Простые упражнения на темы производственной функции и издержек.

Мартынов Петр, Вакатова Ирина
Основы Микроэкономики, НИУ ВШЭ

Этот листок содержит примеры простых упражнений, связанных с математическим аппаратом лекций четвертой недели. В ответах и решениях могут попасться опечатки и вычислительные ошибки. Сообщайте о них, пожалуйста!

1. Задания с решением.

Задача 1.

Рассмотрим производственную функцию от одного фактора – труда: $Q(L) = 100\sqrt{L}$. Труд – единственный фактор, используемый фирмой.

1. Сколько единиц продукции будет произведено при использовании 16 единиц труда? Сколько единиц труда нужно использовать, чтобы произвести 900 единиц продукции?

2. Рассчитайте средний и предельный продукт труда. Возрастают или убывают они по количеству труда?

3. Пусть цена продукта и зарплата фиксированны и равны соответсвенно $P = 5$ и $W = 25$. Тогда прибыль производителя будет равна $PQ(L) - WL$. Какое L и $Q(L)$ он выберет, чтобы промакзимизировать прибыль?

4. Пусть цена и зарплата вырастут в 5 раз. Изменится ли как-то от этого оптимальный выбор L для монополиста? Сначала попытайтесь объяснить, а потом решите задачу численно.

5. Пусть опять $W = 25$. Будем считать также, что постоянные издержки (FC) фирмы равны 100. Чему тогда равны общие (TC), переменные (VC), средние (AC), предельные(MC), средние переменные (AVC) и средние постоянные (AFC) издержки?

6. Используя результат прошлого пункта, решите следующую задачу. Пусть цена продукта равна $P \geqslant 0$ (P - параметр), прибыль производителя тогда равна $PQ - TC(Q)$. Промаксимизируйте прибыль при каждом уровне P и получите зависимость $Q(P)$ - сколько производитель хочет произвести при каждой цене (убедитесь, что при цене 5 результат совпал с пунктом 4). Полученная зависимость - кривая предложения фирмы.

Решение

1.

$$L = 16,\ Q(16) = 100\sqrt{16} = 400$$

$$Q(L) = 900,\ 100\sqrt{L} = 900,\ \sqrt{L} = 9,\ L = 81$$

2.

$$AP_L = \frac{100\sqrt{L}}{L} = \frac{100}{\sqrt{L}} \text{ - убывает по труду}$$

$$MP_L = Q'(L) = \frac{50}{\sqrt{L}} \text{ - убывает по труду}$$

3. Обозначим прибыль как π, а оптимальные объем труда и выпуска L^* и Q^* соответственно.

$$\pi = PQ(L) - WL$$

$$\pi = 5 \times 100\sqrt{L} - 25L = 500\sqrt{L} - 25L \to max$$

Можно заметить, что эта функция является квадратичной относительно $\sqrt{L}$, график такой функции - парабола с ветвями вниз, максимальное значение достигается в вершине. Для параболы $y = -ax^2 + bx + c$ максимум находится в точке $x^* = \frac{b}{2a}, y(x^*)$. В нашем случае получим:

$$\sqrt{L^*} = \frac{500}{2 \times 25} = 10$$

А можно найти производную функции прибыли:

$$\pi' = \frac{250}{\sqrt{L^*}} - 25 = 0$$

$$\frac{250}{\sqrt{L^*}} = 25$$

$$250 = 25\sqrt{L^*}$$

$$\sqrt{L^*} = 10$$

Как и ожидалось, в обоих случаях мы получили одинаковые значения

$$L^* = 100,\ Q^*(L) = Q(100) = 1000$$

4. Догадка: выбор монополиста не должен измениться, т.к. одинаковое увеличение обоих фиксированных параметров в одинаковое число раз увеличивает наш доход и наши издержки, а значит и прибыль растет в это же число раз, то есть $\pi_4 = 5\pi_3$, где p_i - прибыль в пункте i. А максимума такая функция достигает при том же значении L, что и ее предшественница.
Теперь посчитаем численно:

