РАНХиГС
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Andreu Mas-Colell,
Michael D. Whinston and Jerry R. Green

MICROECONOMIC THEORY

СЕРИЯ «АКАДЕМИЧЕСКИЙ УЧЕБНИК»

Андреу Мас-Колелл,
Майкл Д. Уинстон, Джерри Р. Грин

МИКРОЭКОНОМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Книга 1

Перевод с английского
Под научной редакцией М. И. Левина и Е. В. Покатович

Рекомендуется Российской академией народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации в качестве учебника для студентов ВПО, обучающихся по экономическим направлениям и специальностям, а также для студентов бакалавриата, углубленно изучающих микроэкономику, студентов магистратуры, аспирантов, преподавателей экономических факультетов вузов.
(Основание — приказ Министерства образования и науки №130 от 22 февраля 2012 г.)

Издательский дом ДЕЛО

Москва ◦ 2016

УДК 330.3
ББК 65
М31

Перевод с английского:

Юрий Автономов (гл. 21, 22); Кирилл Букин (гл. 11, 19, Математическое приложение); Владимир Бусыгин (Указатель); Евгения Левина (гл. 7, 8); Глеб Покатович (гл. 12); Елена Покатович (гл. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 13, 14, 15, 16, Указатель); Елена Попова (гл. 8, 9); Данил Федоровых (гл. 23); Михаил Фреер (гл. 20); Надежда Шилова (Введение, гл. 17, 18); Ирина Шевелева (гл. 20, 21, 22)

Мас-Колелл, А., Уинстон, М., Грин, Д.

М31 Микроэкономическая теория. Книга 1 / Андреу Мас-Колелл; Майкл Д. Уинстон; Джерри Р. Грин; пер. с англ.; под науч. ред. М. И. Левина, Е. В. Покатович. — М. : Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2016. — 736 с. — (Академический учебник).

ISBN 978-5-7749-0963-6 (общ.)
ISBN 978-5-7749-1104-2 (кн. 1)

Многие специалисты по микроэкономической теории ожидали появления текста, который смог бы обеспечить сбалансированный и углубленный анализ основ микроэкономики. Мастерски сочетая результаты многолетнего преподавания микроэкономики в Гарвардском университете, Андреу Мас-Колелл, Майкл Уинстон и Джерри Грин выполнили эту задачу, написав потрясающую работу «Микроэкономическая теория». Авторы задались целью создать прочную организационную основу, на которой строится эффективное преподавание микроэкономической теории. Результат представляет беспрецедентную глубину охвата всех существенных тем, позволяя преподавателям микроэкономики формировать свои курсы в соответствии с личными приоритетами и стилями. Такие темы, как автономная теория игр, информационная экономика и теория общего равновесия в условиях неопределенности, получают то внимание, которое соответствует их роли в пределах дисциплины. Авторы посвятили теории игр целый раздел, сделав его самостоятельным, чтобы преподаватели смогли возвращаться к этой теме по мере развития курса и в тот момент, когда им это удобно. Представление материала выполнено ясно, доступно и привлекательно, что позволяет студенту уверенно продвигаться, приобретая знания.

Многочисленные упражнения к каждой главе помогают студентам отточить свои навыки, а словарь терминов, выполненный в качестве приложения к каждой главе и снабженный перекрестными ссылками, отсылающими к предыдущим пяти разделам, предлагает доступное руководство по терминологии предмета. Преподаватели микроэкономики больше не нуждаются в том, чтобы прибегать к лекциям, разбросанным по разным учебникам. Хорошо написанная тремя наиболее влиятельными учеными в этой области «Микроэкономическая теория» привносит полноту и универсальность в изучение предмета аспирантами, чего уже давно не хватало.

УДК 330.3
ББК 65

ISBN 978-5-7749-0963-6 (общ.)
ISBN 978-5-7749-1104-2 (кн. 1)

Эстер — спасибо за всё.

Э.М.-К.

Бонни — за то, что вселяла в меня оптимизм;
Ною — который разделил со мной радость от проделанной работы
и постоянно оказывал дружескую поддержку;
И Нан — которая помогла мне начать работу.

М.Д. У.

Памеле — за ее доброту, выдержку, стойкость и силу духа.

J.R.G.

Оглавление

Часть III. Рыночное равновесие и провалы рынка

Часть IV. Общее равновесие

Предисловие

Микроэкономическая теория создавалась как учебное пособие для курса микроэкономики первого года аспирантуры. Главным источником материалов для этой книги стали записи тех лекций, которые мы читали на протяжении многих лет студентам курса микроэкономики первого года в Гарварде. Взяв за основу эти лекции, мы попытались создать такой текст, который доступным и в то же время строгим образом покроет полный набор тех тем, которые обычно входят в первый год обучения.

Стоит пояснить нелексикографический порядок наших имен. Данный проект был впервые задуман и начал осуществляться нами тремя весной 1990 года. Однако в феврале 1992, после того как ранние версии большей части глав книги уже были записаны в черновом варианте, Джерри Грин был избран на должность проректора Гарвардского университета, и эта позиция вынудила его приостановить свою работу над проектом. С этого момента и до завершения рукописи в июне 1994 Андреу Мас-Колелл и Майкл Уинстон приняли на себя полную ответственность за проект. Когда же Джерри Грин сложил полномочия проректора, оригинальная команда из трех человек воссоединилась для гранки и верстки зимой 1994/95.

Организация книги

Микроэкономическая теория как дисциплина начинается с рассмотрения поведения индивидуальных агентов и затем, основываясь на этом фундаменте, выстраивает теорию для получения агрегированных экономических результатов. *Микроэкономическая теория* (данная книга) следует тому же самому принципу. Она разделена на 5 частей. Часть I рассказывает о принятии индивидуальных решений. Она начинается с общего обзора моделей принятия индивидуальных решений и продолжается затем развитием классических теорий поведения потребителя и производителя. Часть II покрывает теорию игр, расширение теории индивидуального выбора на случаи взаимодействия нескольких агентов. В части III начинается разбор рыночного равновесия. Она открывается введением в конкурентное равновесие и фундаментальными теоремами благосостояния экономики в контексте маршалловского частичного равновесия. Затем в ней рассматриваются провалы рынка в присутствии экстерналий, рыночной власти и асимметричности информации. Часть IV значительно расширяет предыдущую тему конкурентных рынков в контексте общего рыночного равновесия. Позитивистский и нормативный аспекты данной теории детально рассматриваются, как и ее расширения на случаи равновесия в условиях неопределенности и равновесия во времени. В части V рассматривается экономика благосостояния. В ней обсуждаются возможности агрегирования индивидуальных предпочтений в социальные предпочтения как с межличностным сравнением полезности так и без него. Также рассматривается применение социальных выборов в присутствии неполноты информации о предпочтениях агентов. Математические приложения содержат введения в наиболее сложные математические концепции, используемые в книге (такие как выпуклые/вогнутые функции, методы ограниченной оптимизации, теоремы о неподвижной точке и т. д.), а также ссылки для дальнейшего чтения.

Стиль книги

Выбирая содержание *Микроэкономической теории*, мы старались ошибаться в сторону включения. То есть нашей целью было удостовериться в охвате большей части тем, которые преподаватели первого года курса микроэкономической теории в аспирантуре хотели бы объяснить студентам. Неизбежным последствием такого выбора стало то, что книга охватывает больше тем, чем какой-либо один преподаватель первого года обучения может адекватно обсудить (мы, безусловно, никогда не давали все эти темы за один год). Мы надеемся, что широта тем, представленных здесь, позволит преподавателям свободно выделить те, которые они считают наиболее важными.

Мы постарались сделать стиль повествования доступным и одновременно строгим. Где только это возможно, мы давали точные определения и формальные доказательства утверждений. В то же время мы сопроводили анализ подробными вербальными пояснениями и множеством примеров для иллюстрирования ключевых концепций. В тех местах, где мы считали тему или доказательство слишком сложным или же не таким важным, использовался уменьшенный шрифт, чтобы позволить студентам легко пропускать подобные фрагменты при первом чтении.

В каждой главе предлагается множество упражнений, расположенных от простых к сложным. Они отмечены буквами от A (наиболее простые) до C (наиболее сложные), для того чтобы помочь студентам овладеть материалом. Некоторые из этих упражнений появляются внутри текста глав, чтобы студенты могли проверить свое понимание материала по ходу чтения (почти все эти упражнения уровня A) .

Математическая подготовка, необходимая для чтения этой книги, ограничивается базовым знанием математического анализа, некоторыми простейшими понятиями линейной алгебры (хотя использование векторов и матриц постепенно вводится в части I) и знакомством с элементарными аспектами теории вероятности. Студентам также будет полезен некоторый опыт занятий микроэкономикой на бакалаврском уровне средней сложности.

Преподавание по данной книге

Материал этой книги может быть изложен в разной последовательности. Обычно мы преподавали части I–III за осенний семестр и части IV–V за весенний семестр (исключая некоторые темы в обоих случаях). Естественной альтернативой для такой последовательности (которая используется в нескольких факультетах, о которых мы знаем) является изучение частей I и IV осенью и частей II, III и V весной[1].

[1] Очевидным образом для программ, разделенных на четверти, требуются некоторые коррективы.

Преимуществом такой альтернативной последовательности является то, что анализ общего равновесия следует сразу после изучения индивидуального поведения на конкурентных рынках, которое представлено в части I. Недостатком и причиной, по которой мы не использовали такую последовательность в своем курсе, является то, что в этой последовательности первый семестр становится более абстрактным, в то время как наши студенты, по всей видимости, были бы рады заняться вещами несхожими с содержанием части I, то есть теорией игр, олигополиями и асимметричностью информации.

Эти главы были созданы довольно замкнутыми на себя, в результате чего они могут быть легко сдвинуты между различными частями для создания многих других последовательностей изложения материала в курсе. Например, мы часто преподаем теорию игр как "необходимую" базу, разделяя ее на части, которые обсуждаются непосредственно перед тем, как используются (например, главу 7, главу 8 и разделы 9.A–B перед изучением олигополии, разделы 9.C–D перед изложением сигнализации). Некоторые другие варианты включают преподавание агрегированных предпочтений (глава 21) сразу после индивидуального принятия решений или изложение задачи принципал — агент (глава 14), сигнализации и просвечивания (глава 13) и дизайна механизмов (глава 23) совместно в разделе курса, фокусирующегося на экономике информации.

Кроме того, даже в рамках каждой отдельной части последовательность тем часто может не соблюдаться. Например, типичным для многих программ является преподавание теории спроса, основанной на предпочтениях, до изучения выявленных предпочтений или теории выбора. Хотя мы считаем, что существуют причины для изменения этой последовательности таким образом, каким мы сделали это в части I2, мы убедились, что материалы, касающиеся спроса, могли быть рассказаны и этим, более традиционным, способом3.

О математических обозначениях

По большей части мы используем математические обозначения стандартным образом. Возможно, наиболее важным математическим правилом является договоренность держаться строгих матричных обозначений. Проще говоря, вектора всегда используются как *вектор-столбцы*, несмотря на то что они часто обозначаются в тексте как строки для экономии бумаги. Транспозиция вектор-столбца x обозначается как x^{T}. Когда берется скалярное произведение двух вектор-столбцов x и y, мы пишем $x \cdot y$; это имеет тот же смысл, что и $x^{\mathrm{T}}y$. Эти и другие аспекты матричных обозначений более подробно рассмотрены в разделе M.A Математических приложений.

Чтобы выделить определения и утверждения, мы решили обозначать их шрифтами, отличными от тех, что используются в остальных частях текста. Одним из неприятных последствий этого выбора стало то, что математические символы

[2] Например, гораздо проще рассказывать и получать свойства спроса в рамках теории выбора, в отличие от теории предпочтений. Кроме того, теория выбора дает вам практически все свойства спроса, следующие из предположения о существовании рациональных предпочтений.

[3] Чтобы поступить так, следует рассказать базовые принципы задачи потребителя, используя разделы 2.A–D и 3.A–D, обсудить свойства некомпенсированных и компенсированных функций спроса, косвенные функции полезности и функцию расходов, используя разделы 3.D–I и 2.E, и затем изучить теорию выявленных предпочтений, используя разделы 2.F и 3.J (и главу I для более общего обзора этих двух подходов) .

иногда выглядят не совсем так, как в остальном тексте. Мы надеемся, что благодаря этому предупреждению никакой путаницы не возникнет.

Символы суммы (Σ) используются по-разному. Иногда они записываются как

$$\sum_{n=1}^{N}$$

(обычно только в выделенных уравнениях), но часто для экономии бумаги мы записываем его как $\sum_{n=1}^{N}$. А во многих случаях, когда верхний и нижний пределы суммирования очевидны из контекста, мы пишем просто $\sum_{n}$. Такое же правило используется для символа произведения Π.

Также ниже описаны значения нескольких математических символов, чье использование несколько менее универсально в литературе (в этом списке $x = (x_1, \ldots, x_N)$ и $y = (y_1, \ldots, y_N)$ есть вектор-столбцы, в то время как X и Y есть множества):

Символ	*Значение*
$x \geq y$	$x_n \geq y_n$ для всех $n = 1, \ldots, N$.
$x \gg y$	$x_n > y_n$ для всех $n = 1, \ldots, N$.
$X \subset Y$	*слабое* включение множеств ($x \in X$, следовательно, $x \in Y$)
$X \backslash Y$	множество $\{x\colon x \in X$, но $x \notin Y\}$.
$E_x [f(x, y)]$	математическое ожидание функции $f(\cdot)$ от случайной переменной x. (Когда хотим обозначить ожидание от всех аргументов функции, мы пишем просто $E[f(x, y)]$.)

Благодарности

Многие люди внесли вклад в создание этой книги. Дилип Абре (Dilip Abreu), Даг Бернхейм (Doug Bernheim), Дэвид Кард (David Card), Праджит Дутта (Prajit Dutta), Стив Голдман (Steve Goldman), Джон Панцар (John Panzar) и Дэвид Пирс (David Pearce) — все они (храбро) испытывали на себе тестовое преподавание ранних версий рукописи в течение 1991/92 академического года. Их комментарии на ранних этапах внесли вклад в улучшение стиля этой книги до текущего состояния и привели к множеству других значительных улучшений текста. Наши коллеги (и в некоторых случаях бывшие студенты) Луи Коршон (Luis Corchon), Симон Грант (Simon Grant), Дрю Фаденберг (Drew Fudenberg), Чаки Хара (Chiaki Hara), Серхио Харт (Sergiu Hart), Бенгт Хольмстром (Bengt Holmstrom), Эрик Маскин (Eric Maskin), Джон Нашбар (John Nachbar), Мартин Осборн (Martin Osborne), Бен Полак (Ben Polak), Ариэль Рубинштейн (Ariel Rubinstein) и Мартин Вайцман (Martin Weitzman) внесли множество полезных предложений. Книга, несомненно, была бы лучше, если бы мы смогли использовать все их идеи.

Многие поколения студентов первого года аспирантуры Гарварда помогли нам своими вопросами, комментариями и исправлениями. Кроме того, некоторое число настоящих и бывших студентов играли более формальную роль в развитии книги, являясь ассистентами в данном исследовании, и способствовали его успешному завершению различными способами. Шира Левин (Shira Lewin) прочел всю рукопись, находя ошибки в наших доказательствах, предлагая улучшения в экспо-

зиции и даже (действительно часто) исправляя нашу грамматику. Чаки Хара (Chiaki Hara), Илья Сегал (Ilya Segal) и Стив Таделис (Steve Tadelis) с помощью Марка Нэшмена (Marc Nachman) проверили, чтобы многие упражнения в книге имели решения, и предложили, как их условия можно сформулировать корректным образом в тех случаях, когда наши первые попытки сделать это терпели неудачу. Также Чаки Хара и Стив Таделис предоставили нам обширные комментарии и исправления самого текста. Эмили Мехнер (Emily Mechner), Ник Палмер (Nick Palmer), Фил Панет (Phil Panet) и Билли Пайзр (Billy Pizer) были в числе студентов первого года, которые читали ранние версии наших черновиков летом 1992 года и сделали очень полезные предложения по поводу того, как мы могли бы представить материал наилучшим образом.

