теоретика, лучший из миров — это тот, в котором конкретная социальная ситуация может быть смоделирована максимально кратко (использованы только наиболее неоспоримые и сильные предпосылки), и при этом она позволяет предсказать единственный исход.

Модель совершенной вальрасианской конкуренции в этом смысле действительно очень компактна. Это попытка глубоко теоретически исследовать экономику, используя в качестве входных данных только список товаров, технологию, предпочтения и первоначальные запасы потребителей. Обратной стороной медали является неполная ее детерминированность. В разделе 17.F мы увидим, что единственность равновесия в такой экономике гарантируется только при выполнении специальных условий. Ящик Эджворта на рис. 15.B.9 и пример 15.B.2 дают представление о том, что при тех предположениях, что мы пока ввели, возможна и множественность равновесий. На рис. 17.D.1 функция спроса на первый товар из примера 15.B.2 показана как функция от цены на первый товар (цена на второй товар пронормирована). Другой пример множественности равновесий приведен в упражнении 17.D.1.

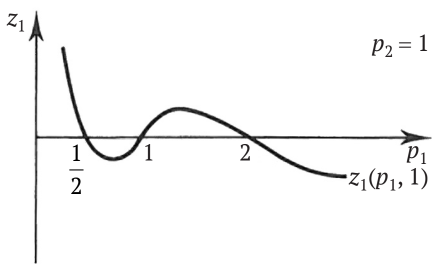


Рис. 17.D.1. График функции избыточного спроса для экономики со множеством равновесий

Если единственность равновесия недостижима, теория предписывает искать в качестве второго наилучшего результата локальную единственность равновесия. Будем говорить, что равновесный вектор цен *локально единствен*, или *локально изолирован*, если невозможно найти другой (нормированный) вектор цен, достаточно к нему близкий. Если все равновесия в экономике локально единственны, то мы будем говорить, что в такой экономике выполняется *свойство локальной единственности*. Это свойство важно тем, что в случае его выполнения несложно моделировать конкретную ситуацию. Например, исторически область, в которой лежит равновесие, известна (например, область, в которой равновесие было достигнуто, а потом исчезло в результате небольшого экономического шока), и это и может быть локально единственным равновесием. В этом случае предсказательная сила теории сохраняется, но только локально, и поэтому принято говорить о *локальной* (в отличие от глобальной) *детерминированности* такого равновесия.

Всегда ли вальрасианскую теорию можно считать локально детерминированной? Пример, представленный на рис. 17.D.1, как бы говорит, что да: любое решение уравнения избыточного спроса локально изолировано. Однако на рис. 17.D.2 и 17.D.3 представлены контрпримеры, где существует континуум вальрасианских равновесий, не являющихся локально изолированными. Последние два примера тем не менее не должны ввести нас в заблуждение: они выглядят как простое совпадение. Действительно, Дебре (Debreu, 1970) доказал, что такой результат не может считаться робастным, а может быть получен только случайно.

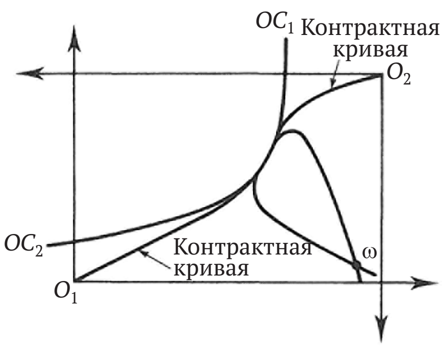


Рис. 17.D.2. Возможность существования континуума вальрасианских равновесий в ящике Эджворта

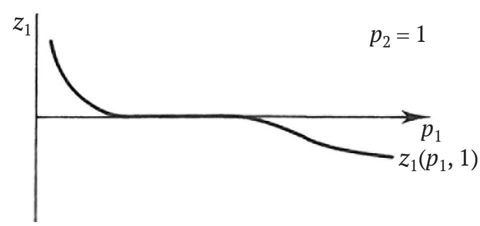


Рис. 17.D.3. Возможность существования вальрасианского равновесия на графике функции избыточного спроса

Вернемся к теоретическому обсуждению и для большей конкретики ограничимся, как обычно, анализом экономики обмена с I потребителями. Каждый потребитель описывается отношением предпочтения и первоначальным запасом $(\succsim_i, \omega_i)$. При этом предпочтения индивидов строго выпуклы, строго монотонны на множестве $\succsim_i$, а первоначальные запасы строго положительны. Как уже известно, функция агрегированного избыточного спроса $z(\cdot)$ при таких предпосылках модели удовлетворяет всем пяти условиям утверждения 17.B.2. Предположим дополнительно, что функция избыточного спроса еще и непрерывно дифференцируема[13].

Поскольку мы ищем только *относительные* цены на товары, пронормируем одну из них ($p_L = 1$) и так же, как и в разделе 17.B, введем новые обозначения: $\hat{z}(p) = \left(z_1(p), \ \ldots, \ z_{L-1}(p)\right)$ будет обозначать вектор избыточных спросов для первых $L - 1$ товаров[14]. Пронормированный вектор цен

[13] В приложении A к главе 3 мы уже обсуждали условия дифференцируемости функции спроса и функции избыточного спроса.

[14] Для дальнейшего рассуждения будет безразлично, цену на какой товар мы пронормировали. Можно показать, что, например, если $z(p) = 0$ и матрица Dz(p) размера $L \times L$ имеет ранг $L - 1$, то матрица $D\hat{z}(p)$ размера $(L - 1) \times (L - 1)$ также будет иметь ранг $L - 1$ независимо от того, цену на какой товар мы нормировали. Более того, знак детерминанта матрицы не зависит от направления нормирования (более подробно см. об этом в разделе M.D математического приложения).

$p = (p_1, \ldots, p_{L-1}, 1)$ будет равновесным тогда и только тогда, когда он является решением системы из $L - 1$ уравнений с таким же количеством неизвестных, т. е. системы $\hat{z}(p) = 0$.

Регулярные экономики

Определение 17.D.1. Равновесный вектор цен $p = (p_1, \ldots, p_{L-1})$ будет называться *регулярным*, если матрица эффектов цен $D\hat{z}(p)$ размера $(L - 1) \times$ $\times (L - 1)$ имеет ранг $L - 1$. Если при этом каждый пронормированный вектор равновесных цен регулярен, будем говорить, что такая *экономика регулярна*.

На рис. 17.D.1 каждое равновесие регулярно, потому что угол наклона касательной к графику функции избыточного спроса, равный $\partial z_1(p_1,\ 1)/\partial p_1$, ненулевой в любом равновесии. Наоборот, ни одно из равновесий на рис. 17.D.3 не регулярно, потому что для любого равновесного вектора цен наклон касательной к графику функции избыточного спроса равен нулю. Ниже будет показано, что в том смысле, в котором мы обсудим, «почти каждая» экономика регулярна. Важность технической концепции регулярности является следствием того факта, что регулярный (пронормированный) вектор цен изолирован, а регулярная экономика может иметь только конечное количество (пронормированных) равновесных цен. Сформулируем утверждение 17.D.1.

Утверждение 17.D.1. Любой регулярный (нормированный) равновесный вектор цен $p = (p_1, \ldots, p_{L-1}, 1)$ *локально изолирован (локально единственен)*. Иными словами, существует окрестность $\varepsilon > 0$, такая что если $p' \neq p,\ p'_L = p_L = 1$ и $p' - p < \varepsilon$, тогда $z(p') \neq 0$. Более того, если экономика регулярна, то количество нормированных равновесных векторов цен конечно.

Доказательство. Локальная единственность решения является прямым следствием теоремы об обратной функции (см. раздел M.E математического приложения). Но это интуитивно понятно. Для любого инфинитезмального изменения нормированных цен $dp =$ $= (dp_1, \ldots, dp_{L-1}, 0) \neq 0$ невырожденность $D\hat{z}(p)$ подразумевает, что $D\hat{z}(p)dp \neq 0,$ что выводит экономику из равновесия.

Если известно, что каждое равновесие локально изолировано, конечное количество равновесий — следствие условия (5) утверждения 17.B.2. Это условие (которое следует из свойства строгой монотонности предпочтений) подразумевает, что в равновесии относительные цены не могут быть сколь угодно близкими к нулю. То есть существует $r > 0$, такое что если выполняется $\hat{z}\left(p\right) = 0$ и $p_L = 1$, то $\dfrac{1}{r} < p_l < r$ для всех l. Непрерывность функции $\hat{z}(\cdot)$ добавляет к этому, что множество равновесных векторов цен — замкнутое множество $\mathbb{R}^{L-1}$. Замкнутое же ограниченное множество (т. е. компакт) в $\mathbb{R}^{L-1}$, каждая точка которого локально изолирована, является конечным (см. раздел M.F математического приложения). ■

Рассмотрим еще раз рис. 17.D.1. Мы видим, что в регулярной двухтоварной экономике можно утверждать не только то, что равновесий конечное число. Действительно, граничные условия на функцию избыточного спроса $z_1(\cdot)$ (избыточный спрос положителен при очень малых значениях p_1 и отрицателен при очень больших) дают именно нечетное число равновесий, при этом наклоны касательных к графику функции избыточного спроса в равновесии сменяются с отрицательного на положительный, начиная с отрицательного. Соответственно, будем приписывать индекс +1 случаям отрицательного наклона, и индекс −1 случаям с положительным наклоном. Тогда каким бы ни было количество равновесий в экономике, сумма всех индексов будет равна +1. Соответствующие определения могут помочь показать, что такая инвариантность «индексного свойства» выполняется и в общем случае с любым количеством товаров, что важно как для собственно анализа сравнительной статики такой модели, так и для решения вопроса о единственности равновесия.

Итак, приведем обобщение определения индекса регулярного равновесия, которое мы выше сформулировали для случая двухтоварной экономики.

Определение 17.D.2. Предположим, что цены $p = (p_1, \ldots, p_{L-1}, 1)$ являются регулярными равновесными ценами в рассматриваемой экономике. Введем следующее обозначение: $\text{index}\, p = (-1)^{L-1}\,\text{sign}\left|D\hat{z}(p)\right|$.

Здесь $\left|D\hat{z}(p)\right|$ — определитель матрицы $D\hat{z}(p)$ размера $(L-1)\times(L-1)$[15].

Если $L = 2$, то $\left|D\hat{z}(p)\right|$ равен углу наклона касательной к графику функции избыточного спроса при каждой цене и знак (sign) индекса указывает на знак этого наклона. Регулярная экономика имеет конечное количество равновесий (согласно утверждению 17.D.1), и для нее будет верно выражение:

$$\sum_{\{p:z(p)=0,\,p_L=1\}} \text{index}\, p.$$

Следующее определение, которое мы будем называть «теоремой об индексе», говорит нам о том, что сумма всех таких индексов равна +1.

Утверждение 17.D.2 (*теорема об индексе*). В любой регулярной экономике выполняется равенство: $\displaystyle\sum_{\{p:z(p)=0,\,p_L=1\}} \text{index}\, p = +1.$

Краткое доказательство этой теоремы будет приведено чуть ниже, сейчас же мы сформулируем следствия из этой теоремы и покажем, почему они важны. Остановимся сначала на том, что количество равновесий в регулярной экономике нечетное[16]. В частности, это означает, что оно не может быть

[15] Для любых $\alpha \neq 0$ sign $\alpha = +1$ или -1 в соответствии с тем, будет ли $\alpha > 0$ или $\alpha < 0$.

[16] Этот результат впервые был получен Диркером (Dierker, 1972).

равно нулю, а случаи с единственным равновесием являются частными случаями общего правила. Во-вторых, оказывается, что можно разделить все равновесия на два типа, и тип с «положительным знаком» оказывается более «фундаментальным» в том смысле, что наличие хотя бы одного равновесия этого типа обязательно. В некотором смысле, любой поиск «хороших» равновесий (что означает «хороший», зависит от конкретного случая) может быть сведен к поиску таких равновесий с положительным знаком. В-третьих, теорема об индексе важна с точки зрения определения единственности или множественности равновесий. И наконец, в-четвертых (мы подробнее остановимся на этом в разделе 17.F), теорема об индексе важна потому, что это единственный результат, который мы можем получить без введения дополнительных (строгих) предпосылок.

Покажем теперь, что обычно (или, как говорят, *в общем случае*) экономики являются регулярными. Поэтому, опять же обычно, решение системы уравнений с избыточным спросом локально изолировано и конечно в смысле количества таких решений, а теорема об индексе выполняется[17].

Анализ невырожденности

Чтобы показать достаточно широкий спектр методов, которые можно использовать для такого анализа, начнем обсуждение с системы уравнений, затем перейдем к рассмотрению некоторого частного случая и покажем, как он связан с предыдущим.

Обычно анализ невырожденности начинается с подсчета собственно уравнений и неизвестных. Рассмотрим следующую систему из M уравнений с N переменными в виде:

$$\begin{gathered} f_1(v_1, \dots, v_N) = 0 \\ \vdots \\ f_M(v_1, \dots, v_N) = 0. \end{gathered} \tag{17.D.1}$$

или, компактнее, в виде вектора $f(v) = 0$. Для того чтобы такая система имела решение, необходимо, чтобы она обладала $N - M$ степенями свободы. При этом если $M > N$, то система переопределена и не имеет решений, если $M = N$, то система точно определена и ее решения локально изолированы, а если $M < N$, то такая система называется недоопределенной, а ее решения не являются локально изолированными. Конечно, пример системы линейных уравнений может показать, что вышеперечисленные утверждения вовсе не всегда верны; они выполняются в так называемом «нормальном случае», когда (по теореме о неявной функции) все уравнения в системе независимы. В определении 17.D.3 этот факт учтен.

Определение 17.D.3: Система из M уравнений с N переменными $f(v) = 0$ называется *регулярной*, если $Df(v) = M$, когда $f(v) = 0$.

[17] Более подробно об этом говорится в работах Баласко (Balasko, 1988) и Мас-Колелла (Mas-Colell, 1985).

По теореме о неявной функции (см. раздел M.E математического приложения) регулярная система уравнений имеет нужное количество степеней свободы. В случае $M < N$ можно выбрать M переменных, соответствующих M линейно независимым столбцам $Df(v)$, и выразить эти значения M переменных, удовлетворяющие M уравнениям системы $f(v) = 0$, как функции от $N - M$ оставшихся переменных (см., например, упражнение 17.D.2). Если $M = N$, равновесия, по тем же причинам, о которых говорилось ранее в этом разделе для системы $\hat{z}(p) = 0$, должны быть локально изолированными, а если $M > N$, то ранг матрицы $Df(v) \leq N < M$ для всех v, и для такого случая определение 17.D.3 просто говорит, что система уравнений регулярна тогда и только тогда, когда у нее нет решений.

Является ли регулярная система «нормальным» случаем? На рис. 17.D.4 предлагается подход к нахождению ответа на этот вопрос.

На рисунке система из одного уравнения $f(v) = 0$ с одной переменной

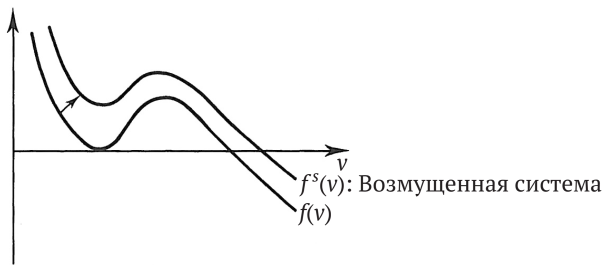


Рис. 17.D.4. Регулярный случай типичен

нерегулярна (поскольку график функции $f(v)$ касается горизонтальной оси). Однако очевидно, что этот феномен не робастен: при произвольном небольшом изменении (возмущении) уравнения (например, если измененная система — это $f^s(\cdot)$) новая система станет регулярной. Обратное неверно: любая регулярная система сохраняет свою регулярность при каждом небольшом преобразовании[18].

Интуитивная идея возмущения может быть формализована следующим образом: предположим, существует набор переменных $q = (q_1, \ldots, q_s)$, таких что для каждого q из этого набора существует система уравнений $f(v; q) = 0$, как выше. Множество возможных значений этих переменных — это $\mathbb{R}^S$ или открытое подмножество R^S. Тогда $f(\cdot; q')$ будет называться возмущением $f(\cdot; q)$, если q' достаточно близко к q. Поэтому понятие, что регулярность — типичное или универсальное свойство системы параметров $f(\cdot; q) = 0$ может быть определено как требование, что *почти для всех q* система $f(\cdot; q) = 0$ регулярна. Другими словами, нерегулярные системы появляются с нулевой вероятностью (по отношению, скажем, к невырожденному нормальному распределению на $\mathbb{R}^S$)[19]. Очевидно, что для того, чтобы

[18] Преобразование не должно затрагивать значения и первые производные входящих в систему функций, т. е. это должны быть так называемые C^1 преобразования.

[19] Формально можно было бы сказать, что в системе, определенной для конечного числа (принимающих значения, к примеру, на открытом множестве), некоторое свойство общее

это выполнялось, требуются некоторые условия на зависимость $f(\cdot; q)$ от q, как минимум, чтобы $f(\cdot; q)$ действительно зависело от q. Приведем важную математическую теорему (утверждение 17.D.3), которая говорит о том, что кроме этого мало что нужно[20].

Утверждение 17.D.3 (*теорема трансверсальности*). Если матрица $Df(v; q)$ размера $M \times (N + S)$ имеет ранг M, $f(v; q) = 0$, то когда для почти всех q матрица $D_v f(v; q)$ размера $M \times N$ также имеет ранг M, как только выполняется $f(v; q) = 0$.

С эвристической точки зрения предпосылка теоремы трансверсальности требует достаточного разнообразия Вселенной. Если матрица $Df(v; q)$ имеет ранг M, когда $f(v; q) = 0$, то для каждого решения системы всегда можно дифференцируемым способом изменить значение f в любом нужном направлении, подбирая соответствующие значения переменных v и q. Вывод из теоремы таков: если это всегда можно сделать, то, если изначально мы находимся в нерегулярной ситуации, произвольное случайное смещение q уведет нас от нерегулярности. То есть если наша Вселенная невырожденная, то в ней находится почти каждый мир. Заметим одну из сильных сторон теоремы: в матрице содержится M строк и $N + S$ столбцов. Поэтому если значение S достаточно большое, т. е. существует много параметров для возмущения, то предпосылка теоремы, скорее всего, будет выполнена, поскольку нужно всего лишь найти M линейно независимых столбцов. С другой стороны, матрица $D_v f(v; q)$ имеет M строк, но только N столбцов. В этом случае сложнее гарантировать, что в решении $D_v f(v; q)$ найдется M линейно независимых столбцов. Однако теорема говорит, что это так для почти каждого значения q. Заметим, что если $M > N$ (больше уравнений, чем переменных), то матрица $D_v f(v; q)$ размера $M \times N$ не может иметь ранг M. Тогда в общем случае (т. е. почти для всех q) система $f(v; q) = 0$ не будет иметь решений.

Рассмотрим теперь специальный случай системы из $L - 1$ уравнений $\hat{z}(p) = 0$ с $L - 1$ переменными. Мы уже видели на примере, что нерегулярные экономики существуют. Теперь покажем, что они нетипичны. Для

в первом смысле, если оно выполняется для множества параметров полной мерой (т. е. дополнение множества, для которого оно выполняется, имеет меру нуль). Свойство будет называться общим во втором смысле, если оно выполняется на открытом множестве полной мерой. Множество полной мерой плотное, но оно не обязано быть открытым. Следовательно, второй смысл строже, чем первый. Однако во многих случаях это свойство выполняется на открытом множестве, так что выполнение его в первом смысле влечет за собой также его выполнение во втором смысле. В некоторых приложениях нет конечного числа параметров и понятия меры, к которому можно апеллировать. В этих случаях мы могли бы сказать, что свойство — общее в третьем смысле, если оно выполняется на открытом и плотном множестве. В данном случае это осмысленный способ передать идею типичности свойства. Заметим, что если количество параметров велико, но конечно, то множество может быть открытым, плотным, а его мера будет произвольно малой (положительной) величиной. Тем не менее везде в этом разделе мы имеем дело только с первым смыслом и далее будем называть его просто «типичность» или «общий случай».

[20] Специально для этой теоремы предположим, что функция $f(v; q)$ дифференцируема столько раз, сколько это необходимо, по каждой из двух своих переменных.

возмущений мы можем использовать большое количество параметров, влияющих на полезности и первоначальные запасы (или в общем случае технологии) агентов. Естественное множество параметров — сами первоначальные запасы:

$$\omega = \left(\omega_{11},\ \ldots,\ \omega_{L1},\ \ldots,\ \omega_{1I},\ \ldots,\ \omega_{LI}\right) \in \mathbb{R}^{LI}_{++}.$$

Тогда зависимость избыточного спроса в экономике от ее первоначальных запасов будет выражена функцией $\hat{z}(p;\ \omega)$. Сформулируем следующую теорему.

Теорема 17.D.4. Для любых p и ω ранг матрицы $D_\omega \hat{z}(p;\ \omega)$ равен $L - 1$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть начальные запасы одного потребителя, например потребителя 1, и показать, что матрица $D_{\omega_1}\hat{z}(p;\ \omega)$ размера $(L - 1) \times L$ имеет ранг $L - 1$ (это означает, что ранг матрицы $D_\omega \hat{z}(p;\ \omega)$ равен $L - 1$)). Чтобы это показать, нужно либо косвенным образом посчитать $D_{\omega_1}\hat{z}(p;\ \omega)$ (это предлагается сделать в упражнении 17.D.3), либо просто заметить, что любое преобразование ω_1, например $d\omega_1$, которое не меняет богатства потребителя 1 при ценах p, не меняет и спрос, а поэтому избыточный спрос меняется в точности на $-d\omega_1$. Таким образом, если $p \cdot d\omega_1 = 0$, то, обозначив $d\hat{\omega}_1 = (d\omega_{11},\ \ldots,\ d\omega_{L-1,1})$, получим $D_{\omega_1}\hat{z}\left(p;\ \omega\right)d\omega_1 = D_{\omega_1}\hat{z}_1\left(p;\ \omega\right)d\hat{\omega}_1 = -d\hat{\omega}_1$. Поскольку условие $p \cdot d\omega_1 = 0$ на $d\omega_1$ не накладывает никаких ограничений на $d\hat{\omega}_1$, отсюда следует, что изменение первоначальных запасов 1-го потребителя может сдвинуть $\hat{z}(p;\ \omega)$ в любом направлении на множестве $\mathbb{R}^{L-1}$, и поэтому ранг матрицы $D_{\omega_1}\hat{z}(p;\ \omega)$ равен $L - 1$. ■

Теперь можно перейти к самому главному результату (полученному Дебре (Debreu, 1970)).

Теорема 17.D.5. Для почти всех векторов начальных запасов $(\omega_1,\ \ldots,\ \omega_I) \in \mathbb{R}^{LI}_{++}$ экономика, определенная как $\left\{\left(\succsim_i,\ \omega_i\right)\right\}_{i=1}^{i=I}$, регулярна[21].

Доказательство. В силу выполнения утверждения 17.D.4 этот результат следует из теоремы трансверсальности (утверждение 17.D.3). ■

Упражнения 17.D.4 и 17.D.6 — вариации на тему утверждения 17.D.4.

На рис. 17.D.5 изображено равновесное множество $E = \left\{\left(\omega_1,\ \omega_2,\ p_1\right) : \hat{z}\left(p_1,\ 1,\ \omega\right) = 0\right\}$ экономики обмена с совокупным первоначальным запасом, равным $\bar{\omega} = \omega_1 + \omega_2$. Это множество представляет собой граф отображения, которое приписывает равновесные цены экономике с $\omega = (\omega_1, \omega_2)$.

[21] Точнее, это означает, что первоначальные запасы, которые дают нерегулярную экономику, — это подмножество $\mathbb{R}^{LI}$, имеющее Лебегову меру, равную нулю, или, что то же самое, нулевую вероятность для, скажем, существования невырожденного LI мерного нормального распределения.

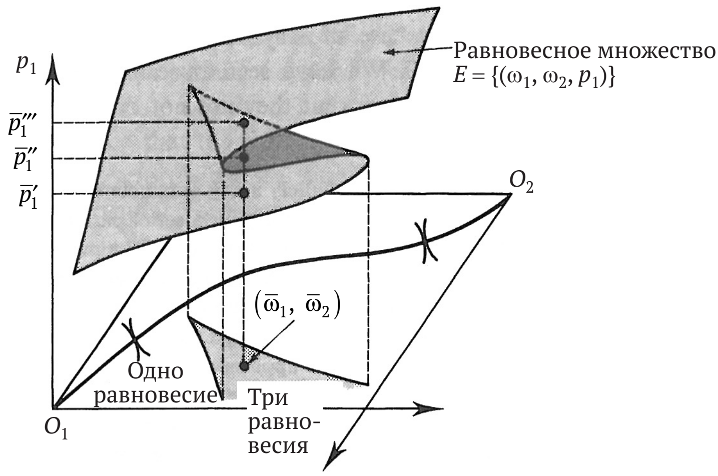


Рис. 17.D.5. Равновесное множество

В силу теоремы об индексе рис. 17.D.5, на котором количество равновесий меняется не непрерывно от 3 до 1 на множестве запасов, иллюстрирует типичную ситуацию с множественными равновесиями. Подробный анализ такого равновесного множества сделан в работе Баласко (Balasco, 1988).

Завершим обсуждение типичности двумя наблюдениями. Первое наблюдение заключается в том, что типичная локальная детерминированность рассмотренной теории распространяется на модели с экстерналиями, налогами и другими несовершенствами рынка, при которых не выполняется первая теорема благосостояния (см. упражнение 17.D.6). Это следует из общности самих применявшихся математических методов, которые, по сути, исходили из принципа возможности представить экономическое равновесие как решение естественной системы уравнений, в которой число уравнений и переменных равно. Второе наблюдение следующее: вывод о «конечности количества равновесий» неинформативен, потому что существует большая разница между тем, что в модели имеются три равновесия, и тем, что в ней их несколько миллионов. К сожалению, мы не сможем дать более точный ответ на вопрос о количестве равновесий (несмотря на то, что мы проделали столь длинный путь), кроме вывода о единственности равновесия (см. также раздел 17.F). Можно лишь утверждать, что есть некоторая разница между ситуациями рыночного равновесия, в которых выполняется первая теорема благосостояния и в которых, действительно, примеры равновесий скорее надуманы, и между ситуациями с провалами рынка, в которых примеры равновесий находятся легко. Все это значительно подробнее обсуждается в упражнении 17.D.7.

К теореме об индексе

Результат, названный утверждением 17.D.2, является, по сути, чисто математическим фактом. Попытки доказать его заведут нас слишком далеко от основной темы. Тем не менее поучительно было бы привести здесь аргумент, подтверждающий важность этого утверждения. Заметим, что этот аргумент можно превратить в подробнейшее и четкое доказательство.

Обозначим нашу пронормированную функцию избыточного спроса как $\hat{z}\,(p)$. Предположим, существует также и другая функция избыточного спроса, $\hat{z}^0(p)$ такая, что имеется единственное значение $\bar{p}$, для которого верно $\hat{z}^0\left(\bar{p}\right) = 0$, и такая, что $\operatorname{sign}\left|D\hat{z}^0\left(\bar{p}\right)\right| = (-1)^{L-1}$. Например, $\hat{z}^0(p)$ могла бы быть порождена экономикой с единственным потребителем, обладающим предпочтениями, описываемыми функцией полезности вида Кобба — Дугласа (такой пример представлен в упражнении 17.D.8). Идея состоит в том, чтобы $\hat{z}^0(p)$ была одновременно простой и знакомой, чтобы можно было использовать ее для изучения свойств незнакомых нам в технических терминах функций $\hat{z}(p)$.

Рассмотрим следующее однопараметрическое семейство функций (или, другими словами, *гомотопию* функции избыточного спроса):

$$\hat{z}\left(p,\ t\right) = t\hat{z}\left(p\right) + (1-t)\hat{z}^0(p) \ \text{ при } 0 \le t \le 1.$$

Система уравнений $\hat{z}\left(p,\ t\right) = 0$ будет состоять из $L-1$ уравнений с L неизвестными (т. е. $(p_1, \ldots, p_{L-1}, t)$). Типичным тогда будет случай, в котором множество решений $E = \left\{\left(p,\ t\right) : \hat{z}\left(p,\ t\right) = 0\right\}$ имеет *одну и только одну* степень свободы в любой точке (т. е. локально будет иметь вид сегмента). Более того, поскольку множество решений не может свестись к бесконечным или нулевым ценам (из-за ограничений на функции избыточного спроса) и поскольку оно замкнуто (вследствие непрерывности $\hat{z}\left(p,\ t\right)$), мы получим случай, изображенный на рис. 17.D.6. Множество E на

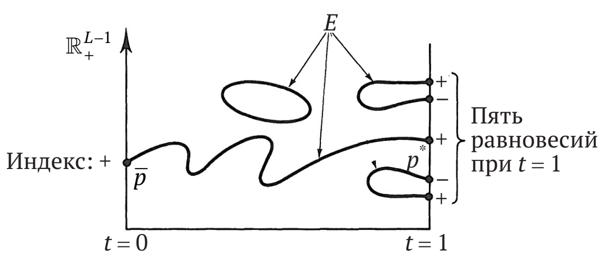


Рис. 17.D.6. Равновесное множество при гомотопии

этом рисунке выглядит как конечное число овальных и похожих на сегменты множеств, причем концевые точки сегментов не соответствуют границе при $t = 0$ и $t = 1$. Поскольку у каждого сегмента имеется две такие точки, число таких точек четно. По построению, $\bar{p}$ — единственная концевая точка на границе при $t = 0$[22]. Следовательно, число концевых точек на границе при $t = 1$ должно быть нечетным, т. е. существует нечетное число решений $\hat{z}(p) = \hat{z}(p,\ 1) = 0$. Начнем теперь перемещаться по сегменту от одной крайней точки к другой. Как связаны индексы на этих двух концах? Вспомним теорему о неявной функции: пока мы двигаемся в одном и том же направлении по отношению к t вперед или назад, индекс, $(-1)^L\operatorname{sign}|D_{-}|$ не будет меняться. Он изменится, только если мы изменим направление[23]. Тогда сегмент,

[22] В общем случае, если $\hat{z}(p, t)$ произвольная гомотопия, то типичная ситуация вполне представлена из рис. 17.G1(a), (b), (c).

[23] Для того чтобы это увидеть, рассмотрим случай $L = 2$. Применим теорему о неявной функции к $\hat{z}_1(p_1,\ t) = 0$. Тогда можно проверить, что изменение направления произойдет точ-когда $\dfrac{\partial \hat{z}_1(p_1,\ t)}{\partial p_1} = 0$.

начинающийся и заканчивающийся в одной и той же точке, должен поменять направление нечетное количество раз. Следовательно индексы в двух концевых точках имеют противоположные знаки. Это можно проверить, посмотрев на рис. 17.D.6. Таким образом, сумма индексов при $t = 1$ равна индексу единственного равновесия $\hat{z}(\cdot)$, соединенного сегментом с равновесием $\overline{p}$ для $\hat{z}^0(\cdot)$ на границе $t = 0$. Эта сумма показана на рис. 17.D.6 как p^*. Сегмент, соединяющий $\overline{p}$ и p^* на множестве E, меняет направления четное число раз (а возможно, и ни разу), поэтому можно сделать вывод, что индекс равновесия на $t = 1$ равен индексу $\overline{p}$ для $\hat{z}^0(\cdot)$, который равен, по построению, +1. Отсюда сумма индексов на $t = 1$ равна +1, что, согласно утверждению 17.D.2, выполняется и в общем случае.

17.E. Все может быть: теорема Зоненшайна — Мантеля — Дебре

Итак, мы убедились, что при условии выполнения некоторых общих предпосылок (среди которых важнейшей является предпосылка о выпуклости экономики) равновесия по Вальрасу существуют, причем число таких равновесий обычно конечно. Это — важные результаты, но хотелось бы понять, можно ли сказать что-то еще, что можно было бы использовать с целью прогноза в рамках сравнительной статики (см. раздел 17.G.). Исходя из того, что уже известно о сложности агрегирования спроса из главы 4, мы могли бы сразу предположить, что ответ, скорее всего, отрицательный, т. е., вообще говоря, нельзя ввести более строгих ограничений на функцию избыточного спроса, чем это сделано в утверждении 17.B.2, а соответственно, и на вальрасианское равновесие. Должны быть сделаны дополнительные предположения, чтобы получить более сильные результаты (например, о единственности равновесия — см. раздел 17.F), следует ввести дополнительные (особые) предположения и ниже мы это покажем.

В этом разделе мы подтвердим это и продемонстрируем этот негативный мессидж в особо сильной форме. Эта тема завершается утверждениями 17.E.3 и 17.E.4. Общий смысл утверждений — *все, что удовлетворяет тем нескольким свойствам, которые, как уже было установлено, должны выполняться, действительно может случиться*.

В последующем анализе развивается логика этого заключения через несколько промежуточных результатов, которые интересны и сами по себе. Читатель при первом чтении может пропустить эти результаты и перейти сразу к формулировке утверждений 17.E.3 и 17.E.4 и последующему обсуждению их.

Для конкретности сосредоточимся, как обычно, на анализе экономики обмена, описываемой уравнениями избыточного спроса. Акцент на экономике обмена имеет смысл, поскольку, как мы узнали из главы 5, эффекты агрегирования производства не порождают проблем. Источники проблем агрегирования — только эффекты богатства на стороне потребителей.

Начнем с ответа на достаточно простой, но важный вопрос: до какой степени мы можем специфицировать поведение функции избыточного спроса при заданной цене p, в частности, матрицы $Dz(p)$ эффектов цен[24]?

Предположим, что функция избыточного спроса $z(p)$ дифференцируема. Тогда (и в упражнении 17.E.1 читателю предлагается показать, что это так) верны следующие соотношения:

$$\sum_k \frac{\partial z_l(p)}{\partial p_k} p_k = 0 \qquad \text{для всех } l \text{ и } p \text{ (или } Dz(p)p = 0), \tag{17.E.1}$$

$$\sum_k p_k \frac{\partial z_k(p)}{\partial p_\ell} = -z_l(p) \qquad \text{для всех } l \text{ и } p \text{ (или } p \cdot Dz(p) = -z(p)). \tag{17.E.2}$$

Это — аналоги в терминах избыточного спроса выражений (2.E.1) и (2.E.4) для функции спроса, и получены они из свойства однородности нулевой степени функции избыточного спроса, а также закона Вальраса (которому эти функции удовлетворяют). Более того, из того, что $z(p) = \sum_i (x_i(p,\ p \cdot \omega_i) - \omega_i)$, можно получить следующее соотношение:

$$Dz(p) = \sum_i \left[S_i(p,\ p \cdot \omega_i) - D_{w_i} x_i(p,\ p \cdot \omega_i) z_i(p)^T \right], \tag{17.E.3}$$

где, как обычно, $S_i(p, p \cdot \omega_i)$ представляет собой матрицу коэффициентов замещения (см. на эту тему упражнение 17.E.3).

Выражение (17.E.3) крайне информативно. Оно говорит о том, что если бы не эффект богатства, то отрицательная полуопределенность матрицы $Dz(p)$ наследовалась бы ею от матрицы коэффициентов замещения вовсе не в силу эффекта богатства. Насколько же может быть разушительным эффект богатства? Заметим, что матрица

$$D_{w_i} x_i(p,\ p \cdot \omega_i) z_i(p)^T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_{1i}(p,\ p \cdot \omega_i)}{\partial w_i} z_{1i}(p) & \cdots & \dfrac{\partial x_{1i}(p,\ p \cdot \omega_i)}{\partial w_i} z_{Li}(p) \\ & \ddots & \\ \dfrac{\partial x_{Li}(p,\ p \cdot \omega_i)}{\partial w_i} z_{1i}(p) & \cdots & \dfrac{\partial x_{Li}(p,\ p \cdot \omega_i)}{\partial w_i} z_{Li}(p) \end{bmatrix}$$

имеет ранг 1 (любые два столбца или строки пропорциональны). Тогда мы можем неформально предположить, что эффект богатства i-го потребителя сможет затронуть только в одном направлении изменения цены[25]. То есть если $I < L$, то будут оставаться некоторые ограничения типа отрица-

[24] Заметим, что функция $z(p)$ может принимать любые значения, нужно лишь сначала специфицировать вектор начального запаса ω так, чтобы выполнилось условие $\omega + z(p) \gg 0$, а затем выбрать функцию полезности такую, чтобы $\omega + z(p)$ было решением задачи потребителя.

[25] Например, это невозможно в ортогональных к вектору эффектов богатства $D_{\omega i} x_i(p, p \cdot \omega_i)$ направлениях или к вектору избыточного спроса $z_i(p)$. Более подробное доказательство приведено в утверждении 17.E.1.

тельной полуопределенности матрицы $Dz(p)$, и об этом говорит следующее утверждение.

Утверждение 17.E.1. Пусть $I < L$, тогда для любого равновесного вектора цен p найдется некоторое направление изменения вектора цен $dp \neq 0$, такое что $p \cdot dp = 0$ (поэтому dp не пропорционально p), а $dp \cdot Dz(p)dp \leq 0$.

Доказательство. Поскольку $z(p) = \sum_i z_i(p) = 0$, то не более чем I из $I + 1$ векторов $\{p, z_1(p), \ldots, z_I(p)\} \subset \mathbb{R}^L$ могут быть линейно независимыми. Поскольку $I < L$, можно найти ненулевой вектор $dp \in \mathbb{R}^L$, такой что $p \cdot dp = 0$ и $z_i(p) \cdot dp = 0$ для всех i. Здесь dp — непропорциональное изменение цены, скомпенсированное для *каждого* потребителя (т. е. у потребителя нет изменения реального дохода). Тогда из (17.E.3) получаем, что:

$$dp \cdot Dz(p)dp = \sum_i dp \cdot S_i(p, p \cdot \omega_i)dp \leq 0. \blacksquare$$

Аналогичные рассуждения должны заставить нас ожидать, что если $I \geq L$ (т. е. если потребителей по крайней мере столько же, сколько и товаров), то не может быть никаких дополнительных ограничений на $Dz(p)$ кроме тех, что уже имеют место в (17.E.1) и (17.E.2). Направления индивидуальных векторов богатства достаточно произвольны (и могут быть выбраны независимо от эффектов замещения соответствующих потребителей), поэтому при попытке специфицировать эффекты богатства у нас нет места для маневра. Нижеследующее утверждение подтверждает это подозрение.

Утверждение 17.E.2. При данном векторе цен p, произвольном векторе $z \in \mathbb{R}^L$ и произвольной матрице A размером $L \times L$, таких что $p \cdot z = 0$, $Ap = 0$ и $p \cdot A = -z$, найдется набор из L потребителей, порождающих функцию агрегированного спроса $z(\cdot)$, такую, что $z(p) = z$ и $Dz(p) = A$.

Доказательство. Для простоты ограничимся рассмотрением потребителей с нулевой матрицей коэффициентов замещения $S_i(p, p \cdot \omega_i) = 0$, т. е. таких, множество кривых безразличий которых имеет вертекс в заданной точке[26].

Мы всегда можем формально переписать заданную матрицу A размером $L \times L$ в следующем виде:

$$A = \sum_l e^l a^l,$$

где e^l — l-единичный вектор-столбец (т. е. все компоненты e^l равны нулю, кроме компоненты с номером l, которая равна 1), а a^l — это строка с номером l матрицы A (т. е. $a^l = (a_{l1}, \ldots, a_{lL})$).

Предположим теперь, что мы могли специфицировать (определить) L потребителей таких, что каждый i-й потребитель, $i = 1, \ldots, L$, при векторе цен p имеет вектор избыточного спроса $z_i(p) = -p_i(a^i)^T$, вектор эффекта богатства $D_{w_i} x_i(p, p \cdot \omega_i) = \left(\frac{1}{p_i}\right) e^i$

[26] Здесь под вертексом понимается то же, что в случае $L = 2$ именуется изломом.

и матрицу коэффициентов замещения $S_i(p, p \cdot \omega_i) = 0$ (где $a^1, \ldots, a^L$ и $e^1, \ldots, e^L$ определены выше). Тогда будут выполняться одновременно следующие равенства:

$$z(p) = \sum_i z_i(p) = -\sum_l p_l (a^l)^T = -A^T p = -p \cdot A = z$$

и

$$Dz(p) = -\sum_i D_{w_i} x_i(p,\ p \cdot \omega_i) z_i(p)^T = \sum_l (1/p_l) e^l (p_l a^l) = \sum_l e^l a^l = A,$$

что мы и хотели доказать.

Всегда ли можно найти этих L потребителей? Ответ на этот вопрос положительный. Начнем с определения первоначальных запасов $(\omega_1, \ldots, \omega_I)$, таких что они позволяют потреблять строго положительное количество товара, когда избыточный спрос будет равен $z_i(p) = -p_i(a^i)^T$, т. е. $x_i = \omega_i - p_i(a^i)^T \gg 0$ для каждого i. Заметим теперь, что для каждого $i = 1, \ldots, L$ потенциальный индивидуальный избыточный спрос удовлетворяет закону Вальраса

$$p \cdot z_i(p) = -p_i p \cdot a^i = 0 \text{ (поскольку } Ap = 0),$$

и также заметим, что потенциальный вектор эффекта богатства удовлетворяет необходимому условию утверждения 2.E.3, т. е.

$$p \cdot D_{wi} x_i(p, p \cdot \omega_i) = (1/p_i) p \cdot e^i = 1.$$

Рис. 17.E.1 достаточно убедительно показывает, что мы можем так задать предпочтения по i агентам, что при данном p потребителями будет выбран вектор потребления x_i, вектор эффектов дохода будет пропорционален e^i (и поэтому равен $(1/p_i)e^i$)[27], а кривые безразличия будут иметь излом в x_i. Собственно, на рисунке и изображена такая ситуация для случая $L = 2$[28]. В упражнении 17.E.3 читателю предлагается записать функции полезности в явном виде. ■

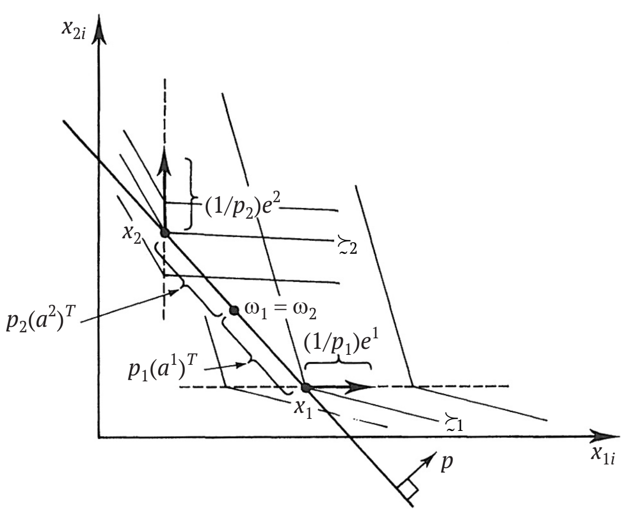


Рис. 17.E.1. Декомпозиция избыточного спроса и эффекты изменения цены для вектора цен p для случая $L = 2$

[27] Действительно, если $Dx_i(p, p \cdot \omega_i) = \alpha_i e^i$, то $1 = p \cdot Dx_i(p, p \cdot \omega_i) = \alpha_i p \cdot e^i = \alpha_i p_i$, откуда $\alpha_i = 1/p_i$.

[28] Можно без дальнейших усложнений получить в данной ситуации дополнительную информацию. Пусть матрица коэффициентов замещения для i потребителей представляет

До сих пор мы изучали возможности ограничений на поведение избыточного спроса в единственном векторе цен p. Выводы из утверждений 17.E.1 и 17.E.2 уже выглядят вполне полезными, однако мы двинемся еще дальше, поскольку полученный отрицательный результат имеет более широкий смысл, чем тот, что мы обсудили. Итак, рассмотрим произвольную функцию $z(p)$. Оставим в стороне проблемы границы, предположив, что эта функция определена в области, где относительные цены отграничены от нуля, т. е. некоторого неболього $\varepsilon > 0$ ненулевых цен, отношения цен будут только больше либо равны ε ($p_l/p_{l'} \geq \varepsilon$ для всех l и l'. Будет ли тогда функция $z(p)$ тождественна функции избыточного спроса для каждого p из области определения? Во-первых, конечно, в области определения функция $z(p)$ должна удовлетворять необходимым условиям: она должна быть непрерывной, однородной нулевой степени и должна удовлетворять закону Вальраса. Но оказывается, этого достаточно, чтобы ответить на поставленный вопрос утвердительно[29].

Утверждение 17.F.3. Предположим, что $z(\cdot)$ — непрерывная функция, определенная на множестве $P_\varepsilon = \left\{ p \in \mathbb{R}^L_+ : \dfrac{p_l}{p_{l'}} \geq \varepsilon \text{ для всех } l \text{ и } l' \right\}$, значения которой лежат в $\mathbb{R}^L$. Предположим также, что эта функция однородна нулевой степени и что она удовлетворяет закону Вальраса. Тогда будет существовать экономика из L потребителей, агрегированная функция избыточного спроса которой совпадает с $z(p)$ в P_ε[30].

Доказательство. В конце текущего раздела мы вкратце обсудим логику общего доказательства этого утверждения, здесь же мы докажем ее для случая $L = 2$.

Итак, предположим, что $L = 2$ и что существуют некоторое $\varepsilon > 0$ и функция $z(\cdot)$, для которой выполняются предпосылки вышеописанного утверждения. Непрерывность и однородность функции $z(\cdot)$ нулевой степени предполагает, что будет существовать некоторое число $r > 0$, такое что $|z_1(p)| < r$ для всех $p \in P_\varepsilon$. Специфицируем теперь

из себя произвольный набор S_i из матриц размера $L \times L$, обладающих следующими свойствами: эти матрицы симметричны и отрицательно полуопределены, причем $p \cdot S_i = 0$ и $S_i\, p = 0$. Специфицирование предпочтений потребителей, для которых получена функция избыточного спроса $z(p)$ и эффекты избыточного спроса $Dz(p)$ при цене p, может происходить далее по только что использованной схеме за исключением того, что в качестве аргумента будет теперь выражение $A - \Sigma_i S_i$. В таком случае, если рассматривать матрицы S_i наибольшего возможного ранга $L - 1$, то можно быть уверенным, что все L специфицированных потребителей обладают предпочтениями с гладкими, в точках выбора, кривыми безразличия.

[29] Этот вопрос был впервые исследован Зонненшайном (Sonnenschein, 1973). Он сделал предположение, что в области определения, где $p_l \geq \varepsilon$ для всех l, три необходимых условия являются также и достаточными, а это означает, что такую экономику всегда можно найти. Зонненшайн также доказал это и для случая экономики с двумя товарами. Затем Мантель (Mantel, 1974) привел доказательство для любого числа товаров и $2L$ потребителей. А вскоре и Дебре (Debreu, 1974) продемонстрировал более короткое и простое доказательство, которое требовало тем не менее необходимого минимума в L потребителей в экономике. И наконец, Мантель (Mantel, 1976), пересмотрев свое более раннее доказательство, продемонстрировал, что все то же самое выполняется с L однородными потребителями без дальнейших ограничений на их первоначальные запасы.

[30] Заметим, в частности, что этот результат подразумевает, что для любого $I \geq L$ существует экономика, состоящая из I потребителей, для которых $z(p)$ определена на P_ε. Тогда нам нужно только дополнить имеющееся количество потребителей разницей между I и L, причем эти $I - L$ потребителей не должны обладать первоначальными запасами (или их наиболее предпочитаемые потребительские наборы при любых векторах цен должны совпадать с их начальными запасами).

функции $z^1(\cdot)$ и $z^2(\cdot)$, которые определены на P_ε и области определения $\mathbb{R}^2$, также непрерывны и однородны нулевой степени и удовлетворяют закону Вальраса:

$$z_1^1(p) = \frac{1}{2} z_1(p) + r \text{ (и соответственно, } z_2^1(p) = -\left(\frac{p_1}{p_2}\right) z_1^1(p)),$$
$$z_1^2(p) = \frac{1}{2} z_1(p) - r \text{ (и соответственно, } z_2^2(p) = -\left(\frac{p_1}{p_2}\right) z_1^2(p)).$$

Заметим, что для всех $p \in P_\varepsilon$ выполняется равенство $z(p) = z^1(p) + z^2(p)$. Покажем, что для $i = 1, 2$ в P_ε значения функции $z^i(\cdot)$ совпадают со значениями функции избыточного спроса одного потребителя. Именно для этого нам и понадобилось потребовать, чтобы $z^i(\cdot)$ помимо непрерывности, однородности нулевой степени удовлетворяла бы закону Вальраса, и, кроме того, чтобы не существовало $p \in P_\varepsilon$, такого что $z^i(p) = 0$ (в упражнении 17.E.4 как раз требуется доказать необходимость выполнения этой предпосылки).

Далее выберем некоторое $\omega_i >> 0$, такое что $\omega_i + z^i(p) >> 0$ для всех $p \in P_\varepsilon$. Кривая «цена — потребление» OC_i, соответствующая описанной функции $z^i(\cdot)$, изображена на рис. 17.E.2. На рисунке показано, что $\omega_i + z^i(p)$ — координата точки пересечения кривой «цена — потребление», ортогональной вектору p для всех $p \in P_\varepsilon$, и бюджетной линии. Кривая «цена–потребление» непрерывна и не проходит через точку первоначального запаса, поскольку $z^i(p) = 0$ не имеет решений на множестве P_ε. При этом, как видно из рисунка, какой бы сложной формы кривая «цена — потребление» ни была, всегда можно изобразить такую карту кривых безразличия, что будут получены в точности спросы $\omega_i + z^i(p)$ для любого $p \in P_\varepsilon$. ■

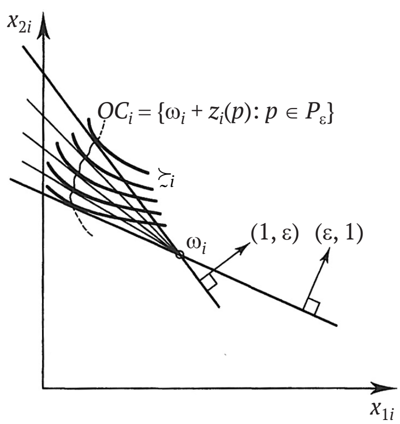


Рис. 17.E.2. Построение кривых безразличия для двухтоварной экономики, таких что при $\frac{1}{\varepsilon} < \frac{p_1}{p_2} < \varepsilon$ таких решений, в которых $z_i(p) = 0$, не существует, по кривым «цена–потребление»

Строго говоря, утверждение 17.E.3 не отвечает на первоначальный вопрос, который звучал так: «Можно ли определить свойства равновесия в нашей экономике более точно, чем это было сделано в разделах 17.C и 17.D?» Проблема в том, что утверждение 17.E.3 описывает поведение функции избыточного спроса во внутренних решениях, в то время как именно сила граничных условий позволила нам установить некоторые ограничения: существование равновесия, (в общем случае) конечность и нечетность числа равновесий и индексную формулу[31]. Тогда, чтобы доказать, что более ограничений на множество равновесий ввести невозможно, нужно доказать сначала, что, если «равновесие-кандидат» им удовлетворяет, построение «объясняющей» экономики не даст новых равновесий. Приведем утверждение 17.E.4, доказательство которого мы здесь опустим и которое как раз и даст нам окончательный ответ на интересующий нас вопрос[32].

Утверждение 17.E.4. Пусть для любого номера $N \geq 1$ можно поставить в соответствие каждому $n = 1, \ldots, N$ вектор цен p^n, пронормировать его ($\| p^n \| = 1$) и взять матрицу A_n размера $L \times L$ и ранга $L - 1$, такую что будет выполнено: $A_n p^n = 0$ и $p^n \cdot A_n = 0$. Предположим также, что, кроме того, выполняется теорема об индексе[33], т. е. что $\sum\limits_n (-1)^{L-1} sign \left| \hat{A}_n \right| =$ $= +1$, и в случае $L = 2$ положительный и отрицательный индексы чередуются.

Тогда будет существовать экономика из L потребителей, таких что агрегированный избыточный спрос будет обладать следующими свойствами:

(1) $z(p) = 0$ при $\| p \| = 1$ тогда и только тогда, когда $p = p^n$ по крайней мере для некоторых n;

(2) $Dz(p^n) = A_n$ для всех n.

Утверждение 17.E.4 говорит о том, что для любого конечного набора векторов цен $\left\{ p^1, \ldots, p^N \right\}$ и матриц эффектов цен $\left(Dz\left(p^1\right), \ldots, Dz\left(p^N\right) \right)$ найдется экономика из L потребителей, для которых эти векторы цен будут равновесными, а эффекты $\left(Dz\left(p^1\right), \ldots, Dz\left(p^N\right) \right)$ будут в равновесии им соответствовать. Результат этот предполагает, что для дальнейшего ограничения вальрасианских равновесий необходимо сделать дальнейшие (строгие) предположения, что и будет проделано в следующих разделах. Прекрасный обзор работ по теме сделан Шейфером и Зонненшайном (Shafer, Sonnenschein, 1982).

Отметим, что первоначальные запасы потребителей, о которых шла речь в утверждениях 17.E.2, 17.E.3 и 17.E.4, никоим образом не были ограничены. Если существуют ограничения на допустимые первоначальные запасы, условия неотрицательности на потребление вступают в игру и мы получим дополнительные ограничения на функцию $z(\cdot)$. В качестве примера в упражнении 17.E.5 читателю предлагается проверить, что векторы избыточного спроса $z(p)$ и $z(p')$ на рис. 17.E.3

---

[31] Заметим, к примеру, что хотя функция-кандидат $z(\cdot)$ определена на P_ε, она может и не давать решений, но тем не менее в рассматриваемой экономике мы можем ее специфицировать. Такое может случиться, если равновесие (которое обязано существовать) находится вне рассматриваемого множества.

[32] Доказательство (и другие более общие результаты) можно найти в работе Mas-Colell, 1977).

[33] Здесь под матрицей $\hat{A}_n$ имеется в виду матрица размером $L - 1 \times L - 1$, получаемая путем удаления одного столбца и строки с одинаковыми номерами из матрицы A.

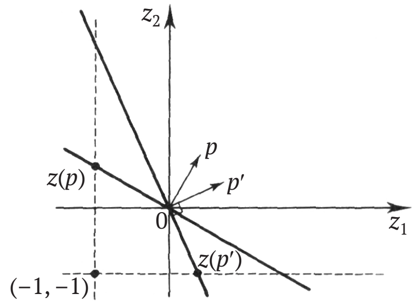


Рис. 17.E.3. Случай, когда невозможно преобразовать (построить декомпозицию) функции избыточного спроса в силу ограничений

нельзя разложить на функции индивидуального избыточного спроса потребителя с рациональными предпочтениями, если количество любого блага, которым может обладать потребитель в качестве первоначального запаса, не может быть больше единицы и если потребление должно быть неотрицательным.

Продолжение доказательства утверждения 17.E.3. Хотя доказательство для общего случая с любым количеством потребителей уведет нас слишком далеко от целей нашего анализа, тем не менее приведем его, поскольку доказательство Дебре (Debreu, 1974) легко использовать и в более узком контексте. Однако прежде заметим, что мы, в сущности, более широко применим ту же аргументацию, которую чуть ранее использовали для случая $L = 2$.

В разделе 3.J мы уже показывали, что выполнение сильной аксиомы выявленных предпочтений для функции спроса равносильно тому утверждению, что агент обладает рациональными предпочтениями. То же будет верно и для функций избыточного спроса. Если функция избыточного спроса $z^i(\cdot)$ удовлетворяет сильной аксиоме выявленных предпочтений, то ее же можно получить на основе рациональных предпочтений[34]. Поэтому переформулируем задачу: можно ли для непрерывной, однородной нулевой степени и удовлетворяющей закону Вальраса на множестве P_ε функции $z(\cdot)$ (будем для краткости называть ее функцией избыточного спроса) найти L функций избыточного спроса $z^i(\cdot)$, таких что все они удовлетворяли бы сильной аксиоме выявленных предпочтений и при этом выполнялось бы равенство $\sum_i z^i\left(p\right) = z(p)$ для всех $p \in P_\varepsilon$?

Прежде чем начать искать ответ на этот вопрос, запишем формулировку сильной аксиомы выявленных предпочтений для функции избыточного спроса $z^i(\cdot)$: будем говорить, что p прямо выявленно предпочитается p', если одновременно выполняются условия (см. рис. 17.E.4):

$$z^i(p) \neq z^i(p') \text{ и } p \cdot z^i(p') \leq 0. \qquad (17.E.4)$$

Будем говорить, что p косвенно выявленно предпочитается p', если существует конечная последовательность $p^1, \ldots, p^N$, такая что $p^1 = p, p^N = p'$, а p^n прямо выявленно предпочитается p^{n+1} для всех $n \leq N - 1$. Тогда, согласно сильной аксиоме выявленных предпочтений, получаем следующий результат:

для всех p и p', таких что p прямо или косвенно выявленно предпочитается p', p' не может прямо или косвенно предпочитаться p.

[34] Чтобы проверить справедливость этого утверждения, можно обратиться к доказательству утверждения 3.J.1.

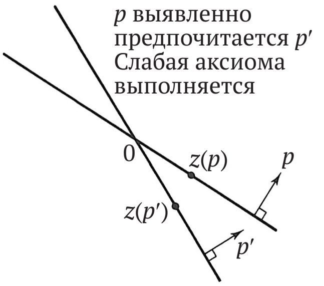


Рис. 17.E.4. Выявленные предпочтения для избыточного спроса

Пронормируем цены, для удобства приняв, что $\left\|p^2\right\| = p \cdot p = \sum_l (p_l)^2 = 1$.

Будем также говорить, что функция избыточного спроса $z^i(\cdot)$ *пропорционально взаимно однозначна*, если в случае $p \neq p'$ функция $z^i(p)$ не пропорциональна функции $z^i(p')$, в частности $z^i(p) \neq z^i(p')$. Для пропорциональных взаимно однозначных функций избыточного спроса (и нормированных цен) мы можем переформулировать определение прямо выявленных предпочтений как

$$p \neq p' \text{ и } p \cdot z^i(p') \leq 0. \tag{17.E.4′}$$

Рассмотрим произвольную функцию $\alpha_i(\cdot)$, принимающую только положительные целочисленные значения при всех $p \in P_\varepsilon$. Тогда если $z^i(\cdot)$ удовлетворяет сильной аксиоме выявленных предпочтений и является пропорционально взаимно однозначной, то те же свойства сохранятся и для функции $\alpha_i(\cdot)z^i(\cdot)$. Действительно, для любых p и p' неравенства (17.E.4′) выполняются для $z^i(\cdot)$ тогда и только тогда, когда они выполняются для $\alpha_i(\cdot)z^i(\cdot)$, и если $z^i(\cdot)$ пропорционально взаимно однозначна, то же будет верно и для $\alpha_i(\cdot)z^i(\cdot)$. Это наблюдение позволяет сделать следующий шаг в доказательстве, а именно выбрать L такое, что оно будет пропорционально взаимно однозначной $z^i(\cdot)$, такой что для всех $p \in P_\varepsilon$ векторы $\left\{z^1(p), \ \dots, \ z^L(p)\right\}$ составляют базис, на основе которого можно получить $z\left(p\right) = \sum_i \alpha_i(p) z^i(p)$ как линейную комбинацию для некоторых $\alpha_i(p) > 0$. Это мы и сделаем ниже.

Для любого нормированного вектора $p \in P_\varepsilon$ определим множество $T_p = \left\{z \in \mathbb{R}^L : p \cdot z = 0\right\}$, а для любого $i = 1, \dots, L$ пусть $z^i(p) \in T_p$ есть точка, которая минимизирует Евклидово расстояние $\| z - e^i \|$ (или, что то же самое, максимизирована вогнутая «функция полезности» $-\| z - e^i \|$) для $z \in T_p$, где e^i — i-й единичный вектор (вектор-столбец, i-й компонент которого равен единице, а остальные — нулю). Геометрический смысл $z^i(p)$ состоит в том, что это вектор, перпендикулярный проекции e^i на гиперплоскость T_p, т. е. $z^i(p) = e^i - p_i p$, где p_i — i-й компонент вектора p (вспомним, что $i \leq L$). Тогда $z^i(\cdot)$ пропорционально взаимно однозначна (см. упражнение 17.E.6) и удовлетворяет сильной аксиоме выявленных предпочтений (поскольку получена как результат максимизации полезности, см. также упражнение 17.E.7).

Пусть теперь $r > 0$ представляет собой число, достаточно большое для того, чтобы $z(p) + rp \gg 0$ для любого нормированного вектора $p \in P_\varepsilon$ (такое число r существует, поскольку $z(\cdot)$ непрерывна, а множество нормированных векторов цен компактно и содержит только строго положительные векторы цен). Любому номеру $i = 1, \dots, L$ и любому нормированному вектору $p \in P_\varepsilon$ поставим в соответствие $\alpha_i(p) = z_i(p) + rp_i > 0$, где $z_i(p)$ — i-й компонент вектора $z(p)$. Покажем, что $\sum_i \alpha_i(p) z^i(p) = z(p)$. Действительно,

$$\sum_i \left(z_i(p) + rp_i\right)\left(e^i - p_i p\right) =$$

$$= \sum_i z_i(p) e^i + \sum_i r p_i e^i - \left(\sum_i p_i z_i(p)\right) p - r \left(\sum_i p_i^2\right) p =$$

$$= z(p) + rp - 0 - rp = z(p),$$

что и требовалось доказать.

Геометрически, мы построили проекцию каждого вектора $\alpha_i(p)e^i$ на гиперплоскость $\left\{z \in \mathbb{R}^L : p \cdot z = 0\right\}$. В силу определения $\alpha_i(p)$ верно равенство $\sum_i \alpha_i(p)e^i = z(p) + rp$. Таким образом, обе проекции дают $\sum_i \alpha_i(p)z^i(p) = z(p)$, что и показано на рис. 17.E.5.

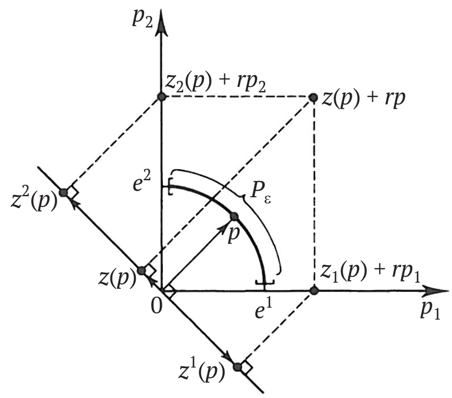


Рис. 17.E.5. Иллюстрация построения индивидуального избыточного спроса при доказательстве утверждения 17.E.3

17.F. Единственность равновесия

До сих пор анализ касался в основном определения общих свойств равновесной вальрасианской модели. Теперь мы пойдем другой дорогой. Мы сосредоточимся на особом важном свойстве — единственности равновесия — и определим условия, безусловно, частные, которые это гарантируют[35].

Для этого разобьем анализ на четыре этапа. На первом этапе рассмотрим общую постановку задачи с производством и обсудим условия на стороне экономики, которые сами по себе (т. е. без дополнительных ограничений на стороне производства) гарантируют единственность равновесия. На втором этапе обсудим свойство валовой заменимости — важный набор свойств, гарантирующих единственность равновесия. Третий этап представляет ограниченный результат, основанный на свойстве эффективности равновесия экономики обмена, а на четвертом этапе анализируется роль индексной формулы как источника результатов о единственности и неединственности.

Везде в разделе 17.F мы будем предполагать, что индивидуальные предпочтения непрерывны, строго выпуклы и строго монотонны.

Слабая аксиома для агрегированного избыточного спроса

Предположим, что производственная сторона экономики задана некоторой технологией $Y \subset \mathbb{R}^L$ с постоянной отдачей от масштаба (например, Y — выпуклый конус). Какие условия, касающиеся только спроса, гарантируют

[35] Также эта тема подробно освещается в работах (Kehoe, 1985; 1991) и (Mas-Colell, 1991).

единственность равновесных распределений[36]? Анализ, представленный в разделе 4.D, уже подсказывает ответ: если государство всегда распределяет богатство таким образом, что максимизирует значение (строго вогнутой) функции общественного благосостояния, то в экономике будет существовать нормативный репрезентативный потребитель (со строго вогнутой функцией полезности) и равновесие заведомо будет совпадать с единственным для такой экономики Парето-оптимальном распределением (см. раздел 15.C). Тем не менее здесь мы этим не сможем воспользоваться, поскольку богатство зависит от первоначальных запасов и только при случайном совпадении мы можем ожидать, что индуцированное распределение богатства максимизирует общественное благосостояние. Поэтому мы рассмотрим более слабое, но и более интересное условие — выполнение слабой аксиомы выявленных предпочтений для агрегированного избыточного спроса.

Пусть $z(p) = \sum_i \left(x_i(p,\ p \cdot \omega_i) - \omega_i \right)$ — агрегированная функция избыточного спроса потребителей. Тогда для такой экономики с производством можно переформулировать определение вальрасианского равновесия 17.B.1 в терминах $z(\cdot)$.

Утверждение 17.F.1. В экономике с технологией с постоянной отдачей от масштаба Y и агрегированной функцией избыточного спроса $z(\cdot)$ потребителей вектор цен p будет равновесным по Вальрасу тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

(1) $p \cdot y \leq 0$ для всех $y \in Y$,
(2) $z(p)$ может быть произведено, т. е. $z(p) \in Y$.

Доказательство. Если p — вектор равновесных по Вальрасу цен, то условие (2) следует из условия уравновешенности рынков, а условие (1) представляет собой необходимое условие максимизации прибыли для технологии с постоянной отдачей от масштаба. И обратно: если выполняются условия (1) и (2), то набор из распределений потреблений $x_i^* = x_i(p,\ p \cdot \omega_i)$ для $i = 1, \ldots, I$, производств $y^* = z(p) \in Y$ и цен p составляет вальрасианское равновесие. Единственным неочевидным условием остается условие максимизации прибыли. Оно тем не менее легко проверяется: $y^* = z(p) \in Y$ максимизирует прибыль, поскольку $p^* \cdot y \leq 0$ для всех $y \in Y$ (так как условие (1) выполняется), и тогда $p \cdot y^* = p \cdot z(p) = 0$ (это следует из закона Вальраса). ■

Определим слабую аксиому выявленных предпочтений для функции избыточного спроса.

Определение 17.F.1 (слабая аксиома выявленных предпочтений для функций избыточного спроса).

[36] Множество Y можно рассматривать как агрегированное производственное множество. Предпосылка о постоянной отдаче от масштаба введена здесь для простоты, поскольку позволяет, к примеру, не беспокоиться о распределении прибыли между потребителями (поскольку прибыль в каждом равновесии равна нулю). Заметим также, что экономика чистого обмена — частный случай модели с постоянной отдачей от масштаба ($Y = -\mathbb{R}_+^L$).

> Функция избыточного спроса $z(\cdot)$ удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений, если для любой пары векторов цен p и p' из $z(p) \neq z(p')$ и $p \cdot z(p') \leq 0$ следует $p'z(p) > 0$.

Другими словами, если p выявленно предпочитается p', то p' не может предпочитаться p (или, что то же самое, $z(p)$ недоступно при p'). Это то же определение, которое мы использовали в разделах 1.G и 2.F, но только в терминах избыточного спроса[37]. Слабая аксиома всегда выполняется для избыточного спроса каждого потребителя, но для агрегированного избыточного спроса она является сильной предпосылкой (это обсуждалось в разделе 4.C.).

Заметим сначала, что при заданном $z(\cdot)$ слабая аксиома выявленных предпочтений является необходимым условием, гарантирующим единственность равновесия для любой возможной выпуклой технологии с постоянной отдачей от масштаба, с которой объединяется $z(\cdot)$. Докажем это методом от противного. Пусть слабая аксиома нарушена, т. е. пусть для некоторых p и p' верно, что $z(p) \neq z(p')$, $p \cdot z(p') \leq 0$ и $p' \cdot z(p) \leq 0$. Тогда обе цены, p и p', будут равновесными для выпуклого производственного множества с постоянной отдачей от масштаба, которое задается следующим образом:

$$Y^* = \left\{ y \in \mathbb{R}^L : p \cdot y \leq 0 \text{ и } p' \cdot y \leq 0 \right\}.$$

На рис. 17.F.1 такое множество изображено для случая $L = 2$. Заметим, что на нем $z(p) \in Y^*$ и $p \cdot y \leq 0$ для всех $y \in Y^*$. То есть, согласно утверждению 17.F.1, p, как и p', тоже будет равновесным вектором цен. Однако, поскольку $z(p) \neq z(p')$, такое равновесие не единственно в экономике с избыточным спросом $z(\cdot)$ и производственным множеством Y^*.

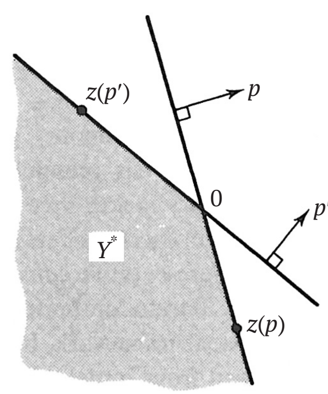


Рис. 17.F.1. Нарушение слабой аксиомы ведет к множественности равновесий для некоторых Y

А что можно сказать по поводу достаточности? Выполнение слабой аксиомы не будет достаточным условием для единственности равновесия, однако, как показывает утверждение 17.F.2, для любой выпуклой Y с постоянной отдачей от масштаба аксиома гарантирует выпуклость множества векторов равновесных цен. Это, конечно, не то же самое, что единственность, однако оно имеет непосредственное замечательное следствие в терминах единственности: если в экономике существует только конечное число (нормированных) равновесных цен (общий случай согласно разделу 17.D.)[38], то равновесие должно быть единственным.

[37] Формальным и несущественным различием является лишь то, что теперь определяем отношение выявленных предпочтений на бюджетных множествах (т. е. на векторах цен) напрямую, а не на потребительских выборах (т. е. векторах (наборах) товаров).

[38] Несмотря на то что обсуждавшийся в разделе 17.D случай описывал экономику обмена, его выводы могут быть использованы и в экономике с производством.

Утверждение 17.F.2. Предположим, что функция избыточного спроса $z(\cdot)$ такова, что при любой выпуклой с постоянной отдачей от масштаба технологии Y по экономике, сформированной $z(\cdot)$ и Y, равновесным будет только один вектор цен. Тогда $z(\cdot)$ будет удовлетворять слабой аксиоме выявленных предпочтений. Обратно, если $z(\cdot)$ удовлетворяет слабой аксиоме, то для любой выпуклой, с постоянной отдачей от масштаба технологии Y набор равновесных векторов цен будет выпуклым (и если множество нормированных равновесий цен конечно, то может быть не более одного нормированного вектора равновесных цен.

Доказательство. Первая часть теоремы уже доказывалась. Чтобы гарантировать выпуклость множества равновесных цен, предположим, что p и p' — равновесные векторы цен в экономике с выпуклой, с постоянной отдачей от масштаба технологией Y, т. е. что $z(p) \in Y$, $z(p') \in Y$ и для любого $y \in Y$ верно, что $p \cdot y \leq 0$ и $p' \cdot y \leq 0$. Возьмем теперь $p'' = \alpha p + (1 - \alpha)p'$, $\alpha \in [0, 1]$. Заметим, что $p'' \cdot y = \alpha p \cdot y + (1 - \alpha)p' \cdot y \leq 0$ для любых $y \in Y$. Чтобы показать, что p'' — это равновесная цена, нам необходимо только показать, что $z(p'') \in Y$. Поскольку $0 = p'' \cdot z(p'') = \alpha p \cdot z(p'') + (1 - \alpha)p' \cdot z(p'')$, то либо должно также выполняться $p \cdot z(p'') \leq 0$, либо $p' \cdot z(p'') \leq 0$. Предположим, что выполнено первое неравенство, так что $p \cdot z(p'') \leq 0$ и аналогично рассматривается случай, когда $p' \cdot z(p'') \leq 0$. Так как $z(p) \in Y$, то $p'' \cdot z(p) \leq 0$, то одновременное выполнение неравенств $p'' \cdot z(p)$ и $p \cdot z(p'')$ противоречит аксиоме выявленных предпочтений. Противоречия можно избежать только если $z(p'') = z(p)$, следовательно, $z(p'') \in Y$[39]. ■

Итак, мы пришли к выводу, что следует обращать внимание на условия на предпочтения I потребителей и их первоначальные запасы, которые гарантировали бы, что агрегированный избыточный спрос $z(\cdot)$ будет удовлетворять слабой аксиоме выявленных предпочтений. Начнем с относительного простого случая, в котором все векторы первоначальных запасов ω_i пропорциональны друг другу: $\omega_i = \alpha_i\bar{\omega}$, где $\bar{\omega}$ — вектор совокупных первоначальных запасов, а $\alpha_i \geq 0$ — доли в них (их сумма равна единице). В такой экономике распределение богатства среди потребителей не зависит от цен. Пронормируем цены: $p \cdot \bar{\omega} = 1$, тогда богатство потребителя 1 равно α_i, а $z_i(p) = x_i(p, \alpha_i) - \omega_i$. Агрегированное поведение спроса всех потребителей с фиксированным доходом было рассмотрено в разделе 4.C. Повторим лишь качественный вывод, который был там сделан: если уровни индивидуального богатства постоянны, выполнение слабой аксиомы выявленных предпочтений для избыточного спроса хотя далеко не гарантировано, но не является неправдоподобным[40].

[39] Заметим, что мы выяснили, что либо $z(p'') = z(p)$, либо $z(p'') = z(p')$. Поскольку это верно для любого $\alpha \in [0; 1]$ и поскольку функция $z(\cdot)$ непрерывна, то $z(p) = z(p')$ для любого равновесного вектора — как p, так и p'. То есть, если слабая аксиома выполняется для $z(\cdot)$, то в любом вальрасианском равновесии для данных первоначальных запасов должен быть один и тот же вектор агрегированного потребления, а поэтому и вектор агрегированного производства.

[40] Подробности можно посмотреть в работах, перечисленных в приложении к главе 4, особенно у Хильденбрандта (Hildenbrandt, 1994).

Предпосылка о пропорциональности первоначальных запасов не слишком логична, если речь идет о случае общего равновесия. Важно, следовательно, понять, какие есть новые эффекты (по сравнению с изученными в разделе 4.C) в случае непропорциональных первоначальных запасов. К сожалению, вероятность того, что избыточный спрос будет удовлетворять слабой аксиоме, резко снизится. Чтобы это понять, рассмотрим относительно простой случай гомотетичных предпочтений. Напомним (см. 4.C и 4.D), что в случае пропорциональных первоначальных запасов ситуация вполне «хорошая» — выполняется не только слабая аксиома, но, кроме того, модель позволяет ввести также и репрезентативного потребителя, однако же, как станет ясно из дальнейшего изложения, в случае непропорциональных первоначальных запасов даже гомотетичность предпочтений не препятствует невыполнению слабой аксиомы[41].

В разделе 2.F была предложена дифференциальная версия слабой аксиомы для функций спроса. То же можно получить и для функций избыточного спроса. Можно показать, что в этом случае достаточным дифференциальным условием выполнения слабой аксиомы будет следующее:

$$dp \cdot Dz(p)dp < 0, \textit{ если } dp \cdot z(p) = 0$$
$$\text{(т. е. когда изменение цены скомпенсировано)}$$
$$\textit{и } dp \textit{ не пропорционально } p \text{ (т. е. изменились относительные цены).} \quad (17.F.1)$$

Если первое из записанных в этом условии неравенств записать как нестрогое, то условие (17.F.1) превратится также в необходимое[42].

В силу гомотетичности предпочтений, имеем:

$$D_{w_i} x_i(p,\ p \cdot \omega_i) = \frac{1}{p \cdot \omega_i} x_i(p, p \cdot \omega_i).$$

Введем новые обозначения: $S_i = S_i(p, p \cdot \omega_i)$, $x_i = x_i(p, p \cdot \omega_i)$, $\bar{x} = \sum_i x_i$ и $\bar{\omega} = \sum_i \omega_i$, тогда (вспомним 17.E.3):

$$Dz(p) = \sum_i S_i(p,\ p \cdot \omega_i) - \sum_i \frac{1}{p \cdot \omega_i} x_i(p,\ p \cdot \omega_i) z_i\left(p,\ p \cdot \omega_i\right)^T =$$
$$= \sum_i S_i - \sum_i \frac{1}{p \cdot \omega_i}\left[x_i - \frac{p \cdot \omega_i}{p \cdot \bar{\omega}}\bar{x}\right]\left[x_i - \frac{p \cdot \omega_i}{p \cdot \bar{\omega}}\bar{x}\right]^T +$$
$$+ \sum_i \frac{1}{p \cdot \omega_i}\left[x_i - \frac{p \cdot \omega_i}{p \cdot \bar{\omega}}\bar{x}\right]\left[\omega_i - \frac{p \cdot \omega_i}{p \cdot \bar{\omega}}\bar{\omega}\right]^T - \frac{1}{p \cdot \omega}\bar{x}z(p)^T. \quad (17.F.2)$$

Для любого направления изменения цен dp, если $dp \cdot z(p) = 0$, первые два члена справа от знака равенства в (17.F.2) порождают эффект подходящего знака (матрица коэффициентов замещения $S_i(p, p \cdot \omega_i)$ размера $L \times L$ и матрица вариаций

---

[41] Чтобы усилить этот момент, стоит отметить, что если возможно произвольно выбирать первоначальные запасы, то гомотетичность предпочтений не накладывает никаких ограничений на агрегированный спрос. Действительно, как мы отмечали в разделе 17.F, основной вывод из утверждения 17.E.2 будет по-прежнему выполняться с дополнительным предположением, что предпочтения гомотетичны. Более подробное изложение можно найти в работах Мантеля (Mantel, 1976) и Шафера с Зонненшайном (Shafer, Sonnenschein, 1982).

[42] Предположим, что $\Delta p \cdot z(p) = (p' - p) \cdot z(p) = 0$. По определению 17.F.1, $\Delta p \cdot \Delta z = (p' - p) \cdot (z(p') - z(p)) \leq 0$. Переходя к пределу и пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, и получим $dp \cdot Dz(\mathrm{p})dp \leq 0$ при $dp \cdot z(p) = 0$.

$$-\left[x_i - \frac{p \cdot \omega_i}{p \cdot \overline{\omega}}\,\overline{x}\right]\left[x_i - \frac{p \cdot \omega_i}{p \cdot \overline{\omega}}\,\overline{x}\right]^T$$

отрицательно полуопределены), четвертый член — это нуль, но третий не определен. Вполне возможно, что этот ковариационный член будет иметь неправильный (положительный) знак или даже превосходить по модулю остальные три члена[43]. Следует беспокоиться в случае, если $\left(\dfrac{1}{(p \cdot \omega_i)}\right) x_i(p,\ p \cdot \omega_i)$ и ω_i положительным образом связаны с популяцией потребителей. Понятно, что этот случай порождает трудности. Те, кто потребляет (в расчете на доллар) больше, чем среднее потребление (в расчете на один доллар), являются обладателями большего начального запаса (в расчете на доллар) этих же товаров. Действительно, такой случай сложнее, потому что, если цена блага возрастет, чистые продавцы его (скорее всего те, которые относительно более наделены этим благом) получают положительный эффект богатства, а чистые покупатели — отрицательный. Таким образом, рост общего спроса на товар последует, если чистые продавцы потребляют его относительно больше (в расчете на один доллар), чем чистые покупатели.

Пример 17.F.1. Это пример провала слабой аксиомы в случае гомотетичности предпочтений даже когда выполняется свойство валовой заменимости, которое мы вскоре обсудим. Рассмотрим экономику, в которой есть два потребителя и четыре товара. Пусть потребитель 1 обладает предпочтениями только относительно первых двух товаров, а также первоначальным запасом этих же товаров, т. е. его избыточный спрос $z_1(\mathrm{p}) = z_1(p_1,\ p_2)$ не зависит от цен на третий и четвертый товары, и, кроме того, $z_{31}(p) = z_{41}(p) = 0$ для всех p. Наоборот, потребитель 2 обладает предпочтениями только относительно последних двух товаров и их же первоначальными запасами[44]. Тогда если найдется вектор цен p', такой что избыточный спрос обоих потребителей будет ненулевой ($z_1(p') \neq 0$ и $z_2(p') \neq 0$), то агрегированный избыточный спрос не будет удовлетворять слабой аксиоме. Действительно, выберем такие пары цен $(\hat{p}_1,\ \hat{p}_2)$ и $(\hat{p}_3,\ \hat{p}_4)$, что $\hat{p}_1 z_{11}(p') + \hat{p}_2 z_{21}(p') < 0$ и $\hat{p}_3 z_{32}(p') + \hat{p}_4 z_{42}(p') < 0$, и для некоторой $\alpha > 0$ возьмем векторы $q = (p_1',\ p_2',\ \alpha\hat{p}_3,\ \alpha\hat{p}_4)$ и $q' = (\alpha\hat{p}_1,\ \alpha\hat{p}_2,\ p_3',\ p_4')$. Тогда если значение α достаточно велико, то $q \cdot z(q') < 0$ и $q' z(q) < 0$ (см. упражнение 17.F.2). ■

Упражнение 17.F.3 дает еще один пример.

Валовая заменимость

Исследуем последствие предпосылок, природа которых отлична от слабой аксиомы. Далее мы выясним, что они дают нам результат единственности для ситуаций, сводимых к экономике обмена.

Чтобы объяснить эту концепцию (и оправдать ее название), рассмотрим функцию спроса потребителя в экономике с двумя товарами. При заданных ценах у матрицы замещения функции спроса знаки диагональных элементов будут отрицательными и, как результат, знаки остальных элементов положительны: если цена одного товара возрастет, то возрастет и компенсиро-

[43] Однако не в случае взаимной коллинеарности всех векторов $x_i(p,\ p \cdot \omega_i)$ и не в случае, когда коллинеарны между собой векторы ω_i. См. на эту тему упражнение 17.F.1.

[44] Таким образом, этот пример можно рассматривать также как случай положительной связи между запасами и спросами.

ванный спрос на другой товар. Однако если мы не будем выделять отдельно влияние эффектов богатства (т. е. если мы рассмотрим влияние эффекта цены на некомпенсированный спрос), то вполне возможно, что рост цены одного товара снизит спрос на оба, т. е. товары могут быть валовыми комплементами. Будем называть товары *валовыми субститутами*, если этого не происходит, т. е. если рост цены одного товара снижает (некомпенсированный, или валовый) спрос на него, приводит к росту (некомпенсированного, или валового) спроса на другой. В более общей модели с L товарами тот же термин используется для случая, в котором рост цены на один из товаров (и следовательно, к снижению на этот товар) ведет к росту спроса на *все остальные* товары. Для случая $L > 2$, однако, это не является необходимым свойством даже для компенсированного спроса. На самом деле свойство валовой заменимости является сильно ограничивающим. Тем не менее, оно может быть уместным и действительно важно в основном для случаев с небольшим количеством сильно агрегированных товаров или случаев, когда товары характеризуются особой симметрией (см., например, упражнение 17.F.4).

Определение 17.F.2. Функция $z(\cdot)$ обладает свойством *валовой заменимости* (ВЗ), если для любых p' и p, таких что существуют l и k, $l \neq k$, $p'_l > p_l$ и $p'_k = p_k$, верно неравенство $z_k(p') > z_k(p)$.

Если, как в рассмотренном случае, мы имеем дело со спросом, агрегированным по всей экономике, тогда факт однородности функции $z(\cdot)$ нулевой степени будет, вместе со свойством валовой заменимости, давать также и соотношение $z_l(p') < z_l(p)$ — при условии, что p и p' удовлетворяют всем свойствам из определения 17.F.2. Чтобы проверить это утверждение, рассмотрим вектор $\bar{p} = \alpha p$, где $\alpha = p'_l / p_l$. Заметим, что $\bar{p}_l = p'_l$ и $\bar{p}_k > p'_k$ при $l \neq k$. Тогда однородность нулевой степени функции $z(\cdot)$ дает следующее равенство: $0 = z_l(\bar{p}) - z_l(p) = z_l(\bar{p}) - z_l(p') + z_l(p') - z_l(p)$. Тогда поскольку свойство валовой заменимости требует выполнения неравенства $z_l(\bar{p}) - z_l(p') > 0$ (что можно получить, заменяя каждый раз цену p'_k на $\bar{p}_k$ с учетом того, что $l \neq k$, и используя свойство ВЗ), то выполнено: $z_l(p') - z_l(p) < 0$.

Дифференциальная версия свойств валовой заменимости достаточно очевидна: для каждой цены p должно выполняться соотношение $\dfrac{\partial z_k(p)}{\partial p_l} > 0$ для всех $l \neq k$, т. е. недиагональные элементы матрицы $Dz(p)$ размера $L \times L$ должны быть положительными. Кроме того, однородность нулевой степени функции агрегированного избыточного спроса $z(\cdot)$ предполагает, что $Dz(p)p = 0$, откуда $\dfrac{\partial z_l(p)}{\partial p_l} < 0$ для всех $l = 1, \dots, L$. Отсюда получаем, что все диагональные элементы матрицы $Dz(p)$ отрицательные.

Если во всех вышеприведенных определениях неравенства нестрогие, то будем говорить о *слабой валовой заменимости*[45].

[45] Стоит отметить, что функции, удовлетворяющие свойству валовой заменимости, возникают во многих экономических контекстах естественным образом достаточно часто. Например,

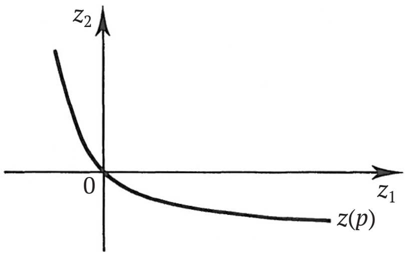


Рис. 17.F.2. Кривая «цена–потребление» функции избыточного спроса со слабой валовой заменимостью

На рис. 17.F.2 показана кривая «цена–потребление» функции избыточного спроса со слабой валовой заменимостью для случая $L = 2$. С ростом относительной цены на первый товар избыточный спрос на этот же товар падает, а избыточный спрос на второй — растет.

Важной характеристикой свойства валовой заменимости, которая следует прямо из определения, является *аддитивность функций избыточного спроса*. В частности, если индивидуальная функция избыточного спроса обладает этой характеристикой, то ею обладает и агрегированная функция.

Пример 17.F.2. Рассмотрим функцию полезности вида $u_i\left(x_i\right) = \sum_l u_{li}\left(x_{li}\right)$. Если $-\left[\dfrac{x_{li}u''_{li}\left(x_{li}\right)}{u'_{li}\left(x_{li}\right)}\right] < 1$ для всех l и x_{li}, то результирующая функция избыточного спроса $z_i(p)$ обладает свойством валовой заменимости для любых первоначальных запасов (см. упражнение 17.F.5). Это условие выполняется для $u_i\left(x_i\right) = \left(\sum_l \alpha_{li}x_{li}^{\rho}\right)^{1/\rho}$, $0 < \rho < 1$ (см. упражнение 17.F.5). Пределами такие предпочтения при $\rho \to 1$ и $\rho \to 0$ соответственно, дают предпочтения, представляемые линейной функцией и функцией Кобба — Дугласа (вспомним упражнение 3.C.6). Случай функции Кобба — Дугласа будет «граничным», если нас интересует свойство валовой заменимости. Действительно, в этом случае функция избыточного спроса на товар l — это $z_{li}(p) = \dfrac{\alpha_{li}(p \cdot \omega_i)}{p_l} - \omega_{li}$. При $\omega_{ki} > 0$ избыточный спрос на товар l изменяется в ту же сторону, что и цена p_k, но при $\omega_{ki} = 0$ никакого изменения спроса с ростом цены наблюдаться не будет[46]. ■

В особом случае экономики обмена если выполняется свойство валовой заменимости для агрегированного валового спроса, то равновесие единственно.

если взять матрицу затраты — выпуск A размером $(L - 1) \times (L - 1)$ и $c \in \mathbb{R}_+^{L-1}$, то $c - (I - A)\alpha$ будет удовлетворять свойству (слабой) валовой заменимости, как функция от $\alpha \in \mathbb{R}_+^{L-1}$ (см. приложение А к главе 5, в которой приводится соответствующая интерпретация этого контекста). В более общем виде система уравнений для $g(\alpha) - \alpha$, связанная с теоремой о неподвижной точке (т. е. система уравнений $g(\alpha) = \alpha$, где $g : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}_+^N$ возрастающая функция (т. е. где $g(\alpha) \geq g(\alpha')$, когда $\alpha \geq \alpha'$), также удовлетворяет ей (или этому свойству) (возможно, тоже только ее слабой версии). Заметим, что во всех этих случаях однородности нулевой степени нет, как и не выполняется и закон Вальраса, условий специфичных для приложения к общему равновесию в дополнении к валовой заменимости. Последнее важно, поскольку, будучи выполненными, эти условия могли бы усилить свойство валовой заменимости. В упражнении 17.F.16 читателя попросят исследовать следствия свойств валовой заменимости в условиях невыполнения этих условий.

[46] В работе Грэндмона (Grandmont, 1992) приводится интересный результат. Рассматривается случай, когда характеристики имеющего предпочтения вида Кобба — Дугласа репрезентативного потребителя, а отсюда и обладающий свойством валовой заменимости избыточный спрос, выводятся из требования о том, что при каждой данной цене выборы потребителей сильно различаются (в некотором точном, определенном смысле). Модель Грэндмона — пример модели, в которой индивидуальные функции избыточного спроса не обязаны удовлетворять свойству валовой заменимости, а агрегированная функция ему удовлетворять будет.

Утверждение 17.F.3. Агрегированная функция избыточного спроса $z(\cdot)$, удовлетворяющая свойству валовой заменимости, имеет максимум одно равновесие обмена, т. е. $z(p) = 0$ имеет только одно (нормированное) решение.

Доказательство. Достаточно показать, что равенство $z(p) = z(p')$ не может быть достигнуто для двух неколлинеарных векторов p и p'. Из однородности нулевой степени можно предположить, что $p' \geq p$ и $p_l = p'_l$ для некоторых l. Теперь изменим вектор цен p' так, чтобы получить вектор p за $L - 1$ шагов, снижая (или оставляя неизменной) одну цену каждого $b \neq l$ товара за шаг. По свойству валовой заменимости избыточный спрос на товар l не может снизиться ни на одном из шагов, а поскольку $p \neq p'$, он хотя бы на одном из шагов возрастет. Отсюда и получаем, что $z_l(p) > z_l(p')$. ■

Хотелось бы получить единственность равновесия и в экономике с производством, используя свойство валовой заменимости функции избыточного спроса $\bar{z}(\cdot)$ с включенным в нее производством. Однако в этом случае использование рассматриваемого свойства сильно ограничено. Рассмотрим, например, ситуацию, в которой затрачиваемые и выпускаемые товары различны. Если цена одного из затрачиваемых товаров вырастет, то спрос на другие может упасть, а не возрасти, как это следовало бы из свойства валовой заменимости, — просто потому, что оптимальный уровень выпуска бы снизился. Тем не менее сама концепция валовой заменимости могла бы быть полезной. Вспомним, например, что в конце раздела 17.B мы говорили, что экономику с производством всегда можно свести к случаю экономики обмена, в которой потребители обмениваются ресурсами, а потом производят выпуск дома, пользуясь свободным доступом к технологии с постоянной отдачей от масштаба. Агрегированный избыточный спрос в такой экономике включал бы в себя как ресурсы, так и произведенный из них выпуск и вполне бы мог удовлетворять свойству валовой заменимости[47].

Какова связь между валовой заменимостью и слабой аксиомой? Очевидно, что слабая аксиома не подразумевает выполнения свойства валовой заменимости (последнее нарушается даже в квазилинейной экономике с одним потребителем). Справедливость обратного утверждения неочевидна, однако ясно, что выполнение свойства валовой заменимости не имеет следствием выполнение слабой аксиомы. Например, если в упражнении 17.F.1 слабая аксиома нарушается, то валовая заменимость вполне может выполняться[48]. Тем не менее между обеими концепциями существует важная взаимосвязь. Из свойства валовой заменимости следует, что

$$\text{если } z(p) = 0 \text{ и } z(p') \neq 0, \text{ то } p \cdot z(p') > 0. \tag{17.F.3}$$

Мы не станем приводить доказательства утверждения (17.F.3), однако в упражнении 17.F.7 нужно будет доказать его для случая $L = 2$. Чтобы понять 17.F.3, заметим, что, если вектор цен p является равновесным вектором цен в экономике обмена, в отличие от вектора p', тогда, поскольку $z(p) = 0$, то $p' \cdot z(p) = 0$, откуда любой неравновесный вектор p' выявленно предпочитается вектору p. Отсюда получаем, что вышеприведенное требование в (17.F.3), что $p \cdot z(p') > 0$ эквивалентно к ограниченной версии слабой аксиомы, говорящей о том, что никакой равновесный вектор

---

[47] Подробнее этот случай рассматривается в (Mas-Colell, 1991) и в упражнении 17.F.6.

[48] Следовательно, как известно из утверждения 17.F.1, в экономике с постоянной отдачей от масштаба выполнение свойства валовой заменимости избыточного спроса *не* обязывает равновесие быть единственным.

цен p не может быть выявленно предпочитаем неравновесному вектору p'. Геометрически это означает, что значения функции избыточного спроса $\{z(p') : p' \gg 0\} \subset \mathbb{R}^L$ (т. е. кривая «цена–предложение») целиком лежат выше гиперплоскости, проходящей через начало координат, и вектор нормали p (см. рис. 17.F.3). Подобно утверждению 17.F.2, условие 17.F.3 влечет выпуклость множества равновесных цен экономики обмена, т. е. множества $\{p \in \mathbb{R}^L_{++} : z(p) = 0\} \subset \mathbb{R}^L$ (в упражнении 17.F.8 нужно будет показать это). Интересно, что условие 17.F.3 выполняется не только в случае слабой аксиомы и валовой заменимости, то также и в случае отсутствия торговли (no-trade case), как это будет показано ниже.

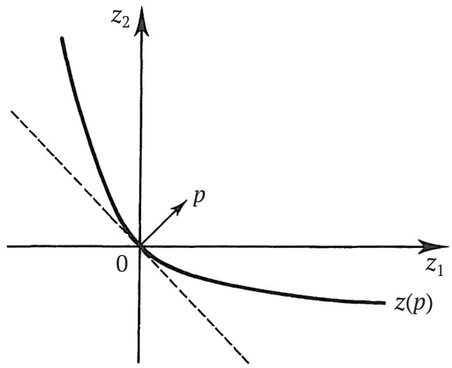


Рис. 17.F.3. Свойство выявленных предпочтений валовой заменимости

В дифференцируемом случае существует аналогичный способ исследовать связь между валовой заменимостью и слабой аксиомой. Пусть $z(p) = 0$. Достаточное дифференциальное условие для выполнения слабой аксиомы говорит, что $dp \cdot Dz(p)dp < 0$ для любого dp, не пропорционального p. Посмотрим, что необходимо для того, чтобы знаки матрицы $Dz(p)$ были такими, как того требует валовая заменимость. Поскольку $z(p) = 0$, получаем, что $p \cdot Dz(p) = 0$ и $Dz(p)p = 0$ (из 17.E.1 и 17.E.2). Тогда можно показать, что для любого dp, не пропорционального p, выполнится неравенство $dp \cdot Dz(p)dp < 0$ (доказательство приведено в разделе M.D математического приложения). Отсюда заключаем, что *при равновесном векторе цен* свойство валовой заменимости удовлетворяет также всем локальным ограничениям, налагаемым слабой аксиомой.

Утверждение 17.F.4. Пусть $z(\cdot)$ — функция агрегированного избыточного спроса. Пусть также выполняется условие $z(p) = 0$, а матрица $Dz(p)$ имеет знаки, необходимые для выполнения условия валовой заменимости. Тогда верно, что $dp \cdot Dz(p)dp < 0$ для любого $dp \neq 0$, не пропорционального p.

Единственность состояния равновесия, вытекающая из его Парето-оптимальности

Представим теперь результат, который сам по себе не имеет большого значения, но тем не менее интересен, поскольку подчеркивает связь Парето-оптимальности с единственностью равновесия. Для простоты ограничимся случаем экономики обмена (см. также в упражнении 17.F.9 более общий случай с производством).

Утверждение 17.F.5. Предположим, что точка первоначального запаса $(\omega_1, \ldots, \omega_I)$ является равновесной по Вальрасу в экономике обмена со строго выпуклыми и строго монотонными предпочтениями (т. е. в равновесии торговли не происходит). Тогда такое равновесное распределение будет являться единственным.

Доказательство. Пусть распределение $x = (x_1, \ldots, x_I)$ и вектор цен p составляют вальрасианское равновесие в экономике, в которой первоначальные запасы потребителей составляют вектор $(\omega_1, \ldots, \omega_I)$. Тогда, поскольку ω_i доступно каждому i-му потребителю при ценах p, получаем, что $x_i \succsim_i \omega_i$ для всех i. При этом, согласно предпосылкам теоремы, а также по первой теореме благосостояния, $(\omega_1, \ldots, \omega_I)$ — Парето-оптимальное распределение, так что $x_i \sim_i \omega_i$ для всех i. Заметим, что $x_i = \omega_i$ для всех i, поскольку если бы это было не так, то при строгой выпуклости предпочтений такое распределение, как, например, $\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}\omega_1, \ \ldots, \ \frac{1}{2}x_I + \frac{1}{2}\omega_I\right)$, было бы лучше по Парето, чем распределение $(\omega_1, \ldots, \omega_I)$. ■

Индексный анализ и единственность (*… и неединственность*)

Теорема об индексе (17.D.2) дает необходимый инструментарий для проверки единственности в любой рассматриваемой модели. Ее идея заключается в том, что если общие предпосылки модели дают возможность определить знак определителя матрицы Якоби уравнений равновесия в каждом решении, то равновесие должно быть единственным. И это понятно: из теоремы об индексе следует, что знаковое единообразие равновесий несовместимо с их множественностью.

Конечно, можно было бы применить теорему об индексе и вместо многих предыдущих доказательств. Например, в экономике обмена как в случае слабой аксиомы, так и в случае выполнения условия валовой заменимости, как только верно $z(p) = 0$, матрица $Dz(p)$ обязательно будет отрицательно полуопределена (см. обсуждение выражения 17.F.1 и утверждения 17.F.4). Более того, если равновесие регулярно (т. е. ранг $Dz(p)$ равен $L - 1$), то из отрицательной полуопределенности $Dz(p)$, как легко показать, следует, что индекс равновесия обязательно равен +1 (см. упражнение 17.F.11). Отсюда и получаем, что как в случае слабой аксиомы, так и в случае выполнения условия валовой заменимости в любой регулярной экономике равновесный (пронормированный) вектор цен будет единственным.

Итак, теорема об индексе является удобным инструментом, но, как в только что рассмотренном случае, выполнение условий единственности допускает прямую проверку. Поэтому теорему об индексе чаще используют не для доказательства единственности, а для доказательства неединственности равновесия (впервые это сделал Вариан (Varian, 1977). Мы это сделаем в примере 17.F.3.

Пример 17.F.3. Пусть имеются две страны, $i = 1, 2$, в каждой из которых живет по одному потребителю. Страны позиционированы симметрично относительно местного (H) и заграничного (F) благ. Пусть также в каждой стране имеется по одной единице местного товара и ни одной — заграничного. Функции полезности обеих стран выглядят как $u_i\left(x_{Hi}, x_{Fi}\right) = x_{Hi} - x_{Fi}^{\rho}$, где $-1 < \rho < 0$. Уже из самой симметричности начальных запасов мы получим, что существует симметричное равновесие с ценами $p = (1, 1)$. Однако было бы интересно узнать, есть ли в такой экономике несимметричные равновесия. Для этого можно было бы проделать следующее: рассчитать индекс симметричного равновесия, и тогда достаточным (но не необходимым) условием существования несимметричного равновесия будет его отрицательность (т. е. -1)[49]. Если мы рассчитаем теперь индекс для текущего примера (это нужно проделать в упражнении 17.F.13), то увидим, что он отрицателен, и если при ценах $p = (1, 1)$ эффекты богатства в каждой стране так смещены в сторону местного товара, что, например, рост цены товара, производимого в стране 1, ведет к росту спроса на него в этой стране большему, нежели падение спроса на него в стране 2. ■

17.G. Сравнительная статика

Сравнительная статика представляет собой специальную аналитическую методологию, позволяющую исследовать, что будет происходить с равновесиями при изменении параметров среды (эти изменения часто называются шоками). Сравнительной статикой равновесия по Вальрасу мы ниже и займемся.

Рассмотрим конкретную экономику обмена, описываемую системой уравнений агрегированных избыточных спросов на $L - 1$ товаров:

$$\hat{z}(p;\ q) = \left(z_1(p;\ q),\ \ldots, z_{L-1}(p;\ q)\right),$$

где $q \in \mathbb{R}^N$ — вектор из N параметров, влияющих на предпочтения или начальные запасы (или и на то и на другое). Пронормируем также вектор цен, $p_L = 1$.

Пусть первоначально все значения параметров заданы вектором $\bar{q}$, и для этого $\bar{q}$ известны равновесные цены — это вектор $\bar{p}$. Таким образом, $\hat{z}\left(\bar{p};\ \bar{q}\right) = 0$. Исследуем влияние шоков экзогенных параметров q на эндогенные параметры системы p, решая систему уравнений. Первой сложностью будет возможная множественность равновесий: система $L - 1$ уравнений $\hat{z}\left(\cdot;\ \bar{q}\right) = 0$ с $L - 1$ неизвестными может иметь более чем одно решение для релевантных q, и нужно будет решать, какое из решений (равновесий) выбрать.

Если отклонение значений параметров от вектора $\bar{q}$ мало, тогда для оценки последствий этих отклонений можно использовать уже знакомый нам подход анализа локальных эффектов для цен p, т. е. решений вблизи вектора $\bar{p}$. Предположив дифференцируемость функции $\hat{z}\left(p;\ q\right)$, при-

[49] В этом примере, как это обычно и делается, функция избыточного спроса не дифференцируема при ценах, при которых спрос попадает на границу. Обычно мы могли бы сказать, что такие цены не являются равновесными, и поэтому на действенность теоремы об индексе эти недифференцируемости не влияют.

меним для этого теорему о неявной функции (см. раздел M.E математического приложения). Действительно, если система $\hat{z}\left(\cdot;\ \bar{q}\right) = 0$ является регулярной при $\bar{p}$, т. е. если матрица размера $(L - 1) \times (L - 1)$, состоящая из элементов $D_p\hat{z}\left(\bar{p};\ \bar{q}\right)$, имеет ранг $L - 1$[50], то в окрестности $\left(\bar{p};\ \bar{q}\right)$ равновесный вектор цен можно представить как функцию $p(q) = (p_1(q), \ldots, p_{L-1}(q))$, матрица первых производных которой размера $(L - 1) \times N$ в точке $\bar{q}$ такова:

$$Dp(\bar{q}) = -\left[D_p\hat{z}(\bar{p};\ \bar{q})\right]^{-1} D_q\hat{z}(\bar{p};\ \bar{q}). \tag{17.G.1}$$

Как можно теперь интерпретировать матрицу первых производных $Dp(\bar{q})$? Выражение 17.G.1 и утверждение 17.E.2 (которое говорит о том, что матрица ценовых эффектов $D_p\hat{z}\left(\bar{p};\ \bar{q}\right)$ не ограничена (unrestricted) при $I \geq L$) дают следующий строгий результат: к сравнительной статике равновесия без дополнительных предположений вполне можно применять тот же принцип «все возможно» (anything goes), в той же манере, как он применим к тесно связанным вопросам (см. раздел 17.E) влияния ценовых эффектов на избыточный спрос. Рассмотрим это влияние на конкретном примере.

Пусть набором экзогенных параметров будет вектор первоначальных запасов $\hat{\omega}_1 = (\omega_{11},\ \ldots,\ \omega_{L-1,1})$ потребителя 1, где $L - 1$ — количество наименований товаров. Все остальные запасы товаров остаются фиксированными. Как и раньше, предполагаем, что $\hat{z}\left(\cdot;\ \hat{\bar{\omega}}_1\right) = 0$ регулярна при $\bar{p}$. Можно показать (см. упражнение 17.G.1), что если функция спроса первого потребителя удовлетворяет строгому условию нормальности, то ранг соответствующей матрицы $Dp\left(\hat{\bar{\omega}}_1\right)$ равен $L - 1$, где $p(\cdot)$ — локально определяемая функция решений, для которой $p\left(\hat{\bar{\omega}}_1\right) = \bar{p}$. Утверждение 17.G.1 говорит о том, что если в рассматриваемой экономике достаточно потребителей, то это все, что мы можем сказать.

Утверждение 17.G.1. Для любого вектора цен $\bar{p}$, первоначальных запасов первых $L - 1$ товаров $\hat{\bar{\omega}}_1 = \left(\bar{\omega}_{11},\ \ldots,\ \bar{\omega}_{L-1,1}\right)$ первого потребителя и невырожденной матрицы B размера $(L - 1) \times (L - 1)$ существует экономика обмена, состоящая из $L + 1$ потребителей, в которой первый потребитель обладает первоначальными запасами первых $L - 1$ товаров, $\hat{z}\left(\bar{p},\ \hat{\bar{\omega}}_1\right) = 0$, $\hat{z}\left(\cdot,\ \hat{\bar{\omega}}_1\right) = 0$ регулярна в $\bar{p}$, и $Dp\left(\hat{\bar{\omega}}_1\right) = B$.

Доказательство. Пусть у первого потребителя первоначальный запас с предписанным количеством первых $L - 1$ товаров. Не будем накладывать на его предпочтения никаких ограничений помимо того, что матрица $D_{\hat{\omega}_1}\hat{z}_1\left(\bar{p},\ \hat{\bar{\omega}}_1\right)$ должна быть

[50] Немного отступая от первоначальных обозначений, назовем матрицей $D_p\hat{z}(\bar{p},\ \bar{q})$ ту, что получена из матрицы $D_p z(\bar{p},\ \bar{q})$ удалением последней строки и последнего столбца.

невырожденной (функция спроса первого потребителя удовлетворяет строгому условию нормальности, и тут можно снова обратиться к соотношению 17.G.1). Поскольку верно, что $D_{\hat{\omega}_1}\hat{z}\left(\bar{p};\ \hat{\hat{\omega}}_1\right) = D_{\hat{\omega}_1}\hat{z}_1\left(\bar{p};\ \hat{\hat{\omega}}_1\right)$, необходимо будет включить в экономику еще L потребителей, чтобы результирующая экономика размера $L + 1$ гарантировала верность равенств $\hat{z}\left(\bar{p};\ \hat{\hat{\omega}}_1\right) = 0$ и

$$D_p\hat{z}\left(\bar{p};\ \hat{\hat{\omega}}_1\right) = -D_{\hat{\omega}_1}\hat{z}_1\left(\bar{p};\ \hat{\hat{\omega}}_1\right)B^{-1}. \tag{17.G.2}$$

Заметим, что матрица размера $(L - 1) \times (L - 1)$, определенная в 17.G.2, является невырожденной. Таким образом, мы свели первоначальную проблему к следующей: можно ли найти L потребителей, агрегированный избыточный спрос которых при ценах $\bar{p}$ равен $-\hat{z}_1\left(\bar{p};\ \hat{\hat{\omega}}_1\right)$ и для которых агрегированная матрица эффектов цен размера $(L - 1) \times (L - 1)$ выражалась бы как $\hat{A} = -D_{\hat{\omega}_1}\hat{z}_1\left(\bar{p};\ \hat{\hat{\omega}}_1\right)B^{-1} - D_p\hat{z}_1\left(\bar{p};\ \hat{\hat{\omega}}_1\right)$? Из утверждения 17.E.2 следует, что ответ на этот вопрос положителен (заметим, что ограничения, которые накладывает утверждение 17.E.2 на матрицу A размера $L \times L$, не накладывает ограничений на матрицу, получаемую из A вычеркиванием последней строки и последнего столбца). ■

Утверждение 17.G.1 показывает, что любой эффект первого порядка (см. работу Брауна и Мацкина (Brown, Matzkin, 1993), в которой приведены современные исследования на эту тему) возможен. Как и в разделе 17.E (вспомним рис. 17.E.3), здесь нужно помнить, что если есть априорные ограничения на начальные запасы, если потребление должно быть неотрицательным, то существуют и здесь сравнительно-статические ограничения глобального характера.

Существуют и другие эффекты сравнительной статики, которые, в идеале, хотелось бы иметь и которые интуитивно понятны: например, с ростом начального запаса одного из товаров должна снижаться его равновесная цена. Однако чтобы такой эффект имел место, необходимо выполнение строгих предпосылок, которые тем не менее уже не должны быть для вас удивительными: мы знаем, что эффект богатства и (или) недостаточная заменимость товаров могут его нивелировать. Мы как раз это наблюдали в утверждении 17.G.1.

Анализ единственности в разделе 17.E дает основание предполагать, что хорошие сравнительно-статические эффекты могут иметь место, если агрегированный избыточный спрос удовлетворяет условиям, подобным слабой аксиоме (вспомним определение 17.F.1) или свойству валовой заменимости (см. определение 17.F.2). Это действительно так. Рассмотрим сначала следствия ограничений на агрегированный избыточный спрос, подобных слабой аксиоме.

Утверждение 17.G.2. Предположим, что $\hat{z}\left(\bar{p};\ \bar{q}\right) = 0$ и функция $\hat{z}(\cdot)$ дифференцируема. Тогда если матрица $D_q\hat{z}\left(\bar{p};\ \bar{q}\right)$ отрицательно определена[51], то

$$\left(D_q\hat{z}\left(\bar{p};\ \bar{q}\right)dq\right)\cdot\left(Dp\left(\bar{q}\right)dq\right) \geq 0 \text{ для любого } dq. \tag{17.G.3}$$

[51] Это условие не зависит от того, какой именно товар будет иметь индекс L (см. раздел M.D математического приложения).

Доказательство. Матрица, обратная отрицательно определенной матрице, также отрицательно определена. Отсюда матрица $\left[D_q\hat{z}\left(\overline{p};\ \overline{q}\right)\right]^{-1}$ будет отрицательно определенной (см. раздел M.D математического приложения). Следовательно, используя 17.G.1, получаем, что

$$(D_q\hat{z}(\overline{p};\ \overline{q})dq)\cdot(Dp(\overline{q})dq) =$$

$$= -D_q\hat{z}(\overline{p};\ \overline{q})dq\cdot\left[D_p\hat{z}(\overline{p};\ \overline{q})\right]^{-1} D_q\hat{z}(\overline{p};\ \overline{q})dq \geq 0,$$

т. е. в точности 17.G.3. ■

Слабая аксиома предполагает отрицательную полуопределенность $D_p\hat{z}\left(\overline{p};\ \overline{q}\right)$ при $\hat{z}\left(\overline{p};\ \overline{q}\right) = 0$ (см. выражение 17.F.1 и следующее за ним замечание. Следовательно, предположение утверждения 17.G.2 эквивалентно некоторому усилению этого следствия (относительно матрицы $D_p\hat{z}\left(\overline{p};\ \overline{q}\right)$). Это заключение говорит о том, что для всякого бесконечно малого шока dq величины q индуцированный шок избыточного спроса при ценах, фиксированных на уровне $\overline{p}$, т. е. $D_q\hat{z}\left(\overline{p};\ \overline{q}\right)dq$, и индуцированный шок в равновесных ценах, т. е. $D_qp(\overline{q})$, движутся «в одном и том же направлении» (точнее, если представить их в виде векторов в $\mathbb{R}^{L-1}$, то они будут образовывать острый угол). Например, если некоторый шок при фиксированных ценах оказывает влияние только на агрегированный избыточный спрос на первый товар, например снижая его[52], то и цена на этот товар тоже снизится. Заметим, что это *не* означает, что с ростом начального запаса ω_{11} равновесная цена на первый товар упадет. Если, как обычно, мы предполагаем нормальность спроса, изменение в ω_{11} действительно снизит избыточный спрос на товар 1 при ценах $\overline{p}$, но также изменит и избыточный спрос на другие товары (см. упражнение 17.G.2).

Рассмотрим теперь утверждение 17.G.3, в котором используется свойство валовой заменимости (точнее, его выполнение локально в точке $\left(\overline{p};\ \overline{q}\right)$).

Утверждение 17.G.3. Пусть $\hat{z}\left(\overline{p};\ \overline{q}\right) = 0$ и функция $\hat{z}(\cdot;\ \cdot)$ дифференцируема. Тогда если диагональные элементы матрицы $D_pz\left(\overline{p};\ \overline{q}\right)$ размера $L \times L$ имеют отрицательные знаки, а остальные элементы — положительные знаки, то матрица $\left[D_p\hat{z}\left(\overline{p};\ \overline{q}\right)\right]^{-1}$ целиком будет состоять из элементов с отрицательными знаками.

Доказательство. Однородность функции избыточного спроса нулевой степени (см. упражнение 17.E.1) позволяет утверждать, что $D_pz\left(\overline{p};\ \overline{q}\right)\overline{p} = 0$, откуда $D_p\hat{z}\left(\overline{p};\ \overline{q}\right)\hat{\overline{p}} \ll 0$, где $\hat{\overline{p}} = \left(\overline{p}_1,\ \ldots,\ \overline{p}_{L-1}\right)$. Обозначим буквой I единичную матрицу размера $(L-1)\times(L-1)$ и возьмем некоторое $r > 0$, достаточно большое, чтобы матрица $A = \left(\dfrac{1}{r}\right)D_p\hat{z}\left(\overline{p};\ \overline{q}\right) + I$ состояла только из положительных элементов.

[52] Это означает, что избыточные спросы на товары со второго по $L-1$ не изменятся. По закону Вальраса, избыточный спрос на товар под номером L должен измениться.

Отсюда получим, что $D_p\hat{z}(\bar{p};\ \bar{q}) = -r[I - A]$, $D_p\hat{z}(\bar{p};\ \bar{q})\hat{\bar{p}} \ll 0$ и $(I - A)\hat{\bar{p}} \gg 0$. То есть, состоящая из положительных элементов матрица A, которую можно рассматривать как матрицу «затраты — выпуск», является продуктивной (см. приложение А к главе 5. Тот факт, что диагональные элементы этой матрицы отличны от нуля, несущественен). Отсюда, как было показано при доказательстве утверждения 5.AA.1, матрица $[\mathrm{I} - A]^{-1}$ существует и все ее элементы положительны. Поскольку $\left[D_p\hat{z}(\bar{p};\ \bar{q})\right]^{-1} = -\left(\frac{1}{r}\right)\left[I - A\right]^{-1}$, предположение 17.G.3 доказано. ■

Из предположения 17.G.3 и соотношения 17.G.1 следует, что если выполняется свойство валовой заменимости, и если выполняется также и неравенство $D_q\hat{z}(\bar{p};\ \bar{q})dq \ll 0$ (т. е. если избыточные спросы на первые $L - 1$ товаров в результате шока снизятся, и, следовательно, спрос на товар L в результате этого возрастет), то неравенство $Dp(\bar{q})dq \ll 0$ также будет верно. Это означает, что равновесные цены на первые $L - 1$ товаров (по отношению к цене товара под номером L) упадут[53]. В частности, предположим снова, что первоначальный запас первого потребителя на некоторый товар (пусть это будет товар под номером L) уменьшился. Предполагая, что спрос потребителя нормален по цене, получаем, что сокращение ω_{L1} при фиксированном векторе цен $\bar{p}$ снизит избыточный спрос на первые $L - 1$ товаров. Тогда относительные цены на эти товары тоже упадут, что приведет нас к выводу, который мы не могли получить из утверждения 17.G.2: если первоначальный запас некоторого товара уменьшить, то его относительная цена вырастет. Это означает, что предпосылки предположения 17.G.3 гораздо строже, чем предположения 17.G.2. Действительно, как мы видели в утверждении 17.F.4, если $z(\bar{p};\ \bar{q}) = 0$ и матрица $D_p z(\bar{p};\ \bar{q})$ размера $L \times L$ удовлетворяет условию валовой заменимости, то $dp \cdot D_p z(\bar{p};\ \bar{q})dp < 0$ всякий раз, как $dp \neq 0$ не пропорционально $\bar{p}$. В частности, если $dp_L = 0$, матрица $D_p\hat{z}(\bar{p};\ \bar{q})$ будет отрицательно определена.

Выражение 17.G.1 позволяет в явном виде вычислить эффекты бесконечно малых шоков. В действительности, оно также предлагает практически вычислитель-

[53] Этот вывод верен и для шоков, которые не являются локальными. Чтобы это показать, предположим, что чередование знаков в матрице $Dz(p;\ q)$ соответствует тому, что характерно для валовой заменимости. Пусть также $\hat{z}(p;\ \bar{\bar{q}}) \ll \hat{z}(p;\ \bar{q})$ для всех p. Теперь для $t \in [0, 1]$ найдем $\hat{z}(p;\ t)$ следующим образом: $\hat{z}(p;\ t) = t\hat{z}(p;\ \bar{\bar{q}}) + (1 - t)\hat{z}(p;\ \bar{q})$. Обозначим через $p(t)$ решение системы $\hat{z}(p;\ t) = 0$. Заметим, что $D_t\hat{z}(p(t);\ t)dt = \hat{z}(p(t);\ \bar{\bar{q}}) - \hat{z}(p(t);\ \bar{q}) \ll 0$ для всех t, и поэтому, согласно предположению 17.G.3, $Dp(t)dt << 0$ для всех t. Но тогда для любых $l = 1, \ldots, L - 1$ верно:

$$p_l(\bar{\bar{q}}) - p_l(\bar{q}) = \int_0^1 \left[\frac{\partial p_l(t)}{dt}\right]dt < 0.$$

В упражнении 17.G.3 предложен более прямой подход к решению этой глобальной проблемы. Еще подробнее — у Милгрома и Шеннона (Milgrom, Shannon, 1994).

ный метод для оценки локальных эффектов от малых, но, возможно, не бесконечно малых шоков. Предположим, что значения экзогенных параметров после шока становятся равными $\bar{\bar{q}}$. Рассмотрим для $t \in [0, 1]$ непрерывную функцию $\hat{z}(\cdot,\ t)$, которая при изменении значения t с $t = 0$ до $t = 1$ преобразует $\hat{z}(\cdot;\ \bar{q})$ в $\hat{z}(\cdot;\ \bar{\bar{q}})$. Пример такой функции, называемой гомотопией, — это

$$\hat{z}(\cdot,\ t) = (1 - t)\hat{z}(\cdot;\ \bar{q}) + t\hat{z}(\cdot;\ \bar{\bar{q}}).$$

Обозначим множество решений как $E = \{(t,\ p) : \hat{z}(p,\ t) = 0\}$. Тогда мы сможем попытаться определить $p(\bar{\bar{q}})$, следуя сегменту в множестве решений, начинающемуся в $(0,\ \bar{p})$[54]. Если значение $\bar{\bar{q}}$ близко к $\bar{q}$, а первоначальный вектор $\bar{p}$ был регулярным, то решение будет простым (см. рис. 17.G.1(a)): сегмент, соединяющий $(0,\ \bar{p})$ и $(1,\ \bar{\bar{p}})$[55], единствен. В таком случае $p(\bar{\bar{q}}) = \bar{\bar{p}}$.

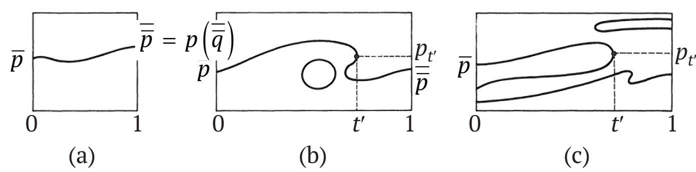


Рис. 17.G.1. Сравнительная статика: общий случай

Если $\bar{\bar{q}}$ не близко к $\bar{q}$, но тем не менее функция $\hat{z}(\cdot,\ t)$ регулярна для каждого t (это будет иметь место, если, например, $z(\cdot,\ t)$ для любого t удовлетворяет любому условию единственности из тех, что были рассмотрены в разделе 17.F), то эта процедура будет все еще успешной при следовании от $t = 0$ до $t = 1$ и, следовательно, в определении равновесия для $\bar{\bar{q}}$[56]. К сожалению, если шок достаточно велик, можно оказаться в ситуации, которая представлена на рис. 17.G.1(b) и 17.G.1(c), где при некоторых t' экономика $\hat{z}(\cdot,\ t')$ оказывается нерегулярной, а при $(t',\ p_{t'})$ не существует естественного продолжения пути, когда t возрастает[57]. В таком случае не остается другой альтернативы, кроме как напрямую решать систему уравнений $\hat{z}(\cdot;\ \bar{\bar{q}}) = 0$. Неприятно, что решение здесь зависит лишь от того, какой способ нахождения равновесия нами избран и от начального значения $(\bar{p};\ \bar{q})$, и в этом заключается большой недостаток теории равновесия.

---

[54] На практике «следование» сегменту подразумевает использование подходящих численных методов; см. работы Гарсии — Зангвилла (Garcia-Zangwill, 1981), Кехое (Kehoe, 1991) и в ссылках в них.

[55] Более того, если шок достаточно мал, $\bar{\bar{p}}$ получается тем же способом безотносительно конкретной используемой гомотопии.

[56] Если, однако, равновесия множественны, то какое равновесие мы таким образом найдем, будет зависеть от выбора гомотопии.

[57] Заметим, что при изменении направления (изменения) t мы можем продолжать двигаться вдоль сегментов в этих двух фигурах (это фактически достаточно общий факт). Если, как и в 17.G.1(b), $\bar{p}$ является единственным решением при $t = 0$, то сегмент обязательно закончится в $(1,\ \bar{\bar{p}})$. Таким образом, в некотором смысле нам удастся найти равновесие для $\bar{\bar{q}}$, соответствующее первоначальному $\bar{p}$. Однако связь эта достаточно слаба и зависит от выбора гомотопии: на рис. 17.G.1(c) $\bar{p}$ не является единственным равновесием при $t = 0$, и соответствующая процедура нахождения решения может не сработать, поскольку сегмент, начинающийся в $(0,\ \bar{p})$, снова возвращается к точке $t = 0$.

17.H. Устойчивость процесса нащупывания

Итак, мы провели глубокий анализ равновесных уравнений. Характерная черта, отличающая экономику от других научных дисциплин, — это то, что для нас такие уравнения образуют сердцевину (центр) нашей дисциплины. Многие другие науки, как, например, физика или даже экология, сравнительно больше внимания уделяют определению динамических законов изменений. Мы же динамике пока не придавали большого значения. Причина в том, что, скажем прямо, экономическая наука хорошо (как мы надеемся) научилась находить равновесия, но плохо умеет предсказывать, как поведет себя экономика в неравновесной ситуации. Конечно, существуют интуитивные динамические принципы: если спрос больше предложения, то цены будут расти; если цена выше предельных издержек производства, то производство расширится; если прибыли в отрасли положительные и отсутствуют барьеры входа в эту отрасль, то в ней будут появляться новые фирмы, и т. д. Однако эти общие представления о направлениях изменения системы сложно трансформировать в точные законы динамики[58].

Наиболее известная попытка такого трансформирования была предпринята Вальрасом (Walras, 1874), и современная версия его идей известна как «устойчивость процесса нащупывания». Ниже мы рассмотрим две модели типа нащупывания: одну — регулирования только цен, а другую — регулирования только количественного регулирования. Нужно, однако, отметить, что это лишь два из множества возможных примеров такого регулирования. Правдоподобных моделей неравновесных систем может быть очень много, и это в том числе тоже затрудняет анализ: хотя существует только единственный способ оказаться в равновесии, существует много различных способов быть в неравновесии.

Нащупывание (подбор) цен

Рассмотрим экономику обмена, заданную функциями избыточного спроса $z(\cdot)$. Предположим, что первоначальный вектор цен p неравновесный, поэтому $z(p) \neq 0$. Например, в экономике произошел шок, и цены p были предшоковым равновесным вектором цен. Тогда, согласно закону спроса и предложения, цены начнут меняться: цены на товары, на которые существует теперь избыточный спрос, поползут вверх, а цены товаров, на которые теперь избыточное предложение, упадут. Это-то предположил Вальрас. Дифференциальная версия, которую предложил Самуэльсон (Samuelson, 1947), принимает следующий вид:

$$\frac{dp_l}{dt} = c_l z_l(p) \text{ для всех } l, \tag{17.H.1}$$

где dp_l/dt — изменение цены на товар l, а $c_l > 0$ — константа, показывающая скорость этого изменения.

[58] См. обзорную работу Хана (Hahn, 1982).

Несмотря на то что уравнение 17.H.1 кажется простым, его интуитивная интерпретация гораздо сложнее. Какой экономический агент отвечает за цены? Заодно, почему «закон единой цены» должен выполняться и вне равновесия (т. е. почему идентичные товары будут продолжать иметь идентичные цены вне равновесия)? Какое время обозначено здесь как t? Это же не может быть настоящее, реальное время, потому что, как предполагается в этой модели, неравновесные цены p несовместимы с допустимостью в экономике (т. е. не все потребительские планы могут одновременно реализоваться).

Возможно, наиболее подходящим ответом на все эти и другие вопросы мог бы быть следующий: рассматриваемая модель на самом деле не ставит целью анализ реальной эволюции экономики, действующей по законам спроса и предложения. Скорее, это описание достаточно кратковременного подбора равновесных цен методом проб и ошибок, который осуществляет некий абстрактный агент (или, если точнее, его попытки вернуться к равновесию после экономического шока)[59].

Хорошо бы теперь, чтобы, несмотря на достаточно идеализированную форму уравнения 17.H.1, мы смогли с его помощью получить дополнительные сведения о свойствах равновесия или научиться отличать равновесие с «хорошим поведением» от равновесия с «плохим». Наиболее иллюстративным является анализ случая с двумя товарами. На рис. 17.H.1 представлен как раз такой случай, где избыточный спрос на первый товар является функцией от относительных цен p_1/p_2. Фактическая траектория изменения относительных цен зависит в этом примере как от начального уровня абсолютных цен, так и от дифференциального изменения цен, описанного в 17.H.1[60]. Заметим, однако, что каким бы ни был уровень первоначальных цен, $p_1(t)/p_2(t)$ растет с t только тогда, когда $z_1\left(\dfrac{p_1(t)}{p_2(t)},\ 1\right) > 0$.

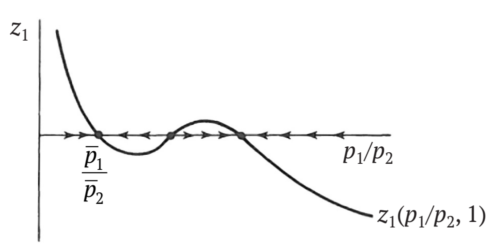


Рис. 17.H.1. Траектории нащупывания для экономики с двумя товарами

[59] Это, по сути, и было идеей Вальраса, которого вдохновило наблюдение за Парижской фондовой биржей. Абсолютно независимо от него эту идею высказали также Бароне (Barone, 1908) и Ланге (Lange, 1938). Последний пошел еще дальше, предложив процедуру нащупывания для нахождения равновесия в плановой экономике.

[60] Несмотря на то что изменение p_l в t, предписанное 17.H.1, зависит только от относительных цен, $l = 1, 2$, изменение относительных цен в t зависит как от текущего отношения цен, так и от их абсолютных значений.

На рис. 17.H.1 можно видеть иллюстрацию двух следующих свойств уравнения регулирования 17.H.1:

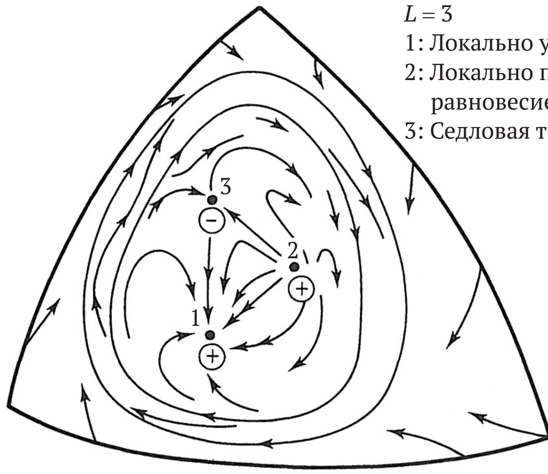
a) Назовем равновесие $\left(\bar{p}_1,\ \bar{p}_2\right)$ *локально устойчивым*, если в случае, когда начальный вектор цен достаточно близок к нему, динамическая траектория демонстрирует сходимость относительных цен к равновесным относительным ценам $\bar{p}_1/\bar{p}_2$. Равновесие будет *локально вполне неустойчивым*, если любое изменение цен уводит относительные цены от $\bar{p}_1/\bar{p}_2$. Тогда (регулярное) равновесие $\bar{p}_1/\bar{p}_2$ будет *локально устойчивым или локально неустойчивым в зависимости от знака наклона функции избыточного спроса в равновесии*, т. е. в зависимости от индекса равновесия (см. определение 17.D.2), в случае если избыточный спрос убывает в $\bar{p}_1/\bar{p}_2$ (см. рис. 17.H.1), небольшой рост p_1/p_2 относительно $\bar{p}_1/\bar{p}_2$ приведет к появлению избыточного предложения на первый товар (и избыточного спроса на второй) и поэтому относительные цены вернутся на равновесный уровень $\bar{p}_1/\bar{p}_2$. Эффект получится обратным, если избыточный спрос в $\bar{p}_1/\bar{p}_2$ возрастает.

b) Можно говорить о *системной устойчивости*, если *для каждого начального положения* $(p_1(0),\ p_2(0))$ *соответствующая траектория относительных цен* $p_1(t)/p_2(t)$ *сводится к некоторому достаточно близкому равновесию при* $t \to \infty$.

Для регулярной двухтоварной экономики свойства (a) и (b) дают полную картину всей динамики процесса. Это вполне удовлетворительная картина, говорящая о жизнеспособности (плодотворности) анализа устойчивости процесса нащупывания: теория, порождающая свойства (a) и (b), должна говорить что-то, имеющее экономическое содержание.

К сожалению, ни локальное утверждение (a), ни глобальное утверждение (b) двухтоварного случая нельзя обобщить на случай, когда $L > 2$. Это не должно удивлять, поскольку динамика изменения цен в 17.H.1 полностью определяется функцией избыточного спроса, а как нам известно из утверждений 17.E.2 и 17.E.3, эта функция ничем кроме граничных условий не ограничивается. Рассмотрим, например, экономику, в которой $L = 3$, и пусть $c_1 = c_2 = c_3 = 1$. Нормированное ценовое множество $S = \left\{p \gg 0 : (p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2 = 1\right\}$ можно увидеть на рис. 17.H.2. Нормировано оно таким образом, что для любой функции избыточного спроса $z(p)$ поток изменений $p(t)$, порожденный дифференциальным уравнением $\dfrac{dp_l}{dt} = z_l\left(p\right)$, $l = 1, 2, 3$, остается во множестве S (т. е. если $p(0) \in S$, то и $p(t) \in S$ для всех t). Все это — следствие выполнения закона Вальраса:

$$\frac{d\left(p_1(t)^2 + p_2(t)^2 + p_3(t)^2\right)}{dt} =$$
$$= 2p_1(t)z_1(p(t)) + 2p_2(t)z_2(p(t)) + 2p_3(t)z_3(p(t)) = 0.$$



$L = 3$
1: Локально устойчивое равновесие, индекс +1
2: Локально полностью неустойчивое равновесие, индекс +1
3: Седловая точка, индекс –1

Рис. 17.Н.2. Пример траекторий для метода нащупывания в экономике с тремя товарами

Таким образом, изменение цен может быть показано траекториями в S, и вектор направления изменения в любой точке $p(t)$ будет вектором направления изменения избыточного спроса $z(p(t))$. Единственные ограничения, которые накладывает теория на эти траектории, получаются из «граничного» поведения избыточного спроса. На рис. 17.Н.2 показан возможный пример траекторий. На этом рисунке с изменением цены товара до нуля спрос на него становится положительным (поэтому, в частности, векторы с началом у границ множества смотрят внутрь множества). Тем не менее свойства (a) и (b) здесь оба нарушаются: существует (регулярное) равновесие, которое не является ни локально устойчивым, ни локально полностью неустойчивым (существует «седловая точка» — на рисунке это точка под номером 3), а некоторые цены не сводятся ни к какому равновесию[61].

Однако есть и положительные новости: мы утверждаем, что для тех случаев, когда мы преуспели в доказательстве единственности вальрасианского равновесия, мы способны установить сходимость любой траектории изменения цен к этому равновесию (это свойство назовем *глобальной устойчивостью*)[62]. Следующее утверждение будет одновременно касаться случаев выполнения свойства валовой заменимости, слабой аксиомы и случая отсутствия торговли[63], изученных в разделе 17.F, общим местом которых является то, что все они удовлетворяют слабой аксиоме, пока анализ касается только сравнения равновесных и неравновесных цен

[61] Мы бы хотели предостеречь читателя от расслабления, если цены сошлись к предельному циклу. Вспомним, что такой процесс нащупывания не происходит в реальном времени. Динамический анализ позволяет надеяться получить нечто значимое только тогда, когда цены все же сходятся.

[62] Внимание: единственность сама по себе не гарантирует устойчивости, кроме случая двухтоварной экономики. Попробуйте сами построить контрпример, исходя из рис. 17.Н.2.

[63] Что касается свойства валовой заменимости, то связанное с ним доказательство см. в упражнении 17.Н.1.

(см. также обсуждение этой темы в разделе 17.F). Таким образом, для единственного (нормированного) равновесного вектора цен p^* будет выполнено: если $z(p^*) = 0$, то $p^* \cdot z(p) > 0$ для любого p, непропорционального p^*.

Утверждение 17.H.1. Пусть $z(p^*) = 0$ и $p^* \cdot z(p) > 0$ для любого p, непропорционального p^*. Тогда траектории изменения относительных цен, получаемые при решении системы дифференциальных уравнений 17.H.1, сходятся к относительным ценам p^*.

Доказательство. Рассмотрим Евклидово расстояние, заданное как функция $f(p) = \sum_l (1/c_l)\left(p_l - p_l^*\right)^2$. Для любой траектории $p(t)$ будем обращать внимание на расстояние $f(p(t))$ в точках t вдоль на этой траектории. Тогда будет справедливо:

$$\frac{df(p(t))}{dt} = 2\sum_l \frac{1}{c_l}\left(p_l(t) - p_l^*\right)\frac{dp_l(t)}{dt} =$$

$$= \sum_l \frac{1}{c_l}\left(p_l(t) - p_l^*\right)c_l z_l(p(t)) = -p^* \cdot z(p(t)) \le 0,$$

где последнее неравенство будет строгим тогда и только тогда, когда $p(t)$ не пропорционально p^*. Получаем, что вектор цен $p(t)$ монотонно приближается к вектору цен p^* (поскольку то же самое можно сказать и про любой вектор αp^*, то $p(t)$ монотонно приближается и к αp^*). Это не означает, что $p(t)$ становится близким к p^*. Обычно этого не происходит: скорость приближения $p(t)$ к p^* стремится к нулю раньше, нежели $p(t)$ окажется около p^*. При этом скорость приближения может идти к нулю, только если $p(t)$ становится пропорциональным p^* при $t \to \infty$, и в этом случае относительные цены действительно сойдутся[64]. ■

Следующим шагом будет локальный анализ динамики нащупывания. Зафиксируем $p_L = 1$ и, соответственно, ограничим (17.H.1) первыми $L - 1$ координатами. Обозначим соответственно $\hat{z}(p) = \left(\hat{z}_1(p), \ \ldots, \ \hat{z}_{L-1}(p)\right)$ и предположим, что $\hat{z}\left(p^*\right) = 0$. Стандартный результат теории дифференциальных уравнений говорит, что если матрица $D\hat{z}\left(p^*\right)$ размера $(L-1) \times (L-1)$ является невырожденной (т. е. если равновесие регулярно), то траектории в окрестности p^* регулируется линеаризацией в точке p^*, т. е. $CD\hat{z}\left(p^*\right)$, где C — диагональная матрица размера $(L-1) \times (L-1)$, каждый из l диагональных элементов которой представляет собой константу c_l. Тогда можно говорить, что равновесие p^* *локально устойчиво*, если существует такое $\varepsilon > 0$, что $p(t) \to p^*$, когда $\| p(0) - p^* \| < \varepsilon$ (т. е. при малых возмущениях равновесия система стремится вернуться в первоначальное равновесие). Тогда оказывается, что p^* локально устойчиво в том и только том случае, когда все собственные значения $CD\hat{z}\left(p^*\right)$ имеют

[64] Непрерывная вещественнозначная функция, убывающая вдоль динамической траектории и принимающая нулевые значения только в стационарных точках, называется *функцией Ляпунова*.

отрицательную действительную часть. К тому же вектор p^* локально устойчив вне зависимости от скорости регулирования равновесия[65] (т. е. для всех положительных диагональных матриц C), если $D\hat{z}\left(p^*\right)$ отрицательно определена (см. раздел M.D математического приложения)[66].

Один из способов объяснения, почему предыдущие результаты, связанные с локальной устойчивостью процесса нащупывания, требовали строгих ограничений на $D\hat{z}\left(p^*\right)$, заключается в следующем: на самом деле мы требовали, чтобы цена на товар реагировала *только* на изменения избыточного спроса на один этот товар, в то время как «идеальный» рыночный агент постоянно отслеживал бы и изменения избыточных спросов на *другие* товары. Например, если в некоторый момент времени избыточный спрос равен $\hat{z}\left(p(t)\right)$, агент изменит цены на некоторую величину, равную $\frac{dp}{dt} = \left(\frac{dp_1}{dt}, \ \ldots, \ \frac{dp_{L-1}}{dt}\right)$, чтобы вызвать *пропорциональное* снижение всех величин спросов и предложений. То есть $D\hat{z}\left(p\left(t\right)\right)\left(\frac{dp}{dt}\right) = -\lambda\hat{z}\left(p(t)\right)$ для некоторого $\lambda > 0$ или, если релевантная обратная матрица существует,

$$\frac{dp}{dt} = -\lambda\left[D\hat{z}(p)\right]^{-1}\hat{z}(p). \tag{17.H.2}$$

Это приближение к равновесию часто называют *методом Ньютона,* и это один из стандартных методов численного анализа. Если матрица $D\hat{z}\left(p^*\right)$ невырожденная и $\left[D\hat{z}\left(p^*\right)\right]^{-1}$ существует, то (17.H.2) всегда позволяет восстановить равновесие после небольшого отклонения от него. Этим данный метод отличается от метода нащупывания: при применении последнего процесс приближения к равновесию предполагает очень мало информационных ограничений (чтобы определить изменения в p, необходимо знать лишь $\hat{z}(p)$ и, в частности, первые производные $\hat{z}(\cdot)$), однако сходимость гарантирована только в очень ограниченном числе случаев. Наоборот, при применении метода Ньютона локальная сходимость всегда достигается, но, для того чтобы определить направления изменения цен для каждого p, необходимо иметь информацию обо всех величинах избыточных спросов $\hat{z}(p)$ и всех эффектах цен $D\hat{z}(p)$. Подробнее об этом можно прочесть в работах Смейла (Smale, 1976), Саари и Саймона (Saari, Simon, 1978).

Нащупывание (подбор) количеств

В только что рассмотренной модели мы имели дело с неравновесными ценами, в то время как количества (спрос и предложение) оставались на равновесном уровне (т. е. таком, который максимизировал полезности и прибыли агентов). Рассмотрим теперь в общих чертах модель, в которой неравновесными будут именно количества[67]. Лучше всего это проделать в производственном контексте.

[65] А как определить скорость достижения равновесия?

[66] Заметим, что это полностью удовлетворяет утверждению 17.H.1, поскольку свойство выявленности предпочтений предполагает отрицательную (полу)определенность матрицы $D\hat{z}\left(p\right)$ в равновесии.

[67] Можно было бы рассмотреть и более общий случай, где неравновесными были бы как объемы продукции, так и цены, и такая модель действительно есть в работе Мас-Колелла (Mas-Colell, 1986).

Начнем с конкретного примера: предположим, что существует единственное производственное множество Y[68]. Будем также предполагать, что в любой момент времени существует единственный фиксированный производственный вектор $y \in Y$. Цены будут всегда находиться в равновесии в том смысле, что система общего равновесия в экономике, возможная только при y (обусловленная y), будет генерировать некоторую равновесную систему цен $p(y)$ (т. е. мы действуем в краткосрочном периоде, как если бы производственное множество было $\{y\} - \mathbb{R}^L_+$). Это и будет описанием краткосрочного равновесия в системе.

Что в такой экономике будет происходить с точки зрения динамики? Было бы справедливо считать, что, что бы это ни было, изменение производства со временем t, т. е. $dy(t)/dt \in \mathbb{R}^L$, движет производство так, *чтобы при заданном векторе цен* $p(y(t))$ росла прибыль.

Определение 17.H.1. Будем называть дифференциальную траекторию $y(t) \in Y$ *допустимой*, если $p(y(t) \cdot (dy(t)/dt)) \geq 0$ для всех t и если это неравенство превращается в равенство, только когда $y(t)$ дает максимальную прибыль при ценах $p(y(t))$ (в этом случае можно говорить о достижении долгосрочного равновесия).

Отличие рассматриваемой модели от модели достижения равновесия методом нащупывания, которое можно считать ее преимуществом, состоит в том, что при любом t теперь можно говорить об осуществимости равновесия, и в таком случае динамические процессы можно интерпретировать как происходящие в реальном времени[69, 70].

Всегда ли допустимая траектория позволяет достичь долгосрочного равновесия? В рамках данной главы мы не будем приводить доказательств для общего случая, ограничившись особым случаем. Рассмотрим только достаточно частный, но важный пример (который также рассматривался в краткосрочном и долгосрочном периодах в разделе 10.F) и в его контексте сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 17.H.2. Если существует единственный потребитель со строго выпуклыми предпочтениями, то любая допустимая траектория сходится к (единственному) равновесию.

Доказательство. Рассмотрим функцию $u(y(t) + \omega)$, где $u(\cdot)$ и ω представляют собой соответственно функцию полезности и перво-

[68] На самом деле ничего не изменится, если мы рассмотрим несколько таких множеств или скажем, что все они агрегированы во множество Y.

[69] Тем не менее важно понимать, что даже и в этом случае такая модель не может считаться действительно динамической, поскольку задача максимизации, стоящая перед потребителями, следует наивному краткосрочному правилу регулирования; в ней считаются наивными, близорукими следователями траектории возвращения к равновесию (лучше было бы называть их адаптирующимися). Подробнее о такого рода процессах в реальном времени см. у Фишера (Fisher, 1983).

[70] Количественная динамика в определении 17.H.1 напоминает о работах Маршалла (Marshall, 1920) и поэтому часто называется *маршаллианской динамикой,* особенно в том, что касается частичного равновесия. Наоборот, рассмотренная ранее ценовая динамическая модель называется *вальрасианской* крайне редко.

начальный запас потребителя. Единственным равновесным производственным вектором $\bar{y}$ будет в таком случае вектор, максимизирующий $u(y + \omega)$ на множестве Y (вспомним пример с одним потребителем и одной фирмой из раздела 15.C).

Если предположить, что функция $u(\cdot)$ дифференцируема, то дальнейшее доказательство будет достаточно простым. Полезность будет расти вдоль допустимой траектории. Действительно,

$$\frac{du(y(t) + \omega)}{dt} = \nabla u(y(t) + \omega) \cdot \frac{dy(t)}{dt} = \mu(t) p(y(t)) \cdot \frac{dy(t)}{dt} > 0,$$

при этом знак равенства будет только в равновесии. Здесь мы используем тот факт, что в краткосрочном (внутреннем) равновесии вектор цен $p(y(t))$, взвешенный по предельным полезностям богатства $\mu(t)$, должен быть равен вектору предельных полезностей потребителя. Поскольку полезность растет, экономика обязательно должна достичь уровня производства $\bar{y}$, в котором полезность будет максимизирована на допустимом производственном множестве (т. е. в равновесии). Этот пример представлен на рис. 17.H.3. Заметим, что мы здесь опускаем незначительные технические детали: чтобы действовать вполне строго, мы должны были бы говорить, что рассматриваемый динамический процесс не может быть настолько медленным, что равновесие окажется недостижимым, однако для этого нужно было бы дать еще более точное определение допустимости). ■

Заметим, что единственный потребитель из утверждения 17.H.2 может быть интерпретирован как репрезентативный потребитель, покупающий положительное количество товара.

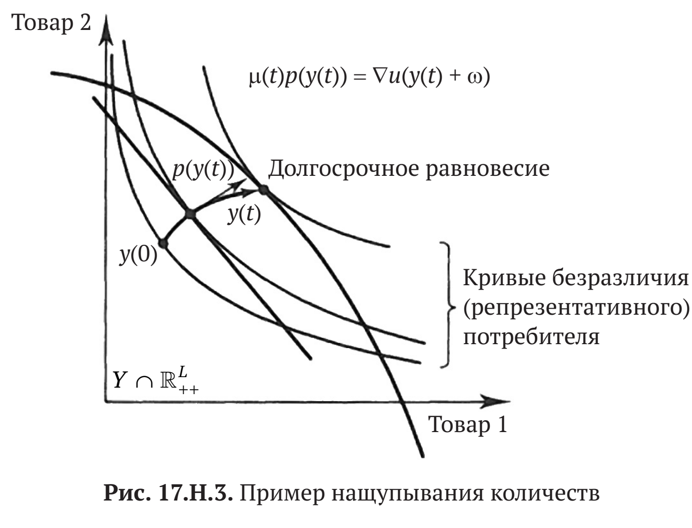


Рис. 17.H.3. Пример нащупывания количеств

17.I. Большие и невыпуклые экономики

Как уже неоднократно отмечалось, особенно в главах 10 и 12, основным объяснением того факта, что агенты в экономике являются ценополучателями, является предположение, что значение каждого отдельного агента в экономике столь мало, что он один не в силах повлиять на всю экономику. Это, однако, не может буквально быть рассмотрено в рамках модели, представленной в этой главе, поскольку мы будем рассматривать не более чем некоторое конечное число агентов I (частично поэтому модель будет верна и для предыдущих примеров, в которых обычно $I = 2$). Тем не менее рассматриваемую модель будет вполне возможно интерпретировать.

Рассмотрим экономику чистого обмена, потребители в которой делятся на два типа по таким характеристикам, как предпочтения и первоначальные запасы. Пусть типов потребителей будет I и количество потребителей каждого типа будет равно r (еще более общий случай с неравным количеством агентов каждого типа см. в упражнении 17.I.1). Итак, множество потребителей состоит из *r-реплик* референтного набора потребителей. Кроме того, распределение, которое мы обозначим как $(x_1, \dots, x_I)$, можно интерпретировать теперь следующим образом: *каждый* потребитель типа i потребляет товары в количестве x_i (так что все потребители типа i вместе потребят rx_i). Замечаем, что на анализ и результаты, полученные до этого момента, наша реинтерпретация не влияет. Просто никоим образом не зависит от параметра r. Таким образом, теперь можно говорить и о случаях с любым количеством потребителей, в том числе бесконечным. В частности, любое рассмотренное ранее равновесие может быть интерпретировано как равновесие в r-реплики одной и той же экономики (для любого $r \geq 1$).

Однако необходимо сделать важное уточнение. Для того чтобы иметь возможность интерпретировать модель и ее результаты независимо от числа потребителей, *абсолютно* необходима предпосылка о выпуклости предпочтений. Без выполнения этой предпосылки никак нельзя оправдать отказ обращать внимание на случаи, когда потребители одного и того же типа выбирают разные наборы — как, например, это показано на рис. 17.I.1. В изображенном ящике Эджворта, в случае когда потребителей каждого типа по одному, равновесия не существует вовсе; если же потребителей по двое, равновесие существует. Чтобы это показать, наделим потребителей с выпуклыми предпочтениями первоначальным запасом ω_2, и пусть теперь один из потребителей с невыпуклыми предпочтениями потребит x_1, а второй — x_1'. Таким образом, поведение экономики будет зависеть от количества потребителей в ней, и с ростом числа потребителей могут возникать новые равновесия[71].

Из этого примера вытекает одно очень интересное наблюдение: идея реплицирования может, на самом деле, *помочь* при анализе экономик

[71] То есть если мы обозначим множество равновесных цен в r-реплики экономики как $E(r)$, то будет верно, что $E(1) \subset E(r)$, а обратное — неверно. Заметим, что, кроме того, для произвольных $r'' > r' > 1$ необязательно будет существовать какое-либо очевидное соотношение $E(r'')$ и $E(r')$ (помимо того, что если $r'' = mr'$ для некоторого $m > 1$, то $E(r') \subset E(r'')$).

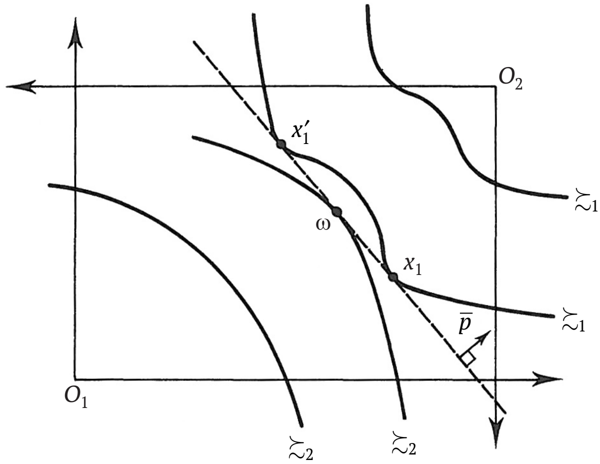


Рис. 17.I.1. Равновесие в экономике, меняющей размер, потребители в которой имеют невыпуклые предпочтения

с невыпуклыми предпочтениями потребителей в том смысле, что рост экономики (в терминах числа реплик) может фактически обеспечить существование равновесия. Действительно, до конца этого раздела мы будем доказывать, что если экономика достаточно велика, то существование равновесия (или почти равновесия) обеспечивается, даже если предпочтения потребителей и не являются выпуклыми[72].

Итак, предположим, что в экономике обмена существует I типов потребителей. Рассмотрим потребителя i-го типа. Если его предпочтения невыпуклы (например, товары неделимы), то избыточный спрос этого потребителя можно выразить как отображение $z_i(p)$. Тогда для цен $p >> 0$ все $z_i(p)$ будут образовывать компактное множество, которое может и не быть выпуклым (например, как это было с первым потребителем на рис. 17.I.1 при ценах $p = \bar{p}$). Определяя, чему в среднем (на одну реплику) равно отображение избыточного спроса для i-го потребителя, когда есть r-реплик, получим, что:

$$z_{ir}(p) = \frac{1}{r}\left(z_i(p) + \ldots + z_i(p)\right) = \qquad \text{(сумма имеет } r \text{ слагаемых)}$$

$$= \frac{1}{r}\left\{z_{i1} + \ldots + z_{ir} : z_{i1} \in z_i(p), \; \ldots, \; z_{ir} \in z_i(p)\right\}.$$

Теперь если мы снова посмотрим на рис. 17.I.1, то увидим, что при $r \to \infty$ множество $z_{1r}\left(\bar{p}\right) + \left\{\omega_1\right\}$ заполняет весь сегмент между точками выбора x_1 и x_1'. В частности, для любого $\alpha \in [0, 1]$ и целого числа r можно найти такое целое число $a_r \in [0, r]$, что $\left|a_r/r - \alpha\right| \le 1/r$ (заметим, что все r номеров, $\left\{1/r, \; \ldots, \; r/r\right\}$, равномерно распределены на интервале [0, 1]). Расположив α_r потребителей в точке x_1 и $r - a_r$ потребителей — в точке x_1',

[72] Классической работой на эту тему является работа Старра (Starr, 1969).

получим, что каждая реплика потребителей потребляет следующее количество товара:

$$\frac{a_r}{r}x_1 + \left(1 - \frac{a_r}{r}\right)x_1' \in z_{ir}(p),$$

что при достаточно больших r стремится к $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_1'$, а это нам и было нужно. Оказывается, что это свойство «овыпукления» достаточно общее. Для любого $p >> 0$ и любого количества товаров, как только $r \to \infty$, избыточный спрос (в расчете на реплики) типа i, $z_{ir}(p)$ сходится к множеству выпуклых оболочек $z_i(p)$. В пределе, среднее в расчете на реплику отображение избыточного спроса типа i становится $z_{i\infty}(p)$ = выпуклой оболочке $z_i(p)$. В этом пределе отображение избыточного спроса также является выпуклозначным, а равновесие может быть найдено так же, как в разделе 17.C[73]. В таком случае с ростом r экономика должна получить некоторое распределение и вектор цен такие, что они будут «близки» к равновесным[74].

В предыдущих рассуждениях овыпукление агрегированного избыточного спроса с ее следствием для существования зависело от нашей способности четко определить, какой из равноценных для него наборов выберет каждый потребитель. Только в этом случае мы могли быть уверены, что агрегированное потребление будет в точности правильным. Что бы ни заставляло потребителей выбирать, с нашей точки зрения, «верные» наборы, в правильных пропорциях было бы гораздо легче, если бы нам не нужно было задумываться о механизме выбора — т. е. если бы для любых цен потребитель имел бы только один оптимальный выбор. Заметим, что это практически всегда выполнено, если потребителей достаточно много, потому что *если индивидуальные предпочтения различаются по потребителям* (например, не существует двух потребителей с одинаковыми предпочтениями)[75], то *даже если индивидуальные избыточные спросы — действительно отображение*, *средний избыточный спрос вполне может быть (непрерывной) функцией*. Это верно, потому что при любом p количество потребителей, для которых нарушается условие выпуклости, ничтожно мало. Комментарии на эту тему можно прочитать в приложении A к разделу 4, а иллюстрация (17.I.2) приведена ниже.

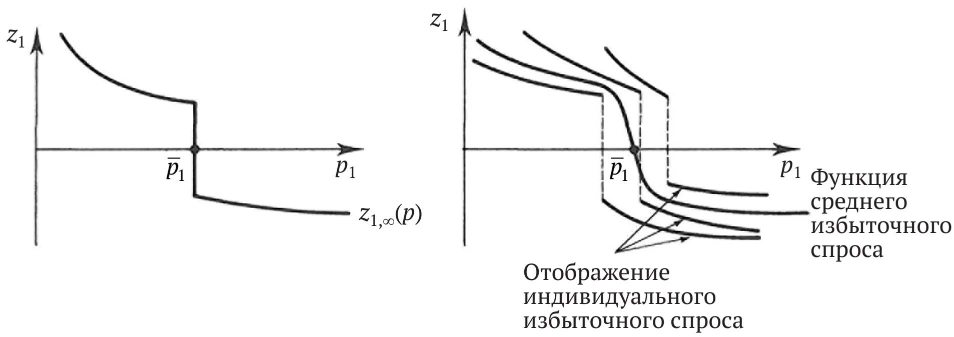
Рассмотрим ящик Эджворта на рис. 17.I.1. Пусть теперь у нас есть континуум потребителей каждого типа. Поскольку все потребители, скажем первого типа, идентичны, при некоторой цене $\bar{p}$ они продемонстрируют «переключение» потребления («невыпуклость» в точности при $\bar{p}$). Отображение избыточного спроса представлено на рис. 17.I.2(a) и обозначено как $z_{1,\infty}(\cdot)$[76]. Но если вкусы потребителей

[73] См. комментарий после доказательства утверждения 17.C.2, а также упражнение 17.C.1.

[74] Грубо говоря, под «почти» равновесной мы понимаем распределения и векторы цен такие, что они «близки» к тому, чтобы удовлетворить условиям равновесия. Можно дать точное определение этого явления, но в данном случае это будет уже излишним.

[75] Заметим, что в пределе с бесконечным количеством агентов это требование несовместимо с утверждением о существовании ограниченного их числа, поэтому для рассмотрения такого случая формальные рамки модели должны быть расширены.

[76] Если точнее, то $z_{1,\infty}(\cdot)$ есть отображение, чей график является предельным при стремлении r к бесконечности, поскольку отображение $z_r(\cdot)$ определяется как $z_r(p) = (1/r)(z(p) + \ldots + z(p))$, где сумма имеет r членов, а $z(\cdot)$ есть отображение, описывающее поведение избыточного спроса в экономике с двумя потребителями, ящик Эджворта для которой изображен на рис. 17.I.1.



(a) (b)

Рис. 17.I.2. Агрегированный спрос, полученный из различающихся индивидуальных спросов — непрерывная функция. (a) Агрегированный избыточный спрос для потребителей (рис. 17.I.1), где количество потребителей каждого типа представляет собой континуум, $r = \infty$.
(b) Индивидуальные избыточные спросы различны

первого типа несколько варьируются, даже в небольшой степени, то нельзя будет ожидать, что при некоторой цене p заметно большая группа потребителей вдруг переключит свое потребление. Поэтому, как показано на рис. 17.I.2(b), средний спрос будет (хорошо) определен при любой цене p и будет меняться постепенно при изменении p.

Кратко опишем, что происходит в экономиках с производством. Предположим, что сторона потребления, как и до этого, порождена r-репликой базового набора предпочтений (возможно, даже и невыпуклых). Пусть также в экономике существуют J производственных множеств Y_j. Каждое такое множество Y_j замкнуто, содержит начало координат и удовлетворяет условию свободы расходования (т. е. стандартным условиям). Пусть также существует верхняя граница (например, граница производственного множества) для каждого такого Y_j, т. е. существует число s, такое что $y_{lj} \leq s$ для всех l и что $y_j \in Y_j$. Производственное множество может и не быть выпуклым.

Тогда можно говорить о том, что такая экономика будет обладать «почти» равновесием, если r достаточно велико по сравнению с s (т. е. если размер потребительской стороны велик по сравнению с максимальным размером *одной* фирмы). В среднем производственная сторона в такой экономике тоже обладает свойством выпуклости, если можно так сказать (см. ремарки на эту тему в разделе 5.E)[77]. Заметим, что ограниченность производственного множества здесь очень важна. Предположим, что, например, каждая фирма обладает технологией, изображенной на рис. 15.C.3. Тогда вне зависимости от количества потребителей возможная прибыль каждой фирмы бесконечны (пока $p_2 > 0$). Таким образом, никак нельзя утверждать, что в такой

[77] Заметим, что среднее здесь считается по r, а не по J, т. е. по потребителям. Если, по мере того как r увеличивается, J будет варьироваться так, что оказывается в некоторой, приблизительно постоянной пропорции с r, тогда, вообще говоря, все равно, что брать за основу для подсчета среднего (кстати, рассуждения из раздела 5.E можно тоже переформулировать в этом ключе). Но для действенности эффекта «овыпукления» нет необходимости варьировать число фирм с r, число фирм может быть постоянным и, следовательно, оно будет оставаться достаточно малым (и тогда «усредненная» экономика фактически будет экономикой чистого обмена). Если же мы сразу примем J большим (оно может быть даже бесконечным), это будет случай модели со свободным входом на рынок, где равновесие (или распределение, близкое к равновесному) эндогенно определяет количество активных фирм. Обычно в моделях со свободным входом количество фирм растет с количеством потребителей (это уже обсуждалось в разделе 10.F в контексте частичного равновесия).

экономике может быть достигнуто даже «почти» равновесие. Следовательно, в экономике с производством свойство граничности выполняет ту же роль, что и возможность усреднения избыточного спроса для экономики потребления (см. упражнение 17.I.2).

Приложение А. Характеристика равновесия через уравнения благосостояния

Мы видели, начиная с раздела 17.B, что, если экономика удовлетворяла некоторым достаточно хорошим свойствам (например, предпочтения потребителей были строго выпуклы), теоретическую модель можно было представить в виде удобной системы уравнений. Далее мы кратко представим другой подход, основанный на свойствах равновесия, относящихся к благосостоянию.

Снова вернемся к экономике чистого обмена, в которой потребители, проиндексированные по $i = 1, \ldots, I$, обладают (каждый) некоторым потребительским набором, выбранным в множестве $\mathbb{R}^L_+$, а их предпочтения удовлетворяют свойствам непрерывности, строгой монотонности и строгой выпуклости. Пусть также каждый потребитель обладает первоначальным запасом $\omega_i \geq 0$, причем $\sum_i \omega_i \gg 0$.

В главе 16 было показано, что вальрасианское равновесие в такой экономике будет являться также Парето-оптимальным (см. утверждение 16.C.1). Таким образом, для нахождения равновесия можно ограничиться исследованием множества Парето-оптимальных распределений. Для этого предположим, что предпочтения потребителя описываются непрерывной функцией полезности $u_i(\cdot)$, причем $u_i(0) = 0$. Тогда для каждого вектора $s = (s_1, \ldots, s_I)$ из симплекса $\Delta = \left\{s' \in \mathbb{R}^L_+ : \sum_i s'_i = 1\right\}$ можно найти единственное Парето-оптимальное распределение $x(s) \in \mathbb{R}^{LI}_+$, такое что $\left(u_1(x_1(s)), \ldots, u_I(x_I(s))\right)$ пропорционально $s \in \Delta$ (см. об этом в упражнении 17.AA.1). В этих рассуждениях $s \in \Delta$ обозначает значения параметров распределения полезности, а полученное распределение «распределяет благосостояние» в соответствии с «долями» $s = (s_1, \ldots, s_I)$. Все это проиллюстрировано на рис. 17.AA.1.

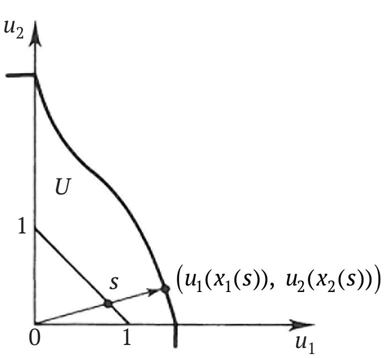


Рис. 17.AA.1. Первый шаг построения основанной на благосостоянии системы уравнений

Произвольный $s \in \Delta$ обычно не соответствует равновесию. Как же выделить те $s \in \Delta$, которые соответствуют? Обратимся за ответом ко второй теореме благосостояния. Из утверждения 16.D.1 (и небольшой дискуссии, следующей за утверждением 16.D.3) известно, что при принятых условиях на $x(s)$ будет существовать вектор цен $p(s) \in \mathbb{R}^L$, который будет осуществлять децентрализацию того распределения в том смысле, что для каждого i, если верно $x'_i \succ_i x_i(s)$, будет верно и $p(s) \cdot x'_i > p(s) \cdot x_i(s)$. Отсюда получаем, что набор распределений и цен $(x(s^*), p(s^*))$ будет являться вальрасианским равновесием тогда и только тогда, когда $s^* \in \Delta$ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$g_i(s^*) = p(s^*) \cdot \left[\omega_i - x_i(s^*)\right] = 0 \qquad \text{для всех } i = 1, \ldots, I. \quad (17.AA.1)$$

Это решение проиллюстрировано на рис. 17.AA.2.

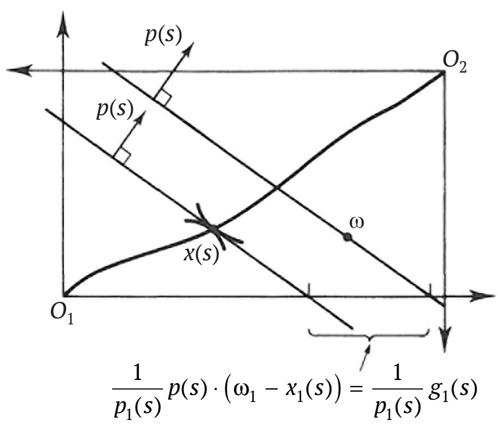


Рис. 17.AA.2. Второй шаг построения основанной на благосостоянии системы уравнений

Такая система уравнений была впервые предложена Негиши (Negishi, 1960), а затем использована Эрроу и Ханом (Arrow, Hahn, 1971) при доказательстве существования равновесия. Она крайне полезна для рассмотрения случаев, когда количество потребителей (например, торгующих друг с другом стран) мало по сравнению с числом товаров. Наоборот, если наименований товаров гораздо больше, чем стран, удобнее использовать функции избыточного спроса. Дело в том, что подход Негиши опирается на тот факт, что равновесие должно быть Парето-оптимальным. Если же это не так (например, из-за искажений, связанных с налогами (см. упражнение 17.C.3)), такой подход использовать нельзя[78].

[78] Системы уравнений 17.B.2 и 17.AA.1 можно сопоставить следующим образом: в каждой из этих систем в любой точке из области определения этих уравнений для потребителей и фирм выполняются условия максимизации полезности для некоторых распределений цен и распределения богатства. В системе 17.B.2 эти распределения задаются первоначальными запасами, а равенство спроса и предложения достигается только в решении этой системы. В системе же 17.AA.1 равенство спроса и предложения достигается всегда, однако распределение богатства, соответствующее первоначальным запасам, достигается только в решении.

Приложение В. Общий подход к проблеме существования вальрасианского равновесия

Цель этого раздела — рассмотреть вопрос существования равновесия на том уровне обобщения, который был предложен в главе 16. Результаты, которые здесь будут получены, были представлены в работах Эрроу и Дебре (Arrow, Debreu, 1954), а также МакКензи (McKenzie, 1959).

Начнем, как это было проделано в разделе 16.D (по тем же причинам), с использования второй теоремы благосостояния для нахождения квазиравновесия по Вальрасу. Квазиравновесие слабее равновесия, потому что потребители максимизируют благосостояние только за счет того, что потребляется строго меньше, чем это позволяет сделать запас, которым обладает потребитель.

Определение 17.BB.1. Распределение $\left(x_1^*, \ \ldots, \ x_I^*, \ y_1^*, \ \ldots, \ y_J^*\right)$ и система цен (price system) $p \neq 0$ составляют квазиравновесие по Вальрасу, если:

(1) для любого j выполняется неравенство $p \cdot y_j \leq p \cdot y_j^*$ для всех $y_j \in Y_j$;

(2′) для любого i выполняется неравенство $p \cdot x_i^* \leq p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} p \cdot y_j^*$, причем если $x_i \succ_i x_i^*$, то $p \cdot x_i \geq p \cdot \omega_i + \sum\limits_j \theta_{ij} p \cdot y_j^*$;

(3) $\sum_i x_i^* = \sum_i \omega_i + \sum_j y_j^*$.

Определение 17.BB.1 идентично определению 17.B.1, за исключением условия (2). В случае определения 17.BB.1 оно ослаблено и, взятое вместе с условием ненасыщаемости, эквивалентно требованию о том, что x_i^* должен являться решением задачи минимизации расходов при ценах p на множестве $\left\{x_i \in X_i : x_i \succsim_i x_i^*\right\}$. По сравнению с задачей максимизации полезности задача минимизации расходов обладает сильно выраженным свойством непрерывности. Так, на рис. 17.BB.1 набор $x_i^n = x_i^n\left(p^n, \ p^n \cdot x_i^n\right)$

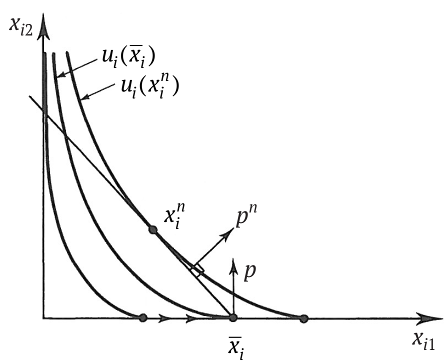


Рис. 17.BB.1. Отсутствие непрерывности при максимизации полезности

и расходы $p^n x_i^n = e\left(p^n,\ u_i(x_i^n)\right)$ таковы, что x_i^n представляет собой решение задачи максимизации полезности при ценах и благосостоянии $\left(p^n,\ p^n \cdot x_i^n\right)$ и решение задачи минимизации издержек для цен и уровня полезности $\left(p^n,\ u_i(x_i^n)\right)$. Тем не менее при $p^n \to p$ и $x_i^n \to \overline{x}_i$ распределение $\overline{x}_i$ более не максимизирует полезность $u_i(\cdot)$ при фиксированных $\left(p,\ p \cdot \overline{x}_i\right)$, но продолжает минимизировать издержки при $\left(p,\ u_i(\overline{x}_i)\right)$, т. е. $p \cdot \overline{x}_i = e\left(p,\ u_i(\overline{x}_i)\right)$. Поскольку свойство непрерывности важно для анализа существования равновесия, более удобным представляется анализ существования квазиравновесия, а не равновесия. Однако мы же хотели решить такую задачу для равновесия. Оказывается, несложно выделить условия, которые гарантируют, что найденное квазиравновесие является также и равновесием. Посмотрим, что же это за условия.

Определение 17.ВВ.2. Вальрасианское квазиравновесие (x^*, y^*, p) удовлетворяет условию *более дешевого потребления* (cheaper consumption condition), которые понес i-й потребитель, если существует такой $x_i \in X_i$, что $p \cdot x_i < p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} p \cdot y_j^*$.

Запишем теперь утверждение 17.ВВ.1.

Утверждение 17.ВВ.1. Предположим, что потребительские множества выпуклы, а предпочтения непрерывны. Тогда любой потребитель, находящийся в вальрасианском квазиравновесии (x^*, y^*, p), для которого выполняется условие более дешевого потребления, также оказывается и максимизирующим полезность на бюджетном множестве. Таким образом, если условие более дешевого потребления выполняется для всех i потребителей, то (x^*, y^*, p) будет являться также и вальрасианским равновесием.

Доказательство. Предположим, что удовлетворено условие более дешевого потребления, т. е. существует $x_i \in X_i$, такой что верно неравенство: $p \cdot x_i < p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} p \cdot y_j^*$. Если при этом x_i^* не дает максимума полезности, то будет существовать x_i', такой что $x_i' \succ_i x_i^*$, и при этом x_i' будет продолжать оставаться в рамках бюджетного ограничения i-го потребителя. Введем новое обозначение: $x_i^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_i' + \left(\frac{1}{n}\right) x_i$. Тогда $x_i^n \in X_i$, причем $p \cdot x_i^n < p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} p \cdot y_j^*$ для всех n и со стремлением n к бесконечности $x_i^n \to x_i'$. Из непрерывности предпочтений следует, что для достаточно больших n верно отношение предпочтений $x_i^n \succ_i x_i^*$. Но тогда i-й потребитель нарушает условие (2′) определения квазиравновесия. Получили противоречие. ■

Предположим, что для всех j, $0 \in Y_j$ и для всех i множество X_i выпукло и $\omega_i \geq \hat{x}_i$ для некоторых $\hat{x}_i \in X_i$. Предположим, кроме того, что выполняется слабое условие: неравенство $\sum_i \omega_i + \sum_j \hat{y}_j \gg \sum_i \hat{x}_i$ верно для некоторых $(\hat{y}_1, \ \ldots, \ \hat{y}_J) \in Y_1 \times \ldots \times Y_J$. Тогда квазиравновесие (x^*, y^*, p) будет удовлетворять условию более дешевого потребления; например, будет верно одно из утверждений (см. подробнее в упражнении 17.BB.1):

а) либо $p \geq 0$, $p \neq 0$ и $\omega_i \gg \hat{x}_i$,
б) либо $p >> 0$ и $\omega_i \neq \hat{x}_i$.

Чтобы в квазиравновесии выполнилось $p \geq 0$, одно из производственных множеств должно быть в свободном расходовании. Гарантировать же выполнение $p >> 0$ сложнее. Для этого необходимо, чтобы для любого i выполнялось $X_i + \mathbb{R}^L_+ \subset X_i$, а предпочтения были непрерывны и строго монотонны. Чтобы это доказать, заметим, что монотонность предпочтений и предположение о минимизации издержек дают $p \geq 0$ и $p \neq 0$ в любом квазиравновесии. Тогда $p \cdot (\sum_i \omega_i + \sum_j y_j^*) \geq p \cdot \left(\sum_i \omega_i + \sum_j \hat{y}_j \right) > p \cdot \sum_i \hat{x}_i$, и в такой экономике будет существовать хотя бы один потребитель с благосостоянием, бóльшим чем $p \cdot \hat{x}_i$. Этот потребитель будет максимизировать благосостояние (по утверждению 17.BB.1), что, согласно условию строгой монотонности предпочтений, может произойти, если все цены строго положительны (т. е. нет товаров в свободном расходовании).

Несмотря на то что условия (a) и (b) удобны, они тем не менее не могут быть отнесены к крайне слабым условиям. Существуют и более слабые условия, в частности, Мак-Кензи (McKenzie, 1959) в своей теории «неразложимой» (indecomposable) экономики доказал, что в квазиравновесии условие более дешевого потребления выполняется для каждого потребителя (и поэтому квазиравновесие является равновесием). Основная идея его работы состоит в том, что экономика «неразложима», если как бы мы ни делили множество агентов в ней на группы, каждый раз будет оказываться, что у одной группы будет что-то, что захочет на что-то свое выменять у нее другая (см. упражнение 17.BB.2).

Вернемся к вопросу существования вальрасианского равновесия и запишем общие условия существования.

Утверждение 17.BB.2. Предположим, что в экономике с $I > 0$ потребителями и $J > 0$ фирмами выполнено:

(1) для каждого i:
  (1.1) $X_i \subset \mathbb{R}^L$ замкнуто и выпукло;
  (1.2) $\succsim_i$ рациональны, непрерывны, локально ненасыщаемы и выпуклы на множестве X_i;
  (1.3) $\omega_i \geq \hat{x}_i$ для некоторых $\hat{x}_i \in X_i$;
(2) любое множество $Y_i \subset \mathbb{R}^L$ замкнуто, выпукло, содержит «нуль» и удовлетворяет условию свободы расходования;
(3) множество доступных распределений $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{LI} \times \mathbb{R}^{LJ}\colon x_i \in X_i$ для всех i, $y_j \in Y_j$ для всех j и $\sum_i x_i \leq \sum_i \omega_i + \sum_j y_j \}$ компактно.

Тогда вальрасианское квазиравновесие существует.

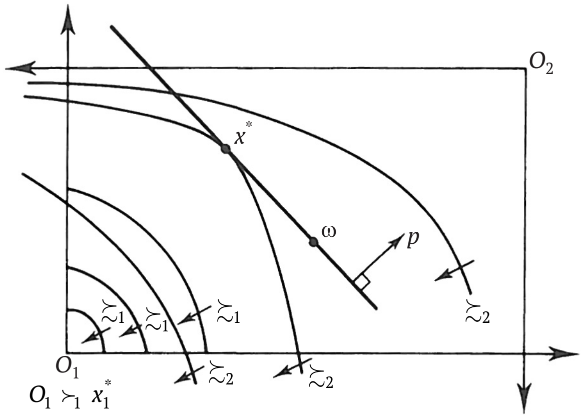


Рис. 17.ВВ.2. Равновесия не существует:
предпочтения первого потребителя насыщаемы

Кратко прокомментируем это утверждение. Как мы много уже раз показывали (в главах 10, 15 и 16), предположение о выпуклости предпочтений и технологий не может быть отброшено[79]. Пример с ящиком Эджворта приведен на рис. 17.ВВ.2, где показано, что также требуется выполнение условия локальной ненасыщаемости[80]. Напротив, без предположения о рациональности предпочтений вполне можно обойтись (см. комментарии в конце этого приложения). Условие свободы расходования $-\mathbb{R}^L_+ \subset Y_j$ необходимо только для удобства[81]. Если мы допустим существование отрицательных цен, то можно не принимать во внимание и условие свободы расходования (см. упражнение 17.ВВ.3). Условие (1.3) говорит о том, что ω_i может не принадлежать потребительскому множеству, но если некоторое количество товара из первоначального запаса ω_i просто исключить, то можно в это множество попасть[82]. Наконец,

[79] Вспомним тем не менее важное уточнение из раздела 17.I, а также обратимся к обсуждению этого вопроса в конце данного приложения.

[80] На рис. 17.ВВ.2 второй потребитель обладает обычными строго монотонными предпочтениями, однако для первого потребителя оба блага — антиблага, поэтому для него насыщение наблюдается в начале системы координат. Заметим, что $\omega_1 >> 0$ и $\omega_2 >> 0$. Предположим, что набор из распределений $x^* = \left(x_1^*,\ x_2^*\right)$ и цен $p \neq 0$ является вальрасианским квазиравновесием. Из-за того, что предпочтения второго потребителя строго монотонны, все цены должны быть положительными, $p >> 0$. Из решения задачи максимизации прибыли (в силу наличия технологии со свободным расходованием) и учитывая возможность бездействия агентов, получаем: $p \cdot \left(x_1^* + x_2^* - \omega_1 - \omega_2\right) \geq 0$. Поскольку $p \cdot x_2^* \leq p \cdot \omega_2$, получаем, что $p \cdot x_1^* \geq p \cdot \omega_1 > 0$, но тогда набор (x^*, p) не может быть вальрасианским квазиравновесием, поскольку потребление «ничего» ничего и не стоит и будет предпочитаться первым потребителем любому другому потреблению.

[81] Поскольку множество Y_j выпукло и замкнуто, из $-\mathbb{R}^L_+ \subset Y_j$ получаем $Y_j - \mathbb{R}^L_+ \subset Y_j$ (см. упражнение 5.В.5).

[82] Более строгим условием было бы принять, что $\omega_i \gg \hat{x}_i$ для всех i. Если это так, то, согласно утверждению 17.ВВ.2, будет существовать равновесие, а не только квазиравновесие. Однако в экономическом смысле последнее предположение было бы гораздо более строгим, поскольку предполагало бы следующее: если верно $\omega_i \geq \hat{x}_i$, то (вспомним о возможности свободного расходования) i-й потребитель вполне может прожить и без выхода на рынок, в то

в приложении А к главе 16 мы уже обсуждали условия, при которых множества доступных распределений будут компактны.

Доказательство утверждения 17.BB.2. Воспользуемся известными из главы 8 фактами о равновесии по Нэшу в игре в нормальной форме. Именно, используем прием в доказательстве существования, основанный на построении отображений наилучших ответов-реакций. Подход с точки зрения теории игр для доказательства существования вальрасианского равновесия использовали в своих работах, например, Эрроу и Дебре (Arrow, Debreu, 1954). Мы же будем следовать работе Гейла и Мас-Колелла (Gale, Mas-Colell, 1975).

Определение 17.BB.3. Распределение (x^*, y^*) и цены $p \neq 0$ составляют *квазиравновесие при свободе расходования*, если выполнены условия:

(1) для всех j и $y_j \in Y_j$ выполняется неравенство $p \cdot y_j \leq p \cdot y_j^*$,

(2′) для всех i, $p \cdot x_i^* \leq p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} p \cdot y_j^*$, причем

если $x_i \succ_i x_i^*$, то $p \cdot x_i \geq p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} p \cdot y_j^*$,

(3) $\sum_i x_i^* \leq \sum_i \omega_i + \sum_j y_j^*$ и $p \cdot \left(\sum_i x_i^* - \sum_i \omega_i - \sum_j y_j^* \right) = 0$.

Таким образом, мы заменили условие $\sum_i x_i^* \leq \sum_i \omega_i + \sum_j y_j^*$ из определения квазиравновесия 17.BB.1 на другое (3′), допустив, что избыточное предложение некоторых товаров может сделать их «свободными». В упражнении 17.BB.4 нужно будет показать, что если одно производственное множество, например Y_1, удовлетворяет условию свободы расходования и если $\left(x_1^*, \ldots, x_I^*, y_1^*, \ldots, y_J^*, p\right)$ — квазиравновесие со свободным расходованием, то будет существовать такой $y_1'^* \leq y_1^*$, что набор $\left(x_1^*, \ldots, x_I^*, y_1'^*, y_2^*, \ldots, y_J^*, p\right)$ будет вальрасианским квазиравновесием. Таким образом, для доказательства утверждения 17.BB.2 нужно всего лишь доказать, что квазиравновесие со свободой расходования существует.

Рассмотрим квазиравновесие при свободе расходования как некооперативное равновесие для некоторой игры с $I + J + 1$ игроками, где потребителей I, фирм J, а векторы спроса–предложения — их стратегии. Дополнительным игроком будет так называемый *рыночный агент* («великий координатор»), стратегией которого будет вектор цен на L различных товаров.

Поскольку множество A допустимых распределений ограничено, существует число $r > 0$, такое что для всех наборов $(x_1, \ldots, x_I, y_1, \ldots, y_J) \in A$ верно

время как условие $\omega_i \gg \hat{x}_i$ подразумевает, что потребитель может выйти на рынок с предложением строго положительного количества *любого* товара.

$|x_{li}| < r$ и $|y_{lj}| < r$ для всех i, j, l. Поскольку для гарантии существования необходима компактность множества стратегий, усечем множества X_i и Y_j до следующих множеств:

$$\hat{X}_i = \left\{x_i \in X_i : \left|x_{li}\right| \le r \quad \text{для всех } l\right\},$$

$$\hat{Y}_j = \left\{y_j \in Y_j : \left|y_{lj}\right| \le r \quad \text{для всех } l\right\}.$$

Заметим, что $A \subset \hat{X}_1 \times \ldots \times \hat{X}_I \times \hat{Y}_1 \times \ldots \times \hat{Y}_J$. Поскольку $\left(\hat{x}_1, \ \ldots, \ \hat{x}_I, \ \ldots, \ 0, \ \ldots, \ 0\right) \in A$, верно, что $\hat{x}_i \in \hat{X}_i$ для всех i и $0 \in \hat{Y}_j$ для всех j. В частности, все множества стратегий непустые. Лемма 17.ВВ.1 ниже говорит о том, что при поиске квазиравновесий при свободе расходования вполне можно ограничиться таким «усеченным» вариантом экономики.

Лемма 17.ВВ.1. Если все множества X_i и Y_j выпуклы и (x^*, y^*, p) — квазиравновесие при свободе расходования в усеченной экономике, т. е. (x^*, y^*, p) удовлетворяет определению 17.ВВ.3, то (x^*, y^*, p) будет также квазиравновесием при свободе расходования в первоначальном, не усеченном, варианте той же экономики.

Доказательство леммы 17.ВВ.1. Рассмотрим i-го потребителя (во всех последующих рассуждениях «потребителя» можно заменить на «фирму»). Поскольку $(x^*, y^*) \in A$, то $\left|x_{li}^*\right| < r$ для всех l, т. е. потребленный i-м потребителем набор находится внутри усеченного множества. Предположим теперь, что набор x_i^* не удовлетворяет условию (2′) определения 17.ВВ.3 для неусеченной экономики, т. е. что существует некий набор $x_i \in X_i$, такой что $x_i \succ_i x_i^*$ и $p \cdot x_i < p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} p \cdot y_j^*$. Введем новое обозначение: $x_i^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_i^* + \left(\frac{1}{n}\right) x_i$. Тогда для всех n верно, что $p \cdot x_i^n < p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} p \cdot y_j^*$, а также, поскольку предпочтения агентов выпуклы, $x_i^n \succsim_i x_i^*$. Кроме того, можно выбрать n достаточно большим, для того чтобы выполнялось условие: $\left|x_{li}^n\right| < r$ для всех l. Свойство локальной ненасыщаемости предпочтений гарантирует существование $x_i' \in \hat{X}_i$, такого что $x_i' \succ_i x_i^n$ и $p \cdot x_i' < p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} p \cdot y_j^*$. Но тогда $x_i' \in \hat{X}_i$ и $x_i' \succ_i x_i^n \succsim_i x_i^*$, а это означает, что распределение x_i^* в такой экономике не удовлетворяет условию (2′) определения 17.ВВ.3, откуда получаем, что набор (x^*, y^*, p) не может быть квазиравновесием при свободе расходования в усеченной экономике. Получили противоречие. ■

Мы теперь готовы описать некооперативную игру с одновременными ходами игроков. Для этого специфицируем множества стратегий игроков и их функции выигрыша (с целью упрощения обозначений) припишем каждому потребителю, вектору цен p и производственному профилю $y = (y_1, \ldots, y_j)$ уровень богатства в условиях ограниченной ответственности:

$$w_i(p,\ y) = p \cdot \omega_i + \max\left\{0;\ \sum_j \theta_{ij} p \cdot y_j\right\}.$$

Множества стратегий обозначим следующим образом:

$$\text{для } i \text{ потребителей: } \hat{X}_i,$$

$$\text{для } j \text{ производителей: } \hat{Y}_j,$$

$$\text{для рыночного агента: } \Delta = \{p \in \mathbb{R}^L : p_l \geq 0 \text{ для всех } l \text{ и } \sum_l p_l = 1\}.$$

Для данного профиля стратегий $(x, y, p) = (x_1, \ldots, x_I, y_1, \ldots, y_J, p)$. Функции выигрыша и наилучших ответов для разных агентов можно задать следующим образом:

i-й потребитель выбирает такие потребительские векторы $x_i' \in \hat{X}_i$, что

(1) $p \cdot x_i' \leq w_i(p,\ y)$ и

(2) $x_i' \succsim_i x_i''$ для всех $x_i'' \in \hat{X}_i$, удовлетворяющих условию $p \cdot x_i'' < w_i(p,\ y)$. (Выигрыш i-го потребителя может быть равен 1, если последнее условие выполнено, и 0 в противном случае.)

Множество потребительских наборов x_i', таким образом определенных, обозначим как $\tilde{x}_i(x,\ y,\ p) \subset \hat{X}_i$.

Объемы производства $y_j' \in \hat{Y}_j$, которые выбирает j-я фирма, таковы, что они максимизируют ее прибыль при ценах p на множестве $\hat{Y}_j$ (будем считать, что прибыль фирмы j выписывается в виде функции ее выигрыша).

Множество производственных планов y_j', таким образом определенных, обозначим как $\tilde{y}_j\left(x,\ y,\ p\right) \subset \hat{Y}_j$.

Рыночный агент выбирает цены $q \in \Delta$ таким образом, чтобы решить следующую задачу:

$$\max_{q \in \Delta} \left(\sum_i x_i - \sum_i \omega_i - \sum_j y_j \right) \cdot q. \tag{17.BB.1}$$

Множество векторов цен q, таким образом определенных, обозначим как $\tilde{p}(x,\ y,\ p)$.

В комментариях здесь нуждается только поведение рыночного агента. При данном векторе совокупного избыточного спроса рыночный агент выбирает цены так, чтобы максимизировать ценность этого вектора. Следовательно, он приписывает положительные веса только товарам с максимальным избыточным спросом (вспомним, что цены были нормированы до единичного вектора). Как мы уже видели, когда проделывали то же при доказательстве утверждения 17.C.1, это не противоречит экономической логике: если целью является избавиться от избыточного спроса на некий товар, нужно просто увеличить цену на него настолько, насколько это возможно.

Лемма 17.BB.2 (ниже) говорит о том, что равновесие в этой некооперативной игре и является квазиравновесием при свободе расходования для усеченной экономики.

Лемма 17.BB.2. Предположим, что набор (x^*, y^*, p) таков, что $x_i^* \in \tilde{x}_i(x^*,\ y^*,\ p)$ для всех i, и $y_j^* \in \tilde{y}_j(x^*,\ y^*,\ p)$ для всех j и $p \in \tilde{p}(x^*,\ y^*,\ p)$. Тогда (x^*, y^*, p) будет являться квазиравновесием при свободе расходования в усеченной экономике.

Доказательство леммы 17.BB.2. Заметим сначала, что $p \cdot y_j^* \geq 0$ для всех j (поскольку $0 \in \hat{Y}_j$). По определению функций $\tilde{x}_i(\cdot)$ и $\tilde{y}_j(\cdot)$ условия (1) и (2′) определения 17.BB.3 автоматически удовлетворяются. Единственное, что нужно доказать, — это условие (3′):

$$\sum_i x_i^* - \sum_i \omega_i - \sum_j y_j^* \leq 0 \quad \text{и} \quad p \cdot \left(\sum_i x_i^* - \sum_i \omega_i - \sum_j y_j^* \right) = 0.$$

Поскольку $p \cdot x_i^* \leq w_i\left(p,\ y^*\right) = p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} p \cdot y_j^*$ для всех i, то

$$p \cdot \left(\sum_i x_i^* - \sum_i \omega_i - \sum_j y_j^* \right) \leq 0.$$

Отсюда получаем, что $\sum_i x_i^* - \sum_i \omega_i - \sum_j y_j^* \leq 0$, поскольку иначе решение задачи (17.BB.1) было бы положительным, т. е. вектор p (для которого мы только что нашли, что $p\left(\sum_i x_i^* - \sum_i \omega_i - \sum_j y_j^* \right) \leq 0$) не был бы решением задачи максимизации, что означает, что он не входил бы в набор $\tilde{p}(x^*,\ y^*,\ p)$. Отсюда следует, что $(x^*, y^*) \in A$, поэтому $x_{li}^* < r$ для всех i и l. Из этого получаем, что бюджетные ограничения $\left(p \cdot x_i^* = p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} p \cdot y_j^* \right)$ выполняются на равенство, поскольку иначе по свойству локального ненасыщения для некоторого i-го потребителя будет существовать строго предпочитаемый набор, лежащий внутри бюджетного множества в сокращенной экономике, т. е. $x_i^* \notin \tilde{x}_i \times (x^*,\ y^*,\ p)$. Отсюда мы заключаем, что $p \cdot \left(\sum_i x_i^* - \sum_i \omega_i - \sum_j y_j^* \right) = 0$.

Теперь, как мы уже видели в приложении A к главе 8 (см. доказательство утверждения 8.D.3), при определенных условиях на функции наилучшего выбора некооперативная игра будет обладать равновесием.

Лемма 17.BB.3. Предположим, что отображения $\tilde{x}_i(\cdot)$, $\tilde{y}_j(\cdot)$ и $\tilde{p}(\cdot)$ непустозначные, выпуклозначные и полунепрерывные сверху. Тогда существует набор (x^*, y^*, p), такой что $x_i^* \in \tilde{x}_i(x^*, y^*, p)$ для всех i, и $y_j^* \in \tilde{y}_j(x^*, y^*, p)$ для всех j, и $p \in \tilde{p}(x^*, y^*, p)$.

Доказательство леммы 17.BB.3. Рассмотрим неподвижную точку отображения $\psi(\cdot)$, из $X_1 \times \ldots \times X_I \times Y_1 \times \ldots \times Y_J \times \Delta$ и определяемого в себя как

$$\psi(x, y, p) = \tilde{x}_1(x, y, p) \times \ldots \times \tilde{x}_I(x, y, p) \times \tilde{y}_1(x, y, p) \times \ldots \times \\ \times \tilde{y}_J(x, y, p) \times \tilde{p}(x, y, p).$$

Отображение $\psi(\cdot)$ непустозначное, выпуклозначное и полунепрерывное сверху, и поэтому существование неподвижной точки прямо следует из теоремы о неподвижной точке Какутани (см. раздел M.I математического приложения). ■

Леммы 17.BB.4–17.BB.6 подтверждают, что наилучшие ответы в этой некооперативной игре выражены непустозначными, выпуклозначными и полунепрерывными сверху соответствиями[83].