$$\pi = 2500\sqrt{L} - 125L$$

$$\sqrt{L^*} = \frac{2500}{250} = 10$$

$$L^* = 100,\ Q^* = 1000$$

И правда, выбор монополиста не изменился

5. Поскольку труд - единственный переменный фактор производства, $VC = 25L$. Из производственной функции $\sqrt{L} = \frac{Q}{100}$, $L = \left(\frac{Q}{100}\right)^2$

$$VC = \frac{25Q^2}{100^2} = \frac{Q^2}{400}$$

$$TC = VC + FC = \frac{Q^2}{400} + 100$$

$$AC = \frac{TC}{Q} = \frac{Q}{100} + \frac{100}{Q}$$

$$AVC = \frac{VC}{Q} = \frac{Q}{400}$$

$$AFC = \frac{FC}{Q} = \frac{100}{Q}$$

$$MC = TC' = \frac{Q}{200}$$

6.

$$\pi = PQ - TC(Q)$$

$$\pi = PQ - \frac{Q^2}{400} - 100 \to max$$

$$Q^* = \frac{P}{2/400} = 200P$$

$Q^*(5) = 1000$ - результат совпал с п.4, что и следовало ожидать

Задача 2.

Рассмотрим производственную функцию от одного фактора – труда: $Q(L) = 600L + 20L^2 - L^3/3$ на отрезке $L \in [0, 50]$. Труд – единственный фактор, используемый фирмой.

1. Найдите средний и предельный продукты фирмы. Постройте их графики.
2. При каком L средний продукт достигает максимума и чему он равен? Чему при этом равен предельный продукт?
3. Попытайтесь объяснить на словах, почему средний продукт в данном случае начинает снижаться только после того, как предельный уже снижается некоторое время.

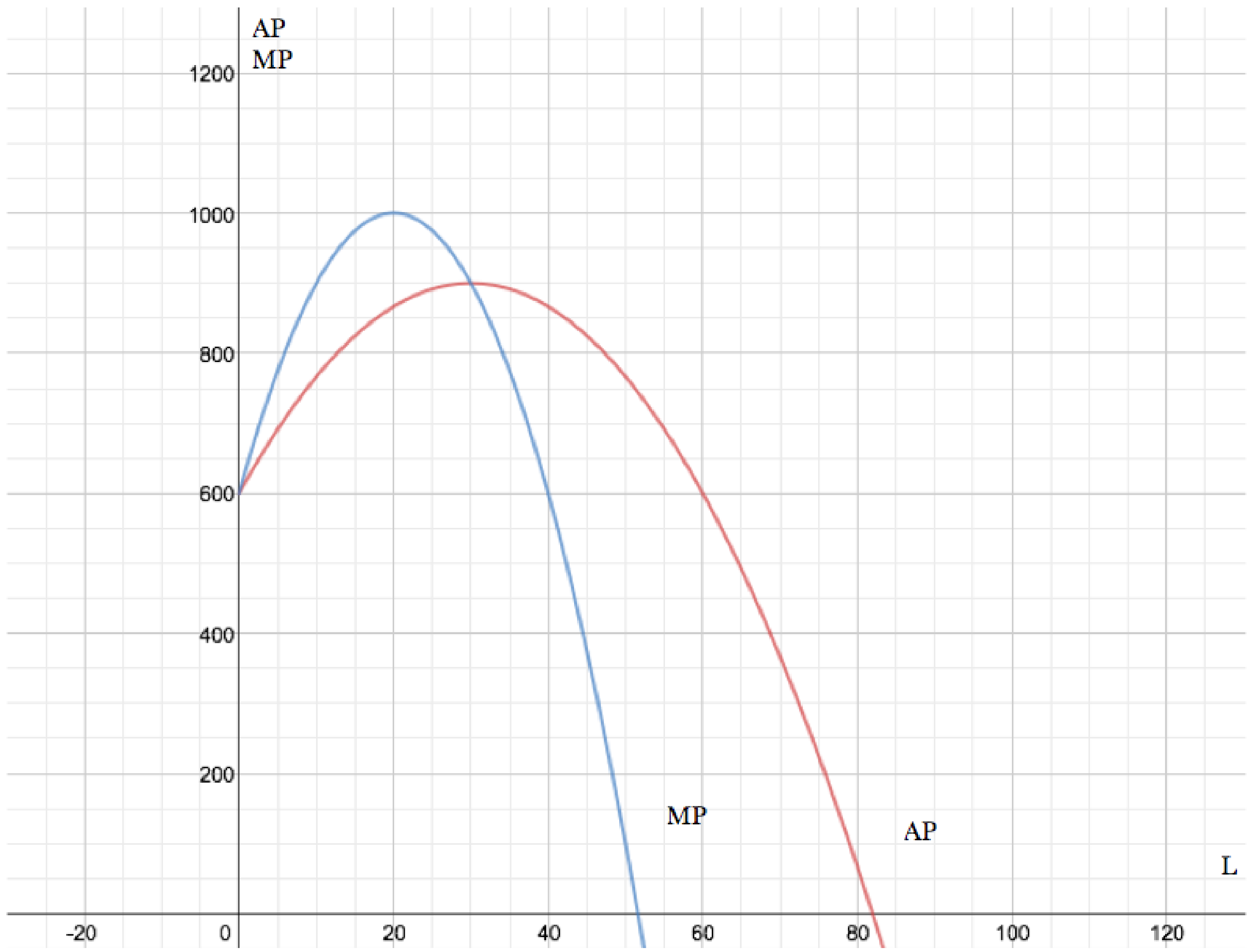
Решение.