Бетси Карпентер (Betsy Carpenter) и Клаудия Наполилли (Claudia Napolilli) обеспечили профессиональную секретарскую поддержку проекта, помогая печатать некоторые черновики глав книги, копируя материал в очень жесткие сроки и оказывая помощь сотнями других способов. Глория Герриг (Gloria Gerrig) внимательно следила за нашими вечно увеличивающимися тратами.

Наш редактор в Оксфорде Херб Эддисон (Herb Addison) отвечал за развитие тестовой учебной программы, чтобы помочь нам на ранних этапах создания книги, и предложил свою поддержку в течение всего процесса составления книги. Лесли Филлипс (Leslie Phillips) из Оксфорда мы выражаем благодарность за то, что она сделала дизайн для этой книги, превзошедший наши самые смелые ожидания. Алан Честертон (Alan Chesterton) и все сотрудники *Keyword Publishing Services* блестяще выполнили свою работу, отредактировав и напечатав книгу в очень сжатый срок. Мы глубоко ценим их выдающийся профессионализм.

Влияние многих людей на эту книгу было косвенным, но от того не менее важным. Многие упражнения, появившиеся в книге, были созданы в различные годы как в Гарварде, так и в других местах. Мы отметили в упражнениях источники, которые были нам известны. Хорошие упражнения — исключительно важный ресурс. Мы благодарим неизвестных авторов многих упражнений, приведенных в книге.

Многие исследователи внесли вклад в темы, которые обсуждаются в данной книге. К сожалению, в каждой главе мы могли представить ссылки только на ограниченный круг источников. Многие интересные и важные работы не удалось упомянуть. Однако обычно их можно найти в ссылках на те работы, которые мы упомянули; действительно, большинство глав включают хотя бы одну отсылку к общему обзору данной темы.

Нам также посчастливилось преподавать курс микроэкономики первого года для студентов аспирантуры Гарварда в годы, предшествовавшие созданию данной книги, совместно с Кеном Эрроу (Ken Arrow), Дейлом Йоргенсоном (Dale Jorgenson), Стивом Марглином (Steve Marglin), Эриком Маскином (Eric Maskin) и Майком Спенсом (Mike Spence), которые научили нас многому о микроэкономике и ее преподавании.

Мы также благодарим *NSF* и *Sloan Foundation* за их поддержку нашей работы на протяжении всех этих лет. Кроме того *CASBS* предоставил идеальные условия Майклу Уинстону для завершения рукописи в академическом 1993/94 году. Университет Помпеу Фабра также был очень гостеприимен по отношению к Андреу Мас-Колеллу в связи со многими вопросами, касавшимися создания книги.

И наконец, мы хотели бы высказать особую благодарность тем, кто впервые заинтересовал нас предметом этой книги: Жерару Дебрё (Gerard Debreu), Лео Гурвицу

(Leo Hurwicz), Рою Реднеру (Roy Radner), Марселю Рихтеру (Marcel Richter) и Хьюго Сонненшейну (Hugo Sonnenschein) (A.M. — C.); Давиду Кассу (David Cass), Питеру Даймонду (Peter Diamond), Франклину Фишеру (Franklin Fisher), Сэнфорду Гроссману (Sanford Grossman) и Эрику Маскину (Eric Maskin) (M.D.W.); Эммануэлю Драндакису (Emmanuel Drandakis), Рону Джонсу (Ron Jones), Лайонелю Маккензи (Lionel McKenzie) и Эдварду Забелю (Edward Zabel) (J.R.G.) .

A.M. — C., M.D.D., L.R.G.

Массачусетс, Кембридж
Март 1995

От научного редактора

Книга Андреу Мас-Колелла, Майкла Д. Уинстона и Джерри Р. Грина «Микроэкономическая теория» представляет собой замечательное и редкое явление в экономической литературе.

Написанная тремя выдающимися экономистами для магистров и аспирантов как учебник по микроэкономике, эта книга, по существу, является энциклопедией по центральным разделам микроэкономики и смежным областям — теории игр, экономике общественного сектора, экономике информации и многим другим.

Буквально за несколько лет с момента выхода в свет она стала классическим учебником практически во всех продвинутых университетах мира. Причины такой уникальности — в широчайшем покрытии тем (чтобы убедиться в этом, достаточно посмотреть на оглавление книги), глубине и четкости изложения сложных разделов современной экономической теории. Подача материала не препятствует возможности использовать отдельные части книги для специальных курсов, тем более что весь необходимый для понимания материал содержится в этом же учебнике.

Несмотря на многочисленные формулы, теоремы и доказательства, книга эта посвящена экономике, а не математической экономике или математическим методам в экономике, как может показаться с первого взгляда. Благодаря использованию современного аналитического аппарата авторы добились ясности и глубины изложения, без которых учебники по экономической теории подчас превращаются в набор догм, не позволяющих вполне однозначно понять, что хочет сказать автор и на основании чего он строит свои умозаключения (не говоря уж о том, что такой подход препятствует развитию теории и ее корректному использованию для решения реальных проблем).

Русскоязычному читателю эта книга должна напомнить два замечательных учебника — аналогичные энциклопедии в соответствующих областях знаний. Это трехтомник Г. М. Фихтенгольца по математическому анализу и элементарный учебник физики под редакцией Г. С. Ландсберга в трех томах, сыгравшие огромную роль в развитии отечественного образования и науки. Как и упомянутые две книги, «Микроэкономическую теорию» следует изучать с карандашом в руках, а не пролистывать ее, лежа на диване. Она требует и соответствующей математической подготовки (чему способствует математическое приложение — своеобразный учебник по математике), и упорства в разборе предпосылок, выводов и решений задач, и, конечно, любви к анализу экономических коллизий, с которым мы все сталкиваемся в повседневной жизни.

В России книга «Микроэкономическая теория» использовалась как пособие для изучения экономической теории с момента ее написания благодаря проф. Андреу МасКоллелу — одному из активнейших участников создания в 1992 году Российской экономической школы. Очень скоро этот учебник стал основой для изучения продвинутой микроэкономики в Высшей школе экономики и Академии народного хозяйства, а также на факультетах с повышенным уровнем подготовки экономистов в университетах Москвы, Санкт-Петербурга, Новосибирска и других городов.

Этой книге в значительной мере обязаны своим образованием многие российские молодые, и не очень, экономисты — теоретики и практики.

Для того чтобы обеспечить широкий доступ русскоязычного читателя к этой книге, и предпринято ее настоящее издание. В отличие от англоязычного оригинала, это двухтомник, но с единой нумерацией, причем каждый том снабжен предметным указателем.

Перевод книги и ее издание потребовали большой работы, серьезных усилий и упорства переводчиков, редакторов и наборщиков. Сложность определялась не только большим объемом книги и трудностью материала, но и общепринятой русскоязычной терминологией, а порой и отсутствием русскоязычных аналогов соответствующих английских понятий. Благодаря усилиям всего коллектива переводчиков и постоянным консультациям В. П. Бусыгина и Е. В. Покатович, чей вклад в перевод и редактуру трудно переоценить, книга пополнилась Предметным указателем — по существу, русско-английским словарем по микроэкономике. Перевод и редактирование явили собой итеративный процесс, позволивший — хвала вам, переводчики и редакторы (и, конечно, верстальщики!) — достичь (локального) оптимума, очень хочется надеяться, близкого к глобальному!

Спасибо всем нашим коллегам и студентам, которые преподавали и учились по фрагментам этой книги. Спасибо всему коллективу редакции.

Особая благодарность за постоянную поддержку в осуществлении перевода и издании книги В. А. Мау, А. Д. Радыгину, С. Г. Синельникову-Мурылёву, Р. М. Энтову.

Можно надеяться, что книга будет полезна не только студентам и аспирантам экономических факультетов, профессиональным экономистам, но также и физикам, математикам, политологам, бизнесменам — всем, кому интересно узнать, что же такое современная микроэкономическая теория.

Что касается недостатков перевода и возможных опечаток, то, сознавая свою ответственность и вину за них, предлагаю сообщать о замеченных неточностях и направлять свои предложения по улучшению перевода на сайт www.microtheory.ru, что с благодарностью будет воспринято всеми читателями этой великолепной книги!

М. И. Левин

Часть I

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ

Целью микроэкономической теории является моделирование деятельности индивидуальных экономических агентов, преследующих свои частные интересы, и их взаимодействия. Поэтому мы начинаем изучение микроэкономической теории с анализа индивидуального принятия решений.

Глава 1 представляет собой краткую вводную часть. Она содержит введение в теорию индивидуального принятия решений в случае произвольных альтернатив. В этой главе формулируется проблема индивидуального выбора и излагаются два подхода к моделированию принятия решений. Один из них, *основанный на предпочтениях*, предполагает, что индивид, осуществляющий выбор, имеет некоторое отношение предпочтения на множестве возможных альтернатив, удовлетворяющее определенным аксиомам рациональности. Второй подход, *основанный на выборе,* базируется непосредственно на наблюдаемом поведении индивида и предполагает введение определенных ограничений на согласованность выбора. Эти ограничения играют роль, аналогичную той, которую выполняют аксиомы рациональности в подходе, основанном на предпочтениях.

В остальных главах первой части изучается индивидуальное принятие решений непосредственно в экономическом контексте. Как принято в учебниках по микроэкономике (и наш учебник здесь не исключение), выделяется два множества экономических агентов: *индивидуальные потребители* и *фирмы*. Поскольку потребители владеют и управляют фирмами, т. е. в конечном счете именно они и определяют действия фирм, можно считать, что именно потребители являются фундаментальным элементом экономической модели. В связи с этим мы начнем наше рассмотрение теории принятия экономических решений с изучения теории потребителя.

В главах 2 и 3 изучается поведение потребителей в рыночной экономике. В главе 2, начинающейся с описания задачи принятия решения потребителем, вводится понятие *функции спроса* потребителя. Затем исследуется влияние ряда естественных свойств потребительского выбора на функции спроса. Это исследование также содержит анализ поведения потребителя в рамках подхода, основанного на наблюдаемом выборе индивида, представленном в главе 1.

В главе 3 излагается классическая теория потребительского спроса, основанная на предпочтениях. Здесь изучаются такие вопросы, как максимизация полезности, минимизация расходов, двойственность, интегрируемость (восстановление) и измерение изменений в благосостоянии. В главе 2 также обсуждается связь данной теории с подходом, основанным на наблюдаемом выборе потребителя.

В экономическом анализе зачастую важнее понимать агрегированное поведение потребителей, чем поведение отдельного потребителя. В главе 4 мы рассматриваем вопрос о том, в какой мере свойства индивидуального спроса, проанализированные в главах 2 и 3, справедливы для агрегированного потребительского спроса.

В главе 5 исследуется поведение фирмы. Мы начинаем изучение фирмы с постановки ее задачи, сформулированной исходя из предпосылки о максимизации прибыли. Таким образом, мы получаем хорошо разработанную теорию, аналогичную той, которая была построена для потребительского спроса. Однако этот анализ в некотором смысле можно рассматривать лишь как первый шаг в исследовании поведения фирмы, поскольку он базируется на гипотезе о том, что цель фирмы состоит в максимизации прибыли. В последнем разделе главы мы рассматриваем обстоятельства, при которых максимизация прибыли действительно является целью владельцев фирм.

В главе 6 мы включаем риск и неопределенность в теорию индивидуального принятия решений. В большинстве экономических ситуаций индивиды или фирмы сталкиваются с неопределенностью возможных исходов. В связи с этим теория принятия решений в условиях неопределенности, изложенная в этой главе, имеет широкий спектр экономических приложений, многие из которых мы обсудим далее в нашей книге.

Глава 1. Предпочтения и выбор

1.A. Введение

В этой главе мы приступаем к изучению теории индивидуального принятия решения при наиболее общей постановке задачи. В остальных главах части 1 этот подход будет развит, а также будет продемонстрировано его применение для анализа принятия экономических решений.

Отправной точкой любой задачи индивидуального принятия решений является *множество возможных (взаимоисключающих) альтернатив*, из элементов которого индивид должен сделать свой выбор. Будем обозначать это множество через X. В данной главе мы будем считать, что это множество может быть произвольным. Например, когда индивид сталкивается с выбором пути карьерного роста, множество X может содержать следующие альтернативы: {поступить на юридический факультет, поступить на экономический факультет, поступить в бизнес-школу… стать рок-звездой}. В главах 2 и 3, когда мы начнем рассмотрение выбора потребителя, элементами множества X будут различные уровни потребления.

Существует два различных подхода к моделированию поведения индивида при необходимости сделать некоторый выбор. Согласно первому подходу, изложенному в разделе 1.B, базовой характеристикой принимающего решение индивида считаются его вкусы, которые описываются отношением предпочтения. В основе этой теории лежит постулирование аксиом рациональности индивидуальных предпочтений, а затем анализируется влияние предпочтений на выбор индивида, т. е. на то, какое именно решение он примет. Этот основанный на предпочтениях подход является наиболее традиционным при изучении индивидуального принятия решений, и именно его мы будем придерживаться на протяжении всей книги.

Во втором подходе, рассматриваемом в разделе 1.C, за основу берется непосредственно сам выбор, сделанный индивидом, и в соответствии с этим вводятся предположения относительно наблюдаемого поведения индивида. Центральное место в этом подходе занимает *слабая аксиома выявленных предпочтений*, требующая некоторой согласованности поведения индивида. Данная аксиома играет в этом подходе роль, аналогичную той, которая отводится предпосылкам о рациональности предпочтений в первом подходе. Подход, основанный на исследовании выбора индивида, имеет ряд привлекательных особенностей. В принципе он дает простор для анализа более общих форм индивидуального поведения, чем это возможно в подходе, основанном на предпочтениях. К тому же при таком подходе выдвигаются предположения относительно непосредственно наблюдаемых явлений (поведения индивида), а не ненаблюдаемых предпочтений. Кроме того, данный подход демонстрирует (и это, возможно, самое важное), что теория индивидуального принятия решений необязательно должна базироваться на выявлении факторов, лежащих в основе принятия решений, а может иметь только поведенческую основу.

Представляет интерес и сама по себе взаимосвязь между двумя подходами к моделированию индивидуального поведения. Изучению этого вопроса посвящен раздел 1.D, где сначала анализируется, какие характеристики индивидуального выбора следуют из подхода, основанного на предпочтениях, а затем приводятся условия, при которых выбор обусловливается существованием данных предпочтений. (Этот вопрос также поднимается в главах 2 и 3 в более узком контексте спроса потребителя.)

Более глубокое и расширенное изложение материала данной главы можно найти в работе (Richter, 1971).

1.B. Отношения предпочтения

В основанном на предпочтениях подходе цели, преследуемые индивидом, описываются *отношением предпочтения*, которое мы обозначим через $\succsim$. Формально отношение предпочтения $\succsim$ — это бинарное отношение на множестве альтернатив X, позволяющее сравнивать пары альтернатив $x, y \in X$. Запись $x \succsim y$ означает, что «набор x по крайней мере не хуже, чем набор y». На основе отношения предпочтения $\succsim$ мы можем определить два других важных отношения на множестве X:

1. Отношение *строгого предпочтения* $\succ$ определяется следующим образом:

   $$x \succ y \Leftrightarrow x \succsim y \text{ и неверно, что } y \succsim x.$$

   Читается это так: «набор x предпочитается набору y»[1].
2. Отношение *безразличия* ~ определяется следующим образом:

   $$x \sim y \Leftrightarrow x \succsim y \text{ и } y \succsim x.$$

   Читается это так: «набор x эквивалентен набору y».

---

[1] Знак $\Leftrightarrow$ следует читать как «тогда и только тогда». В экономической литературе иногда запись $x \succsim y$ трактуют как «набор x нестрого предпочитается набору y», а запись $x \succ y$ — как «набор x строго предпочитается набору y». Мы будем придерживаться приведенной выше терминологии.

В большей части микроэкономической теории предполагается, что предпочтения индивида *рациональны*. Гипотеза рациональности состоит из двух базовых предпосылок относительно отношения предпочтения $\succsim$: *полноты* и *транзитивности*[2].

Определение 1.B.1. Отношение предпочтения $\succsim$ является *рациональным*, если обладает следующими двумя свойствами:

1) *Полнота*: для любых $x, y \in X$ выполнено: либо $x \succsim y$, либо $y \succsim x$ (либо и то и другое).
2) *Транзитивность*: для любых $x, y, z \in X$, если $x \succsim y$ и $y \succsim z$, то $x \succsim z$.