Лемма 17.BB.4. Для всех профилей стратегий (x, y, p) множества $\tilde{x}_i(x, y, p)$, $\tilde{y}_j(x, y, p)$ и $\tilde{p}(x, y, p)$ непустые.

Доказательство леммы 17.BB.4. Для множеств $\tilde{y}_j(x, y, p)$ и $\tilde{p}(x, y, p)$ все достаточно очевидно, поскольку они получены в результате максимизации непрерывной (более того, линейной) функции на непустых компактных множествах $\hat{Y}_J$ и Δ. Что касается $\tilde{x}_i(x, y, p)$, вспомним, что непрерывность отношений предпочтений $\succsim_i$ влечет существование непрерывной функции полезности, представляющей $u_i(\cdot)$ для $\succsim_i$[84]. Пусть x_i' — решение задачи максимизации для непрерывной функции $u_i(x_i)$ на непустом, компактном бюджетном множестве $\left\{x_i \in \hat{X}_i \colon p \cdot x_i \le w_i\left(p, y^*\right)\right\}$. Тогда $x_i' \in \tilde{x}_i(x, y, p)$. Бюджетное множество является непустым, потому что $\hat{x}_i \in \hat{X}_i$ и $\hat{x}_i \le \omega_i$. Если $p \ge 0$, получаем, что $p \cdot \hat{x}_i \le p \cdot w_i \le w_i(p, y^*)$. ■

[83] Для игры, в которой участвуют только фирмы и рыночный агент, этот результат получается из утверждения 8.D.3, но при добавлении потребителей нужен дополнительный аргумент (поскольку, как они определены, функции выигрышей потребителей не являются непрерывными).

[84] Это было доказано для утверждения 3.C.1 для немонотонных предпочтений на $\mathbb{R}^L_+$. Как мы здесь отмечали, однако, вывод на самом деле зависит только от непрерывности отношений предпочтений.

Лемма 17.BB.5. Для всех профилей стратегий множества $\tilde{x}_i(x, y, p)$, $\tilde{y}_j(x, y, p)$ и $\tilde{p}(x, y, p)$ выпуклы.

Доказательство леммы 17.BB.5. Приведем здесь доказательство для $x_i(x, y, p)$. В упражнении 17.BB.6 читателю будет предложено закончить доказательство.

Рассмотрим x_i, $x_i' \in \tilde{x}_i(x, y, p)$ и $x_{i\alpha} = \alpha x_i + (1-\alpha)x_i'$, $\alpha \in [0, 1]$. Заметим сначала, что $p \cdot x_{i\alpha} \leq w_i(p, y)$. Поскольку предпочтения выпуклые, не может быть так, чтобы $x_i \succ_i x_{i\alpha}$ и $x_i' \succ_i x_{i\alpha}$ (упражнение 17.BB.5). Тогда предположим, что $x_{i\alpha} \succsim_i x_i$. Рассмотрим теперь любой набор $x_i'' \in \hat{X}_i$, для которого верно неравенство $p \cdot x_i'' < w_i(p, y)$. Тогда, поскольку $x_i \in \tilde{x}_i(x, y, p)$, то $x_i \succsim_i x_i''$, откуда $x_{i\alpha} \succsim_i x_i''$. Делаем вывод, что $x_{i\alpha} \in \tilde{x}_i(x, y, p)$. Подобное же рассуждение можно привести и для случая $x_{i\alpha} \succsim_i x_i'$. Отсюда получаем, что множество $\tilde{x}_i(x, y, p)$ выпукло. ■

Лемма 17.BB.6. Отображения $\tilde{x}_i(\cdot)$, $\tilde{y}_j(\cdot)$ и $\tilde{p}(\cdot)$ полунепрерывны сверху.

Доказательство леммы 17.BB.6. Снова ограничимся доказательством только для $\tilde{x}_i(\cdot)$. В упражнении 17.BB.7 будет предложено проделать то же самое для $\tilde{y}_j(\cdot)$ и $\tilde{p}(\cdot)$.

Пусть при $n \to \infty$ $p^n \to p$, $y^n \to y$, $x^n \to x$ и $x_i'^n \to x_i'$, и пусть также $x_i'^n \in \tilde{x}_i\left(x^n, y^n, p^n\right)$. Нужно показать, что $x_i' \in \tilde{x}_i(p, x, y)$.

Из того, что $p^n \cdot x_i'^n \leq w_i\left(p^n, y^n\right)$, получаем, что $p \cdot x_i' \leq w_i\left(p^n, y^n\right)$. Теперь рассмотрим $x_i'' \in \hat{X}_i$, такое что $x_i'' \succ_i x_i'$. Тогда из непрерывности предпочтений будет следовать, что $x_i'' \succ_i x_i'^n$ для достаточно больших n. Отсюда $p^n \cdot x_i'' \geq w_i\left(p^n, y^n\right)$. Переходя к пределу, получаем $p \cdot x_i'' \geq w_i(p, y)$. Таким образом, доказано, что $x_i' \in \tilde{x}_i(x, y, p)$. Между прочим, именно потому, что нам необходимо установить это свойство замкнутости графика, мы заменили задачу максимизации полезности на задачу минимизации издержек. ■

Объединение лемм 17.BB.4–17.BB.6 позволит теперь вернуться к лемме 17.BB.3, в которой для гарантирования существования неподвижной точки нужно было выполнение определенных свойств. В свою очередь, это поможет завершить доказательство утверждения 17.BB.2. ■

Предположения о предпочтениях и технологиях можно ослабить в важном для нас направлении. Вопрос о существовании требует только того, чтобы отображения $\tilde{x}_i(x, y, p)$ и $\tilde{y}_j(x, y, p)$ были выпуклозначными и полунепрерывными сверху. Никаких других ограничений на зависимость между потребительскими выборами, выборами производителей и переменными, обозначающими «состояние», (x, y, p), при доказательстве не требуется. Можно было бы даже решить, что вкусы потребителей или технологии фирм зависят от цен (денежная иллюзия?), от выбора других потребителей и фирм (некоторая специальная форма экстерналий) или даже от их собственного потребления (имеется в виду, что вкус может зависеть от текущей референтной точки, что, как это было продемонстрировано в главе 1, будет являться источником неполноты или нетранзитивности предпочтений)[85, 86]. Приведем пример такого рода обобщения: предположим, что предпочтения потребителя заданы функцией полезности $u_i(\cdot; x, y, p)$, определенной на множестве X_i, но в принципе зависящей от состояния экономики. Если для каждого (x, y, p) условия (17.BB.2) удовлетворены, а параметрическая зависимость от (x, y, p) непрерывна, вальрасианское квазиравновесие по-прежнему будет существовать. Доказательство не нуждается в каких-либо изменениях. Мы можем выполнить его и для фирм, считая, что их технологии зависят от внешних эффектов, с дополнительной, теоретической, выгодой. Тогда можно проверить, что равновесие существует, если технология фирмы выпукла: *неважно при этом, будет ли выпуклой агрегированная технология всей экономики*. Подробнее об этом — в упражнении 17.BB.8.

Доказательство существования, которое приведено выше, представляет собой пример «широкого» доказательства. Рассмотрение неподвижной точки (мы упоминали о ней как о существовании равновесия Нэша) проводилось в дезагрегированном домене (desegregated domain), где со всеми переменными, входящими в конечное равновесие, работа велась по отдельности. Преимущество такого подхода в том, что аргументация здесь достаточно гибкая и позволяет использовать минимально строгие предпосылки без дополнительных обоснований (что и продемонстрировано в предыдущем параграфе). Недостаток конечно же в том, что может быть сложно найти неподвижную точку или ее поиск приводит к громоздким вычислениям. Обычно, как мы видели это в разделе 17.C и приложении A к данной главе, вполне можно работать и с более агрегированными системами. Важно заметить, что все вышесказанное остается верным, даже если выполнены предпосылки утверждения 17.BB.2[87]. Обсудим это ниже.

Можно доказать утверждение 17.BB.2, представив его как игру двух, а не $I + J + 1$ игроков[88]. Первый игрок будет агрегированным потребителем-фирмой, множество стратегий которой выражается как $\sum_i \hat{X}_i - \left\{\sum_i \omega_i\right\} - \sum_j \hat{Y}_j$, вторым же агентом будет продолжать оставаться рыночный агент со множеством стратегий Δ. При данных ценах $p \in \Delta$ первый агент отвечает множеством векторов z, таких что $z = \sum_i x_i - \sum_i \omega_i - \sum_j y_j$, где y_j максимизирует прибыль на множестве $\hat{Y}_j$ для всех j и где $x_i \in \hat{X}_i$ таково, что, во-первых, удовлетворяет неравенству $p \cdot x_i \le p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} p \cdot y_j$, а, во-вторых, $x_i \succsim_i x_i'$, в случае если $p \cdot x_i' < p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} p \cdot y_j$. Как и раньше, ответ рыноч-

---

[85] Предположим, к примеру, что функция полезности потребителя задана как $u_i(\cdot; x_i)$, т. е. что оценка потребителем набора зависит от его текущего потребления. Тогда без потери общности мы можем принять $u_i(x_i; x_i) = 0$ для всех x_i. Определим нестрогие и строгие отношения предпочтений $\succsim_i$ и $\succ_i$ на множестве X_i как «$x_i' \succsim_i x_i$, если $u_i(x_i'; x_i) \ge 0$, и $x_i' \succ_i x_i$, если $u_i(x_i'; x_i) > 0$». Тогда отношения предпочтений $\succsim_i$ и $\succ_i$ будут содержать всю необходимую информацию для анализа равновесия. Вполне возможно, что отношение предпочтений $\succsim_i$ не будет обладать свойством полноты, а ни $\succ_i$, ни $\succsim_i$ не будут транзитивными. Подробнее — у Шейфера (Shafer, 1974), а также Гейла и Мас-Колелла (Gale, Mas-Colell, 1975).

[86] Другой пример зависимости от общего потребления можно представить, если рассматривать равновесия в заданный момент времени. Тогда текущее потребление в экономике (покупки материальных благ и финансовых активов) обычно влияет на будущие цены, которое, в свою очередь, влияют на текущие предпочтения через ожидания.

[87] Это, однако, не относится к обобщениям, сделанным в предыдущем разделе.

[88] Такой подход был использован Дебре (Debreu, 1959).

ного агента — множество $q \in \Delta$, максимизирующее $z \cdot q$ на Δ. Как только эта игра описана, дальнейшее доказательство будет таким же, как и для утверждения 17.BB.2. Проверьте, что вы делаете все верно, выполнив упражнение 17.BB.9.

Если для каждого $p \in \Delta$ выбор потребителей, сделанный на основе максимизации полезности, т. е. $x_i(p)$, а также максимизирующий прибыль фирм выпуск $y_i(p)$ однозначный, то можно продвинуться в анализе чуть дальше и рассмотреть игру с одним игроком (рыночным агентом). Для каждого p наилучшим ответом рыночного агента будет множество векторов цен $q \in \Delta$, которое максимизирует $\left[\sum_i x_i(p) - \sum_i \omega_i - \sum_j y_j(p)\right] \cdot q$ на Δ. Это, по сути, то же самое, что было проделано выше при доказательстве утверждения 17.C.1.

Литература

Arrow, K., G.Debreu (1954). Existence of equilibrium for a competitive economy. Econometrica **22**: 165–90.

Arrow, K., F. Hahn (1971). *General Competitive Analysis*. San Francisco: Holden-Day.

Arrow, K., M. Intrilligator, eds. (1982). *Handbook of Mathematical Economics*, vol. 11. Amsterdam: North-Holland.

Barone, E. (1908). Il ministro della produzione nello collettivista. *Giornali degli economisti*. [Reprinted as: The ministry of production in the collective state, in *Collectivist Economic Planning*, edited by F.H.Hayek. London: Routledge, 1935.]

Balasko, Y. (1988). *Foundations of the Theory of General Equilibrium*. Orlando: Academic Press.

Becker, G. (1962). Irrational behavior and economic theory. *Journal of Political Economy* **70**: 1–13.

Brown, D., R. Matzkin (1993). Walrasian comparative statics. Mimeograph, Northwestern University.

Chipman, J. (1970). External economies of scale and competitive equilibrium. *Quarterly Journal of Economics* **84**: 347–85.

Debreu, G. (1959). *Theory of Value*. N. Y.: Wiley.

Debreu, G. (1970). Economies with a finite set of equilibria. *Econometrica* **38**: 387–92.

Debreu, G. (1974). Excess demand functions. *Journal of Mathematical Economics* **1**: 15–21.

Dierker, E. (1972). Two remarks on the number of equilibria of an economy. *Econometrica* **40**: 951–53.

Fisher, F. (1983). *Disequilibrium Foundations of Equilibrium Economics.* Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.

Gale, D., A. Mas-Colell (1975). An equilibrium existence theorem for a general model without ordered preferences. *Journal of Mathematical Economics* **2**: 9-15. [Некоторые внесенные в эту статью исправления можно увидеть в другом номере журнала, *Journal of Mathematical Economics* **6**: 297–98, 1979].

Garcia, C.B., W.I. Zangwill (1981). *Pathways to Solutions, Fixed Points and Equilibria.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

Grandmont, J.M. (1992). Transformations of the commodity space, behavioral heterogeneity, and the aggregation problem. *Journal of Economic Theory* **57**: 1–35.

Hahn, F. (1982). Stability. Chap. 16 in *Handbook of Mathematical Economics*, vol. II, edited by K. Arrow, and M. Intrilligator. Amsterdam: North-Holland.

Hildenbrand, W. (1994). *Market Demand: Theory and Empirical Evidence*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Hildenbrand, W., H. Sonnenschein, eds. (1991). *Handbook of Mathematical Economics*, vol. IV. Amsterdam: North-Holland.

Kehoe, T. (1985). Multiplicity of equilibrium and comparative statics. *Quarterly Journal of Economics* **100**: 119–48.

Kehoe, T. (1991). Computation and multiplicity of equilibria. Chap. 38 in *Handbook of Mathematical Economics*, vol. IV, edited by W. Hildenbrand and H. Sonnenschein. Amsterdam: North-Holland.

Lange, O. (1938). On the economic theory of socialism. In *On the Economic Theory of Socialism*, edited by B. Lippineott. Minneapolis: University of Minnesota Press.

McKenzie, L. (1959). On the existence of general equilibrium for a competitive market. *Econometrica* **27**: 54–71.

Mantel, R. (1974). On the characterization of aggregate excess demand. *Journal of Economic Theory* **7**: 348–53.

Mantel, R. (1976). Homothetic preferences and community excess demand functions. *Journal of Economic Theory* **12**: 197–201.

Marshall, A. (1920). *Principles of Economics*, 8th ed. London: Macmillian.

Mas-Colell, A. (1977). On the equilibrium price set of an exchange economy. *Journal of Mathematical Economics* **4**: 117–26.

Mas-Colell, A. (1985). *The Theory of General Economic Equilibrium: A Differentiable Approach*. Cambridge, UK.: Cambridge University Press.

Mas-Colell, A. (1986). Notes on price and quantity tatonnement. In *Models of Economic Dynamics*, edited by H.Sonnenschtein. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems No. 264. Berlin: Springer-Verlag.

Mas-Colell, A. (1991). On the Uniqueness of equilibrium once again. Chap. 12 in *Equilibrium Theory and Applications,* edited by W. Barnett, B. Cornet, C. D'Aspremont, J. Gabszewicz and A. Mas-Colell. Cambridge, UK.: Cambridge University Press.

Milgrom, P., C. Shannon (1994). Monotone comparative statics. *Econometrica* **62**: 157–180.

Negishi, T. (1960). Welfare economics and existence of an equilibrium for a competitive economy. *Metroeconomica* **12**: 92–97.

Rader, T. (1972). *Theory of General Economic Equilibrium.* New Your: Academic Press.

Saari, D., C. Simon (1978). Effective price mechanisms. *Econometrica* **46**: 1097–125.

Samuelson, P. (1947). *Foundations of Economic Analysis*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Scarf, H. (1973). *The Computation of Economic Equilibria* (in collaboration with T. Hansen). New Haven: Yale University Press.

Shafer, W. (1974). The non-transitive consumer. *Econometrica* **42**: 913–19.

Shafer, W., H. Sonnenschein (1982). Market demand and excess demand functions. Chap. 14 in *Handbook of Mathematical Economics*, vol. II, edited by K. Arrow and M. Intrilligator. Amsterdam: North-Holland.

Shoven, J., J. Whalley (1992). *Applying General Equilibrium*. N. Y.: Cambridge University Press.

Sonnenschein, H. (1973). Do Walras' identity and continuity characterize the class of community excess demand functions? *Journal of Economic Theory* **6**: 345–54.

Smale, S. (1976). A contingent process of price adjustment and global Newton methods. *Journal of Mathematical Economics* **3**: 107–20.

Starr, R. (1969). Quasi-equilibria in markets with non-convex preferences. *Econometrica* **37**: 25–38.

Varian, H. (1977). Non-Walrasian equilibria. *Econometrica* **45**: 573–90.

Walras, L. (1874). Eléments d'Économie Politique Pure. Lausanne: Corbaz. [В переводе: *Elements of Pure Economics*. Homewood, Ill.: Irwin, 1954].

Упражнения

17.B.1[A]. Покажите, что в экономике чистого обмена с $J = 1$ и $Y_1 = -\mathbb{R}^L_+$ выражение «$y_1^* \leq 0$, $p \cdot y_1^* = 0$ и $p \geq 0$» верно только тогда, когда «$y_1^* \in Y_1$ и $p \cdot y_1^* \geq p \cdot y_1$ для всех $y_1 \in Y_1$».

17.B.2[B]. Докажите свойство (5) утверждения 17.B.2. Подсказка содержится в доказательстве самого утверждения 17.B.2, приведенном в тексте. Вспомните также следующий технический факт: любая ограниченная последовательность на $\mathbb{R}^L$ имеет сходящуюся подпоследовательность.

17.B.3[B]. Предположим, что $z(\cdot)$ — функция агрегированного избыточного спроса, удовлетворяющая условиям (1)–(5) утверждения 17.B.2. Пусть также $p^n \to p$ и некоторые (но не все) компоненты вектора p нулевые.

а) Покажите, что с увеличением n наибольший избыточный спрос — на товар, цена которого стремится к нулю.

б) Покажите (если возможно, на примере), что товар, цена которого стремится к нулю, может остаться в избыточном спросе при всех n (*подсказка*: имеют значение относительные цены).

17.B.4[B]. Предположим, что существует J фирм, производственные множества которых $Y_1, \ldots, Y_J \subset \mathbb{R}^L$ замкнуты, строго выпуклы и ограничены сверху. Предположим также, что с использованием начального запаса и агрегированного для всей экономики производственного множества $Y = \sum_j Y_j$ можно произвести строго положительный потребительский набор (т. е. существует $\bar{x} \gg 0$, такой что $\bar{x} \in \left\{\sum_i \omega_i\right\} + Y$). Покажите, что включающая производство функция избыточного спроса $\tilde{z}(p)$ из раздела (17.B.3) удовлетворяет предпосылкам (1)–(5) утверждения 17.B.2.

17.B.5[A]. Пусть существует J фирм. Каждая фирма производит единственный выпуск с постоянной отдачей от масштаба. Единичная функция издержек фирмы j, $c_j(p)$, дифференцируема. Потребление в экономике представлено функцией агрегированного избыточного спроса $z(p)$. Запишите систему уравнений, эквивалентную системе 17.B.4–17.B.5, для равновесия в такой экономике.

17.B.6$^{\mathbf{C}}$. (Rader, 1972) Пусть существует единственное производственное множество Y, и пусть оно представляет собой замкнутый, выпуклый конус, удовлетворяющий условию свободы расходования. Рассмотрим следующую проблему обмена в равновесии: при заданных ценах $p = (p_1, \ldots, p_L)$ каждый потребитель i будет выбирать вектор $v_i \in \mathbb{R}^L$ так, что он будет максимизировать его $\succsim_i$ на множестве $\{x_i \in X_i\colon p \cdot v_i \leq p \cdot \omega_i$ и $x_i = v_i + y$ для некоторых $y \in Y\}$. Вектор цен p и вектор выборов потребителя $v^* = \left(v_1^*, \ \ldots, \ v_I^*\right)$ составляют равновесие, если $\sum\limits_i v_i^* = \sum\limits_i \omega_i$. Покажите, что при выполнении стандартных предпосылок относительно предпочтений этого потребителя и его потребительских множеств вектор цен и профиль выборов потребителей составляют вальрасианское равновесие для экономики с производством. Проинтерпретируйте полученный результат.

17.C.1$^{\mathbf{A}}$. Проверьте, что отображение $f(\cdot)$, о котором говорится в доказательстве утверждения 17.C.1, выпуклозначно.

17.C.2$^{\mathbf{C}}$. Покажите, что выпуклозначное отображение $z(\cdot)$, определенное на $\mathbb{R}^L_{++}$ и удовлетворяющее пяти условиям, приведенным ниже в этом же упражнении (аналогично соответствующим условиям из утверждения 17.C.1), допускает решение, т. е. существует p, для которого $0 \in z(p)$. Условия:

1) функция $z(\cdot)$ полунепрерывна сверху;
2) $z(\cdot)$ однородна нулевой степени;
3) для каждого p и $z \in z(p)$ выполняется равенство $p \cdot z = 0$ (закон Вальраса);
4) существует $s \in \mathbb{R}$, такое что $z_l > -s$ для всех $z \in z(p)$ и p;
5) если $p^n \to p \neq 0$, $z^n \in z(p^n)$ и $p_l = 0$ для некоторых l, то $\max\left\{z_1^n, \ \ldots, \ z_L^n\right\} \to \infty$.

(*Подсказка*: если просто попробовать повторить доказательство утверждения 17.C.1, возникнут сложности, обусловленные условием полунепрерывности сверху. Можно воспользоваться, например, следующим трехступенчатым подходом: (1) показать, что для достаточно малых $\varepsilon > 0$ решения должны содержаться во множестве $\Delta_\varepsilon = \left\{p \in \Delta : p_l \geq \varepsilon \text{ для всех } l\right\}$; (2) доказать утверждение о том, что для достаточно больших $r > 0$, $z(p) \subset [-r, r]^L$ для каждого $p \in \Delta_\varepsilon$; (3) использовать в домене $\Delta_\varepsilon \times [-r, r]^L$ известные нам факты о неподвижной точке. Для упрощения задачи можно ограничиться доказательством выпуклозначности — таким же, как в утверждении 17.C.2. Тогда можно воспользоваться доменом $\Delta \times [-r, r]^L$.

17.C.3[B]. Рассмотрите экономику обмена, в которой каждый потребитель i обладает непрерывными, строго монотонными, строго выпуклыми предпочтениями и первоначальным запасом $\omega_i \gg 0$. Особенностью следующей модели будет наличие налога, который потребитель теперь должен платить со своего валового потребления, причем налог этот будет различаться от потребителя к потребителю и от товара к товару. Предположим также, что совокупные налоговые поступления поровну распределяются аккордным способом по потребителям. Таким образом, для любого i существует вектор налоговых ставок $t_i = (t_{1i}, \ldots, t_{Li}) \geq 0$, и для любого вектора цен $p \gg 0$ бюджетное множество потребителя записывается в следующем виде:

$$B_i\left(p,\ w_i\right) = \left\{x_i \in \mathbb{R}_+^L : \sum_l \left(1 + t_{li}\right) p_l x_{li} \leq w_i\right\}.$$

Равновесием с налогами в такой экономике будет набор из вектора цен $p \gg 0$ и распределений $(x_1^*, \ \ldots, \ x_I^*)$, причем $\sum_i x_i^* = \sum_i \omega_i$, таких что они максимизируют полезность i-го потребителя на множестве $B_i\left(p,\ p \cdot \omega_i + \left(\dfrac{1}{I}\right)\left(\sum_{li} t_{li} p_l x_{li}\right)\right)$.

a) Проиллюстрируйте равновесие с налогами, используя ящик Эджворта. Проверьте, что оно может не быть оптимальным по Парето.

b) Используя утверждение 17.C.1, покажите, что равновесие с налогами существует.

c) Итак, налог платится с общего (валового) потребления. Если бы он платился с чистого потребления, т. е. с купленных или проданных объемов товара, то (предполагая одну и ту же ставку налога при покупке и продаже) бюджетное множество можно было бы записать следующим образом:

$$B_i\left(p,\ T_i\right) = \left\{x_i \in \mathbb{R}_+^L : p \cdot \left(x_i - \omega_i\right) + \sum_l t_l \left|p_{li}(x_{li} - \omega_{li}\right| \leq T_i\right\},$$

где T_i — паушальная скидка. Как это бюджетное множество будет отличаться от того, что было описано ранее для случая налога с общего потребления? Поясните графически.

d) Выпишите уравнение бюджетного множества для ситуации, аналогичной (c), за исключением того, что ставки налога при покупке и продаже различны.

e) (*Более сложное задание.*) Как бы вы решали вопрос существования равновесия в ситуации (c)?

17.C.4[A]**.** Рассмотрите экономику чистого обмена. Пусть в нее введено единственное новшество — прогрессивная шкала налогообложения, которая будет работать согласно следующему правилу: индивидуальное богатство больше не будет выражаться как $p \cdot \omega_i$; теперь все, чье богатство выше среднего, должны будут половину этого «превышения» отдавать в некий фонд, из которого будут получать деньги те, чье богатство ниже среднего, причем они будут получать тем больше, чем больше отклонение.

a) Для экономики с двумя потребителями, обладающими первоначальными запасами $\omega_1 = (1, 2)$ и $\omega_2 = (2, 1)$, запишите выражения для их богатства как функции от цен.

b) Если предпочтения потребителя непрерывны, строго выпуклы и строго монотонны, то будет ли с таким налогом его функция избыточного спроса удовлетворять условиям существования равновесия из утверждения 17.C.1?

17.C.5[B]**.** Рассмотрите множество потребителей I. Каждый потребитель i из этого множества описывается потребительским множеством $\mathbb{R}^L_+$ и непрерывными, строго выпуклыми предпочтениями $\succsim_i$. Предположим, к тому же, что каждый такой потребитель обладает технологией домашнего производства $Y_i \subset \mathbb{R}^L$, при этом $0 \in Y_i$. Тогда можно дать определение *индуцированных предпочтений* $\succsim_i^*$ на $\mathbb{R}^L_+$: это такие предпочтения, что $x_i \succsim_i^* x_i'$ тогда и только тогда, когда для любого $y_i' \in Y_i$, для которого $x_i' + y_i' \geq 0$, существует $y_i \in Y_i$, для которого $x_i + y_i \geq 0$ и $x_i + y_i \succsim_i x_i' + y_i'$ (т. е. что бы мы ни произвели из x_i', какой-то набор, по крайней мере не худший, может быть получен и из x_i).

a) Покажите, что индуцированные предпочтения рациональны, т. е. полны и транзитивны.

b) Покажите, что если Y_i выпукло, то индуцированные предпочтения $\succsim_i^*$ тоже выпуклы.

c) Предположим, что в экономике имеется два типа товаров: рыночные (торгуемые) и нерыночные (домашние). Первоначальные предпочтения $\succsim_i$ у потребителей есть только относительно нерыночных товаров, а ненулевые первоначальные запасы ω_i есть только на рыночные товары. Используя концепцию индуцированных предпочтений, сформулируйте проблему равновесия так, как если бы это была экономика чистого обмена с исключительно рыночными товарами. Обсудите результат.

17.C.6[B]**.** Пусть $L = 2$. Рассмотрите условия (1), (3) и (4) утверждения 17.B.2. Приведите четыре таких примера, чтобы в каждом из них не выполнялось только одно из условий, но при этом система $z(p) = 0$ не имела решения. Почему в список таких условий не включено условие (2)?

17.D.1$^{\mathbf{B}}$**.** Рассмотрите экономику обмена с двумя потребителями и двумя товарами. Пусть оба потребителя обладают гомотетичными предпочтениями с постоянной эластичностью замещения. Кроме того, пусть эластичность замещения одного товара другим для обоих потребителей одинаково мала (т. е. товары близки к совершенным комплементам). Специфицируем функции полезности:

$$u_1\left(x_{11},\, x_{21}\right) = \left(2x_{11}^{\rho} + x_{21}^{\rho}\right)^{1/\rho} \text{ и } u_2\left(x_{12},\, x_{22}\right) = \left(x_{12}^{\rho} + 2x_{22}^{\rho}\right)^{1/\rho},$$

пусть также $\rho = -4$, $\omega_1 = (1, 0)$ и $\omega_2 = (0, 1)$. Найдите функции избыточного спроса для такой экономики и проверьте, что в ней существует множество равновесий.

17.D.2$^{\mathbf{A}}$**.** Используйте теорему о неявной функции для того, чтобы показать, что если $f(v) = 0$ — система из M уравнений с N неизвестными и если $f\left(\bar{v}\right) = 0$, а ранг матрицы $Df\left(\bar{v}\right) = M$, то в окрестности $\bar{v}$ множество решений для $f(\cdot) = 0$ может быть параметризовано $N - M$ параметрами.

17.D.3$^{\mathbf{A}}$**.** Явным образом проведите расчеты для утверждения 17.D.4.

17.D.4$^{\mathbf{C}}$**.** Рассмотрите экономику обмена с двумя потребителями и двумя товарами, в которой потребители характеризуются подходящими условиями дифференцируемости функций полезности и спроса и вектором совокупных первоначальных запасов $\bar{\omega} \gg 0$. Покажите, что практически для всех $\omega_1 \ll \bar{\omega}$ экономика, определенная через первоначальные запасы ω_1 и $\omega_2 = \bar{\omega} - \omega_1$, имеет конечное число равновесий. Эта ситуация отличается от той, что была рассмотрена в утверждении 17.D.2, поскольку в последнем первоначальные запасы предполагались фиксированными (*подсказка*: используйте свойства матрицы Слуцкого).

17.D.5$^{\mathbf{B}}$**.** Рассмотрите экономику обмена с двумя потребителями и двумя товарами, обладающую подходящими условиями дифференцируемости функций полезности и спроса. Представьте задачу поиска равновесия через систему уравнений, в переменных потребления $x_1 \in \mathbb{R}_+^2$ и $x_2 \in \mathbb{R}_+^2$, цен $p \in \mathbb{R}_+^2$ и обратных величин предельной полезности богатства $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ и $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ (пренебрегите возможностью граничного решения). Параметры системы — первоначальные запасы $\left(\omega_1,\, \omega_2\right) \in \mathbb{R}_+^4$. Докажите без дальнейшего агрегирования, что (после вычеркивания одного из уравнений и одной переменной) система будет удовлетворять условию полного ранга (full rank) теоремы трансверсальности.

17.D.6$^{\mathbf{B}}$**.** Пусть теперь все условия будут те же, что и в упражнении 17.D.5, но теперь к ним добавится возможность появления экстерналий: (дифференцируемая) функция полезности первого потребителя может зависеть от потребления второго потребителя, т. е. имеет вид $u_1(x_1, x_2)$, где x_i — набор потребителя i (тем не менее функция полезности второго потребителя имеет вид $u_2(x_2)$). Определение равновесия будет таким же, как обычно, добавим лишь, что первый потребитель принимает потребление второго как заданное. Покажите, что, обобщенно в первоначальных запасах $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^4_+$ количество равновесий конечно.

17.D.7^B. Предположим, что в экономике обмена агенты равномерно распределены по N островам и общение между ними невозможно. На каждом острове экономика имеет по три равновесия.

a) Покажите, что общее количество равновесий в экономике в целом равно 3^N.

b) Предположим теперь, что экономики всех островов идентичны, и при этом появилась возможность общения между жителями разных островов с возможностью свободного перемещения товаров и нулевыми затратами на транспортировку. Покажите, что теперь равновесий в такой экономике будет три.

17.D.8^A. Путем вычислений покажите, что индекс равновесия в чистой экономике обмена с одним потребителем с предпочтениями вида Кобба — Дугласа равен +1.

17.E.1^A. Выведите выражения 17.E.1 и 17.E.2.

17.E.2^A. Выведите выражение 17.E.3.

17.E.3^B. Задайте функции полезности, рационализирующие для заданного вектора цен p индивидуальные избыточные спросы $z_i(p)$ и матрицы эффектов цены $Dz_i(p)$, которые строятся при доказательстве утверждения 17.E.2.

17.E.4^B. Рассмотрите экономику с двумя товарами. Приведите пример функции $z(p)$, определенной на множестве

$$P_\varepsilon = \left\{(p_1, p_2) \gg 0 : \varepsilon < \left(p_1/p_2\right) < (1/\varepsilon)\right\},$$

значения которой лежат в $\mathbb{R}^2$, такой, чтобы она была непрерывной, однородной нулевой степени, удовлетворяла закону Вальраса и не могла бы быть выведена из рациональных отношений предпочтений. Изобразите график кривой «цена–потребление», получаемой для этой функции полезности. Заметим, что график должен проходить через точку первоначального запаса. Сравните ваши построения с теми, что представлены на рис. 17.E.2.

17.E.5^A. Покажите, что точки выбора, изображенные на рис. 17.E.3, не могут быть получены для потребителей, векторы первоначальных запасов которых ограничены сверху вектором (1, 1), а также условием неотрицательности потребления.

17.E.6^A. Покажите, что функция избыточного спроса $z_i(p) = e^i - p_i p$, определенная при $\| p \| = 1$, пропорциональна один к одному — в том смысле, в котором она используется для обобщенного доказательства утверждения 17.E.3 (в конце раздела 17.E.).

17.E.7^{B}. Докажите, что функция избыточного спроса $z_i(p) = e^i - p_i p$, используемая для обобщенного доказательства утверждения 17.E.3, удовлетворяет сильной аксиоме выявленных предпочтений.

17.F.1^{C}. Покажите, что выражение 17.F.2 приводит к отрицательно полуопределенной матрице эффектов цены $Dz(p)$, если первоначальные запасы пропорциональны между собой *или* если пропорциональны между собой потребительские выборы.

17.F.2^{A}. Закончите проверку утверждения из примера 17.F.1.

17.F.3^{B}. Пусть в экономике имеется четыре товара и два потребителя. Обозначим первоначальные запасы потребителей как $\omega_1 = (\omega_{11}, \omega_{21}, 0, 0)$ и $\omega_2 = (\omega_{12}, \omega_{22}, 0, 0)$. Первый потребитель тратит все свое богатство на товар 3, а второй — на товар 4. Найдите некоторые значения ω_1 и ω_2, такие что соответствующий избыточный спрос в такой экономике не удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений.

17.F.4^{A}. Пусть в экономике L товаров, но для каждого потребителя существует такой товар, что при любой цене потребитель тратит на него все свое богатство (например, товары различаются по их местоположению). Покажите, что агрегированный избыточный спрос будет удовлетворять свойству валовой (слабой) заменимости.

17.F.5^{C}. Дополните недостающие части доказательства в примере 17.F.2.

17.F.6^{C}. Рассмотрите экономику с двумя потребительскими товарами и двумя факторами производства с постоянной отдачей от масштаба, но без совместного производства. Более того, пусть производственные функции обоих товаров имеют вид функций Кобба — Дугласа. Потребители являются собственниками факторов производства, но у них есть предпочтения только относительно двух потребительских товаров. Пусть эта экономика будет также закрытой (т. е. в равновесии спрос должен быть равен предложению). Предположим теперь, что оба потребительских товара — нормальные товары, и пусть они являются валовыми заменителями *в функции спроса* потребителей. Дайте определение индуцированной экономики обмена для факторов производства, предположив, что для любого вектора цен на факторы оба потребительских товара оцениваются по средним издержкам их производства, а также что на них всегда находится спрос. Покажите, что результирующий агрегированный избыточный спрос на факторы производства обладает свойством валовой заменимости и что, следовательно, равновесие в такой экономике единственное.

17.F.7^{A}. Докажите справедливость выражения 17.F.3 для случая $L = 2$.

17.F.8^{A}. Покажите, что из выражения 17.F.3 следует, что множество решений системы $z(p) = 0$ выпукло.

17.F.9^{B}. Рассмотрите экономику с единственным производственным множеством Y с постоянной отдачей от масштаба. Пусть предпочтения потребителей непрерывны, строго выпуклы и строго монотонны. Предположим, что существует допустимое множество потребительских наборов $(x_1, \ldots, x_I)$, которые являются равновесными по Вальрасу. Предположим, более того, что для достижения этих наборов не требуется торговля, если Y находится в свободном доступе, т. е. $x_i - \omega_i \in Y$ для всех i. Покажите, что эти равновесия — единственно возможные.

17.F.10$^{\mathbf{A}}$. Покажите, что выражение 17.F.3 означает, что матрица $Dz(p)$ отрицательно полуопределена при равновесных ценах p.

17.F.11$^{\mathbf{B}}$. Покажите, что если $z(p) = 0$, ранг матрицы $Dz(p) = L - 1$ и сама матрица $Dz(p)$ отрицательно полуопределена, то для любого l детерминант матрицы размера $(L - 1) \times (L - 1)$, получаемой из $Dz(p)$ путем вычеркивания строки и столбца с номером l, имеет знак $(-1)^{L-1}$. (*Подсказка*: в разделе M.D математического приложения показано, что если ранг матрицы $Dz(p) = L - 1$, то матрица $(L - 1) \times (L - 1)$ невырожденная. Рассмотрите тогда матрицу $Dz(p) - \alpha I$.)

17.F.12$^{\mathbf{B}}$. Покажите, что если $z(p) = 0$, а знаки миноров матрицы $Dz(p)$ меняются так, как это описано для случая валовой заменимости, то матрица размера $(L - 1) \times (L - 1)$, получаемая из $Dz(p)$ путем вычеркивания столбца и строки номер l, имеет *отрицательную доминирующую диагональ* (определение этого понятия дано в разделе M.D математического приложения), и поэтому отрицательно определена.

17.F.13$^{\mathbf{A}}$. Добавьте в пример 17.F.3 необходимые расчеты.

17.F.14$^{\mathbf{B}}$. Рассмотрите фирму, производящую товар 1 из $l = 2, \ldots, L$ других товаров, используя производственную функцию $f(v_2, \ldots, v_L)$. Пусть при этом $f(\cdot)$ является вогнутой, возрастающей и дважды непрерывно дифференцируемой функцией. Мы говорим, что l и l' комплементарны для комбинации факторов $v = (v_2, \ldots, v_L)$, если $\dfrac{\partial^2 f(v)}{\partial v_l \partial v_{l'}} > 0$.

a) Проверьте, что если производственная функция имеет вид функции Кобба — Дугласа $f(v_2, \ldots, v_L) = v_2^{\alpha_1} \times \ldots \times v_L^{\alpha_L}$ $\alpha_2 + \ldots + \alpha_L \leq 1$, то любые два фактора будут комплементами при любом v.

b) Пусть функция $f(\cdot)$ обладает постоянной отдачей от масштаба. Покажите, что для любого v и любого l существует такое l', что оно будет комплементом для l при этом v.

c) Предположим, что функция $f(\cdot)$ строго вогнута и что любые два фактора при любом v являются комплементами. Пусть при этом функция $v_l(p_1, \ldots, p_L)$ — функция спроса на факторы.

Покажите, что для любого v и любого l верно, что $\dfrac{\partial v_l}{\partial p_1} > 0$, $\dfrac{\partial v_l}{\partial p_l} < 0$, а также что $\dfrac{\partial v_l}{\partial p_{l'}} < 0$ при $l' \neq l$.

d) Обсудите возможные следствия пунктов (a)–(c) для теорем единственности равновесия, которые опираются на свойства валовой заменимости.

17.F.15^B^. Рассмотрите экономику с одним потребителем, с производством и строго выпуклыми предпочтениями. Пусть существует система адвалорных налогов $t = (t_1, \dots t_L)$, которые создают разницу между ценами, которые платит потребитель и ценами, которые получает производитель, т. е. $p_l = (1 + t_l)q_l$, где p_l и q_l — соответственно цены на благо l для потребителей и производителей. Собранные налоги возвращаются в экономику в виде паушальных трансфертов. Выпишите определение (смещенного) равновесия. Покажите, что такое равновесие будет единственным, если производственный сектор — Леонтьевского типа (т. е. включает единственный необходимый фактор, в нем отсутствует совместное производство, а отдача от масштаба постоянная), а все потребительские товары нормальные. Можно ли считать условие нормальности товаров необязательным? Если вам так будет проще, ограничьтесь случаем двухтоварной экономики (один потребительский товар и один фактор производства).

17.F.16^C^. Предположим, что функция $g(p) = (g_1(p), \dots, g_N(p))$ определена на $[0, r]^N$ и что $g(0, \dots, 0) >> (0, \dots, 0)$, $g(r, \dots, r) << (0, \dots, 0)$. Заметим, что теперь не предполагается выполнения закона Вальраса, однородности функции нулевой степени или непрерывности. Функция $g(\cdot)$ могла бы, на самом деле, быть системой избыточных спросов, соответствующих подгруппе рынков, при том что цены на товары вне группы этих рынков фиксированы.

a) Будем говорить, что $g(\cdot)$ удовлетворяет свойству *строгой валовой заменимости* (SGS, strong gross substitute), если для некоторых $\alpha > 0$ каждая координата функции $\alpha g(p) + p$ строго возрастает по p, а $(\alpha g(p) + p) \in [0, r]^N$ для всех $p \in [0, r]^N$. Покажите, что если $g(p)$ удовлетворяет свойству строгой валовой заменимости, то она же удовлетворяет и свойству валовой заменимости.

b) Покажите на примере, что свойство валовой заменимости не подразумевает выполнение свойства SGS. Тем не менее покажите, что если $g(\cdot)$ непрерывно дифференцируема и свойство валовой заменимости выполняется, то SGS тоже выполняется.

Далее везде будем предполагать, что $g(\cdot)$ удовлетворяет свойству SGS.

c) Покажите, что в указанной экономике равновесие существует, т. е. существует p, такое что $g(p) = 0$. Графически проиллюстрируйте случай $N = 1$. (*Подсказка*: используйте теорему Тарского о неподвижной точке из раздела M.I математического приложения или, если вам так удобнее, предположите непрерывность функции и используйте теорему Брауера о неподвижной точке.)

d) Приведите пример для $N = 2$, в котором равновесие единственно.

e) Предположим, что $g(p) = g(p') = 0$. Покажите, что должно существовать равновесие p'', такое что $p'' \geq p$ и $p'' \geq p'$. Похожим образом покажите, что существует равновесие p''', такое что $p''' \leq p$ и $p''' \leq p'$. (*Подсказка*: примените аргумент из пункта (c) к $\left[\max\left\{p_1,\ p_1'\right\},\ r\right] \times \ldots \times \left[\max\left\{p_N,\ p_N'\right\},\ r\right]$.)

f) Докажите (и здесь можно предположить непрерывность функции), что множество равновесий должно удовлетворять сильному и очень специальному свойству, а именно: существуют «минимальное» и «максимальное» равновесия, т. е. $p^{\max}$ и $p^{\min}$, такие что $g(p^{\max}) = g(p^{\min}) = 0$, и $p^{\min} \leq p \leq p^{\max}$, для всех p, таких что $g(p) = 0$.

g) Предположите дополнительно, что $g(\cdot)$ дифференцируема. Предположим, что нам известно, что в равновесии, т. е. когда $g(p) = 0$, матрица $Dg(p)$ имеет *отрицательную доминирующую диагональ*, т. е. $Dg(p)v \ll 0$ при $v \gg 0$. Покажите (возможно, нестрого), что равновесие должно быть единственным.

h) Предположим, что $g(\cdot)$ — обычная система избыточных спросов на первые N товаров в экономике с $N + 1$ товарами, цена на последний из которых зафиксирована равной единице, и вся система избыточного спроса $N + 1$ товара удовлетворяет свойству валовой заменимости. Используйте g для обоснования того, что равновесие здесь единственно.

17.F.17$^{\text{A}}$. (Беккер (Becker, 1962) и Грэндмонт (Grandmont, 1992)). Пусть $L = 2$, а количество потребителей — континуум. Все потребители обладают одинаковыми неотрицательными первоначальными запасами. Они, однако, не являются рациональными. В заданном бюджетном множестве они случайным образом делают свой выбор из потребительских наборов на бюджетной линии в соответствии с равномерным распределением на неотрицательных потребительских наборах. Пусть $z(p)$ — средний избыточный спрос (равный ожидаемой ценности выбора единичного потребителя). Покажите, что $z(\cdot)$ может быть порождена из задачи максимизации полезности Кобба — Дугласа (поэтому такая экономика допускает существование репрезентативного потребителя, позитивного в том смысле, в каком об этом говорится в разделе 4.D).

17.G.1$^{\text{B}}$. Пусть существует экономика обмена (и в ней цены пронормированы, $p_L = 1$), и пусть даны равновесные цены $p\left(\hat{\omega}_1\right)$ в виде дифференцируемой функции, определенной в открытом домене первоначальных запасов первых $L - 1$ товаров первого потребителя, т. е. $\hat{\omega}_1 = (\omega_{11}, \ \ldots, \ \omega_{L-1,1})$. Все остальные первоначальные запасы зафиксируем. Предположим, что функция спроса первого потребителя строго нормальна в том смысле, что $D_{w_1} x_1(p, \ w_1) \gg 0$ в соответствующем домене (p, w_1). Покажите, что тогда для любых $\hat{\bar{\omega}}_1$ и $\bar{p} = p(\hat{\bar{\omega}}_1)$ ранг матрицы $D_{\hat{\omega}_1} \hat{z}_1\left(\bar{p}; \ \hat{\bar{\omega}}_1\right) = L - 1$, а ранг матрицы $Dp\left(\hat{\bar{\omega}}_1\right) = L - 1$ (где $\hat{z}_1(p; \ \hat{\omega}_1)$ есть функция избыточного спроса первого потребителя на первые $L - 1$ товаров).

17.G.2^B^. Пусть начальные условия такие же, как в упражнении 17.G.1 или как в утверждении 17.G.2. Пусть $\hat{z}\left(\bar{p}; \ \hat{\bar{\omega}}_1\right) = 0$. Покажите, что тогда существуют экономики, в которых $D_p \hat{z}\left(\bar{p}; \ \hat{\bar{\omega}}_1\right)$, $(L - 1) \times (L - 1)$ отрицательно определена, но в которых $\dfrac{\partial p_1\left(\hat{\bar{\omega}}_1\right)}{\partial \omega_{11}} > 0$. (*Подсказка*: используйте утверждение 17.G.1 и аргументацию, примененную при его доказательстве.)

17.G.3^C^. Пусть постановка задачи такая же, как в упражнении 17.F.16, за исключением того, что теперь мы будем рассматривать две функции, $g(p) \in \mathbb{R}^N$ и $\hat{g}(p) \in \mathbb{R}^N$. Каждая из этих функций удовлетворяет условиям упражнения 17.F.16 (в частности, свойству SDS). Предположим, кроме того, что $\hat{g}(\cdot)$ получены сдвигом вверх из функции $g(\cdot)$, т. е. что $\hat{g}(p) \geq g(p)$ для любого $p \in [0, r]^N$. Докажите, что если $(p^{\min}, p^{\max})$ и $(\hat{p}^{\min}, \ \hat{p}^{\max})$ есть минимальный и максимальный векторы равновесных цен (см. упражнение 17.F.16) для $g(\cdot)$ и $\hat{g}(\cdot)$ соответственно, то $\hat{p}^{\min} \geq p^{\min}$ и $\hat{p}^{\max} \geq p^{\max}$. Если вам так будет проще, предположите также, что обе функции дают единственное решение (вы можете предположить, что $g(\cdot)$ и $\hat{g}(\cdot)$ — непрерывные). Проиллюстрируйте графически случай $N = 1$.

17.H.1^C^. Предположив, что система функций избыточного спроса $z(p)$ удовлетворяет свойству валовой заменимости, рассмотрите динамику нащупывания цен:

$$\frac{dp_l}{dt} = z_l(p) \text{ для каждого } l. \tag{*}$$

Пусть далее для каждого вектора цен p найдется $\psi(p) = \max\left\{\dfrac{z_1(p)}{p_1}, \ \ldots, \ \dfrac{z_L(p)}{p_L}\right\}$.

а) Покажите, что если $p(t)$ — решение для такой динамики (т. е. если $\dfrac{dp_l(t)}{dt} = z_l(p(t))$ для любых l и t) и если $z(p(0)) \neq 0$, то

$\psi(p(t))$ должно убывать по времени. (*Подсказка*: если $\dfrac{z_l\left(p(t)\right)}{p_l(t)} = \psi\left(p(t)\right)$, то $p_l(t)/p_{l'}(t)$ не может убывать в t для любого l'. Отсюда получаем, что $z_l(p(t))$ не может возрастать, если p_l возросло.)

b) Покажите, что $p(t)$ стремится к равновесным ценам при $t \to \infty$. (*Подсказка*: вспомните, что для (*) из закона Вальраса получаем, что $\sum_l p_l^2(t) = \text{const}$.)

17.H.2^В^. Пусть имеются выпускаемый товар и товар-измеритель. Цена на первый равна p. Данные для решения задачи заданы с помощью двух функций: потребление в экономике задано функцией избыточного спроса на выпускаемый товар $z(p)$, а производство — возрастающей обратной функцией предложения этого выпуска $p(z)$. Обе функции дифференцируемы. Кроме того, графики этих функций пересекаются в точке (1, 1); это и будет равновесием, которое нас будет интересовать в данном упражнении.

Для описания экономики дадим определения двум видам динамики:

(1) *Вальрасианская динамика цен* предполагает, что от значения p цена растет или падает в соответствии со знаком разницы между избыточным спросом и (прямым) предложением при этой цене.

(2) *Маршаллианская количественная динамика* предполагает, что в точке z объемы производства растут или падают в соответствии со знаком разницы между ценой со стороны спроса (т. е. обратным избыточным спросом) и ценой со стороны предложения (т. е. $p(z)$ при z).

a) Запишите вышеприведенные определения формально и проинтерпретируйте в экономических терминах.

b) Предположим, что технология близка к технологии с постоянной отдачей от масштаба. Покажите, что тогда в окрестности равновесия (1, 1) система всегда будет устойчивой в терминах вальрасианской динамики, но устойчивость в терминах маршаллианской динамики будет зависеть от угла наклона графика функции избыточного спроса (какая здесь будет зависимость?).

c) Выпишите общую ценовую и количественную динамику, в которой цены меняются по вальрасианской динамике, а количество — по маршаллианской. Изобразите (p, z)-фазовую диаграмму и объясните, почему динамические траектории обычно закручиваются вокруг равновесия в виде спирали.

d) Вернитесь к технологии, специфицированной в (b). Покажите, что система в (c) локально устойчива тогда и только тогда, когда равновесие устойчиво по Маршаллу.

e) Рассмотрите простейшие ценовые и количественные динамики в предельном случае постоянной отдачи от масштаба и избыточного спроса в виде функции-константы. Нарисуйте фазовую диаграмму. Пусть количественная динамика была изменена — количественные реакции стали зависеть не только от цены и издержек, но также и от «ожиданий продаж», т. е. от избыточного спроса. Окажет это стабилизирующий или, наоборот, дестабилизирующий эффект?

17.H.3^{A}. Для случая $L = 3$ изобразите пример, похожий на тот, что изображен на рис. 17.H.2, но на котором равновесие будет единственным; более того, это равновесие должно быть локально вполне неустойчивым.

17.I.1^{A}. Объясните, почему реплицирование, описанное в начале раздела 17.I, в оптимальном случае включает случай, в котором количества потребителей разного типа неодинаковы (предположите для простоты, что пропорции, в которых соотносятся эти типы, — рациональные числа). (*Подсказка*: переопределите размер первоначальной экономики.)

17.I.2^{A}. Рассмотрите производственную функцию с одним фактором и одним выпуском $q = v^2$, где v — объем необходимого фактора. Покажите, что соответствующее производственное множество Y является аддитивным, но наименьший конус Y^*, содержащий его, не замкнут. Обсудите, в каком смысле велика невыпуклость Y. Объясните, почему, каким бы ни было количество потребителей, не существует подходящей концепции равновесия, при которой такое равновесие (почти) существует.

17.I.3^{B}. Пусть в экономике есть три товара: высококачественный (1), низкокачественный (2), а также труд (3). Товары (1) и (2) могут производиться с использованием труда в соответствии со следующими производственными функциями: $f_1(v) = \min\{v, 1\}$ и $f_2(v) = \min\{v^{\beta}, 1\}$, $0 < \beta < 1$. Экономика в совокупности обладает только одной единицей труда. Полезность потребителей не зависит от труда как товара. В этой экономике имеется также два типа агентов, группы агентов одинаковы и велики. «Богатые» и «бедные» агенты обладают одинаковыми первоначальными запасами, но «богатые» владеют полностью всеми долями в фирмах в этой экономике. Богатые тратят все свое богатство на высококачественный товар, бедные должны покупать товар одного из двух качеств (низкокачественный либо высококачественный товар); они не могут покупать оба. Функция полезности бедного агента имеет вид $u(x_1,\ x_2) = x_1 + \frac{1}{2}x_2$, где (x_1, x_2) могут оба не быть строго положительными.

a) Какой стандартной предпосылке общей модели эта экономика не удовлетворяет?

b) Покажите, что не может не существовать равновесия, отличного от того, в котором производятся оба вида продукции.

c) Покажите, что равновесие в этой экономике существует.

17.AA.1^{A}. Рассмотрите экономику обмена, в которой предпочтения потребителей монотонны, строго выпуклы и представлены функциями полезности $(u_1(\cdot), \ldots, u_I(\cdot))$. Покажите, что для любого $(s_1, \ldots, s_I) \gg 0$ может иметь место максимум одно оптимальное по Парето распределение $x = (x_1, \ldots, x_I)$, такое что значения $(u_1(x_i), \ldots, u_I(x_I))$ пропорциональны $(s_1, \ldots, s_I)$.

17.AA.2^{B}. Рассмотрите подход с точки зрения благосостояния в применении к уравнениям равновесия, как это описано в приложении А (подход Негиши). Существование решения рассматриваемой там системы уравнений $g(s) = 0$ доказывается с помощью теоремы о неподвижной точке, подобно тому как это сделано для доказательства утверждения 17.C.2. Предположим, что рассматривается экономика чистого обмена с непрерывными, строго выпуклыми и строго монотонными предпочтениями и что $\omega_i \gg 0$ для всех i. Пусть также $g(s)$ представляет собой функцию, а не отображение (достаточное условие для этого следующее: предпочтения должны быть представимы дифференцируемой функцией полезности и в каждом оптимальном по Парето распределении как минимум один потребитель потребляет строго положительное количество каждого блага). Тогда:

a) покажите, что функция $g(s)$ непрерывна;

b) покажите, что $g(s)$ удовлетворяет закону, подобному закону Вальраса: $\sum_i g_i(s) = 0$ для всех s;

c) покажите, что если $s_i = 0$, то $g_i(s) > 0$ (*Подсказка*: если $s_i = 0$, то $u_i(x_i(x)) = 0$, и поэтому $p(s) \cdot x_i(s) = 0$.);

d) завершите доказательство существования равновесия (заметьте, что $g(s)$ также определена для s с нулевыми компонентами. Это упростит задачу).

17.AA.3^{B}. Предположим, что в экономике обмена потребительские множества — это $\mathbb{R}^L_+$, а предпочтения представимы вогнутой возрастающей функцией полезности $u_i(\cdot)$. Пусть $\Delta = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^L_+ : \sum_i \lambda_i = 1\right\}$ — симплекс весов полезности. Предложите систему уравнений для вальрасианского равновесия, которая бы ставила в соответствие каждой λ линейную функцию общественного благосостояния.

17.BB.1^{A}. Приведите графический пример (для случая $L = 2$) вальрасианского квазиравновесия со строго положительными ценами, которое не является равновесным в экономике, в которой:

(1) $Y_j = -\mathbb{R}^L_+$ для всех j;

(2) X_i — непустое, замкнутое, выпуклое множество, удовлетворяющее условию $X_i + \mathbb{R}^L_+ \subset X_i$ для всех i;

(3) для всех i предпочтения непрерывны, выпуклы и строго монотонны;

(4) $\omega_i \in X_i$ для всех i.

Почему этот пример не противоречит никаким результатам, полученным в тексте (см. небольшую дискуссию на эту тему после доказательства утверждения 17.BB.1)?

17.BB.2[B]. Рассмотрите экономику, в которой каждый потребитель желает приобрести только некоторые товары и обладает запасами тоже только некоторых товаров. Тем не менее относительно тех товаров, которые он желает приобрести, его предпочтения строго монотонны (они также непрерывны) на соответствующем неотрицательном ортанте. Пусть также $\sum_i \omega_i \gg 0$ и пусть экономика удовлетворяет следующему условию *неразложимости*.

Невозможно разбить потребителей на две (непустые) группы так, чтобы потребители из одной группы не желали товаров, которыми обладают представители другой группы.

Покажите, что в этом случае любое вальрасианское квазиравновесие является равновесием.

17.BB.3[C]. Рассмотрите ящик Эджворта, в котором у потребителей непрерывные, строго выпуклые и локально ненасыщаемые (но необязательно монотонные) предпочтения. Предположим, что свободное расходование невозможно. Докажите, что тем не менее кривые «цена–потребление» должны будут пересечься и, соответственно, равновесие будет существовать. Покажите, что в равновесии обе цены на товары не могут быть отрицательными и хотя бы одна цена должна быть положительной (последнее доказать сложнее).

17.BB.4[A]. Докажите, что если (x^*, y^*, p) — квазиравновесие со свободой расходования и если Y_1 удовлетворяет условию свободы расходования, то можно получить истинное квазиравновесие, изменив лишь выпуск фирмы 1.

17.BB.5[A]. Восполните недостающее звено доказательства леммы 17.BB.5 (т. е. покажите, что выпуклость предпочтений ведет к тому, что соотношения $x_i \succ_i x_{i\alpha}$ и $x'_i \succ_i x_{i\alpha}$ не могут одновременно иметь место для $x_{i\alpha} = \alpha x_i + (1 - \alpha)x'_i$.

17.BB.6[A]. Завершите доказательство леммы 17.BB.5, проверив, что $\tilde{y}_j(x, y, p)$ и $\tilde{p}(x, y, p)$ выпуклы.

17.BB.7[A]. Завершите доказательство леммы 17.BB.6, проверив, что отображения $\tilde{y}_j(\cdot)$ и $\tilde{p}(\cdot)$ полунепрерывны сверху.

17.BB.8[B]. (задача о существовании с производственными экстерналиями, см. работу Чипмана (Chipman, 1970)). Пусть существует L товаров, а труд — единственный фактор производства в этой экономике. Потребители делают выбор на потребительском множестве $\mathbb{R}_+^L$ в соответствии со своими непрерывными, строго монотонными и строго выпуклыми предпочтениями, а также первоначальными запасами труда. Товар $l = 1, \ldots, L - 1$ производится в секторе l, который состоит из J_l одинаковых фирм. Производственная функция фирмы из сектора l выглядит как $f_l\left(v_l\right) = \alpha_l v_l^{\beta_l}$, $0 < \beta_l \leq 1$. Особенность модели в том, что коэффициент производительности α_l не будет в ней константой, а будет зависеть от агрегированного использования труда сектором l, а точнее, будет выражаться как

$$\alpha_l = \gamma_l \left(\sum_j v_{lj} \right)^{\rho_l}, \ \gamma_l > 0 \text{ и } \rho_l \geq 0.$$

a) Выпишите определение вальрасианского равновесия в этой экономике. Предположите при этом, что индивидуальные фирмы пренебрегают влиянием использования ими рабочей силы на α_l. Чтобы сохранить обозначения, предположите, что доли прибылей одинаковы у всех потребителей.

b) Докажите существование вальрасианского равновесия в данной модели (сделайте дополнительные стандартные предположения, если найдете это необходимым). (*Подсказка*: общее доказательство из приложения В можно здесь использовать с очень небольшими изменениями.)

c) Выведите агрегированные производственные множества для каждого сектора. Какие условия на параметры β_l, γ_l и ρ_l гарантируют, что агрегированное производственное множество для сектора l обладает возрастающей, постоянной или убывающей отдачей от масштаба?

d) Заметьте, что условия существования (b) могут выполняться, даже если агрегированное производственное множество невыпукло. Что произойдет, если экстерналия сектора l будет интернализована за счет того, что все фирмы этого сектора объединятся под общим руководством?

e) Пусть $L = 2$, $\beta_l = 1$ и индивидуальные предпочтения квазилинейны по труду, т. е. описываются функцией полезности $u_i(x_{1i}) + x_{2i}$. Покажите аналитически и графически смещение равновесного уровня производства относительно общественно-оптимального.

17.ВВ.9$^{\text{В}}$. Приведите доказательство существования равновесия, используя описанный в конце приложения В подход с точки зрения игры двух игроков.

Глава 18. Некоторые основы конкурентного равновесия

18.A. Введение

До этого момента в части IV мы предполагали существование рынков, на которых цены воспринимаются экономическими агентами как *заданные*. Теперь обсудим четыре темы, которые имеют, по сути, два общих момента: во-первых, в них делается попытка охарактеризовать вальрасианские распределения на основе еще более общих, чем в определении, рассуждений. Во-вторых, в них подчеркивается роль большого количества торгующих между собой людей в выполнении этой задачи.

В разделе 18.B мы введем понятие *ядра*, которое можно рассматривать как нечто воплощающее в себе понятие неограниченной конкуренции. Мы также представим важную *теорему об одинаковом подходе в ядре* (core equivalence theorem).

В разделе 18.C исследуется более ограниченная концепция конкуренции на основе четко специфицированных механизмов. Анализ в этом разделе будет сосредоточен на пересмотре моделей некооперативной конкуренции в контексте модели общего равновесия, которая была разобрана в разделе 12.F.

Задача оставшихся двух разделов более нормативна. В разделе 18.D будет показано, как информационные ограничения со стороны политических сил (которые тем не менее в этой модели ограничены в выборе политических инструментов и вынужденных полагаться на принципы *самоотбора* (self-selection) и *свободы от зависти* (envy freeness)) могут привести к тому, что вальрасианские распределения будут единственными возможными Парето-оптимальными распределениями.

Основной целью раздела 18.E. будет характеристика вальрасианских распределений, выбранных среди оптимальных по Парето, в терминах их распределяющих свойств. В частности, нас будет интересовать, до какой степени можно быть уверенным, что в вальрасианском равновесии все агенты получают свои «предельные вклады» в коллективное экономическое общественное благосостояние.

Некоторые идеи этой главы (особенно те, что относятся к понятию ядра, но также и некоторые из раздела 18.E.) пришли в экономику из кооперативной теории игр. Поэтому представляется, что сейчас как раз удобный момент, чтобы ввести вас в эту теорию, и мы сделаем это в приложении А.

18.B. Ядро и равновесие

Теория, обзор которой мы представим ниже, была разработана Эджвортом (Edgeworth, 1881). Его целью было объяснить, как наличие множества взаимодействующих конкурентов приводит к возникновению системы цен, которые воспринимаются агентами как заданные, и следом за этим к равновесному по Вальрасу результату. Теория Эджворта в свое время не получила немедленного признания, и современные версии теории базируются на заново открытой уже в кооперативной теории игр концепции (известной теперь как «ядро»). В приложении А содержится краткое введение в кооперативную теорию игр, и оно при этом самодостаточно. Для дальнейшего, и достаточно несложного, чтения по этой теме мы рекомендуем работу Гильденбрандта и Кирмана (Hildenbrandt, Kirman, 1988).

Теория ядра отличается некоторой скупостью в том смысле, что ее экономический аппарат не использует никаких специальных механизмов торговли и не предполагает никаких особых институциональных условий работы рынка. Понятие конкуренции подразумевает лишь то, что торгующие рыночные агенты хорошо проинформированы об определенных характеристиках (первоначальных запасах и предпочтениях) других агентов и что они могут вступать в любые взаимовыгодные соглашения. Простейшим примером может служить экономика, в которой покупатель и продавец обменивают товар на деньги, но модель может включать и большее количество агентов и товаров.

Итак, рассмотрим экономику, состоящую из I потребителей. Каждый i-й потребитель описывается потребительским множеством $\mathbb{R}^L_+$, вектором первоначального запаса $\omega_i \geq 0$ и непрерывными, строго выпуклыми и строго монотонными отношениями предпочтения $\succsim_i$. Пусть также существует общественно доступная выпуклая технология с постоянной отдачей от масштаба[1] $Y \subset \mathbb{R}^L$. Например, мы могли бы сказать, что $Y = -\mathbb{R}^L_+$, т. е. мы имеем дело с экономикой чистого обмена. Все эти предпосылки будем считать базовыми до конца этого раздела.

Как обычно, будем говорить, что распределение $x = (x_1, \ldots, x_I) \in \mathbb{R}^{LI}_+$ *допустимо*, если $\sum_i x_i = y + \sum_i \omega_i$ для некоторых $y \in Y$.

[1] Предположение о постоянной отдаче от масштаба важно. В общем случае невозможно избежать явного определения долей собственности агентов. Описав их как доли в прибыли, мы должны иметь в виду, что прибыль зависит от цен, которые мы как раз и стремимся объяснить. Предположение о постоянной отдаче от масштаба помогает этого избежать. Но это не сильное ограничение: вспомним, что в разделе 5.B (предположение 5.B.2) говорилось, что всегда можно свести технологию к технологии с постоянной отдачей, дав иную интерпретацию долей собственности (и представив их как дополнительный «управленческий» фактор).

Немного отойдем от привычных обозначений. Пусть теперь I обозначает и *количество* потребителей, и *множество* потребителей. Каждое непустое множество потребителей $S \subset I$ будет тогда называться *коалицией*. Основная задача при использовании концепции ядра будет тогда состоять в определении условий, при которых коалиция потребителей может достичь такого соглашения, когда положение каждого члена коалиции улучшается. Определение 18.B.1 перечисляет такие условия.

Определение 18.B.1. Коалиция $S \subset I$ *улучшает* или *блокирует* доступное распределение $x^* = \left(x_1^*, \ \ldots, \ x_I^*\right) \in \mathbb{R}_+^{LI}$, если для каждого $i \in S$ можно найти потребительский выбор $x_i \geq 0$, такой что:

(1) $x_i \succ_i x_i^*$ для всех $i \in S$,

(2) $\sum\limits_{i \in S} x_i \in Y + \left\{\sum\limits_{i \in S} \omega_i\right\}$.

Определение 18.B.1 говорит о том, что коалиция S может улучшить некоторое распределение x^*, если существует какой-либо способ (используя *только* совокупные первоначальные запасы $\sum\limits_{i \in S} \omega_i$ и доступную технологию Y) произвести агрегированный набор товаров, который может быть распределен между членами коалиции S таким образом, чтобы положение каждого стало лучше.

Определение 18.B.2. Будем говорить, что допустимое распределение $x^* = \left(x_1^*, \ \ldots, \ x_I^*\right) \in \mathbb{R}_+^{LI}$ *удовлетворяет свойствам ядра*, если не существует коалиции потребителей $S \subset I$, такой что она может улучшить распределение x^*. *Ядром* тогда будет называться множество распределений с указанными свойствами.

В ящике Эджворта на рис. 18.B.1 представлен случай совпадения ядра и контрактной кривой в экономике с двумя потребителями. В случае двух

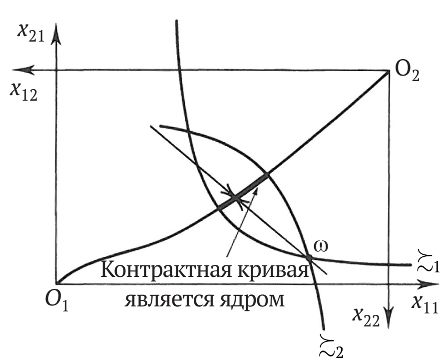


Рис. 18.B.1. Совпадение ядра с контрактной кривой для случая двух потребителей

потребителей возможны только три коалиции: {1, 2}, {1} и {2}. Любое распределение, не являющееся оптимумом по Парето, будет блокировано коалицией {1, 2}[2]. Любое распределение, принадлежащее множеству Парето, но не принадлежащее контрактной кривой, будет блокировано либо коалицией {1}, либо коалицией {2}. Если потребителей больше чем два, то и потенциальных блокирующих коалиций больше, но тот факт, что всегда среди них будет находиться и всеобщая коалиция, означает, что и *все распределения в ядре являются оптимальными по Парето*.

На рис. 18.B.1 также видно, что вальрасианское равновесие, принадлежащее контрактной кривой, обладает свойством ядра. Утверждение 18.B.1 говорит о том, что этот вывод вполне универсален и его можно получить как обобщение первой теоремы благосостояния. Действительно, в такой терминологии, как эта, первая теорема благосостояния просто утверждает, что вальрасианское равновесие не может быть блокировано коалицией всех агентов[3]. Следующий результат, а именно утверждение 18.B.1, показывает, что оно не может быть блокировано любой другой коалицией.

Утверждение 18.B.1. Любое вальрасианское равновесие обладает свойствами ядра.

Доказательство. Повторим просто доказательство первой теоремы благосостояния (утверждение 16.C.1) для случая экономики обмена. Случай технологии с постоянной отдачей от масштаба представлен в упражнении 18.B.1.

Пусть $x^* = \left(x_1^*, \ \ldots, \ x_I^*\right)$ — вальрасианское распределение, которому соответствует вектор цен $p \geq 0$. Рассмотрим произвольную коалицию $S \subset I$ и предположим, что потребительские наборы $\{x_i\}_{i \in S}$ таковы, что $x_i \succ_i x_i^*$ для всех $i \in S$. Тогда $p \cdot x_i > p \cdot \omega_i$ для всех $i \in S$, откуда $p \cdot \left(\sum_{i \in S} x_i\right) > p \cdot \left(\sum_{i \in S} \omega_i\right)$. Но тогда не может выполняться неравенство $\sum_{i \in S} x_i \leq \sum_{i \in S} \omega_i$, поэтому условие (2) определения 18.B.1 тоже не будет выполнено (вспомним, что речь идет об экономике чистого обмена). Отсюда получаем, что коалиция S не может блокировать распределение x^*. ■

Утверждение, обратное утверждению 18.B.1, конечно же неверно. В экономике с двумя потребителями, представленной на рис. 18.B.1, каждое распределение на контрактной кривой находится в ядре, но только

[2] Если выполняется предпосылка о непрерывности и строгой монотонности предпочтений и если допустимое распределение доминируется по Парето, то может найтись такое доминирующее его по Парето распределение, которое может улучшить положение *каждого* потребителя. С этой целью перераспределим небольшое количество каждого товара от потребителей, которым станет при этом лучше, любым другим потребителям. Если благо было перераспределено в очень небольших объемах, тогда из свойства непрерывности предпочтений получаем, что тот, у кого забрали этот товар, все еще выигрывает в такой ситуации, но, поскольку предпочтения агентов еще и строго монотонны, всем остальным потребителям стало лучше.

[3] Вспомните, что только что обсуждалось по предыдущей ссылке.

одно из них является равновесным. Теорема об одинаковом подходе в ядре, вариант которой мы чуть позже сформулируем, говорит о том, что обратное выполняется (приблизительно), если потребители многочисленны. Замечательно, что при расширении экономики неравновесные распределения постепенно выпадают из ядра и в пределе в нем остаются только равновесные. Интуитивно это можно понять, рассмотрев рис. 18.В.2. Возьмем некое распределение, например x, в котором потребитель 1 получает крайне желательный набор на контрактной кривой. Потребитель 2 не может ничего с этим поделать, поскольку его односторонние действия не приведут к улучшению его положения. Но предположим, что кривые безразличия и первоначальные запасы, которые представлены на рисунке, суть не индивидуальные характеристики, а характеристики некоторых *типов* потребителей и что экономика на самом деле состоит из четырех потребителей, по два каждого типа. Снова вернемся к распределению x, которое теперь можно назвать симметричным, в том смысле что каждый потребитель типа 1 получает набор x_1, а каждый из двух потребителей типа 2 — набор x_2. Теперь ситуация стала совсем иной, поскольку появилась новая возможность: оба потребителя типа 2 могут сформировать коалицию с *одним* потребителем типа 1, и на рис. 18.В.2 видно, что, действительно, распределение x может быть блокировано, если набор x_1' будет отдан одному из потребителей типа 1, а набор x_2' — потребителям типа 2. (заметим, что $-2\left(x_2' - \omega_2\right) = \left(x_1' - \omega_1\right)$)[4].

Способность агентов к таким действиям конечно же задается свойствами предпочтений, которые мы им приписали. Тем не менее, если в эконо-

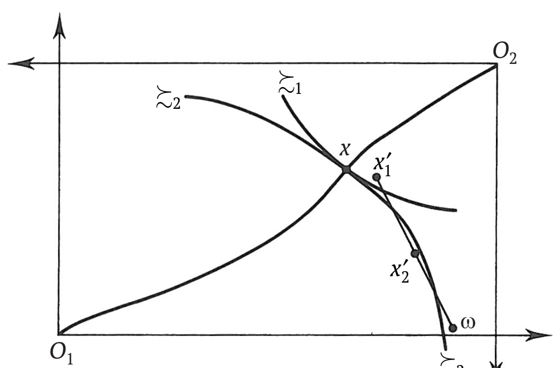


Рис. 18.В.2. Распределение на контрактной кривой, которое может быть блокировано двумя репликами

[4] Отметим, что все это похоже на конкуренцию по Бертрану, рассмотренную в разделе 12.С. Действительно, то, что происходит с этой тройственной коалицией, можно представить следующим образом: один из потребителей типа 1 «выталкивает» конкурента, предлагая лучшие условия, чем были бы в транзакции между одним из потребителей типа 2 и вторым потребителем типа 1. И хотя не хотелось бы глубже проникать в эту тему, сделаем некоторое замечание: на самом деле, существует несомненная связь между ценовой конкуренцией по Бертрану и «ядерной» конкуренцией. В частности, оба этих типа конкуренции достаточно «близоруки», поскольку, «подрезая» конкурента, потребитель запускает процесс блокирования и контрблокирования (в модели Бертрана это взаимный процесс снижения цен), и сам оказывается в положении (при этом, возможно, вальрасианского равновесия), в котором ему даже хуже, чем в первоначальной ситуации.

мике достаточно много потребителей, мы вполне можем сформировать такого типа блокирующую коалицию.

Та версия теоремы об одинаковом подходе в ядре, которую мы представим ниже, первоначально была разработана Эджвортом и обобщена Дебре и Скарфом (Debreu, Scarf, 1963), и в основе ее лежат интуитивные рассуждения, которые мы только что привели.

Начнем с определения множества *типов* потребителей, $H = \{1, \ldots, H\}$, каждый из которых обладает некоторыми предпочтениями $\succsim_h$ и первоначальными запасами ω_h. Теперь для каждого целого числа $n > 0$ можно определить экономику, реплицированную N раз как состоящую из N потребителей каждого типа, с общим числом потребителей $I_N = NH$.

Распределения, в которых потребители одинаковых типов получают одинаковые наборы, назовем распределениями *с одинаковым подходом*. Утверждение 18.B.2 говорит о том, что все содержащиеся в ядре распределения должны быть распределениями такого типа (необходимо сказать, что последнее характерно только для рассматриваемой реплицированной N раз экономики, в которой количество потребителей каждого типа одинаково. Общий случай, где это не выполнено, рассматривается в упражнении 18.B.2).

Утверждение 18.B.2. Обозначим при помощи индекса hn n-го потребителя типа h и предположим, что распределение

$$x^* = \left(x_{11}^*, \ \ldots, x_{1n}^*, \ \ldots, x_{1N}^*, \ \ldots, x_{H1}^*, \ \ldots, x_{Hn}^*, \ \ldots, x_{HN}^*\right) \in \mathbb{R}_+^{LHN}$$

принадлежит ядру реплицированной N раз экономики. Тогда будем говорить, что распределение x^* *удовлетворяет свойству одинакового подхода*, т. е. что все потребители одного типа потребляют одинаковые наборы:

$$x_{hm}^* = x_{hn}^* \text{ для всех } 1 \le m, n \le N \text{ и } 1 \le h \le H.$$

Доказательство. Предположим, что допустимое распределение $x = \left(x_{11}, \ \ldots, x_{HN}\right) \in \mathbb{R}_+^{LHN}$ не удовлетворяет свойству одинакового подхода, поскольку, например, $x_{1m} \neq x_{1n}$ для некоторых $m \neq n$. Тогда можно показать, что x не будет обладать свойством ядра. В частности, x может быть улучшено любой коалицией из H членов, сформированной посредством выбора из каждой пары потребителей (каждого повторения) потребителя, который оказался в наихудшем положении. Предположим, без потери общности, что для каждого h потребитель $h1$ и есть тот, который в наихудшем положении, т. е. для него $x_{hn} \succsim_h x_{h1}$ для всех h и n. Найдем теперь среднее потребление каждого из типов потребителей: $\hat{x}_h = \left(1/N\right) \sum_n x_{hn}$ и вспомним, что в силу строгой выпуклости предпочтений (заметим, что потребители типа 1 получают неравные наборы):

$$\hat{x}_h \succsim_h x_{h1} \text{ для всех } h \text{ и } \hat{x}_1 \succ_1 x_{11}. \qquad (18.B.1)$$

Мы утверждаем, что коалиция $S = \{11, \ldots, h1, \ldots, H1\}$, сформированная из H членов, может сама достичь распределения $(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_H) \in \mathbb{R}_+^{LH}$. Таким образом, поскольку верно (18.B.1), первоначальное неравное распределение может быть блокировано коалицией S[5]. Чтобы проверить допустимость $(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_H) \in \mathbb{R}_+^{LH}$ для коалиции S, заметим, что распределение $x = (x_{11}, \ldots, x_{HN}) \in \mathbb{R}_+^{LHN}$ доступно, и поэтому существует некоторый $y \in Y$, такой что $\sum_h \sum_n x_{hn} = y + N\left(\sum_h \omega_h\right)$, откуда

$$\sum_h \hat{x}_h = \frac{1}{N} \sum_h \left(\sum_n x_{hn}\right) = \frac{1}{N} y + \sum_h \omega_h.$$

Однако из предпосылки о постоянной отдаче от масштаба технологии Y получаем, что $\left(\frac{1}{N}\right) y \in Y$, откуда $(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_H) \in \mathbb{R}_+^{LH}$, действительно доступно для членов коалиции S. ■

Утверждение 18.B.2 позволяет рассматривать распределения из ядра как векторы фиксированной длины LH, не зависящей от того, какую реплику мы с ними ассоциируем. Исключительно в терминологических целях назовем вектор $(x_1, \ldots, x_H) \in \mathbb{R}_+^{LH}$ *распределением типов*, и пусть это будет, для любой реплики N, таким равным распределением, в котором каждый потребитель h получает x_h. Распределение типов $(x_1, \ldots, x_H) \in \mathbb{R}_+^{LH}$ допустимо, если $\sum_h x_h = y + \sum_h \omega_h$ для некоторых $y \in Y$. Заметим, что для любой реплики N соответствующее распределение одинакового подхода допустимо, поскольку

$$\sum_h N x_h = Ny + N\left(\sum_h \omega_h\right)$$

и поскольку $Ny \in Y$ в силу постоянной отдачи от масштаба технологии Y.

Утверждение 18.B.2 дает возможность рассмотреть распределения ядра из реплицированной экономики как допустимые распределения типов. Обозначим через $C_N \subset \mathbb{R}_+^{LH}$ множество допустимых распределений типов, для которых распределения одинакового подхода, полученные для N-реплик, обладают свойством ядра. Заметим, что C_N не зависит от N. Тем не менее всегда будет верно, что $C_{N+1} \subset C_N$, поскольку блокированное в N-реплики распределение типов будет блокировано также и в $(N+1)$-реплике коалицией, имеющей ровно тот же состав, что и та, что заблокировала

[5] Вспомним, что предпочтения здесь строго монотонны и непрерывны, так что если коалиция S может достичь распределения, которое лучше, чем x^*, для некоторых из членов этой коалиции, и хотя бы не хуже, чем x^*, для остальных, то это означает, что можно достичь распределения, строго лучшего для всех членов коалиции.

реплику. Отсюда, будучи подмножеством множества $\mathbb{R}^{LH}$, ядро может только уменьшаться при $N \to \infty$. В то же время из утверждения 18.B.1 известно, что ядро не может исчезнуть, потому что все вальрасианские распределения принадлежат C_N для всех N. Точнее даже, множество равновесных распределений типов не зависит от N (см. упражнение 18.B.3) и содержится в каждом C_N. Теорема об одинаковом подходе в ядре (которая, в контексте рассматриваемой экономики, объединяет утверждения 18.B.1, 18.B.2 и приведенное ниже утверждение 18.B.3) гарантирует, что те вальрасианские распределения будут единственными, которые останутся в ядре при $N \to \infty$.

Утверждение 18.B.3. Если допустимое распределение типов $x^* = \left(x_1^*, \ \dots, \ x_H^*\right) \in \mathbb{R}_+^{LH}$ обладает свойствами ядра при $N = 1, 2, \dots$, т. е. если $x^* \in C_N$ для всех N, то x^* будет вальрасианским распределением.

Доказательство. Чтобы доказательство было максимально интуитивно понятным, рассмотрим особый случай: экономику чистого обмена, в которой для всех h $\succsim_h$ отношения предпочтения представлены непрерывно дифференцируемой функцией полезности $u_i(\cdot)$ (при этом $\nabla u_h(x_h) \gg 0$ для всех x_h). Кроме того, пусть вектор первоначальных запасов ω_h предпочитается всем другим потребительским наборам x_h, которые не строго положительны. Это гарантирует, что любое распределение из ядра будет внутренним распределением. Отметим, что эти упрощающие анализ предположения не являются необходимыми для справедливости.

Предположим, что $x = (x_1, \dots, x_H) \in \mathbb{R}^{LH}$ — допустимое распределение типов, которое не является вальрасианским. Тогда нашей целью будет показать, что при достаточно большом N распределение x может быть блокировано.

Мы можем также предположить, что распределение x является оптимальным по Парето (иначе коалиция всех потребителей сразу блокирует распределение, и анализ закончен) и что $x_h \gg 0$ (иначе блокировать мог бы и единственный, например h-й потребитель). Тогда оптимальность по Парето позволит использовать при доказательстве вторую теорему благосостояния (утверждение 16.D.1), сделав вывод о том, что x — равновесие с трансфертами и некоторыми ценами $p = (p_1, \dots, p_L)$. Если x не является вальрасианским распределением, то должен существовать некоторый номер h, например $h = 1$, такой что $p \cdot (x_1 - \omega_1) > 0$. Фактически это означает, что потребители типа 1 получают положительный чистый трансфер от остальной экономики и поэтому оказываются в относительно лучшем положении (можно говорить, что этот тип агентов получает преференции). Можно показать, что пока N достаточно велико, потребители всех других заинтересованных в том, чтобы сформировать коалицию с $N - 1$ потребителями типа 1 (т. е. для того, чтобы «выкинуть» одного из потребителей типа 1).

Точнее, если один из агентов типа 1 исключается из экономики, то, чтобы вернуться к допустимости, остальная экономика должна «потребить» оставшуюся от него часть, $x_1 - \omega_1$. Это, конечно, несложно, если речь идет о товаре, относительно которого экономика являлась чистым продавцом для потребителя типа 1, но если экономика была чистым потребителем, все не так очевидно. Легче всего распределить выгоды и потери равномерно среди агентов. Вспомним, что коалиция состоит из $(N - 1) + N(H - 1)$ членов и что в каждом типе потребителей h каждый потребитель этого типа получает

$$x'_h = x_h + \frac{1}{(N-1) + N(H-1)}(x_1 - \omega_1).$$

Заметим, что

$$\left(N-1\right)x'_1 + Nx'_2 + \ldots + Nx'_H = \left(N-1\right)x_1 + Nx_2 + \ldots + Nx_H + \left(x_1 - \omega_1\right) =$$
$$= N\omega_1 + \ldots + N\omega_H - x_1 + x_1 - \omega_1 = (N-1)\omega_1 + N\omega_2 + \ldots + N\omega_I.$$

Отсюда получаем, что предложенные потребительские наборы допустимы для рассматриваемой коалиции. Отметим также, что потребление неотрицательно, если N достаточно велико. Для любого h каждый потребитель типа h стремится от x_h к x'_h. Что это — ухудшение или улучшение? Ответ состоит в том, что если N достаточно велико, то это, несомненно, улучшение. Покажем это, заметив, что если $p \cdot (x_1 - \omega_1) > 0$, то $\nabla u_h(x_h) \cdot (x_1 - \omega_1) > 0$ для всех h, поскольку $\nabla u_h(x_h)$ пропорционально p. Тогда, как это видно на рис. 18.B.3 (аналитически это можно показать, используя формулу Тейлора: см. упражнение 18.B.4), существует $\bar{\alpha} > 0$, такое что для всех h $u_h\left(x_h + \alpha(x_1 - \omega_1)\right) > u_h(x_h)$, как только $0 < \alpha < \bar{\alpha}$. Отсюда получаем, что для любого N, такого что $\left(1/\left[\left(N-1\right) + N\left(H-1\right)\right]\right) < \bar{\alpha}$, коалиция будет блокирующей.

Интуитивное объяснение вышеизложенного таково: коалиции нужно «потребить» $x_1 - \omega_1$. Измеренный в теневых ценах (shadow

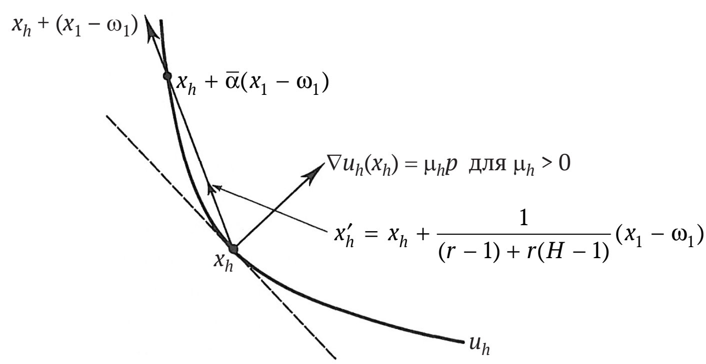


Рис. 18.B.3. Изменение потребления агента типа h из блокирующей коалиции

prices) экономики, этот проект выгоден для коалиции, т. к. $p \cdot (x_1 - \omega_1) > 0$. Если коалиция большая, каждый ее член тем не менее получит лишь очень маленькую долю, т. е. индивидуальная прибыль от коалиции как «проекта» будет измеряться в предельных величинах, но останется притягательной и на индивидуальном уровне (вспомним похожие рассуждения в разделе 3.I)[6]. ■

Утверждение 18.B.1 свидетельствует, что часть теоремы об одинаковом подходе в ядре, где речь идет о том, что равновесные распределения обладают свойствами ядра, обобщает первую теорему благосостояния. Вторая же часть теоремы, гарантирующая, что если экономика велика, то распределения в ядре являются вальрасианскими, представляет собой, по сути, версию второй теоремы благосостояния. Чтобы это увидеть, вернемся к более общей экономике (без реплицирования) и сформулируем свойство распределения, лежащего в ядре и являющегося вальрасианским, в терминах существования ценовой поддержки соответствующего множества. Для простоты ограничимся случаем экономики чистого обмена.

Для данного распределения, находящегося в ядре, $x = \left(x_1^*, \ldots, x_I^*\right) \in \mathbb{R}_+^{LI}$, по аналогии с доказательством второй теоремы благосостояния (утверждение 16.D.1), определим множество:

$$V_i = \left\{x_i : x_i \succ_i x_i^*\right\} \cup \left\{\omega_i\right\} \subset \mathbb{R}^L$$

$$V = \sum_{i \in I} V_i \subset \mathbb{R}^L.$$

При этом $\sum_i \omega_i \in V$. Более того, *выполнение свойства ядра для* x^* *означает, что* $\sum_i \omega_i$ *принадлежит границе множества* V. Чтобы это увидеть, заметим, что если $\sum_i \omega_i$ принадлежит внутренности множества V, то существует $z \in V$, такое что $z \ll \sum_i \omega_i$, т. е. существует $x' = (x_1', \ldots, x_I')$, для которого $x_i' \in V_i$ для всех i и $\sum_i x_i' = z \ll \sum_i \omega_i$. Тогда распределение x' допустимо, $x' \neq (\omega_1, \ldots, \omega_I)$, и для всех i либо $x_i' \succ_i x_i^*$, либо $x_i' = \omega_i$. Отсюда получаем, что множество потребителей $S = \left\{i : x_i' \neq \omega_i\right\}$ непусто, $x_i' \succ_i x_i^*$ для всех $i \in S$ и что выполняется равенство

$$\sum_{i \in S} x_i' \ll \sum_{i \in I} \omega_i - \sum_{i \notin S} x_i' = \sum_{i \in I} \omega_i - \sum_{i \notin S} \omega_i = \sum_{i \in S} \omega_i.$$

Таким образом, S является блокирующей коалицией.

Но если $p = (p_1, \ldots p_L) \neq 0$ — вектор цен, опорный к множеству V в точке $\sum_i \omega_i$, т. е. $p \cdot z \geq p \cdot \left(\sum_i \omega_i\right)$ для всех $z \in V$, то p — равновесный по Вальрасу вектор цен для рас-

---

[6] См. работу Андерсона (Anderson, 1978), в которой доказательство потребовало лишь минимальных предположений о свойствах экономики.

пределения $x^* = \left(x_1^*, \ \ldots, \ x_I^*\right)$. Чтобы это доказать, заметим сначала, что для всех i выполнено: $x_i' \succ_i x_i^*$ для некоторых x_i', достаточно близких к x_i^*. Таким образом, $x_i' + \sum_{k \neq i} \omega_k \in V$, откуда $p \cdot \left(x_i' + \sum_{k \neq i} \omega_k \right) \geq p \cdot \left(\omega_i + \sum_{k \neq i} \omega_k \right)$. При приближении к пределу (т. е. при $x_i' \to x_i^*$) получаем неравенство $p \cdot x_i^* \geq p \cdot \omega_i$ для всех i. Поскольку $\sum_i x_i^* \leq \sum_i \omega_i$, то должно быть верным равенство $p \cdot x_i^* = p \cdot \omega_i$ для всех i. Кроме того, всегда, когда $x_i' \succ_i x_i^*$, должно быть верно и $p \cdot \left(x_i' + \sum_{k \neq i} \omega_k \right) \geq p \cdot \left(\omega_i + \sum_{k \neq i} \omega_k \right)$, откуда $p \cdot x_i' \geq p \cdot \omega_i$. Если же теперь, как и в разделе 16.D (а также в приложении A главы 17), вспомнить о том, что рассматривается экономика с непрерывными и строго монотонными предпочтениями, и использовать эти свойства, последнее нестрогое неравенство можно превратить в строгое, т. е. $p \cdot x_i' > p \cdot \omega_i$.

Ключевое различие в доказательствах рассматриваемого утверждения и второй теоремы благосостояния (доказанной в разделе 16.D.) состоит в том, что множество $V \subset \mathbb{R}^L$ *не обязано быть выпуклым* и что ненулевые цены $p \in \mathbb{R}_+^L$, опорные к V при первоначальном запасе $\sum_i \omega_i$, могут и не существовать. Причина возможного отсутствия выпуклости в том, что индивидуальные множества $V_i \subset \mathbb{R}^L$ могут не быть выпуклыми: V_i — объединение предпочитаемого выпуклого множества в x_i^* и вектора первоначального запаса ω_i, который обычно находится вне предпочитаемого множества и поэтому отделен от него. Тем не менее *если* (*возможно, невыпуклые*) *множества* $V_i \subset \mathbb{R}^L$, *суммируясь, становятся многочисленны, то сумма* $\sum_i V_i \subset \mathbb{R}^L$ «*почти*» *выпукла*. Таким образом, существование (почти) опорных цен для распределений ядра можно рассматривать как еще один пример эффекта агрегирования, который ведет к «овыпуклению» соответствующего множества.

В заключение упомянем элегантный подход к теории ядра, впервые продемонстрированный Ауманном (Aumann, 1964) и Виндом (Vind, 1964). В работах этих исследователей рассматривалась модель похожей экономики с континуумом потребителей, в которой все суммы заменялись интегралами. Красота этого подхода состоит в том, что вместо приблизительных результатов, только что нами полученных, он давал точные. Теорема об эквивалентности ядра, например, звучит в этом случае так: распределение принадлежит ядру тогда и только тогда, когда оно равновесно по Вальрасу.

18.C. Некооперативные основы вальрасианского равновесия

Идея конкуренции, лежащая в основе теории ядра, крайне неструктурирована: в ней отсутствуют институты торговли и вообще никакой возможности выгодного решения. Именно поэтому, например, распределения в ядре гарантированно оптимальны по Парето.

Тем не менее во многих экономических кейсах дана структура конкуренции, и торговля происходит через определенные рыночные механизмы, делающие явным использование цен. Набор инструментов и информация, доступная конкурирующим агентам, в них ограничены. Цены агентом будут восприниматься как заданные, если он достаточно мал по сравнению с размером рынка. Мы уже изучили это в разделе 12.F. Теперь мы снова проверим эти утверждения, поскольку есть несколько свойств общего равновесия, которые стоило бы знать.

Существует большое количество моделей опосредованной ценами конкуренции (price-mediated competition), и мы рассмотрим три из них. Но прежде рассмотрим абстрактную ситуацию, подчеркивающую основные моменты такого моделирования.

Предположим, что существует I экономических агентов (абстрактных конкурентов — возможно, фирм). Есть также множество $P \subset \mathbb{R}^L$ возможных векторов цен и множество A «рыночных действий». Каждому i-му агенту соответствуют множество $A_i \subset A$ и вектор первоначального запаса $\omega_i \subset \mathbb{R}^L$. Далее, для каждого $a_i \in A_i$ и каждого $p \in P$ на $A \times P$ определено *правило торговли* со значениями в $\mathbb{R}^L$. Это правило торговли приписывает вектор чистой торговли $g(a_i; p)$ каждому агенту i, так что выполняется $p \cdot g(a_i; p) = 0$. При заданном векторе возможных действий $a = (a_1, \ldots, a_I)$ начнется процесс уравновешивания рынков, порождающий вектор цен $p(a) \in P$. Будем также предполагать, что каждый агент i характеризуется функцией полезности $u_i(g(a_i; p) + \omega_i)$, косвенно определенной на $A_i \times P$.

То, как мы задали модель, предполагает, что нам нужно будет использовать для анализа методы некооперативной теории игр, представленные в главе 8.

Определение 18.C.1. Профиль стратегий (действий) $a^* = \left(a_1^*, \ \ldots, \ a_I^*\right) \in$ $\in A_1 \times \ldots \times A_I$ будет называться *торговым равновесием*, если для каждого i будет выполнено неравенство:

$$u_i\left(g\left(a_i^*; \ p\left(a^*\right)\right) + \omega_i\right) \geq u_i(g\left(a_i; \ p(a_i; \ a_{-i}^*)\right) + \omega_i)$$

$$\text{для всех } a_i \in A_i\,^7.$$

Концепция некооперативного равновесия в определении 18.C.1 в точности такая же, что и в главах 8 и 12. Как и в указанных главах и в отличие от анализа ядра в разделе 18.B, такое равновесие не обязано быть оптимальным по Парето. Теперь поставим следующий вопрос: если торгующие агенты достаточно малы по сравнению с размером всей экономики, то при каких условиях система рынков аппроксимирует условия ценополучения, при которых каждый агент эффективно решает задачу оптимизации на конкурентном бюджетном множестве (и при этом равновесие было бы только близко к оптимальному по Парето).

Для данного $a = (a_1, \ldots, a_I) \in A_1 \times \ldots \times A_I$ определим

$$B_i\left(a\right) = \left\{x_i \in \mathbb{R}_+^L : x_i - \omega_i \leq g\left(a_i'; \ p\left(a_i', \ a_{-i}\right)\right) \ \text{ для некоторых } \ a_i' \in A_i\right\}$$

[7] Как и ранее, используем обозначение: $\left(a_i, \ a_{-i}^*\right) = \left(a_1^*, \ \ldots, \ a_{i-1}^*, \ a_i, \ a_{i+1}^*, \ \ldots, \ a_I^*\right)$.

как *эффективное бюджетное множество i*-го агента (торговца). Это означает, что $B_i(a)$ представляет собой множество чистых сделок, которых i-й торговец может обеспечить *некоторым* выбором a_i, при том что оставшиеся торговцы выберут a_{-i}. Это множество достижимых чистых сделок будет близко к вальрасианскому бюджету

$$B\left(p(a),\ p(a)\cdot\omega_i\right)=\left\{x_i\in\mathbb{R}_+^L : p(a)\cdot x_i\le p(a)\cdot\omega_i\right\}$$

в ситуации одновременного выполнения следующих условий:

1) *Нечувствительность цен к его действиям*. Если граница $B_i(a)$ (почти) содержится в гиперплоскости, необходимо, чтобы уравновешивающие цены $p(a_i, a_{-i})$ как функции были очень нечувствительны к a_i[8]. Часто это можно гарантировать для больших экономик, в которых, как следствие, каждый конкурирующий агент относительно мал. Предположим, к примеру, что $p(a)$ имеет вид $p\left(\left(\frac{1}{r}\right)\sum_i a_i\right)$, где r — параметр, отвечающий за размер экономики (например, это может быть количество потребителей). На самом деле, достаточно часто задача сразу задается в таком виде (или трансформируется в такой вид), что действия влияют на цены только через некоторое среднее. В любом случае, как только задача представлена таким образом, становится очевидным тот факт, что *пока* $p(\cdot)$ *зависит непрерывным образом от среднего действия* $\left(\frac{1}{r}\right)\sum_i a_i$, *зависимость цен от индивидуальных действий* (предположим, что A_i ограничено) *с расширением экономики, т. е. с* $r\to\infty$, *будет становиться пренебрежительно малой*. Таким образом, непрерывность функции $p(\cdot)$ является ключевым свойством.
2) *Индивидуальное порождение (spanning)*. Если $p(a)$ практически не зависит даже от индивидуальных действий агентов, множество возможностей индивида может не быть достаточно большим. Например, граница множества $B_i(a)$, даже будучи плоской, может быть, как это показано на рис. 18.C.1(a), «слишком маленькой» или даже иметь меньшую размерность — как это показано на рис. 18.C.1(b), где такая граница вырождается в вектор первоначального запаса (и никакая торговля невозможна). Выполнение свойства индивидуального порождения нужно проверять всегда, и обычно это принято делать, убедившись сначала, что $g(a_i, p)$ достаточно чувствительно к изменениям a_i, а потом — что A_i достаточно велико.

Обсудим вкратце три примера, иллюстрирующие предложенные выше идеи[9].

[8] Вспомним, что $p\left(a_i', a_{-i}\right)\cdot g\left(a_i'; p\left(a_i', a_{-i}\right)\right)=0$ для всех a_i'. Таким образом, если $p\left(a_i', a_{-i}\right)$ (почти) не зависит от a_i', тогда $B_i(a)$ (почти) содержится в гиперплоскости, перпендикулярной $p(a)$.

[9] Больше информации об общем равновесии и моделях Курно в том смысле, в которых они рассмотрены в примерах 18.C.1 и 18.C.2, можно найти в работах Габжевича и Вьяла (Gabszewicz, Vial, 1972). Обзор этой области исследований см. в работе Мас-Колелла (Mas-Colell, 1982).

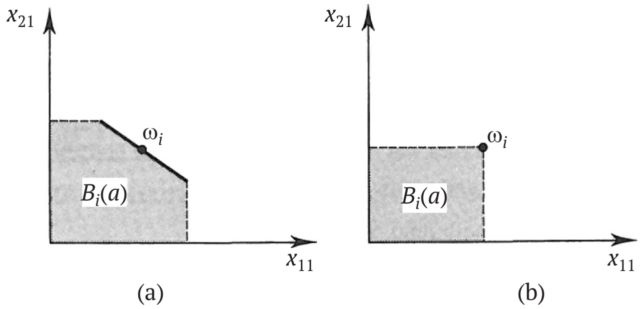


Рис. 18.C.1. (a) и (b) — два примера бюджетного множества, эффективного с точки зрения порождений

Пример 18.C.1 *Общее равновесие и конкуренция по Курно в экономике с единственным производимым товаром*. По сути, это будет та же модель, что уже была рассмотрена в разделе 12.C, за исключением того, что теперь при анализе будет использована «функция обратного спроса» в самой общей ее форме, т. е. в виде зависимости, ставящей в соответствие каждой уравновешивающей цене агрегированное производственное решение. Это будет сделано с целью показать возможность эффектов богатства (отличительной особенности подхода с точки зрения общего равновесия).

Рассмотрим эту модель более детально. Предположим, что в экономике есть только два товара: потребительское благо и «деньги» (которые также являются мерой стоимости, и цена единицы денег равна 1). Пусть также в экономике имеется r идентичных потребителей с первоначальным запасом денег у каждого, равным единице. При ценах $p \in \mathbb{R}$ на потребительский товар спрос потребителя на этот товар можно выразить как $x(p) \in \mathbb{R}$. Пусть имеется также J фирм, производящих из денег потребительский товар. Фирмы определяют объемы производства. Предельные издержки равны нулю. Для простоты предположим, что владельцы фирм — это особая, отдельная группа людей, заинтересованная исключительно в получении денег. Имея в виду все перечисленные предпосылки модели, получаем, что для любого объема производства $q = \sum_j q_j$ и любого значения параметра r рыночная цена потребительского товара должна быть решением системы уравнений, описывающих общее равновесие в этой системе, т. е. $rx(p) = q$ или $x(p) = q/r$. Будем предполагать, что для любых q/r рынок выбирает решение этого уравнения, $p\left(\frac{q}{r}\right)$[10].

В квазилинейной экономике, в контексте модели частичного равновесия, рассмотренной в главе 12, $x(\cdot)$ является убывающей непрерывной функцией, и поэтому обратная к ней функция $p(\cdot)$ существует и тоже *непрерывна* (и убывает). Отсюда следует, что если r достаточно велико, то $p\left(\sum_j q_j/r\right)$ будет вполне нечувствительно к индивидуальному решению какой-либо фирмы. Таким образом, фирмы практически становятся прайс-тейкерами (воспринимают цену заданной), и, как результат, равновесие по Курно приближается к вальрасовскому равновесию. Тем не менее

[10] Если рассматривать этот пример как частный случай абстрактной модели торговли, описанной выше, то можно говорить о J фирмах, как об игроках, при этом каждая j-я фирма «наделена» единицей первого товара, а ее стратегической переменной является $q_j \in [0, 1] = A_j$. Тогда правилом торговли будет $\left(q_j;\ p,\ 1\right) = \left(-q_j,\ pq_j\right)$.

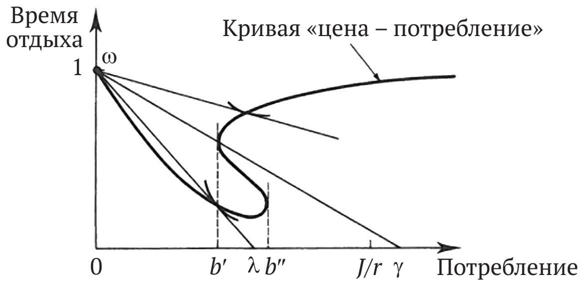


Рис. 18.C.2. Экономика с невозможностью непрерывного выбора цен

в контексте рассматриваемого общего равновесия функция $p(\cdot)$ может не быть непрерывной. Последнее проиллюстрировано на рис. 18.C.2, где показана кривая «цена – потребление» потребителя и где не существует возможности выбрать денежный спрос, а отсюда и цены, передвигаясь вдоль этой кривой, когда потребление, q/r, меняется от 0 до J/r[11]. Положение потенциального равновесия по Курно будет зависеть здесь от того, каким образом рынок будет выбирать цены $p(\cdot)$ в области $[b', b'']$ подушевого потребления, но тем не менее возможность существования равновесия по Курно, отделенного от вальрасовского равновесия, вполне реальна вне зависимости от размера экономики. На рис. 18.C.3 выбраны конкретные

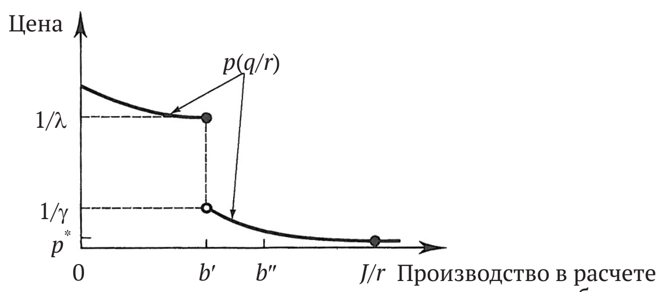


Рис. 18.C.3. Выбор равновесных цен

цены $p(\cdot)$. Заметим сначала, что в вальрасовском равновесии в рассматриваемой модели все фирмы должны осуществлять производство в соответствии со своими мощностями (и тогда равновесной ценой будет цена p^*). Однако в предположении, что $r > (J\lambda/\gamma b')$, каждая фирма производит $\dfrac{rb'}{J} < 1$ (для подушевого потребления, равного b'), образуя равновесие по Курно: поскольку цены $p(\cdot)$ в области $[0, b']$ очень эластичны, ни одной из фирм не будет выгодно сокращать производство, и если одна из фирм увеличит производство даже как угодно мало, произойдет резкое и крайне невыгодное для фирм падение цен[12] (более подробно об этом можно посмотреть в работе Робертса (Roberts, 1980)). ■

[11] Этот пример достаточно надуман в том смысле, что деньги оказываются товаром Гиффена. Если потребители не идентичны, такое предположение можно убрать.

[12] Если каждая фирма производит $\dfrac{rb'}{J}$, то прибыль ее будет составлять $\dfrac{rb'}{J\lambda} > 1/\gamma$. Но $1/\gamma$ — верхняя граница прибыли для любой фирмы, уклонившейся от общей производственной

Пример 18.C.2. *Конкуренция по Курно на рынке комплементарных товаров.* Преобразуем предыдущий пример. Пусть теперь потребительских товаров два и фирмы производят либо только первый из них, либо только второй, т. е. фирмы бывают либо типа J_1, либо, соответственно, J_2. Для простоты предположим, что потребитель обладает квазилинейной функцией полезности, значение которой измеряется в деньгах. Тогда, если $\psi(x_1, x_2)$ вогнутая строго возрастающая функция полезности, то уравновешивающие цены для любого набора совокупных объемов произведенной продукции (q_1, q_2) будут таковы:

$$p(q_1,\ q_2) = \nabla\psi(q_1/r\ ,\ \ q_2/r) = \left(\frac{\partial\psi(q_1/r\ ,\ \ q_2/r)}{\partial x_1},\ \ \frac{\partial\psi(q_1/r\ ,\ \ q_2/r)}{\partial x_2}\right) \gg 0.$$

Тогда в вальрасианском равновесии произведенные объемы будут равны (J_1, J_2). Теперь рассмотрим крайнюю ситуацию, т. е. такую, в которой два рассматриваемых потребительских товара комплементарны друг другу в том смысле, что для потребления одного совершенно необходимо одновременно потребить и другой, т. е. что $\psi(0, x_2) = \psi(x_1, 0) = 0$ для всех x_1 и x_2. Тогда мы можем утверждать, что отсутствие какой-либо активности (т. е. нулевое производство товаров) со стороны фирм и будет равновесием. Почему это так, несложно понять: если $q_2 = 0$, то любое строго положительное предложение первого товара, $q_1 > 0$, может быть потреблено рынком только при условии, что $p_1 = \nabla_1\psi\left(\frac{q_1}{r},\ 0\right) = 0.$ Таким образом, ни у одной из фирм не будет стимулов, чтобы произвести хоть сколько-то того или иного товара. С экономической точки зрения объединения хотя бы двух фирм необходимо, чтобы технически запустить рынок, имеет место нарушение непрерывности функции уравновешивающих цен в точке (0, 0), поскольку $p(\varepsilon, 0) = 0$ для всех $\varepsilon > 0$, но предел $p(\varepsilon, \varepsilon)$ при стремлении ε к нулю остается отличным от нуля[13]. ■

Пример 18.C.3. *Места торговли* (trading posts). Это один из целого семейства подобных примеров, приведенных Шепли и Шубиком (Shapley, Shubik, 1977). Он не совсем реалистичен, но обладает по крайней мере тремя преимуществами: это полная модель общего равновесия, все агенты в этой модели взаимодействуют стратегически (например, в предыдущих двух примерах потребители просто пассивно приспосабливались к обстоятельствам), и с этим примером легко работать с точки зрения анализа.

Итак, пусть экономика состоит из L товаров и I потребителей. Потребитель i обладает первоначальным запасом, равным $\omega_i \in \mathbb{R}^L_+$. Товар под номером L пусть будет называться «деньги», и пусть он будет распределяться так: предыдущие $L - 1$ можно пусть будет обменять на деньги на специальных местах торговли, и на каждом таком месте торговли $l \le L - 1$ каждый i-й потребитель сможет делать неотрицательные ставки $a_{li} = (a'_{li},\ a''_{li}) \in \mathbb{R}^2_+$. Это можно также представить себе и по-другому:

стратегии, произведя больше. Поэтому-то выпуск, равный $\frac{rb'}{J}$ для каждой фирмы, и является равновесным.

[13] При комплементарности невозможна непрерывная дифференцируемость ψ в начале координат, поэтому $p(\cdot)$ тоже перестает быть непрерывной, и в этом состоит центральная идея рассмотренного примера. Заметим, что отсутствие непрерывности в начале координат вполне естественно: например, оно имеет место всегда, когда кривые безразличия для $\psi(\cdot)$ гомотетичны (но не линейны). Более подробное изложение можно найти в работе Харта (Hart, 1980).

некоторый объем a'_{li} товара l размещается с одной стороны места торговли с целью этот объем продать. Одновременно другой объем a''_{li} денег размещается со стороны спроса с целью обменять на этот товар. Ставки, конечно, ограничены, потому что $a'_{li} \leq \omega_{li}$ и $\sum_{l \leq L-1} a''_{li} \leq \omega_{Li}$.

Для данных ставок потребителя i на рассматриваемом месте торговли $l \leq L - 1$ и данных цен $(p_1, \ldots, p_{L-1}, 1)$ искомым механизмом является следующее правило:

$$g_l\left(a_{1i}, \ \ldots, \ a_{L-1,\, i}; \ p_1, \ldots, \ p_{L-1}, \ 1\right) = \frac{a''_{li}}{p_l} - a'_{li}$$

для всех $l < L - 1$. Торговля денежным товаром зависит от бюджетных ограничений потребителя.

Для данного вектора ставок $a = (\mathrm{a}_{11}, \ldots, \mathrm{a}_{L-1,1}, \ldots, \mathrm{a}_{1I}, \ldots, \mathrm{a}_{L-1,I})$ всех потребителей уравновешивающие цены в терминах денег определяются как отношение предложенных объемов денег и товаров:

$$p_l(a) = \frac{\sum_i a''_{li}}{\sum_i a'_{li}} \qquad l = 1, \ldots, L - 1. \tag{18.C.1}$$

Заметим, что $p_l(a)$ вполне определена и непрерывна, только на месте торговли l (т. е. за исключением случая $a'_{li} = 0$ для всех i)[14].

Типичное эффективное бюджетное множество агента i выпукло и, если $\sum_{k \neq i} a'_{lk} \neq 0$ и $\sum_{k \neq i} a''_{lk} \neq 0$ для всех $l \leq L - 1$, ограничено сверху кривой, не имеющей прямых сегментов (формально это доказать вас попросят в упражнении 18.C.1). Это свойство отражает тот факт, что потребитель будет увеличивать ставку с одной стороны места торговли, ориентируясь на те ставки, которые делают против него на другой стороне. Рис. 18.C.4 иллюстрирует случай $L = 2$.

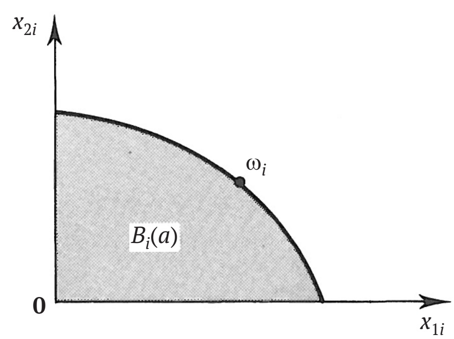


Рис. 18.C.4. Эффективное бюджетное множество торговой биржи (к примеру 18.C.3)

Из выражения 18.C.1 следует, что на любом заполненном месте торговли (в том смысле, что агрегированные позиции, на которых располагаются агенты по обе стороны этого места торговли, занимают много места по сравнению с первоначальными запасами любого потребителя) превалирует аппроксимирование при восприятии цен. Необходимым условием такой заполненности является наличие большого числа потребителей. Но это условие не является достаточным: даже в большой экономике возможно появление равновесия на незаполненном месте торговли, и, как следствие, равновесие с торговлей будет

[14] Для рассмотрения специального, но важного случая с единственным местом торговли (т. е. случая $L = 2$) можно было бы пойти еще дальше и убедиться, что при $\sum_i a''_{li} > 0$ и $\sum_i a'_{li} = 0$ относительная цена денег все еще вполне определена: она равна нулю. Существенно сложнее найти относительные цены для случая, когда $\sum_i a'_{li} = 0$ и $\sum_i a''_{li} = 0$.

далеко от вальрасианского равновесия. На самом деле, любое равновесие с торговлей в модели, в которой существует закрытое место торговли (его может вообще не быть), будет оставаться равновесием, если место торговли открыто, но не работает, т. е. когда для всех i верно, что $a_{li} = \left(a'_{li},\ a''_{li}\right) = 0$. С экономической точки зрения все это относится также и к примеру 18.C.2, в котором рассматриваются как минимум два агента (здесь это продавец и покупатель), которые должны оживить рынок. Математическая сложность здесь снова состоит в невозможности задания непрерывных цен, поскольку $a_{li} = 0$ для всех i.

До сих пор все ситуации, в которых равновесие с торговлей не достигает вальрасианского равновесия, а агенты достаточно малы, мы относили к провалам рынка, ведущим к нарушению непрерывности равновесных рыночных цен. Последний пример, кроме того, иллюстрирует и проблему индивидуального сочетания. Действительно, даже если рынки заполненные и, следовательно, цены с точки зрения индивида практически фиксированы, ничто не мешает торговому месту установить правило, по которому *товары могут быть обменены только на наличные* (в макроэкономике это называется ограничением «деньги вперед» (cash-in-advance) или ограничением Клоуэра (Clower)). Деньги, полученные при продаже продукции, не могут быть использованы для покупки продукции, поэтому для каждого данного потребителя вальрасианское бюджетное множество будет (почти) достижимым только тогда, когда первоначальных запасов денег достаточно, а именно только когда в решении задачи оптимизации для потребителя ограничение $\sum_{l \le L-1} a''_{li} \le \omega_{Li}$ не связывающее. Однако не существует какой-то достаточно общей причины, в силу которой это должно быть выполнено. Например, предположим, что $\omega_{Li} = 0$, и тогда i-й потребитель вообще не может приобрести никакого товара. ■

18.D. Пределы перераспределения

В разделе 16.D мы видели, что при подходящих предпосылках относительно выпуклости предпочтений и при условии, что богатство может быть перераспределено на основе паушальных трансфертов, оптимальные по Парето распределения могут быть децентрализованы соответствующими ценами. Тем не менее, как мы также указывали, необходимым условием для реализации возможности единовременных платежей является способность политической власти различать агентов, т. е. определять предпочтения и первоначальные запасы каждого потребителя в экономике. Ниже мы посмотрим, что происходит, если такое невозможно. Мы постулируем, что индивидуальные характеристики могут стать известны, только если агент их выявит, осуществив выбор. Мы увидим, что при достаточно общих предположениях нарушается вторая теорема благосостояния: единственные оптимальные по Парето распределения (которые могут быть поддержаны ценами), реализуются без трансфертов, т. е. они в точности вальрасианские распределения. Таким образом, если в экономике никакая персональная информация не доступна политической власти, то возможен конфликт равенства и эффективности, поскольку если трансферты должны быть введены, то нужно расстаться с мечтой о Парето-оптимальности. Причины этого конфликта исследуются глубже в разделах 22.B. и 22.C.

Итак, рассмотрим экономику обмена с I потребителями. Каждый i-й потребитель обладает потребительским множеством $\mathbb{R}^L_+$ и вектором первоначальных запасов $\omega_i \geq 0$, а также непрерывной, монотонной и строго квазивогнутой функцией полезности $u_i(\cdot)$.

Укажем ограничения на допустимые в экономике распределения, которые были сформулированы таким образом, чтобы распределение было результатом процесса, в котором каждый потребитель максимизировал свое благосостояние только с учетом рыночных ограничений, одинаковых для всех потребителей.

Определение 18.D.1. Допустимое распределение $x^* = \left(x_1^*, \ldots, x_I^*\right) \in \mathbb{R}^{LI}$ является распределением *самоотбора*, или *анонимным распределением*, если существует множество чистых сделок $B \subset \mathbb{R}^L$, которое можно назвать *обобщенным бюджетным множеством* или *системой налогов*, такое что для каждого i, $z_i^* = x_i^* - \omega_i$ есть решение задачи потребителя:

$$\max u_i(z_i + \omega_i) \text{ при условии } z_i \in B, z_i + \omega_i \geq 0.$$

На рис. 18.D.1 (a) и 18.D.1(b) представлены два примера распределений самоотбора[15]. Кривые безразличия и первоначальные запасы разных потребителей изображены в одном и том же ортанте.

Заметим, что если $x^* = \left(x_1^*, \ldots, x_I^*\right)$ — распределение самоотбора, то достаточно рассмотреть только $B = \left\{x_1^*, \ldots, x_I^*\right\}$. Таким образом, согласно определению 18.D.1, ни один i-й потребитель не завидует результатам торговли

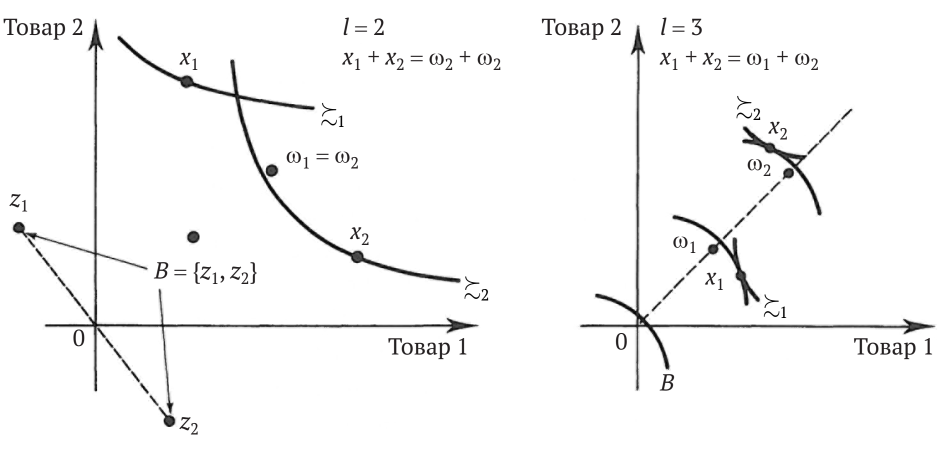


Рис. 18.D.1. (a) и (b) — два распределения самоотбора

[15] Такое распределение можно назвать еще и свободным от зависти. И идея «зависти» впервые была сформулирована в работе Фоли (Foley, 1967), затем о свободных от зависти распределениях при чистой торговле говорилось у Шмайдлера и Винда (Schmeidler, Vind, 1972). Обзор понятий (с уклоном в сторону этических рассуждений) рассматриваемой концепции представлен в работе Томсона и Вэриана (Thomson, Varian, 1985).

другого, каждый доволен тем, что получает именно он. Не будем пытаться разрешить вопрос о реальности B, только опишем рассматриваемую экономику: в ней имеется множество потребителей, чьи действия на индивидуальном уровне незаметны, однако политическая власть обладает совершенными статистическими данными о *распределении индивидуальных характеристик*, но при этом не знает, кто есть кто. В таком мире жизнеспособным политическим решением будет выбрать некоторое B и позволить потребителям самим в рамках этого множества выбрать наиболее предпочитаемые наборы. Поскольку то же самое фактически делается при помощи подоходного налога, можно назвать B системой налогов. Заметим, что в качестве инструмента экономической политики термин «объединенный бюджет» подразумевает способность предотвратить многократный выбор, поэтому, например, в качестве вышеуказанного ограничения не может выступать потоварный налог.

Поставим вопрос в терминах второй теоремы благосостояния: какие оптимальные по Парето распределения в такой экономике могут быть обеспечены такого рода общим бюджетом? То есть какие допустимые распределения могут быть одновременно оптимальными по Парето и обладать свойством самоотобранных? Эти вопросы, с одной стороны, являются более общими, чем те, которыми занимается вторая теорема, но, с другой стороны, и более узкими. Более общими — потому что рассматривают более общие (нелинейные) типы бюджетного ограничения и не только линейные гиперплоскости. Но более узкими, потому что одним из требований в этой модели является требование, чтобы *все* потребители имели в распоряжении *одно и то же* бюджетное множество.

Заметим сразу, что если $x^* = \left(x_1^*, \ \ldots, \ x_I^*\right)$ — равновесное по Вальрасу распределение, которому соответствует равновесный вектор цен $p \in \mathbb{R}^L$, то такое распределение будет оптимальным по Парето в силу первой теоремы благосостояния и при этом будет обладать свойством распределения самоотбора, поскольку мы можем взять в качестве множества $B = \{z : p \cdot z = 0\}$.

На рис. 18.D.2 распределение x^* представляет собой пример распределения самоотбора, лежащего во множестве Парето оптимальных распределений, но не являющегося равновесным по Вальрасу. Рис. 18.D.3 пока-

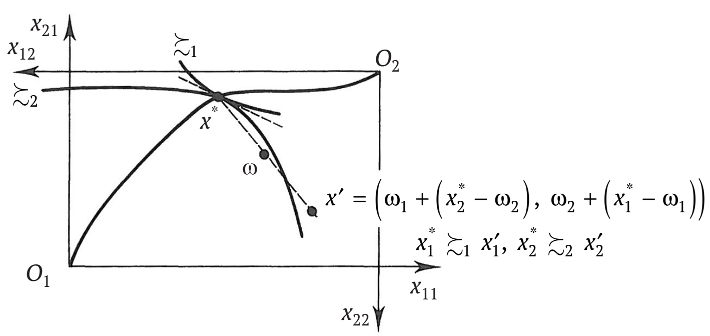


Рис. 18.D.2. Оптимальное по Парето, но не равновесное по Вальрасу распределение самоотбора

зывает, почему распределение x^* обладает свойством самоотобранного. На рисунке начало координат для потребительского множества выбрано в точке первоначальных запасов потребителей, чтобы можно было предпочтения потребителей выразить через результат их торговли. Тогда, поскольку $z_i^* = x_i^* - \omega_i$, $i = 1, 2$, получаем, что $z_1^* \succsim_1 z_2^*$ и $z_2^* \succsim_2 z_1^*$.

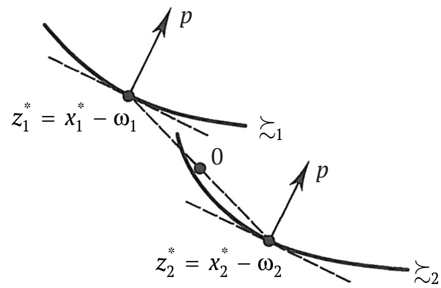


Рис. 18.D.3. Другой такой же, как на рис. 18.D.2, пример

Предыдущий пример в ящике Эджворта показывает, что для анонимного перераспределения в такой экономике вполне есть место. Конечно, случай там рассматривался специальный — только два потребителя (или только два типа потребителей), но ниже мы рассмотрим и случай с бóльшим количеством потребителей, которых при этом можно подразделить на множество типов потребителей. На первый взгляд, в такой ситуации оптимальность по Парето и совместимость трансфертов будет поставлена под вопрос, поскольку такое множество типов потребителей должно привести к возникновению зависти к выбору других (чистые продавцы тогда для достижения оптимальности по Парето также будут различаться по типам, соответствующим типам потребителей), и поэтому свобода построения объединенного бюджета будет ограничена.

На рис. 18.D.4 изображено распределение в экономике с двумя товарами и множеством типов потребителей (и поэтому с континуумом собственно самих потребителей)[16]. Типы потребителей проиндексированы по $t \in [0, 1]$[17],

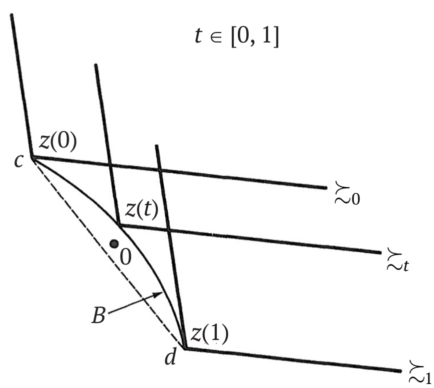


Рис. 18.D.4. Оптимальное по Парето распределение с континуумом потребителей и с самоотбором, не являющееся вальрасианским равновесием

[16] Аппроксимированная версия нижеследующего результата разработана для конечного, но большого количества такого рода типов.

[17] Важно также, что они непрерывно изменяются с t.

и их *предпочтения* $\succsim_t$ *зависят непрерывным образом от t.* Для простоты предположим, что первоначальные запасы всех потребителей равны. Предпосылка о непрерывности необходима, так как не позволяет разделить потребителей согласно их характеристикам (парам предпочтений и первоначальных запасов) на две несвязанные группы. Потребительские наборы различных типов распределены вдоль криволинейного сегмента *cd*, обладающего следующими свойствами:

(1) Это не вальрасианское распределение. Если бы это было так, то все выбранные наборы лежали бы на прямой; на самом же деле разные типы потребителей обмениваются товарами в разных пропорциях.
(2) Оно обладает свойством самоотбора. По рис. 18.D.4 видно, что выбор каждого потребителя максимизирует его полезность на объединенном бюджетном множестве *B*. Заметим, что граница любого допустимого бюджетного множества должна включать сегмент *cd*, состоящий из наборов, реально выбранных каким-то потребителем.
(3) Оно оптимально по Парето. Действительно, вектор цен $p = (1, 1)$ может превратить это распределение в равновесное с трансфертами, т. е. и оптимальное по Парето.

Заметим, что свойство (3) задается видом кривых безразличия, которые в соответствующих распределениях имеют излом. Если исключить изломы из рассмотрения, то, поскольку *cd* вогнут, а предпочтения у всех разные, получим, что в рассматриваемой экономике имеются два потребителя, обладающие предпочтениями с разной предельной нормой замещения в выбранных распределениях, что является нарушением оптимальности по Парето (поскольку в такой ситуации возникает возможность взаимовыгодного обмена). Только если *B* — прямолинейный сегмент, Парето-оптимальность можно сохранить, но тогда рассматриваемое распределение будет и равновесным по Вальрасу. Таким образом, получаем, что если кривые безразличия гладкие в точках выбора, то оптимальное по Парето распределение, обладающее свойством самоотбора, может не быть вальрасианским, только если характеристики агентов в экономике можно разбить на несвязанные группы. Имея в виду эти соображения, можно сформулировать утверждение 18.D.1[18].

Утверждение 18.D.1. Пусть в экономике обмена существует континуум различных типов потребителей, и пусть выполнены следующие предпосылки:
(1) Предпочтения всех потребителей выражены дифференцируемыми функциями полезности;
(2) Множество характеристик, которыми обладают составляющие экономику потребители[19], не может быть разделено на не свя-

[18] Такого типа результаты получены, например, Вэрианом (Varian, 1976) и Шампсо и Ларок (Champsaur, Laroque, 1981).

[19] Выражение «характеристики, которыми обладают составляющие экономику потребители», технически означает: содержащиеся в носителе распределения характеристик, обусловленные популяцией потребителей».

занные между собой классы. Формально это означает, что если $(u(\cdot), \omega)$ и $(u'(\cdot), \omega')$ — пары предпочтений и первоначальных запасов в экономике, то существует непрерывная функция $(u(\cdot; t), \omega(t))$ из $t \in [0, 1]$ типов потребителей, такая что

$$(u(\cdot; 0), \omega(0)) = (u(\cdot), \omega), (u(\cdot; 1), \omega(1)) = (u'(\cdot), \omega),$$

и $(u(\cdot; t), \omega(t))$ в такой экономике существует для всех t.

Тогда любое внутреннее (т. е. $x_i^* \gg 0$ для всех i) оптимальное по Парето распределение $x^* = \left\{x_i^*\right\}_{i \in I}$, обладающее свойством самоотбора, будет также и вальрасианским равновесием (здесь I — бесконечное число имен потребителей).

Доказательство. Приводимое ниже доказательство далеко от строгого. Кроме того, оно ограничено случаем $L = 2$.

Пусть $p = (p_1, p_2)$ — вектор цен, соответствующий распределению x^* как оптимальному по Парето. Вследствие дифференцируемости функции полезности и того, что данное распределение внутреннее, относительные цены p_1/p_2 определены единственным образом. Покажем, что тогда $p \cdot \left(x_i^* - \omega_i\right) = 0$ для всех i.

Обратим внимание сначала на то, что в распределении x^* выполняется свойство равенства: если $(u_i(\cdot), \omega_i) = (u_k(\cdot), \omega_k)$, то $x_i^* = x_k^*$. Действительно, ни i-й агент не будет завидовать k-му, ни k-й i-му. Это означает, что наборы x_i^* и x_k^* должны принадлежать одной и той же кривой безразличия с обычными отношениями предпочтения. Из свойства строгой выпуклости предпочтений получаем, что вектор цен p может соответствовать только одному из наборов на этой кривой безразличия, т. е. x_i^* и x_k^* должны совпасть.

Если множество чистых сделок, существующих в экономике, содержит лишь один набор, то набор этот может быть только нулевым вектором (иначе сумма всех сделок не будет равна нулю), и мы приходим к необходимому результату.

Предположим, тем не менее, что существуют как минимум два разных вектора чистых сделок в экономике, z_0 и z_1. На рис. 18.D.5 показаны не только два этих век-

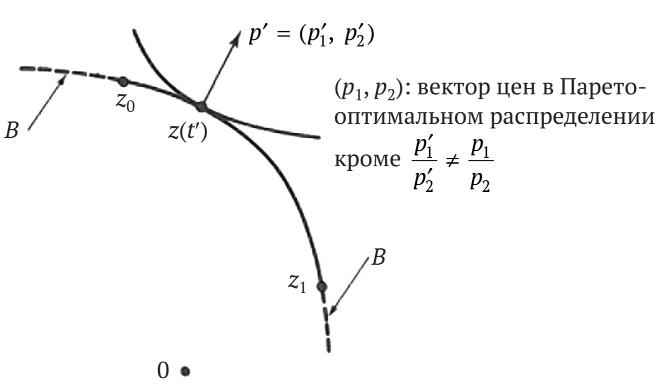


Рис. 18.D.5. Если граница чистых сделок не представляет из себя прямую, то проиллюстрированное распределение не оптимально по Парето (продолжаем предполагать присутствие самоотбора)

тора, но и все чистые сделки $z(t)$ всех потребителей, параметризованные согласно утверждению 18.D.1 (2), где $t = 0$, 1 соответствует векторам z_0 и z_1.

Ключевым здесь является то, что $z(t)$ непрерывна как функция от t, и это интуитивно понятно. Мы уже видели, почему выполняется свойство равенства: к одинаковым потребителям в такой экономике одинаковый подход. Если оставить технические детали, общую логику непрерывности $z(t)$ можно объяснить следующим образом: одинаковое отношение к одинаковым потребителям необходимо, чтобы предотвратить возникновение зависти.

Таким образом, при движении от $t = 0$ к $t = 1$ мы двигаемся непрерывно по чистым сделкам от z_0 к z_1, и, следовательно, граница объединенного бюджетного множества должна фактически соединять z_0 и z_1. Если так, то либо эта граница множества B представляет собой линейный сегмент, которому соответствует нормаль p (и тогда $p \cdot (z_0 - z_1) = 0$), либо между этими сделками есть некоторая точка (на рис. 18.D.5 она обозначена как $z(t')$), в которой «наклон» касательной к границе множества B, и, следовательно, MRS потребителя, выбирающего этот набор, отличен от p_1/p_2 (и в этом случае вектор цен p не будет поддерживать соответствующее распределение).

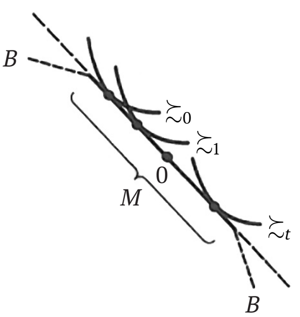


Рис. 18.D.6. Оптимальное по Парето распределение с самоотбором, являющееся вальрасианским

В завершение заметим, что часть границы множества B, назовем ее M, включающая все чистые сделки, существующие в экономике, — это нетривиальный линейный сегмент с нормалью p (следовательно, выпуклое множество). Поскольку сумма всех чистых сделок равна нулю, $0 \in M$, откуда $p \cdot z = p \cdot (z - 0) = 0$ для всех $z \in M$. В частности, $p \cdot \left(x_i^* - \omega_i\right) = 0$ для всех i, что показано на рис. 18.D.6. ■

18.E. Равновесие и принцип предельной производительности

В данном разделе мы исследуем, в какой степени вальрасианское равновесие можно охарактеризовать в терминах идеи, что индивиды получают в точности то, что вкладывают в экономическое благосостояние общества (в предельных величинах). Убедимся, что предположение о том, что потребителей много, снова оказывается критичным. Глубокий аналитический подход к рассмотрению этих проблем вы можете найти в работе Остроя (Ostroy, 1980).

Максимально упростим модель, ограничившись случаем квазилинейной экономики, в которой товар с номером L является товаром-измерителем.

Предположим, что в экономике также имеется H типов потребителей, для которых определена вогнутая дифференцируемая и строго возрастающая функция полезности

$$u_h(x_h) = \psi_h(x_{1h}, \ldots, x_{L-1,h}) + x_{Lh}.$$

Пусть эта функция определена на множестве $\mathbb{R}_+^{L-1} \times \mathbb{R}$, а ψ_h строго вогнута, при этом вектор первоначальных запасов есть $\omega_h \geq 0$.

Такая экономика определена как профиль $(I_1, \ldots, I_H)$ стратегий потребителей разных типов и $I = \sum_h I_h$, где I_h — количество потребителей типа h. Найдем максимум «общественной полезности» для любой экономики $(I_1, \ldots, I_H)$, как мы это делали в разделе 10.D[20]:

$$v(I_1, \ldots, I_H) = \max I_1 u_1(x_1) + \ldots + I_H u_H(x_H) \tag{18.E.1}$$

при условии (1) $I_1 x_1 + \ldots + I_H x_H \leq I_1 \omega_1 + \ldots + I_H \omega_H$,
(2) $x_{lh} \geq 0$ для всех $l \leq L - 1$ и h

Функция $v(I_1, \ldots, I_H)$ однородна первой степени: $v(rI_1, \ldots, rI_H) = rv(I_1, \ldots, I_H)$ для всех r. В частности,

$$v\left(I_1/I, \ldots, I_H/I\right) = \frac{1}{I} v\left(I_1, \ldots, I_H\right).$$

То есть подушевая общественная полезность для потребителей зависит только от того, из каких типов потребителей состоит общество, и не зависит от размера экономики. Это позволяет расширить анализ до ситуации с континуумом потребителей, определить $v(\mu_1, \ldots, \mu_H)$ для любого неотрицательного вектора $\mu = \left(\mu_1, \ldots, \mu_H\right) \in \mathbb{R}_+^H$ масс потребителей различных типов. Точнее,

$$v(\mu_1, \ldots, \mu_H) = \max \mu_1 u_1(x_1) + \ldots + \mu_H u_H(x_H) \tag{18.E.2}$$

при условиях:

(1) $\mu_1 x_1 + \ldots + \mu_H x_H \leq \mu_1 \omega_1 + \ldots + \mu_H \omega_H$,
(2) $x_{lh} \geq 0$ для всех $l \leq L - 1$ и h.

Если есть последовательность конечных экономик $\left(I_1^n, \ldots, I_H^n\right)$, такая что $I^n = \sum_h I_h^n \to \infty$ и $\left(1/I^n\right) I_h^n \to \mu_h$ для всех h, то вполне можно рассматривать $(\mu_1, \ldots, \mu_H)$ как континуум-предел последовательности из возрастающих конечных экономик.

Упражнение 18.E.1. Покажите, что функция $v(\cdot) : \mathbb{R}_+^H \to \mathbb{R}$ вогнута и однородна нулевой степени.

Функция $v(\cdot)$ представляет собой тип производственной функции, выпуск которой является общественной полезностью и факторами производства которой являются сами индивидуальные потребители. В пределе каждый индивид типа h будет фактором бесконечно малой величины, т. е. «бесконечно малого размера». Сконцентрируемся на анализе предела последовательности, предположив, что $v(\cdot)$ еще и дифференцируема[21].

[20] Поскольку функции полезности вогнуты, максимальная полезность достигается тогда, когда к потребителям одного типа относятся с одинаковым подходом.

[21] То же самое можно получить и при более слабых предположениях.

Определение 18.E.1. Для данного континуума потребителей $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_H) \in \mathbb{R}_+^H$ допустимое распределение[22] $(x_1^*, \ldots, x_H^*)$ будет называться *распределением предельного продукта* (или *распределением без остатка*), если

$$u_h(x_h^*) = \frac{\partial v(\mu)}{\partial \mu_h} \text{ для всех } h. \tag{18.E.3}$$

Проще это можно сформулировать так: распределение будет распределением без остатка, если каждый получает в точности столько же, сколько он в пределе внес сам.

Утверждение 18.E.1. Для любого континуума потребителей $\bar{\mu} = (\bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_H) \gg 0$ допустимое распределение $(x_1^*, \ldots, x_H^*) \gg 0$ есть распределение предельного продукта тогда и только тогда, когда оно является вальрасианским.

Доказательство. Если $x^* = (x_1^*, \ldots, x_H^*)$ — распределение предельного продукта, то, используя формулу Эйлера (см. раздел M.B математического приложения), можно получить

$$v(\bar{\mu}) = \sum_h \bar{\mu}_h \frac{\partial v(\bar{\mu})}{\partial \mu_h} = \sum_h \bar{\mu}_h u_h(x_h^*).$$

Отсюда следует, что x^* — решение задачи 18.E.2 для $\mu = \bar{\mu}$.

Предположим теперь, что $x^* = (x_1^*, \ldots, x_H^*)$ — допустимое распределение, являющееся решением задачи (18.E.2) и доставляющее значение общественной полезности, равное $v(\bar{\mu})$. Обозначим через p_l, $l = 1, \ldots, L$, значения множителя Лагранжа для ограничений $\sum_h \bar{\mu}_h (x_{lh} - \omega_{lh}) \le 0$, $l = 1, \ldots, L$ в задаче оптимизации (18.E.2) раздела M.K математического приложения. Поскольку $u_h(\cdot)$ квазилинейна, получаем

$$p_L = 1 \text{ и } p_l = \nabla_l \psi_h (x_{1h}^*, \ldots, x_{L-1,h}^*) \tag{18.E.4}$$
$$\text{для всех } l \le L - 1 \text{ и всех } 1 \le h \le H.$$

Из (18.E.4) следует, что вектор $p = (p_1, \ldots, p_L)$ — вектор вальрасианских цен для квазилинейной экономики (вспомните анализ, который был проведен в разделе 10.D.). Кроме того, применив теорему об огибающей (см. раздел M.L математического приложения) к решению задачи 18.E.2, получаем (подробнее см. в упражнении 18.E.2):

$$\frac{\partial v(\bar{\mu})}{\partial \mu_h} = u_h(x_h^*) + p \cdot (\omega_h - x_h^*). \tag{18.E.5}$$

Таким образом, можно сделать вывод о том, что распределение x^* равновесно по Вальрасу тогда и только тогда, когда x^* — решение за-

[22] Мы предполагаем, что потребители однородны. Допустимость тогда означает, что $\sum_h \mu_h x_h^* \le \sum_h \mu_h \omega_h$.

дачи (18.E.2) для случая $\mu = \bar{\mu}$, при этом выполняется условие (18.E.3), т. е. тогда и только тогда, когда x^* — распределение предельного продукта.

Выражение (18.E.5) интуитивно понятно. Левая его часть показывает, как вырастет максимальная сумма полезностей с добавлением в экономику одного дополнительного потребителя типа h. Правая часть свидетельствует, что на это влияют два фактора. С одной стороны, дополнительный потребитель h получает от остальной экономики потребительский набор x_h^*, который сразу же позволяет ему напрямую добавить его полезность $u_h\left(x_h^*\right)$ к сумме всех полезностей, т. е. общественной полезности. С другой стороны, получая x_h^*, потребитель вносит в экономику свой первоначальный запас ω_h. Отсюда общее изменение экономики от этого потребителя составит $\omega_h - x_h^*$. Как это оценивается остальной экономикой? Вектор «теневых» цен будет в точности равен $p = (p_1, \ldots, p_L)$, и общее изменение для экономики составит $p \cdot \left(\omega_h - x_h^*\right)$. Заметим, что, таким образом, вальрасианские распределения характеризуются тем, что второй эффект равен нулю: полезность потребителя равна его общему предельному вкладу в общественную полезность.

В упражнении 18.E.4. вам предлагается проверить, что предположение о том, что функция полезности гладкая, существенно для выполнения утверждения 18.E.1.

Теперь рассмотрим конечную экономику $(I_1, \ldots, I_H) \gg 0$. Мы можем определить предельный вклад потребителя типа h как

$$\Delta_h v(I_1, \ldots, I_H) = v(I_1, \ldots, I_h, \ldots, I_H) - v(I_1, \ldots, I_h - 1, \ldots, I_H).$$

В типичном случае допустимого распределения $\left(x_1^*, \ \ldots, \ x_H^*\right)$, для которого $u_h\left(x_h^*\right) = \Delta_h v\left(I_1, \ \ldots, \ I_H\right)$ для всех h, не существует. Чтобы это увидеть, заметим, что из вогнутости функции $v(\cdot)$ следует, что $\Delta_h v \geq \partial v / \partial \mu_h$ (обе части неравенства оценены для $(I_1, \ldots, I_H)$). Неравенство при этом будет строгим во всех случаях, кроме вырожденных. Более того, по формуле Эйлера $\sum_h I_h\left(\partial v/\partial \mu_h\right) = v\left(I_1, \ \ldots, \ I_H\right)$ (см. раздел M.B математического приложения), и, таким образом, можно сделать вывод, что $\sum_l I_h\left(\Delta_h v\right) >$ $> v\left(I_1, \ \ldots, \ I_H\right)$, т. е. невозможно в полной мере компенсировать каждому потребителю его предельный вклад в общественную полезность, не нарушая условия допустимости. В отличие от случая континуума потребителей теперь агенты уже не бесконечно малы и весь их вклад вовсе не является предельной величиной. В частности, нужно заметить, что в конечной экономике вальрасианское распределение обычно *не* является распределением предельного продукта. Из выражения (18.E.5) следует, что распределение $\left(x_1^*,\ \ldots,\ x_H^*\right)$, являющееся решением задачи (18.E.2) при $(\mu_1, \ldots, \mu_H) = (I_1, \ldots, I_H)$, будет вальрасианским тогда и только тогда, когда

$$u_h(x_h^*) = \frac{\partial v}{\partial \mu_h}(I_1,\ \ldots,\ I_H).$$

Но ведь мы только что показали, что обычно

$$\Delta_h v\left(I_1,\ \ldots,\ I_H\right) > \partial v\left(I_1,\ \ldots,\ I_H\right)/\partial \mu_h .$$

То есть в вальрасианском равновесии потребители получают компенсацию в соответствии с ценами, определяемыми предельными величинами первоначальных запасов, но они теряют дополнительный общественный излишек, появляющийся за счет немаржинальных единиц. Итак, мы получили еще одно подтверждение того, что концепция вальрасианского равновесия в первую очередь соответствует большим экономикам.

Итак, как мы видим, в экономиках с конечным числом потребителей невозможно распределить допустимым способом выгоды от торговли, одновременно придерживаясь принципа предельной производительности. Кооперативная теория игр как раз предоставляет возможность как-то примирить допустимость распределения и принцип предельной продуктивности, используя концепцию так называемого *вектора Шепли* (Shapley value). В той части приложения А, которая относится к теории игр, эта концепция изложена подробнее.

В экономике с профилем $(I_1, \ldots, I_H)$ *вектором Шепли* будет называться определенный вектор полезностей $(Sh_1,\ \ldots,\ Sh_H) \in \mathbb{R}^H$, удовлетворяющий условию $\sum_h I_h Sh_h = v\left(I_1,\ \ldots,\ I_H\right)$. Для каждого из типов потребителей h вектор Шепли Sh_h можно рассматривать как *среднее всех предельных полезностей* $\Delta_h v\left(I_1',\ \ldots,\ I_H'\right)$. Это среднее вычисляется для профилей $\left(I_1',\ \ldots,\ I_H'\right) \leq \left(I_1,\ \ldots,\ I_H\right)$, где вероятность, приписываемая профилю $\left(I_1',\ \ldots,\ I_H'\right)$, равна $1/I$, что интерпретируется как вероятность, приписываемая выборке размером $I_1' + \ldots + I_H'$, умноженная на вероятность получить именно этот профиль $\left(I_1',\ \ldots,\ I_H'\right)$, когда количество $I_1' + \ldots + I_H'$ потребителей независимо выбирается из исходной генеральной совокупности из I потребителей и профилем $\left(I_1,\ \ldots,\ I_H\right)$. Подробнее об этом можно прочитать в приложении А.

Распределение, которое дает вектор Шепли (будем далее называть его *распределением Шепли*), не связано каким-то конкретным образом с вальрасианским равновесием (или с ядром). Они могут совпасть только случайно. Тем не менее в экономиках с большим количеством потребителей эти распределения стремятся друг к другу, и это их свойство называется *теоремой об эквивалентности значений* (value equivalence theorem). Точное доказательство этой теоремы слишком сложно, чтобы приводить его здесь (доказательство можно посмотреть в работе Аумана (Aumann, 1975) и работах его последователей), однако базовые рассуждения интуитивно понятны.

Напомним два важных факта. Во-первых, если значения компонент набора $\left(I_1',\ \ldots,\ I_H'\right)$ велики, то удаление одного потребителя типа h из экономики практически ничего не меняет, т. е.

$$\Delta_h v(I_1',\ \ldots,\ I_H') \approx \partial v(I_1',\ \ldots,\ I_H')/\partial \mu_h .$$

Во-вторых, если значения компонент в $\left(I_1', \ \dots, \ I_H'\right)$ велики, то по закону больших чисел большинство профилей $\left(I_1', \ \dots, \ I_H'\right)$ являются хорошими выборками из $(I_1, \dots, I_H)$ и практически становятся ему пропорциональны.

Теперь, используя свойство однородности первой степени функции $v(\cdot)$ (т. е. однородность нулевой степени для $\partial v/\partial \mu_h$) и два вышеприведенных факта, получаем

$$\Delta_h v(I_1', \ \dots, \ I_H') \approx \frac{\partial v(I_1', \ \dots, \ I_H')}{\partial \mu_h} \approx \frac{\partial v(I_1, \ \dots, \ I_H)}{\partial \mu_h}$$

для большинства $\left(I_1', \ \dots, \ I_H'\right)$. Отсюда $Sh_h \approx \partial v\left(I_1, \ \dots, \ I_H\right) / \partial \mu_h$, что является выигрышем в терминах полезности потребителя типа h в вальрасианском равновесии в рамках экономики $(I_1, \dots, I_H)$.

Приложение А: кооперативная теория игр

Это приложение представляет собой краткое введение в кооперативную теорию игр. Более подробно эта теория представлена у Мулена (Moulin, 1988), Майерсона (Myerson, 1991), а также Осборна и Рубинштейна (Osborne, Rubinstein, 1994)[23].

В главе 7 мы уже сталкивались с игрой в нормальной и развернутой форме. В основе кооперативной теории лежит третий тип форм описания игры — *игра в характеристической форме* (characteristic form). Характеристическая форма — это описание выигрышей каждой группы игроков в ситуации выполнения игроками каждой группы всех связывающих обязательств (binding commitments). Хотя характеристическую функцию, в принципе, можно вывести из нормальной или развернутой формы игры, с точки зрения кооперативной теории игр аналитически желательно избегать деталей и сразу переходить к итоговому описанию стратегических позиций разных групп интересов[24].

После того как будет дано определение характеристической формы, мы перейдем к двум типам решений в таких играх — ядру и *вектору Шепли*.

Пронумеруем игроков по $I = \{1, \dots, I\}$, нарушив традицию обозначать множество и его размерность разными символами. Назовем непустые множества $S, T \subset I$ *коалициями*.

Исход игры — это список полезностей $u = (u_1, \dots, u_I) \in \mathbb{R}^I$, и соответствующий список полезностей, относящихся к коалиции, обозначим как $u^S = (u_i)_{i \in S}$. С математической точки зрения u^S представляет собой ограничение (или

[23] Книга Оуена (Owen, 1982) хотя уже не нова, но до сих пор представляет собой всеобъемлющее пособие по кооперативной теории игр. Полезным можно считать также учебник Шубика (Shubik, 1984), который, по сути, является энциклопедией, содержащей массу информации по теории игр.

[24] Тем не менее заметим, что одно из направлений в теории игр исходит из того, что сжатие информации, которое осуществляет характеристическая функция, не отдает должное стратегическим сложностям, неотделимым от создания твердых обязательств. Несмотря на убедительность этой аргументации, аналитические возможности игр в характеристической форме при изучении нормативных проблем экономики продемонстрированы в достаточной мере, и это более чем веская причина приветствовать такую «экономию».

проекцию) на координаты, соответствующие S. Таким образом, можно рассматривать u^S, как часть Евклидова пространства $\mathbb{R}^S$. На рис. 18.AA.1 показано, как с помощью шести собственных подмножеств, $S = \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}$ и $\{2, 3\}$, оцениваются исходы для трех игроков.

Определение 18.AA.1. Непустое замкнутое множество $U^S \subset \mathbb{R}^S$ является *множеством возможных уровней полезностей* для $S \subset I$, если оно *всеобъемлюще*:

$$\text{из } u^S \in U^S \text{ и } u'^S \le u^S \text{ следует } u'^S \in U^S.$$

Рис. 18.AA.2[25] иллюстрирует это понятие.

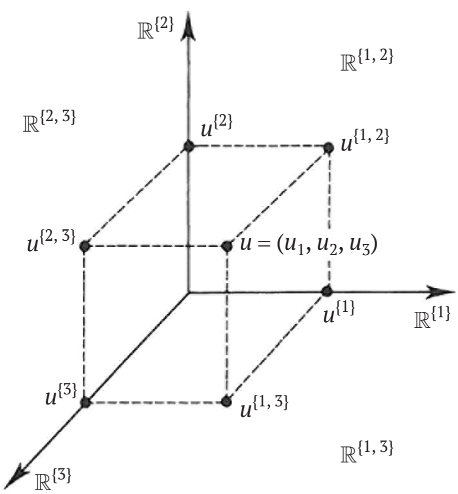


Рис. 18.AA.1. Исходы в терминах полезностей и их проекции на $\mathbb{R}^3$

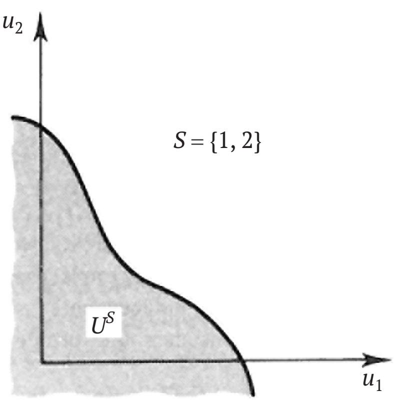


Рис. 18.AA.2. Множество возможных полезностей для $S = \{1, 2\}$

Определение 18.AA.2. *Игрой в характеристической форме* (I, V) будет называться множество игроков I и правило $V(\cdot)$, которое каждой коалиции $S \subset I$ ставит в соответствие множество возможных полезностей $V(S) \subset \mathbb{R}^S$.

Элементы множества $V(S)$ можно рассматривать как выигрыши игроков S, которых они могут достичь сами, если возьмут на себя обязательство действовать определенным способом. Важно отметить, что выражение «могут достичь» здесь относится к некоторой аналитической тонкости: дело в том, что действия, которые предпринимают члены группы I/S, обычно влияют на выигрыши игроков из S. В приложениях, следовательно, стоит явно указывать, как определяется $V(S)$.

---

[25] Заметим, что, как это уже было проделано в разделе 16.E, мы включили понятие свободы расходования в определение множества возможных полезностей.

Пример 18.АА.1. *Экономики*. Рассмотрите экономику с I потребителями, обладающими предпочтениями, которые описываются непрерывными возрастающими вогнутыми функциями полезностей $u_i : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$ и первоначальными запасами $\omega_i \geq 0$. Пусть также в этой экономике есть общественно доступная выпуклая технология с постоянной отдачей от масштаба $Y \subset \mathbb{R}^L$. Тогда мы можем дать определение игре в характеристической форме следующим образом:

$$V(S) = \left\{ \left(u_i(x_i) \right)_{i \in S} : \sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \in S} \omega_i + y, \ \ y \in Y \right\} - \mathbb{R}^S_+.$$

Здесь $V(S)$ — множество (векторов) выигрышей, которые могут получить потребители из коалиции S, торгуя друг с другом и используя технологию Y. Каждое множество $V(S)$ выпукло (см. упражнение 16.E.2). На рис. 18.АА.3 эти множества изображены для случая $I = 3$. ■

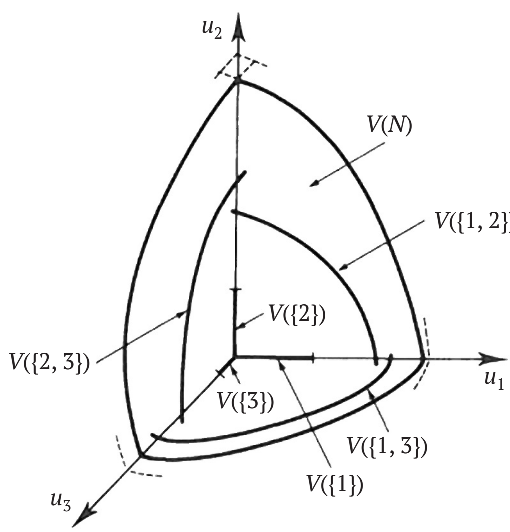


Рис. 18.АА.3. Семейство возможных полезностей

Пример 18.АА.2. *Голосование по правилу большинства*. Рассмотрим игру трех игроков, в которой любые два из трех игроков могут сформировать «большинство» и выбрать один из возможных вариантов из множества социальных политик A. Как только выбрана альтернатива $a \in A$, игроки получают выигрыши $u_i(a) \geq 0$, $i = 1, 2, 3$. Кроме того, любой игрок i имеет право в одностороннем порядке выйти из группы и получить выигрыш, равный нулю.

Теперь мы можем определить эту игру в характеристичной форме (I, V) как

$$V(I) = \left\{ \left(u_1(a),\ u_2(a),\ u_3(a) \right) : a \in A \right\} - \mathbb{R}^I_+,$$

$$V\left(\{i,\ h\}\right) = \left\{ \left(u_i(a),\ u_h(a) \right) : a \in A \right\} - \mathbb{R}^{\{i,h\}}_+ \text{ для всех пар } \{i, h\},$$

$$V\left(\{i\}\right) = -\mathbb{R}^{\{i\}}_+.$$

На рис. 18.АА.4 игра в характеристичной форме показана для ситуации с выбором из трех вариантов альтернатив, $A = \{a_1,\ a_2,\ a_3\}$; предполагается, что этим

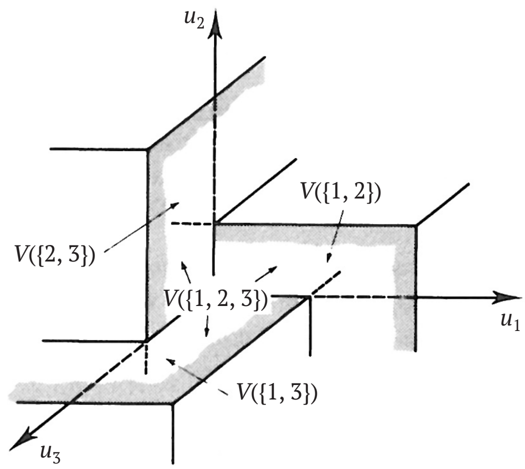


Рис. 18.АА.4. Множество возможных полезностей для примера 18.АА.2 с голосованием по правилу простого большинства

альтернативам соответствуют векторы полезностей (2, 1, 0), (1, 0, 2), (0, 2, 1). Заметим, что $V(\cdot)$ не обязано быть выпуклым, если, как это верно в данном случае, выбор дискретен и нет никакой возможности рандомизации или какой-либо формы трансфертов. ■

Определение 18.АА.3. Игра в характеристической форме (I, V) будет называться *супераддитивной*, если для любых непересекающихся коалиций S и $T \subset I$ (т. е. таких, что $S \cap I = \varnothing$) верно следующее:

$$\text{если } u^S \in V(S) \text{ и } u^T \in V(T), \text{ то } (u^S, u^T) \in V(S \cup T).$$

Супераддитивность означает, что коалиции S и T, если они объединятся, могут иметь выигрыши, по крайней мере не меньшие, чем у них были бы, если бы они действовали по отдельности. Это предположение мы будем обычно принимать (см. примеры 18.АА.1 и 18.АА.2). Если одна из возможностей для объединения двух непересекающихся коалиций включает возможность договориться действовать так, *как будто* эти коалиции независимы, то супераддитивность будет иметь место.

На протяжении всей этой книги мы часто упрощали анализ, предполагая квазилинейность индивидуальных функций полезности, т. е. предполагая, что один из товаров в экономике — товар-измеритель — может быть использован для перераспределения полезности между агентами в соотношении один к одному. То же самое верно и для кооперативной теории игр. Ее история в действительности полна примерами понятий, вначале сформулированных для случая трансферабельной полезности, а лишь затем обобщенных на более общие случаи, при этом без существенных потерь в интуитивном понимании процессов и аналитической силе доказательств.

В игре в характеристической форме предположение о квазилинейности предпочтений, или трансферабельности полезности, равносильно предположению о том, что множества $V(S)$ (как, например, в разделе 10.D) — полупространства в $\mathbb{R}^S$. Более того, выбирая единицы, в которых измеряется полезность, можно считать, что нормали гиперплоскостей, определяющих эти $V(S)$, имеют вид $(1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^S$ [26], и тогда множества $V(S)$ можно определить так:

$$V\left(S\right) = \left\{u^S \in \mathbb{R}^S : \sum_{i \in S} u_i^S \le v(S)\right\}$$

для некоторых $v(S) \in \mathbb{R}$. Другими словами, коалицию S можно рассматривать как такое объединение агентов, которые выбирают совместную стратегию, с тем чтобы максимизировать общую полезность, обозначенную как $v(S)$, которую после можно перераспределить между членами коалиции любым образом путем трансфертов по нормали. На рис. 18.AA.5 показаны такие распределения $V(S)$ для случая $I = 3$.

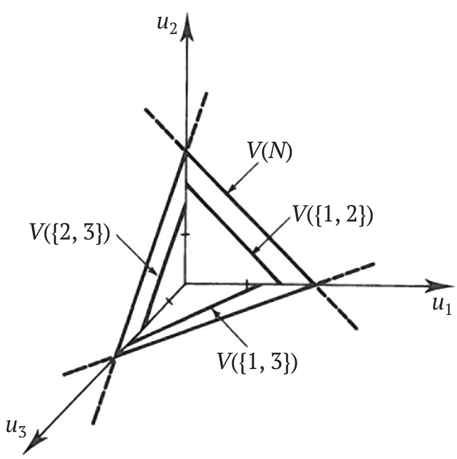


Рис. 18.AA.5. Множества возможных полезностей для игры с трансферабельной полезностью

Число $v(S)$ называют *выигрышем* коалиции S. Поскольку числа $v(S)$, $S \subset I$, составляют полное описание (I, V), можно ввести следующее определение (18.AA.4).

Определение 18.AA.4. Игра с *трансферабельной полезностью в характеристической форме* (TU-игра[27]) может быть определена через (I, v), где I — множество игроков а $v(\cdot)$ — функция, называемая *характеристической функцией*, которая приписывает каждой непустой коалиции $S \subset I$ число $v(S)$, называемое *выигрышем* коалиции S.

[26] Такой выбор единиц измерения полезности оправдан, поскольку все решения инвариантны к проделанной нормализации. Более подробно об этом можно посмотреть в главе 21.

[27] От англ. *transferrable utility*. — *Примеч. пер.*

Пример 18.АА.3. *TU-голосование по правилу простого большинства*. Предположим, что в примере 18.АА.2 (с обозначениями рис. 18.АА.4) добавлена возможность свободного перераспределения полезности среди игроков (например, один из товаров является товаром-измерителем, по отношению к которому предпочтения квазилинейны). Запишем соответствующую характеристическую функцию:

$$v(I) = 3, \quad v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = 3 \quad \text{и} \quad v(\{i\}) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad \blacksquare$$

Дальнейшие рассуждения, которые приводятся в этом приложении, никак не зависят от изменения выбора нуля шкалы полезностей. Обычно принимают $v(\{i\}) = 0$ для всех i.

На рис. 18.АА.6 показан крайне полезный графический трюк для случая игры с тремя игроками. Вместо того чтобы работать в трех измерениях одновременно, рассмотрим двумерный симплекс, который отражает все возможные деления в $v(I)$, при условии что $u_i \geq 0$ для всех i (а это означает, в терминах нормализации, которую мы только что обсудили, что $u_i \geq v(\{i\})$). Другие множества на том же рисунке представляют собой комбинации полезностей для коалиции из двух игроков $\{i, h\}$ в симплексе, удовлетворяющие условию $u_i + u_h \leq v(\{i, h\})$.

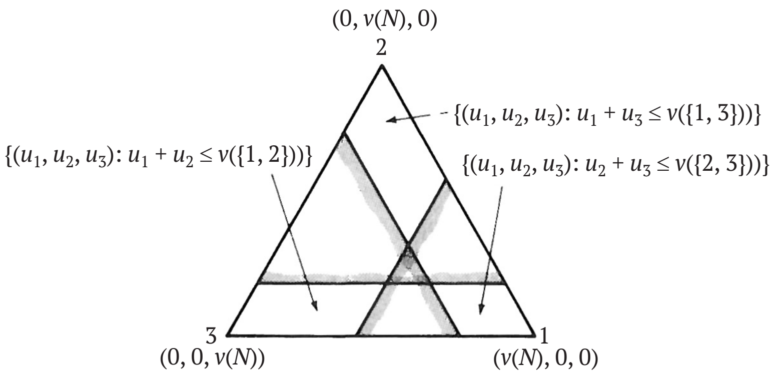


Рис. 18.АА.6. Использование симплекса для представления TU-игры трех игроков с полезностями, нормированными так, что $V(\{i\}) = 0$

Вернемся к двум известным нам концепциям кооперативной игры: *ядру* и *вектору Шепли*.

Ядро

Ядро представляет собой набор возможных исходов полезностей, обладающих тем свойством, что ни одна коалиция не смогла бы улучшить положение всех своих участников. Пустота ядра в рассматриваемой модели характерна для конкурентной нестабильности. Если же ядро непусто и мало, то можно сказать, что коалиционная конкуренция сама по себе дает детерминированный результат. Если же оно непустое и большое, то только коалиционная конкуренция сама по себе не сужает в достаточной мере множество возможных исходов.

Определение 18.АА.5. Для игры в характеристической форме (I, V) значения полезностей $u \in \mathbb{R}^I$ *блокируются или могут быть улучшены* коалицией $S \subset I$, если существует $u'^S \in V(S)$, такое что $u_i^S < u_i'^S$ для всех $i \in S$.

Если игра является TU-игрой (I, v), то исход $u = (u_1, \ldots, u_I)$ блокируется S тогда и только тогда, когда $\sum_{i \in S} u_i \leq v(S)$.

Определение 18.АА.6. Исход $u = (u_1, \ldots, u_I)$, допустимый для большой коалиции (т. е. $u \in V(I)$), лежит в ядре игры в характеристической форме (I, V), если не существует коалиции S, блокирующей u.

В TU-игре ядро представляет собой множество векторов полезности $u =$ $= (u_1, \ldots, u_I)$, удовлетворяющих линейным неравенствам:

$$\sum_{i \in S} u_i \geq v(S) \text{ для всех } S \subset I \quad \text{ и } \quad \sum_{i \in I} u_i \leq v(I).$$

На рис. 18.АА.7(а) показана игра с тремя игроками и непустым ядром. Напротив, на рис. 18.АА.7(b) ядро является пустым. Необходимые и достаточные условия непустоты ядра в TU-игре исследуются в упражнении 18.АА.1.

Упражнение 18.АА.2. Покажите, что любая TU-игра с непустым ядром должна удовлетворять следующим условиям: для любых двух коалиций S и $T \subset I$, таких что $S \cap T = \varnothing$ и $S \cup T = I$, верно, что $v(S) + v(T) \leq v(I)$.

Пример 18.АА.4. *Снова голосование по правилу простого большинства*. В играх голосования по правилу простого большинства, описанных в примерах 18.АА.2 и 18.АА.3, ядро является пустым. В последнем из примеров, который является TU-игрой, достаточно все очевидно: если $u_1 + u_2 + u_3 = 3$, то $u_i + u_h < 3$ для некоторых i, h. Отсюда коалиция $\{i, h\}$ будет блокирующей. В первом же случае (с нетрансферабельной полезностью) нужно заметить, что исходы (2, 1, 0), (1, 0, 2), (0, 2, 1) блокируются, соответственно, коалициями {2, 3} с использованием a_3, {1, 2} с использованием a_1 и {1, 3} с использованием a_2. Это два примера называемого парадокса Кондорсе (Condorcet paradox), с которым мы уже встречались в разделе 1.B и снова столкнемся в разделе 21.C. Эти примеры демонстрируют нестабильность, присущую голосованию по правилу простого большинства. ■

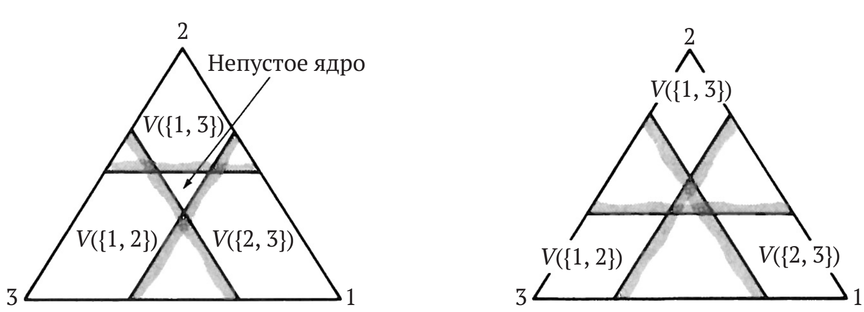


Рис. 18.АА.7. (а) TU-игра с непустым ядром; (b) TU-игра с пустым ядром

Пример 18.AA.5. *Снова экономики*. Экономический пример — 18.AA.1 — подробно изучен в разделе 18.B. Заметим, что концепция ядра, которая там обсуждалась, идентична концепции, которая здесь применяется для игр в характеристической форме[28]. Поэтому можно сделать вывод о том, что если вальрасианское равновесие существует, то ядро не пусто. ■

Пример 18.AA.6. *Однофакторная производственная функция с возрастающей отдачей от масштаба*. Рассмотрим экономику с единственным фактором производства и единственным видом конечной продукции, в которой существует общественно доступная технология, выражаемая непрерывной производственной функцией $f(z)$, причем $f(0) = 0$. Пусть в этой экономике также I игроков. Каждый игрок i потребляет только конечную продукцию, изначально обладая запасом фактора ω_i. Предположим, что полезность в этой игре перераспределяема, и запишем характеристическую функцию T-игры $v(S) = f\left(\sum_{i \in S} \omega_i\right)$. Ядро этой игры также будет непустым, если используемая технология характеризуется неубывающей отдачей от масштаба, т. е. если средний продукт $f(z)/z$ не убывает (в частности, если функция $f(\cdot)$ выпукла, т. е. если предельный продукт не убывает, то $f(z)/z$ не убывает). Чтобы это проверить, предположим, что продукция распределяется между агентами пропорционально:

$$u_h = \frac{\omega_h}{\sum_{i \in I} \omega_i} f\left(\sum_{i \in I} \omega_i\right) \text{ для всех } h \in I.$$

Тогда для каждого $S \subset I$ выполнено: $\sum_{h \in S} u_h = \frac{\sum_{h \in S} \omega_h}{\sum_{i \in I} \omega_i} f\left(\sum_{i \in I} \omega_i\right) \geq f\left(\sum_{h \in S} \omega_h\right) = v(S).$

Неравенство следует из того, что средний продукт не убывает. Поэтому такое пропорциональное распределение выпуска принадлежит ядру. В упражнении 18.AA.3 нужно будет показать, что если средний продукт постоянен, то единственное пропорциональное распределение — распределение ядра. Также интуитивно понятно, что чем сильнее растет отдача от масштаба, тем сложнее соответствующим подгруппам агентов улучшить собственное положение самостоятельно (поскольку средний продукт у них будет относительно мал), и поэтому возможно получение распределения, которое все дальше от пропорционального распределения ядра. Отсюда следует, что в этой одномерной дистрибутивной задаче чем больше (возрастающая) отдача от масштаба, тем больше будет ядро[29]. ■

Значение Шепли

Концепция ядра пытается отразить, как возможные исходы игры могут повлиять на конкурирующие коалиции. Это простейшая концепция решения, так называемый *дескриптивный* (описательный) подход, используемый в теории игр. Перейдем к нормативному подходу, который описывает «разумные», или «справедливые», способы разделения выгод от коопера-

[28] Связь концепции, предложенной Эджвортом (1881), с современным подходом теории игр к анализу ядра, установлена Шубиком (Shubik, 1959).

[29] С одной стороны, если $f(\cdot)$ обладает строго убывающей отдачей от масштаба, то, как это следует из упражнения 18.AA.2, ядро пусто (действительно, $v(S) + v(T) > v(I)$ для любого разбиения I на две коалиции, S и T).

ции, принимая как данные стратегические реалии, представленные в характеристической форме[30].

Далее будет рассматриваться только TU-случай, теория которого достаточно проста и давно изучена. Основная концепция, использующаяся в этом случае, — значение Шепли[31].

Предположим, что индивидуальные уровни полезности можно измерить в деньгах и что, условно говоря, общество «решило», что каждый доллар полезности различных участников имеет сопоставимую (одинаковую) социальную ценность. Критерием справедливости будет максимальное приближение к принципам *эгалитаризма*: целью перераспределения будет равное распределение выгод от торговли.

Чтобы показать, что именно означает принцип эгалитарности в данном случае, начнем с простейшего случая игры двух игроков $(I, v) = (\{1, 2\}, v)$. Тогда выгоды (или потери, если супераддитивность не выполняется) от кооперации будут следующими:

$$v(I) - v(\{1\}) - v(\{2\}).$$

Таким образом, очевидным эгалитарным решением, которое мы обозначим как $(Sh_1(I, v), Sh_2(I, v))$, будет (см. рис. 18.AA.8).

$$Sh_i(S, v) = v(\{i\}) + {}^1/_2(v(I) - v(\{1\}) - v(\{2\})), \quad i = 1, 2. \qquad (18.AA.1)$$

Каким должно быть эгалитарное решение $(Sh_1(I, v), \ldots, Sh_I(I, v))$ для произвольной TU-игры (I, v)? Для ответа на этот вопрос используем результат,

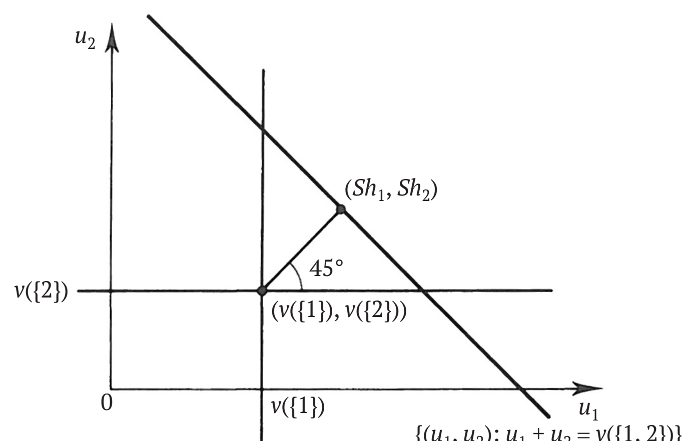


Рис. 18.AA.8. Эгалитарное распределение в игре с двумя игроками

[30] Таким образом, рассуждения о справедливости перераспределения, основанные на понятии абсолютной справедливости, к которым мы обратимся в разделах 22.B и 22.C, не имеют никакого отношения к текущему разделу.

[31] Эта концепция названа в честь Л. Шепли, который предложил ее в своей докторской (PhD) диссертации, защищенной им в Принстонском университете в 1953 г.

только что записанный для игры двух игроков. *Перепишем* выражение (18.AA.1) следующим образом:

$$Sh_1(I, v) - Sh_1(\{1\}, v) = Sh_2(I, v) - Sh_2(\{2\}, v),$$
$$Sh_1(I, v) + Sh_2(I, v) = v(I),$$

где $Sh_i(\{i\}, v) = v(\{i\})$. Это означает, что различия в уровнях полезности между агентами сохраняются: *то, что получает первый игрок от присутствия второго, равно тому, что второй игрок получает от присутствия первого*. Это позволяет дать «обратное» определение: для данного $S \subset I$ обозначим как (S, v) TU-игру, получаемую путем сужения $v(\cdot)$ до подмножества S (оно будет называться *подыгрой* (I, v)). Тогда семейство чисел $\{Sh_i(S, v)\}_{S \subset I, i \in S}$ составит *эгалитарное решение*, если для каждой подыгры (S, v) и каждой пары игроков i, $h \in S$ различия в полезностях сохраняются (подобно случаю с двумя игроками):

$$Sh_i(S, v) - Sh_i(S/\{h\}, v) = Sh_h(S, v) - Sh_h(S/\{i\}, v) \text{ для всех } S \subset I, i, h \in S, \quad (18.AA.2)$$

$$\sum_{i \in I} Sh_i(S,\ v) = v(S) \text{ для всех } S \subset I.$$

Выражения (18.AA.2) определяют числа $Sh_i(S, v)$, $i \in S$, однозначным образом. Это очевидно для $Sh_i(\{i\}, v)$. Продолжим по индукции. Предположим, что мы определили $Sh_i(S, v)$ для всех $S \subset I$, $S \neq I$ $i \in S$. Покажем, что существует единственный способ определения $Sh_i(I, v)$, $i \in I$. Для этого заметим, что (18.AA.2) позволяет выразить каждое $Sh_i(I, v)$ как функцию от $Sh_1(I, v)$ и от уже определенных значений:

$$Sh_i\left(I,\ v\right) = Sh_1\left(I,\ v\right) + Sh_i\left(I \setminus \left\{1\right\},\ v\right) - Sh_i\left(I \setminus \left\{i\right\},\ v\right) \text{ для всех } i \neq 1.$$

Далее, чтобы определить $Sh_1(I, v)$, воспользуемся тем, что $\sum_{i \in I} Sh_i\left(I,\ v\right) = v(I)$, и получим:

$$Sh_1(I,\ v) = \frac{1}{I}\left[v(I) - \sum_{i \neq 1} Sh_i(I \setminus \left\{1\right\},\ v) + \sum_{i \neq 1} Sh_1(I \setminus \left\{i\right\},\ v)\right].$$

Определение 18.AA.7. *Значением Шепли* для игры (I, v), обозначенным как

$$Sh(I, v) = (Sh_1(I, v), \ldots, Sh_I(I, v)),$$

называется единственный исход, согласующийся с выражением (18.AA.2).

Можно рассчитать $Sh_i(I, v)$ следующим интересным прямым методом: для любого $S \subset I$ и $i \neq S$ пусть $m(S, i) = v(S \cup \{i\}) - v(S)$ будет *предельным вкладом i* в коалицию S[32]. Для любого упорядочения π игроков в I (π — просто взаимно-однозначное отображение I в I) обозначим множество игроков,

[32] Каждый раз, когда мы рассчитываем предельный вклад, нужно предполагать, что $v(\varnothing) = 0$. Таким образом, $m(S, i) = v(\{i\})$, когда $S = \varnothing$.

которые предшествуют i при упорядочении π, как $S(\pi, i) \subset I$ (т. е. $S(\pi, i) = \{h\colon \pi(h) < \pi(i)\}$). Заметим, что для любого данного упорядочения π, если рассмотреть предельные вклады каждого игрока i во множество предшествующих им игроков, то сумма этих предельных вкладов должна в точности исчерпываться $v(I)$, т. е. $\sum_{i\in I} m\big(S(\pi, i), i\big) = v(I)$. Оказывается, что в таком случае $Sh_i(I, v)$ — *средний предельный вклад* игрока i во множество его предшественников, где среднее взято по всем упорядочениям (равновероятным). Поскольку общее число упорядочений равно $I!$, получаем

$$Sh_i(I, v) = \frac{1}{I!}\sum_{\pi} m\big(S(\pi, i), i\big), \qquad (18.AA.3)$$

где сумма берется по всем упорядочениям π всех игроков i.

Пример 18.AA.7. *Рынок перчаток*. Рассмотрим игру трех игроков:
$v(\{1, 2, 3\}) = 1$,
$v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = 1$, $v(\{1, 2\}) = 0$,
$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$.

Если полезность пары подходящих друг к другу перчаток равна единице, то полезность пары неподходящих — нулевая, и тогда такая игра получается в ситуации, когда у игроков 1 и 2 есть по правой перчатке, но только у игрока 3 есть перчатка на левую руку. Найдем $Sh_3(I, v)$. Существует шесть возможных упорядочений игроков: $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 2\}$, $\{2, 1, 3\}$, $\{2, 3, 1\}$, $\{3, 1, 2\}$ и $\{3, 2, 1\}$.

Предельный вклад игрока 3 в коалицию его предшественников в каждой из этих упорядочений равен соответственно 1, 1, 1, 1, 0 и 0, т. е. в среднем $^2/_3$, откуда $Sh_3(I, v) = \frac{2}{3}$. Аналогично получаем, что $Sh_1(I, v) = Sh_2(I, v) = \frac{1}{6}$, и заметим, что все эти числа удовлетворяют условиям (18.AA.2), например:

$$Sh_3(I, v) - Sh_3(I \setminus \{1\}, v) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} - 0 = Sh_1(I, v) - Sh_1(I \setminus \{3\}, v). \ \blacksquare$$

Для $Sh_i(I, v)$ можно задать и более явную формулу, чем 18.AA.3. Вероятность того, что в случайном упорядочении данная коалиция $T \subset I$, $i \in T$ возникает как объединение игрока i с его предшественниками, равна произведению вероятности того, что i на T-ом месте[33], т. е. $1/I$, и вероятностей того, что $T\setminus\{i\}$ возникает, как только рандомизированно выбирается $\#T - 1$ членов популяции $I\setminus\{i\}$, т. е. $(I - \#T)!(\#T - 1)!/(I - 1)!$. Тогда перепишем 18.AA.3 в следующем виде:

$$Sh_i(I, v) = \sum_{T\subset I, i\in T}\big[(I - \#T)!(\#T - 1)!/I!\big]\big(v(T) - v(T \setminus \{i\})\big). \qquad (18.AA.4)$$

В упражнении 18.AA.4 нужно проверить, что если бы мы определили значение Шепли с помощью формул 18.AA.4 и/или 18.AA.3, выполнялось бы равенство 18.AA.2. Это означает, что действительно 18.AA.3 или 18.AA.4 — подходящие формулы для значения Шепли.

---

[33] Символ $\#\,T$ обозначает количество игроков в коалиции T.

Теперь запишем, достаточно неформально, некоторые базовые свойства значения Шепли:

a) *эффективность*. $\sum_i Sh_i(I, v) = v(I)$, т. е. полезность не «теряется»;

b) *симметрия*. Если игры (I, v) и (I, v') идентичны, за исключением того что i и h поменялись ролями[34], то $Sh_i(I, v) = Sh_h(I, v')$, или иначе: значения Шепли не зависят от того, как проиндексированы игроки; имеет значение только их позиции в игре, представленные характеристической функцией;

c) *линейность*. Заметим, что из 18.AA.3 или 18.AA.4 следует, что значения Шепли линейно зависят от данных, т. е. от коэффициентов $v(S)$, определяющих игру.

d) *аксиома «о болване»*. Предположим, что игрок i ничего не вкладывает в игру, т. е. что $v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0$ для *всех* $S \subset I$. Тогда $Sh_i(I, v) = 0$. Это важное свойство прямо следует из 18.AA.3: предельный вклад игрока i в *любую* коалицию равен нулю, поэтому и средний вклад тоже нулевой.

Четыре перечисленных свойства полностью характеризуют значение Шепли, что несложно доказать, но мы здесь этого делать не будем. Некоторые примеры будут рассмотрены в упражнениях 18.AA.5 и 18.AA.6.

Для каждой игры значение Шепли дает единственное решение — в отличие от ядра, в котором может находиться несколько исходов. Отметим, что значение Шепли не обязано принадлежать ядру. В какой-то мере нам это уже известно, поскольку значение Шепли определено для всех игр, и существуют игры, в которых ядро является пустым. Но это может быть верно даже тогда, когда ядро непустое. Чтобы увидеть это, рассмотрим снова случай рынка перчаток (пример 18.AA.7).

Пример 18.AA.7 *(продолжение)*. На рынке перчаток ядро состоит из единственного вектора полезностей (0, 0, 1). Действительно, если вектор полезностей (u_1, u_2, u_3) с $\sum_i u_i = 1$ таков, что, например, $u_1 > 0$, то коалиция {2, 3} может его заблокировать вектором $\left(0,\ u_2 + \frac{1}{2}u_1,\ u_3 + \frac{1}{2}u_1\right)$. Действительно, в ядре два владельца правых перчаток последовательно снижают цены, чтобы обыграть друг друга, пока цена правой перчатки не достигает нуля. Напротив, значение Шепли, «направляясь» в сторону третьего игрока, тем не менее позволяет и другим игрокам что-то получить (в данном случае по $\frac{1}{6}$). ■

Существует важный класс игр, в которых значение Шепли принадлежит ядру. Это игры, в которых отдача от масштаба возрастающая.

Определение 18.AA.8. Игра (I, v) является *выпуклой*, если для каждого i предельный вклад i становится больше с ростом коалиций. Точнее, если $S \subset T$ и $i \in I \setminus T$, то

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \le v(T \cup \{i\}) - v(T).$$

[34] Точнее, $v(S) = v'(S)$ каждый раз, когда $i \in S$ и $h \in S$, $v(S) = v'(S)$ каждый раз, когда $i \notin S$ и $h \notin S$, $v(S) = v'((S \setminus \{i\}) \cup \{h\})$ каждый раз, когда $i \in S$ и $h \notin S$ и $v(S) = v'((S \setminus \{i\}) \cup \{h\})$ каждый раз, когда $i \notin S$ и $h \in S$.

Пример 18.AA.8. *Взаимодополняющие (комплементарные) факторы производства.* Пусть $f(z_1, \ldots, z_N)$ — производственная функция с возрастающей предельной производительностью по всем факторам, т. е. пусть $\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_h \partial z_k} \geq 0$ для всех z, h и k. Предположим, что каждый игрок $i \in I$ обладает первоначальным запасом $\omega_i \in \mathbb{R}^n_+$. Тогда TU-игра может быть определена как $v(S) = f\left(\sum_{i \in S} \omega_i\right)$, и в упражнении 18.AA.8 нужно будет показать, что эта игра является выпуклой. Важное замечание по поводу терминов: если $N = 1$, то по этому определению $f(\cdot)$ выпукла, и выпуклость $f(\cdot)$ достаточна для того, чтобы игра тоже была выпуклой. Но если $N > 1$, то условие $\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_h \partial z_k} \geq 0$ для всех z, h и k не является ни необходимым, ни достаточным для выпуклости $f(\cdot)$. На самом деле и собственно выпуклость $f(\cdot)$ представляет собой условие, далекое от достаточного для выполнения выпуклости всей игры (см. упражнение 18.AA.8). ■

Этот результат мы можем записать в виде утверждения 18.AA.1:

Утверждение 18.AA.1. Если игра (I, v) является выпуклой, то ее значение Шепли $Sh(I, v) = (Sh_1(I, v), \ldots, Sh_I(I, v))$ принадлежит ядру (причем непустому).

Доказательство. Достаточно показать, что если $i \in S \subset T$, то $Sh_i(S, v) \leq Sh_i(T, v)$. Действительно, для любого $S \subset I$ это гарантирует, что $v(S) = \sum_{i \in S} Sh_i(S, v) \leq \sum_{i \in S} Sh_i(I, v)$, а поэтому коалиция S не может быть блокирующей.

Чтобы доказать свойство, которое здесь заявлено, достаточно рассмотреть $i \in S$ и $T = S \cup \{h\}$. Для заданного упорядочения π обозначим как $m(\pi, i)$ предельный вклад игрока i в выигрыши его предшественников в S в рассматриваемом упорядочении, а как $m'(\pi, i)$ — средний предельный вклад игрока i в выигрыши его предшественников в T, где среднее взято по всем $\#T$ упорядочениям из T, отличающимся от упорядочения π в S только местоположением h. Тогда

$$Sh_i(S, v) = \frac{1}{\# S!} \sum_{\pi} m(\pi, i) \text{ и } Sh_i(T, v) = \frac{1}{\# S!} \sum_{\pi} m'(\pi, i).$$

Заметим, что для каждого упорядочения π в S должно быть выполнено: $m'(\pi, i) \geq$ $\geq m(\pi, i)$, если h стоит после i, то его предельный вклад i в выигрыши предшественников из T так и будет равен $m(\pi, i)$; если же h поместить перед i, то, в силу выпуклости, предельный вклад *не меньше*, чем $m(\pi, i)$. Таким образом, мы и получаем, что $Sh_i(T, v) \geq Sh_i(S, v)$. ■

Литература

Anderson, R. (1978). An elementary core equivalence theorem. *Econometrica* **46**: 83–87.

Aumann, R. (1964). Markets with a continuum of traders. *Econometrica* **32**: 39–50.

Aumann, R. (1975). Values of markets with a continuum of traders. *Econometrica* **43**: 611–46.

Champsaur, P. and G. Laroque (1981). Fair allocations in large economies. *Journal of Economic Theory* **25**: 269–82.

Debreu, G. and H. Scarf (1963). A limit theorem on the core of an economy. *International Economic Review* **4**: 235–46.

Edgeworth, F.Y. (1881). *Mathematical Psychics*. London: Kegan Paul.

Foley, D. (1967). Resource allocation and the public sector. Yale Economic Essays **7**: 45–98.

Gabszewicz, J. J. and J. P. Vial (1972). Oligopoly ‘à la Cournot’ in a general equilibrium analysis. *Journal of Economic Theory* **4**: 381–400.

Hart, O. (1980). Perfect competition and optimal product differentiation. *Journal of Economic Theory* **22**: 165–99.

Hildenbrandt, W. and A. Kirman (1988). *Equilibrium Analysis*. New York: North-Holland.

Mas-Colell, A. (1982). The Cournotian foundations of Walrasian equilibrium: an exposition of recent theory. Chap. 7 in *Advances in Economic Theory*, edited by W. Hildenbrandt. New York: Cambridge University Press.

Moulin, H. (1988). *Axioms of Cooperative Game Theory*. New York: Cambridge University Press.

Myerson, R. (1991). *Game Theory: Analysis of Conflict*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Novshek, W. and H. Sonnenschein (1978). Cournot and Walras equilibrium. *Journal of Economic Theory* **19**: 223–66.

Osborne, M., and A. Rubinstein (1994). *A Course in Game Theory*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

Ostroy, J. (1980). The no-surplus condition as a characterization of perfectly competitive equilibrium. *Journal of Economic Theory* **22**: 65–91.

Owen, G. (1982). *Game Theory*, 2nd ed. New York: Academic Press.

Roberts, K. (1980). The limit points of monopolistic competition. *Journal of Economic Theory* **22**: 256–278.

Schmeidler, D. and K. Vind (1972). Fair net trades. *Econometrica* **40**: 637–47.

Shapley, L. and M.Shubik (1977). Trade using a commodity as a means of payment. *Journal of Political Economy* **85**: 937–68.

Shubik, M. (1959). Edgeworth’s market games. In *Contributions to the Theory of Games*, IV, edited by R.D. Luce and A.W. Tucker. Princeton University Press.

Shubik, M. (1984). *Game Theory in the Social Scinces*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

Thomson, W., and H. Varian (1985). Theories of justice based on symmetry. Chap. 4 in *Social Goals and Social Organizations*, edited by L. Hurwicz, D. Schmeidler, and H. Sonnerschein. New York: Oxford University Press.

Varian, H. (1979). Two problems in the theory of fairness. *Journal of Public Economics* **5**: 249–60.

Vind, K. (1964). Edgeworth allocations in an exchange economy with many traders. *International Economic Review* **5**: 165–77.

Упражнения

18.B.1^{A}. Покажите, что распределения, равновесные по Вальрасу, лежат в ядре в модели с постоянной отдачей от масштаба, описанной в разделе 18.B.

18.B.2$^{\mathbf{B}}$. Приведите пример распределения в ядре не удовлетворяющего свойству одинакового подхода с экономике обмена с тремя потребителями, обладающими непрерывными, строго выпуклыми и строго монотонными предпочтениями. Можно ли привести такой же пример для экономики с двумя потребителями?

18.B.3$^{\mathbf{A}}$. Докажите в явном виде (т. е. без использования свойств ядра), что вальрасианское распределение в экономике с непрерывными, строго выпуклыми предпочтениями будет обладать свойством одинакового подхода.

18.B.4$^{\mathbf{A}}$. Используйте разложение по Тейлору для завершения доказательства утверждения 18.B.3.

18.B.5$^{\mathbf{B}}$. Рассмотрите экономику, состоящую из $2I + 1$ потребителей, из которых I обладают (каждый) только одним правым ботинком, а каждый $I + 1$ — только одним левым ботинком. Ботинки неделимы. Каждый обладает предпочтениями, выраженными одинаковыми функциями полезности $\min\{R, L\}$, где R и L — количества правых и левых ботинок соответственно.

a) Покажите, что любое распределение ботинок такое, что у каждого агента будет по равному количеству ботинок разного типа, является оптимальным по Парето, и наоборот.

b) Какие из оптимальных по Парето распределений войдут и в ядро? (В данном случае в определении ядра разрешите слабое доминирование при блокировании.)

c) Пусть p_L и p_R — соответствующие цены на левые и правые ботинки. Найдите вальрасианское равновесие для данной экономики.

d) Найдите связь между ядром и вальрасианским равновесием в данной экономике.

