Адыгейский государственный университет
Магистерская программа «Современная теория игр»
Сложность вычислений, осень 2018
Правила получения оценки за курс

Изначальная оценка ставится из расчёта 100 баллов, правила перевода в 5-балльную систему будут определены позже. 50 баллов даётся за решение зачётных задач, 50 баллов - за эссе. Эссе может носить как математический, так и научно-популярный характер. В первом случае должна быть изложена некоторая тема: какие в ней изучаются понятия, какие теоремы известны, и т.д. Хотя бы для одной из теоремы должно быть изложено доказательство. Во втором случае формальных доказательств не требуется, но охват должен быть более широким, и должно быть больше сказано о неформальном смысле теорем. Можно также в качестве эссе подготовить исторический обзор.

Возиожные источники тем для эссе:

1. Блог Скотта Ааронсона, его книги и статьи
2. Блог Ланса Фортноу и его книга Golden Ticket
3. Книга Мура и Мертенса Nature of computation
4. Блог Ричарда Липтона и книги на его основе

Зачётных задач предлагается 6. Каждая задача оценивается в 10 баллов. В зачёт идут 5 наилучшим образом решённых задач. Задачи и эссе принимаются до 17 января (23:59 МСК) по почте `musatych@gmail.com` **двумя файлом в формате PDF** (Один файл с эссе, другой с решениями задач. Можно написать эссе и набрать решения в TEXe или Word'е, либо отсканировать или сфотографировать написанное от руки, собрав всё в PDF, либо скомбинировать разные способы. При фотографировании следите за резкостью, контрастностью и балансом белого. Фотографии на камеру мобильного телефона при искусственном освещении не всегда выглядят приемлемо. Архивы с фотографиями, а также плохо читаемые PDF проверяться не будут). Совместное решение и обсуждение задач допускается и даже одобряется, но тексты решений необходимо записывать самостоятельно. Обнаруженные списанные решения не засчитываются всем авторам.

Адыгейский государственный университет
Магистерская программа «Современная теория игр»
Сложность вычислений, осень 2018
Зачётные задачи, вариант №1

1. Придумайте **NP**-полные языки A и B, такие что $A \cap B$ и $A \setminus B$ также **NP**-полные.

2. Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{SUBGRAPH\text{-}ISOMORPHISM} = \{(G, H) \mid$ в G есть подграф (необязательно индуцированный), изоморфный $H\}$.

3. Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{CLAQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе G есть полный двудольный подграф с долями размера по $k\}$. (Иными словами, найдутся V_1 и V_2, такие что $|V_1| = |V_2| = k$ и $V_1 \times V_2 \subset E$)..

4. Пусть $A \in \mathbf{RP}$ и $B \in \mathbf{RP}$. Докажите, что $A \cup B \in \mathbf{RP}$.

5. Придумайте вероятностный алгоритм для приближённого решения задачи $\mathsf{MAXEXACTTWO4SAT}$ с точностью $\frac{3}{8}$ и дерандомизируйте его методом условных математических ожиданий.
(Задача $\mathsf{MAXEXACTTWO4SAT}$: по пропозициональной формуле в виде 4-КНФ найти максимальное число дизъюнктов, в которых одновременно могут быть выполнены ровно 2 литерала).

6. Постройте систему интерактивных доказательств для языка $\mathsf{GI\text{-}ONLY\text{-}PAIRS} = \{(G_1, \ldots, G_m) \mid$ для каждого i существует и единственен $j \neq i$, такой что G_i и G_j изоморфны$\}$.

Адыгейский государственный университет
Магистерская программа «Современная теория игр»
Сложность вычислений, осень 2018
Зачётные задачи, вариант №2

1. Придумайте **NP**-полные языки A и B, такие что $A \cap B$ и $\overline{A \cup B}$ бесконечны и принадлежат **P**.

2. Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{CLIQUE\text{-}FIXED\text{-}VERTEX} = \{(G, k, v) \mid$ в неориентированном графе G есть клика размера k, содержащая вершину $v\}$.

3. Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{RURALPOSTMAN} = \{(G, l, E', b) \mid G = (V, E)$ — граф, $l \colon E \to \mathbb{N}$ — длины рёбер, $E' \subset E$, $b \in \mathbb{N}$ и существует цикл длины не более b, проходящий хотя бы один раз по всем рёбрам из $E'\}$..

4. Пусть задача о проверке арифметических схем на равенство не лежит одновременно в **RP** и **coRP**. Докажите, что тогда задача о проверке, что из трёх схем ровно две задают одну и ту же функцию, лежит в **BPP**, но не лежит ни в **RP**, ни в **coRP**.

5. Придумайте вероятностный алгоритм для приближённого решения задачи $\mathsf{MAXHYPERGRAPH3COL}$ с точностью $\frac{8}{9}$ и дерандомизируйте его методом условных математических ожиданий.
(Задача $\mathsf{MAXHYPERGRAPH3COL}$: по 3-регулярному гиперграфу H найти максимальное возможное число неодноцветных гиперрёбер при какой-либо раскраске вершин в 3 цвета).

6. Постройте систему интерактивных доказательств для языка $\mathsf{HALFGNI} = \{(G_1, \ldots, G_k) \mid$ среди этих графов по крайней мере $k/2$ неизоморфных$\}$.

Адыгейский государственный университет
Магистерская программа «Современная теория игр»
Сложность вычислений, осень 2018
Зачётные задачи, вариант №3

1. Докажите, что если A и B являются $\mathbf{NP}$-полными, то и $\{(a, b) \mid a \in A \vee b \in B\}$ также является $\mathbf{NP}$-полным.

2. Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CLIQUE\text{-}AFTER\text{-}EXPANSION} = \{(G, k) \mid$ в неориентированный граф G можно добавить 10 рёбер, так чтобы в результирующем графе была клика размера $k\}$.

3. Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{MAXLEAFSPANTREE} = \{(G, k) \mid$ в графе G есть остовное дерево с не менее чем k листьями$\}$. (Остовным деревом в графе G называется подграф G, который является деревом и содержит все вершины G)..

4. Докажите, что если $A \in \mathbf{BPP}$ и $B \in \mathbf{BPP}$, то $\{(a, b) \mid a \in A \leftrightarrow b \in B\} \in \mathbf{BPP}$. (Т.е. верно либо ни одно из условий $a \in A$ и $b \in B$, либо оба).

5. Придумайте вероятностный алгоритм для приближённого решения задачи $\mathsf{MAX3COL\text{-}SMALLDIFF}$ с точностью $\frac{4}{9}$ и дерандомизируйте его методом условных математических ожиданий.
(Задача $\mathsf{MAX3COL\text{-}SMALLDIFF}$: по неориентированному графу G найти максимальное возможное число рёбер, цвета концов которых отличаются ровно на 1, в некоторой раскраске в 3 цвета).

6. Постройте систему интерактивных доказательств для языка $\mathsf{GI\text{-}NO\text{-}EQUAL\text{-}CLASSES} = \{(G_1, \ldots, G_m) \mid$ в разбиении этого набора графов на классы эквивалентности по отношению изоморфизма нет двух классов одинакового размера$\}$.

Адыгейский государственный университет
Магистерская программа «Современная теория игр»
Сложность вычислений, осень 2018
Зачётные задачи, вариант №4

1. Придумайте **NP**-полные языки A и B, такие что $A \cup B \in \mathbf{P}$.

2. Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{3COL\text{-}PARTITION} = \{(G, k) \mid$ вершины неориентированного графа G можно разбить на k групп, таких что подграф, индуцированный каждой группой, можно раскрасить в 3 цвета$\}$.

3. Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{MINMAXCLIQUE} = \{(G, k) \mid$ в неориентированном графе G есть неувеличиваемая клика из не более чем k вершин $\}$.

4. Докажите, что существуют $A \subset B \subset C$, такие что A и C не лежат в **BPP**, а $B \in \mathbf{BPP}$.