Предположение о том, что отношение предпочтения $\succsim$ является полным, означает, что индивид обладает «хорошо определенными» предпочтениями в отношении любых двух возможных альтернатив. Не стоит недооценивать силу этого предположения. В действительности выбирать из альтернатив, выходящих за рамки привычного опыта, довольно сложно: чтобы выявить свои предпочтения относительно таких альтернатив, требуются немалые усилия и тщательное обдумывание. Аксиома полноты говорит о том, что эта задача имеет решение: индивиды делают только обдуманный выбор.

Транзитивность, составляющая основу концепции рациональности, также представляет собой довольно сильное предположение. Транзитивность означает, что невозможна ситуация, когда индивид сталкивается с последовательностью попарных сравнений, в отношении которых его предпочтения образуют цикл: например, когда предпочтения таковы, что яблоко по крайней мере не хуже банана, а банан по крайней мере не хуже апельсина, но при этом индивид предпочитает апельсин яблоку. Как и свойство полноты, свойство транзитивности вряд ли будет выполнено в том случае, когда индивид вынужден оценивать альтернативы, выходящие за рамки его привычного опыта. Однако по сравнению со свойством полноты данное свойство является более фундаментальным в том смысле, что бóльшая часть экономической теории перестает быть верной, если экономические агенты имеют нетранзитивные предпочтения.

Предпосылка о полноте и транзитивности отношения предпочтения $\succsim$ порождает определенные свойства строгого отношения предпочтения $\succ$ и отношения безразличия ~. Эти свойства приведены в утверждении 1.B.1, доказательство которого мы опускаем (в конце данного раздела в упражнениях 1.B.1 и 1.B.2 вам предлагается доказать их самостоятельно).

[2] Заметим, что в экономической литературе не существует единой терминологии для этого случая: наряду с понятием рационального отношения предпочтения используются также понятия *слабого порядка* и *полного предпорядка*. К аксиомам полноты и транзитивности иногда добавляется предпосылка о *рефлексивности* отношения предпочтения $\succsim$ (которая определяется так: для любого $x \in X$ выполнено: $x \succsim x$). Это свойство в действительности следует из полноты и поэтому является избыточным.

Утверждение 1.B.1. Если отношение предпочтения $\succsim$ является рациональным, то:

1) отношение строгого предпочтения $\succ$ является *иррефлексивным* (т. е. невозможно $x \succ x$) и *транзитивным* (т. е. если $x \succ y$ и $y \succ z$, то $x \succ z$);
2) отношение безразличия $\sim$ является *рефлексивным* (т. е. $x \sim x$ для всех x), *транзитивным* (т. е. если $x \sim y$ и $y \sim z$, то $x \sim z$) и *симметричным* (т. е. если $x \sim y$, то $y \sim x$);
3) если $x \succ y \succsim z$, то $x \succ z$.

Иррефлексивность отношения строгого предпочтения $\succ$ и рефлексивность и симметричность отношения безразличия $\sim$ — крайне важные свойства. Что еще более важно, согласно утверждению 1.B.1, из рациональности отношения $\succsim$ следует, что оба отношения, $\succ$ и $\sim$, являются транзитивными. Кроме того, свойство, аналогичное транзитивности, выполнено и для отношения $\succ$ при сочетании с отношением «по крайней мере не хуже чем» $\succsim$.

Предпочтения индивида могут не удовлетворять свойству транзитивности по ряду причин. Одна из сложностей возникает вследствие проблемы *едва заметных различий*. Например, если мы попросим индивида для покраски комнаты выбрать один из двух очень похожих оттенков серого, то он может оказаться не в состоянии объяснить различие между этими двумя цветами, и поэтому они для него будут эквивалентны. Предположим теперь, что этому же индивиду предлагается выбор из двух более светлых оттенков серого. Он опять, скорее всего, не увидит между ними разницы. Если мы продолжим в том же духе, предлагая индивиду для сравнения все более светлые оттенки серого, то на каждом шаге он по-прежнему не будет видеть между ними различия. Однако если мы предложим ему выбрать между первоначальным серым цветом (наиболее темным) и конечным (наиболее светлым, почти белым), то индивид сможет легко различить эти цвета и предпочесть один из них другому. Но это противоречит свойству транзитивности предпочтений.

Другой возможной проблемой может стать способ, которым альтернативы предлагаются для сравнения. Она известна как проблема *подачи информации*. Рассмотрим следующий пример, позаимствованный из работы (Kahneman, Tversky, 1984).

> «Предположим, вы собираетесь купить стереосистему за 125 долларов и калькулятор за 15 долларов. Продавец сообщает вам, что на калькуляторы объявлена распродажа и они продаются по цене на 5 долларов ниже в другом магазине этой сети, расположенном в 20 минутах ходьбы от данного. Стереосистемы в том магазине продаются по той же цене. Отправитесь ли вы в другой магазин?»

Оказывается, что доля респондентов, готовых пойти в другой магазин, чтобы получить 5 долларов скидки, гораздо выше доли тех, кто согласился отправиться в другой магазин, когда скидка 5 долларов предоставлялась на стереосистемы, несмотря на то что экономия, связанная с необходимостью идти в другой магазин, в обоих случаях одинакова[3]. Действительно, казалось бы, следовало ожидать, что ответом на следующий вопрос будет «мне безразлично»:

> «В силу отсутствия товара в данном магазине, чтобы купить два необходимых товара, вам придется отправиться в другой магазин, но при этом в качестве компенсации вы получите скидку 5 долларов на любой из двух товаров. Важно ли вам, на какой именно товар вы получите скидку 5 долларов?»

Если ответ утвердительный, то предпочтения индивида не удовлетворяют свойству транзитивности. Чтобы убедиться в этом, введем следующие обозначения:

x = поход в другой магазин и получение скидки 5 долларов на калькулятор;

y = поход в другой магазин и получение скидки 5 долларов на стереосистему;

z = покупка обоих товаров в первом магазине.

Выбор потребителей говорит о том, что $x \succ z$ и $z \succ y$, однако согласно ответу на последний вопрос: $x \sim y$. Большинство проблем подачи информации возникает в том случае, когда индивиды сталкиваются с выбором из альтернатив с неопределенными исходами (этот вопрос будет рассмотрен в главе 6). В работе (Kahneman, Tversky, 1984) изложен ряд интересных примеров поведения индивидов в такой ситуации.

В то же время часто нетранзитивное поведение легко объяснимо результатом взаимодействия нескольких более примитивных рациональных (а значит, транзитивных) предпочтений. Рассмотрим следующие два примера.

1) Домохозяйство, состоящее из мамы (M), папы (D) и ребенка (C), принимает решения на основе голосования по правилу простого большинства. Альтернативами развлечений на вечер пятницы выступают: посещение оперы (O), рок концерта (R) или шоу на льду (I). Все три члена домохозяйства имеют рациональные индивидуальные предпочтения: $O \succ_M R \succ_M I$, $I \succ_D O \succ_D R$, $R \succ_C I \succ_C O$, где $\succ_M$, $\succ_D$ и $\succ_C$ — транзитивные индивидуальные отношения строгого предпочтения мамы, папы и ребенка соответственно. Теперь представим, каковы будут результаты голосования по правилу большинства голосов в следующих парах: O против R, R против I и I против O. Результаты этого голосования (первое выигрывает O, второе — R, третье — I) говорят о том, что отношение предпочтения домохозяйства $\succsim$ будет нетранзитивным: $O \succ R \succ I \succ O$. (Нетранзитивность, проиллюстрированная в этом примере и известная как *парадокс Кондорсе*, представляет собой центральную проблему теории коллективного принятия решений. Дальнейшее обсуждение этой проблемы можно найти в главе 21.)
2) Нетранзитивные решения также могут трактоваться как результат изменения вкусов. Например, потенциальный курильщик может считать, что лучше выкурить одну сигарету в день, чем не курить совсем, и лучше совсем не курить, чем курить много. Но, начав курить по одной сигарете в день, он может изменить свои предпочтения, желая увеличить масштабы курения. Если обозначить через y воздержание от курения, через x — употребление одной сигареты в день, а через z — курение в большом количестве, то первоначально индивид выбирал y и его предпочтения были таковы, что $x \succ y \succ z$. Но, предпочтя альтернативу x альтернативам y и z, индивид изменил свою текущую ситуацию с y на x, что повлекло и изменение вкусов: $z \succ x \succ y$. Таким образом, мы получаем нетранзитивные предпочтения: $z \succ x \succ z$. Эта модель *изменения вкусов* играет важную роль в теории аддиктивного поведения. Также с ней связаны интересные аспек-

[3] Д. Канеман и А. Тверски объяснили такое поведение индивидов фактором «психологического расчета», когда размер скидки сравнивается с ценой товара, на который она предоставляется.

ты, возникающие во время обсуждения обязательств при принятии решений (см. Schelling, 1979). Рациональный индивид предвидит вызванное тем или иным решением изменение вкусов и поэтому старается прийти к первоначальному решению (Одиссей приказал привязать себя к мачте, когда его корабль приблизился к острову сирен).

Зачастую оказывается, что подход, основанный на предпосылке об изменении вкусов, дает хорошо структурированный взгляд на *нерациональные* решения. Философские обсуждения этой проблемы и смежных тем можно найти в работе (Elster, 1979).

Функция полезности

В экономике мы, как правило, описываем предпочтения с помощью *функции полезности*. Функция полезности $u(x)$ приписывает численное значение каждому элементу из множества X, ранжируя элементы множества X в соответствии с предпочтениями индивида. Более четко это сформулировано в определении 1.B.2.

Определение 1.B.2. Функция $u\colon X \to \mathbb{R}$ является функцией полезности, представляющей отношение предпочтения $\succsim$, если для всех $x, y \in X$

$$x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y).$$

Заметим, что функция полезности, представляющая предпочтения $\succsim$, определена не единственным образом. Для любой строго возрастающей функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функция $v(x) = f(u(x))$ представляет собой другую функцию полезности, описывающую те же предпочтения, что и функция $u(\cdot)$ (см. упражнение 1.B.3). Другими словами, важно только упорядочение альтернатив. Свойства функций полезности, инвариантные к любому строго возрастающему преобразованию, называются *ординалистскими* (порядковыми). *Кардиналистские* (количественные) свойства — это те свойства, которые не сохраняются при данных преобразованиях. Таким образом, отношение предпочтения, описываемое функцией полезности, является ординалистским свойством. С другой стороны, численные значения, приписываемые альтернативам из множества X, а следовательно, и разница значений функции полезности для разных альтернатив — это кардиналистские свойства.

Возможность описания предпочтений с помощью функции полезности непосредственно связана с предпосылкой о рациональности предпочтений. В частности, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1.B.2. Отношение предпочтения $\succsim$ может быть представлено функцией полезности только в том случае, если оно рационально.

Доказательство. Для доказательства утверждения мы покажем, что если существует функция полезности, описывающая предпочтения $\succsim$, то отношение предпочтения $\succsim$ должно быть полным и транзитивным.

Полнота. Поскольку функция полезности $u(\cdot)$ представляет собой вещественнозначную функцию, определенную на множестве X, то для любых $x, y \in X$ должно быть выполнено: либо $u(x) \geq u(y)$, либо $u(y) \geq u(x)$. Но поскольку $u(\cdot)$ — это функция полезности, представляющая предпочтения $\succsim$, то это означает, что либо $x \succsim y$, либо $y \succsim x$ (вспомните определение 1.B.2). Следовательно, отношение предпочтения $\succsim$ является полным.

Транзитивность. Предположим, что $x \succsim y$ и $y \succsim z$. Поскольку функция полезности $u(\cdot)$ представляет предпочтения $\succsim$, то должно быть выполнено: $u(x) \geq u(y)$ и $u(y) \geq u(z)$. Следовательно, $u(x) \geq u(z)$. В силу того что функция $u(\cdot)$ представляет предпочтения $\succsim$, из этого следует, что $x \succsim z$. Таким образом, мы показали, что из $x \succsim y$ и $y \succsim z$ следует, что $x \succsim z$, т. е. данные предпочтения являются транзитивными. ■

В то же время возникает вопрос, можно ли *любые* рациональные предпочтения $\succsim$ описать некоторой функцией полезности. Оказывается, что в общем случае ответ на этот вопрос отрицательный. Пример, когда это невозможно сделать, рассмотрен в разделе 3.G. Однако в случае, когда множество X конечно, мы всегда можем представить рациональное отношение предпочтения функцией полезности (см. упражнение 1.B.5). Более интересные случаи описания предпочтений функцией полезности (например, когда множество альтернатив не является конечным) будут продемонстрированы в следующих главах.

1.C. Правило выбора

Во втором подходе к описанию принятия решений элементарным объектом является непосредственно поведение индивида, осуществляющего выбор. Формально поведение индивида может быть представлено с помощью *структуры выбора*. Структура выбора $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ имеет две составляющие:

1) $\mathscr{B}$ — семейство (множество) непустых подмножеств множества X; т. е. любой элемент множества $\mathscr{B}$ — это множество $B \subset X$. По аналогии с теорией потребителя, изложенной в главах 2 и 3, мы называем элементы $B \in \mathscr{B}$ *бюджетными множествами*. Бюджетные множества из $\mathscr{B}$ следует понимать как исчерпывающий список всех вариантов выбора, с которыми индивид потенциально может столкнуться при институциональных, физических или каких-либо других социальных ограничениях. Следует заметить, что это множество необязательно содержит все возможные подмножества множества X. Действительно, это верно, например, в случае потребительского спроса, который будет проанализирован в последующих главах.

2) $C(\cdot)$ — это *правило выбора* (отображение), приписывающее непустое множество выбранных элементов $C(B) \subset B$ каждому бюджетному множеству $B \in \mathscr{B}$. Если $C(B)$ содержит единственный элемент, то этот элемент является выбором индивида из альтернатив множества B. Однако множество $C(B)$ может содержать более одного элемента. В этом случае элементы $C(B)$ — это альтернативы из B, которые индивид *может* выбрать, т. е. это *допустимые альтернативы* из B. Тогда множество $C(B)$ можно рассматривать как множество, содержащее те альтернативы, которые действительно будут выбраны, если индивид столкнется с задачей выбора альтернатив из множества B неоднократно.

Пример 1.С.1. Предположим, что $X = \{x, y, z\}$ и $\mathscr{B} = \{\{x, y\}, \{x, y, z\}\}$. Одна из возможных структур выбора имеет вид $(\mathscr{B}, C_1(\cdot))$, где правило выбора $C_1(\cdot)$ таково, что $C_1(\{x, y\}) = \{x\}$ и $C_1(\{x, y, z\}) = \{x\}$. В этом случае, как нетрудно заметить, альтернатива x будет выбираться независимо от того, с каким бюджетом сталкивается индивид.

Другая возможная структура выбора — $(\mathscr{B}, C_2(\cdot))$, где правило выбора $C_2(\cdot)$ таково, что $C_2(\{x, y\}) = \{x\}$ и $C_2(\{x, y, z\}) = \{x, y\}$. В этом случае мы видим, что альтернатива x будет выбрана, если индивид сталкивается с бюджетом $\{x, y\}$, если же он сталкивается с бюджетом $\{x, y, z\}$, то может быть выбрана либо альтернатива x, либо альтернатива y. ■

При применении структур выбора для моделирования индивидуального поведения может возникнуть желание наложить некоторые «разумные» ограничения на поведение индивида, осуществляющего выбор. Эту роль играет слабая аксиома выявленных предпочтений (впервые предложенная Самуэльсоном (Samuelson, 1947, глава 5)) — важное предположение об определенной согласованности наблюдаемого выбора индивида. Например, если индивид выбирает альтернативу x (и только ее), сталкиваясь с выбором из альтернатив x и y, то было бы странно, если бы он выбрал альтернативу y, выбирая из альтернатив x, y и третьей альтернативы z. Идея заключается в том, что выбор альтернативы x при возможности выбрать из альтернатив $\{x, y\}$ отражает склонность индивида к альтернативе x по сравнению с альтернативой y, поэтому следует ожидать, что поведение индивида продемонстрирует те же склонности при выборе из альтернатив $\{x, y, z\}$[4].

Слабая аксиома выявленных предпочтений сформулирована в определении 1.С.1.

Определение 1.С.1. Структура выбора $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ удовлетворяет *слабой аксиоме выявленных предпочтений*, если выполнены следующие условия: если для некоторого $B \in \mathscr{B}$ при $x, y \in B$ имеем $x \in C(B)$, то для любого $B' \in \mathscr{B}$ при $x, y \in B'$ и $y \in C(B')$ также должно быть выполнено $x \in C(B')$.