18.C.1$^{\mathbf{C}}$. Выведите свойства эффективного бюджетного множества, о котором говорится в примере 18.C.3. Можно ограничиться случаем $L = 2$.

18.D.1$^{\mathbf{B}}$. Рассмотрите ящик Эджворта с непрерывными, строго выпуклыми и монотонными предпочтениями агентов. Покажите, что каждое допустимое распределение, в котором обоим потребителям по крайней мере не хуже, чем в точке первоначального запаса, является распределением самовыявления.

18.E.1$^{\mathbf{B}}$. В тексте.

18.E.2$^{\mathbf{A}}$. Используя теорему об огибающей (см. раздел M.L математического приложения), получите выражение 18.E.5.

18.E.3$^{\mathbf{B}}$. Рассмотрите пример с леонтьевскими предпочтениями агентов относительно двух товаров, не являющихся товарами-измерителями (функции полезности не будут дифференцируемыми). Покажите, что в вальрасианском равновесии при условии наличия континуума торговцев каждый из них может получить меньше, чем их предельный вклад.

18.AA.1[B]. Набор коалиций $S_1, \ldots, S_N \subset I$ будет называться *обобщенным разбиением* (generalized partition), если можно приписать вес $\delta_n \in [0, 1]$ каждому $1 \leq n \leq N$, так что для каждого игрока $i \in I$ будет верно: $\sum_{[n: i \in S_n]} \delta_n = 1$. Приведите пример обобщенного разбиения с соответствующими весами δ_n.

Будем также говорить, что TU-игра (I, v) *сбалансирована*, если для каждого обобщенного разбиения верно неравенство $\sum_n \delta_n v(S_n) \leq v(I)$, где δ_n — соответствующие веса. Покажите, что игра обладает непустым ядром тогда и только тогда, когда она сбалансирована (подсказка: вспомните теорему о двойственности линейного программирования (см. раздел M.M математического приложения)).

18.AA.2[A]. В тексте.

18.AA.3[A]. Покажите, что пропорциональное распределение из примера 18.AA.6 является единственным распределением в ядре, если средний продукт постоянен.

18.AA.4[C]. Покажите, что если значение Шепли определяется формулой 18.AA.4 или, что то же самое, формулой 18.AA.3, то выполняются условия 18.AA.2.

18.AA.5[B]. Будем называть игру (I, v) игрой *со множеством ключевых игроков* (unanimity game), если существует непустое множество $S \subset I$, такое что $v(T) = v(S)$, если $S \subset T$, и $v(T) = 0$ во всех остальных случаях. Покажите, что следствием аксиом эффективности, симметрии и «о болване» будет равномерное распределение $v(S)$ среди S членов.

18.AA.6[B]. Покажите, что любая TU-игра (I, v) может быть выражена в виде линейной комбинации игр со множеством ключевых игроков, а затем воспользуйтесь результатами упражнения 18.AA.5 и аксиомой линейности и покажите, что решение, удовлетворяющее всем четырем аксиомам, единственно. Используйте при рассуждении концепцию значения Шепли.

18.AA.7[C]. Покажите, что игра с производством из примера 18.AA.8 выпукла.

18.AA.8[B]. В такой же экономике с производством, что и в примере 18.AA.8, приведите пример выпуклой производственной функции с двумя факторами производства, для которой тем не менее ядро будет пустым (т. е. порождаемая в вашем примере игра не должна быть выпуклой).

18.AA.9[B]. Рассмотрите игру четырех игроков, в которой $v(\{i\}) = 0$, $v(\{12\}) = v(\{34\}) = 0$, $v(\{13\}) = v(\{14\}) = v(\{23\}) = v(\{24\}) = 1$ и $v(\{ijk\}) = 1$ для всех коалиций $\{ijk\}$ из трех игроков и в которой $v(\{1234\}) = 2$.

а) Покажите, что именно эту игру можно получить, если функция производства полезности задается технологией $\min\{z_1, z_2\}$, где z_1 и z_2 — количества двух факторов производства, чьи первоначальные запасы у всех четырех потребителей равны, соответственно, $\omega_1 = \omega_2 = (1, 0)$ и $\omega_3 = \omega_4 = (0, 1)$.

b) Покажите, что ядро этой игры содержит все точки вида $(\alpha, \alpha, 1 - \alpha, 1 - \alpha)$, $\alpha \in [0, 1]$.

c) Покажите, что если увеличить значение $v(\{134\})$ до 2, не меняя всех остальных параметров модели, то ядро будет состоять только из одной точки. Сравните благосостояние первого игрока в этой точке с тем, которое он мог бы получить во всех точках первоначального ядра (до роста значения $v(\{134\})$).

d) Вернитесь к первоначальному условию (до изменения, описанного в пункте (c)), и найдите значение Шепли в этой игре без использования простого перебора (подсказка: используйте свойство симметрии и другие упрощающие аксиоматики в некоторой части доказательства).

e) Найдите значение Шепли в пункте (c). Обсудите различия в найденных изменениях в ядре и изменениях значения Шепли.

18.AA.10^B. Рассмотрите фирму, состоящую из двух подразделений, с каждым из которых у фирмы связаны *накладные расходы* (x_1, x_2) в виде распределения производственных площадей. Агрегированные издержки, связанные с производственными площадями, задаются как $C(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^\gamma$, $0 < \gamma < 1$.

a) Предположим, что как бы мощности (x_1, x_2) ни использовались, общие издержки должны быть разделены между двумя подразделениями полностью. Предложите систему распределения расходов, основанную на методе значения Шепли.

b) Найдите предельные издержки каждого из подразделений (если они несут эти издержки так, как это описано в пункте (a)), если подразделение захочет расширить свои площади.

c) Пусть теперь прибыли каждого из подразделений задаются как $\alpha_1 x_1$ и $\alpha_2 x_2$ (будем предполагать, что $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$), и каждое подразделение использует свои мощности до того момента, пока предельные издержки (полученные в пункте (b) не будут равны предельной прибыли. Приведет ли это к тому, что результирующие накладные расходы будут эффективными (т. е. максимизирующими прибыль)?

d) Существует ли правило распределения $\psi_1(x_1, x_2)$, $\psi_2(x_1, x_2)$, такое что $\psi_1(x_1, x_2) + \psi_2(x_1, x_2) = C(x_1 + x_2)$ для всех (x_1, x_2), которое приводит к эффективно децентрализованному выбору (в смысле пункта (b)) всех α_1, α_2? (*Подсказка*: включите в анализ экстерналии, которые оказывают друг на друга подразделения фирмы.)

Глава 19. Общее равновесие в условиях неопределенности

19.A. Введение

В этой главе мы применим концепцию общего равновесия, развитую нами в последних четырех главах (15–18) к анализу экономических ситуаций, в которых обмен и распределение ресурсов происходят в условиях неопределенности. В каком-то смысле эта глава предлагает равновесное рассмотрение теории принятия решений, изложенной в главе 6 (которую мы предлагаем повторить в данный момент).

В разделе 19.B мы формализуем понятие неопределенности, введя *состояния мира*, а затем определив основную идею *контингентного блага* — такого блага, поставка которого происходит при условии реализации состояния мира. В разделе 19.C мы будем использовать эти идеи для определения понятия *равновесия Эрроу — Дебре.* Это просто вальрасовское равновесие, в котором происходит торговля контингентными благами. Из общей теории, изложенной в главе 16, следует, что равновесие Эрроу — Дебре является Парето-оптимальным распределением риска.

В разделе 19.D мы дадим новую интерпретацию понятия равновесия Эрроу — Дебре. Мы покажем, что в предположениях *самосбывающихся, или рациональных, ожиданий* можно достичь равновесий Эрроу — Дебре, комбинируя торговлю контингентными благами из некоторого ограниченного множества со *спотовой торговлей,* которая происходит уже *после* снятия неопределенности. Это приводит к значительному сокращению числа рынков *ex ante* (т. е. тех, которые должны действовать до разрешения неопределенности).

В разделе 19.E мы обобщим наш анализ. Вместо торговли контингентными благами до разрешения неопределенности агенты теперь будут торговать *активами*, и вместо равновесия Эрроу — Дебре мы придем к понятию *равновесия Раднера.* В этом разделе мы также обсудим важное понятие *арбитража* между активами. Материал этого раздела лежит в основе финансовой теории (хорошими вводными курсами являются (Duffie, 1992) и (Huang, Litzenberger, 1988)).

В разделе 19.F мы кратко проиллюстрируем возникающие сложности с благосостоянием, когда наблюдается *неполнота рынков*, т. е. ситуация при недостаточном количестве рынков активов, приводящая к недостижимости с гарантией полностью Парето-оптимального распределения риска.

В разделе 19.G мы рассмотрим задачи фирмы в условиях неопределенности. В частности, мы получим достаточные условия для акционеров, позволяющие им единогласно принять в качестве цели *максимизацию рыночной стоимости*.

В разделе 19.H мы тщательно рассмотрим требования к информации, необходимые для построения теории этой главы. Мы увидим, что теория, изложенная в главе, хорошо применима к случаям *симметричной* информации между потребителями (в этом разделе мы напомним основные положения); но применимость изложенной теории становится проблематичной в случаях *асимметричной* информации. Это служит побудительным мотивом для использования методов, развитых в главах 13 и 14, где рассматриваются проблемы асимметричной информации.

Дополнительные материалы и ссылки по тематике этой главы можно найти в учебниках (Huang, Litzenberger, 1988) и (Duffie, 1992), о которых мы уже упоминали, или же, для более глубокого изучения, (Radner, 1982; Magill, Shafer, 1991).

19.B. Рыночная экономика с контингентными благами: описание

Как и в предыдущих главах, мы рассмотрим экономическую среду с L физическими благами, I потребителями и J фирмами. Новым элементом в этом изложении является то, что технологии, первоначальные запасы и предпочтения являются *неопределенными*.

На протяжении этой главы мы будем предполагать, что технологии, первоначальные запасы и предпочтения зависят от *состояния мира*. Понятие состояния мира было уже введено в разделе 6.E. Состояние мира следует понимать как полное описание возможного исхода в условиях неопределенности; этого описания должно хватать для того, чтобы считать любые два состояния мира взаимно несовместными. Мы полагаем, что полностью исчерпывающее множество S состояний мира нам дано. Для простоты будем считать, что S — конечное множество (слегка злоупотребляя обозначениями) с S элементами. Типичный элемент нумеруется индексом $s = 1, \dots, S$.

В определении 19.B.1 мы дадим основные понятия *контингентного блага* и *вектора контингентных благ*. Используя эти понятия, мы сможем выразить зависимость технологий, первоначальных запасов и предпочтений от реализуемых состояний мира.

Определение 19.B.1. Для любого физического блага $l = 1, \dots, L$ и состояний мира $s = 1, \dots, S$ единица *контингентного блага* l — это право на получение одной физической единицы блага l в том и только в том случае, если наступит состояние s. Соответственно, *вектор контингентных благ*, определяемый как

$$x = (x_{11}, \dots, x_{L1}, \dots, x_{1S}, \dots, x_{LS}) \in \mathbb{R}^{LS},$$

понимается как обязательство по получению вектора благ $(x_{1s}, \dots, x_{Ls})$ при наступлении состояния s.[1]

Мы можем также рассматривать вектор контингентных благ как набор L *случайных переменных*, при этом l-я случайная переменная равна $(x_{l1}, \dots, x_{lS})$.

Используя понятие вектора контингентных благ, мы теперь сможем показать, как характеристики экономических агентов зависят от состояния мира. Пусть первоначальные запасы агента $i = 1, \dots, I$ будут вектором контингентных благ:

$$\omega_i = (\omega_{11i}, \dots, \omega_{L1i}, \dots, \omega_{1Si}, \dots, \omega_{LSi}) \in \mathbb{R}^{LS}.$$

Это означает, что если состояние s наступит, то потребитель i будет наделен вектором богатства $(\omega_{1si}, \dots, \omega_{Lsi}) \in \mathbb{R}^L$.

Предпочтения потребителя i могут также зависеть от состояния мира (например, удовольствие от выпитого потребителем вина может сильно зависеть от состояния его здоровья). Мы представим эту зависимость формально, определяя предпочтения потребителя i на множестве векторов контингентных благ. То есть мы будем полагать, что предпочтения i-го потребителя заданы отношением рациональных предпочтений $\succsim_i$, определенным на потребительском множестве $X_i \subset \mathbb{R}^{LS}$.

Пример 19.B.1. Как и в разделе 6.E, потребитель оценивает векторы контингентных благ, сперва приписывая состоянию s вероятность π_{si} (которая может иметь как объективный, так и субъективный характер), затем оценивая векторы физических благ в состоянии s с помощью бернуллиевской функции полезности, зависящей от состояний мира $u_{si}(x_{1si}, \dots, x_{Lsi})$, и наконец, подсчитывая ожидаемую полезность[2]. То есть предпочтения i-го потребителя на векторах контингентных благ $x_i,\ x_i' \in X_i \subset \mathbb{R}^{LS}$ удовлетворяют $x_i \succsim_i x_i'$ тогда и только тогда, когда $\sum_s \pi_{si} u_{si}\left(x_{1si},\ \dots,\ x_{Lsi}\right) \geq \sum_s \pi_{si} u_{si}\left(x_{1si}',\ \dots,\ x_{Lsi}'\right)$. ■

Следует подчеркнуть, что предпочтения $\succsim_i$ имеют смысл *ex ante* предпочтений: случайные переменные, описывающие возможное потребление, оцениваются перед разрешением неопределенности.

Аналогично технические возможности фирмы j представимы производственным множеством $Y_j \subset \mathbb{R}^{LS}$. Интерпретация такова: *контингентный производственный план* $y_j \in \mathbb{R}^{LS}$ — это элемент Y_j, если для любого s вектор затраты — выпуск $(y_{1sj}, \dots, y_{Lsj})$ физических благ допустим для фирмы j в случае наступления состояния s.

Пример 19.B.2. Предположим, что имеются два состояния, s_1 и s_2, представляющие хорошую и плохую погоду. Есть два физических блага: семена ($l = 1$) и урожай ($l = 2$). В этом случае элементами Y_j являются четырехмерные векторы. Предполо-

[1] Как обычно, отрицательное значение переменной трактуется как обязательство по поставке.

[2] Рассмотрение в разделе 6.E было применимо к случаю $L = 1$, что легко распространяется на случай $L \geq 1$.

жим, что семена должны быть посеяны до того, как наступит ясность в отношении погоды, и что из единицы семян произрастет единица урожая в том и только в том случае, если погода хорошая. Тогда

$$y_j = (y_{11j}, y_{21j}, y_{12j}, y_{22j}) = (-1, 1, -1, 0)$$

является допустимым планом. Заметим, что поскольку погода в момент посадки семян неизвестна, то план (–1; 1; 0; 0) недопустим: если уж семена сеют, то делают это в обоих состояниях. Таким образом, мы смогли внедрить в структуру Y_j ограничения на производство, порожденные временным характером разрешения неопределенности[3]. ■

Чтобы завершить описание экономики в стиле, похожем на изложение глав 16 и 17, остается лишь специфицировать доли собственности для любого потребителя *i* и фирмы *j*. В принципе эти доли тоже могут зависеть от состояний мира. Но проще принять за долю, являющуюся собственностью *i*-го потребителя в *j*-й фирме, число $\theta_{ji} \geq 0$ вне зависимости от состояния мира. При этом, конечно, $\sum_j \theta_{ji} = 1$ для всех *i*.

Информация и разрешение неопределенности

В постановке, рассмотренной выше, время не играет явной формальной роли. В действительности, однако, состояния мира реализуются во времени. На рис. 19.B.1 изображен простейший пример. На этом рисунке у нас есть период 0, в котором нет никакой информации относительно текущего состояния мира, и период 1, в котором такая информация полностью раскрывается.

Мы уже видели (пример 19.B.2), что с помощью удобного определения потребительского и производственного множеств мы можем отобразить временной характер рис. 19.B.1: то благо, которое было в наличии в момент $t = 0$ (как часть своего физического описания), не сможет менять свою количественную характеристику в разных состояниях.

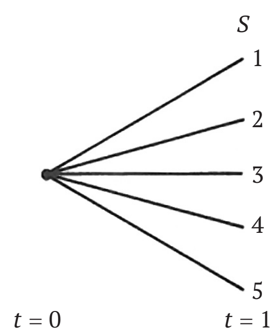


Рис. 19.B.1. Два периода. Совершенная информация при $t = 1$

Та же методология может быть использована для формализации гораздо более общей временной структуры. Предположим, что у нас есть $T + 1$ моментов: $t = 0, 1, \ldots, T$, и, как и прежде, S состояний. Но теперь представим, что состояния реализуются постепенно, как изображено на рис. 19.B.2, в виде *дерева*. Такие деревья аналогичны тем, которые были описаны в главе 7. В этом дереве конечные вершины обозначают возможные состояния, реализуемые к моменту $t = T$, т. е. при завершении истории неопределенной среды. Если путь вдоль дерева совпадает для двух состояний, s и s', вплоть до времени t, это означает, что в течение всех периодов до t и в период t состояния s и s' неразличимы.

Подмножества множества S называются *событиями*. Множество всех событий $\mathscr{J}$ является *информационной структурой*, если существует разбиение, т. е. для любого

[3] Похожим образом можно рассмотреть потребление. Если для некоторого блага l любой вектор $x_i \in X_i$ таков, что элементы x_{lsi}, $s = 1, \ldots, S$ одинаковы, то мы можем интерпретировать этот факт как потребление l, происходящее до разрешения неопределенности.

состояния s существует $E \in \mathscr{I}$ с $s \in E$ и для любых двух $E, E' \in \mathscr{I}$, $E \neq E'$ будем иметь $E \cap E' = \varnothing$. Интерпретация этого определения такова: если s и s' принадлежат одному и тому же событию из $\mathscr{I}$, то s и s' неразличимы в информационной структуре $\mathscr{I}$.

Чтобы формально разобраться с ситуацией последовательного раскрытия информации, обратимся к *семейству* информационных структур $(\mathscr{I}_0, \ldots, \mathscr{I}_t, \ldots, \mathscr{I}_T)$. Процесс информационного раскрытия делает $\mathscr{I}_t$ все более подробным: как только информации становится достаточно для различия двух состояний, информация об этом не может быть забыта.

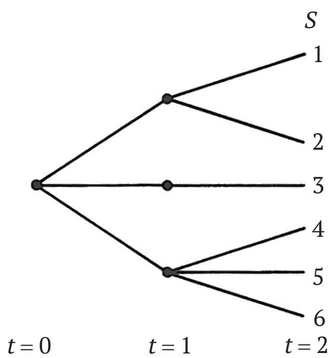


Рис. 19.B.2. Информационное дерево: постепенное высвобождение информации

Пример 19.B.3. Рассмотрим дерево на рис. 19.B.2. Имеем

$$\mathscr{I}_0 = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}),$$

$$\mathscr{I}_1 = (\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5, 6\})$$

$$\mathscr{I}_2 = (\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}). \blacksquare$$

Разбиения, в принципе, могут быть различными для разных индивидов. Однако за исключением последнего раздела этой главы (раздела 19.H) мы будем предполагать, что информационная структура одинакова для всех потребителей.

Пара (t, E), где t — дата, а $E \in \mathscr{I}_t$, называется *датой-событием*. Даты-события ассоциируются с вершинами дерева. Каждая дата-событие, кроме первой, имеет *единственного предшественника,* и каждая дата-событие, не являющаяся окончательной вершиной, имеет одного или нескольких *последователей.*

С таким временным моделированием следует соблюдать точность в отношении момента времени, когда физическое благо доступно. Предположим, что имеется всего H базовых физических благ (хлеб, досуг и т. д.). Мы будем использовать двойной индекс ht, чтобы показать момент времени t, когда благо h производится, выступает в качестве запаса или потребляется. Тогда x_{hts} обозначает количество блага h в момент t вдоль пути в состоянии s.

К счастью, эта многопериодная модель может быть формально сведена к вневременной структуре, введенной ранее. Чтобы это увидеть, мы определим новое множество, содержащее $L = H(T + 1)$ физических благ, каждое из которых обладает двойным индексом (т. е. ht). Тогда мы будем говорить, что вектор $z \in \mathbb{R}^{LS}$ *измерим* по отношению к семейству информационных разбиений $(\mathscr{I}_0, \ldots, \mathscr{I}_T)$, если для любых hts и hts' будет выполнено $z_{hts} = z_{hts'}$ всякий раз, когда s, s' принадлежат одному и тому же элементу разбиения $\mathscr{I}_t$. Другими словами, всякий раз, когда s и s' в момент t неразличимы, количества, присвоенные двум состояниям, не могут различаться. Наконец, мы наложим на первоначальные запасы $\omega_i \in \mathbb{R}^{LS}$ потребительские множества $X_i \subset \mathbb{R}^{LS}$ и производственные множества $Y_j \subset \mathbb{R}^{LS}$ ограничение, состоящее в измеримости по отношению к семейству информационных разбиений. Таким образом, нам удалось свести многопериодную структуру к нашей первоначальной постановке.

19.C. Равновесие Эрроу — Дебре

Мы видели в разделе 19.B, что экономику с неопределенностью можно описать с помощью множества состояний мира S, потребительского множества $X_i \subset \mathbb{R}^{LS}$и вектора первоначальных запасов $\omega_i \in \mathbb{R}^{LS}$, отношения предпочтений $\succsim_i$ на X_i для любого потребителя i, наряду с производственным множеством $Y_j \subset \mathbb{R}^{LS}$ долями прибыли $(\theta_{j1}, \ldots, \theta_{jI})$ для любой фирмы j.

Сейчас мы сделаем шаг вперед и выдвинем сильное предположение. Мы будем постулировать существование рынка для каждого контингентного блага ls. Рынки открываются *перед* разрешением неопределенности, можно считать, что в момент 0. Цена блага будет обозначаться p_{ls}. Все, что покупается (или продается) на рынке для контингентного блага ls, является обязательством получить (или доставить) количество физического блага l, в случае если состояние мира s реализуется. Обратите внимание, что поставки условны, а платежи нет. Заметим также, что для успешного функционирования рынков совершенно необходимо, чтобы все агенты знали о наступлении состояния s. Другими словами, информация должна быть *симметричной* для всех экономических агентов. Этот информационный аспект будет рассмотрен далее в разделе 19.H.

Формально говоря, описанная выше экономика — не что иное, как частный случай экономики, рассмотренной в предыдущих главах. Стало быть, мы можем применить к этой экономике понятие равновесия по Вальрасу и сопровождающую это понятие теорию. Когда имеют дело с контингентными благами, то обычно равновесие по Вальрасу называют *равновесием Эрроу — Дебре*[4].

Определение 19.C.1. Распределение

$$\left(x_1^*,\ \ldots,\ x_I^*,\ y_1^*,\ \ldots,\ y_J^*\right) \in X_1 \times \ldots \times X_I \times Y_1 \times \ldots \times Y_J \subset \mathbb{R}^{LS(I+J)}$$

и система цен на контингентные блага

$$p = (p_{11}, \ldots, p_{LS}) \in \mathbb{R}^{LS}$$

образуют *равновесие Эрроу — Дебре,* если

(1) для каждого j, y_j^* удовлетворяет условию $p \cdot y_j^* \geq p \cdot y_j$ для всех $y_j \in Y_j$;

(2) для каждого i, x_i^* является максимальным элементом для предпочтений $\succsim_i$ в бюджетном множестве $\left\{x_i \in X_i : p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} p \cdot y_j^*\right\}$;

(3) $\sum_i x_i^* = \sum_j y_j^* + \sum_i \omega_i$.

Теоремы благосостояния и теоремы позитивного характера из глав 16 и 17 применимы без всяких модификаций к равновесию Эрроу — Дебре. Вспомним, что в главе 6, в особенности в разделах 6.C и 6.E, требование выпуклости имеет вид неприятия риска. Например, в предположении о существовании ожидаемой функции полезности в примере 19.B.1 отношение предпочтения $\succsim_i$ будет выпуклым, если функции полезности Бернулли $u_{si}(x_{si})$ вогнуты (см. упражнение 19.C.1).

[4] Краткое развитие этих идей можно найти в главе 7 книги (Debreau, 1959).

Возможность торговать контингентными благами означает, что в равновесии Эрроу — Дебре будет достигаться Парето-оптимальное распределение риска.

Важно понимать, что при любом производственном плане фирмы ее прибыль $p \cdot y_j$ является неслучайной величиной, выраженной в долларах. Выпуски и продажи товаров, разумеется, зависят от состояний мира, но фирма активно функционирует на всех рынках контингентных товаров, и ей так, скажем, удается полностью застраховаться от риска. Отсюда вытекает важное следствие, а именно что оправданно считать максимизацию прибыли целью фирмы. Мы рассмотрим этот вопрос ниже в разделе 19.G.

Пример 19.C.1. Рассмотрим экономику обмена с $I = 2$, $L = 1$ и $S = 2$. Здесь можно воспользоваться ящиком Эджворта, потому что в этой экономике ровно два контингентных блага. На рис. 19.C.1(a) и 19.C.1(b) отмечены $\omega_1 = (1, 0)$, $\omega_2 = (0, 1)$ и функции полезности вида $\pi_{1i}u_i(x_{1i}) + \pi_{2i}u_i(x_{2i})$, где (π_{1i}, π_{2i}) — субъективные вероятности потребителя i для двух состояний. Поскольку $\omega_1 + \omega_2 = (1, 1)$, то отсутствует агрегированная неопределенность, и состояние мира определяет лишь, кто из потребителей получает первоначальный запас. Вспомним, что в разделе 6.E (в особенности в дискуссии, предшествовавшей примеру 6.E.1) говорится, что в такой модели (в которой $u_i(\cdot)$ не зависит от s) предельная норма замещения потребителя i в любой точке, в которой потребление в двух состояниях одинаково, равно отношению вероятностей π_{1i}/π_{2i}.

На рис. 19.C.1(a) субъективные вероятности одинаковы для обоих потребителей (т. е. $\pi_{11} = \pi_{12}$), и следовательно, множество Парето-оптимальных распределений совпадает с диагональю ящика (ящик квадратный и диагональ проходит под углом в 45 градусов, на ней предельные нормы замещения для обоих потребителей одинаковы $\pi_{11}/\pi_{21} = \pi_{12}/\pi_{22}$). Следовательно, в равновесии два потребителя застрахованы полностью; другими словами, равновесное потребление i-го потребителя не зависит от состояния. На рис. 19.C.1(b) субъективные вероятности потребителей различаются. В частности, $\pi_{11} < \pi_{12}$ (т. е. второй оценивает наступление первого состояния

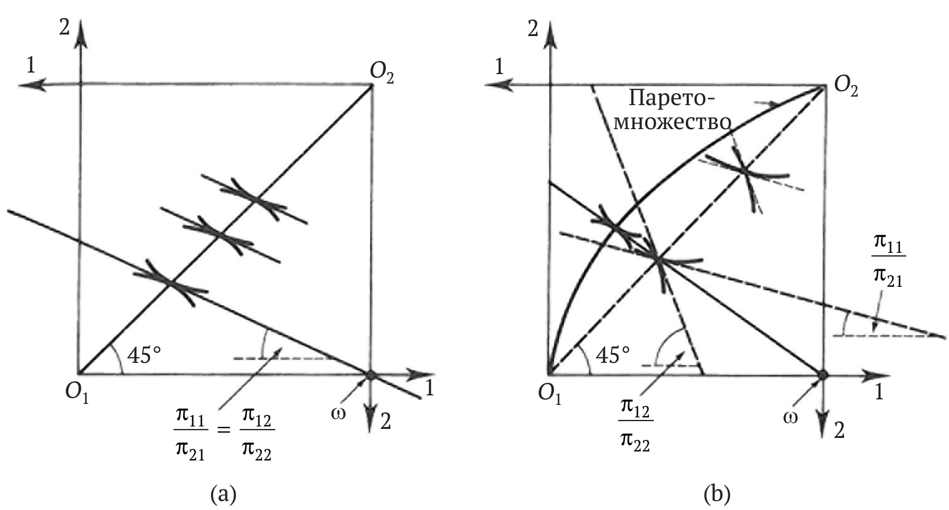


Рис. 19.C.1. (a) Нет агрегированного риска: одинаковые оценки вероятностей. (b) Нет агрегированного риска: разные оценки вероятностей

более высоко). В этом случае равновесное потребление каждого из потребителей больше в том из состояний, которое оценивается относительно более высоко (по отношению к вере другого потребителя). ■

Пример 19.C.2. Параметры экономики заданы почти как в предыдущем примере, с тем лишь исключением, что теперь в экономике есть агрегированный риск: $\omega_1 + \omega_2 = (2, 1)$. Полезности не зависят от состояний природы, и оценки вероятностей одинаковы для обоих потребителей (π_1, π_2). Соответствующий ящик Эджворта изображен на рис. 19.C.2. Мы видим, что в любой точке множества Парето общая предельная норма замещения меньше, чем отношение вероятностей (см. упражнение 19.C.2). Следовательно, в равновесии имеем: $p_1/p_2 < \pi_1/\pi_2$, или $p_1/\pi_1 < p_2/\pi_2$. Например, если $\pi_1 = \pi_2 = {}^1\!/_2$, то $p_1 < p_2$. То есть цена одной потребляемой единицы контингентного блага выше в том состоянии мира, в котором потребление этого блага является более скудным. Это наблюдение составляет простейшую версию мощной финансовой темы: контингентные инструменты (в нашем случае — единица контингентного потребления) относительно более ценны, если отдача от них (в нашем случае — количества потребления в разных состояниях) отрицательно коррелирована с «рыночной отдачей» (в нашем случае это случайная переменная, представляющая агрегированный первоначальный запас). ■

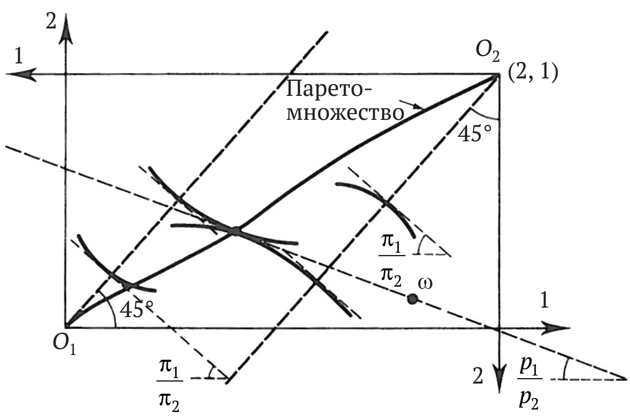


Рис. 19.C.2. Есть агрегированный риск: p_l/π_l отрицательно коррелировано с общим первоначальным запасом блага l

19.D. Последовательная торговля

Модель Эрроу — Дебре замечательно иллюстрирует силу теории общего равновесия. И в то же время эта модель нереалистична. Действительно, в равновесии Эрроу — Дебре вся торговля происходит мгновенно и до того, как неопределенность будет разрешена. Можно сказать, что торговля происходит одномоментно, как выстрел. В действительности, однако, торговля идет в значительной степени последовательно во времени и довольно часто сопровождается высвобождением информации. Целью этого раздела является введение первой модели последовательной торговли, с тем чтобы показать, что равновесие Эрроу — Дебре можно проинтерпретировать с помощью торговых процессов, которые действительно разворачиваются во времени.

Для простоты анализа мы будем рассматривать только экономику обмена (см. раздел 19.G, в котором содержится обсуждение производства). В дополнение к этому будем считать, что $X_i = \mathbb{R}_+^{LS}$ для каждого i. Для начала будем полагать, что имеются две даты, $t = 0$ и $t = 1$, и что при $t = 0$ нет никакой информации, но неопределенность полностью разрешается в $t = 1$. Таким образом, дерево дат-событий выглядит, как изображено на рис. 19.B.1. Опять ради простоты мы предположим, что в момент $t = 0$ отсутствует потребление (мы отсылаем вас к упражнению 19.D.3 для рассмотрения более общей ситуации).

Предположим, что рынки для возможных LS контингентных благ организованы в период $t = 0$ и что $\left(x_1^*, \ \ldots, \ x_I^*\right) \in \mathbb{R}^{LSI}$ является равновесным в смысле Эрроу — Дебре распределением с ценами $\left(p_{11}, \ \ldots, \ p_{LS}\right) \in \mathbb{R}^{LS}$. Вспомним, что все эти рынки служат для поставки товаров в период $t = 1$ (обычно их называют *форвардными рынками*). Когда наступает период $t = 1$, состояние мира s становится известным, контракты выполняются и каждый потребитель i получает $x_{si}^* = \left(x_{1si}^*, \ \ldots, \ x_{Lsi}^*\right) \in \mathbb{R}^L$. Теперь представим, что сразу после этого, но перед потреблением x_{si}^* рынки для L физических благ открылись бы в период $t = 1$ (такие рынки называются *спот-рынками*). Возникнет ли желание торговать на этих рынках? Ответом будет «нет». Чтобы это понять, предположим, что от такой торговли были бы потенциальные выигрыши. То есть нашлись бы $x_{si} = (x_{1si}, \ldots, x_{Lsi})$ для $i = 1, \ldots, I$, такие что $\sum_i x_{si} \leq \sum_i \omega_{si}$ и $\left(x_{1i}^*, \ \ldots, \ x_{si}, \ \ldots, \ x_{Si}^*\right) \succsim_i \left(x_{1i}^*, \ \ldots, \ x_{si}^*, \ \ldots, \ x_{Si}^*\right)$ для всех i, хотя бы с одним строгим предпочтением. Тогда из определения Парето-оптимальности следует, что равновесное по Эрроу — Дебре распределение $\left(x_1^*, \ \ldots, \ x_I^*\right) \in \mathbb{R}^{LSI}$ не является Парето-оптимальным; мы получили противоречие с первой теоремой благосостояния[5]. Если подытожить, то в период $t = 0$ все потребители могут торговать, чтобы прийти к Парето-оптимальному распределению; отсюда следует, что дальнейшая торговля не нужна. Другими словами, Парето-оптимальность *ex ante* подразумевает

[5] Есть и альтернативное объяснение. Рассмотрим равновесные по Эрроу — Дебре цены L контингентных благ в состоянии s: $p_s = (p_{1s}, \ldots, p_{Ls})$. Тогда p_s рассматриваются как система спотовых цен в состоянии s, и они порождают для первоначального вектора $\left(x_{s1}^*, \ \ldots, \ x_{sI}^*\right)$ нулевой избыточный спрос для всех трейдеров (и следовательно, уравновешивают рынки). Действительно, если $U_i(x_{1i}, \ldots, x_{Si})$ — функция полезности для $\succsim_i$ и $\left(x_{1i}^*, \ \ldots, \ x_{Si}^*\right) \in \mathbb{R}^{LS}$ максимизирует $U_i(x_{1i}, \ldots, x_{Si})$ при ограничении $\sum_s p_s \cdot \left(x_{si} - \omega_{si}\right) \leq 0$, то для любого конкретного s x_{is}^* максимизирует $U_i\left(x_{1i}^*, \ \ldots, \ x_{si}, \ \ldots, \ x_{Si}^*\right)$, при условии что $p_s \cdot \left(x_{si} - \omega_{si}\right) \leq p_s \cdot \left(x_{si}^* - \omega_{si}\right)$, или $p_s \cdot \left(x_{si} - x_{si}^*\right) \leq 0$.

Парето-оптимальность ex post, и, таким образом, из этого вытекает отсутствие торговли ex post.

Ситуация становится иной, если не все из LS рынков контингентных благ имеются в наличии при $t = 0$. Тогда начальная торговля может не достичь Парето-оптимального распределения и вполне возможно, что ex post (т. е. после реализации состояния s) результирующее распределение не будет Парето-оптимальным. Тогда будет мотивация к повторному открытию рынков и продолжению торговли.

Наиболее интересная возможность, впервые отмеченная Эрроу (1953), состоит в том, что если даже не все рынки контингентных благ существуют при $t = 0$, то тем не менее при некоторых условиях продолжение торговли при $t = 1$ может привести к достижению Парето-оптимальности. Тем самым возможность торговли ex post может компенсировать отсутствие некоторых рынков ex ante. В дальнейшем мы докажем, что это имеет место всякий раз, когда по крайней мере одно физическое благо может контингентно торговаться при $t = 0$, в дополнение к этому при $t = 1$ спот-рынки существуют *и* при $t = 0$ спотовые равновесные цены прогнозируются верным образом. Интуитивно этот результат легко понять: если спотовая торговля может проходить в каждом из состояний, то все, что остается сделать при $t = 0$, состоит в эффективной передаче совокупной покупательной силы потребителя на разные состояния. Этого можно добиться, используя контингентную торговлю одним товаром. Тем самым эта процедура позволит нам понизить необходимое число форвардных рынков с LS до S.

Давайте проводить анализ более конкретно. При $t = 0$ у потребителей есть *ожидания* касательно преобладающих спотовых цен при $t = 1$ для любого возможного состояния $s \in S$. Обозначим тот вектор цен, который наиболее ожидаем в состоянии s на спот-рынке, как $p_S \in \mathbb{R}^L$, и, соответственно, общий вектор[6] (для всех состояний) $p = (p_1, \ldots, p_s) \in \mathbb{R}^{LS}$. Дополнительно предположим, что в период $t = 0$ идет торговля S контингентными благами, имеющими обозначения от 11 до $1S$, т. е. будет идти контингентная торговля только одним физическим благом с номером 1. Мы обозначим вектор цен для этих контингентных благ, которые участвуют в торговле при $t = 0$, как $q = (q_1, \ldots, q_S) \in \mathbb{R}^S$.

Зная вектор цен $q \in \mathbb{R}^S$ при $t = 0$ и ожидая спотовые цены $(p_1, \ldots, p_S) \in \mathbb{R}^{LS}$ при $t = 1$, каждый i-й потребитель формулирует потребительский план, или план торговли контингентными благами $(z_{1i}, \ldots, z_{Si}) \in \mathbb{R}^S$ при $t = 0$, а также набор потребительских планов для спот-рынка $(x_{1i}, \ldots, x_{Si}) \in \mathbb{R}^{LS}$ для различных состояний, которые могут реализоваться при $t = 1$. Конечно, эти планы должны удовлетворять бюджетному ограничению. Пусть $U_i(\cdot)$ — функция полезности, представляющая $\succsim_i$. Тогда задачу i-го потребителя можно формально записать в виде

[6] В принципе, ожидания могут быть различными у потребителей, но при предположении правильных ожиданий (вскоре будет определено), такое не наблюдается.

$$\max_{\substack{(x_{1i},\ldots,x_{Si})\in\mathbb{R}_+^{LS} \\ (z_{1i},\ldots,z_{Si})\in\mathbb{R}^S}} U_i\left(x_{1i},\ \ldots,\ x_{Si}\right), \tag{19.D.1}$$

$$\text{что } \begin{cases} (1)\ \sum_s q_s z_{si} \le 0; \\ (2)\ p_s \cdot x_{si} \le p_s \cdot \omega_{si} + p_{1s} z_{si} \ \text{ для каждого } \ s. \end{cases}$$

Ограничение (1) является бюджетным ограничением при $t = 0$. Набор ограничений (2) дает бюджетные ограничения для различных спот-рынков. Заметим, что величина богатства в состоянии s состоит из двух частей: рыночного значения первоначального богатства $p_s \cdot \omega_{si}$ и рыночного значения величин z_{si} первого блага, покупаемого или продаваемого на форвардном рынке при $t = 0$. Заметим также, что мы не накладываем ограничений на знак и величину z_{si}. Если $z_{si} < -\omega_{1si}$, то можно сказать, что при $t = 0$ потребитель i продает первое благо *шорт*. Это название появилось из-за того, что он продает много в период $t = 0$, полагая, что состояние s наступит, но в этом случае он продаст больше, чем будет иметь при $t = 1$, если наступит s. Следовательно, если s действительно наступит, то ему придется купить на спот-рынке дополнительное количество первого блага, с тем чтобы выполнить обязательства. Возможность продажи шорт, однако, косвенно ограничена условием, что потребление, а следовательно, и *ex post* богатство должны быть неотрицательными для каждого s.[7]

Чтобы определить надлежащим образом последовательную торговлю, мы наложим основное условие: ожидания потребителей должны быть *самосбывающимися,* или *рациональными*; т. е. мы требуем, чтобы ожидаемые потребителями цены, уравновешивающие спот-рынки в разных состояниях s, действительно бы их уравновешивали, как только наступит дата $t = 1$ и реализуется состояние s.

Определение 19.D.1. Набор, сформированный при ценовом векторе $q = (q_1, \ldots, q_S) \in \mathbb{R}^S$, для первого контингентного блага при $t = 0$, и спотовый вектор цен

$$p_S = (p_{1s}, \ldots, p_{Ls}) \in \mathbb{R}^L$$

для каждого s и для каждого потребителя i, потребительские планы $z_i^* = \left(z_{1i}^*,\ \ldots,\ z_{Si}^*\right) \in \mathbb{R}^S$ при $t = 0$ и $x_i^* = \left(x_{1i}^*,\ \ldots,\ x_{Si}^*\right) \in \mathbb{R}^{LS}$ при $t = 1$ образуют *равновесие Раднера* (Radner, 1982), если

[7] Заметим также, что мы приняли значение богатства при $t = 0$ равным нулю (т. е. у потребителя нет первоначальных запасов контингентных благ). Это просто условность. Предположим, например, что мы рассматриваем ω_{1si}, величину первого блага, имеющегося в наличии при $t = 1$ в состоянии s, как количество блага в состоянии s, которым потребитель i владеет при $t = 0$ (чтобы избежать двойного счета, первоначальный запас первого блага на спот-рынке s при $t = 1$ должен быть одновременно взятым равным нулю). Тогда бюджетные ограничения будут выглядеть следующим образом: (1) $\sum_s q_s\left(z'_{si} - \omega_{1si}\right) \le 0$; (2) $p_s \cdot x_{si} \le \sum_{l\ne 1} p_{ls}\omega_{l1} + p_{1s} z'_{si}$ для каждого s. Но, полагая $z'_{si} = z_{si} + \omega_{1si}$, мы видим, что нами получены в точности условия (19.D.1).

(1) для каждого i потребительские планы z_i^*, x_i^* являются решением задачи (19.D.1);

(2) $\sum_i z_{si}^* \leq 0$ и $\sum_i x_{si}^* < \sum_i \omega_{si}$ для каждого s.

В равновесии Раднера торговля происходит во времени, и, в отличие от равновесия Эрроу — Дебре, потребители имеют дело с *последовательностью бюджетных множеств*, каждое из которых рассматривается в момент даты-состояния (в общем случае — даты-события). Рассмотрев задачу (19.D.1), мы можем заметить, что все бюджетные ограничения однородны порядка нуль по ценам. Это означает, что они не изменятся, если цену одного физического блага в каждом из дат-состояний (т. е. одну цену в каждом из бюджетных ограничений) произвольным образом нормализовать и положить равной 1. Довольно естественно выбрать первое благо и положить $p_{1s} = 1$ для каждого s, так что единица s контингентного блага будет приносить платеж в 1 доллар в состоянии s[8]. Заметим также, что при такой нормализации все равно остается одна степень свободы, относящаяся к форвардной торговле на дату 0 (так что мы могли бы положить $q_1 = 1$ или, возможно, $\sum_s q_s = 1$).

В утверждении 19.D.1, которое является основным результатом этого раздела, мы покажем, что в рассматриваемой модели набор равновесных распределений Эрроу — Дебре (порожденных одномоментной торговлей LS контингентных благ) и набор равновесных распределений по Раднеру совпадают.

Утверждение 19.D.1.

(1) Если распределение $x^* \in \mathbb{R}^{LSI}$ и вектор цен контингентных благ $(p_1, \ldots, p_S) \in \mathbb{R}^{LS}_{++}$ образуют равновесие Эрроу — Дебре, то найдутся цены $q \in \mathbb{R}^{S}_{++}$ для первого контингентного блага и потребительские планы для этих благ $z^* = (z_1^*, \ldots, z_I^*) \in \mathbb{R}^{SI}$, такие что потребительские планы x^*, z^*, цены q и спотовые цены $(p_1, \ldots, p_S)$ образуют равновесие по Раднеру.

(2) Обратно, если потребительские планы $x^* \in \mathbb{R}^{LSI}$, $z^* \in \mathbb{R}^{SI}$ и цены $q \in \mathbb{R}^{S}_{++}$, $(p_1, \ldots, p_S) \in \mathbb{R}^{LS}_{++}$ образуют равновесие Раднера, то найдутся множители $(\mu_1, \ldots, \mu_S) \in \mathbb{R}^{S}_{++}$, такие что распределение x^* и вектор цен контингентных благ $(\mu_1 p_1, \ldots, \mu_S p_S) \in \mathbb{R}^{LS}_{++}$ образуют равновесие Эрроу — Дебре. (Множитель μ_S интерпретируется как значение при $t = 0$ одного доллара при $t = 1$ и в состоянии s).

[8] Возможность такой нормализации означает, в частности, без потери общности, что наше контингентное благо непосредственно приносит выручку в долларах (см. упражнение 19.D.1, где эта идея обсуждается).

Доказательство. (1) Естественно положить $q_s = p_{1s}$ для каждого s. Используя это, мы можем утверждать, что для каждого потребителя i бюджетное множество задачи Эрроу — Дебре имеет вид

$$B_i^{AD} = \left\{ \left(x_{1i}, \ \dots, \ x_{Si} \right) \in \mathbb{R}_+^{LS} \ : \sum_s p_s \cdot \left(x_{si} - \omega_{si} \right) \le 0 \right\},$$

и оно совпадает с бюджетным множеством задачи Раднера

$$B_i^R = \Big\{ (x_{1i}, \ \dots, \ x_{Si}) \in \mathbb{R}_+^{LS}: \text{найдутся } (z_{1i}, \dots, z_{Si}), \text{ такие что } \sum_s q_s z_{si} \le 0 \text{ и } p_s \cdot (x_{si} - \omega_{si}) \le p_{1s} z_{si} \text{ для каждого } s \Big\}.$$

Чтобы это увидеть, предположим, что $x_i = \left(x_{1i}, \ \dots, \ x_{Si} \right) \in B_i^{AD}$. Для каждого s обозначим $z_{si} = (1/p_{1s}) p_s \cdot (x_{si} - \omega_{si})$. Тогда $\sum_s q_s z_{si} = \sum_s p_{1s} z_{si} =$ $= \sum_s p_s \cdot \left(x_{si} - \omega_{si} \right) \le 0$ и $p_s \cdot (x_{si} - \omega_{si}) = p_{1s} z_{si}$ для каждого s. Следовательно, $x_1 \in B_i^R$. Наоборот, предположим, что $x_i = \left(x_{1i}, \ \dots, \ x_{Si} \right) \in B_i^R$, т. е. для некоторых $(z_{1i}, \dots, z_{Si})$ имеем: $\sum_s q_s z_{si} \le 0$ и $p_s \cdot \left(x_{si} - \omega_{si} \right) \le p_{1s} z_{si}$ для всех s. Суммируя по s, получаем: $\sum_s p_s \cdot \left(x_{si} - \omega_{si} \right) \le \sum_s p_{1s} z_{si} =$ $= \sum_s q_s z_{si} \le 0.$ Следовательно, $x_i \in B_i^{AD}$.

Мы делаем вывод, что наше равновесное распределение Эрроу — Дебре является одновременно равновесным распределением Раднера при ценах $q = (p_{11}, \dots, p_{1S}) \in \mathbb{R}^S$, спотовых ценах $(p_1, \dots, p_S)$ и при контингентной торговле $\left(z_{1i}^*, \ \dots, \ z_{Si}^* \right) \in \mathbb{R}^S$, определенной формулами $z_{si}^* = \left(1/p_{1s} \right) p_s \cdot \left(x_{si}^* - \omega_{si} \right)$. Заметим, что контингентные рынки уравновешиваются, так как для каждого s $\sum_i z_{si}^* = \left(1/p_{1s} \right) p_s \times$ $\times \left(\sum_i \left(x_{si}^* - \omega_{si} \right) \right) \le 0.$

(2) Выберем μ_s так, чтобы $\mu_s p_{1s} = q_s$. Тогда мы можем переписать бюджетное множество Раднера потребителя i в виде

$$B_i^R = \Big\{ (x_{1i}, \ \dots, \ x_{Si}) \in \mathbb{R}_+^{LS}: \text{ найдутся } (z_{1i}, \dots, z_{Si}), \text{ такие что } \sum\nolimits_s q_s z_{si} \le 0 \text{ и } \mu_s p_s \cdot (x_{si} - \omega_{si}) \le q_s z_{si} \text{ для каждого } s \Big\}.$$

Но начиная с этого момента мы можем проделать все то же, что было сделано в (1), и переписать ограничения и, следовательно, бюджетное множество в виде Эрроу — Дебре:

$$B_i^R = B_i^{AD} = \left\{ \left(x_{1i}, \ \dots, \ x_{Si} \right) \in \mathbb{R}^{LS} \ : \sum_s \mu_s p_s \cdot \left(x_{si} - \omega_{si} \right) \le 0 \right\}.$$

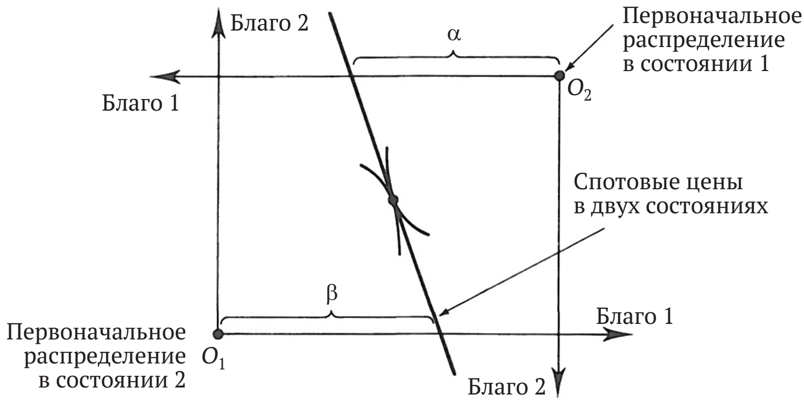


Рис. 19.D.1. Установление равновесия Эрроу — Дебре только за счет контингентной торговли на рынке первого блага

Следовательно, потребительский план x_i^* также максимизирует предпочтения на бюджетном множестве B_i^{AD}. Так как все вышесказанное справедливо для каждого потребителя i, мы делаем вывод, что вектор цен $(\mu_1 p_1, \ldots, \mu_S p_S) \in \mathbb{R}^{LS}$ уравновешивает рынки для LS контингентных благ. ■

Пример 19.D.1. Рассмотрим экономику обмена с двумя благами, двумя состояниями и двумя потребителями. Предположим, что состояния равновероятны и что каждый потребитель имеет одинаковые, не зависящие от состояний бернуллиевские функции полезности $u(x_{si})$. Потребители различаются лишь своими первоначальными запасами. Суммарные векторы запасов в обоих состояниях одинаковы, однако они так распределены, что первый потребитель получает все в состоянии 1, а потребитель 2 получает все в состоянии 2 (см. рис. 19.D.1).

Вследствие симметрии задачи в равновесии Эрроу — Дебре каждый потребитель получает в каждом из состояний половину общего запаса любого из благ. На рис. 19.D.1 показано, как эти объемы потребления могут быть достигнуты за счет контингентной торговли первым благом и посредством спот-рынков. Спотовые цены будут одинаковыми в двух состояниях. Первый потребитель продаст количество α первого товара при условии, что наступит первое состояние, и в ответ купит количество β того же товара при условии, что реализуется второе состояние. (Вам будет предложено восполнить детали решения в упражнении 19.D.2.) ■

Важно подчеркнуть, что хотя концепция равновесия Раднера уменьшает число контингентных благ, необходимых для достижения оптимальности (с LS до S), это умение достигается не бесплатно. С меньшим числом форвардных контрактов верное предвидение будущих спотовых цен является решающим.

Вплоть до текущего момента мы обсуждали последовательное выполнение равновесия Эрроу — Дебре для случая двух дат[9], т. е. для случая дерева дата-событие, изображенного на рис. 19.B.1. Если не считать трудностей, связанных с обозначения-

[9] Чтобы максимально упростить рассмотрение, мы также предположили, что при $t = 0$ нет потребления.

ми, те же идеи можно использовать для дерева, изображенного на рис. 19.B.2, где имеются $T + 1$ периодов и информация раскрывается постепенно. (См. обсуждение, набранное более мелким шрифтом в конце раздела 19.B, чтобы ознакомиться с основной концепцией и обозначениями). Тогда у нас будут спот-рынки для любой допустимой пары дата-событие tE (т. е. те tE, где $E \in \mathscr{I}_t$, информационному разбиению в момент t.) С множеством из H основных физических благ мы обозначим спотовые цены $p_{tE} \in \mathbb{R}^H$. Для каждого tE мы могли также поставлять контингентным образом физическое благо 1 в каждый последовательный момент даты-события из tE. Обозначим $q_{tE}(t + 1, E')$ цену одной единицы блага 1 из (tE) при поставке в момент $t + 1$, если событие E' становится известным (конечно, мы требуем, чтобы $E' \in \mathscr{I}_{t+1}$ и $E' \subset E$). Задача потребителя состоит из формирования планов, максимизирующих полезность посредством выбора для каждого допустимого tE вектора потребляемых товаров $x_{tEi} \in \mathbb{R}^H_+$ и в каждый последующий момент $(t + 1, E')$ контингентной торговли $z_{tEi}(t + 1, E')$ блага 1, поставляемого в $(t + 1, E')$. Окончательно должно быть выполнено бюджетное ограничение в tE вида

$$p_{tE} \cdot x_{tEi} + \sum_{\{E' \in \mathscr{I}_{t+1} : E' \subset E\}} q_{tE}\left(t+1,\ E'\right) z_{tEi}\left(t+1,\ E'\right) \leq$$
$$\leq p_{tE} \cdot \omega_{tEi} + p_{1tE} z_{t-1, E^-, i}\left(t,\ E\right),$$

где E^- — событие даты $t - 1$, предшествующее E при t.

Затем можно приступить к формулированию соответствующего понятия равновесия Раднера и показать, что равновесные распределения Эрроу — Дебре для модели с $H(T + 1)S$ рынками контингентных благ[10] при $t = 0$ аналогичны равновесным распределениям Раднера, полученным в модели с последовательной торговлей, в которой для каждой даты-события потребители торгуют лишь товарами в текущий момент времени и контрактами на условную (контингентную) поставку в последующих вершинах дерева. В упражнениях 19.D.3 и 19.D.4 эти вопросы обсуждаются более детально.

19.E. Рынки активов

S контингентных благ, которые изучались в предыдущем разделе, помогали решить задачу по переносу богатства в соответствии с реализуемыми в будущем состояниями мира. Однако эта конструкция имеет теоретический характер и редко может быть ассоциирована с реальностью. Тем не менее в реальности мы имеем дело с *активами* или *ценными бумагами*, которые в некоторой степени играют роль инструментов, передающих богатство, т. е. ту роль, которую мы приписывали контингентным благам. Поэтому важно разработать теоретический аппарат, который позволит исследовать функционирование рынков активов. Мы решим эту задачу, расширив формальное понятие контингентного блага, а затем обобщив теорию Раднера на эту экономическую среду[11].

[10] Контингентное благо — это обещание поставить единицу физического товара h на дату t, если состояние s реализуется. Вспомним, что в разделе 19.B было показано: потребительские множества должны быть так определены, чтобы они содержали ограничения информационной измеримости, т. е. должна быть уверенность, что на дату t потребление не зависит от информации, все еще недоступной.

[11] Смотрите (Radner, 1982) и (Kreps, 1979) (с участием (Marimon, 1987)), где изложение проведено в духе этого раздела.

Снова начнем с анализа простейшей ситуации, в которой у нас есть две даты: $t = 0$ и $t = 1$, и вся информация раскрывается при $t = 1$. Более того, с тем чтобы облегчить обозначения, будем считать, что потребление происходит только при $t = 1$.

Мы представляем себе актив, а точнее единицу актива, как обязательство получения физических благ или долларов при $t = 1$ в объемах, которые могут зависеть от состояния мира[12]. Доход от актива называется *доходностью*. Если мы имеем дело с доходностью от физических благ, то актив называется *реальным* (примерами могут служить оборудование с длительным сроком службы или контракт на поставку меди). Если активы в бумажных деньгах, то они называются *финансовыми* (например, государственная облигация). Возможны смешанные случаи. В этом разделе будем заниматься лишь реальными активами и, более того, чтобы сэкономить на обозначениях, будем полагать, что доходность выражается лишь в количестве физического блага[13]. Тогда удобно нормализовать спотовую цену этого блага и считать ее равной 1 в каждом состоянии, так что на самом деле мы будем использовать ее как измеритель.

Определение 19.E.1. Единица *актива* или *ценной бумаги* является правом на получение величины r_s, блага 1 на дату $t = 1$, если состояние s реализуется. Актив тем самым характеризуется своим вектором доходности $r = (r_1, \ldots, r_S) \in \mathbb{R}^S$.

Пример 19.E.1. Приведем примеры активов:

(1) $r = (1, \ldots, 1)$. Этот актив обещает безусловную поставку в будущем одной единицы блага 1. В реальном мире такие активы называют *фьючерсами товаров*. В специальном случае, когда у нас имеется единственное потребительское благо (т. е. $L = 1$), мы называем это актив *безопасным* (или *безрисковым*) *активом*. Важно понимать, что если благ больше одного, то фьючерс не является безрисковым: его доходность в терминах покупательной способности зависит от спотовых цен всех прочих благ[14].

(2) $r = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Этот актив дает отдачу в виде одной единицы блага 1 в том и только в том случае, если реализуется определенное состояние. Такие активы рассматривались в разделе 19.D. В рассматриваемой теоретической постановке их часто называют *активами Эрроу*.

(3) $r = (1, 2, 1, 2, \ldots, 1, 2)$. Этот актив приносит одну единицу без всяких условий и еще одну единицу в состояниях, пронумерованных четным образом. ■

Пример 19.E.2. *Опционы.* Это так называемый *актив-дериватив*, т. е. такой актив, доходность которого некоторым образом связана с доходностью другого актива. Предположим, имеется *основной актив* с вектором доходностей $r \in \mathbb{R}^S$. Тогда

[12] Как обычно, фраза «обязательство получить» означает «обязательство поставить», в том случае если величина меньше нуля. Хотя отрицательная доходность не представляет существенной трудности, мы будем ее избегать.

[13] У этого допущения есть еще одно важное упрощающее свойство: в любом состоянии доходность всех активов выражается в единицах того же физического блага. Поэтому относительные спотовые цены различных физических благ в любом состоянии не влияют на относительные доходности различных активов в этом состоянии.

[14] Строго говоря, для того чтобы термин «безрисковый» имел смысл, необходимо, чтобы в дополнение к $L = 1$ функции полезности не зависели от состояния мира.

(европейский) колл опцион на основной актив при *цене отсечения* $c \in \mathbb{R}$ сам является активом. Единица этого актива дает возможность купить *после того, как реализуется состояние* (но прежде, чем выплачивается доходность), единицу основного актива по цене c (цена c в единицах «измерителя», т. е. блага 1).

Что является вектором доходности $r(c)$ опциона? В данном состоянии s опцион будет работать в том и только в том случае, когда $r_s > c$ (мы пренебрегаем случаем $r_s = c$). Отсюда

$$r(c) = (\max\{0, r_1 - c\}, \ldots, \max\{0, r_S - c\}).$$

Для основного актива с вектором доходностей $r = (4, 3, 2, 1)$ конкретными примерами являются

$$r(3.5) = (.5, 0, 0, 0),$$
$$r(2.5) = (1.5, 0.5, 0, 0),$$
$$r(1.5) = (2.5, 1.5, 0.5, 0). \blacksquare$$

Мы продолжаем анализ в разделе 19.D, предполагая, что задано множество активов, называемое *структурой активов,* и что эти активы могут свободно торговаться на дату $t = 0$. Мы отложим до следующего раздела важную дискуссию о возникновении конкретного множества активов. Каждый актив k характеризуется вектором доходностей $r_k \in \mathbb{R}^S$. Количество активов равно K. Как и раньше, мы предполагаем, что у нас нет первоначального запаса активов и шорт-продажи возможны. Ценовой вектор для активов, торгуемых при $t = 0$, обозначается $q = (q_1, \ldots, q_K)$. Вектор закупленных активов, обозначаемый $z = (z_1, \ldots, z_K) \in \mathbb{R}^K$, называется *портфелем.*

Следующим шагом будет распространение определения равновесия Раднера на эту экономическую среду. В определении 19.E.2 $U_i(\cdot)$ — функция полезности, представляющая предпочтения $\succsim_i$ потребителя i на множестве потребительских планов $\left(x_{1i}, \ \ldots, \ x_{Si}\right) \in \mathbb{R}_+^{LS}$.

Определение 19.E.2. Набор при ценовом векторе $q = (q_1, \ldots, q_K) \in \mathbb{R}^K$ для активов, торгуемых при $t = 0$, вектор спотовых цен $p_s = (p_{1s}, \ldots, p_{Ls}) \in \mathbb{R}^L$ для каждого s и для каждого потребителя i, портфельные планы $z_i^* = \left(z_{1i}^*, \ \ldots, \ z_{Ki}^*\right) \in \mathbb{R}^K$ при $t = 0$ и потребительские планы $x_i^* = \left(x_{1i}^*, \ \ldots, \ x_{Si}^*\right) \in \mathbb{R}^{LS}$ при $t = 1$ образуют *равновесие Раднера,* если:

(1) для каждого i, потребительские планы z_i^*, x_i^* являются решением задачи

$$\max_{\substack{(x_{1i}, \ldots, x_{Si}) \in \mathbb{R}_+^{LS} \\ (z_{1i}, \ldots, z_{Ki}) \in \mathbb{R}^K}} U_i\left(x_{1i}, \ \ldots, \ x_{Si}\right),$$

$$\text{что} \begin{cases} \text{(a)} \ \sum\limits_k q_k z_{ki} \le 0; \\ \text{(b)} \ p_s \cdot x_{si} \le p_s \cdot \omega_{si} + \sum\limits_k p_{1s} z_{ki} r_{sk} \quad \text{для каждого} \ \ s. \end{cases}$$

(2) $\sum\limits_i z_{ki}^* \le 0$ и $\sum\limits_i x_{si}^* \le \sum\limits_i \omega_{si}$ для всех k и s.

В бюджетном множестве, описанном в определении 19.E.2, богатство потребителя i в состоянии s является суммой спотового значения его первоначальных запасов и спотового значения доходности его портфеля. Заметим, что без потери общности мы можем положить $p_{1s} = 1$ для всех s. Начиная с этого момента мы так и будем поступать. Теперь удобно ввести *матрицу доходностей* **R**. Это матрица размерности $S \times K$, в которой k-й столбец — это вектор доходностей k-го актива. Следовательно, элемент sk этой матрицы можно записать как r_{sk}, что является доходностью актива k в состоянии s. С использованием этого обозначения бюджетное множество потребителя i будет выглядеть следующим образом:

$$B_i\left(p,\ q,\ B\right) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} x \in \mathbb{R}_+^{LS}\ : \text{для некоторого портфеля } z_i \in \mathbb{R}^K \text{ имеется } \ q \cdot z_i \le 0 \\ \begin{pmatrix} p_1 \cdot \left(x_{1i} - \omega_{1i}\right) \\ \vdots \\ p_S \cdot \left(x_{Si} - \omega_{Si}\right) \end{pmatrix} \le \begin{bmatrix} r_{11}, & \cdots, & r_{1K} \\ & \ddots & \\ r_{S1}, & \cdots, & r_{SK} \end{bmatrix} z_i = Rz_i \end{array} \right\}.$$

Теперь мы представим крайне важное следствие (с большим количеством ответвлений), следующее из предположения, что торговля шортами возможна без ограничений. А именно мы установим тот факт, что знания матрицы доходностей $\boldsymbol{R}$ достаточно для того, чтобы существенно ограничить значения ценового вектора активов $q = (q_1, \ldots, q_K)$, которые могут быть в равновесии.

Утверждение 19.E.1. Предположим, что каждый вектор доходностей неотрицательный и ненулевой; т. е. $r_k \ge 0$ и $r_k \ne 0$ для всех k[15]. Тогда для любого вектора (столбца) $q \in \mathbb{R}^k$ цен активов, устанавливающихся в равновесии Раднера, можно найти множители $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_S) \ge 0$, такие что $q_k = \sum_s \mu_s r_{sk}$ для всех k (в матричных обозначениях $q^T = \mu \cdot \boldsymbol{R}$).

Другими словами, утверждение 19.E.1 говорит о том, что мы можем присвоить значения $(\mu_1, \ldots, \mu_S)$ единицам богатства в различных состояниях, так что цена единицы актива k будет просто равна сумме значений доходностей в различных состояниях[16]. Поскольку это важный результат, мы предоставим два доказательства. Первое, набранное мелким шрифтом, основано на выпуклом анализе и использует лишь одно следствие равновесия: факт, что q должно быть *свободным от арбитража* (мы дадим определение этого понятия совсем скоро). Второе доказательство использует условия максимизации полезности первого порядка и помогает еще глубже разобраться в природе множителей.

Доказательство утверждения 19.E.1. Назовем систему $q \in \mathbb{R}^K$ цен активов *свободной от арбитража*, если не существует такого портфеля $z = (z_1, \ldots, z_K)$, что $q \cdot z \le 0$, $\boldsymbol{R}z \ge 0$ и $\boldsymbol{R}z \ne 0$. Другими словами, не существует такого портфеля, который был бы

[15] Это допущение можно существенно ослабить.

[16] Как мы скоро увидим, значение μ_S также можно интерпретировать как теневую цену контингентного блага, которое выплачивается в объеме одной единицы блага 1, если состояние s наступает, и не выплачивается, если состояние не реализуется.

допустим в смысле бюджетного ограничения и в то же время давал неотрицательную доходность в *каждом состоянии* и строго положительную доходность в некотором состоянии. Заметим, что тот факт, является ли вектор цен активов свободным от арбитража, зависит лишь от доходностей активов и не зависит от предпочтений.

Если, как обычно, мы предположим, что предпочтения строго монотонны, то равновесный вектор цен активов $q \in \mathbb{R}^K$ должен быть свободным от арбитража: если бы это было не так, то было бы возможно увеличить полезность, всего лишь добавляя к любому текущему портфелю портфель, предоставляющий возможность арбитража, а поскольку нет ограничений на шорт-продажи, то такое добавление всегда возможно.

В лемме 19.E.1 мы доказываем результат, который с учетом только что высказанного замечания является формально более сильным, чем утверждение 19.E.1.

Лемма 19.E.1. Если вектор цен активов $q \in \mathbb{R}^K$ не зависит от арбитража, то найдется вектор множителей, такой что $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_S) \geq 0$, удовлетворяющий $q^T = \mu \cdot \boldsymbol{R}$.

Доказательство. Для начала заметим, что поскольку мы имеем дело лишь с активами, у которых неотрицательные ненулевые доходности, то у вектора цен q, свободного от арбитража, $q_k > 0$ для всех k. Также без потери общности мы можем предположить, что у матрицы $\boldsymbol{R}$ нет ни одной строки, целиком состоящей из нулей[17].

Пусть дан $q \in \mathbb{R}^K$ — вектор цен активов, свободных от арбитража. Рассмотрим выпуклое множество

$$V = \{v \in \mathbb{R}^S \colon v = \boldsymbol{R}z \text{ для некоторого } z \in \mathbb{R}^K, \text{ где } q \cdot z = 0\}.$$

Тот факт, что вектор q свободен от арбитража, означает: $V \cap \left\{\mathbb{R}^S_+ \setminus \{0\}\right\} = \varnothing$. Так как V и $\mathbb{R}^S_+ \setminus \{0\}$ являются выпуклыми множествами и точка 0 принадлежит V, мы можем применить теорему о разделяющей гиперплоскости (см. раздел M.G математического приложения), с тем чтобы получить ненулевой вектор $\mu' = \left(\mu'_1, \ \ldots, \ \mu'_S\right)$, такой что $\mu' \cdot v \leq 0$ для любого $v \in V$ и $\mu' \cdot v \geq 0$ для любого $v \in \mathbb{R}^S_+$. Заметим, что должно быть выполнено условие $\mu' \geq 0$. Более того, из принадлежности $v \in V$ следует $-v \in V$, поэтому $\mu' \cdot v = 0$ для любого $v \in V$. На рис. 19.E.1(a) эта конструкция изображена для случая двух состояний.

Теперь мы утверждаем, что вектор-строка q^T должна быть пропорциональна вектор-строке $\mu' \cdot \boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^K$. Все элементы μ' и $\boldsymbol{R}$ являются неотрицательными, и ни одна строка $\boldsymbol{R}$ не является нулевой. Следовательно, $\mu' \cdot \boldsymbol{R} \geq 0^T$ и $\mu' \cdot \boldsymbol{R} \neq 0^T$. Если q^T не является пропорциональным $\mu' \cdot \boldsymbol{R}$, то мы сможем найти

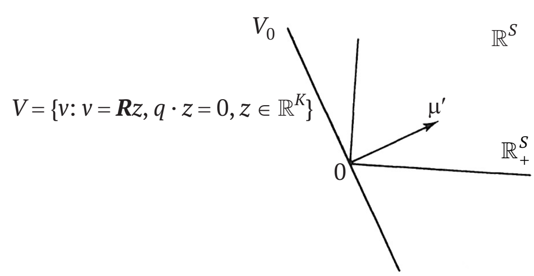


Рис. 19.E.1(a). Конструирование весов без арбитража

[17] Если бы такая строка нашлась, то мы положили бы множитель μ_s, относящийся к состоянию s для этой строки, равным произвольному числу, потом вычеркнули бы s из списка состояний и стали бы учитывать лишь оставшиеся состояния.

$\overline{z} \in \mathbb{R}^K$, такой что $q \cdot \overline{z} = 0$ и $\mu' \cdot \boldsymbol{R}\overline{z} > 0$ (см. рис. 19.E.1(b)). Но, полагая $v = \boldsymbol{R}\overline{z}$, получим: $v \in V$ и $\mu' \cdot v \neq 0$, что, как мы видели, невозможно. Следовательно, q^T должен быть пропорционален $\mu' \cdot \boldsymbol{R}$; т. е. $q^T = \alpha\mu' \cdot \boldsymbol{R}$ для некоторого вещественного $\alpha > 0$. Полагая $\mu = \alpha\mu'$, мы завершаем доказательство леммы.

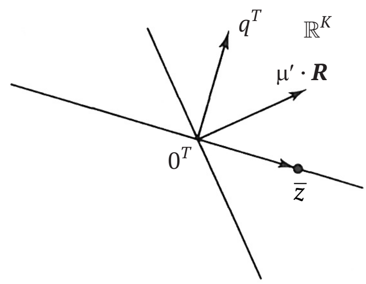


Рис. 19.E.1(b). Существование недопустимого $\overline{z}$, если q^T непропорционален $\mu' \cdot \boldsymbol{R}$

Как мы уже утверждали, если шорт-продажи активов возможны и предпочтения строго монотонны (например, если предпочтения могут быть описаны функцией ожидаемой полезности со строго положительными субъективными вероятностями состояний), то утверждение 19.E.1 следует из леммы 19.E.1. ■

Второе доказательство утверждения 19.E.1. Для этого доказательства мы предположим, что предпочтения представимы функциями полезности в виде ожидаемой полезности $U_i\left(x_{1i}, \ \ldots, \ x_{Si}\right) = \sum_s \pi_{si} u_{si}\left(x_{si}\right)$ и что элементарные функции полезности Бернулли $u_{si}(\cdot)$ вогнуты, строго возрастают и дифференцируемы. Мы обозначим $v_{si}(p_s, w_{si})$ косвенную функцию полезности (полученную из $u_{si}(\cdot)$) потребителя i в состоянии s.

Предположим, что в равновесии Раднера с ценами активов $q = (q_1, \ldots, q_K)$ равновесные спотовые цены равны $p = (p_1, \ldots, p_S) \in \mathbb{R}^{LS}$. Вследствие возможности неограниченных шорт-продаж оптимальный выбор портфеля $z_i^* \in \mathbb{R}^K$ любого потребителя i является необходимо внутренним, и если обозначить $w_{si}^* = p_s \cdot \omega_{si} + \sum_k r_{sk} z_{ki}^*$, они должны удовлетворять для некоторых $\alpha_i > 0$ условиям первого порядка:

$$\alpha_i q_k = \sum_s \pi_{si} \frac{\partial v_{si}\left(p_s, \ w_{si}^*\right)}{\partial w_{si}} r_{sk} \qquad \text{для каждого } k = 1, \ldots, K.$$

То есть вектор ожидаемых предельных полезностей K активов должен быть пропорциональным вектору цен активов[18]. С учетом вышесказанного мы почти достигли заявленного результата, так

[18] Вспомним, что у нас всегда $p_{1s} = 1$. Поэтому r_{sk} является дополнительным количеством богатства в состоянии s, полученном от дополнительной единицы актива k. Пропорциональный множитель α_i является множителем Лагранжа задачи

$$\max \sum_s \pi_{si} v_{si}\left(p_s, \ p_s \cdot \omega_{si} + \sum_k r_{sk} z_{ki}\right),$$
$$\text{при условии что } \sum_k q_k z_{ki} \leq 0.$$

как если взять $\mu_{si} = \dfrac{\pi_{si}}{\alpha_i} \dfrac{\partial v_{si}\left(p_s,\, w_{si}^*\right)}{\partial w_{si}}$, то получим $q_j = \sum\limits_s \mu_{si} r_{sk}$. Следовательно, мы можем определить $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_s)$ за счет выбора *любого* потребителя i и, полагая $\mu_s = \mu_{si}$, получим предельную полезность богатства потребителя i в состоянии s, взвешенную по π_{si}/α_i. Множитель α_i является множителем Лагранжа бюджетного ограничения при $t = 0$, и следовательно, можно эту величину рассматривать как предельную полезность богатства при $t = 0$. Отсюда для любого потребителя i μ_{si} равно отношению (ожидаемой) полезности при $t = 0$ одной дополнительной единицы богатства при $t = 1$ и состоянии s и полезности одной дополнительной единицы богатства при $t = 0$. Обратите внимание на упражнение 19.E.1, где приведено дополнительное обсуждение этой конструкции. Заметим также, что у различных потребителей могут быть различные $\mu_i = (\mu_{i1}, \ldots, \mu_{is})$, которые породят различные μ. Единственность μ гарантируется лишь при ранг $\boldsymbol{R} = S$. ■

Пример 19.E.3. Предположим, что имеется актив с неконтингентной доходностью, например $r_1 = (1, \ldots, 1)$. Нормализуем цену этого актива, полагая $q_1 = 1$. Тогда, если $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_s)$ — вектор множителей, выведенный в утверждении 19.E.1, то имеем: $\mu \geq 0$ и $\sum\limits_s \mu_s = \mu \cdot r_1 = q_1 = 1$. Для любого другого актива k мы получаем интуитивное утверждение, что $q_k = \sum\limits_s \mu_s r_{sk} \geq \min\limits_s r_{sk}$, и аналогично $q_k \leq \max\limits_s r_{sk}$. ■

В разделе 19.D мы доказали, что для множества активов на основе S контингентных рынков для одного физического блага имеет место эквивалентность равновесных распределений по Эрроу — Дебре и Раднеру (утверждение 19.D.1). Сейчас мы обобщим этот результат. В частности, мы покажем, что эта эквивалентность справедлива для *любого* семейства из S или большего числа активов, *при условии* что по меньшей мере S из них имеют доходности, которые линейно независимы (т. е. при эффективном числе активов, равном S как минимум). Сформулируем определение 19.E.2.

Определение 19.E.3. Структура активов с матрицей доходностей $\boldsymbol{R}$ размерности $S \times K$ является *полной,* если ранг $\boldsymbol{R} = S$, т. е. найдется некоторое подмножество из S активов с линейно независимыми доходностями.

Пример 19.E.4. В случае S контингентных благ, который обсуждался в разделе 19.D, а также в примере 19.E.1(2) матрица доходностей $\boldsymbol{R}$ является единичной матрицей размера $S \times S$. Это канонический пример полной системы рынков. Но есть и много других вариантов невырожденных матриц. Таким образом, при трех состояниях и трех активах у нас могла бы получиться матрица доходностей

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$ которая имеет ранг 3, равный числу состояний. ■

Пример 19.E.5. *Создание активов с помощью опционов*. Предположим, что $S = 4$ и есть основной актив с доходностями $r = (4, 3, 2, 1)$. Мы видели в примере 19.E.2, что для любой цены отсечения c опцион, определяемый c, образует актив с вектором доходностей $r(c) = (\max\{0, r_1 - c\}, \ldots, \max\{0, r_4 - c\})$. Используя опционы, мы можем создать полную структуру активов, целиком базирующуюся на основном активе r. Например, векторы доходностей $r(3{,}5)$, $r(2{,}5)$, $r(1{,}5)$ и r линейно независимы (у матрицы $\boldsymbol{R}$ все элементы ниже диагонали равны нулю). Таким образом, структура активов, состоящая из основного актива и из трех опционов с ценами отсечения, равными 3,5, 2,5 и 1,5, является полной. Если обобщить, то всякий раз, когда основной актив обладает свойством $r_s \neq r_{s'}$ для всех $s \neq s'$, возможно сгенерировать полную структуру активов посредством опционов (см. упражнение 19.E.2). Если $r_s = r_{s'}$ для некоторых различных s и s', то, если основной актив не различает некоторые состояния, никакой из производных активов точно так же не будет их различать. ■

Повторим, важность концепции полноты проистекает из того факта, что с ее помощью мы можем обобщить утверждение 19.D.1. С полной структурой активов экономические агенты, по существу, не ограничены в своих трансфертах богатства от состояния к состоянию (за исключением бюджетных ограничений, разумеется). Поэтому в равновесии выбор ими портфелей порождает потребление во втором периоде, совпадающее с равновесием Эрроу — Дебре, так что полная Парето-оптимальность будет достигнута. Это составляет содержание утверждения 19.E.2.

Утверждение 19.E.2. Предположим, что структура активов полна. Тогда:

(1) Если потребительские планы $x^* = \left(x_1^*, \ \ldots, \ x_I^*\right) \in \mathbb{R}^{LSI}$ и ценовой вектор $\left(p_1, \ \ldots, \ p_S\right) \in \mathbb{R}^{LS}_{++}$ образуют равновесие Эрроу — Дебре, то найдутся цены активов $q \in \mathbb{R}^K_{++}$ и портфельные планы $z^* = \left(z_1^*, \ \ldots, \ z_I^*\right) \in \mathbb{R}^{KI}$, такие что потребительские планы x^*, портфельные планы z^*, цены активов q и спотовые цены $(p_1, \ldots, p_S)$ образуют равновесие Раднера.

(2) Наоборот, если потребительские планы $x^* \in \mathbb{R}^{LSI}$, портфельные планы $z^* \in \mathbb{R}^{KI}$ и цены $q \in \mathbb{R}^K_{++}$, $\left(p_1, \ \ldots, \ p_S\right) \in \mathbb{R}^{LS}_{++}$ образуют равновесие Раднера, то найдутся множители $\left(\mu_1, \ \ldots, \ \mu_S\right) \in \mathbb{R}^S_{++}$, такие что потребительские планы x^* и вектор цен на потребительские контингентные блага $(\mu_1 p_1, \ldots, \mu_S p_S) \in \mathbb{R}^{LS}$ образуют равновесие Эрроу — Дебре. (Множитель μ_S интерпретируется как значение при $t = 0$ одного доллара при $t = 1$ и в состоянии s; вспомним, что $p_{1s} = 1$.)

Доказательство. Абсолютно аналогично доказательству утверждения 19.D.1.

(1) Определим $q_k = \sum\limits_s p_{1s} r_{sk}$ для каждого k. Обозначим Λ диагональную матрицу размера $S \times S$, s-й диагональный элемент которой равен p_{1s}. Тогда $q^T = e \cdot \Lambda \boldsymbol{R}$, где $e \in \mathbb{R}^S$ — вектор-столбец, все элементы которого равны 1. Для каждого i (столбец) вектор переноса богатства от состояния к состоянию (в равновесии

Эрроу — Дебре) равен $m_i = \left(p_1 \cdot \left(x_{1i}^* - \omega_{1i}\right),\ \ldots,\ p_S \cdot \left(x_{Si}^* - \omega_{Si}\right)\right)^T$. У нас $e \cdot m_i = 0$ для каждого i и $\sum\limits_i m_i = 0$. Вследствие полноты ранг $\Lambda\boldsymbol{R} = S$, и поэтому мы можем найти векторы $z_i^* \in \mathbb{R}^K$, такие что $m_i = \Lambda\boldsymbol{R}z_i^*$ для $i = 1, \ldots, I - 1$. Полагая $z_I^* = -\left(z_1^* + \ldots + z_{I-1}^*\right)$, мы также получим $m_I = -\left(m_1 + \ldots + m_{I-1}\right) = \Lambda\boldsymbol{R}z_I^*$. Поэтому для каждого i портфель z_i^* позволяет потребителю i достичь уровня потребления Эрроу — Дебре в различных состояниях по спотовым ценам $(p_1, \ldots, p_S)$. Чтобы проверить допустимость бюджета, заметим, что $q \cdot z_i^* = e \cdot \Lambda\boldsymbol{R}z_i^* = e \cdot m_i = 0$. В упражнении 19.E.3 вам предстоит завершить доказательство, установив, что потребительский и портфельный планы x_i^* и z_i^* не только допустимы с точки зрения бюджета, но и максимизируют полезность на бюджетном множестве.

(2) Допустим, без потери общности, что $p_{1s} = 1$ для всех s. Согласно утверждению 19.E.1 будем иметь: $q^T = \mu \cdot \boldsymbol{R}$ для некоторых арбитражных весов $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_S)$. Мы покажем, что x^* является равновесием Эрроу — Дебре по отношению к $(\mu_1 p_1, \ldots, \mu_S p_S)$. Чтобы это доказать, предположим, что $x_i \in \mathbb{R}^{LS}$ удовлетворяет единственному бюджетному ограничению Эрроу — Дебре, т. е. $\sum\limits_s \mu_s p_s \cdot \left(x_{si} - \omega_{si}\right) \le 0$. Тогда в силу предположения полноты найдется $z_i \in \mathbb{R}^K$, такой что $(p_1 \cdot (x_{1i} - \omega_{1i}), \ldots, p_S \cdot (x_{Si} - \omega_{Si}))^T = \boldsymbol{R}z_i$, и поэтому $q \cdot z_i = \mu \cdot \boldsymbol{R}z_i \le 0$. Следовательно, x_i также удовлетворяет бюджетным ограничениям равновесия Раднера. Далее заметим, что потребление в равновесии Раднера x_i^* допустимо с точки зрения бюджетного ограничения Эрроу — Дебре, так как из $\left(p_1 \cdot \left(x_{1i}^* - \omega_{1i}\right),\ \ldots,\ p_S \cdot \left(x_{Si}^* - \omega_{Si}\right)\right)^T \le \boldsymbol{R}z_i^*$ и $q^T = \mu \cdot \boldsymbol{R}$ следует $\sum\limits_s \mu_s p_s \cdot \left(x_{si}^* - \omega_{si}\right) \le \mu \cdot \boldsymbol{R}z_i^* = q \cdot z_i^* \le 0$. Поэтому x_i^* максимизирует полезность при бюджетных ограничениях Эрроу — Дебре. ■

Важно понимать, что при обсуждении равновесий Раднера то, что действительно важно, связано не с конкретной структурой активов, а с тем, что в линейном пространстве

Множество значений $\boldsymbol{R} = \{v \in \mathbb{R}^S : v = \boldsymbol{R}z \text{ для некоторых } z \in \mathbb{R}^K\} \subset \mathbb{R}^S$,

где мы обозначили множество векторов богатства, которые могут *порождаться* существующими активами (быть линейной оболочкой этих активов). Вполне возможно, что две различные структуры активов породят одно и то же линейное пространство. Наш следующий результат, утверждение 19.E.3, говорит о том, что всякий раз, когда это выполнено, множества равновесных распределений Раднера для обеих структур активов одинаковы.

Утверждение 19.E.3. Предположим, что вектор цен активов $q \in \mathbb{R}^K$, спотовые цены $p = (p_1, \ldots, p_S) \in \mathbb{R}^{LS}$, потребительские планы $x^* = \left(x_1^*, \ldots, x_I^*\right) \in \mathbb{R}_+^{LSI}$ и портфельные планы $\left(z_1^*, \ldots, z_I^*\right) \in \mathbb{R}^{KI}$ образуют равновесие Раднера для структуры активов с матрицей доходностей $\boldsymbol{R}$ размера $S \times K$. Пусть $\boldsymbol{R}'$ будет матрицей доходностей второй структуры активов размера $S \times K'$. Если ранг $\boldsymbol{R}'$ = ранг $\boldsymbol{R}$, то x^* будет по-прежнему потребительским распределением в равновесии Раднера в экономике со второй структурой активов.

Доказательство. Согласно утверждению 19.E.1 цены активов удовлетворяют условию арбитража, $q^T = \mu \cdot \boldsymbol{R}$ для некоторых $\mu \in \mathbb{R}^S_+$. Обозначим $q' = [\mu \cdot \boldsymbol{R}']^T$. Мы утверждаем, что если ранг $\boldsymbol{R}$ = ранг $\boldsymbol{R}'$, то

$$B_i(p, q', \boldsymbol{R}') = B_i(p, q, \boldsymbol{R}) \quad \text{для каждого } i. \tag{19.E.1}$$

Покажем, что если $x_i \in B_i(p, q, \boldsymbol{R})$, то $x_i \in B_i(p, q', \boldsymbol{R}')$. Чтобы это увидеть, положим

$$(p_1 \cdot (x_{1i} - \omega_{1i}), \ldots, p_S \cdot (x_{Si} - \omega_{Si}))^T \leq \boldsymbol{R}z_i$$

и $q \cdot z_i \leq 0$. Так как ранг $\boldsymbol{R}$ = ранг $\boldsymbol{R}'$, мы можем найти $z_i' \in$ ранг $\boldsymbol{R}'$, такие что $\boldsymbol{R}z_i = \boldsymbol{R}'z_i'$. Но тогда $q' \cdot z_i' = \mu \cdot \boldsymbol{R}'z_i' = \mu \cdot \boldsymbol{R}z_i = q \cdot z_i \leq 0$, и, следовательно, мы можем заключить, что $x_i \in B_i\left(p,\ q',\ \boldsymbol{R}'\right)$. Обратное утверждение (если $x_i \in B_i(p, q', \boldsymbol{R}')$, то $x_i \in B_i(p, q, \boldsymbol{R})$) доказывается совершенно аналогично.

Из (19.E.1) вытекает, что для любого потребителя i набор x_i^* является наилучшим с точки зрения предпочтений в бюджетном множестве $B_i(p, q', \boldsymbol{R}')$.

Чтобы доказать, что цены активов q', спотовые цены $p = (p_1, \ldots, p_S)$ и потребительское распределение x^* являются частью равновесия Раднера в экономике со структурой активов, имеющей матрицу доходностей $\boldsymbol{R}'$, достаточно найти портфели $\left(z_1',\ \ldots,\ z_I'\right) \in \mathbb{R}^{KI}$, такие что прежде всего $\sum_i z_i' = 0$, и, во-вторых, для каждого потребителя i вектор переноса богатства от состояния к состоянию

$$m_i = \left(p_1 \cdot \left(x_{1i}^* - \omega_{1i}\right),\ \ldots,\ p_S \cdot \left(x_{Si}^* - \omega_{Si}\right)\right)^T$$

удовлетворяет $m_i = \boldsymbol{R}'z_i'$. Это легко доказать. Вследствие строгой монотонности предпочтений имеем $m_i = \boldsymbol{R}'z_i^*$ для каждого i. Отсюда $m_i \in$ множеству значений $\boldsymbol{R}$, и поэтому $m_i \in$ множеству значений $\boldsymbol{R}'$ для каждого i. Выберем $z_1',\ \ldots,\ z_{I-1}'$, такие что $m_i = \boldsymbol{R}'z_i'$ для каждого $i = 1, \ldots, I-1$. Наконец, пусть $z_I' = -z_1' - \ldots - z_{I-1}'$. Тогда $\sum_i z_i' = 0$ и, кроме того,

$$m_I = -\left(m_1 + \ldots + m_{I-1}\right) = -\boldsymbol{R}'\left(z_1' + \ldots + z_{I-1}'\right) = \boldsymbol{R}'z_I'. \ \blacksquare$$

Будем называть актив *излишним*, если его удаление не влияет на линейное пространство множество значений $\boldsymbol{R}$, состоящее из линейной оболочки переносов богатства, т. е. векторы доходностей являются линейными комбинациями векторов доходностей оставшихся активов. Из утверждения 19.E.3 следует, что множество потребительских распределений, получаемых как часть равновесия Раднера, не изменится при добавлении или удалении излишнего актива. Другим важным фактом является то, что излишний актив можно оценить, исходя всего лишь из матрицы доходностей и цен на другие активы.

Упражнение 19.E.4 *(арбитражное ценообразование)*. Предположим, что $r_3 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2$. Покажите, что в равновесии должно быть выполнено $q_3 = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2$. Вспомните, что неограниченные шорт-продажи возможны. (Предположите также, что векторы доходностей неотрицательные и ненулевые.)

Одним из следствий упражнения 19.E.4 является тот факт, что если структура активов полна, то мы можем вывести цены всех активов, зная цены активов из подмножества S всех активов, имеющих линейно независимые доходности. Это также легко увидеть, если заметить, что из цен S активов с линейно независимыми доходностями мы можем единственным образом найти мультипликаторы $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_S)$, как в утверждении 19.E.1; действительно, для этого нужно всего лишь решить линейную систему из S независимых уравнений относительно S переменных. Эти множители могут быть интерпретированы как (арбитражные) цены активов Эрроу (см. пример 19.E.1 (2)). Как только у нас появятся эти множители, мы сможем получить цену любого другого актива k с вектором доходностей r_k $q_k = \sum_s \mu_s r_{sk}$.

Пример 19.E.6. *Ценообразование опциона*. Предположим, что $S = 2$ и актив с неконтингентной отдачей, например $r_1 = (1, 1)$, и второй актив $r_2 = (3 + \alpha, 1 - \alpha)$ с $\alpha > 0$. Цены активов равны $q_1 = 1$ и q_2. Теперь мы рассмотрим опцион для второго актива, цена отсечения которого $c \in (1, 3)$. Тогда

$$r_2(c) = \left(3 + \alpha - c,\ 0\right) = \frac{3 + \alpha - c}{2 + 2\alpha} r_2 - \frac{(1 - \alpha)(3 + \alpha - c)}{2 + 2\alpha} r_1.$$

Поэтому арбитражная цена опциона (единственная цена, совместимая с равновесием на рынке активов) должна быть равна

$$q_2(c) = \frac{3 + \alpha - c}{2 + 2\alpha}\left[q_2 - (1 - \alpha)\right]. \tag{19.E.2}$$

Равносильный способ получить ту же формулу состоит в наблюдении, что поскольку матрица доходностей $\boldsymbol{R}$ размерности 2×2 невырожденная, то множители $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ из утверждения 19.E.1 могут быть единственным образом определены из уравнения $(1, q_2) = \mu \cdot \boldsymbol{R}$. Они равны $\mu_1 = (q_2 - (1 - \alpha))/(2 + 2\alpha)$ и $\mu_2 = 1 - \mu_1$. Теперь, опять же из утверждения 19.E.1, мы будем иметь: $q_2(c) = \mu \cdot r_2(c) = \mu_1(3 + \alpha - c)$, что в точности совпадает с выражением (19.E.2).

Заметим, что если цены двух активов r_1 и r_2 сами являются свободными от арбитража, то должно быть выполнено $3 + \alpha \geq q_2 \geq 1 - \alpha$ (вспомните пример 19.E.3). Поэтому из формулы (19.E.2) следует, что $q_2(c)$ неотрицательна, убывает по c и возрастает по q_2.

Мы также можем показать, что если цена актива q_2 остается постоянной, но параметр дисперсии, представленный α, возрастает, то опцион становится более ценным. Действительно, предположим, что $\alpha' > \alpha$ и $r_2'(c)$, $r_2(c)$ являются соответствующими доходностями опциона. Тогда $r_3 = r_2'(c) - r_2(c)$ представляет собой актив с неотрицательными доходностями. Мы можем назначить на него цену посредством арбитража на основе r_1 и r_2, чтобы получить $q_3 \geq 0$ (обычно $q_3 > 0$). Но тогда, опять-таки посредством арбитража, мы получим $q_2'(c) = q_3 + q_2(c) \geq q_2(c)$. ■

Все это можно обобщить на случай $T + 1$ периодов и постепенного высвобождения информации. Когда периодов несколько, актив может принимать разные формы. Например, у нас могут быть *краткосрочные активы*, которые торгуются в данный период и имеют положительную доходность только в следующем периоде. Или же у нас могут быть *долгосрочные активы* в момент $t = 0$, торгуемые в любой период и имеющие положительную доходность только в последний период $t = T$. И конечно, могут быть случаи смешанных активов, торгуемых в определенные периоды и приносящих доходность в некоторые периоды (причем эти периоды не обязаны совпадать).

И снова результат утверждения 19.D.1, имеющий эквивалентный характер, может быть обобщен, если структура активов является *полной*. Предположим, например, что наша структура активов состоит исключительно из наборов краткосрочных активов, имеющихся в наличии, торгуемых в любую допустимую пару дата-событие tE и выплачивающих контингентные количества физического блага 1 непосредственно в следующие пары дата-событие. Обозначим $S(tE)$ количество таких последующих пар. Если число имеющихся в наличии активов при tE равно $K(tE)$, то мы можем представить матрицу доходностей при tE как $S(tE) \times K(tE)$, или матрицу $\boldsymbol{R}(tE)$. Тогда условие полноты означает требование ранг $\boldsymbol{R}(tE) = S(tE)$ для всех допустимых пар tE. В разделе 19.D матрицы $\boldsymbol{R}(tE)$ были единичными и, следовательно, структура активов была полной. Но хотим еще раз подчеркнуть, что результаты раздела 19.D обобщаются на случай полной структуры, но не в диагональном случае.

Очень интересное и новое явление состоит в том, что если активы существуют долго и, следовательно, торгуются вновь и вновь, и при этом информация постепенно раскрывается, то можно применить равновесие Эрроу — Дебре с числом активов существенно меньше S. Эта идея будет рассмотрена в примере 19.E.7.

Пример 19.E.7. Предположим, что $T = 2$ и дерево дат-событий раскрывается, как показано на рис. 19.E.2.

На рисунке мы видим семь допустимых дат-событий с четырьмя концевыми вершинами, или состояниями, с начальной вершиной, обозначенной a, и двумя промежуточными вершинами, обозначенными b и c. В частности, из каждой вершины выходит не более двух ветвей. В этом случае мы утверждаем, что обычно двух долго живущих активов достаточно, чтобы равновесные потребительские распределения по Эрроу — Дебре и Раднеру совпадали[19]. Предположим для простоты, что $L = 1$ и что два наших актива имеют векторы доходностей $r_1 = (1, 1, 1, 1)$ и $r_2 = (0, 1, 0, 1)$, которые приносят платежи в концевых вершинах. Потребление происходит только в концевых вершинах, но активы могут торговаться как в вершине a, соответствующей $t = 0$, так и в вершинах b и c, соответствующих $t = 1$. Мы можем нормализовать

---

[19] Мы использовали слово «обычно», потому что существование двух активов является необходимым, но недостаточным условием для полноты в каждой вершине.

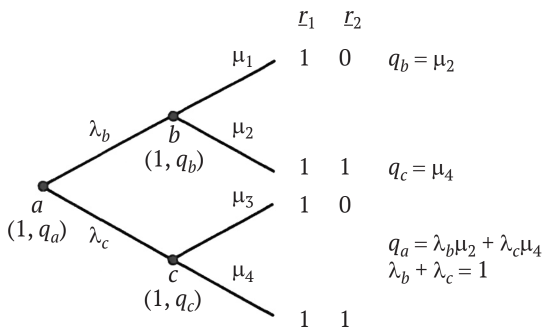


Рис. 19.E.2. Конструирование цен Эрроу — Дебре исходя из равновесных значений цен двух активов, торгуемых последовательно

цену первого актива (так же как и цену конечного потребления), положив равной 1 в каждой вершине[20]. Обозначим q_a, q_b и q_c цены второго актива в соответствующих вершинах. За счет арбитража (утверждение 19.E.1), используемого при $t = 1$, найдутся такие $(\mu_1, \mu_2) \geq 0$, что $\mu_1 + \mu_2 = 1$, $\mu_2 = q_b$, и $(\mu_3, \mu_4) \geq 0$, такие что $\mu_3 + \mu_4 = 1$ и $\mu_4 = q_c$. Снова применяя арбитраж (теперь при $t = 0$), мы найдем $(\lambda_b, \lambda_c) \geq 0$, такие что $\lambda_b + \lambda_c = 1$ и $q_a = \lambda_b q_b + \lambda_c q_c = \lambda_b\mu_2 + \lambda_c\mu_4$. Тем самым предлагается рассмотреть следующие цены Эрроу — Дебре:

$$p = (\lambda_b\mu_1, \lambda_b\mu_2, \lambda_c\mu_3, \lambda_c\mu_4).$$

В упражнении 19.E.5 вам будет предложено показать, что при выполнении слабого условия $q_b \neq q_c$ множество конечного потребления, достижимого при последовательной торговле с ценами (q_a, q_b, q_c), будет точно таким, как и множество конечного потребления, достижимого при четырех контингентных благах Эрроу — Дебре и ценах p[21]. ■

19.F. Неполные рынки

В этом разделе мы исследуем, что произойдет, если активов меньше, чем S, т. е. если структура активов не является необходимо полной. Будем работать с двухпериодной моделью, сохраняя в качестве основы предпосылки предыдущих разделов[22].

Рынки могут не существовать по многим причинам. Один комплекс причин имеет отношение к информационной асимметрии, которую мы рассмотрим в разделе 19.H: контракты на поставку товаров могут быть контингентными в состояниях, реализация которых является достоверной для всех участников сделок. Другой комплекс причин проистекает из наличия транзакционных издержек: в конце концов существование рын-

[20] Заметим, что, как и следовало ожидать, мы не можем нормализовать более одной цены в одном бюджетном ограничении.

[21] Так случайно получилось, что цены активов являются частным случаем явления, которое носит название *мартингального свойства цен активов*: в любой вершине цена актива является условным ожиданием финальных доходностей, когда ожидание вычисляется на основе некоторых вероятностей, в нашем случае цен Эрроу — Дебре.

[22] Более глубокое и детальное рассмотрение можно найти в работе (Magill, Shafer, 1991).

ка является фактом, относящимся к наличию общественного блага. Еще один комплекс причин порожден ограничениями, связанными с обеспечением законом выполнения контрактов: в самом деле, обещание осуществить поставку ничего не стоит, если нет возможности ее гарантировать законодательно[23].

Несмотря на сказанное выше, мы не будем вникать в теорию возникновения активов. Нам будет достаточно представления о том, что ситуация с неполными рынками является разумным описанием действительности.

Мы начнем с замечания, что если $K < S$, то равновесие Раднера необязательно Парето-оптимально. Это неудивительно: если возможности по переносу богатства из состояния в состояние ограничены, то могут возникнуть потери, связанные с неспособностью диверсифицировать риски в такой степени, чтобы выправить положение. Рассмотрим крайний случай, когда активов нет. Пример 19.F.1 дает еще одну интересную иллюстрацию провала подобного типа.

Пример 19.F.1. *Солнечные пятна.* Предположим, что предпочтения допускают представление в виде ожидаемой полезности и что множество состояний S таково, что, во-первых, оценки вероятностей наступления событий потребителями одинаковы (т. е. $\pi_{si} = \pi_{si'} = \pi_s$ для всех i, i' и s), и, во-вторых, события не воздействуют на основы экономики; другими словами, функции полезности Бернулли и первоначальные запасы каждого потребителя i одинаковы для всех состояний (т. е. $u_{si}(\cdot) = u_i(\cdot)$ и $\omega_{si} = \omega_i$ для всех s). Такое множество состояний называется множеством *солнечных пятен.* Вопрос, который нас будет интересовать (впервые он был рассмотрен Cass и Shell (1983)), состоит в следующем: возможно ли в описанных условиях, чтобы равновесные потребительские распределения по Раднеру принимали различные значения в разных состояниях. Равновесие, при котором это наблюдается, называется *равновесием солнечных пятен*[24].

В предположении, что потребители обладают строгим неприятием риска и их функции полезности $u_i(\cdot)$ строго вогнуты, *любое Парето-оптимальное распределение* $(x_1, \ldots, x_I) \in \mathbb{R}^{LSI}$ *должно быть одинаковым во всех состояниях* (*или быть независимым от состояний*); т. е. для каждого i должно быть выполнено $x_{1i} = x_{2i} = \ldots = x_{si} = \ldots = x_{Si}$. Чтобы это понять, предположим, что для каждого i и s мы заменяем потребительский набор потребителя i в состоянии s, $x_{si} \in \mathbb{R}^L_+$, на ожидаемый потребительский

---

[23] Примером ситуации, когда усиление законов весьма желательно, может служить следующий: рассмотрим акции фирмы, тем самым полагая, что первоначальная ценность актива положительна и шорт-продажи невозможны. Тогда обеспечение права гарантировано, т. к. физически акции — требования по обладанию фирмой — действительно торгуются при $t = 0$. Такого рода рассуждение, к сожалению, вступает в противоречие с очень удобным допущением, что неограниченные шорт-продажи возможны, и это объясняет, почему некоторые активы существуют, а другие нет: для того чтобы актив существовал, важно, чтобы случайная переменная имела физическую реализацию, которой можно обмениваться при $t = 0$.

[24] Термин «солнечные пятна» является старым, но его употребление в настоящее время наполнено новым содержанием. В XIX веке проводилось исследование по «проблеме солнечных пятен», в котором была предпринята попытка определить воздействие ненаблюдаемых сигналов (солнечных пятен) на фундаментальные факторы (например, сельское хозяйство) и понять, как под этим воздействием изменяются цены. Современная задача — определить, как наблюдаемый сигнал, который не воздействует на фундаментальные факторы, тем не менее посредством ожиданий может влиять на цены.

набор этого потребителя $\bar{x}_i = \sum_s \pi_s x_{si} \in \mathbb{R}^L_+$. Новое распределение не зависит от состояний мира, и, кроме того, оно допустимо, потому что

$$\sum_i \bar{x}_i = \sum_i \sum_s \pi_s x_{si} = \sum_s \pi_s \left(\sum_i x_{si} \right) \leq \sum_s \pi_s \left(\sum_i \omega_i \right) = \sum_i \omega_i .$$

Вследствие вогнутости $u_i(\cdot)$ мы видим, что благосостояние любого из потребителей не ухудшается: $\sum_s \pi_s u_i(\bar{x}_i) = u_i(\bar{x}_i) = u_i\left(\sum_s \pi_s x_{si}\right) \geq \sum_s \pi_s u_i(x_{si})$ для каждого i.

В силу Парето-оптимальности $(x_1, \ldots, x_I)$ неравенства выше на самом деле представляют собой равенства; т. е. $u_i(\bar{x}_i) = \sum_s \pi_s u_i(x_{si})$ для всех i. Но если это так, то строгая вогнутость $u_i(\cdot)$ дает нам $x_{si} = \bar{x}_i$ для каждого s. Следовательно, Парето-оптимальное распределение $(x_1, \ldots, x_I) \in \mathbb{R}^{LSI}$ не зависит от состояний.

Из факта независимости от состояний и с учетом первой теоремы благосостояния мы получаем важное следствие: если система полных рынков, использующих S состояний, может быть организована, то равновесия *свободны от солнечных пятен*, т. е. потребление одинаково во всех состояниях. На самом деле трейдеры хотят быть полностью застрахованными, и у них есть инструменты, чтобы этого добиться.

Однако выходит, что если нет полного набора страховых инструментов, то вышеописанные утверждения могут оказаться ложными. Свободные от солнечных пятен Парето-оптимальные равновесия всегда существуют (просто нужно сделать так, чтобы рынок «не обращал внимания» на солнечные пятна; см. упражнение 19.F.1). Но теперь может случиться так, что равновесное по Раднеру потребительское распределение зависит от состояния и, стало быть, не будет являться Парето-оптимальным. В таких равновесиях потребители ожидают, что цены в разных состояниях будут различаться, и эти ожидания оказываются самосбывающимися. Простейшим примером, даже тривиальным, является случай, когда активы отсутствуют ($K = 0$). Тогда система спотовых цен $(p_1, \ldots, p_S) \in \mathbb{R}^{LS}$ является равновесием по Раднеру в том и только в том случае, если каждая p_s является равновесным по Вальрасу вектором цен для спот-экономики, определяемой $\{(u_i(\cdot),\ \omega_i)\}_{i=1}^{i=I}$. Если в этой экономике имеется несколько различных вальрасовских равновесий, что является вполне возможным, то за счет выбора различных равновесных векторов цен для разных состояний мы можем получить равновесие солнечного пятна и, следовательно, неэффективное по Парето равновесие Раднера. ■

Мы только что увидели, что равновесные по Раднеру распределения не обязаны быть Парето-оптимальными, и, стало быть, могут существовать перераспределения потребительских наборов, которые по меньшей мере сохранят благосостояние всех потребителей на прежнем уровне и повысят благосостояние хотя бы одного агента. Однако важно понимать, что этот факт *необязательно* означает, что планировщик, который ответственен за благосостояние и «так же, как и рынок, стеснен в вопросах переноса богатства от состояния к состоянию», может достичь Парето-оптимума. Распределение, которое не может быть улучшено по Парето таким планировщиком, называется *условным Парето-оптимумом*. Более важным и осмысленным вопросом является следующий: будут ли равновесия по Раднеру условными Парето-оптимальными распределениями? Сейчас мы попытаемся ответить на этот вопрос[25].

Чтобы начать анализ, нам нужно точное описание условного бюджетного множества и, соответственно, понятие условного Парето-оптимума. Это проще всего сделать, когда в каждом состоянии одно благо, т. е. $L = 1$. Важным следствием этого предположения является то, что количество потребляемого i-м потребителем в различных состояниях полностью определяется его портфелем z_i. Действительно, $x_{si} = \sum_k z_{ki} r_{sk} + \omega_{si}$. Следовательно, мы можем положить

$$U_i^*(z_i) = U_i^*(z_{1i}, \ \ldots, \ z_{Ki}) = U_i\left(\sum_k z_{ki} r_{1k} + \omega_{1i}, \ \ldots, \ \sum_k z_{ki} r_{Sk} + \omega_{Si}\right),$$

тем самым определяя полезность, порожденную портфелем z_i. Тогда определение условной Парето-оптимальности окажется вполне естественным.

Определение 19.F.1. Распределение активов $(z_1, \ldots, z_I) \in \mathbb{R}^{KI}$ условно Парето-оптимально, если оно допустимо (т. е. $\sum_i z_i \le 0$) и нет другого допустимого распределения активов $\left(z'_1, \ \ldots, \ z'_I\right) \in \mathbb{R}^{KI}$, такого что $U_i^*\left(z'_1, \ \ldots, \ z'_I\right) \ge U_i^*\left(z_1, \ \ldots, \ z_I\right)$ для каждого i и хотя бы с одним строгим неравенством.

Если считать, что $L = 1$, то задача максимизации потребителя i принимает вид

$$\max_{z_i \in \mathbb{R}^K} U_i^*\left(z_{1i}, \ \ldots, \ z_{Ki}\right), \text{ что } q \cdot z_i \le 0.$$

Предположим, что $z_i^* \in \mathbb{R}^K$, $i = 1, \ldots, I$ является семейством решений этих индивидуальных задач для вектора цен активов $q \in \mathbb{R}^K$. Тогда $q \in \mathbb{R}^K$ будет равновесным вектором цен по Раднеру в том и только в том случае, если $\sum_i z_i^* \le 0$[26]. Заметим, что теперь наша задача стала вполне обычной задачей по поиску равновесия с K товарами (см. упражнение 19.F.2, в котором обсуждаются свойства $U_i^*(\cdot)$). К этой задаче мы можем применить первую теорему благосостояния (утверждение 16.C.1), и утверждение 19.F.1 тем самым будет доказано.

Утверждение 19.F.1. Предположим, что имеются два периода и только одно потребительское благо во втором периоде. Тогда любое равновесие Раднера является *условным Парето-оптимумом* в том смысле, что не существует возможных перераспределений активов в первом

[25] Это типичный пример *второго наилучшего* решения по максимизации благосостояния. Мы уже встречались с проблемами подобного рода в главах 13 и 14 и встретимся вновь в главе 22.

[26] Вспомним, что при заданном z_i потребление в каждом из состояний определено. Аналогично цена потребляемого блага в каждом состоянии формально зафиксирована и равна 1.

периоде, которые не ухудшали бы благосостояния каждого потребителя и улучшали бы благосостояние хотя бы одного из них[27,28].

Ситуация, рассмотренная в утверждении 19.F.1, является весьма частной в том смысле, что как только начальный портфель активов определен, его совокупное потребление также полностью определено: при одном потребительском благе нет возможностей для торговли, если состояние реализуется. В частности, относительные цены второго периода не имеют значения, потому что таких цен не существует. Ситуация меняется, если имеется больше одного потребительского блага во втором периоде или периодов больше двух. Рассмотрим случай двух периодов с $L > 1$: мы не сможем использовать косвенную функцию полезности портфеля активов для полного описания задачи по принятию решения индивидом. Относительные цены, которые ожидаются во втором периоде[29], тоже будут иметь значение. Это существенно усложняет формулировку понятия условной Парето-оптимальности. Исходя из этого, можно показать, что нет удобного обобщения понятия условной Парето-оптимальности, которое бы однозначно признавало условную Парето-оптимальность равновесий Раднера. Пример 19.F.2, заимствованный у Харта (1975), помогает это увидеть. В этом примере мы рассматриваем экономику с несколькими равновесиями Раднера, два из которых ранжированы по Парето. То есть одно из двух равновесий доминирует по Парето другое. В той степени, в которой естественно позволить планировщику благосостояний по меньшей мере отбирать равновесия, первое из равновесий не будет условным Парето-оптимумом[30].

Пример 19.F.2. *Равновесия, ранжированные по Парето.* Пусть $I = 2$, $L = 2$ и $S = 2$. Активов нет ($K = 0$). Два потребителя имеют в качестве своих первоначальных запасов по одной единице каждого блага в каждом состоянии. Функции полезности имеют вид $\pi_{1i}u_i(x_{11i}, x_{21i}) + \pi_{2i}u_i(x_{12i}, x_{22i})$. Заметим, что хотя оценки вероятностей различаются у двух потребителей (сейчас они будут введены), спотовые экономики идентичны в обоих состояниях. Предположим, что спотовая экономика имеет несколько различающихся равновесий (т. е. она могла бы быть представлена экономикой обмена, как на рис. 15.B.9). Пусть $p', p'' \in \mathbb{R}^2$ — вальрасовские цены для этих двух равновесий, и пусть $v_i(p)$ — полезность спот-рынка, построенная на основе $u_i(\cdot, \cdot)$ и вектора спотовых цен $p \in \mathbb{R}^2$. Предположим, что $v_1(p') > v_1(p'')$. Вследствие Парето-оптимальности на спот-рынке $v_2(p') < v_2(p'')$.

[27] Мы еще раз хотим подчеркнуть, что термин *условный* является наиболее подходящим. Богатство может переходить от индивида к индивиду и от состояния к состоянию только посредством торговли на данном множестве активов. Чтобы увидеть, насколько это ограничительно, предположим, что активов нет. Тогда у планировщика благосостояния нет никаких инструментов.

[28] В нашей модели все потребление происходит во второй период. Это упрощение, которое не сказывается на справедливости утверждения. Если планировщик благосостояния мог бы также перераспределять потребление, которое происходит в первом периоде, то равновесные по Раднеру распределения все равно были бы условно Парето-оптимальны.

[29] Или же относительные цены товаров между вторым и третьим периодами, если мы рассматриваем больше двух дат.

[30] Другими словами, первое равновесие не является Парето-оптимальным по отношению к любому множеству ограниченных допустимых распределений, которые включают все равновесия Раднера.

Теперь мы определим два равновесия Раднера. У первого равновесные цены равны $(p_1, p_2) = (p', p'') \in \mathbb{R}^4$, у второго $(p_1, p_2) = (p'', p') \in \mathbb{R}^4$. Так как нет возможности передачи богатства от состояния к состоянию, то, разумеется, эти цены являются равновесными по Раднеру, и, более того, они являются таковыми для любых оценок вероятностей π_i. Однако значения ожидаемых полезностей этих потребителей в различных состояниях зависят от π_i. Мы можем видеть, что если потребитель 1 верит, что первое состояние более вероятно, чем второе, т. е. у него $\pi_{11} > 0{,}5$, то он предпочтет первое равновесие второму. В самом деле, из $\pi_{11} > 0{,}5$ и $v_1(\mathrm{p}') > v_1(\mathrm{p}'')$ следует, что $\pi_{11}v_1(p') + \pi_{21}v_1(p'') > \pi_{11}v_1(p'') + \pi_{21}v_1(p')$. Аналогично если второй потребитель верит, что второе состояние более вероятно, чем первое, т. е. $\pi_{22} > 0{,}5$, то он *тоже* предпочтет первое равновесие второму: $\pi_{22} > 0{,}5$ и $v_2(p') < v_2(p'')$ означают, что $\pi_{12}v_2(p') + \pi_{22}v_2(p'') > \pi_{12}v_2(p'') + \pi_{22}v_2(p')$. Таким образом, равновесие Раднера с ценами (p', p'') доминирует по Парето то равновесие, в котором цены равны (p'', p'). ■

Есть общее мнение, высказанное в литературе, что провалы условной Парето-оптимальности (для естественных определений этого понятия) не только возможны, но даже являются типичными (Geanakoplos, Polemarchakis, 1986)). В упражнении 19.F.3 вам будет предложено рассмотреть парадокс относительной оптимальности: может оказаться, что в новом равновесии множество активов может расширяться и все потребители могут ухудшить свое благосостояние! Мы не будем здесь ставить целью анализ ограниченной оптимальности. В определенный момент нам встретится трудность, преодолеть которую осмысленно мы не сможем без обращения к сложной задаче определения структуры активов.

Мы могли бы также проанализировать позитивные вопросы, которые изучались в главе 17, на этот раз в контексте неполных рынков. Что касается вопроса существования, то возникают новые трудности, связанные с тем, что неограниченные шорт-продажи возможны. Иногда это может привести к отсутствию существования (см. упражнение 19.F.4)[31]. Новые сложности также возникают при исследовании вопроса об определении равновесия (т. е. их количества и локальной единственности). Как мы видели в разделе 17.D, при полной структуре активов можно утверждать, что множество равновесий конечно. Но в случае неполных рынков активов их природа (например, реальные они или финансовые) уже имеет значение, кроме того, важным становится и размер S.

19.G. Поведение фирмы в моделях общего равновесия в условиях неопределенности

В предыдущих разделах мы концентрировали внимание на исследовании экономик обмена. Но это было сделано не только ради простоты. Исследование производства и фирм становится существенно более сложным

[31] Неограниченные шорт-продажи являются источником разрывов в функциональных зависимостях доходностей активов в пространстве допустимых переносов богатства от состояния к состоянию. Неважно, насколько близки доходности активов (в денежной форме) к линейной зависимости, потребители могут за счет больших объемов торгов планировать достижение любых переносов богатства в подпространстве, натянутом на доходности активов. Но когда доходности в точности становятся линейно зависимыми, это достижимое подпространство внезапно теряет размерность. Как отмечалось, в некоторых случаях это может привести к потере существования. Однако модель, которую мы изучаем в этой главе, не относится к этому типу. Если, как у нас, в каждом состоянии все активы имеют доходности в виде единственного физического блага, которое одинаково во всех состояниях, то разрывов не будет.

в контексте возможно неполных рынков. Причина заключается в вопросе целей фирмы[32].

Как и раньше, мы рассмотрим временную структуру, состоящую из двух периодов, $t = 0$ и $t = 1$, и S возможных состояний при $t = 1$. Есть L физических благ, торгуемых на спот-рынках при $t = 1$, и K активов, торгуемых при $t = 0$. При $t = 0$ потребление отсутствует. Доходности активов выражаются в физических количествах первого блага (которое мы можем назвать измерителем). Матрица доходностей размера $S \times K$ обозначена как $\boldsymbol{R}$.

Введем в нашу модель фирму, которая производит случайное количество измерителя при $t = 1$ (возможно, за счет факторов производства в период $t = 0$, но мы не будем формализовать эту часть явным образом). Пусть $(a_1, \dots, a_S)$ обозначает уровни выпуска фирмы, зависящие от состояний. Есть также акции $\theta_i \geq 0$, $\sum_i \theta_i = 1$, определяющие долю фирмы, принадлежащую потребителю i. Вплоть до конца этого раздела (за исключением параграфа, напечатанного мелким шрифтом в конце) будем придерживаться того естественного взгляда, что фирма является активом с вектором доходностей $a = (a_1, \dots, a_S)$, акции которого торгуются на финансовых рынках при $t = 0$[33].

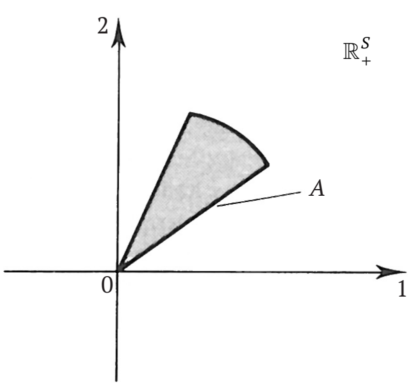


Рис. 19.G.1. Пример выбора возможных производственных планов

Предположим теперь, что фирма действительно может выбирать из некоторого диапазона свой (случайный) производственный план. Например, будем считать, что имеется множество $A \subset \mathbb{R}^S$ возможных выборов векторов доходностей $(a_1, \dots, a_S) \in A$. Посмотрите на рис. 19.G.1 (случай $S = 2$). Мы предполагаем, что вектор доходностей $a \in A$ выбирается до того, как финансовые рынки $t = 0$ откроются. Таким образом, решения принимаются *первоначальными* акционерами (так как акции могут быть проданы в период $t = 0$, то акционеры в конце периода $t = 0$ могут образовывать другое множество). Какой производственный план выберут эти первоначальные собственники? Оказывается, что ответ чрезвычайно прост, если A может быть натянуто на существующие активы, в противном случае дать ответ крайне сложно.

[32] Классическая статья на эту тему: (Diamond, 1967). Более современное изложение можно найти в работе (Merton, 1982).

[33] Небольшое расхождение с описанием модели, которому мы до сих пор следовали, состоит в том, что фирма действительно производит $(a_1, \dots, a_S)$, и поэтому общий первоначальный запас этого актива не равен нулю. Действительно, если положить $\sum_i \theta_i = 1$, у нас произойдет нормализация этого первоначального запаса к 1.

Определение 19.G.1. Множество $A \subset \mathbb{R}^S$ случайных векторов является *линейной оболочкой* данной структуры активов, если любой вектор $a \in A$ лежит в множестве значений матрицы доходностей $\boldsymbol{R}$ структуры активов, т. е. если любой вектор $a \in A$ может быть представлен как линейная комбинация имеющихся в наличии доходностей активов.

Если мы предположим, во-первых, что A натянуто на $\boldsymbol{R}$ и, во-вторых, что мы имеем дело с малым проектом (т. е. все возможные выпуски $a \in A$ малы по сравнению с размером экономики, другими словами, $a_s \Big/ \left\| \sum_i \omega_{si} \right\|$ мало для всех s), то тогда (почти) оправданно взятие равновесных спотовых цен $p = (p_1, \ldots, p_S) \in \mathbb{R}^{LS}$ и цен активов $q = (q_1, \ldots, q_K) \in \mathbb{R}^K$ фиксированными и не зависящими от конкретного производственного плана, выбранного фирмой[34]. Для цен активов $q \in \mathbb{R}^K$ *рыночная стоимость* $v(a, q)$ любого производственного плана $a \in A$ может быть найдена посредством арбитража: если $a = \sum_k \alpha_k r_k$, то $v(a, q) = \sum_k \alpha_k q_k$. В упражнении 19.G.1 вам будет предложено показать, что если фирма добавляется как новый актив к существующему списку активов и каждый производственный план $a \in A$ оценивается исходя из его арбитражной оценки $v(a)$, то любой потребительский план, доступный с точки зрения бюджета, может быть в действительности осуществлен без покупки акций фирмы (этот факт можно вывести из утверждения 19.E.3). Таким образом, при фиксированных ценах активов $q \in \mathbb{R}^K$ и спотовых ценах $p = (p_1, \ldots, p_S) \in \mathbb{R}^{LS}$, бюджетное ограничение потребителя i равно[35]

$$\begin{aligned} B_{ai} = \{(x_{1i}, \ldots, x_{Si}) \in \mathbb{R}^{LS}_+ &: \text{существует такой портфель } z_i \in \mathbb{R}^K, \text{ что} \\ p_s \cdot (x_{is} - \omega_{is}) &\le \sum_k p_{1s} r_{sk} z_{ki} \text{ для каждого } s \text{ и } q \cdot z_i \le \theta_i v(a, q)\}. \end{aligned} \quad (19.G.1)$$

Из вида этого бюджетного ограничения следует, что при постоянных ценах каждый i-й потребитель-собственник (т. е. при всех таких i, что $\theta_i > 0$) сталкивается с выбором одного из двух производственных планов, $a, a' \in A$, и он предпочтет тот, который имеет бóльшую рыночную стоимость. Действительно, если $v(a, q) \ge v(a', q)$, то $B_{a'i} \subset B_{ai}$. Таким образом, целью этой задачи максимизации рыночной стоимости будет *единогласное* желание первоначальных собственников фирмы[36].

Если A невозможно представить в виде линейной оболочки, натянутой на данную структуру активов, то у нас возникают по меньшей мере две

[34] Для этого утверждения важны оба предположения. Предположим на мгновение, что общие первоначальные запасы активов равны нулю. Тогда, в силу того что этот актив является излишним, утверждение 19.E.3 (см. также упражнение 19.E.4) говорит нам о том, что в равновесии Раднера новый актив может быть поглощен без всякого изменения цен. То, что мы сейчас утверждаем, означает, что этот факт примерно остается в силе, если первоначальный запас активов невелик (т. е. проект мал).

[35] Заметим, что стоимость первоначальных запасов при $t = 0$ равна стоимости акций фирмы $\theta_i v(a, q)$.

[36] До тех пор пока проект мал и, как следствие, цены почти постоянны.

серьезные трудности. Первая связана с *назначением* цен и возникает в любой задаче, связанной с инновационными продуктами. Без построения оболочки стоимость производственного плана $a \in A$ не может быть рассчитана на основе существующих цен активов просто посредством арбитража. Можно сказать, значение неявно не назначается в экономике. Поэтому придется предусмотреть ожидания агентов, исходя из их понимания того, как экономика в целом функционирует, что само по себе непростая задача.

Вторая трудность скорее относится к финансовому контексту, она связана с *ценополучением*. Вследствие возможных неограниченных шорт-продаж существует разрыв в предположении о ценополучении. Когда мы строим оболочку, то можем утверждать, как и делали ранее, что если проект мал, то эффект воздействия от производственных решений на цены активов и на спотовые цены при $t = 1$ незначителен. Но если новый актив $a \in A$, неважно, насколько он мал, не генерируется существующей структурой активов, то его доступность увеличивает растяжение имеющихся в наличии переносов богатства на еще одно измерение. Тем самым воздействие может оказаться существенным и иметь драматический эффект на цены[37]. Тогда нет оснований для того, чтобы предпочтения собственников в отношении различных производственных планов диктовались исключительно ростом богатства при ценах, которые были до возникновения фирмы (см. упражнение 19.G.2). Еще раз повторим, что обе эти трудности достаточно серьезные, и нет никакого простого выхода из этой ситуации.

Вариант вышерассмотренной модели полностью исключает роль фирмы как актива при $t = 0$. Допустим, что акции фирмы не могут торговаться при $t = 0$[38]. Если собственники при $t = 0$ выбирают $a \in A$, то это будет означать, что их запасы при $t = 1$ изменяются на случайную величину $\theta_i a$, которая, как мы помним, выплачивается первым благом (т. е. новый запас потребителя i становится равным $(\omega_{si} + (\theta_i a_s, 0, \ldots, 0)) \in \in \mathbb{R}^L$ для каждого состояния s).

Если $a \in A$ может быть порожден в виде линейной оболочки, то мы возвращаемся в предыдущую модель. Неважно, могут ли акции фирмы торговаться при $t = 0$. В том или другом случае потребители могут вести себя на рынках активов так, чтобы гарантированное потребление при $t = 1$ было одинаковым (упражнение 19.G.3).

Если $a \in A$ не может быть порожден, ситуация иная. Хорошая новость состоит в том, что поскольку никаких новых торгуемых активов при $t = 0$ не создается, то проблема разрыва при ценополучении исчезает. Плохие новости связаны с новой трудностью: так как нет рынка для акций при $t = 0$, то стоимость актива не может быть детерминированным способом определена при $t = 0$. Она скорее носит характер *случайной величины* при $t = 1$, и поэтому отношение к риску потребителей-собственников становится важным для определения предпочитаемого $a \in A$. В частности, не следует ожидать единогласия потребителей-собственников (см. упражнение 19.G.4).

---

[37] Вспомним, что шорт-продажи возможны. Одним из выходов из этого затруднения может служить введение ограничения на шорт-продажи, количественно равного размеру возможных выпусков продукции. Такое решение повлечет за собой последующий отказ от арбитражного ценообразования.

[38] Или же, возможно, мы находимся в конце периода $t = 0$ и финансовые рынки уже закрылись.

19.H. Рынки с несовершенной информацией

До сих пор мы были сконцентрированы на анализе модели, в которой спот-торговля происходила в условиях полной информации о состояниях мира. В этом разделе мы смягчим это требование, рассматривая возможность того, что эта информация несовершенна. Нам удастся увидеть, что есть принципиальное различие между случаем *симметричной* информации (у всех трейдеров одинаковая информация), и этот случай в значительной степени сводится к предыдущему рассмотрению, и случаем *асимметричной* информации, при котором у нас возникают новые трудности концептуального характера.

Чтобы выделить все самое существенное, рассмотрим торговлю за один период. Можно считать, что он соответствует периоду $t = 1$ из предыдущих разделов. В этом периоде может реализоваться одно из состояний $s = 1, \ldots, S$. Как только состояние реализуется, будем рассматривать простейший случай, когда есть всего один спот-рынок. На этом рынке первое благо (товар, услуга, ...) торгуется по отношению к другому благу, которое можно считать деньгами (таким образом, $L = 2$). Цена второго блага нормализована к 1. Сохраняем обозначение $p \in \mathbb{R}$ для немонетарного блага.

Имеется I потребителей. При данных вероятностях наступления состояний $\pi = (\pi_{1i}, \ldots, \pi_{Si})$ случайный потребительский вектор $x_i = (x_{1i}, \ldots, x_{Si}) \in \mathbb{R}^{2S}$ оценивается потребителем i с помощью расширенной функции полезности фон Неймана — Моргенштерна,

$$U_i(x_i) = \sum_s \pi_{si} u_{si}(x_{si}),$$

где $u_{si}(\cdot)$ — функция полезности Бернулли i-го потребителя в состоянии s. Потребитель i располагает вектором первоначальных запасов, зависящим от состояний, $\omega_i = (\omega_{1i}, \ldots, \omega_{Si}) \in \mathbb{R}^{2S}$, и *функцией сигнала* $\sigma_i(\cdot)$, которая дает значения $\sigma_i(s) \in \mathbb{R}$ для каждого $s \in S$.

Состояние s реализуется в начале периода. Мы полагаем, что, как только это происходит, потребитель i получает первоначальный запас ω_{si} и сигнал $\sigma_i(s) \in \mathbb{R}$. Интерпретация состоит в том, что потребитель i может различать два состояния, $s, s' \in S$, в том и только в том случае, если $\sigma_i(s) \neq \neq \sigma_i(s')$[39]. В соответствии с этой интерпретацией мы требуем, чтобы запасы были *измеримы* по отношению к функции сигнала, т. е. $\omega_{si} = \omega_{s'i}$ всякий раз, когда $\sigma_i(s) = \sigma_i(s')$ (таким образом, мы можем писать ω_{si} вместо $\omega_{\sigma i(s)i}$). Похожим образом первоначальные запасы товаров потребителя i не раскрывают ему информацию относительно состояния мира, сверх того что он

[39] Аналогично тому, как мы это делали в разделе 19.B (текст набран мелким шрифтом), мы могли бы использовать *информационные разбиения* вместо явных функций сигнала. Информационное разбиение $\mathscr{I}_i$, ассоциированное с сигналом $\sigma_i(\cdot)$, состоит из событий $\{s \in S: \sigma_i(s) = c\}$, полученных при пробегании $c \in \mathbb{R}$ всех возможных значений.

узнал, получив сигнал. После того как каждый потребитель получает свой сигнал, начинает работать спот-рынок. Наконец, в конце периода состояние раскрывается и происходит потребление[40].

Симметричная информация

Мы будем говорить, что информация *симметрична*, если любые два состояния $s, s' \in S$ различаются одним потребителем i в том и только в том случае, если различаются любым другим потребителем k; т. е. $\sigma_i(s) \neq \sigma_i(s')$ тогда и только тогда, когда $\sigma_k(s) \neq \sigma_k(s')$. Таким образом, в случае симметричной информации мы с тем же успехом можем считать, что у всех потребителей одна и та же функция сигнала. Поэтому мы будем писать $\sigma_i(\cdot) = \sigma(\cdot)$ для всех i. Можно считать, что $\sigma(\cdot)$ является общественным сигналом.

В случае симметричной информации определение спотовых цен происходит таким способом, который ничем не отличается от рассмотренного ранее. Предположим, что наступило состояние s. Тогда каждый потребитель i получает сигнал $\sigma(s)$ и первоначальные запасы $\omega_{\sigma(s)i}$[41]. На основе сигнала и априорных вероятностей $\pi_i = (\pi_{1i}, \ldots, \pi_{Si})$, которые предполагаются строго положительными, он вычисляет свои апостериорные вероятности в различных состояниях s':

$$\pi_{s'i} \mid \sigma(s) = \frac{\pi_{s'i}}{\sum_{\{s'':\sigma(s'')=\sigma(s)\}} \pi_{s''i}}$$

для любого s' с $\sigma(s') = \sigma(s)$ и $\pi_{s'i} \mid \sigma(s) = 0$ в противном случае. Полезность потребительского набора $x_i \in \mathbb{R}^2$, обусловленного сигналом $\sigma(s)$, тогда равна

$$u_i\left(x_i \mid \sigma(s)\right) = \sum_{s'} \left(\pi_{s'i} \mid \sigma(s)\right) u_{s'i}(x_i).$$

Поэтому мы, как и ранее, имеем хорошо определенную спот-экономику, условную по s. При обычном допущении о ценополучении появится равновесная цена. Мы будем записывать эту цену как $p(\sigma(s)) \in \mathbb{R}$[42].

Понятие информационной функции сигнала само собою приводит нас к интересным примерам сравнительной статики.

---

[40] В более общей постановке рассматривается несколько периодов, некоторая информация раскрывается в конце периода, и затем экономика переходит к новому периоду.

[41] Конечно, запасы могли бы появиться в результате выполнения форвардных сделок, которые совершались в прошлом. Условие измеримости, а именно то ограничение, что запасы должны зависеть от состояния лишь опосредованно через сигнал, приводит к следующему ограничению: форвардный контракт может быть сделан контингентным с учетом информации, полученной в момент выполнения контракта (строго говоря, он должен быть зависящим от информации, раскрываемой в этот момент и ставшей доступной ответственному лицу, отвечающему за соблюдение контрактов).

[42] Так как апостериорные вероятности и функции полезности зависят лишь от величины сигнала, мы приняли естественное требование, что равновесная цена тоже зависит только от сигнала; т. е. мы пишем $p(\sigma(s))$, а не $p(s)$. В самом деле, как мог бы (немоделированный) рыночный механизм различать состояния, которые не могли бы различать потребители?

Определение 19.H.1. Функция сигнала $\sigma'\colon S \to \mathbb{R}$ *по меньшей мере так же информативна*, как $\sigma\colon S \to \mathbb{R}$, если из $\sigma(s) \neq \sigma(s')$ следует $\sigma'(s) \neq \sigma'(s')$ для любой пары s, s'. Она является *более информативной*, если дополнительно $\sigma'(s) \neq \sigma'(s')$ для некоторой пары s, s' с $\sigma(s) = \sigma(s')$[43].

Две произвольные функции сигнала, $\sigma(\cdot)$, $\sigma'(\cdot)$, могут оказаться несравнимы с позиций «по меньшей мере информативна». Если же они сравнимы, то естественно поинтересоваться, будет ли более информативная функция давать улучшение благосостояния. Мы ставим вопрос «улучшения» в смысле *ex ante* (см. упражнение 19.H.1, в котором этот вопрос ставится в смысле interim и *ex post*); т. е. мы хотим сравнить ожидаемую полезность различных потребителей при разных функциях сигнала $\sigma(\cdot)$ и $\sigma'(\cdot)$, когда ожидаемое значение оценивается *до* наступления состояния s.

Рассмотрим сначала задачу единственного потребителя i. Предположим для упрощения, что спотовая цена $p \in \mathbb{R}$ и богатство $w_i \in \mathbb{R}$ заданы и не зависят от s (более общий случай рассмотрен в упражнении 19.H.2). Для любой функции сигнала $\sigma(\cdot)$ потребитель формирует потребительский план $x_i^{\sigma(\cdot)} \in \mathbb{R}^{2S}$ следующим образом: при ограничении $x_{si}^{\sigma(\cdot)} = x_{s'i}^{\sigma(\cdot)}$ всякий раз, когда $\sigma(s') = \sigma(s)$, потребитель выбирает для любого возможного состояния s из своего бюджетного множества потребительский набор $x_{si}^{\sigma(\cdot)}$, который максимизирует ожидаемую полезность, условную по сигналу $\sigma(s)$. Поэтому *ex ante* полезность информационной функции сигнала $\sigma(\cdot)$ равна $\sum\limits_s \pi_{si} u_{si}\left(x_{si}^{\sigma(\cdot)}\right)$.

Утверждение 19.H.1: В задаче с одним потребителем, если одна функция сигнала $\sigma'(\cdot)$ по меньшей мере так же информативна, как функция сигнала $\sigma(\cdot)$, то *ex ante* полезность, выведенная на основе $\sigma'(\cdot)$, $\sum\limits_s \pi_{si} u_{si}\left(x_{si}^{\sigma'(\cdot)}\right)$, по меньшей мере принимает то же значение, что и *ex ante* полезность, выведенная на основе $\sigma(\cdot)$, $\sum\limits_s \pi_{si} u_{si}\left(x_{si}^{\sigma(\cdot)}\right)$.

Доказательство. Сначала заметим, что для любой $\sigma(\cdot)$ набор $x_i^{\sigma(\cdot)}$ является решением

$$\max \sum_s \pi_{si} u_{si}(x_{si}) \text{ при условии, что } x_i \in B_i^{\sigma(\cdot)} =$$

$$= \{x_i \in \mathbb{R}^{2S}\colon px_{1si} + x_{2si} \leq w_i \text{ для любого } s, \text{ и } x_{si} = x_{s'i} \text{ в случае } \sigma(s) = \sigma(s')\}.$$

Вам будет предложено проверить это формально в упражнении 19.H.3.

Второе наблюдение состоит в том, что если $\sigma'(\cdot)$ по меньшей мере так же информативна, как и $\sigma(\cdot)$, то $B_i^{\sigma(\cdot)} \subset B_i^{\sigma'(\cdot)}$. Опять-таки вам будет предложено проверить это в упражнении 19.H.3.

[43] В терминах соответствующих информационных разбиений сигнал $\sigma'(\cdot)$ более информативный, чем $\sigma(\cdot)$, если информационное разбиение $\sigma'(\cdot)$ уточняет разбиение $\sigma(\cdot)$.

Получается, что при движении от $\sigma(\cdot)$ к $\sigma'(\cdot)$ мы всего лишь расширяем множество ограничений задачи потребителя. Таким образом, максимальное значение понизиться не может.

Утверждение 19.H.1 хорошо понятно интуитивно: в задаче по принятию решения изолированным потребителем более информативный сигнал не нарушает допустимости любого решения (следовательно, он приводит к расширению допустимого множества), потому что индивид, принимающий решение, всегда имеет возможность не принимать во внимание дополнительную информацию, предоставленную $\sigma'(\cdot)$ и превосходящую информацию, полученную на основе $\sigma(\cdot)$. К сожалению, такие рассуждения *не*применимы к системе взаимодействующих индивидов, принимающих решения. В равновесии потребительское множество одного потребителя может подвергнуться воздействию сигнала, пусть даже потребитель им не пользуется. Достаточно того, что им пользуются другие потребители, и в результате этого информация влияет на спотовые цены. Пример 19.H.1 показывает, что можно иногда получить ухудшение для *всех ex ante* в результате увеличения объема информации.

Пример 19.H.1. Предположим, что имеются два потребителя, два товара и два равновероятных состояния $s = 1, 2$. В обоих состояниях первоначальные запасы двух благ у двух потребителей равны $\omega_1 = (1, 0)$ у первого потребителя и $\omega_2 = (0, 1)$ у второго. Следовательно, в каждом состоянии есть по одной единице каждого блага. У обоих потребителей одинаковые предпочтения, описываемые функцией ожидаемой полезности фон Неймана — Моргенштерна. Их зависящая от состояний функция полезности Бернулли имеет вид

$$u_{si}\left(x_{1si},\ x_{2si}\right) = \beta_s\sqrt{x_{1si}} + \left(1-\beta_s\right)\sqrt{x_{2si}},$$

где $\beta_1 = 1$ и $\beta_2 = 0$. Таким образом, в состоянии 1 второе благо бесполезно, а во втором состоянии первое благо бесполезно.

Предположим сначала, что информация отсутствует (т. е. нет функции сигнала, распознающей эти два состояния). Тогда есть единственный спот-рынок, где каждый потребитель выбирает объемы двух благ (x_{1i}, x_{2i}), чтобы максимизировать функцию ожидаемой полезности

$$1/2\sqrt{x_{1i}} + 1/2\sqrt{x_{2i}}.$$

В силу симметрии (но на всякий случай найдите условия первого порядка) мы видим, что в равновесии каждый потребитель получит половину каждого блага и значение его ожидаемой полезности составит $1/\sqrt{2}$. Следовательно, в этом равновесии без информации каждый потребитель сумел застраховаться от ситуации, когда благо становится бесполезным.

Предположим, что теперь в экономике есть совершенно информативная функция сигнала, указывающая на наступление события перед открытием спот-рынка. Тогда равновесие на спот-рынке будет различаться в разных состояниях. Теперь происходит вот что: в каждом состоянии известно, что одно из благ бесполезно, и поэтому на спот-рынке не может проходить торговля: каждый потребитель потребляет свой запас, получая полезность величины 1 в одном состоянии и величины 0 — в другом. *Ex ante* это означает, что в условиях совершенной информации каждый потребитель имеет ожидаемую полезность $1/2 < 1/\sqrt{2}$. Таким образом, мы видим, что наличие более информативной функции сигнала понижает благосостояние всех участников. Это объясняется тем, что наличие информации разрушает возможность страхования (первым это заметил Hirshleifer (1973))[44]. ■

Асимметричная информация

Предположим теперь, что информация не является симметричной; т. е. функции сигнала $\sigma_i(\cdot)$ являются частными и необязательно одинаковыми для потребителей. Как следует рассматривать такую ситуацию? Первая мысль, приходящая в голову: поступать, как и прежде. Когда наступает состояние s, каждый потребитель наблюдает $\sigma_i(s)$ и использует свою функцию сигнала $\sigma_i(\cdot)$, чтобы обновить вероятности и функцию полезности. Тем самым определяется спот-рынок, на котором обычным образом определяется равновесная спотовая цена, записываемая в виде $p(\sigma_1(s), \ldots, \sigma_I(s))$. Заметим, что цена $p(\sigma_1, \ldots, \sigma_S)$ зависит от *всех* индивидуальных сигналов: будем говорить, что цена *агрегирует* информацию об участниках рынка. В частности, ценовая функция $p(s) = p(\sigma_1(s), \ldots, \sigma_I(s))$ не обязана быть измеримой по отношению к индивидуальным функциям сигнала $\sigma_i(\cdot)$; т. е. может быть так, что два состояния, $s, s' \in S$, *не различимы* потребителем i (т. е. $\sigma_i(s) = \sigma_I(s')$), но *различимы* рынком (т. е. $p(\sigma_1(s), \ldots, \sigma_I(s)) \neq p(\sigma_1(s'), \ldots, \sigma_I(s')))$. Это порождает значительную трудность, которую мы обсудим в примере 19.H.2.

Пример 19.H.2. В экономике имеются два товара и два потребителя. У двух потребителей одинаковые функции полезности $u_i(x_{1i}, x_{2i}) = \beta \ln x_{1i} + x_{2i}$, параметр β одинаков для обоих потребителей, и его значение неопределенно. Он может принимать значения $\beta = 1$ и $\beta = 2$ с равной вероятностью. (Следовательно, мы можем считать, что у нас есть два равновероятных состояния: одно полагает $\beta = 1$, а другое — $\beta = 2$.) Два потребителя обладают детерминированными запасами величины 1 первого блага (из-за квазилинейности по отношению ко второму благу нам не нужно уточнять величину запаса второго блага).

[44] Предположим, что мы находимся в периоде $t = 1$, до него был $t = 0$, в котором могла происходить форвардная торговля. При сценарии отсутствия информации контингентная торговля не может проходить при $t = 0$, потому что два состояния неразличимы при $t = 1$. Модель, которую мы рассматриваем, в этом случае полна, насколько это возможно (следовательно, равновесие Парето-оптимально по отношению к структуре без информации). Ситуация будет иной при моделировании с совершенной информацией. Здесь не будет никаких препятствий к созданию полной системы контингентных рынков при $t = 0$. С их появлением возможность страхования будет восстановлена. В общем, если рынки полные (по отношению к информационной функции сигнала $\sigma(\cdot)$), равновесие Парето-оптимально (по отношению к $\sigma(\cdot)$), и поэтому если информация улучшается (*и*, стало быть, соответствующие дополнительные рынки образуются), то некоторые трейдеры могут выиграть, а некоторые проиграть (т. е. могут быть распределительные эффекты), но в целом новый вектор ex ante ожидаемых полезностей находится на границе расширенного множества возможных значений полезности. Поэтому мы можем заключить, что если рынки всегда полные по отношению к информационному сигналу (т. е. форвардный рынок контингентный по каждому сигналу, создается при $t = 0$), то не может произойти ухудшения благосостояния всех участников рынка, если функция информационного сигнала улучшается.

Первый потребитель имеет информационный сигнал $\sigma_1(\beta) = \beta$, который ему позволяет различать два возможных значения β. Второй потребитель не информирован: его функция сигнала равна $\sigma_2(\beta) = k$ при k, равном некоторой константе.

Когда природа определилась с выбором β и информация дошла до потребителей в виде $\sigma_1(\beta)$, $\sigma_2(\beta)$, образуется спот-рынок (как обычно, цена товара-измерителя положена равной единице). Так как первый потребитель знает β, его спрос при заданной цене $p \in \mathbb{R}$ первого блага равен $x_{11}(p;\, \beta) = \beta/p$. Второй, неинформированный потребитель приравняет ожидаемую предельную полезность цене. Тем самым его функция спроса, которая не зависит от β, равна

$$x_{12}(p) = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2\right) = \frac{3}{2p}. \tag{19.H.1}$$

Решая уравнение уравновешенности рынка, $x_{11}(p;\, \beta) + x_{12}(p) = 2$, мы получаем функцию равновесной цены

$$p(\beta) = \frac{1}{4}(3 + 2\beta).$$

Заметим, что $p(1) \neq p(2)$. Это значит, что *цена раскрывает информацию информированного потребителя*. Но если это так, то логично предположить, что неинформированный потребитель постарается использовать наблюдаемую рыночную цену, чтобы сделать предположение относительно ненаблюдаемого значения β. Нет оснований мешать ему в этом. Но если он выскажет такое предположение, то его спрос больше не будет задаваться формулой (19.H.1) и ценовая функция $p(\beta)$, найденная выше, больше не будет уравновешивать рынки для всех возможных значений β. Это именно та трудность, которую мы хотели проиллюстрировать. Возникает предположение, что понятие равновесия нужно скорректировать с учетом согласования информации, раскрываемой ценами, с информацией, используемой потребителями. ■

В примере 19.H.2 речь шла о разумном требовании, чтобы информация, раскрываемая ценами, принималась во внимание потребителями, когда они принимают решение по выбору потребительских планов на различных спот-рынках. Поэтому предположим, что $p(s) = p(\sigma_1(s), \ldots, \sigma_I(s))$ является произвольной ценовой функцией. Будем интерпретировать ее как спецификацию цен, которых будут придерживаться потребители в различных состояниях. Мы можем считать, что эта функция является общественной функцией сигнала, и пусть любой потребитель использует ее в комбинации со своим частным сигналом. Другими словами, если состояние s наступит, потребитель i будет знать, что событие $E_{p(s),\sigma_i(s)} = \{s' : p(s') = p(s) \text{ и } \sigma_i(s') = \sigma_i(s)\}$ произошло и он обновит свои вероятностные оценки любого состояния $s' \in E_{p(s),\sigma_i(s)}$,

$$\pi_{s'i} \mid p(s);\, \sigma_i(s) = \frac{\pi_{s'i}}{\sum_{\left\{s'':\, s'' \in E_{p(s),\sigma_i(s)}\right\}} \pi_{s''i}}.$$

Если для обновленных функций полезности цена $p(s)$ уравновешивает рынок для каждого s, то тогда будем говорить, что ценовая функция $p(\cdot)$

является *равновесной ценовой функцией рациональных ожиданий*[45,46]. Дадим формальное определение 19.H.2.

Определение 19.H.2. Функция цены $p(\cdot)$ называется *равновесной ценовой функцией при рациональных ожиданиях*, если для каждого s $p(s)$ уравновешивает спот-рынок, когда каждый потребитель i знает, что $s \in E_{p(s),\sigma_i(s)}$, и поэтому оценивает свои потребительские наборы $x_i \in \mathbb{R}^2$ в соответствии с обновленной функцией полезности

$$\sum_{s'} \left(\pi_{s'i} \mid p(s), \sigma_i(s)\right) u_{s'i}(x_i).$$

Мы видели в примере 19.H.2, что вся частная информация раскрывается за счет цены спот-рынка. Это дает следующий подход к определению равновесной ценовой функции при рациональных ожиданиях. Предположим (это всего лишь гипотетический эксперимент), что все индивидуальные функции сигнала известны всем потребителям и что для каждого состояния вектор сигнальных значений, равный $(\sigma_1(s), \ldots, \sigma_I(s))$, становится общественным, и тем самым он может быть использован всеми потребителями для обновления вероятностей и полезностей. Ценовая функция, уравновешивающая рынки $\hat{p}\left(s\right) = \hat{p}\left(\sigma_1(s), \ \ldots, \ \sigma_I(s)\right)$, которая, таким образом, создается, называется *функцией равновесной цены с известной информацией.* Если значения $\hat{p}(\cdot)$ позволяют различить все возможные значения $(\sigma_1, \ldots, \sigma_I)$, т. е. $\hat{p}(s) \neq \hat{p}(s')$ всякий раз, когда $\sigma_i(s) \neq \sigma_i(s')$ для некоторых s, s' и i, то тогда мы будем говорить, что ценовая функция $\hat{p}(\cdot)$ полностью *раскрывающая.* Другими словами, ценовая функция полностью раскрывает информацию, если она различает наступление любых двух состояний, которые может различить какой-либо потребитель.

Теперь мы выскажем предположение, что если функция равновесной цены с известной информацией $\hat{p}(\cdot)$ полностью раскрывающая, то она должна быть равновесной ценовой функцией при рациональных ожиданиях. Для любого s $\hat{p}(s)$ определяется при предположении, что каждый i знает, что $s \in \{s' \colon \sigma_k(s') = \sigma_k(s)$ для всех $k\}$. В силу того что функция равновесной цены $\hat{p}(\cdot)$ полностью раскрывающая информацию,

$$\left\{s' : \sigma_k(s') = \sigma_k(s) \ \text{ для всех } \ k\right\} = \left\{s' : \hat{p}(s') = \hat{p}(s)\right\}.$$

[45] О понятии равновесия при рациональных ожиданиях можно прочитать (включая дополнительные ссылки) в работах (Green, 1973; Grossman, 1977, 1981; Lucas, 1972; Allen, 1986).

[46] В этом разделе мы больше концентрируемся на вопросах, относящихся к распространению информации, нежели на вопросах полноты или построения оболочек. Но тем не менее, как мы отмечали в случае симметричной информации (см. сноску 44), нет концептуальной трудности, чтобы представить, что до рассматриваемого периода $t = 1$ велась контингентная торговля, которая приводит к поставке при $t = 1$ объемов физического блага, в зависимости от общественных сигналов при $t = 1$ (мы будем называть эту ситуацию целиком полной, если такие контингентные рынки существуют для любого возможного значения общественного сигнала). Мы также видим, что так как спотовые цены образуют общественный сигнал, то возможным инструментом контингентной торговли может служить актив с доходностями, зависящими от реализуемых значений цены спот-рынка при $t = 1$; опционы являются примерами таких активов.

Следовательно, для любого s $\hat{p}(s)$ уравновешивает рынки, когда каждый i знает, что $s \in E_{\hat{p}(s),\sigma_i(s)}$. Мы делаем вывод, что $\hat{p}(\cdot)$ — функция равновесной цены с известной информацией. Другими словами, если функция равновесной цены с известной информацией полностью раскрывает информацию, то объединенная информация, используемая потребителями, может быть получена без нарушения ограничения на частную информацию, а всего лишь на основе общественных сигналов о ценах.

Пример 19.H.2 (продолжение). Если оба потребителя полностью информированы, то мы получим функции спроса $x_{11}(p) = x_{12}(p) = \beta/p$. Таким образом, в этом случае функция равновесной цены с известной информацией будет равна $\hat{p}(\beta) = \beta$. Эта функция равновесной цены с известной информацией полностью раскрывает информацию и, следовательно, обеспечивает равновесие с рациональными ожиданиями. ■

В примере 19.H.3 функция равновесной цены с известной информацией не является полностью раскрывающей и не приводит к равновесию с рациональными ожиданиями. Действительно, как мы увидим, не существует равновесной ценовой функции с рациональными ожиданиями.

Пример 19.H.3 (Kreps, 1977). Имеются два блага и два потребителя с функциями полезности $u_1(x_{11}, x_{21}) = \beta \ln x_{11} + x_{21}$ и $u_2(x_{12}, x_{22}) = (3 - \beta)\ln x_{12} + x_{22}$. Как и в примере 19.H.2, есть два состояния, в которых $\beta = 1, 2$ с равной вероятностью. Потребитель 1 полностью информирован (т. е. $\sigma_1(1) \neq \sigma_1(2)$), в то время как второй потребитель не информирован (т. е. $\sigma_2(\beta) = \text{constant}$). В двух состояниях общий запас первого блага равен трем.

Пусть равновесная ценовая функция при рациональных ожиданиях равна $p(\beta)$. У нас есть две возможности. Либо $p(1) \neq p(2)$ и, значит, информация раскрывается, что влечет за собой совпадение $p(\beta)$ с функцией равновесной цены с известной информацией $\hat{p}(\beta)$, либо $p(1) = p(2)$, так что информация не раскрывается.

Первый вариант отпадает, потому что если информация объединяется, то для значений $\beta = 1$ и $\beta = 2$ функции полезности одинаковы в обоих состояниях (за исключением того случая, когда они изменяются), так что спотовая равновесная цена одинакова в обоих состояниях. На самом деле, $p = 1$ является ценой, уравновешивающей рынки в обоих состояниях.

Но второй вариант тоже невозможен. С постоянной, не раскрывающей информацию ценовой функцией неинформированный потребитель предъявляет спрос, который не зависит от состояния, в то время как спрос первого (информированного) потребителя зависит от состояния. Следовательно, при одной и той же цене невозможно уравновесить рынки в обоих состояниях.

Подводя итог, можно сделать следующий вывод: если мы допускаем, что информация передается в равновесии, то оказывается, что это не так. Если мы предполагаем, что она не передается, то это происходит. В результате мы вынуждены констатировать, что равновесной ценовой функции при рациональных ожиданиях не существует. ■

Как мы видели, понятие равновесия с полным раскрытием информации представляет собой полезную основу для изучения рынков с асимметричной информацией. В приложениях чаще встречается несколько более слабая и более естественная версия идеи о полном раскрытии информации. Действительно, для того чтобы функция равновесной цены с известной информацией $\hat{p}(\cdot)$ была равновесной ценовой функцией при рациональных ожиданиях, нам не нужно, чтобы для каждого s функция $\hat{p}(\cdot)$ раскрывала в точности вектор сигналов $(\sigma_1(s), \ldots, \sigma_I(s))$; достаточно того, чтобы она раскрывала *достаточную статистику* для этого вектора (или статистику, достаточную для каждого потребителя i, наряду с частным сигналом $\sigma_i(\cdot)$). Вообще говоря, все, что нам нужно, — это чтобы для каждого возможного состояния s выраженный спрос со стороны потребителя i при цене $\hat{p}(s)$ был одинаков, вне зависимости, имеет он объединенную информацию в виде функций $(\sigma_1(\cdot), \ldots, \sigma_I(\cdot))$ и получает векторный сигнал $(\sigma_1(s), \ldots, \sigma_I(s))$ или же вместо этого знает лишь функцию сигнала $\hat{p}(\cdot)$ (или только $\hat{p}(\cdot)$ и $\sigma_i(\cdot)$).

Пример 19.Н.4. В основе примера лежит та же экономика, что и в примере 19.Н.2. Однако теперь сигнал каждого потребителя $i = 1, 2$ имеет вид $\sigma_i = \beta^2 + \varepsilon_i$; ε_i для $i = 1, 2$ являются функциями шума, независимо распределенными и принимающими значения $\varepsilon_i = -2, -1, 0, 1, 2$ с равной вероятностью[47].

Предположим, что информация объединяется. Тогда:

(1) Если $\sigma_i = 4$, 5 или 6 для $i = 1$ или для $i = 2$, мы знаем, что $\beta = 2$ с вероятностью 1, и поэтому $\hat{p}(\sigma_1, \sigma_2) = \beta/2 = 1$.

(2) Если $\sigma_i = -1$, 0 или 1 для $i = 1$ или для $i = 2$, мы знаем, что $\beta = 1$ с вероятностью 1, и поэтому $\hat{p}(\sigma_1, \sigma_2) = \beta/2 = 0{,}5$.

(3) В остальных случаях $\sigma_i = 2$ или 3 для $i = 1$ и для $i = 2$ обновленные вероятности для значений β остаются равными 0,5. Никакой новой полезной информации не передается. В силу этого уравновешивающая цена равна $\hat{p}(\sigma_1, \sigma_2) = 1{,}5$ (упражнение 19.Н.4).

Ценовая функция $\hat{p}(\cdot)$, определенная условиями (1)–(3), не раскрывает информацию полностью: при данном значении $\hat{p}(\cdot)$ мы не в состоянии извлечь информацию о конкретных значениях σ_1 и σ_2[48].

Все же знания ценовой функции $\hat{p}(\cdot)$ достаточно, для того чтобы различать случаи (1) и (3), и поэтому знание одной функции $\hat{p}(\cdot)$ может заменить для любого потребителя знание вектора функций $(\sigma_1(\cdot), \sigma_2(\cdot))$. Следовательно, мы можем сказать, что $\hat{p}(\cdot)$ является достаточной статистикой для сигналов, и сделать вывод, что $\hat{p}(\cdot)$ является ценовой функцией при рациональных ожиданиях. ■

В примере 19.Н.5 ценовая функция не является достаточной статистикой, но приобретает это свойство в комбинации с частным сигналом любого потребителя.

Пример 19.Н.5. Экономика с сигналами, такая же как в примере 19.Н.4, но с тремя различиями. Прежде всего, I потребителей. Во-вторых, «шумовые» члены ε_i включены в функции полезности: в частности, $u_i(x_i) = (\beta + \varepsilon_i)\ln x_{1i} + x_{2i}$. В-третьих, у половины всех потребителей шум распределен равномерно на промежутке $\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$, в то время как вторая половина прекрасно осведомлена о β, т. е. $\varepsilon_1 = 0$.

[47] Все это можно было бы описать в терминах состояний $s = (\beta, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Нам бы потребовалось их ввести в количестве $2 \times 5 \times 5 = 50$.

[48] Вспомним, что «полное раскрытие» не означает, что мы узнаем значение β, просто мы узнаем значения сигналов.

Ценовая функция при известной информации равна $\hat{p}(\beta, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_I) = \beta + (1/I)\sum_i \varepsilon_i$. Заметим, что эта ценовая функция раскрывает β (если $\beta = 1$, то $\hat{p}(\cdot) < 1{,}5$ с вероятностью 1; если $\beta = 2$, то $\hat{p}(\cdot) > 1{,}5$ с вероятностью 1), но не индивидуальные значения ε_i. Однако тот потребитель i, который знает β и $\sigma_i = \beta^2 + \varepsilon_i$, также знает и ε_i и поэтому при любой данной цене предъявляет спрос, который совпадает со спросом, порожденным объединенной информацией. Мы заключаем, что равновесие при известной информации является равновесием при рациональных ожиданиях. Важно отметить, что, в отличие от примера 19.Н.4, только лишь равновесная ценовая функция не предоставляет достаточной статистики. В равновесии при рациональных ожиданиях половина потребителей, решающих задачу максимизации полезности, существенно использует частные сигнальные функции. ■

Пример 19.Н.5 позволяет нам обратиться еще к одной проблеме. Предположим, что к нашей общей модели мы добавляем еще одну деталь: получение информационной сигнальной функции $\sigma_i(\cdot)$ стоит небольшую сумму денег $\delta > 0$. Предположим также, что I велико, так что вполне вероятно, что объединенная ценовая информационная функция $\hat{p}(\cdot)$ не очень чувствительна к тому, что отдельный потребитель i не обзаведется своей сигнальной функцией $\sigma_i(\cdot)$. Тогда мы приходим к следующему парадоксу (см. (Grossman, Stiglitz, 1976)): если ценовая функция $\hat{p}(\cdot)$ полностью раскрывает информацию (или дает достаточную статистику), то почему потребитель i будет платить δ за сигнальную функцию $\sigma_i(\cdot)$? Скорее всего, он этого делать не будет и, как фрирайдер, будет использовать информацию, предоставляемую ценовой системой. Но если каждый будет так поступать, то ценовая функция не сможет быть полностью раскрывающей информацию (потому что нечего будет раскрывать)! Пример 19.Н.5 предлагает один из путей разрешения этого парадокса: можно проверить, что в этом примере найдется такое малое $\delta > 0$, не зависящее от числа I, что при любой фиксированной цене p у потребителя i с нетривиальным ε_i, даже если ему известно β, есть стимул заплатить δ за улучшение информации, предоставляемой его частным сигналом (упражнение 19.Н.5). ■

До сих пор цены могли передавать информацию о состояниях, реализуемых экзогенным образом. Но в мире асимметричной информации цены могут также передавать информацию о действиях потребителей, выбранных эндогенно, и эти действия сказываются на индивидуальных полезностях. Например, конечная полезность потребителя может зависеть не только от количества потребляемых единиц блага и экзогенных состояний, но также и от некоторых других статистик, зависящих от действий других потребителей. Если мы будем считать эти статистики как «состояния», то это будет означать, что появятся статистики эндогенного характера. Чтобы это проиллюстрировать, рассмотрим другой пример — рынок подержанных машин (часто называемый рынком «лимонов»). Этот пример позволит нам вспомнить неблагоприятный отбор из раздела 13.В и завершит раздел 19.

Пример 19.H.6. *Рынок лимонов.* Предположим, что потребители делятся на два типа: потенциальных покупателей и потенциальных продавцов (например, подержанных машин). Потребителей много, и потенциальных продавцов в два раза больше, чем потенциальных покупателей. Потенциальные продавцы имеют по одной единице товара, а потенциальные покупатели могут или купить одну единицу, или же воздержаться от покупки. Особенностью этого рынка является то, что товары бывают двух типов: хорошие и плохие. У половины продавцов товар хороший, а у другой половины — плохой. Качество товара известно потенциальным продавцам, но неизвестно покупателям в момент совершения сделки. Хороший товар оценивается покупателем в 4 денежные единицы, а продавцом в 1 единицу. Оценка плохого товара нулевая для всех потребителей.

Мы назовем *состоянием рынка* долю $\alpha \in [0, 1]$ поставляемого хорошего товара. Если состояние рынка равно α, то покупатель, платящий p, получает ожидаемую полезность $4\alpha - p$. Проблема в том, что состояние рынка зависит от цены (таким же образом, как и ранее, цена предоставляет информацию относительно полезности, которая возникает при потреблении одной единицы товара). В самом деле, для любого $p > 0$ все единицы плохого товара будут поставляться на рынок. Но при $p < 1$ ни одна единица хорошего товара не поступит на рынок, в то время как при $p > 1$ все единицы хорошего товара будут поставляться на рынок. Поэтому у нас должно быть $\alpha = 0$ для $p < 1$, $\alpha \in [0, 1/2]$ для $p = 1$, $\alpha = 1/2$ для $p > 1$. Если пара (α, p) удовлетворяет этим неравенствам, то мы будем говорить, что эта пара является допустимой. Заметим, что эти же неравенства могут быть переписаны в эквивалентной форме как $p \leq 1$ для $\alpha = 0$, $p = 1$ для $\alpha \in (0, 1/2)$ и $p \geq 1$ для $\alpha = 1/2$.

Потенциальный покупатель сделает вывод, что $\alpha = 0$, если он видит $p < 1$, и $\alpha = 0{,}5$, если $p > 1$. Потенциальные покупатели могут или не могут предъявлять спрос, основываясь на этих следствиях. Довольно естественно говорить, что если при допустимой паре (α, p) совокупный спрос не больше совокупного предложения, то мы находимся в состоянии равновесия при *рациональных ожиданиях*. В самом деле, в нашем случае любая допустимая пара (α, p) оказывается равновесием при рациональных ожиданиях. Однако заметим, что для некоторых (α, p) предложение превышает спрос (например, при $\alpha = 1/2$ и $p = 3$ нет никакого спроса)[49]. ■

[49] Для простоты мы выбрали пример, в котором ожидаемый спрос никогда не будет больше ожидаемого предложения. Вследствие этого все допустимые пары (α, p) могут оказаться равновесными. При более скрупулезном анализе оказывается, что некоторые пары равновесными быть не могут, потому что ожидаемый спрос больше ожидаемого предложения. Стоит заметить, что нет законных оснований считать, что условием равновесия является требование, чтобы спрос был больше или равен предложению. Предположим, например, что $\alpha = 1/2$ и $p = 1{,}5$. Тогда совокупное предложение равно 2, в то время как совокупный спрос равен 1. Обычный вывод (лежащий в основе динамики, соответствующей принципу проб и ошибок), объясняющий давление на спрос, которое его понижает, состоит в том, что какой-либо недовольный продавец пожелает продать покупателю товар по цене $1{,}5 - \varepsilon$. Но как в контексте данной задачи покупатель узнает, что предлагаемый к продаже товар не является плохим? Заметим, что ситуация была бы иной, если бы покупатель подошел к произвольному продавцу (в этом и состоит причина того, что требование, чтобы спрос не превышал предложения, является естественным условием равновесия). Напротив, в случае симметричной информации неважно, кто к кому обращается — покупатель к продавцу или наоборот. Вывод, проистекающий из этого примера, состоит в том, что в случае асимметричной информации весьма важна конкретная история, почему не наблюдается равновесие. Чтобы продолжить анализ ситуации, стоит обратиться к главе 13, в которой в более узких рамках частичного равновесия мы уже изучали задачи асимметричной информации с помощью методологии, хорошо подходящей для исследования данной микроструктуры.

Литература

Allen, B. (1986). General equilibrium with rational expectations. Chap. I in *Contributions to Mathematical Economics,* edited by W. Hildenbrand, and A. Mas-Colell. Amsterdam. Nort-Holland.

Arrow, K. (1953). Le role des valeurs boursieres poue la repartition la meilleure des risqué. *Econometrie,* Paris: Centre National de la Recherche Scientifique. (Translated as; Arrow, K. (1964). The role of securities in the optimal allocation of risk-bearing. *Review of Economic Studies* **31**: 91–96.

Cass, D., and K. Shell (1983). Do sunspots matter? *Journal of Political Economy* **91**: 193–227.

Debreu, G. (1959). *Theory of Value*. New York: Wiley.

Diamond, P. (1967). The role of a stock market in a general equilibrium model with technological uncertainty. *American Economic Review* **57**: 759–76.

Duffie, D. (1992). *Dynamic Asset Pricing Theory.* Princeton, NJ.: Princeton University Press.

Geanakoplos, J., and H. Polemarchakis (1986). Existence, regularity, and constrained suboptimality of competitive allocations when the asset market is incomplete. In *Essays in Honor of K. Arrow,* vol. III, edited by W. Heller, and D. Starett. Cambridge, UK.: Cambridge University Press.

Green, J. (1973). Information, efficiency and equilibrium. Harvard Discussion Paper 284.

Grossman, S. (1977). The existence of future markets, noisy rational expectations and informational externalities. *Review of Economic Studies* **44**: 431–49.

Grossman, S. (1981). An introduction to the theory of rational expectations under asymmetric information. *Review of Economic Studies* **48**: 541–59.

Grossman, S. and J. F. Stiglitz (1976). Information and competitive price systems. *American Economic Review* **66**: 246–53.

Hart, O. (1975). On the optimality of equilibrium when the market structure is incomplete. *Journal of Economic Theory* **11**: 418–43.

Hirshleifer, J. (1973). Where are we in the theory of information? *American Economic Review, Papers and Proceedings* **63**: 31–40.

Huang, C. F., and R. Litzenberger (1988). *Foundations of Financial Economics.* Amsterdam: North-Holland.

Kreps, D. (1977). A note on “fulfilled expectations” equilibria. *Journal of Economic Theory* **14**: 32–43.

Kreps, D. (1979). Three essays on capital markets. Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Technical Report. V. 298, Stanford University. Reprinted as Kreps, D (1987): Three essays on capital markets. *Revista Española de Economia,* **4**: 111–146.

Lucas, R. (1972). Expectations and the neutrality of money. *Journal of Economic Theory* **4**: 103–24.

Magill, M. and W. Shafer (1991). Incomplete markets. Chap. 30 in *Handbook of Mathematical Economics*, vol. IV, edited by W. Hildenbrand, and H. Sonnenschein. Amsterdam: North-Holland.

Marimon, R. (1987). Kreps’ “Three essays on capital markets” almost ten years later. *Revista Española de Economia* **4**(1): 147–71.

Merton, R. (1982). On the microeconomic theory of investment under uncertainty. Chap. 13 in *Handbook of Mathematical Economics,* vol. II, edited by K. Arrow, and M.D. Intriligator. Amsterdam: North-Holland.

Radner, R. (1982). Equlibrium under uncertainty. Chap. 20 in *Handbook of Mathematical Economics,* vol. II, edited by K. Arrow, and M.D. Intrilligator. Amsterdam: North-Holland.

Упражнения

19.C.1[A]. Имеется S состояний. Потребитель имеет функцию полезности Бернулли $u_s(x_s)$, где $x_s \in \mathbb{R}_+^L$ в каждом состоянии s. Предположим, что для каждого s $u_s(\cdot)$ вогнутая. Покажите, что функция ожидаемой полезности $U\left(x_1, \ \ldots, \ x_S\right) = \sum_s \pi_s u_s(x_s)$, определенная на $\mathbb{R}_+^{LS}$, является вогнутой.

19.C.2[A]. В рамках модели, описанной в примере 19.C.2, покажите, что значения предельных норм замещения вдоль Парето-оптимального множества выглядят так, как показано на рис. 19.C.2, т. е. в любой точке Парето-оптимального множества предельная норма замещения меньше, чем отношение вероятностей.

19.C.3[A]. Рассмотрите равновесие Эрроу — Дебре в экономике, описанной в разделе 19.C. Предположим, что $L = 1$ и что предпочтения любого потребителя с номером i допускают представление в виде функций ожидаемой полезности с непрерывными, строго вогнутыми и строго возрастающими функциями полезности Бернулли (одинаковыми во всех состояниях). Для каждого состояния s обозначим p_s, π_{si} и x_{si} равновесную цену для s-контингентного блага, субъективную вероятность наступления состояния s, оцениваемую потребителем i, и потребление потребителя i в состоянии s соответственно.

Обозначим $\overline{p} = \sum_s p_s$ цену неконтингентной поставки одной единицы потребления. Покажите, что $\sum_s \left(\pi_{si}\overline{p} - p_s\right) x_{si} \geq 0$ для каждого i. (*Подсказка*: используйте идею выявленных предпочтений.) Интерпретируйте доказанное утверждение.

19.C.4[B]. Имеются единственное потребительское благо, два состояния и два потребителя. Заметим, что это позволяет использовать ящик Эджворта. Функции полезности заданы в виде функций ожидаемой полезности. Функции полезности Бернулли одинаковы во всех состояниях, т. е.

$$U_1(x_{11}, x_{21}) = \pi_{11}u_1(x_{11}) + \pi_{21}u_1(x_{21}),$$
$$U_2(x_{12}, x_{22}) = \pi_{12}u_2(x_{12}) + \pi_{22}u_2(x_{22}),$$

где x_{si} — количество s-контингентного блага, потребляемого потребителем i, и π_{si} — субъективная вероятность состояния s у потребителя i. Допустим, что каждая $u_i(\cdot)$ вогнута и дифференцируема.

Общие первоначальные запасы двух контингентных благ равны $\overline{\omega} = \left(\overline{\omega}_1,\ \overline{\omega}_2\right) \gg 0.$ Мы считаем, что каждому потребителю достается половина случайной переменной $\overline{\omega}$, т.е. $\left(\omega_{11},\ \omega_{21}\right) = 0,5\overline{\omega}$ и $\left(\omega_{12},\ \omega_{22}\right) = 0,5\overline{\omega}$.

a) Предположим, что потребитель 1 нейтрален риску, а потребитель 2 таковым не является, и оба потребителя имеют одинаковые субъективные вероятности. Докажите, что во внутреннем равновесии Эрроу — Дебре второй потребитель полностью застрахован.

b) Предположим теперь, что потребитель 1 нейтрален к риску, потребитель 2 таковым не является и на этот раз субъективные вероятности потребителей различны. Покажите, что во внутреннем (Эрроу — Дебре) равновесии второй потребитель не будет полностью застрахован. Определите, в каком направлении происходит смещение (в терминах субъективных вероятностей). Докажите, что потребитель 1 (агент, нейтральный к риску) ничего не выиграет от торговли.

19.C.5$^{\mathrm{A}}$. Рассмотрите экономику, описанную в разделе 19.C, но только с одним благом в каждом состоянии. Есть некоторое количество потребителей с неприятием риска. Пусть это количество равно I. Предпочтения допускают представление в виде функций ожидаемой полезности. Предположим, что функция полезности Бернулли потребителя, зависящая от блага, одинакова во всех состояниях и субъективные вероятности совпадают у всех потребителей. Индивидуальные первоначальные запасы различаются в разных состояниях. Однако мы предположим, что совокупный запас не является стохастическим; другими словами, он равномерен по всем состояниям (если, скажем, I велико и реализации индивидуальных запасов идентично и независимо распределены, то совокупный запас, приходящийся на индивида, будет почти нестохастическим).

Рассмотрите задачу обмена Эрроу — Дебре. Покажите, что распределение, у которого потребительский набор в каждом состоянии равен среднему значению по состояниям от первоначальных запасов потребителя, является равновесным распределением.

19.D.1$^{\mathrm{A}}$. Рассмотрите модель последовательной торговли из раздела 19.D, с тем лишь отличием, что теперь мы предположим, что для любого s s-контингентное благо выплачивает 1 долл. (вместо одной единицы физического блага), если наступает состояние s (и ничего в противном случае). Запишите бюджетные ограничения, возникающие в этой модели, и определите, какие нормализации цен здесь возможны.

19.D.2$^{\mathbf{A}}$**.** Покажите, что в примере 19.D.1 контингентная торговля двух потребителей именно такая, как заявлена в обсуждении примера.

19.D.3$^{\mathbf{A}}$**.** Постройте модель, похожую на двухпериодную модель из раздела 19.D, с тем лишь отличием, что потребление также происходит в период $t = 0$. Покажите, что результат утверждения 19.D.1 справедлив также и в этом случае.

19.D.4$^{\mathbf{B}}$**.** Рассмотрите трехпериодную экономику $t = 0, 1, 2$, при этом в период $t = 0$ экономика разделяется на две отрасли и при $t = 1$ каждая из отраслей разделяется еще на две. Всего есть H физических благ, и потребление происходит в три периода.

a) Опишите задачу по поиску равновесия Эрроу — Дебре в этой экономике.

b) Опишите задачу по поиску равновесия Раднера. Предположим, что при $t = 0$ и $t = 1$ существуют рынки контингентных благ для поставок одной единицы первого физического блага к соответствующей дате.

c) Докажите, что вывод утверждения 19.D.1 по-прежнему верен.

19.E.1$^{\mathbf{B}}$**.** Рассмотрите модель с торговлей активами, такую же, как в разделе 19.E. Отличие лишь в том, что потребление также возможно при $t = 0$. Предположим для упрощения, что функции полезности Бернулли, зависящие от потребления, независимы от состояний и аддитивно сепарабельны по времени; т. е. $u_i(x_{0i}, x_{1i}) = u_{0i}(x_{0i}) + u_{1i}(x_{1i})$, где $x_{0i}, x_{1i} \in \mathbb{R}^L$.

a) Докажите, следуя линии второго доказательства утверждения 19.E.1, что вывод этого утверждения остается верным.

b) Предположим теперь, что есть единственное физическое благо в каждом периоде. Выразите множители μ_s посредством предельных полезностей потребления.

19.E.2$^{\mathbf{A}}$**.** Докажите, что если первичный актив с вектором доходностей $r \in \mathbb{R}^S$ *разделяет состояния*, т. е. если $r_s \neq r_{s'}$ всякий раз, когда $s \neq s'$, то тогда возможно создать полную структуру активов, используя лишь опционы на основе первичного актива. Можем считать, что $r_s > 0$ для каждого s.

19.E.3$^{\mathbf{A}}$**.** Завершите доказательство части (1) утверждения 19.E.2 в стиле, рекомендованном в разделе.

19.E.4$^{\mathbf{B}}$**.** В тексте.

19.E.5$^{\mathbf{B}}$**.** Завершите проверку того, что при ценах, специфицированных в примере 19.E.7, множество потребительских наборов, получаемых в ходе последовательной торговли, совпадает с множеством потребительских наборов, достижимых за счет торговли *ex ante* четырех товаров Эрроу — Дебре.

19.E.6$^{\mathbf{A}}$**.** Имеются два периода: в период 1 есть три состояния; в период 0 происходит торговля активами. Есть два основных актива, векторы доходностей которых, выраженные в текущих долларах:

$$r_1 = (64, 16, 4) \text{ и } r_2 = (0, 0, 1).$$

Рыночные цены этих активов равны $q_1 = 32$ и $q_2 = 1$ соответственно. В дальнейшем вам будет предложено оценить посредством арбитража множество производных активов.

a) Предположим, что одна единица производного актива описывается как «одна единица этого актива дает право покупки одной единицы актива 1 за 75% его спотового значения в периоде 1 (после наступления состояния мира)». Найдите вектор доходностей этого актива и определите его цену.

b) Ситуация такая же, как и в (a), за исключением того, что условия производного актива изменены и теперь формулировка звучит так: «Одна единица этого актива дает право покупки одной единицы актива 1 за 75% его спотового значения в период 1 (после наступления состояния мира) при условии, что спотовое значение по меньшей мере равно 10».

c) Предположим, что актив такой же, как в (b), за исключением того, что фраза «по меньшей мере 10» заменена на «по меньшей мере 19». Выпишите вектор доходностей и докажите, что этот актив не может быть оценен посредством арбитража на основе доступных первичных активов.

d) Как изменится анализ в пункте (c), если дополнительно у нас имеется безрисковый актив с ценой, равной 1? (Не следует вычислять цену точно.)

e) Теперь предположим, что производный актив стал более сложным, и он описан фразой «одна единица этого актива дает право по выбору собственника актива либо получить 1 доллар в период 1, либо право покупки одной единицы актива 1 за 75% его спотового значения в период 1 (после наступления состояния мира)». Выпишите вектор доходностей этого актива и определите его цену.

f) Ситуация такая же, как в (e), с тем лишь отличием, что теперь актив модифицируется и теперь «одна единица этого актива по желанию собственника дает право получить 1 доллар в период 1 или право купить одну единицу актива 1 за 75% спотового значения в период 1 (после наступления состояния мира), при условии что это значение по меньшей мере 10».

19.F.1$^{\mathbf{B}}$. Рассмотрим модель солнечных пятен из примера 19.F.1. Докажите, что при стандартных условиях, накладываемых на предпочтения, существует равновесие, свободное от солнечных пятен, вне зависимости от структуры активов.

19.F.2$^{\mathbf{A}}$. Рассмотрим (случай $L = 1$) функцию полезности $U_i^*(\cdot)$, определенную на портфелях активов, как в разделе 19.F. Сформулируйте достаточные условия для того, чтобы $U_i^*(\cdot)$ была непрерывной и вогнутой. Покажите также, что если доходности строго положительны, то $U_i^*(\cdot)$ строго возрастает.

19.F.3$^{\mathbf{C}}$. Цель этого упражнения — показать, что в ситуации неполноты рынков может оказаться, что при росте некоторых активов в то же время положение *всех* участников (рынка) ухудшается.

a) Создадим экономику с двумя потребителями, с двумя равновероятными состояниями, в которой распределительные эффекты торговли настолько смещены, что сумма полезностей в равновесии с полными рынками меньше, чем сумма полезностей в равновесии с неполными рынками.

b) Теперь создадим экономику, которая имеет четыре равновероятных состояния и в которой первые два состояния такие, как в (a), в то время как два других как в (a), с тем лишь *отличием*, что потребители меняются ролями.

c) Теперь покажите, что структура активов, в которой существует единственный актив, допускающий перенос богатства от первых двух состояний к двум другим, порождает равновесие, которое лучше для каждого потребителя по сравнению с той ситуацией, если бы мы добавили два новых актива, один из которых допускает перенос богатства между состояниями 1 и 2, а другой делает то же самое между состояниями 3 и 4.

19.F.4$^{\mathbf{C}}$. Подберите пример с неограниченными шорт-продажами, в котором может не быть равновесия Раднера. Для построения такого примера потребуются доходности, имеющие деноминацию в более чем одном благе. (*Подсказка*: вспомните необходимое условие отсутствия арбитража.)

19.F.5$^{\mathbf{B}}$. Рассмотрите экономику с одним периодом, единственным потребительским благом и единственным фактором (трудом). *Ex ante* все работники одинаковы. Каждый из них с вероятностью 0,5 способен к работе (в этом случае он производит k единиц выпуска и работа не вызывает потерю полезности). С вероятностью 0,5 работник неспособен к работе (болен). Полезность, создаваемая потреблением c, в случае способности или неспособности к работе равна соответственно $U_a(c)$ и $U_b(c)$. Допустим, что вероятность потерять способность к работе независима для всех работников и в экономике достаточно работников, так что производство осуществляется на ожидаемом множестве производственных возможностей.

a) Если существует полный набор рынков Эрроу — Дебре, которые откроются, перед тем как неспособность к работе будет реализована, то каким будет равновесное распределение? (Возможно, придется предусмотреть возможность бесконечного количества состояний.)

b) Теперь допустим, что нет возможности определить, действительно ли работник является неспособным или же это предлог для того, чтобы не работать. Предположим, что рынки страхования продолжают работать, как и совершенно конкурентная отрасль. Допустим также, что условие «$U'_a(c_a) = U'_d(c_d)$ означает, что $c_a > c_d$» выполнено и что каждый работник покупает страховку только у одной компании. Покажите, что совершенно конкурентное равновесие (требуется определить, что это означает) будет то же, что и в (a).

c) По-прежнему будем допускать, что окружающим невозможно определить, является ли неспособность к работе истинной. Но теперь будем считать, что условие $U'_a(c_a) = U'_d(c_d)$ влечет $c_a < c_d$. Тогда покажите, что равновесие, описанное в (b), недостижимо. Продолжая считать, что каждый работник может купить страховку только у одной компании, определите совершенно конкурентное равновесие. Будет ли оно оптимальным по отношению к распределениям, которые могут быть достигнуты правительством, в предположении, что правительство тоже не в состоянии определить, является ли неспособность к работе истинной?

19.G.1^{A}. Докажите уравнение (19.G.1). Другими словами, допустим, что любой возможный производственный план фирмы может служить основой для построения линейной оболочки и что цены (на рынках активов и спот-рынках) даны. Теперь рассмотрим фирму как новый актив. Покажите, что потребительский план любого потребителя может быть достигнут без покупки акций фирмы.

19.G.2^{A}. Предположим, что в экономике с двумя потребителями и $L = 1$ первоначально есть только один актив (который поэтому не торгуется; вспомним, что мы допускаем потребление при $t = 0$). Теперь появилась фирма, которая может производить вектор доходности $\varepsilon a \in \mathbb{R}^S_+$. Фирмой владеют в равных долях двое потребителей. Приведите пример, в котором при любом сколь угодно малом ε (при условии, что вектор $a \in \mathbb{R}^S_+$ фиксирован) введение фирмы как актива, торгуемого при $t = 0$, обладает тем свойством, что в новом равновесии один потребитель значительно улучшает свое благосостояние, а другой его значительно ухудшает.

19.G.3^{A}. Предположим, что в экономике с $L = 1$ появилась фирма, которая может произвести один вектор доходностей $a \in \mathbb{R}^S$. Доля собственности этой фирмы у потребителя i равна θ_i. Предположим также, что доходности могут быть представлены в виде линейной комбинации существующих активов. Покажите, что потребительские наборы, доступные в равновесии, одинаковы при двух возможных сценариях. В первом акции фирмы торгуются при $t = 0$. Во втором актив не торгуется и для каждого i вектор $\theta_i a$ добавляется к первоначальному запасу потребителя i.

19.G.4^{A}. Предположим, что имеются два потребителя и $L = 1$. Первоначально активов нет. Теперь мы открываем фирму, которая может производить два возможных вектора доходностей: $A = \{a^1, a^2\} \subset \mathbb{R}^S_+$.

Доли собственности одинаковы у обоих потребителей. Акции фирмы не торгуются при $t = 0$. Производственный выбор фирмы, a^1 или a^2, добавляется к первоначальным запасам при $t = 1$ (по половине каждому потребителю). Покажите, что возможна ситуация, когда два потребителя не будут единодушны в своих предпочтениях относительно векторов a^1 или a^2.

19.H.1$^{\mathbf{A}}$. Пусть имеется модель с одним потребителем, принимающим решение, как в утверждении 19.H.1.

a) Покажите, что если $\sigma(\cdot)$ — полностью раскрывающая (т. е. $\sigma(s) \neq \sigma(s')$ всякий раз, когда $s \neq s'$), то $x_i^{\sigma(\cdot)}$ является *ex post* оптимальным в том смысле, что для любого $s \in S$ потребительское распределение в состоянии s оптимально для спот-экономики, которая возникает в состоянии s. Покажите также, что это необязательно выполняется, если $\sigma(\cdot)$ раскрывает информацию не полностью.

b) Покажите, что $x_i^{\sigma(\cdot)}$ оптимально в следующем смысле: не существует распределения x_i, измеримого по отношению к $\sigma(\cdot)$ и такого, что для некоторого возможного сигнала $\sigma(s)$ ожидаемая полезность x_i (условная по $\sigma(s)$) больше, чем та, которая соответствует $x_i^{\sigma(\cdot)}$.

c) Покажите, что если $\sigma'(\cdot)$ по меньшей мере так же информативна, как $\sigma(\cdot)$, то для каждого s ожидаемая полезность, порожденная $x_i^{\sigma'(\cdot)}$, условная по $\sigma'(s)$, не может быть инфериорна, чем ожидаемая полезность, порожденная $x^{\sigma(\cdot)}$, условная по $\sigma'(s)$.

d) Аналогично покажите, что если $\sigma'(\cdot)$ по меньшей мере так же информативна, как $\sigma(\cdot)$, то для каждого s ожидаемая полезность, порожденная $x_i^{\sigma'(\cdot)}$, условная по $\sigma(s)$, не может быть инфериорна, чем ожидаемая полезность, порожденная $x^{\sigma(\cdot)}$, условная по $\sigma(\cdot)$.

19.H.2$^{\mathbf{A}}$. Покажите, что для справедливости утверждения 19.H.1 нам придется допустить зависимость p и w_i от состояния. Требуется, чтобы как функции они были измеримы по отношению к данной $\sigma(\cdot)$ и не изменялись бы при замене $\sigma(\cdot)$ на $\sigma'(\cdot)$.

19.H.3$^{\mathbf{A}}$. Выполните опущенные этапы доказательства утверждения 19.H.1.

19.H.4$^{\mathbf{A}}$. Восстановите недостающий фрагмент решения в примере 19.H.4.

19.H.5$^{\mathbf{B}}$. Проведите требуемую проверку в примере 19.H.5.

19.H.6$^{\mathbf{C}}$. Рассмотрите модель общего равновесия с двумя потребителями и двумя благами. Функции (Бернулли) двух потребителей таковы:

$$u_1(x_{11}, x_{21}) = x_{11} + x_{21},\ u_2(x_{12}, x_{22}) = (x_{12})^{0,5} + x_{22}.$$

Первоначальный запас второго блага у первого потребителя равен ω_{21}. У него нет запаса первого блага. У потребителя 2 нет запаса второго блага, а его запас первого блага зависит от того, какое из трех равновероятных состояний реализуется. Соответственно величины запаса будут равны ω_{112}, ω_{122} и ω_{132}.

a) Найдите равновесие Эрроу — Дебре в этой экономике. Можете считать, что параметры таковы, что равновесие внутреннее.

b) Предположим, что единственно возможными рынками являются рынки для неконтингентных поставок двух благ. Запишите задачу на равновесие. Будет ли равновесное распределение Парето-оптимальным?

c) Теперь предположим, что перед тем как произойдет торговля и перед тем как запасы реализуются, двум потребителям говорят, реализуется или нет состояние 1. После раскрытия этой информации (и прежде чем станут известны величины запасов) может состояться неконтингентная торговля. Поставьте задачу на равновесие с учетом того, что она зависит от имеющейся информации.

d) То же, что и в (c); единственное отличие в том, что контингентная торговля (после раскрытия информации о состоянии 1) теперь разрешена.

e) Сравните ex ante (т. е. прежде чем что-либо будет раскрыто) значения ожидаемых полезностей, достижимые двумя потребителями в равновесиях (a), (b), (c) и (d), считая, что все эти равновесия внутренние. В каких случаях можно утверждать, что информация, раскрываемая в частях (c), (d), является общественно ценной?

19.H.7^{A}. Предположим, что имеются два равновероятных состояния. В каждом состоянии есть спот-рынок, на котором потребительское благо (благо 1) может обмениваться на товар-измеритель, который мы будем считать благом 2. Есть два потребителя. Их полезности равны, соответственно

	Состояние 1	Состояние 2
Потребитель 1	$2\ln x_{11} + x_{21}$	$4\ln x_{11} + x_{21}$
Потребитель 2	$4\ln x_{12} + x_{22}$	$2\ln x_{12} + x_{22}$

Общий запас первого блага равен 6 в первом состоянии и 6 + ε во втором состоянии. Все запасы этого блага достаются второму потребителю. Также допустим, что запасы измерителя у обоих потребителей являются достаточными, для того чтобы проигнорировать возможность появления граничных равновесий. Цена измерителя зафиксирована единицей в обоих состояниях. Цены другого блага в двух состояниях обозначены (p_1, p_2).

a) Предположим, что, когда неопределенность разрешится, оба потребителя будут знать, какое состояние мира реализовано.

Введем равновесные спотовые цены $\left(\hat{p}_1(\varepsilon),\ \hat{p}_2(\varepsilon)\right)$ в двух состояниях (как функции параметра ε).

b) Теперь предположим, что, когда состояние реализуется, потребитель 2 узнает об этом, но потребитель 1 по-прежнему не будет информирован (т. е. он все еще считает, что состояния равновероятны). Определите в таких информационных условиях (и полагая, что цены не могут быть использованы как сигналы) спотовые равновесные цены $\left(\bar{p}_1(\varepsilon),\ \bar{p}_2(\varepsilon)\right)$ в обоих состояниях.

c) Ситуация такая же, как в (b), с тем исключением, что мы позволим потребителю 1 сделать заключение о состояниях на основе цен. То есть если $p_1 \neq p_2$, то потребитель действительно информирован, но если $p_1 = p_2$, он не информирован. Пара спотовых цен $\left(p_1^*(\varepsilon),\ p_2^*(\varepsilon)\right)$ представляет равновесные цены при рациональных ожиданиях, если они уравновешивают два спот-рынка, когда потребитель 1 получает информацию из $\left(p_1^*(\varepsilon),\ p_2^*(\varepsilon)\right)$ способом, который был только что описан. Предположите, что $\varepsilon \neq 0$, и найдите пару равновесных цен при рациональных ожиданиях.

d) Покажите, что если $\varepsilon = 0$, то не существует пары равновесных цен при рациональных ожиданиях. Сравните с примером 19.H.3.

Глава 20. Равновесие и время

20.A. Введение

В этой главе мы рассмотрим основные элементы расширенного представления теории конкурентного равновесия, учитывающего возможность межвременного выбора. Излагая материал, мы будем стараться сохранить баланс между двумя возможными подходами к теории.

В рамках первого подхода мы изучим равновесие во времени как частный случай общей теории, представленной в предыдущих главах, где товары индексируются по времени, и этот индекс является лишь одной из многих характеристик этих товаров. Это полезная точка зрения (представление несопоставимых на первый взгляд феноменов в их единстве является одной из главных задач теории), и в определенной степени мы возьмем ее за основу. Однако попытка использовать исключительно этот подход обречена на провал. В таком случае глава сократилась бы до подстрочных примечаний к предыдущим.