1.

$$AP_L = \frac{600L + 20L^2 - \frac{L^3}{3}}{L}$$

$$AP_L = 600 + 20L - \frac{L^2}{3}$$

$$MP_L = Q'(L) = 600 + 40L - L^2$$



2. $$AP_L = 600 + 20L - \frac{L^2}{3} \to max$$

   Средний продукт труда в нашем случае - уже знакомая нам квадратичная функция с отрицательным главным коэффициентом, поэтому ее максимум мы уммем легко находить:

   $$L^* = \frac{20}{2 \times \frac{1}{3}} = 30$$

   $$AP_L^* = 600 + 600 - 300 = 900$$

   $$MP_L(L^*) = 600 + 1200 - 900 = 900$$

3. Какое-то время предельный продукт труда все еще превышает средний, несмотря на свое падение. Это значит, что новый работник привносит в производство "$AP_L + x$ то есть при расчете нового среднего продукта труда он вырастет на $\frac{x}{L}$.

Задача 3.

Рассмотрим производственную функцию $Q = KL$. Пусть $w = 5$ - зарплата, а $r = 2$ - рента, то есть плата за капитал. В каком соотношении фирмв будет использовать факторы производства?

Решение

$$MP_L = K, \; MP_K = L$$

Условие оптимальности:

$$\frac{MP_K}{r} = \frac{MP_L}{w}$$
$$\frac{L}{2} = \frac{K}{5}$$
$$\frac{L}{K} = \frac{2}{5}$$

2. Задания для самопроверки.

Задача 4.

1. Пусть дана некоторая производственная функция товара $Q(L)$, товар продается по фиксированной цене P и все наши переменные издержки на производство равны ставке заработной платы, умноженной на количество используемого труда. Покажите, что тогда любое пропорциональное увеличение цены и зарплаты (например, оба значения вырастают в 2 или в 3 раза) не изменяет оптимального количества L.

2. Допустим, взаимодействия на рынках в реальном мире похожи на пункт 1. Тогда можно провести следующее рассуждение: увеличение количества денег в экономике в a раз заставит цены и зарплаты подняться также в a раз, значит, оно не может привести к увеличению количества работающих и объема производства. Тем не менее, увеличение денежной массы используется центральными банками стран в качестве стимулирующей (увеличивающей производство и занятость) политики. Почему наше рассуждение приводит к неправильным выводам?

Задача 5.

Рассмотрите функцию $AC(Q) = TC(Q)/Q$ и возьмите ее производную по Q. Убедитесь, что если производная AC равна нулю, то $AC = MC = TC'$. Если $AC < MC$, то AC возрастает или убывает (попробуйте также объяснить это качественно)?

Задача 6.

Решите Задачу 1 для функции $Q = L^2$.