[4] Склонность индивида может отражать лежащее в основе этого выбора «предпочтение» альтернативы x альтернативе y, но может также возникнуть и по другим причинам. Например, она может появиться в результате некоторого эволюционного процесса.

Другими словами, слабая аксиома выявленных предпочтений говорит о том, что если альтернатива x была выбрана, когда альтернатива y была доступна, то не должно быть такого бюджетного множества, содержащего обе альтернативы, из которого альтернатива y выбирается, а альтернатива x — нет.

Обратите внимание, как предположение о том, что выбор индивида удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений, отражает идею о согласованности выбора: если $C(\{x, y\}) = \{x\}$, то согласно слабой аксиоме выявленных предпочтений не верно $C(\{x, y, z\}) = \{y\}$ [5].

В некотором смысле более простая формулировка слабой аксиомы выявленных предпочтений может быть получена при определении *отношения выявленных предпочтений* $\succsim^*$ из наблюдаемого поведения относительно выбора $C(\cdot)$.

Определение 1.С.2. Для данной структуры выбора $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ *отношение выявленного предпочтения* $\succsim^*$ определяется следующим образом:

$x \succsim^* y \Leftrightarrow$ существует некоторое $B \in \mathscr{B}$, такое что $x, y \in B$ и $x \in C(B)$.

Запись $x \succsim^* y$ следует читать как «альтернатива x выявленно по крайней мере не хуже альтернативы y». Заметим, что отношение выявленного предпочтения $\succsim^*$ необязательно удовлетворяет свойствам полноты и транзитивности. В частности, для того чтобы любая пара альтернатив x и y была сравнима, необходимо, чтобы для некоторого $B \in \mathscr{B}$ и $x, y \in B$ было выполнено: либо $x \in C(B)$, либо $y \in C(B)$, либо и то и другое.

Можно также сказать, что «набор x выявленно предпочитается набору y», если существует некоторое множество $B \in \mathscr{B}$, такое что $x, y \in B$, $x \in C(B)$ и $y \notin C(B)$, т. е. x всегда выбирается в случае, когда обе альтернативы доступны.

В соответствии с этой терминологией мы можем переформулировать слабую аксиому следующим образом: «*Если альтернатива x выявленно по крайней мере не хуже альтернативы y, то альтернатива y не может выявленно предпочитаться альтернативе x*».

Пример 1.С.2. Удовлетворяют ли структуры выбора, приведенные в примере 1.С.1, слабой аксиоме выявленных предпочтений? Рассмотрим структуру выбора $(\mathscr{B}, C_1(\cdot))$. При такой структуре выбора имеем: $x \succsim^* y$ и $x \succsim^* z$, но при этом нельзя сказать, каково отношение выявленного предпочтения между альтернативами y и z. Эта структура выбора удовлетворяет слабой аксиоме, поскольку альтернативы y и z никогда не выбираются.

Теперь рассмотрим структуру выбора $(\mathscr{B}, C_2(\cdot))$. Поскольку $C_2(\{x, y, z\}) = \{x, y\}$, то мы имеем $y \succsim^* x$ (так же как и $x \succsim^* y$, $x \succsim^* z$ и $y \succsim^* z$). Однако поскольку $C_2(\{x, y\}) = \{x\}$, то x выявленно предпочитается y. Следовательно, структура выбора $(\mathscr{B}, C_2)$ не удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений. ■

[5] В действительности мы можем сказать больше. Должно быть выполнено $C(\{x, y, z\}) = \{x\}$, $= \{z\}$ или $= \{x, z\}$. Вас просят убедиться в этом в упражнении 1.С.1, см. также упражнение 1.С.2.

Следует заметить, что слабая аксиома выявленных предпочтений — это не единственное предположение о поведении индивида, которое можно было бы ввести в каждой конкретной ситуации. Например, при обсуждении спроса потребителя, рассматриваемого в главе 2, вводятся и другие условия, естественным образом возникающие в данном контексте.

Слабая аксиома выявленных предпочтений налагает определенные требования на поведение индивида, подобно тому как рациональность предпочтений предполагает определенные ограничения на отношение предпочтения. Возникает вопрос: как эти два подхода взаимосвязаны? Мы попытаемся ответить на него в разделе 1.D.

1.D. Взаимосвязь между отношением предпочтения и правилом выбора

Теперь рассмотрим два фундаментальных вопроса, касающихся взаимосвязи между двумя изложенными выше подходами:

1) Если индивид имеет рациональное отношение предпочтения $\succsim$, то будут ли его решения при выборе альтернатив из бюджетных множеств $\mathscr{B}$ с необходимостью генерировать структуру выбора, удовлетворяющую слабой аксиоме выявленных предпочтений?
2) Если выбор индивида из семейства бюджетных множеств $\mathscr{B}$ описывается структурой выбора $(\mathscr{B}, C(\cdot))$, удовлетворяющей слабой аксиоме выявленных предпочтений, то существует ли рациональное отношение предпочтения, согласующееся с этим выбором?

Как мы увидим, ответами на эти вопросы будут «да» и «возможно» соответственно.

Для ответа на первый вопрос предположим, что индивид имеет рациональное отношение предпочтения $\succsim$ на множестве X. Если данный индивид сталкивается с непустым подмножеством альтернатив $B \subset X$, то его задача заключается в выборе наилучшего элемента из следующего множества:

$$C^*(B, \succsim) = \{x \in B\colon x \succsim y \text{ для любого } y \in B\}.$$

Элементы множества $C^*(B, \succsim)$ — это наиболее предпочтительные для индивида альтернативы в множестве B. Вообще говоря, возможно, что для некоторого B: $C^*(B, \succsim) = \varnothing$; однако если множество X конечно или выполнены некоторые условия регулярности (непрерывность), то множество $C^*(B, \succsim)$ будет непусто[6]. С этого момента мы будем рассматривать только предпочтения $\succsim$ и семейства бюджетных множеств $\mathscr{B}$, такие что множе-

[6] В упражнении 1.D.2 вам нужно показать, что множество $C^*(B, \succsim)$ непусто в случае, когда множество X конечно. Более общие результаты можно найти в разделе M.F математического приложения и в разделе 3.C для некоторых частных случаев.

ство $C^*(B, \succsim)$ непусто для всех $B \in \mathscr{B}$. Будем говорить, что рациональное отношение предпочтения $\succsim$ *порождает* структуру выбора $\left(\mathscr{B}, C^*(\cdot, \succsim)\right)$.

Результат, сформулированный в утверждении 1.D.1, говорит о том, что любая структура выбора, порожденная рациональными предпочтениями, с необходимостью удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений.

Утверждение 1.D.1. Пусть $\succsim$ — рациональное отношение предпочтения. Тогда структура выбора, порожденная отношением $\succsim$, $\left(\mathscr{B}, C^*(\cdot, \succsim)\right)$, удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений.

Доказательство. Предположим, что для некоторого $B \in \mathscr{B}$ имеем: $x, y \in B$ и $x \in C^*(B, \succsim)$. Из определения $C^*(B, \succsim)$ следует, что $x \succsim y$.

Для того чтобы проверить выполнение слабой аксиомы выявленных предпочтений, предположим, что для некоторого $B' \in \mathscr{B}$ и $x, y \in B'$ выполнено $y \in C^*(B', \succsim)$. Это означает, что $y \succsim z$ для всех $z \in B'$. Однако, как мы знаем, $x \succsim y$, следовательно, по транзитивности, $x \succsim z$ для всех $z \in B'$. Таким образом, $x \in C^*(B', \succsim)$, что и требовалось доказать. ■

Другими словами, утверждение 1.D.1 дает утвердительный ответ на первый из рассматриваемых вопросов, т. е. если поведение индивида при выборе альтернатив порождено рациональными предпочтениями, то оно удовлетворяет требованиям слабой аксиомы выявленных предпочтений.

В обратную сторону (от выбора к предпочтениям) взаимосвязь более сложная. Прежде чем перейти к ответу на второй вопрос, введем новое понятие.

Определение 1.D.1. При данной структуре выбора $\left(\mathscr{B}, C(\cdot)\right)$ будем говорить, что рациональное отношение предпочтения $\succsim$ *рационализирует* $C(\cdot)$ на множестве $\mathscr{B}$, если

$$C(B) = C^*(B, \succsim)$$

для всех $B \in \mathscr{B}$, т. е. если отношение предпочтения $\succsim$ порождает структуру выбора $\left(\mathscr{B}, C(\cdot)\right)$.

Другими словами, рациональное отношение предпочтения $x \succ y$ рационализирует правило выбора $C(\cdot)$ на множестве $\mathscr{B}$, если оптимальный выбор, порожденный отношением $\succsim$ (описываемый $C^*(\cdot, \succsim)$), совпадает с $C(\cdot)$ для всех бюджетных множеств из $\mathscr{B}$, т. е. наблюдаемое поведение индивида объясняется его предпочтениями: выбор индивида именно таков, как если бы он выбирал наилучшую согласно предпочтениям альтернативу. Заметим, что в общем случае может существовать не единственное рационализирующее отношение предпочтения $\succsim$ для данной структуры выбора $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ (см. упражнение 1.D.1).

Из утверждения 1.D.1 следует, что слабая аксиома выявленных предпочтений должна быть выполнена, если существует рационализирующее отношение предпочтения. В частности, поскольку $C^*(\cdot, \succsim)$ удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений для любого отношения $\succsim$, то только правило выбора, удовлетворяющее слабой аксиоме выявленных предпочтений, может быть рационализировано. Оказывается, однако, что слабой аксиомы выявленных предпочтений недостаточно, чтобы гарантировать существование рационализирующего отношения предпочтения.

Пример 1.D.1. Предположим, что $X = \{x, y, z\}$, $\mathscr{B} = \{\{x, y\}, \{y, z\}, \{x, z\}\}$, $C(\{x, y\}) = \{x\}$, $C(\{y, z\}) = \{y\}$, $C(\{x, z\}) = \{z\}$. Данная структура выбора удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений (убедитесь в этом!). Тем не менее мы не можем выявить рационализирующее отношение предпочтения. Действительно, для того чтобы можно было рационализировать выбор из $\{x, y\}$ и $\{y, z\}$, с необходимостью должно быть выполнено $x \succ y$ и $y \succ z$. Однако по транзитивности $x \succ z$, что противоречит поведению индивида при выборе из $\{x, z\}$. Следовательно, в данном случае не существует рационализирующего отношения предпочтения. ■

Для лучшего понимания примера 1.D.1 заметим, что чем больше бюджетных множеств в $\mathscr{B}$, тем в большей степени слабая аксиома выявленных предпочтений ограничивает поведение индивида. Другими словами, у индивида просто больше разных противоречащих друг другу возможностей выбора. В примере 1.D.1 множество $\{x, y, z\}$ не принадлежит множеству $\mathscr{B}$. Как оказывается, именно это и играет решающую роль (см. упражнение 1.D.3). Как мы увидим ниже в утверждении 1.D.2, если семейство бюджетных множеств в $\mathscr{B}$ включает достаточно много подмножеств множества X и $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений, то существует рациональное отношение предпочтения, рационализирующее $C(\cdot)$ на множестве $\mathscr{B}$ (этот результат впервые был доказан в работе (Arrow, 1959)).

Утверждение 1.D.2. Если $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ — такая структура выбора, что

1) выполнена слабая аксиома выявленных предпочтений;
2) $\mathscr{B}$ содержит все подмножества множества X вплоть до тех, которые состоят из трех элементов,

то существует рациональное отношение предпочтения $\succsim$, рационализирующее $C(\cdot)$ на множестве $\mathscr{B}$, т. е. $C(B) = C^*(B, \succsim)$ для всех $B \in \mathscr{B}$. Кроме того, данное рациональное отношение предпочтения *единственно*.

Доказательство. Естественно предположить, что рационализирующим отношением предпочтения является отношение выявленного предпочтения $\succsim^*$. Для того чтобы это доказать, мы должны убедиться в том, что (1) $\succsim^*$ — рациональное отношение предпочтения; (2) отношение предпочтения $\succsim^*$ рационализирует $C(\cdot)$ на множестве $\mathscr{B}$. Затем на шаге (3) покажем, что отношение $\succsim^*$ является единственным отношением предпочтения, удовлетворяющим всем указанным требованиям.

1) Сначала проверим, что отношение $\succsim^*$ является рациональным (т. е. удовлетворяет условиям полноты и транзитивности).

Полнота. По предположению (2) $\{x, y\} \in \mathscr{B}$. Поскольку либо x, либо y должны быть элементом $C(\{x, y\})$, то должно быть выполнено: либо $x \succsim^* y$, либо $y \succsim^* x$, либо и то и другое. Следовательно, отношение $\succsim^*$ является полным.

Транзитивность. Пусть $x \succsim^* y$ и $y \succsim^* z$. Рассмотрим бюджетное множество $\{x, y, z\} \in \mathscr{B}$. Достаточно доказать, что $x \in C(\{x, y, z\})$, т. к. по определению отношения $\succsim^*$ это означает, что $x \succsim^* z$. Поскольку $C(\{x, y, z\}) \neq$ $\neq \varnothing$, то по крайней мере одна из альтернатив x, y и z должна принадлежать $C(\{x, y, z\})$. Предположим, что $y \in C(\{x, y, z\})$. Тогда поскольку $x \succsim^* y$, то согласно слабой аксиоме выявленных предпочтений $x \in C(\{x, y, z\})$, что и требовалось доказать. Предположим теперь, что $z \in C(\{x, y, z\})$. Тогда поскольку $y \succsim^* z$, то из слабой аксиомы выявленных предпочтений следует, что $y \in C(\{x, y, z\})$, и мы возвращаемся к предыдущему случаю.

2) Теперь покажем, что $C(B) = C^*(B, \succsim^*)$ для всех $B \in \mathscr{B}$, т. е. отношение выявленного предпочтения $\succsim^*$, выведенное из $C(\cdot)$, действительно порождает $C(\cdot)$. Интуитивно это довольно понятно, но приведем формальное доказательство в два этапа. Сначала предположим, что $x \in C(B)$. Тогда $x \succsim^* y$ для всех $y \in B$, следовательно, имеем: $x \in C^*(B, \succsim^*)$. Это означает, что $C(B) \subset C^*(B, \succsim^*)$. Теперь предположим, что $x \in C^*(B, \succsim^*)$. Отсюда следует, что $x \succsim^* y$ для *всех* $y \in B$, а значит, для каждого $y \in B$ должно существовать некоторое множество $B_y \in \mathscr{B}$, такое что $x, y \in B_y$ и $x \in C(B_y)$. Поскольку $C(B) \neq \varnothing$, то из слабой аксиомы выявленных предпочтений следует, что $x \in C(B)$. Таким образом, $C^*(B, \succsim^*) \subset C(B)$. Вместе два полученных нами результата означают, что $C(B) = C^*(B, \succsim^*)$.

3) Для того чтобы доказать единственность, просто заметим, что так как множество $\mathscr{B}$ включает все двухэлементные подмножества множества X, то выбор индивида $C(\cdot)$ полностью определяет попарные отношения предпочтения на множестве X для любого рационализирующего отношения предпочтения, что и требовалось доказать.

Таким образом, из утверждения 1.D.2 следует, что в специальном случае, когда выбор определен для всех подмножеств множества X, теория, основанная на выборе, удовлетворяющем слабой аксиоме выявленных предпочтений, полностью эквивалентна теории принятия решений, базирующейся на рациональных предпочтениях. К сожалению, этот специальный случай слишком узок для экономического контекста. Во многих моделях, рассматриваемых в экономике, например в теории потребительского выбора, выбор определен только для бюджетных множеств особого вида. В этом случае слабая аксиома выявленных предпочтений не характеризует все возможные варианты выбора, основанного на рациональных предпочтениях. Однако, как мы увидим в разделе 3.J, более сильное, чем слабая аксиома выявленных предпочтений, утверждение (налагающее более жесткие ограничения на выбор индивида) дает необходимое и достаточное условие того, что поведение индивида можно рационализировать предпочтениями.