Второй подход сфокусирован на структуре времени и также будет частично использован в данной главе. Таким образом, каждая модель, которая рассматривается в этой главе, учитывает либо неопределенность момента окончания игры, либо тот факт, что на производство товара затрачивается время. Для демонстрации аспектов динамической теории мы будем предполагать стационарность и делимость времени, которые принимаются ценою незначительной потери общности.

В разделах 20.B и 20.C будет представлено описание производственной и потребительской сторон экономики.

Раздел 20.D является основным в этой главе. В нем будут представлены основные свойства равновесия (включая определения, существование, оптимальность и вычисляемость равновесия) в модели экономики с одним потребителем.

В разделах 20.E (посвященном устойчивым состояниям) и 20.F (общий) будут изучены динамические аспекты модели с одним потребителем.

В разделе 20.G будет рассмотрена экономика с несколькими потребителями. Основная идея раздела заключается в том, что до тех пор, пока гарантировано Парето-оптимальное равновесие, количественные аспекты позитивной теории, изложенные в главе 17, распространяются на более общую ситуацию. Более того, свойства индивидуального равновесия, определенные методологически в модели одного потребителя, остаются справедливыми и в более широком контексте.

В разделе 20.H в крайне лаконичной форме будет выполнен анализ экономики перекрывающихся поколений — основной модели современной макроэкономической теории. Наш интерес к этой модели двояк: с одной стороны, мы хотим представить ее как еще один пример полезной модели равновесия; с другой стороны, хотим указать, что эта модель является примером того, что введение бесконечного числа поколений приводит к противоречиям с общей моделью, изложенной в разделе 20.G, а также к появлению новых и интересных вопросов, связанных с оптимальностью и количеством равновесий.

В разделе 20.I будет собрано несколько замечаний в отношении неравновесных ситуаций (краткосрочное равновесие, устойчивость процесса поиска, обучение и т. д.).

В педагогических целях во всей главе рассматривается только детерминированная версия теории. Развернутая форма игры по времени является линией, а не деревом. Возможна также комбинация подходов, изложенных в главе 19 (по неопределенности), и моделей данной главы. Однако такое представление сложнее и выходит за рамки данного учебника. Блестящее введение в общую теорию представлено в работе (Stokey, Lucas, Prescott, 1989).

Примечание: в этой главе символ $\sum_t$ всегда означает $\sum_{t=0}^{t=\infty}$, что, в свою очередь, может быть представлено как $\lim_{T\to\infty}\sum_{t=0}^{t=T}$. В случае если сумма вычисляется не от $t = 0$ до $t = \infty$, границы для символа суммирования определяются явным образом.

20.B. Межвременная полезность

В этой главе мы будем предполагать, что существует бесконечно много периодов времени $t = 0, 1, \ldots$ и что потребитель выбирает *потоки потребления* $c = (c_0, \ldots, c_t, \ldots)$, где $c_t \in \mathbb{R}^L_+$, $c_t \geq 0$.[1] Для упрощения излагаемого материала мы будем рассматривать только *ограниченные* потоки потребления, т. е. такие, которые имеют $\sup_t \|c_t\| < \infty$.

Вместо рассмотрения изначально более общего вида предпочтений и дальнейшего приведения их к частному случаю, в этой главе будет представлен (за исключением разделов 20.H и 20.I) особый вид предпочтений; ниже будут рассматриваться их отличительные свойства с общей точки зрения.

Обычно в случае межпериодного выбора считается, что предпочтения в отношении потоков потребления $c = (c_0, \ldots, c_t, \ldots)$ могут быть представлены функцией полезности $V(c)$, имеющей вид

[1] Термины «поток», «траектория», «программа» и «путь» используются в качестве синонимов.

$$V(c) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(c_t), \tag{20.B.1}$$

где $\delta < 1$ — фактор *дисконтирования*, $u(\cdot)$ — строго возрастающая и вогнутая функция полезности, определенная на множестве $\mathbb{R}_+^L$. Эта глава не будет являться исключением из правила — предпочтения в отношении потоков потребления будут описаны именно в такой форме. Мы рассмотрим здесь довольно подробно шесть основных свойств данной функции полезности. Обозначения: для данного потока потребления $c = (c_0, \ldots, c_t, \ldots)$ поток потребления $c^T = \left(c_0^T,\ c_1^T,\ \ldots\right)$ — это «сдвиг влево» на T периодов. То есть для потока $\left(c_0^T,\ c_1^T,\ \ldots\right)$, $c_t^T = c_{t+T}$ для всех $t \geq 0$.

(1) *Нетерпение ко времени*. Требование, чтобы будущее значение полезности рассматривалось с учетом фактора времени (т. е. $\delta < 1$) подразумевает *нетерпение ко времени*. То есть если $c = (c_0, c_1, \ldots, c_t, \ldots)$ является ненулевым потоком потребления, то смещенный (вправо) поток $c' = (0, c_0, c_1, \ldots, c_{t-1}, \ldots)$ строго хуже, чем поток c (см. упражнение 20.B.1). Это предположение гарантирует, что ограниченному потоку потребления соответствует конечное значение функции полезности (т. е. сумма в (20.B.1) сходится), что позволяет сравнивать любые два ограниченных потока потребления[2] и делает возможным автоматизацию расчетов.

Существует целый ряд мнений, что именно возможность технических усовершенствований в расчетах является главной причиной введения предположения о дисконтировании по времени. Конечно, это преувеличение[3]. Смысл дисконтирования заключается в том, что отдаленное будущее не оказывает серьезного влияния на текущие решения, и это предположение более реалистично, чем обратное.

Возможным аргументом в защиту фактора дисконтирования δ является его интерпретация в качестве вероятности продолжения игры в следующем периоде. Тогда $V(c)$ является ожидаемой стоимостью полезности. Иная интерпретация будет приведена в (6).

(2) *Стационарность*. Более общее выражение для функции полезности выглядит следующим образом:

$$V(c) = \sum_{t=0}^{\infty} u_t(c_t). \tag{20.B.2}$$

Форма (20.B.1) соответствует особому случаю (20.B.2), в котором $u_t(c_t) = \delta^t u(c_t)$. Эта особая форма может быть охарактеризована в терминах *стационарности*. Рассмотрим два потока потребления $c \neq c'$, таких что $c_t = c_t'$ для $t \leq T - 1$: т. е. два потока, c и c', являются одним и тем же потоком до периода $T - 1$ и различия в них появляются только в период $T - 1$. Заметим, что проблема выбора в период $t = T$ между текущим и будущим потребле-

[2] Впредь для потоков потребления будет гарантирована полнота отношений предпочтения.

[3] Рамсей (Ramsey, 1928) называет это предположение «слабостью воображения».

нием в потоках c и c' является той же проблемой, с которой столкнулся бы потребитель в период $t = 0$. Это проблема выбора между потоками потребления c^T и c'^T, которые являются смещенными «влево» на период T потоками c и c' соответственно. Тогда требование стационарности состоит в следующем:

$$V(c) \geq V(c'), \text{ если и только если } V(c^T) \geq V(c'^T).$$

Хорошим упражнением будет проверка того, что выражение (20.B.1) удовлетворяет свойству стационарности и что это свойство нарушается для функций полезности вида $V(c) = \sum_t \delta_t^t u(c_t)$, где фактор дисконтирования зависит от периода (упражнение 20.B.2).

Свойство стационарности не следует путать с утверждением, что если потоки потребления c и c' совпадают в период $T - 1$ и потребители выбирают один из этих потоков при $t = 0$, то тогда они не изменят своего мнения в период T. Такое «свойство» является тавтологически истинным: в обоих случаях мы сравниваем $V(c)$ и $V(c')$[4]. При проверке стационарности сравниваются $V(c)$ и $V(c')$ при $t = 0$, но в период T сравниваются полезности будущих потоков, приведенных к $t = 0$, т. е. $V(c^T)$ и $V(c'^T)$. Таким образом, стационарность говорит о том, что в контексте (20.B.2) предпочтения в будущем не зависят от *возраста* лица, принимающего решения.

Для анализа в этой главе условие стационарности не столь важно (исключениями являются разделы 20.E и 20.F, где речь идет о динамике), и напоминание о стационарности содержится, главным образом, в подстрочных индексах.

(3) *Аддитивная сепарабельность.* Из аддитивной сепарабельности функции полезности следуют два вывода: во-первых, для любого периода T дополнительная полезность от потоков потребления, которые начинаются с периода $T + 1$, не зависит от потока потребления, который имел место в промежутке между периодами 0 и T; и, во-вторых, полезность от потоков потребления с нулевого периода до периода T не зависит от каких бы то ни было потребительских ожиданий, которые могут иметь место после периода $T + 1$ (см. упражнение 20.B.3). В свою очередь, эти два свойства сепарабельности подразумевают аддитивность; т. е. если отношение предпочтения по потокам потребления удовлетворяет данному определению сепарабельности, то оно может быть представлено функцией полезности вида $V(c) = \sum_t u_t(c_t)$ (доказать это не так просто, см. (Blackorby, Primont, Russell, 1978)).

Насколько жестким является предположение об аддитивной сепарабельности? Мы можем сформулировать два аргумента в его защиту: пер-

[4] Это свойство часто называют *согласованностью во времени.* Возможна и несогласованность во времени, если с течением времени вкусы меняются (пример Ulysses and Sirens в разделе 1.B!). Но как только что было отмечено, если предпочтения, лежащие в основе потоков потребления $(c_0, \ldots, c_t, \ldots)$, не меняются со временем, условие согласованности обязательно должно выполняться. Предположение о неизменности вкусов распространяется на всю часть IV.

вый заключается в техническом удобстве; в основе второго лежит смутное ощущение, что события из далекого будущего или прошлого не должны влиять на оценку полезности потребителя в текущем периоде. Контраргументы очевидны: потребление в прошлом порождает привычки и аддикции; полезность от вкусного блюда может зависеть от того, насколько часто за последнюю неделю его подавали на стол и т. д. Существует, однако, очень естественный способ, позволяющий примирить эти феномены в рамках аддитивной сепарабельности. Допустим существование функции полезности следующего вида: $V(c) = \sum_t u_t(c_{t-1},\ c_t)$. Здесь полезность в период t зависит не только от потребления в период t, но и от потребления в период $t - 1$ (или, в более общем случае, от потребления в течение нескольких прошедших периодов). Можно переформулировать вышесказанное в несколько ином виде. Определим вектор переменных-«привычек» z_t и *технологию производства домохозяйства,* которая использует вектор затрат c_{t-1} в период $t - 1$ для совместного производства вектора-выпуска потребительских товаров c_{t-1} в период $t - 1$ и вектора переменных-«привычек» $z_t = c_{t-1}$ в период t. Тогда формально u_t будет зависеть только от переменных с подстрочным индексом t, а общая полезность — представлять собой сумму $\sum_t u_t(z_t,\ c_t)$. Можно заключить, что аддитивная сепарабельность является менее строгой, чем это представляется, в случае если делается допущение о существовании производства домохозяйства и соответствующих текущих переменных (обычно их число превышает единицу).

(4) *Продолжительность периода*. Правдоподобие предположения о сепарабельности, которое делает полезность от текущего потребления независимой от потребления в другие периоды, зависит от длительности периода. Поскольку даже скоропортящиеся потребительские товары содержат элементы продолжительности, заложенные в них (например, в виде потока «услуг» после акта потребления), предположение о сепарабельности является неестественным, если продолжительность периода очень мала. Что же определяет его длительность? В той мере, в которой наша модель ориентирована на конкурентную теорию, этот период институционально определен: в течение этого периода цены должны оставаться постоянными. Отметим, кроме того, что значение δ также неявно зависит от периода. Чем он короче, тем ближе значение δ к единице.

(5) *Рекурсивная полезность.* В соответствии с видом функции полезности (20.B.1) для любого потока потребления $c = (c_0, c_1, c_2, \ldots, c_t, \ldots)$ имеем: $V(c) = u(c_0) + \delta V(c^1)$. Если полезность $u = u(c_0)$ является текущей, а $V(c) = V(c^1)$ — будущей полезностью, то предельная норма замещения текущей полезности будущей равна δ и, как нетрудно видеть, не зависит от уровней текущей и будущей полезностей. *Модель рекурсивной полезности* (согласно (Koopmans, 1960)) является важным обобщением формулы (20.B.1). Она допускает непостоянность нормы замещения, но, подобно случаю с аддитивной сепарабельностью, в этой модели упорядочение будущих потоков не зависит от потока потребления, наблюдавшегося в прошлом.

Рекурсивная модель может быть представлена следующим образом. Обозначим текущую полезность через $u \geq 0$ и будущую — через $V \geq 0$. Тогда могут быть определены следующие функции полезности: текущая $u(c_t)$ и агрегированная $G(u, V)$. Последняя совмещает в общей функции полезности текущую и будущую полезности. Например, для случая аддитивной сепарабельности имеем: $G(u, V) = u + \delta V$. В более общем случае мы могли бы также получить, к примеру, $G(u, V) = u^{\alpha} + \delta V^{\alpha}$, где $0 < \alpha \leq 1$. В этом случае кривые безразличия в плоскости (u, V) не являются прямыми линиями. Полезность потока потребления $c = (c_0, c_1, c_2, \ldots, c_t, \ldots)$ могла бы тогда находиться рекурсивно:

$$V(c) = G(u(c_0), V(c^1)) = G(u(c_0), G(u(c_1), V(c^2))) = \ldots. \qquad (20.B.3)$$

Для того чтобы представление вида (20.B.3) имело смысл, необходимо уточнить, что влияние $V(c^T)$ на $V(c)$ будет нивелировано при $T \to \infty$ (так что $V(c)$ приблизительно может быть определена при большом T и с учетом допущения, что $V(c^T)$ имеет арбитражную стоимость). Это равносильно утверждению об игнорировании времени. В приложениях, как правило, не требуется в явном виде рассчитывать $V(c)$. (См. упражнение 20.B.4 для более полной информации о рекурсивной полезности.)

(6) *Альтруизм.* Выражение $V(c) = u(c_0) + \delta V(c^1)$ дает интерпретацию задачи об одном потребителе (20.B.1) с позиций нескольких поколений. Действительно, если жизнь поколений умещается в один период, функция потребления поколения 0 равна $u(c_0)$ и всех заботит полезность следующего поколения $V(c^1)$, приведенная в соответствии с формулой: $\delta V(c^1)$, то тогда $V(c) = u(c_0) + \delta V(c^1)$ — совокупная полезность. Если каждое поколение бескорыстно заботится о благополучии других поколений, то путем рекурсивного замещения мы можем заключить, что целевая функция поколения 0 такова, как в формуле (20.B.1). Целая «династия» ведет себя как один индивидуум. Таким образом, мы получаем иное обоснование для $\delta < 1$. Приведенное неравенство означает, что представители современного поколения заботятся о своих детях, но не настолько, насколько о самих себе. Более подробное изложение данной проблемы рассматривается в работе (Barro, 1989).

20.C. Межпериодное производство и эффективность

Предположим, что существует бесконечная последовательность периодов $t = 0, 1, \ldots$ и в каждом периоде производится L благ (товаров и услуг). Можно принять несколько иную интерпретацию, если это облегчит восприятие, и считать, что $L = 2$. То есть L — это и услуги, и обобщенный инвестиционно-потребительский товар (см. пример 20.C.1). Одно из главных преимуществ использования векторов — это отсутствие необходимости вводить новую нотацию при переходе к более общему виду. Вы решаете конкретную задачу, в основе которой лежит общая формулировка.

Следует принять предположение о том, что товары являются *скоропортящимися*. Для их конвертации в товары длительного пользования достаточно определить технологию хранения, что позволит перемещать товары во времени.

Будучи экзогенно наделенными некоторым количеством ресурсов (к примеру, начальным капиталом и трудом в каждый из периодов), можем задать себе вопрос: а что с этим делать? Отвечая на него, необходимо определить *технологию производства*. Из главы 5 уже известно, как это можно сделать формально, используя концепцию *производственного множества* (или функции трансформации производства, или производственной функции). С минимальными потерями общности технологии определяются следующим образом: производственные возможности в период t полностью определены производственными решениями, принятыми в недавнем прошлом, т. е. в период $t - 1$. Если иметь в виду, что всегда возможно определить новые промежуточные товары, как, возможно, и удлинить периоды, то очевидной становится незначительность ограничений.

Тогда технологические возможности в период t будут формально определены производственным множеством $Y \subset \mathbb{R}^{2L}$ и *производственными планами* $y = (y_b, y_a)$. Индексы b и a являются мнемоническими и служат для обозначения состояний «до» и «после» соответственно. Объяснение заключается в том, что производственные планы Y «покрывают» два периода («начальный» и «конечный»), где $y_b \in \mathbb{R}^L$ и $y_a \in \mathbb{R}^L$ — производственные планы в начальный и завершающий периоды соответственно. Как принято, отрицательные числа соответствуют затратам, а положительные — произведенной продукции.

На множество Y накладываются некоторые ограничения, знакомые по разделу 5.B:

(1) множество Y является *замкнутым и выпуклым*.

(2) $Y \cap \mathbb{R}^{2L}_+ = \{0\}$ (*бесплатного обеда не бывает*).

(3) $Y - \mathbb{R}^{2L}_+ \subset Y$ (*свободное расходование*).

Предположением, специфическим для временного множества, является требование, чтобы затраты не использовались *позже*, чем будет выпущена продукция (т. е. производство занимает время). Это представление имеет следующую формализацию:

(4) Если $y = (y_b, y_a) \in Y$, то $(y_b, 0) \in Y$ (*возможность сокращения*).

Иными словами, в (4) речь идет о том, что независимо от производственных планов в начальный период возможно отсутствие производства в последний период. Простым примером является $y_{at} \geq 0$ для каждого $y \in Y$, т. е. случай, когда все затраты произведены на начальном этапе. Тогда (4) вытекает из свойства (3).

Пример 20.C.1 (*модель Рамсея — Солоу* (*Ramsey–Solow*))[5]. Предположим, что у нас есть два товара: агрегированный потребительский инвестиционный товар и труд. Будет удобно описать используемую технологию производственной функцией $F(k, l)$.

[5] См. (Ramsey, 1928; Solow, 1956). Подобная модель была предложена (Swan, 1956).

Для любого объема инвестиционного капитала $k \geq 0$ и трудовых ресурсов $l \geq 0$, использованного в начальный период, производственная функция $F(k, l)$ — объем агрегированного потребительского инвестиционного товара, доступного в завершающий момент. Тогда

$$Y = \{(-k, \ -l, \ x, \ 0) : k \geq 0, \ l \geq 0, \ x \leq F(k, \ l)\} - \mathbb{R}^4_+.$$

Отметим, что труд является первичным фактором; т. е. не может быть произведен. ■

Пример 20.C.2 (*модель издержек приспособления* (*адаптации*)). Предположим, что имеется три товара: производственные мощности, потребительский товар и труд. При объеме капитала k и труде l, используемых в начальный период, мы получим $F(k, l)$ единиц потребительских товаров. Этот выпуск может быть трансформирован в инвестиционный капитал, издержки при этом равны $k' + \gamma(k' - k)$ единиц потребляемого товара за k' единиц капитала. Здесь $\gamma(\cdot)$ — выпуклая функция, удовлетворяющая условию $\gamma(k' - k) = 0$ при $k' < k$ и $\gamma(k' - k) > 0$ при $k' > k$. Условие $\gamma(k' - k)$ представляет издержки адаптации производственных мощностей в течение определенного периода относительно предыдущего периода. (Отметим, что предельные издержки подобной адаптации растут с увеличением производства за период.) Формально производственное множество Y определяется следующим образом:

$$Y = \{(-k, \ 0, \ -l, \ k', \ x, \ 0) : k \geq 0, \ l \geq 0, \ k' \geq 0, \ x \leq F(k, \ l) - k' - \gamma(k' - k)\} - \mathbb{R}^6_+. \ ■$$

Пример 20.C.3 (*двухсекторная модель*). Мы можем установить более общие различия между инвестиционными и потребительскими благами, чем те, что представлены в примерах 20.C.1 и 20.C.2. Действительно, мы можем определить производственное множество как

$$Y = \{(-k, \ 0, -l, \ k', \ x, \ 0) : k \geq 0, \ l \geq 0, \ k' \geq 0, \ x \leq G(k, \ l, \ k')\} - \mathbb{R}^6_+,$$

где k и k' — инвестиции в начальный и конечный периоды соответственно. Отметим, что инвестиции и потребительский товар должны быть абсолютно субституттивны [они производятся в двух разных секторах, см. (Uzawa, 1964)]. Если они таковыми являются [т. е. если функция трансформации $G(k, l, k')$ имеет вид $F(k, l) - k'$], то тогда этот пример эквивалентен модели Рамсея — Солоу из примера 20.C.1. Если функция трансформации имеет вид $G(k, l, k') = F(k, l) - k' - \gamma(k' - k)$, то мы имеем дело с моделью издержек приспособления из примера 20.C.2. ■

Пример 20.C.4. (($N + 1$)-*секторная модель*). В примере 20.C.3 мы имеем потребительский товар и труд. В текущем примере мы интерпретируем k и k' как N-размерные векторы. Для простоты представления в примере 20.C.3 мы предположим $G(k, l, k')$ определенной только для $k \geq 0$ и $k' \geq 0$. Однако в общем случае это может привести к производству отрицательного количества потребительских товаров. Для того чтобы этого избежать, удобно завершить спецификацию посредством комбинаций (k, l, k') из допустимого множества A. Тогда

$$Y = \{(-k, \ 0, -l, \ k', \ x, \ 0) : (k, \ l, \ k') \in A \text{ и } x \leq G(k, \ l, \ k')\} - \mathbb{R}^{2(N+2)}_+. \ ■$$

Как только мы специфицируем нашу технологию, мы можем определить, какой будет траектория производственных планов.

Определение 20.C.1. $(y_0, y_1, \ldots, y_t, \ldots)$ является производственным путем, или траекторией, или программой, если $y_t \in Y \subset \mathbb{R}^{2L}$ для каждого t.

Отметим, что вдоль производственной траектории $(y_0, y_1, \ldots, y_t, \ldots)$ происходит перекрытие индексов, которыми определяются производственные планы y_{t-1} и y_t. Действительно, $y_{a,t-1} \in \mathbb{R}^L$ и $y_{b,t} \in \mathbb{R}^L$ представляют собой производственные планы, выполненные в периоды $t-1$ и t соответственно, по использованию затрат или для производства выпуска в период t. Таким образом, для любого периода t вектор чистых затрат — выпуск равен $y_{a,t-1} + y_{bt} \in \mathbb{R}^L$ (при $t = 0$ имеем $y_{a,t-1} = 0$; это соглашение сохраняется на протяжении всей главы)[6]. Отрицательные элементы этого вектора соответствуют такому объему затрат, который должен поступить извне в период t, чтобы траектория была реализована. То есть речь идет о затратах, необходимых в период t для осуществления производственных процессов y_{t-1} и y_t, превышающих выпуски y_{t-1} и y_t. Аналогично векторы, принимающие положительные значения, — это товары, остающиеся неиспользованными, после того как затраты уже осуществлены, и, таким образом, доступные для конечного потребления в период t.

Ситуация является полным аналогом производственной стороны экономики, представленной в главе 5. Если мы воспринимаем технологию в период t как используемую отдельными фирмами (или как агрегированный показатель для ряда фирм), а также $\hat{y}_t$ — как бесконечную последовательность с ненулевыми элементами (равными y_t) только в периоды t и $t + 1$, то тогда $\sum_t \hat{y}_t$ будет агрегированной траекторией производства, а также последовательностью, которая относит вектор чистых затрат и выпуска $y_{a,t-1} + y_{bt} \in \mathbb{R}^L$ к периоду t. Если мы имеем конечный горизонт, текущий пример будет частным случаем, соответствующим производству, представленному в главе 5. Для бесконечного горизонта мы имеем счетное множество товаров и фирм. Как мы увидим, это значительное отличие, поэтому будет полезно организовать наше обсуждение аналогии с конечным горизонтом, поставив те же вопросы, что и в разделе 5.F, касающиеся отношений между эффективными планами производства и ценовым равновесием.

Определение 20.C.2. Производственный путь $(y_0, y_1, \ldots, y_t, \ldots)$ является *эффективным*, если не существует другого производственного пути $(y'_0, y'_1, \ldots, y'_t, \ldots)$, такого что

$$y_{a,t-1} + y_{bt} \le y'_{a,t-1} + y'_{bt} \text{ для всех } t,$$

и равенство не выполняется хотя бы для одного из периодов t.

Другими словами, путь $(y_0, y_1, \ldots, y_t, \ldots)$ эффективен, если не существует другого способа произвести такое же количество конечного потребительского товара в каждый из периодов с теми же затратами в каждый из периодов (по меньшей мере одно неравенство является строгим). Такая формулировка аналогична определению 5.F.1.

[6] Небольшое замечание: как только возникает малейшая причина для появления путаницы или двусмысленности при чтении индексов, тут же вводится запятая. К примеру, пишется $y_{a,t-1}$ вместо y_{at-1}.

Что представляет собой *вектор цен* в динамическом контексте? Естественно определить его как последовательность $(p_0, p_1, \ldots, p_t, \ldots)$, где $p_t \in \mathbb{R}^L$. В данный момент нас не будет интересовать вопрос, откуда появилась данная последовательность; предположим, что она задана экзогенно и известна любой производственной единице. Цены отражают текущую стоимость товара, а в следующем разделе мы обсудим природу данных цен.

При заданных траектории производства $(y_0, y_1, \ldots, y_t, \ldots)$ и ценах $(p_0, p_1, \ldots, p_t, \ldots)$ прибыль с учетом производственных планов в период t находится как

$$p_t \cdot y_{bt} + p_{t+1} \cdot y_{at}.$$

Проследим теперь шаг за шагом последствия максимизации прибыли, полученной от реализации планов.

Определение 20.C.3. Производственный путь $(y_0, y_1, \ldots, y_t, \ldots)$ *близоруко*, или кратковременно, максимизирует прибыль для последовательности цен $(p_0, p_1, \ldots, p_t, \ldots)$, если для каждого t

$$p_t \cdot y_{bt} + p_{t+1} \cdot y_{at} \geq p_t \cdot y'_{bt} + p_{t+1} \cdot y'_{at} \text{ для всех } y'_t \in Y.$$

Цены $(p_0, p_1, \ldots, p_t, \ldots)$, способные «поддерживать» траекторию $(y_1, \ldots, y_t, \ldots)$ на уровне краткосрочной максимизации прибыли, часто называются *ценами Маленво* для траектории (Malinvaud, 1953)[7].

Обеспечивает ли первая теорема благосостояния максимизацию краткосрочной прибыли? Другими словами, если траектория $(y_0, y_1, \ldots, y_t, \ldots)$ при строго положительных ценах миопикально максимизирует прибыль, следует ли из этого, что путь $(y_0, y_1, \ldots, y_t, \ldots)$ является эффективным? В экономике с конечным горизонтом это заключение представляется справедливым с учетом утверждения 5.F.1, но после некоторых размышлений обнаруживается, что при бесконечном горизонте этот контекст не нужен. Интуиция, подсказывающая негативный ответ, опирается на феномен *избыточного накопления капитала*.

Предположим, что цены во времени растут достаточно быстро. Тогда возможна ситуация, когда в каждом отдельном периоде приходится платить, вкладывая в текущий момент все имеющиеся ресурсы. Очевидно, что такая траектория не является эффективной.

Пример 20.C.5. При $L = 1$ пусть $Y = \{(-k, k') \colon k \geq 0, k' \leq k\} \subset \mathbb{R}^2$. Это тривиальная технология накопления. Рассмотрим траекторию, где $y_t = (-1, 1)$ для всех t; т. е. мы всегда переносим одну единицу товара. Тогда $y_{a,-1} + y_{b,0} = -1$ и $y_{a,t-1} + y_{bt} = 0$ для

[7] Заметим, что мы не требуем выполнения условия $\sum_t p_t \cdot \left(y_{a,t-1} + y_{b,t}\right) < \infty$, но в принципе текущая стоимость может быть бесконечно большой. В разделах 5.E и 5.F, где рассматривалось конечное число товаров и фирм, мы наблюдали, что индивидуальная децентрализованная максимизация прибыли и максимизация совокупной прибыли приводили к одинаковому результату. Но в данном контексте ответ на этот вопрос не столь очевиден. Учитывая, что текущая стоимость может быть бесконечно большой, требуется существование счетного множества товаров *и* производственных множеств. Для дальнейшего обсуждения см. упражнения 20.C.2–20.C.5.

всех $t > 0$. Это неэффективно; рассмотрим путь $y'_t = (0, 0)$ для всех t, для которых $y'_{a,t-1} + y'_{bt} = 0$ при $t \geq 0$. Но для стационарной последовательности цен, где $p_t = 1$ для всех t, траектория $(y_0, y_1, \ldots, y_t, \ldots)$ близоруко максимизирует прибыль. ■

Эффективность будет достигнута, если дополнительно к близорукой максимизации прибыли оценка траектории производства становится несущественной при $t \to \infty$. Точнее, эффективность достигается, если в период t оценка (текущая) плана производства для периода $t + 1$ стремится к нулю, т. е. если $p_{t+1} \cdot y_{at} \to 0$ при $t \to \infty$. Это так называемое *условие трансверсальности*. Отметим, что это условие нарушается, если существует возможность накопления, что видно из примера 20.C.5.

Утверждение 20.C.1. Предположим, что траектория производства $(y_0, y_1, \ldots, y_t, \ldots)$ миопикально максимизирует прибыль при ценах $(p_0, \ldots, p_t, \ldots) \gg 0$. Предположим также, что траектория производства и последовательность цен удовлетворяют *условию трансверсальности* $p_{t+1} \times \times y_{at} \to 0$. Тогда производственная траектория $(y_0, y_1, \ldots, y_t, \ldots)$ является эффективной.

Доказательство. Предположим, что траектория $(y'_0, \ldots, y'_t, \ldots)$ является такой, что $y_{a,t-1} + y_{bt} \leq y'_{a,t-1} + y'_{bt}$ для всех t с равенством, не содержащим хотя бы одно t. Существует значение $\varepsilon > 0$, такое что если мы примем T достаточно большим для некоторого строгого неравенства с целью исключить противоречие с данными предшествующих периодов, то получим

$$\sum_{t=0}^{T} p_t \cdot (y'_{a,t-1} + y'_{bt}) > \sum_{t=0}^{T} p_t \cdot (y_{a,t-1} + y_{bt}) + \varepsilon.$$

На самом деле если T является достаточно большим, то тогда $p_{T+1} \cdot y_{aT}$ стремится к нулю (в силу условия трансверсальности):

$$\sum_{t=0}^{T} p_t \cdot (y'_{a,t-1} + y'_{bt}) > p_{T+1} \cdot y_{aT} + \sum_{t=0}^{T} p_t \cdot (y_{a,t-1} + y_{bt}).$$

После тождественных преобразований данное выражение может быть переписано (вспомним условие $y_{a,-1} = y'_{a,-1} = 0$):

$$p_T \cdot y'_{bT} + \sum_{t=0}^{T-1} (p_{t+1} \cdot y'_{at} + p_t \cdot y'_{bt}) > \sum_{t=0}^{T} (p_{t+1} \cdot y_{at} + p_t \cdot y_{bt}).$$

Мы должны, таким образом, иметь или $p_{t+1} \cdot y'_{at} + p_t \cdot y'_{bt} > > p_{t+1} \cdot y_{at} + p_t \cdot y_{bt}$ для некоторого $t \leq T - 1$, или $p_T \cdot y'_{bT} > p_{T+1} \cdot y_{aT} + + p_T \cdot y_{bT}$. В каждом из этих случаев мы получаем нарушение допущения о близорукой максимизации прибыли [вспомним, что из-за возможности сокращения $(y'_{bT}, 0) \in Y$]. Таким образом, пути $(y'_0, \ldots, y'_t, \ldots)$ не существует.

Отметим, что идея доказательства крайне проста: если условие трансверсальности выполняется, то для достаточно большого T мы можем аппроксимировать общую прибыль сокращенного пути $(y_0, \ldots, y_T)$ суммой чистой оценки затрат и выпусков от периода к периоду (вплоть до момента T). Не имеет значения, сравниваем ли мы входы и выпуски по периоду или по фирме (т. е. по «по плану производства»). Если горизонт достаточно далек, любой метод сведется к нахождению прибыли:

Прибыль = Общий Доход – Совокупные Издержки. ■

Утверждение 20.C.1 говорит нам о том, что модифицированная версия первой теоремы о благосостоянии реализуется в динамичной модели производства. Зададим теперь вопрос о второй теореме благосостояния: *может ли заданная эффективная траектория* $(y_0, \ldots, y_t, \ldots)$ *поддерживаться ценами?* В утверждении 5.F.2 мы дали положительный ответ на этот вопрос применительно к случаю с конечным горизонтом. Для текущей ситуации с бесконечным горизонтом мы можем разбить вопрос на две части:

(1) *Существует ли система цен Маленво* $(p_0, \ldots, p_t, \ldots)$ для $(y_0, \ldots, y_t, \ldots)$, т. е. последовательность цен $(p_0, \ldots, p_t, \ldots)$, по отношению к которой траектория $(y_0, \ldots, y_t, \ldots)$ близоруко максимизирует прибыль?

(2) *Если существует положительный ответ на* (1), *то можно ли на этом основании заключить, что пары* $(y_0, \ldots, y_t, \ldots)$ *и* $(p_0, \ldots, p_t, \ldots)$ *удовлетворяют условию трансверсальности?*

Ответом на вопрос пункта (2) *будет «необязательно»*. В разделе 20.E мы увидим на примере, что условие трансверсальности не является обязательным свойством цен Маленво.

Ответ на (1) — *«в высшей степени “да”»*. Мы проиллюстрируем это двумя примерами и затем завершим раздел небольшим обсуждением общей ситуации.

Пример 20.C.6. *Расширение модели Рамсея — Солоу*. В этой модели мы можем собрать воедино траекторию (k_t, l_t, c_t), характеризующую использование совокупного капитала, труда и объем потребления. С этого момента мы предполагаем, что $k_{t+1} + c_{t+1} = F(k_t, l_t)$ и что последовательность l_t трудовых ресурсов задается экзогенно. Тогда достаточно специфицировать траекторию капитала $(k_0, \ldots, k_t, \ldots)$. Обозначив через (q_t, w_t) цены на два товара в период t, мы получим прибыль в момент t, равную $q_{t+1}F(k_t, l_t) - q_t k_t - w_t l_t$. Поэтому необходимым и достаточным условиями для краткосрочной максимизации прибыли в период t будут следующие:

$$\frac{q_t}{q_{t+1}} = \nabla_1 F(k_t,\ l_t) \qquad \text{и} \qquad \frac{w_t}{q_{t+1}} = \nabla_2 F(k_t,\ l_t).$$

Отметим, что при нормализации (мы можем положить $q_0 = 1$) эти условия первого порядка определяют цены для *любой* возможной траектории капитала (см. упражнение 20.C.6).

Из условия трансверсальности следует, что $q_{t+1}F(k_t, l_t) \to 0$. Если последовательность производств $F(k_t, l_t)$ ограничена, то тогда достаточно, чтобы $q_t \to 0$. В силу утверждения 20.C.1 мы можем заключить, что множество достаточных условий для эффективности возможной и ограниченной траектории капитала $(k_0, \ldots, k_t, \ldots)$ таково, что существует последовательность цен выпуска $(q_0, \ldots, q_t, \ldots)$, таких что

$$\frac{q_t}{q_{t+1}} = \nabla_1 F(k_t,\ l_t) \qquad \text{для всех } t \tag{20.C.1}$$

и

$$q_t \to 0 \text{ (эквивалентно, } 1/q_t \to \infty). \tag{20.C.2}$$

Из-за возможности перенакопления капитала (20.C.1) является необходимым, но недостаточным условием для эффективности. С другой стороны, (20.C.2) является необходимым (см. раздел 20.E). В работе (Cass, 1972) получена слабая версия (20.C.2), которая совместно с (20.C.1) является как необходимым, так и достаточным условием[8]:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{q_t} = \infty. \tag{20.C.2$'$}$$

■

Пример 20.C.7. *Модель издержек приспособления. Продолжение.* В модели издержек приспособления производственный план в период $t-1$ включает переменные $k_{t-1}, l_{t-1}, k_t, c_t$. Мы связываем с этими переменными цены $q_{t-1}, w_{t-1}, q_t, s_t$. Тогда прибыль равна

$$s_t(F(k_{t-1}, l_{t-1}) - k_t - \gamma(k_t - k_{t-1})) + q_t k_t - q_{t-1}k_{t-1} - w_{t-1}l_{t-1}.$$

Используя условия первого порядка максимизации прибыли относительно k_t и k_{t-1}, мы получаем следующие два условия:

(1) $q_t = s_t(1 + \gamma'(k_t - k_{t-1}))$, т. е. цена производственных мощностей в периоде t равна инвестиционным издержкам на дополнительные мощности в периоде t;

(2) $q_{t-1} = s_t(\nabla_1 F(k_{t-1}, l_{t-1}) + \gamma'(k_t - k_{t-1}))$, т. е. цена мощностей в периоде $t-1$ равна возврату в периоде t одной единицы дополнительной мощности в периоде $t-1$ (возврат имеет две части: рост объема производства в периоде t и снижение издержек по корректировке мощностей в периоде t).

Объединяя (1) и (2), получаем

$$\frac{q_{t-1}}{q_t} = \frac{\nabla_1 F(k_{t-1},\ l_{t-1}) + \gamma'(k_t - k_{t-1})}{1 + \gamma'(k_t - k_{t-1})}. \tag{20.C.3}$$

Отметим, что если корректировки издержек не происходит [т. е. если $\gamma(\cdot)$ тождественно равна нулю], то (20.C.3) точно равно (20.C.1). Понаблюдаем также за тем, как параллельно примеру 20.C.6 условие (20.C.3) определяет опорные цены в краткосрочном периоде для любой возможной траектории капитала. ■

В общей гладкой модели нетрудно показать, как строится вектор опорных цен $(p_0, \ldots, p_t, \ldots)$ для эффективной траектории $(y_0, \ldots, y_t, \ldots)$. Отметим, что, будучи эффективной, каждая траектория y_t принадлежит границе Y. Требуемое свойство гладкости заключается в том, чтобы для каждого t производственное множество Y имело единственный (нормализованный) внешний нормальный вектор $q_t = (q_{bt}, q_{at})$ при y_t (мы можем, к примеру, нормализовать q_t, для того чтобы иметь единицу длины); см.

[8] Для выполнения этого уравнения требуются некоторые дополнительные (очень незначительные) условия регулярности функции производства $F(\cdot)$.

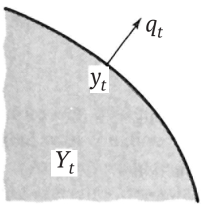


Рис. 20.C.1. Гладкое производственное множество

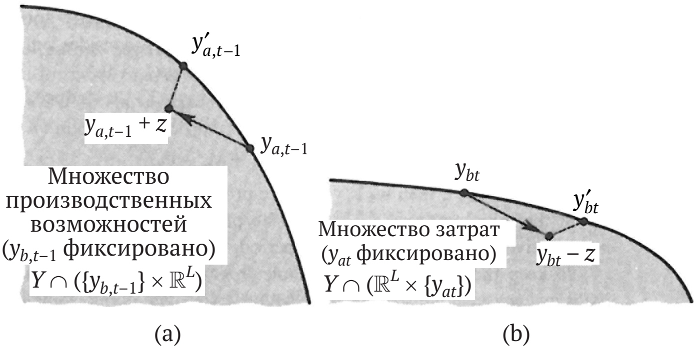


Рис. 20.C.2. Производственная траектория, которая неэффективна на T

рис. 20.C.1. В меньшей степени с точки зрения геометрии гладкость означает, что при $y_t \in Y$ все предельные уровни трансформации (*MRT*) затрат в затраты, затрат в выпуски и выпусков в выпуски определены единственным образом.

Свойство эффективности подразумевает, что для каждого t $q_{a,t-1} = \beta q_{bt}$ при $\beta > 0$. Эвристически: для любых двух товаров их *MRT* по производимым товарам при t для производственного решения, принятого в момент $t - 1$, должен быть таким же, как их *MRT* по используемым факторам при t для производственного решения, принятого в момент t. Если бы это условие не было выполнено, появилась бы возможность производства товарных излишков. Аргументация стандартная (вспомним анализ в разделе 16.F). Рассмотрим, например, рис. 20.C.2, где в пункте (a) мы разработали трансформацию выпуска через границу $y_{a,t-1}$ (т. е. сохраняя $y_{b,t-1}$ фиксированным) и в пункте (b) трансформацию изокванты затрат через y_{bt} (т. е. сохраняя y_{at} фиксированным; вспомним условия для затрат). Мы видим, что если наклон вектора в этих точках не является тем же, то возможно переместиться из $y_{a,t-1}$ в $y'_{a,t-1}$ и из y_{bt} в y'_{bt}, причем таким образом, что $y'_{a,t-1} + y'_{bt} > y_{a,t-1} + y_{bt}$, а это противоречит эффективности.

Построим желаемую последовательность цен $(p_0, \ldots, p_t, \ldots)$ по индукции. Пусть $p_0 = q_{b0}$ (т. е. относительные цены при $t = 0$ являются *MRT* между товарами на начальном этапе производственного плана $y_0 \in Y \subset \mathrm{R}^{2L}$). Теперь представим, что цены $(p_0, \ldots, p_T)$ уже определены и что каждый y_t до $t = T - 1$ миопикально максимизирует прибыль при этих ценах. Для условий первого порядка при максимизации прибыли в $T - 1$ имеем: $p_T = \alpha q_{a,T-1}$ для некоторых $\alpha > 0$. Мы знаем, что $q_{a,T-1} = \beta q_{bT}$ для некоторых $\beta > 0$. Тогда $p_T = \alpha\beta q_{bT}$. Таким образом, если мы положим $p_{T+1} = \alpha\beta q_{aT}$, то получим, что $(p_T, p_{T+1}) = (\alpha\beta q_{bT}, \alpha\beta q_{aT})$ пропорциональны $q_T = (q_{bT}, q_{aT})$, а это означает, что y_T максимизирует прибыль при (p_T, p_{T+1}). Затем расширяем нашу последовательность до $(p_0, \ldots, p_{T+1})$ и т. д.

Отметим, что, как и в примерах 20.C.6 и 20.C.7, нахождение опорных краткосрочных цен не позволяет в полной мере использовать эффективность. Используется лишь «краткосрочная эффективность» производственной траектории (т. е. производственная траектория не может быть показана неэффективной путем изменения производственных планов для конечного числа случаев).

С помощью представленных выше соображений можно строго аргументировать существование цен Маленво в гладком случае. Доказательство для негладкого случая оказывается более сложным. Оно должно совмещать обращение к теореме о разделяющей гиперплоскости (для получения цен для усеченных горизонтов) с переходом к пределу по мере того, как горизонт устремляется до бесконечности. При незначительной технической предпосылке (называемой в литературе *несвязанностью*) подобная операция нахождения предела может быть осуществлена.

20.D. Равновесие: случай одного потребителя

В этом разделе мы сведем потребление и производство воедино и начнем изучение равновесия для межпериодного множества. Сначала рассмотрим случай одного потребителя. Как будет показано в разделе 20.G, применимость данной модели значительно превосходит область использования теории репрезентативного потребителя, представленной в главе 4.

Экономика характеризуется *краткосрочной технологией производства* $Y \subset \mathbb{R}^{2L}$, *функцией полезности* $u(\cdot)$, определенной на $\mathbb{R}^L_+$, *фактором дисконтирования* $\delta < 1$ и, наконец, (ограниченной) последовательностью *первоначальных запасов* $(w_0, \ldots, w_t, \ldots)$, $w_t \in \mathbb{R}^L_+$.

Мы предполагаем, что Y *удовлетворяет гипотезам* (1)–(4) раздела 20.C и что функция полезности $u(\cdot)$ *является строго вогнутой, дифференцируемой и имеет строго положительные предельные полезности на всей области определения*.

Цены заданы в виде последовательности $(p_0, \ldots, p_t, \ldots)$ с $p_t \in \mathbb{R}^L_+$. Как и в главе 19, мы можем интерпретировать эти цены как цены полной системы форвардных рынков, имеющие место одновременно при $t = 0$, или как рационально ожидаемые цены (текущая стоимость) последовательности рынков реального (наличного) товара. Далее мы будем рассматривать исключительно ограниченные последовательности цен. В основном будем предполагать $\|p_t\| \to 0$[9].

В соответствии с производственной последовательностью $(y_0, \ldots, y_t, \ldots)$, $y_t \in Y$, индуцированный поток потребления $(c_0, \ldots, c_t, \ldots)$ задается следующим образом:

$$c_t = y_{a,t-1} + y_{b,t} + w_t.$$

Если $c_t \geq 0$ для каждого t, то мы говорим, что траектория производства $(y_0, \ldots, y_t, \ldots)$ является *допустимой*: при заданном начальном потоке запасов траектория производства будет обеспечивать неотрицательное потребление в каждом из периодов.

Для удобства выкладок далее будем считать, что *все программы производства и потребительские потоки являются ограниченными*. Некоторые тонкости, возникающие в более общем случае, при рассмотрении базовой модели мы постараемся обойти. В качестве альтернативы мы могли бы просто предположить, что наша технология такова, что любая осуществимая производственная программа будет ограниченной.

При программе производства $(y_0, \ldots, y_t, \ldots)$ и ценах $(p_0, \ldots, p_t, \ldots)$, индуцированный поток прибылей $(\pi_0, \ldots, \pi_t, \ldots)$ задается в виде

[9] Будем иметь в виду, что цены понимаются как измеренные в текущем стоимостном эквиваленте.

$$\pi_t = p_t \cdot y_{bt} + p_{t+1} \cdot y_{at} \quad \text{для каждого } t.$$

Зафиксировав T и преобразовав условия $\sum_{t \le T} p_t \cdot c_t = \sum_{t \le T} p_t \times$ $\times (y_{a,t-1} + y_{bt} + w_t)$, получаем

$$\sum_{t \le T} (\pi_t + p_t \cdot w_t) - \sum_{t \le T} p_t \cdot c_t = p_{T+1} \cdot y_{aT}. \tag{20.D.1}$$

Выражение (20.D.1) является важным тождеством. Оно говорит о том, что *условие трансверсальности эквивалентно утверждению, что общая оценка потребления не может быть строго меньше богатства (т. е. не существует выхода, кроме как покупать власть и богатство на бесконечности*).

Теперь, так же как и в предыдущих главах, перейдем к определению равновесия Вальраса. Стоит лишь убедиться в том, что некоторые бесконечные суммы имеют смысл.

Определение 20.D.1. Траектория производства (ограниченная) $(y_0^*, \ldots, y_t^*, \ldots)$, $y_t^* \in Y$, и (ограниченная) последовательность цен $p = (p_0, \ldots, p_t, \ldots)$ представляют равновесие Вальраса (или *конкурентное равновесие*), если

(1) $c_t^* = y_{a,t-1}^* + y_{bt}^* + w_t \ge 0$ для всех t; (20.D.2)

(2) для каждого t

$$\pi_t = p_t \cdot y_{bt}^* + p_{t+1} \cdot y_{at}^* \ge p_t \cdot y_b + p_{t+1} \cdot y_a \tag{20.D.3}$$

для всех $y = (y_b, y_a) \in Y$;

(3) вектор потребления $(c_0^*, \ldots, c_t^*, \ldots) \ge 0$ решает задачу

$$\max \sum_t \delta^t u(c_t), \tag{20.D.4}$$

при $\sum_t p_t \cdot c_t \le \sum_t \pi_t + \sum_t p_t \cdot w_t$.

Условие (1) является требованием *допустимости*. Условие (2) является условием близорукой или краткосрочной максимизации прибыли и уже рассматривалось в разделе 20.C (определение 20.C.3). Форма бюджетного ограничения в части (3) заслуживает комментария. Отметим, во-первых, что имеется единственное бюджетное ограничение. Как и в главе 19, это относится к предположению *о полноте*, которое в одной из интерпретаций означает, что в период $t = 0$ для каждого товара существует форвардный рынок, а в другой — что активы (т. е. деньги) доступны и способны передавать покупательную способность во времени (см. пример 20.D.1). Во-вторых, строгая монотонность функции $u(\cdot)$ подразумевает, что при достижении максимума полезности совокупное богатство (обозначенное как w) будет конечным, т. е.

$$w = \sum_t \pi_t + \sum_t p_t \cdot w_t < \infty.$$

Более того, при равновесном потреблении бюджетное ограничение (20.D.4) должно выполняться как равенство.

Из последнего наблюдения вытекает важное следствие, заключающееся в том, что в условиях равновесия удовлетворяется условие трансверсальности. Формально мы имеем утверждение 20.D.1.

Утверждение 20.D.1. Предположим, что (ограниченная) траектория производства $(y_0^*, \ldots, y_t^*, \ldots)$ и (ограниченная) последовательность цен $(p_0, \ldots, p_t, \ldots)$ удовлетворяют условию равновесия Вальраса. Тогда выполнено условие трансверсальности $p_{t+1} \cdot y_{at}^* \to 0$.

Доказательство. Обозначим: $c_t^* = y_{a,t-1}^* + y_{bt}^* + w_t$. В соответствии с (20.D.1) имеем

$$\sum_{t \le T} (\pi_t + p_t \cdot w_t) - \sum_{t \le T} p_t \cdot c_t = p_{T+1} \cdot y_{aT}.$$

Поскольку каждая из сумм, стоящих слева от знака равенства, сходится к $w < \infty$ при $T \to \infty$, заключаем, что $p_{T+1} \cdot y_{aT}^* \to 0$. ■

Другим выводом из условия $w < \infty$ является возможность замены условия (2) в определении 20.D.1:

(2′) траектория производства $(y_0^*, \ldots, y_t^*, \ldots)$ максимизирует совокупную прибыль в том смысле, что для любой другой траектории производства $(y_0, \ldots, y_t, \ldots)$ и любого T имеем

$$\sum_{t=0}^{t=T} (p_t \cdot y_{bt} + p_{t+1} \cdot y_{at}) \le \sum_t (p_t \cdot y_{bt}^* + p_{t+1} \cdot y_{at}^*) < \infty.$$

Очевидно, что (2′) подразумевает (2) и (2) при $w < \infty$ подразумевает (2′) (см. упражнение 20.D.2). Таким образом, при равновесных ценах тесты на краткосрочную максимизацию и максимизацию совокупной прибыли совпадают. Может ли подобное утверждение быть сделано для соответствующей концепции миопикальной максимизации полезности? Далее мы исследуем этот вопрос.

Определение 20.D.2. Мы говорим, что поток потребления $(c_0, \ldots, c_t, \ldots)$ является *близоруко (или краткосрочно) максимизирующим* прибыль на бюджетном множестве, определяемом вектором цен $(p_0, \ldots, p_t, \ldots)$ и $w < \infty$, если полезность не может быть увеличена включением нового потока потребления, который просто передает покупательную способность в рамках двух последовательных периодов.

Ключевой факт представлен в упражнении 20.D.3.

Упражнение 20.D.3. Покажем, что поток потребления $(c_0, \ldots, c_t, \ldots) >> 0$ максимизирует мгновенную полезность при ценах $p = (p_0, \ldots, p_t, \ldots)$ при $w < \infty$, если и только если он удовлетворяет условию $\sum_t p_t \cdot c_t = w$ и следующим условиям первого порядка:

для каждого t существует $\lambda_t > 0$, такое что

$$\lambda_t p_t = \nabla u(c_t) \quad \text{и} \quad \lambda_t p_{t+1} = \delta \nabla u(c_{t+1}). \tag{20.D.5}$$

Из (20.D.5) следует, что $\lambda_t p_t = \nabla u(c_t)$ и $\lambda_{t-1} p_t = \delta \nabla u(c_t)$. Таким образом, $\lambda_{t-1} = \delta \lambda_t$ и $\lambda_0 = \delta^t \lambda_t$. Тогда при допущении, что $\lambda = \lambda_0$, мы видим, что (20.D.5) в действительности эквивалентно

$$\lambda p_t = \delta^t \nabla u(c_t) \text{ для всех } t \text{ и некоторых } \lambda. \tag{20.D.6}$$

Как только мы выяснили, что близорукая максимизация полезности на бюджетном множестве сводится к (20.D.6), мы можем проверить, что за этим последует максимизация совокупной полезности. Это показано в утверждении 20.D.2.

Утверждение 20.D.2. Если поток потребления $(c_0, \ldots, c_t, \ldots)$ удовлетворяет условию $\sum_t p_t \cdot c_t = w < \infty$ и условию (20.D.6), то полезность, максимизирующаяся на бюджетном множестве, определяется ценами $(p_0, \ldots, p_t, \ldots)$ и значением w.

Доказательство. Во-первых, отметим, что мы не можем улучшить поток потребления $(c_0, \ldots, c_t, \ldots)$ путем передачи покупательной способности в рамках ограниченного числа периодов. Действительно, (20.D.6) показывает, что достаточные условия первого порядка удовлетворены для любой такой задачи максимизации полезности.

Предположим теперь, что $(c'_0, \ldots, c'_t, \ldots)$ является потоком потребления, удовлетворяющим бюджетному ограничению и имеющим более высокую общую полезность. Тогда для достаточно большого T рассмотрим поток $(c''_0, \ldots, c''_t, \ldots)$, с $c''_t = c'_t$ для любого $t \leq T$ и $c''_t = c_t$ для любого $t > T$. Поскольку $\delta < 1$, существует такое значение $\varepsilon > 0$, что если T достаточно велико, то возможно увеличение полезности более чем на 2ε: от $(c_0, \ldots, c_t, \ldots)$ к $(c''_0, \ldots, c''_t, \ldots)$. Поскольку $w < \infty$, число $\sum_{t>T} |p_t \cdot (c_t - c'_t)|$ может быть произвольно мало. Следовательно, для большого значения T поток $(c''_0, \ldots, c''_t, \ldots)$ является почти допустимым в рамках бюджета.

Отсюда следует, что он может быть допустимым в рамках бюджета за счет незначительного снижения потребления в первом периоде, и результатом станет потеря полезности в объеме, не превышающем ε. В целом это по-прежнему приводит к улучшению. Но кроме того, это приводит и к противоречию, поскольку за ограниченное число периодов изменяется только потребление.

Пример 20.D.1. В этом примере показано использование условий (20.D.6) для вычисления равновесных цен. Предположим, что мы находимся в мире одного товара с функцией полезности $\sum_t \delta^t \ln c_t$. Имея вектор цен $(p_0, \ldots, p_t, \ldots)$ и благосостояние w, можно получить условие первого порядка максимизации полезности (20.D.6):

$$\lambda p_t = \frac{\delta^t}{c_t} \text{ для всех } t \quad \text{и} \quad \sum_t p_t c_t = w.$$

Отсюда $w = \sum_t p_t c_t = (1/\lambda) \sum_t \delta^t = (1/\lambda)[1/(1-\delta)]$ и, таким образом, $p_t c_t = \delta^t / \lambda = \delta^t (1-\delta) w$ для всех t. Отметим, что это подразумевает *постоянный уровень сбережений,* поскольку $p_T c_T \Big/ \left(\sum_{t \geq T} p_t c_t\right) = 1 - \delta$, для всех T (упражнение 20.D.4)[10].

[10] Логарифмические функции полезности облегчают вычисление и очень важны в прикладных расчетах. Но они не являются непрерывными и ограниченными ($\ln c_t \to -\infty$, так как

Теперь мы поговорим о трех возможных сценариях производства.

(1) Экономика обмена; т. е. возможность производить отсутствует и имеется только вектор начальных запасов $(w_0, \ldots, w_t, \ldots) >> 0$. Тогда равновесие должно подразумевать равенство $c_t^* = w_t$ для каждого t и, таким образом, при нормализации $\sum_t p_t w_t = 1$ равновесные цены будут равны

$$p_t = \frac{\delta^t(1-\delta)}{w_t} \text{ для каждого } t.$$

(2) Предположим теперь, что $w_0 = 1$ и $w_t = 0$ для $t > 0$. Однако существует линейная технология производства, которая преобразует каждую единицу затрат в период t в $\alpha > 0$ единиц выпускаемой в следующий момент $t + 1$ продукции. В силу ограниченности функции полезности потребление будет положительной величиной в каждый из периодов, и, следовательно, технология будет задействована в каждый период. Тогда линейность технологий позволяет сделать важный вывод о том, что вектор цен равновесия полностью определяется технологией. Полагая $p_0 = 1$, получим: $p_t = 1/\alpha^t$. Благосостояние равно $w = p_0 w_0 = 1$, и, таким образом, равновесное потребление должно быть равно: $c_t^* = [\delta^t(1-\delta)] / p^t = (\alpha\delta)^t(1-\delta)$. Отметим, что поскольку $1 \le \alpha < 1/\delta$, то и цена, и вектор потребления являются ограниченными. Отметим также тот интересный факт, что для этого примера мы можем вычислить равновесие без явного вычисления вектора инвестиционного капитала.

(3) Далее мы принимаем условия предыдущего примера (2) с единственным исключением, что производственная функция $F(k)$ трансформирует каждую единицу капитала k_t в момент t в $F(k_t)$ единиц выпуска в момент $t + 1$. Использование этого выпуска может быть различным; скажем, его используют либо в потреблении, либо в инвестиционных целях в момент $t + 1$. То есть $c_{t+1} = F(k_t) - k_{t+1}$. Логарифмическая форма функции полезности позволяет упростить вычисления равновесных цен. Предположим, что есть вектор равновесных цен $(p_0, \ldots, p_t, \ldots)$ и соответствующие ценам равновесия векторы потребления $(c_0^*, \ldots, c_t^*, \ldots)$ и капитала $(k_0^*, \ldots, k_t^*, \ldots)$. Тогда нам известно, что при любых T постоянная доля δ благосостояния инвестируется. То есть

$$p_{T+1}k_{T+1}^* = \delta\left(\sum_{t\ge T+1} p_t c_t^*\right) = \delta p_{T+1}F(k_t^*).$$

Таким образом, получаем: $k_{t+1}^* = \delta F(k_t^*)$ для каждого t. Начиная с $k_0 = w_0 = 1$ мы можем итеративно вычислить вектор инвестиционного капитала для состояния равновесия. Тогда вектор цен получается из условия максимизации прибыли $p_{t+1}F'(k_t^*) - p_t = 0$. ■

Поскольку равновесие Вальраса близоруко максимизирует прибыль и удовлетворяет условию трансверсальности (утверждение 20.D.1), согласно

$c_t \to 0$) и, более того, нарушают одно из наших поддерживающих предположений, что не влияет на текущий анализ, однако не стоит об этом забывать.

утверждению 20.C.1 оно является эффективным с точки зрения производства (примем $p_t >> 0$ для всех t). Можем ли мы усилить это до утверждения, что первая теорема благосостояния полностью выполняется? Проверим это. В текущем случае задачи одного потребителя Парето-оптимальность просто означает, что равновесие находится решением задачи максимизации полезности в условиях технологических ограничений и ограниченности дохода:

$$\max \sum_t \delta^t u(c_t), \tag{20.D.7}$$

$$\text{при } c_t = y_{a,t-1} + y_{bt} + w_t \geq 0 \text{ и } y_t \in Y \quad \text{для всех } t.$$

Утверждение 20.D.3. Любая траектория $(y_0^*, \ \dots, \ y_t^*, \ \dots)$ в равновесии Вальраса является решением задачи (20.D.7).

Доказательство. Пусть бюджетное множество B определено вектором равновесных цен Вальраса $(p_0, \dots, p_t, \dots)$ и благосостояние $w = \sum_t \pi_t + \sum_t p_t \cdot w_t$, где

$$\pi_t = p_t \cdot y_{bt}^* + p_{t+1} \cdot y_{a,t+1}^*$$

для всех t. То есть

$$B = \{(c_0', \ \dots, \ c_t', \ \dots) : c_t' \geq 0 \text{ для всех } t \text{ и } \sum_t p_t \cdot c_t' \leq w\}.$$

Согласно определению равновесия Вальраса, полезность от потока потребления $(c_0^*, \ \dots, \ c_t^*, \ \dots)$, определенного в соответствии с условием $c_t^* = y_{a,t-1}^* + y_{bt}^* + w_t$, достигает максимума на этом бюджетном множестве. Таким образом, достаточно показать, что любая доступная траектория $(y_0'', \ \dots, \ y_t'', \ \dots)$ (любая траектория, для которой $y_t'' \in Y$ и $c_t'' = y_{a,t-1}'' + y_{bt}'' + w_t \geq 0$ для всех t) должна генерировать поток потребления в B. Чтобы показать это, отметим, что для любых T

$$\sum_{t \leq T} p_t \cdot c_t'' = \sum_{t \leq T-1} (p_t \cdot y_{bt}'' + p_{t+1} \cdot y_{at}'') + p_T \cdot y_{bT}'' + \sum_{t \leq T} p_t \cdot w_t.$$

В соответствии с возможностью усечения планов производства имеем $(y_{bT}'', \ 0) \in Y$. Таким образом, за счет краткосрочной максимизации прибыли, получаем: $p_t \cdot y_{bT}'' \leq \pi_T$ и $p_t \cdot y_{bt}'' + p_{t+1} \cdot y_{at}'' \leq \pi_t$ для всех $t \leq T - 1$. Таким образом,

$$\sum_{t \leq T} p_t \cdot c_t'' \leq \sum_{t \leq T} \pi_t + \sum_{t \leq T} p_t \cdot w_t \leq w \text{ для всех } T,$$

которые удовлетворяют неравенству $\sum_t p_t \cdot c_t'' \leq w$. ■

Теперь обратимся к утверждению, обратному 20.D.3 (т. е. к вопросу второй теоремы благосостояния; см. главу 16): существует ли решение $(y_0, \dots, y_t, \dots)$ проблемы (20.D.7) при равновесии Вальраса? Ответ будет положительным, но соответствующие теоремы носят технический характер, так как для достижения слаженно работающей системы цен (т. е. системы цен, как мы ее понимаем: множества ненулевых цен) необходимо системное условие на траектории. Приведем пример одного из таких результатов[11].

Утверждение 20.D.4. Предположим, что (ограниченная) траектория производства $(y_0^*, \ldots, y_t^*, \ldots)$ решает проблему планирования (20.D.7) и что она дает строго положительное потребление (в том смысле, что, к примеру, $\varepsilon > 0$, $c_{lt} = y_{la,t-1}^* + y_{lbt}^* + w_{lt} > \varepsilon$ для всех значений l и t). Тогда траектория является равновесием по Вальрасу в отношении некоторых векторов цен $(p_0, \ldots, p_t, \ldots)$.

Доказательство. Мы приведем лишь схему доказательства. Подходящая система равновесных цен предложена в выражении (20.D.6):

$$p_t = \delta^t \nabla u(c_t^*) \text{ для всех } t,$$

где $c_t^* = y_{a,t-1}^* + y_{bt}^* + w_t$. Поскольку $(c_0^*, \ldots, c_t^*, \ldots)$ является ограниченной сверху и не достигает границы (равномерно по t), имеем: $\sum_t \|p_t\| < \infty$, что подразумевает условие трансверсальности. В свою очередь, согласно выражению (20.D.1), это приводит к $\sum_t p_t \cdot c_t^* = \sum_t (\pi_t + p_t \cdot w_t) = w < \infty$. Поэтому, согласно утверждению 20.D.2, выполняется условие максимизации полезности.

Остается установить, что выполняется также условие максимизации мгновенной прибыли. Чтобы доказать это, предположим обратное, т. е. что для некоторых T существует $y' \in Y$ и

$$p_T \cdot y_b' + p_{T+1} \cdot y_a' > p_T \cdot y_{bT}^* + p_{T+1} \cdot y_{aT}^* = \pi_T.$$

Пусть $(y_1', \ldots, y_t', \ldots)$ — производственная траектория с $y_t' = y'$ и $y_t' = y_t^*$ для любых $t \neq T$. Предположим, что $(c_0', \ldots, c_t', \ldots)$ — соответствующий поток потребления. Поскольку множество Y выпукло, а $(c_0^*, \ldots, c_t^*, \ldots)$ строго положительно, мы можем считать, что $y_T' = y'$ находится достаточно близко к y_T^*, для того чтобы иметь $c_t' \gg 0$ для всех t и, более того, чтобы сделать возможным определение знака выражения

$$\sum_t \delta^t \left(u\left(c_t'\right) - u\left(c_t^*\right)\right) = \delta^T \left(u\left(c_T'\right) - u\left(c_T^*\right)\right) + \delta^{T+1}\left(u\left(c_{T+1}'\right) - u\left(c_{T+1}^*\right)\right)$$

через оценку условия первого порядка

$$\begin{aligned}\delta^T \nabla u\left(c_T^*\right) \cdot \left(c_T' - c_T^*\right) + \delta^{T+1} \nabla u\left(c_{T+1}^*\right) \cdot \left(c_{T+1}' - c_{T+1}^*\right) &= \\ = p_T \cdot \left(y_{bT}' - y_{bT}^*\right) + p_{T+1} \cdot \left(y_{aT}' - y_{aT}^*\right) &= \\ = p_T \cdot y_{bT}' + p_{T+1} \cdot y_{aT}' - p_T \cdot y_{bT}^* - p_{T+1} \cdot y_{aT}^* &> 0.\end{aligned}$$

Но это заключение противоречит предположению о том, что $(y_0^*, \ldots, y_t^*, \ldots)$ является решением (20.D.7). ■

---

[11] Общая ситуация будет включать в себя, как и в разделах 15.C или 16.D, применение соответствующей версии (здесь бесконечномерной) теоремы о разделяющей гиперплоскости. Следующий результат обходит это, используя дифференцируемость функции полезности $u(\cdot)$. Таким образом, наблюдается параллель с обсуждением в разделе 16.F.

Тесная связь между равновесным решением и задачей планирования (20.D.7) влечет три важных вывода относительно существования, единственности и вычислимости равновесия соответственно.

Первый вывод заключается в том, что вопрос о *существовании* равновесия сводится к возможности решения единственной, хотя и бесконечномерной, оптимизационной задачи.

Утверждение 20.D.5. Предположим, что существует однородная граница потоков потребления, сгенерированная всеми допустимыми траекториями. Тогда задача планирования (20.D.7) имеет решение, т. е. существует допустимая траектория, которая позволяет получить полезность не меньшую, чем полезность, соответствующая любой другой допустимой траектории.

Доказательство, которое является чисто техническим и которое мы опустим, включает в себя утверждение о том, что в соответствующем бесконечномерном смысле целевая функция задачи (20.D.7) является непрерывной, а ограниченное множество — компактным.

Второй вывод касается *единственности* равновесия.

Утверждение 20.D.6. Задача планирования (20.D.7) имеет не более одного решения.

Доказательство. Доказательство состоит из обычных аргументов, показывающих, что максимум строго вогнутой функции на выпуклом множестве является единственным. Предположим, что $(y_0, \ldots, y_t, \ldots)$ и $(y'_0, \ldots, y'_t, \ldots)$ являются допустимыми траекториями с $\sum_t \delta^t u(c_t) = \sum_t \delta^t u(c'_t) = \gamma$, где $(c_0, \ldots, c_t, \ldots)$ и $(c'_0, \ldots, c'_t, \ldots)$ — потоки потребления, ассоциированные с двумя траекториями производства. Будем считать, что $y''_t = \frac{1}{2} y_t + \frac{1}{2} y'_t$. Тогда траектория $(y''_0, \ldots, y''_t, \ldots)$ является допустимой и при каждом t уровень потребления равен $c''_t = \frac{1}{2} c_t + \frac{1}{2} c'_t$. Однако $\sum_t \delta^t u(c''_t) \geq \gamma$, с нестрогим неравенством в случае $c_t \neq c'_t$ для некоторых t. Таким образом, если $c_t \neq c'_t$ для некоторых t, то траектории $(y_0, \ldots, y_t, \ldots)$, $(y'_0, \ldots, y'_t, \ldots)$ не могут быть решением (20.D.7). ■

Третий вывод заключается в том, что утверждение 20.D.3 обеспечивает общий подход к *вычислению* равновесия. Посвятим оставшуюся часть раздела изучению этой ситуации.

Вычисление равновесия и уравнения Эйлера

Будет удобно провести обсуждение вопросов вычислительного характера на примере 20.C.4 с $(N+1)$-секторной моделью. Напомним, что мы имеем N инвестиционных товаров, труд и потребительский товар. Мы фиксируем запасы труда на постоянном по времени уровне. Функция $G(k, k')$

задает общее количество потребляемого товара, достижимого в любой момент t, если инвестиции в основные товары в период $t - 1$ заданы вектором $k \in \mathbb{R}^N$, потребность в инвестициях в момент t равна $k' \in \mathbb{R}^N_+$, использование труда в моменты t и $t - 1$ фиксируется на экзогенно заданном начальным запасом уровне. Обозначим через $A \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ множество пар $(k, k') \in \mathbb{R}^{2N}$, сопоставимых с неотрицательным потреблением [т. е. $A = \{(k, k') \in \mathbb{R}^{2N}\colon G(k, k') \geq 0\}$]. Для удобства представим $u(G(k, k'))$ как $u(k, k')$. Мы считаем, что A выпукло и что $u(\cdot, \cdot)$ строго вогнута. Также при $t = 0$ существует несколько уже определенных значений инвестиционного капитала $\bar{k}_0$, которые определяют начальные запасы капитала в экономике.

В этой экономике задача планирования (20.D.7) выглядит как[12]

$$\max \sum\nolimits_t \delta^t u(k_{t-1},\ k_t), \tag{20.D.8}$$

$$\text{при } (k_{t-1}, k_t) \in A \text{ для каждого } t \text{ и } k_0 = \bar{k}_0.$$

Теперь будем полагать, что (20.D.8) имеет (ограниченное) решение. Вогнутость функции $u(\cdot, \cdot)$ обеспечивает единственность данного решения.

Для каждого $t \geq 1$ вектор переменных $k_t \in \mathbb{R}^N$ входит в целевую функцию (20.D.8) только через двойную сумму $\delta^t u(k_{t-1}, k_t) + \delta^{t+1} u(k_t, k_{t+1})$. Таким образом, дифференцируя по этим N переменным, получаем следующие необходимые условия для внутренней траектории $(k_0, \ldots, k_t, \ldots)$, которая является решением задачи (20.D.8)[13]:

$$\frac{\partial u(k_{t-1},\ k_t)}{\partial k'_n} + \delta \frac{\partial u(k_t,\ k_{t+1})}{\partial k_n} = 0 \qquad \text{для каждого } n \leq N \text{ и } t \geq 1.$$

В векторной форме:

$$\nabla_2 u(k_{t-1}, k_t) + \delta \nabla_1 u(k_t, k_{t+1}) = 0 \qquad \text{для каждого } t \geq 1. \tag{20.D.9}$$

Условие (20.D.9) известно как уравнения Эйлера для задачи (20.D.8).

Пример 20.D.2. Рассмотрим технологию Рамсея — Солоу из примера (20.C.1) (с $l_t = 1$ для всех t). Тогда $u(k, k') = u(F(k) - k')$ и $A = \{(k, k')\colon k' \leq F(k)\}$. Таким образом, уравнения Эйлера принимают форму

$$-u'(F(k_{t-1}) - k_t) + \delta u'(F(k_t) - k_{t+1})F'(k_t) = 0 \qquad \text{для всех } t \geq 1$$

или

$$\frac{u'(c_t)}{\delta u'(c_{t+1})} = F'(k_t) \text{ для всех } t \geq 1.$$

Иными словами, предельные полезности потребления при t или инвестирования и дополнительного потребления в период $t + 1$ равны. ■

---

[12] Для удобства мы принимаем $u(k_{-1}, k_0) = 0$.

[13] Выражение «внутренняя траектория» означает, что (k_t, k_{t+1}) является внутренним для множества A для всех t. Для интерпретации выражения вспомним также, что k_n и k'_n — аргументы функции $u(k, k')$, находящиеся на n-м месте и на $(N + n)$-м месте соответственно.

Пример 20.D.3. Рассмотрим технологию издержек приспособления из примера 20.C.2 (только, подобно примеру 20.D.2, мы зафиксируем $l_t = 1$ для всех t и исключим труд как экзогенно заданный параметр) и предположим, что мы имеем обычную фирму, которая пытается максимизировать бесконечную сумму дисконтированных прибылей через использование соответствующей инвестиционной политики. Выпуск может быть продан по постоянным и одинаковым для всех фирм ценам, что в совокупности с постоянной процентной ставкой дает представление о текущем значении фактора дисконтирования δ^t. Таким образом, задача формулируется теперь как задача о максимизации $\sum_t \delta^t[F(k_{t-1}) - k_t - \gamma(k_t - k_{t-1})]$. И уравнения Эйлера выглядят следующим образом:

$$-1 - \gamma'(k_t - k_{t-1}) + \delta[F'(k_t) + \gamma'(k_{t+1} - k_t)] = 0 \qquad \text{для всех } t \geq 1.$$

Иными словами, предельные издержки инвестиций в производственные мощности при t равны дисконтированной стоимости предельного продукта, произведенного при t, *плюс* предельные сбережения расходов на расширение мощностей в момент $t + 1$. Отметим, что, выполняя итерации с момента $t = 1$, мы получим

$$1 + \gamma'(k_1 - k_0) = \sum_{t \geq 1} \delta^t (F'(k_t) - 1).$$

Иными словами, при достижении оптимума издержки инвестиций в дополнительную единицу мощности при $t = 1$ равны дисконтированной сумме предельных продуктов *поддерживаемого* роста единицы производственной мощности[14]. Более подробное изложение см. в упражнении 20.D.5[15]. ■

Предположим, что траектория $(k_0, \ldots, k_t, \ldots)$ удовлетворяет уравнениям Эйлера (20.D.9). Из их определения и вогнутости функции полезности $u(\cdot, \cdot)$ следует, что уравнений Эйлера достаточно для гарантии того, что траектория не может быть повышена до траектории, связанной с изменениями в одном из k_t. На самом деле, то же верно и в случае, если изменения ограничены некоторым конечным числом периодов (см. упражнение 20.D.6). Таким образом, мы можем говорить, что уравнения Эйлера необходимы и достаточны для краткосрочной оптимизации. Тогда вопрос формулируется следующим образом: подразумевают ли уравнения Эйлера (или, эквивалентно, краткосрочная оптимизация) долгосрочную оптимизацию? Далее мы покажем, что ответ является утвердительным при выполнении свойства регулярности на траектории (в некоторой мере связанном с условием трансверсальности[16]).

[14] То есть дополнительные единицы мощностей, доступные при $t = 1$, производят $F'(k_1)$ при $t = 2$. Одна единица из этого количества посвящена дополнительным инвестициям при $t = 2$. При $t = 2$ чистые дополнительные мощности не меняются (начальные и конечные мощности при $t = 2$ распределены по одной единице), и поэтому корректировки издержек не происходит. Следовательно, чистый доход при $t = 2$ с точки зрения товара равен $F'(k_1) - 1$. Но не все это является доходом, так как дополнительная единица мощностей, доступная при $t = 2$, производит $F'(k_2)$ при $t = 3$ и т. д.

[15] Идея этого примера связана с известной в макроэкономике q-инвестиционной теории. См., к примеру, главу 2 (Blanchard, Fischer, 1989).

[16] Мы ссылаемся на иллюстрацию в примере 20.C.5 в силу необходимости требования регулярности.

Мы говорим, что траектория $(k_0, \ldots, k_t, \ldots)$ является *строго внутренней*, если она находится строго внутри границы области допустимой области A. [Точнее, траектория является строго внутренней, если существует такое значение $\varepsilon > 0$, что для каждого значения t найдется такая окрестность ε из (k_t, k_{t+1}), которая целиком лежит в A.]

Утверждение 20.D.7. Предположим, что траектория $(\bar{k}_0, \ldots, k_t, \ldots)$ ограниченная и строго внутренняя, а также удовлетворяет уравнениям Эйлера (20.D.9). Тогда она является решением задачи оптимизации (20.D.8).

Доказательство. Основной аргумент известен. Если $(\bar{k}_0, \ldots, k_t, \ldots)$ не является решением задачи (20.D.8), то существует достижимая траектория $(\bar{k}_0, \ldots, k'_t, \ldots)$, которая дает более высокую полезность. Для облегчения аргументации предположим, что эта траектория ограничена. Тогда, в силу вогнутости целевой функции, ограниченности $(\bar{k}_0, \ldots, k_t, \ldots)$ и ее строгой внутренней локализации мы можем считать, что для каждого t k'_t является столь близким к k_t, что $(k'_t, k_{t+1}) \in A$. Теперь мы можем принять T достаточно большим для $\sum_{t<T} \delta^t u(k'_{t-1}, k'_t) > \sum_{t<T} \delta^t u(k_{t-1}, k_t)$ и определить новую траекторию $(\bar{k}_0, \ldots, k''_t, \ldots)$, $k''_t = k'_t$ для $t \le T$ и $k''_t = k_t$ для $t > T$. Новая траектория допустима [отметим, что $(k'_T, k_{T+1}) \in A$]; она совпадает с $(\bar{k}_0, \ldots, k'_t, \ldots)$ до T и с $(\bar{k}_0, \ldots, k_t, \ldots)$ — после T. Более того, если T достаточно велико, она дает более высокую полезность, чем $(\bar{k}_0, \ldots, k_t, \ldots)$. Но это невозможно, поскольку, как уже указывалось ранее, уравнения Эйлера подразумевают краткосрочную оптимизацию, т. е. они являются условиями первого порядка для оптимизационной задачи, в которой мы ограничены только вариацией переменных, соответствующих конечному числу периодов (см. упражнение 20.D.6). ■

На этом этапе полезно ввести концепцию *функции значения* $V(k)$ и *функции стратегии* $\psi(k)$. При заданном начальном условии $k_0 = k$ максимальное значение, рассчитанное по (20.D.8), будет равно $V(k)$, и если траектория $(k_0, k_1, \ldots, k_t, \ldots)$ является (единственным) решением (20.D.8) при $k_0 = k$, то мы получаем $\psi(k) = k_1$. То есть $\psi(k) \in \mathbb{R}^N$ является вектором оптимальных инвестиционных уровней, или уровней капитала, при $t = 1$. Уровни капитала при $t = 0$ определяются k.

Значимость функции стратегии состоит в наблюдении, что если траектория $(\hat{k}_o, \ldots, \hat{k}_t, \ldots)$ является решением (20.D.8) для $k_0 = \hat{k}_0$, то для любых T траектория $(\hat{k}_T, \ldots, \hat{k}_{T+t}, \ldots)$ является решением (20.D.8) при $k_0 = \hat{k}_T$. Таким образом, если $(k_0, \ldots, k_t, \ldots)$ — решение для (20.D.8), то выполняется равенство

$$k_{t+1} = \psi(k_t) \text{ для каждого } t \tag{20.D.10}$$

и оптимальная траектория может быть рассчитана на основе k_0 и функции стратегии $\psi(\cdot)$. Но как определить $\psi(\cdot)$? Представим два подхода к расчету $\psi(\cdot)$. В первом будут использованы уравнения Эйлера; во втором будет использован метод *динамического программирования*.

Уравнения Эйлера (20.D.9) предлагают итерационную процедуру расчета $\psi(k)$. Зафиксируем $k_0 = k$ и рассмотрим уравнения, соответствующие k_1. Зададим k_0, получим N уравнений с $2N$ неизвестными, $k_1 \in \mathbb{R}^N$, $k_2 \in \mathbb{R}^N$. Таким образом, имеем N степеней свободы. Предположим, что мы пытаемся зафиксировать k_1 произвольно [точно так же мы пытаемся зафиксировать предельные издержки инвестиций $-\nabla_2 u(k_0, k_1)$ при $t = 1$] и после этого использовать N уравнений Эйлера при $t = 1$ для нахождения оставшихся k_2 неизвестных [аналогично мы уточним условия для инвестиций при $t = 2$ таким образом, что дисконтированные предельные инвестиционные вознаграждения при $t = 1$, $\delta\nabla_1 u(k_1, k_2)$ и будут равны предварительно определенным предельным инвестиционным издержкам при $t = 1$, т. е. $-\nabla_2 u(k_0, k_1)$]. Предположим, что такое решение для k_2 найдено [при строгой вогнутости функции $u(\cdot)$, если существует решение, то оно должно быть единственным]. Затем мы можем повторить процедуру. N уравнений Эйлера для периода 2 теперь точно определены: оба k_1 и k_2 заданы, но имеются еще N переменных k_3, соответствующие $t = 3$, с которыми мы можем попытаться уравновесить N условий периода 2. Предположим, что мы повторяем процедуру. Тогда существует три возможности. Первая — процесс где-то нарушается, т. е. при k_{t-1} и k_t решения k_{t+1} не существует [или, точнее, не существует решения с $(k_t, k_{t+1}) \in A$]; вторая возможность — это когда мы генерируем последовательность, которая не ограничена (или не является строго внутренней); третья возможность — это когда мы генерируем ограниченную (и строго внутреннюю) последовательность $(k_0, k_1, \ldots, k_t, \ldots)$. В третьем случае, согласно утверждению 20.D.7, мы достигаем оптимума и с учетом утверждения 20.D.6 этот оптимум является единственным, откуда заключаем, что при *заданном* k_0 *третья возможность (траектория, начинающаяся при* k_0 *и* k_1*, является ограниченной и строго внутренней) может иметь место самое большее при одном значении* k_1. *Если это происходит, то значение* k_1 *в точности является значением функции стратегии* $\psi(k_0)$. Таким образом, расчетный метод является следующим: решение разностного уравнения, порождаемого уравнениями Эйлера с начальными условиями (k_0, k_1) и затем поиск для фиксированного k_0 начального условия k_1, генерирующего ограниченную бесконечную траекторию.

Пример 20.D.4. Рассмотрим модель Рамсея — Солоу с линейной технологией $F(k) = 2k$ и функцией полезности $\sum_t (1/2)^t \ln c_t$. Тогда $u(k_{t-1}, k_t) = \ln(2k_{t-1} - k_t)$ и уравнение Эйлера для периода t записывается (см. упражнение 20.D.7) в виде

$$k_{t+1} = 3k_t - 2k_{t-1}.$$

Это разностное уравнение имеет решение $k_t = k_0 + (k_1 - k_0)(2^t - 1)$. Если $k_1 < k_0$, то k_t в конце концов принимает отрицательное значение. Если $k_1 > k_0$, то тогда k_t не ограничено. Только одна оценка k_1 генерирует ограниченное k_t — это $k_1 = k_0$. Таким образом, $\psi(k_0) = k_0$ для любого k_0. Полезно проверить, что произойдет, если $k_1 \geq k_0$. Тогда траектория, индуцированная разностным уравнением, является допустимой, и в действительности мы имеем постоянный уровень потребления $c_t = 2k_{t-1} - k_t = 2k_0 - k_1$. Таким образом, для $k_1 > k_0$ имеем пример траектории, совместимой с уравнениями Эйлера. Но траектория при этом не является оптимальной, поскольку при $k_1 = k_0$ мы получаем более высокий уровень постоянного потребления[17]. ■

Подход динамического программирования использует рекурсивность оптимизационной задачи (20.D.8), а именно тот факт, что

$$V(k) = \max_{k' \text{ при } (k,\, k') \in A} u(k,\ k') + \delta V(k'), \tag{20.D.11}$$

и получает $\psi(k)$ как вектор k', который является решением (20.D.11). Это, конечно, только трансформирует задачу в одну из задач расчета значения функции $V(\cdot)$. Однако становится очевидным, что, во-первых, с учетом некоторых общих условий [к примеру, если функция $V(\cdot)$ ограничена] только функция значения удовлетворяет (20.D.11), когда последнее рассматривается как функциональное уравнение. То есть $V(\cdot)$ является единственной функцией, для которой (20.D.11) справедливо при каждом значении k. И во-вторых, существует несколько хорошо известных и достаточно эффективных алгоритмов решения уравнений, подобных (20.D.11), для неизвестной функции $V(\cdot)$. (См. раздел M.M математического приложения).

Мы заканчиваем этот раздел двумя следствиями из определения значения функции (см. упражнение 20.D.8):

(1) *Функция значения $V(k)$ является вогнутой.*

(2) *Для каждого параметра вариации $z \in \mathbb{R}^N$ при $(k + z, \psi(k)) \in A$ мы имеем*

$$V(k + z) \geq u(k + z, \psi(k)) + \delta V(\psi(k)). \tag{20.D.12}$$

Предположим, что $N = 1$ и $(k, \psi(k))$ является внутренним для A. Для дальнейших ссылок укажем, что из условий (1), (2) и $V(k) = u(k, \psi(k)) + \delta V(\psi(k))$ мы получаем

$$V'(k) = \nabla_1 u(k, \psi(k))$$

и, если $V(\cdot)$ дважды дифференцируема, то

$$V''(k) \geq \nabla^2_{11} u(k, \psi(k))$$

(см. рис. 20.D.1 и упражнение 20.D.9[18]).

[17] Отсюда заключаем, что при $k_t > k_0$ уравнения Эйлера приводят к перенакоплению капитала. Мы отмечаем, что без дальнейшей разработки, которая задает траекторию, удовлетворяющую уравнениям Эйлера, мы можем использовать уравнения как таковые для определения последовательности краткосрочных опорных цен. Однако если $k_1 > k_0$, то такая последовательность нарушит условие трансверсальности.

[18] $\nabla^2_{ij} f(\cdot)$ обозначает вторую производную функции стоимости $f(\cdot)$ по ij.

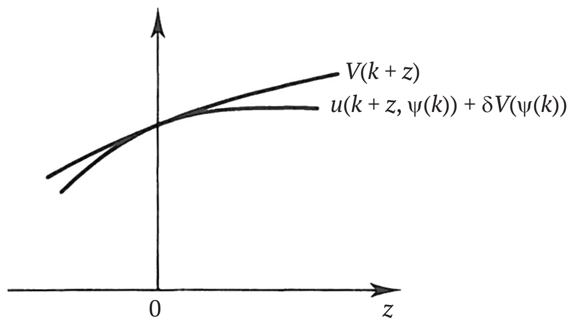


Рис. 20.D.1. Вдоль оптимальной траектории значение функции ограничено сверху полезностями одноопериодных корректировок

20.E. Стационарные траектории, процентные ставки и золотые правила

В этом разделе мы обратимся к изучению стационарных состояний, которое необходимо, чтобы сделать первые шаги в анализе равновесия динамических траекторий. Для дальнейшего анализа устойчивых состояний отсылаем вас к работам (Bliss, 1975; Gale, 1973; Weizsacker, 1971).

Начнем с производственного множества $Y \subset \mathbb{R}^{2L}$, удовлетворяющего свойствам, рассмотренным в разделе 20.C. Напомним, что производственная траектория является последовательностью $(y_0, \ldots, y_t, \ldots)$ с $y_t \in Y$ для каждого t.

Определение 20.E.1. Производственная траектория $(y_0, \ldots, y_t, \ldots)$ находится в стационарном, или устойчивом, состоянии, если существует производственный план $\bar{y} = (\bar{y}_b, \bar{y}_a) \in Y$, такой что $y_t = \bar{y}$ для всех $t > 0$.

Допуская небольшую терминологическую неточность, будем вместо выражения «стационарная траектория $(\bar{y}, \ldots, \bar{y}, \ldots)$» говорить просто «стационарная траектория $\bar{y}$».

Первое важное наблюдение — стационарные траектории, которые *являются эффективными,* обеспечиваются пропорциональными ценами[19]. Это показано в утверждении 20.E.1.

Утверждение 20.E.1. Предположим, что $\bar{y} \in Y$ определяет стационарную и эффективную траекторию. Тогда существуют вектор цен $p_0 \in \mathbb{R}^L$ и $\alpha > 0$, такие что траектория максимизирует мгновенную прибыль для последовательности цен $(p_0, \alpha p_0, \ldots, \alpha^t p_0, \ldots)$.

Доказательство. Полное доказательство является слишком сложным с технической точки зрения, но основное интуитивное по-

[19] Для устранения возможного непонимания мы предупреждаем, что установление неэффективности данной стационарной траектории потребует рассмотрения нестационарных траекторий.

нимание можно получить при рассмотрении ситуации, когда производственные множества имеют гладкие границы. Для такого случая можно показать, что *каждая* последовательность (близоруко) опорных цен должна быть пропорциональной.

Из-за того что траектория $(\bar{y}, \ldots, \bar{y}, \ldots)$ является эффективной, вектор $\bar{y}$ обязан лежать у границы Y. Пусть $\bar{q} = (\bar{q}_0, \bar{q}_1)$ является единственным (с точностью до нормализации) вектором, перпендикулярным Y в $\bar{y}$. Тогда, в соответствии с результатами, приведенными в конце раздела 20.C, существует последовательность цен $(p_0, \ldots, p_t, \ldots)$, которая является опорной для данной эффективной траектории. Поскольку $\bar{y} \in Y$ максимизирует мгновенную прибыль при каждом t, мы обязаны для некоторого $\lambda_t > 0$ иметь $(p_t, p_{t+1}) = \lambda_t(\bar{q}_0, \bar{q}_1)$. Таким образом, $p_t = \lambda_t\bar{q}_0$ и $p_{t+1} = \lambda_1\bar{q}_1$ для всех t. В частности, $p_t = \lambda_{t-1}\bar{q}_1$ и $p_{t+1} = \lambda_{t+1}\bar{q}_0$. Объединяя, получаем: $p_{t+1} = (\lambda_t/\lambda_{t-1})p_t$ и $p_{t+1} = (\lambda_{t+1}/\lambda_t)\mathrm{p}_t$. Отсюда $\lambda_t/\lambda_{t-1} = \lambda_{t+1}/\lambda_t$ для всех $t \geq 1$. В результате, обозначая это частное через α, получаем: $p_{t+1} = \alpha p_t = \alpha^2 p_{t-1} = \ldots = \alpha^{t+1}p_0$.

Параметр α имеет простую интерпретацию. Действительно, $r = (1 - \alpha)/\alpha$ [так что $p_t = (1 + r)p_{t+1}$] может рассматриваться как внутренняя *процентная ставка* для последовательности цен (см. упражнение 20.F.1).

Утверждение 20.E.1 является результатом, аналогичным второй теореме благосостояния для стационарных траекторий. Мы можем также провести параллель с первой теоремой благосостояния. А именно предположим, что $(\bar{y}, \ldots, \bar{y}, \ldots)$ является стационарной траекторией, миопикально опирающейся на пропорциональную ценовую последовательность с процентной ставкой r. Если $r > 0$, то $p_t = (1/(1 + r))^t p_0 \to 0$ и, таким образом, условие трансверсальности $p_t \cdot \bar{y}_a \to 0$ удовлетворено. Основываясь на утверждении 20.C.1, мы заключаем, что траектория является эффективной. Если $r \leq 0$, то условие трансверсальности не выполнено (p_t не стремится к нулю), но это не влечет автоматически вывода о неэффективности, так как условие трансверсальности является достаточным, но не необходимым для эффективности. Предположим, что $r < 0$, и для простоты пусть это вновь будет гладкий случай. Рассмотрим потенциально стационарные траектории, определенные при постоянном производственном плане $\bar{y}_\varepsilon = (\bar{y}_b + \varepsilon e, \bar{y}_a - \varepsilon e)$, где $e = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^L$. Для данной траектории при $t = 0$ затраты меньше (или выпуск больше), а вектор чистых затрат — выпуска при каждом значении t точно такой же. Более того, если для некоторых значений $\varepsilon > 0$ траектория-кандидат является допустимой траекторией, т. е. если $\bar{y}_\varepsilon \in Y$, то стационарная траектория $\bar{y}$ не является эффективной (происходит перенакопление). Но если множество Y имеет гладкую границу при $\bar{y}$, допустимость $\bar{y}_\varepsilon$ для некоторых значений $\varepsilon > 0$ можно протестировать, установив, действительно ли $\bar{y}_\varepsilon - \bar{y} = \varepsilon(e, \ -e)$ лежит ниже гиперплоскости, определяемой опорными ценами $(p_0,\ [1/(1+r)]p_0)$. Оценивая данное выражение, мы получим: $\varepsilon(1 - 1/(1+r))p_0 \cdot \varepsilon < 0$, так как $r < 0$. Заключение: для достаточно небольших ε стационарная траектория $\bar{y}$ доминируется стационарной траекторией $\bar{y}_\varepsilon$. Запомним данные факты, чтобы использовать их в утверждении 20.E.2 в качестве ссылки.

Утверждение 20.E.2. Предположим, что стационарная траектория $(\bar{y},\ \ldots,\ \bar{y},\ \ldots)$, $\bar{y} \in Y$, близоруко опирается на пропорциональные цены с процентной ставкой r. Тогда траектория является эффективной, если $r > 0$, и неэффективной, если $r < 0$.

Мы не рассматривали случай $r = 0$, который, как мы сейчас увидим, очень важен[20]. Рассмотрев более специфический пример, мы убедимся, что эффективность достигается и в этом случае.

Обратимся теперь к потреблению и рассмотрим *стационарные равновесные траектории*. Если мы допускаем дифференцируемость и внутренний характер, то стационарный путь $(\bar{y},\ \ldots,\ \bar{y},\ \ldots)$, который находится в равновесном состоянии, может опираться только на ценовую последовательность $p_t = \delta^t \nabla u(\bar{c})$, где $\bar{c} = \bar{y}_b + \bar{y}_a$ (с точностью до нормализации); вспомним утверждение 20.D.4 и выражение (20.D.6). То есть *стационарное равновесие на основе пропорциональных цен, отражающих фактор пропорциональности, равный фактору дисконтирования δ или, что то же самое, процентной ставке $r = (1 - \delta)/\delta$.*

Определение 20.E.2. Стационарный производственный путь, который миопикально опирается на пропорциональные цены $p_t = \alpha^t p_0$ с $\alpha = \delta$, называется *путем модифицированного золотого правила*. Стационарный производственный путь на основе постоянных цен $p_t = p_0$, называется *траекторией золотого правила*.

В зависимости от технологии и фактора дисконтирования δ может найтись единственный или несколько модифицированных траекторий золотого правила (см. небольшое обсуждение в конце этого раздела). Но в любом случае, как мы только что видели, *траектория стационарного равновесия представляет собой путь модифицированного золотого правила.* Таким образом, мы приходим к важному выводу о том, что *кандидаты на стационарные равновесные траектории $(\bar{y},\ \ldots,\ \bar{y},\ \ldots)$ полностью определены технологией и фактором дисконтирования и не зависят от функции полезности $u(\cdot)$.*

[20] Отметим, что 0 является имплицитным уровнем роста на траектории $(\bar{y},\ \ldots,\ \bar{y},\ \ldots)$. В более общем случае мы могли бы допустить технологию с постоянным ростом и пропорциональный производственный план (необязательно стационарный). Тогда утверждение 20.E.2 сохранило бы справедливость при равенстве соответствующего темпа роста нулю.

Для проведения анализа значительно удобнее будет перейти к более частному случаю. Рассмотрим предельно простой случай технологии в рамках модели Рамсея — Солоу (Ramsey–Solow) из примера 20.C.1. Будем изучать траектории при $l_t = 1$ для всех t (представим, что в любой момент времени доступна одна единица труда). Тогда мы можем идентифицировать производственную траекторию с последовательностью инвестиций капитала $(k_0, \ldots, k_t, \ldots)$.

Зная $(k_0, \ldots, k_t, \ldots)$, введем обозначение: $r_t = \nabla_1 F(k_t, 1) - 1$. Таким образом, r_t является *чистой* (т. е. после замены капитала) *предельной производительностью капитала*. Предположим, что $k_t > 0$ и что последовательность цен выпусков $(q_0, \ldots, q_t, \ldots)$ и заработных плат $(w_0, \ldots, w_t, \ldots)$ служит близорукими опорными ценами для данной производственной траектории. Тогда, согласно условию первого порядка для максимизации прибыли, имеем: $q_{t+1}(1 + r_t) - q_t = 0$. Таким образом, r_t является нормой доходности в период t, неявно представленной в векторе цен $(q_0, \ldots, q_t, \ldots)$.

Теперь сосредоточим внимание на стационарных траекториях. Любое $k \geq 0$, зафиксированное во времени, представляет собой *стационарное состояние*. С любым таким устойчивым состоянием мы можем ассоциировать постоянный излишек $c(k) = F(k, 1) - k$ и норму доходности инвестиций $r(k) = \nabla_1 F(k, 1) - 1$, также постоянную во времени[21]. Таким образом, последовательность опорных цен — зарплат выглядит следующим образом:

$$(q_t,\ w_t) = \left(\frac{1}{1 + r(k)}\right)^t (q_0,\ w_0), \qquad \text{с } \frac{w_0}{q_0} = \frac{\nabla_2 F(k,\ 1)}{\nabla_1 F(k,\ 1)}.$$

Обозначим через $w(k)$ реальные заработные платы w_0/q_0. Представляется полезным проанализировать, каким образом стационарные значения потребления $c(k)$, процентные ставки $r(k)$ и зарплаты $w(k)$ зависят от k.

Пусть $\bar{k}$ — уровень капитала, при котором достигается максимум потребления в устойчивом состоянии [т. е. $\bar{k}$ решает задачу $\max F(k, 1) - k$]. Отметим, что $\bar{k}$ характеризуется нормой доходности $r(\bar{k}) = \nabla_1 F(\bar{k}, 1) - 1 = 0$. Таким образом, $\bar{k}$ в точности является устойчивым состоянием *золотого правила*. Конструкция проиллюстрирована на рис. 20.E.1, где также представлено модифицированное золотое правило k_δ [характеризуемое нормой доходности $r(k_\delta) = \nabla_1 F(k_\delta, 1) - 1 = (1 - \delta)/\delta$]. Проследим за тем, что если $k < \bar{k}$, то $r(k) > 0$. Как мы видели в утверждении 20.E.2, $r(k) > 0$, что подразумевает эффективность устойчивого состояния k (т. е., в частности, модифицированное золотое правило является эффективным: оно дает меньший объем потребления, чем золотое правило, но при этом также расходуется меньше капитала). Подобно этому, если $k > \bar{k}$, то $r(k) < 0$ и мы получаем неэффективное устойчивое состояние k. Что же можно сказать относительно $\bar{k}$[22]?

[21] То есть $c(k)$ — количество блага, постоянно доступного и используемого в качестве потока, направляемого на цели потребления.

[22] Вспомним, что последовательность ассоциированных цен является постоянной и условие трансверсальности нарушается.

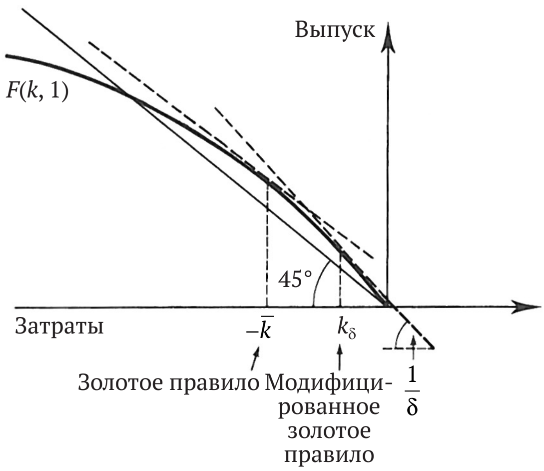


Рис. 20.E.1. Производственная технология в модели Рамсея — Солоу и золотое правило

Мы утверждаем, что *стационарное* состояние *золотого правила* $\bar{k}$ *является эффективным*. Самым быстрым будет графическое доказательство. Предположим, что мы пытаемся доминировать над постоянной траекторией $\bar{k}$, начиная с $k_0 < \bar{k}$ таким образом, что потребление при $t = 0$ растет. Поскольку превышение потребления в момент $t = 1$ обязательно должно составлять по меньшей мере $c(\bar{k})$, лучшее, что можно ожидать, — это

$$k_1 = F(k_0,\ 1) - c(\bar{k}) = F(k_0,\ 1) - k_0 + k_0 - c(\bar{k}) < k_0,$$

потому что $F(k_0,\ 1) - k_0 < c(\bar{k})$. Эта новая, лучшая из возможных оценка k_1 представлена на рис. 20.E.2, где также можно видеть, что, поскольку процесс определения k_1 повторяется при определении k_2, k_3 и т. д., мы получаем в некоторый момент $k_t < 0$. Следовательно, траектория недопустима,

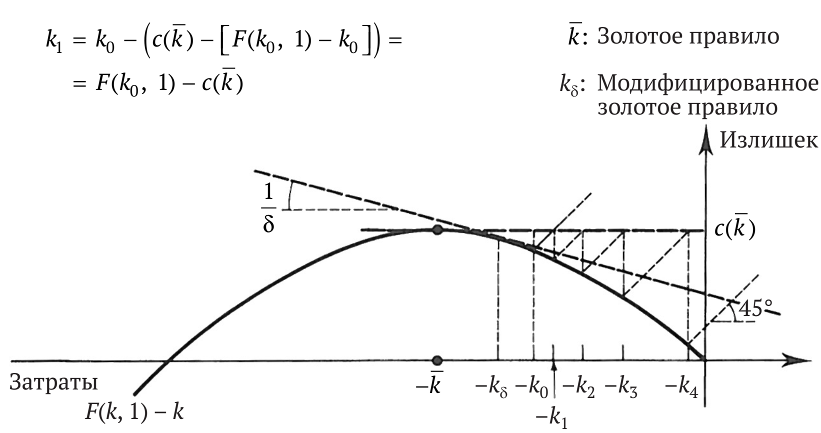


Рис. 20.E.2. Модель Рамсея — Солоу: золотое правило эффективно

и мы приходим к заключению, что постоянное $\bar{k}$ не может быть доминируемым с точки зрения эффективности: попытки использовать меньший объем капитала неминуемо приведут к истощению капитала в ограниченном временном периоде.

Из формы производственной функции немедленно следуют следующие три «неоклассических» свойства (они будут доказываться в упражнении 20.E.4):

(1) Так как k растет, уровень потребления $c(k)$ монотонно возрастает до уровня золотого правила, а затем монотонно снижается.

(2) Норма доходности $r(k)$ монотонно снижается в соответствии с уровнем капитала k.

(3) Реальный уровень вознаграждения за труд $w(k)$ монотонно возрастает одновременно с ростом капитала. (Для допустимости этого свойства следует также полагать, что производственная функция $F(k, l)$ однородна первой степени.)

Изучение стабильных состояний в рамках модели Рамсея — Солоу научило нас по меньшей мере шести новым вещам. Первое: норма доходности равна чистой предельной производительности капитала; второе: золотое правило (т. е. нулевая норма доходности) пути характеризуется, среди прочих стабильных состояний, тем, что потребление достигает максимума; третье: золотое правило является эффективным; четвертое, пятое и шестое — это три неоклассических свойства.

Насколько общими являются эти утверждения? То есть можем ли мы использовать их для случая более общей модели с любым количеством товаров? Если коротко, ответ заключается в следующем: три неоклассических свойства могут нарушаться в ситуации с несколькими капитальными активами, но остальные три свойства, должным образом проинтерпретированные, остаются верными для более общих моделей. Попытка доказать это приведет нас к слишком сложному материалу [см. (Bliss, 1975; Brock, Burmeister, 1976)], но, возможно, нам удастся привлечь интуицию.

Предположим, что мы рассматриваем общую $(N + 1)$-секторную технологию из примера 20.C.4. То есть $G(k, k')$ является некоторым количеством потребляемого товара, доступного в любой период, если $k \in \mathbb{R}^N$ является вектором уровней капитала, используемым в предыдущий период, и инвестиции, необходимые в этот период, равны $k' \in \mathbb{R}^N$ (мы также считаем, что $l_t = 1$ для всех t). На стационарной траектории имеем $k' = k$. Обозначим через $\hat{G}(k) = G(k,\ k)$ уровень потребления, ассоциированный с устойчивым состоянием k. Если $G(\cdot, \cdot)$ является вогнутой функцией, то и функция $\hat{G}(\cdot)$ является таковой. В частности, $\nabla\hat{G}(k) = 0$ характеризует устойчивое состояние с максимальным уровнем потребления.

Рассмотрим устойчивое состояние k. Согласно утверждению 20.E.1, это устойчивое состояние миопикально опирается на пропорциональный вектор цен $s_t \in \mathbb{R}$, $q_t \in \mathbb{R}^N$. Здесь s_t является ценой потребительского товара в период t и q_t является вектором цен инвестиций в период t. Поскольку присутствует пропорциональность, мы имеем такое значение $r(k)$, что $s_t = (1 + r(k))s_{t+1}$, $q_t = (1 + r(k))q_{t+1}$ для всех t. При максимизации прибыли

$$\nabla_1 G(k,\ k) = \frac{1}{s_t} q_{t-1} \text{ и } \nabla_2 G(k,\ k) = -\frac{1}{s_t} q_t \qquad \text{для всех } t \tag{20.E.1}$$

(вам предлагается проверить это в упражнении 20.E.5). Таким образом,

$$\nabla\hat{G}(k) = \nabla_1 G(k,\ k) + \nabla_2 G(k,\ k) = \frac{1}{s_t}(q_{t-1} - q_t) = \frac{r(k)}{s_t} q_t,$$

т. е. в любой момент времени *дополнительная сумма инвестированных долларов в постоянный рост любого капитального актива дает* $r(k)$ *долларов дополнительной стоимости (постоянного) потребления*. В этом более точно сформулированном смысле уровень процентной ставки измеряет предельную производительность капитала. Мы вновь видим, что $\nabla\hat{G}(k) = 0$ (необходимое и достаточное условие максимизации потребления в стационарном состоянии) эквивалентно $r(k) = 0$. Таким образом, золотое правило формулируется следующим образом: уровень k в стационарном состоянии дает максимальное потребление на множестве устойчивых состояний, если и только если соответствующая процентная ставка равна нулю. Также мы можем показать, что траектория золотого правила является эффективной.

Как мы уже упоминали, неоклассические свойства не переносятся на общую ситуацию. Сложности могут возникнуть, если даже $N = 1$, т. е. для двухсекционной модели из примера 20.C.3. На рис. 20.E.3 представлены уровни кривой $G(k, k')$. Устойчивые уровни соответствуют диагонали, где $k = k'$. Каждый устойчивый уровень k миопически опирается на пропорциональные цены $q_t = (1 + r(k))q_{t+1}$, где для обеспечения максимизации прибыли отношение q_t/q_{t+1} должно быть равно наклону уровня кривой, проходящей через (k, k) (вам предлагается проверить это в упражнении 20.E.6). Таким образом, эффективные устойчивые состояния с $r(k) \geq 0$ соответствуют подмножеству диагоналей, которые идут от начала координат до золотого правила, при котором $r(\bar{k}) = 0.$ В особом случае модели Рамсея — Солоу имеем: $G(k, k') = F(k, 1) - k'$, и, таким образом, уровень кривых $G(k, k')$ допускает квазилинейное представление в отношении k' (т. е. они могут быть получены одна из другой параллельным переносом вдоль оси k'). В упражнении 20.E.7 вас просят показать, что это гарантирует удовлетворение неоклассических свойств. В целом, однако, из рис. 20.E.3 очевидно, что мы можем, к примеру, иметь два различных $\hat{k},\ \tilde{k} < \bar{k},$ такие что по диагонали соответствующий уровень кривых имеет такой же наклон и поэтому $r(\hat{k}) = r(\tilde{k})$ (что противоречит второму неоклассическому свойству). В частности, пока золотое пра-

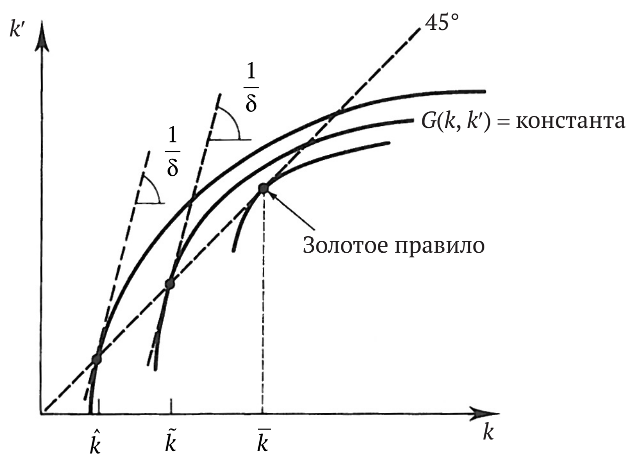


Рис. 20.E.3. Пример с несколькими модифицированными золотыми правилами

вило является единственным (если функция $G(k, k')$ является строго вогнутой), существует несколько модифицированных золотых правил (это случай, если, скажем, фактор дисконтирования δ равен процентной ставке $r(\hat{k})$).

20.F. Динамика

В этом разделе мы представляем несколько наблюдений по широкому кругу свойств динамического равновесия. Базовая модель остается такой же, как и в предыдущем разделе: экономика одного потребителя со стационарной технологией и полезностью.

Произвольно заданные начальные условия[23], как правило, не будут совместимы с ситуацией стационарного равновесия (т. е. уровень устойчивого состояния капитала может быть выше, чем первоначально доступный капитал). Таким образом, как правило, равновесная траектория не будет стационарной. Насколько сложным может быть динамическое равновесие? Можем ли мы, к примеру, надеяться на приближение к модифицированному золотому правилу? Это было бы приятно, так как это говорило бы нам, что наши модели обладают определенным долгосрочным предсказательным потенциалом.

Ответы на поставленные вопросы мы можем получить, рассматривая модификацию двухсекторной модели из примера 20.C.3. Мы полагаем, что технология преобразует труд и капитал в потребительские товары (возможно, более чем одного типа). В качестве первоначального запаса в каждом периоде потребитель имеет одну единицу труда, и мы считаем, что $u(k, k')$ — максимальная полезность, которая может достигаться в какой-либо период, если в предыдущий период $k \in \mathbb{R}$ единиц капитала были использованы и требуемый уровень текущих инвестиций равен k' (и в оба этих периода используется по одной единице труда). Функция полезности $u(\cdot, \cdot)$ является строго вогнутой и дифференцируемой, и в начальном периоде имеется ненулевой запас капитала.

Из утверждений 20.D.3 и 20.D.4 нам известно, что равновесные траектории могут быть определены следующей постановкой задачи:

$$\max \sum_t \delta^t u(k_{t-1},\ k_t) \tag{20.F.1}$$
$$\text{при } k_t \geq 0 \text{ и } k_0 = k.$$

Предположим, что $V(k)$ и $\psi(k)$ являются соответственно значением функции и функции стратегии для данной задачи (20.F.1). Эти концепции были введены в разделе 20.D. Как было показано, динамическое равновесие определяется последовательной итерацией функции стратегии (см. выражение 20.D.10). То есть, приняв k_0, получаем равновесную траекторию

$$(k_0, k_1, k_2, \ldots) = (k_0, \psi(k_0), \psi(\psi(k_0)), \ldots).$$

[23] То есть последовательность начального вклада $(w_0, \ldots, w_t, \ldots)$.

Отметим, что постоянная траектория $(\bar{k}, \ldots, \bar{k}, \ldots)$ является устойчивой траекторией (для $k_0 = \bar{k}$) и поэтому является таковой и для модифицированной равновесной траектории, подчиняющейся золотому правилу, с фактором дисконтирования δ (см. определение 20.E.2 и обсуждение этой задачи), если и только если $\bar{k} = \psi(\bar{k})$.

На рис. 20.F.1–20.F.4 представлены четыре математические интерпретации для этого динамического равновесия. На рис. 20.F.1 имеем самую простую из возможных ситуаций: монотонно возрастающую функцию стратегии с единственной стационарной траекторией $\bar{k}$. Стационарная траектория является здесь глобально устойчивой; т. е. $k_t \to \bar{k}$ для k_0. На рис. 20.F.2 функция стратегии вновь монотонно возрастает, но теперь у нас имеется несколько устойчивых состояний. Они обладают различными свойствами стабильности, но по-прежнему верно, что из любого на-

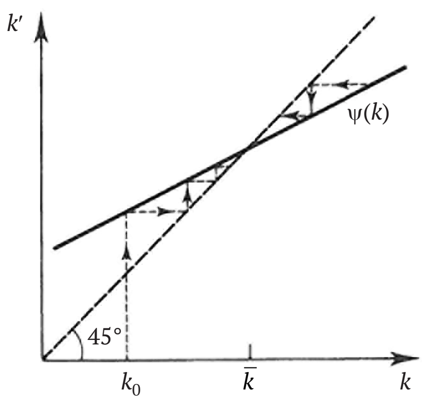


Рис. 20.F.1. Единственное, стабильное, стационарное состояние

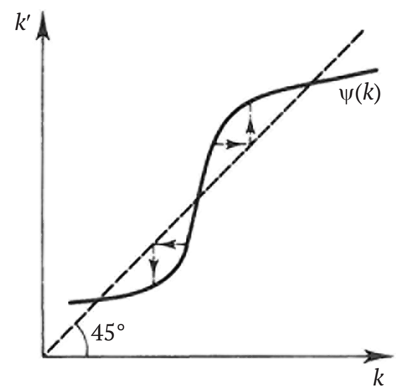


Рис. 20.F.2. Несколько стационарных состояний, отсутствие циклов

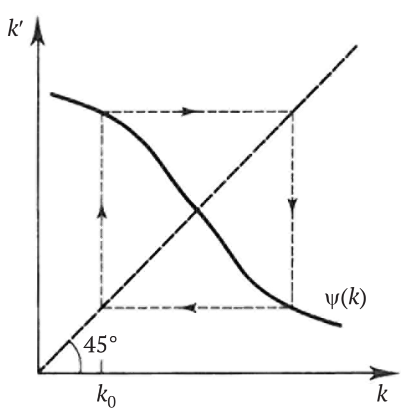


Рис. 20.F.3. Единственное стационарное состояние и цикл периода 2

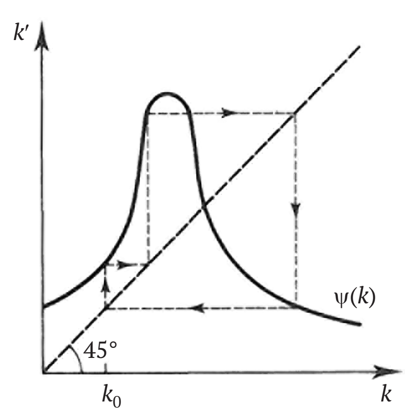


Рис. 20.F.4. Цикл периода 3: хаос

чального состояния мы приходим к некоторому устойчивому состоянию. На рис. 20.F.3 устойчивое состояние является единственным, но теперь функция стратегии не возрастает и возможны циклы. И в заключение, на рис. 20.F.4, мы имеем функцию стратегии, которая порождает цикл с периодом 3. Известно, что одномерная динамическая система, представляющая нетривиальный цикл с периодом 3, с необходимостью является *хаотической* (для представления математической теории по данному вопросу см. (Grandmont, 1986)). Мы не будем здесь останавливаться на объяснении термина «хаотический». Достаточно сказать, что равновесная траектория может блуждать сложным образом и что положение в ближайшем будущем чрезвычайно чувствительно к начальным условиям. Теоретическая возможность определения траекторий хаотического равновесия осложнена с экономической точки зрения. Как аукционист преуспеет в ее определении? Или как потребитель спрогнозирует такую последовательность?

К несчастью, принцип «все возможно», который преследовал нас в главе 17 в форме теоремы Зонненшайна — Мантеля — Дебре (раздел 17.E), вновь возникает здесь в виде теоремы Болдрина — Монтруччо (Boldrin, Montruccio, 1986): *любая функция стратегии* $\psi(k)$ *генерируется из некоторой вогнутой функции полезности* $u(k, k')$ *и* $\delta > 0$. Мы не будем демонстрировать и строго доказывать эту теорему, но основная идея доказательства достаточно ясна. Следующие несколько параграфов будут посвящены этой теореме.

Предположим, что в заданный момент для данной функции полезности $u(\cdot, \cdot)$ наш кандидат на функцию стратегии $\psi(\cdot)$ таков, что $\psi(k)$ решает для каждого k следующую задачу «совершенного нетерпения»:

$$\max_{k' \geq 0} u(k,\ k'). \tag{20.F.2}$$

Это задача агента, принимающего решения, который не заботится о будущем. Хотя она не в полной мере совпадает с задачей, которую нам предстоит решить, но приближенно является таковой, если предположить, что фактор дисконтирования $\delta > 0$ близок к нулю. Таким образом, принимающий решения агент не очень заботится о будущем и, значит, его оптимальное действие k' будет очень близко к функции $\psi(k)$ вследствие свойства непрерывности. Итак, мы решим задачу в достаточном приближении, если сможем найти такую функцию $u(\cdot, \cdot)$, что $\psi(k)$ будет решением (20.F.2) для каждого значения k.

Для того чтобы функция $\psi(k) > 0$ была решением (20.F.2), необходимо, чтобы функция полезности $u(k, \cdot)$ не убывала всюду по своему второму аргументу (оптимальным будет решение при $k' = 0$). В простейшей версии модели Рамсея — Солоу (пример 20.C.1) доходность капитала k' и инвестиции в текущем периоде дают результат только в следующем периоде, и, таким образом, функция полезности $u(k, k')$ убывает по k'. Но для текущей, более общей двухсекторной модели нет смысла усиливать это заключение. Предположим, к примеру, что существует два потребительских товара. Первый — это обычный инвестиционный потребительский товар, тогда как второй является чистым потребительским товаром, не являющимся совершенным заменителем первого. Скажем, что, получая определенное количество инвестиций k в момент $t - 1$, мы одновременно получаем k единиц инвестиционного товара в момент t и k единиц второго потребительского товара в момент $t - 1$. Соответственно, с k' единиц потребительского товара с инвестиционными качествами, которые потребитель получает в момент t, он получает k' единиц инвестиционного товара потребительского качества в момент $t + 1$ и k' единиц второго потребительского товара в момент t. Таким образом, если k и k' — объемы инвестиций в моменты $t - 1$ и t соответственно, то совокупный объем потребительских товаров, доступный в момент t, равен $(k - k', k')$. Следовательно, функция полезности $u(\cdot, \cdot)$ имеет форму $u(k, k') = \hat{u}(k - k', k')$, где $\hat{u}(\cdot, \cdot)$ является функцией полезности для совокупности двух потребительских товаров.

Таким образом, наша задача сводится к ответу на вопрос: можем ли мы, задавая функцию $\psi(k)$, найти $\hat{u}(\cdot, \cdot)$, такую что $\psi(k)$ решала бы задачу $\max_{k'} \hat{u}(k - k', k')$ для всех k в некотором диапазоне? Задача представлена на рис. 20.F.5[24]. Из рисунка видно, что формально задача превращается в проблему нахождения вогнутой функции полезности с заданной кривой Энгеля при некоторых заданных ценах (в нашем случае обе цены равны). Такая функция полезности всегда может быть получена. Хорошо известен тот достоверный факт, что вогнутость функции полезности $\hat{u}(\cdot)$ не накладывает ограничений на форму, в которой может быть представлена кривая Энгеля (см. упражнение 20.F.1).

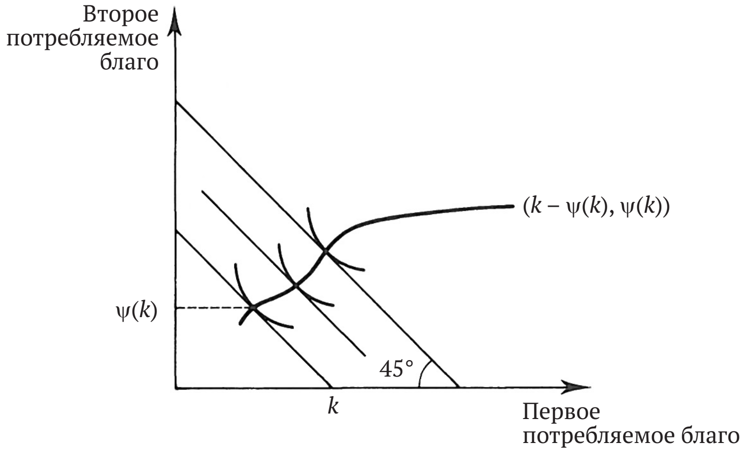


Рис. 20.F.5. Устройство функции арбитражной стратегии для случая совершенного нетерпения

[24] Мы также считаем, что $\psi(k) < k$ для всех k.

В принципе, как мы видели, возможны разнообразные исходы; в то же время есть интересные и полезные достаточные условия, обеспечивающие хорошее динамическое поведение. Мы рассмотрим здесь два типа условий: *низкую ставку дисконтирования и положительные смешанные производные*.

Низкая ставка дисконтирования

Одним из наиболее общих результатов динамической экономики является *магистральная теорема*, которая неявно утверждает, что если *однопериодная функция полезности является строго вогнутой и лицо, принимающее решение, наделено достаточным терпением, то существует единственное модифицированное золотое правило для стационарного состояния, к которому сходятся все траектории вне зависимости от начальных данных.*

В контексте двухсекторной модели, изучаемой в этом разделе, для рассмотрения магистральной теоремы мы можем привлечь интуицию. Предположим, что вогнутая функция $V(k)$ является дважды дифференцируемой[25]. В конце раздела 20.D мы видели, что, согласно определению,

$$V(k+z) \geq u(k+z, \psi(k)) + \delta V(\psi(k))$$

для всех z и k (которые равны при $z = 0$), и тогда мы должны иметь

$$V'(k) = \nabla_1 u(k, \psi(k)) \quad \text{и} \quad V''(k) \geq \nabla^2_{11} u(k,\ \psi(k)) \quad \text{для всех } k.$$

Также для всех k функция $\psi(k)$ служит решением условия первого порядка

$$\nabla_2 u(k, \psi(k)) + \delta V'(\psi(k)) = 0. \tag{20.F.3}$$

Дифференцируя данное условие, имеем (все производные оцениваются при k, $\psi(k)$ и предполагаются ненулевыми)

$$\psi'(\cdot) = -\frac{\nabla^2_{21} u(\cdot)}{\nabla^2_{22} u(\cdot) + \delta V''(\cdot)}.$$

Так как $\nabla^2_{22} u(\cdot) \leq 0$ и $\delta \nabla^2_{11} u(\cdot) \leq \delta V''(\cdot) \leq 0$, получаем

$$|\psi'(\cdot)| = \left| \frac{\nabla^2_{21} u(\cdot)}{\nabla^2_{22} u(\cdot) + \delta \nabla^2_{11} u(\cdot)} \right|.$$

В силу вогнутости функции полезности $u(\cdot)$ (см. разделы M.C и M.D Математического приложения)

$$\left(\nabla^2_{21} u(\cdot)\right)^2 \leq \nabla^2_{11} u(\cdot) \nabla^2_{22} u(\cdot) < \left(\nabla^2_{11} u(\cdot) + \nabla^2_{22} u(\cdot)\right)^2.$$

Следовательно, если фактор дисконтирования δ близок к единице, то можно заключить, что $|\psi'(k)| < 1$ для всех k. Говоря техническим языком,

[25] Более углубленное рассмотрение этого предположения см. в работе (Santos, 1991).

$\psi(\cdot)$ является *контрактурой,* и это означает глобальное приближение к единственному устойчивому состоянию[26]. В упражнении 20.F.2 для этого случая вас просят определить функции стратегии и векторные поля. Конкретный случай контрактуры показан на рис. 20.F.1.

Магистральная теорема распространяется на любое количество товаров. Точная формулировка и доказательство теоремы технически очень сложны [см. (McKenzie, 1987) для краткого обзора], но основная логика передается достаточно просто. Рассмотрим вырожденный случай, когда существует абсолютное терпение, т. е. фактор дисконта равен единице. Сложность заключается в том, что неясно, что это означает для произвольных траекторий; но, по крайней мере, для траекторий, которые не являются слишком «дикими», скажем, для тех, которые в некоторые моменты становятся циклическими, — для таких траекторий будет естественным предположить, что они оцениваются путем определения средней полезности за цикл. Заметим теперь, что *для любой циклической непостоянной траектории строгая выпуклость функции полезности означает, что постоянная траектория, равная среднему уровню капитала за цикл, дает более высокую полезность.* Переход от цикла к постоянной траектории может занять некоторое время (т. е. может понадобиться накопить капитал), но до тех пор, пока это можно сделать за ограниченное число периодов, издержки передачи не будут оказывать существенного влияния в долгосрочном периоде. Следовательно, циклическая непостоянная траектория не может быть оптимальной для абсолютно терпеливого агента. Из свойства непрерывности следует также, что это будет справедливо при δ, очень близком к единице. Поэтому можно заключить, что если траектория имеет форму, близкую к непостоянному циклу, то мы всегда можем реализовать конечный переход к соответствующей постоянной «средней долгосрочной» траектории, получив крупный долгосрочный выигрыш полезности при относительно низких краткосрочных издержках. Следовательно, оптимальная траектория должна быть асимптотически постоянной, что возможно, только если она достигает модифицированного устойчивого состояния золотого правила и остается в соседстве с ним (вспомним из раздела 20.E, что это только те постоянные траектории, которые могут быть равновесными, а значит, оптимальными)[27].

Положительные смешанные производные

Здесь мы займемся особым случаем уже изученной двухсекторной модели, где $\nabla_1 u(k, k') > 0$ и $\nabla_2 u(k, k') < 0$ для всех (k, k'). *Под положительной смешанной производной мы понимаем* $\nabla_{12} u(k, k') > 0$, к тому же во всех точках области определения. Иными словами, увеличение потребности в инвестициях приводит к ситуации роста отдачи (в терминах текущей полезности) от капитала, инвестированного в предыдущем периоде. Примерами являются классическая модель Рамсея — Солоу $u(F(k) - k')$ и модель издержек приспособления $u(F(k) - k' - \gamma(k' - k))$ (см. упражнение 20.F.3). Утверждается, что при выполнении этого условия о смешанных производных функция стратегии возрастает (как показано на рис. 20.F.1 и 20.F.2) и, таким образом, оптимальная траектория сходится к стационарной траектории.

---

[26] Отметим, что $\psi(\cdot)$ не должна быть монотонной и приближение может быть циклическим, хотя циклы со временем подавляются.

[27] При δ, близком к единице, модифицированное золотое правило сохраняет свойство единственности.

Для доказательства утверждения полезно выразить $\psi(k)$ как решение k' для

$$\max_{(k',V)} u(k,\ k') + \delta V \tag{20.F.4}$$
$$\text{при } V \le V(k'),$$

где $V(\cdot)$ является функцией значения. Для фиксированного значения k задача (20.F.4) представлена на рис. 20.F.6. Предельный уровень замещения (MRS) между текущими инвестициями k' и будущей полезностью V при $s = (\psi(k), V(\psi(k)))$ находится как $(1/\delta)\nabla_2 u(k, \psi(k)) < 0$. Предположим теперь, что мы принимаем $\tilde{k} > k$. Тогда карта кривых безразличия, показанная на рис. 20.F.6, меняется. Поскольку $\nabla_{12}u(k, \psi(k)) > 0$, предельная норма замещения MRS у s меняется так, как показано на рисунке, т. е. кривая безразличия становится более пологой. Но тогда нетрудно видеть, что необходимо $\psi(\tilde{k}) > \psi(k)$, как мы и хотели показать.

Условие смешанной производной само по себе не означает существования единственного модифицированного золотого правила. Таким образом, мы могли бы оказаться скорее на рис. 20.F.2, чем на рис. 20.F.1. Однако отметим, что во многих случаях можно прямо показать, что модифицированное золотое правило является единственным. Таким образом, в обоих случаях — и в случае классической модели Рамсея — Солоу из примера 20.C.1, и в случае модели издержек приспособления [с $\gamma'(0) = 0$] из примера 20.C.2 — модифицированное золотое правило характеризуется $F'(k) = 1/\delta$. Оно является единственным, и, поскольку функция стратегии возрастает, мы приходим к заключению, что каждая оптимальная траектория сходится к нему.

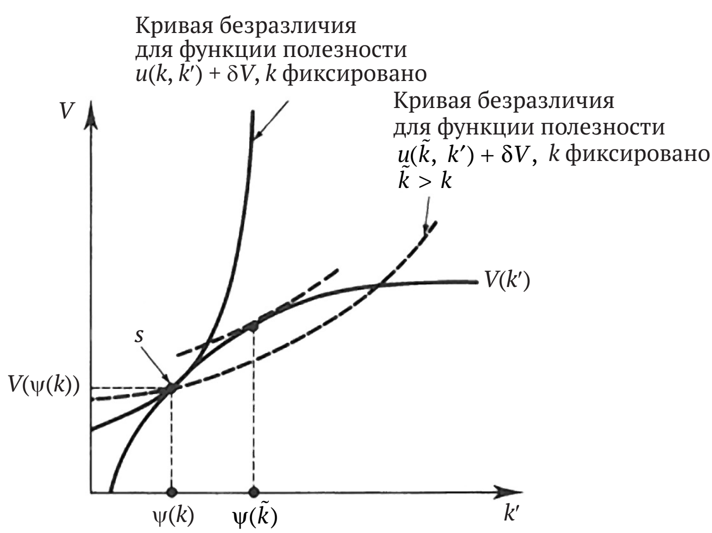


Рис. 20.F.6. С постоянным положительным знаком, противоположным знаку производной, стратегическая функция возрастает

Отметим также, что если смешанная производная является однородной с *отрицательным знаком*, то в силу тех же аргументов $\psi(\cdot)$ *убывает*. Пока это распространяется на циклы, динамика остается относительно простой. В частности, немонотонность, ассоциированная с возможностью хаотических траекторий (см. рис. 20.F.4), не может привести к росту. Дополнительная информация по этому вопросу приводится в (Deneckere, Pelican, 1986).

Рис. 20.F.6 демонстрирует различие между *мгновенными и постоянными шоками*. Одно из важных применений динамического анализа в целом и глобальной сходимости результатов магистральной теоремы в частности состоит в проверке того, какова остаточная долгосрочная реакция экономики на шок в момент $t = 1$. В очень приблизительной классификации эти возмущения могут быть двух типов:

(1) *Транзисторные* шоки воздействуют на экономику только при $t = 1$; т. е. они изменяют k_0 или саму функцию полезности $u(k_0, \cdot)$ при $t = 1$. Тогда рис. 20.F.6 позволяет нам увидеть, как будет перемещаться равновесная траектория. Кривая безразличия (k', V) функции $u(k_0, k') + \delta V$ изменяется, но ограничение функции $V(k')$ остается неизменным. Таким образом, после (мгновенного) шока новое k_1^{tr} соответствует решению задачи оптимизации, изображенной на рис. 20.F.6, но с новой картой кривых безразличия. С момента $t = 2$ мы просто следуем прежней функции стратегии.

(2) *Постоянные* шоки продвигают экономику к новой функции полезности $\hat{u}(k,\ k')$, которая является постоянной во времени. Затем вся функция стратегии переходит в новую $\hat{\psi}(\cdot)$. В терминах рис. 20.F.6 это будут изменения как кривых безразличия, так и ограничений. Новую функцию k_1^p сложнее определить и сравнить с предшоковым значением k_1, или, для того же шока в период 1, с k_1^{tr}; но часто она может быть задана. Мы обратимся к рассмотрению этого вопроса в примере 20.F.1.

Пример 20.F.1. Рассмотрим аддитивно-сепарабельную функцию полезности $u(k, k') = g(k) + h(k')$. Это может быть проблема инвестиций фирмы: $g(k)$ является максимальным доходом, который может быть получен при k, и $-h(k')$ — стоимость инвестиций. Таким образом, $\nabla_{12}^2 u(k,\ k') = 0$ при всех (k, k'). Предыдущий анализ рис. 20.F.6 говорит о том, что в этом случае $\psi(\cdot)$ является константой; т. е. при любом значении k_0 экономика постепенно сходится к своему значению в устойчивом состоянии $\bar{k}$. Это проиллюстрировано на рис. 20.F.7.

Предположим теперь, что существует шоковая переменная θ, такая что $u(k, k', \theta) = g(k, \theta) + h(k', \theta)$, причем предшоковое значение $\theta = 0$. Экономика находится первоначально в устойчивом состоянии $\bar{k}$.

Если существует транзиторный шок при малом $\theta > 0$, то из анализа рис. 20.F.6 нетрудно видеть, что $k_1^{tr} \gtreqless \bar{k}$ при $\partial^2 h(\bar{k},\ 0) / \partial k' \partial\theta \gtreqless 0$ соответственно (в упражнении 20.A.4 вам предлагается это проверить).

Для оценки эффекта постоянного шока при небольших значениях $\theta > 0$ (и, следовательно, $\psi_\theta(\cdot)$) член

$$\partial^2 V(\bar{k},\ 0) / \partial k \partial\theta = \partial^2 g(\bar{k},\ 0) / \partial k \partial\theta$$

также оказывается значимым [предыдущее равенство следует из выражения (20.F.3)]. Предположим, к примеру, что шок является однозначно предпочтительным, в том смыс-

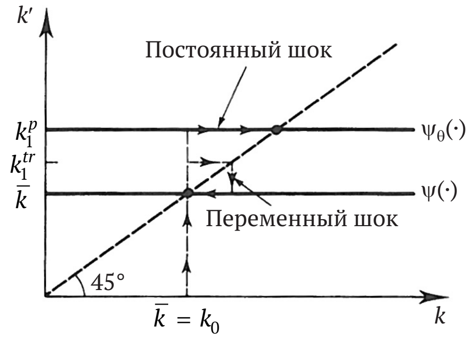


Рис. 20.F.7. Пример динамической корректировки в условиях переменных и постоянных шоков

ле что $\partial^2 g(\bar{k},\ 0)/\partial k \partial\theta > 0$ и $\partial^2 h(\bar{k},\ 0)/\partial k' \partial\theta > 0$. Тогда тщательный анализ рис. 20.F.6 позволит нам прийти к заключению, что $k_1^p > k_1^{tr} > \bar{k}$. (В упражнении 20.F.5 вас просят убедиться в этом. Отметим, что карта кривых безразличия на рис. 20.F.6 является квазилинейной по отношению к V.) Этот случай также иллюстрирует рис. 20.F.7. ■

20.G. Равновесие: несколько потребителей

До сих пор мы имели единственного потребителя, или, точнее, единственный тип потребителя. Распространение определения равновесия на экономику с несколькими потребителями, скажем I, не представляет особых трудностей. Мы просто должны переписать определение 20.D.1 в виде определения 20.G.1.

Определение 20.G.1. Производственная (ограниченная) траектория $(y_0^*,\ \ldots,\ y_t^*,\ \ldots)$, $y_t^* \in Y$, вектор цен (ограниченный) $(p_0, \ldots, p_t, \ldots) \geq 0$ и потоки потребления $(c_{0i}^*,\ \ldots,\ c_{ti}^*,\ \ldots) \geq 0$, $i = 1, \ldots, I$, представляют собой равновесие Вальраса (или конкурентное), если

(1) $$\sum_i c_{ti}^* = y_{a,t-1}^* + y_{bt}^* + \sum_i \omega_{ti} \text{ для всех } t. \qquad (20.G.1)$$

(2) Для каждого t

$$\pi_t = p_t \cdot y_{bt}^* + p_{t+1} \cdot y_{at}^* \geq p_t \cdot y_{bt} + p_{t+1} \cdot y_{at} \qquad (20.G.2)$$

для всех $y = (y_{bt}, y_{at}) \in Y$.

(3) Для каждого i потребительский поток $(c_{0i}^*,\ \ldots,\ c_{ti}^*,\ \ldots) \geq 0$ решает задачу

$$\max \sum_t \delta_i^t u_i(c_i) \qquad (20.G.3)$$

$$\text{при } \sum\nolimits_t p_t \cdot c_{ti} \leq \sum\nolimits_t \theta_{ti}\pi_t + \sum\nolimits_t p_t \cdot \omega_{ti} = w_i,$$

где θ_{ti} — доля прибылей потребителя i в период t.

Первое и очень важное наблюдение заключается в том, что здесь в полной аналогии со случаем конечного горизонта планирования (см. раздел 16.C) выполняется первая теорема благосостояния[28].

Утверждение 20.G.1. Равновесие Вальраса оптимально по Парето.

Доказательство. Доказательство проводится так же, как в утверждении 16.C.1. Пусть рассматриваемая траектория равновесия по Вальрасу задается производственной траекторией $(y_0^*, \ldots, y_t^*, \ldots)$, потоками потребления $(c_{0i}^*, \ldots, c_{ti}^*, \ldots)$, $i = 1, \ldots, I$ и вектором цен $(p_0, \ldots, p_t, \ldots)$. Предположим теперь, что траектории $(y_0, \ldots, y_t, \ldots)$ и $(c_{0i}, \ldots, c_{ti}, \ldots) \geq 0$, $i = 1, \ldots, I$, являются допустимыми [т. е. они удовлетворяют условию (1) из определения 20.G.1] и доминируют по Парето над равновесием Вальраса.

Согласно условию максимизации полезности имеем $\sum_t p_t \cdot c_{ti} \geq w_i$ для всех i по меньшей мере с одним строгим неравенством. Тогда

$$\sum_t p_t \cdot \left(\sum_i c_{ti}\right) = \sum_i \left(\sum_t p_t \cdot c_{ti}\right) > \sum_i w_i. \tag{20.G.4}$$

Из условия максимизации прибыли получаем[29]

$$\begin{aligned}\sum_t p_t \cdot \left(\sum_i c_{ti}\right) &= \sum_i p_t \cdot \left(y_{a,t-1} + y_{bt} + \sum_i \omega_{ti}\right) = \\ &= \sum_t p_t \cdot y_{a,t-1} + \sum_t p_t \cdot y_{bt} + \sum_t \sum_i p_t \cdot \omega_{ti} = \\ &= \sum_{t \geq 1} (p_{t-1} \cdot y_{b,t-1} + p_t \cdot y_{a,t-1}) + \sum_i \sum_t p_t \cdot \omega_{ti} \leq \\ &\leq \sum_t \pi_t + \sum_i \sum_t p_t \cdot \omega_{ti} = \sum_i w_i.\end{aligned}$$

Но это заключение противоречит (20.G.4). ■

Мы видели в разделах 16.E и 16.F, что в предположении о вогнутости функций полезности Парето оптимальное распределение экономики с ограниченным количеством товаров может быть рассмотрено как решение задачи планирования. Как показано на рис. 20.G.1, целевая функция планировщика является взвешенной суммой полезностей различных потребителей (веса, будучи обратными предельным полезностям благосостояния в равновесии с трансфертами, ассоциировались с одним из Парето-оптимумов). Аргументация раздела 16.E (в частности, утверждение 16.E.2) применяется и к случаю текущего планирования на бесконечном горизонте. Таким образом, утверждение 20.G.1 имеет, помимо основного, существенное методологическое значение. Оно говорит о том, что цены, производство и агрегированное потребление данного типа равновесия

---

[28] Отметим также, что согласно терминологии главы 19 рыночная структура является полной: каждый потребитель имеет единственное бюджетное ограничение и, следовательно, только цены ограничивают возможности передачи благосостояния между периодами.

[29] Напоминаем, что условно $y_{a,-1} = 0$.

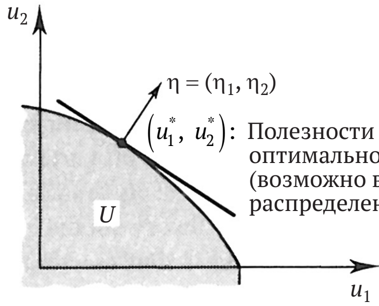


Рис. 20.G.1. Вальрасианское равновесие как решение задачи планирования

Вальраса точно соответствуют параметрам экономики с единственным потребителем. Приведем более точную формулировку утверждения 20.G.2. В нем наложено дополнительное условие на общий фактор дисконтирования, а именно $\delta_i = \delta$ для всех i.

Утверждение 20.G.2. Предположим, что $(y_0^*, \ldots, y_t^*, \ldots)$ является производственной траекторией и $(p_0, \ldots, p_t, \ldots)$ — вектор цен равновесия Вальраса экономики с I потребителями. Тогда существуют веса $(\eta_1, \ldots, \eta_I) >> 0$, такие что $(y_0^*, \ldots, y_t^*, \ldots)$ и $(p_0, \ldots, p_t, \ldots)$ представляют вальрасовское равновесие для экономики с одним потребителем, определенной полезностью $\sum_t \delta^t u(c_t)$, где $u(c_t)$ является решением $\max \sum_i \eta_i u_i(c_{ti})$ при $\sum_i c_{ti} < c_t$.

Доказательство. Мы не будем приводить строгое доказательство, но результат интуитивно понятен из рис. 20.G.1. Здесь мы видим (технически это включает в себя, как в утверждении 16.E.2, применение теоремы об опорной гиперплоскости), что существуют веса $(\eta_1, \ldots, \eta_I) >> 0$, такие что потребительские потоки в равновесии максимизируют функцию $\sum_i \eta_i \left(\sum_t \delta^t u_i(c_{ti})\right)$ для всех допустимых потоков потребления или, эквивалентно (именно здесь предположение об общем факторе дисконтирования играет важную роль), агрегированного равновесного потока потребления и решают двухшаговую задачу планирования, специфицированную определением $u(c_t)$, и максимизируют $\sum_t \delta^t u(c_t)$. Поскольку мы уже знаем (утверждение 20.D.4), что это равносильно задаче равновесия с одним потребителем, то доказательство получено. ■

Утверждение 20.G.2 позволяет нам заключить, что результаты для экономики с одним потребителем, полученные в предыдущих трех разделах, остаются релевантны и для случая с несколькими потребителями[30]. Несколько неформально мы можем различить два типа свойств равновесия.

[30] В более общем виде оно остается крайне релевантным в любой модели равновесия, которая гарантирует Парето-оптимальность равновесия.

Внутренние свойства — это те, которые относятся только к структуре равновесия, рассматриваемой исключительно со ссылкой на саму себя (т. е. сходимость к устойчивому состоянию); *внешние* свойства относятся к тому, как равновесие относится к другим возможным равновесным траекториям экономики (т. е. единственность или локальная единственность). Смысл утверждения 20.G.2 состоит в том, что в условиях Парето-оптимальности внутренние свойства равновесия экономики с несколькими потребителями — это те, которые связаны с ассоциированными с ними свойствами в экономике с одним потребителем. Применение теории одного потребителя, однако, не следует распространять за пределы внутренних свойств. Дело в том, что *веса, определяющие задачу планирования, зависят от рассматриваемого частичного равновесия*. Например, вполне возможно наличие более чем одного равновесия, причем каждое — Парето-оптимально, но опирается на различные веса.

Что можно сказать о детерминированности свойств равновесия, к примеру о конечности числа равновесий? Мы не имеем возможности дать точного представления об этом отчасти потому, что этот вопрос является крайне сложным технически, и отчасти потому, что в этой сфере исследования до сих пор ведутся очень интенсивно и окончательные выводы еще не сформулированы. Тем не менее можно сформулировать основные интуитивные представления. Мы начали с указания на иное применение утверждения 20.G.1. Формально наша модель с бесконечным горизонтом включает бесконечно много переменных (например, цены) и бесконечно много уравнений (уравнения Эйлера, к примеру). Это очень неприятный факт, так как математическая теория, описанная в разделе 17.D, применяется только (и не зря, как мы увидим в разделе 20.H) к системам с *конечным* числом равенств и неизвестных. Однако утверждение 20.G.1 позволяет нам рассматривать задачу поиска равновесия как задачу нахождения не равновесных цен, но равновесных весов η. Если мы поступим таким образом, то уравнений равновесия в нашей системе будет $I - 1$, столько же, сколько неизвестных. Точнее, i-е уравнение будет ассоциироваться с вектором весов $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_I)$, $\sum_i \eta_i = 1$, «разрыв» в уровне благосостояния потребителя i составит

$$\sum_t p_t(\eta) \cdot c_{ti}(\eta) - \sum_t \left(\theta_{ti}\pi_t(\eta) + p_t(\eta) \cdot \omega_{ti}\right) = 0,$$

где $p_t(\eta)$, $c_{ti}(\eta)$ и $\pi_t(\eta)$ соответствуют Парето-оптимуму, проиндексированному по η, см. Приложение А к главе 17. Так или иначе, если взглянуть на данную формулировку как на задачу поиска равновесного благосостояния конечного числа потребителей, центральная гипотеза должна заключаться в том (как и в главе 17), что множество равновесий является непустым и конечным. То есть равновесие существует и, исключая крайние случаи, существует только конечное число взвешенных решений уравнений равновесия (мы можем продолжать подобным образом до формулировки индексной теоремы). Оставив технические сложности[31] в стороне, эту центральную теорему можно сформулировать для широкого круга задач [см. упражнение 20.G.3 и (Kehoe, Levine, 1985)].

Мы завершаем этот раздел двумя ремарками. Первая: существует ли связь между внутренними и внешними свойствами? По крайней мере в первом приближении

[31] Это должно быть сделано с гарантиями и дифференцированностью релевантных функций.

ответом будет «нет». Мы видим, что равновесие в экономике с одним потребителем является единственным, но равновесная траектория может быть достаточно сложной. Аналогичным образом в экономике с несколькими потребителями может быть несколько равновесных состояний (или даже континуум), каждое из которых быстро сходится к стационарному[32].

Вторая: Парето-оптимальность является ключом к ожиданиям общей определенности. Рассмотрим в качестве примера модель идентичных потребителей, но с экстерналиями. Функция полезности, $u(k, k', e)$, теперь имеет три аргумента: k и k' являются капитальными инвестициями в предыдущем и текущем периодах соответственно, а e является ощущаемым уровнем экстерналии. Заданная изначально экзогенно траектория экстерналий $(e_0, \ldots, e_t, \ldots)$, траектория капитала k_t (ограниченная, строго внутренняя) является равновесием, если она решает задачу планирования для функций полезности $u(\cdot, \cdot, e_t)$, т. е. удовлетворяет уравнениям Эйлера

$$\nabla_2 u(k_{t-1}, k_t, e_t) + \delta \nabla_1 u(k_t, k_{t+1}, e_{t+1}) = 0 \quad \text{для всех } t.$$

Общее равновесие обязательно учитывает технологию, определяющую экстерналии. Скажем, что это $e_t = k_t$; т. е. экстерналии являются побочным продуктом текущих инвестиций. Тогда условиями равновесия будут

$$\nabla_2 u(k_{t-1}, k_t, k_t) + \delta \nabla_1 u(k_t, k_{t+1}, k_{t+1}) = 0 \quad \text{для всех } t. \tag{20.G.5}$$

Предположим, что, начиная с устойчивого состояния равновесия ($k_t = \bar{k}$ для всех t), мы пытаемся, как и в разделе 20.D, генерировать другое равновесие, фиксируя $k_0 = \bar{k}$ и принимая k_1 таким, чтобы оно немного отличалось от $\bar{k}$, и затем итеративно решая (20.G.5) для k_{t+1}. Достаточным (но не необходимым) условием для успеха этого метода является то, что $\left|dk_{t+1}/dk_t\right| < \frac{1}{2}$ и $\left|dk_{t+1}/dk_{t-1}\right| < \frac{1}{2}$, где стоимости dk_{t+1}/dk_t и dk_{t+1}/dk_{t-1} достигаются путем применения теоремы о неявной функции к (20.G.5) и оценивания в устойчивом состоянии. Действительно, если это условие выполняется, то начальное возмущение k_1 индуцирует последовательность корректировок, которые ослабевают со временем и, таким образом, никогда не становятся неосуществимыми (и на самом деле остаются ограниченными и строго внутренними). Имеем

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = -\frac{\nabla^2_{22} u(\cdot) + \nabla^2_{23} u(\cdot) + \delta \nabla^2_{11} u(\cdot)}{\delta(\nabla^2_{12} u(\cdot) + \nabla^2_{13} u(\cdot))}. \tag{20.G.6}$$

Если экстерналий не существует [т. е. если $\nabla^2_{23} u(\cdot) = \nabla^2_{13} u(\cdot) = 0$], то вогнутость функции $u(\cdot, \cdot)$ подразумевает, что выражение (20.G.6) превышает единицу в абсолютном выражении (вы можете проверить это в упражнении 20.G.5). Таким образом, согласно обсуждению из раздела 20.D, мы не можем найти решения уравнений Эйлера в форме неустойчивых состояний. Но если эффекты экстерналий значительны, из проверки выражения (20.G.6) немедленно будет следовать, что dk_{t+1}/dk_t может быть существенно меньше, чем $^1/_2$ в абсолютном выражении. То же справедливо и для $dk_{t+1}/\delta k_{t-1}$. Таким образом, мы можем заключить, что возможны устойчивые примеры с континуумом равновесий.

[32] Простейшим и тривиальным примером является следующий. Предположим, что $L = 2$ и $I = 2$ и что не существует возможности межвременного производства. Индивидуальный вклад постоянен во времени, и функции полезности являются вогнутыми. Тогда межвременное вальрасовское равновесие в точности соответствует бесконечному постоянному повторению однопериодного вальрасовского равновесия (в упражнении 20.G.4 предлагалось доказать это). Поскольку таковых существует несколько, мы получили наше заключение.

20.H. Перекрывающиеся поколения

В предыдущих разделах мы изучали экономику, которая формально имела перекрывающуюся структуру фирм, но только одного (или, как в разделе 20.G, нескольких) долго живущего потребителя. Мы отмечали в разделе 20.B, что в присутствии соответствующих форм альтруизма становится возможным интерпретировать долго живущего агента как династию. Теперь мы опишем модель, где описанное выше невозможно и, как следствие, сторона потребления в экономике состоит из бесконечной последовательности потребителей. Чтобы было интереснее, назовем этих потребителей *поколениями*, и пусть они перекрещиваются так, что между ними возможна торговля. Модель впервые рассматривалась в работах (Allais, 1947; Samuelson, 1958) и стала рабочей лошадкой макроэкономики, монетарной теории и общественных финансов. Литературы на эту тему очень много, к примеру (Geanakoplos, 1987) или (Woodford, 1984) (для обзора). Здесь мы ограничимся обсуждением простого случая с целью выделения, во-первых, масштаба, в котором модель может анализироваться в рамках методологии равновесия Вальраса, и, во-вторых, отклонений от многочисленных уроков предыдущих разделов. Разделим эти отклонения на две категории: относящиеся к оптимальности и касающиеся множественности равновесия.

Начнем с описания экономики, которая, за исключением бесконечности поколений, является настолько простой, насколько это возможно. Мы имеем бесконечную последовательность периодов $t = 0, 1, \ldots$ и в каждый период единственный потребительский товар. Для каждого t существует поколение, рожденное в момент t, живущее в течение двух периодов и имеющее функцию полезности $u(c_{bt}, c_{at})$, где c_{bt} и c_{at} являются потреблением поколения t, когда это поколение молодо (т. е. в период t), и потреблением этого поколения в старости (т. е. в период $t + 1$) соответственно; индексы b и a являются мнемоническими символами для обозначения периодов «до» и «после». Отметим, что функции полезности различных поколений на протяжении периода их жизни являются идентичными. Мы считаем, что $u(\cdot, \cdot)$ является квазивогнутой, дифференцируемой и строго возрастающей.

Каждое поколение t, пока оно молодо, наделено единицей первичного фактора (т. е. трудом). Этот первичный фактор не входит в функцию полезности и может быть использован для производства потребительских товаров в соответствии с некоторой производственной функцией $f(z)$[33]. Допустим, $f(1) = 1$. По предположению о конкурентной цене совокупная прибыль в момент t, с точки зрения товара периода t, будет равна $\varepsilon = 1 - f'(1)$ и, следовательно, плата за рабочую силу будет равна $1 - \varepsilon$. Мы можем также предположить напрямую, что начальные запасы поколения $t \geq 0$ специфицированы для нас как вектор потребительских товаров $(1 - \varepsilon, 0)$. Доба-

[33] Предположение, что производство и использование ресурсов осуществляются одновременно, хорошо согласуется с допущением о большой продолжительности периода.

вим, что дополнительно мы устанавливаем бесконечный поток прибылей для поколения 0. То есть технология $f(\cdot)$ является бесконечным активом, принадлежащим в момент $t = 0$ только тому поколению, которое живет в этот период и получает постоянный поток прибыли $\varepsilon > 0$ единиц потребительского товара.

Пусть теперь $(p_0, \ldots, p_t, \ldots)$ будет бесконечной последовательностью (предполагаемых) цен. Мы не требуем, чтобы он был ограничен. Для бюджетного ограничения различных поколений примем

$$p_t c_{bt} + p_{t+1} c_{at} \leq (1 - \varepsilon) p_t \quad \text{для } t > 0 \tag{20.H.1}$$

и

$$p_0 c_{b0} + p_1 c_{a0} \leq (1 - \varepsilon) p_0 + \varepsilon \left(\sum_t p_t \right) + M. \tag{20.H.2}$$

Эти бюджетные ограничения заслуживают комментария. Для $t > 0$ (20.H.1) их легко интерпретировать. Стоимость начальных вкладов, доступных в момент t, равна $(1 - \varepsilon)p_t$. Часть из них потрачена в момент t, а оставшаяся, $(1 - \varepsilon)p_t - p_t c_{bt}$, сберегается на потребление в момент $t + 1$. Инструментом сбережения может быть право на технологию, которая будет куплена у старого поколения молодым в момент t, а затем продана в момент $t + 1$ новому молодому поколению (после сбора дохода в период $t + 1$). Цена, уплаченная за актив, является количеством, которое сберегли, т. е. $(1 - \varepsilon)p_t - p_t c_{bt}$. Прямой доход в момент $t + 1$ равен εp_{t+1}, и, таким образом, если рынок активов находится в равновесии, цена продажи в момент $t + 1$ должна быть равной $(1 - \varepsilon)p_t - p_t c_{bt} - \varepsilon p_{t+1}$. В итоге, согласно бюджетному ограничению (20.H.1), остается $(1 - \varepsilon)\mathrm{p}_t - \mathrm{p}_t \mathrm{c}_{bt}$, что будет потрачено в момент $t + 1$.

Ограничение (20.H.2) для $t = 0$ является более интересным. Правая часть равенства — это стоимость активов поколения 0. Отметим, что требуется равновесие на рынке активов, чтобы эта стоимость была по меньшей мере *фундаментальной* стоимостью, т. е. $\varepsilon\left(\sum_t p_t\right)$[34]. Действительно, стоимость актива в момент $t = 0$ равна прибыли $\varepsilon \mathrm{p}_0$ плюс цена, уплаченная молодым поколением 1. К любому моменту T цена, уплаченная молодым поколением T, не должна быть ниже прямого дохода εp_{T+1}. В свою очередь, при $T - 1$ она не должна быть ниже прямого дохода плюс стоимость в момент T; т. е. она должна быть равной по меньшей мере $\varepsilon(\mathrm{p}_T + p_{T+1})$. Методом итераций мы получаем более низкий уровень $\varepsilon(p_1 + \ldots + p_{T+1})$ для цен, уплачиваемых поколением 1, которое, стремясь к ограничению и добавляя εp_0, дает $\varepsilon\left(\sum_t p_t\right)$ как более низкую границу для стоимости поколения 0. Таким образом, с точки зрения выражения (20.H.2) необходимым для существования равновесия условием является $M \geq 0$. В принципе, однако,

[34] Строго говоря, мы ведем речь о том, что если цены на потребительские товары заданы $(p_0, \ldots, p_t, \ldots)$ и цены на активы таковы, что не существует возможности для арбитража, то цена актива должна быть по меньшей мере такой же, как фундаментальная стоимость актива.

мы должны допускать возможность возникновения *пузыря* стоимости на активы (т. е. $M > 0$). Мы не делали этого в разделах 20.D или 20.G, поскольку с ограниченным числом потребителей существование пузырей в равновесии невозможно. Равенство спроса и утверждения подразумевает, что (ограниченная) стоимость общего начального вклада плюс совокупная прибыль равны стоимости совокупного потребления, и, таким образом, при равновесии ни одна из индивидуальных стоимостей потребления не может быть больше, чем соответствующая индивидуальная стоимость начального вклада и прибыли (вам предлагается проверить это в упражнении 20.H.1). Мы увидим, что в этих обстоятельствах пузыри могут образовываться в равновесии с бесконечным числом потребителей. Таким образом, было бы неправильно устранить их по определению.

Определение *равновесия Вальраса* является теперь естественным:

Определение 20.H.1. Последовательность цен $(p_0, \dots, p_t, \dots)$, $M \geq 0$ и семейное потребление $\left\{(c^*_{bt},\ c^*_{at})\right\}_{t=0}^{\infty}$ представляют *равновесие Вальраса (конкурентное)*, если:

(1) каждая $\left(c^*_{bt},\ c^*_{at}\right)$ является решением задачи максимизации полезности и является предметом бюджетных ограничений (20.H.1), (20.H.2);

(2) требование допустимости $\left(c^*_{a,t-1} + c^*_{bt} = 1\right)$ удовлетворено для всех $t \geq 0$ (мы полагаем, что $c^*_{a,-1} = 0$).

Используя процедуру, напоминающую итеративную процедуру (представленную в разделе 20.D) для определения функции стратегии из уравнений Эйлера, рис. 20.H.1, 20.H.2 описывают, как можно устроить равновесие. Нормализуем $p_0 = 1$. Предположим, что теперь мы пытаемся произвольно зафиксировать c_{a0}. В равновесии $c_{b0} = 1$ и, таким образом, p_1 определен тем, что p_1/p_0 должно быть равно предельному уровню замещения $u(\cdot, \cdot)$ при $(1, c_{a0})$. Также имеем $c_{b1} = 1 - c_{a0}$. Теперь определим p_2. Действительно, p_2 — цена в момент 2 — должна быть зафиксирована на таком уровне, который индуцировал уровень спроса у поколения 1 в период 1, равный именно c_{b1} [при бюджетном множестве, заданном при ценах p_1, p_2 и благосостоянии $(1 - \varepsilon)p_1$]. Таким образом, спрос поколения 1 в период 2 также определен. Но тогда мы способны зафиксировать p_3 на уровне, который в точности индуцирует правильное количество спроса у поколения 2 в период 2, т. е. на уровне c_{b2}. Если мы можем следовать этому построению в течение неопределенного времени, так что будет сгенерирована бесконечная последовательность $(p_1, \dots, p_t, \dots)$, то тогда мы найдем равновесие. На рис. 20.H.1, где $\varepsilon > 0$, существует единственная последовательность цен $(p_0 = 1)$, которая может быть продолжена неопределенно, и, следовательно, единственная равновесная траектория. Она соответствует стационарному потреблению $(\gamma, 1 - \gamma)$ и последовательности пропорциональных цен $p_t = \alpha^t$, где $\alpha = (1 - \varepsilon - \gamma)/(1 - \gamma) < 1$. Отметим, что итерации, которые начинаются при стоимости $c_{a0} \neq 1 - \gamma$, неизбежно «сходят со сцены», т.е. становятся неосуществимыми. На рис. 20.Н.2, где $\varepsilon = 0$, имеется континуум равновесий: любое начальное условие $c_{a0} \le 1 - \gamma$ может быть продолжено произвольным образом.

Из рис. 20.Н.1, 20.Н.2 можно сделать вывод, что существование равновесия может быть гарантировано при общих условиях. Это действительно так [см. (Wilson, 1981)].

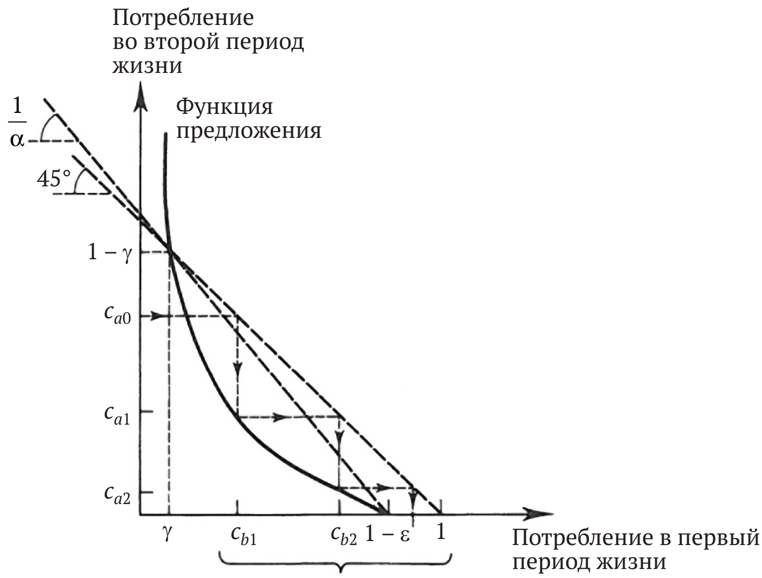


Рис. 20.Н.1. Перекрывающиеся поколения: создание равновесия (случай с $\varepsilon > 0$)

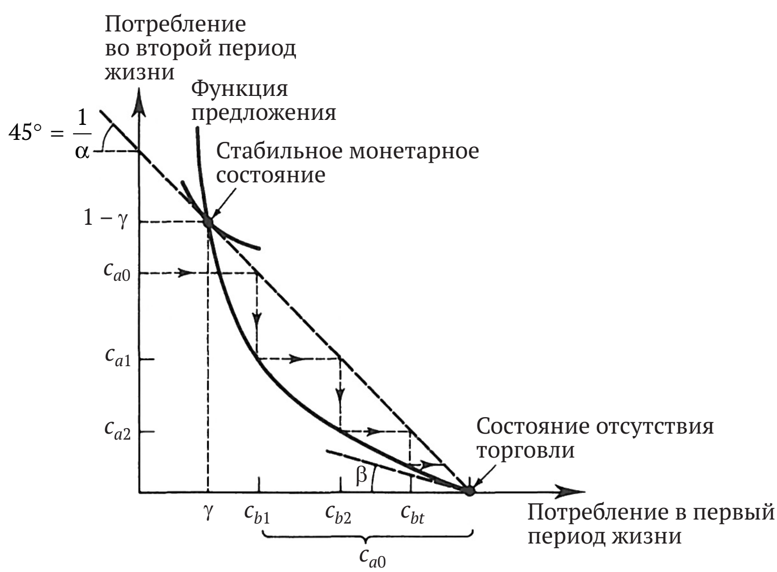


Рис. 20.Н.2. Перекрывающиеся поколения: создание равновесия (случай с $\varepsilon = 0$)

Парето-оптимальность

Предположим, что, во-первых, $\varepsilon > 0$. Мы говорим тогда, что активы *реальны* (они приносят «реальные» доходы). В состоянии равновесия благосостояние поколения 0, равное $(1-\varepsilon)p_0 + \varepsilon\left(\sum_t p_t\right) + M$, должно быть конечным (как в противном случае это поколение могло бы достичь равновесия?). Поэтому, если $\varepsilon > 0$, то $\sum_t p_t < \infty$ [35]. Отсюда следует важный вывод: *агрегированное* (т. е. являющееся результатом сложения богатства всех поколений) *богатство общества*, $\sum_t p_t$, *конечно*. В утверждении 20.H.1 мы показываем, что первая теорема благосостояния применима к модели с $\varepsilon > 0$.

Утверждение 20.H.1. Любое равновесие Вальраса $(p_0,\ldots,p_t,\ldots),\left\{(c^*_{bt},\ c^*_{at})\right\}_{t=0}^{\infty}$, с $\sum_t p_t < \infty$ является Парето-оптимальным, т. е. не существует другого осуществимого потребления $\left\{(c_{bt},\ c_{at})\right\}_{t=0}^{\infty}$ такого что $u(c_{bt},\ c_{at}) \geq$ $\geq u\left(c^*_{bt},\ c^*_{at}\right)$ для всех $t \geq 0$ со строгим неравенством хотя бы для одного t.

Доказательство. Мы повторим здесь стандартную схему доказательства. Предположим, что $\left\{(c_{bt},\ c_{at})\right\}_{t=0}^{\infty}$ доминирует по Парето $\left\{(c^*_{bt},\ c^*_{at})\right\}_{t=0}^{\infty}$. Исходя из этого имеем: $c^*_{bt} + c^*_{a,t-1} = 1$ и $c_{bt} + c_{a,t-1} \leq 1$ для каждого t. Поэтому $\sum_t p_t\left(c^*_{bt} + c^*_{a,t-1}\right) = \sum_t p_t$ и $\sum_t p_t(c_{bt} + c_{a,t-1}) \leq$ $\leq \sum_t p_t$. При $\sum_t p_t < \infty$ мы можем изменить условия и получить

$$\sum_t (p_t c_{bt} + p_{t+1}c_{at}) \leq \sum_t \left(p_t c^*_{bt} + p_{t+1}c^*_{at}\right) = \sum_t p_t < \infty.$$

Так как функция полезности возрастает и $\left(c^*_{bt},\ c^*_{at}\right)$ максимизирует полезность на бюджетном множестве, приходим к заключению, что $p_t c_{bt} + p_{t+1}c_{at} \geq p_t c^*_{bt} + p_{t+1}c^*_{at}$ для каждого t по крайней мере с одним строгим неравенством. Поэтому $\sum\limits_t (p_t c_{bt} + p_{t+1}c_{at}) >$ $> \sum\limits_t \left(p_t c^*_{bt} + p_{t+1}c^*_{at}\right)$. Получили противоречие. ■

Утверждение 20.H.1 важно, однако наше исследование на нем не заканчивается. Предположим, что теперь актив является чисто *номинальным* (т. е. $\varepsilon = 0$; к примеру, актив предоставляет право получения постоянного дохода от технологии). Тогда *возможно получить равновесия, которые не являются оптимальными*. На самом деле, легко видеть, что мы можем поддерживать автаркию (отсутствие торговли) как равновесие. Положим $M = 0$ (нет «пузырей») и выберем $(p_0, \ldots, p_t, \ldots)$ таким образом, чтобы для каждого t относительные цены p_t/p_{t+1} были равны предельному уровню

[35] Вы можете проверить это утверждение графически, рассмотрев пример на рис. 20.H.1.

замещения $u(\cdot, \cdot)$ при (1, 0), обозначенному как β. Такое стационарное состояние в отсутствие торговли (также называемое *неденежным стабильным состоянием*), где каждое поколение потребляет (1, 0), представлено на рис. 20.H.2. По иллюстрации (для $\beta < 1$) мы можем также видеть, что выбор отсутствия торговли строго доминирует по Парето над состоянием $(\gamma, 1 - \gamma)$ [или, более точно, над потребительской траекторией, на которой расположено потребление поколения 0, $(1, 1 - \gamma)$, и каждого другого поколения, $(\gamma, 1 - \gamma)$]. Продолжение просто: в этом примере бесконечность горизонта делает возможным для представителей каждого поколения t передавать старшему поколению дополнительное количество товара при t и в то же время быть более чем удовлетворенными количеством товара, переданного им в момент $t + 1$ следующим поколением. Отметим, что в соответствии с утверждением 20.H.1 отсутствие оптимальности в равновесии с отсутствием торговли влечет за собой $p_t/p_{t+1} = \beta < 1$ для всех t, т. е. цены растут со временем.

Также возможно в чисто номинальном случае для равновесия с $M > 0$ не будет наблюдаться Парето-оптимальность. Отметим, во-первых, что если $\left\{\left(c_{bt}^*,\ c_{at}^*\right)\right\}_{t=0}^{\infty}$, $(p_0, \ldots, p_t, \ldots)$ и M представляют собой равновесие, то (вспомним, что $c_{b0}^* = 1$)

$$p_{t+1}c_{at}^* = p_t\left(1 - c_{bt}^*\right) = p_t c_{a,t-1}^* = \ldots = p_1 c_{a0}^* = M \text{ для каждого } t.$$

Таким образом, $M = 0$ соответствует равновесию без торговли. На рис. 20.H.2 существует континуум равновесий, проиндексированных c_{b1} для $\gamma \le c_{b1} \le 1$. Равновесию в отсутствие торговли соответствует $c_{b1} = 1$. Но для каждого $c_{b1} < 1$ с $c_{b1} > \gamma$ мы имеем нестационарную равновесную траекторию с торговлей (отсюда $M > 0$), которая также строго доминируется по Парето устойчивым состоянием $(\gamma, 1 - \gamma)$. Тем не менее по-прежнему верно, что для любого равновесия с $c_{b1} > \gamma$ имеем $M/p_t \to 0$; т. е. реальная стоимость актива стремится к нулю с течением времени. Для $c_{b1} = \gamma$ положение дел совершенно другое. В этом случае мы имеем устойчивое равновесие (названное *денежным устойчивым состоянием*), в котором последовательность цен p_t является постоянной и поэтому реальная стоимость денег остается константой и положительной величиной. Это монетарное устойчивое состояние является аналогом *золотого правила* из раздела 20.E и, как и тогда, получаем, что, несмотря на нарушение условия $\sum_t p_t < \infty$, *денежное устойчивое состояние является Парето-оптимальным*. Мы не будем приводить строгого доказательства этого утверждения. Основной аргумент содержится в рис. 20.H.3. Здесь мы представим кривую безразличия, проходящую через $(\gamma, 1 - \gamma)$, и покажем, что любая попытка увеличения полезности поколения 0 с $c_{b1} < \gamma$ приведет к недопустимой цепочке компенсаций, т. е. она не может быть реализована.

Итак, на основании примеров, приведенных на рис. 20.H.2, 20.H.3, предложено и подтверждено следующее утверждение, которое мы оста-

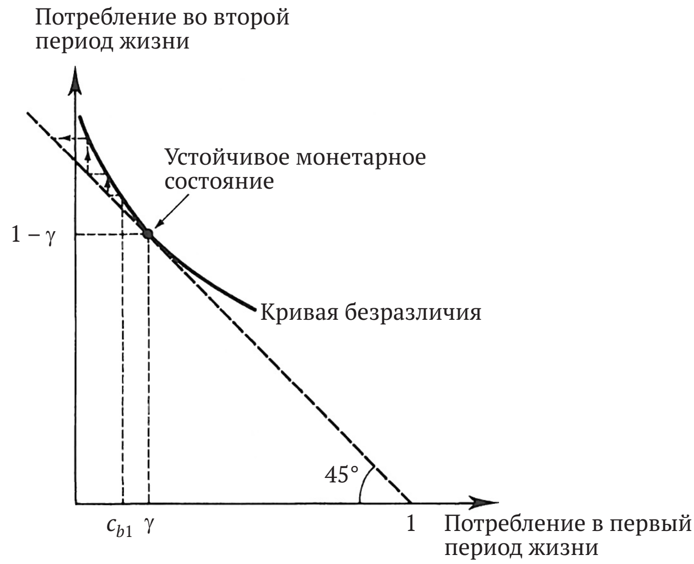


Рис. 20.Н.3. Стабильное монетарное состояние является Парето-оптимальным

вим без доказательства: *в чисто номинальном случае среди всех равновесных траекторий оптимальными по Парето являются те и только те, которые демонстрируют наличие «пузыря», реальная стоимость которого не равна нулю на протяжении всего времени.*

Конечно, интересно, что пузырь может служить функцией, гарантирующей оптимальность равновесия в экономике, но следует иметь в виду, что это происходит только потому, что для передачи богатства во времени необходим актив. Если реальный актив существует, то тогда этот актив может делать работу. Если такового не существует, то экономика, так сказать, нуждается в изобретении такого актива. Чтобы замкнуть круг, укажем на то, что если существует реальный актив, то пузырь не только не нужен, но и он не может образоваться.

Утверждение 20.Н.2. Предположим, что в равновесии $\sum_t p_t < \infty$. Тогда $M = 0$.

Доказательство. Сумма благосостояний поколений равна $\sum_t p_t + M < \infty$. Стоимость общего потребления равна $\sum_t p_t < \infty$. Вторая часть суммы не может быть меньше, чем первая (в противном случае некоторые из поколений не израсходуют в полном объеме имеющееся в их распоряжении богатство). Поэтому $M = 0$. ■

Множественность равновесия

Мы уже видели (см. рис. 20.Н.2) модель с чисто номинальным активом (т. е. $\varepsilon = 0$) и «хорошими» предпочтениями (кривая предложения, характеризующая субституты), для которых существует континуум равновесий. Одно из них является Парето-оптимальным при денежном устойчивом состоянии, а остальные представляют неоптимальное равновесие, где реальная стоимость денег асимптотически приближается к нулю. Существование такого рода неопределенности явно может быть отнесено к возможности фиксировать с некоторым произволом реальную стоимость денег («пузырь») при $t = 0$, т. е. M/p_0. Этого не может произойти, если пузыри невозможны, как, к примеру, в модели с реальным активом (т. е. $\varepsilon > 0$), где равновесие является Парето-оптимальным.

Кто-то может, руководствуясь этим наблюдением, заподозрить, что недостижение Парето-оптимальности является предпосылкой существования устойчивой неопределенности (т. е. континуума равновесий, не имеющих очевидных причинных связей с исходными данными экономики). Это подозрение может быть усилено обсуждением из раздела 20.G, в котором мы видели, что Парето-оптимальность равновесия является ключевым условием, позволяющим говорить об общей определенности равновесия в моделях с конечным числом потребителей. К сожалению, в случае с перекрывающимися поколениями число потребителей неограниченно[36], и это усложняет ситуацию. А с реальным активом Парето-оптимальность равновесия гарантирована и тип неопределенности, показанный на рис. 20.H.2, исчезает. И тем не менее возможно сконструировать вырожденный пример с континуумом равновесий.

Простейший пример представлен на рис. 20.H.4, где описывается модель с реальным активом в устойчивом состоянии $(\gamma, 1 - \gamma)$. Предположим, что в порядке, к которому мы неоднократно прибегали, мы пытались со-

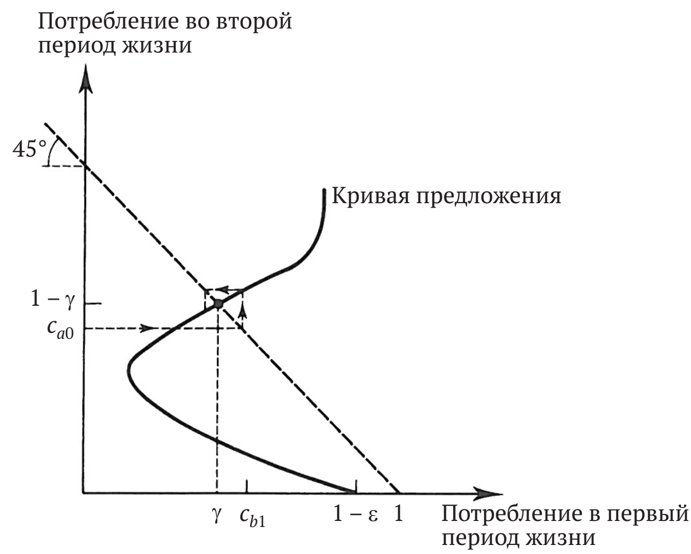


Рис. 20.H.4. Пример континуума (Парето-оптимального) равновесий в случае реального актива

[36] Под этим расплывчатым заявлением подразумевается, что нет никакого способа, который позволил бы утверждать, что бесконечное число потребителей является достаточным близким, чтобы быть «аппроксимированным» конечным числом представителей.

здать равновесие с c_{a0}, немного отличающимся от $1 - \gamma$. Тогда, нормализуя по $p_0 = 1$, мы должны использовать p_1 для того, чтобы уравновесить рынок *в момент* 0, p_2 — с теми же целями, но в момент 1 и т. д. В основной ситуации, показанной на рис. 20.H.1, мы видим, что это становится в конце концов недопустимым. Изменения p_t, которые уравновешивают отклонение, при $t - 1$ создают даже большее неравновесие при t, которое затем должно быть компенсировано бóльшим изменением в p_{t+1}, что в итоге приводит к необходимости бесконечного изменения цены. Но на рис. 20.H.4 функция полезности такова, что при равновесных относительных ценах изменение цены блага во втором периоде оказывает большее влияние на потребительский спрос в первом периоде, нежели во втором. Отсюда последовательные корректировки, обусловленные начальным возмущением, с $c_{a0} = 1 - \gamma$, ослабляются с каждой итерацией и могут осуществляться бесконечное число периодов. Таким образом, равновесие существует в новых начальных условиях. Для уточнения терминологии укажем, что локально изолированное устойчивое равновесное состояние, показанное на рис. 20.H.1, называется *детерминированным*, а состояние, показанное на рис. 20.H.4, — *недетерминированным*[37].

Интересно отметить, что случай единственности равновесия (см. рис. 20.H.1) в модели с реальным активом соответствует функции избыточного спроса валовых субститутов, тогда как на рис. 20.H.4 представлен случай некоторой комплементарности благ, порождающей неединственность равновесия, которую мы наблюдали в примерах раздела 15.B (стоит также вспомнить обсуждение единственности равновесия в разделе 17.F).

Связь между неединственностью и неопределенностью является в действительности достаточно тесной, и вас просили проверить это в упражнении 20.H.2. Здесь мы просто упоминаем о том, что валовая заменяемость не является необходимым условием единственности, что может быть проверено, к примеру, когда в модели реального актива устойчивое состояние остается единственным равновесием, если потребление в оба периода является нормальным в функции спроса от функции полезности $u(\cdot, \cdot)$ и если соответствующий избыточный спрос $(z_b(p_b, p_a), z_a(p_b, p_a))$ удовлетворяет неравенству

$$\nabla_1 z_b(p_b, p_a) < \nabla_1 z_a(p_b, p_a) \quad \text{для всех } p_b, p_a. \tag{20.H.3}$$

Выражение (20.H.3) допускает повышение цен в первый период жизни, приводящее к росту спроса в этот период (возможность исключена валовой заменяемостью); но если так, то во второй период жизни потребуется увеличить спрос. С точки зрения геометрии условие таково, что наклон кривой предложения в плоскости (c_b, c_a) никогда не будет положителен и меньше 1. Заметим, что на рис. 20.H.4 это условие нарушено в устойчивом состоянии. Условие (20.H.3) известно как *условие детерминированности*.

[37] Заметим, что по крайней мере в контексте относительно простой модели, в рамках которой мы ведем обсуждение, находится немного места для промежуточных случаев между единственностью и существованием континуума равновесий.

В противном случае, как показано на рис. 20.Н.4, существует континуум равновесий, сходящихся к устойчивому состоянию (устойчивое состояние является *недетерминированным*).

В главе 17 (см. раздел 17.D и приложение A к главе 17) мы обсуждали, что при условии Парето-оптимальности проблема равновесия с ограниченным числом потребителей может быть представлена с помощью конечного числа уравнений с тем же числом неизвестных. Исходя из этого мы утверждали, что общая детерминированность была логичной гипотезой, построенной на основе этого случая. В разделе 20.G мы расширили этот аргумент до модели с конечным числом проживающих бесконечно долгую жизнь потребителей. Однако задача перекрывающихся поколений имеет базовое отличие в формальной структуре: не существует естественного трюка, позволяющего нам увидеть равновесие как что-либо отличное от нуля в бесконечной системе уравнений (например, избыточного спроса). С математической точки зрения это существенно. Приведем пример, тесно связанный с рассмотренными вопросами. Предположим, что функция f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является линейным отображением в себя (т. е. $f(x) = Ax$, где A является невырожденной матрицей). Тогда 0 является единственным решением для $f(x) = 0$. Но представим теперь, что $f(\cdot)$ отображает ограниченные последовательности в ограниченные последовательности и что это отображение линейно и сюръективно. Тогда $f(x) = 0$, или, эквивалентно, $f_t(x_1, \dots, x_t, \dots) = 0$ для всех t, не должна иметь единственное решение. Простым примером является обратный переход, т. е. $f_t(x_1, \dots, x_t, \dots) = x_{t+1}$, где любое $(\alpha, 0, \dots, 0, \dots)$ стремится к нулю.

Что мы можем сказать о динамике равновесия? Мы видели, что принцип «все возможно» применим к модели с одним потребителем. Было бы удивительно, если бы он здесь не применялся; действительно, на рис. 20.Н.5, 20.Н.6 мы представляем невырожденные примеры с циклами[38].

Заметим, что на рис. 20.Н.6 имеется трехпериодный цикл. В примере с валовым субститутом, показанным на рис. 20.Н.1, мы имеем монотонное приближение к устойчивому состоянию. В определенном смысле случай с валовым субститутом является аналогом подхода, основанного на знаке второй производной, описанного

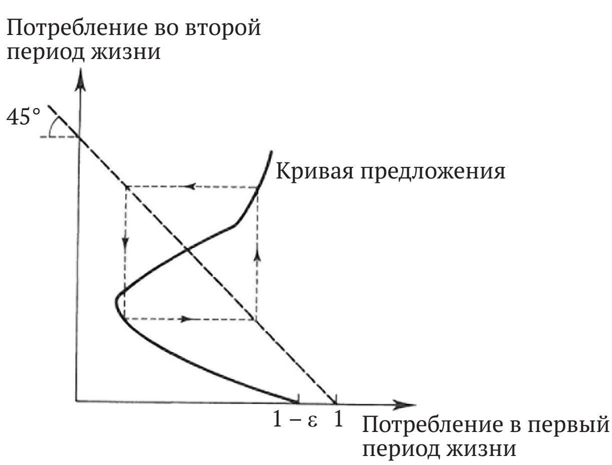


Рис. 20.Н.5. Дополнительное потребление: пример периода-2 равновесной траектории

[38] В частности, для этих примеров не требуются блага низшего качества.

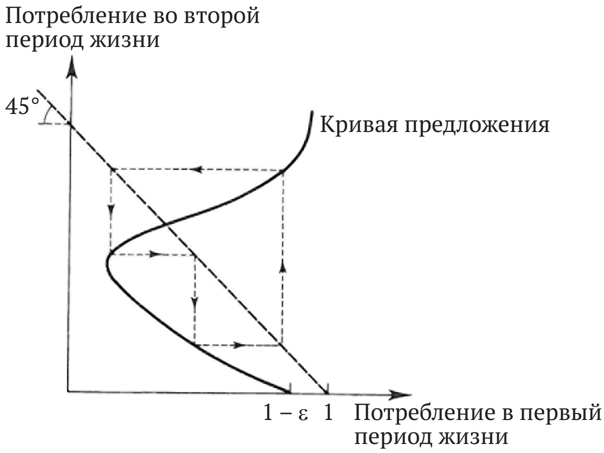


Рис. 20.H.6. Дополнительное потребление: пример периода-3 равновесной траектории

в разделе 20.F. Заметим, что в ситуации с перекрывающимися поколениями фактор дисконтирования не является ключевой концепцией, и поэтому в динамической теории, основанной на терпении, ему нет аналогов. В разделе 20.G мы вскользь упомянули, что там, видимо для случая с ограниченным числом агентов с Парето-оптимальностью, не будет близких отношений между определенностью и динамическими свойствами равновесия. В текущем множестве связь ближе по крайней мере в следующем случае: если равновесные траектории с циклами могут иметь место, то существует бесконечно много равновесий.

20.I. Замечания по неравновесной динамике: нащупывание и обучение

Динамический анализ, который нас интересовал в этой главе, отличается от динамики, изученной в разделе 17.H. Динамика здесь отображает временное «развитие» равновесия (внутреннее свойство равновесия в терминологии раздела 20.G), в то время как в разделе 17.H мы пытались оценить динамические силы, которые в реальном или вымышленном времени будут влиять на экономику, выведенную из состояния равновесия (внешнее свойство). Как мы видели, неравновесный динамический анализ поднимает целое множество концептуальных проблем. Кроме того, он позволяет с иной стороны взглянуть на возможность возникновения частного равновесия.

Если абстрагироваться от технических сложностей, анализ и результаты раздела 17.H могут быть адаптированы и справедливы для модели с бесконечным горизонтом и конечным числом потребителей из раздела 20.G. С другой стороны, как мы уже видели, временные рамки подразумевают свою собственную специальную теорию, которая предположительно может быть освещена специфическими неравновесными соображениями. Сделаем три замечания относительно вышесказанного.

Краткосрочное равновесие и постоянный доход[39]

Предположим, что $(p_0, \ldots, p_t, \ldots)$ является вектором равновесных цен экономики с L благами и I потребителями. Потребители такие же, как и в разделе 20.D. Тогда в равновесии мы имеем потребление (предполагая внутреннее потребление)

$$\delta^t \nabla u_i(c_{ti}) = \lambda_i p_i \quad \text{для всех } t \text{ и } i. \tag{20.I.1}$$

Это просто (20.D.6). Переменная λ_i является предельной полезностью дохода, или богатства, обратные векторы $(\eta_1, \ldots, \eta_I) = (1/\lambda_1, \ldots, 1/\lambda_I)$ могут служить в качестве весов, для которых данное равновесие максимизирует взвешенную сумму полезностей (см. раздел 20.G).

Из (20.I.1) следует, что краткосрочные спросы (т. е. спрос при $t = 0$) являются полностью детерминированными по $c_{0i}(\mathrm{p}, \lambda_i)$. В соответствии с идеей «нащупывания» предполагаем, что p_0 выводится из устойчивого состояния к p_0'. Что произойдет со спросом при $t = 0$? Если λ_i остается фиксированной, то (20.I.1) приводит к тому, что краткосрочный спрос ведет себя как спрос для товара, не являющегося измерителем в квазилинейной модели с вогнутыми функциями полезности. В частности, дифференцируя (20.I.1), мы видим, что матрица $L \times L$ краткосрочных ценовых эффектов

$$Dp_0 c_{0i}(p_0, \lambda_i) = \lambda_i [D^2 u_i(c_{0i})]^{-1}$$

является отрицательно определенной (из-за вогнутости функции $u(\cdot)$) и агрегированная функция выглядит следующим образом: $\sum_i Dp_0 c_{0i}(p_0, \lambda_i)$. То есть пока λ_i остается фиксированной, эффект дохода остается нулевым. Преобладает эффект замещения, и, следовательно, краткосрочное равновесие является единственным и «нащупывание» глобально стабильно.

В действительности, однако, после изменения p_0 нам следует ожидать, что λ_i изменится до нового потребительского оптимума. Но если ставка дисконтирования близка к 1 (т. е. агенты терпеливы), то изменения в λ_i должны быть малы. Текущий период не является более важным, чем любой другой, и поэтому он будет составлять лишь малую часть от общей полезности и расходов. Отсюда мы могли бы заключить, что анализ частичного равновесия оправдан в краткосрочном периоде (вспомните обсуждение анализа частичного равновесия в разделе 10.G). Итак, *если потребители достаточно терпеливы, то краткосрочное равновесие будет единственным и глобально стабильным (для динамики «нащупывания»)*.

Закон спроса (краткосрочного) и модели перекрывающихся поколений

Теперь мы рассматриваем краткосрочное равновесие в модели перекрывающихся поколений из раздела 20.H. Это пример модели, в которой эффект богатства значим в краткосрочном периоде и поэтому подход с по-

[39] Более подробное изложение см. в работе (Bewley, 1977). Термин «постоянный доход» является стандартным, и мы используем его чаше, чем понятие «постоянное богатство».

стоянным доходом не применяется. Мы рассматриваем версию модели с реальным активом и нормальными благами и задаем следующий вопрос: поможет ли нам стабильность возможной динамики «нащупывания» в данный период t различать типы равновесия? Поскольку существует единственное благо за период, критерий стабильности в периоде является достаточно простым — он сводится к закону спроса в период t. То есть мы говорим, что равновесие $(p_0, \ldots, p_t, \ldots)$ является апробированно стабильным в период t, если (ожидаемый) рост цены p_t при неизменности других цен приводит к избыточному предложению в этом периоде (заметим, что только поколения $t - 1$ и t изменят свои потребительские планы).

Нам известно, что если функция избыточного спроса поколений является функцией типа общего субститута, то тогда существует единственное равновесие (в устойчивом состоянии, см. рис. 20.H.1). Более того, определение общего субститута говорит нам о том, что закон спроса удовлетворен при каждом t. Это дает нам первую связь между понятиями определенного равновесия и апробированной стабильностью. Эта связь может быть расширена за пределы случая общего субститута. Примем вектор цен в состоянии устойчивого равновесия равным $(1, \rho, \ldots, \rho^t, \ldots)$. Из гомогенности избыточных функций спроса в нулевой степени $(z_a(\cdot, \cdot), z_b(\cdot, \cdot))$ следует гомогенность степени -1 функции $\nabla z_a(\cdot, \cdot)$ и $\nabla z_b(\cdot, \cdot)$, таким образом, имеем (вам предлагается проверить это в упражнении 20.I.1)

$$\nabla_2 z_a(1/\rho, 1) + \nabla_1 z_b(1, \rho) = \rho \nabla_2 z_a(1, \rho) + \nabla_1 z_b(1, \rho) =$$
$$= -\nabla_1 z_a(1, \rho) + \nabla_1 z_b(1, \rho).$$

Отрицательный знак левой части равенства является критерием апробированной стабильности, т. е. законом спроса для единственного рынка[40]. При отрицательности правой части равенства (когда эффекты дохода не столь велики, чтобы снижение цены в один из периодов повышало спрос в меньшей степени, чем это увеличивает спрос тех же представителей молодого поколения на их потребление в следующий период) это критерий определенности устойчивого состояния [см. выражение (20.H.3)]. Вспомним, что определенность гарантирует отсутствие какой-либо другой равновесной траектории, которая остается в сколь угодно малой окрестности от устойчивого состояния. Мы заключаем, что существует точное соответствие: *равновесие устойчивого состояния является* (*краткосрочно, локально*) *апробированно стабильным при любых значениях t, если и только если оно определенное*[41].

Мы ограничились случаем реального актива для избежания технических сложностей. С чисто номинальным активом предыдущая концепция апробированной стабильности теряет силу из-за различия определенного

[40] Если p_t не будет меняться бесконечно, то спрос старших поколений изменится на $\nabla_2 z_a(\rho^{t-1}, \rho^t)$, тогда как спрос младших поколений — на $\nabla_1 z_b(\rho^t, \rho^{t+1})$. Поскольку $\nabla_2 z(\cdot, \cdot)$ и $\nabla_1 z(\cdot, \cdot)$ являются гомогенными степени -1, общее изменение равно $(1/\rho^t)\nabla_2 z_a(1/\rho, 1) + (1/\rho^t)\nabla_1 z_b(1, \rho)$.

[41] В утверждении «если и только если» мы пренебрегаем пограничными случаями.

и неопределенного устойчивого состояния равновесия, если мы ограничимся устойчивыми состояниями (чтобы увидеть это, рассмотрим простейший случай общего субститута). Концепция обучения, представленная в следующей части этого раздела, не имеет подобных ограничений.

Обучение

Теперь обсудим неравновесную динамику, которая имеет место в режиме реального времени и может быть интерпретирована в терминах обучения. Наша модель — перекрывающиеся поколения из раздела 20.H, и для рассмотрения наиболее простой ситуации мы сфокусируемся на случае чисто номинального актива.