5. Придумайте вероятностный алгоритм для приближённого решения задачи $\mathsf{MAXHYPERGRAPH2COL}$ с точностью $\frac{3}{4}$ и дерандомизируйте его методом условных математических ожиданий.
(Задача $\mathsf{MAXHYPERGRAPH2COL}$: по 3-регулярному гиперграфу H найти максимальное возможное число неодноцветных гиперрёбер при какой-либо раскраске вершин в 2 цвета).

6. Постройте систему интерактивных доказательств для языка $\mathsf{MULTIGNI} = \{(G_1, \ldots, G_m, k) \mid$ среди графов $G_1, \ldots, G_m$ есть хотя бы k попарно неизоморфных$\}$.

Адыгейский государственный университет
Магистерская программа «Современная теория игр»
Сложность вычислений, осень 2018
Зачётные задачи, вариант №5

1. Придумайте **NP**-трудные языки A и B, такие что $A \cap B$ является **coNP**-полным.

2. Докажите **NP**-полноту языка HAMCYCLE-FIXED-ARC $= \{(G, e) \mid$ в ориентированном графе G найдётся гамильтонов цикл, проходящий через ребро $e\}$.

3. Докажите **NP**-полноту языка GRAPHCONTRACTABILITY $= \{(G, H) \mid$ из графа G можно получить граф H последовательностью стягиваний рёбер$\}$. (При стягивании ребра (u, v) вместо него образуется новая вершина w, соединённая рёбрами с вершинами, с которыми была соединена хотя бы одна из вершин u и v)..

4. Докажите, что если $A \in \mathbf{BPP}$ и $B \in \mathbf{BPP}$, то $\{(a, b) \mid a \in A \oplus b \in B\} \in \mathbf{BPP}$. (Т.е. верно ровно одно из условий $a \in A$ и $b \in B$).

5. Придумайте вероятностный алгоритм для приближённого решения задачи MAX3COL с точностью $\frac{2}{3}$ и дерандомизируйте его методом условных математических ожиданий.
(Задача MAX3COL: по неориентированному графу G найти максимальное возможное число неодноцветных рёбер при какой-либо раскраске в 3 цвета).

6. Постройте систему интерактивных доказательств для языка GI-ONLY-BINARY-DEGREES $= \{(G_1, \ldots, G_m) \mid$ в разбиении этого набора графов на классы эквивалентности по отношению изоморфизма размеры всех классов являются степенями двойки$\}$.

Адыгейский государственный университет
Магистерская программа «Современная теория игр»
Сложность вычислений, осень 2018
Зачётные задачи, вариант №6

1. Придумайте $A \subset B \subset C$, такие что A и C лежат в $\mathbf{P}$, при этом A и $\overline{C}$ бесконечны, а B является $\mathbf{NP}$-полным.

2. Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{HAMADDITION} = \{(G, k) \mid$ в неориентированный граф G можно добавить не более k рёбер, так чтобы в результирующем графе был гамильтонов цикл$\}$.

3. Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{EXACTONE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал$\}$..

4. Пусть $A \in \mathbf{RP}$ и $B \in \mathbf{RP}$. Докажите, что $A \cap B \in \mathbf{RP}$.

5. Придумайте вероятностный алгоритм для приближённого решения задачи $\mathsf{MAX4COL}$ с точностью $\frac{3}{4}$ и дерандомизируйте его методом условных математических ожиданий.
(Задача $\mathsf{MAX4COL}$: по неориентированному графу G найти максимальное возможное число неодноцветных рёбер при какой-либо раскраске в 4 цвета).

6. Постройте систему интерактивных доказательств для языка $\mathsf{GI\text{-}NO\text{-}PAIRS} = \{(G_1, \ldots, G_m) \mid$ если какие-то графы G_i и G_j, где $i \neq j$, изоморфны, то найдётся граф G_k, $k \neq i$, $k \neq j$, изоморфный им обоим$\}$.