В определении 1.D.1 сформулировано понятие рационализирующего предпочтения как такого предпочтения, для которого выполнено: $C(B) = C^*(B, \succsim)$. Альтернативное определение рационализирующего предпочтения, которое можно найти в литературе, требует выполнения только условия $C(B) \subset C^*(B, \succsim)$, т. е. говорят, что отношение $\succsim$ рационализирует $C(\cdot)$ на множестве $\mathscr{B}$, если $C(B)$ является подмножеством множества наиболее предпочитаемых альтернатив, порожденных отношением $\succsim$, $C^*(B, \succsim)$, для каждого бюджетного множества $B \in \mathscr{B}$.

Можно привести две основные причины, по которым может возникнуть необходимость в использовании альтернативного определения. Во-первых, в некотором смысле по философским соображениям. Может возникнуть желание позволить индивиду некоторым специальным образом разрешать ситуации, когда ему все равно, какую альтернативу выбрать, а не исходить из того, что в этом случае может быть выбрана любая альтернатива. В определении 1.D.1 (а также в слабой аксиоме выявленных предпочтений) неявно подразумевается, что если индивид каким-то особым образом осуществляет выбор, то на самом деле он небезразличен.

Вторая причина носит эмпирический характер. Если мы попытаемся по имеющимся данным определить, выбирает ли индивид наилучшую согласно рациональным предпочтениям альтернативу, то на практике столкнемся только с конечным набором наблюдений, полученным при каждом данном бюджетном множестве B. Если $C(B)$ описывает множество выбранных альтернатив при данном ограниченном множестве наблюдений, то поскольку ограниченные наблюдения могут выявить не все альтернативы, являющиеся наилучшими для данного индивида, то $C(B) \subset C^*(B, \succsim)$ — естественное требование, налагаемое на отношение предпочтения, рационализирующее имеющиеся данные о наблюдаемом выборе индивида.

Следует также отметить два момента применения альтернативного определения. Во-первых, оно накладывает более слабые ограничения. Как только мы находим отношение предпочтения, рационализирующее выбор в терминах определения 1.D.1, то сразу же получаем отношение, рационализирующее выбор исходя из альтернативного определения. Во-вторых, при произвольной природе альтернатив, предполагающейся в данном разделе, найти рационализирующее отношение предпочтения согласно альтернативному определению в действительности тривиально: предпочтения индивида, для которого все элементы множества X эквивалентны, будут рационализировать *любой* выбор в этом смысле. Когда данное альтернативное определение используется в экономической литературе, всегда налагаются дополнительные ограничения на рационализирующее отношение предпочтения в соответствии с природой рассматриваемой экономической проблемы.

Литература

Arrow K. (1959). Rational choice functions and orderings // *Econometrica* **26**:121–127.

Elster J. (1979). *Ulysses and the Sirens.* Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.

Kahneman D., Tversky A. (1984). Choices, values, and frames // *American Psychologist* **39**: 341–350.

Plott C. R. (1973). Path independence, rationality and social choice. *Econometrica* 41: 1075–1091.

Richter M. (1971). Rational choice. Chap. 2 in *Preferences, Utility and Demand*, edited by J. Chipman, L. Hurwicz, H. Sonnenschein. New York: Harcourt Brace Jovanovich.

Samuelson P. (1947). *Foundations of Economic Analysis*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Schelling T. (1979). *Micromotives and Macrobehavior*. New York: Norton.

Thurstone L. L. (1927). A law of comparative judgement // *Psychological Review* **34**: 275–286.

Упражнения

1.B.1[B]. Докажите свойство (3) утверждения 1.B.1.

1.B.2[A]. Докажите свойства (1) и (2) утверждения 1.B.1.

1.B.3[B]. Покажите, что если $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — строго возрастающая функция и $u: X \to \mathbb{R}$ — функция полезности, представляющая отношение предпочтения $\succsim$, то функция $v: X \to \mathbb{R}$, определенная как $v(x) = f\left(u(x)\right)$, также является функцией полезности, представляющей то же отношение предпочтения $\succsim$.

1.B.4[A]. Рассмотрите рациональное отношение предпочтения $\succsim$. Покажите, что если из $u(x) = u(y)$ следует $x \sim y$, а из $u(x) > u(y)$ следует $x \succ y$, то $u(\cdot)$ является функцией полезности, представляющей отношение предпочтения $\succsim$.

1.B.5[B]. Покажите, что если множество X конечно и $\succsim$ — рациональное отношение предпочтения на множестве X, то существует функция полезности $u: X \to \mathbb{R}$, описывающая отношение предпочтения $\succsim$. (*Подсказка*: рассмотрите сначала случай, когда индивид имеет строгое отношение предпочтения относительно любых двух элементов из X (т. е. отсутствует эквивалентность), и постройте функцию полезности, описывающую эти предпочтения; затем распространите свой подход на общий случай.)

1.C.1[B]. Рассмотрите структуру выбора $\left(\mathscr{B}, C(\cdot)\right)$, где $\mathscr{B} = \left\{\{x, y\}, \{x, y, z\}\right\}$ и $C\left(\{x, y\}\right) = \{x\}$. Покажите, что если $\left(\mathscr{B}, C(\cdot)\right)$ удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений, то тогда должно быть выполнено: $C\left(\{x, y, z\}\right) = \{x\}$, или $C\left(\{x, y, z\}\right) = \{z\}$, или $C\left(\{x, y, z\}\right) = \{x, z\}$.

1.C.2[B]. Покажите, что слабую аксиому выявленных предпочтений (см. определение 1.C.1) можно сформулировать следующим образом: предположим, что $B, B' \in \mathscr{B}$, $x, y \in B$ и $x, y \in B'$. Тогда если $x \in C(B)$ и $y \in C(B')$, то должно быть выполнено: $\{x, y\} \subset C(B)$ и $\{x, y\} \subset C(B')$.

1.C.3^{C}. Предположим, что структура выбора $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений. Рассмотрим два возможных отношения выявленного предпочтения, $\succ^*$ и $\succ^{**}$:

$x \succ^* y \Leftrightarrow$ существует некоторое $B \in \mathscr{B}$, такое что $x, y \in B$, $x \in C(B)$ и $y \notin C(B)$;

$x \succ^{**} y \Leftrightarrow x \succsim^* y$ и неверно, что $y \succsim^* x$,

где $\succsim^*$ — отношение выявленного предпочтения «по крайней мере, не хуже чем» в соответствии с определением 1.C.2.

a) Покажите, что $\succ^*$ и $\succ^{**}$ одинаково ранжируют альтернативы на множестве X, т. е. для любых $x, y \in X$ $x \succ^* y \Leftrightarrow x \succ^{**} y$. Будет ли это верно, если структура выбора $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ не удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений?

b) Является ли отношение $\succ^*$ транзитивным?

c) Покажите, что если множество $\mathscr{B}$ включает все трехэлементные подмножества множества X, то отношение $\succ^*$ является транзитивным.

1.D.1^{B}. Приведите пример структуры выбора, которая может быть рационализирована несколькими отношениями предпочтения. Обратите внимание, что если семейство бюджетных множеств $\mathscr{B}$ содержит все двухэлементные подмножества множества X, то существует не больше одного рационализирующего отношения предпочтения.

1.D.2^{A}. Покажите, что если множество X конечно, то любое рациональное отношение предпочтения порождает непустое правило выбора, т. е. $C(B) \neq \varnothing$ для любого $B \subset X$, где $B \neq \varnothing$.

1.D.3^{B}. Пусть $X = \{x, y, z\}$, и рассмотрим структуру выбора $(\mathscr{B}, C(\cdot))$, где

$$\mathscr{B} = \{\{x, y\}, \{y, z\}, \{x, z\}, \{x, y, z\}\}$$

и $C(\{x, y\}) = \{x\}$, $C(\{y, z\}) = \{y\}$, $C(\{x, z\}) = \{z\}$, как в примере 1.D.1. Покажите, что такая структура выбора $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ не удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений.

1.D.4^{B}. Покажите, что структура выбора $(\mathscr{B}, C(\cdot))$, для которой существует рационализирующее отношение предпочтения $\succsim$, удовлетворяет свойству *инвариантности пути*: для любой пары B_1, $B_2 \in \mathscr{B}$, такой что $B_1 \cup B_2 \in \mathscr{B}$ и $C(B_1) \cup C(B_2) \in \mathscr{B}$, выполнено: $C(B_1 \cup B_2) = C(C(B_1) \cup C(B_2))$, т. е. задача выбора может быть без изменения разбита на подзадачи (см. обсуждение этого вопроса в работе (Plott, 1973)).

1.D.5^{C}. Пусть $X = \{x, y, z\}$ и $\mathscr{B} = \{\{x, y\}, \{y, z\}, \{z, x\}\}$. Предположим теперь, что выбор имеет стохастическую природу в том смысле, что для любого $B \in \mathscr{B}$ $C(B)$ — это частотное распределение на множестве альтернатив из B. Например, если $B = \{x, y\}$, то $C(B) = (C_x(B), C_y(B))$, где $C_x(B)$ и $C_y(B)$ — неотрицательные числа, такие что $C_x(B) + C_y(B) = 1$. Будем говорить, что стохастическая функция выбора $C(\cdot)$ может быть *рационализована предпочтениями*, если можно найти распределение вероятностей Pr на множестве шести возможных (строгих) отношений предпочтения на множестве X, такое что для каждого $B \in \mathscr{B}\, C(B)$ — это в точности частота выбора, порожденного Pr. Например, если $B = \{x, y\}$, то $C_x(B) = \Pr\left(\{\succ: x \succ y\}\right)$. Эта концепция была предложена в работе (Thurstone, 1927) и представляет значительный интерес с эконометрической точки зрения (фактически она позволяет получить теорию остаточных членов при наблюдениях выбора индивида).

a) Покажите, что стохастическая функция выбора $C\left(\{x, y\}\right) = C\left(\{y, z\}\right) = C\left(\{z, x\}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ может быть рационализована предпочтениями.

b) Покажите, что стохастическую функцию выбора $C\left(\{x, y\}\right) = C\left(\{y, z\}\right) = C\left(\{z, x\}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ нельзя рационализовать предпочтениями.

c) Найдите такое $0 < \alpha < 1$, при котором происходит переключение правила выбора $C\left(\{x, y\}\right) = C\left(\{y, z\}\right) = C\left(\{z, x\}\right) = \left(\alpha, 1 - \alpha\right)$ с рационализируемого на нерационализируемое.

Глава 2. Выбор потребителя

2.A. Введение

Фундаментальным агентом микроэкономической теории является *потребитель*. В этой главе мы начнем изучение потребительского спроса в контексте рыночной экономики. Под *рыночной экономикой* мы понимаем такую среду, в которой блага и услуги доступны для приобретения по известным ценам (или, что то же самое, доступны для обмена на другие блага по известным нормам обмена).

Мы начнем с описания основных элементов задачи потребителя (с раздела 2.B по раздел 2.D). В разделе 2.B мы введем концепцию товаров — объектов потребительского выбора. Затем, в разделах 2.C и 2.D мы рассмотрим физические и экономические ограничения, влияющие на выбор потребителя. Первое из этих ограничений характеризуется потребительским множеством, которое мы обсуждаем в разделе 2.C, а второе — описываемое *вальрасианским бюджетным множеством*, рассматривается в разделе 2.D.

Решение, принимаемое потребителем при имеющихся ограничениях, характеризуется *вальрасианской функцией полезности*. В терминах подхода к индивидуальному принятию решений, основанного на наблюдении за поведением потребителя, изложенного в разделе 1.C, вальрасианская функция спроса — это правило выбора для потребителя. Мы изучим эту функцию и некоторые ее основные свойства в разделе 2.E. Для исследования функции спроса мы в том числе применим подход, называемый *сравнительной статикой*, т. е. проанализируем изменение потребительского спроса при изменении экономических ограничений.

Наконец, в разделе 2.F мы рассмотрим некоторые следствия *слабой аксиомы выявленных предпочтений* для функции спроса потребителя. Главный вывод, к которому мы приходим, состоит том, что в случае, когда речь идет о спросе потребителя, слабая аксиома выявленных предпочтений по сути эквивалентна *закону компенсированного спроса*, утверждающему, что цены и объемы благ, на которые предъявляется спрос, изменяются разнонаправленно так, что реальное богатство потребителя остается неизменным.

2.B. Товары

Задача потребителя в рыночной экономике — выбрать уровень потребления различных благ и услуг, предлагающихся на рынке. Будем называть эти блага и услуги *товарами*. Для простоты будем считать, что число товаров конечно и равно L (индекс товара обозначим через $l = 1, \ldots, L$).

В общем случае *вектор товаров* (или *набор* товаров) — это список количества различных товаров

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_L \end{bmatrix}.$$

Таким образом, товарный набор можно рассматривать как точку в *пространстве* товаров $\mathbb{R}^L$[1].

Мы будем использовать товарные векторы для описания индивидуальных уровней потребления: l-й элемент товарного вектора описывает объем потребления блага l. В дальнейшем мы будем называть этот вектор *потребительским вектором* или *потребительским набором*.

Следует заметить, что время (а также местоположение) могут быть включены в определение товара. Строго говоря, хлеб сегодня и завтра может рассматриваться как различные товары. Аналогично, когда мы имеем дело с принятием решений в условиях неопределенности (глава 6), нам удобнее трактовать хлеб в разных «состояниях природы» как разные товары.

Хотя товары, потребляемые в разные моменты времени, строго говоря, должны рассматриваться как разные товары, на практике экономические модели опираются на предпосылку о некотором «агрегировании во времени». Таким образом, товар может трактоваться как «хлеб, потребляемый в феврале», даже если в принципе следовало бы различать хлеб, потребляемый в каждый отдельный день февраля. Основная причина, почему используется такое агрегирование, состоит в том, что экономические данные, к которым применяется модель, агрегированы именно таким образом. В этом случае экономисты, строящие модель, надеются, что агрегированные товары достаточно схожи друг с другом и поэтому никакой ценной экономической информации не теряется.

Следует также отметить, что в некоторых случаях удобно и даже необходимо расширить множество товаров, включив блага и услуги, которые потенциально могут быть доступны для приобретения, но на данный момент не являются таковыми, и даже те, которые могут быть доступны посредством внерыночного обмена (например, «опыт семейной жизни»). Однако в подавляющем большинстве рассматриваемых далее случаев оказывается достаточным более узкий подход, предложенный в этом разделе.

---

[1] Отрицательные координаты товарных векторов зачастую представляют собой дебет или чистые расходы благ. Например, в главе 5 объемы факторов производства, используемые фирмой, описываются отрицательными числами.

2.C. Потребительское множество

Потребительский выбор, как правило, лимитирован рядом физических ограничений. Простейшим примером является ситуация, когда индивид не может потребить отрицательное количество товаров, таких как хлеб и вода.

Формально *потребительское множество*, обозначаемое через $X \subset \mathbb{R}^L$, представляет собой подмножество пространства товаров $\mathbb{R}^L$. Элементами этого множества являются потребительские наборы, которые индивид может потребить при данных физических ограничениях, налагаемых средой.

Рассмотрим следующие четыре примера для случая $L = 2$.

1) На рис. 2.C.1 представлены возможные уровни потребления хлеба и досуга в день. Объемы потребления этих благ должны быть неотрицательны, и, кроме того, потребление досуга в объеме, превосходящем 24 часа в день, невозможно.
2) На рис. 2.C.2 представлена ситуация, когда первое благо является бесконечно делимым, а второе доступно только в неотрицательных целых количествах.
3) На рис. 2.C.3 изображена ситуация, демонстрирующая, что невозможно есть хлеб одновременно в Вашингтоне и Нью-Йорке (этот пример позаимствован из работы (Malinvaud, 1978)).
4) На рис. 2.C.4 представлена ситуация, когда индивиду для выживания требуется минимум четыре куска хлеба в день, а хлеб бывает двух видов: черный и белый.

В приведенных выше четырех примерах ограничения в буквальном смысле носят физический характер. Однако существуют также институциональные ограничения потребительского множества. Например, законодательное ограничение, согласно которому индивид должен работать не более 16 часов в день, может изменить потребительское множество, изображенное на рис. 2.C.1, так, как это показано на рис. 2.C.5.