Во-первых, опишем, как определено кратковременное равновесие (т. е. равновесие в данный период времени t). Предположим, что существует некоторое фиксированное количество денежных средств M (например, в долларах). Избыточный спрос старшего поколения в период $t \geq 1$ составит M/p_t. Избыточный спрос более молодого поколения на тот же период зависит от p_t, но также зависит от *ожиданий* p^e_{t+1} цены в момент $t + 1$. При заданном p^e_{t+1} цена p_t является *кратковременным равновесием при* $t \geq 1$, если $z_b(p_t, p^e_{t+1}) + (M/p_t) = 0$. Таким образом, задавая последовательность ожидаемых значений цен $(p^e_1, \ldots, p^e_t, \ldots)$, мы генерируем последовательность цен временного равновесия $(p_1, \ldots, p_t, \ldots)$.

Но как определить ожидаемые цены? Рассмотрение их как заданных экзогенным образом не имеет особого смысла. Последовательность реальных цен должна оказывать влияние на последовательность ожиданий. Рациональный подход (которого мы неявно придерживаемся в этой главе) налагает корректное условие ожиданий: $p^e_{t+1} = p_{t+1}$ для каждого t[42]. Альтернативой является требование, чтобы p^e_{t+1} (цена, ожидаемая в момент t преобладать в момент $t + 1$) представляла собой экстраполяцию прошлых (и текущих) реализаций $p_0, \ldots, p_t$. При таком подходе мы считаем, что потребители вовлечены в некоторое обучение и ожидания формируются исходя из полученного опыта[43].

Давайте примем не вполне реалистичное, но очень простое правило экстраполяции: $p^e_{t+1} = p_{t-1}$ (т. е. цена в момент $t + 1$, ожидаемая молодым поколением в момент $t \geq 1$, является ценой, которая имела место в ближайшем прошлом). Эквивалентно (задавая фиксированное количество денег M) молодое поколение в момент t ожидает объем потребления в мо-

[42] Термин «самостоятельно выполненный» оправдан, поскольку последовательность ожиданий $(p^e_1, \ldots, p^e_t, \ldots)$ индуцирует последовательность реализаций, идентичную самой себе. Термин «рациональный» вытекает из того факта, что при заданных $(p^e_1, \ldots, p^e_t, \ldots)$ член поколения t должен в принципе быть способным определить цену реализации p_{t+1} и таким образом проверить корректность p^e_{t+1}.

[43] Следует подчеркнуть, что, во-первых, все эти раассуждения относятся к неравновесной истории, и, во-вторых, что мы не можем строго обсуждать обучение без непосредственного введения условий неопределенности.

мент $t + 1$, равный объему потребления старшего поколения в момент $t - 1$. Уравнение для определения p_t задается следующим образом

$$z_b(p_t,\ p_{t-1}) = -\frac{M}{p_t}. \tag{20.I.2}$$

Согласно закону Вальраса (20.I.2) может быть записано в виде

$$z_a(p_t,\ p_{t-1}) = \frac{M}{p_{t-1}}. \tag{20.I.3}$$

Задавая произвольное начальное условие p_0, мы можем просчитать последовательность временных равновесных цен (p_1, ..., p_t) путем итераций, используя (20.I.2) или (20.I.3). Отметим, что в данных условиях запланированные функции избыточного спроса (20.I.2) будут реализовываться, а (20.I.3) — нет (поскольку цена p_{t+1} может не быть равной p_{t-1}). Динамический процесс представлен на рис. 20.I.1. Здесь c_{bt} и c^e_{at} обозначают запланированное потребление поколений t в момент t и $t + 1$ соответственно. Задавая M/p_{t-1}, мы получаем c^e_{at} из (20.I.3) и c_{bt} из того факта, что запланированное потребление лежит на кривой предложения. В заключение (20.I.2) сдвигает нас к следующей стоимости, M/p_t. Для поколения 1 мы показываем также вектор потребления (c_{b1}, c_{a1}).

Из рис. 20.I.1 виден интересный факт: динамика обучения точно меняет динамику равновесия (сравните с рис. 20.H.2)[44]. Для случая общего субститута, показанного на рисунке, это означает, что все траектории имеют тенден-

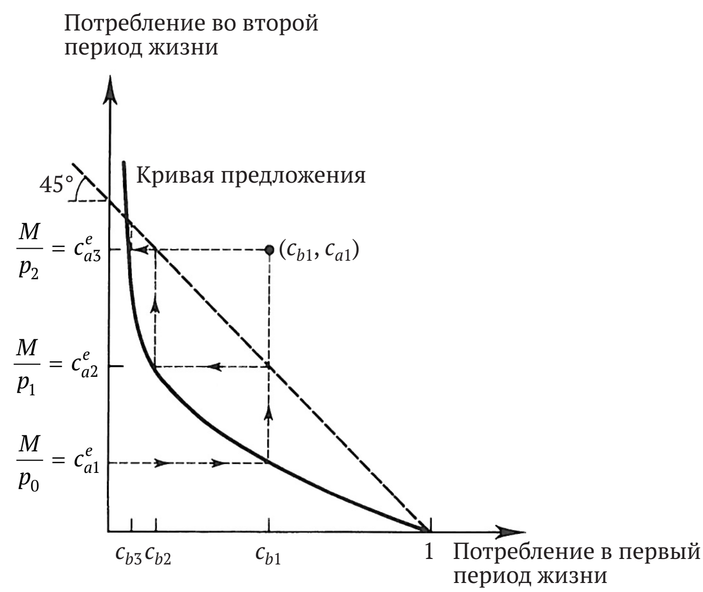


Рис. 20.I.1. Динамика обучения

[44] Более точно, если (p_1, ..., p_t, ...) является последовательностью реализаций адаптивной динамики ожиданий, то для любого T существует равновесная последовательность (p'_0, ..., p'_t), такая что $p'_t = p_{T-1}$ для каждого $t < T$.

цию к денежному устойчивому состоянию. Отсюда в пределе мы имеем выполнение ожидаемого равновесия. Потребители учатся, таким образом, поддерживать равновесие. Для «сырой» динамики обучения, которую мы рассматриваем, это не является необходимым в случае общей кривой предложения (бесконечная последовательность с систематической ошибкой ожиданий является возможной), но более детальное изучение динамики равновесия подтверждает сделанные ранее интуитивные выводы: устойчивое состояние является (локально) стабильным для динамики обучения, если и только если оно определено (т. е. «локально изолировано»).

Литература

Allais, M. (1947). *Economie et Interét.* Paris: Imprimérie Nationale.

Barro, R. (1989). The Ricardian approach to budget deficits. *Journal of Economic Perspectives* **3**: 37–54.

Bewley, T. (1977). The permanent income hypothesis: A theoretical formulation. *Journal of Economic Theory* **16**: 252–92.

Blackorby, C., D. Primont, and R. Russell (1978). *Duality, Separability, and Functional Structure: Theory and Economic Applications*. Amsterdam: North-Holland.

Blanchard, O., and S. Fisher (1989). *Lectures on Macroeconomics*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

Boldrin, M., and L. Montruccio (1986). On the indeterminacy of capital accumulation paths. *Journal of Economic Theory* **40**: 26–39.

Bliss, C. (1975). Capital Theory and the Distribution of Income. Amsterdam: North-Holland.

Brock W. A., and E. Burmeister (1976). Regular economies and conditions for uniqueness of steady-states in optimal multisector economic models. *International Economic Review* **17**: 105–20.

Cass, D. (1972). On capital overaccumulation in the aggregative, neoclassical model of economic growth: a complete characterization. *Journal of Economic Theory* **4**: 200–23.

Deneckere, R., and J. Pelican (1986). Competitive chaos. *Journal of Economic Theory* **40**: 13–25.

Gale, D. (1973). On the theory of interest. *American Mathematical Monthly* **88**: 853–68.

Geanakopulos, J. (1987). Overlapping generations. Entry in *The New Palgrave*: *A Dictionary of Economics*, edited by J. Eatwell, M. Milgate, and P. Newman. London: Macmillan.

Grandmont, J. M. (1986). Periodic and aperiodic behavior in discrete one dimensional systems. *In Contributions to Mathematical Economics*, edited by W. Hildebrand, and A. Mas-Colell. Amsterdam: North-Holland.

Kehoe, T., and D. Levine (1985). Comparative statics and perfect foresight. *Econometrica* **53**: 433–54.

Koopmans, T. C. (1960). Stationary ordinal utility and impatience. *Econometrica* **28**: 287–309.

Malinvaud, E. (1953). Capital accumulation and efficient allocation of resources. *Econometrica* **21**: 223–68.

McKenzie, L. (1987). Turnpike theory. Entry in *The New Palgrave*: *A Dictionary of Economics*, edited by J. Eatwell, M. Milgate, and P. Newman. London, Macmillan.

Ramsey, F. (1928). A mathematical theory of saving. *Economic Journal* **38**: 543–49.

Samuelson, P. A. (1958). An exact consumption-loan model of interest without the social contrivance of money. *Journal of Political Economy* **66**: 467–82.

Santos, M. S. (1991). Smoothness of the policy function in discrete time economic models. *Econometrica* **59**: 1365–82.
Solow, R. M. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *Quarterly Journal of Economics* **70**: 65–94.
Stokey, N., and R. Lucas, with E. C. Prescott. (1989). *Recursive Methods in Economic Dynamics*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.
Swan, T. W. (1956). Economic growth and capital accumulation. *Economic Record* **32**: 334–61.
Uzawa, H. (1964). Optimal growth in a two-sector model of capital accumulation. *Review of Economic Studies* **31**: 1–24.
Weizsäcker, C. C. von (1971). *Steady State Capital Theory*. New York: Springer-Verlag.
Wilson, C. (1981). Equilibrium in dynamic models with an infinity of agents. *Journal of Economic Theory* **24**: 95–111.
Woodford, M. (1984). Indeterminacy of equilibrium in the overlapping generations model: a survey. Mimeograph, Columbia University.

Упражнения

20.B.1$^{\mathrm{B}}$. Адаптируя определение времени нетерпения, данное в примечании (1) к разделу 20.B, покажите, что функция полезности в форме (20.B.1) обладает свойством нетерпения ко времени.

20.B.2$^{\mathrm{B}}$. Проверьте, является ли функция полезности в форме (20.B.1) стационарной в соответствии с определением, данным в комментарии (2) к разделу 20.B. Покажите также, что для функции полезности в форме $V(c) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta_t^t u(c_t)$ нарушается условие стационарности.

20.B.3$^{\mathrm{B}}$. Ссылаясь на комментарий (3) к разделу 20.B, запишите $c = (c', c'')$, где $c' = (c_0, \ldots, c_t)$, $c'' = (c_{t+1}, \ldots)$. Предположим, что функция полезности $V(\cdot)$ аддитивно сепарабельна. Показать, что если $V(\bar{c}', c'') \geq$ $\geq V(\bar{c}', \hat{c}'')$ для некоторых $\bar{c}'$, то $V(c', c'') \geq V(c', \hat{c}'')$ для всех c'. Покажите, что если $V(c', \bar{c}'') \geq V(\hat{c}', \bar{c}'')$ для некоторых $\bar{c}''$, то $V(c', c'') \geq V(\hat{c}', c'')$ для всех c''. Проинтерпретируйте результат.

20.B.4$^{\mathrm{C}}$. Покажите, что в модели рекурсивной полезности с функцией агрегатора $G(u, V) = u^{\alpha} + \delta V^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $\delta < 1$, и возрастающей, непрерывной однопериодной полезностью $u(c_t)$ функция $V(c)$ ограниченного потока потребления хорошо определена. [*Подсказка*: использовать (20.B.3) для расчета полезности от потоков потребления, ограниченных до конечного горизонта. Затем покажите, что существует предел при $T \to \infty$. В заключение покажите, что предел удовлетворяет уравнению агрегатора.]

20.B.5$^{\mathrm{A}}$. Покажите, что функция полезности $V(c)$ из (20.B.1) является вогнутой. Покажите также, что аддитивная сепарабельность функции полезности $V(\cdot)$ — центральное свойство.

20.C.1$^{\mathrm{A}}$. При заданной последовательности цен $(p_0, p_1, \ldots, p_t, \ldots)$, $p_t \in \mathbb{R}^L$, определить для каждого t и каждого товара l ставку процента с момента t до момента $t + 1$ в терминах товара l (известную как *собственная ставка процента* товара l в момент t).

20.C.2$^{\mathrm{A}}$. Покажите, что если траектория $(y_0, \ldots, y_t, \ldots)$ максимизирует мгновенную прибыль для $(p_0, p_1, \ldots, p_t, \ldots) \geq 0$, то $(y_0, \ldots, y_t, \ldots)$ также максимизирует прибыль для $(p_0, p_1, \ldots, p_t, \ldots)$ на любом конечном горизонте в том смысле, что для любого T общая прибыль для первых T периодов не может быть увеличена за счет каких-либо изменений управляемых переменных в эти периоды.

20.C.3$^{\mathrm{A}}$. Дайте определение концепции слабой эффективности и докажите утверждение 20.C.1, предполагая лишь, что $(p_0, \ldots, p_t, \ldots)$ является неотрицательной последовательностью, содержащей хотя бы один ненулевой элемент.

20.C.4$^{\mathrm{B}}$. Предположим, что производственная траектория $(y_0, .., y_t, \ldots)$ является ограниченной (т. е. существует фиксированное значение α, такое что $\|y_t\| \leq \alpha$ для всех t), что $(p_0, \ldots, p_t, \ldots) \gg 0$ и что $\sum_{t=0}^{\infty} p_t < \infty$. Будем говорить, что траектория $(y_0, \ldots, y_t, \ldots)$ максимизирует совокупную прибыль по $(p_0, \ldots, p_t, \ldots)$, если

$$\sum_{t=0}^{\infty} (p_t \cdot y_{bt} + p_{t+1} \cdot y_{a,t}) \geq \sum_{t=0}^{\infty} (p_t \cdot y'_{bt} + p_{t+1} \cdot y'_{a,t})$$

для любой другой производственной траектории $(y'_0, \ldots, y'_t, \ldots)$.

a) Покажите, что если $(y_0, \ldots, y_t, \ldots)$ является максимизирующей совокупную прибыль по $(p_0, \ldots, p_t, \ldots) \gg 0$, то она эффективна.

b) Покажите, что если $(y_0, \ldots, y_t, \ldots)$ максимизирует мгновенную прибыль по $(p_0, \ldots, p_t, \ldots) \gg 0$, то она максимизирует совокупную прибыль.

20.C.5$^{\mathrm{C}}$. Говорят, что производственная траектория $(y_0, \ldots, y_t, \ldots)$ является T-эффективной ($T < \infty$), если не найдется другой производственной траектории $(y'_0, \ldots, y'_t, \ldots)$, которая, во-первых, доминирует $(y_0, \ldots, y_t, \ldots)$ с точки зрения эффективности и, во-вторых, такова, что мощность множества $\{t : y_t \neq y'_t\}$ не превышает T.

a) Покажите, что если $(y_0, \ldots, y_t, \ldots)$ максимизирует мгновенную прибыль по $(p_0, \ldots, p_t, \ldots)$, то $(y_0, \ldots, y_t, \ldots)$ является T-эффективной для всех $T < \infty$.

b) Покажите, что если производственные функции являются гладкими (в смысле, используемом в небольшой дискуссии в конце раздела 20.C, и в предположении, что внешние нормали к производственным границам строго положительны), то 2-эффективность предполагает T-эффективность для всех $T < \infty$.

c) (*более сложное задание*). Покажите, что заключение (b) несостоятельно для технологий общей линейной активности. Приведите пример. [*Подсказка*: опирайтесь на цепочки промежуточных товаров.]

20.C.6$^{\mathrm{A}}$. Рассмотрите технологию Рамсея — Солоу из примера 20.C.1 в продолжении из примера 20.C.6. Пусть $(l_0, \ldots, l_t, \ldots)$ — экзогенная траектория запасов труда. Задавая производственную траекторию в виде $(k_0, \ldots, k_t, \ldots)$, определим последовательность цен на потребительский товар $(q_0, \ldots, q_t, \ldots)$ с учетом условия $(q_t/q_{t+1}) = \nabla_1 F(k_t, l_t)$ для всех t. Покажите, что последовательность заработных плат w_t будет найдена таким образом, что траектория, определенная $(k_0, \ldots, k_t, \ldots)$, максимизирует мгновенную прибыль для последовательности цен, определенной $((q_0, w_0), \ldots, (q_t, w_t), \ldots)$.

20.D.1^{A}. Рассмотрите бюджетное ограничение к задаче (20.D.3). Упрощая, предположим, что имеется чистая ситуация обмена. Запишите бюджетное ограничение как последовательность бюджетных ограничений, по одному для каждого периода. Предположите, что деньги можно брать в долг и ссужать по нулевой номинальной процентной ставке.

20.D.2^{A}. Покажите, что условие (2′) в разделе 20.D (сформулировано перед определением 20.D.2) предполагает выполнение условия (2) из определения 20.D.1. Покажите также, что условие (2) совместно с $w = \sum_t p_t \cdot w_t + \sum_t \pi_t < \infty$ предполагает выполнение условия (2′).

20.D.3^{A}. В тексте.

20.D.4^{A}. Выполните расчеты, которые требуются в примере 20.D.1.

20.D.5^{C}. В контексте примера 20.D.3 найдите уравнения Эйлера для оптимальной инвестиционной стратегии, когда производственная функция имеет форму $F(k) = k^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ и корректировочная функция издержек задана в виде $g(k' - k) = (k' - k)^{\beta}$, с $\beta > 1$ для $k' > k$ и $g(k' - k) = 0$ для $k' \le k$. Опишите стратегию как можно более подробно. В частности, определите траекторию стационарного состояния инвестиций.

20.D.6^{B}. Проверьте утверждение, сформулированное в доказательстве утверждения 20.D.7, о том, что уравнения Эйлера (20.D.9) являются необходимыми и достаточными условиями первого порядка для краткосрочной максимизации. Другими словами, они необходимы и достаточны для несуществования улучшенной траектории, отличной от заданной только для ограниченного количества периодов.

20.D.7^{A}. С отсылкой к примеру 20.D.4 покажите, что для заданных форм функций уравнения Эйлера имеют вид, показанный в примере $k_{t+1} = 3k_t - 2k_{t-1}$ для каждого t. Также проверьте тот факт, что решение разностного уравнения, данного в тексте, действительно является решением задачи, т. е. что оно удовлетворяет уравнению.

20.D.8^{A}. Проверьте, что значение функции $V(k)$ не удовлетворяет свойствам (1) и (2), о которых идет речь в конце раздела 20.D.

20.D.9^{A}. Приведите аргументы, доказывающие, что свойства (1) и (2) значения функции из упражнения 20.D.8 влекут за собой два следствия, касающиеся $V'(k)$ и $V''(k)$, которые приведены в конце раздела 20.D.

20.E.1^{A}. Покажите, в каком смысле термин r, определенный после доказательства утверждения 20.E.1, может быть проинтерпретирован как ставка процента, неявно вытекающая из пропорциональной последовательности цен.

20.E.2$^{\mathbf{B}}$. Предположим, что производственное множество $Y \subset \mathbb{R}^L$ представляет собой тип множества с постоянной доходностью и рассматривает *пропорциональные* производственные траектории (но необязательно стационарные), т. е. траектории $(y_0, \ldots, y_t, \ldots)$, которые удовлетворяют $y_t = (1 + n)y_{t-1}$ для всех t и некоторых n.

a) Приведите аргументы, подтверждающие, что вывод утверждения 20.E.1 остается справедливым для пропорциональных траекторий.

b) Сформулируйте и докажите результат, аналогичный утверждению 20.E.2, для пропорциональных траекторий.

20.E.3$^{\mathbf{B}}$. Предположите, что в модели Рамсея — Солоу $\bar{k}$ является решением задачи максимизации $\max(F(k, 1) - k)$ (см. рис. 20.E.2). Покажите, что если $k_t \leq \bar{k} - \varepsilon$ для всех t, то траектория, определенная $(k_0, \ldots, k_t, \ldots)$, является эффективной. (*Подсказка*: рассчитайте цены и проверьте условие трансверсальности.)

20.E.4$^{\mathbf{A}}$. Докажите три неоклассических свойства, о которых идет речь в конце основной части текста раздела 20.E.

20.E.5$^{\mathbf{A}}$. Выполните требуемую проверку выражения (20.E.1).

20.E.6$^{\mathbf{A}}$. Выполните требуемую проверку представленного на рис. 20.E.3 факта.

20.E.7$^{\mathbf{A}}$. В модели Рамсея — Солоу два различных стационарных состояния ассоциируются с различными уровнями процентной ставки. В примере, который представлен на рис. 20.E.3 и на первый взгляд кажется очень похожим, данный факт уже не имеет места. Ключевым отличием является то, что в модели Рамсея — Солоу потребительские и инвестиционные товары являются совершенными заменителями в производстве. В контексте примера, представленного на рис. 20.E.3, покажите, что если два товара являются совершенными заменителями, то $r(\bar{k}) \neq r(\bar{\bar{k}})$ для любого $\bar{k} \neq \bar{\bar{k}}$. (*Подсказка*: если два товара являются совершенными, то $G(k, k' + \alpha) = G(k, k') - \alpha$ для любых $\alpha < F(k, k')$.)

20.E.8$^{\mathbf{A}}$. Рассмотрите пропорциональные производственные траектории с темпами роста, равными $n > 0$ (вспомните упражнение 20.E.2), в контексте технологии Рамсея — Солоу с постоянной отдачей. Покажите, что одна из этих траекторий, максимизирующая излишек (при $t = 1$, или, что то же самое, нормализованный, или «подушевой», избыток), характеризуется уровнем процентной ставки, равным n. Эта траектория также называется *стационарным состоянием золотого правила*.

20.E.9$^{\mathbf{A}}$. Найдите аргументы, показывающие, что для модели с одним потребителем, представленной в разделе 20.D, траектория золотого правила не может быть найдена как часть конкурентного равновесия. (*Подсказка*: ключевым является тот факт, что $\delta < 1$.)

20.F.1^C. Рассмотрите две произвольные функции, $\gamma_1(w)$ и $\gamma_2(w)$, которые определены для $w > 0$, принимают неотрицательные значения и удовлетворяют $\gamma_1(w) + \gamma_2(w) = w$ для всех w. Предположите также, что эти функции являются дважды непрерывно дифференцируемыми.

Покажите теперь, что при любых значениях $\alpha > 0$ найдется функция полезности для двух товаров $u(x_1, x_2)$, являющаяся возрастающей и вогнутой на области определения $\{(x_1, x_2): x_1 + x_2 \leq \alpha\}$ и такая, что $(\gamma_1(w), \gamma_2(w))$ совпадает с кривыми Энгеля для цен $p_1 = 1$, $p_2 = 1$ и благосостоянием $w < \alpha$. (*Подсказка*: пусть $u(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^{1/2} - \varepsilon[(x_1 - \gamma_1(x_1 + x_2))^2 + (x_2 - \gamma_2(x_1 + x_2))^2]$, и пусть ε достаточно мало. Проверьте, что в этом случае $\nabla u(x_1, x_2)$ является строго положительной и $D^2u(x_1, x_2)$ является отрицательно определенной для любых (x_1, x_2), таких что $0 < x_1 + x_2 \leq \alpha$, и что кривая Энгеля соответствует предъявляемым требованиям.

20.F.2^A. Предположим, что для $k \in \mathbb{R}_+$ функция стратегии $\psi(k)$ является заключением контракта (см. определение в части раздела 20.F под заголовком «Низкий уровень дисконтирования при учете фактора времени»). Нарисуйте несколько возможных графиков для такой функции стратегии и приведите аргументы в пользу того, что всегда будет существовать единственное устойчивое состояние. Проведите динамический анализ получившихся графиков и установите с их помощью, что устойчивые состояния всегда глобально устойчивы.

20.F.3^A. Проверьте, что классическая технология Рамсея — Солоу и технология издержек приспособления (адаптации) удовлетворяют свойству положительных смешанных производных.

20.F.4^A. Выполните проверку, требуемую в примере 20.F.1, для случая транзиторных шоков.

20.F.5^A. Выполните проверку, требуемую в примере 20.F.1, для случая перманентных шоков.

20.G.1^B. Проанализируйте задачу равновесия в экономике обмена с двумя потребителями ($I = 2$) и единственным товаром ($L = 1$). Оба потребителя имеют один и тот же фактор дисконтирования [функции полезности применяются в форме (20.B.1)]. Предположим также, что $w_{t1} + w_{t2} = 1$ для всех t. Покажите, что, в частности, равновесные потребительские потоки должны быть стационарными, что последовательность равновесных цен является пропорциональной (какова ставка процента?) и что существует единственный равновесный поток потребления.

20.G.2^A. Рассмотрим модель обмена с двумя потребителями. Функции полезности используются в форме (20.B.1), и оба потребителя имеют одинаковый фактор дисконтирования. Ограничений на количество товаров L или на совокупные запасы при любом значении t не существует. Покажите, что при Парето-оптимальном распределении выполняется следующее условие: для каждого потребителя предельные полезности мгновенного богатства потребителя равны (и равны общей предельной полезности богатства потребителя). Объясните, что это означает в терминах межпериодных и межличностных трансфертов богатства.

20.G.3$^{\text{B}}$. Ситуация та же, что и в упражнении 20.G.2.

a) Выполните параметризацию Парето-границы множества возможных уровней полезности, используя отношение предельных полезностей богатства двух потребителей.

b) Затем запишите уравнения равновесия по Негиши (см. Приложение А к главе 17). То есть выпишите уравнение с одним неизвестным (отношение предельных полезностей богатства), решения которого являются равновесием модели.

c) Аргументируйте с использованием терминологии раздела 17.D, что в общем случае существует ограниченное число равновесных состояний. Будьте как можно более точными.

20.G.4$^{\text{A}}$. Докажите утверждение из сноски 32. Подробно представьте форму равновесной последовательности цен.

20.G.5$^{\text{B}}$. Проверьте следующий факт: вогнутость функции полезности предполагает, что выражение (20.G.6) шире, чем его абсолютное значение, если нет экстернальности (т. е. $\nabla^2_{23}u(\cdot) = \nabla^2_{13}u(\cdot) = 0$).

20.H.1$^{\text{B}}$. Покажите в контексте разделов 20.D или 20.G (ограниченное число потребителей), что в равновесии не могут появляться пузыри.

20.H.2$^{\text{B}}$. В рамках раздела 20.H выполните следующие задания (допускаются схематичные доказательства):

a) Покажите, что если условие (20.H.3) удовлетворено, то для случая реального актива единственным равновесием будет стационарное состояние.

b) Покажите, что если условие (20.H.3) удовлетворено, то для случая чисто номинального актива монетарно стабильное состояние является единственным равновесием, при этом оно является Парето-оптимумом.

c) Предположим, что условие (20.H.3) нарушается (имеет место строгое равенство $p_a = p_b$). Покажите, что для случая чисто номинального актива найдется более чем одно Парето-оптимальное равновесие.

d) (повышенная сложность) Предположим, что функция полезности представлена в форме $v(c_b) + \delta v(c_a)$. Исследуйте, какими должны быть $v(\cdot)$ и δ, чтобы эксцесс функции спроса удовлетворял условию (20.H.3). (*Подсказка*: вспомните пример 17.F.2 для специального случая.)

20.I.1$^{\text{A}}$. Проверьте выкладки в части раздела 20.I под заголовком «*Закон спроса (краткосрочного) и модели перекрывающихся поколений*».

Часть V

ЭКОНОМИКА БЛАГОСОСТОЯНИЯ И СТИМУЛЫ

Часть V посвящена систематическому изложению ряда тем, относящихся к основам экономики благосостояния, — тем, которые неоднократно возникали в предыдущих главах. Эти темы рассматриваются с точки зрения планировщика, вовлеченного в процесс разработки и воплощения коллективных решений.

В главе 21 будет рассмотрена классическая теория общественного выбора. Главный вопрос этой теории касается возможности представления целей планировщика в виде результата агрегирования предпочтений агентов в экономике, и соответствии такого представления некоторым желательным критериям. Сложность этой задачи ярко иллюстрирует теорема о невозможности Эрроу, которую мы излагаем и детально обсуждаем в этой главе. В более позитивном ключе мы обсудим предпосылку об однопиковых предпочтениях и проанализируем, как работает голосование по правилу большинства в свете этой предпосылки.

В главе 22 мы, в той или иной степени, допускаем возможность оценочных суждений о сопоставимости индивидуальных уровней полезности. Бóльшая часть главы посвящена изложению экономики благосостояния в традициях Бергсона — Самуэльсона. Для этой цели мы развиваем инструментарий множеств возможных уровней полезности и функций общественного благосостояния и подчеркиваем разницу между задачами поиска первого и сторого наилучшего. Также описывается аксиоматическая теория торга — подхода, который представляет общественные решения как результат некоторого компромисса, а не попыток оптимизации в условиях ограничений.

В главе 23 мы отмечаем, что в действительности планировщик редко точно знает предпочтения агентов; чаще эта информация известна только самим индивидам. Наличие у рациональных эгоистичных агентов частной информации создает серьезные ограничения совместимости по стимулам на поиск второго наилучшего. Мы детально проанализируем, какие механизмы возможно или невозможно коллективно реализовать в свете этих ограничений. Содержание главы 23 связано с теорией игр, рассмотренной в части II, и рядом тем, впервые затронутых в части III.

Глава 21. Теория общественного выбора

21.A. Введение

В этой главе мы изучим вопрос о том, насколько индивидуальные предпочтения поддаются агрегированию в общественные предпочтения или, более прямо, в общественные решения, а также о том, насколько «удовлетворительный» характер носит это агрегирование, т. е. каким желательным свойствам оно соответствует.

На всем протяжении этой главы мы будем рассматривать множество возможных общественных альтернатив и популяцию индивидов с четко определенными предпочтениями на этом множестве.

Раздел 21.B мы начнем с простейшего случая, когда множество альтернатив содержит лишь два элемента. Для этого случая существует много способов удовлетворительного решения задачи агрегирования. Мы уделим основное внимание подробному анализу свойств агрегирования путем голосования по правилу большинства.

В разделе 21.C мы перейдем к случаю множественных альтернатив, и обсуждение примет решительно пессимистический характер. Мы сформулируем и докажем знаменитую *теорему о невозможности Эрроу*. По существу, эта теорема говорит о том, что невозможно иметь все: если мы хотим, чтобы наше правило агрегирования (которое мы называем *функционалом общественного благосостояния*) было определено для любого возможного набора индивидуальных предпочтений, всегда обеспечивало Парето-оптимальные решения и удовлетворяло ключевому (и очень удобному!) условию *попарной независимости,* заключающемуся в том, что общественные предпочтения относительно двух альтернатив зависят исключительно от индивидуальных предпочтений относительно этих же альтернатив, — перед нами встает дилемма. Мы должны либо оставить надежду на то, что общественные предпочтения могут быть рациональными в том смысле, в котором мы трактовали это понятие в главе 1 (т. е. что общество ведет себя подобно индивидууму), либо смириться с существованием диктатуры.

В разделе 21.D мы опишем два способа, позволяющие избежать выводов теоремы о невозможности. Один из них состоит в частичном ослаблении требования рациональности общественных предпочтений. Другой заключается в использовании правил агрегирования, которые работают удовлетворительно, но лишь на ограниченных множествах индивидуальных предпочтений. В частности, мы введем важное понятие *однопиковых предпочтений* и для популяций с предпочтениями такого типа проанализируем роль *медианного избирателя* в работе такого метода агрегирования, как попарное голосование на основе правила большинства.

В разделе 21.E проблема агрегирования будет сформулирована как задача принятия общественных решений на основе индивидуальных предпочтений. Там же будет введено понятие *функции общественного выбора* и предложен вариант теоремы о невозможности для этой функции. По существу, этот результат достигается заменой условия попарной независимости (не имеющего смысла в контексте этого раздела) на условие *монотонности* функции общественного выбора. Это условие имеет важную связь с теорией дизайна оптимальных экономических механизмов, основанной на стимулах, которая будет изложена в главе 23.

Основными источниками, на которые мы опираемся, являются работы (Arrow, 1963; Moulin, 1988; Sen, 1970, 1986); в них же можно найти и обзоры по излагаемым в этой главе темам.

21.B. Особый случай: общественные предпочтения с двумя альтернативами

Мы начнем наш анализ общественного выбора с простейшего из возможных случаев, когда выбор делается только из двух альтернатив. Назовем эти альтернативы x и y. Альтернатива x, к примеру, может соответствовать «статус-кво», а альтернатива y — представлять собой тот общественный проект, относительно осуществления которого принимается решение.

Исходными данными для нашей задачи являются индивидуальные предпочтения членов общества относительно двух альтернатив. Мы предполагаем, что существует некоторое количество $I < \infty$ индивидуумов, или *агентов*. Семейство индивидуальных предпочтений может быть описано профилем

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) \in \mathbb{R}^I,$$

где α_i принимает значение 1 (если агент i предпочитает альтернативу x альтернативе y), 0 (если альтернативы для него равнозначны) или −1 (если он предпочитает альтернативу y альтернативе x)[1].

[1] На протяжении всей главы мы будем считать, что общественное решение в пользу одной из альтернатив зависит только от того, как агенты ранжируют эти две альтернативы. В главе 21.C мы формально определим тот принцип, который лежит в основе этого предположения. Заметим, в частности, что оно исключает использование какой-либо «кардинальной» информации, говорящей об интенсивности предпочтений агента относительно двух альтернатив, поскольку откалибровать степень такой интенсивности (возможно, с использованием лотереи) можно было бы только с помощью сравнения с какой-то третьей альтернативой. Тем более невозможным становится и сравнение ощущений удовольствия или боли, испытываемых разными индивидами. В главе 22 мы обсудим некоторые вопросы, связанные с проблемой межличностной сравнимости полезностей.

Определение 21.B.1. *Функционал общественного благосостояния* (или *агрегатор общественного благосостояния*) — это правило $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_I)$, которое присваивает общественное предпочтение, т. е. $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) \in \in \{-1, 0, 1\}$, каждому возможному профилю индивидуальных предпочтений $(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) \in \{-1, 0, 1\}^I$.

Все рассматриваемые нами функционалы общественного благосостояния отражают индивидуальные предпочтения в смысле, заданном определением 21.B.2.

Определение 21.B.2. Функционал общественного благосостояния $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_I)$ является *Парето функционалом общественного благосостояния* или обладает *свойством Парето*, если он всегда отражает случаи единогласных строгих предпочтений со стороны агентов, т. е. $F(1, \ldots, 1) = 1$ и $F(-1, \ldots, -1) = -1$.

Пример 21.B.1. Для ситуаций выбора из двух альтернатив можно найти много функционалов общественного благосостояния, обладающих свойством Парето. Пусть $(\beta_1, \ldots, \beta_I) \in \mathbb{R}^I_+$ — вектор неотрицательных чисел, не все из которых являются нулями. Тогда мы могли бы задать функционал общественного благосостояния как

$$F(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) = \operatorname{sign} \sum_i \beta_i \alpha_i,$$

где для любого $a \in \mathbb{R}$ sign a равно 1, 0 или −1, в зависимости от знака a ($a > 0$, $a = 0$ или $a < 0$).

Важным частным случаем является *голосование по правилу большинства*, когда $\beta_i = 1$ для каждого i. Здесь $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) = 1$ тогда и только тогда, когда агентов, предпочитающих альтернативу x альтернативе y, больше, чем агентов, предпочитающих альтернативу y альтернативе x. Аналогично $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) = -1$ тогда и только тогда, когда агентов, предпочитающих альтернативу y альтернативе x, больше, чем агентов, предпочитающих альтернативу x альтернативе y. Если же число первых равно числу последних, то имеем: $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) = 0$, т. е. эти две альтернативы для общества равнозначны. ■

Пример 21.B.2. *Диктатура.* Мы называем функционал общественного благосостояния *диктаторским*, если существует агент h, называемый *диктатором*, такой что для любого профиля $(\alpha_1, \ldots, \alpha_I)$, $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) = 1$, если $\alpha_h = 1$, и $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) = -1$, если $\alpha_h = -1$. Таким образом, строгое предпочтение диктатора становится общественным предпочтением. Диктаторский функционал общественного благосостояния обладает свойством Парето в смысле определения 21.B.2. Функционалы общественного благосостояния из примера 21.B.1 являются диктаторскими всякий раз, когда $\alpha_h > 0$ для некоторого агента h и $\alpha_i = 0$ для $i \neq h$, поскольку тогда $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) = \alpha_h$. ■

Функционал общественного благосостояния для голосования по правилу большинства в теории общественного выбора играет роль ведущей точки отсчета. Кроме свойства Парето, он обладает еще тремя важными свойствами, которые мы сейчас сформулируем. Первое свойство (свойство симметрии по агентам) состоит в том, что по отношению ко всем агентам функционал общественного благосостояния ведет себя одинаково. Второе свойство (нейтральность по отношению к альтернативам) заключается в том, что априори обе альтернативы для функционала общественного благосостояния равноценны. Третье свойство (свойство позитивного отклика) говорит о том, что значение функционала общественного благосостояния зависит от индивидуальных предпочтений сильнее, чем это предписывается свойством Парето из определения 21.B.2.

Определение 21.B.3. Функционал общественного благосостояния $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_I)$ является *симметричным по агентам* (или *анонимным*), если персоналии агентов не имеют значения, т. е. если перестановка предпочтений среди агентов не влияет на общественные предпочтения. Формально пусть $\pi\colon \{1, \ldots, I\} \to \{1, \ldots, I\}$ — сюръективная функция (т. е. каждый элемент i является образом хотя бы одного h, $\pi(h) = i$). Тогда для любого профиля $(\alpha_1, \ldots, \alpha_I)$ выполняется $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) = F(\alpha_{\pi(1)}, \ldots, \alpha_{\pi(I)})$.

Определение 21.B.4. Функционал общественного благосостояния $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_I)$ является *нейтральным по отношению к альтернативам*, если $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) = -F(-\alpha_1, \ldots, -\alpha_I)$ для каждого профиля $(\alpha_1, \ldots, \alpha_I)$, т. е. если изменение предпочтений всех агентов на противоположные ведет к изменению общественных предпочтений на противоположные.

Определение 21.B.5. Функционал общественного благосостояния $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_I)$ обладает *позитивным откликом*, если для любых профилей $(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) \geq (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_I)$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) \neq (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_I)$ и $F(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_I) \geq$ ≥ 0 мы имеем $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) = +1$. То есть если x является общественно предпочитаемым или эквивалентным y и часть агентов повышают свою оценку альтернативы x, x становится общественно предпочитаемым.

Легко убедиться, что голосование по правилу большинства удовлетворяет всем трем описанным выше свойствам, т. е. симметрично по агентам, нейтрально по отношению к альтернативам и обладает позитивным откликом (см. упражнение 21.B.1). На самом деле эти три свойства полностью описывают его. Результат, приведенный в утверждении 21.B.1, получен Мэем (May, 1952).

Утверждение 21.B.1 (*теорема Мэя*). Функционал общественного благосостояния $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_I)$ является функционалом общественного благосостояния при голосовании по правилу большинства в том и только в том случае, если он симметричен по агентам, нейтрален по отношению к альтернативам и обладает позитивным откликом.

Доказательство. Мы уже говорили о том, что голосование по правилу большинства удовлетворяет трем вышеуказанным свойствам. Для установления достаточности отметим, что, во-первых, свойство симметричности по агентам означает, что общественное предпочтение зависит только от количества агентов, которые предпочтут альтернативу x альтернативе y, количества агентов, предпочитающих альтернативу y альтернативе x, и от количества агентов, для которых альтернативы равнозначны. Для профиля предпочтений $(\alpha_1, \ldots, \alpha_I)$ определим следующие множества:

$$n^+(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) = \#\,\{i\colon \alpha_i = 1\} \text{ и } n^-(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) = \#\,\{i\colon \alpha_i = -1\}^2.$$

Тогда симметрия относительно агентов позволяет нам выразить $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_I)$ в следующем виде:

$$F(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) = G(n^+(\alpha_1, \ldots, \alpha_I), n^-(\alpha_1, \ldots, \alpha_I)).$$

Теперь предположим, что $(\alpha_1, \ldots, \alpha_I)$ таков, что $n^+(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) = n^-(\alpha_1, \ldots, \alpha_I)$.

Тогда $n^+(-\alpha_1, \ldots, -\alpha_I) = n^-(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) = n^+(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) = n^-(-\alpha_1, \ldots, -\alpha_I)$, и, таким образом,

$$\begin{aligned} F(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) &= G(n^+(\alpha_1, \ldots, \alpha_I), n^-(\alpha_1, \ldots, \alpha_I)) = \\ &= G(n^+(-\alpha_1, \ldots, -\alpha_I), n^-(-\alpha_1, \ldots, -\alpha_I)) = \\ &= F(-\alpha_1, \ldots, -\alpha_I) = -F(\alpha_1, \ldots, \alpha_I). \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из нейтральности по отношению к альтернативам. Поскольку единственное число, которое равно своему отрицательному значению, — это нуль, мы приходим к заключению, что если $n^+(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) = n^-(\alpha_1, \ldots, \alpha_I)$, то $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) = 0$.

Теперь предположим, что $n^+(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) > n^-(\alpha_1, \ldots, \alpha_I)$. Обозначим $H = n^+(\alpha_1, \ldots, \alpha_I)$, J $= n^-(\alpha_1, \ldots, \alpha_I)$, тогда $J < H$. Предположим, без потери общности, что $\alpha_i = 1$ для $i \le H$ и $\alpha_i \le 0$ для $i >$ H. Рассмотрим новый профиль $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_I)$, заданный следующим образом: $\alpha'_i = \alpha_i = 1$ для $i \le J < H$, $\alpha'_i = 0$ для $J < i \le H$, и $\alpha'_i = \alpha_i \le 0$ для $i > H$. Тогда $n^+(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_I) = J$ и $n^-(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_I) = n^-(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) = J$. Отсюда следует, что $F(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_I) = 0$. Но, по построению, уровень поддержки альтернативы в новом профиле индивидуальных предпочтений снизился. Действительно, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) \ge (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_I)$ и $\alpha_{J+1} = 1 > 0 = \alpha'_{J+1}$. Таким образом, согласно свойству позитивного отклика, мы должны иметь $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) = 1$.

В свою очередь, если $n^-(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) > n^+(\alpha_1, \ldots, \alpha_I)$, то $n^+(-\alpha_1, \ldots, -\alpha_I) > n^-(-\alpha_1, \ldots, -\alpha_I)$ и $F(-\alpha_1, \ldots, -\alpha_I) = 1$. Следовательно, в силу нейтральности по отношению к альтернативам,

$$F(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) = -F(-\alpha_1, \ldots, -\alpha_I) = -1.$$

Мы приходим к заключению, что $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_I)$ действительно является функционалом общественного благосостояния для голосования по правилу большинства. ■

В упражнении 21.B.2 вам будет нужно найти примеры функционалов общественного благосостояния, отличных от голосования по правилу большинства, которые удовлетворяли бы любым двум из трех свойств в утверждении 21.B.1.

---

[2] Вспомним, что $\#A$ означает мощность множества A, т. е. число элементов в этом множестве.

21.С. Общий случай: теорема о невозможности Эрроу

Теперь перейдем к изучению проблемы агрегирования индивидуальных предпочтений на множестве альтернатив с произвольным числом элементов. Обозначим за X множество альтернатив и предположим, что существует I агентов с индексами $i = 1, ..., I$. Каждый агент i имеет рациональное отношение предпочтения $\succsim_i$, определенное на X. Отношения строгого предпочтения и эквивалентности, полученные на основе $\succsim_i$, будут обозначаться как $\succ_i$ и $\sim_i$ соответственно[3]. Кроме того, ради удобства мы часто будем предполагать, что ни у одного индивида нет такой пары отличных друг от друга альтернатив, которые он считал бы эквивалентными с точки зрения своих предпочтений $\succsim_i$. Поэтому для ясности изложения введем отдельные символы для множества всех возможных рациональных отношений предпочтения на X и для множества тех возможных отношений предпочтения на X, в которых отсутствуют неодинаковые, но эквивалентные альтернативы. Мы обозначаем эти множества как $\mathscr{R}$ и $\mathscr{P}$ соответственно. Отметим, что $\mathscr{P} \subset \mathscr{R}$.[4]

Как и в разделе 21.B, мы можем определить функционал общественного благосостояния как такое правило, которое присваивает общественные предпочтения профилям индивидуальных предпочтений $(\succsim_1, ..., \succsim_I) \in \mathscr{R}^I$. Определение 21.С.1, приведенное ниже, обобщает определение 21.B.1 в двух аспектах: оно допускает любое количество альтернатив и позволяет ограничить задачу агрегирования некоторым заданным множеством профилей индивидуальных предпочтений, $\mathscr{A} \subset \mathscr{R}^I$. В этом разделе, однако, мы будем работать с наиболее широкими множествами, а именно с $\mathscr{A} = \mathscr{R}^I$ и $\mathscr{A} = \mathscr{P}^I$.

Определение 21.С.1. *Функционал общественного благосостояния* (или *агрегатор общественного благосостояния*), определенный на заданном подмножестве $\mathscr{A} \subset \mathscr{R}^I$, — это правило F: $\mathscr{A} \to \mathscr{R}$, которое присваивает рациональное отношение предпочтения $F(\succsim_1, ..., \succsim_I) \in \mathscr{R}$, трактуемое как отношение общественного предпочтения, любому профилю рациональных индивидуальных отношений предпочтения $(\succsim_1, ..., \succsim_I)$ на допустимом множестве $\mathscr{A} \subset \mathscr{R}^I$.

[3] В разделе 1.B говорилось, что отношение $\succ_i$ формально определяется следующим образом: $x \succ_i y$, если выполняется $x \succsim_i y$, но не выполняется $y \succsim_i x$. То есть x предпочитается y, если x по меньшей мере так же хорош, как y, но y не так же хорош, как x. Отношение же безразличия $\sim_i$ определяется так: $x \sim_i y$, если $x \succsim_i y$ и $y \succsim_i x$. Из утверждения 1.B.1 мы знаем, что если $\succsim_i$ рационально, т. е. полно и транзитивно, то $\succ_i$ иррефлексивно (невозможен случай, когда $x \succ_i x$) и транзитивно (из $x \succ_i y$ и $y \succ_i z$ следует $x \succ_i z$). Аналогично $\sim_i$ рефлексивно ($x \sim_i x$ для всех $x \in X$), транзитивно ($x \sim_i y$ и $y \sim_i z$ подразумевает $x \sim_i z$) и симметрично ($x \sim_i y$ предполагает $y \sim_i x$).

[4] Формально отношение предпочтения $\succsim_i$ принадлежит множеству $\mathscr{P}$, если оно рефлексивно ($x \succsim_i x$ для каждого $x \in X$), транзитивно ($x \succsim_i y$ и $y \succsim_i z$ подразумевает $x \succsim_i z$) и *тотально* (если $x \neq y$, то справедливо либо $x \succsim_i y$, либо $y \succsim_i x$, но не то и другое одновременно). Такие отношения предпочтения часто называют *строгими предпочтениями* (хотя было бы точнее называть их *строгими тотальными предпочтениями*) или даже *линейными порядками*, потому что такими же свойствами обладает отношение «больше или равно» на числовой прямой.

Заметим, что, как и в разделе 21.B, в задаче агрегирования индивидуальных предпочтений в общественные индивиды описываются только с точки зрения их отношений предпочтения на множестве альтернатив[5].

Для любого профиля индивидуальных предпочтений $(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)$ $F_p(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)$ обозначает строгое отношение предпочтения, полученное из $F(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)$. То есть $xF_p(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)y$, если выполняется $xF(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)y$, но не выполняется $yF(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)x$. В таком случае мы говорим, что «x общественно предпочитается y». В свою очередь, $xF(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)y$ означает, что «с точки зрения общества, x по меньшей мере не хуже y».

Определение 21.C.2 (которое обобщает определение 21.B.2) описывает функционалы общественного благосостояния, минимально отражающие индивидуальные предпочтения.

Определение 21.C.2. Функционал общественного благосостояния $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{R}$ обладает *свойством Парето*, если для любой пары альтернатив $\{x, y\} \subset X$ и любого профиля предпочтений $(\succsim_1, \ldots, \succsim_I) \in \mathscr{A}$ имеем, что x общественно предпочитается y, т. е. $xF_p(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)y$, когда $x \succ_i y$ для каждого i.

В примере 21.C.1 мы опишем интересный класс Парето функционалов общественного благосостояния.

Пример 21.C.1. *Ранг Борда*. Предположим, что число альтернатив конечно. Для заданных отношений предпочтения $\succsim_i \in \mathscr{R}$ присвоим каждой альтернативе $x \in X$ определенное количество очков $c_i(x)$ следующим образом. Пусть отношение предпочтения $\succsim_i$ не содержит ни одной пары эквивалентных альтернатив. Тогда, если альтернатива x занимает n-е место в иерархии, заданной предпочтениями $\succsim_i$, ей присваивается n очков, $c_i(x) = n$. При наличии же эквивалентных друг другу альтернатив $c_i(x)$ будет средним рангом альтернатив, эквивалентных x[6]. И наконец, для любого профиля индивидуальных предпочтений $(\succsim_1, \ldots, \succsim_I) \in \mathscr{R}^I$ мы ранжируем альтернативы по сумме очков. То есть мы задаем отношение предпочтения $F(\succsim_1, \ldots, \succsim_I) \in \mathscr{R}$, такое что $xF(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)y$, если $\sum_i c_i(x) \le \sum_i c_i(y)$. Это отношение предпочтения является полным и транзитивным [оно представимо функцией полезности $-c(x) = -\sum_i c_i(x)$]. Более того, оно обладает свойством Парето, поскольку если $x \succ_i y$ для каждого i, то $c_i(x) < c_i(y)$ для каждого i и, таким образом, $\sum_i c_i(x) < \sum_i c_i(y)$. ■

Далее мы сформулируем важное ограничение для функционалов общественного благосостояния, впервые предложенное Эрроу (Arrow, 1963). Оно состоит в следующем: общественные предпочтения относительно любых двух альтернатив зависят только от индивидуальных предпочтений относительно этих альтернатив. Эту предпосылку можно обосновать тремя возможными соображениями. Первое, чисто нормативное и довольно

[5] В частности, не существует индивидуальных уровней полезности, и поэтому нельзя сколько-нибудь осмысленно сравнивать и сопоставлять какую-либо информацию о них. Мы вновь рекомендуем обратиться к главе 22 (и в особенности к разделу 22.D), где рассмотрена проблема информации, использующейся в процессе агрегирования.

[6] Таким образом, если $X = \{x, y, z\}$ и $x \succsim_i y \sim_i z$, то $c_i(x) = 1$ и $c_i(y) = c_i(z) = 2{,}5$.

привлекательное, заключается в том, что для расстановки общественных предпочтений между x и y присутствие или отсутствие других альтернатив, кроме x и y, не должно иметь никакого значения. Прочие альтернативы просто не имеют отношения к этому вопросу. Второе соображение — это соображение практичности. С точки зрения практичности предположение о независимости от посторонних альтернатив чрезвычайно облегчает задачу принятия общественных решений, так как помогает отделить друг от друга разные задачи. Определение общественных предпочтений на подмножестве альтернатив не требует какой-либо информации об индивидуальных предпочтениях среди альтернатив за пределами этого подмножества. Третье соображение имеет отношение к стимулам и принадлежит к предмету обсуждения главы 23 (см. также утверждение 21.E.2). Попарная независимость тесно связана с вопросом создания правильных стимулов для выявления истинных индивидуальных предпочтений.

Определение 21.C.3. Функционал общественного благосостояния F: $\mathscr{A} \to \mathscr{R}$, определенный на множестве альтернатив $\mathscr{A}$, удовлетворяет условию *попарной независимости* (или *условию независимости от посторонних альтернатив*), если общественные предпочтения относительно любых двух альтернатив $\{x, y\} \subset X$ зависят только от профиля индивидуальных предпочтений для этих альтернатив. Формально[7] для любой пары альтернатив $\{x, y\} \subset X$ и для любой пары профилей индивидуальных предпочтений $(\succsim_1, \ldots, \succsim_I) \in \mathscr{A}$ и $(\succsim_1', \ldots, \succsim_I') \in$ $\in \mathscr{A}$, таких что для каждого i

$$x \succsim_i y \Leftrightarrow x \succsim_i' y \text{ и } y \succsim_i x \Leftrightarrow y \succsim_i' x,$$

мы имеем

$$xF(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)y \Leftrightarrow xF(\succsim_1', \ldots, \succsim_I')y$$

и

$$yF(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)x \Leftrightarrow yF(\succsim_1', \ldots, \succsim_I')x.$$

Пример 21.C.1. *Продолжение*. Увы, ранг Борда не удовлетворяет условию попарной независимости. Причина проста: ранг альтернативы зависит от ранга *каждой* из оставшихся альтернатив. Предположим, к примеру, что у нас есть два агента и три альтернативы $\{x, y, z\}$. Для предпочтений

$$x \succ_1 z \succ_1 y,$$

$$y \succ_2 x \succ_2 z$$

мы имеем, что x общественно предпочитается y [действительно, $c(x) = 3$ и $c(y) = 4$]. Но для предпочтений

[7] Нижеследующие выражения немного громоздки. Подчеркнем, что они представляют собой лишь формальную запись только что сделанного утверждения. Альтернативно его можно было бы записать так: для любой пары альтернатив $\{x, y\} \subset X$, если $\succsim_i | \{x, y\} = \succsim_i' | \{x, y\}$ для всех i, то $F(\succsim_1, \ldots, \succsim_I) | \{x, y\} = F(\succsim_1', \ldots, \succsim_I') | \{x, y\}$. В этой записи $\succsim | \{x, y\}$ обозначает предпочтения на множестве $\{x, y\}$.

$$x \succ_1' y \succ_1' z,$$
$$y \succ_2' z \succ_2' x$$

y будет общественно предпочитаться x [теперь $c(x) = 4$ и $c(y) = 3$] — хотя относительное место x и y в предпочтениях обоих агентов не изменилось.

Для другого примера, на этот раз с тремя агентами и четырьмя альтернативами $\{x, y, z, w\}$, рассмотрим следующие предпочтения:

$$\begin{aligned} &z \succ_1 x \succ_1 y \succ_1 w, \\ &z \succ_2 x \succ_2 y \succ_2 w, \\ &y \succ_3 z \succ_3 w \succ_3 x. \end{aligned}$$

Здесь y общественно предпочитается x [$c(x) = 8$ и $c(y) = 7$]. Теперь предположим, что альтернативы z и w смещаются в самый низ иерархии предпочтений у всех агентов (что, по свойству Парето, эквивалентно удалению z и w из множества альтернатив):

$$\begin{aligned} &x \succ_1' y \succ_1' z \succ_1' w, \\ &x \succ_2' y \succ_2' z \succ_2' w, \\ &y \succ_3' x \succ_3' z \succ_3' w. \end{aligned} \tag{21.C.1}$$

Тогда x общественно предпочитается y [$c(x) = 4$ и $c(y) =5$]. Таким образом, присутствие или отсутствие альтернатив z и w имеет значение для общественного предпочтения при выборе между x и y. Рассмотрим еще одну модификацию, при которой альтернатива x заняла бы последнее место в предпочтениях агента 3:

$$\begin{aligned} &x \succ_1'' y \succ_1'' z \succ_1'' w, \\ &x \succ_2'' y \succ_2'' z \succ_2'' w, \\ &y \succ_3'' z \succ_3'' w \succ_3'' x. \end{aligned}$$

Теперь y общественно предпочитается x [что, по сравнению с результатом (21.C.1), является хорошим исходом для агента 3]. ■

Обсуждение примера 21.C.1 показывает, что условие попарной независимости является существенным ограничением. Однако есть способ автоматически гарантировать его выполнение. Он состоит в определении общественного предпочтения относительно любых двух заданных альтернатив с помощью правила агрегирования, использующего только информацию о взаимном расположении *этих двух альтернатив* в системе индивидуальных предпочтений. В разделе 21.B мы убедились, что для любой пары альтернатив существует много таких правил. Можно ли, работая исключительно с информацией о парах альтернатив, прийти к рациональным, т. е. полным и транзитивным, общественным предпочтениям? Пример 21.C.2 показывает, что это действительно сложно.

Пример 21.C.2. *Парадокс Кондорсе*[8]. Предположим, что мы должны были бы попарно сравнивать любые альтернативы путем голосования по правилу большинства (анализ голосования по правилу большинства см. в разделе 21.B). Определяет ли такая процедура функционал общественного благосостояния? В следующем разделе мы убедимся, что для определенной ограниченной области определения $\mathscr{A} \subset \mathscr{R}^I$

[8] Этот пример уже обсуждался в разделе 1.B.

ответ является утвердительным. В общем же случае мы сталкиваемся с проблемой, известной как парадокс Кондорсе. Рассмотрим три альтернативы $\{x, y, z\}$ и трех агентов со следующими предпочтениями:

$$x \succ_1 y \succ_1 z,$$
$$z \succ_2 x \succ_2 y,$$
$$y \succ_3 z \succ_3 x.$$

В этом случае попарное голосование по правилу большинства приводит нас к выводу, что x общественно предпочитается y (так как при сравнении x и y x наберет большинство против y, а y очевидным образом не наберет большинства против x). Аналогично y должен общественно предпочитаться z (два голосующих предпочтут y относительно z), а z должен общественно предпочитаться x (двое голосующих предпочтут z относительно x). Но этот циклический характер общественных предпочтений нарушает требование к их транзитивности. ■

Следующее утверждение — это *теорема о невозможности Эрроу*, центральный результат этой главы. Она, по существу, говорит нам о том, что парадокс Кондорсе возникает не из-за каких-либо свойств процедуры голосования по правилу большинства (которые, как мы помним из утверждения 21.B.1, состоят в симметричности по агентам, нейтральности по отношению к альтернативам и позитивного отклика). Парадокс восходит к самой сути: если мы требуем попарной независимости, то не существует никакого функционала общественного благосостояния, определенного на $\mathscr{R}^I$, который удовлетворял бы минимальной форме симметричности по агентам (т. е. исключал бы диктатуру) и минимальной форме позитивного отклика (т. е. обладал бы свойством Парето).

Утверждение 21.C.1 (*теорема о невозможности Эрроу*). Предположим, что альтернатив как минимум три и допустимая область определения профилей индивидуальных предпочтений, обозначаемая $\mathscr{A}$, задана либо как $\mathscr{A} = \mathscr{R}^I$, либо как $\mathscr{A} = \mathscr{P}^I$. Тогда каждый функционал общественного благосостояния F: $\mathscr{A} \to \mathscr{R}$, удовлетворяющий условию попарной независимости и свойству Парето, является *диктаторским* в следующем смысле: существует агент h, такой что для любых $\{x, y\} \subset X$ и любого профиля $(\succsim_1, ..., \succsim_I) \in \mathscr{A}$ мы имеем, что x общественно предпочитается y, т. е. $xF_p(\succsim_1, ..., \succsim_I)y$ всякий раз, когда $x \succ_h y$.

Доказательство. Здесь представлено классическое доказательство этого результата. Другой подход к его доказательству будет рассмотрен в разделе 22.D.

Будет удобно отныне рассматривать I не только как число, но и как обозначение самого *множества* агентов. На протяжении всего доказательства мы будем ссылаться на функционал общественного благосостояния F: $\mathscr{A} \to \mathscr{R}$, удовлетворяющий свойству Парето и условию попарной независимости. Мы начнем с некоторых определений. Здесь и далее, говоря о паре альтернатив, мы всегда будем подразумевать отличные друг от друга альтернативы.

Определение 21.C.4. Для заданного $F(\cdot)$ будем называть подмножество агентов $S \subset I$:

(1) *решающим для победы x над y*, если из этих двух альтернатив каждый агент из подмножества S предпочитает x, каждый агент вне S предпочитает y, а x общественно предпочитается y;

(2) *решающим*, если для любой пары $\{x, y\} \subset X$; S является решающим для победы x над y;

(3) *полностью решающим для победы x над y*, если всякий раз, когда каждый агент из подмножества S предпочитает альтернативу x альтернативе y, x общественно предпочитается y.

Доказательство построено на детальном исследовании структуры семейства решающих множеств. Это исследование мы разобьем на несколько небольших шагов. Шаги 1–3 показывают, что если подмножество агентов является решающим для некоторой пары альтернатив, то оно является решающим для всех пар. Шаги 4–6 устанавливают некоторые алгебраические свойства семейства решающих множеств. Шаги 7 и 8 используют эти свойства, чтобы показать, что существует наименьшее решающее множество, состоящее только из одного агента. Шаги 9 и 10 доказывают, что этот агент является диктатором.

Шаг 1: Если для некоторых $\{x, y\} \subset X$, $S \subset I$ является решающим для победы x над y, то для любой альтернативы $z \neq x$, S является решающим для победы x над z. Аналогично, для любого $z \neq y$ S является решающим для победы z над y.

Мы покажем, что если S является решающим для победы x над y, то оно является решающим для победы x над любым $z \neq x$. Рассуждение о победе z над y строится аналогично (это предлагается проделать в упражнении 21.C.1).

Если $z = y$, то доказывать нечего. Пусть $z \neq y$. Рассмотрим профиль индивидуальных предпочтений $(\succsim_1, \ldots, \succsim_I) \in \mathscr{A}$, где

$$x \succ_i y \succ_i z \text{ для каждого } i \in S$$

и

$$y \succ_i z \succ_i x \text{ для каждого } i \in I \backslash S.$$

Поскольку S является решающим для победы x над y, x общественно предпочитается y, т. е. $xF_p(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)y$. Дополнительно, поскольку $y \succsim_i z$ для каждого $i \in I$ и $F(\cdot)$ удовлетворяет свойству Парето, из этого следует $yF_p(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)z$. В силу транзитивности отношения общественного предпочтения мы приходим к выводу, что $xF_p(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)z$. Согласно условию попарной независимости, получаем, что x общественно предпочитается z, когда каждый агент из подмножества S предпочитает альтернативу x альтернативе z и каждый агент вне подмножества S предпочитает альтернативу z альтернативе x. То есть S является решающим для победы x над z.

Шаг 2: Если для некоторых $\{x, y\} \subset X$, $S \subset I$ является решающим для победы x над y и z является третьей альтернативой, то тогда S является решаю-

щим как для победы z над w, так и для победы w над z, где $w \in X$ — любая альтернатива, отличная от z.

Согласно шагу 1, S является решающим для победы x над z и для победы z над y. Но тогда, применяя это утверждение вновь, на этот раз к паре $\{x, z\}$ и альтернативе w, мы приходим к заключению, что подмножество S является решающим для победы w над z. Аналогично, применяя шаг 1 к $\{z, y\}$ и w, мы приходим к выводу, что S является решающим для победы z над w.

Шаг 3: Если для некоторых $\{x, y\} \subset X$, $S \subset I$ является решающим для победы x над y, то S является решающим подмножеством.

Это непосредственно следует из шага 2 и существования альтернативы $z \in X$, отличной от x и y. Действительно, рассмотрим любую пару альтернатив $\{v, w\}$. Если $v = z$ или $w = z$, то нужный результат непосредственно вытекает из шага 2. Если $v \neq z$ и $w \neq z$, мы применяем шаг 2 и заключаем, что S является решающим для победы z над w, и затем шаг 1 [примененный к паре $\{z, w\}$] позволяет утверждать, что S является решающим для победы v над w.

Шаг 4: Если $S \subset I$ и $T \subset I$ являются решающими, тогда $S \cap T$ также является решающим.

Рассмотрим любые три отличные друг от друга альтернативы $\{x, y, z\} \subset X$ и профиль индивидуальных предпочтений $(\succsim_1, \ldots, \succsim_I) \in \mathscr{A}$, где

$$\begin{aligned}
&z \succ_i y \succ_i x && \text{для каждого } i \in S \setminus (S \cap T),\\
&x \succ_i z \succ_i y && \text{для каждого } i \in S \cap T,\\
&y \succ_i x \succ_i z && \text{для каждого } i \in T \setminus (S \cap T),\\
&y \succ_i z \succ_i x && \text{для каждого } i \in I \setminus (S \cup T).
\end{aligned}$$

Тогда $zF_p(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)y$, так как $S = [S \setminus (S \cap T)] \cup (S \cap T)$ является решающим множеством. Аналогично $xF_p(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)z$, так как T является решающим множеством. Таким образом, согласно условию транзитивности общественных предпочтений, мы имеем $xF_p(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)y$. Согласно условию попарной независимости, $S \cap T$ является решающим для победы x над y, и, таким образом, согласно шагу 3, $S \cap T$ является решающим множеством.

Шаг 5: Для любого $S \subset I$ либо само S, либо его дополнение, $I \setminus S \subset I$, является решающим.

Рассмотрим любые три отличные друг от друга альтернативы $\{x, y, z\} \subset X$ и профиль индивидуальных предпочтений $(\succsim_1, \ldots, \succsim_I) \in \mathscr{A}$, где

$$\begin{aligned}
&x \succ_i z \succ_i y && \text{для каждого } i \in S,\\
&y \succ_i x \succ_i z && \text{для каждого } i \in I \setminus S.
\end{aligned}$$

Существует две возможности: или $xF_p(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)y$, и тогда, согласно условию попарной независимости, S является решающим для победы x над

y (а также, согласно шагу 3, решающим множеством), или $yF(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)x$. Так как по условию Парето мы имеем $xF_p(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)z$, условие транзитивности общественных предпочтений позволяет считать, что $yF_p(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)z$. Но тогда, вновь используя условие попарной независимости, мы приходим к заключению, что $I\backslash S$ является решающим для победы y над z (а также, согласно шагу 3, решающим множеством).

Шаг 6: Если $S \subset I$ является решающим и $S \subset T$, то T также является решающим.

В силу свойства Парето пустое множество агентов не может быть решающим (действительно, если ни один из агентов не предпочитает альтернативу x альтернативе y, то x не может общественно предпочитаться y). Следовательно, $I\backslash T$ не может быть решающим, так как в противном случае, согласно шагу 4, $S \cap (I\backslash T) = \varnothing$ было бы решающим. Отсюда, согласно шагу 5, получаем, что множество T решающее.

Шаг 7: Если $S \subset I$ является решающим и включает более одного агента, то существует строгое подмножество $S' \subset S$, $S' \neq S$, такое что S' является решающим.

Рассмотрим любого агента $h \in S$. Если $S\backslash\{h\}$ является решающим, утверждение шага 7 верно. Пусть $S\backslash\{h\}$ не является решающим. Тогда, согласно шагу 5, $I\backslash(S\backslash\{h\}) = (I\backslash S) \cup \{h\}$ является решающим. Согласно шагу 4, $\{h\} = S \cap [(I\backslash S) \cup \{h\}]$ также является решающим. Таким образом, утверждение шага 7 вновь верно, так как, согласно предположению, $\{h\}$ является строгим подмножеством S.

Шаг 8: Существует агент $h \in I$, такой что $S = \{h\}$ является решающим.

Этот результат можно получить, последовательно применяя шаг 7 и учитывая, что, во-первых, множество агентов I конечно и, во-вторых, согласно свойству Парето, множество всех агентов I является решающим.

Шаг 9: Если $S \subset I$ является решающим, то для любых $\{x, y\} \subset X$, S является полностью решающим для победы x над y.

Мы хотим доказать, что, для любого $T \subset I\backslash S$, x общественно предпочитается y, если каждый агент в множестве S предпочитает альтернативу x альтернативе y, каждый агент в множестве T считает, что x по меньшей мере не хуже y, а все остальные агенты предпочитают альтернативу y альтернативе x. Для проверки этого свойства рассмотрим третью альтернативу, $z \in X$, отличную от x и y. Согласно условию попарной независимости, достаточно рассмотреть профиль индивидуальных предпочтений $(\succsim_1, \ldots, \succsim_I) \in \mathscr{A}$, где

$$
\begin{aligned}
&x \succ_i z \succ_i y \quad && \text{для каждого } i \in S,\\
&x \succ_i y \succ_i z \quad && \text{для каждого } i \in T,\\
&y \succ_i z \succ_i x \quad && \text{для каждого } i \in I\backslash(S \cup T).
\end{aligned}
$$

Тогда $xF_p(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)z$, так как, согласно шагу 6, $S \cup T$ является решающим, и $zF_p(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)y$, так как S является решающим. Поэтому, согласно свойству транзитивности общественных предпочтений, имеем: $xF_p(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)y$, что мы и хотели показать.

Шаг 10: Если для некоторого агента $h \in I$, $S = \{h\}$ является решающим, то h является диктатором.

Если $\{h\}$ является решающим, то, согласно шагу 9, $\{h\}$ — полностью решающее множество для победы любой альтернативы x над любой альтернативой y. То есть если профиль $(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)$ таков, что $x \succ_h y$, то $xF_p(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)y$. Но это в точности то, что мы имели в виду, называя агента $h \in I$ диктатором.

Сочетание шагов 8 и 10 завершает доказательство утверждения 21.C.1. ■

21.D. Случаи, когда общественный выбор возможен: ограниченные области определения

Результат теоремы о невозможности Эрроу настораживает, но не является основанием для заключения о том, что «демократия невозможна». Он показывает нечто иное, а именно что не стоит ожидать от коллектива индивидуумов столь же непротиворечивого поведения, как от отдельного индивидуума.

Важно отметить, что на практике общественные суждения успешно формируются, а общественные решения успешно принимаются. По сути, теорема Эрроу говорит о том, что нельзя пренебрегать институциональными деталями и процедурами политического процесса. К примеру, предположим, что выбор из трех альтернатив $\{x, y, z\}$ делается так: сначала выбор из x и y голосованием по правилу большинства, а затем вновь голосование и выбор между победителем и третьей альтернативой z. Такая процедура даст некий результат, но результат этот может зависеть от повестки дня, т. е. от того, какая из альтернатив берется первой, а какая в последнюю очередь. [Таким образом, если предпочтения будут такими же, как описано в парадоксе Кондорсе (пример 21.C.2), выигрывать всегда будет последняя альтернатива, какова бы она ни была.] Эта релевантность процедур и правил для агрегирования индивидуальных предпочтений в общественные имеет далеко идущие последствия. В современной политологии им было уделено значительное внимание, например, в работах Остен-Смита и Бэнкса (Austen-Smith, Banks, 1996) или Шепсле и Бончека (Shepsle, Boncheck, 1995).

Далее в этом разделе мы продолжим анализ в тех же рамках, что и в предыдущем. Мы посмотрим, в какой степени возможно избежать вывода о диктатуре, если ослабить некоторые из требований, предусмотренных теоремой Эрроу. В частности, мы исследуем две такие модификации. В первой мы ослабим требования рациональности, предъявляемые к агрегированным предпочтениям. Во второй нас будет интересовать вопрос агрегирования на ограниченной области определения. В частности, мы будем рассматривать такое ограничение, как *однопиковость*, признанное важным и полезным в практических приложениях.

Менее чем полная общественная рациональность

Предположим, что мы сохраняем свойство Парето и условия попарной независимости, но допускаем менее чем полную рациональность для общественных предпочтений. Определение 21.D.1 описывает два аспекта ослабления рациональности предпочтений.

Определение 21.D.1. Предположим, что отношение предпочтения $\succsim$ на X рефлексивно и полно. Мы говорим, что

(1) $\succsim$ является *квазитранзитивным*, если отношение строгого предпочтения $\succ$, основанное на $\succsim$ (т. е. $x \succ y \Leftrightarrow x \succsim y$, но не $y \succsim x$), является транзитивным;

(2) $\succsim$ *ациклично*, если $\succsim$ имеет максимальный элемент в каждом конечном подмножестве $X' \subset X$, т. е. $\{x \in X' : x \succsim y$ для всех $y \in X'\} \neq \varnothing$.

Квазитранзитивное отношение предпочтения является ацикличным, но обратное может не выполняться. Также рациональное отношение предпочтений является квазитранзитивным, но обратное может не иметь места[9]. Таким образом, ацикличность — более слабое условие. Но ацикличность не является резким ослаблением рациональности: отметим, к примеру, что общественные предпочтения в парадоксе Кондорсе (пример 21.C.2) также не являются ацикличными. (Подробнее об ацикличности см. в упражнении 21.D.1.)

Мы не будем подробно обсуждать возможности, которые открывают нам эти ослабления общественной рациональности. Они существуют, но они не очень значительны и детально описаны в работе Сена (Sen, 1970). Показательны два примера, изложенные ниже.

Пример 21.D.1. *Олигархия*. Пусть I — множество агентов, и пусть $S \subset I$ — подмножество агентов, называемое *олигархией* (случаи $S = \{h\}$ или $S = I$ допускаются). При любом профиле индивидуальных предпочтений $(\succsim_1, \ldots, \succsim_I) \in \mathscr{R}^I$ общественные предпочтения формируются следующим образом: для любых $x, y \in X$ мы говорим, что *x с общественной точки зрения по меньшей мере не хуже y* [записывается как $xF(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)y$], *если существует хотя бы один агент $h \in S$, такой что $x \succsim_h y$*. Отсюда x общественно предпочитается y тогда и только тогда, когда *каждый* член олигархии предпочитает альтернативу x альтернативе y. В упражнении 21.D.2 вам предлагается проверить, что это отношение общественных предпочтений квазитранзитивно,

[9] Предположим, что $\succsim$ квазитранзитивно. Пусть оно не является ацикличным. Тогда найдется некоторое ограниченное множество $X' \subset X$ без максимального элемента для $\succsim$. То есть для каждого $x \in X'$ существует некоторое $y \in X'$, такое что $y \succ x$ (т. е. такое, что $y \succsim x$ верно, а $x \succsim y$ — нет). Таким образом, для любого целого M мы можем найти последовательность $x^1 \succ x^2 \succ x^3 \succ \ldots \succ x^M$, где $x^m \in X'$ для каждого $m = 1, \ldots, M$. Если M больше, чем количество альтернатив в X', то в этой последовательности должны быть повторы. Пусть $x^{m'} = x^m$ для $m > m'$. В силу квазитранзитивности $x^{m'} \succ x^m = x^{m'}$, что невозможно, так как отношение $\succ$ по определению иррефлексивно. Таким образом, $\succsim$ должно быть ациклично. Вариант ацикличного отношения предпочтения, не являющегося квазитранзитивным, описывается в примере 21.D.2. Отношение $\succ$, полученное из рационального отношения предпочтений $\succsim$, транзитивно (утверждение 1.B.1). Пример квазитранзитивного отношения предпочтения, не являющегося рациональным, дан в примере 21.D.1.

но не транзитивно (нетранзитивным оказывается отношение общественного безразличия). Это единственное нарушение предпосылок теоремы о невозможности Эрроу (условие Парето и условия попарной независимости очевидно выполнены). Тем не менее олигархия редко является удовлетворительным способом агрегирования индивидуальных предпочтений в общественные, так как этот способ очень неповоротлив. Если олигархом является единственный агент, он становится диктатором. На противоположном полюсе, если олигархией является все население, общество способно выразить строгое предпочтение, только если мнения всех его членов совпадают. ■

Пример 21.D.2. *Право вето*. Предположим, что имеются два агента и три альтернативы $\{x, y, z\}$. Пусть общественные предпочтения при любом профиле индивидуальных предпочтений $(\succsim_1, \succsim_2)$ совпадают с предпочтениями агента 1 с единственной оговоркой: агент 2 может наложить вето на возможность x общественно предпочитаться y. Конкретнее, если $y \succ_2 x$, то альтернатива y, с общественной точки зрения, по меньшей мере не хуже x. В итоге из любой пары альтернатив $\{v, w\} \subset \{x, y, z\}$ альтернатива v, с общественной точки зрения, по меньшей мере не хуже w, если выполняется либо $v \succsim_1 w$, либо $v = y$, $w = x$ и $v \succ_2 w$. В упражнении 21.D.3 вам предлагается проверить, что общественные предпочтения, заданные таким образом, являются ациклическими, но необязательно квазитранзитивными. ■

Однопиковые предпочтения

Мы переходим к наиболее важному классу условий, ограничивающих область определения задачи агрегирования индивидуальных предпочтений в общественные: условию однопиковости предпочтений. Мы убедимся, что при этом ограничении агрегирование может быть недиктаторским. С небольшой оговоркой мы увидим, что для однопиковых предпочтений попарное голосование по правилу большинства порождает функционал общественного благосостояния.

Определение 21.D.2. Бинарное отношение $\geq$ на множестве альтернатив X является *линейным порядком* на X, если оно *рефлексивно* (т. е. $x \geq x$ для каждого $x \in X$), транзитивно (т. е. из $x \geq y$ и $y \geq z$ следует $x \geq z$) и *тотально* (т. е. для любых отличных друг от друга $x, y \in X$ имеем, что либо $x \geq y$, либо $y \geq x$, но не то и другое одновременно).

Пример 21.D.3. Простейшим примером линейного порядка является случай, когда X является подмножеством числовой прямой, $X \subset \mathbb{R}$, и $\geq$ соответствует отношению «больше или равно» для вещественных чисел. ■

Определение 21.D.3. Рациональное отношение предпочтения $\succsim$ является *однопиковым* по отношению к линейному порядку $\geq$ на X, если существует альтернатива $x \in X$, обладающая тем свойством, что $\succsim$ возрастает по отношению к $\geq$ на $\{y \in X\colon x \geq y\}$ и убывает по отношению к $\geq$ на $\{y \in X\colon y \geq x\}$. То есть

$$\text{если } x \geq z > y, \text{ то } z \succ y,$$

и

$$\text{если } y > z \geq x, \text{ то } z \succ y.$$

Другими словами, существует альтернатива x, которая соответствует пику удовлетворения, и, более того, удовлетворение возрастает по мере приближения к этому пику (так что, в частности, не может существовать другого пика удовлетворения).

Пример 21.D.4. Предположим, что $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ и $\geq$ соответствует отношению «больше или равно» на множестве действительных чисел. В этом случае непрерывное отношение предпочтения $\succsim$ на X является однопиковым по $\geq$ тогда и только тогда, когда оно *строго выпукло*, т. е. тогда и только тогда, когда для каждого $w \in X$ выполняется $\alpha y + (1 - \alpha)z \succ w$ при $y \succsim w$, $z \succsim w$, $y \neq z$ и $\alpha \in (0, 1)$. (Вспомним определение 3.B.5, а также тот факт, что по определению отношения предпочтения, построенные на основе строго квазивогнутых функций полезности являются строго выпуклыми). Именно на этом факте в большой степени зиждется значимость однопиковых предпочтений в прикладных экономических задачах. Достаточность строгой выпуклости доказать довольно просто. (Ее необходимость вам предлагается доказать в упражнении 21.D.4.) Действительно, пусть x является максимальным элементом для $\succsim$ и $x > z > y$. Тогда $x \succsim y$, $y \succsim y$, $x \neq y$ и $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ при некотором $\alpha \in (0, 1)$. Таким образом, $z \succ y$ в силу строгой выпуклости. На рис. 21.D.1 и 21.D.2 изображены функции полезности для отношений предпочтения на $X = [0, 1]$. Отношение предпочтения на рис. 21.D.1 является однопиковым по отношению к $\geq$, а отношение предпочтения на рис. 21.D.2 — нет. ■

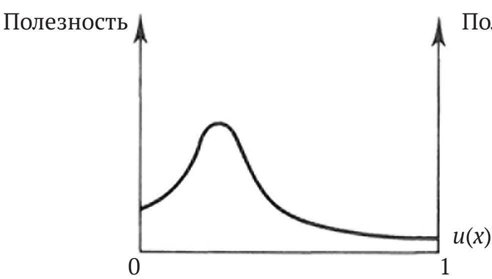


Рис. 21.D.1. Предпочтения, однопиковые относительно $\geq$

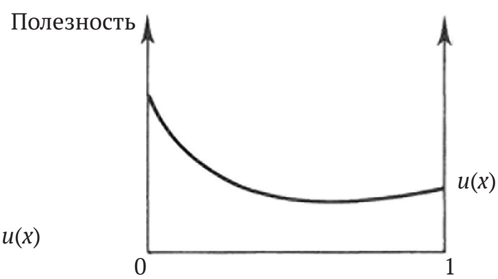


Рис. 21.D.2. Предпочтения, неоднопиковые относительно $\geq$

Определение 21.D.4. При заданном линейном порядке $\geq$ на X мы обозначаем как $\mathscr{R}_{\geq} \subset \mathscr{R}$ совокупность всех рациональных отношений предпочтения, однопиковых по отношению к $\geq$.

Теперь для заданного линейного порядка $\geq$ и множества агентов I мы будем оперировать на ограниченной области определения предпочтений, $\mathscr{R}_{\geq}^{I}$. Это равносильно требованию, что все индивидуумы имеют однопиковые предпочтения по отношению к *одному и тому же* линейному порядку $\geq$.

Предположим, что на области определения $\mathscr{R}_{\geq}^{I}$ мы задаем общественные предпочтения путем попарного голосования по правилу большинства (так же, как это делалось в примере 21.B.1). То есть для заданного профиля индивидуальных предпочтений $(\succsim_1, \ldots, \succsim_I) \in \mathscr{R}_{\geq}^{I}$ и любой пары альтернатив $\{x, y\} \subset X$ мы будем интерпретировать $x\hat{F}(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)y$ как «x с общественной точки зрения по меньшей мере не хуже y», если количество агентов, которые строго предпочитают альтернативу x альтернативе y, больше или равно количеству агентов, которые строго предпочитают альтернативу y альтернативе x, т. е. если $\#\left\{i \in I : x \succ_i y\right\} \geq \#\left\{i \in I : y \succ_i x\right\}$.

Отметим, что из этого определения следует, что для любой пары $\{x, y\}$ мы должны иметь либо $x\hat{F}(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)y$, либо $y\hat{F}(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)x$. Таким образом, попарное голосование по правилу большинства порождает полные отношения общественных предпочтений (для любых, не только однопиковых, индивидуальных предпочтений).

В упражнении 21.D.5 требуется непосредственно показать, что предпочтения в парадоксе Кондорсе (пример 21.C.2) не являются однопиковыми по отношению к любому возможному линейному порядку на этих альтернативах. Действительно, они не могут быть однопиковыми, поскольку, как мы сейчас покажем, в случае однопиковых предпочтений у общественных предпочтений, порожденных попарным голосованием по правилу большинства, всегда есть максимальные элементы, т. е. при голосовании по правилу большинства существуют альтернативы, которые не могут быть побеждены ни одной другой.

Пусть $(\succsim_1, \ldots, \succsim_I) \in \mathscr{R}_{\geq}^{I}$ — фиксированный профиль индивидуальных предпочтений. Пусть $x_i \in X$ для каждого $i \in I$ обозначает максимальную альтернативу с точки зрения $\succsim_i$ (мы будем говорить, что альтернатива x_i является «пиком для i-го агента»).

Определение 21.D.5. Агент $h \in I$ является *медианным агентом* для профиля $(\succsim_1, \ldots, \succsim_I) \in \mathscr{R}_{\geq}^{I}$, если

$$\#\left\{i \in I : x_i \geq x_h\right\} \geq \frac{I}{2} \text{ и } \#\left\{i \in I : x_h \geq x_i\right\} \geq \frac{I}{2}.$$

Медианный агент существует всегда. Процедура его поиска показана на рис. 21.D.3.

Если не существует пиков, набирающих одинаковое число голосов и $\#I$ — нечетное число, то определение 21.D.5 просто говорит о том, что у $(I - 1)/2$ агентов пики строго меньше x_h, а у других $(I - 1)/2$ агентов — строго больше. В этом случае существует только один медианный агент.

Утверждение 21.D.1. Предположим, что $\geq$ является линейным порядком на X, и рассмотрим профиль индивидуальных предпочтений $(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)$, такой что для каждого i $\succsim_i$, являются однопиковыми по отношению к $\geq$. Пусть $h \in I$ — медианный агент. Тогда $x_h\hat{F}(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)y$ для каждого $y \in X$. То есть альтернатива x_h, являющаяся пиком медианного агента, при голосовании по правилу большинства не может быть побеждена ни одной другой. Любая альтернатива, обладающая этим свойством, называется *победителем Кондорсе*. Поэтому побе-

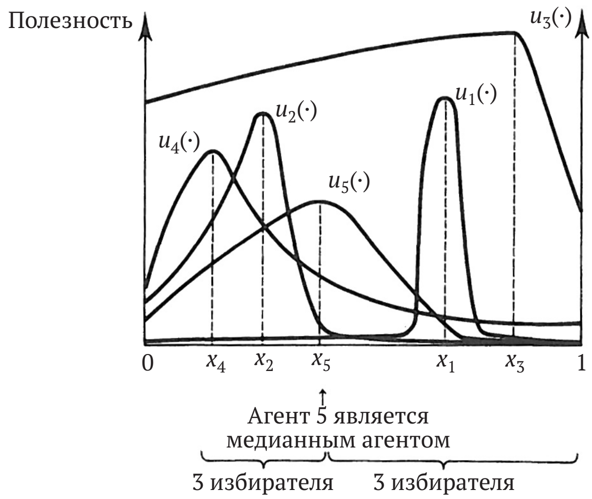


Рис. 21.D.3. Определение медианы в группе агентов с однопиковыми предпочтениями

дитель Кондорсе существует, когда предпочтения всех агентов являются однопиковыми по отношению к одному и тому же линейному порядку.

Доказательство. Рассмотрим любую альтернативу $y \in X$ и предположим, что $x_h > y$ (для $y > x_h$ рассуждение будет таким же). Необходимо показать, что y не побеждает x, т. е. что

$$\#\left\{i \in I : x_h \succ_i y\right\} \geq \#\left\{i \in I : y \succ_i x_h\right\}.$$

Рассмотрим множество агентов $S \subset I$, пики которых *больше или равны* x_h, т. е. $S = \{i \in I: x_i \geq x_h\}$. Тогда $x_i \geq x_h > y$ для каждого $i \in S$. Отсюда, согласно однопиковости $\succsim_i$ по отношению к $\geq$, мы получаем $x_h \succ_i y$ для каждого $i \in S$. С другой стороны, так как агент h является медианным агентом, имеем $\#S \geq I/2$ и, таким образом, $\#\left\{i \in I : y \succ_i x_h\right\} \leq$ $\leq \#(I \backslash S) \leq I/2 \leq \# S \leq \#\left\{i \in I : x_h \succ_i y\right\}$. ■

Утверждение 21.D.1 гарантирует, что отношение предпочтения $\hat{F}(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)$ ациклично. При этом, однако, оно может быть нетранзитивным. В упражнении 21.D.6 вам предлагается найти пример его нетранзитивности. Транзитивность достигается в частном случае, когда число I нечетное, для каждого агента i отношения предпочтения $\succsim_i$ принадлежат к классу $\mathscr{P}_{\geq}^{I} \subset \mathscr{R}_{\geq}^{I}$, состоящему из рациональных отношений предпочтения, однопиковых по отношению к $\geq$ и не содержащих неодинаковых, но эквивалентных с точки зрения $\succsim$ альтернатив. Отметим, что если число I нечетное и предпочтения относятся к этому классу, то в любой паре альтернатив одна всегда набирает строгое большинство голосов против другой. Следовательно, в этом случае победитель Кондорсе обязательно побеждает любую другую альтернативу.

Утверждение 21.D.2. Предположим, что число I нечетное и $\geq$ является линейным порядком на X. Тогда попарное голосование по правилу большинства порождает однозначно определенный функционал общественного благосостояния F: $\mathscr{P}_{\geq}^{I} \to \mathscr{R}$. То есть на области определения предпочтений, однопиковых по отношению к $\geq$ и не содержащих неодинаковых, но эквивалентных альтернатив, общественное отношение $\hat{F}(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)$, порождаемое попарным голосованием по правилу большинства, является полным и транзитивным.

Доказательство. Нам уже известно, что отношение $\hat{F}(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)$ является полным. Остается показать, что оно транзитивно. Пусть $x\hat{F}(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)y$ и $y\hat{F}(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)z$. При наших предположениях (вспомним, что I — нечетное число и что мы не допускаем случаев, когда две альтернативы для индивида равноценны) это означает, что x побеждает y и y побеждает z. Рассмотрим множество $X' = \{x, y, z\}$. Если предпочтения ограничены этим множеством, то относительно X' предпочтения по-прежнему принадлежат классу $\mathscr{P}_{\geq}^{I}$, и поэтому в множестве X' существует альтернатива, которую не может победить никакая другая альтернатива в X'. Этой альтернативой не может быть ни y (побежденная x) , ни z (побежденная y). Следовательно, это должна быть x, и мы заключаем, что $x\hat{F}(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)z$, как того требует свойство транзитивности. ■

В практических приложениях линейный порядок на множестве альтернатив, как правило, возникает естественно, как способ упорядочения этих альтернатив по вещественным значениям какого-либо их скалярного параметра. Тогда, как мы уже видели, однопиковость вытекает из строгой квазивогнутости функций полезности — ограничения, которое в экономике выполняется достаточно часто. К сожалению, квазивогнутость помогает нам лишь при решении одномерных задач. Проблемы же, возникающие в более общих случаях, мы изучим с помощью следующих двух примеров.

Пример 21.D.5. Предположим, что пространство альтернатив представляет собой единичный квадрат, т. е. $X = [0, 1]^2$. Элементы этого множества обозначаются как $x = (x_1, x_2)$. Имеются три агента: $I = \{1, 2, 3\}$. Их предпочтения на X представимы следующими функциями полезности:

$$u_1(x_1, x_2) = -2x_1 - x_2,$$
$$u_2(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2,$$
$$u_3(x_1, x_2) = x_1 - x_2.$$

Эти предпочтения представлены на рис. 21.D.4. Каждая из функций полезности линейна, и поэтому предпочтения выпуклы (они также имеют единственный максимальный элемент на X)[10]. Но сейчас мы покажем, что для любой альтернативы $x \in X$ найдется $y \in X$, которая для двоих агентов окажется предпочтительнее x. Чтобы уви-

[10] Предпочтения этого примера не являются строго выпуклыми, но это не имеет значения. Не изменяя характера примера, мы можем немного модифицировать их, чтобы карта кривых безразличия стала строго выпуклой.

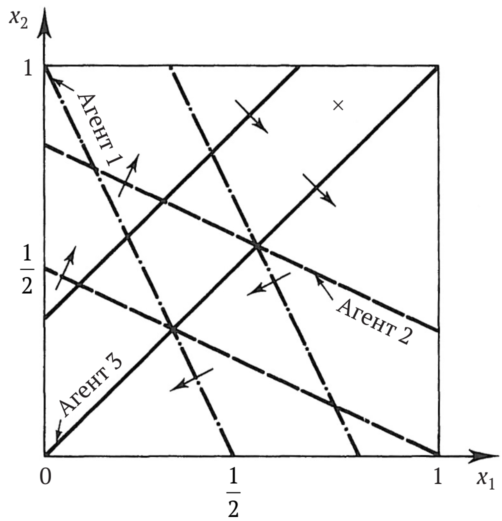


Рис. 21.D.4. Кривые безразличия
для предпочтений из примера 21.D.5

деть это, возьмем произвольную альтернативу $x = (x_1, x_2) \in [0, 1]^2$ и рассмотрим три случая:

(1) Если $x_1 = 0$, агенты 2 и 3 предпочтут альтернативе x альтернативу $y = \left(\frac{1}{2},\ x_2\right)$.

(2) Если $x_2 = 1$, агенты 1 и 3 предпочтут альтернативе x альтернативу $y = \left(x_1,\ \frac{1}{2}\right)$.

(3) Если $x_1 > 0$ и $x_2 < 1$, то агенты 1 и 2 предпочтут альтернативе x альтернативу $y = (x_1 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon) \in [0, 1]^2$ при $\varepsilon > 0$.

Вам предлагается самостоятельно проверить утверждения (1), (2) и (3). ■

Ситуация, проиллюстрированная в примере 21.D.5, не является исключительной. Ключевое свойство примера состоит в том, что конус, порожденный неотрицательными комбинациями градиентов трех функций полезности, охватывает весь квадрат $\mathbb{R}^2$ (см. рис. 21.D.4). Более детально эта проблема будет рассмотрена в упражнениях 21.D.7 и 21.D.8.

Пример 21.D.6. *Евклидовы предпочтения*. Предположим, что множество альтернатив — это $\mathbb{R}^n$. Агенты обладают предпочтениями $\succsim$, выраженными функциями полезности вида $u(y) = -||y - x||$, где x — некоторая фиксированная альтернатива в $\mathbb{R}^n$. Другими словами, x является наиболее предпочитаемой альтернативой для $\succsim$, и критерием оценки других альтернатив является то, насколько они близки к x по эвклидовому расстоянию. Кривые безразличия типичного потребителя на $\mathbb{R}^2$ показаны на рис. 21.D.5.

В рассматриваемом примере множество $\mathbb{R}^n$ играет двоякую роль. С одной стороны, оно представляет множество альтернатив. С другой стороны, оно также является множеством всех возможных предпочтений, так как каждая точка $x \in \mathbb{R}^n$ однозначно соответствует системе предпочтений, имеющих x в качестве пика[11].

[11] Аналогичный пример, где эти две роли не пересекаются, см. в работе (Grandmont, 1978) и упражнении 21.D.9.

Из двух различных альтернатив $y, z \in \mathbb{R}^n$ агент будет предпочитать альтернативу y альтернативе z тогда и только тогда, когда его пик ближе к y, чем к z. Таким образом, область пиков, ассоциированных с предпочтениями, для которых y предпочитается z, задается следующим образом:

$$A(y, z) = \{x \in \mathbb{R}^n: ||x - y|| < ||x - z||\}.$$

Эта область изображена на рис. 21.D.6. Геометрически граница $A(y, z)$ является гиперплоскостью, перпендикулярной сегменту, соединяющему y и z, и проходящей через его середину.

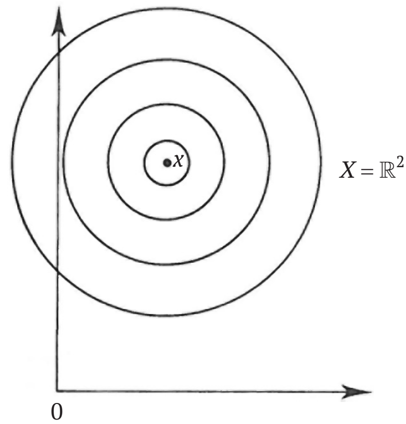


Рис. 21.D.5. Евклидовы предпочтения на $\mathbb{R}^2$.

Рассмотрим идеализированную предельную ситуацию, когда существует континуум агентов с евклидовыми предпочтениями и популяция описывается функцией плотности распределения агентов $g(x)$ на множестве возможных пиков предпочтений $\mathbb{R}^n$. Тогда для двух различных альтернатив, $y, z \in \mathbb{R}^n$, доля населения, которая предпочтет альтернативу y альтернативе z, обозначенная как $m_g(y, z)$, будет равна интегралу $g(\cdot)$ на области $A(y, z) \subset \mathbb{R}^n$.

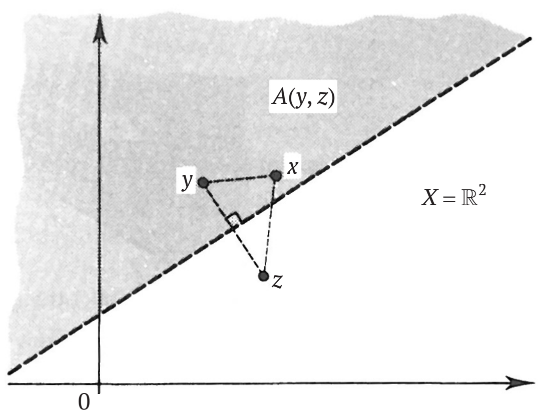


Рис. 21.D.6. Область евклидовых предпочтений, где альтернатива y предпочитается альтернативе z

При каких обстоятельствах здесь возникнет победитель Кондорсе? Предположим, существует альтернатива $x^* \in \mathbb{R}^n$, такая что *любая* гиперплоскость, проходящая через x^*, делит $\mathbb{R}^n$ на два полупространства, каждое из которых имеет общую массу, равную $\frac{1}{2}$, в соответствии с функцией плотности распределения $g(\cdot)$. Эту точку можно было бы назвать *медианой* для функции плотности распределения $g(\cdot)$; в случае $n = 1$ она совпадала бы с обычной концепцией медианы. Медиана, определенная таким образом, является победителем Кондорсе. Она не может быть побеждена никакой другой альтернативой, так как если $y \neq x^*$, то $A(x^*, y)$ окажется больше, чем полупространство, ограниченное гиперплоскостью, проведенной через x^*, и, следовательно, $m_g(x^*,\ y) \geq \frac{1}{2}$. И наоборот, если x^* не является медианой, то существует направление $q \in \mathbb{R}^n$, такое что масса полупространства $\{z \in \mathbb{R}^n\colon q \cdot z > q \cdot x^*\}$ окажется больше чем $\frac{1}{2}$. Таким образом, в силу непрерывности для малого $\varepsilon > 0$ масса смещенного полупространства $A(x^* + \varepsilon q, x^*)$ превышает $\frac{1}{2}$. Следовательно, $x^* + \varepsilon q$ побеждает x^* и x^* не может быть победителем Кондорсе (см. рис. 21.D.7.)

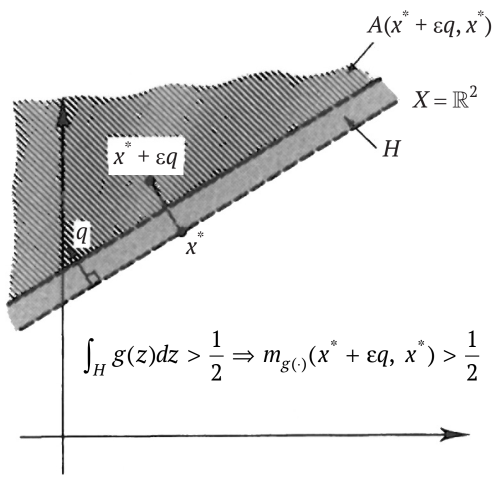
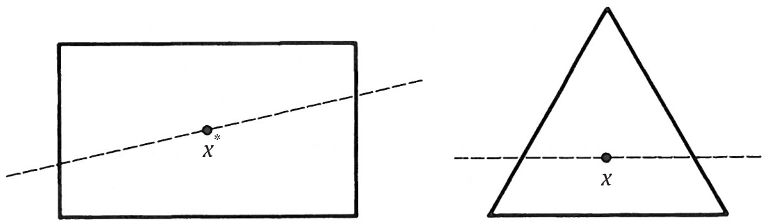


Рис. 21.D.7. Если x^* не является медианой, то не является и победителем Кондорсе

Мы видим, что победитель Кондорсе существует тогда и только тогда, когда существует медиана для функции плотности распределения $g(\cdot)$. Однако при $n > 1$ существование медианы требует выполнения такого количества условий (существует много полупространств), что оно превращается в исключительное событие. На рис. 21.D.8 представлены два примера. На рис. 21.D.8(a) плотность $g(\cdot)$ равномерно распределена на прямоугольнике [случай, впервые исследованный в работе (Tullock, 1967)]. Центр прямоугольника в этом случае является медианой. Однако прямоугольник представляет собой особый частный случай, а в общем случае медианы обычно не существует. На рис. 21.D.8(b) плотность $g(\cdot)$ равномерно распределена на треугольнике. В этом случае медианы нет: через любую точку треугольника можно провести линию, разделяющую его на две неравные части[12]. ■

[12] Более глубокий анализ см. в работе (Caplin, Nalebuff, 1988), где показано, что в условиях ограничения на функцию плотности (названного «логарифмической вогнутостью» и выполняющегося, в частности, для равномерных распределений на выпуклых множествах) всегда существуют точки («обобщенные медианы») в $\mathbb{R}^n$, такие что любая гиперплоскость, проведенная через них, делит $\mathbb{R}^n$ на две области, каждая из которых имеет массу, превышающую $1/e$. Это значит, что эти точки не могут быть побеждены никакими другими альтернативами, *если* для победы требуется не свыше $\frac{1}{2}$, а свыше $1 - (1/e) > \frac{1}{2}$ голосов (например, 64%). Конечно, правило 64% не столь решительно, как правило 50%: теперь будет существовать много пар, в которых ни одна альтернатива не может победить другую.



(a) (b)

Рис. 21.D.8. (a) Равномерное распределение на прямоугольнике: центральная точка является медианой, так как каждая плоскость, проходящая через x^*, делит прямоугольник на две равные фигуры равного объема. (b) Равномерное распределение на треугольнике: здесь нет медианы

21.E. Функции общественного выбора

В предыдущих разделах нас интересовал вопрос о том, как агрегировать профили индивидуальных отношений предпочтения в согласованную (т. е. рациональную) систему общественных предпочтений, которая впоследствии, предположительно, используется для принятия решений. В этом разделе мы сосредоточимся непосредственно на принятии общественных решений, а вопрос об агрегировании будет звучать так: как профили индивидуальных предпочтений превращаются в общественные решения?

Основной результат, который мы получим, снова приведет к заключению о диктатуре. Он сводится в некотором смысле к переводу теоремы о невозможности Эрроу на язык функций общественного выбора. Мы также переосмыслим условие попарной независимости и установим связь данной главы с тем анализом, основанным на стимулах, который будет изложен в главе 23.

Как и прежде, мы обозначаем множество альтернатив через X, а конечное множество агентов — как I. Множество отношений предпочтения $\succsim$ на X будет обозначено как $\mathscr{R}$. Пусть $\mathscr{P}$ обозначает подмножество множества $\mathscr{R}$, состоящее из отношений предпочтения $\succsim \in \mathscr{R}$, не имеющих ни одной пары неодинаковых и безразличных с точки зрения $\succsim$ альтернатив.

Определение 21.E.1. Пусть $\mathscr{A}$ — любое подмножество множества возможных предпочтений, $\mathscr{A} \subset \mathscr{R}^I$. Функция общественного выбора f: $\mathscr{A} \to X$, определенная на $\mathscr{A}$, присваивает выбранный элемент $f(\succsim_1, \ldots, \succsim_I) \in X$ каждому профилю индивидуальных предпочтений на $\mathscr{A}$.

Понятие функции общественного выбора подразумевает, что будет выбрана единственная альтернатива. Мы могли бы даже сказать, что это присуще самой природе выбора[13]. Более жестким ограничением является тот факт, что мы исключаем возможность случайного выбора[14].

Если X конечно, каждый функционал общественного благосостояния $F(\cdot)$ на области определения $\mathscr{A}$ порождает естественную функцию общественного выбора, присваивая каждому профилю индивидуальных предпочтений $(\succsim_1, \ldots, \succsim_I) \in \mathscr{A}$ тот элемент в X, который наиболее предпочтителен с точки зрения отношения общественных предпочтений $F(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)$. Например, если, как в утверждении 21.D.2, $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}_{\geq}^{I}$ — множество однопиковых предпочтений, I — нечетное число и $F(\cdot)$ — функционал общественного благосостояния для попарного голосования по правилу большинства, определенный на $\mathscr{A}$, то для каждого профиля индивидуальных предпочтений $(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)$ выбор $f(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)$ является победителем Кондорсе на X.

Сейчас мы сформулируем и докажем результат, параллельный теореме о невозможности Эрроу. Вспомним, что теорема Эрроу требовала выполнения двух условий: функционал общественного благосостояния должен был обладать свойством Парето и быть попарно независимым. Здесь мы также требуем выполнения двух условий: функция общественного выбора должна быть, во-первых, *(слабо) Паретовой*, а во-вторых, *монотонной*. Смысл этих понятий раскрывается в определениях 21.E.2 и 21.E.4 соответственно.

Определение 21.E.2. Функция общественного выбора $f\colon \mathscr{A} \to X$, определенная на $\mathscr{A} \subset \mathscr{R}^I$, является *слабо Паретовой*, если для любого профиля индивидуальных предпочтений $(\succsim_1, \ldots, \succsim_I) \in \mathscr{A}$ выбор $f(\succsim_1, \ldots, \succsim_I) \in X$ является слабым Парето-оптимумом. То есть если для некоторой пары $\{x, y\} \subset X$ для любого агента i выполнено: $x \succ_i y$, то $y \neq f(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)$.

Для определения монотонности нам необходимо предварительно определить еще одно понятие.

Определение 21.E.3. Альтернатива $x \in X$ *сохраняет свою позицию* от профиля $(\succsim_1, \ldots, \succsim_I) \in \mathscr{R}^I$ к профилю $(\succsim_1', \ldots, \succsim_I') \in \mathscr{R}^I$, если

$$x \succsim_i y \text{ подразумевает } x \succsim_i' y$$

для каждого агента i и каждой альтернативы $y \in X$.

[13] Тем не менее в некоторых контекстах естественно допускать, что множество общественного выбора может содержать много элементов (т. е. что вариантов приемлемого общественного выбора может быть много). Некоторые предпосылки, касающиеся общественного выбора, могут быть более правдоподобными именно в таком случае.

[14] Отметим разницу между концепцией функции выбора, введенной здесь, и аналогичной концепцией правила выбора, введенной в разделе 1.C. Там мы рассматривали возможность существования нескольких бюджетов и зависимость выбора от того бюджета, которым мы располагаем. Здесь бюджет фиксирован (это всегда X), но выбор может зависеть от профиля индивидуальных предпочтений. Мы могли бы, но не будем рассматривать здесь ситуации, которые охватывают оба этих случая. Другое отличие от раздела 1.C: здесь мы считаем, что выбрать можно только одну альтернативу.

Другими словами, x сохраняет свою позицию от $(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)$ к $(\succsim'_1, \ldots, \succsim'_I)$, если для каждого агента i множество альтернатив, таких же, как x, или худших, чем она, при переходе от $\succsim_i$ к $\succsim'_i$ остается таким же или увеличивается. То есть

$$L(x, \succsim_i) = \{y \in X : x \succsim_i y\} \subset L(x, \succsim'_i) = \{y \in X : x \succsim'_i y\}.$$

Отметим, что сформулированное в определении 21.E.3 условие не накладывает никаких ограничений на то, каким образом другие альтернативы, отличающиеся от x, могут менять свое взаимное расположение при переходе от $\succsim_i$ к $\succsim'_i$.[15]

Определение 21.E.4. Функция общественного выбора $f\colon \mathscr{A} \to X$, определенная на $\mathscr{A} \subset \mathscr{R}^I$, является *монотонной,* если для любых двух профилей $(\succsim_1, \ldots, \succsim_I) \in \mathscr{A}$ и $(\succsim'_1, \ldots, \succsim'_I) \in \mathscr{A}$, таких что выбранная альтернатива $x = f(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)$ сохраняет свою позицию от $(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)$ к $(\succsim'_1, \ldots, \succsim'_I)$, имеем: $f(\succsim'_1, \ldots, \succsim'_I) = x$.

Другими словами, функция общественного выбора является монотонной, если ни одна альтернатива не может быть исключена из выбора, кроме случаев, когда ее привлекательность для некоторых агентов снизилась.

Существуют ли монотонные слабо Паретовые функции общественного выбора? Ответ положительный. К примеру, в упражнении 21.E.1 вам предлагается проверить, что функция общественного благосостояния, определенная на множестве однопиковых предпочтений попарным голосованием по правилу большинства, является слабо Паретовой и монотонной. А если мы имеем дело с неограниченной областью определения (т. е. $\mathscr{A} = \mathscr{R}^I$ или $\mathscr{A} = \mathscr{P}^I$)? Не очень привлекательным классом функций общественного благосостояния, удовлетворяющих этим двум свойствам на указанных областях определения, являются *диктаторские* функции общественного выбора.

Определение 21.E.5. Агент $h \in I$ является *диктатором* для функции общественного выбора $f\colon \mathscr{A} \to X$, если для каждого профиля $(\succsim_1, \ldots, \succsim_I) \in \mathscr{A}$ $f(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)$ является наиболее предпочтительной альтернативой для $\succsim_h$ на X; т. е.

$$f(\succsim_1, \ldots, \succsim_I) \in \{x \in X : x \succsim_h y \quad \text{для каждого } y \in X\}.$$

Функция общественного выбора, допускающая существование диктатора, называется *диктаторской*.

На области определения $\mathscr{P}^I$ диктаторская функция общественного выбора является слабо Паретовой и монотонной. (Это достаточно очевидно, но в любом случае вы должны проверить это в упражнении 21.E.2, где также предлагается обсудить случай $\mathscr{A} = \mathscr{R}^I$.) К сожалению, на неограниченной области определения мы не можем получить ничего лучше диктатор-

[15] Как и в разделе 3.B, множества $L(x, \succsim_i)$ называются нижними лебеговскими множествами.

ских функций общественного выбора. Об этом говорит результат утверждения 21.E.1.

Утверждение 21.E.1. Предположим, что альтернатив по меньшей мере три и что область определения допустимых профилей индивидуальных предпочтений задана либо как $\mathscr{A} = \mathscr{R}^I$, либо как $\mathscr{A} = \mathscr{P}^I$. Тогда каждая слабо Паретовая, монотонная функция общественного благосостояния f: $\mathscr{A} \to X$ является диктаторской.

Доказательство. Доказательство будет получено как следствие теоремы о невозможности Эрроу (утверждение 21.C.1). Чтобы распространить ее действие на функции общественного выбора, мы получим функционал общественного благосостояния $F(\cdot)$, который будет рационализировать $f(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)$ для каждого профиля $(\succsim_1, \ldots, \succsim_I) \in \mathscr{A}$. Затем мы покажем, что $F(\cdot)$ удовлетворяет предпосылкам теоремы Эрроу, придя, таким образом, к выводу о диктатуре.

Начнем с полезного определения.

Определение 21.E.6. Для конечного подмножества $X' \subset X$ и профиля $(\succsim_1, \ldots, \succsim_I) \in \mathscr{R}^I$ профиль $(\succsim'_1, \ldots, \succsim'_I)$ *перемещает* X' *на вершину относительно* $(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)$, если для каждого i

$$x \succ'_i y \qquad \text{для } x \in X' \text{ и } y \notin X',$$

$$x \succsim_i y \Leftrightarrow x \succsim'_i y \qquad \text{для всех } x, y \in X'.$$

Иными словами, отношение предпочтения $\succsim'_i$ получается из $\succsim_i$ следующим образом: подмножество X' целиком перемещается на вершину иерархии предпочтений, при этом альтернативы внутри него остаются упорядоченными так же, как и раньше. Порядок среди альтернатив не на X' произвольный. Например, если $x \succ_i y \succ_i z \succ_i w$, то отношение предпочтения $\succ'_i$, имеющее вид $y \succ'_i w \succ'_i z \succ'_i x$, перемещает $\{y, w\}$ на вершину относительно $\succsim_i$. Отметим также, что если $(\succsim'_1, \ldots, \succsim'_I)$ перемещает X' на вершину относительно $(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)$, то каждая альтернатива $x \in X'$ сохраняет свою позицию при переходе от $(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)$ к $(\succsim'_1, \ldots, \succsim'_I)$.

Разделим дальнейшее доказательство на последовательность шагов.

Шаг 1: Если и профиль $(\succsim'_1, \ldots, \succsim'_I) \in \mathscr{A}$, *и профиль* $(\succsim''_1, \ldots, \succsim''_I) \in \mathscr{A}$ *перемещают* $X' \subset X$ *на вершину относительно* $(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)$, *то* $f(\succsim'_1, \ldots, \succsim'_I) = f(\succsim''_1, \ldots, \succsim''_I)$.

Для каждого i и $x \in X'$ имеем

$$\{y \in X : x \succsim'_i y\} = \{y \in X : x \succsim''_i y\} = \{y \in X : x \succsim_i y\} \cup X \setminus X'.$$

Так как функция общественного выбора является слабо Паретовой, то $f(\succsim'_1, \ldots, \succsim'_I) \in X'$. Таким образом, $f(\succsim'_1, \ldots, \succsim'_I) \in X'$ сохраняет свою позицию при переходе от $(\succsim'_1, \ldots, \succsim'_I)$ к $(\succsim''_1, \ldots, \succsim''_I)$. Следовательно, в силу монотонности функции $f(\cdot)$ заключаем, что $f(\succsim'_1, \ldots, \succsim'_I) = f(\succsim''_1, \ldots, \succsim''_I)$.

Шаг 2: Определение $F(\succsim_1, ..., \succsim_I)$.

Для каждого профиля $(\succsim_1, ..., \succsim_I) \in \mathscr{A}$ зададим некоторое бинарное отношение $F(\succsim_1, ..., \succsim_I)$ на X. В частности, пусть $xF(\succsim_1, ..., \succsim_I)y$ (читается как «x с общественной точки зрения по меньшей мере не хуже y»), если $x = y$ либо $x = f(\succsim_1', ..., \succsim_I')$ для любого профиля $(\succsim_1', ..., \succsim_I') \in \mathscr{A}$, который перемещает $\{x, y\} \subset X$ на вершину относительно профиля $(\succsim_1, ..., \succsim_I)$. Согласно шагу 1, это отношение является вполне определенным, т. е. не зависит от конкретного выбранного профиля $(\succsim_1', ..., \succsim_I')$.

Шаг 3: Для каждого профиля $(\succsim_1, ..., \succsim_I) \in \mathscr{A}$, $F(\succsim_1, ..., \succsim_I)$ *является рациональным отношением предпочтения. Более того,* $F(\succsim_1, ..., \succsim_I) \in \mathscr{P}$, *т. е. неодинаковых, но эквивалентных с общественной точки зрения альтернатив не существует.*

Так как $f(\cdot)$ — слабо Паретовая функция общественного выбора, то, если $(\succsim_1', ..., \succsim_I')$ перемещает $\{x, y\}$ на вершину относительно $(\succsim_1, ..., \succsim_I)$, должно выполняться $f(\succsim_1', ..., \succsim_I') \in \{x, y\}$. Таким образом, мы заключаем, что либо $xF(\succsim_1, ..., \succsim_I)y$, либо $yF(\succsim_1, ..., \succsim_I)x$, *но* (в силу шага 1) *не то и другое одновременно* (последнее может иметь место, лишь если $x = y$). Отсюда следует, что отношение $F(\succsim_1, ..., \succsim_I)$ является полным.

Для проверки транзитивности предположим, что $xF(\succsim_1, ..., \succsim_I)y$ и $yF(\succsim_1, ..., \succsim_I)z$. Мы можем считать, что эти три альтернативы $\{x, y, z\}$ отличаются друг от друга. Пусть $(\succsim_1'', ..., \succsim_I'') \in \mathscr{A}$ — профиль, который перемещает $\{x, y, z\}$ на вершину относительно $(\succsim_1, ..., \succsim_I)$. Поскольку $f(\cdot)$ является слабо Паретовой, имеем: $f(\succsim_1'', ..., \succsim_I'') \in \{x, y, z\}$.

Пусть $y = f(\succsim_1'', ..., \succsim_I'')$. Рассмотрим профиль $(\succsim_1', ..., \succsim_I') \in \mathscr{A}$, который перемещает $\{x, y\}$ на вершину относительно $(\succsim_1'', ..., \succsim_I'')$. Поскольку y сохраняет свою позицию от $(\succsim_1'', ..., \succsim_I'')$ к $(\succsim_1', ..., \succsim_I')$, из монотонности следует, что $f(\succsim_1', ..., \succsim_I') = y$. Но $(\succsim_1', ..., \succsim_I')$ также перемещает $\{x, y\}$ на вершину относительно $(\succsim_1, ..., \succsim_I)$: относительный порядок расположения x и y, двух лучших в иерархии альтернатив, ни в одном индивидуальном отношении предпочтения не изменился при переходе от $(\succsim_1, ..., \succsim_I)$ к $(\succsim_1', ..., \succsim_I')$. Следовательно, $yF(\succsim_1, ..., \succsim_I)x$, что противоречит нашему предположению о $xF(\succsim_1, ..., \succsim_I)y$, $x \neq y$. Отсюда $y \neq f(\succsim_1'', ..., \succsim_I'')$.

Аналогично можно показать, что $z \neq f(\succsim_1'', ..., \succsim_I'')$. Для этого нужно лишь повторить рассуждение, приведенное выше, для пары $\{y, z\}$ (вам предлагается проделать это в упражнении 21.E.3).

Остается единственная возможность: $x = f(\succsim_1'', ..., \succsim_I'')$. Пусть $(\succsim_1', ..., \succsim_I') \in \mathscr{A}$ перемещает $\{x, z\}$ на вершину относительно $(\succsim_1'', ..., \succsim_I'')$. Поскольку x сохраняет свою позицию при переходе от $(\succsim_1'', ..., \succsim_I'')$ к $(\succsim_1', ..., \succsim_I')$, имеем: $x = f(\succsim_1', ..., \succsim_I')$. Но $(\succsim_1', ..., \succsim_I')$ также перемещает $\{x, z\}$ на вершину относительно $(\succsim_1, ..., \succsim_I)$. Таким образом, $xF(\succsim_1, ..., \succsim_I)z$, и транзитивность доказана.

Шаг 4: Функционал общественного благосостояния F: $\mathscr{A} \to \mathscr{P}$ рационализирует f: $\mathscr{A} \to X$, т. е. для каждого профиля $(\succsim_1, ..., \succsim_I) \in \mathscr{A}$, $f(\succsim_1, ..., \succsim_I)$ является наиболее предпочтительной альтернативой для $F(\succsim_1, ..., \succsim_I)$ на X.

Это утверждение интуитивно понятно, поскольку $F(\cdot)$ был построен на основе $f(\cdot)$. Обозначим $x = f(\succsim_1, ..., \succsim_I)$, и пусть $y \neq x$ — любая другая альтернатива. Рассмотрим профиль $(\succsim_1', ..., \succsim_I') \in \mathscr{A}$, который перемещает $\{x, y\}$ на вершину относительно $(\succsim_1, ..., \succsim_I)$. Поскольку x сохраняет позицию от $(\succsim_1, ..., \succsim_I)$ к $(\succsim_1', ..., \succsim_I')$, имеем: $x = f(\succsim_1', ..., \succsim_I')$. Таким образом, $xF(\succsim_1, ..., \succsim_I)y$.

Шаг 5: Функционал общественного благосостояния F: $\mathscr{A} \to \mathscr{P}$ обладает свойством Парето.

Очевидно, что если $x \succ_i y$ для каждого i, то по свойству Парето для $f(\cdot)$ при любом $(\succsim_1', ..., \succsim_I')$, перемещающем $\{x, y\}$ на вершину относительно $(\succsim_1, ..., \succsim_I)$, должно выполняться $x = f(\succsim_1', ..., \succsim_I')$. Таким образом, $xF(\succsim_1, ..., \succsim_I)y$, и в силу шага 3, $xF_p(\succsim_1, ..., \succsim_I)y$.

Шаг 6: Функционал общественного благосостояния F: $\mathscr{A} \to \mathscr{P}$ удовлетворяет условию попарной независимости.

Это следует из шага 1. Предположим, что в профилях $(\succsim_1, ..., \succsim_I) \in \mathscr{A}$ и $(\succsim_1', ..., \succsim_I') \in \mathscr{A}$ альтернативы $\{x, y\}$ для каждого i упорядочены одинаково (т. е. для каждого i $x \succsim_i y$ тогда и только тогда, когда $x \succsim_i' y$). Предположим, что $(\succsim_1'', ..., \succsim_I'') \in \mathscr{A}$ перемещает $\{x, y\}$ на вершину относительно $(\succsim_1, ..., \succsim_I)$ и что, скажем, $x = f(\succsim_1'', ..., \succsim_I'')$. Тогда $xF(\succsim_1, ..., \succsim_I)y$. Но $(\succsim_1'', ..., \succsim_I'')$ также перемещает $\{x, y\}$ на вершину относительно $(\succsim_1', ..., \succsim_I')$. Таким образом, $xF(\succsim_1', ..., \succsim_I')y$, что и требовалось доказать.

Шаг 7: Функция общественного выбора f: $\mathscr{A} \to X$ является диктаторской.

Согласно теореме Эрроу (утверждение 21.С.1), найдется агент $h \in I$, такой что для каждого профиля $(\succsim_1, ..., \succsim_I) \in \mathscr{A}$ мы будем иметь $xF_p(\succsim_1, ..., \succsim_I)y$ всякий раз, когда $x \succ_h y$. Таким образом, $f(\succsim_1, ..., \succsim_I)$ [которая в силу шага 4 является наиболее предпочтительной альтернативой для $F(\succsim_1, ..., \succsim_I)$ на X] также должна быть наиболее предпочтительной альтернативой для h; т. е. $f(\succsim_1, ..., \succsim_I) \succsim_h x$ для каждого $x \in X$. Таким образом, агент h является диктатором. ■

Наконец, чтобы обозначить взаимосвязь между утверждением 21.Е.1 и проблемой создания стимулов для раскрытия истинных предпочтений, которая будет подробно рассмотрена в главе 23, мы представим еще одно следствие теоремы о невозможности Эрроу (утверждение 21.Е.2).

Утверждение 21.Е.2. Предположим, что число альтернатив не меньше трех и f: $\mathscr{P}^I \to X$ является функцией общественного выбора, которая является слабо Паретовой и удовлетворяет следующему условию *отсутствия стимулов к искажению информации*:

$$f(\succsim_1, \ldots, \succsim_{h-1}, \succsim_h, \succsim_{h+1}, \ldots, \succsim_I) \succsim_h$$
$$\succsim_h f(\succsim_1, \ldots, \succsim_{h-1}, \succsim'_h, \succsim_{h+1}, \ldots, \succsim_I)$$

для каждого агента h, каждого $\succsim'_h \in \mathscr{P}$, каждого профиля $(\succsim_1, \ldots, \succsim_I) \in$ $\in \mathscr{P}^I$. Тогда $f(\cdot)$ является диктаторской.

Доказательство. Принимая во внимание утверждение 21.E.1, достаточно показать, что f: $\mathscr{P}^I \to X$ должна быть монотонной.

Предположим, что она не монотонна. Тогда, без потери общности, можно считать, что найдется агент h, такой что для предпочтений остальных агентов $\succsim_i \in \mathscr{P}$, $i \neq h$ и двух вариантов его собственных предпочтений $\succsim''_h$, $\succsim'''_h \in \mathscr{P}$ будет верно следующее. Для

$$x = f(\succsim_1, \ldots, \succsim_{h-1}, \succsim''_h, \succsim_{h+1}, \ldots, \succsim_I)$$

и

$$y = f(\succsim_1, \ldots, \succsim_{h-1}, \succsim'''_h, \succsim_{h+1}, \ldots, \succsim_I)$$

из $x \succsim''_h z$ будет следовать: $x \succsim'''_h z$ для каждого $z \in X$, и при этом $y \neq x$.

Возможны два случая: либо $y \succ''_h x$, либо $x \succsim''_h y$.

В случае $y \succ''_h x$ условие отсутствия стимулов к искажению информации не выполнено, если «истинное» отношение предпочтения — $\succsim_h = \succsim''_h$, а искаженное — $\succsim'_h = \succsim'''_h$.

Если же $x \succsim''_h y$, то $x \succsim'''_h y$. Следовательно, поскольку неодинаковых, но эквивалентных альтернатив нет, $x \succ'''_h y$. Но в случае $x \succ'''_h y$ условие отсутствия стимулов к искажению информации не выполнено, если «истинное» отношение предпочтения — $\succsim_h = \succsim'''_h$, а искаженное — $\succsim'_h = \succsim''_h$.

Литература

Arrow, K.J. (1963). *Social Choice and Individual Values*, 2d ed. New York: Wiley.

Austen-Smith., and J. S. Banks (1996). *Positive Political Theory*. Ann Arbor: University of Michigan Press.

Caplin, A., and B. Nalebuff. (1988) On 64%-majority voting. *Econometrica* **56**: 787—814.

Grandmont, J-M. (1978). Intermediate preferences and majority rule. *Econometrica* **46**: 317—30.

May, K. (1952). A set of independent, necessary and sufficient conditions for simple majority decision. *Econometrica* **20**: 680—84.

Moulin, H. (1988) *Axioms of Cooperative Decision Making*. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.

Sen, A. (1970). *Individual Choice and Social Welfare*. San Francisco: Holden Day.

Sen, A. (1986). Social choice theory. Chap. 22 in *Handbook of Mathematical Economics*, edited by K. Arrow, and M. Intriligator. Amsterdam: North-Holland.

Shepsle, K. A. and M. Boncheck (1995), *Analyzing Politics*. New York: W.W.Norton.

Tullock, G. (1967). The general irrelevancy of the general possibility theorem. *Quarterly Journal of Economics* **81**: 256—70.

Упражнения

21.B.1^A. Проверьте, что голосование по правилу большинства в случае двух альтернатив удовлетворяет свойствам симметрии по агентам, нейтральности по отношению к альтернативам и позитивного отклика.

21.B.2^A. Для каждого из трех свойств, характеризующих голосование по правилу большинства в случае двух альтернатив, в соответствии с утверждением 21.B.1 (симметрии по агентам, нейтральности по отношению к альтернативам, позитивного отклика) подберите пример функционала общественного благосостояния $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_I)$, отличного от голосования по правилу большинства и удовлетворяющего двум из трех свойств. Это упражнение показывает, что ни одно из трех свойств не является излишним в характеристике голосования по правилу большинства.

21.B.3^A. Предположим, объем проекта, связанного с общественным благом, может принимать два значения, $k \in \{0, 1\}$, где $k = 0$ можно интерпретировать как статус-кво. Существует группа агентов I, имеющих квазилинейные предпочтения (товаром-измерителем являются деньги) на комбинациях общественного блага и денег в собственном распоряжении. Таким образом, предпочтения агента i полностью описываются его максимальной готовностью заплатить ($v_i \in \mathbb{R}$) за то, чтобы объем производства общественного блага составил $k = 1$, а не $k = 0$. Число v_i может принимать отрицательные значения (в этом случае оно соответствует минимально необходимому размеру компенсации).

Покажите, что голосование по правилу большинства между двумя объемами осуществления общественного проекта гарантирует Парето-оптимальность выбора на множестве альтернатив, состоящем только из этих двух объемов без каких-либо денежных трансфертов между агентами, но не гарантирует Парето-оптимальности на более широком множестве альтернатив, когда трансферты между агентами возможны.

Сравните и укажите различия между голосованием по правилу большинства («медианой») и правилом Парето-оптимального решения для случая, в котором возможны трансферты между агентами («среднее»).

21.C.1^A. Выполните шаг 1 в доказательстве утверждения 21.C.1.

21.C.2^B. Перечень явных и неявных предпосылок теоремы о невозможности Эрроу (утверждение 21.C.1) таков:

a) Число альтернатив — по меньшей мере 3.

b) Универсальная область определения: областью определения функционала общественного благосостояния $F(\cdot)$ является $\mathscr{R}^I$.

c) Общественная рациональность: $F(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)$ является рациональным (т. е. полным и транзитивным) отношением предпочтения для каждого возможного профиля индивидуальных предпочтений.

d) Попарная независимость (определение 21.C.3).

e) Условие Парето (определение 21.C.2).

f) Отсутствие диктаторства: т. е. нет такого агента h, который при любом профиле индивидуальных предпочтений получает свою строго предпочитаемую альтернативу в любой возможной паре альтернатив (точное определение см. в утверждении 21.C.1).

Для каждой из этих предпосылок приведите пример функционала общественного благосостояния $F(\cdot)$, удовлетворяющего другим пяти предпосылкам (но не указанной). Это говорит о том, что ни одна из предпосылок не является излишней для получения вывода о невозможности.

21.C.3$^{\text{A}}$. Покажите, что существуют функционалы общественного благосостояния F: $\mathscr{R}^I \to \mathscr{R}$, определенные на $\mathscr{R}^I$ (т. е. для индивидуальных предпочтений допускается безразличие), удовлетворяющие всем условиям теоремы о невозможности Эрроу (утверждение 21.C.1), для которых общественные предпочтения *не совпадают* ни с какими индивидуальными предпочтениями. [*Подсказка*: используйте *лексическое диктаторство*, при котором диктатор ранга n навязывает обществу свои предпочтения тогда и только тогда, когда для всех диктаторов более высокого уровня альтернативы эквивалентны.]

21.D.1$^{\text{B}}$. Предположим, что X — конечное множество альтернатив. Задайте рефлексивное и полное отношение предпочтения $\succsim$ на X, обладающее тем свойством, что предпочтение $\succsim$ имеет максимальный элемент на каждом строгом подмножестве $X' \subset X$, но не является ацикличным.

21.D.2$^{\text{A}}$. Проверьте, что общественные предпочтения, порождаемые олигархией (пример 21.D.1), квазитранзитивны, но отношение общественного безразличия может оказаться нетранзитивным. Дайте интерпретацию этого результата.

21.D.3$^{\text{A}}$. Покажите, что общественные предпочтения, порождаемые в примере с игроками, имеющими право вето (пример 21.D.2), ацикличны, но необязательно квазитранзитивны. Покажите, что, несмотря на право вето агента 2, альтернатива x может оказаться единственным максимумом для общественных предпочтений.

21.D.4$^{\text{A}}$. На примере отношения предпочтения из примера 21.D.4 покажите, что непрерывное отношение предпочтения $\succsim$ на $X = [0, 1]$ является однопиковым, только если эти предпочтения *строго выпуклы*.

21.D.5$^{\text{A}}$. Приведите прямое доказательство того, что предпочтения, описанные в парадоксе Кондорсе (пример 21.C.2), невозможно сформировать семейство однопиковых предпочтений ни на одном из шести линейных порядков, возможных на этих трех альтернативах.

21.D.6[B]. Приведите пример с четным числом агентов и однопиковыми предпочтениями, в котором попарное голосование по правилу большинства не позволило бы генерировать полностью транзитивные отношения общественного предпочтения.

21.D.7[C]. Предположим, что X является выпуклым подмножеством $\mathbb{R}^2$ и начало координат — его внутренней точкой. Имеются три агента, $i = 1, 2, 3$. Предпочтения каждого агента i описываются непрерывно дифференцируемой функцией полезности u_i: $X \to \mathbb{R}$. Допустим, что конус в $\mathbb{R}^2$, ограниченный множеством градиентов функций полезности в точке начала координат $\{\nabla u_1(0), \nabla u_2(0), \nabla u_3(0)\}$, охватывает все множество $\mathbb{R}^2$. Покажите следующее:

a) Найдутся три альтернативы $x, y, z \in X$, которые сформируют цикл Кондорсе (т. е. x будет иметь строгое большинство против y, y против z, z против x).

b) (*более сложное задание*). Для любой альтернативы $x \in \mathbb{R}^2$ найдется $y \in \mathbb{R}^2$, такая что $||x - y|| < ||x||$ и два агента предпочтут y началу координат, $0 \in \mathbb{R}^2$. То есть если принять начало координат как статус-кво, то для любого x найдутся агенты, которые сформируют строгое большинство, предпочитающее альтернативу, приближающую их к x, текущему положению вещей. [*Подсказка*: можно предполагать, что функции полезности являются линейными.]

21.D.8[C]. Рассмотрите ситуацию, почти повторяющую ситуацию из упражнения 21.D.7, за исключением того, что теперь градиенты функций полезности в начале координат ограничивают обыкновенный заостренный конус (т. е. конус, не содержащий никаких полупространств). Считайте также, что функции полезности квазивогнуты.

a) Покажите, что в начале координат найдется агент, который будет дирекционной медианой в следующем смысле: любую альтернативу, которая получит строгое большинство против начала координат, этот агент строго предпочтет началу координат.

b) Предположим, что конус, ограниченный градиентами функций полезности $\{\nabla u_1(x), \nabla u_2(x), \nabla u_3(x)\}$, является заостренным для каждого $x \in X$. Тогда в соответствии с (а) для каждого $x \in X$ существует агент, являющийся дирекционной медианой. Покажите, что в зависимости от x дирекционной медианой могут оказываться разные агенты и что могут возникать циклы Кондорсе.

c) Рассмотрите ту же ситуацию, что и в (b). Покажите, что если дирекционной медианой при любых $x \in X$ оказывается один и тот же агент, то циклы Кондорсе невозможны.

21.D.9[C]. (Grandmont). Рассмотрите множество альтернатив X и три рациональных отношения предпочтений $\succsim$, $\succsim'$, $\succsim''$ на X. Будем говорить, что $\succsim''$ является *промежуточным* между $\succsim$ и $\succsim'$, если из

$x \succsim y$ и $x \succsim' y$ следует $x \succsim'' y$. То есть для каждой альтернативы y пересечение надграфиков для $\succsim$ и $\succsim'$ входит в надграфик $\succsim''$.

a) Покажите, что если $u(x)$ и $u'(x)$ являются функциями полезности для соответствующих предпочтений на X, то для любых положительных чисел γ и ψ отношение предпочтения, описывающееся $\psi u(x) + \gamma u'(x)$, является промежуточным между отношениями предпочтения, описывающимися $u(x)$ и $u'(x)$.

b) Предположим, что дано N функций, $h_1(x)$, … $h_N(x)$, определенных на X. Предпочтения агентов представимы функциями полезности вида $u_\beta(x) = \beta_1 h_1(x) + \ldots + \beta_N h_N(x)$, где $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_N) \in \mathbb{R}^N_{++}$. Покажите, что для любых двух альтернатив x, $y \in X$ множество $B(x, y) = \left\{\beta \in \mathbb{R}^N_{++} : u_\beta(x) > u_\beta(y)\right\}$ является пересечением $\mathbb{R}^N_{++}$ со смещенным полупространством.

c) Покажите, что вывод (b) остается верным, если параметры $\beta \in \mathbb{R}^N$ для каждой функции полезности подобраны так, что всякий раз, когда β'' является выпуклой комбинацией β и β', предпочтения, представленные $u_{\beta''}(x)$, являются промежуточными между представленными $u_\beta(x)$ и $u_{\beta'}(x)$.

d) Продолжая обсуждение параметризации функций полезности, начатое в (b), предположите, что рассматривается предельная ситуация, в которой популяция агентов распределена на $\mathbb{R}^N_{++}$ в соответствии с функцией плотности $g(\beta)$. Будем называть β^* *медианным агентом* для $g(\cdot)$, если *каждая* гиперплоскость в $\mathbb{R}^N$, проходящая через β^*, делит $\mathbb{R}^N$ на две части, имеющие, в соответствии с функцией плотности $g(\cdot)$, одинаковую массу. Покажите, что для произвольной $g(\cdot)$ медианный агент может как существовать, так и отсутствовать.

e) В предпосылках (d) предположим, что существует медианный агент β^*, $g(\beta^*) > 0$ и x^* является единственной наиболее предпочтительной альтернативой для медианного агента. Покажите, что x^* победит любую альтернативу при попарном голосовании по правилу большинства.

f) Покажите, что в этом упражнении можно также использовать Евклидовы предпочтения из примера 21.D.6, если концептуально разделить множество альтернатив и множество агентов.

21.D.10$^{\text{В}}$. Цель этого упражнения — показать, как однопиковость используется в задаче выбора варианта государственной политики. В частности, мы рассмотрим задачу выбора уровня налогов для перераспределения богатства путем голосования по правилу большинства.

Предположим, имеется нечетное число агентов I. Каждый агент располагает богатством $w_i > 0$ и имеет возрастающую по уровню богатства функцию полезности. Средний уровень богатства равен $\bar{w}$, а медианный составляет w^*.

a) Каким образом разница между $\bar{w}$ и w^* характеризует распределение богатства?

b) Пусть вводится пропорциональный налог $t \in [0, 1]$, ставка которого одинакова для всех агентов. Множество альтернатив $X = [0, 1]$ представляет собой множество возможных уровней ставки налога. Налоговая выручка равномерно распределяется между агентами. Таким образом, при ставке налога t богатство агента i после уплаты налога и получения своей доли налоговой выручки составит $(1-t)w_i + t\bar{w}$. Покажите, что предпочтения всех агентов на X являются однопиковыми и что победителем Кондорсе окажется либо ставка налога $t_c = 0$, либо $t_c = 1$, в зависимости от того, какое неравенство выполняется: $w^* > \bar{w}$ или $w^* < \bar{w}$. Интерпретируйте эти результаты.

c) Теперь представим, что налогообложение связано с общественными потерями. Предположим в первом приближении, что введение налога $t \in [0, 1]$ снижает доналоговый уровень богатства агента i до $w_i(t) = (1 - t)w_i$ [таким образом, средняя налоговая выручка равна $t(1-t)\bar{w}$, а фактический уровень богатства агента i *ex post* составит $(1 - t)^2 w_i + t(1 - t)\bar{w}$]. Покажите, что предпочтения на уровнях богатства являются однопиковыми (но заметьте, что уровень богатства после налоговых выплат может быть невогнутой функцией от налоговой ставки). Затем покажите, что $t_c \le \frac{1}{2}$. Также покажите, что $t_c = 0$ или $t_c > 0$, в зависимости от того, выполняется $w^* > \frac{1}{2}\bar{w}$ или $w^* < \frac{1}{2}\bar{w}$ соответственно. Сравните с (b) и проинтерпретируйте.

d) Модифицируем условия пункта (c), полагая, что чистые потери влияют на индивидуальный уровень богатства дифференцированно: пусть налог со ставкой $t \in [0, 1]$ снижает доналоговое богатство агента i, w_i, до уровня $(1 - t^2)w_i$ [теоретически эта ситуация представляется более разумной, чем в (c), поскольку из основных принципов следует, что при $t = 0$ небольшой рост t приведет лишь к эффекту второго порядка в отношении совокупного богатства]. Покажите, что в этом случае индивидуальные предпочтения в отношении налоговых ставок могут не быть однопиковыми.

21.D.11$^{\text{B}}$. Рассмотрим конечное множество альтернатив X и множество предпочтений $\mathscr{P}_{\geq}$, однопиковых по отношению к некоторому линейному порядку $\geq$ на X (отметим, что возможность безразличия для индивидуальных предпочтений исключается). Число агентов нечетно. Как было показано в утверждении 21.D.2, возможный класс функционалов общественного благосостояния F: $\mathscr{P}_{\geq}^{I} \to \mathscr{P}$, удовлетворяющих свойству Парето и условиям попарной независимости, — это функционалы, для которых выбирается некоторое подмножество $S \subset I$, состоящее из нечетного числа агентов (разновидность олигархии), которое затем и определяет общественные предпочтения путем попарного голосования по правилу большинства. Покажите на примере, что это не единственный возможный класс функционалов общественного благосостояния F: $\mathscr{P}_{\geq}^{I} \to \mathscr{P}$, который удовлетворяет свойству Парето и условиям попарной независимости.

21.D.12$^{\text{A}}$. Предположим, что совокупные издержки $c > 0$ осуществления проекта должны финансироваться за счет налогообложения трех агентов. В этом случае множество альтернатив задано так: $X = \{(t_1, t_2, t_3) \geq 0\colon t_1 + t_2 + t_3 = c\}$. Схема финансирования выбирается с помощью голосования по правилу большинства.

a) Покажите, что ни одна строго положительная альтернатива $(t_1, t_2, t_3) >> 0$ не является победителем Кондорсе.

b) Что произойдет с альтернативами (t_1, t_2, t_3), если $t_i = 0$ для некоторых i?

21.D.13$^{\text{B}}$. Имеется популяция агентов (точнее, континуум) с эвклидовыми предпочтениями на $\mathbb{R}^2$. Предпочтения агентов подразделяются на ограниченное число (J) типов. Каждому типу соответствует наиболее предпочитаемая им точка x_j. Мы предполагаем, что x_j расположены «произвольно» в том смысле, что не найдется ни одной тройки x_j, через которую можно было бы провести прямую линию. Будем обозначать как $\alpha_j \in [0, 1]$ долю агентов типа j в общей массе агентов.

a) Предположим, что J нечетно и $\alpha_1 = \ldots = \alpha_J$. Докажите, что если $y \in \mathbb{R}^2$ является альтернативой — победителем Кондорсе, то $y \in \{x_1, \ldots, x_J\}$. То есть альтернатива — победитель Кондорсе должна оказаться наилучшей альтернативой хотя бы для одного типа агентов. Останется ли это верным, если J — четное число?

b) (De Marzo). Теперь предположим, что существует доминирующий тип, т. е. тип h, такой что $\alpha_h > \alpha_j$ для каждого $j \neq h$. Докажите, что если существует альтернатива — победитель Кондорсе $y \in \mathbb{R}^2$, то $y = x_h$. То есть только наилучшая альтернатива для доминирующего типа может быть победителем Кондорсе.

21.D.14$^{\text{B}}$. В этом упражнении проверяется, что мы не можем ослабить определение однопиковости, потребовав лишь, чтобы степень предпочтительности альтернатив не убывала по мере приближения к пику.

Предположим, что у нас есть пять агентов и пять альтернатив $\{x, y, z, v, w\}$. Индивидуальные предпочтения таковы:

$$x \succ_1 y \sim_1 z \sim_1 v \sim_1 w,$$

$$y \succ_2 x \succ_2 z \succ_2 v \succ_2 w,$$

$$z \succ_3 y \sim_3 v \sim_3 w \succ_3 x,$$

$$v \succ_4 w \succ_4 x \sim_4 y \sim_4 z,$$

$$w \succ_5 x \sim_5 y \sim_5 z \sim_5 v.$$

a) Покажите, что среди этих альтернатив нет победителя Кондорсе; т. е. каждая альтернатива проигрывает некоторой другой альтернативе при голосовании по правилу большинства.

b) Покажите, что существует линейный порядок $\geq$ на альтернативах, такой что отношения предпочтения пяти агентов удовлетворяют следующему свойству: «по мере движения на линейном порядке $\geq$ в направлении наиболее предпочитаемой для агента альтернативы степень предпочтительности альтернатив не убывает».

c) Проверьте, что альтернативы могут рассматриваться как точки на отрезке [0, 1] и предпочтения каждого агента можно описать квазивогнутой функцией полезности на интервале [0, 1]. [Вспомним: $u_i(t)$ квазивогнута, если $\{t \in [0, 1]\colon u_i(t) \geq \gamma\}$ выпукло для каждого γ.]

d) (*более сложное задание*). Распространите предыдущие рассуждения на пример со следующими характеристиками: (1) имеется пять агентов; (2) множество альтернатив — интервал [0, 1]; (3) каждый агент имеет квазивогнутую функцию полезности на [0, 1] с единственной максимальной альтернативой; (4) на интервале [0, 1] не существует победителя Кондорсе.

21.E.1$^{\mathbf{A}}$. Рассмотрим конечное множество альтернатив X и нечетное число агентов. Областью определения предпочтений является $\mathscr{A} = \mathscr{P}_{\geq}^{I}$, где $\geq$ — линейный порядок на X (т. е. предпочтения однопиковые и случаи безразличия индивидов между двумя неодинаковыми альтернативами отсутствуют). Покажите, что функция общественного выбора, которая присваивает каждому профилю индивидуальных предпочтений победителя Кондорсе, является слабо Паретовой и монотонной.

21.E.2$^{\mathbf{A}}$. Предположим, что множество альтернатив X содержит $N < \infty$ элементов и что альтернативы пронумерованы от 1 до N, т. е. $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$. Рассмотрим функцию общественного выбора, определенную на $\mathscr{R}^{I}$ (допускаются случаи равнозначности для индивидов двух неодинаковых альтернатив) следующим образом: пусть $f(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)$ — альтернатива с наименьшим номером из всех наиболее предпочтительных для первого агента. Покажите, что эта функция общественного выбора является диктаторской, слабо Паретовой и монотонной. Проверьте все это для случая, когда область определения $f(\cdot)$ — $\mathscr{P}^I$.

21.E.3^A. Завершите доказательство шага 3 в утверждении 21.E.1.

21.E.4^A. Предположим, число альтернатив конечно и F: $\mathscr{A} \to \mathscr{P}$ является функционалом общественного благосостояния, удовлетворяющим слабому свойству Парето и условию попарной независимости на некоторой области определения $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}^I$. *Порожденная им функция общественного выбора* присваивает каждому профилю наиболее предпочтительную с общественной точки зрения альтернативу. Приведите два примера, когда порожденная функция общественного выбора не является монотонной. Один пример должен быть для случая с двумя альтернативами и $\mathscr{A} = \mathscr{P}^I$, а другой — для случая с более чем двумя альтернативами. [*Подсказка:* выберите очень маленькое $\mathscr{A}$.]

Глава 22. Элементы экономики благосостояния и аксиоматического торга

22.А. Введение

В этой главе мы продолжим изучать экономику благосостояния. Основное отличие этой главы от предыдущей заключается в том, что здесь в центре внимания окажутся кардиналистские аспекты индивидуальных функций полезности. Более того, мы не будем уклоняться от обсуждения последствий, к которым приводит предпосылка о межличностной сравнимости полезностей.

В разделе 22.B мы введем понятие *множества возможных уровней полезности* и определим разницу между проблемами поиска первого наилучшего и второго наилучшего.

В разделе 22.C мы сперва постулируем существование регулятора, или общественного планировщика, наделенного логически непротиворечивыми целями в виде *функции общественного благосостояния*. Роль его стратегии состоит в максимизации функции общественного благосостояния при ограничении множества возможных уровней полезности. Затем будет проанализирован ряд полезных практических примеров. Мы завершим раздел коротким обсуждением *критерия компенсации.*

В разделе 22.D мы исследуем, в какой мере возможность использования функций общественного благосостояния зависит от межличностных сравнений полезностей. Это будет сделано путем анализа следствий из аксиом, постулирующих инвариантность общественных предпочтений относительно точек отсчета и единиц измерения индивидуальных функций полезности. Этот раздел естественным образом связан с главой 21, так как здесь мы вновь опираемся на концепцию функционала общественного благосостояния, и это, пусть и иным путем, вновь приведет нас к теореме о невозможности Эрроу.

Разделы 22.E и 22.F будут связаны с несколько иной темой — аксиоматической теорией торга. Наша цель — формулировка и анализ разумных критериев дележа между двумя агентами *выигрышей* (или *потерь*) от совместного предприятия.

В разделе 22.E будет рассмотрен простейший пример, в котором участники находятся или в состоянии полной кооперации (возможные результаты этой кооперации описываются множеством возможных уровней полезности), или в экзогенно заданной *точке угрозы*. Мы описываем ряд вариантов того, что может происходить в этом примере, и среди прочего — классическое *переговорное решение Нэша*.

В разделе 22.F мы ограничимся изучением случая, когда полезность трансферабельна от агента к агенту. При этом допускается возможность сотрудничества между подгруппами агентов. Классическим решением подобной задачи является кратко описываемый нами *вектор Шепли*. Мы также рассмотрим пример интересного применения вектора Шепли к решению задачи распределения общих издержек по индивидуальным проектам.

22.B. Множества возможных уровней полезности (МВУП)

В этом разделе, являющемся первым шагом в изучении проблемы принятия решений о выборе наилучшей стратегии, мы опишем множество альтернатив, доступных регулятору; в следующем же разделе будут рассматриваться цели, которые он может преследовать[1].

Отправной точкой анализа является *непустое множество альтернатив* X и набор агентов I. В отличие от главы 21, где использовались отношения предпочтения, здесь мы будем считать, что предпочтения экономических агентов даны нам в виде функций полезности u_i: $X \to \mathbb{R}$. Можно поставить вопрос о смысле значений функции полезности $u_i(x)$: имеют они количественный или порядковый смысл? Можно ли сравнивать полезность одного индивида с полезностью другого? Все эти вопросы будут рассмотрены в разделе 22.D. В свете наших текущих задач отвечать на них нет необходимости.

Традиционный и неизменный принцип экономики благосостояния состоит в том, что выбор стратегии не должен быть *патерналистским*. Как минимум это означает, что альтернативы, которые не различаются с точки зрения вкусов агентов, не должны различаться и регулятором. Это подводит нас к мысли о том, что во внимание принимаются только значения функций полезности агентов от разных альтернатив — и, следовательно, надлежащим ограничением в задаче регулятора является *множество возможных уровней полезности* [понятие, введенное в работе (Samuelson, 1974)], которое мы теперь и определим.

Определение 22.B.1. Множеством возможных уровней полезности (МВУП) является множество

$$U = \{(u_1, \ldots, u_I) \in \mathbb{R}^I: u_1 \leq u_1(x), \ldots, u_I \leq u_I(x) \text{ для некоторого } x \in X\} \subset \mathbb{R}^L.$$

[1] Введение в экономику благосостояния см. в работах (Atkinson, Stiglitz, 1980; Laffont, 1988; Starrett, 1988). На более высоком уровне материал излагается в работе (Guesnerie, 1995). Работа (Phelps, 1973) содержит хорошую компиляцию основных статей, раскрывающих концептуальные основы этой области.

Границу Парето множества U составляют векторы полезности $u = (u_1, \ldots, u_I) \in U$, такие что не существует других векторов $u' = (u'_1, \ldots, u'_I) \in U$, таких что $u'_i \geq u_i$ для каждого i и $u'_i > u_i$ для некоторых i.

Чтобы получить некоторое представление о характеристиках совокупности множеств возможных уровней полезности и, в частности, о важном различии между задачами поиска первого наилучшего и второго наилучшего инструмента, мы обсудим несколько примеров.

Пример 22.B.1. *Экономики обмена.* Рассмотрим экономики с производством и обменом с L товарами и I потребителями, которые мы изучали в главе 10 и в части IV. Для подобной экономики множество альтернатив $X \subset \mathbb{R}^{LI}$ — это множество допустимых распределений товаров между потребителями $x = (x_1, \ldots, x_I)$. Функции полезности различных потребителей имеют форму $u_i(x) = u_i(x_i)$; т. е. полезность i-го потребителя в некотором распределении зависит только от его собственного потребления. В упражнении 22.B.1 вам предлагается показать, что в стандартных условиях (включающих в том числе вогнутость функций полезности), МВУП этой экономики является выпуклым множеством. Для частного случая, когда функции полезности квазилинейны[2], граница U является гиперплоскостью, как мы уже убедились в разделе 10.D. Общий и квазилинейный случаи показаны на рис. 22.B.1 и 22.B.2 соответственно. ■

Пример 22.B.1 соответствует ситуации первого наилучшего. *Задача поиска первого наилучшего* — это задача, в которой ограничения, определяющие X, задаются только технологией и ресурсами. Регулятор не может производить что-то из пустоты и поэтому должен учитывать эти ограничения, но в их рамках он может использовать любой мыслимый стратегический инструментарий. Если же, как это часто бывает, существуют и ограничения на используемый инструментарий, мы говорим о *задаче поиска второго наилучшего*. Возможны разные виды ограничений: правовые, ин-

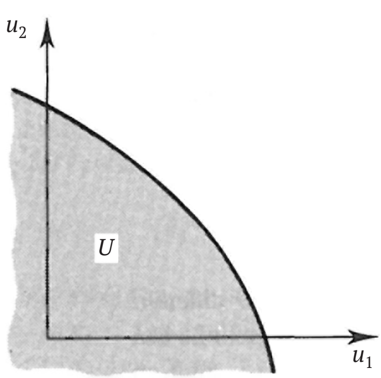


Рис. 22.B.1. Множество возможных уровней полезности

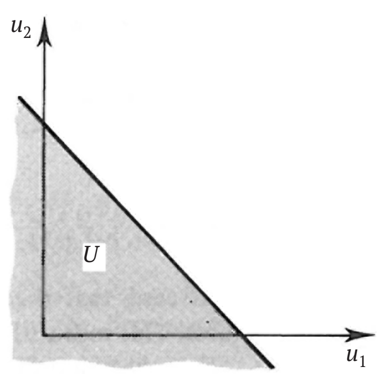


Рис. 22.B.2. Множество возможных уровней полезности: трансферабельная полезность

[2] Как обычно, в этом случае мы пренебрегаем ограничениями неотрицательности на товар-измеритель.

ституциональные или более фундаментальные — информационные. Последний тип ограничений был подробно проиллюстрирован в главах 13 и 14 (и будет рассмотрен вновь в главе 23). Мы должны, однако, предупредить, что концептуально разница между задачами поиска первого и второго наилучшего не столь велика. В определенном смысле неблагоприятный отбор или ограничения, связанные с проблемой принципал-агент, столь же примитивны, как и ограничения, связанные с технологиями и начальными запасами.

Пример 22.B.2. *Налогообложение Рамсея*. Рассмотрим квазилинейную экономику с тремя благами, третье из которых — товар-измеритель. Товар-измеритель может свободно передаваться от потребителя к потребителю (более формально, одним из инструментов, доступных регулятору, является паушальное перераспределение благосостояния). Первые два товара производятся из товара-измерителя с постоянными предельными издержками, равными 1. Потребители покупают товары по рыночным ценам, которые равны предельным издержкам плюс налог, размер которого определяется регулятором. Налоговая выручка возвращается в экономику в виде паушальных выплат. Наконец, уровни потребления определяются соответствующими функциями спроса различных потребителей.

Из второй теоремы экономики благосостояния (раздел 16.D) известно, что любого вектора полезности в МВУП для первого наилучшего можно достичь с помощью вышеназванных инструментов (достаточно установить нулевые налоги и нужным образом перераспределить богатство). Но представим, что теперь у нас появляется неустранимое искажение — регулятор должен достичь объема налоговой выручки R. Задача превратилась в поиск второго наилучшего. Для определения соответствующего множества МВУП для второго наилучшего отметим следующее. Так как товар-измеритель может свободно передаваться от потребителя к потребителю, граница этого множества остается линейной, как и в случае первого наилучшего (т. е. как показано на рис. 22.B.2). Следовательно, чтобы найти эту границу, достаточно определить уровень цен p_1, p_2, максимизирующих $v(p_1, p_2)$, косвенную функцию полезности репрезентативного потребителя (которая, с точностью до монотонного преобразования, равна совокупному потребительскому излишку; об этих понятиях см. в разделе 4.D и главе 10)[3].

Обозначим агрегированные функции спроса как $x_1(p_1, p_2)$ и $x_2(p_1, p_2)$. Затем решим задачу:

$$\max v(p_1, p_2)$$
$$\text{при ограничении } (p_1 - 1)x_1(p_1, p_2) + (p_2 - 1)x_2(p_1, p_2) \geq R.$$

Рассмотрим самый простой случай: пусть функции полезности потребителей аддитивно сепарабельны. Это значит, что две функции спроса могут быть записаны как $x_1(p_1)$ и $x_2(p_2)$. Тогда условия первого порядка, которым удовлетворяет решение

[3] Так как общий излишек равен излишку потребителей плюс фиксированный объем налоговой выручки R, то, максимизируя излишек потребителей, мы максимизируем общий излишек. Заметим также, что предположение о том, что R должно быть получено именно от налогообложения товаров, носит оттенок искусственности в ситуации, когда возможно паушальное перераспределение доходов. Мы делаем подобное предположение в этом и следующем примерах просто из педагогических соображений. Можно было бы исключить возможность паушальных трансфертов. В этом случае упражнение, проделываемое в этом примере (как и в следующем), определяло бы условия первого порядка для задачи максимизации суммы индивидуальных полезностей («чисто утилитаристской функции общественного благосостояния» в терминологии раздела 22.C).

вышеописанной задачи максимизации, $(\bar{p}_1, \bar{p}_2)$ (необходимые вычисления вам предлагается проделать в упражнении 22.B.2), будут следующими:

Найдется $\lambda < 0$, такое что

$$\lambda(\bar{p}_1 - 1)\frac{dx_1(\bar{p}_1)}{dp_1} = (1 - \lambda)x_1(\bar{p}_1)$$

и

$$\lambda(\bar{p}_2 - 1)\frac{dx_2(\bar{p}_2)}{dp_2} = (1 - \lambda)x_2(\bar{p}_2).$$

Обозначив за $t_l = (\bar{p}_l - 1)/\bar{p}_l$ ставку налога на благо l, мы можем переписать это условие через эластичности:

$$t_1 = \frac{\alpha}{\varepsilon_1(\bar{p}_1)} \text{ и } t_2 = \frac{\alpha}{\varepsilon_2(\bar{p}_2)} \text{ для некоторого } \alpha > 0. \tag{22.B.1}$$

Выражение (22.B.1) известно как *формула налогообложения Рамсея* [впервые она появилась в работе (Ramsey, 1927)]. Из нее вытекает, что если спрос на благо 1 в любом диапазоне цен менее эластичен, чем спрос на благо 2, то оптимальный уровень налогов на благо 1 выше. Это разумно: например, если спрос на благо 1 совершенно неэластичен, то общественных потерь от налогообложения этого блага нет (см. раздел 10.C) и мы можем достичь первого наилучшего оптимума, облагая налогами только его[4]. ■

Пример 22.B.3. *Компенсирующее искажение.* В основе примера лежит та же экономика, что и в примере 22.B.2, но функции полезности потребителей необязательно являются аддитивно сепарабельными. Имеет место искажение нового типа: пусть p_1 фиксирована на некотором уровне $\hat{p}_1 > 1$[5]. Инструментами регулятора являются любое перераспределение товара-измерителя между агентами и уровень налога на второй товар. Налоговая выручка, полученная на обоих рынках, возвращается потребителям в виде паушальной субсидии. Тогда $\bar{p}_2$, максимизирующее общественный излишек, должно удовлетворять следующим условиям первого порядка (см. упражнение 22.B.3):

$$(\hat{p}_1 - 1)\frac{\partial x_1(\hat{p}_1, \bar{p}_2)}{\partial p_2} + (\bar{p}_2 - 1)\frac{\partial x_2(\hat{p}_1, \bar{p}_2)}{\partial p_2} = 0. \tag{22.B.2}$$

Отметим, что за исключением случая сепарабельности, когда $\partial x_1(\hat{p}_1, \bar{p}_2)/\partial p_2 = 0$, мы имеем: $\bar{p}_2 \neq 1$; т. е. даже если первоначальное искажение затрагивает только первый рынок, для достижения второго наилучшего потребуется создать компенсирующее искажение на втором рынке [именно это подчеркивалось в работе (Lipsey, Lancaster, 1956)]. Данный результат носит интуитивный характер: положим $p_2 = 1$; тогда последняя (бесконечно малая) единица второго блага, на которую предъявляется спрос, увеличивает общественный излишек на $p_2 - 1 = 0$ (вспомним, что p_2 будет равна предельной полезности блага 2). Поэтому небольшой налог на благо 2 желателен, так как он перенаправит часть спроса в сторону блага 1, где последняя купленная единица добавит к общественному излишку $\hat{p}_1 - 1 > 0$. ■

[4] Мы должны предупредить, что формула в (22.B.1) представляет собой лишь условия первого порядка. Как мы увидим в дальнейших примерах, задачи на поиск второго наилучшего часто невыпуклые, и поэтому выполнение условий первого порядка не гарантирует нахождения истинного максимума.

[5] Вообще говоря, мы могли бы считать, что рынок блага 1 не контролируется регулятором и что на нем, возможно, из-за существования монополии устанавливается цена, превышающая предельные издержки.

Пример 22.B.4. *Ограниченный набор инструментов.* В примерах (22.B.2) и (22.B.3) мы предполагали, что в набор доступных регулятору инструментов входит неограниченное перераспределение товара-измерителя между потребителями. Из-за этого в двух вышеупомянутых примерах множество МВУП имело «полную» границу, т. е. границу, представляющую собой $(I - 1)$-мерную поверхность. Кроме того, квазилинейность обеспечивала плоскость этой границы (тем самым МВУП оказывалось выпуклым). Теперь же мы исследуем последствия ограничений на перераспределение товара-измерителя.

Пусть имеется два блага и функции полезности I потребителей являются квазилинейными по первому благу (которое не облагается налогом). При этом произвольное перераспределение товара-измерителя не допускается. Теперь единственный инструмент, доступный регулятору, — налог (или субсидия) на второй товар. Предельные издержки производства этого товара вновь равны единице. Излишек (или дефицит) регулятора возвращается потребителям в соответствии с *некоторым зафиксированным правилом* (т. е. произвольное перераспределение товара-измерителя не допускается). Допустим, правило звучит так: избыток или дефицит достается первому потребителю. Тогда (второе наилучшее) МВУП можно записать так [обозначим за $v_i(p_2)$ косвенную функцию полезности потребителя i]:

$$U = \left\{u \in \mathbb{R}^I : u \leq \left(v_1(p_2) + (p_2 - 1)\textstyle\sum_i x_i(p_2),\ v_2(p_2),\ \ldots,\ v_I(p_2)\right) \text{ для некоторого } p_2 > 0\right\}.$$

Сделаем два важных замечания. Во-первых, U необязательно должно быть выпуклым (вам предлагается показать это в упражнении 22.B.4; вспомним, что, согласно утверждению 3.D.3, косвенные функции полезности квазивыпуклы). На рис. 22.B.3 представлен пример. Второе замечание заключается в том, что U определяется единственным параметром, p_2, и поэтому его граница Парето (которая, естественно, лежит в $\mathbb{R}^I$) одномерна. Рис. 22.B.4 иллюстрирует это для случая $I = 3$. Эта особенность является совершенно типичной. До тех пор пока регулятору доступно менее $I - 1$ инструментов, граница МВУП не будет $(I - 1)$-мерной. Отметим, что если возможность перераспределения товара-измерителя между I потребителями не ограничивается, это автоматически дает нам необходимый минимум из $I - 1$ инструментов. ■

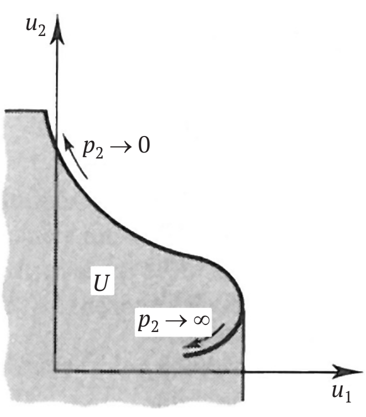


Рис. 22.B.3. Невыпуклое множество возможных уровней полезности для задачи на поиск второго наилучшего

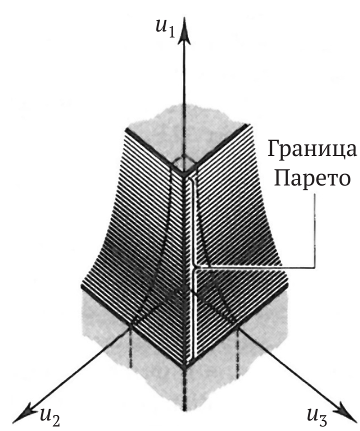


Рис. 22.B.4. Множество возможных уровней полезности для задачи на поиск второго наилучшего с недостаточным числом инструментов: граница Парето с низкой размерностью (пример 22.B.4)

Пример 22.B.5. *Невыпуклость в задачах на поиск первого наилучшего.* В примере 22.B.4 возможная невыпуклость МВУП связана с тем, что оно относится к задаче поиска второго наилучшего. Если бы допускались паушальные трансферты товара-измерителя, соответствующее первое наилучшее МВУП было бы выпуклым. Однако и первое наилучшее МВУП может быть невыпуклым. Двумя известными причинами невыпуклости в задачах поиска первого наилучшего являются неделимость и экстерналии. Что касается первого, предположим, что существуют два места и два агента с одинаковыми предпочтениями относительно этих мест (в частности, оба предпочитают одно и то же место другому). Существует только два возможных распределения индивидов между этими местами, и поэтому МВУП будет таким, как на рис. 22.B.5. Что касается экстерналий, то предположим, что существует единственное благо и что функции полезностей двух потребителей имеют следующий вид: $u_1(x_1) = x_1$ и $u_2(x_1, x_2) = x_2/x_1$. Тогда МВУП выглядит, как на рис. 22.B.6 (подробнее о невыпуклостях, связанных с экстерналиями, см. в приложении A к главе 11). ■

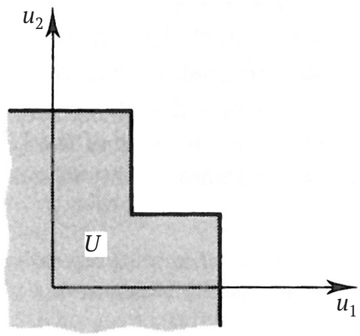


Рис. 22.B.5. Невыпуклое множество возможных уровней полезности для задачи на поиск первого наилучшего размещения агентов в пространстве (пример 22.B.5)

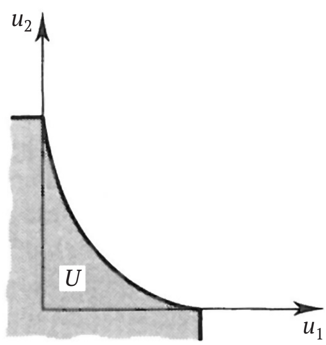


Рис. 22.B.6. Невыпуклое множество возможных уровней полезности для задачи на поиск первого наилучшего с экстерналиями (пример 22.B.5)

Примеры 22.B.4 и 22.B.5 дают представление о случаях, когда МВУП невыпуклы. Существует процедура, которая позволяет, в принципе, сделать МВУП выпуклым. Она состоит в разрешении регулятору рандомизировать свой выбор из доступных ему стратегий. Если случайные исходы оцениваются различными агентами в соответствии с их ожидаемой полезностью (см. главу 6), то (ожидаемое или ex ante) МВУП выпукло, так как оно является просто множеством выпуклых комбинаций векторов полезностей из МВУП для детерминированных инструментов. Каких-либо общих теоретических причин запрещать регулятору рандомизировать не существует. С другой стороны, *практическая* приемлемость стохастических стратегий a priori неясна.

Мы завершаем этот раздел последним примером [заимствованным из работы (Atkinson, 1973)], который подчеркивает разницу между задачами поиска первого и второго наилучшего.

Пример 22.B.6. *Непродуктивное налогообложение.* Предположим, что имеются два товара и два потребителя. Назовем первый товар «трудом», или досугом, а второй — «потребительским благом». Имеется одна единица труда, целиком принадлежащая первому потребителю. Потребительское благо может быть произведено первым потребителем из труда с постоянными предельными издержками, равными единице (предполагается также свобода расходования). Предпочтения первого потребителя описываются функцией полезности $u_1(x_{11},\ x_{21})$, а второго — $u_2(x_{22})$. Рис. 22.B.7 иллюстрирует построение границы Парето в условиях первого наилучшего для этой модели. Пусть задан некоторый уровень полезности u_1. Тогда, при условии достижения уровня полезности u_1 для потребителя 1, мы хотим достичь максимально возможного уровня полезности для потребителя 2. Если потребителю 1 достанется $(\bar{x}_{11},\ \bar{x}_{21})$, то объем предложения труда составит $1-\bar{x}_{11}$ и объем потребительского блага, доступного потребителю 2, составит $1-\bar{x}_{11}-\bar{x}_{21}$. Таким образом, вначале нам следует найти $(\bar{x}_{11},\ \bar{x}_{21})$, минимизируя $x_{11}+x_{21}$ при условии $u_1(x_{11}, x_{21}) \geq u_1$, а затем найти $u_2 = u_2(1-\bar{x}_{11}-\bar{x}_{21})$.

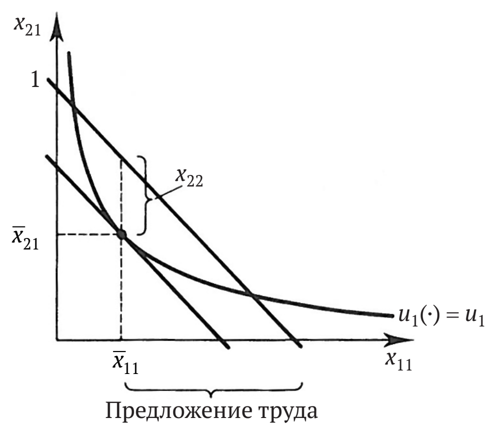


Рис. 22.B.7. Построение границы Парето в условиях первого наилучшего для примера 22.B.6

Теперь рассмотрим задачу на поиск второго наилучшего, в которой потребителя 1 нельзя заставить трудиться. Единственным доступным инструментом для обеспечения производства потребительского блага для потребителя 2 является линейный налог $t(1-x_{11})$ на любое количество труда, который первый потребитель *решает предложить* с учетом ставки данного налога. Построение границы Парето в условиях второго наилучшего показано на рис. 22.B.8. При $t \geq 0$ потребитель 1 выберет x_{11} так, чтобы максимизировать $u_1(x_{11}, (1-t)(1-x_{11}))$. Заметим, что потребитель ведет себя так, как если бы он выбирал на своей кривой «цена — потребление» точку, соответствующую вектору цен $(1, 1/(1-t))$. Обозначим эту точку $x_1(t) = (x_{11}(t), x_{21}(t))$. Полезность потребителя 2 равна $u_2(t(1-x_{11}(t)))$.

МВУП для первого и второго наилучшего показаны на рис. 22.B.9[6]. В случае второго наилучшего на рисунке также изображен локус пар полезности $Q \subset \mathbb{R}^I$ для всех t от 0 до 1, т. е.

$$Q = \left\{(u_1(x_1(t)),\ u_2(t(1-x_{11}(t)))) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq 1\right\}.$$

Отметим, что множество Q не совпадает с множеством Парето для МВУП второго наилучшего, потому что оно немонотонно. Экономический смысл этого ясен: если t низка, потребитель 2 получит очень мало потребительского блага; но если t

[6] Кроме того, граница второго наилучшего может быть или не быть выпуклой.

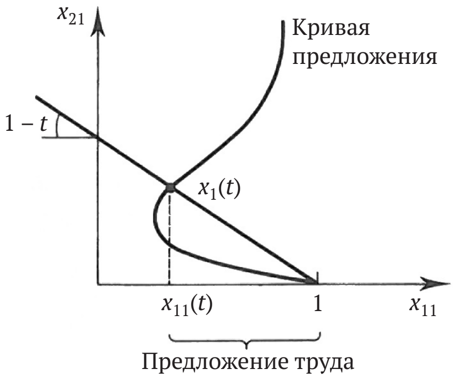


Рис. 22.B.8. Построение границы Парето в условиях второго наилучшего для примера 22.B.6

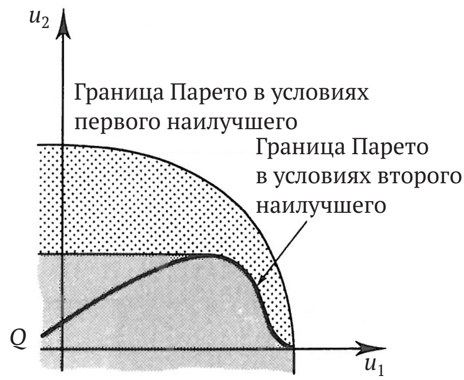


Рис. 22.B.9. Множество возможных уровней полезности для задач на поиск первого и второго наилучшего для примера неэффективного налогообложения (пример 22.B.6)

очень высока, то ситуация немногим лучше. Теперь потребитель 2 получит бо́льшую часть труда, предоставляемого потребителем 1, но именно по этой причине потребитель 1 и не будет много трудиться. ■

Из примера 22.B.6 можно извлечь и еще один урок. На рис. 22.B.9 мы видим, что границы Парето в условиях первого и второго наилучшего могут иметь общие точки; т. е. вполне возможно существование вторых наилучших Парето-оптимумов, которые также будут и первыми наилучшими Парето-оптимумами. Но рис. 22.B.9 говорит о том, что было бы довольно глупо выбирать точку на границе Парето в условиях второго наилучшего просто исходя из ее близости к границе первого наилучшего. Распределение полезности для такого выбора может быть сильно смещенным[7]. Более разумные критерии выбора будут рассмотрены в разделе 22.C.

22.C. Функции общественного благосостояния (ФОБ) и общественные оптимумы

В разделе 22.B мы описали множество ограничений регулятора или общественного планировщика. Следующий вопрос заключается в том, какая именно стратегия должна выбираться. Применение принципа Парето исключает любые стратегии, ведущие к векторам полезности, не входящим в границу Парето. Но и в этих пределах остается значительное пространство для выбора[8], который теперь неизбежно связан со снижением полезно-

[7] Можно добавить, что это было бы неинтересно и с точки зрения выбора стратегии: на рис. 22.B.9 единственная вторая наилучшая стратегия, которая дает первый наилучший результат, — это $t = 0$, т. е. отсутствие стратегии!

[8] Только в исключительных случаях граница Парето будет состоять из одной точки. Вспомним, что, как мы видели в примере 22.B.3, при выборе второго наилучшего с недостаточным числом инструментов требование Парето-оптимальности может отсеять не очень много стратегий.

сти какого-либо агента для увеличения полезностей других. В этом разделе мы предполагаем, что регулятор делает выбор в соответствии с явным, логически непротиворечивым критерием. В частности, предполагается, что этот критерий задается *функцией общественного благосостояния* $W(u) = W(u_1, \ldots, u_I)$, которая агрегирует индивидуальные полезности в общественную полезность. Можно представить, что $W(u)$ отражает оценочные суждения о распределении благосостояния, лежащие в основе решений регулятора[9]. В разделе 22.E (и последующих) мы обсудим несколько другой подход к выбору, подчеркивающий роль, которую в выборе окончательной стратегии играет торг, или арбитраж.

В этом разделе мы не будем оспаривать предпосылку о *межличностной сравнимости полезности*, которая позволяет использовать уровни индивидуальной полезности в качестве аргументов агрегирующей функции $W(u_1, \ldots, u_I)$. Исследованию этого вопроса посвящен раздел 22.D, также связанный с содержанием главы 21.

Таким образом, для заданной функции общественного благосостояния $W(\cdot)$ и множества возможных уровней полезности $U \subset \mathbb{R}^I$ задача регулятора формулируется следующим образом:

$$\max W(u_1, \ldots, u_I) \text{ при } (u_1, \ldots, u_I) \in U. \tag{22.C.1}$$

Вектор полезностей, или обеспечивающих эти полезности стратегий, являющийся решением задачи (22.C.1), называется *общественным оптимумом*. Если задача подразумевала поиск второго наилучшего и мы хотим подчеркнуть этот факт, можно использовать термин *условный общественный оптимум*.

Ниже мы назовем и обсудим некоторые из интересных свойств, которым может удовлетворять или не удовлетворять функция общественного благосостояния (ФОБ).

(1) *Отсутствие патернализма.* Это первое свойство неявно заложено в самой концепции ФОБ. Оно требует, чтобы на проявления общественных предпочтений влияли только индивидуальные уровни полезности: две альтернативы, эквивалентные для каждого из агентов, должны быть и общественно эквивалентны. Планировщик не имеет собственных предпочтений относительно окончательных альтернатив.

(2) *Свойство Парето*. При наличии предыдущего свойства свойство Парето является его логичным дополнением. Оно говорит, что $W(\cdot)$ является возрастающей функцией; т. е. если $u_i' \geq u_i$ для всех i, то $W(u') \geq W(u)$, и если $u_i' > u_i$ для всех i, то $W(u') > W(u)$. Мы также говорим, что $W(\cdot)$ является *строго Паретовой*, если она строго возрастает; т. е. если из $u_i' \geq u_i$ для всех i и $u_i' > u_i$ для хотя бы одного i следует $W(u') > W(u)$. Если $W(\cdot)$ строго Паретовая, то решение (22.C.1) с необходимостью является Парето-оптимумом.

[9] Этот подход к экономике благосостояния впервые был использован в работах (Bergson, 1938) и (Samuelson, 1947).

(3) *Симметрия*. Согласно свойству *симметрии* при оценке общественного благосостояния все агенты находятся в равном положении. Формально $W(\cdot)$ является симметричной, если $W(u) = W(u')$ для любых двух векторов u и u', из которых один получен путем перестановки элементов второго [например, $u = (2, 4, 5)$ и $u' = (4, 5, 2)$]. Другими словами, имена агентов не имеют значения, значение имеют только частоты различных значений полезности. Кривые безразличия симметричной функции $W(\cdot)$ для случая с двумя агентами представлены на рис. 22.C.1. Геометрически каждая кривая безразличия симметрична относительно диагонали. Отметим также, что по этой причине, если поверхности безразличия гладки, то все предельные нормы замещения, рассчитанные в любых $u = (u_1, \ldots, u_I)$ с одинаковыми координатами, будут равны единице.

(4) *Вогнутость*. Наконец, наиболее важным свойством функции $W(\cdot)$ является *вогнутость*. В главе 6 мы видели, что в контексте неопределенности (строгая) вогнутость функции полезности подразумевает неприязнь к риску. Аналогичным образом, сейчас в контексте теории благосостояния это можно интерпретировать как *неприязнь к неравенству*. В этом легко убедиться: если $W(\cdot)$ является вогнутой и $W(u) = W(u')$, то $W\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u'\right) \geq W(u)$ [со строгим неравенством, если $u \neq u'$ и $W(\cdot)$ строго вогнута]. Другой способ — заметить, что если МВУП выпукло и симметрично, то вектор полезностей, для которого полезность каждого агента одинакова, будет общественным оптимумом для любой симметричной и вогнутой ФОБ (см. рис. 22.C.2 и упражне-

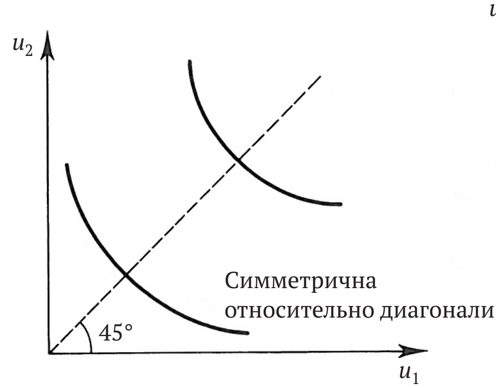


Рис. 22.C.1. Симметричная функция общественного благосостояния

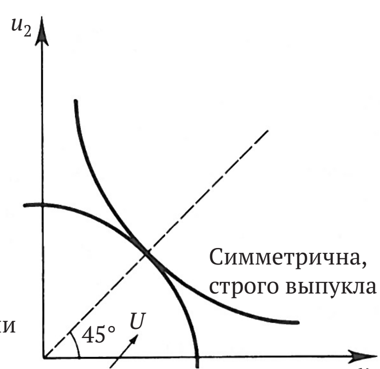


Рис. 22.C.2. Оптимум симметричной, строго вогнутой функции общественного благосостояния на симметричном и выпуклом множестве возможных уровней полезности является эгалитарным

ние 22.C.1)[10]. Таким образом, при выпуклых МВУП и вогнутых, симметричных ФОБ какое-либо неравенство в распределении полезности оправдано только тогда, когда МВУП несимметрично, как неоднократно будет продемонстрировано далее.

Следует подчеркнуть, что, вообще говоря, и особенно для задач на поиск второго наилучшего, МВУП может быть невыпуклым. Это значит, что, даже если $W(\cdot)$ вогнута, нахождение общественного оптимума является нелегкой задачей. Вектор полезностей, который удовлетворяет условиям первого порядка задачи (22.C.1), может не удовлетворять условиям второго порядка или, если удовлетворяет, может не быть глобальным максимумом.

Еще несколько идей можно почерпнуть, обсудив ряд важных примеров функций общественного благосостояния.

Пример 22.C.1. *Утилитаристская ФОБ.* Функция общественного благосостояния $W(u)$ является *чисто утилитаристской*, если она имеет вид $W(u) = \sum_i u_i$ [или, в несимметричном случае, $W(u) = \sum_i \beta_i u_i$]. В этом случае гиперповерхности безразличия функции $W(\cdot)$ являются гиперплоскостями. Они изображены на рис. 22.C.3(a). Отметим, что $W(\cdot)$ является строго Паретовой.

В чисто утилитаристском случае рост или снижение индивидуальных полезностей влечет такие же изменения в общественной полезности. Использование чисто утилитаристского принципа восходит к самому зарождению экономики как теоретической дисциплины. В упражнении 22.C.2 вам предлагается интерпретировать чисто утилитаристскую функцию общественного благосостояния как функцию ожидаемой полезности одного индивида, находящегося за «вуалью неведения». Другая линия защиты этой функции, также основанная на теории ожидаемой полезности, была предложена в работе (Harsanyi, 1955); см. упражнение 22.C.3.

Поскольку значение имеет только общее количество полезности, чисто утилитаристская функция общественного благосостояния *нейтральна* по отношению к неравенству в *распределении полезности*. Важно не пытаться увидеть в этом утверждении больше, чем в нем содержится. В частности, в нем не говорится о «распределе-

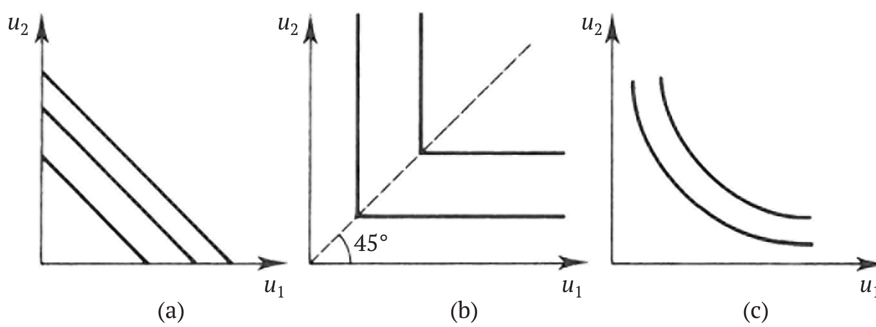


Рис. 22.C.3. Функции общественного благосостояния: (a) Чисто утилитаристская. (b) Максиминная, или роулзианского типа. (c) Обобщенная утилитаристская

[10] Множество $U \subset \mathbb{R}^I$ является симметричным, если $u \in U$ подразумевает $u' \in U$ для любого $u' \in \mathbb{R}^L$, которое отличается от u только перестановкой элементов. Свойство симметрии МВУП говорит об отсутствии смещений в способности производить полезность у разных агентов. Другими словами, с точки зрения возможного вклада в общественное благосостояние все агенты одинаковы.

нии богатства». К примеру, если существует фиксированное количество богатства, предназначенного для распределения среди индивидов и они имеют строго вогнутые функции полезности относительно богатства, тогда найдется единственный чисто утилитаристский общественный оптимум, в котором богатство будет распределено так, чтобы предельная полезность от него у всех потребителей была одинаковой. Если бы, например, функции полезности у всех были одинаковыми, то единственным общественным оптимумом стал бы такой вектор полезностей, принадлежащий границе Парето, в котором полезности всех агентов были бы равны (эти тезисы обобщаются в упражнении 22.C.1). ■

Пример 22.C.2. *Максиминная ФОБ.* Функция общественного благосостояния (ФОБ) является максиминной, или функцией общественного благосостояния роулзианского типа [впервые она появилась в работе (Rawls, 1971)], если она имеет вид $W(u) = \min\{u_1, \ldots, u_I\}$ [или, в асимметричном случае, $W(u) = \min\{\beta_1 u_1, \ldots, \beta_I u_I\}$]. Другими словами, общественная полезность равна полезности индивида, находящегося в наихудшем положении. Следовательно, проблема общественного планирования сводится к максимизации полезности того, кому приходится хуже всех[11]. L-образные кривые безразличия максиминной ФОБ представлены на рис. 22.C.3(b).

Легко предвидеть, что эта вогнутая ФОБ приведет к выбору эгалитарных векторов полезности. И в самом деле у ее носителя тяга к равенству экстремально сильна. Пусть $U \in \mathbb{R}^I$ — произвольное МВУП и все координаты $u \in U$ равны. Тогда u не будет Роулзианским общественным оптимумом, только если u не оптимален по Парето. Отсюда, если на Парето-границе U существует $u = (u_1, \ldots, u_I)$, такой что все его элементы равны друг другу, этот u будет максиминным оптимумом. Заметим, что для чисто утилитаристской ФОБ полное равенство является общественно оптимальным только в случае, когда множество U выпукло и симметрично. На рис. 22.C.4, продолжающем анализ примера 22.B.6, показана ситуация, в которой максиминная оптимизация приводит к выбору стратегии (уровня налога), не обеспечивающей полного равенства. Тем не менее даже в этом случае чисто утилитаристский общественный оптимум отличается значительно большей степенью неравенства, чем максиминный. ■

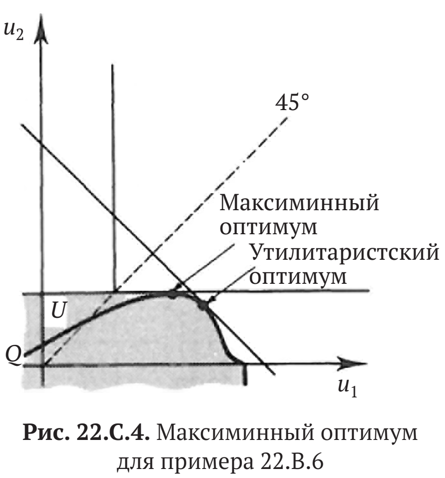


Рис. 22.C.4. Максиминный оптимум для примера 22.B.6

[11] Этот критерий можно было бы уточнить, введя лексическое, или последовательное, максиминное правило. Вначале максимизируется полезность наибеднейших, затем из решений этой первой задачи выбираются те, что максимизируют полезность вторых наибеднейших, и т. д. Цели регулятора при таком поведении можно представить в виде лексиминного порядка, ранжирующего векторы полезности по уровню общественной предпочтительности. Но этот порядок не был бы непрерывным и его нельзя было бы представить какой-либо ФОБ (сравните с примером 3.C.1). Но даже с учетом этого предложенное уточнение является естественным и важным. Например, с ним мы можем гарантировать, что общественный оптимум будет и Парето-оптимумом. Вам предлагается показать это в упражнении 22.C.4. Заметьте, что максиминная ФОБ является Паретовой — но не строго Паретовой. Это создает определенные сложности. На рис. 22.C.4 точка на границе U, лежащая на биссектрисе, является максиминным оптимумом, но не Парето оптимумом. В качестве же «максиминного оптимума» на этом рисунке отмечен лексиминный (по определению являющийся одновременно максиминным).

Пример 22.С.3. *Обобщенная утилитаристская ФОБ.* Функция общественного благосостояния (ФОБ) является *обобщенной утилитаристской*, если она имеет вид $W(u) = \sum_i g(u_i)$ [или, в несимметричном случае, $W(u) = \sum_i g_i(u_i)$], где $g(\cdot)$ — возрастающая вогнутая функция. Обобщенная утилитаристская ФОБ является строго Паретовой и может рассматриваться как разновидность чисто утилитаристской функции, в которой значения индивидуальных полезностей $u_i(\cdot)$ были заменены на $g(u_i(\cdot))$. Однако такая точка зрения не является концептуально полезной. Дело в том, что при заданных индивидуальных функциях полезности в обобщенном утилитаристском случае каждой следующей единице индивидуальной полезности сознательно присваивается все более и более низкий вес. Общественные кривые безразличия для этого случая представлены на рис. 22.С.3(с).

Мы можем также проверить по рис. 22.С.4 и 22.С.5, что отношение к неравенству в случае обобщенной утилитаристской ФОБ является промежуточным между таковыми для чисто утилитаристской и максиминной ФОБ. ■

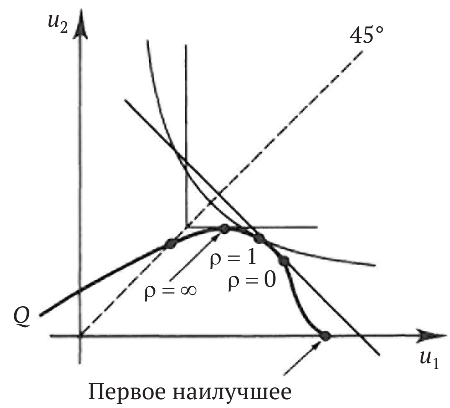


Рис. 22.С.5. Множество обобщенно утилитаристских оптимумов для примера 22.В.6 и ФОБ с постоянной эластичностью из примера 22.С.4 ($\rho \in [0, \infty]$)

Пример 22.С.4. *ФОБ с постоянной эластичностью*. Разновидностью обобщенных утилитаристских функций, очень полезной в прикладных задачах, является семейство функций общественной полезности $g(\cdot)$, предельные полезности которых имеют постоянную эластичность. Для этого семейства функций характер отношения к неравенству можно корректировать изменением единственного параметра $\rho \geq 0$.

На протяжении всего примера значения индивидуальных полезностей принимаются неотрицательными. Пусть в этом случае для любых $\rho \geq 0$

$$g_\rho(u_i) = (1-\rho)u_i^{1-\rho}, \qquad \text{если } \rho \neq 1,$$

и

$$g_\rho(u_i) = \ln u_i, \qquad \text{если } \rho = 1.$$

Заметим, что, как и заявлялось выше, эластичность $g'_\rho(u_i)$ является константой, поскольку $u_i g''_i(u_i) / g'_\rho(u_i) = -\rho$ для любых u_i. Учитывая, что для $\rho \neq 1$, $h(W) = [1/(1-\rho)]W^{1/(1-\rho)}$ является монотонным преобразованием W, мы можем представить обобщенные утилитаристские общественные предпочтения в особенно удобной форме:

$$W_\rho(u) = \left(\sum\nolimits_i u_i^{1-\rho}\right)^{1/1-\rho} \qquad \text{для } \rho \neq 1$$

и

$$W_\rho(u) = \sum\nolimits_i \ln u_i \qquad \text{для } \rho = 1.$$

Таким образом, мы получаем CES-функции, хорошо знакомые нам из теорий спроса и производства (см. упражнения 3.C.6 и 5.C.10 соответственно). Отметим, что для $\rho = 0$ мы получаем: $W_0(u) = \sum_i u_i$, т. е. чисто утилитаристский случай, а при $\rho \to \infty$ получаем: $W_\rho(u) \to \min\{u_1, \ldots, u_I\}$, т. е. максиминный случай (см. упражнение 22.C.5).

На рис. 22.C.5 показано несколько решений для примера 22.B.6 при различных значениях параметра ρ. Видно, что по мере роста неприязни к неравенству (т. е. при $\rho \to \infty$) оптимальный размер налога возрастает. Однако отметим также, что даже при очень высоком значении ρ к полному равенству мы не приближаемся. С другой стороны, ни одно из изображенных нами вторых наилучших решений не является точкой на границе Парето, Парето-оптимальной также для задачи на поиск первого наилучшего. В этой точке полезность распределена настолько неравномерно, что соображения равенства, лежащие в основе любой симметричной и вогнутой ФОБ, подтолкнули бы нас к тому, чтобы частично пожертвовать эффективностью первого наилучшего ради большего равенства. ■

Принцип компенсации

В этом подразделе нас будет интересовать вопрос: до какой степени можно разрабатывать экономику благосостояния, обходясь *без* функций общественного благосостояния? Если они используются для определения оптимальных точек в заданной границе Парето, то без них, похоже, не обойтись. Именно эту их роль мы подчеркивали до сих пор; но на практике они используются и для других целей. Часто проблема выбора стратегии представлена в виде выбора одного из нескольких различных множеств возможных уровней полезности, ассоциированных, например, с различными уровнями стратегической переменной[12]. Если у нас есть функция общественного благосостояния $W(\cdot)$, то выбор между двумя множествами возможных уровней полезности — U и U' — должен определяться сравнением максимальной общественной полезности в U с максимальной общественной полезностью в U'. Однако даже если явной функции общественного благосостояния не существует, можно попытаться сказать что-то осмысленное об этой задаче исходя из соображений выявленных предпочтений.

Вначале рассмотрим простейший случай: два множества возможных уровней полезности, таких что $U \subset U'$. В этой ситуации очень хочется заключить, что U' должно быть предпочтительнее U. Это, несомненно, будет так, если в обоих множествах будут выбраны точки, максимизирующие функцию общественного благосостояния. Но даже если функции общественного благосостояния нет, множество U' по-прежнему можно считать превосходящим U на основании *сильного компенсационного теста,* в соответствии с которым для любого возможного $u \in U$ существует $u' \in U'$ – такой что $u_i' \geq u_i$ для каждого i. То есть где бы мы ни находились на U, возможно переместиться на U' и предоставить агентам такую компенсацию, которая гарантирует, что положение каждого из них как минимум не

[12] Формально мы можем свести эту задачу к предыдущей, рассматривая общее МВУП, заданное как объединение тех двух МВУП, между которыми нужно было выбирать. Но это может оказаться не самым удобным подходом, так как тогда теряется последовательная структура задачи (вначале выбираем МВУП, затем — вектор полезности).

ухудшится. Если компенсация действительно осуществляется и каждому агенту при переключении с U на U' становится лучше, то такое переключение, несомненно, нужно рекомендовать. Но если компенсации не происходит, ситуация уже не столь ясна. Предпочитая множество U' множеству U на основе *потенциальной* возможности компенсации, мы явно пренебрегаем любыми последствиями, которые наше решение может иметь для распределения полезности. Фактически это решение может даже привести к чистому эгалитарному ухудшению (см. упражнение 22.C.6).

Вспомним из раздела 10.D, что в квазилинейном случае мы всегда имеем $U \subset U'$ или $U' \subset U$. Это происходит потому, что границы этих множеств являются гиперплоскостями, определенными единичным вектором (следовательно, параллельными). Это свойство также гарантирует, что критерий сильной компенсации (который в разделах 3.D и 10.E мы называли просто критерием компенсации) совпадает с выбором, который мы бы сделали, используя чисто утилитаристскую функцию общественного благосостояния. Поэтому в квазилинейном случае применение критерия сильной компенсации не ущемляет соображений равномерного распределения полезности в большей степени, чем это делают строго утилитарные функции общественного благосостояния.

Более тонкие вопросы возникают в случае, когда мы сравниваем такие пары множеств возможных уровней полезностей U и U', в которых одно не является подмножеством другого — т. е. МВУП, границы которых пересекаются (см. рис. 22.C.6).

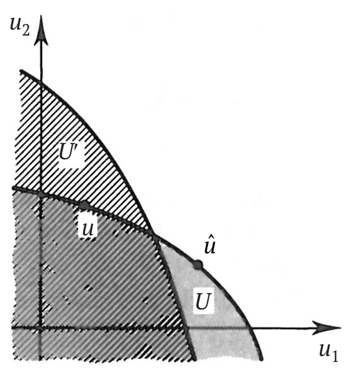


Рис. 22.C.6. Множество U' проходит слабый компенсационный тест по отношению к (U, u)

Предположим, нам известно, что из множества возможных уровней полезности U выбирается вектор $u \in U$ и ставится вопрос о переключении на U'[13]. Если бы $u \in U'$ и в U' полезность была бы распределена оптимально, в соответствии с функцией общественного благосостояния, то перемещение в U' было бы целесообразно. В более общем случае, когда $u \in U'$, перемещение из (U, u) в U' проходит следующий *слабый компенсационный тест*: найдется $u' \in U'$, такой что $u_i' \geq u_i$ для любого i. То есть, поскольку мы знаем, что на U будет выбран профиль u, мы могли бы перейти к U' и компенсировать этот переход каждому агенту так, что его положение как минимум не ухудшилось бы. На рис. 22.C.6 U' проходит этот тест в отношении (U, u), но не в отношении $(U,\ \hat{u})$.

К тому же слабый критерий компенсации является весомым лишь если компенсация действительно уплачивается; если же нет, появляются

[13] Например, исходное множество U могло бы соответствовать некоторой экономике, а u мог бы быть вектором, описывающим полезности ее участников в рыночном равновесии.

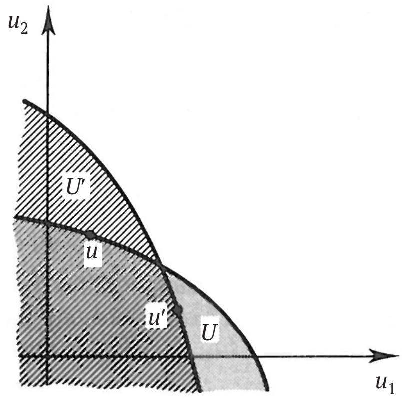


Рис. 22.C.7. Парадокс: множество U' проходит слабый компенсационный тест относительно (U, u), множество U проходит слабый компенсационный тест относительно (U', u')

два серьезных повода для его критики. Первый повод, о котором уже говорилось выше, — он не учитывает возможных последствий, касающихся распределения полезности. Второй повод — слабый критерий компенсации может приводить к парадоксам. Как показано на рис. 22.C.7, можно иметь два множества возможных уровней полезности, U и U', с профилями $u \in U$ и $u' \in U'$, такими что U' проходит слабый компенсационный тест относительно (U, u) и U проходит слабый компенсационный тест относительно (U', u'). В упражнении 22.C.7 вам предлагается привести более явный пример такого парадокса в экономическом контексте. Дальнейший анализ этой проблемы содержится в упражнении 22.C.8.

22.D. Свойства инвариантности функций общественного благосостояния

В этом разделе мы более глубоко исследуем значение предпосылки о сопоставимости индивидуальных уровней полезностей — неявного, но необходимого условия существования функции общественного благосостояния. Важность этого вопроса определяется тем, что, если регулятор вообще способен восстановить индивидуальные кардиналистские функции полезности (например, из поведения в условиях риска), он выявит их лишь с точностью до точки отсчета и единиц измерения. На любой выбор точки отсчета и единиц измерения для чьей-то функции полезности неизбежно подразумевает оценочные суждения о весе этого агента в оценке общественного благосостояния. Следовательно, целесообразно обсудить: до какой степени возможно избежать этих оценочных суждений? Следуя тому подходу к данной задаче, который был предложен в работах (d'Aspremont, Gevers, 1977; Roberts, 1980; Sen, 1977), мы попытаемся ответить на следующие вопросы: как повлияет на принятие общественных решений требование, чтобы общественные предпочтения не зависели от единиц измерения, или точек отсчета, индивидуальных функций полезности?[14]

Для ответа на вопросы подобного типа следует изучить зависимость общественных предпочтений от профилей индивидуальных функций полезности. Естественной отправной точкой для подобного анализа будут

[14] В добавление к предыдущим ссылкам, для получения представления о материалах этого раздела в сжатом виде можно обратиться к работе (Moulin, 1988).

функционалы общественного благосостояния, представленные в главе 21. Мы, однако, слегка изменим их определение, в свете того, что в этой главе предпочтения людей считаются представимыми их индивидуальными функциями полезности $\tilde{u}_i(\cdot)$.

Итак, задается множество альтернатив X. Пусть $\mathscr{U}$ обозначает множество всех возможных функций полезности на X, а $\mathscr{R}$ — множество всех возможных рациональных (т. е. полных и транзитивных) отношений предпочтения на X.

Определение 22.D.1. Для заданного множества альтернатив X будем называть *функционалом общественного благосостояния* $F\colon \mathscr{U}^I \to \mathscr{R}$ правило, которое ставит в соответствие каждому из возможных профилей индивидуальных функций полезности $(\tilde{u}_1(\cdot),\ \ldots,\ \tilde{u}_I(\cdot))$, определенных на альтернативах из множества X, рациональное отношение предпочтения $F(\tilde{u}_1,\ \ldots,\ \tilde{u}_I)$ на альтернативах из X. Отношение строгого предпочтения, полученное на основе $F(\tilde{u}_1,\ \ldots,\ \tilde{u}_I)$, обозначается как $F_p(\tilde{u}_1,\ \ldots,\ \tilde{u}_I)$[15].

Как и в главе 21, мы будем рассматривать только функционалы общественного благосостояния, удовлетворяющие свойству Парето.

Определение 22.D.2. Функционал общественного благосостояния $F\colon \mathscr{U}^I \to \mathscr{R}$ является *Паретовым*, или удовлетворяет (слабому) *свойству Парето*, если для любого профиля $(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I) \in \mathscr{U}^I$ и для любой пары альтернатив $x, y \in X$ выполнены следующие условия: если $\tilde{u}_i(x) \geq \tilde{u}_i(y)$ для всех i, то $xF(\tilde{u}_1,\ \ldots,\ \tilde{u}_I)y$, а если $\tilde{u}_i(x) > \tilde{u}_i(y)$ для всех i, то $xF_p(\tilde{u}_1,\ \ldots,\ \tilde{u}_I)y$.

Первый вопрос для изучения — это отношения между этими функционалами общественного благосостояния и функциями общественного благосостояния из раздела 22.C. Функция общественного благосостояния $W(\cdot)$ присваивает *значения* общественной полезности профилям значений $(u_1, \ldots, u_I) \in \mathbb{R}^I$ индивидуальных полезностей. Функционал же общественного благосостояния присваивает отношение общественных *предпочтений* профилям индивидуальных *функций* полезности $(\tilde{u}_1,\ \ldots,\ \tilde{u}_I)$ (или, как в разделе 21.C, профилям индивидуальных отношений предпочтения). Из функции общественного благосостояния $W(\cdot)$ можно легко создать функционал общественного благосостояния, просто определив, что $F(\tilde{u}_1,\ \ldots,\ \tilde{u}_I)$ является отношением предпочтения на X, представимым функцией полезности $\tilde{u}(x) = W(\tilde{u}_1(x),\ \ldots,\ \tilde{u}_I(x))$. Однако обратное не всегда возможно. Чтобы вывести из функционала общественного благосостояния функцию общественного благосостояния, должно выполняться по меньшей мере следующее условие. Предположим, что профиль функций полезности меняется, но профили значений полезности для двух альтернатив остаются

[15] То есть $xF_p(\tilde{u}_1,\ \ldots,\ \tilde{u}_I)y$, если $xF(\tilde{u}_1,\ \ldots,\ \tilde{u}_I)y$, но не $yF(\tilde{u}_1,\ \ldots,\ \tilde{u}_I)x$.

неизменными; тогда относительное место этих альтернатив в иерархии общественных предпочтений не должно измениться (поскольку значения функции общественного благосостояния для них остаются прежними). То есть общественные предпочтения между этими двумя альтернативами должны зависеть только от профилей значений индивидуальных полезностей для этих альтернатив. За исключением того что оно сформулировано в терминах полезностей, это свойство аналогично условию попарной независимости для функционалов общественного благосостояния (определение 21.C.3), поэтому в определении 22.D.3 мы будем пользоваться этим же термином.

Определение 22.D.3. Функционал общественного благосостояния $F: \mathscr{U}^I \to \mathscr{R}$ удовлетворяет *условию попарной независимости*, если для любых двух альтернатив $x, y \in X$ и двух профилей функций полезности $(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I) \in \mathscr{U}^I$ и $(\tilde{u}'_1, \ldots, \tilde{u}'_I) \in \mathscr{U}^I$, таких что $\tilde{u}_i(x) = \tilde{u}'_i(x)$ и $\tilde{u}_i(y) = \tilde{u}'_i(y)$ для всех i, имеем

$$xF(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I)y \Leftrightarrow xF(\tilde{u}'_1, \ldots, \tilde{u}'_I)y.$$

Необходимое условие попарной независимости является почти достаточным: из утверждения 22.D.1 видно, что если альтернатив больше двух, а условие Парето и условие попарной независимости выполнено, то из функционала общественного благосостояния можно получить отношение общественного предпочтения, определенное на профилях значений полезности $(u_1, \ldots, u_I) \in \mathscr{R}^I$[16]. Тогда стандартное условие непрерывности позволяет нам представить это отношение предпочтения с помощью функции общественного благосостояния $W(u_1, \ldots, u_I)$.

Утверждение 22.D.1. Предположим, что множество X содержит по меньшей мере три альтернативы и Паретов функционал общественного благосостояния $F: \mathscr{U}^I \to \mathscr{R}$ удовлетворяет условию попарной независимости. Тогда существует рациональное отношение предпочтения $\succsim$, определенное на $\mathbb{R}^I$ [т. е. на профилях значений индивидуальных полезностей $(u_1, \ldots, u_I) \in \mathbb{R}^I$], которое порождает $F(\cdot)$. Другими словами, для каждого профиля функций полезности $(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I) \in \mathscr{U}^I$ и для каждой пары альтернатив $x, y \in X$ имеем

$$xF(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I)y \Leftrightarrow (\tilde{u}_1(x), \ldots, \tilde{u}_I(x)) \succsim (\tilde{u}_1(y), \ldots, \tilde{u}_I(y)).$$

Доказательство. Утверждение, которое мы хотим доказать, напрямую подсказывает, как следует строить отношение предпочтения $\succsim$. Рассмотрим любую пару профилей полезности $u = (u_1, \ldots, u_I) \in \mathbb{R}^I$ и $u' = (u'_1, \ldots, u'_I) \in \mathbb{R}^I$. Пусть $u \succsim u'$, если $xF(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I)y$ для некоторой пары альтернатив x, $y \in X$ и профиля функций полезности $(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I) \in \mathscr{U}^I$ с $\tilde{u}_i(x) = u_i$ и $\tilde{u}_i(y) = u'_i$ для каждого i. Мы утверждаем, что заключение $u \succsim u'$ не зависит ни от кон-

[16] В упражнении 22.D.1 вы можете найти примеры, показывающие, что условие Парето и ограничение на число альтернатив не могут быть отделены от результата утверждения 22.D.1.

кретных альтернатив в паре, ни от выбранного профиля функций полезности. Независимость от выбранных функций полезности непосредственно следует из попарной независимости. Доказательство независимости от конкретных альтернатив в паре немного сложнее.

Достаточно показать, что если мы приходим к заключению $u \succsim u'$ с помощью пары x, y, то для любой третьей альтернативы z (вспомним, что по предположению существует и третья альтернатива) мы приходим к тому же заключению, используя пары x, z или z, y[17]. Проделаем это для пары x, z (в упражнении 22.D.2 вам предлагается сделать то же для z, y). Для этого рассмотрим профиль функций полезности $(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I) \in \mathscr{U}^I$ с $\tilde{u}_i(x) = u_i$, $\tilde{u}_i(y) = u_i'$, и $\tilde{u}_i(z) = u_i'$ для каждого i. Поскольку мы заключили, что $u \succsim u'$, используя пару x, y, мы обязаны иметь $xF(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I)y$. Согласно свойству Парето мы также имеем: $yF(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I)z$. В силу транзитивности $F(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I)$ получаем: $xF(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I)z$, что нам и требовалось.

Остается доказать, что $\succsim$ полно и транзитивно. Полнота вытекает из того факта, что отношение предпочтения $F(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I)$ является полным для любого профиля функций полезности $(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I) \in \mathscr{U}^I$. Что касается транзитивности, рассмотрим $u \succsim u' \succsim u''$, где $u, u', u'' \in \mathbb{R}^I$. Рассмотрим три альтернативы, $x, y, z \in X$, и профиль функций полезности $(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I) \in \mathscr{U}^I$ с $\tilde{u}_i(x) = u_i$, $\tilde{u}_i(y) = u_i'$ и $\tilde{u}_i(z) = u_i''$ для каждого i. Так как $u \succsim u'$ и $u' \succsim u''$, должно выполняться $xF(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I)y$ и $yF(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I)z$. Из транзитивности $F(u_1, \ldots, u_I)$ следует, что $xF(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I)z$ и $u \succsim u''$. Поэтому $\succsim$ транзитивно. ■

По условию Парето отношение общественного предпочтения $\succsim$, полученное в утверждении 22.D.1, является монотонным. Вам предлагается показать это формально в упражнении 22.D.3.

Упражнение 22.D.3. Покажите, что если функционал общественного благосостояния $F\colon \mathscr{U}^I \to \mathscr{R}$ удовлетворяет свойству Парето, то отношение общественного предпочтения $\succsim$ на профилях полезности, для которого справедлив вывод утверждения 22.D.1, должно быть монотонным в следующем смысле: если $u' \geq u$, то $u' \succsim u$, и если $u' \gg u$, то $u' \succ u$.

Отношение общественного предпочтения $\succsim$ на $\mathbb{R}^I$, полученное в утверждении 22.D.1, не обязано быть непрерывным или представимым функцией полезности. Рассмотрим, к примеру, лексическую диктатуру (скажем, имеются два агента и пусть $u \succ u'$, если $u_1 > u_1'$ или $u_1 = u_1'$

[17] Действительно, предположим, что сначала мы использовали пару (x, y). Рассмотрим любую другую пару (v, w). Если $v = x$ или $w = y$, то мы повторно придем к тому же утверждению об относительной предпочтительности u и u'. Поэтому пусть $v \neq x$ и $w \neq y$. Если дополнительно $v \neq y$, то мы можем прийти к тому же утверждению относительно u и u', сделав ряд перестановок: $(x, y) \to (v, y) \to (v, w)$. Аналогичным образом, если $w \neq x$, можно использовать такую цепь перестановок: $(x, y) \to (x, w) \to (v, w)$. Остается случай $(v, w) = (y, x)$. Теперь мы используем третью альтернативу, z, и следующую последовательность: $(x, y) \to (x, z) \to (y, z) \to (y, x)$.

и $u_2 > u_2'$) и вспомним из примера 3.C.1, что этот тип ранжирования альтернатив непредставим функцией полезности. Но поскольку мы хотим сосредоточиться на исследовании функций общественного благосостояния, мы будем впредь предполагать, что имеем дело только с функционалами общественного благосостояния, которые не только соответствуют предпосылкам утверждения 22.D.1, но и дают непрерывные общественные отношения предпочтения $\succsim$ на $\mathbb{R}^I$. Как и в разделе 3.C, такое отношение общественного предпочтения может быть представлено непрерывной функцией полезности. Она и будет нашей функцией общественного благосостояния $W(u_1, \ldots, u_I)$. Отметим, что любое возрастающее, непрерывное преобразование $W(\cdot)$ также будет допустимой функцией общественного благосостояния.

Суммируя сказанное, мы убедились, что функция общественного благосостояния, порождающая определенный функционал общественного благосостояния, существует, если этот функционал, с некоторыми оговорками, удовлетворяет условию попарной независимости. Поэтому отныне мы будем рассматривать такие функционалы общественного благосостояния $F\colon \mathscr{U}^I \to \mathscr{R}$, которые могут быть получены из возрастающей и непрерывной функции общественного благосостояния $W\colon \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}$, или, что эквивалентно, из монотонного и непрерывного рационального отношения предпочтения $\succsim$ на $\mathbb{R}^I$. Мы обнаружим, что в этом контексте естественные требования к инвариантности функционала общественного благосостояния довольно серьезно ограничивают нас в выборе формы $W(\cdot)$ и, следовательно, вида самого функционала общественного благосостояния.

Определение 22.D.4. Мы говорим о том, что функционал общественного благосостояния $F\colon \mathscr{U}^I \to \mathscr{R}$ является *инвариантным к единообразным кардиналистским преобразованиям*, если $F(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I) = F(\tilde{u}_1', \ldots, \tilde{u}_I')$ всякий раз, когда профили функций полезности $(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I)$ и $(\tilde{u}_1', \ldots, \tilde{u}_I')$ отличаются только расположением точки отсчета и единицами измерения, т. е. когда существуют числа $\beta > 0$ и α, такие что $\tilde{u}_i(x) = \beta\tilde{u}_i'(x) + \alpha$ для всех i и $x \in X$. Если имеет место инвариантность только по отношению к единообразным изменениям точки отсчета (т. е. $\beta = 1$) или только к изменениям единиц измерения (т. е. $\alpha = 0$), то мы говорим, что $F(\cdot)$ *инвариантна к единообразным изменениям точки отсчета* или *инвариантна к единообразным изменениям единиц измерения* соответственно.

Трудно спорить с требованием инвариантности по отношению к единообразным кардиналистским преобразованиям. Даже если регулятор может сравнивать полезности различных агентов, трудно понять смысл абсолютной единицы измерения полезности или абсолютной точки отсчета для измерения полезности. Мы начнем с анализа последствий инвариантности по отношению к единообразным изменениям точки отсчета. Предположим, что функционал общественного благосостояния генерируется на основе функции общественного благосостояния $W(\cdot)$. Мы утверждаем, что он может быть инвариантен к единообразным изменениям точки отсчета, только если равенство $W(u) = W(u')$ подразумевает $W(u + \alpha e) = W(u' + \alpha e)$ для всех профилей значений полезности $u \in \mathbb{R}^I$, $u' \in \mathbb{R}^I$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, где $e = (1, \ldots, 1)$ — единичный вектор. Действительно, предположим, что $W(u) = W(u')$ и $W(u + \alpha e) < W(u' + \alpha e)$. Рассмотрим пару альтернатив $x, y \in X$ и профиль $(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I) \in U^I$ с $\tilde{u}_i(x) = u_i$ и $\tilde{u}_i(y) = u_i'$ для каждого i. Тогда $xF(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I)y$. Однако $xF(\tilde{u}_1', \ldots, \tilde{u}_I')y$ не выполняется, когда $\tilde{u}_i'(\cdot) = \tilde{u}_i(\cdot) + \alpha$, что противоречит инвариантности к единообразным изменениям точки отсчета.

Геометрически утверждение о том, что $W(u) = W(u')$ подразумевает $W(u + \alpha e) = W(u' + \alpha e)$, говорит о том, что кривые безразличия $W(\cdot)$ параллельны относительно e — они получаются одна из другой параллельным переносом вдоль направления e (см. рис. 22.D.1). В утверждении 22.D.2 [взятом из работы (Roberts, 1980)] показано, что это свойство имеет важное следствие: с точностью до положительного преобразования функцию общественного благосостояния можно записать в виде суммы чисто утилитаристской функции общественного благосостояния и дисперсии полезности.

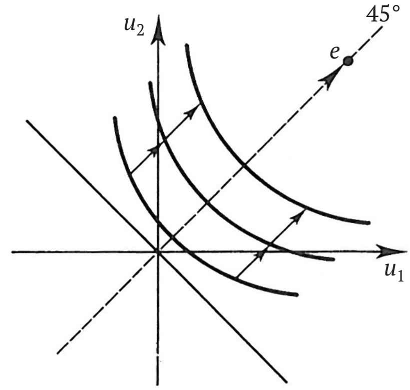


Рис. 22.D.1. Карта безразличия функции общественного благосостояния, инвариантной к одинаковым изменениям точки отсчета уровней полезности

Утверждение 22.D.2. Пусть функционал общественного благосостояния $F\colon \mathscr{U}^I \to \mathscr{R}$ порождается непрерывной, возрастающей функцией общественного благосостояния. Предположим также, что $F(\cdot)$ инвариантна к единообразным изменениям точки отсчета. Тогда функционал общественного благосостояния может порождаться функцией общественного благосостояния следующего вида:

$$W(u_1, \ldots, u_I) = \bar{u} - g(u_1 - \bar{u}, \ldots, u_I - \bar{u}), \qquad (22.D.1)$$

где $\bar{u} = (1/I)\sum_i u_i$.

Более того, если $F(\cdot)$ также инвариантна к единообразным изменениям единиц измерения, т. е. полностью инвариантна к единообразным кардиналистским преобразованиям, то функция $g(\cdot)$ однородна первой степени в своей области определения: $\left\{s \in \mathbb{R}^I : \sum_i s_i = 0\right\}$.

Доказательство. По предположению функционал общественного благосостояния $F\colon \mathscr{U}^I \to \mathscr{R}$ может порождаться непрерывным и монотонным отношением предпочтения $\succsim$ на $\mathbb{R}^I$. Более того, инвариантность к идентичным изменениям единиц измерения предполагает, что если $u \sim u'$, то $u + \alpha e \sim u' + \alpha e$ для любых $\alpha \in \mathbb{R}$.

Теперь построим функцию полезности $W(\cdot)$ для $\succsim$. В силу непрерывности и монотонности $\succsim$ для каждого $u \in \mathbb{R}^I$ найдется единственное число α, такое что $u \sim \alpha e$. Обозначим это число через $W(u)$. То есть $W(u)$ определяется так: $u \sim W(u)e$ (наглядную иллюстрацию см. на рис. 22.D.2). По причине монотонности предпочтений $W(\cdot)$ является адекватным измерителем уровня полезности для $\succsim$[18].

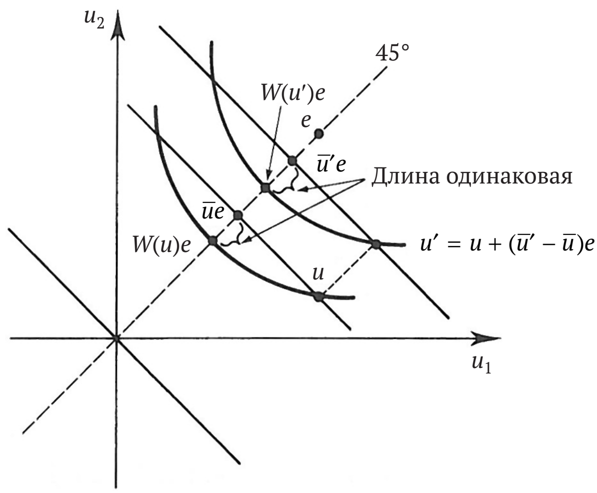


Рис. 22.D.2. Построение функции общественного благосостояния вида (22.D.1) для функционала общественного благосостояния, инвариантного к идентичным изменениям точек отсчета

Первая часть доказательства будет завершена, если мы покажем, что $W(u) - \bar{u}$ зависит только от вектора отклонений $(u_1 - \bar{u}, \ldots, u_I - \bar{u}) = u - \bar{u}e$, т. е. если $u - \bar{u}e = u' - \bar{u}'e$, то $W(u) - \bar{u} = W(u') - \bar{u}'$. Но это действительно верно, поскольку $u \sim W(u)e$ и инвариантность к единообразным изменениям точки отсчета предполагает, что если $u - \bar{u}e = u' - \bar{u}'e$, то

$$u' = u + (\bar{u}' - \bar{u})e \sim W(u)e + (\bar{u}' - \bar{u})e = [W(u) + (\bar{u}' - \bar{u})]e.$$

И, таким образом, $W(u') = W(u) + (\bar{u}' - \bar{u})$, что и требовалось показать. Это построение представлено на рис. 22.D.2[19].

[18] Вплоть до этого места доказательство аналогично проделанному в утверждении 3.C.1 в теории потребительского выбора, к которому мы и отсылаем вас за более подробным изложением.

[19] Мы можем выдвинуть некоторые интуитивные соображения о форме этой функции полезности, заметив ее сходство с квазилинейными функциями в теории потребления. Здесь мы можем представить любой вектор $u \in \mathbb{R}^I$ как $u = \bar{u}e + (u - \bar{u}e)$, а множества безразличия можно получить путем параллельного переноса в направлении e. В теории потребления мы можем записать любой вектор $x \in \mathbb{R}^L$ как $x = (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, \ldots, x_L)$, а множества безразличия парал-

Для доказательства второй части предположим, что $F(\cdot)$ является также инвариантным к единообразным изменениям единиц измерения. Поскольку $F(\cdot)$ сгенерирован на основе $W(\cdot)$, инвариантным к единицам измерения он может быть, только если для любого $u \sim u'$ и $\beta > 0$ будем иметь: $\beta u \sim \beta u'$. Из $u \sim W(u)e$ следует $\beta u \sim \beta W(u)e$, и, таким образом, $W(\beta u) = \beta W(u)$ для любого $u \in \mathbb{R}^I$ и $\beta > 0$. То есть функция $W(\cdot)$ является однородной первой степени, и, так как $g(\cdot)$ совпадает с $-W(\cdot)$ на области определения, где $\bar{u} = 0$, мы приходим к заключению, что и функция $g(\cdot)$ является однородной первой степени. ■

Далее можно сказать, что если регулятор не способен сравнивать абсолютные уровни полезности у разных потребителей, то функционал общественного благосостояния должен удовлетворять более жестким требованиям, связанным с инвариантностью.

Определение 22.D.5. Функционал общественного благосостояния $F\colon \mathscr{U}^I \to \mathscr{R}$ *не допускает межличностного сравнения полезностей*, если $F(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I) = F(\tilde{u}'_1, \ldots, \tilde{u}'_I)$ всегда, когда найдутся числа $\beta_i > 0$ и α_i, такие что $\tilde{u}_i(x) = \beta_i \tilde{u}'_i(x) + \alpha_i$ для всех i и x. Если же имеется инвариантность только к независимым изменениям точек отсчета (т. е. $\beta_i = 1$ для всех i) или только к независимым изменениям единиц измерения (т. е. $\alpha_i = 0$ для всех i), то мы говорим, что $F(\cdot)$ является *инвариантным к независимым изменениям точек отсчета* или *инвариантным к независимым изменениям единиц измерения* соответственно.

Теперь мы готовы сформулировать утверждение 22.D.3[20].

Утверждение 22.D.3. Предположим, что функционал общественного благосостояния $F\colon \mathscr{U}^I \to \mathscr{R}$ может быть порожден возрастающей, непрерывной функцией общественного благосостояния. Если $F(\cdot)$ является инвариантным к независимым изменениям точек отсчета, то $F(\cdot)$ может быть порожден функцией общественного благосостояния $W(\cdot)$ чисто утилитаристского вида (но необязательно симметричной). То есть существуют константы $b_i \geq 0$, не все равные 0, такие что

$$W(u_1, \ldots, u_I) = \sum_i b_i u_i \qquad \text{для всех } i. \tag{22.D.2}$$

Более того, если $F(\cdot)$ также является инвариантным к независимым изменениям единиц измерения [т. е. если $F(\cdot)$ не допускает межличностного сравнения полезностей], то функционал F является диктаторским: существует агент h, такой что для каждой пары альтернатив $x, y \in X$ из неравенства $\tilde{u}_h(x) > \tilde{u}_h(y)$ следует $xF_p(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I)y$.

лельны друг другу в направлении (1, 0, …, 0). И в обоих случаях мы можем заключить, что существует функция полезности, линейно аддитивная по первому аргументу (т. е. в направлении, относительно которого множества безразличия параллельны).

[20] Больше подобных результатов вы найдете в работе (d'Aspremont, Gevers, 1977).

Доказательство. Предположим, что $\succsim$ — непрерывное отношение предпочтения на $\mathbb{R}^I$, которое порождает данный функционал $F(\cdot)$. Чтобы оно было представимо в виде (22.D.2), потребуется, чтобы множества безразличия отношения предпочтения $\succsim$ представляли собой параллельные друг другу гиперплоскости. Поскольку из утверждения 22.D.2 уже известно, что эти множества являются параллельными в направлении e, достаточно показать, что они обязаны быть гиперплоскостями, т. е. что если мы берем два $u, u' \in \mathbb{R}^I$, такие что $u \sim u'$, то для $u'' = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u'$ имеем: $u'' \sim u \sim u'$.

Инвариантность функционала $F(\cdot)$ к независимым изменениям точек отсчета означает в терминах отношения предпочтения $\succsim$, что для любого $\alpha \in \mathbb{R}^I$ мы имеем $u + \alpha \succsim u'' + \alpha$ тогда и только тогда, когда $u \succsim u''$. Примем $\alpha = \frac{1}{2}(u' - u)$. Тогда $u + \alpha = u''$ и $u'' + \alpha = u'$. Поэтому $u \succsim u''$ тогда и только тогда, когда $u'' \succsim u'$. Если $u \succsim u''$, то $u'' \succsim u'$, и тогда $u'' \sim u$. Если $u'' \succ u$, то $u' \succ u''$, что противоречит $u \sim u'$. Мы приходим к заключению, что $u'' \sim u \sim u'$, как и требовалось.

Как только мы доказали, что множества безразличия являются параллельными друг другу гиперплоскостями, та же конструкция, что и в доказательстве утверждения 22.D.2, даст нам $W(\cdot)$ в форме (22.D.2). Кроме того, свойство Парето дает $b_i \geq 0$ для всех i.

В заключение предположим, что функционал $F(\cdot)$ также инвариантен к независимым изменениям единиц измерения. В этом случае существование диктатора показать легко. Выберем агента h с $b_h > 0$. Рассмотрим $u, u' \in \mathbb{R}^I$, такие что $u_h > u'_h$. В силу инвариантности к независимым изменениям единиц измерения имеем, что $\sum_i b_i u_i > \sum_i b_i u'_i$ тогда и только тогда, когда $b_h u_h + \varepsilon \sum_{i \neq h} b_i u_i > b_h u'_h + \varepsilon \sum_{i \neq h} b_i u'_i$ для любых $\varepsilon > 0$. Поэтому, поскольку $b_h u_h > b_h u'_h$, выбрав достаточно малое $\varepsilon > 0$, мы получим $\sum_i b_i u_i > \sum_i b_i u'_i$. Таким образом, агент h является диктатором (в упражнении 22.D.4 вам предлагается показать, что в действительности $b_i = 0$ для всех $i \neq h$). ■

Отметим, что вывод о диктаторстве в утверждении 22.D.3 не требует, чтобы функционал $F(\cdot)$ порождался именно функцией общественного благосостояния, он может порождаться и просто отношением общественных предпочтений на $\mathbb{R}^I$.

Из утверждения 22.D.3 (расширенного подобно тому, как это сделано в последнем параграфе) следует теорема о невозможности Эрроу из главы 21 (утверждение 21.C.1), полученная здесь с помощью совершенно иной методологии. Действительно, предположим, что $F(\cdot)$ является функционалом общественного благосостояния, определенным, как это делалось в главе 21, на профилях отношений предпочтения $(\succsim_1, \ldots, \succsim_I) \in \mathscr{R}^I$. Тогда можно построить функционал общественного благосостояния $F'(\cdot)$, определенный на профилях функций полезности $(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I) \in \mathscr{U}^I$, установив, что $F'(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I) = F(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)$, где $\succsim_i$ — отношение предпочтения, представимое функцией полезности $\tilde{u}_i(\cdot)$. В упражнении 22.D.5 вам предлагается проверить, что, во-первых, $F'(\cdot)$ наследует свойство Парето и условия попарной независимости от $F(\cdot)$; во-вторых, что $F'(\cdot)$ не допускает межличностного сравнения полезностей и, в-третьих, что диктатор для $F'(\cdot)$ также является диктатором для $F(\cdot)$.

Были найдены и другие интересные свойства инвариантности функционалов общественного благосостояния. Приведем два из них.

Мы говорим, что функционал общественного благосостояния $F\colon \mathscr{U}^I \to \mathscr{R}$ является *инвариантным к единообразным ординалистским преобразованиям,* если $F(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I) = F(\tilde{u}'_1, \ldots, \tilde{u}'_I)$ всегда, когда существует возрастающая функция $\gamma(\cdot)$, такая что $\tilde{u}_i(x) = \gamma(\tilde{u}'_i(x))$ для каждой альтернативы $x \in X$ и любого i. Эта инвариантность интерпретируется так: хотя общественный планировщик не имеет представления о размерностях индивидуальных шкал полезности, он способен распознать, что положение одного индивида лучше, чем у другого (но неизвестно, насколько). Такой планировщик мог бы иметь, например, функционал общественного благосостояния, порожденный симметричной роулзианской функцией общественного благосостояния $W(u) = \min\{u_1, \ldots, u_I\}$. С этой ФОБ расстановка приоритетов между стратегиями зависит только от способности определить, кто из индивидов находится в наихудшем положении (эта тема получает дальнейшее развитие в упражнении 22.D.8).

Мы говорим, что функция общественного благосостояния $W(\cdot)$, порождающая заданный функционал общественного благосостояния $F\colon \mathscr{U}^I \to \mathscr{R}$, *не зависит от посторонних индивидов,* если при разбивке множества агентов на любые две группы общественные предпочтения на векторах полезностей одной из групп не зависят от уровней полезности агентов в другой группе (при необходимости это условие можно сформулировать и в терминах функционала общественного благосостояния). Это требование разумно: речь в нем идет о том, что решения, касающиеся равенства или неравенства уровней индивидуального благосостояния, например, жителей Калифорнии, не должны зависеть от уровней индивидуального благосостояния, например, жителей Массачусетса.

В формально сходной ситуации в теории потребительского выбора (упражнение 3.G.4) непрерывная, возрастающая и не зависящая от посторонних индивидов функция общественного благосостояния для $I > 2$ агентов имеет, с точностью до монотонного преобразования, *аддитивно сепарабельную форму* $W(u) = \sum_i g_i(u_i)$; т. е. $W(u)$ является обобщенной утилитаристской, возможно несимметричной. Более того, при довольно мягких условиях справедливо и то, что единственными функциями общественного благосостояния, которые, с точностью до монотонного преобразования, являются аддитивно сепарабельными и инвариантными к единообразным изменениям точек отсчета, являются утилитаристские функции вида $W(u) = \sum_i b_i u_i$. Таким образом, с точки зрения инвариантности к утилитаристской форме функции общественного благосостояния можно прийти двумя путями: первый, согласно утверждению 22.D.3, основан на инвариантности к независимым изменениям точек отсчета; другой, о котором только что шла речь выше, основан на независимости от посторонних индивидов и инвариантности к единообразным изменениям точек отсчета. Более подробную информацию об этом можно найти в работе (Maskin, 1978).

Пример 22.D.1. Зафиксируем альтернативу x^* и определим функционал общественного благосостояния $F(\cdot)$, присвоив каждому профилю индивидуальных функций полезности $(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I)$ отношение общественных предпочтений, порожденное функцией полезности $V(x) = \sum_i g_i(\tilde{u}_i(x) - \tilde{u}_i(x^*))$. Тогда, неформально, этот функционал общественного благосостояния будет как инвариантным к независимым изменениям точек отсчета, так и не зависящим от посторонних индивидов, но он не будет ни утилитаристским, ни диктаторским. Отметим, что этот функционал не может быть порожден функцией общественного благосостояния, так как он не удовлетворяет условию попарной независимости: общественное предпочтение относительно двух альтернатив может *зависеть от полезности третьей альтернативы* x^*. ■

22.E. Аксиоматический подход в моделях торга

В этом разделе мы дадим краткий обзор альтернативного подхода к определению *разумных* общественных компромиссов. Роль планировщика, наделенного своими собственными предпочтениями, будет играть (неявный) *арбитр,* который пытается распределить выигрыш от торговли или, в более общем виде, сотрудничества таким способом, который «честно» отражал бы переговорную силу различных агентов. Начало этого подхода лежит в теории игр. Однако он обходит стороной построение явных некооперативных игр, моделирующих торг (таких, которые рассматриваются в приложении А к главе 9), принимая *аксиоматическую* точку зрения. Таким образом, излагаемый здесь подход в большей степени связан с кооперативной теорией игр (обзор которой дан в приложении А к главе 18)[21].

Для текущих целей описание *задачи торга* между I агентами состоит из двух элементов: *множества возможных уровней полезности* $U \subset \mathbb{R}^I$ и *точки угрозы,* или *статус-кво,* $u^* \in U$. Множество U содержит распределения полезностей, достижимые при кооперации между агентами. Точка u^* соответствует исходу, который реализуется при отказе от кооперации. Отметим, что для кооперации необходимо участие каждого агента — и только в этом случае, повторим еще раз, мы можем достичь распределений полезности из множества $U \subset \mathbb{R}^I$. Если хоть один агент не участвует в кооперации, то единственно возможный результат — вектор u^*. Такая постановка вопроса не ограничивает общности, если в торге участвуют двое, поэтому именно этот случай и будет объектом нашего рассмотрения в этом разделе. Если же участников торга трое и больше, предпосылка о необходимости участия каждого в кооперации уже представляется радикальной, так как мы можем захотеть исследовать возможность частичной кооперации. Мы рассмотрим такую возможность в разделе 22.F.

На протяжении всего этого раздела мы будем предполагать, что множество $U \subset \mathbb{R}^I$ является выпуклым, замкнутым и удовлетворяет условию свободы расходования $U - \mathbb{R}^I_+ \subset U$ (т. е. если $u' \leq u$ и $u \in U$, то $u' \in U$). Как и в определении 22.B.1, $U \subset \mathbb{R}^I$ может генерироваться из множества аль-

[21] Общее введение к материалу этого раздела можно найти в работах (Roth, 1979; Moulin, 1988; Thomson, 1995).

тернатив X, которое могло бы включать и лотереи на множестве детерминированных исходов[22]. Ради упрощения можно также считать, что u^* является внутренней точкой U и что множество $\{u \in U: u \geq u^*\}$ является ограниченным.

Определение 22.E.1. *Решение задачи торга* — это правило, присваивающее вектор решения $f(U, u^*) \in U$ каждой задаче торга (U, u^*)[23].

Мы посвятим остаток этого раздела обсуждению некоторых свойств, которые было бы желательно видеть у $f(\cdot)$, и представлению четырех примеров решения задачи торга: *эгалитарного, утилитаристского,* решения *Нэша* и решения *Калай — Смородинского*. Мы должны подчеркнуть, что сама постановка задачи включает строгую предпосылку: мы неявно предполагаем, что решение зависит от множества возможных альтернатив X только через результирующие значения полезностей.

Определение 22.E.2. Решение задачи торга $f(\cdot)$ *не зависит от выбора точек отсчета на шкалах полезностей* (independent of utility origins, IUO) или *инвариантно к независимым изменениям точек отсчета на шкалах полезностей*, если для любых $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_I) \in \mathbb{R}^I$ имеем

$$f_i(U', u^* + \alpha) = f_i(U, u^*) + \alpha_i \qquad \text{для каждого } i,$$

когда $U' = \{(u_1 + \alpha_1, \ldots, u_I + \alpha_I): \mathrm{u} \in U\}$.

Свойство независимости от выбора точек отсчета на шкалах полезностей говорит о том, что решение задачи торга не зависит от абсолютных величин полезности, и отныне мы будем считать, что это свойство соблюдается. Отметим, что таким образом всегда будет выполняться $f(U, u^*) = f(U - \{u^*\}, 0) + u^*$. Это позволяет нормализовать наши задачи, положив $u^* = 0$. Впредь мы поступаем именно так и вместо $f(U, 0)$ пишем просто $f(U)$.

Не следует забывать, однако, что изменение точки угрозы (которое теперь будет выглядеть как изменение в U) повлияет на точку решения.

Определение 22.E.3. Решение задачи торга $f(\cdot)$ *не зависит от выбора единиц измерения полезности* (independent of utility units, IUU) или *инвариантно к независимым изменениям единиц измерения*, если для любого $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_I) \in \mathbb{R}^I$, такого что $\beta_i > 0$ для всех i, имеем

$$f_i(U') = \beta_i f_i(U) \qquad \text{для каждого } i,$$

когда $U' = \{(\beta_1 u_1, \ldots, \beta_I u_I): u \in U\}$[24].

[22] В принципе множество X и заданные на нем функции полезности могут быть различными для различных множеств $U \subset \mathbb{R}^I$. Для теории, которая разрабатывается ниже, имеет значение исключительно множество возможных уровней полезности U.

[23] Таким образом, в смысле главы 1 решение задачи торга является правилом выбора. Если множество соответствующих альтернатив X будет зафиксировано и вид множества U, созданного как в определении 22.B.1, будет зависеть только от функций полезности, мы сможем рассматривать решение задачи торга как функцию выбора в смысле определения 21.E.1.

[24] Геометрически U' получается из U растягиванием различных осей для изменения масштаба факторов $(\beta_1, \ldots, \beta_I)$.

В сочетании с независимостью от выбора точек отсчета на шкалах полезностей (неявно заложенной в определении 22.E.3), независимость от выбора единиц измерения полезности говорит нам о том, что, хотя решение задачи торга использует кардиналистскую информацию о предпочтениях, оно никак не связано с межличностным сравнением полезностей.

Определение 22.E.4. Решение задачи торга $f(\cdot)$ удовлетворяет свойству *Парето* (P), если для каждого множества U $f(U)$ является (слабым) Парето-оптимумом, т. е. не существует $u \in U$, таких что $u_i > f_i(U)$ для каждого i.

Определение 22.E.5. Решение задачи торга $f(\cdot)$ удовлетворяет свойству *симметрии* (S), если для любого симметричного множества $U \subset \mathbb{R}^I$ (т. е. если U остается неизменным при любой перестановке осей[25], см. рис. 22.E.1) все элементы $f(U)$ одинаковы.

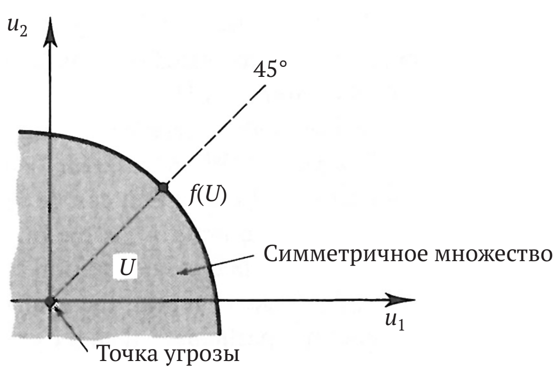


Рис. 22.E.1. Свойство симметричности для решений задачи торга

Интерпретация свойства симметричности очевидна: если, как следует из U, все агенты одинаковы, то и доходы от сотрудничества делятся поровну.

Определение 22.E.6. Решение задачи торга $f(\cdot)$ удовлетворяет свойству *индивидуальной рациональности* (ИР), если $f(U) \geq 0$.

Другими словами, при кооперативном решении каждый агент получает не меньше, чем в точке угрозы (вспомним, что после нормализации мы рассматриваем только множества U с $0 \in U$). Это свойство разумно: если некоторый агент получит меньше нуля, ему было бы выгоднее отказаться от участия, что повлекло бы срыв переговоров.

Следующее свойство является более существенным.

Определение 22.E.7. Решение задачи торга удовлетворяет свойству *независимости от посторонних альтернатив* (НПА), если для любых $U' \subset U$ и $f(U) \in U'$ выполняется $f(U') = f(U)$.

[25] Более точно, если $u \in U$, то $u' \in U$ для любого u', отличающегося от u только перестановкой элементов.

Условие НПА говорит о том, что если $f(U)$ является «разумным» исходом на множестве U и мы рассматриваем его подмножество U', которое содержит меньше элементов, но среди них по-прежнему находится $f(U)$ — т. е. мы лишь устраняем из U «посторонние альтернативы», — то $f(U)$ остается разумным исходом (см. рис. 22.E.2). Это свойство выглядело бы очень убедительным, если бы мы могли заменить прилагательное «разумный» на «наилучший». Действительно, если $f(U)$ было получено как единственный максимум некоторой функции общественного благосостояния $W(u)$ на U, то условие НПА явно выполнялось бы [если $f(U)$ максимизирует $W(\cdot)$ на U, оно максимизирует $W(\cdot)$ и на $U' \subset U$]. Отметим, что, хотя обратное несправедливо, на практике интересные примеры, удовлетворяющие НПА, связаны с максимизацией некоторой ФОБ.

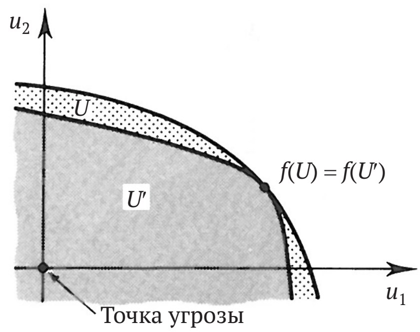


Рис. 22.E.2. Свойство независимости от посторонних альтернатив для решений задачи торга

Мы приступаем к рассмотрению четырех примеров решения задачи торга. Чтобы избежать повторов, заметим, что все они удовлетворяют свойству Парето, симметрии и свойствам индивидуальной рациональности (а кроме того, не зависят от выбора точки отсчета на шкале полезностей). Вам предлагается проверить это в упражнении 22.E.1. В упражнении 22.E.2 нужно будет построить примеры, нарушающие некоторые из этих условий.

Пример 22.E.1. *Эгалитарное решение.* В эгалитарном решении $f_e(\cdot)$ выгоды от кооперации поделены между агентами поровну. То есть для каждой задачи торга $U \subset \mathbb{R}^I$, $f_e(U)$ — такой вектор на границе U, все координаты которого одинаковы. На рис. 22.E.3 показан случай с $I = 2$. Отметим также, что, как показано на рисунке, каждый вектор $f_e(U)$ максимизирует роулзианскую (Rawlsian) функцию общественного благосостояния $\min\{u_1, \ldots, u_I\}$ на U.

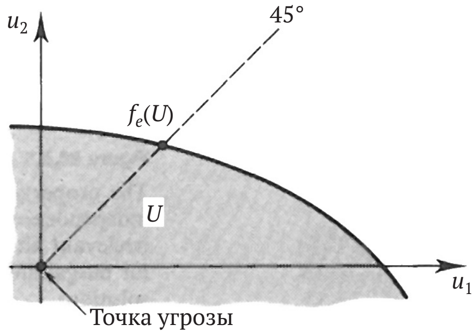


Рис. 22.E.3. Эгалитарное решение задач торга

Эгалитарное решение удовлетворяет свойству НПА (проверьте это). Очевидно, чтобы достичь этого решения, единицы измерения полезности у разных агентов должны быть сравнимы, и, таким образом, свойство независимости от выбора единиц измерения полезности (IUU) не выполнено[26]. ■

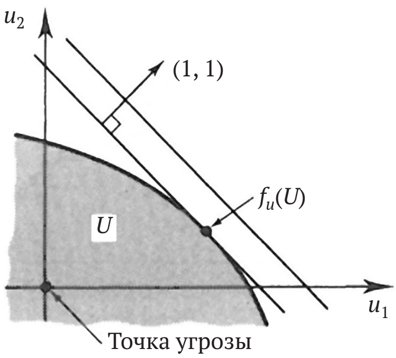


Рис. 22.E.4. Утилитаристское решение задач торга

Пример 22.E.2. *Утилитаристское решение.* Пусть для каждого U вектор $f_u(U)$ максимизирует $\sum_i u_i$ на $U \cap \mathbb{R}^I_+$. Если U строго выпукло, то эта точка определена однозначно и поэтому на множестве строго выпуклых задач торга выполняется свойство НПА. Как и в предыдущем примере, это решение не удовлетворяет свойству независимости от выбора единиц измерения полезности (IUU). Рис. 22.E.4 иллюстрирует утилитаристское решение задачи торга в случае с $I = 2$. ■

Пример 22.E.3. *Решение Нэша.* В этом решении мы занимаем промежуточную позицию между двумя предыдущими примерами, требуя, чтобы $f_n(U)$ было точкой в $U \cap \mathbb{R}^I_+$, которая максимизирует произведение полезностей $u_1 \times \ldots \times u_I$ или (что то же самое) максимизирует $\sum_i \ln u_i$ (это соответствует случаю $\rho = 1$ в примере 22.C.4). На рис. 22.E.5 приведена иллюстрация для случая с $I = 2$. Здесь решение Нэша имеет простую геометрию: $f_n(U)$ является граничной точкой U, через которую мы можем провести касательную, обладающую тем свойством, что ее средняя точка в положительном ортанте в точности совпадает с данной граничной точкой $f_n(U)$; см. упражнение 22.E.3.

Подобно примерам с эгалитарным и утилитаристским решениями, решение Нэша удовлетворяет свойству НПА (поскольку оно является результатом максимизации строго вогнутой функции). Интересно, что в отличие от этих решений *условие независимости от выбора единиц измерения полезности* (IUU) *распространяется на*

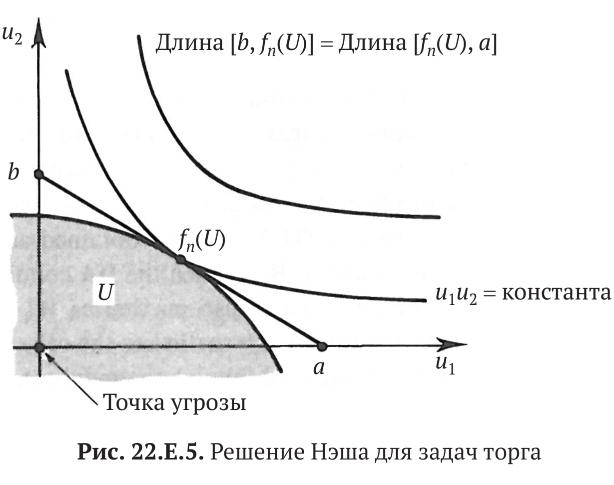


Рис. 22.E.5. Решение Нэша для задач торга

[26] Не забывайте, что значения полезности — не абсолютные величины, а приращения по отношению к точке угрозы. Именно поэтому изменения точек отсчета на шкалах полезности не играют никакой роли.

решение Нэша. Чтобы убедиться в этом, отметим, что $\sum_i \ln u_i \geq \sum_i \ln u_i'$ эквивалентно $\sum_i \ln \beta_i u_i = \sum_i \ln u_i + \sum_i \ln \beta_i \geq \sum_i \ln u_i' + \sum_i \ln \beta_i = \sum_i \ln \beta_i u_i'$ для любых констант $\beta_i > 0$. Поэтому решение Нэша инвариантно к любому изменению точек отсчета на шкалах полезностей или единиц измерения полезностей. Оно зависит только от кардиналистских характеристик функций полезности агентов на соответствующем множестве альтернатив.

Существует точка зрения, что решение Нэша является синтезом эгалитарного и утилитаристского решений, предназначенным для удовлетворения требования инвариантности к выбору единиц измерения полезностей: *для данной задачи торга U решение Нэша является единственным вектором полезностей, который, при некотором изменении единиц измерения полезности, совпадает одновременно с утилитаристским и эгалитарным решениями*. Более формально предположим, что $\eta_i > 0$ — коэффициенты трансформации исходных единиц измерения полезности в новые единицы измерения, сопоставимые для разных агентов. Если утилитаристское и эгалитарное решения для отмасштабированного множества U' $(= \{(\eta_1 u_1, \ldots, \eta_I u_I)$: $(u_1, \ldots, u_I) \in U\})$ совпадают, то выбранная точка $\hat{u} \in U$ должна удовлетворять условию $\eta_1 \hat{u}_1 = \ldots = \eta_I \hat{u}_I = \gamma$, т. е. $\eta_i = \gamma(1/\hat{u}_i)$ для каждого i. Теперь рассмотрим любой вектор $u' \in U$. Имеем: $\sum_i \eta_i u_i' \leq \sum_i \eta_i \hat{u}_i$, и поэтому $\sum_i (1/\hat{u}_i) u_i' \leq \sum_i (1/\hat{u}_i) \hat{u}_i$. Поскольку $(1/\hat{u}_1, \ldots, 1/\hat{u}_I)$ является градиентом вогнутой функции $\sum_i \ln u_i$ при $(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_I)$, это означает, что $\sum_i \ln u_i' \leq \sum_i \ln \hat{u}_i$ (см. раздел M.C математического приложения). Отсюда получаем, что $\hat{u}$ максимизирует $\sum_i \ln u_i$ на U, т. е. $\hat{u} = f_n(U)$[27]. Рис. 22.E.6 иллюстрирует наши рассуждения. В упражнении 22.E.3 вам предлагается показать обратное, т. е. что решение Нэша является одновременно утилитаристским и эгалитарным при соответствующем выборе единиц измерения полезности. ■

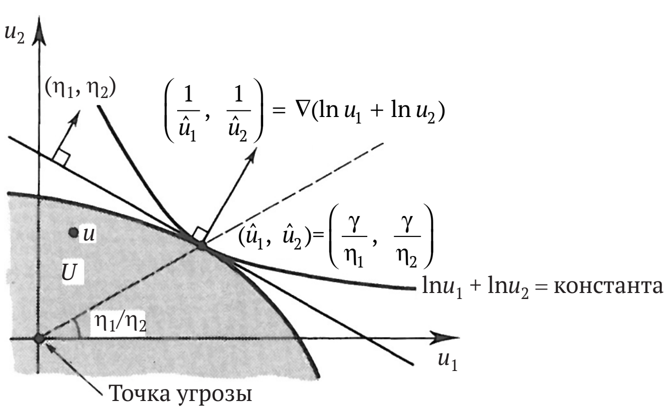


Рис. 22.E.6. При некоторых множителях (η_1, η_2), меняющих масштаб измерения полезности, решение Нэша является одновременно и эгалитарным, и утилитаристским

---

[27] Повторим это еще раз, используя геометрическую терминологию. Гиперплоскость с нормалью $(\eta_1, \ldots, \eta_I)$, проходящая через $\hat{u}$, оставляет множество U под собой (по свойству утилитарности). Таким образом, нужно лишь показать, что множество $\left\{u : \sum_i \ln u_i \leq \sum_i \ln \hat{u}_i\right\}$ лежит над гиперплоскостью. Но это следует из того факта, что по свойству эгалитарности $(\eta_1, \ldots, \eta_I)$ пропорционально $(1/\hat{u}_1, \ldots, 1/\hat{u}_I)$, т. е. градиенту вогнутой функции $\sum_i \ln u_i$ в точке $\hat{u}$.

Решение Нэша было предложено в работе (Nash, 1950), и им же установлено, что только оно одно на сегодняшний день удовлетворяет всем описанным в этом разделе условиям.

Утверждение 22.E.1. Решение Нэша — это единственное решение задачи торга, которое не зависит ни от выбора точек отсчета на шкалах полезностей, ни от выбора единиц измерения полезностей, а кроме того, симметрично, удовлетворяет условию Парето и не зависит от посторонних альтернатив[28].

Доказательство. Мы уже показали при обсуждении примера 22.E.4, что решение Нэша удовлетворяет перечисленным выше свойствам.

Чтобы убедиться, что справедливо и обратное утверждение, предположим, что у нас есть решение-кандидат $f(\cdot)$, удовлетворяющее всем свойствам. В силу независимости от выбора точек отсчета на шкалах полезностей мы можем предположить, как делали это до сих пор, что $f(\cdot)$ определено на множестве, где точка угрозы нормализована к точке отсчета. Теперь, взяв произвольное множество U, обозначим $\hat{u} = f_n(U)$ и рассмотрим следующие множества:

$$U' = \left\{ u \in \mathbb{R}^I : \sum_i u_i \,/\, \hat{u}_i \le I \right\} \text{ и } U'' = \left\{ u \in \mathbb{R}^I : \sum_i u_i \le I \right\}.$$

Иллюстрация для случая $I = 2$ дана на рис. 22.E.7. Заметим, что $U \subset U'$, так как вогнутая функция $\sum_i \ln u_i$ имеет градиент $(1/\hat{u}_1, \ \ldots, \ 1/\hat{u}_I)$ в точке $\hat{u}$, где она достигает своего максимального значения на выпуклом множестве U. Множество U'' является симметричным и поэтому, в силу симметрии и свойства Парето, мы приходим к заключению, что $f(U'') = (1, \ldots, 1)$. Из независимости от выбора единиц измерения полезностей следует, что $f(U') = (\hat{u}_1, \ \ldots, \ \hat{u}_I) = \hat{u}$ [заметим, что $u \in U''$ тогда и только тогда, когда $(\hat{u}_1 u_1, \ \ldots, \ \hat{u}_I u_I) \in U'$]. Наконец, поскольку $\hat{u} \in U$ и $U \subset U'$, свойство независимости от посторонних альтернатив дает $f(U) = \hat{u} = f_n(U)$, что мы и хотели получить. ■

Пример 22.E.4. *Решение Калай — Смородинского.* Это пример решения, которое не удовлетворяет свойству независимости от посторонних альтернатив. Оно было предложено в работе (Kalai, Smorodinsky, 1975). Рассмотрим задачу торга $U \subset \mathbb{R}^I$ и обозначим за $u^i(U) \in \mathbb{R}$ максимальное значение полезности, которого агент i может достичь при некотором векторе $U \cap \mathbb{R}^I_+$. Рис. 22.E.8 иллюстрирует случай с $I = 2$. Решение обосновывается так: пусть вся переговорная сила принадлежит агенту i (т. е. он может делать предложение «бери-или-уходи» остальным агентам). Тогда агент i получил бы $u^i(U)$, а остальные ничего[29]. Следовательно, мы могли бы рассматривать числа $u^i(U)$ как грубую оценку вклада соответствующих агентов в совместное предприятие и предполагать, что если кооперация имеет место, то решение

[28] Отметим, что мы не предполагаем индивидуальной рациональности явно: она вытекает из других условий.

[29] Мы пренебрегаем случаями, в которых вектор, дающий агенту i полезность $u^i(U)$, а остальным ничего, является Парето-доминируемым.

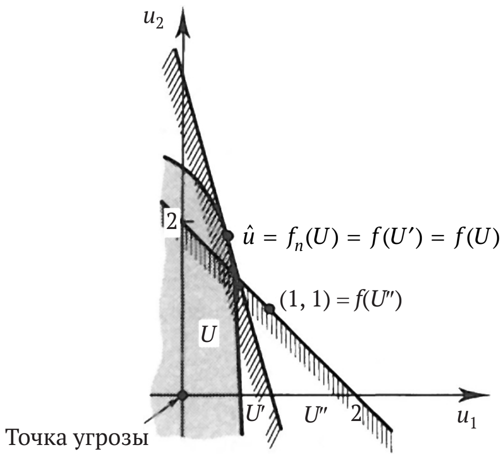


Рис. 22.E.7. Решение Нэша — единственное, не зависящее ни от выбора точек отсчета на шкалах полезностей, ни от выбора единиц измерения полезностей, а также симметричное, удовлетворяющее условию Парето и не зависящее от посторонних альтернатив (утверждение 22.E.1)

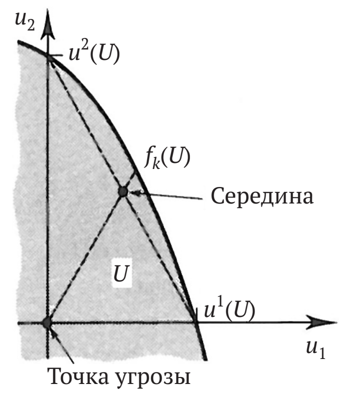


Рис. 22.E.8. Решение Калай — Смородинского для задач торга

должно представлять собой Парето-оптимальное распределение полезностей, где полезности агентов пропорциональны $(u^1(U), \ldots, u^I(U))$. Иными словами, полезности пропорциональны ожидаемым полезностям агентов, если каждый из них с равной вероятностью может выдвинуть предложение «бери-или-уходи». Это и есть решение Калай — Смородинского $f_k(U)$. Его построение показано на рис. 22.E.8.

Решение Калай — Смородинского удовлетворяет условию Парето и свойству симметрии. Как и решение Нэша, оно не подразумевает *межличностного сравнения полезностей*. Однако оно отличается от решения Нэша и поэтому (см. утверждение 22.E.1) не может удовлетворять свойству НПА. В упражнении 22.E.4 вам предлагается проверить это. ■

Условия, которые мы описывали до сих пор, ни в коем случае не являются исчерпывающим перечнем свойств, представляющих интерес в связи с задачей торга. Мы заканчиваем раздел неформальными комментариями по поводу некоторых из них.

(1) Свойства *линейности или разложимости*. Предположим, что, имея две задачи торга, $U \subset \mathbb{R}^I$ и $U' \subset \mathbb{R}^I$, мы рассматриваем множество $\alpha U + (1 - \alpha)U' \subset \mathbb{R}^I$, для $\alpha \in [0, 1]$ его можно было бы представить как результат рандомизации между двумя задачами. Тогда мы могли бы пожелать, чтобы $f(\alpha U + (1 - \alpha)U') = \alpha f(U) + (1 - \alpha)f(U')$; т. е. чтобы агентам было все равно, придут они к соглашению до или после разрешения неопределенности. Это строгое требование, и ни одно из решений, которые мы рассматривали, не удовлетворяет ему. В действительности можно показать, что (с несколькими дополнительными слабыми условиями) ему удовлетворяет только модифицированная версия утилитаристского решения, не предполагающая индивидуальной рациональности. Тот же вывод можно получить, если рассматривать $U + U'$ и потребовать, чтобы общее решение $f(U + U')$ было равно последовательному $f(U' + \{f(U)\}, f(U))$. Вспомним, что в силу независимости от выбора точек отсчета на шкалах полезностей последнее выражение равно $f(U') + f(U)$.

(2) *Свойства монотонности.* Решение задачи торга $f(\cdot)$ является монотонным, если $f(U) \le f(U')$, когда $U \subset U'$, т. е. если любое расширение множества возможных уровней полезности (при неизменном положении точки угрозы) выгодно для всех сторон. Требование монотонности строже, чем может показаться на первый взгляд, потому что множество возможных уровней полезности может расширяться крайне асимметрично. Фактически, как можно проверить по рис. 22.E.9, ни утилитаристское решение, ни решение Нэша, ни решение Калай — Смородинского не удовлетворяют свойству монотонности.

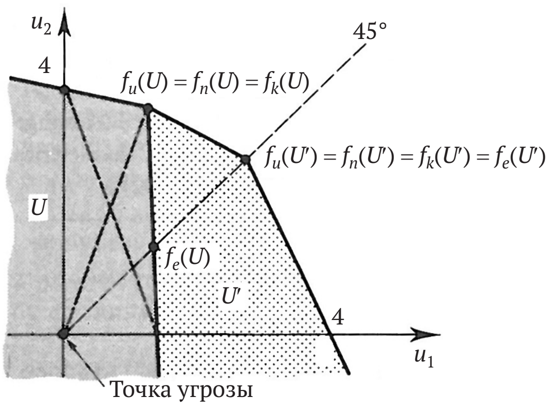


Рис. 22.E.9. Отсутствие монотонности в решениях Нэша, Калай — Смородинского и утилитаристском решении задачи торга

С другой стороны, эгалитарное решение с очевидностью удовлетворяет этому требованию. В упражнении 22.E.5 вам предлагается проверить, что эгалитарное решение является единственным симметричным, удовлетворяющим свойству Парето решением задачи торга, которое удовлетворяет требованию монотонности. В упражнении 22.E.6 также предлагается проверить, что для решения Калай — Смородинского при $I = 2$, удовлетворяющего свойствам IUO, IUU, свойству Парето и свойству симметрии, характерна частичная монотонность.

(3) *Свойства согласованности*. Это свойство описывает взаимную согласованность решений задачи торга, когда мы применяем их к задачам с различным количеством агентов. Пусть $f^I(\cdot)$ — семейство решений задачи торга (по одному решению на каждое число агентов I). Предположим для определенности, что мы начинаем с $I = \{1, 2, 3\}$. Возьмем любое i, скажем $i = 1$, и представим, что, если финальная кооперация состоится, агент 1 получит полезность $f_1^I(U)$, но после этого вновь открывается процесс торга между двумя оставшимися агентами. Им придется прийти к решению на множестве $U' = \left\{(u_2, u_3) : \left(f_1^I(U), u_2, u_3\right) \in U\right\} \subset \mathbb{R}^2$. Будет естественно применить одно из решений нашего семейства, а именно $f^{I/\{1\}}(U')$. Семейство решений является согласованным, если $f^{I/\{1\}}(U') = \left(f_2^I(U), f_3^I(U)\right)$. Другими словами, повторные переговоры приводят ровно к тому же исходу, что и первоначальные. Утилитаристское решение и решение Нэша являются согласованными (вообще, любое решение, полученное путем максимизации обобщенной утилитаристской ФОБ, является согласованным; см. упражнение 22.E.7). Решения Калай — Смородинского не согласованы (проверьте это в упражне-

нии 22.E.8). Интересен и нетривиален тот факт, что аксиому согласованности можно использовать вместо НПА в характеристике решения Нэша [см. (Lensberg, 1987; Thomson, Lensberg, 1992)].

22.F. Коалиционный торг: значение Шепли

Анализ в разделе 22.E является ограниченным в одном важном отношении: он не предусматривает возможности состояний, промежуточных между полной и всеобщей кооперацией и полным отсутствием таковой, т. е. точкой угрозы. Если мы рассматриваем более чем двух агентов, это определенно ограничивает анализ. В данном разделе мы попытаемся учесть возможность *частичной кооперации* и обсудим, как это может повлиять на итоговое распределение выгод от кооперации.

Дано множество агентов I, и мы определяем возможное множество полезностей для каждого потенциального подмножества кооператоров $S \subset I$. Для $S \neq I$ эти полезности интерпретируются как описание того, что может произойти, если переговоры сорвутся и члены S будут сотрудничать только между собой. С целью упрощения мы ограничимся случаем, когда полезности агентов сопоставимы (мы зафиксируем единицы измерения индивидуальных полезностей так, чтобы полезность каждого одинаково оценивалась обществом) и полезность можно свободно перераспределять между агентами. В таком случае можно представить общее количество полезности, достижимое для членов $S \subset I$, если они сотрудничают, числом $v(S)$ или множеством возможных уровней полезности $\left\{u \in \mathbb{R}^S \colon \sum_{i \in S} u_i \leq v(S)\right\}$. В кооперативной теории игр, которую мы рассматривали в приложении A к главе 18, правило, которое присваивает $v(S)$ каждому $S \subset I$, известно как *игра в характеристической форме*, подмножество $S \subset I$ обычно называют *коалицией*, а число $v(S)$ известно как *ценность* коалиции S.

Ситуация, в которой не существует выигрышей от частичной кооперации, описывается характеристической формой, где $v(S) = \sum_{i \in S} v(i)$ для каждого $S \neq I$. Если интерпретировать вектор $(v(1), \ldots, v(I))$ как точку угрозы, эта ситуация сводится к задаче торга, изученной в разделе 22.E. В рассматриваемом нами сейчас мире трансферабельной полезности эгалитарное решение задачи торга, решение Нэша и Калай — Смородинского[30] приводят к одному и тому же предложению: прибыль от кооперации должна распределяться между агентами поровну, т. е. агент $i \in I$ должен получить

$$v(i) + \frac{1}{I}\left(v(I) - \sum_{h \in I} v(h)\right).$$

На самом деле эта рекомендация вытекает из любого решения задачи торга, которое не зависит от точек отсчета на шкале полезности, симметрично и удовлетворяет свойству Парето (упражнение 22.F.1).

[30] В случае трансферабельной полезности утилитаристское решение неединственно.

Вопрос, на который мы пытаемся найти ответ в этом разделе, заключается в следующем. *Предположим, что в среде игр в характеристической форме все члены множества I решили сотрудничать и распределить $v(I)$ между собой. Как адекватно обобщить принцип деления выгод поровну на этот случай?* Разумно предположить, что решение должно отражать в некоторой степени числа $v(S)$, $S \subset I$, поскольку они несут информацию о том, насколько весом вклад одного агента по сравнению со вкладом другого.

Определение 22.F.1. При заданном множестве агентов I *кооперативное решение* $f(\cdot)$ — это правило, которое ставит в соответствие каждой игре $v(\cdot)$ в характеристической форме распределение полезности $f(v) \in \mathbb{R}^I$, допустимое для всей группы, т. е. такое, что $\sum_i f_i(v) \leq v(I)$.

Повторяя стратегию анализа из раздела 22.E, перечислим ряд свойств, которые мы хотели бы видеть у решения задачи торга. Первые три из них являются просто вариацией свойств, уже рассмотренных выше.

Определение 22.F.2. Кооперативное решение $f(\cdot)$ является *независимым от выбора точек отсчета на шкале полезности и от единообразных изменений единиц измерения полезности*, если для любых характеристических форм $v(\cdot)$ и $v'(\cdot)$, таких что $v(S) = \beta v'(S) + \sum_{i \in S} \alpha_i$ для каждого $S \subset I$ и некоторых чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_I$ и $\beta > 0$ мы имеем: $f(v) = \beta f(v') + (\alpha_1, \ldots, \alpha_I)$.

Отныне будем считать, что свойство из определения 22.F.2 выполняется. Благодаря ему мы можем, в частности, нормализовать $v(\cdot)$ к $v(i) = 0$ для всех i.

Определение 22.F.3. Кооперативное решение $f(\cdot)$ является *Паретовым*, если $\sum_i f_i(v) = v(I)$ для каждой характеристической формы $v(\cdot)$.

Определение 22.F.4. Кооперативное решение $f(\cdot)$ является *симметричным,* если выполняется следующее свойство. Предположим, что две характеристические формы, $v(\cdot)$ и $v'(\cdot)$, отличаются только тем, что в одной из них агенты переименованы $\pi: I \to I$, т. е. $v'(S) = v(\pi(S))$ для всех $S \subset I$. Тогда и решения для этих форм также отличаются только этими перестановками, т. е. $f_i(v') = f_{\pi(i)}(v)$ для всех i.

Следующее свойство, сформулированное в определении 22.F.5, подчеркивает тот факт, что мы пытаемся решить не проблему справедливого распределения общей полезности, но, скорее, более ограниченную задачу справедливого распределения *излишков,* которые можно отнести на счет кооперации между агентами с учетом реалий конкретной переговорной ситуации, заданных характеристической формой.

Определение 22.F.5. Кооперативное решение $f(\cdot)$ удовлетворяет *аксиоме о «болване»*, если для всех игр $v(\cdot)$ и всех агентов i, таких что $v(S \cup \{i\}) =$ $= v(S)$ для всех $S \subset I$, имеем: $f_i(v) = v(i)$ (= 0). Другими словами, если агент i — «*болван*» (т. е. ничего не привносит в коалицию), то он не получает никакой доли излишка.

Существует целый ряд кооперативных решений, которые удовлетворяют названным свойствам. Самым важным является *значение Шепли* [предложено в работе (Shapley, 1953)]. За примерами, обоснованием и расширенным обсуждением этой концепции мы отсылаем вас к приложению A главы 18 о кооперативной теории игр. Здесь же мы ограничимся определением.

Предположим, что мы рассматриваем произвольный порядок агентов или, формально, произвольную перестановку π вектора имен агентов $\{1, \ldots, I\}$. Тогда выражение

$$g_{v,\pi}(i) = v(\{h\colon \pi(h) \le \pi(i)\}) - v(\{h\colon \pi(h) < \pi(i)\})$$

показывает, каков вклад агента i, когда он присоединяется к группе агентов, порядковые номера которых предшествуют ему. Эту сумму они согласились бы заплатить агенту i, если бы он имел максимальную переговорную силу, т. е. если бы он мог выдвигать предложение «бери-или-уходи»[31]. Отметим, что $\sum_i g_{v,\pi}(i) = v(I)$ для всех перестановок π.

Изначально все агенты находятся в равном положении, никакого порядка среди них нет. Мы можем учесть это, предположив, что каждый агент имеет одинаковые шансы оказаться в любом положении и тем самым сделать все возможные позиции равновероятными. Или же можно с равными весами взять средний вклад агента i по всем возможным перестановкам π (а таких перестановок имеется $I!$). В этом и будет заключаться решение Шепли.

Определение 22.F.6. Решение Шепли $f_s(\cdot)$ — вектор полезностей, где

$$f_{si}(v) = \frac{1}{I\,!} \sum_{\pi} g_{v,\pi}(i) \qquad \text{для каждого } i. \tag{22.F.1}$$

Легко проверить, что $f_s(\cdot)$ удовлетворяет всем вышеперечисленным свойствам (см. упражнение 22.F.2). Для дальнейшего обсуждения решения Шепли мы отсылаем вас к упражнениям 22.F.3 и 22.F.4 (и, повторим еще раз, приложению A к главе 18). В упражнении 22.F.5 описано другое решение кооперативных игр (ядро).

Задача распределения издержек

Вопрос, который будет рассмотрен ниже, является скорее приложением, так как не имеет непосредственной концептуальной связи с предыдущим материалом. Связь состоит лишь в том, что мы вновь используем значение Шепли[32].

---

[31] Другими словами, такое предложение, которое, если с ним не согласился бы кто-нибудь из предшествующих по номерам агентов, навсегда исключило бы для агента i и любого следующего за ним по номеру возможность присоединения к коалиции тех агентов, которые предшествуют им по номеру. Чтобы проверить, что агенту i в таких обстоятельствах предложат именно $g_{v,\pi}(i)$, посчитайте, сколько получит самый последний по нумерации агент, и прибегните к обратной индукции.

[32] Вводный материал по проблеме распределения издержек и связанным с ней задачам см. в работе (Young, 1994).

Предположим, что у нас есть множество *проектов I* и политическое решение об их осуществлении уже принято. По какой-либо причине (например, правилам учета или финансирования) общие издержки $C(I)$ необходимо полностью распределить между различными проектами, т. е. мы должны специфицировать $(c_1, \ldots, c_I)$ так, чтобы $\sum_i c_i = C(I)$. Какие разумные *правила распределения издержек* можно задать? Это задача распределения издержек.

В первую очередь следует подчеркнуть, что с точки зрения первого наилучшего правила распределения издержек *не должны* использоваться для собственно выделения финансирования, т. е. для решения, какой из проектов осуществлять. В разделе 16.G мы, несколько нестрого, показали, что правильные эффективные цены на факторы производства (мы можем думать о проектах как о факторах производства для производственной функции общественного благосостояния) необязательно должны в точности покрывать общие издержки (см. упражнения 22.F.6 и 22.F.7). Поскольку мы хотим избежать соблазна использовать правила распределения издержек в этом качестве, будем настаивать на том, что множество проектов, которые будут реализованы, задано экзогенно.

Альтернативно можно рассмотреть ситуацию, когда ограничение безубыточности проектов сообщает задаче благосостояния характер поиска второго наилучшего. То есть мы могли бы попытаться максимизировать общественное благосостояние, при условии что цены факторов (т. е. объемы финансирования проектов) полностью покрывают затраты на эти факторы. Этот подход был использован в работе (Boiteux, 1956) в контексте теории регулируемой фирмы, и решение было близко связано с ценообразованием Рамсея (см. пример 22.B.2 и упражнение 22.F.6).

Однако в любой задаче, связанной с теорией благосостояния, нам понадобится информация об индивидуальных предпочтениях. Если она недоступна или не может быть использована, задача останется нерешенной. В этом случае рекомендуется действовать так: пусть у нас есть информация об издержках по каждому подмножеству проектов (это далеко не безобидное требование); т. е. мы знаем $C(T)$ для каждого $T \subset I$. Тогда $C(\cdot)$ формально является кооперативной игрой в характеристической форме, и мы могли бы прибегнуть к значению Шепли как к способу разделить $C(I)$ между различными проектами. Возможно, нашу мысль пояснит следующий пример.

Пример 22.F.1. Это излюбленный пример ученых. Профессор экономики из США планирует большое путешествие в Европу с посещением трех университетов, один из которых находится в Великобритании (B), один — в Испании (S) и последний — в Германии (G). Общая стоимость авиаперелета составляет 1600 долларов. Как распределить эту сумму между тремя университетами? Предположим, что в ходе исследования выяснилось, что $C(B) = C(S) = C(G) = 800$, $C(BS) = C(BG) = 1000$ и $C(SG) = 1400$. Расчет значений Шепли (вам предлагается провести его самостоятельно) дает следующий результат: $c_B = 400$ и $c_S = c_G = 600$. Такое разбиение, похоже, действительно неплохо отражает ту сравнительную простоту, с которой можно заехать в Великобританию, если ученый уже отправляется в одну из других стран. ■

Литература

d'Aspremont, C., and L. Gevers (1977). Equity and the informational basis of collective choice. *Review of Economics Studies* **44**: 199–209.

Atkinson, A. (1973). How progressive should income-tax be? In *Economic Justice, Selected Readings*, edited by E. Phelps. L.: Penguin Books.

Atkinson, A., and J. Stiglitz (1980). *Lectures on Public Economics*. New York: McGraw-Hill.

Bergson, A. (1938). A reformulation of certain aspects of welfare economics. *Quarterly Journal of Economics* **52**: 310–34.

Boiteux, M. (1956). Sur la gestion des monopoles publiques astreints à l'équilibre budgétaire. *Econometrica* **24**: 22–40. [Translated in *Journal of Economic Theory* (1991) **3**: 219–40.]

Harsanyi, J. (1995). Cardinal welfare, individual ethics, and interpersonal comparability of utility. *Journal of Political Economy* **61**: 309–21. [Also in Phelps (1973).]

Guesnerie, R. (1995). *A Contribution to the Pure Theory of Taxation*, Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.

Kalai, E., and M. Smorodinsky (1975). Other solutions to Nash's bargaining problem. *Econometrica* **43**: 513–18.

Laffont, J.-J. (1988). *Fundamentals of Public Economics*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

Lipsey, R.C., and K. Lancaster (1956). The general theory of the second best. *Review of Economic Studies* **24**: 11–32.

Lensberg, T. (1987). Stability and collective rationality. *Econometrica* **55**:935–62.

Maskin, E. (1978). A theorem on utilitarianism. *Review of Economic Studies* **42**: 93–96.

Moulin, H. (1988). *Axioms of Cooperative Decision Making*. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.

Nash, J.F. (1950). The bargaining problem. *Econometrica* **28**: 155–62.

Phelps, E., ed. (1973). *Economic Justice, Selected Reading*. London: Penguin Books.

Ramsey, F. (1927). A contribution to the theory of taxation. *Economic Journal* **37**: 47–61.

Rawls, J. (1971). *A Theory of Justice*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Roberts, K. (1980). Possibility theorems with interpersonally comparable welfare levels. *Review of Economic Studies* **47**: 409–20.

Roth, A. (1979). *Axiomatic Models of Bargaining*. N. Y.: Springer-Verlag.

Samuelson, P. (1947). *Foundations of Economic Analysis*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Sen, A. (1977). On weights and measures: informational constraints in social welfare analysis. *Econometrica* **45**: 1539–72.

Shapley, L. (1953). A value for *n*-person games. In *Contributions to the Theory of Games II. Annals of Mathematics Studies*, 28, edited by H. Kuhn, and A. Tucker. Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Starrett, D. A. (1988). *Foundations of Public Economics*. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.

Thomson, W., and T. Lensberg (1992). *The Theory of Bargaining with a Variable Number of Agents*. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.

Thomson, W. (1995). Cooperative models of bargaining. In *Handbook of Game Theory*, Vol. II, edited by R. Aumann, and S. Hart. Amsterdam: North-Holland.

Young, H.P. (1994). *Equity. In Theory and Practice*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Упражнения

22.B.1^{A}. Приведите достаточные условия выпуклости первого наилучшего множества возможных уровней полезности в контексте экономик обмена из примера 22.B.1.

22.B.2[A]. Выведите условия первого порядка, записанные в примере 22.B.2.

22.B.3[A]. Выведите условия первого порядка (22.B.2) для примера 22.B.3.

22.B.4[B]. Покажите настолько явно, насколько можете, что множество возможных уровней полезности из примера 22.B.4 может быть невыпуклым.

22.C.1[A]. Предположим, что множество возможных уровней полезности $U \subset \mathbb{R}^I$ симметрично и выпукло. Покажите, что общественный оптимум возрастающей, симметричной, строго вогнутой функции общественного благосостояния $W(\cdot)$ назначает каждому агенту один и тот же уровень полезности. [Замечание: множество U симметрично, если из $u \in U$ следует, что $u' \in U$ для любого u', полученного из u перестановкой его элементов.] Заметьте, что мы приходим к тому же заключению, если $W(\cdot)$ является лишь вогнутой, как в утилитаристском случае, но U при этом должно быть строго выпуклым.

22.C.2[A]. Предположим, что агент принимает решение *ex ante* или находясь *за покровом неведения,* т. е. до реализации состояния мира, которое определит, в каком из I возможных положений он окажется. Для каждого положения i существует конечное множество возможных исходов X_i. Обозначим $X = X_1 \times \ldots \times X_I$.

a) Обратитесь к теории полезности, зависящей от состояния, представленной в разделе 6.E, чтобы обосновать функцию полезности на X, имеющую вид

$$U(x_1, \ldots, x_I) = u_1(x_1) + \ldots + u_I(x_I).$$

Интерпретируйте вид этой функции и опишите, каким образом такая функция полезности скажется на форме чисто утилитаристской функции общественного благосостояния, если мы захотим использовать ее.

b) Пусть $X_1 = \ldots = X_I$ и отношение предпочтения на X, представимое функцией полезности из пункта (a), является симметричным. Как это скажется на форме функции полезности планировщика? Обсудите и интерпретируйте.

22.C.3[B]. Дано N финальных общественных исходов. Рассмотрим множество альтернатив X, представляющее собой множество лотерей на этих исходах. Альтернатива может быть представлена в виде перечня вероятностей, соответствующих каждому финальному исходу, т. е. $p = (p_1, \ldots, p_N)$, где $p_n \geq 0$ для каждого n и $p_1 + \ldots + p_N = 1$. Предположим, что задано отношение общественного предпочтения $\succsim$ на X, это отношение непрерывно и соответствует аксиоме независимости. Таким образом, оно может быть представлено функцией ожидаемой полезности

$$U(p) = u_1 p_1 + \ldots + u_N p_N.$$

С этого момента мы рассматриваем функцию общественной полезности $U(\cdot)$, определенную на X, как заданную.

a) Предположим, что существует два финальных исхода, определяющиеся тем, кто из двух индивидов получит некий неделимый объект. Пусть общественные предпочтения симметричны в том смысле, что лотерея, с определенностью отдающая объект индивиду 1, и лотерея, с определенностью отдающая его индивиду 2, равнозначны для общества. Покажите, что тогда все лотереи должны быть эквивалентны с общественной точки зрения. Обсудите и проинтерпретируйте это заключение. На ваш взгляд, насколько оно реалистично? Как бы вы поступили, если бы хотели избежать его? Что этот пример позволяет сказать о применении аксиомы независимости к поиску общественных решений?

Представим теперь, что есть I агентов и что помимо функции общественной полезности $U(\cdot)$ задаются I индивидуальных отношений предпочтения $\succsim_i$, определенные на том же множестве лотерей X. Предположим, что они также представимы функциями ожидаемой полезности вида

$$U_i(p) = u_{1i}p_1 + \ldots + u_{Ni}p_N \text{ для } i = 1, \ldots, I.$$

Мы говорим, что функция общественной полезности $U(\cdot)$ является *Паретовой*, если неравенство $U(p) > U(p')$ выполняется всякий раз, когда $U_i(\text{p}) > U_i(p')$ для каждого i.

b) Рассмотрите случай с $N = 3$ и $I = 2$ и покажите на двумерном симплексе лотерей, как карта кривых безразличия функций полезности двух агентов и функции общественной полезности должны взаимно располагаться, если функция общественной полезности удовлетворяет свойству Парето.

c) Проиллюстрируйте случай, когда условие Парето однозначно задает карту общественных кривых безразличия (вспомните, что для общественных предпочтений мы считаем, что аксиома независимости всегда выполнена!). Покажите, что в общем случае условие Парето не может однозначно определить карту общественных кривых безразличия. Приведите пример, в котором любая функция общественной полезности является Паретовой.

d) Покажите (можно ограничиться случаем $N = 3$ и $I = 2$), что если функция общественного благосостояния $U(p)$ является Паретовой, то она может быть представлена в следующей форме:

$$U(p) = \beta_1 U_1(p) + \ldots + \beta_I U_I(p),$$

где $\beta_i \geq 0$ для каждого i и $\beta_i \neq 0$ для некоторых i. Что этот тезис говорит о перспективах использования чисто утилитаристской функции общественной полезности? Дайте интерпретацию весам β_i, а также тому факту, что они не должны быть одинаковыми для всех индивидов.

22.C.4$^{\mathrm{A}}$. В сноске 11 этой главы, когда обсуждался вопрос о роулзианской ФОБ, упоминался *лексиминный* порядок, или отношение предпочтения, на $\mathbb{R}^I$. Формально он определяется так. Пусть задан вектор $u = (u_1, \ldots, u_I)$, и пусть вектор $u^r \in \mathbb{R}^I$ будет *неубывающей перестановкой* вектора u. То есть элементы u^r расположены в порядке неубывания и их числовые значения (включая повторяющиеся) являются теми же, что и для вектора u. Будем говорить, что вектор u не хуже вектора $\hat{u}$ с точки зрения лексиминного порядка, если u^r не хуже $\hat{u}^r$ с точки зрения лексикографического порядка, описанного в примере 3.C.1.

a) Интерпретируйте определение лексимина как уточнение роулзианского отношения предпочтения.

b) Покажите, что лексиминный порядок не может быть представлен функцией полезности. Достаточно показать это для $I = 2$.

c) (*более сложное задание*). Покажите, что общественный оптимум лексиминного порядка является Парето-оптимумом. Ограничьтесь случаем $I = 3$.

22.C.5$^{\mathrm{B}}$. Рассмотрите семейство функций общественного благосостояния с постоянной эластичностью (пример 22.C.4). Покажите, что $W_\rho(u) \to \min\{u_1, \ldots, u_I\}$ при $\rho \to \infty$.

22.C.6$^{\mathrm{A}}$. Пусть U и U' являются множествами возможных уровней полезности, и пусть $\bar{u} \in U$ и $\bar{u}' \in U'$ являются Парето-оптимальными исходами для этих множеств. Графически покажите, что:

a) U' может проходить сильный компенсационный тест относительно U, и вместе с тем с точки зрения чисто утилитаристской функции общественного благосостояния исход в U' будет хуже, чем исход в U;

b) если множества возможных уровней полезности получены для квазилинейной экономики и U' проходит слабый компенсационный тест относительно U, оно проходит и сильный компенсационный тест, и, более того, исход в U' будет утилитаристским улучшением исхода в U. Является ли этот вывод правомерным, если общественное благосостояние оценивается неутилитаристской функцией общественного благосостояния?

22.C.7$^{\mathrm{B}}$. Приведите явный пример двух экономик, представимых ящиком Эджворта, различающихся только распределением первоначальных запасов, таких что множество возможных уровней полезности каждой проходит слабый компенсационный тест относительно множества возможных уровней полезности другой, когда вектор полезностей у последней соответствует одному из ее конкурентных равновесий.

22.C.8$^{\mathrm{A}}$. Предположим, имеется два множества возможных уровней полезности, U и U', с соответствующими исходами $u \in U$ и $u' \in U'$. Будем говорить, что (U', u') проходит *компенсационный тест Калдора* относительно (U, u), если U' проходит слабый компенсационный тест относительно (U, u), но U *не проходит* слабый компенсационный тест относительно (U', u').

a) Для $I = 2$ представить графически ситуацию, в которой сравнение по Калдору возможно, и ситуацию, в которой оно невозможно.

b) Покажите, что сравнение по Калдору асимметрично. Определите, что означает «асимметрично».

c) Покажите, что сравнение по Калдору может быть нетранзитивным.

22.D.1$^{\mathrm{B}}$. В этом упражнении мы проверим необходимость предпосылок утверждения 22.D.1.

a) Предположим, что имеются три агента и только две альтернативы, т. е. $X = \{x, y\}$. Функционал общественного благосостояния задается следующим образом:

$$xF(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)y \text{ тогда и только тогда, когда } \tilde{u}_i(x) \geq \tilde{u}_i(y) \text{ для каждого } i$$

и

$$yF(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)x \text{ тогда и только тогда, когда } \tilde{u}_i(y) \geq \tilde{u}_i(x) \text{ хотя бы для одного } i.$$

Проверьте, что такое отношение общественных предпочтений всегда является полным, что функционал общественного благосостояния не может быть представлен с помощью функции общественного благосостояния и что из всех предпосылок утверждения 22.D.1 нарушена только предпосылка о количестве альтернатив.

b) Теперь пусть имеются три агента и три альтернативы, т. е. $X = \{x, y, z\}$. Функционал общественного благосостояния задан следующим образом:

$$xF_p(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I)yF_p(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I)z$$

для любого $(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I) \in \mathscr{U}^I$. Покажите, что и этот функционал общественного благосостояния не может быть представлен с помощью функции общественного благосостояния и что из всех предпосылок утверждения 22.D.1 не выполняется только свойство Парето.

c) Приведите пример, в котором из всех предпосылок утверждения 22.D.1 не выполняется только попарная независимость.

22.D.2$^{\mathrm{A}}$. Выполните проверку, упомянутую во втором параграфе доказательства утверждения 22.D.1.

22.D.3$^{\mathrm{A}}$. См. в тексте.

22.D.4$^{\mathrm{A}}$. Функционал общественного благосостояния F является *лексически диктаторским,* если существует ряд $n > 0$ агентов $h_1, \ldots, h_n$, таких что строгое предпочтение h_1 определяет общественный выбор, строгое предпочтение h_2 определяет общественный выбор среди тех альтернатив, которые безразличны для h_1, и т. д.

a) Покажите, что если F является *лексически диктаторским*, то F обладает свойством Парето, свойством попарной независимости и не допускает межличностного сравнения полезностей.

b) При каких условиях лексически диктаторский функционал общественного благосостояния может порождаться функцией общественного благосостояния?

c) Покажите, что если диктаторский функционал общественного благосостояния порождается функцией общественного благосостояния $W(u) = \sum_i b_i u_i$, то $b_i = 0$ для каждого i, не являющегося диктатором.

22.D.5$^{\mathrm{C}}$. Завершите доказательство теоремы о невозможности Эрроу по схеме, предложенной в последнем параграфе, до мелкого шрифта в конце раздела 22.D. (Считайте, что утверждение 22.D.3 выполняется при ослабленной предпосылке о том, что F порождается отношением общественного предпочтения на $\mathbb{R}^I$.)

22.D.6$^{\mathrm{B}}$. Это упражнение касается функций общественного благосостояния, удовлетворяющих выражению (22.D.1).

a) Покажите, что несимметричная утилитаристская функция $W(u) = \sum_i b_i u_i$ может быть записана в форме (22.D.1).

b) Покажите, что если $W(\cdot)$ симметрична и $g(0) = 0$, то $g(\cdot) \geq 0$.

c) Покажите, что симметричная роулзианская функция общественного благосостояния $W(u) = \min\{u_1, \ldots, u_I\}$ может быть записана в форме (22.D.1). Можно ли сделать то же самое с несимметричными роулзианскими функциями общественного благосостояния? [*Подсказка*: проверьте условие инвариантности к единообразным изменениям точки отсчета.]

d) Приведите примеры других функций общественного благосостояния, удовлетворяющих условию (22.D.1), в частности функций, имеющих $g(\cdot) \geq 0$ и занимающих промежуточное положение между утилитаристской и роулзианской. Проинтерпретируйте приведенные примеры.

e) Приведите аргументы в пользу того, что если в (22.D.1) функция $g(\cdot)$ дифференцируема и однородна первой степени, то она должна быть линейной (и, таким образом, мы возвращаемся к утилитаристскому случаю).

22.D.7$^{\mathrm{B}}$. Рассмотрите семейство функций общественного благосостояния с постоянной эластичностью, изученное в примере 22.C.4.

a) Покажите, что функционалы общественного благосостояния, полученные из функций общественного благосостояния этого семейства, инвариантны к единообразным изменениям единиц измерения.

b) Покажите, что единственными членами семейства, инвариантными к единообразным изменениям точек отсчета и потому допускающими представление в форме (22.D.1), являются чисто утилитаристская ($\rho = 0$) и роулзианская ($\rho = \infty$) функции.

22.D.8$^{\text{B}}$. Это упражнение на свойство инвариантности к единообразным ординалистским преобразованиям.

a) Покажите, что симметричная роулзианская функция общественного благосостояния удовлетворяет этому свойству.

b) Покажите, что антироулзианская функция $W(u) = \max\{u_1, \dots, u_I\}$ также ему удовлетворяет.

c) Покажите, что этому свойству удовлетворяют диктаторские функционалы общественного благосостояния.

d) (*более сложное задание*). Пусть $I = 2$ и $W(u) = W(u')$ для двух векторов $u, u' \in \mathbb{R}^2$, таких что $u_1' < u_1 < u_2 < u_2'$. Пусть $W(\cdot)$ — возрастающая функция. Покажите, что порожденный ею функционал общественного благосостояния не может быть инвариантен к идентичным ординалистским преобразованиям. Исходя из этого неформально покажите (можно сделать это графически), что для $I = 2$ непрерывная, возрастающая функция общественного благосостояния, которая также инвариантна к идентичным ординалистским преобразованиям, обязана быть либо диктаторской, либо роулзианской, либо антироулзианской.

22.E.1$^{\text{A}}$. Проверьте, что решения задачи торга в примерах 22.E.1–22.E.4 независимы от выбора точек отсчета на шкалах измерения полезности, обладают свойством Парето, симметричны и индивидуально рациональны. Достаточно выполнить проверку для $I = 2$.

22.E.2$^{\text{A}}$. Сформулируйте несимметричные версии четырех решений задач торга, изученных в разделе 22.E (эгалитарного, утилитаристского, решения Нэша и решения Калай — Смородинского). Обоснуйте их.

22.E.3$^{\text{B}}$. Это упражнение на решение Нэша.

a) Проверьте, что для $I = 2$ $f_n(U)$ является граничной точкой U, через которую можно провести касательную, обладающую тем свойством, что ее средняя точка в положительном ортанте в точности совпадает с данной граничной точкой $f_n(U)$.

b) Проверьте, что если $U \subset \mathbb{R}^I$ является задачей торга, то можно изменить масштабы измерения индивидуальных полезностей таким образом, чтобы решение Нэша становилось одновременно эгалитарным и утилитаристским.

22.E.4$^{\text{A}}$. Проверьте, что решение Калай — Смородинского удовлетворяет свойству независимости от выбора единиц измерения полезности, но не свойству независимости от посторонних альтернатив. Можно ограничиться случаем I = 2.

22.E.5$^{\text{B}}$. Это упражнение на свойство монотонности.

a) Покажите, что эгалитарное решение является единственным решением задачи торга, которое не зависит от выбора точек отсчета на шкалах измерения полезности, удовлетворяет свойству Парето, симметрично и монотонно. [*Подсказка*:

сначала рассмотрите семейство симметричных множеств возможных уровней полезности с линейными границами. Затем отметьте, что для любых двух таких множеств U, U' всегда выполняется $U \cap U' \subset U$ и $U \cap U' \subset U'$.]

b) (*более сложное задание*). Предположим, что $f(\cdot)$ является решением задачи торга, которое не зависит от выбора точек отсчета на шкалах измерения полезности, является Парето-эффективным и строго монотонным [если $U \subset U'$, то $f(U) \leq f(U')$ и, кроме того, если $f(U)$ является внутренней точкой U', то $f(U) \ll f(U')$]. Покажите, что существует кривая в $\mathbb{R}^I$, начинающаяся в начале координат и строго возрастающая, такая что для каждой U точка $f(U)$ является точкой пересечения границы U с этой кривой. Можно ограничиться случаем $I = 2$.

22.E.6$^{\mathbf{C}}$. Пусть $I = 2$. Решение задачи торга $f(\cdot)$ является *частично монотонным,* если для $U \subset U'$ и $u^i(U) = u^i(U')$, т. е. U' расширяет U только для агентов $j \neq i$, имеем: $f_j(U') \geq f_j(\mathrm{U})$ для $j \neq i$. Покажите, что решение Калай — Смородинского отличается следующими свойствами: независимость от выбора точек отсчета и единиц измерения полезности, свойство Парето, симметричность и частичная монотонность. [*Подсказка:* используйте множества U, такие что $U' \subset U$ и $u^1(U) = u^1(U')$, $u^2(U) = u^2(U')$.]

22.E.7$^{\mathbf{A}}$. Рассмотрим семейство решений задачи торга $f^I(\cdot)$, такое что для каждого множества агентов I $f^I(\cdot)$ не зависит от выбора точек отсчета на шкалах измерения полезности и генерируется путем максимизации функции общественного благосостояния $\sum_i g(u_i)$ на нормализованных задачах торга $U \subset \mathbb{R}^I$, где $g(\cdot)$ является возрастающей, строго вогнутой и независимой от конкретного множества I. Покажите, что решения, принадлежащие семейству f^I, являются согласованными.

22.E.8$^{\mathbf{C}}$. Покажите на примере, что решение Калай — Смородинского не является согласованным. Достаточно рассмотреть трех агентов и подгруппы из двух агентов.

22.E.9$^{\mathbf{A}}$. Это упражнение направлено на то, чтобы показать независимость предпосылок утверждения 22.E.1 друг от друга. Для этого приведите пять примеров, таких чтобы для каждой из пяти предпосылок утверждения 22.E.1 нашелся пример, который бы нарушал эту предпосылку, но удовлетворял остальным четырем.

22.E.10$^{\mathbf{A}}$. Приведите пример утилитаристского решения задачи торга (пример 22.E.2), который нарушает свойство независимости от посторонних альтернатив. [*Подсказка*: достаточно рассмотреть $I = 2$. Нарушение должно касаться множеств U, которые являются выпуклыми, но не строго выпуклыми].

22.E.11$^{\mathbf{C}}$. Вернитесь к модели торга Рубинштейна на бесконечном временном горизонте, которая обсуждалась в приложении A к главе 9 (в частности, в примере 9.AA.2). Модифицируем ее следующим образом: пусть оба агента являются рискофобами по отношению к получаемым суммам денег. То есть каждый имеет возрастающую, вогнутую, дифференцируемую функцию полезности $u_i(m_i)$ на неотрицательных суммах получаемых денег. Дисконт-фактор $\delta < 1$ одинаков для обоих. Также $u_I(0) = 0$. Общее количество денег равно m.

a) Запишите уравнения для совершенного в подыграх равновесия по Нэшу (SPNE) *в стационарных стратегиях*. Покажите, что существует единственная комбинация полезностей, которая может быть получена как результат выигрышей в SPNE в стационарных стратегиях.

b) Рассмотрим множество возможных уровней полезности

$$U = \left\{(u_1(m_1),\ u_2(m_2)) \in \mathbb{R}^2 : m_1 + m_2 = m\right\} - \mathbb{R}^2_+.$$

Покажите, что если δ близок к единице, то выигрыши в SPNE в стационарных стратегиях почти равны выигрышам, соответствующим решению Нэша для задачи торга.

c) (*более сложное задание*). Докажите, что любую комбинацию равновесных в SPNE платежей можно получить как равновесную в SPNE в стационарных стратегиях. То есть утверждение о единственности в примере 9.AA.2 распространяется на случай, в котором агенты имеют строго вогнутые, возможно различные, функции полезности денег.

22.F.1^{A}. Покажите, что в случае трансферабельной полезности любое симметричное, Парето-оптимальное решение задачи торга, инвариантное к независимым изменениям точек отсчета на шкале полезности, делит выигрыш от кооперации поровну между агентами.

22.F.2^{A}. Покажите, что представленное в разделе 22.F значение Шепли в качестве решения кооперативных игр характеризуется следующими свойствами: инвариантностью к независимым изменениям точек отсчета на шкале полезности, инвариантностью к единообразным изменениям единиц измерения полезности, Парето-эффективностью, симметрией и аксиомой о «болване».

22.F.3^{A}. Предположим, что для данного множества агентов I мы рассматриваем две характеристические формы, v и v', и изучаем их сумму $v + v'$; т. е. $v + v'$ — характеристическая форма, где $(v + v')(S) = v(S) + v'(S)$ для каждого $S \subset I$.

a) Проверьте, что значение Шепли является *линейным* в характеристической форме, т. е. $f_{si}(v + v') = f_{si}(v) + f_{si}(v')$ для каждого v, v' и i.

b) Проинтерпретируйте свойство линейности как постулат о том, что, если ситуации торга выбираются случайно, агентам безразлично, когда именно разрешается неопределенность.

22.F.4$^{\mathrm{C}}$**.** Свойство линейности в предыдущем упражнении может быть переформулировано, возможно, в более интуитивно понятной форме. Говорят, что характеристическая форма $v(\cdot)$ является *игрой с множеством ключевых игроков*, если для некоторого $T \subset I$ выполняется $v(S) = v(T)$, если $T \subset S$, и $v(S) = 0$ в противном случае (т. е. ситуациям торга в разделе 22.E соответствует $T = I$).

a) Покажите, что свойства независимости от выбора точек отсчета на шкалах измерения полезности, инвариантности к единообразным изменениям единиц измерения полезности, Парето-эффективности, симметричности и аксиома о «болване» подразумевают, что для игры с множеством ключевых игроков $v(\cdot)$ любое кооперативное решение $f(\cdot)$ присваивает игрокам полезности $f_i(v) = (1/T)v(I)$, если $i \in T$, и $f_i(v) = 0$ в противном случае.

b) Кооперативное решение $f(\cdot)$ называют *слабо линейным*, если для любых v и v', отличающихся только игрой с множеством ключевых игроков [т. е. существуют $T \subset I$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, такие что $v'(S) = v(S) + \alpha$, если $T \subset S$, и $v'(S) = v(S)$ в других случаях], имеем: $f_i(v') = f_i(v) + \alpha/T$, если $i \in T$, и $f_i(v') = f_i(v)$ в противном случае. Покажите, что если помимо свойств, перечисленных в (а), кооперативное решение $f(\cdot)$ является слабо линейным, то оно полностью линейно, т. е. $f(v + v') = f(v) + f(v')$ для любых двух характеристических форм v и v'.

c) Покажите, что значение Шепли является единственным кооперативным решением, которое удовлетворяет следующим свойствам: независимости от выбора точек отсчета на шкалах измерения полезности, инвариантности к единообразным изменениям единиц измерения полезности, Парето-эффективности, симметрии, аксиоме о «болване» и линейности.

22.F.5$^{\mathrm{C}}$**.** В этом упражнении мы опишем другое кооперативное решение для игры в характеристической форме: *n-ядро*. Для простоты рассмотрим частный случай с $I = 3$, $v(1) = v(2) = v(3) = 0$ и $0 \leq v(S) \leq v(I)$ для любой группы S из двух агентов.

Для вектора полезностей $u = (u_1, u_2, u_3) \geq 0$ и группы агентов $S \subset I$ назовем *эксцессом S* при исходе u величину $e(u,\ S) = v(S) - \sum_{i \in S} u_i$.

Назовем *первым наибольшим эксцессом* величину $m_1(u) = \max\{e(u, S)\colon 1 \# S < 3\}$. Выберем коалицию с двумя агентами S, такую что $m_1(u) = e(u, S)$. Назовем *вторым наибольшим эксцессом* величину $m_2(u) = \max\{e(u, S')\colon 1 \# S' < 3;\ S' \neq S\}$.

Будем говорить, что точно допустимый [т. е. $\sum_{i \in I} u_i = v(I)$] профиль полезностей $u = (u_1, u_2, u_3) \geq 0$ находится в n-ядре, если для любого другого такого профиля u' справедливо либо $m_1(u) < m_1(u')$, либо $m_1(u) = m_1(u')$ и $m_2(u) \leq m_2(u')$.

a) Покажите, что если $u = (u_1, u_2, u_3)$ лежит в n-ядре, то либо все три эксцесса для коалиций из двух агентов одинаковы, либо два эксцесса одинаковы, а третий больше.

b) Покажите, что в n-ядре будет содержаться один и только один профиль полезностей. [*Подсказка*: вначале покажите, что существует коалиция S из двух агентов, такая что $e(u, S) = m_1(u)$ для каждого профиля в n-ядре.] Отныне мы будем называть этот профиль *решением n-ядра*.

c) Покажите, что решение n-ядра симметрично.

d) Предположим, что агент 1 — «болван». Тогда в решении n-ядра $u_1 = 0$.

e) Предположим, что $\frac{1}{2}v(I) \le v(S)$ для любой коалиции S из двух агентов. Покажите тогда, что для профиля, являющегося решением n-ядра, все три эксцесса для коалиций из двух агентов равны.

f) Рассчитайте и сравните значение Шепли и n-ядро для следующей характеристической формы: $v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = 4$, $v(\{2, 3\}) = 5$, $v(I) = 6$.

g) Покажите, что если ядро непусто (см. приложение A к главе 18 для определения ядра в данном контексте), то профиль полезности, соответствующий n-ядру, принадлежит ядру.

22.F.6^B^. Рассмотрите регулируемую фирму, производящую продукцию при функции издержек $c(q)$. Предположим, что экономика квазилинейна и потребительский излишек от выпуска q равен $S(q)$.

a) Предположим, что $c(q)$ строго вогнута (т. е. отдача от масштаба строго возрастает). Покажите, что в первом наилучшем цена не покроет издержек фирмы. Теперь, наоборот, пусть для любых значений q цена $p(q)$ определяется так, чтобы в точности покрывать средние издержки, $p(q) = c(q)/q$. Покажите, что, если q определяется из уравнения $p(q) = S'(q)$, первый наилучший оптимум не достигается. Приведите графическую иллюстрацию.

b) Пусть объем производства q определяется с учетом следующего ограничения: при $p = S'(q)$ должно выполняться $pq \ge c(q)$. Решите эту задачу поиска второго наилучшего и проиллюстрируйте решение графически.

c) Интерпретируйте единицы выпуска как «проекты». Каково будет распределение издержек между единицами выпуска согласно значениям Шепли для любого решения о выпуске q?

22.F.7^C^. Это упражнение подобно упражнению 22.F.6, за исключением того что теперь фирма производит два товара с различными функциями издержек: $c_1(q_1)$, $c_2(q_2)$. Излишек $S_1(q_1) + S_2(q_2)$ также является сепарабельным.

a) Задача на поиск второго наилучшего [впервые рассмотренная в работе (Boiteux, 1956)] теперь становится интереснее, чем в упражнении 22.F.6. Предположим, что выпуски q_1, q_2 должны выбираться так, чтобы при $p_1 = S'(q_1)$ и $p_2 = S'(q_2)$ иметь $p_1q_1 + p_2q_2 \ge c_1(q_1) + c_2(q_2)$ (иными словами, при выбранных ценах спрос должен быть удовлетворен, а издержки покрыты). Выведите условия первого порядка для этой задачи. Сделайте их насколько возможно близкими к формуле Рамсея из примера 22.B.2.

b) (*более сложное задание*). Интерпретируйте единицы выпуска как «проекты». Пусть единицы выпуска очень малы, настолько, что любое производственное решение $(q_1, q_2) \gg 0$ соответствует реализации множества проектов каждого типа. Возможно ли приблизительно угадать для заданных (q_1, q_2), как будут распределяться издержки сообразно значению Шепли? [*Подсказка*: для большинства иерархий на множестве проектов любому конкретному проекту будет предшествовать практически совершенная выборка всех проектов.]

c) Предположим, что для производственной комбинации $(\bar{q}_1, \bar{q}_2)$ распределение издержек, определенное значением Шепли, присваивает каждому проекту первого и второго типа издержки, равные c_1 и c_2 соответственно (отметим, что издержки, присваиваемые «проектам» одного и того же типа, совпадают). Предположим также, что $c_1 = \partial S_1(\bar{q}_1)/\partial q_1$ и $c_2 = \partial S_2(\bar{q}_2)/\partial q_2$. Дайте интерпретацию такому распределению издержек. Покажите, что в общем случае эта производственная комбинация не будет соответствовать ни первому, ни второму наилучшему.

Глава 23. Стимулы и дизайн механизмов

23.A. Введение

В главе 21 мы обсудили, как индивидуальные предпочтения могут быть агрегированы в общественные, а в конечном счете и в коллективный выбор. Однако важной особенностью большинства ситуаций, в которых делается коллективный выбор, является тот факт, что истинные предпочтения ненаблюдаемы. В результате приходится полагаться на информацию, так или иначе выявляемую индивидами.

В этой главе мы покажем, как можно выявить такую информацию и в какой степени проблема ее выявления ограничивает общественный выбор в зависимости от индивидуальных предпочтений. Эта проблема известна как *задача дизайна механизмов*.

Дизайн механизмов имеет много приложений в экономической науке. Примером может служить организация процедур голосования или выбора проектов для государственного финансирования, составление контрактов между сторонами, имеющими частную информацию, создание экологических норм[1].

Изложение в этой главе устроено следующим образом. В разделе 23.B мы представим задачу дизайна механизма. Вначале мы покажем, какие сложности могут возникнуть в связи с необходимостью выявлять частную информацию, затем дадим определения и обсудим концепции *функции общественного выбора* (уже встречавшейся в разделе 21.E), *эффективности ex post*, *механизмов прямого выявления* и *реализации в правдивых стратегиях*.

В разделе 23.C мы определим, при каких обстоятельствах функция общественного выбора может быть реализована *в доминирующих стратегиях* при условии, что предпочтения участников ненаблюдаемы. Сначала мы сформулируем и докажем *принцип выявления* — результат, который позволяет ограничиться рассмотрением только прямых механизмов, побуждающих участников честно сообщать о своих предпочтениях. Вооружившись этим фактом, мы затем рассмотрим ограничения, которые проблема выявления информации накладывает на множество реализуемых функций

---

[1] Примеры механизмов, позволяющих выявить частную информацию, уже встречались нам в разделах 14.C и 11.E.

общественного выбора. Мы представим теорему Гиббарда — Саттертуэйта — важный и очень неприятный результат для случаев, когда индивидуальные предпочтения могут принимать произвольные формы. В конце раздела мы рассмотрим особый случай *квазилинейной экономики*, подробно обсудив *механизмы Гровса — Кларка*.

В разделе 23.D мы рассмотрим реализацию в *равновесиях Байеса — Нэша*. Сначала мы обсудим механизм ожидаемого эффекта экстерналий в качестве примера того, как эта более слабая концепция равновесия может позволить реализовать более широкий класс функций общественного выбора, чем это возможно в доминирующих стратегиях. Затем мы охарактеризуем функции, реализуемые по Байесу, в случае квазилинейных предпочтений, линейных по типу агента. В качестве приложения этого результата мы докажем *теорему об эквивалентности дохода* от аукционов.

В разделе 23.E будет рассмотрена возможность добровольного участия в механизме. В этом случае должны быть выполнены *ограничения участия*, и мы изучим, как это сказывается на множестве реализуемых функций общественного выбора. Здесь мы докажем *теорему Майерсона — Саттертуэйта*, которая при очень широких предпосылках показывает невозможность эффективности ex post в ситуациях двустороннего добровольного торга, когда у агентов есть частная информация.

В разделе 23.F мы обсудим сравнение механизмов с точки зрения благосостояния, определив понятия *эффективности ex ante* и *эффективности interim*. Также мы представим несколько примеров поиска оптимальных байесовских механизмов.

Приложения A и B посвящены, во-первых, обсуждению случая множественности равновесий, а во-вторых, случаю, когда агенты знают типы друг друга, а создатель механизма их не знает (так называемая *среда с полной информацией*).

Ссылки на источники для углубленного изучения материала приведены в начале некоторых разделов. Было бы, однако, некорректно не упомянуть здесь две основополагающие работы: Миррлиса (Mirrlees, 1971) и Гурвича (Hurwicz, 1972).

23.B. Задача дизайна механизма

В этом разделе мы представим введение в задачу создания механизма, которую будем детально анализировать до конца главы.

Для начала рассмотрим ситуацию, в которой имеется I агентов (пронумерованных как $i = 1, \ldots, I$). Эти агенты должны принять коллективное решение, выбрав одну из доступных альтернатив, содержащихся в множестве X. Прежде чем сделать выбор, каждый агент i узнает параметр (сигнал) θ_i, который определяет его предпочтения. Этот параметр, который мы впоследствии будем называть *типом i-го агента*, известен только ему. Множество возможных типов агента i обозначается как Θ_i. Предполагается, что каждый агент максимизирует ожидаемую полезность с бернуллиевской функцией полезности $u_i(x, \theta_i)$, зависящей от его типа. Ординалистские предпочтения на множестве альтернатив X, представленные функцией $u_i(x, \theta_i)$, обозначаются как $\succsim_i(\theta_i)$. Следовательно, множество возможных отношений предпочтения агента i задано как

$$\mathscr{R}_i = \{\succsim_i : \succsim_i = \succsim_i(\theta_i) \text{ для некоторых } \theta_i \in \Theta_i\}.$$

Заметим, что, поскольку θ_i известно только агенту i, мы находимся в ситуации *несовершенной информации* (говоря языком раздела 8.E). Как и в разделе 8.E, мы предполагаем, что типы агентов выбираются случайным образом из некоторого известного всем заранее распределения. Обозначим за $\phi(\cdot)$ функцию плотности вероятности возможных реализаций $\theta \in \Theta_1 \times \ldots \times \Theta_I$, где $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_I)$ — профиль типов всех агентов. Функция $\phi(\cdot)$, множества $\Theta_1, \ldots, \Theta_I$, а также функции полезности $u_i(\cdot, \theta_i)$ предполагаются общеизвестными, тогда как тип i-го индивида известен только ему[2].

Поскольку предпочтения агентов зависят от реализации $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_I)$, они могут хотеть, чтобы коллективный выбор зависел от θ. Чтобы формализовать эту зависимость, мы приводим определение *функции общественного выбора* — концепции, уже обсуждавшейся в разделе 21.E[3].

Определение 23.B.1. *Функция общественного выбора* — функция $f: \Theta_1 \times \ldots \times \Theta_I \to X$, приписывающая каждому возможному профилю типов $(\theta_1, \ldots, \theta_I)$ коллективное решение $f(\theta_1, \ldots, \theta_I) \in X$[4].

Одно из желаемых свойств функции общественного выбора — эффективность *ex post*, описанная в следующем определении.

Определение 23.B.2. Функция общественного выбора $f: \Theta_1 \times \ldots \times \Theta_I \to X$ называется *ex post эффективной* (*или Паретовой*), если ни для какого профиля типов $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_I)$ не существует такого $x \in X$, что $u_i(x, \theta_i) \geq u_i(f(\theta), \theta_i)$ для всех i, а также $u_i(x, \theta_i) > u_i(f(\theta), \theta_i)$ для некоторого i.

Определение 23.B.2 гласит, что функция общественного выбора *ex post* эффективна, если для каждого профиля $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_I)$ и для заданных функ-

[2] Такая формулировка не учитывает случаи, когда предпочтения агента зависят не только от наблюдаемого им сигнала, но и от сигналов, наблюдаемых другими участниками (например, предпочтения агента i относительно того, устраивать вечеринку в помещении или на улице, могут зависеть от прогноза погоды, который известен агенту j). В этой главе мы будем в основном иметь в виду случай, когда предпочтения агента зависят только от его собственного сигнала, — случай *частных оценок*. Более общий анализ будет представлен в разделе 23.F.

[3] В разделе 21.E тип агента полностью соответствовал его ординалистским предпочтениям на X, так что функция общественного выбора была определена просто как отображение из $\mathscr{R}_1 \times \ldots \times \mathscr{R}_I$ в X. Более того, предполагалось, что для всех i множество $\mathscr{R}_i$ равно $\mathscr{R}$ — множеству всех возможных предпочтений на X.

[4] Следует отметить две вещи, касающиеся этого определения. Во-первых, оно ограничивается *детерминированными* функциями общественного выбора. И хотя в большинстве своем упоминаемые в этой главе функции будут именно такими, в разделах 23.D–23.F мы позволим функциям общественного выбора приписывать профилям типов не решения из множества X, а *лотереи* на множестве этих решений. Во-вторых, как и в разделе 21.E, здесь мы ограничиваемся рассмотрением однозначных функций общественного выбора.

ций полезности $u_1(\cdot, \theta_1), \ldots, u_I(\cdot, \theta_I)$ она выбирает эффективную по Парето альтернативу $f(\theta) \in X$.

Проблема заключается в том, что значения θ_i ненаблюдаемы, и поэтому при осуществлении общественного выбора $f(\theta_1, \ldots, \theta_I)$ придется полагаться на значения θ_i, которые сообщат сами агенты. При этом для заданной функции общественного выбора $f(\cdot)$ честное выявление своего типа может быть не в интересах агента. Иллюстрации этой проблемы (от самых абстрактных задач до прикладных) приведены в примерах 23.B.1–23.B.4.

Пример 23.B.1. *Абстрактная ситуация общественного выбора.* Рассмотрим самый абстрактный случай. Есть множество альтернатив X, а также множества $\mathscr{R}_i$ возможных рациональных предпочтений на X для каждого агента i. Предположим для простоты, что $X = \{x, y, z\}$ и $I = 2$. Пусть агент 1 может иметь только один тип $\left(\Theta_1 = \{\bar{\theta}_1\}\right)$, а агент 2 может иметь два возможных типа $\left(\Theta_2 = \{\theta_2', \theta_2''\}\right)$. Возможные предпочтения агентов $\mathscr{R}_1 = \{\succsim_1(\bar{\theta}_1)\}$ и $\mathscr{R}_2 = \{\succsim_2(\theta_2'), \succsim_2(\theta_2'')\}$ имеют вид

$\succsim_1(\bar{\theta}_1)$	$\succsim_2(\theta_2')$	$\succsim_2(\theta_2'')$
x	z	y
y	y	x
z	x	z

[Чем выше альтернатива в таблице, тем она более предпочтительна; например, $x \succ_1 (\bar{\theta}_1) y \succ_1 (\bar{\theta}_1) z$.]

Теперь предположим, что агенты хотят реализовать *ex post* эффективную функцию общественного выбора $f(\cdot)$, для которой

$$f(\bar{\theta}_1, \theta_2') = y \quad \text{и} \quad f(\bar{\theta}_1, \theta_2'') = x.$$

Тогда придется рассчитывать на то, что агент 2 честно выявит свои предпочтения. Но очевидно, что делать это не в его интересах: когда $\theta_2 = \theta_2''$, агент 2 захочет солгать, что его тип θ_2'.

В абстрактной постановке наиболее интересный случай возникает, когда для каждого агента i множество $\mathscr{R}_i$ совпадает с $\mathscr{R}$ — множеством всех возможных рациональных предпочтений на X. В этом случае у агента есть много возможностей сказать неправду, поэтому найти функцию общественного выбора, которая бы стимулировала честное выявление предпочтений во всех ситуациях, может оказаться непростой задачей. Мы увидим формальную иллюстрацию этого в разделе 23.C, когда будем рассматривать теорему Гиббарда — Саттертуэйта. ■

Пример 23.B.2. *Экономика чистого обмена.* Рассмотрим экономику обмена с L товарами и I потребителями, в которой потребительское множество агента i задано как $\mathbb{R}_+^L$, а вектор начальных запасов $\omega_i = (\omega_{1i}, \ldots, \omega_{Li}) >> 0$ (см. главу 15). Вектор доступных наборов задан как

$$X = \{(x_1, \ldots, x_I) : x_i \in \mathbb{R}_+^L \text{ и } \sum_i x_{li} \le \sum_i \omega_{li} \text{ для } l = 1, \ldots, L\}.$$

В такой постановке естественно предположить, что $\mathscr{R}_i$, множество возможных предпочтений агента i на множестве X, представляет собой подмножество $\mathscr{R}_E$ —

множества индивидуалистических (т. е. зависящих только от x_i), монотонных и выпуклых предпочтений на X.

Предположим для простоты, что $I = 2$, агент 1 может иметь только один тип $\Theta_1 = \{\bar{\theta}_1\}$ и $\mathscr{R}_1 = \{\succsim_1(\bar{\theta}_1)\}$, а для второго агента $\mathscr{R}_2 = \mathscr{R}_E$. Представим, что мы стремимся реализовать такую функцию общественного выбора, которая для любой пары $(\succsim_1(\theta_1),\ \succsim_2(\theta_2))$ выбирает вальрасианское равновесие (заметим, что такая функция *ex post* эффективна). Как показано на рис. 23.B.1, второй потребитель в общем случае не будет честно выявлять свои предпочтения. На этом рисунке $f(\bar{\theta}_1,\ \theta_2')$ — единственное вальрасианское равновесие, когда предпочтения заданы как $(\succsim_1(\bar{\theta}_1),\ \succsim_2(\theta_2'))$ [это единственное пересечение кривых *цена — потребление* OC_1 и OC_2', отличное от точки начального запаса]. При этом если потребитель 2 заявит, что его тип θ_2'' (что соответствует кривой *цена — потребление* OC_2''), он сможет получить распределение $f(\bar{\theta}_1,\ \theta_2'')$ [единственное вальрасианское равновесие при предпочтениях $(\succsim_1(\bar{\theta}_1),\ \succsim_2(\theta_2''))$], которое строго лучше, чем $f(\bar{\theta}_1,\ \theta_2')$ при предпочтениях $\succsim_2(\theta_2')$). ■

Пример 23.B.3. *Общественный проект.* Рассмотрим ситуацию, в которой I агентов должны решить, осуществлять некий общественный проект (например, строительство моста) или нет. Затраты на осуществление проекта должны понести сами агенты. Исход — это вектор $x = (k, t_1, \ldots, t_I)$, где $k = 1$, если проект осуществляется, и $k = 0$, если нет, а $t_i \in \mathbb{R}$ — денежный трансферт агенту i (t_i может быть отрицательным, если агент i платит сам). Стоимость осуществления проекта равна $c \geq 0$. В итоге множество допустимых альтернатив для всех агентов выглядит как

$$X = \{(k,\ t_1,\ \ldots,\ t_I) : k \in \{0;\ 1\},\ t_i \in \mathbb{R}\ \text{ для всех } i, \quad \text{а также } \sum_i t_i \leq -ck\}.$$

Ограничение $\sum_i t_i \leq -ck$ означает, что нет никакого источника внешнего финансирования и поэтому должно быть выполнено $c + \sum_i t_i \leq 0$, если $k = 1$, и $\sum_i t_i \leq 0$,

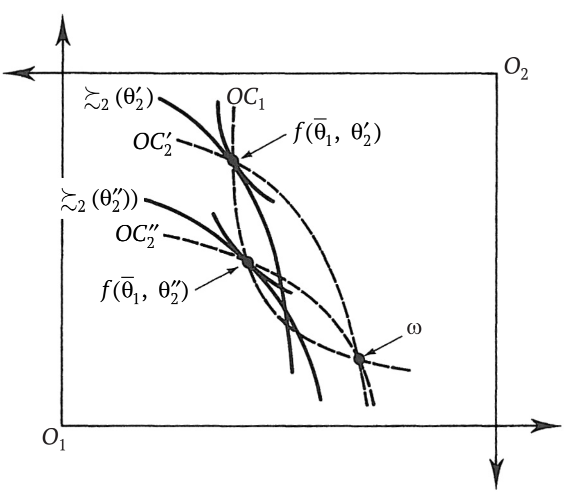


Рис. 23.B.1. Если функция общественного выбора всегда приводит к вальрасианскому равновесию, у агента 2 есть стимул заявить, что его тип θ_2'', тогда как на самом деле он θ_2'

если $k = 0$. Предположим, что бернуллиевская функция полезности агента типа θ_i имеет квазилинейный вид:

$$u_i(x,\ \theta_i) = \theta_i k + (\bar{m}_i + t_i),$$

где $\bar{m}_i$ — начальный запас товара-измерителя (денег) агента i, а $\theta_i \in \mathbb{R}$. Можно интерпретировать θ_i как готовность агента i платить за мост.

Тогда функция общественного выбора $f(\theta) = (k(\theta), t_1(\theta), \ldots, t_I(\theta))$ *ex post* эффективна, если для всех θ выполнено

$$k(\theta) = \begin{cases} 1, \text{ если } \sum_i \theta_i \geq c, \\ 0 \quad - \text{ иначе}, \end{cases} \tag{23.B.1}$$

а также

$$\sum_i t_i(\theta) = -ck(\theta). \tag{23.B.2}$$

Предположим, что агенты хотят реализовать функцию общественного выбора, которая удовлетворяет (23.B.1) и (23.B.2) и в которой вклады всех участников равны (эгалитарное правило вклада), т. е. $t_i(\theta) = -(c/I)k(\theta)$. Предположим для простоты, что $\Theta_i = \{\bar{\theta}_i\}$ для $i \neq 1$ (т. е. предпочтения всех агентов, кроме первого, известны) и $\Theta_1 = [0;\ \infty)$.Также предположим, что $c > \sum_{i \neq 1} \bar{\theta}_i > c(I-1)/I$. Эти неравенства означают, что для данной функции общественного выбора тип первого агента имеет решающее значение для постройки моста (если $\theta_1 \geq c - \sum_{i \neq 1} \bar{\theta}_i$, то мост будет построен, а если $\theta_1 < c - \sum_{i \neq 1} \bar{\theta}_i$, то не будет) и что сумма полезностей агентов $2, \ldots, I$ при равных взносах будет больше в случае постройки моста [поскольку $\sum_{i \neq 1} \bar{\theta}_i - c(I-1)/I > 0$].

Посмотрим, есть ли у агента 1 стимулы честно выявить свой тип, если $\theta_1 = c - \sum_{i \neq 1} \bar{\theta}_i + \varepsilon$ и $\varepsilon > 0$. Если он сообщит истинные предпочтения, то мост будет построен, так как

$$\left(c - \sum_{i \neq 1} \bar{\theta}_i + \varepsilon\right) + \sum_{i \neq 1} \bar{\theta}_i > c.$$

Полезность агента 1 в этом случае будет равна

$$\theta_1 + \bar{m}_1 - \frac{c}{I} = \left(c - \sum_{i \neq 1} \bar{\theta}_i + \varepsilon\right) + \bar{m}_1 - \frac{c}{I} =$$
$$= \left(\frac{c(I-1)}{I} - \sum_{i \neq 1} \bar{\theta}_i + \varepsilon\right) + \bar{m}_1.$$

Но если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то эта полезность меньше $\bar{m}_1$, т. е. полезности агента 1, если бы он заявил, что $\theta_1 = 0$ и мост не был бы построен. Таким образом, первый агент предпочтет сказать неправду. Интуитивно ясно, что если бы мост был построен (агент 1 сообщил свой тип честно), то возникла бы положительная экстерналия, из-за которой первый агент недооценивает свою выгоду от проекта. ■

Пример 23.B.4. *Размещение единицы неделимого частного блага.* Рассмотрим ситуацию, в которой есть одна единица неделимого частного блага, которую в итоге должен получить один из I агентов. Денежные трансферты также разрешены. Результат здесь можно представить как вектор $x = (y_1, \ldots, y_I, t_1, \ldots, t_I)$, где $y_i = 1$, если агент i получает благо, и $y_i = 0$ в противном случае, а t_i — денежный трансферт, полученный агентом i. Тогда множество допустимых альтернатив имеет вид

$$X = \{(y_1,\ \ldots,\ y_I,\ t_1,\ \ldots,\ t_I) : y_i \in \{0;\ 1\},\ t_i \in \mathbb{R} \text{ для всех } i, \sum_i y_i = 1 \text{ и } \sum_i t_i \leq 0\}.$$

Предположим, что бернуллиевская функция полезности агента типа θ_i квазилинейна:

$$u_i(x, \theta_i) = \theta_i y_i + (\overline{m}_i + t_i),$$

где $\overline{m}_i$ — это начальный запас товара-измерителя (денег) агента i. Здесь $\theta_i \in \mathbb{R}$ можно интерпретировать как ценность блага для агента i. Множество значений параметра θ_i задано как $\Theta_i = [\underline{\theta}_i,\ \overline{\theta}_i] \subset \mathbb{R}$.

В такой ситуации функция общественного выбора $f(\theta) = (y_1(\theta), \ldots, y_I(\theta), t_1(\theta), \ldots, t_I(\theta))$ *ex post* эффективна, если она всегда передает благо тому агенту, у которого готовность платить за него наибольшая (или одному из таких агентов) и при этом нет потерь товара-измерителя. Иными словами, если для всех $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_I) \in \Theta_1 \times \ldots \times \Theta_I$ выполнено

$$y_i\left(\theta\right)\left(\theta_i - \max\left\{\theta_1,\ \ldots,\ \theta_I\right\}\right) = 0 \text{ для всех } i,$$

а также

$$\sum_i t_i(\theta) = 0.$$

Стоит отметить два особых случая, которые широко освещались в литературе. Один из них — *двусторонняя торговля*. В этом случае $I = 2$, благо изначально принадлежит агенту 1 («продавцу»), а агент 2 — потенциальный покупатель. Когда $\underline{\theta}_2 > \overline{\theta}_1$, выгода от торговли будет в любом случае, независимо от реализации θ_1 и θ_2. Если $\underline{\theta}_1 > \overline{\theta}_2$, выгоды от торговли в любом случае не будет. Наконец, если $\underline{\theta}_2 < \overline{\theta}_1$ и $\underline{\theta}_1 < \overline{\theta}_2$, тогда, в зависимости от реализации θ, торговля может либо быть взаимовыгодной, либо нет.

Второй особый случай — *аукцион*. Один из агентов, которого мы будем называть агентом 0, является продавцом товара («аукционистом»). Будем считать, что продавец не ценит благо вовсе (в более общей постановке у продавца может быть отличное от нуля значение $\theta_0 = \overline{\theta}_0$). Остальные агенты (с номерами $1, \ldots, I$) — потенциальные покупатели товара (участники аукциона)[5].

Чтобы проиллюстрировать проблему выявления информации в этом примере, рассмотрим аукцион с двумя покупателями ($I = 2$). В предыдущих примерах мы для простоты предполагали, что только один агент имеет больше одного возможного типа. Здесь же мы предположим, что θ_i — оценки продаваемого товара обоими агентами — независимо выбираются из равномерного распределения на отрезке [0, 1], и этот факт является общеизвестным. Рассмотрим функцию общественного выбора $f(\theta) = (y_0(\theta), y_1(\theta), y_2(\theta), t_0(\theta), t_1(\theta), t_2(\theta))$, в которой

$$y_1(\theta) = \begin{cases} 1, \text{ если } \theta_1 \geq \theta_2; \\ 0, \text{ если } \theta_1 < \theta_2; \end{cases} \tag{23.B.3}$$

[5] В этом примере присутствуют всего $I + 1$ агентов.

$$y_2(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_1 < \theta_2; \\ 0, & \text{если } \theta_1 \geq \theta_2; \end{cases} \tag{23.B.4}$$

$$y_0(\theta) = 0 \text{ для всех } \theta; \tag{23.B.5}$$

$$t_1(\theta) = -\theta_1 y_1(\theta); \tag{23.B.6}$$

$$t_2(\theta) = -\theta_2 y_2(\theta); \tag{23.B.7}$$

$$t_0(\theta) = -(t_1(\theta) + t_2(\theta)). \tag{23.B.8}$$

При такой функции общественного выбора продавец передает товар покупателю с максимальной готовностью платить (или агенту 1, если готовность платить одинаковая) в обмен на сумму, равную его оценке этого товара (другой покупатель ничего не получает и не платит). Заметим, что эта функция не только *ex post* эффективна, но и очень привлекательна для продавца: если ее можно реализовать, то продавец заберет себе весь излишек покупателя, создаваемый потреблением блага.

Попытаемся реализовать эту функцию. Будем считать, что покупатели максимизируют ожидаемую полезность. Если покупатель 2 всегда объявляет свой истинный тип, будет ли такое же поведение наилучшим выбором для агента 1? Его задача заключается в том, чтобы для каждого значения истинного типа θ_1 выбрать $\hat{\theta}_1$ — объявляемый тип:

$$\max_{\hat{\theta}_1} (\theta_1 - \hat{\theta}_1)\text{Prob}(\theta_2 \leq \hat{\theta}_1)$$

или

$$\max_{\hat{\theta}_1} (\theta_1 - \hat{\theta}_1)\hat{\theta}_1.$$

Решение этой задачи — объявление агентом 1 $\hat{\theta}_1 = \theta_1/2$. Получается, что если агент 2 всегда говорит правду, такое же поведение *не* является оптимальным для агента 1 (аналогично для агента 2). Интуитивно ясно, что при такой функции общественного выбора у участника аукциона есть стимул занизить свою оценку товара, чтобы уменьшить сумму, которую ему нужно платить, если его оценка окажется наибольшей. При этом, конечно, он получит товар с меньшей вероятностью, но это может быть оправданно, по крайней мере в некоторой степени[6]. Так что мы вновь видим, что при наличии частной информации возникает проблема с реализацией определенных функций общественного выбора. (В упражнении 23.B.2 аналогичная идея рассматривается в контексте двусторонней торговли.)

Хотя в ситуации аукциона покупатели имеют стимул сказать неправду при функции общественного выбора (23.B.3)–(23.B.8), это в общем случае не так *для любой* функции общественного выбора. Чтобы в этом убедиться, предположим, что мы хотим реализовать функцию общественного выбора $\tilde{f}(\cdot)$, которая эквивалентна описанной выше в части размещения товара [т. е. функции $y_i(\cdot)$ для $i = 0, 1, 2$ такие же, как в (23.B.3)–(23.B.5)], но в которой функции трансфертов имеют вид

$$t_1(\theta) = -\theta_2 y_1(\theta);$$
$$t_2(\theta) = -\theta_1 y_2(\theta);$$
$$t_0(\theta) = -(t_1(\theta) + t_2(\theta)).$$

[6] Это похоже на проблему, с которой сталкивается монополист (см. раздел 12.B): когда он поднимает цену, количество проданного товара снижается, но с каждой из продаваемых единиц он получает больше.

Здесь победитель аукциона — агент i — платит сумму, равную не его готовности платить θ_i, а готовности платить другого агента θ_j ($j \neq i$). Получается, что он платит сумму, равную *второй по величине готовности платить*. Рассмотрим стимулы агента 1 говорить правду. Если агент 2 объявит свою готовность платить на уровне $\hat{\theta}_2 \leq \theta_1$, то агент 1 может получить полезность, равную $(\theta_1 - \hat{\theta}_2) \geq 0$, объявляя свой тип θ_1 честно. Для любого другого объявления, сделанного агентом 2, полезность агента 1 либо та же (если он объявит готовность платить не ниже $\hat{\theta}_2$), либо равна 0 (если объявленная им готовность платить будет ниже $\hat{\theta}_2$). Получаем, что если $\hat{\theta}_2 \leq \theta_1$, то объявление своего истинного типа является для агента 1 по крайней мере одним из наилучших вариантов поведения. С другой стороны, если $\hat{\theta}_2 > \theta_1$, то выявление своего истинного типа приносит агенту 1 полезность 0, при том что любое ложное объявление, после которого он получит благо (объявление, что его оценка не ниже $\hat{\theta}_2$), приносит отрицательную полезность. Можно заключить, что истинное объявление своего типа является оптимальным для агента 1 независимо от того, что говорит агент 2. Говоря языком теории игр, правдивая стратегия является слабо доминирующей для агента 1 (см. раздел 8.B). Аналогичный вывод можно сделать и для агента 2. Таким образом, эта функция общественного выбора *реализуема*, несмотря на то что типы агентов являются их частной информацией: достаточно лишь попросить агентов объявить их готовность платить, а затем определить $\tilde{f}(\theta)$[7]. ■

Примеры 21.B.1–21.B.4 показывают, что в том случае, когда типы агентов известны только им, далеко не любая функция общественного выбора может быть успешно реализована. Рассмотрев их, мы можем сформулировать вопрос, который является центральным для этой главы: *какие функции общественного выбора можно реализовать, когда типы агентов являются частной информацией?*

Чтобы ответить на этот вопрос, нужно подумать обо всех способах, которыми можно реализовать функцию общественного выбора. В примерах, рассмотренных выше, мы неявно представляли очень простой сценарий, в котором каждый агент i должен прямо сообщить θ_i, и затем при наличии множества объявлений $(\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_I)$ выбирается альтернатива $f(\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_I) \in X$. Но это не единственный способ реализации функции общественного выбора. В частности, она может быть реализована *косвенно*, если действия агентов, приводящие к общественному выбору, могут регулироваться каким-то институтом. В примерах 23.B.5 и 23.B.6 показаны два широко используемых института аукционов.

Пример 23.B.5. *Закрытый аукцион первой цены.* Рассмотрим еще раз ситуацию аукциона, описанную в примере 23.B.4. На закрытом аукционе первой цены каждый потенциальный покупатель может сделать закрытую ставку $b_i \geq 0$. Каждая ставка известна только тому участнику, который ее сделал. Затем конверты со ставками вскрываются и покупатель, сделавший самую высокую ставку, платит ее величину и получает товар[8].

[7] Другие примеры реализуемых функций общественного выбора представлены в упражнении 23.B.1.

[8] Мы предполагаем, что если максимальную ставку сделали несколько участников, то товар получает тот из них, чей номер наименьший. Точно так же мы могли определить среди них победителя случайным образом, но это потребовало бы расширения множества альтернатив

Снова рассмотрим случай, где имеется два потенциальных покупателя ($I = 2$) и все значения θ_i случайным образом выбираются из равномерного распределения на [0, 1]. Мы будем искать равновесие, в котором стратегия каждого участника $b_i(\cdot)$ принимает форму $b_i(\theta_i) = \alpha_i\theta_i$ для $\alpha_i \in [0, 1]$. Пусть стратегия участника 2 имеет такую форму, тогда задача участника 1 примет вид

$$\max_{b_1 \geq 0} \quad (\theta_1 - b_1)\text{Prob}(b_2(\theta_2) \leq b_1) \text{ для всех } \theta_1.$$

Поскольку максимально возможная ставка покупателя 2 равна α_2 (он делает ставку α_2, если $\theta_2 = 1$), очевидно, что агент 1 никогда не должен ставить больше α_2. Более того, поскольку θ_2 равномерно распределено на [0, 1] и $b_2(\theta_2) \leq b_1$, в том и только в том случае, если $\theta_2 \leq (b_1/\alpha_2)$, мы можем записать задачу участника 1 в виде

$$\max_{b_1 \in [0, \alpha_2]} (\theta_1 - b_1)(b_1/\alpha_2).$$

Решение этой задачи имеет вид

$$b_1(\theta_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}\theta_1, \text{ если } \frac{1}{2}\theta_1 \leq \alpha_2, \\ \alpha_2, \quad \text{если } \frac{1}{2}\theta_1 > \alpha_2. \end{cases}$$

Рассуждая аналогично, получим решение задачи агента 2:

$$b_2(\theta_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}\theta_2, \text{ если } \frac{1}{2}\theta_2 \leq \alpha_1, \\ \alpha_1, \quad \text{если } \frac{1}{2}\theta_2 > \alpha_1. \end{cases}$$

Можно видеть, что если $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, то стратегии $b_i(\theta_i) = \frac{1}{2}\theta_i$ для $i = 1, 2$ составляют равновесие Байеса — Нэша в данном аукционе. Таким образом, в этом закрытом аукционе первой цены существует байесовское равновесие, которое неявным образом реализует функцию общественного выбора $f(\theta) = (y_0(\theta), y_1(\theta), y_2(\theta), t_0(\theta), t_1(\theta), t_2(\theta))$, в которой

$$y_1(\theta) = \begin{cases} 1, \text{ если } \theta_1 \geq \theta_2; \\ 0, \text{ если } \theta_1 < \theta_2; \end{cases} \tag{23.B.9}$$

$$y_2(\theta) = \begin{cases} 1, \text{ если } \theta_1 < \theta_2; \\ 0, \text{ если } \theta_1 \geq \theta_2; \end{cases} \tag{23.B.10}$$

$$y_0(\theta) = 0 \text{ для всех } \theta; \tag{23.B.11}$$

$$t_1(\theta) = -\frac{1}{2}\theta_1 y_1(\theta); \tag{23.B.12}$$

$$t_2(\theta) = -\frac{1}{2}\theta_2 y_2(\theta); \tag{23.B.13}$$

$$t_0(\theta) = -(t_1(\theta) + t_2(\theta)). \tag{23.B.14}$$

■

до $\Delta(X)$ — множества лотерей, в которых призами являются элементы X. Когда мы будем рассматривать примеры 23.D и 23.F, мы это и сделаем.

Пример 23.B.6. *Закрытый аукцион второй цены*[9]. Еще раз рассмотрим аукцион, описанный в примере 23.B.4. На закрытом аукционе второй цены каждый потенциальный покупатель i может сделать закрытую ставку $b_i \geq 0$, затем конверты со ставками вскрываются, и покупатель, сделавший самую высокую ставку, получает товар, но в этом случае платит продавцу сумму, равную *второй по величине* ставке[10].

Проведя рассуждения, аналогичные рассуждениям в примере 23.B.4, мы можем заключить, что стратегия $b_i(\theta_i) = \theta_i$ — слабо доминирующая для каждого агента i (см. упражнение 23.B.3). Поэтому в случае $I = 2$ закрытый аукцион второй цены реализует функцию общественного выбора, в которой

$$y_1(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_1 \geq \theta_2; \\ 0, & \text{если } \theta_1 < \theta_2; \end{cases}$$

$$y_2(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_1 < \theta_2; \\ 0, & \text{если } \theta_1 \geq \theta_2; \end{cases}$$

$$y_0(\theta) = 0 \text{ для всех } \theta;$$
$$t_1(\theta) = -\theta_2 y_1(\theta);$$
$$t_2(\theta) = -\theta_1 y_2(\theta);$$
$$t_0(\theta) = -(t_1(\theta) + t_2(\theta)). \blacksquare$$

Примеры 23.B.5 и 23.B.6 демонстрируют, что, вообще говоря, нужно рассматривать не только возможность прямой реализации функций общественного выбора (просто спрашивая агентов, какой у них тип), но и возможность косвенной реализации с помощью создания институтов, по правилам которых агенты будут взаимодействовать. Формальное представление такого института называется *механизмом*.

Определение 23.B.3. *Механизмом* $\Gamma = (S_1, \ldots, S_I, g(\cdot))$ называется набор I множеств стратегий $(S_1, \ldots, S_I)$ и функции исхода $g\colon S_1 \times \ldots \times S_I \to X$.

Механизм можно воспринимать как институт, в соответствии с правилами которого принимается коллективное решение. Возможные действия каждого участника представлены в множестве стратегий S_i, а правило, по которому действия агентов превращаются в коллективное решение, задано функцией $g(\cdot)$.

Формально механизм Γ вместе с возможными типами $(\Theta_1, \ldots, \Theta_I)$, функцией плотности $\phi(\cdot)$ и бернуллиевскими функциями полезности $(u_1(\cdot), \ldots, u_I(\cdot))$ определяет байесовскую игру с неполной информацией. Если ввести обозначение $\tilde{u}_i(s_1, \ldots, s_I, \theta_i) = u_i(g(s_1, \ldots, s_I), \theta_i)$, то игра

$$[I, \{S_i\}, \{\tilde{u}_i(\cdot)\}, \Theta_1 \times \ldots \times \Theta_I, \phi(\cdot)]$$

будет байесовской игрой в том же смысле, в каком этот термин использовался в разделе 8.E. Вообще говоря, механизм может быть сложной много-

[9] Такой аукцион также называется *аукционом Викри* в честь его автора, см. (Vickrey, 1961).

[10] Если имеется несколько индивидов с наибольшими ставками, то мы вновь отдаем благо тому, у кого наименьший номер.

этапной процедурой, и тогда множество стратегий S_i будет состоять из описаний плана действия во всех возможных ситуациях (см. главу 7)[11].

Закрытый аукцион первой цены — механизм, в котором $S_i = \mathbb{R}_+$ для всех i, а функция исхода $g(b_1, \ldots, b_I) = (\{y_i b_1, \ldots, b_I)\}_{i=1}^I, \{t_i(b_1, \ldots, b_I)\}_{i=1}^I)$ такова, что

$$y_i(b_1, \ldots, b_I) = 1, \text{ если и только если } i = \min\{j\colon b_j = \max\{b_1, \ldots, b_I\}\},$$
$$t_i(b_1, \ldots, b_I) = -b_i y_i(b_1, \ldots, b_I),$$

где $(b_1, \ldots, b_I) \in \mathbb{R}_+^I$ — ставки. В закрытом аукционе второй цены множества стратегий и функции $y_i(\cdot)$ те же, а $t_i(b_1, \ldots, b_I) = -\max\{b_j\colon j \neq i\} y_i(b_1, \ldots, b_I)$.

В игре с неполной информацией, порожденной механизмом Г, стратегия агента i — это функция $s_i\colon \Theta_i \to S_i$, предписывающая этому агенту один из элементов S_i для каждого возможного типа из Θ_i. Можно (не вполне строго) сказать, что механизм *реализует* функцию общественного выбора $f(\cdot)$, если в игре, порожденной механизмом, существует равновесие, приводящее к тем же исходам, что и функция $f(\cdot)$, для всех возможных профилей типов $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_I)$.

Определение 23.B.4. Механизм $\Gamma = (S_1, \ldots, S_I, g(\cdot))$ *реализует* функцию общественного выбора $f(\cdot)$, если в игре, порожденной Г, есть равновесный профиль стратегий $(s_1^*(\cdot), \ldots, s_I^*(\cdot))$, такой что $g(s_1^*(\theta_1), \ldots, s_I^*(\theta_I)) = f(\theta_1, \ldots, \theta_I)$ для всех $(\theta_1, \ldots, \theta_I) \in \Theta_1 \times \ldots \times \Theta_I$.

В определении 23.B.4 мы не указали, что понимаем под «равновесием». Как мы видели в части II, единой общепризнанной концепции равновесия как решения игры не существует. В литературе, посвященной дизайну механизмов, вопрос реализуемости функций общественного выбора изучался для разных концепций равновесия. В разделах 23.C и 23.D мы будем рассматривать две концепции: равновесие в доминирующих стратегиях и равновесие по Байесу — Нэшу[12].

Заметим, что понятие реализации, введенное в определении 23.B.4, в некотором смысле слабое: в частности, механизм Г может иметь *более одного равновесия*, но определение 23.B.4 требует, чтобы исход *одного из них* совпадал с $f(\cdot)$. Таким образом, определение неявно предполагает, что если имеется несколько равновесий, то индивиды будут играть то, которое хочет создатель механизма. На протяжении всей главы мы будем иметь в виду именно это, дальнейшее обсуждение этого вопроса приведено в приложении А.

Определение всех реализуемых функций общественного выбора — пугающая задача, потому что в принципе мы должны рассмотреть все возможные механизмы, которых огромное количество. К счастью, результат, известный как *принцип выявления* (который будет сформулирован и дока-

[11] Отметим, что мы представляем игру, порожденную механизмом, в нормальной форме — этого достаточно для дальнейшего анализа. В приложении В мы рассмотрим случай, где будет использоваться развернутая форма.

[12] В приложении В рассматривается несколько других концепций в среде *с полной информацией*, где агентам известны типы друг друга.

зан в разделах 23.C и 23.D), говорит, что зачастую мы можем ограничиться очень простыми механизмами, которые мы рассматривали с самого начала, — такими, в которых агенты должны напрямую сообщить свой тип. Когда агенты сообщают свои типы $(\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_I)$, выбирается альтернатива $f(\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_I) \in X$[13]. Это особый тип механизмов, известный как *механизмы прямого выявления*.

Определение 23.B.5. *Механизм прямого выявления* — механизм, в котором $S_i = \Theta_i$ для всех i и $g(\theta) = f(\theta)$ для всех $\theta \in \Theta_1 \times \ldots \times \Theta_I$.

Более того, как мы увидим в дальнейшем, принцип выявления позволяет еще в большей степени сузить класс рассматриваемых случаев до тех, где *правдивая стратегия является оптимальной для каждого агента*. В определении 23.B.6 мы формулируем понятие реализации в *правдивых стратегиях*, вновь не специфицируя, какое равновесие имеется в виду.

Определение 23.B.6. Функция общественного выбора $f(\cdot)$ *реализуема в правдивых стратегиях* (*или совместима по стимулам*), если в прямом механизме выявления $\Gamma = (\Theta_1, \ldots, \Theta_I, f(\cdot))$ имеется равновесие $(s_1^*(\cdot), \ldots, s_I^*(\cdot))$, где $s_i^*(\theta_i) = \theta_i$ для всех $\theta_i \in \Theta_i$ и всех $i = 1, \ldots, I$. Иными словами, сообщение своего истинного типа каждым агентом i составляет равновесие в $\Gamma = (\Theta_1, \ldots, \Theta_I, f(\cdot))$.

Чтобы понять, почему мы можем ограничиться рассмотрением механизмов прямого выявления, убедимся, что функции общественного выбора, реализуемые косвенно с помощью закрытых аукционов первой и второй цены (примеры 23.B.5 и 23.B.6), могут быть реализованы с помощью прямых механизмов. На самом деле мы уже показали это для закрытого аукциона второй цены, поскольку функция общественного выбора в примере 23.B.6 совпадает с функцией в конце примера 23.B.4, в которой правдивая стратегия является слабо доминирующей для обоих покупателей. В примере 23.B.7 рассмотрен закрытый аукцион первой цены.

Пример 23.B.7. *Правдивая реализация функции общественного выбора закрытого аукциона первой цены.* Предположим, что механизм прямого выявления имеет вид $(\Theta_1, \ldots, \Theta_I, f(\cdot))$*, где* $f(\theta) = (y_0(\theta), y_1(\theta), y_2(\theta), t_0(\theta), t_1(\theta), t_2(\theta))$ удовлетворяет (23.B.9)–(23.B.14). Тогда покупателю 1, имеющему тип θ_1, оптимально сделать объявление $\hat{\theta}_1$, которое является решением задачи

$$\max_{\hat{\theta}_1} \quad (\theta_1 - \frac{1}{2}\hat{\theta}_1)\mathrm{Prob}(\theta_2 \leq \hat{\theta}_1)$$

или

$$\max_{\hat{\theta}_1} \quad (\theta_1 - \frac{1}{2}\hat{\theta}_1)\hat{\theta}_1.$$

[13] Ранние версии принципа выявления были получены в работах Гиббарда (Gibbard, 1973), Грина и Лаффона (Green, Laffont, 1977), Майерсона (Myerson, 1979) и Дасгупты, Хэммонда и Маскина (Dasgupta, Hammond, Maskin, 1979).

Условие первого порядка этой задачи дает $\hat{\theta}_1 = \theta_1$, так что правдивая стратегия является оптимальной для игрока 1, если игрок 2 говорит правду. Аналогичные рассуждения верны и для покупателя 2. Таким образом, функция общественного выбора, реализуемая в аукционе второй цены (в равновесии Байеса — Нэша), может быть реализована и в правдивых стратегиях (в равновесии Байеса — Нэша) через механизм прямого выявления. Таким образом, функция общественного выбора (23.B.9)–(23.B.14) совместима по стимулам. ■

Когда в разделах 23.C и 23.D мы будем изучать ограничения, которые неполная информация накладывает на множество реализуемых функций общественного выбора, то сможем, благодаря принципу выявления, ограничиться анализом функций, реализуемых в правдивых стратегиях.

Отметим, что в некоторых ситуациях участие в механизме может быть *добровольным*, и поэтому реализуемая функция общественного выбора должна также удовлетворять *ограничениям участия* (или *индивидуальной рациональности*). В разделах 23.C и 23.D мы абстрагируемся от условий участия и будем обсуждать только проблему выявления информации. Ограничения участия появятся в разделе 23.E.

23.C. Реализация в доминирующих стратегиях

В этом разделе мы рассмотрим реализацию в *доминирующих стратегиях*[14]. Мы будем следовать обозначениям, введенным в разделе 23.B: вектор типов агентов $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_I)$ случайно выбирается из множества $\Theta = \Theta_1 \times \ldots \times \Theta_I$ в соответствии с функцией плотности $\phi(\cdot)$, а бернуллиевская функция полезности на множестве альтернатив X агента типа θ_i задана как $u_i(x, \theta_i)$. Введем также обозначения $\theta_{-i} = (\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_I)$, $\theta = (\theta_i, \theta_{-i})$ и $\Theta_{-i} = \Theta_1 \times \ldots \times \Theta_{i-1} \times \Theta_{i+1} \times \ldots \times \Theta_I$. Механизм $\Gamma = (S_1, \ldots, S_I, g(\cdot))$ — это набор I множеств $S_1, \ldots, S_I$ (где множество S_i состоит из возможных действий или планов действий агента i) и функции исхода g: $S \to X$, где $S = S_1 \times \ldots \times S_I$. Как уже упоминалось в разделе 23.B, механизм $\Gamma = (S_1, \ldots, S_I, g(\cdot))$ вместе с множеством типов $(\Theta_1, \ldots, \Theta_I)$, функцией плотности $\phi(\cdot)$ и бернуллиевскими функциями полезности $(u_1(\cdot), \ldots, u_I(\cdot))$ определяет байесовскую игру с неполной информацией (см. раздел 8.F). Также мы будем обозначать $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_I)$, $s = (s_i, s_{-i})$ и $S_{-i} = S_1 \times \ldots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \ldots \times S_I$.

В соответствии с определением из раздела 8.B стратегия является слабо доминирующей для игрока, если для всех возможных стратегий, которые выбирают остальные, она дает ему по крайней мере не меньший выигрыш по сравнению со всеми остальными доступными ему вариантами поведения. Стратегия s_i: $\Theta_i \to S_i$ является слабо доминирующей для агента i в механизме $\Gamma = (S_1, \ldots, S_I, g(\cdot))$, если для всех $\theta_i \in \Theta_i$ и всех возможных стратегий агентов $j \neq i$, $s_{-i}(\cdot) = [s_1(\cdot), \ldots, s_{i-1}(\cdot), s_{i+1}(\cdot), \ldots, s_I(\cdot)]$[15].

[14] Более подробную информацию на эту тему можно найти в работах Дасгупты, Хэммонда и Маскина (Dasgupta, Hammond, Maskin, 1979), а также Грина и Лаффона (Green, Laffont, 1979).

[15] Ожидание в (23.C.1) взято при реализациях $\theta_{-i} \in \Theta_{-i}$.

$$E_{\theta_{-i}}[u_i\left(g\left(s_i\left(\theta_i\right), s_{-i}\left(\theta_{-i}\right), \theta_i\right)|\theta_i\right] \geq$$
$$\geq E_{\theta_{-i}}\left[u_i\left(g\left(\hat{s}_i, s_{-i}\left(\theta_{-i}\right)\right), \theta_i\right)|\theta_i\right] \text{ для всех } \hat{s}_i \in S_i. \quad (23.C.1)$$

Условие (23.C.1), выполненное для всех $s_{-i}(\cdot)$ и θ_i, эквивалентно условию, что для каждого $\theta_i \in \Theta_i$

$$u_i(g(s_i(\theta_i),\ s_{-i}),\ \theta_i) \geq u_i(g(\hat{s}_i,\ s_{-i}),\ \theta_i) \quad (23.C.2)$$

для всех $\hat{s}_i \in S_i$ и всех $s_{-i} \in S_{-i}$[16]. Это приводит нас к следующему определению.

Определение 23.C.1. Профиль стратегий $s^*(\cdot) = (s_1^*(\cdot),\ \ldots,\ s_I^*(\cdot))$ называется *равновесием в доминирующих стратегиях* в механизме $\Gamma = (S_1, \ldots, S_I$, $g(\cdot))$, если для всех i и всех $\theta_i \in \Theta_i$ выполнено

$$u_i(g(s_i^*(\theta_i),\ s_{-i}),\ \theta_i) \geq u_i(g(s_i',\ s_{-i}),\ \theta_i)$$
$$\text{при любых } s_i' \in S_i \text{ и любых } s_{-i} \in S_{-i}.$$

Уточним определение 23.B.4, включив в него понятие равновесия в доминирующих стратегиях.

Определение 23.C.2. Механизм $\Gamma = (S_1, \ldots, S_I, g(\cdot))$ *реализует функцию общественного выбора $f(\cdot)$ в доминирующих стратегиях*, если в механизме Γ существует равновесие в доминирующих стратегиях, $s^*(\cdot) = (s_1^*(\cdot),\ \ldots,\ s_I^*(\cdot))$, такое что $g(s^*(\theta)) = f(\theta)$ для всех $\theta \in \Theta$.

Концепция реализации в доминирующих стратегиях представляет интерес, поскольку это очень сильный способ реализации сразу в нескольких смыслах. Во-первых, мы можем быть в достаточной степени уверены, что агент, у которого имеется (слабо) доминирующая стратегия, ее и выберет[17]. В отличие от других равновесий по Нэшу в этом случае игроку не нужно корректно предсказывать, как поведут себя остальные, чтобы быть уверенным в оптимальности собственного выбора. Во-вторых, мы предположили, что $\phi(\cdot)$ — функция плотности реализации типов $(\theta_1, \ldots, \theta_I)$ известна агентам, и поэтому они могут корректно вычислить условные вероятности реализации θ_{-i}. Но если это не так и агенты имеют неверные (возможно, даже противоречащие друг другу) представления о распределении вероятностей, то реализация функции $f(\cdot)$ механизмом Γ в домини-

[16] Условие (23.C.2) следует из (23.C.1), если принять $s_{-i}(\theta_{-i}) = s_{-i}$ для всех $\theta_{-i} \in \Theta_{-i}$. Чтобы увидеть, что (23.C.1) следует из (23.C.2), рассмотрим случай, когда S_{-i} — конечное множество. Тогда для каждого s_i выполнено

$$E_{\theta_{-i}}[u_i(g(s_i,\ s_{-i}(\theta_{-i})),\ \theta_i) \mid \theta_i] = \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \text{Prob}(s_{-i}(\theta_{-i}) = s_{-i}) u_i(g(s_i,\ s_{-i}),\ \theta_i).$$

Таким образом, из (23.C.2) следует (23.C.1).

[17] Мы опустим обсуждение случая, когда у агента есть *несколько* доминирующих стратегий. В этом случае, который мы обсудим в приложении A, может возникнуть несколько равновесий. Тем не менее отметим один результат: проблема множественности равновесий не имеет большого значения, когда речь идет о равновесиях в доминирующих стратегиях.

рующих стратегиях от этого не пострадает. В частности, представления агента i о распределении θ_{-i} не повлияют на то, что стратегия $s_i^*(\cdot)$ является доминирующей[18]. В-третьих, если Г реализует $f(\cdot)$ в доминирующих стратегиях, то это верно независимо от функции плотности $\phi(\cdot)$, а значит, один и тот же механизм может быть использован для реализации $f(\cdot)$ при любой функции плотности. Получается, что, если создатель механизма не принадлежит множеству его участников (например, это государство), ему необязательно знать $\phi(\cdot)$, чтобы реализовать $f(\cdot)$.

Как было отмечено в разделе 23.В, для определения реализуемости той или иной функции общественного выбора нам нужно рассмотреть все возможные механизмы. К счастью, в случае реализации в доминирующих стратегиях достаточно выяснить, реализуема ли функция $f(\cdot)$ в правдивых стратегиях в том смысле, в каком это обозначено в следующем определении.

Определение 23.C.3. Функция общественного выбора $f(\cdot)$ называется *реализуемой в доминирующих правдивых стратегиях* (*или совместимой по стимулам в доминирующих стратегиях, или устойчивой к стратегиям*), если $s_i^*(\theta_i) = \theta_i$ для всех $\theta_i \in \Theta_i$ и $i = 1, \dots, I$ — равновесие в доминирующих стратегиях в механизме прямого выявления $\Gamma = (\Theta_1, \dots, \Theta_I, f(\cdot))$. Иными словами, для каждого i и всех $\theta_i \in \Theta_i$ выполнено

$$u_i(f(\theta_i,\ \theta_{-i}),\ \theta_i) \geq u_i(f(\hat{\theta}_i,\ \theta_{-i}),\ \theta_i) \qquad (23.C.3)$$

$$\text{для всех } \hat{\theta}_i \in \Theta_i \text{ и } \theta_{-i} \in \Theta_{-i}.$$

Свойство, позволяющее без потери общности ограничиться механизмами выявления в правдивых стратегиях, известно как *принцип выявления для доминирующих стратегий*.

Утверждение 23.C.1 (*принцип выявления для доминирующих стратегий*). *Если существует механизм $\Gamma = (S_1, \dots, S_I, g(\cdot))$, который реализует функцию общественного выбора $f(\cdot)$ в доминирующих стратегиях, то $f(\cdot)$ реализуема в правдивых доминирующих стратегиях.*

Доказательство. Если $\Gamma = (S_1, \dots, S_I, g(\cdot))$ реализует $f(\cdot)$ в доминирующих стратегиях, то существует профиль стратегий $s^*(\cdot) = (s_1^*(\cdot), \dots, s_I^*(\cdot))$, такой что $g(s^*(\theta)) = f(\theta)$ для всех θ, а также для каждого i и всех $\theta_i \in \Theta_i$ выполнено

$$u_i(g(s_i^*(\theta_i),\ s_{-i}),\ \theta_i) \geq u_i(g(\hat{s}_i,\ s_{-i}),\ \theta_i) \qquad (23.C.4)$$

для всех $\hat{s}_i \in S_i$ и всех $s_{-i} \in S_{-i}$. Условие (23.C.4) означает, в частности, что для каждого i и всех $\theta_i \in \Theta_i$ выполнено

$$u_i(g(s_i^*(\theta_i),\ s_{-i}^*(\theta_{-i})),\ \theta_i) \geq u_i(g(s_i^*(\hat{\theta}_i),\ s_{-i}^*(\theta_{-i})),\ \theta_i) \qquad (23.C.5)$$

[18] На самом деле реализация функции $f(\cdot)$ механизмом Г не пострадает даже при существенном ослаблении гипотезы максимизации ожидаемой полезности.

для всех $\hat{\theta}_i \in \Theta_i$ и всех $\theta_{-i} \in \Theta_{-i}$. Поскольку $g(s^*(\theta)) = f(\theta)$ для всех θ, из условия (23.C.5) следует, что для каждого i и всех $\theta_i \in \Theta_i$ выполнено

$$u_i(f(\theta_i, \theta_{-i}), \theta_i) \geq u_i(f(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}), \theta_i)$$

для всех $\hat{\theta}_i \in \Theta_i$ и всех $\theta_{-i} \in \Theta_{-i}$. Но это в точности условие (23.C.3), которое означает, что $f(\cdot)$ реализуема в доминирующих стратегиях. ■

Можно описать идею этого результата следующим образом. Предположим, что косвенный механизм $\Gamma = (S_1, \ldots, S_I, g(\cdot))$ реализует $f(\cdot)$ в доминирующих стратегиях и что в этом косвенном механизме для каждого агента i с типом θ_i стратегия $s_i^*(\theta_i)$ лучше, чем любая другая стратегия $s_i \in S_i$, какими бы ни были стратегии $s_{-i} \in S_{-i}$, играемые остальными агентами $j \neq i$. Рассмотрим теперь модификацию этого механизма, в котором есть посредник, говорящий каждому агенту i: «Сообщи мне свой тип, и если ты назовешь тип θ_i, то я сыграю стратегию $s_i^*(\theta_i)$ за тебя». Ясно, что если $s_i^*(\theta_i)$ — оптимальный выбор агента i для всех $\theta_i \in \Theta_i$ в изначальном механизме Γ при любом выборе остальных агентов, то правдивая стратегия останется доминирующей и при новой схеме. Но это означает, что мы нашли способ реализации $f(\cdot)$ в правдивых стратегиях.

Из принципа выявления следует, что для того, чтобы найти множество реализуемых в доминирующих стратегиях функций общественного выбора, нам достаточно найти те из них, которые реализуемы в правдивых стратегиях. В принципе это означает, что для любой $f(\cdot)$ нужно только проверить неравенства (23.C.3).

Неравенства (23.C.3) являются необходимыми и достаточными условиями того, чтобы функция $f(\cdot)$ была реализуема в доминирующих правдивых стратегиях. О них полезно думать в терминах *свойства слабой инверсии предпочтений*. В частности, рассмотрим любого агента i и любую пару его возможных типов θ_i' и θ_i''. Если правдивая стратегия является доминирующей для агента i, то для всех $\theta_{-i} \in \Theta_{-i}$ должно быть выполнено

$$u_i(f(\theta_i', \theta_{-i}), \theta_i') \geq u_i(f(\theta_i'', \theta_{-i}), \theta_i')$$

и

$$u_i(f(\theta_i'', \theta_{-i}), \theta_i'') \geq u_i(f(\theta_i', \theta_{-i}), \theta_i'').$$

То есть предпочтения агента i относительно $f(\theta_i', \theta_{-i})$ и $f(\theta_i'', \theta_{-i})$ должны *подвергаться слабой инверсии*, когда его тип меняется с θ_i' на θ_i''. Он слабо предпочитает альтернативу $f(\theta_i', \theta_{-i})$, когда его тип θ_i', и слабо предпочитает альтернативу $f(\theta_i'', \theta_{-i})$, когда его тип θ_i''. Наоборот, если это свойство выполнено для *всех* $\theta_{-i} \in \Theta_{-i}$ и *всех* пар $\theta_i', \theta_i'' \in \Theta_i$, то правдивая стратегия действительно является доминирующей для агента i (в упражнении 23.C.1 предлагается в этом убедиться).

Свойство слабой инверсии предпочтений может быть сформулировано в терминах *нижних лебеговских множеств агента* i. Определим нижнее лебеговское множество альтернативы x для агента i, имеющего тип θ_i, как (см. раздел 3.B)

$$L_i(x,\ \theta_i) = \{z \in X : u_i(x,\ \theta_i) \geq u_i(z,\ \theta_i)\}.$$

Используя нижнее лебеговское множество, мы получаем характеристику множества функций общественного выбора, которые могут быть реализованы в доминирующих правдивых стратегиях, описанных в утверждении 23.C.2.

Утверждение 23.C.2 Функция общественного выбора $f(\cdot)$ реализуема в доминирующих правдивых стратегиях в том и только в том случае, если для всех i, всех $\theta_{-i} \in \Theta_{-i}$ и всех пар типов $\theta_i',\ \theta_i'' \in \Theta_i$ выполнено

$$f(\theta_i'',\ \theta_{-i}) \in L_i(f(\theta_i',\ \theta_{-i}),\ \theta_i') \ \text{ и } \ f(\theta_i',\ \theta_{-i}) \in L_i(f(\theta_i'',\ \theta_{-i}),\ \theta_i''). \quad (23.C.6)$$

Идея инверсии предпочтений для функции общественного выбора, которая может быть реализована в доминирующих правдивых стратегиях, показана на рис. 23.C.1 и 23.C.2. На рис. 23.C.1 представлена функция $f(\cdot)$ для всех возможных реализаций типов (θ_1, θ_2) в ситуации, где имеются два агента ($I = 2$), два возможных значения θ_1 и три возможных значения θ_2. Рассмотрим стимулы агента 1 к честному выявлению своего типа. Если правдивая стратегия является слабо доминирующей для агента 1, то, когда его тип поменяется с θ_1' на θ_1'', должна произойти слабая инверсия предпочтений между исходами $f(\theta_1',\ \theta_2)$ и $f(\theta_1'',\ \theta_2)$ для всех возможных значений θ_2. Аналогичные рассуждения верны и для агента 2.

		θ_2		
		θ_2'	θ_2''	θ_2'''
θ_1	θ_1'	$f(\theta_1',\ \theta_2')$	$f(\theta_1',\ \theta_2'')$	$f(\theta_1',\ \theta_2''')$
	θ_1''	$f(\theta_1'',\ \theta_2')$	$f(\theta_1'',\ \theta_2'')$	$f(\theta_1'',\ \theta_2''')$

Рис. 23.C.1. Чтобы правдивая стратегия была доминирующей для агента 1, у него должна произойти слабая инверсия предпочтений между исходами $f(\theta_1',\ \theta_2)$ и $f(\theta_1'',\ \theta_2)$, когда его тип меняется с θ_1' на θ_1'' для любого возможного θ_2

Рис. 23.C.2 показывает изменение типа агента i с θ_i' на θ_i'' в экономике обмена, когда предпочтения агента удовлетворяют *свойству единственности пересечения*, обсуждавшемуся в разделах 13.C и 14.C. Набор, которым обладает агент i при исходе $f(\theta_1,\ \theta_2)$, обозначен как $f_i(\theta_1,\ \theta_2)$. Согласно утверждению 23.C.2, $f_i(\theta_i'',\ \theta_{-i})$ должно лежать в заштрихованной области, если правдивая стратегия является доминирующей для агента i. Поэтому можно рассматривать утверждение 23.C.2 как расширяющее условия использования правдивых стратегий, которые мы рассмотрели в разделе 14.C,

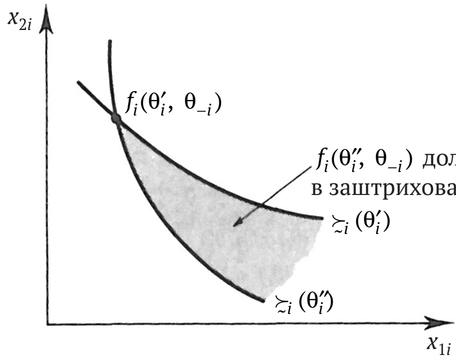


Рис. 23.C.2. Свойство слабой инверсии предпочтений (утверждение 23.C.2), когда предпочтения удовлетворяют свойству единственного пересечения

на случай нескольких агентов (здесь они должны быть выполнены для всех возможных $\theta_{-i} \in \Theta_{-i}$).

В оставшейся части раздела мы более детально рассмотрим характеристики функций общественного выбора, которые могут быть реализованы в доминирующих правдивых стратегиях.

Теорема Гиббарда — Саттертуэйта

Теорема Гиббарда — Саттертуэйта была независимо сформулирована в начале 1970-х годов двумя учеными, в честь которых она названа (Gibbard, 1973; Satterthwaite, 1975). Эта теорема о невозможности схожа по духу с теоремой Эрроу (утверждение 21.C.1). Теорема Гиббарда — Саттертуэйта во многом определила направление исследований в области стимулов и реализации. Она утверждает, что для очень общего класса задач реализовать удовлетворительные функции общественного выбора в доминирующих стратегиях невозможно.

Обозначим за $\mathscr{P}$ множество рациональных отношений предпочтения $\succsim$ на множестве X, где нет альтернатив, между которыми агент безразличен. Вспомним, что $\mathscr{R}_i = \{\succsim_i : \succsim_i = \succsim_i(\theta_i)$ для некоторых $\theta_i \in \Theta_i\}$. Обозначим за $f(\Theta)$ образ $f(\cdot)$; т. е. $f(\Theta) = \{x \in X\colon f(\theta) = x$ для некоторых $\theta \in \Theta\}$. В определениях 23.C.4 и 23.C.5 мы еще раз приведем два свойства функций общественного выбора, рассмотренные в разделе 21.E.

Определение 23.C.4. Функция общественного выбора $f(\cdot)$ является *диктаторской*, если существует агент i, такой что для всех $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_I) \in \Theta$ выполнено

$$f(\theta) \in \{x \in X\colon u_i(x, \theta_i) \geq u_i(y, \theta_i) \text{ для всех } y \in X\}.$$

Иными словами, функция общественного выбора является диктаторской, если она всегда выбирает одну из альтернатив, предпочитаемых одним индивидом i.

Определение 23.С.5. Функция общественного выбора $f(\cdot)$ является *монотонной*, в случае когда для всех θ, если θ' таково, что $L_i(f(\theta), \theta_i) \subset \subset L_i(f(\theta), \theta_i')$ для всех i [т. е. если $L_i(f(\theta), \theta_i)$ включено в $L_i(f(\theta), \theta_i')$ для всех i], то $f(\theta') = f(\theta)$.

Монотонность означает следующее. Допустим, что $f(\theta) = x$ и типы I агентов меняются на $\theta' = (\theta_1', ..., \theta_I')$ так, что ни для какого агента ни одна альтернатива, которая раньше была для него не лучше, чем x, не становится лучше x. Тогда x по-прежнему должно остаться общественным выбором. Монотонность для случая экономики обмена хорошо проиллюстрирована на рис. 23.С.3. На этом рисунке $f_i(\theta_i, \theta_{-i})$ показывает набор агента i при исходе $f(\theta_i, \theta_{-i})$. Тип агента меняется с θ_i на θ_i' так, что $L_i(f(\theta_i, \theta_{-i}), \theta_i) \subset L_i(f(\theta_i, \theta_{-i}), \theta_i')$. Если $f(\cdot)$ монотонна, то $f(\theta_i', \theta_{-i}) = f(\theta_i, \theta_{-i})$.

Докажем теперь теорему Гиббарда — Саттертуэйта.

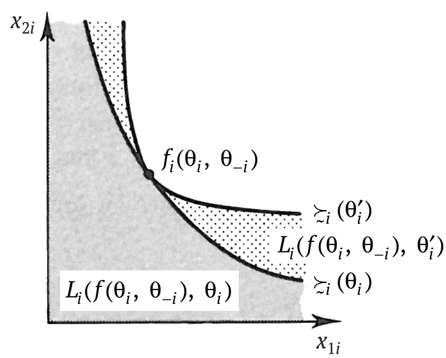


Рис. 23.С.3. Если $f(\cdot)$ монотонна, то $f(\theta_i', \theta_{-i}) = f(\theta_i, \theta_{-i})$

Утверждение 23.С.3 *(теорема Гиббарда — Саттертуэйта).* Предположим, что X конечно и содержит по крайней мере три элемента, что $\mathscr{R}_i = \mathscr{P}$ для всех i и что $f(\Theta) = X$[19]. Тогда функция общественного выбора $f(\cdot)$ реализуема в доминирующих правдивых стратегиях в том и только в том случае, если она диктаторская.

Доказательство. То, что диктаторская $f(\cdot)$ реализуема в правдивых стратегиях, очевидно (проверьте, что каждый агент скажет правду). Теперь мы покажем, что если $f(\cdot)$ реализуема в правдивых

[19] Строго говоря, для этого результата не требуется, чтобы X было конечно. Но без этого свойства наше предположение, что агенты максимизируют ожидаемую полезность, может быть несовместимо с условием $\mathscr{R}_i = \mathscr{P}$ (например, если $X = \mathbb{R}_+^L$, лексикографические предпочтения, рассмотренные в примере 3.С.1, — это строгие предпочтения, не представимые функцией полезности). В работе Барберы и Пелега (Barberà, Peleg, 1990) представлено доказательство утверждения 23.С.3 для произвольного X, в случае когда $\mathscr{R}_i$ — множество всех *непрерывных* предпочтений.

стратегиях, то она должна быть диктаторской. Доказательство состоит из трех шагов.

Шаг 1. Если $\mathscr{R}_i = \mathscr{P}$ для всех i и $f(\cdot)$ реализуема в доминирующих правдивых стратегиях, то $f(\cdot)$ монотонна.

Рассмотрим два профиля типов, θ и θ', такие что $L_i(f(\theta), \theta_i) \subset \subset L_i(f(\theta), \theta'_i)$ для всех i. Мы хотим показать, что $f(\theta') = f(\theta)$. Начнем с определения $f(\theta'_1, \theta_2, ..., \theta_I)$. Из утверждения 23.C.2 следует, что должно быть выполнено $f(\theta'_1, \theta_2, ..., \theta_I) \in L_1(f(\theta), \theta_1)$. Таким образом, $f(\theta'_1, \theta_2, ..., \theta_I) \in L_1(f(\theta), \theta'_1)$. Согласно предположению, никакие две альтернативы не являются эквивалентными в отношении предпочтения $\succsim_1 (\theta'_1)$, а значит, $f(\theta'_1, \theta_2, ..., \theta_I) = f(\theta)$. Аналогично можно показать, что $f(\theta'_1, \theta'_2, \theta_3, ..., \theta_I) = f(\theta)$. Продолжая этот процесс итеративно, мы увидим, что $f(\theta') = f(\theta)$. Получаем, что $f(\cdot)$ монотонна.

Шаг 2. Если $\mathscr{R}_i = \mathscr{P}$ для всех i, $f(\cdot)$ монотонна и $f(\Theta) = X$, то $f(\cdot)$ ex post эффективна.

Предположим, что это не так. Тогда существуют $\theta \in \Theta$ и $y \in X$, такие что $u_i(y, \theta_i) > u_i(f(\theta), \theta_i)$ для всех i (никакие две альтернативы не могут быть эквивалентны). Поскольку $f(\Theta) = X$, существует $\theta' \in \Theta$, такое что $f(\theta') = y$. Теперь выберем вектор типов $\theta'' \in \Theta$, такой что для всех i будет выполнено $u_i(y, \theta''_i) > u_i(f(\theta), \theta''_i) > u_i(z, \theta''_i)$ для всех $z \neq \neq f(\theta)$ и y. (Вспомним, что все предпочтения в $\mathscr{P}$ возможны.) Поскольку $L_i(y, \theta'_i) \subset L_i(y, \theta''_i)$ для всех i, из монотонности следует, что $f(\theta'') = y$. Но раз $L_i(f(\theta), \theta_i) \subset L_i(f(\theta), \theta''_i)$ для всех i, то из монотонности также следует, что $f(\theta'') = f(\theta)$. Но $y \neq f(\theta)$, так что мы пришли к противоречию, и $f(\cdot)$ должна быть *ex post* эффективной.

Шаг 3. Монотонная и ex post эффективная функция общественного выбора $f(\cdot)$ с необходимостью является диктаторской.

Шаг 3 напрямую следует из утверждения 21.E.1.

Вместе шаги 1–3 доказывают теорему. ■

Стоит отметить, что вывод утверждения 23.C.3 *неверен*, если X содержит два элемента. Например, в этом случае функция общественного выбора, реализующая голосование по правилу простого большинства (см. раздел 21.E), реализуема в доминирующих правдивых стратегиях и не является диктаторской (упражнение 23.C.2).

Заметим также, что если $\mathscr{R}_i = \mathscr{P}$ для всех i, то для любой *ex post* эффективной функции общественного выбора должно быть выполнено $f(\Theta) = X$ (убедитесь в этом в упражнении 23.C.3). Таким образом, теорема Гиббарда — Саттертуэйта утверждает, что если $\mathscr{R}_i = \mathscr{P}$ для всех i и X содержит более двух элементов, то лишь диктаторские *ex post* эффективные функции общественного выбора реализуемы в доминирующих правдивых стратегиях.

Значит, если мы все же хотим реализовывать желаемые функции общественного выбора, то должны либо ослабить наши требования к концепции реализуемости (приняв возможность реализации в менее жестких равновесиях, таких как равновесия Байеса — Нэша), либо ограничиться более узкими случаями. В оставшейся части этого раздела мы пойдем по второму пути, изучая возможность реализации желаемых функций общественного выбора в доминирующих стратегиях для случая квазилинейных предпочтений. Первый путь будет рассмотрен в разделе 23.D: там мы обратимся к реализации в равновесиях Байеса — Нэша.

Утверждение 23.C.3 легко обобщить двумя способами. Во-первых, вывод остается верным в ситуациях, когда $\mathscr{R}_i$ содержит в себе $\mathscr{P}$ (множество всех отношений предпочтения, для которых нет эквивалентных альтернатив), а во-вторых, в ситуациях, когда возможно индивидуальное безразличие. Формально это показано в следствии 23.C.1.

Следствие 23.C.1 *Предположим, что X конечно и содержит по крайней мере три элемента, что $\mathsf{P} \subset \mathsf{R}_i$ для всех i и что $f(\Theta) = X$. Тогда функция общественного выбора $f(\cdot)$ реализуема в доминирующих правдивых стратегиях тогда и только тогда, когда она является диктаторской.*

Доказательство. То, что диктаторская функция общественного выбора реализуема в правдивых стратегиях, вновь очевидно. Осталось показать, что при сделанных предположениях $f(\cdot)$ должна быть диктаторской, если она реализуема в доминирующих правдивых стратегиях.

Из утверждения 23.C.3 следует, что должен существовать агент h, для которого $f(\theta) \in \{x \in X\colon u_h(x, \theta_h) \geq u_h(y, \theta_h)$ для всех $y \in X\}$, когда $\succsim_i(\theta_i) \in \mathscr{P}$ для всех i (см. упражнение 23.C.4). Без потери общности предположим, что это агент I. Предположим теперь, что доказываемый результат неверен. Тогда существует профиль типов $\theta' \in \Theta$, такой что $f(\theta') \notin \{x \in X : u_I(x, \theta'_I) \geq u_I(y, \theta'_I)$ для всех $y \in X\}$. Пусть $z \in \{x \in X : u_I(x, \theta'_i) \geq u_I(y, \theta'_I)$ для всех $y \in X\}$. Рассмотрим профиль типов $\theta'' \in \Theta$, такой что (i) $\succsim_i(\theta''_i) \in \mathscr{P}$ для всех $i = 1, \ldots, I$; (2) для всех агентов $i \neq I$ выполнено $u_i(f(\theta'), \theta''_i) > u_i(z, \theta''_i) > u_i(x, \theta''_i)$ для всех $x \notin \{f(\theta'), z\}$, и (3) $u_I(z, \theta''_I) > u_I(f(\theta'), \theta''_I) > u_I(x, \theta''_I)$ для всех $x \notin \{f(\theta'), z\}$. Рассмотрим профиль типов $(\theta''_1, \theta'_2, \ldots, \theta'_I)$. Согласно утверждению 23.C.2 должно быть выполнено $f(\theta') \in L_1(f(\theta''_1, \theta'_2, \ldots, \theta'_I), \theta''_1)$, а также $f(\theta''_1, \theta'_2, \ldots, \theta'_I) = f(\theta')$. Можно итеративно провести эти рассуждения для всех $i \neq I$ и показать, что $f(\theta''_1, \ldots, \theta''_{I-1}, \theta'_I) = f(\theta')$. Далее заметим, что (согласно утверждению 23.C.2) должно быть выполнено $f(\theta''_1, \ldots, \theta''_{I-1}, \theta'_I) \in L_I(f(\theta''), \theta''_I)$. Получаем, что $f(\theta'') \in \{z, f(\theta')\}$. Но (согласно утверждению 23.C.2) должно быть также выполнено $f(\theta'') \in L_I(f(\theta''_1, \ldots, \theta''_{I-1}, \theta'_I), \theta'_I)$, и, поскольку $u_I(z, \theta'_I) > u_I(f(\theta'), \theta'_I)$, не может быть верно $f(\theta'') = z$. Таким образом, $f(\theta'') = f(\theta')$. Но поскольку $u_I(z, \theta''_i) > u_I(f(\theta'), \theta''_i)$, это противоречит тому, что агент I является диктатором при $\succsim_i(\theta_i) \in \mathscr{P}$ для всех i. ■

Во втором обобщении мы получим схожий результат для функций общественного выбора, образ которых $f(\Theta)$ меньше, чем X. Сначала дадим определение.

Определение 23.C.6. Функция общественного выбора $f(\cdot)$ является *диктаторской* на множестве $\hat{X} \subset X$, если существует агент i, такой что для каждого $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_I) \in \Theta$ выполнено $f(\theta) \in \{x \in \hat{X} : u_i(x, \theta_i) \geq u_i(y, \theta_i)$ для всех $y \in \hat{X}\}$.

Это более слабое определение диктаторства: оно требует, чтобы $f(\cdot)$ выбирала одну из предпочитаемых диктатором альтернатив из множества $\hat{X}$, а не из X.

Следствие 23.C.2 *Предположим, что X конечно, что $f(\Theta)$ содержит по крайней мере три элемента и что $\mathscr{P} \subset \mathscr{R}_i$ для всех $i = 1, \ldots, I$. Тогда функция общественного выбора $f(\cdot)$ реализуема в доминирующих правдивых стратегиях тогда и только тогда, когда она является диктаторской на множестве $f(\Theta)$.*

Доказательство. Очевидно, что диктаторская на множестве $f(\Theta)$ функция общественного выбора $f(\cdot)$ реализуема в правдивых стратегиях. Покажем, что при сделанных предположениях $f(\cdot)$ должна быть диктаторской на множестве $f(\Theta)$. Если $f\colon \Theta \to X$ реализуема в доминирующих правдивых стратегиях, когда X составляет множество альтернатив, то функция общественного выбора $\hat{f} : \Theta \to f(\Theta)$ реализуема в доминирующих правдивых стратегиях, если $\hat{f}(\theta) = f(\theta)$ для всех $\theta \in \Theta$ и множество альтернатив составляет $f(\Theta)$. Согласно следствию 23.C.1, $\hat{f}(\cdot)$ должна быть диктаторской. Значит, $f(\cdot)$ является диктаторской на множестве $f(\Theta)$. ■

Получается, что когда $\mathscr{R}_i \subset \mathscr{P}$ для всех i, множество реализуемых в доминирующих правдивых стратегиях функций общественного выбора, образ которых содержит по меньшей мере три элемента, в точности совпадает со множеством функций общественного выбора, которые могут быть (косвенно) реализованы при ограничении множества возможных исходов до некоторого подмножества $\hat{X} \in X$ и наделении некоторого агента i правом выбора из этого множества.

Квазилинейная экономика: механизм Гровса — Кларка

В этом подразделе мы рассмотрим частный, но довольно популярный случай экономики, в которой предпочтения агентов квазилинейны. В такой экономике альтернатива — это вектор $x = (k, t_1, \ldots, t_I)$, где k — элемент конечного множества K (называемый «выбор проекта»), а $t_i \in \mathbb{R}$ — трансфер товара-измерителя («денег») агенту i. Функция полезности агента i имеет квазилинейный вид:

$$u_i(x, \theta_i) = v_i(k, \theta_i) + (\bar{m}_i + t_i),$$

где $\bar{m}_i$ — начальный запас товара-измерителя у агента i. Мы предполагаем, что речь идет о закрытой системе, где у агентов нет источников внешнего финансирования. Таким образом, множество альтернатив задается как[20]

$$X = \{(k, t_1, \ldots, t_I) \colon k \in K, t_i \in \mathbb{R} \text{ для всех } i, \text{ а также } \sum_i t_i \le 0\}.$$

Заметим, что эта постановка охватывает случаи, изучавшиеся в примерах 23.B.3 и 23.B.4.

Пример 23.C.1. *Общественный проект.* Можно поместить обобщенную версию ситуации общественного проекта (см. пример 23.B.3) в рамки описанной выше экономики. Для этого положим, что K содержит возможные уровни реализации проекта (т. е. если $K = \{0, 1\}$, то проект может только «не реализоваться» или «реализоваться») и обозначим за $c(k)$ издержки на осуществление проекта на уровне $k \in K$. Предположим, что $\tilde{v}_i(k, \theta_i)$ — валовая выгода агента i от проекта уровня k и при отсутствии прочих трансфертов проект будет профинансирован агентами в равных долях [т. е. каждый агент i заплатит сумму $c(k)/I$][21]. Тогда мы можем записать чистую выгоду агента i с типом θ_i от проекта уровня k как $v_i(k, \theta_i) = \tilde{v}_i(k, \theta_i) - (c(k)/I)$. Теперь t_i — это трансферты в дополнение к платежам $c(k)/I$. ■

Пример 23.C.2. *Размещение единицы неделимого частного блага.* Рассмотрим ситуацию, описанную в примере 23.B.4, в которой единицу неделимого частного блага в итоге должен получить один из I агентов. Здесь «выбор проекта» $k = (y_1, \ldots, y_I)$ представляет собой распределение частного блага, а $K = \{(y_1, \ldots, y_I) \colon y_i \in \{0, 1\}$ для всех i, $\sum_i y_i = 1\}$. Функция оценки агента i принимает вид $v_i(k, \theta_i) = \theta_i y_i$. ■

Функция общественного выбора в квазилинейном случае выглядит как $f(\cdot) = (k(\cdot), t_1(\cdot), \ldots, t_I(\cdot))$, при этом для всех $\theta \in \Theta$ выполнено: $k(\theta) \in K$ и $\sum_i t_i \le 0$.

Заметим, что если функция общественного выбора $f(\cdot)$ ex post эффективна, то $k(\theta)$ должно удовлетворять

$$\sum_{i=1}^{I} v_i\left(k(\theta), \theta_i\right) \ge \sum_{i=1}^{I} v_i\left(k, \theta_i\right) \text{ для всех } \theta \in \Theta \text{ и } k \in K. \tag{23.C.7}$$

Начнем с результата, который определяет класс функций общественного выбора, удовлетворяющих (23.C.7) и реализуемых в доминирующих правдивых стратегиях.