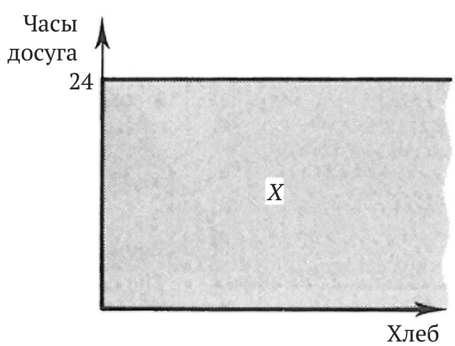


Рис. 2.C.1. Потребительское множество

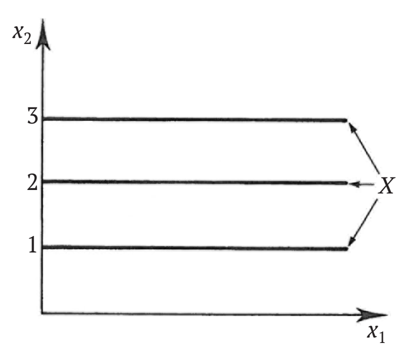


Рис. 2.C.2. Потребительское множество в случае, когда второе благо потребляется только в целых количествах

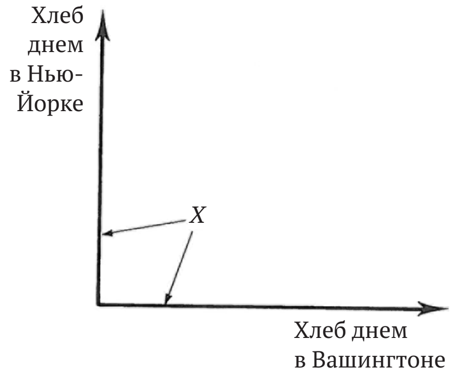


Рис. 2.С.3. Потребительское множество в случае, когда может потребляться только одно благо

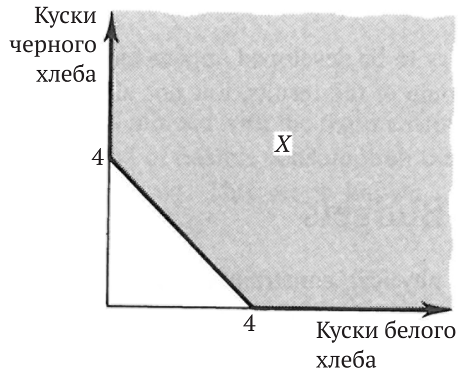


Рис. 2.С.4. Потребительское множество, отражающее наличие необходимого для выживания минимума

Стараясь по возможности избежать неоднозначностей в наших рассуждениях, мы будем исходить из того, что потребительское множество имеет наиболее простой вид:

$$X = \mathbb{R}_{+}^{L} = \left\{x \in \mathbb{R}^{L}\colon x_l \geq 0 \text{ при } l = 1, \ldots, L\right\},$$

т.е. представляет собой множество всех неотрицательных наборов товаров. Это множество представлено на рис. 2.С.6. Всякий раз, рассматривая некоторое потребительское множество X на множестве $\mathbb{R}_{+}^{L}$, мы будем считать, что оно имеет данный вид.

Одной из особенностей множества $\mathbb{R}_{+}^{L}$ является то, что оно *выпукло*, т. е. если два потребительских набора, x и x', — элементы множества $\mathbb{R}_{+}^{L}$, то набор $x'' = \alpha x + (1 - \alpha)x'$ также принадлежит множеству $\mathbb{R}_{+}^{L}$ при любом $\alpha \in [0, 1]$ (в разделе М. С. математического приложения приведено опре-

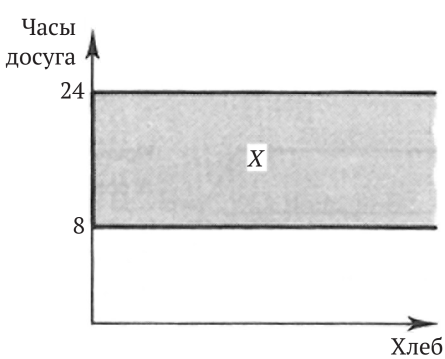


Рис. 2.С.5. Потребительское множество с учетом ограничения на время работы

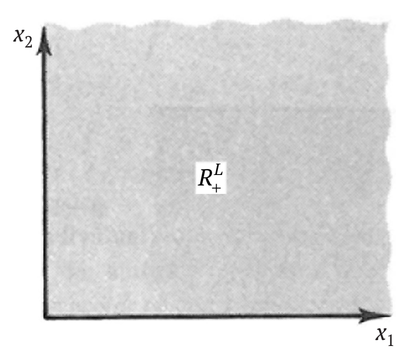


Рис. 2.С.6. Потребительское множество R_{+}^{L}

деление выпуклого множества и его свойства)[2]. Потребительские множества на рис. 2.C.1, 2.C.4, 2.C.5 и 2.C.6 являются выпуклыми, на рис. 2.C.2 и 2.C.3 — нет.

Бóльшая часть разрабатываемой теории применима к выпуклым потребительским множествам общего вида, так же как и к множеству $\mathbb{R}^L_+$. Однако некоторые результаты справедливы и без предположения о выпуклости потребительского множества[3].

2.D. Конкурентные бюджетные множества

В дополнение к физическим ограничениям, характеризуемым потребительским множеством, потребитель сталкивается с важным экономическим ограничением: его потребительский выбор ограничен теми товарными наборами, которые он может себе позволить.

Чтобы формализовать эту идею, введем два предположения. Во-первых, будем считать, что все L товаров продаются на рынке по известным ценам (в долларах) (это *принцип полноты или универсальности рынков*). Формально эти цены, представляющие собой стоимость единицы каждого из L товаров в долларовом выражении, описываются *вектором цен*

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_L \end{bmatrix} \in R^L.$$

Обратите внимание, что нам, вообще говоря, не требуется вводить условие о положительности цен. Отрицательная цена просто означает, что «покупателю» на самом деле платят за то, что он потребляет данный товар (в этом нет ничего нелогичного, если речь идет, например, о загрязнении). Тем не менее для простоты мы всюду будем считать, что $p >> 0$, т. е. $p_l > 0$ для каждого l.

Во-вторых, предположим, что потребитель не может оказывать влияния на цены, т. е. потребитель, как говорят, является *ценополучателем*. Грубо говоря, это предположение, скорее всего, будет справедливо, если спрос потребителя на любой товар составляет лишь небольшую часть совокупного спроса на данное благо.

Допустимость потребительского набора зависит от двух вещей: рыночных цен $p = (p_1, \ldots, p_L)$ и уровня богатства потребителя (в долларовом

[2] Напомним, что $x'' = \alpha x + (1 - \alpha)\, x'$ — это вектор, l-я координата которого равна $x_l'' = \alpha x_l + (1 - \alpha) x_l'$.

[3] Следует заметить, что агрегирование товаров способствует тому, чтобы потребительское множество было выпуклым. В примере, проиллюстрированном рис. 2.C.3, потребительское множество было бы выпукло, если бы по осям откладывалось потребление хлеба, например в течение месяца.

выражении) w. Таким образом, потребительский набор $x \in \mathbb{R}^L_+$ является допустимым, если совокупные расходы на его приобретение не превышают уровня богатства потребителя w, т. е. если выполнено[4]

$$p \cdot x = p_1 x_1 + \ldots + p_L x_L \leq w.$$

Экономическая допустимость вместе с условием, что x принадлежит потребительскому множеству $\mathbb{R}^L_+$, означает, что множество допустимых наборов имеет вид: $\left\{x \in \mathbb{R}^L_+ : p \cdot x \leq w\right\}$. Это множество называется *вальрасианским, или конкурентным, бюджетным множеством* (в честь Леона Вальраса).

Определение 2.D.1. Вальрасианское, или конкурентное, бюджетное множество $B_{p,w} = \left\{x \in \mathbb{R}^L_+ : p \cdot x \leq w\right\}$ представляет собой множество всех доступных товарных наборов для потребителя, имеющего богатство w и сталкивающегося с рыночными ценами p.

Таким образом, *задача потребителя* при данных ценах p и богатстве w может быть сформулирована следующим образом: *выбрать потребительский набор x из множества $B_{p,w}$*.

Вальрасианское бюджетное множество $B_{p,w}$ для случая $L = 2$ изображено на рис. 2.D.1. Для того чтобы рассматривать только невырожденную задачу выбора, мы всегда будем предполагать, что $w > 0$ (в противном случае потребитель может себе позволить только набор $x = 0$).

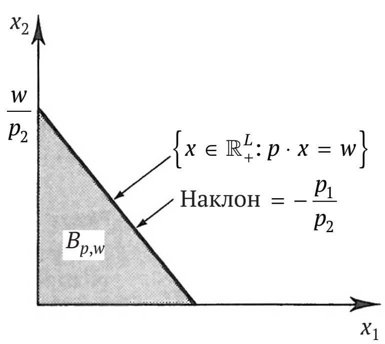


Рис. 2.D.1. Вальрасианское бюджетное множество

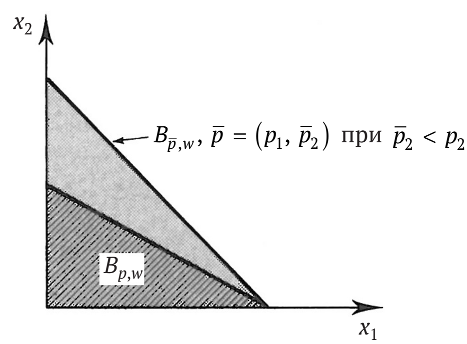


Рис. 2.D.2. Влияние изменения одной из цен на вальрасианское бюджетное множество

[4] Часто в экономической литературе это ограничение описывается как условие того, что расходы на планируемые покупки не превышают *дохода* потребителя. В любом случае идея такова, что расходы на покупки не превышают объема доступных потребителю ресурсов. Мы используем термин «богатство», чтобы подчеркнуть тот факт, что фактически задача потребителя может иметь межпериодный характер, когда покупки осуществляются в течение некоторого времени и ресурсное ограничение представляет собой доход на протяжении всей жизни (т. е. богатство) (см. упражнение 2.D.1).

Множество $\left\{x \in \mathbb{R}_{+}^{L} : p \cdot x = w\right\}$ называется *бюджетной гиперплоскостью* (в случае $L = 2$ мы будем называть его *бюджетной линией*). Она описывает верхнюю границу бюджетного множества. Как показано на рис. 2.D.1, наклон бюджетной линии, при $L = 2$ равный $-(p_1 \,/\, p_2)$, характеризует норму обмена двух товаров по рыночным ценам. Если цена товара 2 снижается (при неизменной цене p_1 и богатстве w), скажем до $\bar{p}_2 < p_2$, то бюджетное множество увеличивается, поскольку теперь большее количество потребительских наборов становится доступным, а бюджетная линия становится положе. Это изменение проиллюстрировано на рис. 2.D.2.

Для того чтобы понять, почему бюджетная гиперплоскость отражает относительную норму обмена товаров, можно также воспользоваться геометрической интерпретацией вектора цен p. Вектор цен p, проведенный из любой точки $\bar{x}$ на бюджетной гиперплоскости, должен быть ортогонален (перпендикулярен) любому вектору, выходящему из точки $\bar{x}$ и лежащему в бюджетной гиперплоскости. Поскольку для любого x', принадлежащего бюджетной гиперплоскости, должно быть выполнено: $p \cdot x' = p \cdot \bar{x} = w$, то $p \cdot \Delta x = 0$, где $\Delta x = (x' - \bar{x})$. На рис. 2.D.3 данная геометрическая взаимосвязь проиллюстрирована для случая $L = 2$[5].

Вальрасианское бюджетное множество $B_{p,w}$ является *выпуклым*, т. е. если наборы x и x' принадлежат бюджетному множеству $B_{p,w}$, то набор $x'' = \alpha x + (1 - \alpha)x'$ также принадлежит этому множеству. Для того чтобы убедиться в этом, во-первых, заметим, что так как x и x' неотрицательны, то $x'' \in \mathbb{R}_{+}^{L}$, а во-вторых, поскольку $p \cdot x \le w$ и $p \cdot x' \le w$, то $p \cdot x'' = \alpha(p \cdot x) + (1 - \alpha)(p \cdot x') \le w$. Таким образом, $x'' \in B_{p,w} = \left\{x \in \mathbb{R}_{+}^{L} : p \cdot x \le w\right\}$.

Выпуклость множества $B_{p,w}$ играет весомую роль в нашем дальнейшем анализе. Заметим также, что выпуклость множества $B_{p,w}$ зависит от выпук-

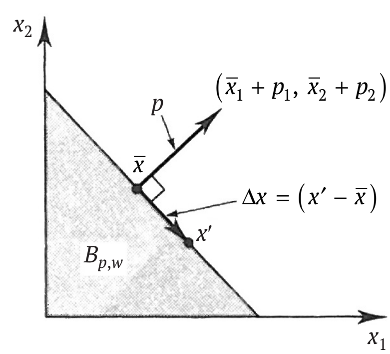


Рис. 2.D.3. Геометрическая взаимосвязь между вектором цен p и бюджетной гиперплоскостью

[5] Для того чтобы изобразить вектор p, выходящий из точки $\bar{x}$, мы проводим вектор от точки $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ до точки $(\bar{x}_1 + p_1, \bar{x}_2 + p_2)$. Таким образом, когда мы изображаем вектор цен на данном рисунке, то используем «единицы измерения» осей для описания единиц цен, а не благ.

лости потребительского множества $\mathbb{R}^L_+$. При более общих предположениях относительно потребительского множества X множество $B_{p,w}$ будет выпуклым до тех пор, пока таковым является множество X (см. упражнение 2.D.3).

Вальрасианское бюджетное множество занимает центральное место в теории потребителя, однако это не единственный тип бюджетного множества, с которым может столкнуться потребитель на практике. Например, более реалистичное описание выбора между потребительским благом и досугом с учетом налогов, субсидий и разных ставок заработной платы проиллюстрировано на рис. 2.D.4. На этом рисунке цена потребительского блага равна единице и потребитель имеет ставку заработной платы s в час в первые 8 часов работы и $s' > s$ в дополнительные часы работы («сверхурочные»). Он также сталкивается со ставкой налога t с каждого доллара трудового дохода сверх суммы M. Заметим, что бюджетное множество на рис. 2.D.4 не является выпуклым (объяснить, почему это так, вас просят в упражнении 2.D.4). Нетрудно придумать и другие, более сложные примеры бюджетного множества, которые возникают в прикладных задачах (подобные примеры можно найти в работах (Deaton, Muellbauer, 1980) и (Burtless, Hausmann, 1975)).

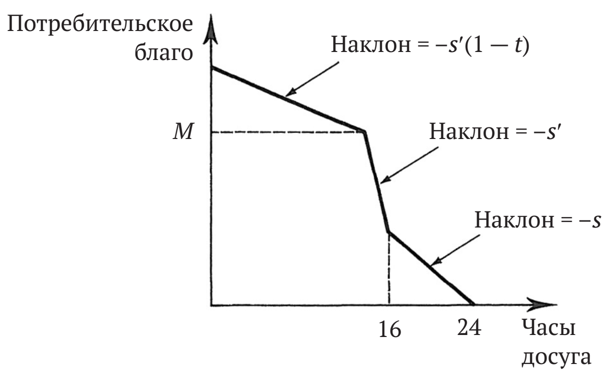


Рис. 2.D.4. Более реалистичное описание бюджетного множества потребителя

2.E. Функции спроса и сравнительная статика

Вальрасианское (*или рыночное*, *или обычное*) *отображение спроса* $x(p, w)$ приписывает множество наборов, выбираемых потребителем, каждой паре цена — богатство (p, w). В принципе это отображение может быть многозначным, т. е. может существовать не единственный потребительский вектор, соответствующий данной паре цена — богатство (p, w). В этом случае любой $x \in x(p, w)$ может быть выбран потребителем, если он сталкивается с парой цена — богатство (p, w). Если $x(p, w)$ принимает единственное значение, то говорят о *функции спроса*.

На протяжении всей этой главы мы будем придерживаться двух предположений относительно вальрасианского отображения спроса $x(p, w)$: будем считать, что оно *однородно нулевой степени* и удовлетворяет *закону Вальраса*.

Определение 2.E.1. Вальрасианское отображение спроса $x(p, w)$ *однородно нулевой степени*, если $x(\alpha p, \alpha w) = x(p, w)$ для любых p, w и $\alpha > 0$.