Утверждение 23.C.4. Пусть $k^*(\cdot)$ — функция, удовлетворяющая (23.C.7). Функция общественного выбора $f(\cdot) = (k^*(\cdot), t_1(\cdot), \ldots, t_I(\cdot))$ реализуема в доминирующих правдивых стратегиях, если для всех $i = 1, \ldots, I$ выполнено

$$t_i(\theta) = \left[\sum_{i \ne j} v_j(k^*(\theta), \theta_j)\right] + h_i(\theta_{-i}), \tag{23.C.8}$$

где $h_i(\cdot)$ — произвольная функция θ_{-i}.

[20] Заметим, что X не является компактом. Это может показаться небольшим парадоксом: в такой постановке не существует диктаторских функций общественного выбора, поскольку любой агент i, имеющий возможность выбрать наилучшую для себя альтернативу из X, может требовать неограниченные суммы денег у остальных агентов.

[21] От выбранного «базового» способа распределения затрат никакие наши действия зависеть не будут.

Доказательство. Если правдивая стратегия не является доминирующей для какого-то агента i, то существуют θ_i, $\hat{\theta}_i$ и θ_{-i}, такие что

$$v_i(k^*(\hat{\theta}_i,\ \theta_{-i}),\ \theta_i) + t_i(\hat{\theta}_i,\ \theta_{-i}) > v_i(k^*(\theta_i,\ \theta_{-i}),\ \theta_i) + t_i(\theta_i,\ \theta_{-i}).$$

Используя (23.C.8) для $t_i\left(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}\right)$ и для $t_i\left(\theta_i, \theta_{-i}\right)$, получится, что:

$$\sum_{j=1}^{I} v_j\left(k^*\left(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}\right), \theta_j\right) > \sum_{j=1}^{I} v_j\left(k^*(\theta),\ \theta_j\right),$$

что противоречит тому, что $k^*(\cdot)$ удовлетворяет (23.C.7). Таким образом, $f(\cdot)$ должна быть реализуема в доминирующих правдивых стратегиях. ■

Механизм прямого выявления $\Gamma = (\Theta_1, \dots, \Theta_I, f(\cdot))$, в котором $f(\cdot) = (k(\cdot), t_1(\cdot), \dots, t_I(\cdot))$ удовлетворяет (23.C.7) и (23.C.8), известен как *механизм Гровса* или *схема Гровса* (Groves, 1973)[22]. В механизме Гровса трансферт агента i зависит от типа, который он объявляет, только посредством изменения проекта $k^*(\theta)$ (при условии что объявленные типы всех остальных агентов θ_{-i} заданы). Более того, изменение трансферта агента i, вызванное изменением k (которое вызвано изменением объявленного типа агента i), в точности равно эффекту, с которым при этом сталкиваются остальные агенты. Иными словами, изменение трансферта агента i в точности отражает *экстерналию*, которую он накладывает на остальных. В результате он интернализует этот внешний эффект и объявляет свой тип таким образом (причем правдиво), что приводит к уровню осуществления проекта k, который максимизирует совокупный выигрыш I агентов, т. е. $\sum_i v_i(k,\ \theta_i)$.

Особый случай механизма Гровса был независимо открыт Кларком (Clarke, 1971) и теперь известен как *механизм Кларка* или *механизм ключевых участников*. Этот механизм соответствует случаю, когда $h_i(\theta_{-i}) = -\sum_{j\neq i} v_j(k^*_{-i}(\theta_{-i}),\ \theta_j)$, а $k^*_{-i}(\theta_{-i})$ для всех $\theta_{-i} \in \Theta_{-i}$ удовлетворяет условию

$$\sum_{j\neq i} v_j\left(k^*_{-i}\left(\theta_{-i}\right),\ \theta_j\right) \geq \sum_{j\neq i} v_j\left(k,\ \theta_j\right) \text{ для всех } k \in K.$$

То есть $k^*_{-i}(\theta_{-i})$ — это проект, который был бы ex post эффективным, если бы имелось только $I - 1$ агентов, $j \neq i$. Трансферт агента i в механизме Кларка определяется как

$$t_i(\theta) = \left[\sum_{j\neq i} v_j(k^*(\theta),\ \theta_j)\right] - \left[\sum_{j\neq i} v_j(k^*_{-i}(\theta_{-i}),\ \theta_j)\right].$$

Заметим, что трансфер агента i равен 0, если объявление его типа не меняет решения об осуществлении проекта по сравнению с ситуацией,

[22] Иногда мы, позволяя себе некоторую нестрогость, будем называть механизмом Гровса функцию общественного выбора $f(\cdot)$, удовлетворяющую (23.C.7) и (23.C.8).

которая была бы ex post эффективной для агентов $j \neq i$ [т. е. если $k^*(\theta) = k^*_{-i}(\theta_{-i})$]. Если же объявление агента i меняет решение по проекту [т. е. если $k^*(\theta) \neq k^*_{-i}(\theta_{-i})$], то его трансферт отрицателен. В последнем случае говорят, что участник i является «ключевым» для эффективного выбора проекта. Таким образом, в механизме Кларка агент i платит налог, равный воздействию его решения на остальных участников, если он является ключевым, и не платит ничего в ином случае[23].

Интересно, что в случае размещения единицы неделимого частного блага механизм Кларка — это в точности функция общественного выбора, реализуемая аукционом второй скрытой цены (см. пример 23.B.6). А именно: (1) $k^*(\theta)$ — правило распределения, отдающее благо агенту, который его больше всего ценит; (2) агент i является ключевым именно тогда, когда он является покупателем с наибольшей оценкой блага; (3) в этом случае его платеж равен второй по величине оценке блага (в частности, в этом случае $\sum_{j \neq i} v_j(k^*(\theta), \theta_j) = 0$ и $\sum_{j \neq i} v_j(k^*_{-i}(\theta_{-i}),\ \theta_j)$ равно второй по величине оценке).

Мы видели, что функции общественного выбора, удовлетворяющие (23.C.7) и (23.C.8), реализуемы в доминирующих правдивых стратегиях. Существуют ли другие реализуемые в правдивых стратегиях функции, удовлетворяющие (23.C.7)? Результат, приведенный в утверждении 23.C.5 [из работы Грина и Лаффона (Green, Laffont, 1979)], содержит один из наборов условий, при выполнении которых ответ будет положительным[24]. В нем через $\mathscr{V}$ обозначено множество всех возможных функций $v\colon K \to \mathbb{R}$.

Утверждение 23.C.5. Предположим, что для каждого агента $i = 1, \ldots, I$ выполнено $\{v_i(\cdot,\ \theta_i) : \theta_i \in \Theta_i\} = \mathscr{V}$, т. е. все возможные функции оценки из K в $\mathbb{R}$ встречаются среди типов $\theta_i \in \Theta_i$. Тогда функция общественного выбора $f(\cdot) = (k^*(\cdot), t_1(\cdot), \ldots, t_I(\cdot))$, в которой $k^*(\cdot)$ удовлетворяет (23.C.7), реализуема в доминирующих правдивых стратегиях, только если $t_i(\cdot)$ удовлетворяет (23.C.8) для всех $i = 1, \ldots, I$.

Доказательство. Заметим сначала, что мы всегда можем записать

$$t_i(\theta_i,\ \theta_{-i}) = \sum_{j \neq i} v_j(k^*(\theta_i,\ \theta_{-i}),\ \theta_j) + h_i(\theta_i,\ \theta_{-i}). \qquad (23.C.9)$$

Фактически мы хотим показать, что функция $h_i(\cdot)$ должна быть независима от θ_i, если $f(\cdot)$ реализуема в доминирующих правдивых стратегиях. Предположим, что это не так, т. е. $f(\cdot)$ реализуема в доминирующих правдивых

---

[23] Заметим, что функция общественного выбора механизма Кларка удовлетворяет условию допустимости $\sum_i t_i(\theta) \leq 0$ для всех θ. Действительно, если рассмотреть условие (23.C.8), можно увидеть, что необходимое (но *не* достаточное) условие для выполнения $\sum_i t_i(\theta) \leq 0$ для каждого θ выглядит как

$$h_i(\theta_{-i}) \leq -\sum_{j \neq i} v_j(k^*_{-i}(\theta_{-i}),\ \theta_j) \text{ для каждого } \theta_{-i} \in \Theta_{-i}.$$

[24] Пример другого набора приведен мелким шрифтом в конце этой главы, а также в упражнении 23.C.10.

стратегиях, но для некоторых θ_i, $\hat{\theta}_i$ и θ_{-i} верно $h_i(\theta_i,\ \theta_{-i}) \neq h_i(\hat{\theta}_i,\ \theta_{-i})$. Рассмотрим два случая.

(1) $k^*(\theta_i,\ \theta_{-i}) = k^*(\hat{\theta}_i,\ \theta_{-i})$. Если $f(\cdot)$ реализуема в доминирующих правдивых стратегиях, тогда из (23.C.3) следует

$$v_i(k^*(\theta_i,\ \theta_{-i}),\ \theta_i) + t_i(\theta_i,\ \theta_{-i}) \geq v_i(k^*(\hat{\theta}_i,\ \theta_{-i}),\ \theta_i) + t_i(\hat{\theta}_i,\ \theta_{-i})$$

и

$$v_i(k^*(\hat{\theta}_i,\ \theta_{-i}),\ \hat{\theta}_i) + t_i(\hat{\theta}_i,\ \theta_{-i}) \geq v_i(k^*(\theta_i,\ \theta_{-i}),\ \hat{\theta}_i) + t_i(\theta_i,\ \theta_{-i}).$$

Поскольку $k^*(\theta_i,\ \theta_{-i}) = k^*(\hat{\theta}_i,\ \theta_{-i})$, из этих двух неравенств следует $t_i(\theta_i,\ \theta_{-i}) = t_i(\hat{\theta}_i,\ \theta_{-i})$. С учетом (23.C.9) получаем $h_i(\theta_i,\ \theta_{-i}) = h_i(\hat{\theta}_i,\ \theta_{-i})$ — противоречие.

(2) $k^*(\theta_i,\ \theta_{-i}) \neq k^*(\hat{\theta}_i,\ \theta_{-i})$. Предположим без ограничения общности, что $h_i\ (\theta_i,\ \theta_{-i}) < h_i\ (\hat{\theta}_i,\ \theta_{-i})$. Рассмотрим тип $\theta_i^\varepsilon \in \Theta_i$, такой что

$$v_i(k,\ \theta_i^\varepsilon) = \begin{cases} -\sum\limits_{j\neq i} v_j(k^*(\theta_i,\ \theta_{-i},\ \theta_j)), & \text{если } k = k^*(\theta_i,\ \theta_{-i}); \\ -\sum\limits_{j\neq i} v_j(k^*(\hat{\theta}_i,\ \theta_{-i},\ \theta_j)) + \varepsilon, & \text{если } k = k^*(\hat{\theta}_i,\ \theta_{-i}); \\ -\infty & \text{— иначе.} \end{cases} \tag{23.C.10}$$

Мы докажем, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ тип θ_i^ε будет строго предпочитать ложное сообщение о том, что он принадлежит к типу θ_i, когда типы остальных агентов θ_{-i}. Сначала заметим, что $k^*(\theta_i^\varepsilon,\ \theta_{-i}) = k^*(\hat{\theta}_i,\ \theta_{-i})$, поскольку $k = k^*(\hat{\theta}_i,\ \theta_{-i})$ доставляет максимум функции $v_i(k,\ \theta_i^\varepsilon) + \sum\limits_{j\neq i} v_j(k,\ \theta_j)$. Таким образом, для того чтобы правдивая стратегия была доминирующей, нужно, чтобы было выполнено

$$v_i(k^*(\hat{\theta}_i,\ \theta_{-i}),\ \theta_i^\varepsilon) + t_i(\theta_i^\varepsilon,\ \theta_{-i}) \geq v_i(k^*(\theta_i,\ \theta_{-i}),\ \theta_i) + t_i(\theta_i,\ \theta_{-i}).$$

Проводя замены из равенств (23.C.9) и (23.C.10), получаем

$$\varepsilon + h_i(\theta_i^\varepsilon,\ \theta_{-i}) \geq h_i(\theta_i,\ \theta_{-i}).$$

Следуя логике части (1), запишем: $h_i(\theta_i^\varepsilon,\ \theta_{-i}) = h_i(\hat{\theta}_i,\ \theta_{-i})$, поскольку $k^*(\theta_i^\varepsilon,\ \theta_{-i}) = k^*(\hat{\theta}_i,\ \theta_{-i})$. Получаем

$$\varepsilon + h_i(\hat{\theta}_i,\ \theta_{-i}) \geq h_i(\theta_i,\ \theta_{-i}). \tag{23.C.11}$$

Согласно сделанному предположению, $h(\theta_i,\ \theta_{-i}) > h(\hat{\theta}_i,\ \theta_{-i})$. Значит, при достаточно малых значениях $\varepsilon > 0$ условие (23.C.11) не будет выполнено. ■

Таким образом, когда среди типов $\theta_i \in \Theta_i$ встречаются все возможные функции $v_i(\cdot)$, изо всех функций общественного выбора, удовлетворяющих (23.C.7), только подходящие для механизма Гровса можно реализовать в доминирующих правдивых стратегиях.

Механизм Гровса и сбалансированность бюджета

До текущего момента мы изучали, можно ли реализовать в доминирующих стратегиях функцию общественного выбора, которая всегда приводит к эффективному выбору k [такую, которая удовлетворяет (23.C.7)]. Но эффективность ex post требует также, чтобы не было потерь товара-измерителя, т. е. чтобы выполнялось *условие сбалансированности бюджета*:

$$\sum_i t_i(\theta) = 0 \text{ для всех } \theta \in \Theta. \tag{23.C.12}$$

Обсудим вкратце, когда полностью ex post эффективные функции [удовлетворяющие и (23.C.7), и (23.C.12)] могут быть реализованы в доминирующих правдивых стратегиях.

К сожалению, во многих случаях такая реализация невозможна. Например, результат из утверждения 23.C.6 [из работы Грина и Лаффона (Green, Laffont, 1979)], доказательство которого мы опустим, говорит, что если множество возможных типов агента достаточно разнообразно, то ни одна ex post эффективная функция общественного выбора не является реализуемой в доминирующих правдивых стратегиях[25].

Утверждение 23.C.6 *Предположим, что для каждого агента* $i = 1, \ldots, I$ *выполнено* $\{v_i(\cdot, \theta_i) : \theta_i \in \Theta_i\} = \mathsf{V}$, *т. е. все возможные функции оценки из* K *в* $\mathbb{R}$ *встречаются среди типов* $\theta_i \in \Theta_i$. *Тогда не существует функции общественного выбора* $f(\cdot) = (k^*(\cdot), t_1(\cdot), \ldots, t_I(\cdot))$, *реализуемой в доминирующих правдивых стратегиях и ex post эффективной, т. е. удовлетворяющей (23.C.7) и (23.C.12).*

Получается, что при предположении утверждения 23.C.6 наличие частной информации вынуждает I агентов либо согласиться с некоторыми потерями товара-измерителя [т. е. с тем, что $\sum_i t_i(\theta) < 0$ для некоторого θ, как в механизме Кларка], либо не рассчитывать на то, что в каждом случае будет реализован эффективный проект [так что $k(\theta)$ не будет удовлетворять (23.C.7) при некоторых θ].

Есть особый случай, когда справедлив более позитивный результат, — случай, когда предпочтения хотя бы одного из агентов известны. Обозначим его как «агент 0», и пусть по-прежнему предпочтения I агентов ($i = 1, \ldots, I$) будут неизвестны (всего получается $I + 1$ агентов). В самом простом случае, конечно, у агента 0 вообще нет предпочтений относительно выбора проекта k, и его предпочтения представимы функцией $u_i(x) = \bar{m}_0 + t_0$. Мы уже видели такие предпочтения в примере 23.B.4 у продавца в аукционе. Другой пример — ситуация, когда осуществление общественного проекта затрагивает только некоторых участников экономики (так что агент 0 представляет всех участников, которых проект не затрагивает).

Когда такой агент существует, эффективность ex post функции общественного выбора по-прежнему требует выполнения (23.C.7), но теперь она совместима с *любыми* функциями трансфертов $t_1(\cdot), \ldots, t_I(\cdot)$ агентов I с частной информацией, если мы установим $t_0(\theta) = -\sum_{i \neq 0} t_i(\theta)$ для всех θ. Та-

[25] Другой похожий результат можно найти в обсуждении мелким шрифтом в конце этой главы, а также в упражнении 23.C.10.

ким образом, в этой ситуации с $I + 1$ агентами механизмы Гровса, представленные в утверждении 23.C.4 (где только агенты $i = 1, \ldots, I$ объявляют свои типы), ex post эффективны, если мы устанавливаем трансферт агента 0 как $t_0(\theta) = -\sum_{i \neq 0} t_i(\theta)$ для всех θ. Иными словами, наличие «внешнего» агента 0, у которого нет частной информации, позволяет нам не соблюдать условие бюджетного баланса для тех агентов, у которых она есть.

Стоит, однако, добавить к этому, на первый взгляд позитивному, результату одно предостережение. До сих пор мы не думали о том, согласятся ли агенты участвовать в механизме. Как мы увидим в разделе 23.E, при условии добровольного участия ex post эффективных функций общественного выбора, реализуемых в доминирующих стратегиях, может не существовать даже при наличии внешнего агента.

Дифференцируемый случай

Часто в случаях, когда $K = \mathbb{R}$, функции $v_i(\cdot, \theta_i)$ предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми с $\partial^2 v_i(k, \theta_i)/\partial k^2 < 0$ и $\partial^2 v_i(k, \theta_i)/\partial k\ \partial\theta_i \neq 0$ для всех (k, θ_i), где каждое θ_i выбирается из интервала $[\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i] \subset \mathbb{R}$ при $\underline{\theta}_i \neq \overline{\theta}_i$. В этом случае о функциях, реализуемых в доминирующих правдивых стратегиях, можно сказать довольно много. В полной мере можно увидеть это в упражнении 23.C.9, а здесь мы просто покажем, что в дифференцируемом случае мы можем быстро получить несколько предыдущих результатов.

Заметим сначала, что для любой непрерывно дифференцируемой функции общественного выбора $f(\cdot) = (k(\cdot), t_1(\cdot), \ldots, t_I(\cdot))$, если правдивая стратегия является доминирующей для агента i, то его условие первого порядка для всех θ_{-i} имеет вид

$$\frac{\partial v_i(k(\theta_i, \theta_{-i}), \theta_i)}{\partial k} \frac{\partial k(\theta_i, \theta_{-i})}{\partial \theta_i} + \frac{\partial t_i(\theta_i, \theta_{-i})}{\partial \theta_i} = 0 \tag{23.C.13}$$

при всех $\theta_i \in (\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i)$. Интегрируя (23.C.13) по переменной θ_i, для всех профилей типов (θ_i, θ_{-i}) получаем

$$t_i(\theta_i, \theta_{-i}) = t_i(\underline{\theta}_i, \theta_{-i}) - \int_{\underline{\theta}_i}^{\theta_i} \frac{\partial v_i(k(s, \theta_{-i}), s)}{\partial k} \frac{\partial k(s, \theta_{-i})}{\partial s} ds. \tag{23.C.14}$$

Рассмотрим теперь любую функцию общественного выбора $f(\cdot) = (k^*(\cdot), t_1(\cdot), \ldots, t_I(\cdot))$, удовлетворяющую (23.C.7). При текущих предположениях $k^*(\cdot)$ должна для всех θ удовлетворять

$$\sum_{j=1}^{I} \frac{\partial v_j(k^*(\theta), \theta_j)}{\partial k} = 0. \tag{23.C.15}$$

Более того, используя теорему о неявной функции и наши предположения о $v_i(\cdot)$, мы видим, что $k^*(\cdot)$ непрерывно дифференцируема и имеет ненулевые частные производные $\partial k^*(\theta)/\partial\theta_i \neq 0$ для всех i.

Теперь, используя (23.C.15), произведем замену $\partial v_i(k^*(s, \theta_{-i}), s)/\partial k$ в (23.C.14). Тогда мы получим, что для всех профилей (θ_i, θ_{-i}) выполнено

$$t_i(\theta_i,\ \theta_{-i}) = t_i(\underline{\theta}_i,\ \theta_{-i}) + \int\limits_{\underline{\theta}_i}^{\theta_i}\left(\sum_{j\neq i}\frac{\partial v_j(k^*(s,\ \theta_{-i}),\ \theta_j)}{\partial k}\right)\frac{\partial k(s,\ \theta_{-i})}{\partial s}\,ds =$$

$$= t_i(\underline{\theta}_i,\ \theta_{-i}) + \int\limits_{k^*(\underline{\theta}_i,\theta_{-i})}^{k^*(\theta_i,\theta_{-i})}\left(\sum_{j\neq i}\frac{\partial v_j(k,\ \theta_j)}{\partial k}\right)dk =$$

$$= t_i(\underline{\theta}_i,\ \theta_{-i}) + \sum_{j\neq i} v_j(k^*(\theta_i,\ \theta_{-i}),\ \theta_j) - \sum_{j\neq i} v_j(k^*(\underline{\theta}_i,\ \theta_{-i}),\ \theta_j).$$

Но это верно в том и только в том случае, если $t_i(\theta)$ удовлетворяет (23.C.8). В этой ситуации изо всех функций общественного выбора, удовлетворяющих (23.C.7), только функции, подходящие для механизма Гровса, можно реализовать в доминирующих правдивых стратегиях[26].

Рассмотрим теперь вопрос соблюдения сбалансированности бюджета в случае, когда внешнего агента нет. Мы покажем, что в дифференцируемом случае соблюдение (23.C.15) и сбалансированного бюджета невозможно, если $I = 2$ [случай $I > 2$ см. в работе Лаффона и Маскина (Laffont, Maskin, 1980) и упражнении 23.C.10]. Из (23.C.13) для всех $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ следует

$$\frac{\partial t_1(\theta)}{\partial \theta_1} = -\frac{\partial v_1(k^*(\theta),\ \theta_1)}{\partial k}\frac{\partial k^*(\theta)}{\partial \theta_1}$$

и

$$\frac{\partial t_2(\theta)}{\partial \theta_2} = -\frac{\partial v_2(k^*(\theta),\ \theta_2)}{\partial k}\frac{\partial k^*(\theta)}{\partial \theta_2}.$$

Получаем, что для всех $\theta = (\theta_1, \theta_2)$

$$-\frac{\partial^2 t_1(\theta)}{\partial \theta_1\ \partial \theta_2} = \frac{\partial^2 v_1(k^*(\theta),\ \theta_1)}{\partial k^2}\frac{\partial k^*(\theta)}{\partial \theta_2}\frac{\partial k^*(\theta)}{\partial \theta_1} + \frac{\partial v_1(k^*(\theta),\ \theta_1)}{\partial k}\frac{\partial^2 k^*(\theta)}{\partial \theta_1\ \partial \theta_2} \qquad (23.C.16)$$

и

$$-\frac{\partial^2 t_2(\theta)}{\partial \theta_1\ \partial \theta_2} = \frac{\partial^2 v_2(k^*(\theta),\ \theta_2)}{\partial k^2}\frac{\partial k^*(\theta)}{\partial \theta_1}\frac{\partial k^*(\theta)}{\partial \theta_2} + \frac{\partial v_2(k^*(\theta),\ \theta_2)}{\partial k}\frac{\partial^2 k^*(\theta)}{\partial \theta_1\ \partial \theta_2}. \qquad (23.C.17)$$

Если сбалансированность бюджета выполнена, то $t_1(\theta) = -t_2(\theta)$ для всех θ, так что должно быть выполнено $\partial^2 t_1(\theta)\big/\partial\theta_1\partial\theta_2 = -\partial^2 t_2(\theta)\big/\partial\theta_1\partial\theta_2$. Но тогда при сложении (23.C.16) и (23.C.17), используя (23.C.15), мы бы получили

$$\left[\frac{\partial^2 v_1(k^*(\theta),\ \theta_1)}{\partial k^2} + \frac{\partial^2 v_2(k^*(\theta),\ \theta_2)}{\partial k^2}\right]\frac{\partial k^*(\theta)}{\partial \theta_1}\frac{\partial k^*(\theta)}{\partial \theta_2} = 0,$$

что невозможно при сделанных предположениях.

23.D. Байесовская реализация

В этом разделе мы рассмотрим реализацию в *равновесии Байеса — Нэша*[27]. Мы будем следовать обозначениям, введенным в разделе 23.B: вектор типов агентов $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_I)$ случайно выбирается из множества $\Theta = \Theta_1 \times \dots \times \Theta_I$

[26] Вышесказанное можно обобщить для любого случая, когда $k^*(\cdot)$ непрерывно дифференцируема.

[27] Более подробную информацию на эту тему можно найти в работах Майерсона (Myerson, 1991), а также Фунденберга и Тироля (Fundenberg, Tirole, 1991).

в соответствии с функцией плотности $\phi(\cdot)$, бернуллиевская функция полезности агента типа θ_i на множестве альтернатив X задана как $u_i(x, \theta_i)$. Кроме того, действуют обозначения $\theta_{-i} = (\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_I)$ и $\theta = (\theta_i, \theta_{-i})$. Механизм $\Gamma = (S_1, \ldots, S_I, g(\cdot))$ — набор I множеств $S_1, \ldots, S_I$ (где каждое S_i содержит все возможные действия или планы действий агента i) и функции исхода g: $S \to X$, где $S = S_1 \times \ldots \times S_I$. Как обсуждалось в разделе 23.B, механизм $\Gamma = (S_1, \ldots, S_I, g(\cdot))$ вместе с множеством возможных типов $(\Theta_1, \ldots, \Theta_I)$, функцией плотности $\phi(\cdot)$ и бернуллиевскими функциями полезности $(u_1(\cdot), \ldots, u_I(\cdot))$ определяет байесовскую игру с неполной информацией (см. раздел 8.E). Мы также часто будем писать $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_I)$, $s = (s_i, s_{-i})$ и $s(\cdot) = (s_i(\cdot), s_{-i}(\cdot))$, где $s_{-i}(\cdot) = (s_1(\cdot), \ldots, s_{i-1}(\cdot), s_{i+1}(\cdot), \ldots, s_I(\cdot))$.

Начнем с определения концепции равновесия Байеса — Нэша (см. также раздел 8.E) и уточним определение 23.B.4, введя понятия реализации в этом равновесии[28].

Определение 23.D.1. Профиль стратегий $s^*(\cdot) = (s_1^*(\cdot), \ldots, s_I^*(\cdot))$ называется *равновесием Байеса — Нэша* механизма $\Gamma = (S_1, \ldots, S_I, g(\cdot))$, если для каждого i и всех $\theta_i \in \Theta_i$

$$E_{\theta_{-i}}[u_i(g(s_i^*(\theta_i),\ s_{-i}^*(\theta_{-i})),\ \theta_i) \mid \theta_i] \geq E_{\theta_{-i}}[u_i(g(\hat{s}_i,\ s_{-i}^*(\theta_{-i})),\ \theta_i) \mid \theta_i]$$

для всех $\hat{s}_i \in S_i$.

Определение 23.D.2. Механизм $\Gamma = (S_1, \ldots, S_I, g(\cdot))$ *реализует функцию $f(\cdot)$ общественного выбора в равновесии Байеса — Нэша*, если в Γ существует такое равновесие Байеса — Нэша $s^*(\cdot) = (s_1^*(\cdot), \ldots, s_I^*(\cdot))$, что $g(s^*(\theta)) = f(\theta)$ для всех $\theta \in \Theta$.

Как и в случае с реализацией в доминирующих стратегиях (см. раздел 23.C), мы увидим, что функция общественного выбора реализуема в равновесии Байеса — Нэша тогда и только тогда, когда она реализуема в правдивых стратегиях в том смысле, в каком это описано в определении 23.D.3.

Определение 23.D.3. Функция общественного выбора $f(\cdot)$ называется *реализуемой в правдивых равновесных стратегиях Байеса — Нэша (или байесовской совместимой по стимулам)*, если $s_i^*(\theta_i) = \theta_i$ для всех $\theta_i \in \Theta_i$ и всех $i = 1, \ldots, I$ составляет равновесие Байеса — Нэша в механизме прямого выявления $\Gamma = (\Theta_1, \ldots, \Theta_I, f(\cdot))$. То есть для каждого $i = 1, \ldots, I$ и всех $\theta_i \in \Theta_i$

$$E_{\theta_{-i}}[u_i(f(\theta_i,\ \theta_{-i}),\ \theta_i) \mid \theta_i] \geq E_{\theta_{-i}}[u_i(f(\hat{\theta}_i,\ \theta_{-i}),\ \theta_i) \mid \theta_i] \quad (23.D.1)$$

для всех $\hat{\theta}_i \in \Theta_i$.

Возможность ограничиться рассмотрением вопроса реализуемости $f(\cdot)$ в правдивых стратегиях без потери общности — следствие *принципа выявления для равновесия Байеса — Нэша*.

[28] Как и в разделе 8.E, мы ограничимся равновесием в чистых стратегиях.

Утверждение 23.D.1 (*принцип выявления для равновесия Байеса — Нэша*). Предположим, что существует механизм $\Gamma = (S_1, \ldots, S_I, g(\cdot))$, который реализует функцию общественного выбора $f(\cdot)$ в равновесии Байеса — Нэша. Тогда $f(\cdot)$ реализуема в правдивых равновесных стратегиях Байеса — Нэша.

Доказательство. Если $\Gamma = (S_1, \ldots, S_I, g(\cdot))$ реализует $f(\cdot)$ в равновесии Байеса — Нэша, то существует такой профиль стратегий $s^*(\cdot) = (s_1^*(\cdot), \ldots, s_I^*(\cdot))$, что $g(s^*(\theta)) = f(\theta)$ для всех θ, а также для каждого i и всех $\theta_i \in \Theta_i$ выполнено

$$E_{\theta_{-i}}[u_i(g(s_i^*(\theta_i), s_{-i}^*(\theta_{-i})), \theta_i) \mid \theta_i] \geq$$
$$\geq E_{\theta_{-i}}[u_i(g(\hat{s}_i, s_{-i}^*(\theta_{-i})), \theta_i) \mid \theta_i] \qquad (23.D.2)$$

для всех $\hat{s}_i \in S_i$. Из условия (23.D.2), в частности, следует, что для каждого i и всех $\theta_i \in \Theta_i$ выполнено

$$E_{\theta_{-i}}[u_i(g(s_i^*(\theta_i), s_{-i}^*(\theta_{-i})), \theta_i) \mid \theta_i] \geq$$
$$\geq E_{\theta_{-i}}[u_i(g(s_i^*(\hat{\theta}_i), s_{-i}^*(\theta_{-i})), \theta_i) \mid \theta_i] \qquad (23.D.3)$$

для всех $\hat{\theta}_i \in \Theta_i$. Поскольку $g(s^*(\theta)) = f(\theta)$ для всех θ, (23.D.3) означает, что для каждого i и всех $\theta_i \in \Theta_i$ выполнено

$$E_{\theta_{-i}}[u_i(f(\theta_i, \theta_{-i}), \theta_i) \mid \theta_i] \geq E_{\theta_{-i}}[u_i(f(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}), \theta_i) \mid \theta_i] \quad (23.D.4)$$

для всех $\hat{\theta}_i \in \Theta_i$. Но это в точности то же, что и условие (23.D.1) — условие реализуемости $f(\cdot)$ в правдивых равновесных стратегиях Байеса — Нэша. ■

Основная идея, стоящая за принципом выявления для равновесия Байеса — Нэша, схожа с идеей принципа выявления для реализации в доминирующих стратегиях (утверждение 23.C.1). А именно: если в механизме $\Gamma = (S_1, \ldots, S_I, g(\cdot))$ для каждого агента типа θ_i выбор $s_i^*(\theta_i)$ является наилучшим ответом на стратегии других агентов, то мы можем ввести в механизм посредника, который скажет: «Сообщи мне свой тип θ_i, и я заплачу тебе $s_i^*(\theta_i)$», — и тогда правдивая стратегия будет доминирующей для агента в случае, когда остальные тоже используют правдивые стратегии. То есть в игре прямого выявления правдивые стратегии составят равновесие Байеса — Нэша.

Это значит, что, как и в предыдущем разделе, для определения множества реализуемых функций общественного выбора (на этот раз в равновесии Байеса — Нэша) нам достаточно определить множество реализуемых в правдивых стратегиях функций[29].

[29] Заметим, что мы уже неявно использовали утверждение 23.D.1 в разделе 14.C, когда при рассмотрении проблемы принципал — агент со скрытой информацией мы ограничились

Концепция реализации в равновесии по Байесу — Нэшу более слабая, чем реализация в доминирующих стратегиях. Поскольку каждое равновесие в доминирующих стратегиях с необходимостью является равновесием по Байесу — Нэшу, любая реализуемая в доминирующих стратегиях функция общественного выбора тем более реализуема и по Байесу — Нэшу. Интуитивно можно сравнить требования к правдивой реализации функции $f(\cdot)$ в равновесии в доминирующих стратегиях и в равновесии по Байесу — Нэшу (соответственно уравнения (23.C.3) и (23.D.1)). Нетрудно видеть, что при байесовской реализации правдивая стратегия должна давать агенту i самый высокий платеж *в среднем при всех возможных реализациях типов остальных агентов* θ_{-i}. А реализация в доминирующих стратегиях требует, чтобы правдивая стратегия была наилучшей *для всех возможных* θ_{-i}. Таким образом, можно надеяться на успешную реализацию в равновесии по Байесу — Нэшу более широкого класса функций общественного выбора. Конечно, проблема в том, что мы можем быть менее уверены в такой реализации по сравнению с реализацией в доминирующих стратегиях, потому как она зависит от знания агентами (и дизайнером механизма) функции плотности $\phi(\cdot)$, а также от того, насколько оправданно предположение, что у агентов присутствуют правильные ожидания о выборах стратегий друг друга (см. раздел 8.D).

Далее мы приведем пример того, что действительно можно реализовать более широкий класс функций в равновесии по Байесу — Нэшу. А именно мы покажем, что можно *всегда* реализовать в равновесии по Байесу — Нэшу по крайней мере одну ex post эффективную функцию общественного выбора (такую, которая эффективно выбирает проект и не нарушает сбалансированность бюджета), если мы имеем дело с квазилинейной экономикой, описанной в разделе 23.C, а типы агентов статистически независимы друг от друга. В разделе 23.C мы видели, что при реализации в доминирующих стратегиях это может оказаться невозможным (вспомним утверждение 23.C.6 и конец раздела, напечатанный мелким шрифтом). После того как это будет доказано, мы более детально изучим свойства функций общественного выбора, реализуемых в равновесии по Байесу — Нэшу, сконцентрировавшись на случае агентов с квазилинейными предпочтениями, линейными по типу. Используя этот анализ, мы докажем *теорему об эквивалентности дохода* для аукционов.

Механизм ожидаемого эффекта экстерналий

Вернемся к квазилинейной экономике, описанной в разделе 23.C. В частности, альтернатива теперь — это вектор $x = (k, t_1, \ldots, t_I)$, где k — элемент конечного множества K, а $t_i \in \mathbb{R}$ — трансфер товара-измерителя («денег») агенту i. Функция полезности агента i имеет квазилинейный вид:

механизмами прямого выявления, которые стимулировали агента использовать правдивую стратегию. Формально утверждение 23.D.1 говорит, что равновесный результат любого контракта между принципалом и агентом может быть воспроизведен с помощью механизма прямого выявления, который стимулирует агента выявить свой истинный тип.

$$u_i(x,\theta_i) = v_i(k,\theta_i) + (\bar{m}_i + t_i), \tag{23.D.5}$$

где $\bar{m}_i$ — начальный запас товара-измерителя у агента i[30]. Проведем нормировку и будем далее считать, что $\bar{m}_i = 0$ для всех i. Мы предполагаем, что у агентов I нет источников внешнего финансирования, так что $X = \{(k, t_1, \ldots, t_I)$: $k \in K$, $t_i \in \mathbb{R}$ для всех i, а также $\sum_i t_i \le 0\}$. Функция общественного выбора принимает форму $f(\cdot) = (k(\cdot), t_1(\cdot), \ldots, t_I(\cdot))$. Заметим, что если $f(\cdot)$ ex post эффективна, то для всех $\theta \in \Theta$ должно быть выполнено

$$\sum_i v_i(k(\theta),\ \theta_i) \ge \sum_i v_i(k,\ \theta_i) \ \text{ для каждого } k \in K, \tag{23.D.6}$$

а также

$$\sum_i t_i(\theta) = 0. \tag{23.D.7}$$

В утверждении (23.C.6) мы выяснили, что бывают такие ситуации, когда никакая функция общественного выбора $f(\cdot) = (k(\cdot), t_1(\cdot), \ldots, t_I(\cdot))$, удовлетворяющая (23.D.6) и (23.D.7), не реализуема в доминирующих правдивых стратегиях. Теперь мы покажем, что реализовать такую функцию в равновесии по Байесу — Нэшу *возможно*, если типы агентов статистически независимы друг от друга [т. е. если функция плотности $\phi(\cdot)$ имеет форму $\phi(\theta) = \phi_1(\theta_1) \times \ldots \times \phi_I(\theta_I)$][31].

Чтобы убедиться в этом, предположим, что $k^*(\cdot)$ удовлетворяет (23.D.6), и рассмотрим функцию общественного выбора $f(\cdot) = (k^*(\cdot), t_1(\cdot), \ldots, t_I(\cdot))$, в которой для всех $i = 1, \ldots, I$ будет выполнено

$$t_i(\theta) = E_{\tilde{\theta}_{-i}}\left[\sum_{j\neq i} v_j(k^*(\theta_i,\ \tilde{\theta}_{-i}),\ \tilde{\theta}_j)\right] + h_i(\theta_{-i}), \tag{23.D.8}$$

где пока мы считаем $h_i(\cdot)$ произвольной функцией от θ_{-i}. Заметим, что знак ожидания в (23.D.8) означает *ожидаемые выгоды* агентов $j \neq i$, когда агент i говорит, что его тип θ_i и агенты $j \neq i$ говорят правду. (Но объявленные другими агентами типы θ_{-i} не являются аргументами данной функции; аргументом является только тип, объявленный самим агентом i.) Таким образом, изменение трансферта агента i, вызванное изменением его объявления, в точности отражает *ожидаемый эффект экстерналии*, которую он накладывает на остальных.

Сначала проверим, что любая функция общественного выбора $f(\cdot)$, имеющая форму (23.D.8), является байесовской совместимой по стимулам. Чтобы увидеть это, заметим, что, когда агенты $i \neq j$ объявляют свои типы

[30] В отличие от анализа в разделе 23.C (см. упражнение 23.C.11) здесь мы опираемся не только на факт квазилинейности предпочтений, но также на то, что данная бернуллиевская функция полезности относится к агенту i, который нейтрален к риску относительно своего денежного трансферта.

[31] Обсуждение случая коррелированных типов можно найти в работе Фуденберга и Тироля (Fudenberg, Tirole, 1991).

честно, агенту i выгодно сделать то же самое, поскольку (используем статистическую независимость θ_i и θ_{-i})

$$E_{\theta_{-i}}[v_i(k^*(\theta),\ \theta_i) + t_i(\theta) \mid \theta_i] = E_{\theta_{-i}}\left[\sum_{j=1}^{I} v_j(k^*(\theta),\ \theta_j)\right] + E_{\theta_{-i}}[h_i(\theta_{-i})] \geq$$

$$\geq E_{\theta_{-i}}\left[\sum_{j=1}^{I} v_j(k^*(\hat{\theta}_i,\ \theta_{-i}),\ \theta_j)\right] + E_{\theta_{-i}}[h_i(\theta_{-i})] =$$

$$= E_{\theta_{-i}}[v_i(k^*(\hat{\theta}_i,\ \theta_{-i}),\ \theta_j) + t_i(\hat{\theta}_i,\ \theta_{-i}) \mid \theta_i]$$

для всех $\hat{\theta}_i \in \Theta_i$. Неравенство следует из того, что $k^*(\cdot)$ удовлетворяет (23.D.6).

Осталось показать, что мы можем выбрать функции $h_i(\cdot)$ (для $i = 1, \ldots, I$) так, чтобы была выполнена сбалансированность бюджета (условие (23.D.7)). Обозначим $\xi_i(\theta_i) = E_{\tilde{\theta}_{-i}}[\sum_{j \neq i} v_j(k^*(\theta_i,\ \tilde{\theta}_{-i}),\ \tilde{\theta}_j)]$. Теперь положим

$$h_i(\theta_{-i}) = -\left(\frac{1}{I-1}\right)\sum_{j \neq i} \xi_j(\theta_{\mathrm{j}}) \tag{23.D.9}$$

для всех $i = 1, \ldots, I$. Если функции $h_i(\cdot)$ имеют такой вид, то можно записать

$$\sum_i t_i(\theta) = \sum_i \xi_i(\theta_i) + \sum_i h_i(\theta_{-i}) =$$

$$= \sum_i \xi_i(\theta_i) - \left(\frac{1}{I-1}\right)\sum_i \sum_{j \neq i} \xi_j(\theta_j) =$$

$$= \sum_i \xi_i(\theta_i) - \left(\frac{1}{I-1}\right)\sum_i (I-1)\xi_i(\theta_i) = 0.$$

Интуитивно можно воспринимать функции $h_i(\cdot)$, представленные в (23.D.9), следующим образом. Мы видели, что, когда типы агентов — $(\theta_1, \ldots, \theta_I)$, каждый агент $i = 1, \ldots, I$ получает платеж, равный $\xi_i(\theta_i)$ [первое слагаемое выражения (23.D.8)]. Теперь же каждый агент вкладывает одинаковую долю $1/(I-1)$ выплат всех остальных агентов. Тогда сумма выплат агента i каждому из остальных $I-1$ агентов составит $[1/(I-1)]\sum_{j \neq i} \xi_j(\theta_j)$, а агент i получит от них взамен $\xi_i(\theta_i)$. Выходит, что чистый трансферт агенту i составит $\xi_i(\theta_i) - (1/(I-1))\sum_{j \neq i} \xi_j(\theta_j)$.

Этот механизм прямого выявления известен как *механизм ожидаемого эффекта экстерналий* [см. (d'Aspremont, Gérard-Varet, 1979; Arrow, 1979)]. В итоге мы показали, что, когда бернуллиевские функции полезности агентов принимают форму (23.D.5), а типы агентов статистически независимы, существует ex post эффективная функция общественного выбора, реализуемая в равновесии Байеса — Нэша.

Хоть это и интересный результат, но еще не конец истории. Механизм ожидаемого эффекта экстерналий реализует ex post эффективную функцию общественного выбора, но трансферты в этом механизме предполагают некоторое распределение полезности между разными типами агентов. Можно рассмотреть другие механизмы (возможно, с ex post неэффективными функциями общественного выбора), которые меняют такое распределение.

Это может быть важно, потому что во многих ситуациях агенты вправе свободно отказаться от участия в механизме, так что любой механизм, который мы хотим реализовать, должен не только быть совместимым по стимулам в вышеописанном смысле, но также удовлетворять *ограничениям индивидуальной рациональности* (или *участия*), которые гарантируют, что агент i на самом деле хочет в нем участвовать. Если механизм ожидаемого эффекта экстерналий не удовлетворяет этим ограничениям, то нам придется искать механизмы, которые удовлетворяют. Мы разовьем эту тему в разделах 23.E и 23.F, а на данный момент достаточно сказать, что по этой и другим причинам может быть важно определить *все* функции общественного выбора, которые реализуемы в равновесии Байеса — Нэша.

В оставшейся части раздела мы выполним это для особого, но часто встречающегося в исследованиях класса случаев, где функции полезности агентов линейны по типу, а типы распределены независимо.

Байесовская совместимость по стимулам при линейной функции полезности

Предположим, что бернуллиевская функция полезности каждого агента i принимает форму

$$u_i\left(x,\ \theta_i\right) = \theta_i v_i\left(k\right) + \left(\bar{m}_i + t_i\right).$$

Как и прежде, нормируем $\bar{m}_i$ к 0 для всех i. Предположим также, что тип каждого агента i принадлежит интервалу $\Theta_i = [\underline{\theta}_i;\ \bar{\theta}_i] \subset \mathbb{R}$, где $\underline{\theta}_i \neq \bar{\theta}_i$, и типы разных агентов статистически независимы. Пусть $\Phi_i(\cdot)$ — функция распределения θ_i, а соответствующая функция плотности задана как $\phi_i(\cdot)$, при этом $\phi_i(\theta_i) > 0$ для всех $\theta_i \in [\underline{\theta}_i,\ \bar{\theta}_i]$.

Начнем с вывода необходимых и достаточных условий байесовской совместимости по стимулам для функции общественного выбора $f(\cdot) = (k(\cdot), t_1(\cdot), \ldots, t_I(\cdot))$. Удобно ввести обозначение $\bar{t}_i(\hat{\theta}_i) = E_{\theta_{-i}}[t_i(\hat{\theta}_i,\ \theta_{-i})]$ — ожидаемый трансферт агенту i при условии, что он объявляет, что его тип $\hat{\theta}_i$, а все остальные агенты $j \neq i$ объявляют свои типы честно. Аналогично обозначим за $\bar{v}_i(\hat{\theta}_i) = E_{\theta_{-i}}[v_i(k(\hat{\theta}_i,\ \theta_{-i}))]$ ожидаемую «выгоду» агента i при объявлении $\hat{\theta}_i$. С такой формой функций полезности мы можем записать ожидаемую полезность агента i, который принадлежит к типу θ_i, а объявляет тип $\hat{\theta}_i$ (при условии, что остальные агенты говорят правду), как[32]

$$E_{\theta_{-i}}[u_i(f(\hat{\theta}_i,\ \theta_{-i}),\ \theta_i) \mid \theta_i] = \theta_i \bar{v}_i(\hat{\theta}_i) + \bar{t}_i(\hat{\theta}_i). \qquad (23.D.10)$$

[32] Заметим, что предпочтения агента в отношении его ожидаемой выгоды $\bar{v}_i$ и ожидаемого трансферта $\bar{t}_i$ удовлетворяют свойству единственности пересечения, игравшему заметную роль в разделах 13.C и 14.C.

Также удобно определить для каждого агента i функцию

$$U_i(\theta_i) = \theta_i \bar{v}_i(\theta_i) + \bar{t}_i(\theta_i),$$

ожидаемую полезность агента i от механизма, при условии что его тип θ_i и все остальные агенты сообщают свои истинные типы.

Утверждение 23.D.2. Функция общественного выбора $f(\cdot) = (k(\cdot), t_1(\cdot), \ldots, t_I(\cdot))$ является байесовской совместимой по стимулам в том и только в том случае, если для всех $i = 1, \ldots, I$.

$$(1)\ \bar{v}_i(\cdot)\ \text{ не убывает,} \tag{23.D.11}$$

$$(2)\ U_i(\theta_i) = U_i(\underline{\theta}_i) + \int_{\underline{\theta}_i}^{\theta_i} \bar{v}_i(s)ds\ \text{ для всех } \theta_i. \tag{23.D.12}$$

Доказательство. (1) *Необходимость.* Байесовская совместимость по стимулам означает, что для каждого $\hat{\theta}_i > \theta_i$ имеем

$$U_i(\theta_i) \geq \theta_i \bar{v}_i(\hat{\theta}_i) + \bar{t}_i(\hat{\theta}_i) = U_i(\hat{\theta}_i) + (\theta_i - \hat{\theta}_i)\bar{v}_i(\hat{\theta}_i)$$

и

$$U_i(\hat{\theta}_i) \geq \hat{\theta}_i \bar{v}_i(\theta_i) + \bar{t}_i(\theta_i) = U_i(\theta_i) + (\hat{\theta}_i - \theta_i)\bar{v}_i(\theta_i).$$

Поэтому

$$\bar{v}_i(\hat{\theta}_i) \geq \frac{U_i(\hat{\theta}_i) - U_i(\theta_i)}{\hat{\theta}_i - \theta_i} \geq \bar{v}_i(\theta_i). \tag{23.D.13}$$

Из выражения (23.D.13) непосредственно следует, что $\bar{v}_i(\cdot)$ должна быть неубывающей (вспомним, что $\hat{\theta}_i > \theta_i$). К тому же если подставить $\hat{\theta}_i \to \theta_i$ в (23.D.13), то получим для всех θ_i

$$U_i'(\theta_i) = \bar{v}_i(\theta_i),$$

и поэтому

$$U_i(\theta_i) = U_i(\underline{\theta}_i) + \int_{\underline{\theta}_i}^{\theta_i} \bar{v}_i(s)ds\ \text{ для всех } \theta_i.$$

(2) *Достаточность.* Рассмотрим произвольные θ_i и $\hat{\theta}_i$ и предположим без потери общности, что $\theta_i > \hat{\theta}_i$. Если (23.D.11) и (23.D.12) выполнены, то

$$U_i(\theta_i) - U_i(\hat{\theta}_i) = \int_{\hat{\theta}_i}^{\theta_i} \bar{v}_i(s)ds \geq \int_{\hat{\theta}_i}^{\theta_i} \bar{v}_i(\hat{\theta}_i)ds = (\theta_i - \hat{\theta}_i)\bar{v}_i(\hat{\theta}_i).$$

Следовательно,

$$U_i(\theta_i) \geq U_i(\hat{\theta}_i) + (\theta_i - \hat{\theta}_i)\bar{v}_i(\hat{\theta}_i) = \theta_i \bar{v}_i(\hat{\theta}_i) + \bar{t}_i(\hat{\theta}_i).$$

Аналогично можно получить, что

$$U_i(\hat{\theta}_i) \geq U_i(\theta_i) + (\hat{\theta}_i - \theta_i)\overline{v}_i(\theta_i) = \hat{\theta}_i\overline{v}_i(\theta_i) + \overline{t}_i(\theta_i).$$

Поэтому функция $f(\cdot)$ является байесовской совместимой по стимулам. ■

Утверждение 23.D.2 означает, что, для того чтобы найти все байесовские совместимые по стимулам функции общественного выбора в линейной ситуации, мы можем действовать следующим образом. Сначала узнаем, какие функции $k(\cdot)$ приводят к неубывающим функциям ожидаемой выгоды $\overline{v}_i(\cdot)$ для каждого агента i. Затем для каждой такой функции найдем функции трансфертов $\overline{t}_1(\cdot)$, ..., $\overline{t}_I(\cdot)$, которые удовлетворяют условию (23.D.12). Заменяя в этом условии $U_i(\cdot)$, мы получим в точности функции ожидаемых трансфертов, которые для каждого $i = 1, \ldots, I$ удовлетворяют

$$\overline{t}_i(\theta_i) = \overline{t}_i(\underline{\theta}_i) + \underline{\theta}_i v_i(\underline{\theta}_i) - \theta_i v_i(\theta_i) + \int_{\underline{\theta}_i}^{\theta_i} \overline{v}_i(s)ds$$

для некоторой фиксированной $\overline{t}_i\left(\underline{\theta}_i\right)$. Наконец, выберем любое множество функций трансфертов $(t_1(\theta), \ldots, t_I(\theta))$, таких что $E_{\theta_{-i}}[t_i(\theta_i,\ \theta_{-i})] = \overline{t}_i(\theta_i)$ для всех θ_i. В общем случае имеется много таких функций $t_i(\cdot, \cdot)$, например просто $t_i(\theta_i, \theta_{-i}) = \overline{t}_i(\theta_i)$[33].

Теперь мы покажем одно из применений этого результата для ситуации аукциона, представленной в примере 23.B.4. Некоторые другие применения утверждения 23.D.2 приводятся в разделах 23.E и 23.F.

Аукционы: теорема об эквивалентности дохода

Вновь рассмотрим ситуацию аукциона, представленную в примере 23.B.4. Агент 0 — продавец неделимого объекта, который не имеет для него ценности, а агенты $1, \ldots, I$ — потенциальные покупатели[34]. Будет удобно обобщить множество доступных альтернатив по сравнению с примером 23.B.4, добавив возможность *случайного* размещения объекта. Так что теперь $y_i(\theta)$ — *вероятность* получения объекта покупателем, когда вектор объявленных типов — $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_I)$. Ожидаемая полезность покупателя i, когда профиль типов I покупателей принимает значение $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_I)$, в таком случае равна $\theta_i y_i(\theta) + t_i(\theta)$. Заметим, что покупатель i нейтрален к риску по отношению как к трансфертам, так и к распределению блага.

[33] Тем не менее, если мы хотим, чтобы функция общественного выбора $f(\cdot) = (k(\cdot), t_1(\cdot), \ldots, t_I(\cdot))$ удовлетворяла некоторым другим свойствам, таким как сбалансированность бюджета, нам подойдут только некоторые (а возможно, не подойдут никакие) функции трансфертов, генерирующие функции ожидаемых трансфертов $(\overline{t}_1(\theta_1),\ \ldots,\ \overline{t}_I(\theta_I))$.

[34] Наше предположение о том, что продавец не ценит благо, не является обязательным для данной теоремы. (Как мы увидим ниже, этот результат характеризует ожидаемые доходы продавца в различных аукционах, и он справедлив при любой функции полезности продавца.) Однако если не делать этого предположения, продавец в общем случае будет заботиться не только о своем ожидаемом доходе.

Эта постановка в утверждении 23.D.2 соответствует случаю, когда $k = (y_1, \dots, y_I)$, $K = \{(y_1, \dots, y_I)\colon y_i \in [0, 1]$ для всех $i = 1, \dots, I$ и $\sum_i y_i \le 1\}$, а $v_i(k) = y_i$. Таким образом, чтобы применить утверждение 23.D.2, мы можем записать $\bar{v}_i(\hat{\theta}_i) = \bar{y}_i(\hat{\theta}_i)$, где $\bar{y}_i(\hat{\theta}_i) = E_{\theta_{-i}}[y_i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i})]$ — вероятность того, что агент i получит объект, если объявит свой тип как $\hat{\theta}_i$, остальные агенты $j \neq i$ объявят свои типы правдиво, а $U_i(\theta_i) = \theta_i \bar{y}_i(\theta_i) + \bar{t}_i(\theta_i)$.

Теперь мы можем получить важный результат, известный как *теорема об эквивалентности дохода*[35].

Утверждение 23.D.3 (*теорема об эквивалентности дохода*). Рассмотрим аукцион с I нейтральными к риску покупателями, в котором оценка объекта каждым покупателем i случайным образом выбирается из интервала $[\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i]$, где $\underline{\theta}_i \neq \bar{\theta}_i$, $\phi_i(\cdot) > 0$ — функция плотности, принимающая строго положительные значения, а типы покупателей статистически независимы. Предположим, что дана пара равновесий Байеса — Нэша в различных аукционах, такая что для каждого покупателя i: (1) для каждой возможной реализации $(\theta_1, \dots, \theta_I)$ покупатель i имеет одинаковую вероятность получить товар в двух аукционах; (2) покупатель i имеет одинаковый ожидаемый уровень полезности в двух аукционах, когда его оценка объекта минимальна. Тогда в этих равновесиях двух аукционов ожидаемый доход продавца одинаков.

Доказательство. Мы знаем из принципа выявления, что функция общественного выбора, которая реализуется (неявным образом) в равновесии любого аукциона, должна быть байесовской совместимой по стимулам. Раз так, то мы можем получить нужный результат, показав, что если две байесовские совместимые по стимулам функции общественного выбора в аукционе имеют одинаковые функции $(y_1(\theta), \dots, y_I(\theta))$ и одинаковые значения $(U_1(\underline{\theta}_1), \dots, U_I(\underline{\theta}_I))$, то ожидаемый доход продавца при обеих функциях одинаков.

Чтобы в этом убедиться, мы получим выражение для ожидаемого дохода продавца при произвольном байесовском совместимом по стимулам механизме. Сначала заметим, что ожидаемый доход продавца равен $\sum_{i=1}^{I} E[-t_i(\theta)]$. Далее,

$$E[-t_i(\theta)] = E_{\theta_i}[-\bar{t}_i(\theta_i)] = \int_{\underline{\theta}_i}^{\bar{\theta}_i} [\bar{y}_i(\theta_i)\theta_i - U_i(\theta_i)]\phi_i(\theta_i)d\theta_i =$$

$$= \int_{\underline{\theta}_i}^{\bar{\theta}_i} \left(\bar{y}_i(\theta_i)\theta_i - U_i(\underline{\theta}_i) - \int_{\underline{\theta}_i}^{\theta_i} \bar{y}_i(s)ds \right) \phi_i(\theta_i)d\theta_i =$$

$$= \left[\int_{\underline{\theta}_i}^{\bar{\theta}_i} \left(\bar{y}_i(\theta_i)\theta_i - \int_{\underline{\theta}_i}^{\theta_i} \bar{y}_i(s)ds \right) \phi_i(\theta_i)d\theta_i \right] - U_i(\underline{\theta}_i).$$

[35] Различные вариации этой теоремы были получены многими авторами. См. ссылки и дальнейшее обсуждение результата в работах Мак-Афи и Мак-Миллана (McAfee, McMillan, 1987), а также Милгрома (Milgrom, 1987)).

Более того, интегрируя по частям, можно получить

$$\int_{\underline{\theta}_i}^{\overline{\theta}_i}\left(\int_{\underline{\theta}_i}^{\theta_i}\overline{y}_i(s)ds\right)\phi_i(\theta_i)d\theta_i = \left(\int_{\underline{\theta}_i}^{\overline{\theta}_i}\overline{y}_i(\theta_i)d\theta_i\right) - \left(\int_{\underline{\theta}_i}^{\overline{\theta}_i}\overline{y}_i(\theta_i)\Phi_i(\theta_i)d\theta_i\right) =$$

$$= \int_{\underline{\theta}_i}^{\overline{\theta}_i}\overline{y}_i(\theta_i)(1-\Phi_i(\theta_i))d\theta_i.$$

После подстановки получаем

$$E[-\overline{t}_i(\theta_i)] = \left[\int_{\underline{\theta}_i}^{\overline{\theta}_i}\overline{y}_i(\theta_i)\left(\theta_i - \frac{1-\Phi_i(\theta_i)}{\phi_i(\theta_i)}\right)\phi_i(\theta_i)d\theta_i\right] - U_i(\underline{\theta}_i), \qquad (23.D.14)$$

или

$$E[-\overline{t}_i(\theta_i)] =$$

$$= \left[\int_{\underline{\theta}_1}^{\overline{\theta}_1}\ldots\int_{\underline{\theta}_I}^{\overline{\theta}_I} y_i(\theta_1, \ldots, \theta_I)\left(\theta_i - \frac{1-\Phi_i(\theta_i)}{\phi_i(\theta_i)}\right)\left(\prod_{j=1}^{I}\phi_j(\theta_j)\right)d\theta_I\ldots d\theta_1\right] - U_i\left(\underline{\theta}_i\right). \qquad (23.D.15)$$

Таким образом, ожидаемый доход продавца равен

$$\left[\int_{\underline{\theta}_1}^{\overline{\theta}_1}\ldots\int_{\underline{\theta}_I}^{\overline{\theta}_I}\left[\sum_{i=1}^{I} y_i(\theta_1, \ldots, \theta_I)\left(\theta_i - \frac{1-\Phi_i(\theta_i)}{\phi_i(\theta_i)}\right)\right]\left(\prod_{j=1}^{I}\phi_j(\theta_j)\right)d\theta_I\ldots d\theta_1\right] -$$

$$-\sum_{i=1}^{I} U_i(\underline{\theta}_i). \qquad (23.D.16)$$

Из (23.D.16) видно, что любые две байесовские совместимые по стимулам функции общественного выбора, которые имеют одинаковые функции $(y_1(\theta), \ldots, y_I(\theta))$ и одинаковые значения $(U_1(\underline{\theta}_1), \ldots, U_I(\underline{\theta}_I))$, приводят к одинаковому ожидаемому доходу продавца. ■

Рассмотрим пример равновесий в закрытых аукционах первой и второй цены, которые мы описали в примерах 23.B.5 и 23.B.6 (где оценки покупателями товаров выбираются случайно и независимо из равномерного распределения на [0, 1]). Все условия теоремы об эквивалентности дохода для них выполнены: в обоих аукционах покупатель с самой высокой оценкой получает товар, а покупатель с нулевой оценкой имеет нулевую ожидаемую полезность. Теорема об эквивалентности говорит нам, что продавец получает одинаковый равновесный ожидаемый доход в двух аукционах (убедитесь в этом, выполнив упражнение 23.D.3). В более общей постановке можно показать, что в условиях любого *симметричного аукциона* (такого, где оценки товара покупателями случайно и независимо выбираются из одинаковых распределений) условия теоремы будут выполнены для *любого* равновесия по Байесу — Нэшу в закрытом аукционе первой цены и равновесия (в доминирующих стратегиях) в закрытом аукционе второй цены (симметричные равновесия в этих случаях рассмотрены в упражнении 23.D.4). Таким образом, из утверждения 23.D.3 следует, что в любой подобной ситуации аукционы первой и второй цены приводят к одинаковому ожидаемому доходу продавца.

23.E. Ограничения участия

В разделах 23.B–23.D мы изучали ограничения, которые наличие у агентов частной информации накладывает на реализуемые функции общественного выбора. При этом наш анализ до сих пор неявно предполагал, что агенты не могут отказаться от участия в механизме, выбранном дизайнером, так что свобода участников ограничивалась выбором оптимального поведения из тех вариантов, которые разрешали правила механизма.

Однако во многих случаях участие агентов в механизме *добровольно*. В результате функция общественного выбора, которую реализует механизм, должна быть не только совместима по стимулам, но также удовлетворять *ограничениям участия* (или *индивидуальной рациональности*). В этом разделе мы вкратце обсудим, как индивидуальная рациональность ограничивает множество реализуемых функций общественного выбора. Пример 23.E.1 показывает, как это может происходить.

Пример 23.E.1. *Ограничения участия при выборе общественного проекта.* Рассмотрим следующий простой пример выбора общественного проекта (вспомним дискуссию в примере 23.B.3). Нужно принять решение, реализовывать общественный проект или нет, т. е. $K = \{0, 1\}$. Имеются два агента, 1 и 2. Для каждого агента i множество типов $\Theta_i = \{\underline{\theta}, \bar{\theta}\}$, так что у агента может только быть оценка проекта, равная либо $\underline{\theta}$, либо $\bar{\theta}$. Будем предполагать, что $\bar{\theta} > 2\underline{\theta} > 0$. Издержки на осуществление проекта равны $c \in (2\underline{\theta}, \bar{\theta})$. Предположим, что мы хотим реализовать функцию общественного выбора с ex post эффективным выбором проекта, т. е. такую, где $k^*(\theta_1, \theta_2) = 1$, если θ_1 или θ_2 равно $\bar{\theta}$, и $k^*(\theta_1, \theta_2) = 0$, если $\theta_1 = \theta_2 = \underline{\theta}$. Если проверять выполнение условия участия не нужно, то, как известно из раздела 23.C, мы можем реализовать такую функцию с помощью схемы Гровса.

Предположим теперь, что каждый агент может в любое время выйти из механизма (вероятно, покидая группу) и что если он так сделает, то не получит никаких выгод от осуществления проекта, но и не понесет затрат. Можем ли мы реализовать функцию общественного выбора, которая приводит к ex post эффективной реализации проекта, гарантировав добровольное участие в механизме[36]? Нет, не можем. Чтобы убедиться в этом, заметим, что если агент 1 может отказаться от участия в любое время, то, для того чтобы он этого не сделал, необходимо $t_1(\underline{\theta}, \bar{\theta}) \geq -\underline{\theta}$. То есть если его оценка проекта равна $\underline{\theta}$, то он платит не больше $\underline{\theta}$. Посмотрим, каков должен быть платеж агента 1, если оба агента объявляют, что их тип $\bar{\theta}$. Если правдивая стратегия является доминирующей, то $t_1(\bar{\theta}, \bar{\theta})$ должно удовлетворять условию

$$\bar{\theta}k^*(\bar{\theta}, \bar{\theta}) + t_1(\bar{\theta}, \bar{\theta}) \geq \bar{\theta}k^*(\underline{\theta}, \bar{\theta}) + t_1(\underline{\theta}, \bar{\theta}).$$

[36] Заметим, что функция общественного выбора, при которой хотя бы один из агентов отказывается от участия, ex post неэффективна, поскольку этот агент не получает выгод от проекта.

Подставляя значения $k^*(\overline{\theta}, \overline{\theta})$ и $k^*(\underline{\theta}, \overline{\theta})$, получаем

$$\overline{\theta} + t_1(\overline{\theta}, \overline{\theta}) \geq \overline{\theta} + t_1(\underline{\theta}, \overline{\theta}).$$

Поскольку $t_1(\underline{\theta}, \overline{\theta}) \geq -\underline{\theta}$, должно быть выполнено и $t_1(\overline{\theta}, \overline{\theta}) \geq -\underline{\theta}$. То есть агент 1 не должен делать вклад больше, чем $\underline{\theta}$, если $(\theta_1, \theta_2) = (\overline{\theta}, \overline{\theta})$. Более того, рассуждая аналогично, можно получить такое же условие для агента 2 для случая $(\theta_1, \theta_2) = (\overline{\theta}, \overline{\theta})$, а именно: $t_2(\overline{\theta}, \overline{\theta}) \geq -\underline{\theta}$. Сложив два неравенства, получаем: $t_1(\overline{\theta}, \overline{\theta}) + t_2(\overline{\theta}, \overline{\theta}) \geq -2\underline{\theta}$. Но тогда условие допустимости $t_1(\overline{\theta}, \overline{\theta}) + t_2(\overline{\theta}, \overline{\theta}) \leq -c$ не выполнено, поскольку $2\underline{\theta} < c$. Получается, что невозможно реализовать функцию общественного выбора с ex post эффективной реализацией проекта, если агенты вольны покинуть механизм в любое время.

Заметим также, что наличие «внешнего агента» (скажем, «агента 0»), который не заботится о решении по проекту, здесь не поможет, если этот агент также может не участвовать в механизме. Потому что для его участия необходимо, чтобы его трансферт $t_0(\theta_1, \theta_2)$ был неотрицателен при любой реализации (θ_1, θ_2). В частности, должно быть выполнено $t_0(\overline{\theta}, \overline{\theta}) \geq 0$, так что условие допустимости $t_0(\overline{\theta}, \overline{\theta}) + t_1(\overline{\theta}, \overline{\theta}) + t_2(\overline{\theta}, \overline{\theta}) \leq -c$. ■

Мы можем выделить три этапа реализации механизма, на которых условия участия могут иметь значение. Во-первых, как в примере 23.E.1, агент i может выйти из проекта *ex post* — после того как агенты объявили свои типы и был выбран исход из X. Говоря формально, предположим, что агент i, тип которого θ_i, может получить полезность на уровне $\overline{u}_i(\theta_i)$, выйдя из механизма[37]. Тогда, чтобы гарантировать участие агента i, должны быть выполнены *ограничения участия* (или *индивидуальной рациональности*) *ex post*[38]:

$$u_i(f(\theta_i, \theta_{-i}), \theta_i) \geq \overline{u}_i(\theta_i) \text{ для всех } (\theta_i, \theta_{-i}). \tag{23.E.1}$$

В других обстоятельствах агент i может покинуть механизм только на промежуточной *(interim)* стадии — когда агенты знают свои типы, но они еще не выбрали свои действия в механизме. Обозначим за $U_i(\theta_i \mid f) = E_{\theta_{-i}}[u_i(f(\theta_i, \theta_{-i}), \theta_i) \mid \theta_i]$ *ожидаемую полезность interim* агента i от функции общественного выбора $f(\cdot)$, когда его тип θ_i. Агент i будет участвовать в механизме, если и только если $U_i(\theta_i \mid f)$ не меньше, чем $\overline{u}_i(\theta_i)$. Таким образом, *interim ограничения участия* (или *индивидуальной рациональности*) для агента i требуют

$$U_i(\theta_i \mid f) = E_{\theta_{-i}}[u_i(f(\theta_i, \theta_{-i}), \theta_i) \mid \theta_i] \geq \overline{u}_i(\theta_i) \text{ для всех } \theta_i. \tag{23.E.2}$$

[37] Мы предполагаем, что полезность агента в этом случае зависит только от его собственного типа.

[38] Мы всюду предполагаем, что участие всех агентов оптимально, и на самом деле общность при этом не теряется. Когда агенты, которые «не участвуют», составляют подмножество I' множества всех I агентов, исход x', который получается при этом, должен быть включен в X. Поскольку мы всегда можем создать такой механизм, который выбирает x' в случае неучастия этого подмножества агентов, то мы также всегда можем, особым образом задав X, воспроизвести любой механизм с неучастием этих агентов в виде механизма, где эти агенты не отказываются от участия.

Также существуют случаи, когда агент может отказаться от участия в механизме только *ex ante* — до того как агенты узнают свои типы. Обозначим за $U_i(f) = E_{\theta_i}[U_i(\theta_i \mid f)] = E[u_i(f(\theta_i, \theta_{-i}), \theta_i)]$ *ожидаемую полезность ex ante* агента от механизма, реализующего функцию общественного выбора $f(\cdot)$. *Ограничение участия* (или *индивидуальной рациональности*) *ex ante* для агента i имеет вид

$$U_i(f) \geq E_{\theta_i}[\overline{u}_i(\theta_i)]. \tag{23.E.3}$$

Ограничения участия ex ante выполнены, если агенты согласны быть связанными правилами механизма, до того как узнают свой тип. Если же агенты сначала узнают свой тип, а потом принимают решение об участии, то мы сталкиваемся с interim ограничениями участия[39]. Наконец, если нельзя заставить агентов против их воли принять результаты работы механизма, то речь идет об ограничениях участия ex post[40].

Заметим, что если $f(\cdot)$ удовлетворяет (23.E.1), то она удовлетворяет и (23.E.2), а если это так, то и (23.E.3) также выполнено. Обратное, однако, неверно. Поэтому ограничения, накладываемые добровольным участием, являются самыми жесткими в том случае, если агенты могут отказаться от участия на стадии ex post. В случае же если участники могут выйти на стадии ex ante, ограничения будут наименее жесткими.

В целом если типы агентов являются частной информацией, то множество функций общественного выбора, которые могут быть успешно реализованы, состоит из тех функций, которые удовлетворяют не только ограничениям совместимости стимулов из разделов 23.C и 23.D (соответственно для случаев доминирующих стратегий и Байеса — Нэша), но и любым ограничениям участия, которые могут возникнуть в исследовании.

В оставшейся части раздела мы проиллюстрируем другие ограничения, которые ограничения участия могут наложить на множество реализуемых функций общественного выбора, рассмотрев важную *теорему Майерсона — Саттертуэйта* [из работы (Myerson, Satterthwaite, 1983)].

Теорема Майерсона — Саттертуэйта

Вновь рассмотрим ситуацию двусторонней торговли из примера 23.B.4. Агент 1 — продавец неделимого объекта. Его оценка этого объекта лежит на отрезке $\Theta_1 = [\underline{\theta}_1; \overline{\theta}_1] \subset \mathbb{R}$. Агент 2 — покупатель, его оценка лежит на $\Theta_2 = [\underline{\theta}_2; \overline{\theta}_2] \subset \mathbb{R}$. Обе оценки статистически независимы, функция рас-

[39] Вспомним, что предположение байесовской игры о том, что типы агентов выбираются из какого-то известного и изначально заданного распределения, — это зачастую только прием для построения моделей. Он позволяет определить убеждения, которые участники формируют о типах друг друга (см. раздел 8.E). Для аналитических целей мы можем думать, что типы агентов уже определены, но каждый участник наблюдает только свой тип, если предположим, что случайный выбор типов из общеизвестного распределения произошел с самого начала. Хотя на самом деле такой предварительной стадии в описываемом взаимодействии может и не быть.

[40] Например, если механизм может обанкротить агента, положения законодательства о банкротстве могут определить нижнюю границу полезности ex post.

пределения случайной величины θ_i обозначается как $\Phi_i(\cdot)$, функция плотности — $\phi(\cdot)$, при этом $\phi_i(\theta_i) > 0$ для всех $\theta_i \in [\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i]$. Обозначим за $y_i(\theta)$ вероятность, что агент i получит товар, если типы заданы как $\theta = (\theta_1, \theta_2)$. Ожидаемая полезность агента имеет вид: $\theta_i y_i(\theta) + t_i(\theta)$ (мы пронормировали $\overline{m}_i = 0$ для всех i).

Механизм ожидаемого эффекта экстерналий из раздела 23.D показывает, что в такой постановке мы можем реализовать по Байесу ex post эффективную функцию общественного выбора (которую мы здесь можем назвать «правилом торговли»). Проблема с этим механизмом состоит в том, что торговля добровольна. В этом случае каждый тип покупателя и продавца должен иметь неотрицательные ожидаемые выгоды от торговли, если он соглашается участвовать. В частности, если продавец с типом θ_1 участвует в механизме с функцией общественного выбора $f(\cdot)$, т. е. если участие в этом механизме *индивидуально рационально* для него, то должно быть выполнено $U_1(\theta_1 \mid f) \geq \theta_1$, потому что продавец может получить ожидаемую полезность θ_1, отказавшись от продажи товара и самостоятельно его потребив. Аналогично покупатель типа θ_2 всегда может получить 0, отказавшись от покупки, так что должно быть выполнено $U_2(\theta_2 \mid f) \geq 0$. К сожалению, эти interim ограничения участия не выполнены в механизме ожидаемого эффекта экстерналий (в упражнении 23.E.1 требуется это проверить).

Теорема Майерсона — Саттертуэйта сообщает нам неприятную новость: если выгоды от торговли возможны, но необязательно наступают[41], то *не существует* такой ex post эффективной функции общественного выбора, которая была бы байесовской совместимой по стимулам и удовлетворяла бы interim ограничениям участия. Таким образом, в условиях теоремы наличие частной информации и добровольного участия исключает достижение эффективности ex post. (Иллюстрация этого результата для определенных функций дана в упражнении 23.E.7.)

Утверждение 23.E.1 (*теорема Майерсона — Саттертуэйта*). Рассмотрим ситуацию двусторонней торговли, в которой покупатель и продавец нейтральны к риску, оценки θ_1 и θ_2 случайно и независимо выбираются из интервалов $[\underline{\theta}_1; \overline{\theta}_1] \subset \mathbb{R}$ и $[\underline{\theta}_2; \overline{\theta}_2] \subset \mathbb{R}$ с положительными плотностями, а также $(\underline{\theta}_1; \overline{\theta}_1) \cap (\underline{\theta}_2; \overline{\theta}_2) \neq \varnothing$. Тогда не существует байесовской совместимой по стимулам функции общественного выбора, которая ex post эффективна и дает покупателю и продавцу любого типа неотрицательную ожидаемую выгоду от участия.

Доказательство. Доказательство будет состоять из двух шагов.

Шаг 1. Для любой байесовской совместимой по стимулам и interim индивидуально рациональной функции общественного выбора $f(\cdot) = [y_1(\cdot), y_2(\cdot), t_1(\cdot), t_2(\cdot)]$, *в которой* $y_1(\theta_1, \theta_2) + y_2(\theta_1, \theta_2) = 1$ *и* $t_1(\theta_1, \theta_2) + t_2(\theta_1, \theta_2) = 0$, *должно быть выполнено*

[41] То есть если $(\underline{\theta}_1; \overline{\theta}_1) \cap (\underline{\theta}_2; \overline{\theta}_2) \neq \varnothing$ (иначе говоря, $\overline{\theta}_2 > \underline{\theta}_1$ и $\overline{\theta}_1 > \underline{\theta}_2$), так что при некоторых реализациях $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ выгоды от торговли существуют, а при некоторых — нет.

$$\int_{\underline{\theta}_1}^{\overline{\theta}_1}\int_{\underline{\theta}_2}^{\overline{\theta}_2} y_2(\theta_1,\ \theta_2)\left[\left(\theta_2-\frac{1-\Phi_2(\theta_2)}{\phi_2(\theta_2)}\right)-\left(\theta_1+\frac{\Phi_1(\theta_1)}{\phi_1(\theta_1)}\right)\right]\phi_1(\theta_1)\phi_2(\theta_2)d\theta_2 d\theta_1 \geq 0. \quad (23.E.4)$$

Чтобы в этом убедиться, сначала заметим, что здесь можно применить ту же логику, из которой получено (23.D.15). Получаем [в этом доказательстве мы опускаем аргумент f в $U_i(\theta_i \mid f)$ и просто пишем $U_i(\theta_i)$]:

$$E[-\overline{t}_2(\theta_2)] = \left[\int_{\underline{\theta}_1}^{\overline{\theta}_1}\int_{\underline{\theta}_2}^{\overline{\theta}_2} y_2(\theta_1,\ \theta_2)\left(\theta_2-\frac{1-\Phi_2(\theta_2)}{\phi_2(\theta_2)}\right)\phi_1(\theta_1)\phi_2(\theta_2)d\theta_2 d\theta_1\right]-U_2(\underline{\theta}_2). \quad (23.E.5)$$

Аналогично поскольку из (23.D.12) следует, что

$$U_1(\underline{\theta}_1) = U_1(\overline{\theta}_1) - \int_{\underline{\theta}_1}^{\overline{\theta}_1}\int_{\underline{\theta}_2}^{\overline{\theta}_2} y_1(\theta_1,\theta_2)\phi_2(\theta_2)d\theta_2 d\theta_1,$$

то из (23.D.15) также следует, что

$$E[-\overline{t}_1(\theta_1)] = \left[\int_{\underline{\theta}_1}^{\overline{\theta}_1}\int_{\underline{\theta}_2}^{\overline{\theta}_2} y_1(\theta_1,\theta_2)\left(\theta_1+\frac{\Phi_1(\theta_1)}{\phi_1(\theta_1)}\right)\phi_1(\theta_1)\phi_2(\theta_2)d\theta_2 d\theta_1\right]-U_1(\overline{\theta}_1). \quad (23.E.6)$$

Тогда, поскольку $y_1(\theta_1, \theta_2) = 1 - y_2(\theta_1, \theta_2)$, получаем

$$E[-\overline{t}_1(\theta_1)] = \left[\int_{\underline{\theta}_1}^{\overline{\theta}_1}\int_{\underline{\theta}_2}^{\overline{\theta}_2} \left(\theta_1+\frac{\Phi_1(\theta_1)}{\phi_1(\theta_1)}\right)\phi_1(\theta_1)\phi_2(\theta_2)d\theta_2 d\theta_1\right]-$$

$$-\left[\int_{\underline{\theta}_1}^{\overline{\theta}_1}\int_{\underline{\theta}_2}^{\overline{\theta}_2} y_2(\theta_1,\ \theta_2)\left(\theta_1+\frac{\Phi_1(\theta_1)}{\phi_1(\theta_1)}\right)\phi_1(\theta_1)\phi_2(\theta_2)d\theta_2 d\theta_1\right]-U_1(\overline{\theta}_1).$$

Но в то же время

$$\left[\int_{\underline{\theta}_1}^{\overline{\theta}_1}\int_{\underline{\theta}_2}^{\overline{\theta}_2} \left(\theta_1+\frac{\Phi_1(\theta_1)}{\phi_1(\theta_1)}\right)\phi_1(\theta_1)\phi_2(\theta_2)d\theta_2 d\theta_1\right] = \left[\int_{\underline{\theta}_1}^{\overline{\theta}_1}[\theta_1\phi_1(\theta_1)+\Phi_1(\theta_1)]d\theta_1\right] =$$

$$= [\theta_1\Phi_1(\theta_1)]_{\underline{\theta}_1}^{\overline{\theta}_1} = \overline{\theta}_1.$$

Таким образом,

$$E[-\overline{t}_1(\theta_1)] = \overline{\theta}_1 - \left[\int_{\underline{\theta}_1}^{\overline{\theta}_1}\int_{\underline{\theta}_2}^{\overline{\theta}_2} y_2(\theta_1,\ \theta_2)\left(\theta_1+\frac{\Phi_1(\theta_1)}{\phi_1(\theta_1)}\right)\phi_1(\theta_1)\phi_2(\theta_2)d\theta_2 d\theta_1\right]-U_1(\overline{\theta}_1). \quad (23.E.7)$$

Далее, из того что $t_1(\theta_1,\ \theta_2) + t_2(\theta_1,\ \theta_2) = 0$, следует, что $E[-t_1(\theta_1,\ \theta_2)] + E[-t_2(\theta_1, \theta_2)] = 0$. Складывая (23.E.5) и (23.E.7), получаем

$$[U_1(\overline{\theta}_1) - \overline{\theta}_1] + U_2(\underline{\theta}_2) =$$

$$= \int_{\underline{\theta}_1}^{\overline{\theta}_1}\int_{\underline{\theta}_2}^{\overline{\theta}_2} y_2(\theta_1,\theta_2)\left[\left(\theta_2-\frac{1-\Phi_2(\theta_2)}{\phi_2(\theta_2)}\right)-\left(\theta_1+\frac{\Phi_1(\theta_1)}{\phi_1(\theta_1)}\right)\right]\phi_1(\theta_1)\phi_2(\theta_2)d\theta_2 d\theta_1.$$

Учитывая ограничения индивидуальной рациональности $U_1(\overline{\theta}_1) \geq \overline{\theta}_1$ и $U_2(\underline{\theta}_2) \geq 0$, получаем (23.E.4).

Шаг 2. Условие (23.E.4) не может быть выполнено, если $y_2(\theta_1, \theta_2) = 1$ *при* $\theta_2 > \theta_1$ *и* $y_2(\theta_1, \theta_2) = 0$ при $\theta_2 < \theta_1$.

Предположим, что это не так. Тогда левую часть неравенства (23.E.4) можно переписать в виде

$$\int_{\underline{\theta}_2}^{\bar{\theta}_2}\int_{\underline{\theta}_1}^{\min\{\theta_2,\bar{\theta}_2\}}\left[\left(\theta_2-\frac{1-\Phi_2(\theta_2)}{\phi_2(\theta_2)}-\theta_1\right)\phi_1(\theta_1)-\Phi_1(\theta_1)\right]\phi_2(\theta_2)d\theta_1 d\theta_2 =$$

$$=\int_{\underline{\theta}_2}^{\bar{\theta}_2}\left[\left(\theta_2-\frac{1-\Phi_2(\theta_2)}{\phi_2(\theta_2)}-\theta_1\right)\Phi_1(\theta_1)\right]_{\underline{\theta}_1}^{\min\{\theta_2,\bar{\theta}_1\}}\phi_2(\theta_2)d\theta_2 =$$

$$=\int_{\underline{\theta}_2}^{\bar{\theta}_2}\left[\left(\theta_2-\frac{1-\Phi_2(\theta_2)}{\phi_2(\theta_2)}-\min\{\theta_2,\bar{\theta}_1\}\right)\Phi_1(\min\{\theta_2,\ \bar{\theta}_1\})\right]\phi_2(\theta_2)d\theta_2 =$$

$$=-\int_{\underline{\theta}_2}^{\bar{\theta}_1}[1-\Phi_2(\theta_2)]\Phi_1(\theta_2)d\theta_2+\int_{\bar{\theta}_1}^{\bar{\theta}_2}[(\theta_2-\bar{\theta}_1)\phi_2(\theta_2)+(\Phi_2(\theta_2)-1)]d\theta_2 =$$

$$=-\int_{\underline{\theta}_2}^{\bar{\theta}_1}[1-\Phi_2(\theta_2)]\Phi_1(\theta_2)d\theta_2+[(\theta_2-\bar{\theta}_1)(\Phi_2(\theta_2)-1)]_{\bar{\theta}_1}^{\bar{\theta}_2} =$$

$$=-\int_{\underline{\theta}_2}^{\bar{\theta}_1}[1-\Phi_2(\theta_2)]\Phi_1(\theta_2)d\theta_2<0,$$

где неравенство следует из $\bar{\theta}_1>\underline{\theta}_2$ и $\underline{\theta}_1<\bar{\theta}_2$. Это противоречит (23.E.4), так что теорема доказана. ■

На основании принципа выявления для равновесия Байеса — Нэша (утверждение 23.D.1) можно следующим образом сформулировать следствие из теоремы Майерсона — Саттертуэйта. Рассмотрим *любой* институт добровольной торговли, который устанавливает правила взаимодействия покупателя и продавца. Например, это может быть процесс торга, в котором стороны делают предложения и ответные предложения друг другу, или любой арбитражный механизм, в котором агенты сообщают третьей стороне свои типы, а потом эта третья сторона решает, состоится ли торговля и по какой цене[42]. Мы знаем из принципа выявления, что любая функция общественного выбора, прямо реализуемая в равновесии Байеса — Нэша[43] такого механизма, должна быть байесовской совместимой по стимулам. Более того, поскольку участие является добровольным, эта функция общественного выбора $f(\cdot)$ должна удовлетворять interim ограничениям индивидуальной рациональности, т. е. $U_1(\theta_1 \mid f) \geq \theta_1$ для всех θ_1 и $U_2(\theta_2 \mid f) \geq 0$ для всех θ_2. Таким образом, теорема Майерсона — Саттертуэйта утверждает, что при этих предположениях никакой институт добровольной торговли не может иметь равновесия по Байесу — Нэшу, ведущего к ex post эффективному результату для всех возможных реализаций типов покупателя и продавца.

[42] Строго говоря, чтобы это было непосредственным следствием утверждения 23.E.1, дата доставки и потребления блага должна быть фиксирована (так что процесс торга, рассмотренный в приложении A главы 9, не подойдет). Но при некотором переосмыслении утверждение 23.E.1 можно применить к ситуациям, в которых торговля имеет место в реальном времени, где не только сама доставка товара имеет значение, но и *время доставки* тоже (см. упражнение 23.E.4).

[43] А значит, и в любом совершенном байесовском или секвенциальном равновесии (см. раздел 9.C).

23.F. Оптимальные байесовские механизмы

В разделах 23.B–23.E мы занимались поиском реализуемых функций общественного выбора в ситуациях с неполной информацией о предпочтениях агентов. В данном разделе мы обратимся к анализу реализуемых функций с точки зрения благосостояния. Сначала мы введем несколько критериев благосостояния, расширяющих понятие эффективности по Парето, которое мы использовали до сих пор для экономик с полной информацией. Используя их, мы затем обсудим несколько примеров, иллюстрирующих характеристики оптимальных функций общественного выбора (и, как следствие, оптимальные механизмы прямого выявления, реализующие эти функции). В этом разделе мы ограничимся реализацией в равновесии по Байесу — Нэшу. Оно детально обсуждалось в разделе 23.D, предположения и обозначения которого мы далее будем использовать, если не сказано иного. Хорошими источниками для дополнительного чтения послужат работы Холмстрома и Майерсона (Holmstrom, Myerson, 1983), Майерсона (Myerson, 1991), а также Фуденберга и Тироля (Fudenberg, Tirole, 1991).

Для экономик, в которых предпочтения агентов точно известны, концепция эффективности (или оптимальности) по Парето представляет собой самую слабую проверку, которую оптимальный с точки зрения благосостояния исход $x \in X$ должен проходить. А именно: не должно быть другого допустимого исхода $\hat{x} \in X$, при котором некоторым агентам строго лучше, чем при исходе x, и ни одному агенту не хуже.

Расширение этой концепции для случая функций общественного выбора при неполной информации должно выглядеть примерно так.

Функция общественного выбора $f(\cdot)$ эффективна, если она допустима и если нет другой допустимой функции общественного выбора, которая улучшала бы положение некоторых агентов, не ухудшая ничьего положения.

Чтобы это определение можно было использовать, мы должны уточнить две вещи. Во-первых, что именно мы понимаем под словом «допустима»? Во вторых, что мы имеем в виду, когда говорим, что нет другой допустимой функции общественного выбора, которая «улучшала бы положение некоторых агентов, не ухудшая ничьего положения»?

Рассмотрим первый из этих вопросов. В разделах 23.D. и 23.E мы подробно обсуждали определение множества допустимых функций общественного выбора, когда предпочтения агентов являются частной информацией. Определим следующее множество:

$$F_{BIC} = \{f\colon \Theta \to X\colon f(\cdot) \text{ — байесовская совместимая по стимулам}\}. \quad (23.F.1)$$

Элементы множества F_{BIC} в каждом конкретном случае — функции общественного выбора, удовлетворяющие (23.D.1) — условию, гарантирующему существование равновесия по Байесу — Нэшу в механизме прямого выявления $\Gamma = (\Theta_1, \ldots, \Theta_I, f(\cdot))$, в котором правдивая стратегия является доминирующей для каждого агента.

Аналогично, следуя обсуждению в разделе 23.E, определим множество

$$F_{IR} = \{f\colon \Theta \to X\colon f(\cdot) \text{ — индивидуально рациональная}\}. \qquad (23.F.2)$$

Множество F_{IR} содержит те функции общественного выбора, которые удовлетворяют тому из трех типов ограничений индивидуальной рациональности (участия) (23.E.1)–(23.E.3), который релевантен рассматриваемой ситуации. Если ограничения участия отсутствуют (т. е. агенты не могут выйти из механизма), тогда $F_{IR} = \{f\colon \Theta \to X\}$ — множество всех возможных функций общественного выбора.

Исходя из обсуждений в разделах 23.D и 23.E, можно записать множество допустимых функций общественного выбора в условиях наличия частной информации как $F^* = F_{BIC} \cap F_{IR}$. Следуя работе Майерсона (Myerson, 1991), мы называем это *допустимым множеством с учетом ограничения по стимулам*, чтобы подчеркнуть, что это множество допустимых функций общественного выбора в случае, когда ограничения совместимости стимулов должны быть выполнены.

Теперь рассмотрим второй вопрос. Что мы имеем в виду, когда говорим, что никакая другая допустимая функция общественного выбора «улучшала бы положение некоторых агентов, не ухудшая ничьего положения»? Критический вопрос здесь — это *время*, в которое мы хотим анализировать благосостояние. А именно делаем мы это *до* того, как агенты (частным образом) узнают свои типы, или *после*? Если первое, то мы проводим анализ благосостояния на *стадии ex ante* (следуя терминологии раздела 23.E, мы называем этой стадией время, когда агенты еще не узнали свои типы). Если же второе, то это стадия, которую мы в разделе 23.E называли *промежуточной (interim)* (момент времени, когда агент уже узнал свой тип, но пока типы еще неизвестны публично). Чтобы формально определить различные критерии благосостояния в этих двух случаях, мы еще раз обозначим за $U_i(\theta_i \mid f)$ ожидаемую полезность агента от функции общественного выбора $f(\cdot)$, при условии что он принадлежит к типу θ_i. Пусть также $U_i(f) = E_{\theta i}[U_i(\theta_i \mid f)]$ — ожидаемая полезность ex ante от функции общественного выбора $f(\cdot)$. Теперь мы можем дать два определения.

Определение 23.F.1. Если F — множество допустимых функций общественного выбора, то функция $f(\cdot) \in F$ называется *ex ante эффективной на F*, если не существует $\hat{f}(\cdot) \in F$, такой что $U_i(\hat{f}) \geq U_i(f)$ для всех $i = 1, \ldots, I$, а также $U_i(\hat{f}) > U_i(f)$ для некоторого i.

Определение 23.F.2. Если F — множество допустимых функций общественного выбора, то функция $f(\cdot) \in F$ называется *interim эффективной на F*, если не существует $\hat{f}(\cdot) \in F$, такой что $U_i(\theta_i \mid \hat{f}) \geq U_i(\theta_i \mid f)$ для всех $\theta_i \in \Theta_i$ и всех $i = 1, \ldots, I$, а также $U_i(\theta_i \mid \hat{f}) > U_i(\theta_i \mid f)$ для некоторого i и некоторого $\theta_i \in \Theta_i$.

Довольно просто понять, почему проверка ex ante эффективности проводится именно так: когда агенты еще не узнали своего типа, при сравнении функций общественного выбора мы должны сравнивать благосостояние каждого агента, исходя из его ожидаемой полезности от всех возможных типов. Но все становится несколько сложнее, если наш анализ проводится тогда, когда каждый агент уже узнал свой тип. Хотя агенты и знают свои типы, мы их не знаем. Поэтому будет правильным сказать, что функция общественного выбора $\hat{f}(\cdot)$ лучше с точки зрения благосостояния, чем другая функция $f(\cdot)$, если при использовании $\hat{f}(\cdot)$ всем агентам не хуже, чем при $f(\cdot)$, независимо от реализации их типов, а какому-то агенту при некотором его возможном типе — строго лучше. Эта концепция interim эффективности и описана в определении 23.F.2.

В утверждении 23.F.1 эти две концепции эффективности сравниваются.

Утверждение 23.F.1. Если F — множество допустимых функций общественного выбора, то любая ex ante эффективная на F функция $f(\cdot) \in F$ также interim эффективна на F.

Доказательство. Предположим, что $f(\cdot)$ — ex ante эффективная функция на F, но не эффективная interim. Тогда существует такая $\hat{f}(\cdot) \in F$, что $U_i(\theta_i \mid \hat{f}) \geq U_i(\theta_i \mid f)$ для всех $\theta_i \in \Theta_i$ и всех $i = 1, \ldots, I$, а также $U_i(\theta_i \mid \hat{f}) > U_i(\theta_i \mid f)$ для некоторого i и некоторого $\theta_i \in \Theta_i$. Но поскольку для всех i верно $U_i(f) = E_{\theta_i}[U_i(\theta_i \mid f)]$ и $U_i(\hat{f}) = E_{\theta_i}[U_i(\theta_i \mid \hat{f})]$, получается, что $U_i(\hat{f}) \geq U_i(f)$ для всех $i = 1, \ldots, I$, а также $U_i(\hat{f}) > U_i(f)$ для некоторого i, что противоречит нашему предположению об ex ante эффективности функции $f(\cdot)$ на F.

Концепция ex ante эффективности более требовательна, чем концепция interim эффективности (так что меньше функций общественного выбора $f(\cdot)$ проходят проверку на ex ante эффективность), потому что ожидаемая полезность ex ante каждого агента при функции $\hat{f}(\cdot)$ может быть больше по сравнению с $f(\cdot)$, даже если некоторый тип агента i при $\hat{f}(\cdot)$ имеет более низкую ожидаемую полезность, чем при $f(\cdot)$.

Подводя итоги, отметим, что, когда типы агентов уже определены в момент проведения анализа, подходящей концепцией эффективности функции общественного выбора в ситуации неполной информацией является interim эффективность на F^* — множестве байесовских совместимых по стимулам и индивидуально рациональных функций общественного выбора[44]. С другой стороны, если наш анализ происходит до того, как типы агентов становятся известны им самим, то нужно использовать концеп-

[44] Зачастую это относится к ситуациям, когда предположение о случайном выборе типов агентов из известного заранее распределения используется только как прием для моделирования убеждений агентов относительно типов друг друга (см. раздел 8.E), а не как описание некоторого момента времени, который существует на самом деле и в котором можно было бы провести анализ благосостояния.

цию ex ante эффективности на множестве F^*[45]. Эти два критерия часто называются просто *ex ante эффективностью с учетом ограничения по стимулам* и *interim эффективностью с учетом ограничения по стимулам* (это термины из работы Холмстрома и Майерсона (Holmstrom, Myerson, 1983)), где слова *с учетом ограничения по стимулам* означают, что мы говорим об эффективности на множестве F^*[46].

Эти два критерия благосостояния отличаются от критерия эффективности ex post, описанного в определении 23.B.2. Чтобы лучше это увидеть, в определении 23.F.3 концепция эффективности ex post приводится в форме, соответствующей определениям 23.F.1 и 23.F.2.

Определение 23.F.3. Если F — множество допустимых функций общественного выбора, то функция $f(\cdot) \in F$ называется *ex post эффективной на F*, если не существует $\hat{f}(\cdot) \in F$, такой что $u_i(\hat{f}(\theta), \theta_i \geq u_i(f(\theta), \theta_i)$ для всех $i = 1, \ldots, I$ и всех $\theta \in \Theta$, а также $u_i(\hat{f}(\theta), \theta_i) > u_i(f(\theta), \theta_i)$ для некоторого i и некоторого $\theta \in \Theta$.

Проверка эффективности ex post, описанной в определении 23.F.3, проводится на стадии ex post — когда вся информация уже доступна публично. Можно видеть, что функция общественного выбора $f(\cdot)$ ex post эффективна в смысле определения 23.B.2 тогда и только тогда, когда она ex post эффективна в смысле определения 23.F.3 и $F = \{f: \Theta \to X\}$.

Заметим, что критерий эффективности ex post на $\{f: \Theta \to X\}$ или, в более общем случае, на F_{IR} при наличии ограничений индивидуальной рациональности никак не касается вопроса совместимости стимулов. Так что его стоит использовать как критерий для анализа благосостояния только в том случае, когда типы агентов наблюдаемы публично. Поскольку $F^* \subset F_{IR}$, распределения, которые эффективны ex ante или interim, необязательно ex post эффективны в этом смысле. Теорема Майерсона — Саттертуэйта (утверждение 23.E.1) демонстрирует это для случая двусторонней торговли: при ее предпосылках никакой элемент F^* не является ex post эффективным. Примеры 23.F.1–23.F.3 содержат другие иллюстрации. (Чтобы увидеть, когда концепция эффективности ex post все же представляет интерес в ситуации неполной информации, см. упражнение 23.F.1.)

Заметим также, что даже в тех случаях, когда информация о типах агентов является общедоступной, использование эффективности ex post на F_{IR} в качестве критерия благосостояния уместно, только если типы уже определены. Когда мы обсуждаем благосостояние в момент времени до того, как агенты узнают свои типы, стоит использовать более строгий критерий

[45] Это часто относится к случаям, когда в момент заключения контракта агенты не знают своих типов, но узнают позднее. Тогда естественно сравнивать разные контракты (механизмы) на основании критерия ex ante. Модель принципал — агент, рассмотренная в разделе 14.C и примере 23.F.1, как раз демонстрирует такой случай.

[46] При этом, поскольку ограничения индивидуальной рациональности различны для разных ситуаций, точное описание множества F, на котором исследуется эффективность, обычно добавляет ясности.

эффективности ex ante функции $f(\cdot)$ на множестве F_{IR}. Эти две концепции иногда называют *классической эффективностью ex post* и *классической эффективностью ex ante* (это также термины из работы Холмстрома и Майерсона (Holmstrom, Myerson, 1983)), чтобы подчеркнуть отсутствие ограничений на стимулы при определении допустимого множества функций общественного выбора.

В оставшейся части раздела мы рассмотрим три примера, в которых охарактеризуем оптимальные с точки зрения благосостояния функции общественного выбора. В примерах 23.F.1 и 23.F.2 предполагается, что один из агентов, который не получает никакой частной информации, выбирает механизм, максимизирующий его ожидаемую полезность при условии выполнения для остальных агентов ограничений как совместимости стимулов, так и interim индивидуальной рациональности. Эти два примера характеризуют механизм, interim эффективный с учетом ограничений по стимулам. В примере 23.F.3 мы приводим полную характеристику множеств interim и ex ante эффективных с учетом ограничений по стимулам механизмов для простого случая двусторонней торговли с неблагоприятным отбором.

Пример 23.F.1. *Проблема принципал — агент со скрытой информацией.*

В разделе 14.C мы изучали проблемы принципал — агент со скрытой информацией для случая, в котором у агента было два возможных типа. Здесь же мы рассмотрим случай, где у агента может быть континуум типов. Вспомним проблему принципал — агент со скрытой информацией, описанную в разделе 14.C: принципал должен составить оптимальный (максимизирующий его выигрыш) контракт с агентом, который после его заключения получит частную информацию о своем типе. В этой ситуации принципал сталкивается как с ограничениями совместимости стимулов, так и с ограничением резервной полезности агента. Вспомним также, что в предельном случае бесконечной несклонности к риску агента ему должна быть гарантирована резервная полезность при всех возможных типах. Поэтому эта проблема составления контракта эквивалентна той, в которой агент уже знал бы свой тип на момент его заключения. Здесь мы сразу зададим такие условия — предположим, что агент уже знает свой тип в момент заключения контракта. В такой постановке оптимальный для принципала контакт можно рассматривать как реализацию одной конкретной функции общественного выбора, interim эффективной с учетом ограничений по стимулам. (Если бы агент не знал своего типа в момент заключения контракта и был бы также бесконечно не склонен к риску, то эта функция общественного выбора также была бы ex ante эффективной с учетом ограничений по стимулам.)

Предположим, что агент (индивид 1) может совершить некоторое наблюдаемое действие $e \in \mathbb{R}_+$ (уровень «усилий» или «задания») и получает денежное вознаграждение от принципала в размере t_1. Тип агента случайным образом выбирается из отрезка $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$, где $\underline{\theta} < \overline{\theta} < 0$, в соответствии с функцией распределения $\Phi(\cdot)$ и функцией плотности $\phi(\cdot)$, принимающей только положительные значения на $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$. Предполагается, что это распределение удовлетворяет свойству неубывания $[\theta - ((1 - \Phi(\theta))/\phi(\theta))]$ по θ[47].

[47] В работе Фуденберга и Тироля (Fudenberg, Tirole, 1991)) представлен анализ случая, когда это предположение не выполнено.

Если тип агента θ, то его бернуллиевская функция полезности имеет вид $u_1(e, t_1, \theta) = t_1 + \theta g(e)$, где $g(\cdot)$ — дифференцируемая функция, $g(0) = 0$, $g(e) > 0$ для $e > 0$, $g'(0) = 0$, $g'(e) > 0$ для $e > 0$, $g''(\cdot) > 0$. То есть $\theta g(e)$ — это дисполезность от усилий (вспомним, что $\theta < 0$), причем чем больше уровень усилий, тем больше дисполезность. Заметим, что при любом уровне e чем больше уровень θ, тем меньше общая дисполезность и предельная дисполезность от увеличения e. Как говорилось выше, мы предполагаем, что агент должен гарантированно получить ожидаемую полезность не ниже $\bar{u}$ при любом возможном типе.

У принципала (индивида 0) нет частной информации. Его бернуллиевская функция полезности имеет вид: $u_0(e, t_0) = v(e) + t_0$, где t_0 — его чистый трансферт, $v(\cdot)$ — дифференцируемая функция, для которой выполнено $v'(\cdot) > 0$ и $v''(\cdot) < 0$.

Контракт между принципалом и агентом может рассматриваться как спецификация *механизма* в том смысле, в каком мы используем это слово в данной главе. Равновесный исход, к которому приводит такой контракт, формально является функцией общественного выбора, которая ставит в соответствие каждому возможному типу агента уровень усилий и трансферт. Согласно принципу выявления для равновесия Байеса — Нэша (утверждение 23.D.1), этот исход всегда можно воспроизвести с помощью механизма прямого выявления, стимулирующего к использованию правдивых стратегий. Таким образом, принципал может ограничить поиск оптимального контракта множеством байесовских совместимых по стимулам функций общественного выбора $f(\cdot) = (e(\cdot), t_0(\cdot), t_1(\cdot))$, которые дают агенту полезность не меньше $\bar{u}$ для любого возможного значения θ. Далее мы (без потери общности) ограничимся поиском только среди контрактов, для которых выполнено $t_0(\theta) = -t_1(\theta)$ для всех θ (т.е. тех, в которых не возникает потерь товара-измерителя).

Задача принципала в таком случае может быть записана в виде

$$\max_{f(\cdot)=(e(\cdot),t_1(\cdot))} E[v(e(\theta)) - t_1(\theta)],$$

при условии что $f(\cdot)$ байесовская совместимая по стимулам
и индивидуально рациональная.

Данная модель принадлежит к классу моделей с линейной функцией полезности, рассмотренной в разделе 23.D [а именно в обозначениях утверждения 23.D.2, $k = e$, $v_1(k) = g(e)$, $\bar{v}_1(\theta) = g(e(\theta))$]. Обозначим через $U_1(\theta) = t_1(\theta) + \theta g(e(\theta))$ полезность агента, если его тип θ и он использует правдивую стратегию. Тогда можно использовать утверждение 23.D.2, чтобы переформулировать задачу принципала в терминах выбора функций $e(\cdot)$ и $U_1(\cdot)$:

$$\max_{e(\cdot),U_1(\cdot)} E[v(e(\theta)) + \theta g(e(\theta)) - U_1(\theta)], \tag{23.F.3}$$

при условии что (1) $e(\cdot)$ не убывает,

$$(2)\ U_1(\theta) = U_1(\underline{\theta}) + \int_{\underline{\theta}}^{\theta} g(e(s))ds \text{ для всех } \theta,$$

$$(3)\ U_1(\theta) \geq \bar{u} \text{ для всех } \theta.$$

Как следует из утверждения 23.D.2, ограничения (1) и (2) — необходимое и достаточное условия того, чтобы контракт принципала был байесовским совместимым по стимулам [ограничение (1) выполнено, поскольку $g(\cdot)$ не убывает по e], а (3) — ограничение индивидуальной рациональности агента.

Заметим, что если ограничение (2) выполнено, то ограничение (3) будет выполнено в том и только в том случае, если $U_1(\underline{\theta}) \geq \bar{u}$. Значит, мы можем заменить ограничение (3) на

$$(3')\ U_1(\underline{\theta}) \geq \bar{u}.$$

Далее, производя замену $U_1(\theta)$ в целевой функции из ограничения (2) и интегрируя по частям (в духе тех действий, которые мы предпринимали для получения (23.D.14)), запишем задачу (23.F.3) так:

$$\max_{e(\cdot),U_1(\underline{\theta})}\left[\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}\left\{v(e(\theta))+g(e(\theta))\left(\theta-\frac{1-\Phi(\theta)}{\phi(\theta)}\right)\right\}\phi(\theta)d\theta\right]-U_1(\underline{\theta}), \tag{23.F.4}$$

при (1) $e(\cdot)$ не убывает,

(3′) $U_1(\underline{\theta}) \geq \overline{u}$.

Из (23.F.4) ясно, что во всяком решении должно быть выполнено $U_1(\underline{\theta}) = \overline{u}$. Поэтому задача принципала может быть записана в виде:

$$\max_{e(\cdot)}\left[\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}\left\{v(e(\theta))+g(e(\theta))\left(\theta-\frac{1-\Phi(\theta)}{\phi(\theta)}\right)\right\}\phi(\theta)d\theta\right]-\overline{u}, \tag{23.F.5}$$

при (1) $e(\cdot)$ не убывает.

Предположим на секунду, что мы могли бы забыть об ограничении (1). Тогда оптимальная функция $e(\cdot)$ должна удовлетворять условию первого порядка[48]

$$v'(e(\theta))+g'(e(\theta))\left(\theta-\frac{1-\Phi(\theta)}{\phi(\theta)}\right)=0 \text{ для всех } \theta. \tag{23.F.6}$$

Но заметим, что при предположении о неубывании $[\theta-((1-\Phi(\theta))/\phi(\theta))]$ по θ можно применить к (23.F.6) теорему о неявной функции и получить, что любое решение $e(\cdot)$ этой модифицированной задачи должно быть неубывающим. Таким образом, (23.F.6) характеризует решение задачи принципала (см. раздел М.К математического приложения). Оптимальная $U_1(\cdot)$ [а значит, и $t_1(\cdot)$] тогда может быть получена из ограничения (2) в (23.F.3), с использованием оптимальной $e(\cdot)$ и того факта, что $U_1(\underline{\theta}) = \overline{u}$.

Интересно сравнить это решение и оптимальный контракт для случая, когда тип агента является наблюдаемым. Этот контракт — решение задачи

$$\max_{e(\cdot),t_1(\cdot)} E[v(e(\theta))-t_1(\theta)],$$

$$\text{при } t_1(\theta)+\theta g(e(\theta)) \geq \overline{u} \text{ для всех } \theta.$$

Следовательно, оптимальный уровень усилий в контракте с полной информацией — это уровень $e^*(\theta)$, который для всех θ удовлетворяет условию

$$v'(e^*(\theta))+g'(e^*(\theta))\theta=0.$$

Заметим, что $e^*(\theta)$ — уровень, который относится к любой ex post (классически) эффективной функции общественного выбора. С другой стороны, оптимальный для принципала уровень $e(\cdot)$, в случае когда θ — частная информация, удовлетворяет

$$v'(e(\theta))+g'(e(\theta))\theta\begin{cases}>0 & \text{при всех } \theta<\overline{\theta},\\ =0 & \text{при } \theta=\overline{\theta}.\end{cases}$$

Можно видеть, что $e(\theta) < e^*(\theta)$ для всех $\theta < \overline{\theta}$ и $e(\overline{\theta}) = e^*(\overline{\theta})$. Это вариация результата, который мы уже наблюдали в случае с двумя возможными типами в разделе 14.C. В оптимальном контракте тип агента с самой низкой дисполезностью от усилий

[48] Можно показать, что при наших предположениях оптимальный контракт является внутренним, т. е. $e(\theta) > 0$ для (почти) всех θ.

(здесь это тип $\bar{\theta}$, а в разделе 14.C — тип θ_H) предпринимает ex post эффективное действие, а все остальные типы занижают уровень усилий по сравнению с эффективным. Причина та же: такое поведение помогает уменьшить разницу между полезностью агента и его резервной полезностью для типов $\theta > \underline{\theta}$ (так называемую *информационную ренту*). Чтобы увидеть это с эвристической точки зрения, предположим, что мы, начиная с некоторой функции $e(\cdot)$, меняем $e(\hat{\theta})$ на величину $de < 0$ для некоторого типа $\hat{\theta} \in (\underline{\theta}, \bar{\theta})$ и вместе с тем снижаем его трансферт, чтобы оставить неизменной полезность[49]. Уменьшение трансферта, который платится агенту $\hat{\theta}$, равно $\hat{\theta} g'(e(\hat{\theta}))de$, в то время как прямой эффект на принципала равен $v'(e(\hat{\theta}))de$. В то же время, согласно ограничению (2), это изменение $e(\hat{\theta})$ снижает величину полезности (а значит, и трансферта) агентов с типами $\theta > \hat{\theta}$ в точности на $g'(e(\hat{\theta}))de$. Ожидаемая величина этого снижения трансфертов равна $-(1 - \Phi(\hat{\theta}))g'(e(\hat{\theta}))de$. Если исходная $e(\cdot)$ была оптимальной, то сумма первых двух изменений прибыли принципала (для типа $\hat{\theta}$), взвешенных по вероятностям функции плотности типа $\hat{\theta}$ (т. е. $[v'(e(\hat{\theta})) + \hat{\theta} g'(e(\hat{\theta}))]\phi(\hat{\theta})de$, и снижения платежа агентам с типами $\theta > \hat{\theta}$ (т. е. $(1 - \Phi(\hat{\theta}))g'(e(\hat{\theta}))de$) должна быть равна 0. Это и есть в точности (23.F.6). ■

Пример 23.F.2. *Оптимальные аукционы. Вновь рассмотрим ситуацию аукциона, приведенную в примере 23.B.4. Здесь мы выясним, какой аукцион является оптимальным для продавца неделимого объекта (агента 0), если имеется I покупателей, обозначенных $i = 1, \ldots, I$. У каждого покупателя есть бернуллиевская функция полезности $\theta_i y_i(\theta) + t_i(\theta)$, где $y_i(\theta)$ — вероятность, что агент i получит благо, если типы агентов $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_I)$. Тип каждого агента i выбирается случайно и независимо в соответствии с функцией распределения $\Phi_i(\cdot)$ на $[\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i] \subset \mathbb{R}$, где $\underline{\theta}_i \neq \bar{\theta}_i$, и функцией плотности $\phi_i(\cdot)$, которая принимает положительные значения на $[\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i]$. Мы также предполагаем, что для $i = 1, \ldots, I$*

$$\theta_i - \frac{1 - \Phi_i(\theta_i)}{\phi_i(\theta_i)}$$

не убывает по θ_i[50].

Функция общественного выбора в этой ситуации — это функция $f(\cdot) = (y_0(\cdot), \ldots, y_I(\cdot), t_0(\cdot), \ldots, t_I(\cdot))$, такая что $\theta \in \Theta$, $y_i(\theta) \in [0, 1]$ для всех i, $\sum_{i \neq 0} y_i(\theta) = 1 - y_0(\theta)$, а также $t_0(\theta) = -\sum_{i \neq 0} t_i(\theta)$[51]. Продавец хочет найти байесовскую совместимую по стимулам функцию общественного выбора, которая максимизирует его ожидаемый доход $E_\theta[t_0(\theta)] = -E_\theta\left[\sum_{i \neq 0} t_i(\theta)\right]$ при условии выполнения условий индивидуальной рациональности interim, т. е. $U_i(\theta_i) = \theta_i \bar{y}_i(\theta_i) + \bar{t}_i(\theta_i) \geq 0$ для всех θ_i и $i \neq 0$ [как и в разделе 23.D, $\bar{y}_i(\theta_i)$ — вероятность, что агент i получит благо, а $\bar{t}_i(\theta_i)$ — и его ожидаемый транс-

[49] Мы говорим «эвристически», потому что для строгости нам нужно было бы снижать e для интервала типов и брать пределы.

[50] Обсуждение случая, когда это предположение не выполняется, приведено в работе Майерсона (Myerson, 1991).

[51] Мы вновь, не теряя общности, ограничиваемся функциями общественного выбора, при которых не происходит потерь товара-измерителя или предмета продажи (функция общественного выбора, имеющая такую форму и оптимальная для продавца, всегда существует).

ферт при условии что он объявляет тип θ_i], поскольку покупатели вольны не участвовать в аукционе. Так что оптимальный выбор продавца — это некоторый элемент множества interim эффективных с учетом ограничения по стимулам функций общественного выбора.

Задача продавца может быть записана как выбор функций $y_1(\cdot), \ldots, y_I(\cdot)$ и $U_1(\cdot), \ldots, U_I(\cdot)$:

$$\max_{\{y_i(\cdot), U_i(\cdot)\}_{i=1}^I} \sum_{i \neq 0} \int_{\underline{\theta}_i}^{\bar{\theta}_i} \left[\bar{y}_i(\theta_i)\theta_i - U_i(\theta_i) \right] \phi_i(\theta_i)\, d\theta_i, \tag{23.F.7}$$

$$\text{при условии что (1) } \bar{y}_i(\cdot) \text{ не убывает для всех } i \neq 0,$$

$$\text{(2) для всех } \theta\text{: } y_i(\theta) \in [0, 1] \text{ для всех } i \neq 0,\ \sum_{i \neq 0} y_i(\theta) \leq 1,$$

$$(3)\ U_i(\theta_i) = U_i(\underline{\theta}_i) + \int_{\underline{\theta}}^{\theta} \bar{y}_i(s)\, ds \text{ для всех } i \neq 0 \text{ и } \theta_i,$$

$$(4)\ U_i(\theta_i) \geq 0 \text{ для всех } i \neq 0 \text{ и } \theta_i.$$

Заметим, что если ограничение (3) выполнено, то ограничение (4) будет выполнено в том и только в том случае, если $U_i(\theta_i) \geq 0$. Значит, мы можем заменить ограничение (4) на

$$(4')\ U_i(\underline{\theta}_i) \geq 0 \text{ для всех } i \neq 0 \text{ и } \theta_i.$$

Далее, производя замену $U_i(\theta_i)$ в целевой функции из ограничения (3) и действуя так же, как мы действовали для получения (23.D.16), запишем задачу продавца как задачу выбора функций $y_i(\cdot)$ и значений $U_1(\underline{\theta}_1), \ldots, U_I(\underline{\theta}_I)$. Получится, что нужно максимизировать

$$\int_{\underline{\theta}_1}^{\bar{\theta}_1} \ldots \int_{\underline{\theta}_I}^{\bar{\theta}_I} \left[\sum_{i=1}^{I} y_i(\theta_1, \ \ldots, \ \theta_I) \left(\theta_i - \frac{1 - \Phi_i(\theta_i)}{\phi_i(\theta_i)} \right) \right] \left[\prod_{i=1}^{I} \phi_i(\theta_i) \right] d\theta_I \ldots d\theta_1 - \sum_{i=1}^{I} U_i(\underline{\theta}_i)$$

при условии выполнения (1), (2) и (4′). Ясно, что в решении должно быть $U_i(\underline{\theta}_i) = 0$ для всех $i = 1, \ldots, I$. Следовательно, задача продавца сводится к выбору функций $y_1(\cdot), \ldots, y_I(\cdot)$, чтобы максимизировать

$$\int_{\underline{\theta}_1}^{\bar{\theta}_1} \ldots \int_{\underline{\theta}_I}^{\bar{\theta}_I} \left[\sum_{i=1}^{I} y_i(\theta_1, \ldots, \theta_I) \left(\theta_i - \frac{1 - \Phi_i(\theta_i)}{\phi_i(\theta_i)} \right) \right] \left[\prod_{i=1}^{I} \phi_i(\theta_i) \right] d\theta_I \ldots d\theta_1 \tag{23.F.8}$$

при условиях (1) и (2).

Давайте на секунду забудем об ограничении (1). Введем обозначение

$$J_i(\theta_i) = \theta_i - \frac{1 - \Phi_i(\theta_i)}{\phi_i(\theta_i)}.$$

Из (23.F.8) следует, что $y_1(\cdot), \ldots, y_I(\cdot)$ является решением этой модифицированной задачи в том и только в том случае, если для всех $i = 1, \ldots, I$ выполнено

$$y_i(\theta) = 1, \quad \text{если } J_i(\theta_i) > \max\{0, \max_{h \neq i} J_h(\theta_h)\}$$

и (23.F.9)

$$y_i(\theta) = 0, \quad \text{если } J_i(\theta_i) < \max\{0, \max_{h \neq i} J_h(\theta_h)\}.$$

[Можно заметить, что $J_i(\theta_i) = \max\{0, \max_{h \neq i} J_h(\theta_h)\}$ — событие с нулевой вероятностью.] Но с учетом нашего предположения, что $J_i(\cdot)$ не убывает по θ_i, из (23.F.9) следует неубывание $y_i(\cdot)$ по θ_i, а из него, в свою очередь, неубывание $\bar{y}_i(\cdot)$. Поэтому решение модифицированной задачи удовлетворяет условию (1), как и решение задачи продавца (см. раздел M.K математического приложения). Оптимальные функции трансфертов могут быть установлены в виде $t_i(\theta) = U_i(\theta_i) - \theta_i \bar{y}_i(\theta_i)$, где $U_i(\theta_i)$ получено из ограничения (3).

Следует отметить несколько моментов относительно условий (23.F.9). Во-первых, когда у разных агентов разные функции распределения $\Phi_i(\cdot)$, агент i, у которого значение $J_i(\theta_i)$ наибольшее, это *необязательно* тот, кто ценит товар выше всех. Поэтому оптимальный для продавца аукцион не обязан быть ex post (классически) эффективным.

Во-вторых, в случае *симметричных* участников аукциона, в котором $\underline{\theta}_i = \underline{\theta}$ и $J_i(\cdot) = J(\cdot)$ для $i = 1, \ldots, I$, если $\underline{\theta} > 0$ достаточно велико, так что $J(\underline{\theta}) > 0$, оптимальный аукцион всегда отдает товар агенту, который ценит его выше всех, а все агенты с наименьшей возможной оценкой получают ожидаемую полезность 0. Используя теорему об эквивалентности дохода (утверждение 23.D.3), мы можем заключить, что в данном случае аукционы первой и второй цены оба являются оптимальными.

В-третьих, у оптимального аукциона есть удачная интерпретация в случае ценообразования монополии. Рассмотрим, например, случай $I = 1$ и $\underline{\theta}_1 = 0$. Тогда условия (23.F.9) говорят, что оптимальный аукцион отдает товар покупателю (агенту 1) в том и только в том случае, если $J_1(\theta_1) = [\theta_1 - ((1 - \Phi(\theta_1))/\phi_1(\theta_1))] > 0$. Предположим, что продавец в этих условиях просто называет цену p, а покупатель решает, купить по этой цене или нет. Ожидаемый доход продавца от этой схемы равен $p(1 - \Phi_1(p))$, а условие первого порядка для оптимальной цены p^* имеет вид $(1 - \Phi_1(p^*)) - p^*\phi_1(p^*) = 0$ или, что то же самое, $J_1(p^*) = 0$. Поскольку $J_1(\cdot)$ не убывает, мы видим, что, если продавец объявляет цену таким образом, покупатель типа θ_1 получает товар с вероятностью 1, если $J_1(\theta_1) > 0$, и с вероятностью 0, если $J_1(\theta_1) < 0$, — в точности как в описанном выше оптимальном аукционе. Действительно, из теоремы об эквивалентности дохода следует, что в этом случае эта простая схема ценообразования является оптимальным механизмом для продавца. [Для дальнейшего изучения применения оптимальных аукционов к модели монополии см. упражнение 23.F.5 и работу Бюлоу и Робертса (Bulow, Roberts, 1989).] ■

На протяжении всей главы мы ограничивались ситуациями «частных оценок», когда полезность агента i зависела только от его собственного типа θ_{-i}. Однако в некоторых случаях, представляющих интерес для экономиста, полезность агента i может зависеть от типов других агентов, θ_{-i}. Т. е. бернуллиевская функция полезности агента i может принимать форму $u_i(x, \theta)$, а не $u_i(x, \theta_i)$, где $\theta = (\theta_i, \theta_{-i})$. К счастью, все концепции реализации в равновесии Байеса — Нэша, рассмотренные нами в разделах 23.D–23.F, расширяются на эти случаи. Например, мы можем сказать, что функция общественного выбора $f\colon \Theta \to X$ байесовская совместимая по стимулам, если для всех i и всех $\theta_i \in \Theta_i$

$$E_{\theta_{-i}}[u_i(f(\theta_i,\ \theta_{-i}),\ \theta) \mid \theta_i] \geq E_{\theta_{-i}}[u_i(f(\hat{\theta}_i,\ \theta_{-i}),\ \theta) \mid \theta_i] \qquad (23.F.10)$$

для всех $\hat{\theta}_i \in \Theta_i$. Наш третий и последний пример относится именно к такому классу моделей. В нем рассматривается простая ситуация двусторонней торговли с неблагоприятным отбором (см. обсуждение неблагоприятного отбора в разделе 13.B). Другое отличие от анализа в примерах 23.F.1 и 23.F.2 заключается в том, что здесь мы охарактеризуем множества *всех* ex ante и interim эффективных функций общественного выбора.

Пример 23.F.3. *Двусторонняя торговля с неблагоприятным отбором* (Myerson, 1991).

Рассмотрим ситуацию двусторонней торговли, в которой имеются продавец единицы неделимого частного блага (агент 1) и ее потенциальный покупатель (агент 2). Благо может быть высокого качества или низкого, при этом качество известно только продавцу. Чтобы отразить это в модели, скажем, что у продавца может быть два возможных типа: $\Theta_1 = \{\theta_L, \theta_H\}$, и предположим, что $\text{Prob}(\theta_H) = 0{,}2$. Полезность как продавца, так и покупателя от потребления блага зависит от типа продавца. Обозначим за y вероятность того, что покупатель получит товар, а за t — сумму денежного трансферта от покупателя к продавцу. Предположим, что[52]

$$\begin{aligned} &u_1(y,\ t \mid \theta_L) = t + 20(1-y), && u_1(y,\ t \mid \theta_H) = t + 40(1-y),\\ &u_2(y,\ t \mid \theta_L) = 30y - t, && u_2(y,\ t \mid \theta_H) = 50y - t. \end{aligned} \tag{23.F.11}$$

Функция общественного выбора в этой ситуации ставит вероятность торговой сделки в соответствие каждому возможному значению θ_1 и может быть представлена вектором (y_L, t_L, y_H, t_H). Мы предполагаем, что торговля является добровольной, так что в результате любая доступная функция общественного выбора должна удовлетворять interim ограничениям индивидуальной рациональности как для покупателя, так и для продавца. Для продавца это означает, что для каждого типа, который у него может оказаться, его ожидаемая полезность должна быть не меньше, чем его полезность при отказе от сделки (в этом случае он сам потребляет товар). Следовательно, должно быть выполнено

$$t_L + 20(1 - y_L) \geq 20 \quad (\text{IR}_{1L}), \tag{23.F.12}$$

$$t_H + 40(1 - y_H) \geq 40 \quad (\text{IR}_{1H}). \tag{23.F.13}$$

С другой стороны, индивидуальная рациональность покупателя требует только получения неотрицательной ожидаемой полезности от участия (при ненаблюдаемом θ_1). Так что должно быть выполнено

$$0{,}2(50y_H - t_H) + 0{,}8(30y_L - t_L) \geq 0. \quad (\text{IR}_2) \tag{23.F.14}$$

Из спецификации (23.F.11) следует, что если бы тип θ_1 был наблюдаем, то для каждого значения θ_1 существовали бы выгоды от торговли между покупателем и продавцом. Значит, в любой ex post (классически) эффективной функции общественного выбора будет выполнено $y_H = y_L = 1$ (см. упражнение 23.F.8).

Поскольку θ_1 является частной информацией продавца, множество допустимых функций общественного выбора — это допустимое множество с учетом ограничения по стимулам F^*, т. е. множество байесовских совместимых по стимулам и (interim) индивидуально рациональных функций общественного выбора. В данном примере функция общественного выбора (y_L, t_L, y_H, t_H) является байесовской совместимой по стимулам, если

$$t_H + 40(1 - y_H) \geq t_L + 40(1 - y_L) \quad (\text{IC}_H) \tag{23.F.15}$$

и

$$t_L + 20(1 - y_L) \geq t_H + 20(1 - y_H). \quad (\text{IC}_L) \tag{23.F.16}$$

Условие (23.F.15) требует, чтобы правдивая стратегия была доминирующей для продавца, когда его тип θ_H, а (23.F.16) — когда его тип θ_L. Таким образом, (y_L, t_L, y_H, t_H)

[52] Мы предполагаем, что нет потерь продаваемого блага или товара-измерителя, так что вероятность потребления товара хотя бы одним из участников равна 1 и любой трансферт от покупателя полностью попадает к продавцу.

является допустимой функцией общественного выбора в том и только в том случае, если она удовлетворяет ограничениям совместимости стимулов (23.F.15)–(23.F.16) и interim ограничениям индивидуальной рациональности (23.F.12)–(23.F.14).

Эти ограничения означают, что *любая* допустимая функция общественного выбора обладает следующими тремя свойствами (которые требуется доказать в упражнении 23.F.9):

(1) Никакая допустимая функция общественного выбора не является ex post (классически) эффективной.
(2) При любой допустимой функции общественного выбора верно $y_H \le y_L$ и $t_H \le t_L$.
(3) При любой допустимой функции общественного выбора ожидаемые выгоды от торговли для продавца низкокачественного товара по крайней мере не ниже, чем ожидаемые выгоды продавца высококачественного товара, т. е. $t_L - 20y_L \ge$ $\ge t_H - 40y_H$.

Теперь охарактеризуем interim и ex ante эффективные с учетом ограничения по стимулам функции общественного выбора для этой задачи о двустороннем торге. Чтобы определить interim эффективные с учетом ограничения по стимулам функции общественного выбора, мы должны найти такие (y_L, t_L, y_H, t_H), которые для каждого возможного выбора $\bar{u}_{1H} \ge 0$ и $\bar{u}_2 \ge 0$ решают следующую задачу:

$$\max_{(y_L \in [0,1], t_L, y_H \in [0,1], t_H)} t_L - 20y_L, \tag{23.F.17}$$

$$\text{при (1) } t_H - 40y_H \ge t_L - 40y_L,$$

$$\text{(2) } t_L - 20y_L \ge t_H - 20y_H,$$

$$\text{(3) } t_H - 40y_H \ge \bar{u}_{1H},$$

$$(4)\ 0,2(50y_H - t_H) + 0,8(30y_L - t_L) \ge \bar{u}_2.$$

(Мы упростили ограничения совместимости стимулов и индивидуальной рациональности, отбросив константы с обеих сторон неравенств, а также убрали константу из целевой функции[53].)

Задача (23.F.17) характеризует interim эффективную с учетом ограничения по стимулам функцию общественного выбора, максимизируя ожидаемую полезность interim продавца типа θ_L, при условии что ожидаемая полезность interim продавца типа θ_H по крайней мере не меньше $\bar{u}_{1H} \ge 0$, ожидаемая полезность interim покупателя по крайней мере не меньше $\bar{u}_2 \ge 0$ (поскольку у покупателя нет частной информации, это эквивалентно получению им полезности ex ante величины $\bar{u}_2$), а также выполнено ограничение совместимости стимулов для продавца.

Теперь охарактеризуем решение задачи (23.F.17) за несколько шагов.

Шаг 1. В любом решении задачи (23.F.17) выполнено $y_L = 1$*, т. е. любая interim эффективная с учетом ограничения по стимулам функция общественного выбора предполагает совершение сделки с определенностью, если товар низкого качества.*

Чтобы это увидеть, предположим, что $(y_L^*, t_L^*, y_H^*, t_H^*)$ — решение задачи (23.F.17), но что $y_L^* < 1$. Рассмотрим изменение функции общественного выбора $(\hat{y}_L, \hat{t}_L, \hat{y}_H, \hat{t}_H) =$ $= (y_L^* + \varepsilon, t_L^* + 30\varepsilon, y_H^*, t_H^*)$, где $\varepsilon > 0$. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ новая функция по-прежнему удовлетворяет всем ограничениям задачи (23.F.17) (проверьте это само-

[53] То есть мы выразили все это в терминах *выгод от торговли*, получаемых агентом.

стоятельно) и увеличивает значение целевой функции, что противоречит оптимальности $(y_L^*, t_L^*, y_H^*, t_H^*)$.

Шаг 2. В любом решении задачи (23.F.17) выполнено $y_H < 1$, т. е. любая interim эффективная с учетом ограничения по стимулам функция общественного выбора не предполагает совершение сделки с определенностью, если товар высокого качества.

С учетом шага 1, если $(y_L^*, t_L^*, y_H^*, t_H^*)$ — решение (23.F.17), для которого $y_H^* = 1$, то $(y_L^*, t_L^*, y_H^*, t_H^*)$ — ex post (классически) эффективная (т. е. $y_L^* = y_H^* = 1$). Но мы уже отметили выше, что не существует таких функций, которые были бы допустимы с учетом ограничения по стимулам (т. е. являлись бы элементами F^*).

Шаг 3. В любом решении задачи (23.F.17) ограничение (2) *существенно, т. е. выполнено как равенство.*

Предположим, что функция общественного выбора $(y_L^*, t_L^*, y_H^*, t_H^*)$ — решение задачи (23.F.17), для которого ограничение (2) не выполнено как равенство. Рассмотрим другую функцию общественного выбора $(\hat{y}_L, \hat{t}_L, \hat{y}_H, \hat{t}_H) = (y_L^*, t_L^* + \varepsilon, y_H^* + \varepsilon, t_H^* + 45\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ новая функция удовлетворяет всем ограничениям задачи (23.F.17). (Заметим, что она удовлетворяет $\hat{y}_H < 1$, поскольку $y_H^* < 1$ из шага 2. Проверьте остальные ограничения самостоятельно.) Кроме того, в ней значение целевой функции больше, чем в $(y_L^*, t_L^*, y_H^*, t_H^*)$, — противоречие.

Шаг 4. Если ограничение (2) *выполнено как равенство и $y_L \geq y_H$, ограничение* (1) *выполнено с необходимостью.*

Если ограничение (2) выполнено как равенство, то $t_H - t_L = 20(y_H - y_L)$. Если $y_L \geq y_H$, то отсюда следует $t_H - t_L \geq 40(y_H - y_L)$ или, что то же самое, $t_H - 40y_H \geq t_L - 40y_L$. Получаем, что ограничение (1) выполнено.

С учетом шагов 1–4, мы можем упростить задачу (23.F.17). А именно можно видеть, что (y_L, t_L, y_H, t_H) interim эффективна с учетом ограничения по стимулам в том и только в том случае, если $y_L = 1$ и (t_L, y_H, t_H) является решением задачи

$$\max_{(t_L \in [0,1], y_H, t_H \in [0,1])} \quad t_L - 20, \tag{23.F.18}$$

$$\text{при} \begin{array}{ll} (2') & t_L - 20 = t_H - 20y_H, \\ (3) & t_H - 40y_H \geq \bar{u}_{1H}, \\ (4) & 0,2(50y_H - t_H) + 0,8(30 - t_L) \geq \bar{u}_2. \end{array}$$

Выразив t_L из ограничения (2′) и подставив в целевую функцию и в ограничение (4), получим задачу

$$\max_{(y_H \in [0,1], t_H)} t_H - 20y_H, \tag{23.F.19}$$

$$\text{при (3)}\ \ t_H - 40y_H \geq \bar{u}_{1H},$$

$$(4')\ 26y_H - t_H + 8 \geq \bar{u}_2.$$

Решение для заданной пары значений $\bar{u}_{1H} \geq 0$ и $\bar{u}_2 \geq 0$ изображено на рис. 23.F.1. Пары (y_H, t_H), удовлетворяющие ограничениям (2) и (4′) задачи (23.F.19), лежат в заштрихованной области. Также на рисунке изображены две линии уровня целевой функции $t_H - 20y_H$. Оптимальная пара (y_H, t_H) для этих значений $\bar{u}_{1H}$ и $\bar{u}_2$ отмечена как (y_H^*, t_H^*). Соответствующие значения t_L и y_L в этой interim эффективной с учетом ограничения по стимулам функции общественного выбора равны $y_L^* = 1$ и $t_L^* = 20 + t_H^* - 20y_H^*$.

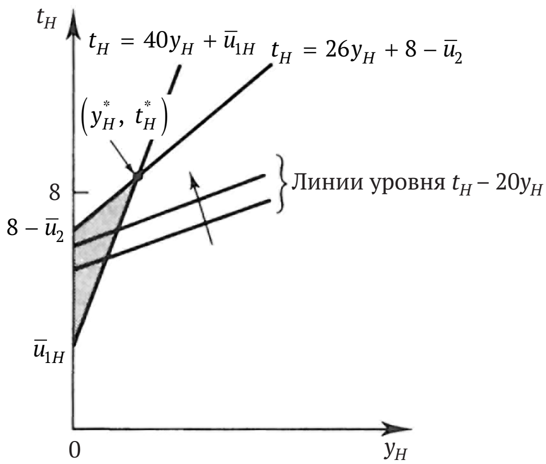


Рис. 23.F.1. Оптимальный уровень (y_H, t_H) в задаче (23.F.19) для заданной пары значений $(\bar{u}_H, \bar{u}_2) \geq 0$

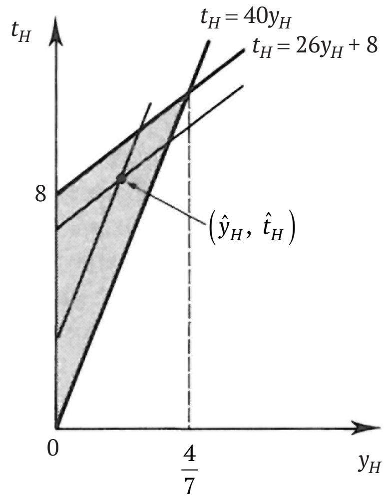


Рис. 23.F.2. Заштрихованная область содержит те пары (y_H, t_H), которые могут быть эффективными interim с учетом ограничения по стимулам функции общественного выбора

Заштрихованная область на рис. 23.F.2, $\{(y_H, t_H)\colon y_H \in [0, 1], t_H \geq 40y_H, t_H \leq 26y_H + 8\}$, показывает *все* пары (y_H, t_H), которые могут возникнуть в interim эффективной с учетом ограничения по стимулам функции общественного выбора. В этом можно убедиться, проведя анализ рисунка 23.F.1 для всех возможных $(\bar{u}_{1H}, \bar{u}_2) \geq 0$ [одна пара $(\hat{y}_H, \hat{t}_H)$ также показана на рис. 23.F.2]. Заметим, что при любой interim эффективной с учетом ограничения по стимулам функции общественного выбора $y_H \leq 4/7$. Для каждой пары $(\hat{y}_H, \hat{t}_H)$ в этом множестве мы можем определить interim эффективную с учетом ограничения по стимулам функцию общественного выбора $(\hat{y}_L, \hat{t}_L, \hat{y}_H, \hat{t}_H)$, установив $\hat{y}_L = 1$ и $\hat{t}_L = 20 + \hat{t}_H - 20\hat{y}_H$.

Какие же из этих interim эффективных с учетом ограничения по стимулам функций общественного выбора являются ex ante эффективными? (Вспомним, что множество ex ante эффективных с учетом ограничения по стимулам функций общественного выбора включено в множество interim эффективных с учетом ограничения по стимулам функций. Кроме того, хоть мы и будем пользоваться критерием ex ante, множество ограничений участия, определяющих F^*, попрежнему будет состоять из interim ограничений, используемых выше.) Ожидаемые полезности покупателя и продавца при interim эффективной с учетом ограничения по стимулам функции общественного выбора (y_L, t_L, y_H, t_H) имеют вид

$$U_1 = 0{,}8(t_L + 20(1 - y_L)) + 0{,}2(t_H + 40(1 - y_H))$$

и

$$U_2 = 0{,}8(30y_L - t_L) + 0{,}2(50y_H - t_H).$$

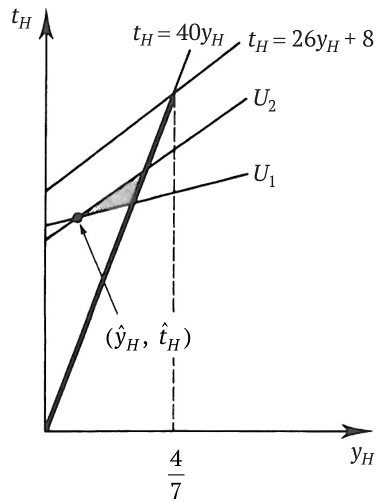


Рис. 23.F.3. Множество ex ante эффективных функций общественного выбора совпадает с interim эффективными функциями общественного выбора, при которых (y_H, t_H) лежит на отрезке, выделенном жирным

Поскольку $y_L = 1$ и $t_L = 20 + t_H - 20y_H$ в любой interim эффективной с учетом ограничения по стимулам функции общественного выбора, можно переписать ожидаемую полезность как функцию только (y_H, t_H):

$$U_1 = 24 + t_H - 24y_H, U_2 = 8 + 26y_H - t_H.$$

Точки в заштрихованной области рис. 23.F.3 повышают ожидаемую полезность ex ante как покупателя, так и продавца по сравнению с произвольной точкой $\left(\hat{y}_H,\ \hat{t}_H\right)$ множества $\{(y_H, t_H)$: $y_H \in [0, 1], t_H \geq 40y_H, t_H \leq 26y_H + 8\}$. На этом рисунке можно видеть, что никакая пара (y_H, t_H), которая не лежит на границе $t_H = 40y_H$ множества $\{(y_H, t_H)$: $y_H \in [0, 1], t_H \geq 40y_H, t_H \leq 26y_H + 8\}$, не может быть ex ante эффективной с учетом ограничения по стимулам функцией общественного выбора. Получается, что множество пар (y_H, t_H) таких функций — это в точности отрезок на рисунке 23.E.3, выделенный наибольшей толщиной[54]. Заметим, что для каждой такой функции общественного выбора interim ограничение индивидуальной рациональности для продавца товара высокого качества выполнено как равенство: он не получает никаких выгод от торговли. ■

Приложение А. Реализация и множественность равновесий

Существует один потенциально важный аспект, в котором понятие реализации, которое мы использовали в этой главе (например, в определении 23.B.4), может оказаться слишком слабым. Хотя механизм Г может реализовывать функцию общественного выбора, в одном из равновесий, исходы которого совпадают с функцией $f(\cdot)$ при всех $\theta \in \Theta$, в нем могут быть и *другие* равновесия, *отличающиеся* от $f(\cdot)$. Вообще говоря, мы неявно предполагали, что в этом случае агенты будут именно в том равновесии, которое нужно создателю механизма[55].

[54] Заметим, что в любой ex ante эффективной с учетом ограничения по стимулам функции общественного выбора $y_H \leq 4/7 < 1$. Может показаться, что это противоречит результату раздела 13.B, который гласил, что при ex ante эффективном исходе, в котором у фирмы нулевая ожидаемая выгода, все работники соглашаются быть нанятыми (структура модели в разделе 13.B аналогична рассматриваемой здесь). Разница в том, что в разделе 13.B мы не накладывали никаких interim ограничений индивидуальной рациональности на работников, фактически предполагая, что государство может запретить работникам отказываться от участия. См. упражнение 23.F.10.

[55] Это можно отчасти объяснить тем, что в механизме прямого выявления, который реализует функцию $f(\cdot)$ в правдивых стратегиях, правдивые стратегии могут составлять фокальное равновесие (в том смысле, в котором это обсуждалось в разделе 8.D).

Если же создатель механизма хочет быть полностью уверен, что механизм Г приведет к исходам функции $f(\cdot)$, ему нужно другое, более сильное определение реализации, данное ниже (как и в определении 23.В.4, мы не специфицируем, какая именно концепция равновесия имеется в виду).

Определение 23.АА.1. Механизм $\Gamma = (S_1, \ldots, S_I, g(\cdot))$ *строго реализует* функцию общественного выбора $f\colon \Theta_1 \times .. \times \Theta_I \to X$, если в игре, порожденной Г, для всех равновесных профилей стратегий $(s_1^*(\cdot), \ldots, s_I^*(\cdot))$ выполнено $g(s_1^*(\theta_1), \ldots, s_I^*(\theta_I)) = f(\theta_1, \ldots, \theta_I)$ для всех $(\theta_1, \ldots, \theta_I)$[56].

Рассмотрим сначала строгую реализацию в доминирующих стратегиях. В примере 23.С.8 мы уже сталкивались с тем, что при использовании механизма прямого выявления, реализующего функцию общественного выбора $f(\cdot)$ в правдивых доминирующих стратегиях, у одного из игроков доминирующих стратегий несколько. Если он выберет одну из них, то это не приведет к исходу $f(\cdot)$ (см. также упражнения 23.АА.1 и 23.АА.2). Таким образом, существуют механизмы, которые реализуют функцию общественного выбора $f(\cdot)$ в доминирующих стратегиях, но не строго.

Тем не менее имеются по крайней мере две причины не считать проблему множественности равновесий слишком уж серьезной. Во-первых, в случаях когда стратегия агента в механизме Г является *строго* доминирующей, механизм Г также строго реализует $f(\cdot)$. Это всегда так, например, во всех случаях, когда предпочтения агента не предполагают безразличия между любыми двумя альтернативами из X. Во-вторых, когда у игрока есть две слабо доминирующие стратегии, он безразличен между ними вне зависимости от того, как действуют остальные игроки. Поэтому, для того чтобы попасть в «правильное» равновесие, необходимо только сделать так, чтобы агент разрешил это безразличие в ту сторону, в какую нам нужно.

Однако в случае таких равновесий, как равновесие Байеса — Нэша, ситуация может быть иной. В каждом из равновесий каждый игрок может строго предпочитать свою равновесную стратегию, если остальные также выбирают равновесные стратегии. Тогда, чтобы заставить игроков выбрать «правильное» равновесие, недостаточно просто помочь им выбрать из двух эквивалентных вариантов — необходимо сформировать ожидания, что именно нужное нам равновесие будет сыграно. Пример 23.АА.1 иллюстрирует эту проблему.

Пример 23.АА.1. *Множественность равновесий в механизме ожидаемого эффекта экстерналий.* Вновь рассмотрим механизм ожидаемого эффекта экстерналий, обсуждавшийся в разделе 23.D. Предположим, что имеются два агента ($I = 2$), которые должны решить судьбу общественного проекта (см. пример 23.В.3). Проект может быть либо осуществлен ($k = 1$), либо не осуществлен ($k = 0$). Оценка проекта каждым агентом (за вычетом платежа) равна θ_L или θ_H (так что $\Theta_i = \{\theta_L, \theta_H\}$ для $i = 1, 2$), где

[56] Слово «строго» не относится к стандартной терминологии; в литературе строгую реализацию часто называют просто «реализацией».

$\theta_H > 0 > \theta_L$ *и* $\theta_L + \theta_H > 0$. Оценки агентов статистически независимы, при этом $\text{Prob}(\theta_i = \theta_L) = \lambda \in (0; 1)$ для $i = 1, 2$.

В механизме ожидаемого эффекта экстерналий каждый агент i объявляет свой тип (оценку проекта) и после объявления обоих типов (θ_1, θ_2) получает трансферт, равный $t_i(\theta_i, \theta_{-i}) = E_{\tilde{\theta}_{-i}}[\tilde{\theta}_{-i}k^*(\theta_i, \tilde{\theta}_{-i})] + h_i(\theta_{-i})$, где $k^*(\theta_1, \theta_2) = 0$ при $\theta_1 = \theta_2 = \theta_L$ и $k^*(\theta_1, \theta_2) = 1$ в ином случае.

Как мы видели в разделе 23.D, в одном из равновесий Байеса — Нэша этого механизма правдивая стратегия является равновесной для каждого агента. Но это равновесие в правдивых стратегиях — *не единственное* равновесие Байеса — Нэша. Существует другое равновесие, в котором каждый агент заявляет, что его тип θ_H. Убедимся в этом, найдя оптимальный ответ агента i на выбор агентом $-i$ стратегии с объявлением θ_H в любом случае. Какое бы объявление ни сделал агент i, проект будет реализован. Поэтому, какой бы ни был его истинный тип, прямая выгода агента i (т. е. $\theta_i k^*(\theta_1, \theta_2)$) не зависит от его объявления (она равна θ_L, если его тип θ_L, и θ_H, если его тип θ_H). Поэтому агенту i осталось только максимизировать свой ожидаемый трансферт. Если он объявит тип θ_H, его ожидаемый трансферт будет равен $(\lambda\theta_L + (1 - \lambda)\theta_H) + h_i(\theta_H)$, а если он объявит θ_L, то получит $(1 - \lambda)\theta_H + h_i(\theta_H)$. Следовательно, агент i будет предпочитать объявление θ_H вне зависимости от своего истинного типа, если агент $-i$ делает то же самое. Получается, что объявление обоими игроками типа θ_H и реализация проекта — второе равновесие Байеса — Нэша в этом механизме. ■

Мы не будем продолжать характеристику функций общественного выбора, строго реализуемых в равновесии Байеса — Нэша. Хорошим источником для дальнейшего чтения является работа Палфри (Palfrey, 1992). Кроме того, в приложении B мы обсудим эту проблему применительно к среде полной информации.

Однако есть два важных момента, касающиеся строгой реализации, которые хотелось бы подчеркнуть. Во-первых, при строгой реализации функции общественного выбора $f(\cdot)$ мы *не можем* в общем случае ограничиться рассмотрением механизмов прямого выявления. Потому что если заменить механизм $\Gamma = (S_1, \ldots, S_I, g(\cdot))$ механизмом прямого выявления, то могут возникнуть нежелательные равновесия (см. упражнения 23.C.8 и 23.AA.1). Во-вторых, поскольку функция общественного выбора может быть строго реализована только в том случае, когда она может быть реализована в более слабом смысле, рассмотренном ранее, все необходимые условия реализации, полученные в тексте главы, *остаются* необходимыми и для строгой реализации. Поэтому, например, выводы теорем Гиббарда-Саттертуэйта (утверждение 23.D.3) и Майерсона-Саттертуэйта (утверждение 23.E.1) справедливы для строгой реализации.

На протяжении всей главы мы ограничивались рассмотрением однозначных функций общественного выбора. Иногда, однако, естественно бывает рассмотреть *отображения* общественного выбора, которые могут приписывать заданному профилю типов более одной альтернативы. В этом случае можно сказать, что механизм $\Gamma = (S_1, \ldots, S_I, g(\cdot))$ строго реализует отображение общественного выбора $f(\cdot)$, если в игре, порожденной Γ, для всякого равновесия $s^*(\cdot)$ верно $g(s^*(\theta)) \in f(\theta)$, т. е. если для всех возможных θ все возможные равновесия входят в множество альтернатив, выбираемых $f(\cdot)$.

Приложение B. Реализация в среде полной информации

В этом приложении мы вкратце рассмотрим реализацию в среде полной информации. Отличным источником для дальнейшего чтения может послужить обзорная статья Мура (Moore, 1992), а также работа Маскина (Maskin, 1985).

В случае полной информации мы предполагаем, что каждый агент будет знать не только параметр своих предпочтений θ_i, но и все чужие параметры θ_{-i}. Тем не менее мы предполагаем, что хоть всем агентам и доступна информация друг о друге, она недоступна внешним участникам. Поэтому, несмотря на то что реализация θ наблюдаема агентами, проблема реализации по-прежнему существует: поскольку никакой внешний участник (например, суд) не может узнать θ, у агентов нет возможности ex ante написать соглашение, в соответствии с которым они будут выбирать исход $f(\theta)$ при реализации типов θ и которое впоследствии можно будет заставить их соблюсти. Вместо этого они могут только согласиться участвовать в некотором механизме, равновесие которого приводит к выбору $f(\theta)$[57].

Заметим, что ситуация полной информации — частный случай общей постановки, рассмотренной в главе, в которой функция плотности $\phi(\cdot)$ на Θ имеет (вырожденное) свойство: информации о собственном типе достаточно агенту для того, чтобы узнать типы остальных[58].

Для начала заметим, что множество реализуемых в доминирующих стратегиях функций общественного выбора остается нетронутым при появлении полной информации, поскольку информация о чужих типах не меняет доминирующих стратегий агента.[59] [Действительно, вспомним наш комментарий в разделе 23.C: если механизм Г реализует функцию общественного выбора $f(\cdot)$ в доминирующих стратегиях, то он делает это для *любой* $\phi(\cdot)$].

Это, однако, *не* имеет места для случаев реализации в таких равновесиях, как равновесие Байеса — Нэша. Вспомним, что в случаях полной ин-

[57] Часто таким образом описывается проблема составления контракта, где стороны по ходу его исполнения получают друг о друге информацию, которую внешний участник не сможет проверить.

[58] Таким образом, мы можем думать о ситуации с полной информацией как о случае, где получаемые агентами сигналы идеально скоррелированы. Есть несколько способов это формализовать. Вероятно, самый простой из них состоит в том, чтобы предположить, что параметр предпочтений агента i выбирается случайным образом из некоторого множества Θ_i. *Сигнал* (или *тип*), получаемый агентом i, теперь представлен как $\bar{\theta}_i = (\theta_{i1}, \dots, \theta_{iI}) \in \Theta$ — вектор, в котором содержится информация о его собственном параметре предпочтений и параметрах остальных участников. Так что множество возможных «типов» для агента i в том смысле, в каком мы использовали этот термин выше, теперь представляет собой $\bar{\Theta}_i = \Theta$ для всех $i = 1, \dots, I$. Функция плотности $\phi(\cdot)$ на множестве возможных типов $\bar{\Theta}_1 \times \dots \times \bar{\Theta}_I$ в этом случае удовлетворяет $\phi(\bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_I) > 0$ в том и только в том случае, если $\bar{\theta}_1 = \dots = \bar{\theta}_I$, а бернуллиевская функция полезности агента i имеет вид $u_i(x, \bar{\theta}_i) = \tilde{u}_i(x, \theta_{ii})$.

[59] То же верно для строгой реализации в доминирующих стратегиях.

формации это равновесие эквивалентно обычному равновесию по Нэшу. Это позволяет нам сформулировать определение 23.ВВ.1.

Определение 23.ВВ.1. *Механизм* $\Gamma = (S_1, \ldots, S_I, g(\cdot))$ *реализует функцию общественного выбора* $f(\cdot)$ *в равновесии по Нэшу*, если в игре, порожденной Γ, существует равновесие по Нэшу $s^*(\theta) = (s_1^*(\theta), \ldots, s_I^*(\theta))$, для которого выполнено $g(s^*(\theta)) = f(\theta)$ для всех профилей параметров предпочтений агентов $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_I) \in \Theta$. Механизм $\Gamma = (S_1, \ldots, S_I, g(\cdot))$ строго реализует функцию общественного выбора $f(\cdot)$ в равновесии по Нэшу, если в игре, порожденной Γ, каждое равновесие по Нэшу приводит к результату $f(\cdot)$ для всех $(\theta_1, \ldots, \theta_I)$ для всех профилей параметров предпочтений агентов $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_I) \in \Theta$.

Заметим, что если нам здесь достаточно слабой концепции реализации, которую мы использовали на протяжении главы (в отличие от сильной концепции, рассмотренной в приложении А), то *любая* функция общественного выбора может быть реализована в равновесии по Нэшу, если $I \geq 3$. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим следующий механизм. Каждый агент i одновременно с остальными объявляет профиль типов для каждого из I агентов. Если по крайней мере $I - 1$ агентов объявляют одно и то же (например, $\hat{\theta}$), то мы выбираем исход $f(\hat{\theta})$. В ином случае мы выбираем исход $x_0 \in X$ (x_0 — произвольная альтернатива). В этом механизме для каждого профиля θ есть равновесие по Нэшу, в котором каждый агент объявляет θ и выбирается исход $f(\theta)$, поскольку никакой агент не может повлиять на исход, отклонившись от такого поведения в одиночку.

Хотя данный механизм реализует $f(\cdot)$ в равновесии по Нэшу, очевидно, что это не самый привлекательный механизм [т. е. реализация $f(\cdot)$ не слишком убеждает], потому что существует очень много равновесий по Нэшу, не приводящих к $f(\theta)$ при профиле предпочтений θ. Действительно, в этом механизме существует равновесие, приводящее к любому исходу $x \in f(\Theta) = \{x \in X$: существует $\theta \in \Theta$, такое что $f(\theta) = x\}$. Как видим, в случае реализации в равновесии по Нэшу и $I \geq 3$ *вся проблема* реализации нужных нам функций общественного выбора вращается вокруг проблемы множественности равновесий, обсуждавшейся в приложении А.

Какие же функции общественного выбора мы можем строго реализовать в равновесии по Нэшу? Простой, но существенный результат в утверждении 23.ВВ.1 взят из новаторской работы Маскина (Maskin, 1977).

Утверждение 23.ВВ.1. Если функция общественного выбора $f(\cdot)$ может быть строго реализована в равновесии по Нэшу, то она монотонна[60].

Доказательство. Предположим, что $\Gamma = (S_1, \ldots, S_I, g(\cdot))$ строго реализует $f(\cdot)$. Тогда при профиле параметров предпочтений θ существует равновесие по Нэшу, приводящее к исходу $f(\theta)$, т. е. существует профиль стратегий $s^* = (s_1^*, \ldots, s_I^*)$, для которого выполнено

[60] См. определение 23.С.5.

$g(s^*) = f(\theta)$ и $g(\hat{s}_i, s^*_{-i}) \in L_i(f(\theta), \theta_i)$ для всех $\hat{s}_i \in S_i$ и всех i[61]. Предположим теперь, что $f(\cdot)$ немонотонна. Тогда существует другой профиль параметров предпочтений $\theta' \in \Theta$, такой что $L_i(f(\theta), \theta_i) \subset L_i(f(\theta), \theta'_i)$ для всех i, но $f(\theta') \neq f(\theta)$. Но s^* — также равновесие по Нэшу при параметре предпочтений θ', поскольку $g(\hat{s}_i, s^*_{-i}) \in L_i(f(\theta), \theta'_i)$ для всех $\hat{s}_i \in S_i$ и всех i. Поэтому Γ не реализует $f(\cdot)$ в строгом смысле, что приводит к противоречию. ■

В качестве иллюстрации предыдущего результата приведем еще один.

Утверждение 23.BB.2. Предположим, что X конечно и содержит не менее трех элементов, что $\mathscr{R}_i = \mathscr{P}$ для всех i, а также $f(\Theta) = X$. Тогда функция общественного выбора $f(\cdot)$ строго реализуема в равновесии по Нэшу в том и только в том случае, если она диктаторская.

Доказательство. Чтобы строго реализовать диктаторскую функцию общественного выбора в равновесии по Нэшу, нам достаточно отдать диктатору право выбирать альтернативу из X. В обратную сторону результат следует из шагов 2 и 3 доказательства теоремы Гиббарда — Саттертуэйта (утверждение 23.C.3). ■

Утверждения 23.BB.1 и 23.BB.2 позволяют понять, что множественность равновесий потенциально может наложить на реализуемые функции общественного выбора очень серьезные ограничения.

В работе Маскина (Maskin, 1977) также показано, что при $I > 2$ монотонность — *почти* достаточное условие для строгой реализуемости [мы опустим доказательство, см. работу Мура (Moore, 1992) с обсуждением этого и более поздних результатов, в частности $I = 2$]. По Маскину, дополнительным условием является *отсутствие права вето*. А именно если $I - 1$ агентов считают x своей лучшей альтернативой, то $x = f(\theta)$.

Утверждение 23.BB.3. Если $I \geq 3$, $f(\cdot)$ монотонна и удовлетворяет условию отсутствия права вето, то $f(\cdot)$ является строго реализуемой в равновесии по Нэшу.

Условие отсутствия права вето стоит воспринимать как очень слабое дополнительное требование. Действительно, в любой ситуации, в которой есть желаемое агентами частное благо, оно выполняется тривиально: ни у каких двух агентов наиболее желаемые альтернативы не совпадают (каждый хочет получить благо в полном объеме). Так что в подобных ситуациях монотонность $f(\cdot)$ является необходимым и достаточным условием строгой реализуемости $f(\cdot)$ в равновесии по Нэшу.

Многозначное отображение общественного выбора $f(\cdot)$ называется монотонным, если из $x \in f(\theta)$ и $L_i(x, \theta_i) \subset L_i(x, \theta'_i)$ для всех i следует, что $x \in f(\theta')$. Необходимые и достаточные условия реализуемости в равновесии по Нэшу из утверждений 23.BB.1 и 23.BB.3 можно перенести на многозначный случай. [На самом деле, результат Маскина (утверждение 23.BB.3) доказывает, что существует механизм, который содержит множество равновесий по Нэшу, в точности равное множеству $f(\theta)$ для любого θ; такой тип реализации отображения общественного выбора обычно называется *полной реализацией*.] Например, можно проверить, что если $f(\theta)$ для всех θ эквивалентна

---

[61] Вспомним, что $L_i(x, \theta_i) \subset X$ — нижнее лебеговское множество агента i для исхода $x \in X$, когда его параметр предпочтения принимает значение θ_i.

множеству Парето (множеству всех ex post эффективных результатов из X с учетом профиля предпочтений θ), то $f(\cdot)$ монотонна. Таким образом, в любой ситуации с передаваемым благом отображение общественного выбора, задающее множество Парето, строго реализуемо в равновесии по Нэшу.

Игры в развернутой форме: реализация равновесия, совершенного в подыграх

Мы видели до сих пор, что необходимость «выкидывать» нежелательные равновесия (формализованная в понятии строгой реализации) может существенно ограничить множество реализуемых функций общественного выбора. Значит, возможно, более удачной идеей будет использовать усовершенствованную концепцию равновесия по Нэшу. Недавние исследования показали, что такие усовершенствования могут существенно повлиять на результат. Сейчас мы кратко покажем, как рассмотрение *динамических* механизмов и использование концепций равновесия для динамических игр (см. раздел 9.В) позволит расширить множество строго реализуемых функций общественного выбора.

Пример 23.ВВ.1 (адаптированный пример и работы Мура и Репулло (Moore, Repullo, 1988)). Рассмотрим экономику чистого обмена (см. пример 23.В.2) с двумя потребителями, где у каждого потребителя может быть одно из двух индивидуалистических отношений предпочтения. А именно если $\theta_i = \theta_i^C$, то предпочтения агента имеют вид Кобба — Дугласа, а если $\theta_i = \theta_i^L$, то предпочтения агента леонтьевские (эти два вида предпочтений показаны на рис. 23.ВВ.1).

Предположим, что мы хотим строго реализовать функцию общественного выбора

$$f(\theta) = \begin{cases} x^C, & \text{если } \theta_1 = \theta_1^C, \\ x^L, & \text{если } \theta_1 = \theta_1^L, \end{cases}$$

где x^C и x^L — распределения, показанные на рисунке 23.ВВ.1. Заметим, что потребитель 1 всегда предпочитает x^C по сравнению с x^L, а потребитель 2 — x^L по сравнению

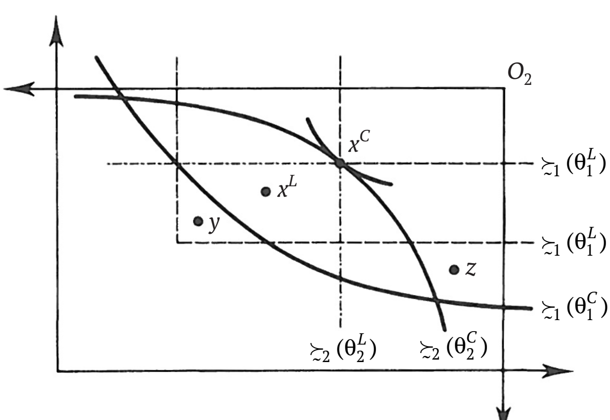


Рис. 23.ВВ.1. Предпочтения и исходы в примере 23.ВВ.1

с x^C. Из рис. 23.BB.1 видно, что $f(\cdot)$ немонотонна, поскольку $L_i(x^C,\ \theta_i^C) \subset L_i(x^C,\ \theta_i^L)$ для $i = 1, 2$, но $f(\theta_1^L,\ \theta_2^L) \neq f(\theta_1^C,\ \theta_2^C)$. Так что, согласно утверждению 23.BB.1, $f(\cdot)$ не может быть строго реализована в равновесии по Нэшу.

Предположим вместо этого, что мы строим следующий динамический механизм из трех этапов:

Этап 1. Агент 1 объявляет «L» или «C». Если он объявил «L», то сразу же выбирается x^L. Если он объявил «C», то мы переходим к этапу 2.

Этап 2. Агент 2 говорит «согласен» или «не согласен». Если он сказал «согласен», то сразу же выбирается x^C. Если он сказал «не согласен», то мы переходим к этапу 3.

Этап 3. Агент 1 выбирает между распределениями y и z, показанными на рис. 23.BB.1.

Несложно убедиться, что для каждого возможного профиля предпочтений $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ единственное совершенное в подыграх равновесие по Нэшу в этой динамической игре совершенной информации приводит к исходу $f(\theta)$ (см. упражнение 23.BB.1). Так что $f(\cdot)$ *может* быть строго реализована с помощью динамического механизма и равновесия по Нэшу, совершенного в подыграх. ■

На самом деле, Мур и Репулло (Moore, Repullo, 1988; Moore, 1990) показали, что использование динамических механизмов и совершенства в подыграх очень сильно расширяет множество строго реализуемых функций общественного выбора по сравнению с обычным равновесием по Нэшу. Еще более сильные результаты можно получить при дальнейших усовершенствованиях концепции равновесия; например, в работе Палфри и Сриваставы (Palfrey, Srivastava, 1991) рассмотрена строгая реализация в недоминируемом равновесии по Нэшу (т. е. равновесии по Нэшу, в котором агенты не играют слабо доминируемые стратегии)[62].

Литература

Abreu, D., and H. Matsushima (1994). Exact implementation. *Journal of Economic Theory* **64**: 1–19.

Arrow, K. (1979). The property rights doctrine and demand revelation under incomplete information. In *Economics and Human Welfare*, edited by M. Boskin. New York: Academic Press.

Barberà, S., and B. Peleg (1990), Strategy-proof voting schemes with continuous preferences. *Social Choice and Welfare* **7**: 31–38.

Baron, D., and R. B. Myerson (1982). Regulating a monopolist with unknown costs. *Econometrica* **50**: 911–30.

Bulow, J., and J. Roberts (1989). The simple economics of optimal auctions. *Journal of Political Economy* **97**: 1060–90.

Clarke, E. H. (1971). Multipart pricing of public goods. *Public Choice* **2**: 19–33.

Cramton, P., R. Gibbons, and P. Klemperer (1987). Dissolving a partnership efficiently. *Econometrica* **55**: 615–32.

Dana, J.D., Jr., and K. Spier (1994). Designing a private industry: Government auctions with endogenous market structure. *Journal of Public Economics* **53**: 127–47.

[62] Очень сильные результаты также были недавно получены для реализации в повторяющихся недоминируемых стратегий, см., например, (Abreu, Matsushima, 1994).

Dasgupta, P., P. Hammond, and E. Maskin (1979). The implementation of social choice rules: Some general results on incentive compatibility. *Review of Economic Studies* **46**: 185–216.

d'Aspremont, C, and L.A. Gérard-Varet (1979). Incentives and incomplete information. *Journal of Public Economics* **11**: 25–45.

Fudenberg, D., and J. Tirole (1991). *Game Theory.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Gibbard, A. (1973). Manipulation of voting schemes. *Econometrica* **41**: 587–601.

Green, J.R., and J.-J. Laffont (1977). Characterization of satisfactory mechanisms for the revelation of preferences for public goods. *Econometrica* **45**: 427–38.

Green, J.R., and J.-J. Laffont (1979). *Incentives in Public Decision Making.* Amsterdam: North-Holland.

Gresik, T.A., and M.A. Satterthwaite (1989). The rate at which a simple market becomes efficient as the number of traders increases: An asymptotic result for optimal trading mechanisms. *Journal of Economic Theory* **48**: 304–32.

Groves, T. (1973). Incentives in teams. *Econometrica* **41**: 617–31.

Holmstrom, B., and R.B. Myerson (1983). Efficient and durable decision rules with incomplete information. *Econometrica* **51**: 1799–1819.

Hurwicz, L. (1972). On informationally decentralized systems. In *Decision and Organization*, edited by C. B. McGuire, and R. Radner. Amsterdam: North-Holland.

Laffont, J.-J., and E. Maskin (1980). A differential approach to dominant strategy mechanisms. *Econometrica* **48**: 1507–20.

Maskin, E. (1977). Nash equilibrium and welfare optimality. MIT Working Paper.

Maskin, E. (1985). The theory of implementation in Nash equilibrium: A survey. In *Social Goals and Social Organization: Essays in Honor of Elisha Pazner*, edited by L. Hurwicz, D. Schmeidler, and H. Sonnenschein. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.

Maskin, E., and J. Riley (1984). Monopoly with incomplete information. *Rand Journal of Economics* **15**: 171–96.

McAfee, R.P., and J. McMillan (1987). Auctions and bidding. *Journal of Economic Literature* **25**: 699–738.

Milgrom, P.R. (1987). Auction theory. In *Advances in Economic Theory: Fifth World Congress*, edited by T. Bewley. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.

Mirrlees, J. (1971). An exploration in the theory of optimal income taxation. *Review of Economic Studies* **38**: 175–208.

Moore, J. (1992). Implementation, contracts, and renegotiation in environments with complete information. In *Advances in Economic Theory: Sixth World Congress*, vol. I, edited by J.-J. Laffont. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.

Moore, J., and R. Repullo (1988). Subgame perfect implementation. *Econometrica* **56**: 1191-1220.

Myerson, R.B. (1979). Incentive compatibility and the bargaining problem. *Econometrica* **47**: 61–73.

Myerson, R.B. (1981). Optimal auction design. *Mathematics of Operation Research* **6**: 58–73.

Myerson, R.B. (1991). *Game Theory: Analysis of Conflict.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Myerson, R.B., and M.A. Satterthwaite (1983). Efficient mechanisms for bilateral trading. *Journal of Economic Theory* **28**: 265–81.

Palfrey, T.R. (1992). Implementation in Bayesian equilibrium: The multiple equilibrium problem in mechanism design. In *Advances in Economic Theory: Sixth World Congress*, vol. I, edited by J.-J. Laffont. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.

Palfrey, T., and S. Srivastava (1991). Nash implementation using undominated strategies. *Econometrica* **59**: 479–501.

Satterthwaite, M.A. (1975). Strategy-proofness and Arrow's conditions: Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions. *Journal of Economic Theory* **10**: 187–217.

Vickrey, W. (1961). Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders. *Journal of Finance* **16**: 8–37.

Упражнения

23.B.1^A^. Рассмотрим ситуацию из примера 23.B.1, где $\mathscr{R}_1 = \{\succsim_1(\bar{\theta}_1)\}$ и $\mathscr{R}_2 = \{\succsim_2(\theta_2'),\ \succsim_2(\theta_2'')\}$. Для каждой из следующих функций общественного выбора $f(\cdot)$ определите, будет ли агент 2 правдиво выявлять свои предпочтения.

a) $f(\bar{\theta}_1,\ \theta_2') = y,\ \ f(\bar{\theta}_1,\ \theta_2'') = y$;

b) $f(\bar{\theta}_1,\ \theta_2') = z,\ \ f(\bar{\theta}_1,\ \theta_2'') = x$;

c) $f(\bar{\theta}_1,\ \theta_2') = z,\ \ f(\bar{\theta}_1,\ \theta_2'') = y$;

d) $f(\bar{\theta}_1,\ \theta_2') = z,\ \ f(\bar{\theta}_1,\ \theta_2'') = z$;

e) $f(\bar{\theta}_1,\ \theta_2') = y,\ \ f(\bar{\theta}_1,\ \theta_2'') = z$.

23.B.2^A^. Рассмотрим ситуацию двусторонней торговли (пример 23.B.4), где типы продавца (агент 1) и покупателя (агент 2) случайно и независимо выбираются из равномерного на отрезке [0, 1] распределения. Предположим, что мы пытаемся реализовать функцию общественного выбора $f(\cdot) = (y_1(\cdot), y_2(\cdot), t_1(\cdot), t_2(\cdot))$, такую что:

$$y_1(\theta_1, \theta_2) = 1, \text{ если } \theta_1 \geq \theta_2; \quad = 0, \text{ если } \theta_1 < \theta_2;$$

$$y_2(\theta_1, \theta_2) = 1, \text{ если } \theta_2 > \theta_1; \quad =0, \text{ если } \theta_2 \leq \theta_1;$$

$$t_1(\theta_1,\ \theta_2) = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)\, y_2(\theta_1,\ \theta_2);$$

$$t_2(\theta_1,\ \theta_2) = -\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) y_2(\theta_1,\ \theta_2).$$

Предположим, что для любого $\theta_1 \in [0, 1]$ продавец правдиво выявляет свой тип. Будет ли правдивое выявление своего типа оптимальным для покупателя? Объясните.

23.B.3^B^. Покажите, что в закрытом аукционе второй цены $b_i(\theta_i) = \theta_i$ является слабо доминирующей стратегией для каждого агента i при всех $\theta_i \in [0, 1]$.

23.B.4^C^. Рассмотрим ситуацию двусторонней торговли (см. пример 23.B.4), где типы продавца (агент 1) и покупателя (агент 2) случайно и независимо выбираются из равномерного на отрезке [0, 1] распределения.

a) Рассмотрим механизм *двойного аукциона*, в котором продавец (агент 1) и покупатель (агент 2) делают закрытые ставки, $b_i \geq 0$. Если $b_1 \geq b_2$, то товар остается у продавца и никто никому не платит; если $b_2 > b_1$, то покупатель получает товар и платит продавцу $\frac{1}{2}(b_1 + b_2)$. (Ставка продавца — минимально приемлемая для него цена, ставка покупателя — максимально приемлемая для него цена; если торговля происходит, то агенты делят поровну разницу между этими ценами.) Найдите равновесие Байеса — Нэша в этой игре, в котором стратегия агента i имеет вид: $b_i(\theta_i) = \alpha_i + \beta_i\theta_i$. Какую функцию общественного выбора реализует механизм в этом равновесии? Является ли она ex post эффективной?

b) Покажите, что функция общественного выбора, полученная в **(a)**, совместима по стимулам, т. е. что она может быть реализована в правдивых стратегиях в равновесии Байеса — Нэша.

23.C.1$^{\mathrm{A}}$. Проверьте, что если свойство инверсии предпочтений [условие (23.C.6)] выполнено для всех i и всех θ_i', θ_i'' и θ_{-i}, то $f(\cdot)$ реализуема в доминирующих правдивых стратегиях.

23.C.2$^{\mathrm{B}}$. Покажите, что если X содержит два элемента (скажем, $X = \{x_1, x_2\}$), то любая функция общественного выбора, соответствующая голосованию по правилу большинства [т. е. такая, которая всегда выбирает альтернативу x_i, если больше агентов предпочитают x_i по сравнению с x_j, чем наоборот (если же количество агентов, предпочитающих x_1 по сравнению с x_2, совпадает с количеством агентов, предпочитающих x_2 по сравнению с x_1, то функция может выбрать любую из этих альтернатив)], реализуема в доминирующих правдивых стратегиях для любого I.

23.C.3$^{\mathrm{A}}$. Покажите, что если $\mathscr{R}_i = \mathscr{P}$ для всех i, то для любой ex post эффективной функции общественного выбора $f(\cdot)$ верно $f(\Theta) = X$.

23.C.4$^{\mathrm{A}}$. Покажите, что если $f\colon \Theta \to X$ реализуема в доминирующих правдивых стратегиях при наборе возможных типов Θ_i (для $i = 1, \dots, I$), то при наборе типов $\hat{\Theta}_i \subset \Theta_i$ каждого агента $i = 1, \dots, I$ функция общественного выбора $\hat{f} : \hat{\Theta} \to X$, удовлетворяющая $\hat{f}(\theta) = f(\theta)$ для всех $\theta \in \hat{\Theta}$, реализуема в правдивых доминирующих стратегиях.

23.C.5$^{\mathrm{C}}$. Покажите, что если в случае однопиковых предпочтений, в которых нет эквивалентных альтернатив (см. раздел 21.D), число агентов нечетно, то (единственная) функция общественного выбора, всегда выбирающая победителя по Кондорсе (см. раздел 21.D), реализуема в правдивых доминирующих стратегиях.

23.C.6$^{\mathrm{C}}$. Свойство функции общественного выбора, описанное в утверждении 23.C.2, следуя работе Дасгупты, Хаммонда и Маскина (Dasgupta, Hammond, Maskin, 1979), называют *межличностной не-*

зависимой монотонностью (*independent person-by-person monotonicity*, IPM). В данном упражнении мы рассмотрим его взаимосвязь со свойством *монотонности*, введенным в определении 23.C.5.

a) Покажите на примере, что если $f(\cdot)$ удовлетворяет IMP, то она необязательно монотонна (достаточно очень простого примера).

b) Покажите на примере, что если $f(\cdot)$ монотонна, то она необязательно удовлетворяет IPM.

c) Докажите, что если $f(\cdot)$ удовлетворяет IPM и $\mathcal{R}_i \subset \mathcal{P}$ для всех i, то $f(\cdot)$ монотонна.

d) Докажите, что если $f(\cdot)$ монотонна и $\mathcal{R}_i = \mathcal{P}$ для всех i, то $f(\cdot)$ удовлетворяет IPM.

23.C.7^C. Функционал общественного благосостояния $F(\cdot)$ (см. раздел 21.C) удовлетворяет свойству *неотрицательного отклика*, если для всех $x, y \in X$ и для любых двух пар профилей предпочтений I агентов $(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)$ и $(\succsim_1', \ldots, \succsim_I')$, таких что $x \succsim_i y \Rightarrow x \succsim_i' y$ и $x \succ_i y \Rightarrow$ $\Rightarrow x \succ_i' y$ для всех i, выполнено

$$xF(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)y \Rightarrow xF(\succsim_1', \ldots, \succsim_I')y$$

и

$$xF_p(\succsim_1, \ldots, \succsim_I)y \Rightarrow xF_p(\succsim_1', \ldots, \succsim_I')y,$$

где $xF_p(\cdot)y$ означает «$xF(\cdot)y$ и не $yF(\cdot)x$». Покажите, что если функция общественного выбора $f(\cdot)$ максимизирует функционал общественного благосостояния $F(\cdot)$, удовлетворяющий свойству неотрицательного отклика [в том смысле, что для всех $(\theta_1, \ldots, \theta_I)$ выполнено $f(\theta_1, \ldots, \theta_I) = \{x \in X : xF\left(\succsim_1(\theta_1), \ldots, \succsim_I(\theta_I)\right)y$ для всех $y \in X\}$], то $f(\cdot)$ реализуема в доминирующих правдивых стратегиях.

23.C.8^A. Предположим, что $I = 2$, $X = \{a, b, c, d, e\}$, $\Theta_1 = \{\theta_1', \theta_1''\}$, $\Theta_2 = \{\theta_2', \theta_2''\}$ и что возможные предпочтения агентов имеют вид (запись a–b означает, что альтернативы a и b эквивалентны):

$\succsim_1(\theta_1')$	$\succsim_1(\theta_1'')$	$\succsim_2(\theta_2')$	$\succsim_2(\theta_2'')$
a–b	a	a–b	a
c	b	c	b
d	d	d	d
e	c	e	c
	e		e

Рассмотрим функцию общественного выбора

$$f(\theta) = \begin{cases} b, & \text{если } \theta = (\theta_1', \theta_2'), \\ a & \text{– иначе.} \end{cases}$$

a) Является ли $f(\cdot)$ ex post эффективной?

b) Удовлетворяет ли она свойству, описанному в утверждении 23.C.2?

c) Рассмотрите механизм прямого выявления, реализующий $f(\cdot)$ в правдивых стратегиях. Является ли правдивая стратегия *единственной* (слабо) доминирующей для каждого агента? Покажите, что если агент выбирает свою (слабо) доминирующую неправдивую стратегию, то $f(\cdot)$ не реализуется.

23.C.9$^{\mathbf{C}}$. Предположим, что $K = \mathbb{R}$, функции $v_i(\cdot, \theta_i)$ дважды непрерывно дифференцируемы, θ_i случайно выбирается из интервала $[\underline{\theta}_i; \ \overline{\theta}_i]$, $\partial^2 v_i(k, \theta_i)/\partial k^2 < 0$ и $\partial^2 v_i(k, \theta_i)/\partial k \partial \theta_i > 0$. Покажите, что непрерывно дифференцируемая функция общественного выбора $f(\cdot) = (k(\cdot), t_1(\cdot), \ldots, t_I(\cdot))$ реализуема в доминирующих правдивых стратегиях в том и только в том случае, если для всех $i = 1, \ldots, I$

$$k(\theta) \text{ не убывает по } \theta_i$$

и

$$t_i(\theta_i, \ \theta_{-i}) = t_i(\underline{\theta}_i, \ \theta_{-i}) - \int\limits_{\underline{\theta}_i}^{\theta_i} \frac{\partial v_i(k(s, \ \theta_{-i}), s)}{\partial k} \frac{\partial k(s, \ \theta_{-i})}{\partial s} ds.$$

23.C.10$^{\mathbf{B}}$. (B. Holmstrom). Рассмотрим квазилинейную экономику, изучавшуюся в разделе 23.C. Обозначим через $k^*(\cdot)$ любое правило принятия решения по проекту, удовлетворяющее (23.C.7). Также определим функцию $V^*(\theta) = \sum\limits_i v_i(k^*(\theta), \ \theta_i)$.

a) Докажите, что ex post эффективная функция общественного выбора [т. е. такая, которая удовлетворяет условию (23.C.7) и условию сбалансированности бюджета (23.C.12)], реализуемая в доминирующих правдивых стратегиях, существует в том и только в том случае, если функция $V^*(\cdot)$ может быть представлена в виде $V^*(\theta) = \sum\limits_i V_i(\theta_{-i})$, где каждая функция $V_i(\cdot)$ зависит только от θ_{-i} для всех i.

b) Используя результат пункта **(a)**, покажите, что при $I = 3, K = \mathbb{R}$, $\Theta_i = \mathbb{R}_+$ для всех i, $v_i(k, \ \theta_i) = \theta_i k - \frac{1}{2}k^2$ для всех i существует ex post эффективная функция общественного выбора, реализуемая в доминирующих правдивых стратегиях. (Этот результат можно обобщить на любое $I > 2$.)

c) Предположим теперь, что функции $v_i(k, \theta_i)$ таковы, что $V^*(\cdot)$ непрерывно дифференцируема I раз. Докажите, что необходимым условием существования ex post эффективной функции общественного выбора является выполнение для всех θ

$$\frac{\partial^I V^*(\theta)}{\partial\theta_1 \ldots \partial\theta_I} = 0.$$

(На самом деле это условие является также достаточным.)

d) Используя результат пункта **(c)**, проверьте, что при предположениях, сделанных мелким шрифтом в конце раздела 23.C, при $I = 2$ не существует ex post эффективной функции общественного выбора, реализуемой в доминирующих правдивых стратегиях.

23.C.11$^{\text{A}}$. Рассмотрим квазилинейную экономику, в которой бернуллиевская функция полезности агента i имеет вид $u_i(v_i(k,\ \theta_i) + \overline{m}_i + t_i)$, где $u_i'(\cdot) > 0$. То есть предпочтения на множестве исходов, получаемых с определенностью, квазилинейны, но нет ограничений на отношение к риску. Убедитесь, что утверждение 23.C.4 остается верным в этом случае.

23.D.1$^{\text{B}}$. [на основе примера из работы Майерсона (Myerson, 1991)]. Покупатель и продавец участвуют в торге за неделимое благо. Оценка блага покупателем равна $\theta_b = 10$, оценка товара продавцом может быть одним из двух значений: $\theta_s \in \{0, 9\}$. Обозначим за t период, в который происходит торговля ($t = 1, 2, \ldots$), а за p — согласованную цену. Дисконт-фактор как покупателя, так и продавца равен $\delta < 1$.

a) Определите X — множество альтернатив в данной ситуации.

b) Предположим, что в равновесии Байеса — Нэша этого процесса торга торговля происходит сразу же, если оценка товара продавцом равна 0, а согласованная цена равна $(10 + \theta_s)/2$, где θ_s — оценка товара продавцом. Определите самый ранний период, когда может произойти торговля, если $\theta_s = 9$.

23.D.2$^{\text{B}}$. Рассмотрите ситуацию двусторонней торговли, в которой значение каждого θ_i ($i = 1, 2$) случайно и независимо выбирается из распределения, равномерного на отрезке [0, 1].

a) Найдите функции трансфертов в механизме ожидаемого эффекта экстерналий.

b) Убедитесь, что правдивые стратегии составляют равновесие Байеса — Нэша.

23.D.3$^{\text{A}}$. Рассмотрите закрытые аукционы первой и второй цены, представленные в примерах 23.B.5 и 23.B.6. Убедитесь, что для указанных там равновесий справедлива теорема об эквивалентности дохода.

23.D.4$^{\text{C}}$. Рассмотрим закрытый аукцион первой цены с I симметричными покупателями. Оценки товара всеми покупателями случайно и независимо выбираются из отрезка $[\underline{\theta},\ \overline{\theta}]$ с функцией плотности $\phi(\cdot)$, принимающей только положительные значения.

a) Покажите, что равновесная функция ставки покупателя не убывает по его типу.

b) Докажите, что в любом симметричном равновесии $(b^*(\cdot), \ldots, b^*(\cdot))$ может существовать интервал типов (θ', θ''), где $\theta' \neq \theta''$, такой что $b^*(\theta)$ совпадают для всех $\theta \in (\theta', \theta'')$. Таким образом, $b^*(\cdot)$ должна быть строго возрастающей.

c) Докажите, используя теорему об эквивалентности дохода, что любое симметричное равновесие в таком аукционе должно приносить продавцу такой же ожидаемый доход, как и в равновесии (в доминирующих стратегиях) закрытого аукциона второй цены.

23.D.5$^{\mathbf{C}}$. Используя предположения упражнения 23.D.4, рассмотрите закрытый аукцион, *в котором все платят*. В таком аукционе каждый покупатель делает ставку, после чего сделавший максимальную ставку получает товар, а свои ставки продавцу платят *все* покупатели *независимо от того, кто выиграл*. Покажите, что любое симметричное равновесие в этом аукционе также приносит продавцу тот же ожидаемый доход, что и закрытый аукцион второй цены. [*Подсказка:* следуйте тем же шагам, что и в упражнении 23.D.4.]

23.D.6$^{\mathbf{C}}$. Предположим, что I симметричных агентов хотят получить единственный оставшийся билет на концерт. Касса открывается в 9 часов утра в понедельник. Каждый агент должен решить, к какому времени прийти, чтобы встать в очередь, и тот, кто окажется первым в очереди, получит билет. Индивид, который проводит в ожидании t часов, получает отрицательную полезность (в денежном эквиваленте) абсолютной величины βt. Предположим, что если агент пришел и увидел, что в очереди уже кто-то есть, он сразу же разворачивается и уходит домой, т. е. не несет никаких издержек ожидания. Индивид i ценит получение билета в θ_i, при этом θ_i всех индивидов случайно и независимо выбираются из распределения, равномерного на отрезке $[0, 1]$. Каково ожидаемое значение количества часов, которые пришедший первым индивид проведет в очереди? [*Подсказка:* обратите внимание на аналогию с закрытым аукционом первой цены и используйте теорему об эквивалентности дохода.] Как изменится ответ при удвоении β? А при удвоении I?

23.E.1$^{\mathbf{B}}$. Еще раз рассмотрим ситуацию двусторонней торговли, где значения θ_i $(i = 1, 2)$ случайно и независимо выбираются из распределения, равномерного на отрезке $[0, 1]$. Предположим, что при отказе от участия в механизме продавец с оценкой блага θ_1 получает ожидаемую полезность θ_1 (он просто сам потребляет благо), а покупатель с оценкой θ_2 получает полезность 0 (он потребляет свой начальный запас товара-измерителя, нормированный к нулю). Покажите, что в механизме ожидаемого эффекта экстерналий существует тип покупателя или продавца, который строго предпочитает отказаться от участия.

23.E.2[A]. Докажите, что при предположениях утверждения 23.E.1 для ситуации двусторонней торговли справедливы следующие утверждения.

a) Не существует функции общественного выбора $f(\cdot)$, которая совместима по стимулам в доминирующих стратегиях и interim индивидуально рациональна (т. е. дает каждому агенту i неотрицательную выгоду от участия в зависимости от его типа θ_i для всех θ_i).

b) Не существует функции общественного выбора $f(\cdot)$, которая совместима по стимулам и ex post индивидуально рациональна [т. е. дает каждому агенту неотрицательную выгоду от участия для любой пары типов (θ_1, θ_2)].

23.E.3[B]. Покажите на примере, что, когда в ситуации двусторонней торговли возможные оценки товара покупателем и продавцом представлены дискретными множествами, может существовать функция общественного выбора, которая является байесовской совместимой по стимулам, ex post эффективной и индивидуально рациональной. [*Подсказка:* достаточно, чтобы возможных типов у каждой стороны было два.] Следовательно, предположение о строго положительных значениях функции плотности является обязательным для теоремы Майерсона — Саттертуэйта.

23.E.4[B]. Продавец ($i = 1$) и покупатель ($i = 2$) участвуют в торге за неделимое благо. Торговля может происходить в один из дискретных периодов $t = 1, 2\ldots$ Дисконт-фактор как покупателя, так и продавца равен $\delta < 1$. Оценки товара покупателем и продавцом случайно и независимо выбираются из отрезков $[\underline{\theta}_2, \overline{\theta}_2]$ и $[\underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1]$ с положительными плотностями. Предположим, что $(\underline{\theta}_2, \overline{\theta}_2) \cap (\underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1) \neq \varnothing$. Заметим, что при этих условиях и при $\theta_2 > \theta_1$ эффективность ex post требует, чтобы торговля происходила в первом периоде, а при $\theta_1 > \theta_2$ — чтобы торговля не происходила никогда. Используя теорему Майерсона — Саттертуэйта, покажите, что в данной ситуации с дисконтированием эффективность ex post не будет достигнута ни при каком процессе добровольной торговли.

23.E.5[B]. Предположим, что имеется *континуум* покупателей и продавцов (с квазилинейными предпочтениями). У каждого продавца изначально имеется единица неделимого блага, а у покупателей этого блага нет. Ценность данного блага для продавца (если он сам будет его потреблять) равна $\theta_1 \in [\underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1]$ и выбирается случайно и независимо из распределения $\Phi_1(\cdot)$ с функцией плотности $\phi_1(\cdot)$, принимающей только положительные значения. Ценность потребления данного блага для покупателя равна $\theta_2 \in [\underline{\theta}_2, \overline{\theta}_2]$ и выбирается случайно и независимо из распределения $\Phi_2(\cdot)$ с функцией плотности $\phi_2(\cdot)$, принимающей только положительные значения.

a) Охарактеризуйте правило торговли при ex post эффективной функции общественного выбора. Какие покупатели и продавцы будут владельцами блага в результате?

b) Приведите пример функции общественного выбора с правилом торговли из пункта **(a)**, которая является байесовской совместимой по стимулам и индивидуально рациональной. [*Подсказка:* подумайте о «конкурентном» механизме.] Сделайте вывод о том, что неэффективность, показанная в теореме Майерсона — Саттертуэйта, исчезает при большом количестве покупателей и продавцов. [В работе Грешика и Саттертуэйта (Gresik, Satterthwaite, 1989) формально показано, что при конечном множестве участников потери эффективности стремятся к 0 при росте их количества.]

23.E.6^{B}. Рассмотрите ситуацию двусторонней торговли, в которой *оба* агента изначально располагают единицей блага. Ценность потребления единицы этого блага для агента i ($i = 1, 2$) равна θ_i. Предположим, что θ_i случайно и независимо выбираются из равномерного на отрезке [0, 1] распределения.

a) Охарактеризуйте правило торговли при ex post эффективной функции общественного выбора.

b) Рассмотрим следующий механизм. Каждый агент закрыто делает ставку, после чего тот, чья ставка выше, получает единицу товара, которая изначально была у другого, и платит ему свою ставку. Найдите симметричное равновесие Байеса — Нэша в этом механизме. [*Подсказка:* рассмотрите линейные по типу агента функции ставок.]

c) Какая функция общественного выбора реализуется таким механизмом? Убедитесь, что она является байесовской совместимой по стимулам. Является ли она ex post эффективной? Является ли она индивидуально рациональной [здесь для этого требуется $U_i(\theta_i) > \theta_i$ для всех θ_i и $i = 1, 2$]? Объясните интуитивно, почему здесь возникает отличие от результата теоремы Майерсона — Саттертуэйта? [Формальный анализ подобных задач «разделения партнерства» см. в работе Крэмтона, Гиббонса и Клемперера (Cramton, Gibbons, Klemperer, 1987).]

23.E.7^{B}. Рассмотрите ситуацию двусторонней торговли, в которой оценки товара покупателем и продавцом случайно и независимо выбираются из распределения, равномерного на отрезке [0, 1].

a) Покажите, что если $f(\cdot)$ — байесовская совместимая по стимулам, interim индивидуально рациональная и ex post эффективная функция общественного выбора, то сумма ожидаемых полезностей покупателя и продавца при $f(\cdot)$ не может быть меньше 5/6.

b) Покажите, что не существует функции общественного выбора (независимо от выполнения байесовской совместимости по стимулам или interim индивидуальной рациональности), при которой сумма ожидаемых полезностей покупателя и продавца превышала бы 2/3.

23.F.1[C]. Рассмотрим квазилинейную экономику, изученную в разделах 23.C и 23.D. Покажите, что если функция общественного выбора $f(\cdot) \in F^*$ классически ex post эффективна на F_{IR}, то она ex ante и interim эффективна с учетом ограничения по стимулам на F^*. [Из этого факта можно сделать вывод, что если ex post классически эффективная функция общественного выбора *может* быть реализована в ситуации, когда типы агентов являются частной информацией (т. е. она допустима с учетом ограничения по стимулам), то никакая другая допустимая с учетом ограничения по стимулам функция общественного выбора не может превзойти ее по благосостоянию. Заметим, однако, что могут быть *другие* ex ante или interim эффективные с учетом ограничения по стимулам функции общественного выбора, которые неэффективны ex post. Например, можно убедиться, что в примере 23.F.1 представлена ex post классически эффективная и допустимая с учетом ограничения по стимулам функция общественного выбора, но interim эффективная с учетом ограничения по стимулам функция общественного выбора, полученная в том же примере, неэффективна ex post.]

23.F.2[B]. [на основе работы (Maskin, Riley, 1984)]. Монополист производит товар по технологии с постоянной отдачей от масштаба, издержки производства одной единицы равны $c > 0$. Монополист продает товар покупателю, предпочтения которого для него ненаблюдаемы. Покупатель с типом $\theta > 0$ получает полезность $\theta v(x) - t$, когда потребляет x единиц произведенного монополистом товара и платит за них в общей сложности t долларов. Предположим, что $v'(\cdot) > 0$ и $v''(\cdot) < 0$. Множество возможных типов покупателя является отрезком $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$, где $\overline{\theta} > \underline{\theta} > 0$. Тип выбирается случайно с функцией распределения $\Phi(\cdot)$ и соответствующей функцией плотности $\phi(\cdot)$, принимающей только положительные значения. Предположим, что $[\theta - ((1 - \Phi(\theta))/\phi(\theta))]$ не убывает по θ.

Охарактеризуйте оптимальный для монополиста механизм продажи товара этому покупателю, предполагая, что покупатель всегда может отказаться от покупки и получить полезность 0.

23.F.3[C]. Аукцион с *резервной ценой* — такой аукцион, на котором существует некоторая минимальная разрешенная ставка. Предположим, что в условиях примера 23.F.2 есть I симметричных покупателей и $\underline{\theta} = 0$. Докажите, что закрытый аукцион второй цены с резервной ценой является оптимальным в этом случае. Какова оптимальная резервная цена? Можете ли вы привести пример модифицированного закрытого аукциона второй цены, который был бы оптимальным в более общем (необязательно симметричном) случае?

23.F.4[B]. Найдите оптимальные функции $y_i(\cdot)$ в аукционе из примера 23.F.2 для случая, когда ценность объекта для продавца составляет $\theta_0 > 0$.

23.F.5[B]. Предположим, что у монополиста есть единица делимого блага и два потенциальных покупателя (иными словами, производство первой единицы бесплатно, а остальных — бесконечно дорого). Функция спроса $x_i(p)$ покупателя i убывает по цене для $i = 1, 2$. Монополист может назначать для разных покупателей разные цены.

a) Охарактеризуйте цены, оптимальные для продавца.

b) Соотнесите ваш ответ из пункта **(a)** с оптимальным аукционом, найденным в примере 23.F.2. [См. работу Бюлоу и Робертса (Bulow, Roberts, 1989) для дальнейшего обсуждения этой темы.]

23.F.6[C]. [на основе работы (Baron, Myerson, 1982)]. Рассмотрите оптимальную схему регулирования монопольного рынка. Функция спроса $x(p)$ на продукцию монополиста известна регулятору ($x'(p) < 0$), а постоянные предельные издержки монополиста θ являются его частной информацией. Регулятор может назначить цену монополиста, а также трансферт от него или к нему. Таким образом, множество доступных исходов имеет вид $X = \{(p, t): p > 0 \text{ и } t \in \mathbb{R}\}$. Регулятор должен гарантировать монополисту неотрицательную прибыль при любых издержках, чтобы тот не закрыл производство. Предельные издержки монополиста θ случайно выбираются из отрезка $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$, где $\overline{\theta} > \underline{\theta} > 0$, с функцией распределения $\Phi(\cdot)$ и соответствующей функцией плотности $\phi(\cdot)$, принимающей только положительные значения. Предположим, что $\Phi(\theta)/\phi(\theta)$ не убывает по θ. Обозначим прибыль монополиста типа θ от исхода (p, t) через $\pi(p, t, \theta) = (p - \theta)x(p) + t$.

a) Адаптируйте утверждение 23.D.2 к этому примеру.

b) Предположим, что регулятор стремится создать схему регулирования прямого выявления $(p(\cdot), t(\cdot))$, которая максимизирует ожидаемое значение взвешенной суммы излишков покупателя и продавца:

$$\int_{p(\theta)}^{\infty} x(s)ds + \alpha\pi(p(\theta),\ t(\theta),\ \theta),$$

где $\alpha < 1$. Охарактеризуйте эту оптимальную схему. Как изменится ответ, если $\alpha \geq 1$?

23.F.7[C]. [на основе работы (Dana, Spier, 1994)]. Две фирмы, $j = 1, 2$, конкурируют за право производить товар на определенном рынке. Общественный планировщик создает оптимальный аукцион за право производства, чтобы максимизировать ожидаемое значение общественного благосостояния, которое задано в виде

$$W = \sum_j \pi_j + S + (\lambda - 1)\sum_j t_j,$$

где t_j — трансферт от фирмы j к планировщику, S — излишек потребителя, π_j — валовая (до трансферта) прибыль фирмы j, а $\lambda > 1$ — теневая стоимость государственных фондов. На аукционе определяются трансферты от всех фирм и рыночная структура; т. е. либо никто не получает права производить, либо одна фирма получает эти права (и становится таким образом нерегулируемым монополистом), либо обе фирмы получают права (и оказываются в ситуации нерегулируемой дуополии).

Размер фиксированных издержек производства j-й фирмы, θ_j, известен только ей самой (является приватной информацией). Фиксированные издержки θ_1 и θ_2 независимо распределены на отрезке $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ с непрерывно дифференцируемой функцией плотности $\phi(\cdot)$ и функцией распределения $\Phi(\cdot)$. Предположим, что $\Phi(\cdot)/\phi(\cdot)$ не убывает по θ. У фирм одинаковые предельные издержки $c < 1$, они производят однородный продукт, рыночный спрос на который задан функцией $p(x) = 1 - x$ (эта информация общеизвестна). Если права на производство получают обе фирмы, то между ними происходит конкуренция по Курно (см. раздел 12.C). Охарактеризуйте оптимальный для планировщика аукцион за право производства товара.

23.F.8^{A}. Покажите, что для любой ex post (классически) эффективной функции общественного выбора в примере 23.F.3 выполнено $y_L = y_H = 1$.

23.F.9^{B}. Покажите, что в модели примера 23.F.3:

a) Никакая допустимая функция общественного выбора не является ex post эффективной.

b) Для любой функции общественного выбора выполнено $y_H \leq y_L$ и $t_H \leq t_L$.

c) Для любой функции общественного выбора ожидаемые выгоды от торговли для продавца товара низкого качества не меньше, чем для продавца товара высокого качества; т. е. $t_L - 20y_L \geq t_H - 40y_H$.

23.F.10^{B}. Охарактеризуйте множества interim и ex ante эффективных с учетом ограничений по стимулам функций общественного выбора в модели примера 23.F.3, когда торговля не является добровольной для продавца (но является добровольной для покупателя).

23.AA.1^{B}. Вернемся к упражнению 23.C.8. Приведите пример механизма $\Gamma = (S_1, \ldots, S_I, g(\cdot))$, не являющегося механизмом прямого выявления, который реализует функцию $f(\cdot)$ в доминирующих правдивых стратегиях и в котором у каждого агента есть *одна* (слабо) доминирующая стратегия.

23.AA.2^{B}. Пусть $K = \{k_0, k_1, \ldots, k_N\}$ — множество возможных проектов. Предположим, что для каждого агента i верно $\{v_i(\cdot, \theta_i) : \theta_i \in \Theta_i\} = \mathcal{V}$, т. е. любая возможная функция оценки из K в $\mathbb{R}$ встречается для какого-то $\theta_i \in \Theta_i$. Верно ли, что у каждого игрока в механизме Гровса есть единственная (слабо) доминирующая стратегия? Рассмотрите вместо этого механизм, в котором каждый агент i может объявить свою *нормированную* функцию оценки, т. е. такую, где $v_i(k_0) = 0$. Пусть $k^*(\cdot)$ и трансферты Гровса рассчитываются исходя из этих объявлений. Верно ли, что у каждого игрока есть единственная (слабо) доминирующая стратегия в этом нормированном механизме Гровса?

23.ВВ.1[A]. Рассмотрите динамический механизм из примера 23.ВВ.1.

a) Запишите его в нормальной форме и найдите равновесия Нэша для каждого возможного профиля предпочтений.

b) Найдите для этого механизма равновесия Нэша, совершенные в подыграх, для каждого возможного профиля предпочтений.

23.ВВ.2[B]. Верно ли, что функция общественного выбора, реализуемая в доминирующих стратегиях, с необходимостью является реализуемой в равновесии Нэша? Ответьте на тот же вопрос для случая строгой реализации.

23.ВВ.3[C]. Рассмотрите ситуацию выбора общественного проекта (см. пример 23.В.3), где $K = \{0, 1\}$. Обозначим за θ_i выгоду агента i от реализации проекта (т. е. при $k = 1$), а выгоду в противном случае ($k = 0$) нормируем к 0. Предположим, что $\Theta_i = \mathbb{R}$. В этой постановке только механизм Гровса обеспечивает ex post эффективный выбор проекта. Обозначим за $k^*(\cdot)$ правило выбора проекта в таком механизме. Предположим также, что $I \geq 3$. Трансферты в механизме Гровса характеризуются двумя свойствами:

(1) если $k^*(\theta_i, \theta_{-i}) = k^*(\theta_i', \theta_{-i})$, то $t_i(\theta_i, \theta_{-i}) = t_i(\theta_i', \theta_{-i})$;

(2) если $k^*(\theta_i, \theta_{-i}) = 1$ и $k^*(\theta_i', \theta_{-i}) = 0$, то

$$t_i(\theta_i, \theta_{-i}) - t_i(\theta_i', \theta_{-i}) = \sum_{j \neq i} \theta_j.$$

Есть ли среди этих свойств такое (такие), которое должно быть выполнено для любой реализуемой в равновесии Нэша функции общественного выбора, гарантирующей ex post эффективный выбор проекта? Если есть, назовите его (их).

Математическое приложение

Это приложение содержит быстрый и несистематизированный обзор некоторых математических понятий и методов, используемых в учебнике.

Формальные результаты излагаются в виде «теорем» и они формулируются довольно строго. Кажется полезным в подобном техническом приложении дать также замечания мотивационного характера, примеры и общие идеи доказательств. Мы это проделываем под вывеской «доказательство», когда обсуждается конкретная теорема. Тем не менее нашей целью не является строгость изложения. Возможно, более точным было бы заглавие «Обсуждение теоремы».

Само собой разумеется, что это приложение не является заменой расширенному, систематическому изложению в стиле учебника. Большинство рассматриваемого здесь материала может быть подкреплено, наряду с расширением математического кругозора, в учебниках следующих авторов: Саймон и Блюм (Simon and Blume, 1993), Сидсетер и Хэммонд (Sudsaeter and Hammond, 1994), Новшек (Novshek, 1993), Диксит (Dixit, 1990), Чанг (Chang, 1984) и Интрилигатор (Intriligator, 1971).

M.A. Матричное обозначение для производных

Мы начинаем с обзора некоторых обозначений. Первым и наиболее важным из них является представление о том, что формально и математически вектор в $\mathbb{R}^N$ является *столбцом*. Это относится к любому вектору; например, все равно, представляет ли вектор цены или количества товаров. Это также относится к вектору *градиента* $\nabla f\left(\bar{x}\right) \in \mathbb{R}^N$ функции в точке $\bar{x}$; это вектор, чья n-я компонента является частной производной по n-й переменной вещественнозначной функции $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, вычисленной в точке $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$. Однако, так как в тексте строчки занимают меньше места, чем столбцы, то мы изображаем векторы горизонтально, например $x = (x_1, \ldots, x_N)$. Тем не менее все векторы математически являются столбцами.

Скалярное произведение двух N-мерных векторов $x \in \mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{R}^N$ записывается как $x \cdot y = \sum_n x_n y_n$. Если мы рассматриваем эти векторы как матрицы размера $N \times 1$, то мы видим, что $x \cdot y = x^T y$, где T — оператор матричного транспонирования. Выражение «$x\cdot$» всегда может быть прочитано как x^T; например, выражение $x \cdot A$, где $A \cdot N \times M$ матрица, — это то же самое, что $x^T A$.

Если f: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ является векторозначной дифференцируемой функцией, то в любой точке $x \in \mathbb{R}^N$ мы обозначаем $Df(x)$ матрицу размером $M \times N$, в которой элемент, лежащий на пересечении m-й строки и n-го столбца есть производная $\partial f_m(x)/\partial x_n$. Заметьте, что, в частности, если $M = 1$ (так что $f(x) \in \mathbb{R}$), то $Df(x)$ будет матрицей размером $1 \times N$, т. е. $\nabla f(x) = [Df(x)]^T$. Чтобы избежать неопределенности, иногда будем писать $D_x f(x)$, чтобы явно указать, по каким переменным дифференцируется функция $f(\cdot)$. Например, обозначение f: $\mathbb{R}^{N+K} \to \mathbb{R}^M$ обозначает функцию, аргументами которой являются векторы $x \in \mathbb{R}^N$ и $y \in \mathbb{R}^K$, а матрица $D_x f(x, y)$ размерами $M \times N$ состоит из элементов $\partial f_m(x, y)/\partial x_n$, находящихся на пересечении m-й строки и n-го столбца. Наконец, для вещественнозначной дифференцируемой функции f: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *гессианом* $D^2 f(x)$ называется матрица, полученная дифференцированием векторозначного градиента $\nabla f(x)$, т. е. $D^2 f(x) = D[\nabla f(x)]$.

В оставшейся части этого раздела мы будем считать функции дифференцируемыми и исследуем, как два хорошо известных правила математического анализа — производная сложной функции и производная произведения — будут выглядеть с использованием матричного обозначения.

Производная сложной функции

Предположим, что g: $\mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^N$ и f: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ являются дифференцируемыми функциями. *Сложная функция* $f(g(\cdot))$ будет тоже дифференцируемой. Рассмотрим произвольную точку $x \in \mathbb{R}^S$. Правило дифференцирования сложной функции позволяет нам вычислить $M \times S$ матрицу производных сложной функции при дифференцировании по x, $D_x f(g(x))$ будет найдена как произведение матрицы производных размером $N \times S$, полученной дифференцированием $g(\cdot)$, обозначаемой $Dg(x)$, и матрицы размером $M \times N$, полученной дифференцированием $f(\cdot)$, в аргументы которой подставлена $g(x)$, т. е. $Df(y)$, где $y = g(x)$. Мы получили

$$D_x f(g(x)) = Df(g(x))Dg(x) \tag{M.A.1}$$

Производная произведения

Здесь мы ограничимся несколькими иллюстрациями.

(1) Предположим, что f: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ имеет вид $f(x) = g(x)h(x)$, где обе функции $g(\cdot)$ и $h(\cdot)$ — вещественнозначные функции N переменных $x = (x_1, \ldots, x_N)$ (так что g: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, h: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$). Тогда правило дифференцирования произведения из курса математического анализа имеет вид

$$Df(x) = g(x)Dh(x) + h(x)Dg(x), \tag{M.A.2}$$

а также может быть записано и в других обозначениях

$$\nabla f(x) = g(x)\nabla h(x) + h(x)\nabla g(x).$$

(2) Предположим, что f: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ имеет вид $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, где обе функции $g(\cdot)$ и $h(\cdot)$ являются векторозначными, отображающими N переменных $x = (x_1, \ldots, x_N)$ в $\mathbb{R}^M$. Тогда

$$Df(x) = g(x) \cdot Dh(x) + h(x) \cdot Dg(x). \tag{M.A.3}$$

Заметим, что $h(x) \cdot Dg(x) = [h(x)]^T Dg(x)$ является матрицей $1 \times N$, так же как и член в правой части этой формулы. Таким образом, векторозначная формула (M.A.3) следует из формулы для одной переменной (M.A.2).

(3) Предположим, что f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^M$ имеет вид $f(x) = \alpha(x)g(x)$, где $\alpha(\cdot)$ вещественнозначная функция одной переменной (т. е. α: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) и g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^M$. Тогда

$$Df(x) = \alpha(x)Dg(x) + \alpha'(x)g(x). \tag{M.A.4}$$

(4) Предположим, что f: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ имеет вид $f(x) = h(x)g(x)$, где h: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ и g: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$. Тогда

$$Df(x) = h(x)Dg(x) + g(x)Dh(x). \tag{M.A.5}$$

Заметим, что $g(x)$ вектор из M компонент, (т. е. матрица $M \times 1$) и $Dh(x)$ матрица $1 \times N$. Отсюда $g(x)Dh(x)$ является матрицей $M \times N$ (ранга 1). Заметим также, что (M.A.4) является частным случаем формулы (M.A.5).

M.B. Однородные функции и формула Эйлера

В этом разделе мы рассмотрим функции от N переменных, $f(x_1, \ldots, x_N)$, определенные для всех неотрицательных значений $(x_1, \ldots, x_N) \geq 0$.

Определение M.B.1. Функция $f(x_1, \ldots, x_N)$ *однородна порядка r* (для некоторого $r = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$), если для любого $t > 0$ выполнено

$$f(tx_1, \ldots, tx_N) = t^r f(x_1, \ldots, x_N).$$

В качестве примеров приведем функцию $f(x_1, x_2) = x_1/x_2$ однородную порядка 0 и $f(x_1, x_2) = (x_1x_2)^{1/2}$ однородную порядка 1.

Заметим, что если $f(x_1, \ldots, x_N)$ — однородная функция порядка 0 и мы ограничим ее область определения множеством $x_1 > 0$, то, если положить $t = 1/x_1$, мы можем записать функцию $f(\cdot)$ в виде

$$f\left(1, \ \frac{x_2}{x_1}, \ \ldots, \ \frac{x_N}{x_1}\right) = f(x_1, \ \ldots, \ x_N).$$

Аналогично если функция однородна порядка 1, то ее можно представить

$$f\left(1, \ \frac{x_2}{x_1}, \ \ldots, \ \frac{x_N}{x_1}\right) = \left(\frac{1}{x_1}\right) f(x_1, \ \ldots, \ x_N).$$

Теорема М.В.1. Если функция $f(x_1, \ldots, x_N)$ однородна порядка r (для некоторого $r = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$), то для любого $n = 1, \ldots, N$ частная производная $\partial f(x_1, \ldots, x_N)/\partial x_n$ однородна порядка $r - 1$.

Доказательство. Зафиксируем $t > 0$. По определению однородности (определение М.В.1) мы имеем

$$f(tx_1, \ldots, tx_N) - t^r f(x_1, \ldots, x_N) = 0.$$

Дифференцируя это выражение по x_n, получаем

$$t\frac{\partial f(tx_1, \ldots, tx_N)}{\partial x_n} - t^r \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_N)}{\partial x_n} = 0,$$

так что

$$\frac{\partial f(tx_1, \ldots, tx_N)}{\partial x_n} = t^{r-1}\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_N)}{\partial x_n}.$$

Согласно определению М.В.1, мы заключаем, что $\partial f(x_1, \ldots, x_N)/\partial x_n$ — однородная функция порядка $r - 1$. ■

Например, для функции порядка однородности 1 $f(x_1, x_2) = (x_1 x_2)^{1/2}$, мы имеем $\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1 = \frac{1}{2}(x_2/x_1)^{1/2}$, которая, разумеется, однородная порядка однородности 0, в соответствии с теоремой М.В.1.

Заметим, что если $f(\cdot)$ однородная любого порядка однородности, то из $f(x_1, \ldots, x_N) = f(x'_1, \ldots, x'_N)$ следует, что $f(tx_1, \ldots, tx_N) = f(tx'_1, \ldots, tx'_N)$ для любого $t > 0$, таким образом, преобразование гомотетии, состоящее в радиальном расширении множества уровня функции $f(\cdot)$, порождает новое множество уровня $f(\cdot)$[1].

Мы получаем интересное следствие: наклоны множества уровня $f(\cdot)$ остаются неизменными вдоль любого луча, исходящего из начала координат. Например, предположим $N = 2$. Тогда, допуская, что $\partial f(\bar{x})/\partial x_2 \neq 0$, наклон линии уровня, содержащей точку $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, в самой точке $\bar{x}$ равен $-\frac{\partial f(\bar{x})/\partial x_1}{\partial f(\bar{x})/\partial x_2}$ и наклон линии уровня, содержащей точку $t\bar{x}$ для $t > 0$ в $t\bar{x}$, равен

$$-\frac{\partial f(t\bar{x})/\partial x_1}{\partial f(t\bar{x})/\partial x_2} = -\frac{t^{r-1}\partial f(\bar{x})/\partial x_1}{t^{r-1}\partial f(\bar{x})/\partial x_2} = -\frac{\partial f(\bar{x})/\partial x_1}{\partial f(\bar{x})/\partial x_2}.$$

Иллюстрация этого факта приведена на рис. М.В.1.

Предположим, что $f(\cdot)$ — однородная функция некоторого порядка r и что $h(\cdot)$ — возрастающая функция одной переменной. Тогда функция

[1] *Множеством уровня* функции $f(\cdot)$ называется множество вида $\{x \in \mathbb{R}^N_+ : f(x) = k\}$ для некоторого k. Радиальным расширением этого множества мы называем множество, полученное умножением каждого вектора x из этого множества на одно и то же положительное число $t > 0$.

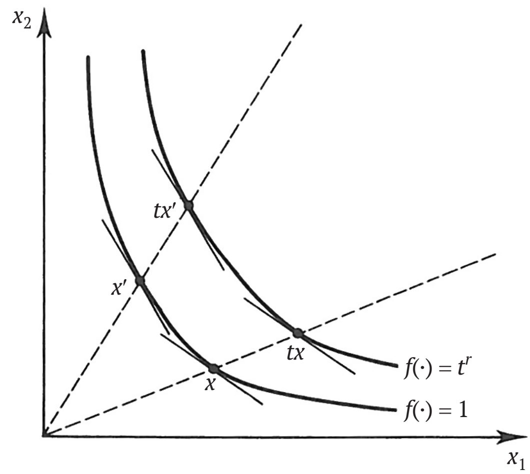


Рис. М.В.1. Линии уровня однородной функции

$h(f(x_1, \ldots, x_N))$ называется *гомотетичной*. Заметим, что семейство множеств уровня функции $h(f(\cdot))$ совпадает с семейством множеств уровня $f(\cdot)$. Поэтому для гомотетичных функций также справедливо свойство неизменности наклонов множеств уровня вдоль лучей, исходящих из начала координат.

Основное свойство гомотетичных функций приведено в теореме М.В.2.

Теорема М.В.2 (*формула Эйлера*). Предположим, что $f(x_1, \ldots, x_N)$ — однородная степени r (для некоторого $r = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$) и дифференцируема. Тогда в любой точке $(\bar{x}_1, \ \ldots, \ \bar{x}_N)$ справедлива формула

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\partial f(\bar{x}_1, \ \ldots, \ \bar{x}_N)}{\partial x_n} \bar{x}_n = rf(\bar{x}_1, \ \ldots, \ \bar{x}_N),$$

или, используя матричное обозначение, $\nabla f(\bar{x}) \cdot \bar{x} = rf(\bar{x})$.

Доказательство: согласно определению,

$$f\left(t\bar{x}_1, \ \ldots, \ t\bar{x}_N\right) - t^r f\left(\bar{x}_1, \ \ldots, \ \bar{x}_N\right) = 0.$$

Дифференцируя это выражение по переменной t, получаем

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\partial f\left(t\bar{x}_1, \ \ldots, \ t\bar{x}_N\right)}{\partial x_n} \bar{x}_n - rt^{r-1} f\left(\bar{x}_1, \ \ldots, \ \bar{x}_N\right) = 0.$$

Полагая в этой формуле $t = 1$, получаем формулу Эйлера. ■

Применение формулы Эйлера для однородной функции порядка 0 дает

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\partial f(x_1, \ \ldots, \ x_N)}{\partial x_n} \bar{x}_n = 0.$$

В качестве примера заметим, что для функции $f(x_1, x_2) = x_1/x_2$ ее производные равны $\partial f\left(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2\right)/\partial x_1 = 1/\bar{x}_2$, $\partial f\left(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2\right)/\partial x_2 = -\left(\bar{x}_1/(\bar{x}_2)^2\right)$, так что

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\partial f(x_1,\ \ldots,\ x_N)}{\partial x_n}\bar{x}_n = \frac{1}{\bar{x}_2}\bar{x}_1 - \frac{\bar{x}_1}{(\bar{x}_2)^2}\bar{x}_2 = 0,$$

в соответствии с формулой Эйлера.

Для однородной функции порядка 1 применение формулы Эйлера дает

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\partial f(x_1,\ \ldots,\ x_N)}{\partial x_n}\bar{x}_n = f(\bar{x}_1,\ \ldots,\ \bar{x}_N).$$

Например, в случае $f(x_1, x_2) = (x_1x_2)^{1/2}$ производные равны $\partial f\left(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2\right)/\partial x_1 = \frac{1}{2}\left(\bar{x}_2/\bar{x}_1\right)^{1/2}$, $\partial f\left(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2\right)/\partial x_2 = \frac{1}{2}\left(\bar{x}_1/\bar{x}_2\right)^{1/2}$, так что

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\partial f(x_1,\ \ldots,\ x_N)}{\partial x_n}\bar{x}_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1}\right)^{\frac{1}{2}}\bar{x}_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2}\right)^{\frac{1}{2}}\bar{x}_2 = \left(\bar{x}_1\bar{x}_2\right)^{\frac{1}{2}} = f\left(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2\right).$$

M.C. Вогнутые и квазивогнутые функции

В этом разделе мы рассмотрим функции N переменных $f(x_1, \ldots, x_N)$, определенных на области A, которая является выпуклым множеством в $\mathbb{R}^N$ (такие, как $A = \mathbb{R}^N$ или $A = \mathbb{R}^N_+ = \left\{x \in \mathbb{R}^N : x \geq 0\right\}$)[2]. Мы обозначаем $x = (x_1, \ldots, x_N)$.

Определение M.C.1. Функция f: $A \to \mathbb{R}$, определенная на выпуклом множестве $A \subset \mathbb{R}^N$, называется *вогнутой,* если

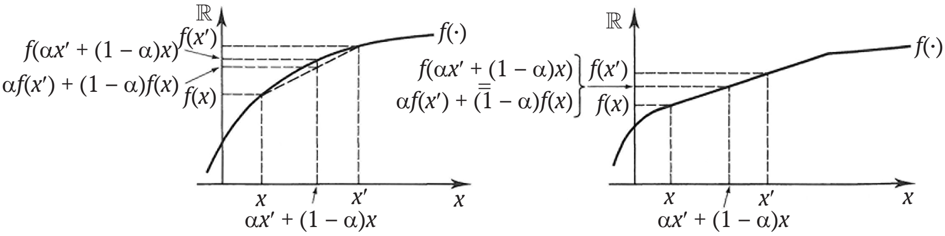
$$f(\alpha x' + (1-\alpha)x) \geq \alpha f(x') + (1-\alpha)f(x) \qquad \text{(M.C.1)}$$

для всех $x, x' \in A$ и для всех $\alpha \in [0, 1]$. Если это неравенство строгое для всех $x' \neq x$ и для всех $\alpha \in (0, 1)$, то *мы* будем говорить, что функция *строго вогнутая.*

На рис. M.C.1(a) изображена строго вогнутая функция одной переменной. В этом случае условие (M.C.1) означает, что отрезок, соединяющий любые две точки на графике функции $f(\cdot)$, лежит целиком под этим графиком[3]. На рис. M.C.1(b) изображена функция вогнутая, не являющаяся строго вогнутой; заметим, что в этом случае прямая линия, проходящая через точки x и x', лежит на графике функции, так что условие (M.C.1) выполняется как равенство.

[2] Основные факты, касающиеся выпуклых множеств, содержатся в разделе M.G.

[3] *Графиком* функции f: $A \to \mathbb{R}$ называется множество $\{(x,\ y) \in A \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$.



(a) (b)

Рис. М.С.1 (a) Строго вогнутая функция. (b) Вогнутая, но не строго вогнутая функция

Заметим, что условие (М.С.1) эквивалентно очевидно более сильному свойству

$$f(\alpha_1 x^1 + \ldots + \alpha_K x^K) \geq \alpha_1 f(x^1) + \ldots + \alpha_K f(x^K) \tag{М.С.2}$$

для любого набора векторов $x^1 \in A, \ldots, x^K \in A$ и чисел $\alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_K \geq 0$, таких что $\alpha_1 + \ldots + \alpha_K = 1$.

Давайте рассмотрим еще раз одномерный случай. Мы можем воспринимать любое из чисел α_k в условии (М.С.2) как «вероятность» того, что x^k произойдет. Тогда условие (М.С.2) говорит нам о том, что значение от ожидаемой величины не меньше, чем ожидаемое значение. Действительно, для вогнутой функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ справедливо условие

$$f\left(\int x dF\right) \geq \int f(x) dF. \tag{М.С.3}$$

Для любой функции распределения $F: \mathbb{R} \to [0, 1]$. Условие (М.С.3) известно как *неравенство Йенсена.*

Свойства *выпуклости* и *строгой* выпуклости для функции $f(\cdot)$ определяются аналогично, с той лишь разницей, что неравенство (М.С.1) имеет противоположный знак. В частности, для строго выпуклой функции $f(\cdot)$ отрезок, соединяющий любые две точки графика, должен лежать целиком *над* графиком, как показано на рис. М.С.2. Заметим также, что $f(\cdot)$ является вогнутой в том и только в том случае, если $-f(\cdot)$ выпуклая.

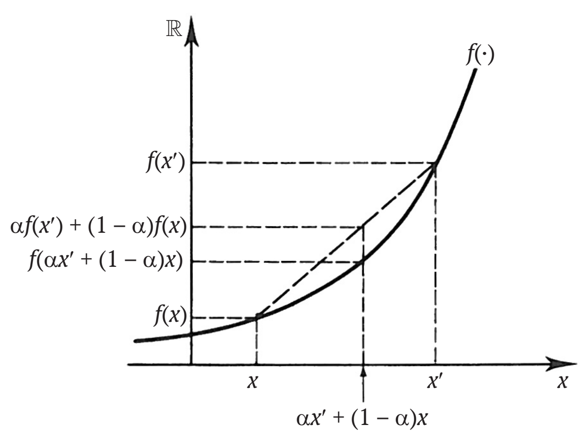


Рис. М.С.2. Строго выпуклая функция

Теорема М.С.1 предлагает полезную альтернативную характеристику вогнутости и строгой вогнутости.

Теорема М.С.1. Непрерывно дифференцируемая функция $f: A \to \mathbb{R}$ является вогнутой в том и только в том случае, если

$$f(x + z) \leq f(x) + \nabla f(x) \cdot z \tag{M.C.4}$$

для всех $x \in A$ и $z \in \mathbb{R}^N$ (при $x + z \in A$). Функция $f(\cdot)$ строго вогнутая, если неравенство (М.С.4) выполняется строго для всех $x \in A$ и $z \neq 0$.

Доказательство. Мы проверим только необходимость условия (М.С.4) для вогнутых функций. Для всех $\alpha \in (0, 1]$ условие $f(\alpha x' + (1 - \alpha)x) \geq \alpha f(x') + (1 - \alpha)f(x)$, для всех $x, x' \in A$ может быть переписано (положим $z = x' - x$) в виде

$$f(x + z) \leq f(x) + \frac{f(x + \alpha z) - f(x)}{\alpha}$$

для всех $x \in A$, $z \in \mathbb{R}^N$ (с $x + z \in A$) и $\alpha \in (0, 1]$. Переходя к пределу при $\alpha \to 0$, мы заключаем, что условие (М.С.4) должно выполняться для непрерывно дифференцируемой вогнутой функции $f(\cdot)$. ■

Условие (М.С.4) проиллюстрировано на рис. М.С.3. Оно говорит о том, что касательная к графику вогнутой функции $f(\cdot)$ должна лежать (слабо) над графиком $f(\cdot)$.

Соответствующие характеристики для выпуклых и строго выпуклых функций могут быть просто получены обращением знака неравенства в (М.С.4); т. е. выпуклая функция характеризуется условием $f(x + z) \geq f(x) + \nabla f(x) \cdot z$ для всех $x \in A$ и $z \in \mathbb{R}^N$ (с $x + z \in A$).

Наконец, мы выведем третье условие, описывающее вогнутые и строго вогнутые функции.

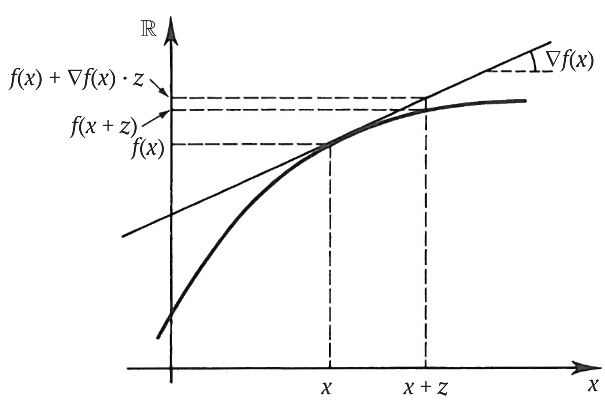


Рис. М.С.3. Любая касательная к графику вогнутой функции лежит над графиком

Определение М.С.2. Матрица $\boldsymbol{M}$ размерности $N \times N$ называется *отрицательно полуопределенной,* если

$$z \cdot \boldsymbol{M}z \le 0 \qquad \text{(M.C.5)}$$

для всех $z \in \mathbb{R}^N$. Если неравенство является строгим для всех $z \neq 0$, то матрица $\boldsymbol{M}$ называется *отрицательно определенной.* Изменяя знаки неравенства в условии (М.С.5), мы получим характеристики *положительно полуопределенной* и *положительно определенной* матриц.

Мы отсылаем вас к разделу М.Е, в котором детально изложены свойства таких матриц. В данный момент нам важно зафиксировать тесную связь таких матриц с гессианами $D^2f(\cdot)$ вогнутых функций[4].

Теорема М.С.2. Дважды непрерывно дифференцируемая функция f: $A \to \mathbb{R}$ вогнутая в том и только в том случае, если $D^2f(x)$ отрицательно полуопределенная для всех $x \in A$. Если $D^2f(x)$ отрицательно определенная для всех $x \in A$, то функция строго вогнутая.

Доказательство. Мы докажем только необходимость. Предположим, что $f(\cdot)$ вогнутая. Зафиксируем точку $x \in A$ и направление сдвига из x, $z \in \mathbb{R}^N$, $z \neq 0$. Раскладывая функцию $\phi(\alpha) = f(x + \alpha z)$ по формуле Тейлора, где $\alpha \in \mathbb{R}$, в окрестности точки $\alpha = 0$, получаем

$$f(x+\alpha z) - f(x) - \nabla f(x)\cdot(\alpha z) = \frac{\alpha^2}{2} z \cdot D^2 f(x+\beta z)z$$

для некоторого $\beta \in [0, \alpha]$. По теореме М.С.1 левая часть этого выражения неотрицательна. Поэтому $z \cdot D^2f(x + \beta z)z \le 0$. Так как α и, соответственно, β могут быть взяты сколь угодно малыми, то на основании получаем $z \cdot D^2f(x)z \le 0$. ■

В специальном случае $N = 1$ (когда функция $f(\cdot)$ зависит от одной переменной), отрицательная полуопределенность $D^2f(x)$ сводится к $d^2f(x)/dx^2 \le 0$, в то время как при отрицательной определенности мы имеем $d^2f(x)/dx^2 < 0$ (чтобы это увидеть, достаточно проверить, что $z \cdot D^2f(x)z = z^2(d^2f(x)/dx^2)$). Теорема М.С.2 говорит нам о том, что в этом случае функция $f(\cdot)$ вогнутая в том и только в том случае, если $d^2f(x)/dx^2 \le 0$ для любого x, и если $d^2f(x)/dx^2 < 0$ для любого x, то $f(\cdot)$ строго вогнутая. Заметим, что теорема М.С.2 не утверждает, что отрицательная определенность $D^2f(x)$ имеет место всякий раз, когда $f(\cdot)$ строго вогнутая. Действительно, когда $N = 1$, функция $f(x) = -x^4$ строго вогнутая, но $d^2f(0)/dx^2 = 0$.

Для выпуклых и строго выпуклых функций результат, аналогичный теореме М.С.2, справедлив, при этом достаточно заменить слово «отрицательный» на слово «положительный».

Остальная часть этого раздела посвящена обсуждению *квазивогнутых и строго квазивогнутых* функций.

[4] В теоремах М.С.2, М.С.3 и М.С.4 множество A предполагается открытым (смотрите раздел М.F), с тем чтобы избежать проблем на границе.

Определение M.C.3. Функция $f\colon A \to \mathbb{R}$, определенная на выпуклом множестве $A \subset \mathbb{R}^N$, называется *квазивогнутой,* если ее верхние лебеговские множества $\{x \in A\colon f(x) \ge t\}$ выпуклые, другими словами, из

$$f(x) \ge t \text{ и } f(x') \ge t \text{ следует } f(\alpha x + (1-\alpha)x') \ge t \tag{M.C.6}$$

для любых $t \in \mathbb{R}$, $x, x' \in A$, $\alpha \in [0, 1]$[5]. Если последнее из неравенств в (M.C.6) выполняется строго, всякий раз, когда $x \ne x'$ и $\alpha \in (0, 1)$, мы будем говорить, что $f(\cdot)$ *строго квазивогнутая.*

Аналогично мы будем говорить, что функция $f(\cdot)$ *квазивыпуклая,* если ее нижние лебеговские множества выпуклые; т. е. из того, что $f(x) \le t$ и $f(x') \le t$, следует, что $f(\alpha x + (1-\alpha)x') \le t$ для любых $t \in \mathbb{R}$, $x, x' \in A$, $\alpha \in [0, 1]$. Для строгой квазивыпуклости последнее из неравенств должно выполняться строго всякий раз, когда $x \ne x'$ и $\alpha \in (0, 1)$. Заметим, что $f(\cdot)$ квазивогнута в том и только в том случае, если $-f(\cdot)$ квазивыпуклая.

Линии уровня строго квазивогнутой функции изображены на рис. M.C.4(a); на рис. M.C.4(b) изображены линии уровня квазивогнутой функции, не являющейся строго квазивогнутой.

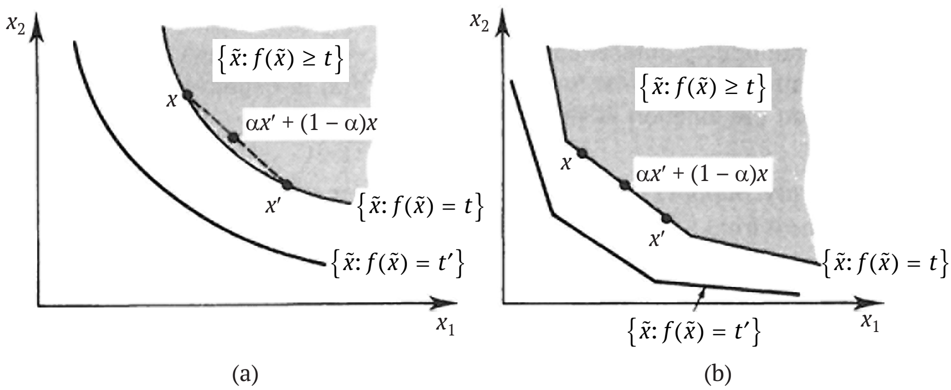


Рис. M.C.4. (a) Линии уровня строго квазивогнутой функции.
(b) Линии уровня квазивогнутой функции, не являющейся строго квазивогнутой

Из определения M.C.3 следует, что $f(\cdot)$ квазивогнута тогда и только тогда, если

$$f(\alpha x + (1-\alpha)x') \ge \min\{f(x), f(x')\} \tag{M.C.7}$$

для всех $x, x' \in A$, $\alpha \in [0, 1]$. Из этого или непосредственно из (M.C.6) мы получаем, что вогнутая функция автоматически квазивогнута. Обратное неверно: например, любая возрастающая функция одной переменной квазивогнута. Таким образом, свойство вогнутости более сильное, чем квазивогнутость. Оно также сильнее в другом смысле: вогнутость является «кардинальным» свойством в том смысле, что оно, вообще говоря, *не*

[5] Дополнительно о выпуклых множествах можно посмотреть в разделе M.G.

будет сохраняться под воздействием возрастающего преобразования $f(\cdot)$. Напротив, квазивогнутость будет сохраняться.

Теоремы M.C.3 и M.C.4 являются квазивогнутыми аналогами теорем M.C.1 и M.C.2 соответственно.

Теорема M.C.3. Непрерывно дифференцируемая функция $f: A \to \mathbb{R}$ является квазивогнутой в том и только в том случае, если

$$\nabla f(x) \cdot (x' - x) \geq 0 \text{ при } f(x') \geq f(x) \qquad \text{(M.C.8)}$$

для всех $x, x' \in A$. Если $\nabla f(x) \cdot (x' - x) > 0$ всякий раз, когда $f(x') \geq f(x)$, $x' \neq x$, то $f(\cdot)$ строго квазивогнутая. Наоборот, если $f(\cdot)$ строго квазивогнутая и если $\nabla f(x) \neq 0$ для всех $x \in A$, то $\nabla f(x) \cdot (x' - x) > 0$ всякий раз, когда $f(x') \geq f(x)$ и $x' \neq x$.

Доказательство. Мы снова ограничимся проверкой необходимости (M.C.8) для квазивогнутых функций. Если $f(x') > f(x)$ и $\alpha \in (0, 1]$, то, используя условие (M.C.7), мы получаем

$$\frac{f(\alpha(x' - x) + x) - f(x)}{\alpha} \geq 0.$$

Переходя к пределу при $\alpha \to 0$, мы получаем $\nabla f(x) \cdot (x' - x) \geq 0$.

Необходимость условия «$\nabla f(x) \neq 0$ для любых $x \in A$» в последней части теоремы может быть продемонстрирована на примере функции $f(x) = x^3$ для $x \in \mathbb{R}$. Эта функция строго квазивогнутая (можно проверить, пользуясь критерием из определения M.C.3), но, так как $\nabla f(0) = 0$, мы получаем $\nabla f(x) \cdot (x' - x) = 0$ при $x = 0$. ■

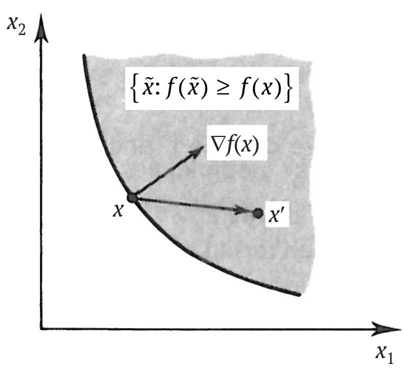


Рис. M.C.5. Условие (M.C.8)

Описание квазивогнутых функций, полученное в теореме M.C.3, показано на рис. M.C.5. Смысл условия (M.C.8) из теоремы в том, что для любой квазивогнутой функции $f(\cdot)$ и для любой пары точек x и x', при выполнении условия $f(x') \geq f(x)$, градиентный вектор $\nabla f(x)$ и вектор $(x' - x)$ образуют острый угол.

Для квазивыпуклых функций мы изменяем знак в обоих неравенствах (M.C.8) на противоположный.

Теорема M.C.4. Дважды непрерывно дифференцируемая функция $f: A \to \mathbb{R}$ квазивогнута в том и только в том случае, если для любого $x \in A$ гессиан $D^2 f(x)$ является отрицательно полуопределенной матрицей на подпространстве $\{z \in \mathbb{R}^N: \nabla f(x) \cdot z = 0\}$, т. е. в том и только в том случае, если

$$z \cdot D^2 f(x) z \leq 0 \quad \text{при} \quad \nabla f(x) \cdot z = 0 \qquad \text{(M.C.9)}$$

для любого $x \in A$[6]. *Если гессиан* $D^2 f(x)$ является отрицательно определенной матрицей на подпространстве $\{z \in \mathbb{R}^N : \nabla f(x) \cdot z = 0\}$ для любого $x \in A$, то $f(\cdot)$ строго квазивогнутая.

Доказательство. Ограничимся в очередной раз необходимостью утверждения и поступим так же, как и при доказательстве теоремы M.C.2. Единственным отличием является то, что мы выбираем z так, чтобы $\nabla f(x) \cdot z = 0$, и мы привлекаем теорему M.C.3 вместо теоремы M.C.1. ■

Для квазивогнутой функции мы заменяем слово «отрицательный» на «положительный» там, где оно встречается в утверждении теоремы M.C.4.

M.D. Матрицы: отрицательная (полу)определенность и другие свойства

В этом разделе мы приведем разные полезные факты из теории матриц.

Определение M.D.1. Матрица $\boldsymbol{M}$ размера $N \times N$ называется *отрицательно полуопределенной*, если

$$z \cdot \boldsymbol{M} z \leq 0 \tag{M.D.1}$$

для всех $z \in \mathbb{R}^N$. Если неравенство является строгим для всех $z \neq 0$, то матрица $\boldsymbol{M}$ называется *отрицательно определенной*. Меняя знаки неравенств в условии (M.D.1) на противоположные, мы получим определения *положительно полуопределенной* и *положительно определенной* матрицы.

Заметим, что матрица $\boldsymbol{M}$ положительно полуопределенная (соответственно положительно определенная) тогда и только тогда, когда матрица $-\boldsymbol{M}$ отрицательно полуопределенная (соответственно отрицательно определенная).

Вспомним, что для матрицы $\boldsymbol{M}$ размером $N \times N$ комплексное число λ является *характеристическим числом* (или *собственным значением*, или *корнем*), если оно является корнем уравнения $|\boldsymbol{M} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0$.

Характеристические числа симметричной матрицы всегда вещественны.

Теорема M.D.1. Предположим, что $\boldsymbol{M}$ — матрица размера $N \times N$.

(1) Матрица $\boldsymbol{M}$ отрицательно определенная в том и только в том случае, если симметричная матрица $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}^T$ отрицательно определенная.

(2) Если $\boldsymbol{M}$ симметричная, то $\boldsymbol{M}$ отрицательно определенная в том и только в том случае, если все характеристические числа $\boldsymbol{M}$ отрицательны.

(3) Матрица $\boldsymbol{M}$ отрицательно определенная в том и только в том случае, если $\boldsymbol{M}^{-1}$ отрицательно определенная.

[6] В разделе M.E обсуждаются свойства таких матриц.

(4) Если матрица $\boldsymbol{M}$ отрицательно определенная, то для всех диагональных матриц $\boldsymbol{K}$ размера $N \times N$ с положительными элементами на диагонали матрица $\boldsymbol{KM}$ *устойчива*[7].

Доказательство. Часть (1) просто вытекает из наблюдения, что $z \cdot (\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}^T)z = 2z \cdot \boldsymbol{M}z$ для каждого $z \in \mathbb{R}^N$.

Логика (2) состоит в следующем. Любая симметричная матрица $\boldsymbol{M}$ может быть диагонализирована простым способом: найдется матрица $\boldsymbol{C}$ размерности $N \times N$ полного ранга, удовлетворяющая $\boldsymbol{C}^T = \boldsymbol{C}^{-1}$, и такая, что $\boldsymbol{CMC}^T$ будет диагональной матрицей с диагональными элементами, равными характеристическим числам $\boldsymbol{M}$. Но тогда $z \cdot \boldsymbol{M}z = (\boldsymbol{C}z) \cdot \boldsymbol{CMC}^T(\boldsymbol{C}z)$, и для любого $\hat{z} \in \mathbb{R}^N$ найдется такое z, что $\hat{z} = \boldsymbol{C}z$. Таким образом, матрица $\boldsymbol{M}$ отрицательно определенная в том и только в том случае, если таковой является матрица $\boldsymbol{CMC}^T$. Но наиболее прямой путь доказательства того, что диагональная матрица отрицательно определенная, состоит в том, чтобы показать, что все ее диагональные элементы отрицательные.

Часть (3): предположим, что $\boldsymbol{M}^{-1}$ отрицательно определенная и пусть $z \neq 0$. Тогда $z \cdot \boldsymbol{M}z = (z \cdot \boldsymbol{M}z)^T = z \cdot \boldsymbol{M}^T z = (\boldsymbol{M}^T z) \cdot \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{M}^T z) < 0$.

Часть (4): известно, что матрица $\boldsymbol{A}$ устойчива в том и только в том случае, если найдется симметричная положительно определенная матрица $\boldsymbol{E}$, такая что $\boldsymbol{EA}$ отрицательно определенная. Таким образом, в нашем случае мы можем взять $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{KM}$ и $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{K}^{-1}$. ■

Для положительно определенных матриц мы просто меняем местами слова «положительная» и «отрицательная» везде, где они встретились в формулировке теоремы M.D.1.

Наш следующий результат (теорема M.D.2) представляет собой тест, основанный на детерминантах и являющийся критерием отрицательной определенности или отрицательной полуопределенности матрицы $\boldsymbol{M}$. Рассмотрим матрицу $\boldsymbol{M}$ размера $T \times S$. Обозначим ${}_t\boldsymbol{M}$, подматрицу $\boldsymbol{M}$ размера $t \times S$, в которой сохранены только первые $t \leq T$ строк. Аналогично пусть $\boldsymbol{M}_s$ — подматрица матрицы $\boldsymbol{M}$ размера $T \times s$, в которой сохранены только первые столбцы $s \leq S$, и пусть ${}_t\boldsymbol{M}_s$ — подматрица $\boldsymbol{M}$ размера $t \times s$, в которой сохранены только первые строки $t \leq T$ и первые столбцы $s \leq S$. Кроме того, в матрице $\boldsymbol{M}$ размера $N \times N$ за счет любой перестановки p индексов из списка $\{1, \ldots, N\}$ будет получена матрица $\boldsymbol{M}^{\pi}$, в которой строки и столбцы переставлены в соответствии с перестановкой p.

Теорема M.D.2. Пусть $\boldsymbol{M}$ — матрица размера $N \times N$.

(1) Предположим, $\boldsymbol{M}$ симметрична. Тогда $\boldsymbol{M}$ отрицательно определенная в том и только в том случае, если $(-1)^r|{}_r\boldsymbol{M}_r| > 0$ для любого $r = 1, \ldots, N$.

[7] Матрица $\boldsymbol{M}$ называется устойчивой, если вещественные части всех ее характеристических чисел отрицательны. Эта терминология мотивирована теорией систем дифференциальных уравнений вида $dx(t)/dt = \boldsymbol{M}x(t)$, когда решения такой системы будут стремиться к нулю при $t \to \infty$, при *любом* начальном значении $x(0)$.

(2) Предположим, $\boldsymbol{M}$ симметрична. Тогда $\boldsymbol{M}$ отрицательно полуопределенная в том и только в том случае, если $(-1)^r \left|{}_r\boldsymbol{M}_r^{\pi}\right| \geq 0$ для любого $r = 1, \ldots, N$ и для *любой* перестановки p индексов $\{1, \ldots, N\}$.

(3) Предположим, $\boldsymbol{M}$ отрицательно определенная (необязательно симметричная). Тогда $(-1)^r \left|{}_r\boldsymbol{M}_r^{\pi}\right| > 0$ для любого $r = 1, \ldots, N$ и для любой перестановки p индексов $\{1, \ldots, N\}$[8].

Доказательство. (1) Необходимость этой части доказать легко. Заметим, что, по определению отрицательной определенности, любая подматрица ${}_r\boldsymbol{M}_r$ отрицательно определенная. Таким образом, по теореме M.D.1 характеристические числа ${}_r\boldsymbol{M}_r$ отрицательные. Определитель квадратной матрицы равен произведению всех характеристических чисел этой матрицы. Отсюда $|{}_r\boldsymbol{M}_r|$ имеет знак $(-1)^r$. Для доказательства достаточности требуются некоторые расчеты, которые мы пропустим. Легко проверить в случае $N = 2$ (если вывод (1) справедлив для 2×2 симметричной матрицы, то определитель такой матрицы положителен и *оба* диагональных элемента отрицательны; комбинация этих фактов, как хорошо известно, влечет отрицательность обоих характеристических чисел).

Для доказательства (2) мы просто обратим внимание на требование рассмотреть все перестановки. Например, если $\boldsymbol{M}$ — матрица, все элементы которой равны нулю кроме N-го элемента, который положителен, то $\boldsymbol{M}$ удовлетворяет неотрицательной версии (1), но не является отрицательно полуопределенной в силу определения M.D.1.

Заметим, что в части (3) мы только гарантируем необходимость этого теста. Действительно, для не симметричных матриц это условие не является достаточным.

Пример M.D.1. Рассмотрим вещественнозначную функцию двух переменных $f(x_1, x_2)$. В дальнейшем будем обозначать вторые производные с помощью нижних индексов; например $f_{12}(x_1, x_2) = \partial^2 f(x_1, x_2) / \partial x_1 \partial x_2$. Теорема M.C.2 говорит нам о том, что $f(\cdot)$ строго вогнутая, если

$$D^2 f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} f_{11}(x_1, x_2) & f_{12}(x_1, x_2) \\ f_{21}(x_1, x_2) & f_{22}(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

отрицательно определенная для всех (x_1, x_2). По теореме M.D.2 это справедливо в том и только в том случае, если

$$|f_{11}(x_1, x_2)| < 0 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} f_{11}(x_1, x_2) & f_{12}(x_1, x_2) \\ f_{21}(x_1, x_2) & f_{22}(x_1, x_2) \end{vmatrix} > 0,$$

или, что равносильно, в том и только в том случае, если

$$f_{11}(x_1, x_2) < 0 \quad \text{и} \quad f_{11}(x_1, x_2) f_{22}(x_1, x_2) - [f_{12}(x_1, x_2)]^2 > 0.$$

[8] Матрица $\boldsymbol{M}$, такая что $-\boldsymbol{M}$ удовлетворяет условию (3), называется $\boldsymbol{P}$-матрицей. Название объясняется тем, что определитель любой ее подматрицы, полученной удалением некоторых строк (и соответствующих столбцов) положителен.

Теорема M.C.2 также свидетельствует о том, что $f(\cdot)$ вогнутая в том и только в том случае, если $D^2f(x_1, x_2)$ является отрицательно полуопределенной для всех (x_1, x_2). Теорема M.D.2 говорит о том, что это имеет место при выполнении

$$|f_{11}(x_1, x_2)| \le 0 \text{ и } \begin{vmatrix} f_{11}(x_1, x_2) & f_{12}(x_1, x_2) \\ f_{21}(x_1, x_2) & f_{22}(x_1, x_2) \end{vmatrix} \ge 0,$$

и, переставляя строки и столбцы матрицы $D^2f(x_1, x_2)$,

$$|f_{22}(x_1, x_2)| \le 0 \text{ и } \begin{vmatrix} f_{22}(x_1, x_2) & f_{21}(x_1, x_2) \\ f_{12}(x_1, x_2) & f_{11}(x_1, x_2) \end{vmatrix} \ge 0.$$

Таким образом, $f(\cdot)$ вогнутая в том и только в том случае, если $f_{11}(x_1, x_2) \le 0$, $f_{22}(x_1, x_2) \le 0$ и $f_{11}(x_1, x_2)f_{22}(x_1, x_2) - [f_{12}(x_1, x_2)]^2 \ge 0$. ■

Аналогичный тест справедлив для положительно определенных и полуопределенных матриц: результаты для таких матриц вполне соответствуют условиям (1)–(3) теоремы M.D.2, но нам нужно будет опустить множитель $(-1)^r$[9].

Теорема M.D.3. Пусть $\boldsymbol{M}$ — симметричная матрица размера $N \times N$, и пусть $\boldsymbol{B}$ — матрица размера $N \times S$ с $S \le N$ и ее ранг равен S.

(1) $\boldsymbol{M}$ является отрицательно определенной матрицей на $\{z \in \mathbb{R}^N\colon \boldsymbol{B}z = 0\}$ (т. е. $z \cdot \boldsymbol{M}z < 0$ для любого $z \in \mathbb{R}^N$ с $\boldsymbol{B}z = 0$ и $z \ne 0$) в том и только в том случае, если

$$(-1)^r \begin{vmatrix} {}_r\boldsymbol{M}_r & {}_r\boldsymbol{B} \\ \left({}_r\boldsymbol{B}\right)^T & 0 \end{vmatrix} > 0$$

для $r = S + 1, \ldots, N$.

(2) $\boldsymbol{M}$ является отрицательно полуопределенной матрицей на $\{z \in \mathbb{R}^N\colon \boldsymbol{B}z = 0\}$ (т. е. $z \cdot \boldsymbol{M}z \le 0$ для любого $z \in \mathbb{R}^N$ с $\boldsymbol{B}z = 0$ и $z \ne 0$) в том и только в том случае, если

$$(-1)^r \begin{vmatrix} {}_r\boldsymbol{M}_r^{\pi} & {}_r\boldsymbol{B}^{\pi} \\ \left({}_r\boldsymbol{B}^{\pi}\right)^T & 0 \end{vmatrix} \ge 0$$

для $r = S + 1, \ldots, N$, и для *любой* перестановки π, где ${}_r\boldsymbol{B}^{\pi}$ матрица, полученная только перестановкой строк, в соответствии с перестановкой π (как и раньше, ${}_r\boldsymbol{M}_r^{\pi}$ образована перестановкой строк *и* столбцов матрицы ${}_r\boldsymbol{M}_r$).

Доказательство. Мы не будем доказывать этот результат. Заметим лишь, что утверждения (1) и (2) вполне аналогичны соответствующим утверждениям теоремы M.D.2 с окаймленной матрицей, играющей роль матрицы, которая фигурировала в теореме M.D.2. ■

[9] Вспомним, что матрица $\boldsymbol{M}$ положительно (полу)определенная в том и только в том случае, если $-\boldsymbol{M}$ отрицательно (полу)определенная. Более того, $|-{}_r\boldsymbol{M}_r| = (-1)^r|{}_r\boldsymbol{M}_r|$.

Пример M.D.2. Рассмотрим функцию двух переменных $f(x_1, x_2)$. Мы будем предполагать $\nabla f(x) \neq 0$ для любого x. Теорема M.C.4 говорит нам о том, что функция $f(\cdot)$ будет строго квазивогнутой, если гессиан $D^2 f(x_1, x_2)$ отрицательно определенный на подпространстве $\{z \in \mathbb{R}^2 \colon \nabla f(x) \cdot z = 0\}$, для каждого $x = (x_1, x_2)$.

По теореме M.D.3 последнее имеет место в том и только в том случае, если

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x_1,\ x_2) & f_{12}(x_1,\ x_2) & f_1(x_1,\ x_2) \\ f_{21}(x_1,\ x_2) & f_{22}(x_1,\ x_2) & f_2(x_1,\ x_2) \\ f_1(x_1,\ x_2) & f_2(x_1,\ x_2) & 0 \end{vmatrix} > 0,$$

или, эквивалентно, в том и только в том случае, если

$$2f_1(x_1, x_2)f_2(x_1, x_2)f_{12}(x_1, x_2) - [f_1(x_1, x_2)]^2 f_{22}(x_1, x_2) - [f_2(x_1, x_2)]^2 f_{11}(x_1, x_2) > 0.$$

Если мы применим этот тест к функции $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, то получим $2x_1x_2 > 0$, что подтверждает строгую квазивогнутость этой функции.

По теореме M.C.4 функция $f(\cdot)$ является квазивогнутой в том и только в том случае, если гессиан $D^2 f(x_1, x_2)$ отрицательно полуопределен на подпространстве $\{z \in \mathbb{R}^2 \colon \nabla f(x) \cdot z = 0\}$ для любого $x = (x_1, x_2)$.

По теореме M.D.3 это справедливо в том и только в том случае, если

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x_1,\ x_2) & f_{12}(x_1,\ x_2) & f_1(x_1,\ x_2) \\ f_{21}(x_1,\ x_2) & f_{22}(x_1,\ x_2) & f_2(x_1,\ x_2) \\ f_1(x_1,\ x_2) & f_2(x_1,\ x_2) & 0 \end{vmatrix} \geq 0,$$

и (совершая надлежащие перестановки)

$$\begin{vmatrix} f_{22}(x_1,\ x_2) & f_{21}(x_1,\ x_2) & f_2(x_1,\ x_2) \\ f_{12}(x_1,\ x_2) & f_{11}(x_1,\ x_2) & f_1(x_1,\ x_2) \\ f_2(x_1,\ x_2) & f_1(x_1,\ x_2) & 0 \end{vmatrix} \geq 0.$$

Вычисление этих двух детерминантов дает нам необходимое и достаточное условия

$$2f_1(x_1, x_2)f_2(x_1, x_2)f_{12}(x_1, x_2) - [f_1(x_1, x_2)]^2 f_{22}(x_1, x_2) - [f_2(x_1, x_2)]^2 f_{11}(x_1, x_2) \geq 0. \blacksquare$$

Чтобы охарактеризовать матрицы, являющиеся положительно определенными или положительно полуопределенными на подпространстве $\{z \in \mathbb{R}^N \colon \boldsymbol{B}z = 0\}$, нам нужно всего лишь заменить множитель $(-1)^r$ на $(-1)^S$ в формулировке теоремы M.D.3.

Теорема M.D.4. Пусть $\boldsymbol{M}$ — матрица размера $N \times N$, и для некоторого $p \gg 0$ выполнено $\boldsymbol{M}p = 0, \boldsymbol{M}^T p = 0$. Введем обозначение $T_p = \{z \in \mathbb{R}^N \colon p \cdot z = 0\}$, и пусть $\hat{\boldsymbol{M}}$ — матрица размера $(N-1) \times (N-1)$, полученная из $\boldsymbol{M}$ удалением одной строки и соответствующего столбца.

(1) Если $\operatorname{rank}\boldsymbol{M} = N - 1$, то $\operatorname{rank}\hat{\boldsymbol{M}} = N - 1$.

(2) Если $z \cdot \boldsymbol{M}z < 0$ для любого $z \in T_p$ с $z \neq 0$ (т. е. если $\boldsymbol{M}$ отрицательно определенная на T_p), тогда $z \cdot \boldsymbol{M}z < 0$ для любого вектора $z \in \mathbb{R}^N$, не пропорционального p.

(3) Матрица $\boldsymbol{M}$ отрицательно определена на T_p в том и только в том случае, если $\hat{\boldsymbol{M}}$ отрицательно определена.

Доказательство.

(1) Предположим, что $\operatorname{rank}\hat{\boldsymbol{M}} < N - 1$, т. е. $\hat{\boldsymbol{M}}\hat{z} = 0$ для некоторого $\hat{z} \in \mathbb{R}^{N-1}$ с $\hat{z} \neq 0$. Дополним вектор $\hat{z}$ до вектора $\mathrm{z} \in \mathbb{R}^N$, полагая недостающую координату нулем. Тогда мы заключаем, что, во-первых, z линейно независим от p (напомним, что $p \gg 0$) и, во-вторых, что $\boldsymbol{M}z = 0$ и $\boldsymbol{M}p = 0$. Таким образом, $\operatorname{rank}\boldsymbol{M} < N - 1$, что противоречит гипотезе.

(2) Возьмем $z \in \mathbb{R}^N$, не пропорциональный p. Для $\alpha_z = (p \cdot z)/(p \cdot p)$ и $z^* = z - \alpha_z p$ выполнено $z^* \in T_p$ и $z^* \neq 0$. Вследствие того что $\boldsymbol{M}^T p = \boldsymbol{M}p = 0$, мы получаем

$$z \cdot \boldsymbol{M}z = (z^* + \alpha_z p) \cdot \boldsymbol{M}(z^* + \alpha_z p) = z^* \cdot \boldsymbol{M}z^* < 0.$$

(3) Доказательство этой части похоже на доказательство части (2). Действительно, из части (2) непосредственно следует, что $\hat{\boldsymbol{M}}$ отрицательно определенная, если $\boldsymbol{M}$ отрицательно определенная на T_p (так как для любого $\hat{z} \in \mathbb{R}^{N-1}$ верно, что $\hat{z} \cdot \hat{\boldsymbol{M}}\hat{z} = z \cdot \boldsymbol{M}z,$ где z получен дополнением из $\hat{z},$ когда недостающую координату положили равной нулю, и если $\hat{z} \neq 0,$ то данный вектор z в силу построения не пропорционален p). Чтобы доказать обратное, обозначим через n номер удаленной строки и удаленного столбца из матрицы $\boldsymbol{M}$ для получения $\hat{\boldsymbol{M}}$. Если для каждого $z' \in T_p$ с $z' \neq 0$ мы положим $z = z' - \left(z'_n/p_n\right)p,$ тогда $z_n = 0$ и $z \neq 0$ (если бы z был равен нулю, то мы бы получили $z' = \left(z'_n/p_n\right)p,$ что вступает в противоречие с $z' \cdot p = 0$). Более того, $z' \cdot \boldsymbol{M}z' = z \cdot \boldsymbol{M}z = \hat{z} \cdot \hat{\boldsymbol{M}}\hat{z} < 0.$ ■

Определение M.D.2. Матрица $\boldsymbol{M}$ размера $N \times N$ с элементами a_{ij} обладает *доминантной диагональю*, если найдется такой вектор $(p_1, \ldots, p_N) \gg 0$, что для любого $i = 1, \ldots, N$ выполняется $\left|p_i a_{ii}\right| > \sum_{j \neq i}\left|p_j a_{ij}\right|$.

Определение M.D.3. Матрица $\boldsymbol{M}$ размера $N \times N$ имеет *знакоопределенность валовой заменимости,* если все недиагональные элементы положительны.

Теорема M.D.5. Пусть $\boldsymbol{M}$ — матрица размера $N \times N$.

(1) Если $\boldsymbol{M}$ — матрица с доминантной диагональю, то она невырожденная.

(2) Пусть $\boldsymbol{M}$ — симметричная матрица. Если $\boldsymbol{M}$ — матрица с доминантной диагональю и все ее диагональные элементы отрицательные, то она отрицательно определенная.

(3) Если матрица $\boldsymbol{M}$ имеет знакоопределенность валовой заменимости и для некоторого $p \gg 0$ справедливо $\boldsymbol{M}p \ll 0$ и $\boldsymbol{M}^T p \ll 0$, то $\boldsymbol{M}$ отрицательно определенная.

(4) Если матрица $\boldsymbol{M}$ имеет знакоопределенность валовой заменимости и выполнено $\boldsymbol{M}p = \boldsymbol{M}^T p = 0$ для некоторого $p \gg 0$, то $\hat{\boldsymbol{M}}$ от-

рицательно определенная, где $\hat{\boldsymbol{M}}$ — любая матрица размерности $(N-1)\times(N-1)$, полученная из $\boldsymbol{M}$ удалением строки и соответствующего столбца.

(5) Пусть все элементы $\boldsymbol{M}$ неотрицательные и выполнено $\boldsymbol{M}z \ll z$ для некоторого $z \gg 0$ (т. е. $\boldsymbol{M}$ — продуктивная матрица «затраты — выпуск»). Тогда матрица $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M})^{-1}$ существует. Справедлива формула $\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}\right)^{-1}=\sum_{k=0}^{k=\infty}\boldsymbol{M}^k$.

Доказательство.

(1) Предположим для простоты, что $p=(1,\ldots,1)$. Положим, от противного, что $\boldsymbol{M}z=0$ для $z\neq 0$. Выберем координату n, такую что $|z_n|\geq|z_{n'}|$ для любой другой координаты n'. Тогда $\left|a_{nn}z_n\right| > \sum_{j\neq n}a_{nj}z_n \geq \sum_{j\neq n}\left|a_{nj}z_j\right|$, где a_{ij} — элемент матрицы $\boldsymbol{M}$. Следовательно, мы не можем получить $\sum_j a_{nj}z_j=0$, так что $\boldsymbol{M}z\neq 0$, что противоречит предположению.

(2) Если $\boldsymbol{M}$ — матрица с доминантной диагональю и все ее диагональные элементы отрицательные, то матрица $\boldsymbol{M}-\alpha\boldsymbol{I}$ обладает таким же свойством для любого значения $\alpha\geq 0$. Следовательно, из (1) вытекает, что $(-1)^N|\boldsymbol{M}-\alpha\boldsymbol{I}|\neq 0$. Теперь, если α достаточно велико, то очевидно, что $(-1)^N|\boldsymbol{M}-\alpha\boldsymbol{I}|>0$ (так как $(-1)^N|\boldsymbol{M}-\alpha\boldsymbol{I}| = (-1)^N\alpha^N|(\boldsymbol{M}/\alpha)|-\mathrm{I}|$ и $|-\mathrm{I}|=(-1)^N$). Более того, так как $(-1)^N|\boldsymbol{M}-\alpha\boldsymbol{I}|$ непрерывен по α и $(-1)^N|\boldsymbol{M}-\alpha\boldsymbol{I}|\neq 0$ для любых $\alpha\geq 0$, то это говорит нам о том, что $(-1)^N|\boldsymbol{M}-\alpha\boldsymbol{I}|>0$ для любых $\alpha\geq 0$. Отсюда $(-1)^N|\boldsymbol{M}|>0$. Аналогично можно показать $(-1)^r|{}_r\boldsymbol{M}_r|>0$ для любых r. Так что если $\boldsymbol{M}$ также симметричная, то в соответствии с частью (1) теоремы M.D.2 она будет отрицательно определенной.

(3) Заявленные свойства матрицы влекут за собой доминантность диагонали матрицы $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}^T$, кроме того, все ее диагональные элементы отрицательные (в частности, заметим, что $\boldsymbol{M}p \ll 0$ и $\boldsymbol{M}^Tp\ll 0$ влечет $p_n\left(2a_{nn}\right) < -\sum_{j\neq n}p_j\left(a_{jn}+a_{nj}\right)$ для любых n, где a_{ij} — элемент матрицы $\boldsymbol{M}$). В соответствии со свойством знакоопределенности валовой заменимости $a_{ij}>0$ для $i\neq j$, откуда получаем $\left|p_n\left(2a_{nn}\right)\right| > \left|\sum_{j\neq n}p_j\left(a_{jn}+a_{nj}\right)\right|$ для любых n. Следовательно, вывод основан на части (2) этой теоремы и части (1) теоремы M.D.1.

(4) Если $\boldsymbol{M}$ удовлетворяет условию (4), то тот факт, что $\boldsymbol{M}$ имеет свойство знакоопределенности валовой заменимости, то матрица $\hat{\boldsymbol{M}}$ обладает тем же свойством, и, следовательно, $\hat{\boldsymbol{M}}p\ll 0$, $\hat{\boldsymbol{M}}^Tp\ll 0$.

Тогда $\hat{\boldsymbol{M}}$ удовлетворяет условиям (3), и поэтому она отрицательно определенная.

(5) Этот результат был уже ранее доказан в приложении к главе 5 (см. доказательство предложения 5.AA.1).

M.E. Теорема о неявной функции

Теорема о неявной функции (ТНФ) возникает естественным образом в следующей задаче. Рассмотрим систему из N уравнений, зависящих от N эндогенных переменных $x = (x_1, \dots, x_N)$ и M параметров $q = (q_1, \dots, q_M)$:

$$\begin{gathered} f_1\left(x_1, \ \dots, \ x_N; \ q_1, \ \dots, \ q_M\right) = 0 \\ \vdots \\ f_N\left(x_1, \ \dots, \ x_N; \ q_1, \ \dots, \ q_M\right) = 0 \end{gathered} \tag{M.E.1}$$

Область значений переменных — это множество $A \subset \mathbb{R}^N$, а значения параметров принадлежат области $B \subset \mathbb{R}^M$[10].

Предположим, что $\bar{x} = \left(\bar{x}_1, \ \dots, \ \bar{x}_N\right) \in A$ и $\bar{q} = \left(\bar{q}_1, \ \dots, \ \bar{q}_M\right) \in B$ удовлетворяют уравнениям (M.E.1). То есть $f_n\left(\bar{x}, \ \bar{q}\right) = 0$ для любых n. Мы интересуемся возможностью решения относительно переменных $x = (x_1, \dots, x_N)$, являющихся функциями $q = (q_1, \dots, q_M)$, *локально* в окрестности $\bar{q}$ и $\bar{x}$. Более формально мы говорим, что множество A' является *открытой окрестностью* точки $x \in \mathbb{R}^N$, если $A' = \{x' \in \mathbb{R}^N\colon \|x' - x\| < \varepsilon\}$, для некоторого положительного $\varepsilon > 0$. Открытая окрестность B' около точки $q \in \mathbb{R}^M$ определяется аналогично.

Определение M.E.1. Предположим, что $\bar{x} = \left(\bar{x}_1, \ \dots, \ \bar{x}_N\right) \in A$ и $\bar{q} = \left(\bar{q}_1, \ \dots, \ \bar{q}_M\right) \in B$ удовлетворяют уравнениям (M.E.1). Будем говорить, что уравнения (M.E.1) *локально разрешимы* в $\left(\bar{x}, \ \bar{q}\right)$ в виде функций $x = (x_1, \dots, x_N)$ от $q = (q_1, \dots, q_M)$, если найдутся открытые окрестности $A' \subset A$ и $B' \subset B$ около точек $\bar{x}$ и $\bar{q}$ соответственно и N единственным образом определенных «неявных» функций $\eta(\cdot) = (\eta_1(\cdot), \dots, \eta_N(\cdot))$, действующих из B' в A', таким образом, что

$$f_n(\eta_1(q), \dots, \eta_N(q); q) = 0 \text{ для любого } q \in B' \text{ и любого } n$$
$$\text{и } \eta_n\left(\bar{q}\right) = \bar{x}_n \text{ для любого } n.$$

На рис. M.E.1 рассмотрен случай $N = M = 1$, когда система уравнений может быть локально разрешима в окрестности некоторой точки.

Теорема о неявной функции предоставляет достаточное условие для существования таких неявных функций и позволяет нам исследовать эффекты первого порядка в задачах сравнительной статики, когда q воздействует на x в окрестности решения.

---

[10] В дальнейшем мы будем полагать, что A и B — открытые множества (см. раздел M.F), чтобы избежать проблем на границе.

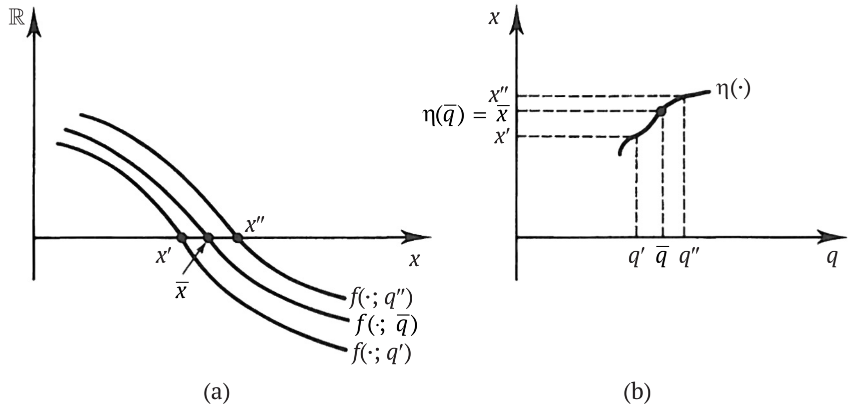


Рис. М.Е.1. Локально разрешимое уравнение. (a) Решения уравнения $f(x; q) = 0$ в окрестности $(\bar{x}; \bar{q})$. (b) График функции $\eta(\cdot)$

Теорема М.Е.1 *(теорема о неявной функции)*. Предположим, что любое уравнение $f_n(\cdot)$ непрерывно дифференцируемо по $N + M$ переменным, и мы рассматриваем решение $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ \ldots, \ \bar{x}_N)$, зависящее от значений параметров $\bar{q} = (\bar{q}_1, \ \ldots, \ \bar{q}_M)$, т.е. удовлетворяющих $f_n(\bar{x}; \ \bar{q}) = 0$ для любых n. Если *якобиан* системы (М.Е.1) по отношению к эндогенным переменным, вычисленный в точке $(\bar{x}, \ \bar{q})$, является невырожденным, т. е.

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(\bar{x}, \ \bar{q})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\bar{x}, \ \bar{q})}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_N(\bar{x}, \ \bar{q})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_N(\bar{x}, \ \bar{q})}{\partial x_N} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \text{(М.Е.2)}$$

то система может быть локально разрешима в $(\bar{x}, \ \bar{q})$ посредством нахождения неявных функций η_n: $B' \to A'$, которые непрерывно дифференцируемые. Более того, эффекты первого порядка воздействия q на x в $(\bar{x}, \ \bar{q})$ могут быть найдены по формуле

$$D_q \eta(\bar{q}) = -\left[D_x f(\bar{x}; \ \bar{q})\right]^{-1} D_q f(\bar{x}; \ \bar{q}). \qquad \text{(М.Е.3)}$$

Доказательство. Доказательство существования неявных функций η_n: $B' \to A'$ является слишком техническим для данного приложения, но его идею легко понять на уровне здравого смысла. Выражение (М.Е.2) — это условие полного ранга; оно говорит нам о том, что значения уравнений, входящих в систему, могут произвольно изменяться вслед за изменением эндогенных переменных. Поэтому, если под воздействием шока значения параметров изменятся и значения уравнений уже не будут равняться нулю, то мы сможем за счет приспособления эндогенных переменных вернуться в положение «равновесия».

Теперь пусть задана система неявных функций $\eta(q) = (\eta_1(q), \ldots, \eta_N(q))$, определенных в некоторой окрестности $(\bar{x},\ \bar{q})$, тогда эффекты первого порядка, характерные для задач сравнительной статики $\partial\eta_n(\bar{q})/\partial q_m$, могут быть найдены легко. Пусть $f(x; q) = (f_1(x; q), \ldots, f_N(x; q))$. Так как выполнено

$$f(\eta(q); q) = 0 \text{ для любых } q \in B',$$

то мы можем применить правило дифференцирования сложной функции, чтобы получить

$$D_x f(\bar{x};\ \bar{q})\, D_q \eta(\bar{q}) + D_q f(\bar{x};\ \bar{q}) = 0.$$

Условие (M.E.2) гарантирует обратимость матрицы $D_x f(\bar{x};\ \bar{q})$ размера $N \times N$, и мы можем заключить, что

$$D_q \eta(\bar{q}) = -\left[D_x f(\bar{x};\ \bar{q})\right]^{-1} D_q f(\bar{x};\ \bar{q}). \ \blacksquare$$

Заметим, что при $N = M = 1$ (случай одной эндогенной переменной и одного параметра) (M.E.3) приобретает простой вид

$$\frac{d\eta(\bar{q})}{dq} = -\frac{\partial f(\bar{x};\ \bar{q})/\partial q}{\partial f(\bar{x};\ \bar{q})/\partial x}.$$

Специальный случай теоремы о неявной функции при $M = N$, когда каждое уравнение имеет вид $f_n(x, q) = g_n(x) - q_n = 0$, известно под названием *теоремы об обратной функции*.

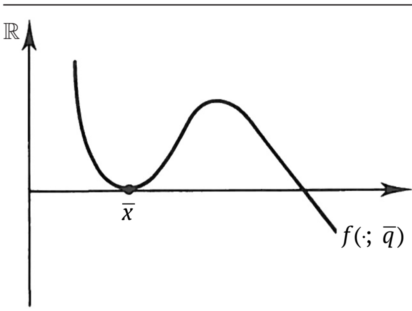


Рис. M.E.2. Условие (M.E.2) нарушено в $(\bar{x},\ \bar{q})$

Насколько ограничительным является условие (M.E.2)? Не очень ограничительным. На рис. M.E.2 мы изобразили тот случай, когда это условие не выполняется. (Напротив, на рис. M.E.1 условие (M.E.2) выполнено). Однако условие касания, изображенное на рис. M.E.2, является скорее патологией, оно будет устранено малым изменением функции $f(\cdot; \cdot)$.

Важный результат, известный под названием *теорема трансверсальности,* уточняет эту идею. Можно высказать утверждение, что при выполнении слабого условия (достаточно изменчивости первого порядка функции $f(\cdot; \cdot)$ по x *и* q) (M.E.2) выполняется при *всех* значениях параметров. Это понятие будет развито в определении (M.E.2).

Определение M.E.2. Пусть $A \subset \mathbb{R}^N$ и $B \subset \mathbb{R}^M$ — открытые множества; система непрерывно дифференцируемых уравнений $f(\cdot;\ \hat{q}) = 0$, определенная на A, является *регулярной* в $\hat{q} \in B$, если (M.E.2) выполняется для любого решения x, т. е. если из $f(x;\ \hat{q}) = 0$ следует, что $\left|D_x f(x;\ \hat{q})\right| \neq 0$.

Используя это определение, мы можем сформулировать теорему M.E.2.

Теорема M.E.2 *(теорема трансверсальности)*. Предположим, что заданы открытые множества $A \subset \mathbb{R}^N$ и $B \subset \mathbb{R}^M$ и непрерывно дифференцируемая функция f: $A \times B \to \mathbb{R}^N$. Если $f(\cdot; \cdot)$ удовлетворяет условию

матрица $Df(x; q)$ размера $N \times (N + M)$ имеет ранг N
при выполнении условия $f(x; q) = 0$,

то система N уравнений относительно N неизвестных $f(\cdot; \hat{q}) = 0$ является регулярной для *почти всех* $\hat{q} \in B$[11].

M.F. Непрерывные функции и компактные множества

В этом разделе мы начнем формально вводить понятие непрерывной функции. Затем мы разовьем понятие компактного множества (и заодно понятия открытого и замкнутого множеств). Наконец, мы обсудим некоторые свойства непрерывных функций, которые имеют отношение к компактам.

Последовательностью в $\mathbb{R}^N$ называется взаимно однозначное соответствие множества целых положительных чисел $m = 1, 2, \ldots$ и векторов $x^m \in \mathbb{R}^N$. Мы обозначаем последовательность $\left\{x^m\right\}_{m=1}^{\infty}$, или просто $\{x^m\}$, или даже x^m.

Определение M.F.1. Последовательность $\{x^m\}$ *сходится* к $x \in \mathbb{R}^N$, что записывается как $\lim\limits_{m\to\infty} x^m = x$, или $x^m \to x$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число M_ε, что $\|x^m - x\| < \varepsilon$ при $m > M_\varepsilon$. Говорят, что точка x является *предельной точкой* (или просто *пределом*) последовательности $\{x^m\}$.

Другими словами, последовательность $\{x^m\}$ сходится к x, если x^m оказывается сколь угодно близко к x с ростом m.

Определение M.F.2: Рассмотрим область $X \subset \mathbb{R}^N$. Функция f: $X \to \mathbb{R}$ *непрерывна,* если для всех $x \in X$ и для любой последовательности $x^m \to x$ (полагая, что $x^m \in X$ для всех m) выполнено $f(x^m) \to f(x)$. Функция f: $X \to \mathbb{R}^K$ непрерывна, если любая ее компонента $f_k(\cdot)$ непрерывна.

Другими словами, функция непрерывна, если для последовательности $x^1, x^2, \ldots$, сходящейся к x, соответствующая последовательность значений функции $f(x^1), f(x^2), \ldots$ сходится к $f(x)$. Интуитивно ясно, что функция не будет непрерывной, если она имеет «скачок» своего значения в некоторой точке x. Примеры непрерывных и разрывных функций, определенных на $[0, 1]$, приведены на рис. M.F.1.

[11] «Почти все» означает, что если, например, мы выберем $\hat{q}$ в соответствии с некоторым многомерным нормальным распределением в $\mathbb{R}^M$, то с вероятностью 1 система уравнений $f(\cdot;\ \hat{q}) = 0$ будет регулярной. Так понимается «общность»в этом контексте.

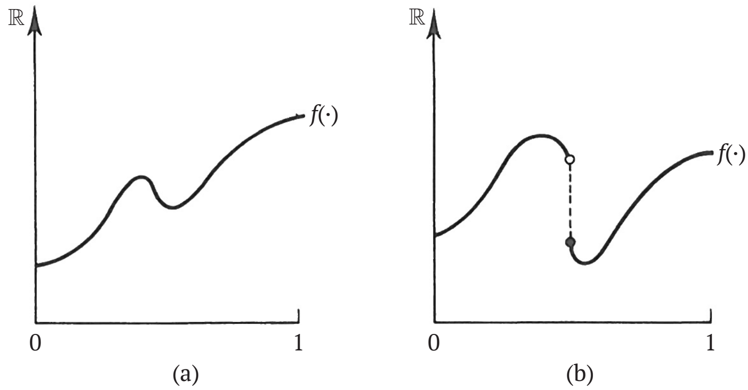


Рис. M.F.1. Непрерывные и разрывные функции.
(a) Непрерывная функция. (b) Разрывная функция

Определение M.F.3. Зафиксируем множество $X \subset \mathbb{R}^N$. Будем говорить, что множество $A \subset X$ *открыто* (по отношению к X), если для любого $x \in A$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что при $\|x' - x\| < \varepsilon$ из $x' \in X$ следует $x' \in A$.

Множество $A \subset X$ *замкнуто* (по отношению к X), если его дополнение $X \backslash A$ (по отношению к X) открыто[12]. Если $X = \mathbb{R}^N$, мы просто говорим об открытых и замкнутых множествах.

Пусть дана точка $x \in \mathbb{R}^N$, множество $B = \{x' \in \mathbb{R}^N: \|x' - x\| < \varepsilon\}$ для некоторого положительного $\varepsilon > 0$ называется *открытым шаром вокруг x*. С учетом этого понятия идея открытого множества может быть представлена следующим образом. Предположим, мы рассматриваем векторы из $\mathbb{R}^N$, образующие множество X. Множество $A \subset X$ будет открытым (по отношению к X), если для каждой точки x из A найдется открытый шар вокруг x, все элементы которого (в X) будут элементами A. На рис. M.F.2(a) отрезанное множество A открыто (по отношению к X). На этом рисунке мы изобразили типичную точку $x \in A$ и слегка заштрихованный открытый шар вокруг x, который лежит внутри A; точки на прерывистой кривой не принадлежат A. Напротив, отрезанное множество A на рис. M.F.2(b) замкнуто, потому что множество $X \setminus A$ открыто; заметим, что изображен открытый шар вокруг точки $x \in X \setminus A$, который полностью лежит внутри множества $X \setminus A$ (на рисунке точки на внутренней части сплошной кривой принадлежат A).

В теореме M.F.1 содержатся основные факты об открытых и замкнутых множествах.

Теорема M.F.1. Зафиксируем множество $X \subset \mathbb{R}^N$. В дальнейшем все открытые и замкнутые множества являются таковыми относительно X.

(1) Объединение любой совокупности, конечной или бесконечной, открытых множеств является открытым множеством. Пересечение конечной совокупности открытых множеств открыто.

[12] Пусть даны множества A и B, множество $A \backslash B$ — это множество, содержащее все элементы A, которые не являются элементами B.

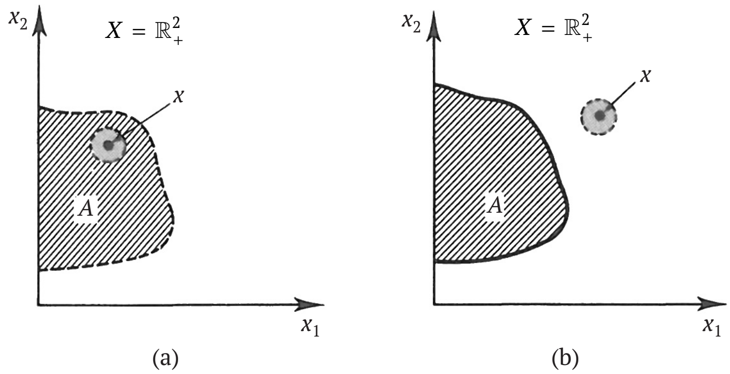


Рис. M.F.2. Открытые и замкнутые множества.
(a) Открытое множество (по отношению к X).
(b) Замкнутое множество (по отношению к X)

(2) Пересечение любой совокупности, конечной или бесконечной, замкнутых множеств является замкнутым множеством. Объединение конечной совокупности замкнутых множеств замкнуто.

(3) Множество $A \subset X$ замкнуто в том и только в том случае, если для любой последовательности $x^m \to x \in X$, с членами последовательности $x^m \in A$ для всех m, предел $x \in A$.

Свойство (3) теоремы M.F.1 стоит отметить особо, потому что оно дает нам прямой путь по описанию замкнутых множеств: множество A замкнуто в том и только в том случае, если предельная точка любой последовательности, члены которое принадлежат A, сама является элементом A. Точки (в X), которые являются пределами последовательностей, все члены которых принадлежат множеству A, называются *предельными точками* A. Таким образом, свойство (3) утверждает, что множество A будет замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

Пусть $A \subset X$, *внутренностью* A (по отношению к X) является открытое множество[13]

$$\mathrm{Int}_X A = \{x \in A\text{: найдется такое } \varepsilon > 0,$$
$$\text{что при } \|x' - x\| < \varepsilon \text{ и } x' \in X \text{ выполнено } x' \in A\}.$$

Замыканием A (по отношению к X) называется замкнутое множество $\mathrm{Cl}_X A = X \setminus \mathrm{Int}_X(X \setminus A)$.

Эквивалентно $\mathrm{Cl}_X A$ является объединением множества A и его предельных точек; это наименьшее замкнутое множество, содержащее A. *Границей* A (по отношению к X) называется замкнутое множество — это замкнутое множество $\mathrm{Bdry}_X A = \mathrm{Cl}_X A \setminus \mathrm{Int}_X A$. Множество A замкнуто тогда и только тогда, когда $\mathrm{Bdry}_X A \subset A$.

[13] В этом разделе все открытые и замкнутые множества будут таковыми относительно множества X.

Определение M.F.4. Множество $A \subset \mathbb{R}^N$ *ограничено*, если найдется такое $r \in \mathbb{R}$, что $||x|| < r$ для всех $x \in A$. Множество $A \subset \mathbb{R}^N$ называется *компактом*, если оно ограничено и замкнуто относительно $\mathbb{R}^N$.

Мы завершаем этот раздел двумя свойствами непрерывных функций, определенных на компактах.

Формально если задана функция $f: X \to \mathbb{R}^K$, *образом* множества $A \subset X$ при отображении $f(\cdot)$ называется множество

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R}^K: y = f(x) \text{ для некоторого } x \in A\}.$$

Теорема M.F.2. Пусть непрерывная функция $f: X \to \mathbb{R}^K$ определена на непустом множестве $X \subset \mathbb{R}^N$.

(1) Функция $f(\cdot)$ отображает компактное множество в компактное. Другими словами, если $A \subset X$ является компактом, то $f(A) = \{y \in \mathbb{R}^K: y = f(x)$ для некоторого $x \in A\}$ является компактным множеством из $\mathbb{R}^K$.

(2) Пусть $K = 1$ и X — компакт. Тогда функция $f(\cdot)$ принимает на X максимальное значение, т. е. найдется такое $x \in X$, что $f(x) \geq f(x')$ для любого $x' \in X$.

Часть (2) теоремы M.F.2 утверждает, что любая непрерывная функция $f: X \to \mathbb{R}$, определенная на компактном множестве X, достигает наибольшего значения. Мы проиллюстрируем этот факт рис. M.F.3. Функция не достигает своего наибольшего значения ни на рис. M.F.3(a), ни на M.F.3(b). На рис. M.F.3(a) функция непрерывна, но область не является компактом. На рис. M.F.3(b) область является компактом, но функция не является непрерывной.

Пусть дана последовательность $\{x^m\}$; предположим, что задана строго возрастающая функция $m(k)$, которая ставит в соответствие целому числу k положительное целое число $m(k)$. Тогда последовательность $x^{m(1)}, x^{m(2)}, \ldots$ (записывается как $\{x^{m(k)}\}$) называется *подпоследовательностью* $\{x^m\}$. То есть $\{x^{m(k)}\}$ является подмножеством последовательности $\{x^m\}$ с сохранением порядка следования элементов. Например, если последовательность $\{x^m\}$ задана рядом чисел 1, 2, 4, 16, 25, 36, ..., то одной из подпоследовательностей $\{x^m\}$ будет 1, 4, 16, 36, ...; а другой — 2, 4, 16, 25, 36, ...

Теорема M.F.3. Предположим, что множество $A \subset \mathbb{R}^N$ — компакт.

(1) Любая последовательность $\{x^m\}$ с $x^m \in A$ для всех m имеет сходящуюся подпоследовательность. Более точно найдется такая подпоследовательность $\{x^{m(k)}\}$ последовательности $\{x^m\}$, что она сходится в A, т. е. точка $x \in A$, такая что $x^{m(k)} \to x$.

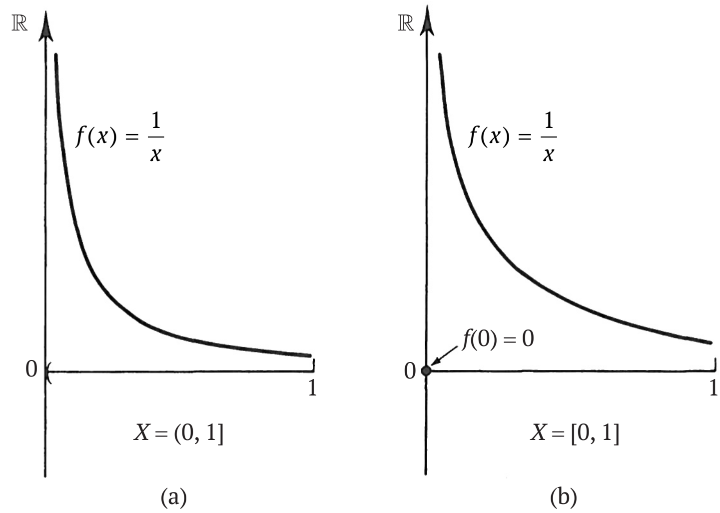


Рис. M.F.3. Необходимость непрерывности и компактности для достижения наибольшего значения.
(a) Функция непрерывная, заданная на не компактном множестве и не принимающая максимального значения.
(b) Разрывная функция, заданная на компакте, не принимающая максимального значения

(2) Если дополнительно известно, что компакт A также является *дискретным* множеством, т. е. все его точки являются изолированными (формально для любого $x \in A$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что $x' = x$ при $x' \in A$ и $\|x' - x\| < \varepsilon$), тогда A конечно.

M.G. Выпуклые множества и разделяющие гиперплоскости

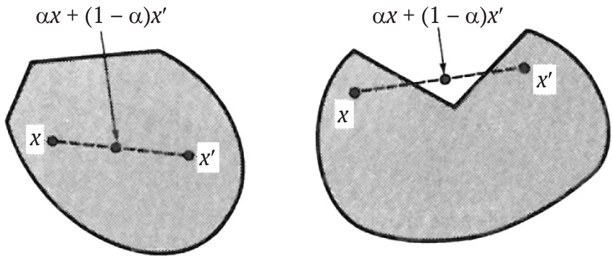
В этом разделе мы приведем основные свойства выпуклых множеств, включая важные теоремы о разделяющей гиперплоскости.

Определение M.G.1. Множество $A \subset \mathbb{R}^N$ называется *выпуклым,* если $\alpha x + (1 - \alpha)x' \in A$ при $x, x' \in A$ и $\alpha \in [0, 1]$[14].

Другими словами, множество A в $\mathbb{R}^N$ будет выпуклым, если кроме того, что оно содержит два вектора, x и x', оно также целиком содержит отрезок, их соединяющий. На рис. M.G.1(a) мы изобразили выпуклое множество. Множество на рис. M.G.1(b) не является выпуклым.

Заметим, что для выпуклой функции f: $A \to \mathbb{R}$ множество $\{(z, v) \in \mathbb{R}^{N+1}: v \le f(z), z \in A\}$ выпуклое. Заметим также, что пересечение любой совокупности выпуклых множеств выпукло, но объединение выпуклых множеств не обязано быть выпуклым.

[14] Множество $A \subset \mathbb{R}^N$ называется *строго выпуклым,* если $\alpha x + (1 - \alpha)x'$ является элементом *внутренности* A при $x, x' \in A$ и $\alpha \in (0, 1)$ (см. раздел M.F для определения внутренности множества).



(a) (b)

Рис. M.G.1. Выпуклое и невыпуклое множества.
(a) Выпуклое множество. (b) Невыпуклое множество

Определение M.G.2. Пусть множество $B \subset \mathbb{R}^N$; *выпуклой оболочкой* множества B, обозначаемой CoB, называется наименьшее выпуклое множество, содержащее B, т. е. пересечение всех выпуклых множеств, содержащих B.

На рис. M.G.2 изображены множество и его выпуклая оболочка. Нетрудно также проверить, что выпуклая оболочка может быть описана как множество всех возможных выпуклых комбинаций элементов B, т. е.

$$\mathrm{Co}B = \left\{ \sum_{j=1}^{J} \alpha_j x_j \quad \begin{matrix} \text{для некоторых } (x_1, \ \ldots, \ x_J) \text{ при } x_j \in B \text{ для всех } j, \\ \text{и некоторых } (\alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_J) \geq 0 \text{ при } \sum_{j=1}^{J} \alpha_j = 1. \end{matrix} \right\}$$

Определение M.G.3. Вектор $x \in B$, называется *угловой точкой* выпуклого множества $B \in \mathbb{R}^N$, если он не может быть представлен в виде $x = \alpha y +$ $+ (1 - \alpha)z$ для любых $y, z \in B$ и $\alpha \in (0, 1)$.

Угловые точки выпуклого множества, представленные на рис. M.G.3, являются четырьмя его вершинами. Важнейший результат теории выпуклых множеств содержится в теореме M.G.1.

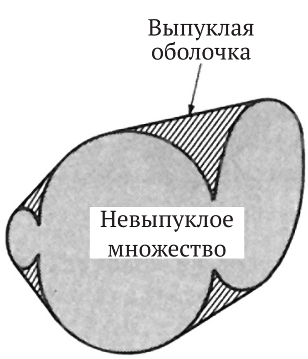


Рис. M.G.2. Невыпуклое множество и его выпуклая оболочка

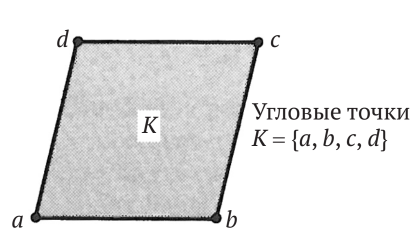


Рис. M.G.3. Угловые точки выпуклого множества

Теорема M.G.1. Предположим, что выпуклое множество $B \in \mathbb{R}^N$ является также компактом (т. е. замкнутым и ограниченным; см. раздел M.F). Тогда любая точка $x \in B$ может быть представлена в виде выпуклой комбинации самое большее $N + 1$ угловой точки множества B.

Доказательство. Доказательство теоремы слишком сложно технически, чтобы приводить его здесь. Просто заметим, что результат является верным для фигуры, изображенной на рис. M.G.3: любая точка принадлежит треугольнику, который может быть получен *какой-либо* комбинацией трех его вершин. ■

Приступим к изложению теорем о разделяющей гиперплоскости.

Определение M.G.4. Пусть вектор $p \in \mathbb{R}^N$, $p \neq 0$ и $c \in \mathbb{R}$, тогда *гиперплоскость, порожденная p и c,* — это множество $H_{p,c} = \{z \in \mathbb{R}^N: p \cdot z = c\}$. Множества $\{z \in \mathbb{R}^N: p \cdot z \geq c\}$ и $\{z \in \mathbb{R}^N: p \cdot z \leq c\}$ называются, соответственно, *полупространством над* гиперплоскостью $H_{p,c}$ и *полупространством под* гиперплоскостью $H_{p,c}$.

Гиперплоскости и полупространства являются выпуклыми множествами. Рис. M.G.4 предоставляет необходимые иллюстрации.

Теорема M.G.2 *(теорема о разделяющей гиперплоскости).* Пусть множество $B \subset \mathbb{R}^N$ выпуклое и замкнутое (см. раздел M.F, где обсуждаются замкнутые множества), и пусть $x \notin B$. Тогда найдутся $p \in \mathbb{R}^N$ с $p \neq 0$ и число $c \in \mathbb{R}$, такие что $p \cdot x > c$ и $p \cdot y < c$ для любого $y \in B$.

Более общий результат: пусть два выпуклых множества $A, B \subset \mathbb{R}^N$ не имеют общих точек (т. е. $A \cap B = \varnothing$). Тогда найдутся $p \in \mathbb{R}^N$, $p \neq 0$ и число $c \in \mathbb{R}$, такие что $p \cdot x \geq c$ для любого $x \in A$ и $p \cdot y \leq c$ для любого

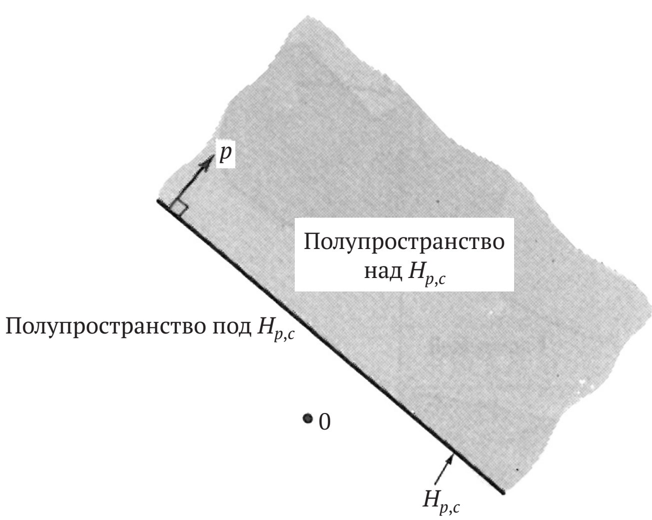


Рис. M.G.4. Гиперплоскости и полупространства

$y \in B$. Таким образом, существует гиперплоскость, разделяющая A и B, которая оставляет A и B по разные стороны от себя.

Доказательство. Мы обсудим только первую часть (т. е. разделение точки и замкнутого, выпуклого множества). На рис. M.G.5 мы изобразили замкнутое, выпуклое множество B и точку $x \notin B$. Мы также обозначили $y \in B$, точку из множества B, ближайшую к x[15]. *Если мы положим* $p = x - y$ и $c' = p \cdot y$, прежде всего мы можем увидеть, что $p \cdot x > c'$ (так как $p \cdot x - c' = p \cdot x - p \cdot y = (x - y) \cdot (x - y) = ||x - y^2|| > 0$) и, во-вторых, для любой $z \in B$ векторы p и $z - y$ не могут составлять острый угол, т. е. $p \cdot (z - y) = p \cdot z - c' \leq 0$. Наконец, пусть $c = c' + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, чтобы $p \cdot x > c' + \varepsilon = c$ выполнялось. ■

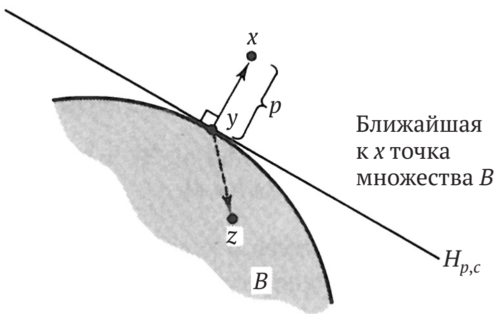


Рис. M.G.5. Теорема о разделяющей гиперплоскости

Теорема M.G.3 *(теорема об опорной гиперплоскости).* Пусть $B \subset \mathbb{R}^N$ — выпуклое множество, и пусть x не является элементом внутренности множества B (т. е. $x \notin \text{Int}B$; см. раздел M.F, в котором определено понятие внутренности множества). Тогда найдется такое $p \in \mathbb{R}^N$ с $p \neq 0$, что $p \cdot x \geq p \cdot y$ для любого $y \in B$.

Доказательство. Предположим, что $x \notin \text{Int}B$. Приведенное ниже доказательство может быть прослежено на рис. M.G.6. Интуитивно ясно, что мы можем найти последовательность $x^m \to x$, такую что при любом m x^m не является элементом замыкания множества B (т. е. $x^m \notin \text{Cl}\, B$; см. раздел M.F, в котором обсуждаются последовательности и замыкание множества). По теореме о разделяющей гиперплоскости (теорема M.G.2), для любого m найдутся такие $p^m \neq 0$ и $c^m \in \mathbb{R}$, что

$$p^m \cdot x^m > c^m \geq p^m \cdot y \qquad \text{(M.G.1)}$$

для любого $y \in B$. Без потери общности мы предположим, что $||p^m|| = 1$ для любого m. Таким образом, переходя к подпоследовательности, если потребуется (обратите внимание на обсуждение в конце раз-

[15] Мы используем привычную евклидову метрику. С тем чтобы гарантировать существование ближайшей точки в B, мы потребовали замкнутости B.

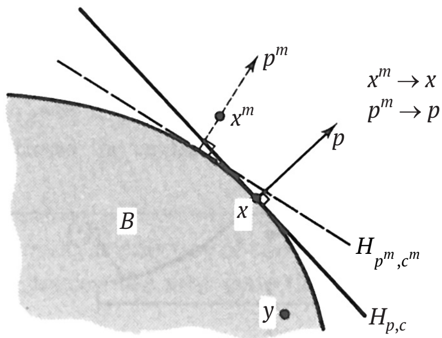


Рис. M.G.6. Теорема об опорной гиперплоскости

дела M.F), мы можем предположить, что найдутся $p \neq 0$ и $c \in \mathbb{R}$, такие что $p^m \to p$ и $c^m \to c$. Следовательно, переходя к пределу в (M.G.1), мы получим

$$p \cdot x \geq c \geq p \cdot y$$

для любого $y \in B$. ■

М.Н. Многозначные отображения

Довольно часто в экономике пользуются обобщением понятия функции, которое называется *многозначным отображением*.

Определение М.Н.1. Пусть задано множество $A \subset \mathbb{R}^N$; *многозначным отображением* называется правило f: $A \to \mathbb{R}^K$, которое ставит в соответствие множество $f(x) \subset \mathbb{R}^K$ любому $x \in A$.

Заметим, что если для любого $x \in A$ $f(x)$ состоит ровно из одного элемента, то $f(\cdot)$ можно рассматривать как функцию в привычном смысле. Заметим также, что определение распространяется и на случай $f(x) = \varnothing$, но обычно мы рассматриваем только отображения с $f(x) \neq \varnothing$ для любых $x \in A$. Наконец, если для некоторого множества $Y \subset \mathbb{R}^K$ выполнено $f(\mathrm{x}) \subset Y$ для любого $x \in A$, то мы обозначим такое отображение f: $A \to Y$.

Приступим к формулированию понятий непрерывности для отображений.

Пусть $A \subset \mathbb{R}^N$ и $Y \subset \mathbb{R}^K$; *графиком* отображения f: $A \to Y$ называется множество $\{(x, y) \in A \times Y\colon y \in f(x)\}$.

Определение М.Н.2. Пусть $A \subset \mathbb{R}^N$ и множество $Y \subset \mathbb{R}^K$ является замкнутым; будем говорить, что многозначное отображение f: $A \to Y$ имеет *замкнутый график*, если для любых двух последовательностей $x^m \to$ $\to x \in A$ и $y^m \to y$, где $x^m \in A$ и $y^m \in f(x^m)$ для любого m, выполнено $y \in f(x)$.

Заметим, что понятие замкнутого графика использует обычное определение замкнутости (по отношению к $A \times Y$), примененному к множеству $\{(x, y) \in A \times Y\colon y \in f(x)\}$ (см. раздел M.F).

Определение М.Н.3. Пусть $A \subset \mathbb{R}^N$ и множество $Y \subset \mathbb{R}^K$ является замкнутым; многозначное отображение f: $A \to Y$ называется *полунепрерывным сверху* (uhc), если его график замкнут и образы компактных множеств ограничены, т. е. для любого компакта $B \subset A$ множество $f(B) = \{y \in Y: y \in f(x)$ для некоторого $x \in B\}$ ограничено[16,17].

Во многих приложениях множество значений Y функции $f(\cdot)$ само является компактом. В этом случае свойство полунепрерывности сверху сводится к замкнутости графика. На рис. М.Н.1(a) мы показали пример отображения (на самом деле функции), у которой график замкнут, но она сама не является полунепрерывной сверху. Напротив, на рис. М.Н.1(b) изображено полунепрерывное сверху отображение.

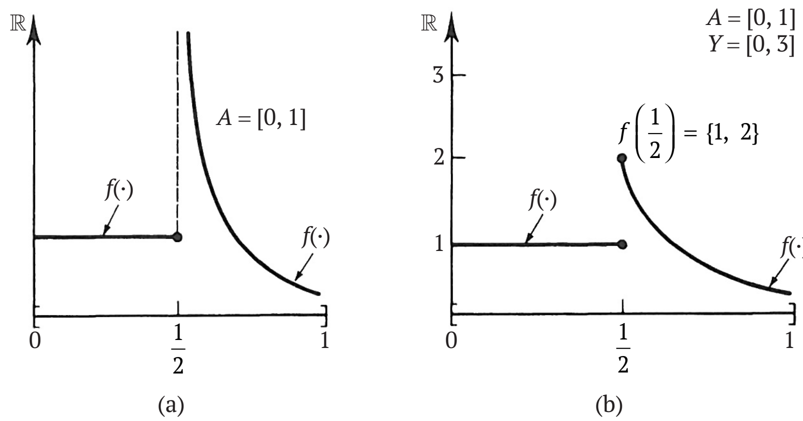


Рис. М.Н.1. Замкнутые графики и многозначные отображения, являющиеся полунепрерывными сверху. (a) Замкнутый график отображения, не являющегося полунепрерывным сверху. (b) Полунепрерывное сверху отображение

Можно считать, что свойство полунепрерывности сверху является естественным обобщением понятия непрерывности для функций. Этот факт содержит теорема М.Н.1.

Теорема М.Н.1. Пусть $A \subset \mathbb{R}^N$ и множество $Y \subset \mathbb{R}^K$ *замкнуто*. Предположим, что f: $A \to Y$ является однозначным отображением (т. е. в действительности функцией). Тогда $f(\cdot)$ является полунепрерывной сверху в том и только в том случае, если она непрерывна.

Доказательство. Если $f(\cdot)$ непрерывна как функция, то из определения М.F.2 следует, что ее график замкнут (по отношению к $A \times Y$). Кроме того, теорема М.F.2 говорит нам о том, что образы компактных множеств, отображае-

[16] См. раздел М.F, в котором обсуждаются ограниченные и компактные множества.

[17] Может быть проверено, что из определения М.Н.3 вытекает, что образом компакта при полунепрерывном сверху отображении является компакт (т. е. ограниченное, замкнутое множество), это свойство характерно для непрерывных функций (см. теорему М.F.2).

мые $f(\cdot)$, являются компактами и, следовательно, ограниченными. Таким образом, $f(\cdot)$ полунепрерывна как отображение.

Теперь предположим, что $f(\cdot)$ полунепрерывная сверху как отображение, и рассмотрим любую последовательность $x^m \to x \in A$ с $x^m \in A$ для любых m. Пусть $S = \{x^m\colon m = 1; 2; \ldots\} \cup \{x\}$. Тогда найдется такое $r > 0$, что $\|x'\| < r$ при $x' \in S$[18]. Из того, что S также замкнуто, следует, что S — компакт.

По определению М.Н.3, $f(S)$ ограничено, и также Cl $f(S)$ (по отношению к $\mathbb{R}^K$) является компактным множеством. Если, противореча непрерывности функции $f(\cdot)$, последовательность $\{f(x^m)\}$ (которая принадлежит компакту Cl $f(S)$), не стремится к $f(x)$, то по теореме M.F.3 мы можем выделить подпоследовательность $x^{m(k)} \to x$, такую что $f(x^{m(k)}) \to y$ для некоторого $y \in$ Cl $f(S)$ при $y \neq f(x)$. Но тогда график $f(\cdot)$ не может быть компактом, что противоречит полунепрерывности сверху $f(\cdot)$ как отображения. ■

Полунепрерывность сверху является только одним из двух обобщений понятия непрерывности для отображений. Сейчас мы сформулируем второе обобщение (в случае когда множество значений Y является компактом).

Определение М.Н.4. Пусть $A \subset \mathbb{R}^N$ и множество $Y \subset \mathbb{R}^K$ является замкнутым; многозначное отображение $f\colon A \to Y$ называется *полунепрерывным снизу* (lhc), если для любой последовательности $x^m \to x \in A$, с $x^m \in A$ для всех m, и для любого $y \in f(x)$ мы можем найти последовательность $y^m \to y$ и целое число M, такое что $y^m \in f(x^m)$ для $m > M$.

На рис. М.Н.2(a) изображено полунепрерывное снизу отображение[19]. Отметим, что отображение не является полунепрерывным сверху — его

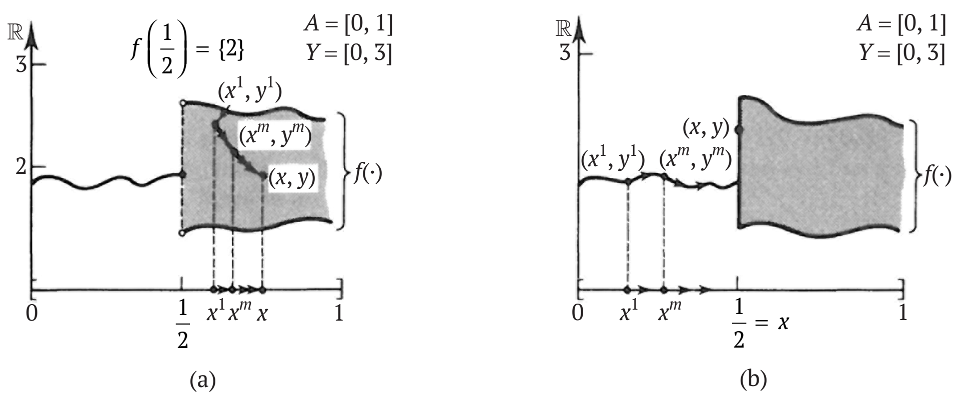


Рис. М.Н.2. Полунепрерывные сверху и снизу отображения.
(a) Полунепрерывное снизу отображение, не являющееся полунепрерывным сверху.
(b) Полунепрерывное сверху отображение, не являющееся полунепрерывным снизу

[18] Чтобы это увидеть, вспомним, что, если $x^m \to x$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется положительное число M_ε, такое что $\|x^m - x\| < \varepsilon$ для любых $m > M_\varepsilon$. Отсюда для любого $r > \max\{\|x^1\|, \ldots, \|x^M\|, \|x\| + \varepsilon\}$ у нас будет выполнено $x' < r$, если $x' \in S$.

[19] Чтобы увеличить запас примеров, заметим, что любое отображение $f\colon A \to Y$ с открытым графиком (по отношению к $A \times Y$) является полунепрерывным снизу.

график не замкнут. Аналогично отображение, запечатленное на М.Н.2(b), является полунепрерывным сверху, но не является полунепрерывным снизу (обратите внимание на изображенную последовательность $x^m \to x$, которая приближается к x снизу, и точку $y \in f(x)$). Грубо говоря, полунепрерывность сверху совместима лишь с «разрывами», которые выглядят как «направленные вовне взрывы» (как на рис. М.Н.2(b) в точке $x = \frac{1}{2}$), в то время как полунепрерывность снизу совместима лишь с «направленными во внутрь взрывами» (как на рис. М.Н.2(a) в точке $x = \frac{1}{2}$).

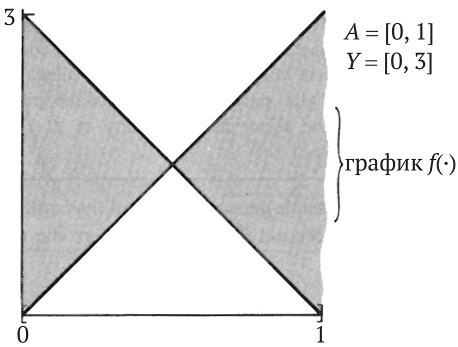


Рис. М.Н.3. Непрерывное отображение

Так же как и для полунепрерывных сверху отображений, если $f(\cdot)$ является функцией, то понятия полунепрерывности снизу для отображений и непрерывности для функций совпадают.

Наконец, если отображение одновременно является полунепрерывным сверху и снизу, то мы будем говорить, что оно *непрерывное*. Пример такого отображения приведен на рис. М.Н.3.

М.I. Теоремы о неподвижной точке

В экономике наиболее часто применяемой техникой для доказательства теорем существования решения систем, определяющих равновесие, является следующая. Ищется *неподвижная точка* надлежащим образом определенной функции или отображения $f: A \to A$ из некоторого множества $A \subset \mathbb{R}^N$ в себя. Вектор $x \in A$ называется фиксированной точкой функции $f(\cdot)$, если $x = f(x)$ (или, в случае отображения, $x \in f(x)$). То есть вектор отображается в себя, и тем самым он остается «неподвижным». Почему выбраны именно эти теоремы, объясняется тем, что они хорошо известны, и доказательства существования равновесия в экономике иногда специально «подгоняют», с тем чтобы теоремы о неподвижной точке можно было применить.

Наиболее известный и фундаментальный результат содержится в виде теоремы М.I.1.

Теорема М.I.1 *(теорема Брауэра о неподвижной точке).* Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^N$ непустое, компактное и выпуклое и $f: A \to A$ — непрерывная функция, отображающая множество A в себя. Тогда f имеет неподвижную точку, т. е. найдется такой $x \in A$, что $x = f(x)$.

Логика теоремы Брауэра продемонстрирована на рис. М.I.1(а) в простом случае, когда $N = 1$ и $A = [0; 1]$. В этом случае теорема утверждает, что

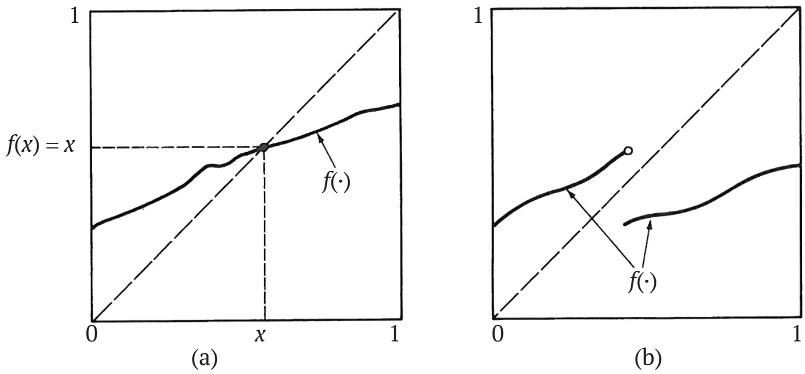


Рис. M.I.1. Теорема Брауэра о неподвижной точке.
(a) Непрерывная функция, отображающая [0, 1] в [0, 1], имеет фиксированную точку. (b) От требования непрерывности отказаться нельзя

график любой непрерывной функции, определенной на отрезке [0, 1], со значениями в этом отрезке должен пересечь диагональ квадрата, и в этом случае теорема Брауэра является простым следствием *теоремы о промежуточных значениях*. В частности, если мы определим непрерывную функцию $\phi(x) = f(x) - x$, то $\phi(0) \geq 0$ и $\phi(1) \leq 0$, так что $\phi(x) = 0$ для некоторого $x \in [0, 1]$; отсюда $f(x) = x$ для некоторого $x \in [0, 1]$. На рис. M.I.1(b) мы можем увидеть, что конечно же непрерывность функции $f(\cdot)$ необходима. Что же касается выпуклости области, рассмотрим функцию, определяемую поворотом на 90° по часовой стрелке вдоль окружности $S = \{x \in \mathbb{R}^2\colon \|x\| = 1\}$: получим непрерывную функцию без неподвижной точки. Множество S, однако, не является выпуклым.

В приложениях зачастую более полезным является расширение теоремы Брауэра о неподвижной точке на случай отображений.

Теорема M.I.2 *(теорема Какутани о неподвижной точке).* Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^N$ непустое, компактное и выпуклое и $f\colon A \to A$ — полунепрерывное сверху отображение из A в себя, обладающее свойством, что множество $f(x) \subset A$ непустое и выпуклое для любого $x \in A$. Тогда $f(\cdot)$ имеет неподвижную точку; т. е. найдется такой $x \in A$, что $x \in f(x)$.

Наконец, упомянем о теореме, выглядящей иначе. Логика теоремы Какутани о неподвижной точке проиллюстрирована на рис. M.I.2(a) для $N = 1$. Заметим, что от выпуклости множества $f(x)$ отказаться нельзя. Без выполнения этого условия у нас могут появиться случаи, изображенные на рис. M.I.2(b), когда неподвижная точка не существует, которая все чаще применяется для экономических приложений.

Теорема M.I.3 *(теорема Тарского о неподвижной точке).* Предположим, что $f\colon [0, 1]^N \to [0, 1]^N$ является неубывающей функцией, т. е. $f(x') \geq f(x)$ при $x' \geq x$. Тогда $f(\cdot)$ имеет неподвижную точку, т. е. найдется $x \in A$, такая, что $x = f(x)$.

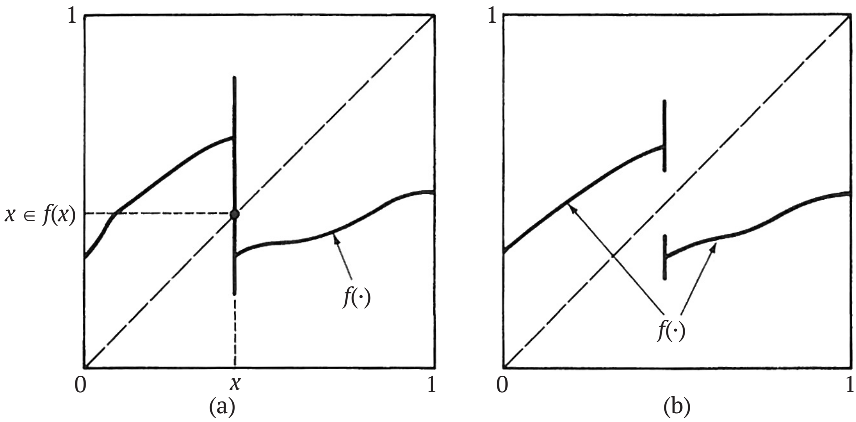


Рис. M.I.2. Теорема Какутани о неподвижной точке.
(a) Неподвижная точка существует. (b) От предположения выпуклости множества значений отказаться невозможно

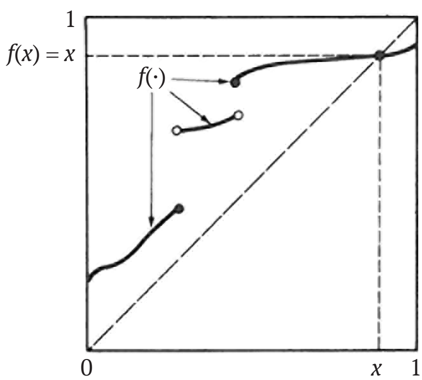


Рис. M.I.3. Теорема Тарского о неподвижной точке

Теорема Тарского отличается от теоремы Какутани в трех отношениях. Во-первых, основное множество не является произвольным непустым, выпуклым компактом, а скорее множеством специального типа — N-мерным произведением интервалов. Во-вторых, от функции требуется, чтобы она не убывала. В-третьих, функция не обязана быть непрерывной. Логика теоремы Тарского о неподвижной точке проиллюстрирована на рис. M.I.3 в случае $N = 1$. На рисунке функция $f(\cdot)$ не является непрерывной. Но тем не менее свойство неубывания заставляет ее график пересечь диагональ.

M.J. Безусловная оптимизация

В этом разделе мы рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.

Определение M.J.1. Вектор $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ называется точкой *локального максимума* $f(\cdot)$, если найдется открытая окрестность $\bar{x}$, $A \in \mathbb{R}^N$, такая что $f(\bar{x}) \geq f(x)$ для любого $x \in A$[20]. *Если* $f(\bar{x}) \geq f(x)$ *для любого* $x \in \mathbb{R}^N$ (т. е. мы можем взять $A = \mathbb{R}^N$), то тогда мы будем говорить, что $\bar{x}$ является точкой *глобального максимума* $f(\cdot)$ (или просто *максимайзером*). Понятия *локальной* и *глобальной* точек *минимума* определяются аналогично.

[20] Открытая окрестность $\bar{x}$ является открытым множеством, содержащим $\bar{x}$.

На рис. M.J.1 мы проиллюстрировали точки локального максимума $\bar{x}$ и локального минимума $\underline{x}$ (с открытыми окрестностями A и A' соответственно) для функции в случае $N = 1$.

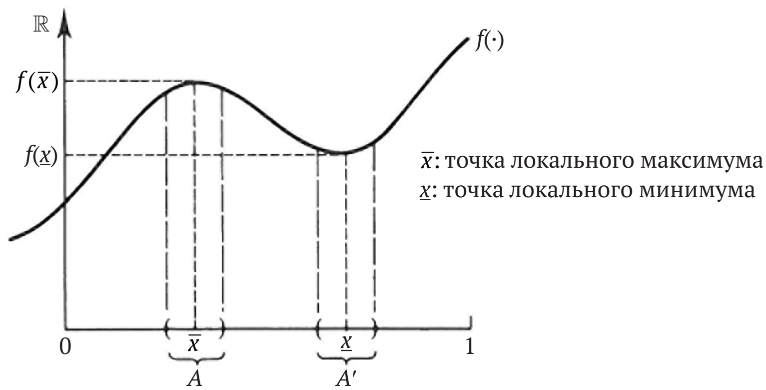


Рис. M.J.1. Локальные максимумы и минимумы

Теорема M.J.1. Пусть функция $f(\cdot)$ дифференцируемая и точка $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ является точкой локального максимума или минимума $f(\cdot)$. Тогда

$$\frac{\partial f\left(\bar{x}\right)}{\partial x_n} = 0 \text{ для любого } n \tag{M.J.1}$$

или, более точно,

$$\nabla f\left(\bar{x}\right) = 0. \tag{M.J.2}$$

Доказательство. Предположим, что $\bar{x}$ является точкой локального максимума или минимума $f(\cdot)$, но $df(\bar{x})/\partial x_n = a > 0$ (можно аналогично рассмотреть $a < 0$). Обозначим $e^n \in \mathbb{R}^n$ вектор, n-я координата которого равна 1, а все остальные координаты равны 0 (т. е. имеем $e_n^n = 1$ и $e_h^n = 0$ при $h \neq n$). По определению (частной) производной это означает, что найдется такое $\varepsilon > 0$, сколь угодно малое, что $\left[f(\bar{x} + \varepsilon e^n) - f(\bar{x})\right]/\varepsilon > a/2 > 0$ и $\left[f(\bar{x} - \varepsilon e^n) - f(\bar{x})\right]/\varepsilon < -a/2$. Таким образом, $f(\bar{x} - \varepsilon e^n) < f(\bar{x}) < f(\bar{x} + \varepsilon e^n)$. Другими словами, функция $f(\cdot)$ локально возрастает около точки $\bar{x}$ в направлении n-й координатной оси. Но тогда $\bar{x}$ не может быть ни локальным максимумом, ни локальным минимумом $f(\cdot)$. Противоречие. ■

Вывод теоремы M.J.1 может быть виден на рис. M.J.1: у нас $\partial f(\bar{x})/\partial x = 0$ и $\partial f(\underline{x})/\partial x = 0$.

Вектор $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$, для которого $\nabla f\left(\bar{x}\right) = 0$, называется *критической точкой*. Согласно теореме M.J.1, любая точка локального минимума или максимума должна быть критической. Обратное, однако, неверно. Рассмотрим, например, функцию $f(x_1, x_2) = (x_1)^2 - (x_2)^2$, определенную на $\mathbb{R}^2$.

В начале координат выполнено $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$. Таким образом, начало координат является критической точкой, но эта точка не является ни локальным максимумом, ни локальным минимумом этой функции. Чтобы охарактеризовать локальные максимумы и локальные минимумы более полным образом, мы должны учесть условия второго порядка.

Теорема M.J.2. Пусть функция $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируемая и $\nabla f(\bar{x}) = 0$.

(1) Если $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ является точкой локального максимума, то (симметричная) матрица $D^2 f(\bar{x})$ размера $N \times N$ отрицательно полуопределена.

(2) Если $D^2 f(\bar{x})$ отрицательно определена, то $\bar{x}$ является точкой локального максимума.

Заменяя слово «отрицательный» на «положительный», мы получим аналогичное утверждение для локального минимума.

Доказательство. Идея доказательства состоит в следующем. Для произвольного вектора сдвига $z \in \mathbb{R}^N$ и числа ε разложение по формуле Тейлора функции $\phi(\varepsilon) = f(\bar{x} + \varepsilon z)$ в окрестности $\varepsilon = 0$ дает

$$f(\bar{x} + \varepsilon z) - f(\bar{x}) = \varepsilon \nabla f(\bar{x}) \cdot z + \frac{1}{2}\varepsilon^2 z \cdot D^2 f(\bar{x}) z + \quad \text{остаток} \quad =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon^2 z \cdot D^2 f(\bar{x}) z + \text{остаток},$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ мало и произведение остатка на $\frac{1}{\varepsilon^2}$ достаточно мало, если ε мало. Если $\bar{x}$ — точка локального максимума, то для малого ε у нас должно быть $(1/\varepsilon^2)\left[f(\bar{x} + \varepsilon z) - f(\bar{x})\right] \le 0$, следовательно, переходя к пределу, мы получаем

$$z \cdot D^2 f(\bar{x}) z \le 0.$$

Аналогично если $z \cdot D^2 f(\bar{x}) z < 0$ для любого $z \ne 0$, то $f(\bar{x} + \varepsilon z) < f(\bar{x})$ для малого $\varepsilon > 0$, откуда следует, что $\bar{x}$ — точка локального максимума.

В пограничном случае, когда $D^2 f(\bar{x})$ отрицательно полуопределенная, но не является отрицательно определенной, мы не можем гарантировать, что $\bar{x}$ будет точкой локального максимума. Рассмотрим, например, функцию $f(x) = x^3$, чьей областью определения является $\mathbb{R}$. Тогда $D^2 f(0)$ отрицательно полуопределен, так как $d^2 f(0)/dx = 0$, но точка $\bar{x} = 0$ не является точкой ни локального максимума, ни локального минимума.

Наконец, когда точка локального максимума $\bar{x}$ функции $f(\cdot)$ (или, в более общем случае, критическая точка) автоматически будет являться точкой глобального максимума? Теорема M.J.3 говорит нам о том, что вогнутость целевой функции $f(\cdot)$ будет достаточной для этого.

Теорема М.J.3. Всякая критическая точка $\bar{x}$ вогнутой функции $f(\cdot)$ (т. е. любая точка $\bar{x}$, удовлетворяющая $\nabla f(\bar{x}) = 0$), будет являться точкой глобального максимума $f(\cdot)$.

Доказательство. Вспомним теорему М.С.1, в которой вогнутая функция удовлетворяла неравенству $f(x) \leq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})$ для любого x из области определения функции. Так как $\nabla f(\bar{x}) = 0$, то получаем, что $\bar{x}$ — точка глобального максимума.

Рассуждая аналогично, получаем, что критическая точка *выпуклой* функции $f(\cdot)$ является точкой глобального минимума $f(\cdot)$[21].

М.К. Условная оптимизация

Мы приступаем к рассмотрению проблемы максимизации функции $f(\cdot)$ при M ограничений в виде равенств, а именно мы изучим задачу

$$\begin{aligned} &\max_{x \in \mathbb{R}^N} f(x), \\ &\text{что} \qquad g_1(x) = \bar{b}_1 \\ &\qquad\qquad\quad \vdots \\ &\qquad\qquad g_M(x) = \bar{b}_M, \end{aligned} \tag{М.К.1}$$

где функции $f(\cdot)$, $g_1(\cdot)$, ..., $g_M(\cdot)$ определены на $\mathbb{R}^N$ (или, в более общем случае, на открытом множестве $A \subset \mathbb{R}^N$). Предположим также, что $N \geq M$; если же $M \geq N$, то в общем случае не найдется точек, удовлетворяющих системе уравнений.

Множество всех $x \in \mathbb{R}^N$, удовлетворяющих уравнениям задачи (М.К.1), обозначим

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : g_m(x) = \bar{b}_m \qquad \text{для } m = 1, \ \ldots, \ M \right\}$$

и назовем *допустимым множеством*. Определения точек *локального условного* или *глобального условного максимума* почти дословно совпадают с тем, что дано в определении М.J.1, с тем лишь отличием, что теперь мы рассматриваем только точки x, принадлежащие допустимому множеству C. Допустимая точка $\bar{x} \in C$ называется точкой *локального условного максимума* в задаче (М.К.1), если найдется открытая окрестность точки $\bar{x}$, скажем $A \subset \mathbb{R}^N$, такая что $f(\bar{x}) \geq f(x)$ при любых $x \in A \cap C$, т. е. $\bar{x}$ является решением задачи (М.К.1) при замене условия $x \in \mathbb{R}^N$ на условие $x \in A$. Точка $\bar{x}$ называется точкой *глобального условного максимума,* если она является решением задачи (М.К.1), т. е. $f(\bar{x}) \geq f(x)$ для всех $x \in C$.

Наш первый результат (теорема М.К.1) дает условия первого порядка для решения задач условной максимизации.

[21] В действительности этот факт следует непосредственно из теоремы М.J.3, в силу того что $\bar{x}$ будет глобальным минимайзером $f(\cdot)$ в том и только в том случае, если она является глобальным максимайзером $-f(\cdot)$, и $-f(\cdot)$ вогнута в том и только в том случае, если $f(\cdot)$ выпукла.

Теорема М.К.1. Пусть целевая функция и функции ограничений задачи (М.К.1) дифференцируемы и $\bar{x} \in C$ является точкой локального условного максимума. Предположим также, что матрица размера $M \times N$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1(\bar{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1(\bar{x})}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_M(\bar{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_M(\bar{x})}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

имеет ранг M. (Это называется *условием регулярности ограничений:* это условие говорит о том, что ограничения независимы в точке $\bar{x}$.) Тогда найдутся такие числа $\lambda_m \in \mathbb{R}$, по одному на каждое из ограничений, что

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n} = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \frac{\partial g_m(\bar{x})}{\partial x_n} \text{ для всех } n = 1, \ldots, N, \qquad \text{(М.К.2)}$$

или, используя более краткое обозначение [полагая $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_M)$],

$$\nabla f(\bar{x}) = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \nabla g_m(\bar{x}). \qquad \text{(М.К.3)}$$

Числа λ_m называются *множителями Лагранжа.*

Доказательство. Роль условий регулярности ограничений состоит в том, чтобы быть уверенным, что $\bar{x}$ также является локальным максимайзером в линеаризованной задаче

$$\begin{aligned} &\max_{x \in \mathbb{R}^N} f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}), \\ &\text{что} \qquad \nabla g_1(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) = 0 \\ &\qquad\qquad\qquad \vdots \\ &\qquad\qquad \nabla g_M(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) = 0, \end{aligned}$$

в которой целевая функция и функции ограничений были линеаризованы в окрестности точки $\bar{x}$. Таким образом, условие регулярности ограничений гарантирует правильность следующего интуитивно разумного утверждения: если $\bar{x}$ — точка локального условного максимума, то для любого вектора сдвига $z \in \mathbb{R}^N$, не имеющего эффекта первого порядка на ограничения, т. е. удовлетворяющего соотношениям $\nabla g_m(\bar{x}) \cdot z = 0$ для всех m, этот сдвиг также не будет иметь эффекты первого порядка на целевую функцию, т. е. мы должны получить $\nabla f(\bar{x}) \cdot z = 0$ (посмотрите также на обсуждение после этого доказательства и на рис. М.К.1). С этого момента мы полагаем, что это условие выполнено.

В остальном мы опираемся на линейную алгебру. Пусть $\boldsymbol{E}$ будет матрицей размера $(M + 1) \times N$, у которой в первой строке стоит $\nabla f(\bar{x})^T$, а в последних M строках расположены векторы $\nabla g_1(\bar{x})^T, \ \ldots, \ \nabla g_M(\bar{x})^T$. Ввиду выполнения условия регулярности ограничений, о котором выше шла речь, мы имеем

$$\left\{z \in \mathbb{R}^N : \nabla g_m(\bar{x}) \cdot z = 0 \text{ для всех } m\right\} = \left\{z \in \mathbb{R}^N : \boldsymbol{E} z = 0\right\}.$$

Отсюда получаем, что оба линейных пространства имеют одинаковую размерность M. Поэтому, используя основной результат линейной алгебры ранг $\boldsymbol{E} = M$. Поэтому $\nabla f(\bar{x})$ должен быть линейной комбинацией линейно независимых градиентов $\nabla g_1(\bar{x}), \ \ldots, \ \nabla g_M(\bar{x})$. Это ровно то, что записано в виде условия (М.К.3). ■

Другими словами, теорема М.К.1 утверждает, что в точке $\bar{x}$, являющейся точкой локального условного максимума, градиент целевой функции является линейной комбинацией градиентов функций ограничений. То, что от условия регулярности ограничений невозможно отказаться, показывает рис. М.К.1. На этом рисунке мы хотели бы промаксимизировать линейную функцию $f(x_1, \ x_2)$ на допустимом множестве $C = \left\{(x_1, \ x_2) \in \mathbb{R}^2 : g_m(x_1, \ x_2) = \bar{b}_m \text{ для } m = 1, \ 2\right\}$ [на рисунке показаны множества точек, удовлетворяющие уравнениям $g_1(x_1, \ x_2) = \bar{b}_1$ и $g_2(x_1, \ x_2) = \bar{b}_2$, а также линии уровня функции $f(\cdot)$]. В то время как $\bar{x}$ является точкой глобального условного максимума (она является единственным вектором в допустимом множестве!), мы видим, что $\nabla f(\bar{x})$ *невозможно* представить в виде линейной комбинации векторов $\nabla g_1(\bar{x})$ и $\nabla g_2(\bar{x})$. Заметим, однако, что $\nabla g_1(\bar{x}) = -\nabla g_2(\bar{x})$, так что регулярность ограничений нарушена. Заметим, что конечно же $\bar{x}$ *не* является локальным максимайзером

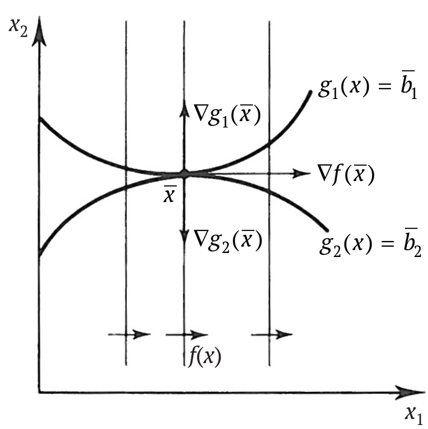


Рис. М.К.1. Незаменимость регулярности

$f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})$ [$= f(x)$ в силу линейности $f(\cdot)$] на линеаризованном допустимом множестве

$$C' = \left\{(x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2 : \nabla g_m(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) = 0 \quad \text{при} \quad m = 1,\ 2\right\}.$$

Часто условия первого порядка (M.K.2) и (M.K.3) представляют несколько иначе. Пусть даны переменные $x = (x_1, \ldots, x_N)$ и $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$. Тогда мы можем ввести *функцию Лагранжа*

$$\mathscr{L}(x,\ \lambda) = f(x) - \sum_m \lambda_m g_m(x).$$

Заметим, что условия (M.K.2) (или (M.K.3)) являются условиями первого порядка для (безусловного) максимума для функции по переменным $x = (x_1, \ldots, x_N)$. Аналогично ограничения $g(x) = 0$ являются условиями первого порядка для функции $\mathscr{L}(\cdot;\ \cdot)$ по переменным $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_M)$. Если подытожить, то теорема M.K.1 говорит о том, что если $\bar{x}$ является точкой локального условного максимума (и если квалификация ограничений выполнена), то для некоторых значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_M$ все частные первые производные функции Лагранжа равны нулю, т. е. $\partial\mathscr{L}(\bar{x},\ \lambda)/\partial x_n = 0$ для $n = 1, \ldots, N$ и $\partial\mathscr{L}(\bar{x},\ \lambda)/\partial\lambda_m = 0$ для $m = 1, \ldots, M$.

Из теоремы M.K.1 следует, что если $\bar{x}$ является локальным максимайзером в задаче (M.K.1), то $N + M$ переменных $\left(\bar{x}_1,\ \ldots,\ \bar{x}_N,\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_M\right)$ являются решениями $N + M$ уравнений, заданных условием (M.K.2) и $g_m(\bar{x}) = \bar{b}_m$, для $m = 1, \ldots, M$.

Есть также условия второго порядка, связанные с задачей (M.K.1). Предположим, что в точке $\bar{x}$ регулярность выполнена и нашлись множители Лагранжа, удовлетворяющие (M.K.3). Если $\bar{x}$ является локальным максимайзером, то

$$D_x^2\mathscr{L}(\bar{x},\ \lambda) = D^2 f(\bar{x}) - \sum_m \lambda_m \nabla g_m(\bar{x})$$

отрицательно полуопределенная на подпространстве $\left\{z \in \mathbb{R}^N : \nabla g_m(\bar{x}) \cdot z = \right.$ $\left. = 0 \text{ для любых } m\right\}$. Вдоль других направлений вектор $\bar{x}$ допустим (т. е. $\bar{x} \in C$) и удовлетворяет условиям первого порядка (M.K.2), и если $D_x^2\mathscr{L}\left(\bar{x}, \lambda\right)$ отрицательно определенная на подпространстве $\left\{z \in \mathbb{R}^N : \nabla g_m(\bar{x}) \cdot z = \right.$ $\left. = 0 \text{ при любых } m\right\}$, тогда $\bar{x}$ будет точкой локального максимума, Эти условия можно проверить, опираясь на тесты, приведенные в теореме M.D.3.

Наконец, заметим, что локальный условный минимайзер функции $f(\cdot)$ является локальным условным максимайзером функции $-f(\cdot)$, и поэтому теорема M.K.1 и наше проведенное выше обсуждение условий второго порядка с таким же успехом могут быть применены для описания локальных условных минимайзеров.

Ограничения в виде неравенств

Теперь мы обобщим результаты нашего анализа на задачи, которые могут содержать ограничения в виде неравенств. Основной задачей теперь становится

$$\begin{aligned} &\max_{x \in \mathbb{R}^N} f(x), \\ \text{что} \quad &g_1(x) = \bar{b}_1 \\ &\vdots \\ &g_M(x) = \bar{b}_M, \\ &h_1(x) \le \bar{c}_1 \\ &\vdots \\ &h_K(x) \le \bar{c}_K, \end{aligned} \tag{М.К.4}$$

где каждая функция определена на $\mathbb{R}^N$ (или открытом множестве $A \subset \mathbb{R}^N$). Мы предположим, что $N \geq M + K$. Конечно, всегда может быть так, что $M = 0$ (нет ограничений в виде равенств) или $K = 0$ (нет ограничений в виде неравенств).

Будем снова обозначать допустимое множество как $C \subset \mathbb{R}^N$, а понятие точки локального условного максимума или минимума мы без изменений сохраним из предыдущего.

Теперь мы будем говорить, что условие регулярности ограничений выполнено в точке $\bar{x} \in C$, если ограничения, *реализуемые в точке* $\bar{x}$ *как равенства*, независимы, т. е. если векторы из совокупности $\{\nabla g_m(\bar{x}) : m = 1, \dots, M\} \cup \{\nabla h_k(\bar{x}) : h_k(\bar{x}) = \bar{c}_k\}$ линейно независимы.

Теорема М.К.2 обеспечивает условия первого порядка для этой задачи. Все функции, фигурирующие в формулировке этой теоремы, предполагаются дифференцируемыми.

Теорема М.К.2 (*условия Куна — Таккера*). Пусть $\bar{x} \in C$ является точкой локального максимума в задаче (М.К.4). Также допустим, что условия регулярности ограничений выполнены. Тогда найдутся множители $\lambda_m \in \mathbb{R}$, по одному на каждое ограничение в виде равенства, *и* $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$, по одному на каждое ограничение в виде неравенства, такие что[22]:

(1) для любого $n = 1, \dots, N$

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n} = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \frac{\partial g_m(\bar{x})}{\partial x_n} + \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \frac{\partial h_k(\bar{x})}{\partial x_n}, \tag{М.К.5}$$

или, используя краткое обозначение,

$$\nabla f(\bar{x}) = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \nabla g_m(\bar{x}) + \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \nabla h_k(\bar{x}); \tag{М.К.6}$$

[22] По договоренности если ограничений нет (т. е. если $M = K = 0$), то правая часть выражения (М.К.5) равняется нулю.

(2) для любого $k = 1, \ldots, K$

$$\lambda_k \left(h_k(\bar{x}) - \bar{c}_k \right) = 0, \tag{М.К.7}$$

т. е. $\lambda_k = 0$ для любого ограничения k, не выполненного как равенство.

Доказательство. Мы проиллюстрируем доказательство этого результата в случае, когда имеются лишь ограничения в виде неравенств (т. е. $M = 0$).

Как и в случае ограничений в виде равенств, роль условия регулярности ограничений состоит в обеспечении того, чтобы $\bar{x}$ *оставался локальным максимайзером* задачи при линеаризации в окрестности $\bar{x}$. Более точно, с этого момента мы предполагаем, что следующее имеет место: любое направление сдвига $z \in \mathbb{R}^N$, удовлетворяющее ограничениям в первом приближении (т. е. такие z, что $\nabla h_k(\bar{x}) \cdot z \le 0$ для любых k, для которых выполнено $h_k(\bar{x}) = \bar{c}_k$), не должны приводить к росту целевой функции в первом приближении, таким образом, должно быть выполнено $\nabla f(\bar{x}) \cdot z \le 0$.

На рис. М.К.2 изображена задача с двумя переменными и двумя ограничениями, для которых результат может быть проиллюстрирован и справедлив. Теорема Куна — Таккера говорит нам о том, что если $\bar{x}$ — локальный максимайзер, то вектор $\nabla f(\bar{x})$ должен принадлежать конусу

$$\Gamma = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : y = \lambda_1 \nabla h_1(\bar{x}) + \lambda_2 \nabla h_2(\bar{x}) \text{ для некоторых } (\lambda_1, \lambda_2) \ge 0 \right\},$$

изображенный на рисунке, т. е. $\nabla f\left(\bar{x}\right)$ должен представляться неотрицательной линейной комбинацией векторов $\nabla h_1(\bar{x})$ и $\nabla h_2(\bar{x})$. Предположим теперь, что $\bar{x}$ является локальным максимайзером. Если,

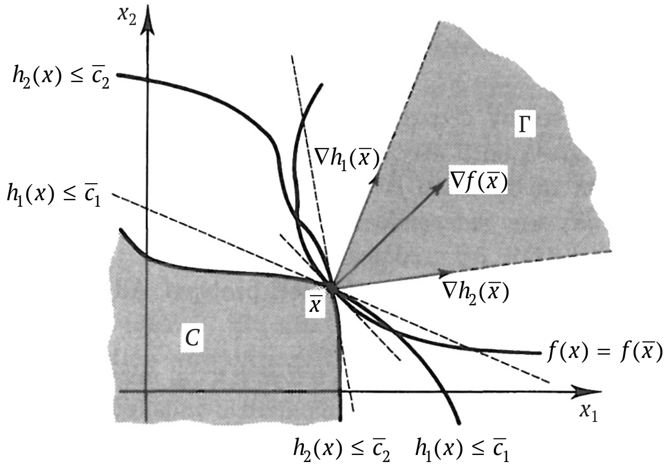


Рис. М.К.2. Необходимость условий Куна — Таккера начиная с $\bar{x}$, мы движемся вдоль границы допустимого множества до любой точки $\left(\bar{x}_1 + z_1,\ \bar{x}_2 + z_2\right)$ с $z_1 < 0$ и $z_2 > 0$, то в ситуации, которая изображена на рисунке, мы бы получили

$$h_1\left(\bar{x}_1 + z_1,\ \bar{x}_2 + z_2\right) = \bar{c}_1, \quad h_2\left(\bar{x}_1 + z_1,\ \bar{x}_2 + z_2\right) < \bar{c}_2,$$

и $f\left(\bar{x}_1 + z_1,\ \bar{x}_2 + z_2\right) \leq f(\bar{x})$. Переходя к пределу, мы заключаем, что в направлении z, таком что $\nabla h_1(\bar{x}) \cdot z = 0$ и $\nabla h_2(\bar{x}) \cdot z < 0$, выполнено $\nabla f(\bar{x}) \cdot z \leq 0$. Геометрически это означает, что вектор $\nabla f(\bar{x})$ должен лежать ниже вектора $\nabla h_1(\bar{x})$, как показано на рисунке. Рассуждая аналогично (при движении вдоль границы допустимого множества C в противоположном направлении), мы придем к выводу, что если $\bar{x}$ — локальный максимайзер, то вектор $\nabla f(\bar{x})$ должен лежать выше вектора $\nabla h_2(\bar{x})$. Отсюда получаем, что вектор $\nabla f(\bar{x})$ должен лежать в конусе Г. Это именно то, что условия Куна — Таккера требуют в этом случае.

Интуиция, которая помогла нам только что, может быть распространена на общий случай. Предположим, что все ограничения являются активными в $\bar{x}$ (если ограничение с номером k неактивное, то полагаем $\lambda_k = 0$ и вычеркиваем его из списка). Мы должны показать, что $\nabla f(\bar{x})$ принадлежит выпуклому конусу

$$\Gamma = \left\{ y \in \mathbb{R}^N : y = \sum_k \lambda_k \nabla h_k(\bar{x}) \text{ для некоторых } \left(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_k\right) \geq 0 \right\} \subset \mathbb{R}^N.$$

Предположим на мгновение, что это не так, т. е. что $\nabla f\left(\bar{x}\right) \notin \Gamma$. Тогда, по теореме о разделяющей гиперплоскости (теорема M.G.2), существует ненулевой вектор $z \in \mathbb{R}^N$ и число $\beta \in \mathbb{R}$, такие что $\nabla f(\bar{x}) \cdot z > \beta$ и $y \cdot z < \beta$ для любого $y \in \Gamma$. В силу того что $0 \in \Gamma$, должно быть выполнено $\beta > 0$. Следовательно, $\nabla f(\bar{x}) \cdot z > 0$. Также для любого $y \in \Gamma$ выполняется $\theta y \in \Gamma$ для всех $\theta \geq 0$. Но тогда должно выполняться $\theta y \cdot z < \beta$ для всех θ (сколь угодно больших), только если $y \cdot z \leq 0$. Отсюда мы заключаем, что $\nabla f(\bar{x}) \cdot z > 0$ и $\nabla h_k(\bar{x}) \cdot z \leq 0$ для всех k, что противоречит условию регулярности ограничений в линеаризованном варианте. ■

Часто бывает, что в приложениях ограничение принимает форму неотрицательности какой-либо переменной; например x_n, т. е. $x_n \geq 0$. В этом случае подходящие условия первого порядка требуют очень малой модификации по сравнению с тем, что было сделано раньше. В частности, нам нужно всего лишь изменить условия первого порядка по x_n, чтобы получить

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n} \leq \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \frac{\partial g_m(\bar{x})}{\partial x_n} + \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \frac{\partial h_m(\bar{x})}{\partial x_n}, \text{ где равенство} \quad \text{(M.K.8)}$$

выполняется при $\bar{x}_n > 0$.

Чтобы увидеть, почему это так, предположим, что мы явным образом ввели это условие неотрицательности в виде нашего $(K+1)$-го ограничения-неравенства (т. е. $h_{K+1}(x) = -x_n \leq 0$), и пусть $\lambda_{K+1} \geq 0$ будет соответствующим множителем Лагранжа. Заметим, что $\lambda_{K+1}\left(\partial h_{K+1}(\bar{x})/\partial x_n\right) = -\lambda_{K+1}$ и $\partial h_{K+1}(\bar{x})/\partial x_{n'} = 0$ для $n' \neq n$. Таким образом, если мы применим условие (М.К.5) теоремы М.К.2, то единственная модификация условий первого порядка состоит в изменении условия по переменной x_n, и оно выглядит так:

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n} = \sum_{m=1}^{M}\lambda_m \frac{\partial g_m(\bar{x})}{\partial x_n} + \sum_{k=1}^{K}\lambda_k \frac{\partial h_m(\bar{x})}{\partial x_n} - \lambda_{K+1},$$

и у нас появляется дополнительное условие

$$-\lambda_{K+1}x_n = 0.$$

Но эти два условия совершенно эквивалентны условию (М.К.8). Принимая во внимание простоту учета условий неотрицательности, обычно в приложениях принято не пользоваться явным введением ограничения неотрицательности и соответствующего множителя, а видоизменять обычные условия первого порядка в стиле (М.К.8).

Заметим также, что любое ограничение вида $h_k(x) \geq \bar{c}_k$ может быть записано как $-h_k(x) \leq -\bar{c}_k$. С учетом этого факта мы видим, что теорема М.К.2 может быть распространена на ограничения вида $h_k(x) \geq \bar{c}_k$. Единственная модификация состоит в ограничении на знак множителя с номером k, оно отныне таково: $\lambda_k \leq 0$. Аналогично, так как минимизация функции $f(\cdot)$ равносильна максимизации функции $-f(\cdot)$, теорема М.К.2 применима также к локальным минимайзерам с единственным отличием, что знаки множителей должны удовлетворять неравенствам $(\lambda_1, \ldots, \lambda_M) \leq 0$ (полагая, что все ограничения по-прежнему записаны как в задаче (М.К.4)).

Условия второго порядка для задачи с ограничениями в виде неравенств (М.К.4) полностью аналогичны тем, которые уже обсуждались для задачи с ограничениями в виде равенств (М.К.1). Единственным изменением будет учет лишь тех ограничений, которые активны, т. е. таких, которые выполняются в виде равенств в рассматриваемой точке $\bar{x}$.

Предположим, что вектор $x \in C$ удовлетворяет условиям Куна — Таккера, т. е. условиям (1) и (2) в теореме М.К.2. Когда мы сможем сказать, что x — глобальный максимайзер? Теорема М.К.3 предлагает удобный набор условий.

Теорема М.К.3. Предположим, что в задаче отсутствуют ограничения в виде равенств (т. е. $M = 0$) и что любое ограничение с номером k задано квазивыпуклой функцией $h_k(\cdot)$[23]. Предположим также, что целевая функция удовлетворяет

$$\nabla f(x) \cdot (x' - x) > 0 \text{ для любых } x, x', \text{ таких что } f(x') > f(x). \quad \text{(М.К.9)}$$

[23] В общем случае ограничения в виде равенств допускаются, если они линейные.

Тогда, если $\bar{x} \in C$ удовлетворяет условиям Куна — Таккера (условиям (1) и (2) в теореме М.К.2) и если условия регулярности ограничений выполнены в точке $\bar{x}$, то $\bar{x}$ является точкой глобального максимума[24].

Доказательство. Предположим противное, что $f(x) > f(\bar{x})$ для некоторого $x \in \mathbb{R}^N$, удовлетворяющего $h_k(x) \le \bar{c}_k$ для любых k. Обозначим $z = x - \bar{x}$. Тогда по (М.К.9) мы будем иметь $\nabla f(\bar{x}) \cdot z > 0$. Если $\lambda_k > 0$, то из условий Куна — Таккера вытекает, что $h_k(\bar{x}) = \bar{c}_k$. Более того, так как $h_k(\cdot)$ квазивогнутые и $h_k(x) \le \bar{c}_k = h_k(\bar{x})$, то получаем $\nabla h_k(\bar{x}) \cdot z \le 0$. Отсюда у нас одновременно выполнены неравенства $\nabla f(\bar{x}) \cdot z > 0$ и $\sum_k \lambda_k \nabla h_k(\bar{x}) \cdot z \le 0$, что противоречит условиям Куна — Таккера, потому что они предполагают выполнение $\nabla f(\bar{x}) = \sum_k \lambda_k \nabla h_k(\bar{x})$. ■

Заметим, что условие (М.К.9) теоремы М.К.3 выполнено, если $f(\cdot)$ вогнутая или $f(\cdot)$ квазивогнутая и $\nabla f(x) \ne 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^N$. Условие, что функции ограничений $h_1(\cdot), \dots, h_K(\cdot)$ квазивогнутые, влечет за собой выпуклость допустимого множества C (проверьте это)[25]. На рис. М.К.3 мы проиллюстрировали теорему в случае $N = K = 2$, $M = 0$ и когда $f(\cdot)$ — квазивогнутая функция с $\nabla f(x) \ne 0$ для всех x.

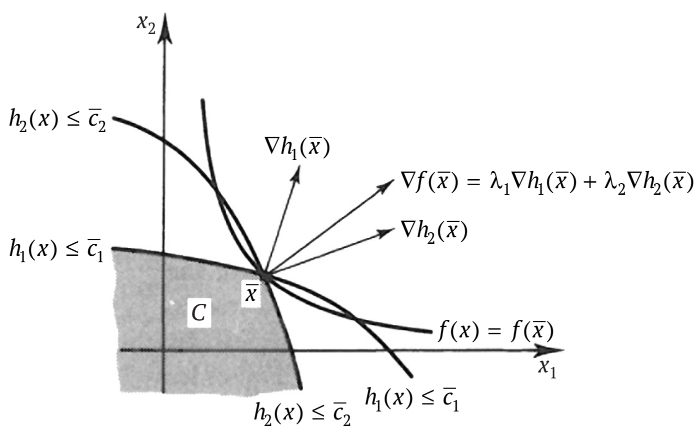


Рис. М.К.3. Когда функции ограничений квазивыпуклые, а целевая функция квазивогнутая, для которой выполнено условие $\nabla f(x) \ne 0$ для всех x, выполнение условий Куна — Таккера в точке x влечет за собой тот факт, что x — точка глобального условного максимума

[24] Если вместо этого неравенства мы будем иметь $\nabla f(x) \cdot (x' - x) < 0$ всякий раз, когда $f(x') < f(x)$, и множители имеют неположительный знак, то мы решаем задачу по минимизации, и $\bar{x}$ будет точкой глобального минимума.

[25] Наряду с этим, при выполнении условий теоремы, достаточным условием регулярности ограничений является не пустота внутренности допустимого множества C.

Незаменимость условий (М.К.9) в теореме М.К.3 показана на рис. М.К.4. Здесь у нас $N = M = 1$ и квазивогнутая функция $f(\cdot)$ максимизируется на допустимом множестве $C = \{x \in \mathbb{R}\colon h(x) \le 0\}$. На рисунке точка $\bar{x}$ удовлетворяет условиям Куна — Таккера при значении множителя $\lambda = 0$, но $\bar{x}$ не является глобальным максимайзером $f(\cdot)$ на C (точка x^* является точкой глобального условного максимума). Заметим, однако, что условие (М.К.9) нарушается при $x = \bar{x}$, $x' = x^*$.

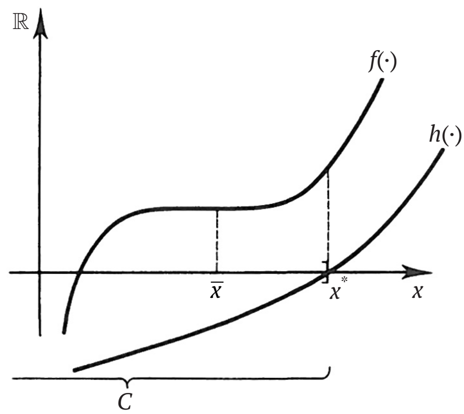


Рис. М.К.4. Незаменимость условия (М.К.9) в теореме М.К.3

Наконец, в теореме М.К.4 мы обратим внимание на важное следствие, вытекающее из выпуклости допустимого множества ограничений C и строгой квазивогнутости функции $f(\cdot)$.

Теорема М.К.4. Предположим, что в задаче **(**М.К.4) допустимое множество C — выпуклое и целевая функция $f(\cdot)$ строго квазивогнутая. Тогда существует единственная глобальная точка условного максимума[26].

Доказательство. Если бы x и $x' \neq x$ были бы обе точками глобального максимума, то точки $x'' = \alpha x + (1 - \alpha)x'$ при $\alpha \in (0, 1)$ были бы допустимы (т. е. $x'' \in C$), и в силу строгой квазивогнутости $f(\cdot)$ мы получили бы большее значение $f(\cdot)$ (т. е. $f(x'') > f(x) = f(x')$). ■

Предположим, что в случае, когда в наличии лишь неравенства, мы обозначим C_{-k}, ослабленное допустимое множество, полученное при вычеркивании k-го ограничения. Следующие два факта часто бывают полезными в приложениях.

(1) Если $f(\bar{x}) \ge f(x)$ при всех $x \in C_{-k}$ и если $h_k(\bar{x}) \le \bar{c}_k$, то $\bar{x}$ будет являться глобальным максимайзером в задаче **(**М.К.4). То есть если мы решим задачу условной оптимизации, игнорируя это ограничение, и если полученное решение удовлетворяет удаленному ограничению, то оно должно быть решением первоначальной задачи с полным набором ограничений.

[26] Когда $f(\cdot)$ квазивогнутая, но не является строго квазивогнутой, аналогичное доказательство позволяет нам сделать вывод, что множество максимайзеров выпуклое.

Это просто вытекает из того факта, что $C \subset C_{-k}$, и тем самым оптимизация $f(\cdot)$ на C в лучшем случае даст тот же результат для $f(\cdot)$, как и при оптимизации на C_{-k}.

(2) Предположим, что все функции ограничений $h_1(\cdot), \ldots, h_K(\cdot)$ непрерывные и квазивыпуклые и что условие (M.K.9) выполнено. Тогда если $\bar{x}$ является решением задачи (M.K.4), в которой k-е ограничение не активно (т. е. если $h_k(\bar{x}) < \bar{c}_k$), то имеем: $f(\bar{x}) \geq f(x)$ для всех $x \in C_{-k}$. То есть, при выполнении заявленных предположений, если ограничение не активно в точке решения проблемы (M.K.4), то игнорирование ограничения не должно сказываться на решении. Чтобы это увидеть, предположим противное, т. е. найдется $x' \in C_{-k}$, такое что $f(x') > f(\bar{x})$. Тогда вследствие квазивыпуклости функций ограничения $h_1(\cdot), \ldots, h_K(\cdot)$ мы знаем, что точки $x(\alpha) = \alpha x' + (1 - \alpha)\bar{x}$ являются элементами C_{-k} для всех $\alpha \in [0, 1]$. Более того, так как k-е ограничение не активно в точке $\bar{x}$, найдется $\bar{\alpha} > 0$, такое что $h_k\left(x(\alpha)\right) < \bar{c}_k$ для всех $\alpha < \bar{\alpha}$. Отсюда $x(\alpha) \in C$ для всех $\alpha < \bar{\alpha}$. Но производная $f(x(\alpha))$ при $\alpha = 0$ равна $\nabla f(x) \cdot (x' - \bar{x}) > 0$ (вспомним, что условие (M.K.9) справедливо и по условию $f(x') > f(\bar{x})$). Поэтому должна найтись такая точка $x(\alpha) \in C$, что $f\left(x(\alpha)\right) > f(\bar{x})$, что противоречит тому, что $\bar{x}$ является глобальным условным максимайзером в задаче (M.K.4).

Сравнительная статика

В наших предыдущих рассуждениях мы рассматривали параметры $\bar{b} = \left(\bar{b}_1, \ \ldots, \ \bar{b}_M\right)$ и $\bar{c} = \left(\bar{c}_1, \ \ldots, \ \bar{c}_K\right)$ в задаче M.K.4 как заданные. Теперь мы позволим им меняться.

Предположим, что $(b, c) \in \mathbb{R}^{M+K}$ — это параметры, для которых задача (M.K.4) имеет некоторое решение $\bar{x}(b, \ c)$, и обозначим значение этого решения $v(b, \ c) = f\left(\bar{x}(b, \ c)\right)$. В довольно общих предположениях (см. ниже текст, набранный мелким шрифтом в конце этого раздела) значение $v(b, c)$ зависит непрерывным образом от параметров (b, c).

Теорема M.K.5 предоставляет интерпретацию множителей Лагранжа как «теневых цен» ограничений.

Теорема M.K.5. Предположим, что в открытой окрестности $\left(\bar{b}, \ \bar{c}\right)$ набор активных ограничений остается неизменным и что $v(b, c)$ дифференцируема в $\left(\bar{b}, \ \bar{c}\right)$[27]. Тогда для любого $m = 1, \ldots, M$ и $k = 1, \ldots, K$ выполнено

$$\frac{\partial v\left(\bar{b}, \ \bar{c}\right)}{\partial b_m} = \lambda_m \ \text{ и } \ \frac{\partial v\left(\bar{b}, \ \bar{c}\right)}{\partial c_k} = \lambda_k.$$

Доказательство. Это частный случай теоремы об огибающей (теорема M.L.1), которая будет представлена в следующем разделе. ■

[27] Эти предположения являются упрощающими; аналогичный результат справедлив при более общих предположениях, но требует использования производных по направлению в точках недифференцируемости функции $v(\cdot, \cdot)$.

Рассмотрим более общую оптимизационную задачу. Будем максимизировать функцию $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ при условии, что $x \in C(q)$, где $C(q)$ — непустое допустимое множество и $q = (q, \ldots, q_S)$ принадлежит допустимому множеству параметров $Q \subset \mathbb{R}^S$. Предположим, что $f(\cdot)$ непрерывна и что $C(q)$ — компактное множество для всех $q \in Q$. Тогда мы знаем (из теоремы M.F.2, часть (2)), что задача на максимум имеет хотя бы одно решение. Обозначим $x(q) \subset C(q)$ *множество* решений, соответствующих q и $v(q)$ [$= f(x)$ для любых $x \in x(q)$], соответствующее максимальное значение. Теорема M.K.6 имеет непосредственное отношение к непрерывности функций $x(\cdot)$ и $v(\cdot)$.

Теорема M.K.6 *(теорема о максимуме).* Предположим, что отображение, заданное ограничениями $C: Q \to \mathbb{R}^N$ — непрерывное (см. раздел M.H) и $f(\cdot)$ — непрерывная функция. Тогда максимизирующее отображение $x: Q \to \mathbb{R}^N$ является полунепрерывным сверху и функция значения $v: Q \to \mathbb{R}$ непрерывная.

Этот результат можно усилить. Предположим, мы максимизируем $x_1 + x_2$ при условии, что $x_1 \in [0, 1]$, $x_2 \in [0, 1]$ и $q_1x_1 + q_2x_2 \le q_1q_1$ при $q = (q_1, q_2) \in Q = (0, 1)^2$. Тогда максимизирующее отображение задано

$$
\begin{aligned}
x(q) &= \left\{(q_2,\ 0)\right\}, && \text{если} \quad q_1 < q_2, \\
x(q) &= \left\{(0,\ q_1)\right\}, && \text{если} \quad q_1 > q_2 \\
\text{и } x(q) &= \left\{(x_1,\ x_2) \in [0,\ 1]^2 \colon x_1 + x_2 = q_1\right\} && \text{если} \quad q_1 = q_2.
\end{aligned}
$$

Целевая функция и отображение, заданное ограничениями, непрерывны (вы должны будете позже это проверить). В соответствии с теоремой M.K.6 $x(\cdot)$ — полунепрерывная сверху, но она не является непрерывной (есть взрывное поведение вовне вдоль прямой $q_1 = q_2$). С другой стороны, предположим, что мы выбрали $Q = [0, 1]^2$. Тогда вывод теоремы неверен: отображение ограничений не является полунепрерывным сверху (у нас имеется $x(2\varepsilon, \varepsilon) = \{(0, 2\varepsilon)\}$, но $x(0, 0) = \{(1, 1)\}$). Однако и допущения неверны: при $q = (0, 0)$ вектор $(1, 1)$ принадлежит допустимому множеству, но при $q = (\varepsilon, \varepsilon)$ ни один вектор x с $x_1 + x_2 > \varepsilon$ не принадлежит допустимому множеству. Отсюда следует, что отображение ограничений перестает быть непрерывным, если его продолжить на $Q = [0, 1]^2$.

M.L. Теорема об огибающей

В этом разделе мы вернемся к задаче максимизации функции $f(\cdot)$ при наличии ограничений, но мы предположим, что хотели бы проследить, каким образом параметры $q(q_1, \ldots, q_S) \in \mathbb{R}^S$ входят в целевую функцию или в ограничения задачи.

В частности, мы теперь запишем задачу максимизации в виде

$$
\begin{aligned}
&\max_{x \in \mathbb{R}^N} f(x;\ q), \\
&\text{что } g_1(x;\ q) = \bar{b}_1 \\
&\qquad \vdots \\
&g_M(x;\ q) = \bar{b}_M .
\end{aligned}
\tag{M.L.1}
$$

Мы обозначим посредством $v(\cdot)$ *функцию значения* задачи (M.L.1); т. е. $v(q)$ дает значение, достигаемое $f(\cdot)$ в точке решения задачи (M.L.1), когда вектором параметров является q. Чтобы быть более конкретными, мы предположим, что $v(q)$ хорошо определена в окрестности некоторого вектора параметров (точки отсчета) $\bar{q} \in \mathbb{R}^S$. Будет вполне естественным исследовать предельные эффекты изменения q на значение $v(q)$. *Теорема об огибающей* призвана найти ответ на этот вопрос[28].

Будет удобно с этого момента предполагать, что хотя бы локально (т. е. для значений q, близких к $\bar{q}$) в решении задачи (M.L.1) функция $x(q)$ будет дифференцируемой. Тогда мы можем записать $v(q) = f(x(q); q)$.

Чтобы начать с простейшего случая, предположим, что у нас одна переменная и один параметр (т. е. $N = K = 1$) и что ограничений нет (т. е. $M = 0$). Тогда по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{dv(\bar{q})}{dq} = \frac{\partial f\left(x(\bar{q});\ \bar{q}\right)}{\partial q} + \frac{\partial f\left(x(\bar{q});\ \bar{q}\right)}{\partial x}\frac{dx(\bar{q})}{dq}. \tag{M.L.2}$$

Но давайте заметим, и это главное замечание, что в силу условий первого порядка для безусловной максимизации (см. раздел M.J) у нас должно быть выполнено $\partial f\left(x(\bar{q});\ \bar{q}\right)/\partial x = 0$.

Поэтому (M.L.2) упрощается и становится

$$\frac{dv(\bar{q})}{dq} = \frac{\partial f\left(x(\bar{q}),\ \bar{q}\right)}{\partial q}. \tag{M.L.3}$$

То есть тот факт, что $x(q)$ определена максимизацией $f(\cdot; q)$, имеет своим следствием то, что при изменениях в q и нахождении эффектов первого порядка, состоящих в изменении максимального значения, мы можем быть уверены, что максимайзер не сместится: единственным эффектом будет прямой эффект.

Этот результат проиллюстрирован на рис. M.L.1, который также служит для объяснения термина «огибающая». На рисунке изображена функция

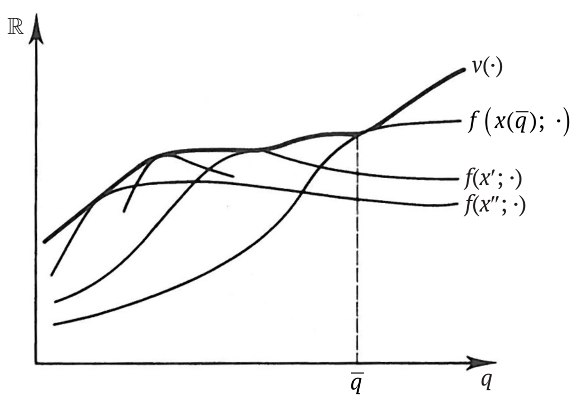


Рис. M.L.1. Теорема об огибающей

[28] Формально мы выписали задачу с ограничениями в виде равенств. Но заметим, что до тех пор, пока в окрестности рассматриваемого вектора параметров набор активных ограничений не меняется, рассуждения, которые мы приводим, годятся и для случая ограничений в виде неравенств.

$f(x;\cdot)$ для различных значений x. Так как при каждом q мы имеем $v(q) = \max_x f(x;\ q)$, то функция значения $v(\cdot)$ задана верхней огибающей семейства этих функций. Предположим теперь, что мы рассматриваем фиксированное $\bar{q}$. Тогда, обозначая $\bar{x} = x(\bar{q})$, мы будем иметь $f(\bar{x};\ q) \leq v(q)$ для всех q и $f(\bar{x};\ \bar{q}) = v(\bar{q})$. Следовательно, график $f(\bar{x};\ \cdot)$ лежит нестрого под графиком $v(\cdot)$ и касается его при $q = \bar{q}$. Так что оба графика имеют одинаковый наклон в этой точке. Это в точности совпадает с тем, о чем говорит условие (M.L.3).

Теперь мы сформулируем общую теорему об огибающей для задачи с большим количеством переменных, параметров и ограничений. Как мы увидим, выводы этой теоремы аналогичны (M.L.3) с тем исключением, что множители Лагранжа играют важную роль.

Теорема M.L.1 *(теорема об огибающей)*. Рассмотрим функцию значения $v(q)$ для задачи (M.L.1). Предположим, что она дифференцируема в $\bar{q} \in \mathbb{R}^S$ и что $(\lambda_1, \ldots, \lambda_M)$ — значения множителей Лагранжа, порожденные решением задачи максимизации (т. е. максимайзером) $x(\bar{q})$ в точке $\bar{q}$. Тогда[29]

$$\frac{\partial v(\bar{q})}{\partial q_s} = \frac{\partial f\left(x(\bar{q});\ \bar{q}\right)}{\partial q_s} - \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \frac{\partial g_m\left(x(\bar{q});\ \bar{q}\right)}{\partial q_s} \text{ для } s = 1, \ldots, S \qquad \text{(M.L.4)}$$

или, используя матричное обозначение,

$$\nabla v(\bar{q}) = \nabla_q f\left(x(\bar{q});\ \bar{q}\right) - \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \nabla_q g_m\left(x(\bar{q});\ \bar{q}\right). \qquad \text{(M.L.5)}$$

Доказательство. Мы будем поступать так же, как и в простом случае одной переменной в отсутствие ограничений. Пусть $x(\cdot)$ — функция максимайзера. Тогда $v(q) = f(x(q);\ q)$ для всех q, и поэтому, используя производную сложной функции, мы получим

$$\frac{\partial v(\bar{q})}{\partial q_s} = \frac{\partial f\left(x(\bar{q});\ \bar{q}\right)}{\partial q_s} + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\partial f\left(x(\bar{q});\ \bar{q}\right)}{\partial x_n} \frac{\partial x_n(\bar{q})}{\partial q_s} \right).$$

Условия первого порядка (M.K.2) говорят нам о том, что

$$\frac{\partial f\left(x(\bar{q});\ \bar{q}\right)}{\partial x_n} = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \frac{\partial g_m\left(x(\bar{q});\ \bar{q}\right)}{\partial x_n}.$$

Отсюда (переставляя порядок суммирования там, где это требуется),

[29] Если мы рассматриваем задачу с ограничениями в виде неравенств, в которой набор активных ограничений остается неизменным в окрестности точки $\bar{q}$, то условия (M.L.4) и (M.L.5) по-прежнему справедливы: учет неактивных ограничений никоим образом не скажется ни на левых, ни на правых частях выражений (потому что соответствующие множители равны нулю).

$$\frac{\partial v(\bar{q})}{\partial q_s} = \frac{\partial f\left(x(\bar{q});\ \bar{q}\right)}{\partial q_s} + \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\partial g_m\left(x(\bar{q});\ \bar{q}\right)}{\partial x_n} \frac{\partial x_n(\bar{q})}{\partial q_s} \right).$$

Более того, так как $g_m\left(x(q);\ q\right) = \bar{b}_m$ для всех q, то мы получим

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\partial g_m\left(x(\bar{q});\ \bar{q}\right)}{\partial x_n} \frac{\partial x_n(\bar{q})}{\partial q_s} \right) = -\frac{\partial g_m(\bar{x};\ \bar{q})}{\partial q_s} \text{ для любых } m = 1, \ldots, M.$$

Комбинируя, мы придем к (M.L.4). ■

M.M. Линейное программирование

Задачи линейного программирования относятся к специальному случаю задач условной максимизации, в которых целевая функция и функции ограничений — линейные по переменным $(x_1, \ldots, x_N)$.

Общая задача линейного программирования обычно записывается в виде

$$\begin{aligned} \max_{(x_1,\ldots,x_N)\geq 0}\ & f_1 x_1 + \ \ldots + f_N x_N, \\ \text{что} \quad & a_{11}x_1 + \ \ldots + a_{1N}x_N \leq c_1 \\ & \quad\vdots \\ & a_{K1}x_1 + \ \ldots + a_{KN}x_N \leq c_K, \end{aligned} \tag{M.M.1}$$

или, используя матричное обозначение,

$$\begin{aligned} &\max_{x\in\mathbb{R}^N_+} f \cdot x, \\ &\text{что } \boldsymbol{A}x \leq c, \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{A}$ — матрица размера $K \times N$ с элементами вида a_{kn} и $f \in \mathbb{R}^N$, $x \in \mathbb{R}^N$ и $c \in \mathbb{R}^K$ — векторы-столбцы[30].

На рис. M.M.1 изображена задача линейного программирования с $N = 2$, двумя ограничениями $2x_1 + x_2 \leq 4$ и $x_1 + 3x_2 \leq 7$ и целевой функцией $x_1 + x_2$.

Наиболее интересный факт относительно задачи линейного программирования (M.M.1) состоит в том, что ей можно поставить в соответствие другую задачу линейного программирования, называемую *двойственной* задачей, которая имеет вид задачи минимизации с K переменными (каждая из которых соответствует ограничению в первоначальной, или *прямой,* задаче) и N ограничениями (каждое из которых соответствует переменной прямой задачи):

---

[30] Мы говорим, что это общая форма записи задачи линейного программирования, потому что, во-первых, ограничение в виде равенства $a \cdot x = b$ всегда может быть представлено в виде двух неравенств ($a \cdot x \leq b$ и $-a \cdot x \geq b$) и, во-вторых, переменная x_n любого знака может быть всегда представлена в виде разности двух переменных $\left(x_{n+} - x_{n-}\right)$, каждая из которых неотрицательная.

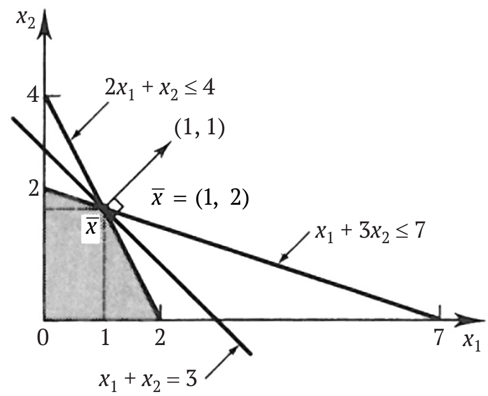


Рис. М.М.1. Задача линейного программирования (прямая)

$$\min_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_K)\ge 0} c_1\lambda_1 + \ldots + c_k\lambda_k, \tag{М.М.2}$$

$$\text{что} \qquad a_{11}\lambda_1 + \ldots + a_{K1}\lambda_K \ge f_1,$$
$$\vdots$$
$$a_{1N}\lambda_1 + \ldots + a_{KN}\lambda_K \ge f_1,$$

или, используя матричное обозначение,

$$\max_{\lambda\in\mathbb{R}_+^K} c\cdot\lambda,$$
$$\text{что} \quad \boldsymbol{A}^T\lambda \ge f\,,$$

где $\lambda \in \mathbb{R}^K$ — вектор-столбец.

Рис. М.М.2 изображает двойственную задачу, порожденную задачей, изображенной на рис. М.М.1. Теперь ограничения выглядят как $2\lambda_1 + \lambda_2 \ge 1$ и $\lambda_1 + 3\lambda_2 \ge 1$, а целевая функция — $4\lambda_1 + 7\lambda_2$.

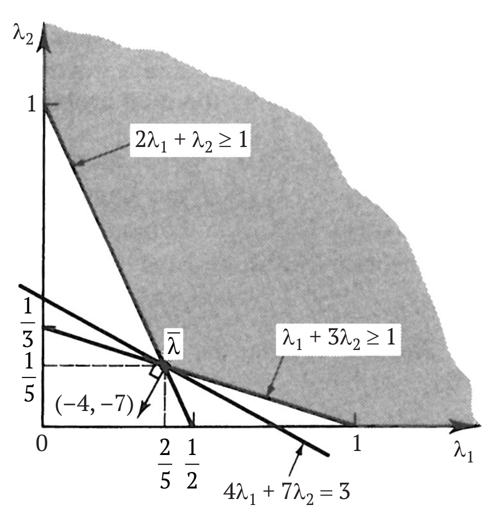


Рис. М.М.2. Задача линейного программирования (двойственная)

Предположим теперь, что $x \in \mathbb{R}_+^N$ и $\lambda \in \mathbb{R}_+^K$ удовлетворяют соответственно ограничениям прямой и двойственной задач. Тогда

$$f \cdot x \leq (\boldsymbol{A}^T\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (Ax) \leq \lambda \cdot c = c \cdot \lambda. \tag{М.М.3}$$

Таким образом, значение решения прямой задачи не может быть больше значения решения двойственной задачи. *Теорема двойственности линейного программирования*, которую мы сформулируем, говорит, что на самом деле эти значения равны. Ключевым моментом для понимания этого факта является, как предполагают обозначения, то, что двойственные переменные $(\lambda_1, \ldots, \lambda_K)$ интерпретируются как множители Лагранжа.

Теорема М.М.1 *(теорема двойственности линейного программирования).* Предположим, что прямая задача (М.М.1) достигает максимального значения $v \in \mathbb{R}$. Тогда v также является минимальным значением, которое достигается в двойственной задаче (М.М.2).

Доказательство. Пусть $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ — максимизирующий вектор в задаче (М.М.1). Обозначим $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_K) \geq 0$ множители Лагранжа, порожденные этой задачей (см. теорему М.К.2)[31]. Формально мы рассматриваем $\bar{\lambda}$ как вектор-столбец. Тогда, применяя теорему М.К.2, мы получим

$$A^T\bar{\lambda} = f \ \text{ и } \ \bar{\lambda} \cdot (c - \boldsymbol{A}\bar{x}) = 0.$$

Следовательно, $\bar{\lambda}$ удовлетворяет ограничениям двойственной задачи (так как $A^T\bar{\lambda} \geq f$) и

$$c \cdot \bar{\lambda} = \bar{\lambda} \cdot c = \bar{\lambda} \cdot \boldsymbol{A}\bar{x} = \left(\boldsymbol{A}^T\bar{\lambda}\right) \cdot \bar{x} = f \cdot \bar{x}. \tag{М.М.4}$$

Теперь, в силу формул (М.М.3), мы знаем, что $c \cdot \lambda \geq f \cdot \bar{x}$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+^K$, таких что $\boldsymbol{A}^T\lambda \geq f$.

Поэтому $c \cdot \bar{\lambda} \leq c \cdot \lambda$, если $\boldsymbol{A}^T\lambda \geq f$. Так что (М.М.4) говорит нам о том, что на самом деле $\bar{\lambda}$ является решением двойственной задачи (М.М.2), и поэтому значение двойственной задачи $c \cdot \bar{\lambda}$ равняется $f \cdot \bar{x}$, значению прямой задачи. ■

Мы можем проверить справедливость теоремы двойственности на прямой и двойственных задачах, которые изображены на рис. М.М.1 и М.М.2. Максимизирующий вектор для прямой задачи $\bar{x} = (1, \ 2)$, значение целевой функции равно $1 + 2 = 3$. Минимизирующий вектор для двойственной задачи $\bar{\lambda} = \left(\frac{2}{5}; \ \frac{1}{5}\right)$, значение целевой функции равно $4\left(\frac{2}{5}\right) + 7\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{15}{5} = 3$.

[31] Для задач линейного программирования регулярность ограничений не требуется. Или можно сказать иначе: линейность ограничений является достаточным условием для выполнения условий регулярности ограничений.

M.N. Динамическое программирование

Динамическое программирование — это техника, позволяющая изучать проблемы максимизации, определенные на последовательностях, которые могут быть продолжены вплоть до бесконечности. Мы здесь рассмотрим только очень частный и простой случай, являющийся частью общей теории (экстенсивный обзор содержится в (Stokey, Lucas, Prescott, 1989)).

Предположим, что $A \subset \mathbb{R}^N$ — непустое компактное множество[32]. Пусть $u\colon A \times A \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция и пусть $\delta \in (0, 1)$. Если вектор $z \in A$ (интерпретируемый как начальное значение вектора $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$), то задача максимизации, которой мы интересуемся, такова:

$$\max_{\{x_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(x_t,\ x_{t+1}), \tag{M.N.1}$$
$$\text{что } x_t \in A \text{ для всех } t,$$
$$x_0 = z.$$

С точки зрения математики не так сложно доказать, что максимизирующая последовательность для задачи (M.N.1) существует и поэтому максимальное значение $v(z)$ существует. Функция v: A $\to \mathbb{R}$ называется *функцией значения* задачи (M.N.1). Как и функция $u(\cdot, \cdot)$, функция значения будет непрерывной. Если A дополнительно еще и выпукло и $u(\cdot, \cdot)$ — вогнутая функция, то $v(\cdot)$ также вогнутая.

Довольно ясно, что для любого $z \in A$ функция значения удовлетворяет так называемому *уравнению Беллмана* (или *принципу оптимальности Беллмана*):

$$v(z) = \max_{z' \in A} u(z,\ z') + \delta v(z').$$

Возможно, является более удивительным тот факт, что, как показывает теорема M.N.1, функция значения является единственной функцией, удовлетворяющей этому уравнению.

Теорема M.N.1. Предположим, что f: $A \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, такая что для любого $z \in A$ уравнение Беллмана удовлетворено; т. е.

$$f(z) = \max_{z' \in A} u(z,\ z') + \delta f(z') \tag{M.N.2}$$

для всех $z \in A$. Тогда функция $f(\cdot)$ совпадает с $v(\cdot)$; т. е. $f(z) = v(z)$ для любых $z \in A$.

Доказательство. Последовательно применяя (M.N.2), мы имеем для каждого T

[32] Условие компактности не может быть отброшено полностью, но может быть значительно ослаблено.

$$f(z) = \max_{\{x_t\}_{t=0}^{T}} \sum_{t=0}^{T-1} \delta^t u(x_t,\ x_{t+1}) + \delta^T f(x_T),$$
$$\text{что}\ \ x_t \in A\ \ \text{для всех}\ \ t \le T,$$
$$x_0 = z.$$

Но при $T \to \infty$ член $\delta^T f(\cdot)$ вносит пренебрежимо малый вклад в сумму. Поэтому мы заключаем $f(z) = v(z)$. ■

Теорема M.N.1 содержит процедуру для нахождения функции значения. Предположим, что для $r = 0$ мы начинаем с произвольной непрерывной функции f_0: $A \to \mathbb{R}$. Будем считать, что $f_0(z')$ — «экспериментальная» функция, дающая примерную оценку начального значения с $z' \in A$. Тогда мы можем генерировать новую приблизительную оценку $f_1(\cdot)$, полагая для каждого $z \in A$

$$f_1(z) = \max_{z' \in A} u(z,\ z') + \delta f_0(z').$$

Если $f_1(\cdot) = f_0(\cdot)$, то $f_0(\cdot)$ удовлетворяет уравнению Беллмана и теорема M.N.1 говорит нам, что в действительности $f_0(\cdot) = v(\cdot)$. Если $f_1(\cdot) \ne f_0(\cdot)$, то $f_0(\cdot)$ была выбрана неверно. Мы тогда могли бы начать процесс заново с новой предположительной функцией $f_1(\cdot)$. Это позволит нам получить $f_2(\cdot)$, и процесс можно продолжить, получив последовательность $\{f_r(\cdot)\}_{r=0}^{\infty}$. Привело ли нас это к чему-нибудь? Ответ таков: да, привело. Для любого $z \in A$ мы имеем $f_r(z) \to v(z)$ при $r \to \infty$. То есть по мере возрастания r мы приближаемся к точной оценке z.

Предположим, что последовательность $\{\bar{x}_t\}_{t=0}^{\infty}$ — это последовательность (или *траектория*), которая является решением задачи максимизации (M.N.1). A fortiori, для каждого $t \ge 1$ решение, принятое в момент t, должно быть оптимальным. Исследуя сумму в (M.N.1), мы видим, что $\bar{x}_t$ должен быть решением задачи

$$\max_{x_t \in A} u\left(\bar{x}_{t-1},\ x_t\right) + \delta u\left(x_t,\ \bar{x}_{t+1}\right). \tag{M.N.3}$$

Допуская, что $\bar{x}_t$ является внутренней точкой A, (M.N.3) приводит к

$$\frac{\partial u\left(\bar{x}_{t-1},\ \bar{x}_t\right)}{\partial x_{N+n}} + \delta \frac{\partial u\left(\bar{x}_t,\ \bar{x}_{t+1}\right)}{\partial x_n} = 0 \tag{M.N.4}$$

для всех $n = 1, \ldots, N$[33]. Необходимые условия в виде (M.N.4) называются *уравнениями Эйлера* для задачи (M.N.1).

---

[33] Заметим, что функция $u(\cdot, \cdot)$ имеет $2N$ аргументов, она содержит N переменных начального периода и N переменных последующего периода. В условии (M.N.4) переменная x_n является n-й компонентой начального периода и переменная x_{N+n} — n-й компонентой последующего периода.

Источники

Chang, A.C. (1984). *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, 3d ed. New York: McGraw-Hill.

Dixit, A. (1990). *Optimization in Economic Theory*, 2d ed. New York: Oxford University Press.

Intriligator, M. (1971). *Mathematical Optimization and Economic Theory*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

Novshek, W. (1993). *Mathematics for Economists*. New York, NY: Academic Press.

Simon, C.P., and L. Blume (1993). *Mathematics for Economists*. New York: Norton.

Sydsaeter, K. and P.J. Hammond (1994). *Mathematics for Economic Analysis*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

Stokey, N., and R. Lucas, with E. Prescott (1989). *Recursive Methods in Economic Dynamics*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Предметный указатель

Б

В

Г

Д

Е

З

И

К

Л

Н

О

П

Р

С

Т

У

Х

Ц

Ч

Э

Я

Учебное издание

Серия «Академический учебник»

Андреу Мас-Колелл, Майкл Д. Уинстон, Джерри Р. Грин

Микроэкономическая теория

Книга 2

Главный редактор *В. В. Анашвили*
Заведующая редакцией *Ю. В. Бандурина*
Выпускающий редактор *Е. В. Попова*
Литературный редактор *Н. Б. Бартошевич-Жагель*
Корректоры *Л. Ф. Королёва*, *Т. В. Редькина*
Художник *Е. Н. Спасская*
Оригинал-макет *О. З. Элоев*
Верстка *А. И. Попов*

Подписано в печать 27.05.2016. Формат 70×108 1/16
Гарнитура PT Serif Pro. Усл. печ. л. 56,0.
Тираж 2000 (1:1000) экз. Изд № 1151/1. Заказ №

Издательский дом «Дело» РАНХиГС
119571, Москва, пр-т Вернадского, 82

Коммерческий центр — тел. (495) 433-2510, (495) 433-2502
www.ranepa.ru
delo@ranepa.ru