Однородность нулевой степени означает, что если и цены, и богатство изменятся в одинаковой пропорции, то выбор потребителя останется неизменным. Для того чтобы лучше понять это свойство, следует заметить, что изменение цен и богатства с (p, w) до $(\alpha p, \alpha w)$ никак не влияет на множество доступных потребителю наборов благ, т. е. $B_{p,w} = B_{\alpha p, \alpha w}$. Другими словами, однородность нулевой степени говорит о том, что выбор индивида зависит только от множества допустимых наборов.

Определение 2.E.2. Вальрасианское отображение спроса $x(p, w)$ удовлетворяет закону Вальраса, если для любых $p >> 0$ и $w > 0$ выполнено $p \cdot x = w$ для всех $x \in x(p, w)$.

Закон Вальраса говорит о том, что потребитель полностью расходует свое богатство. Интуитивно понятно, что это предположение разумно до тех пор, пока существует некоторое желаемое потребителем благо. Закон Вальраса следует понимать шире: бюджет потребителя может носить межпериодный характер, учитывая сбережения, сделанные сегодня, которые могут быть потрачены на покупки завтра. Тогда закон Вальраса говорит о том, что потребитель полностью расходует свои ресурсы *на протяжении всей жизни*.

Упражнение 2.E.1. Пусть $L = 3$, и рассмотрим функцию спроса $x(p, w)$, определенную следующим образом:

$$x_1(p, w) = \frac{p_2}{p_1 + p_2 + p_3} \cdot \frac{w}{p_1},$$

$$x_2(p, w) = \frac{p_3}{p_1 + p_2 + p_3} \cdot \frac{w}{p_2},$$

$$x_3(p, w) = \frac{\beta p_1}{p_1 + p_2 + p_3} \cdot \frac{w}{p_3}.$$

Удовлетворяет ли данная функция спроса свойству однородности нулевой степени и закону Вальраса при $\beta = 1$? Что можно сказать в случае $\beta \in (0, 1)$?

В главе 3, когда спрос потребителя будет получен из задачи выбора наилучшего из доступных наборов, эти два свойства (однородность нулевой степени и выполнение закона Вальраса) будут справедливы в широком классе случаев. Однако в оставшейся части данной главы мы просто примем их как предположение относительно $x(p, w)$ и будем анализировать их следствия.

Сразу же отметим одно из важных следствий однородности нулевой степени $x(p, w)$: хотя $x(p, w)$ формально имеет $L + 1$ аргумент, мы можем без потери общности зафиксировать (*нормировать*) значение одной из $L + 1$ независимой переменной на произвольном уровне. Один из стандартных способов нормировки — положить цену некоторого блага l равной единице, $p_l = 1$. Другой подход — нормировать богатство: $w = 1$[6]. Таким образом, эффективное число аргументов отображения $x(p, w)$ равно L.

Всюду далее в этом разделе будем считать, что $x(p, w)$ — однозначное отображение. В этом случае мы можем записать функцию $x(p, w)$ в терминах функций спроса на отдельные товары:

$$x(p, w) = \begin{bmatrix} x_1(p, w) \\ x_2(p, w) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_L(p, w) \end{bmatrix}.$$

Когда это удобно, также будем считать, что функция $x(p, w)$ непрерывна и дифференцируема.

Подход, применяемый здесь и в разделе 2.F, может рассматриваться как приложение изложенной в главе 1 теории, основанной на наблюдении за поведением индивида, осуществляющего выбор. Семейство вальрасианских бюджетных множеств имеет вид $\mathscr{B}^W = \{B_{p,w}: p >> 0,\ w > 0\}$. Кроме того, по предположению об однородности нулевой степени, $x(p, w)$ зависит только от бюджетного множества, с которым сталкивается потребитель. Следовательно, $(\mathscr{B}^W,\ x(\cdot))$ — это структура выбора согласно определению, приведенному в разделе 1.C. Заметим, что структура выбора $(\mathscr{B}^W,\ x(\cdot))$ включает не все возможные подмножества множества X (например, она не включает двух- и трехэлементные подмножества множества X). Этот факт оказывается значимым при определении взаимосвязи между подходами к потребительскому спросу, основанными на поведении и предпочтениях.

Сравнительная статика

Зачастую мы заинтересованы в получении ответа на вопрос о том, как меняется выбор потребителя при изменении богатства и цен. Исследование изменения результата в ответ на изменение экономических параметров, при которых он получен, называется анализом *сравнительной статики*.

Влияние изменения богатства

При фиксированных ценах $\bar{p}$ функция от богатства $x(\bar{p}, w)$ называется *функцией Энгеля*. Ее график в пространстве $\mathbb{R}^L_+$, $E_p = \{x(\bar{p},\ w): w > 0\}$, называется *кривой богатство—потребление*. Эта кривая изображена на рис. 2.E.1.

[6] Мы будем активно использовать эту нормировку в разделе IV.

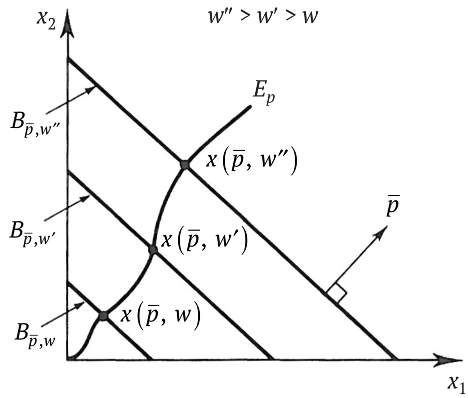


Рис. 2.E.1. Кривая богатство — потребление при ценах $\bar{p}$

При любых (p, w) производная $\partial x_l(p, w) / \partial w$ называется *эффектом богатства* для l-го блага[7].

Товар l называется *нормальным* при ценах и богатстве (p, w), если $\partial x_l(p, w) / \partial w \geq 0$, т. е. спрос не убывает по богатству. Если, напротив, эффект богатства для товара l отрицателен, то такой товар называют *инфериорным* при (p, w). Если все товары являются нормальными при всех (p, w), то мы будем говорить о *нормальном спросе*.

Предположение о нормальности спроса имеет смысл, если товары агрегированы в большие группы (например, еда, жилье). Однако если они существенно дезагрегированы (например, рассматриваются отдельные виды обуви), то в силу замещения с ростом богатства низкокачественных товаров товарами более высокого качества инфериорные блага при некотором уровне богатства можно рассматривать скорее как правило, чем исключение.

В матричной записи эффекты богатства могут быть представлены следующим образом:

$$D_w x(p, w) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1(p, w)}{\partial w} \\ \dfrac{\partial x_2(p, w)}{\partial w} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{\partial x_L(p, w)}{\partial w} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^L.$$

[7] Эту величину в литературе также называют *эффектом дохода*. Аналогично кривую богатство — потребление иногда называют *кривая доход — потребление*.

Влияние изменения цены

Теперь проанализируем изменение уровня потребления товаров при изменении цен.

Рассмотрим сначала случай $L = 2$ и предположим, что уровень богатства и цена p_1 фиксированы. На рис. 2.E.2 изображен график функции спроса на благо 2 как функции от его цены p_2 при различных значениях цены блага 1 и неизменном уровне богатства w. Заметим, что, как это обычно бывает в экономике, цена, которая в данном случае является независимой переменной, откладывается по вертикальной оси, объем блага, на который предъявляется спрос, зависимая переменная, — по горизонтальной оси. Также можно рассмотреть множество наборов, выбираемых потребителем, при любых возможных значениях p_2 в пространстве $\mathbb{R}^2_+$. Это множество называется *кривой цена—потребление*; пример такой кривой изображен на рис. 2.E.3.

В общем случае производную $\partial x_l(p, w) / \partial p_k$ называют *эффектом* (*влияния*) *цены* блага k, p_k, *на спрос на благо* l. Хотя было бы естественно считать, что снижение цены блага должно приводить к увеличению его потребления индивидом (как это показано на рис. 2.E.3), но обратная ситуация также возможна. Говорят, что благо l является *товаром Гиффена* при (p, w), если $\partial x_l(p, w) / \partial p_l > 0.$ На кривой цена — потребление, изображенной на рис. 2.E.4, благо 2 является товаром Гиффена при $(\bar{p}, p_2', w)$.

Блага низкого качества могут быть товарами Гиффена для потребителей с низким уровнем богатства. Например, пусть малообеспеченный потребитель первоначально удовлетворяет свои потребности в пище в основном за счет картофеля, поскольку картофель — наиболее дешевый способ избежать голода. Если цена на картофель упадет, то потребитель сможет позволить купить себе другую, более качественную еду, которая также позволит ему насытиться. В результате его потребление картофеля может сократиться. Обратите внимание, что механизм, согласно которому картофель

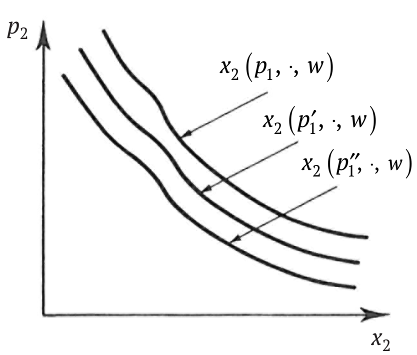


Рис. 2.E.2. Спрос на благо 2 как функция от его цены (при различных значениях p_1)

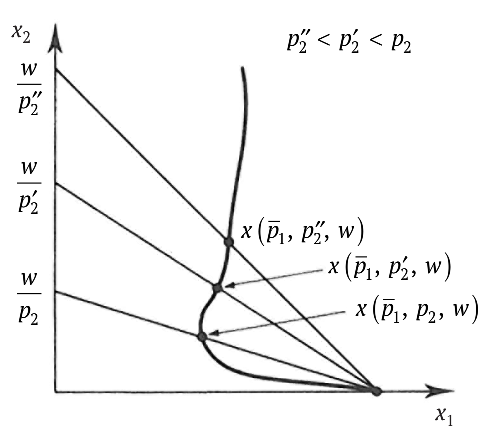


Рис. 2.E.3. Кривая цена — потребление

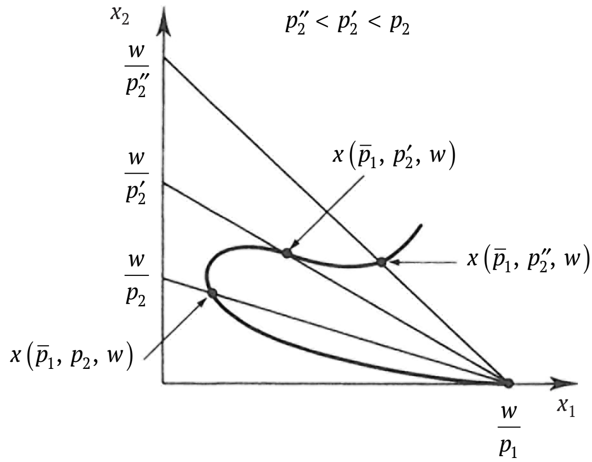


Рис. 2.E.4. Кривая цена — потребление, где благо 2 является товаром Гиффена при $(\bar{p}, p_2', w)$

превращается в товар Гиффена в данном примере, в действительности учитывает уровень богатства. Когда цена картофеля падает, потребитель становится относительно более богатым (теперь, вообще говоря, он может позволить себе больше потратить на покупки), и, как следствие, он покупает меньше картофеля. Мы исследуем эту взаимосвязь цены и эффекта богатства более подробно далее в данной главе, а также в главе 3.

Эффекты цены удобно представить в матричной форме следующим образом:

$$D_p x(p, w) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(p, w)}{\partial p_1} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \frac{\partial x_1(p, w)}{\partial p_L} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_L(p, w)}{\partial p_1} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \frac{\partial x_L(p, w)}{\partial p_L} \end{bmatrix}.$$

Следствия однородности и закона Вальраса для эффектов цены и богатства

Однородность и закон Вальраса налагают определенные ограничения на результаты анализа сравнительной статики потребительского спроса при изменении цен и богатства.

Сначала рассмотрим следствия однородности нулевой степени. Нам известно, что $x(\alpha p, \alpha w) - x(p, w) = 0$ при любых $\alpha > 0$. Дифференцируя это выражение по α и оценивая полученную производную при $\alpha = 1$, получим результат, приведенный в утверждении 2.E.1 (этот результат является частным случаем формулы Эйлера; более подробную информацию можно найти в разделе М.В математического приложения).

Утверждение 2.Е.1. Если функция вальрасианского спроса $x(p, w)$ однородна нулевой степени, то для всех p и w выполнено:

$$\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} p_k + \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} w = 0 \text{ при } l = 1, \dots, L. \qquad (2.\text{E}.1)$$

или, в матричной записи:

$$D_p x(p, w) p + D_w x(p, w) w = 0. \qquad (2.\text{E}.2)$$

Таким образом, однородность нулевой степени означает, что для любого блага l взвешенная сумма производных спроса по цене и богатству, где весами выступают данные цены и богатство, равна нулю. Интуитивно понятно, что использование таких весов связано с тем, что когда мы пропорционально увеличиваем все цены и богатство, то каждая из этих переменных изменяется пропорционально относительно первоначального уровня.

Уравнение (2.Е.1) можно также записать в терминах *эластичностей* спроса по ценам и богатству. Эти величины определяются следующим образом:

$$\varepsilon_{lk}(p, w) = \frac{\partial x_l(p, w)}{\partial p_k} \cdot \frac{p_k}{x_l(p, w)}$$

и

$$\varepsilon_{lw}(p, w) = \frac{\partial x_l(p, w)}{\partial w} \cdot \frac{w}{x_l(p, w)}.$$

Эластичности описывают изменение спроса на благо l в *процентном отношении* в ответ на (предельное) процентное изменение цены блага k или богатства. Следует отметить, что выражение для $\varepsilon_{lw}(\cdot, \cdot)$ можно читать как $(\Delta x/x) / (\Delta w/w)$. Эластичности очень часто используются в прикладных исследованиях. В отличие от производных спроса, эластичности не зависят от выбранных единиц измерения товаров и поэтому представляют собой безразмерную характеристику реакции спроса.

С использованием эластичностей условие (2.Е.1) может быть представлено в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{L} \varepsilon_{lk}(p, w) + \varepsilon_{lw}(p, w) = 0 \text{ при } l = 1, \dots, L. \qquad (2.\text{E}.3)$$

Из этого выражения сразу видно, каковы последствия однородности нулевой степени для результатов сравнительной статики: одинаковое в процентном отношении изменение всех цен и богатства не влечет изменения спроса.

Что касается закона Вальраса, то он оказывает двоякое воздействие на изменение спроса в результате изменения цен и богатства. Согласно закону Вальраса $p \cdot x(p, w) = w$ для всех p и w. Дифференцируя это выражение по ценам, получим результат, представленный в утверждении 2.E.2.

Утверждение 2.E.2. Если вальрасианская функция спроса $x(p, w)$ удовлетворяет закону Вальраса, то для всех p и w выполнено:

$$\sum_{l=1}^{L} p_l \frac{\partial x_l(p, w)}{\partial p_k} + x_k(p, w) = 0 \text{ при } k = 1, \ldots, L, \tag{2.E.4}$$

или, в матричной записи[8]:

$$p \cdot D_p x(p, w) + x(p, w)^T = 0^T. \tag{2.E.5}$$

Аналогично, дифференцируя $p \cdot x(p, w) = w$ по w, получим результат, приведенный в утверждении 2.E.3.

Утверждение 2.E.3. Если вальрасианская функция спроса $x(p, w)$ удовлетворяет закону Вальраса, то для всех p и w выполнено:

$$\sum_{l=1}^{L} p_l \frac{\partial x_l(p, w)}{\partial w} = 1, \tag{2.E.6}$$

или, в матричной записи:

$$p \cdot D_w x(p, w) = 1. \tag{2.E.7}$$

Условия, полученные в утверждениях 2.E.2 и 2.E.3, иногда называют свойствами *агрегирования по Курно* и *Энгелю* соответственно. По сути, они являются дифференциальными версиями двух фактов: совокупные расходы не могут измениться в ответ на изменение цен; совокупные расходы должны измениться на величину, равную изменению богатства.

Упражнение 2.E.2. Покажите, что из соотношений (2.E.4) и (2.E.6) можно получить следующие соотношения в терминах эластичностей:

$$\sum_{l=1}^{L} b_l(p, w) \varepsilon_{lk}(p, w) + b_k(p, w) = 0$$

и

$$\sum_{l=1}^{L} b_l(p, w)\, \varepsilon_{lw}(p, w) = 1,$$

где $b_l(p, w) = p_l x_l(p, w) / w$ — доля бюджета потребителя, расходуемая на приобретение блага l при ценах p и богатстве w.

[8] Напоминаем, что через 0^T обозначается вектор-строка, состоящая из нулей.

2.F. Слабая аксиома выявленных предпочтений и закон спроса

В этом разделе мы проанализируем, какие выводы относительно потребительского спроса можно сделать исходя из слабой аксиомы выявленных предпочтений. На протяжении всего обсуждения мы по-прежнему будем считать, что функция $x(p, w)$ является однозначной, однородной нулевой степени и удовлетворяет закону Вальраса[9].

Слабая аксиома уже была сформулирована в разделе 1.C как утверждение о согласованности поведения индивида в рамках подхода к принятию решений, основанного на наблюдаемом выборе. В этом разделе мы проанализируем следствия этой аксиомы для потребительского спроса. Далее, в главе 3, мы получим спрос, используя подход, основанный на предпочтениях потребителя, и увидим, что в этом случае потребительский спрос с необходимостью удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений. Таким образом, результат, представленный в главе 3, показывает, что структура спроса, вытекающая из аксиоматики предпочтений потребителя, оказывается гораздо более сложной, чем это можно было предположить, опираясь только на слабую аксиому выявленных предпочтений[10].

В терминах вальрасианской функции спроса слабую аксиому выявленных предпочтений можно сформулировать следующим образом.

Определение 2.F.1. Вальрасианская функция спроса $x(p, w)$ удовлетворяет *слабой аксиоме выявленных предпочтений* (WA — от англ. weak axiom), если для любых двух комбинаций цен и богатства (p, w) и (p', w') выполнено:

$$\text{если } p \cdot x(p', w') \leq w \text{ и } x(p', w') \neq x(p, w), \text{ то } p' \cdot x(p, w) > w'.$$

Если вы уже ознакомились с главой 1, то наверняка заметили, что данное определение представляет собой частный случай более общей формулировки слабой аксиомы выявленных предпочтений, предложенной в разделе 1.C для случая вальрасианских бюджетных множеств и единственного выбора $x(p, w)$ (см. упражнение 2.E. 1).

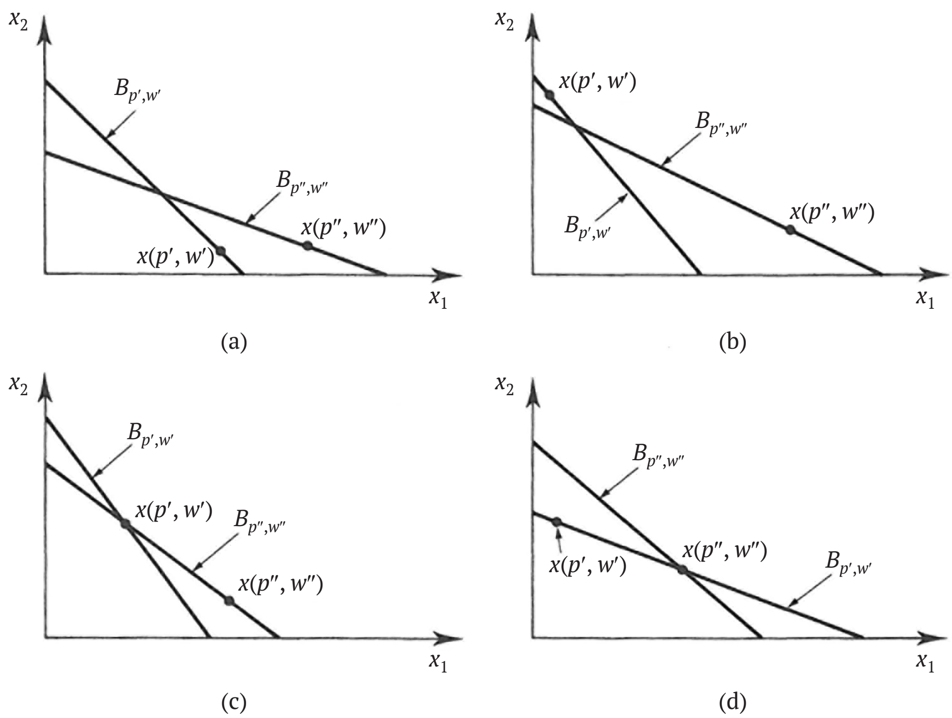
В терминах потребительского спроса слабую аксиому выявленных предпочтений можно проинтерпретировать следующим образом. Условия $p \cdot x(p', w') \leq w$ и $x(p', w') \neq x(p, w)$ означают, что, сталкиваясь с ценами p и богатством w, индивид выбирает потребительский набор $x(p, w)$, хотя набор $x(p', w')$ ему также доступен. Такое поведение можно интерпретировать как выбор, «выявляющий» предпочтения потребителя: потребитель предпочитает набор $x(p, w)$ набору $x(p', w')$. Тогда разумно ожидать, что поведение потребителя в отношении спроса будет согласованным, т. е. при таких (выявленных) предпочтениях потребитель выберет набор $x(p, w)$,

[9] Обобщение на случай многозначной функции рассматривается в упражнении 2.F.13.

[10] Точнее, только на слабую аксиому выявленных предпочтений наряду с условием однородности нулевой степени и законом Вальраса.

а не набор $x(p', w')$ всякий раз, когда они оба будут ему доступны. Если это так, то набор $x(p, w)$ не должен быть доступен потребителю при комбинации цен и богатства (p', w'), при которой он выбирает набор $x(p', w')$. Таким образом, как и требует слабая аксиома выявленных предпочтений, должно быть выполнено $p' \cdot x(p, w) > w'$.

Ограничения на потребительский спрос, налагаемые слабой аксиомой выявленных предпочтений при $L = 2$, проиллюстрированы на рис. 2.F.1. На каждом рисунке изображены два бюджетных множества, $B_{p',w'}$ и $B_{p'',w''}$, и соответствующий выбор потребителя, $x(p', w')$ и $x(p'', w'')$. Согласно слабой аксиоме выявленных предпочтений соотношения $p' \cdot x(p'', w'') \le w'$ и $p'' \cdot x(p', w') \le w''$ не могут быть выполнены одновременно. На рис. 2.F.1 (a)–(c) изображены ситуации, когда слабая аксиома выявленных предпочтений выполнена, а на рис. (d)–(e) — случаи нарушения слабой аксиомы выявленных предпочтений.



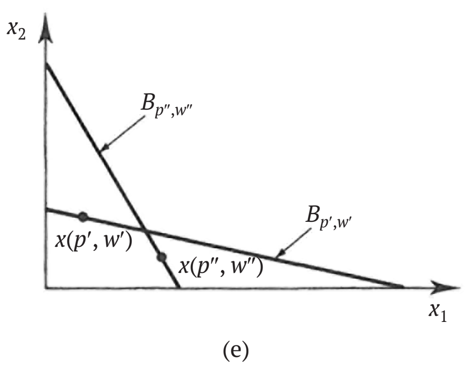


Рис. 2.F.1. В случаях (a)–(c) спрос удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений; в случаях (d) и (e) — не удовлетворяет

Следствия слабой аксиомы

Слабая аксиома выявленных предпочтений играет значимую роль при анализе влияния изменения цен на спрос потребителя. В первую очередь следует рассмотреть специальный случай изменений цены.

Как уже отмечалось при обсуждении товаров Гиффена в разделе 2.E, изменение цены оказывает двойственное воздействие на спрос потребителя. Во-первых, меняется относительная стоимость различных товаров, а во-вторых, меняется фактическое богатство потребителя: увеличение цены одного из товаров делает потребителя этого блага более бедными. Для изучения следствий слабой аксиомы выявленных предпочтений нам необходимо проанализировать первый эффект.

Итак, предположим, что изменение цены сопровождается таким изменением богатства потребителя, что первоначальный потребительский набор оказывается в точности доступным при новых ценах. Другими словами, если потребитель изначально сталкивается с ценами p и богатством w и выбирает потребительский набор $x(p, w)$, то если цены изменятся до уровня p', мы будем считать, что богатство потребителя стало равным $w' = p' \cdot x(p, w)$. Таким образом, богатство изменяется на величину $\Delta w = \Delta p \cdot x(p, w)$, где $\Delta p = (p' - p)$. Такой вид корректировки богатства называется *компенсацией богатства по Слуцкому*. На рис. 2.F.2 изображено изменение бюджетного множества, когда снижение цены блага 1 с p_1 до p_1' сопровождается компенсацией богатства по Слуцкому. С геометрической точки зрения бюджетная гиперплоскость, соответствующая комбинации цен и богатства (p', w'), проходит через точку $x(p, w)$.

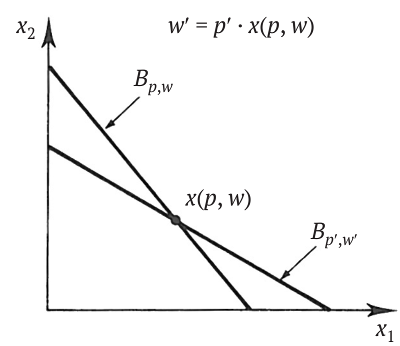


Рис. 2.F.2. Компенсированное изменение с (p, w) до (p', w')

Изменения цены, сопровождаемые подобным компенсирующим изменением богатства, называют *компенсированными изменениями цены* (*по Слуцкому*).

В утверждении 2.F.1 мы показываем, что слабая аксиома выявленных предпочтений может быть эквивалентным образом сформулирована в терминах реакции спроса на компенсированное изменение цены.

Утверждение 2.F.1. Предположим, что вальрасианская функция спроса $x(p, w)$ однородна нулевой степени и удовлетворяет закону Вальраса. Тогда $x(p, w)$ удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:

для любого компенсированного изменения цен с первоначальной комбинации цен и богатства (p, w) до новой $(p', w') = \big(p', p' \cdot x(p, w)\big)$ выполнено

$$(p' - p) \cdot \big[x(p', w') - x(p, w)\big] \leq 0, \qquad (2.F.1)$$

причем строгое неравенство имеет место при $x(p, w) \neq x(p', w')$.

Доказательство. 1) *Из слабой аксиомы выявленных предпочтений следует неравенство* (*2.F.1*), *причем неравенство будет строгим, если* $x(p, w) \neq x(p', w')$. При $x(p', w') = x(p, w)$ результат очевиден, поскольку $(p' - p) \cdot \big[x(p', w') - x(p, w)\big] = 0$. Поэтому предположим, что $x(p', w') \neq$ $\neq x(p, w)$. Левую часть неравенства (2.F.1) можно представить в виде

$$\begin{aligned}(p' - p) \cdot \big[x(p', w') - x(p, w)\big] = \\ = p' \cdot \big[x(p', w') - x(p, w)\big] - p \cdot \big[x(p', w') - x(p, w)\big].\end{aligned} \qquad (2.F.2)$$

Рассмотрим сначала первый член выражения (2.F.2). Поскольку изменение цен с p до p' компенсируется изменением богатства, то $p' \cdot x(p, w) = w'$. Кроме того, согласно закону Вальраса $w' = p' \cdot x(p', w')$. Следовательно,

$$p' \cdot \big[x(p', w') - x(p, w)\big] = 0. \qquad (2.F.3)$$

Теперь рассмотрим второй член выражения (2.F.2). Поскольку $p' \cdot x(p, w) = w'$, то $x(p, w)$ — допустимый набор при комбинации цен и богатства $x(p', w')$. Следовательно, согласно слабой аксиоме выявленных предпочтений, набор $x(p', w')$ *не* должен быть доступен при комбинации цен и дохода (p, w), т. е. должно быть выполнено $p \cdot x(p', w') > w$. И поскольку по закону Вальраса $p \cdot x(p, w) = w$, то из этого следует, что

$$p \cdot \big[x(p', w') - x(p, w)\big] > 0. \qquad (2.F.4)$$

Таким образом, из (2.F.2), (2.F.3) и (2.F.4) получаем желаемый результат.

2) *Слабая аксиома выявленных предпочтений следует из* (*2.F.1*) *при любых компенсированных изменениях цен, причем неравенство будет строгим при* $x(p, w) \neq x(p', w')$. Для доказательства этого утверждения используется следующий факт: слабая аксиома выявленных предпочтений выполнена тогда и только тогда, когда она выполнена для всех *компенсированных* изменений цен. Другими словами, слабая аксиома выявленных предпочтений выполнена, если для любых двух комбинаций цена — богатство, (p, w) и (p', w'), имеем: $p' \cdot x(p, w) > w'$ при $p \cdot x(p', w') = w$ и $x(p, w) \neq x(p', w')$. ■

Для доказательства утверждения, сформулированного в предыдущем абзаце, нужно показать, что если слабая аксиома выявленных предпочтений не выполняется, то должно существовать такое компенсированное изменение цены, при котором это становится возможным. Чтобы убедиться в этом, предположим, что слабая аксиома выявленных предпочтений не выполнена, т. е. существуют две такие комбинации цена — богатство, (p', w') и (p'', w''), что $x(p', w') \neq x(p'', w'')$, $p' \cdot x(p'', w'') \leq w'$ и $p'' \cdot x(p', w') \leq$ $\leq w''$. Если одно из этих нестрогих неравенств выполняется как равенство, то мы как раз и получаем компенсированное изменение цены. Поэтому предположим, что, как показано на рис. 2.F.3, $p' \cdot x(p'', w'') < w'$ и $p'' \cdot x(p', w') < w''$.

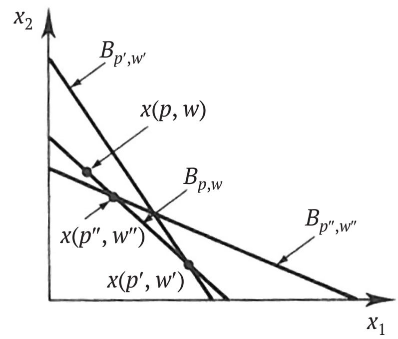


Рис. 2.F.3. Слабая аксиома выполнена тогда и только тогда, когда она выполнена для всех компенсированных изменений цены

Теперь выберем такое значение $\alpha \in (0, 1)$ для которого выполнено

$$\left(\alpha p' + (1 - \alpha)p''\right) \cdot x(p', w') = \left(\alpha p' + (1 - \alpha)p''\right) \cdot x(p'', w''),$$

и введем обозначения: $p = \alpha p' + (1 - \alpha)p''$ и $w = \left(\alpha p' + (1 - \alpha)p''\right) \cdot x(p', w')$. Данное построение проиллюстрировано на рис. 2.F.3. Тогда

$$\begin{aligned}\alpha w' + (1 - \alpha)w'' > \alpha p' \cdot x(p', w') + (1 - \alpha)p'' \cdot x(p', w') &= \\ = w &= \\ = p \cdot x(p, w) &= \\ = \alpha p' \cdot x(p, w) + (1 - \alpha)p'' \cdot x(p, w)&.\end{aligned}$$

Следовательно, либо $p' \cdot x(p, w) < w'$, либо $p'' \cdot x(p, w) < w''$. Предположим, что выполнено первое из этих неравенств (аналогично можно рассмотреть случай, когда выполнено второе неравенство). Тогда имеем: $x(p, w) \neq x(p', w')$, $p \cdot x(p', w') = w$ и $p' \times$ $\times x(p, w) < w'$, что противоречит слабой аксиоме выявленных предпочтений при компенсированном изменении цен с (p', w') до (p, w).

Поскольку мы знаем, что для проверки выполнения слабой аксиомы выявленных предпочтений достаточно рассмотреть только компенсированные изменения цен, то остальное доказательство очевидно. Если слабая аксиома выявленных предпочтений не выполнена, то существует такое компенсированное изменение цен с (p', w') до (p, w), что $x(p, w) \neq$ $\neq x(p', w')$, $p \cdot x(p', w') = w$ и $p' \cdot x(p, w) \leq w'$. Однако поскольку $x(\cdot, \cdot)$ удовлетворяет закону Вальраса, то из этих двух неравенств следует, что

$$p \cdot \left[x(p', w') - x(p, w)\right] = 0 \ \text{ и } \ p' \cdot \left[x(p', w') - x(p, w)\right] \geq 0.$$

Следовательно, имеем

$$(p' - p) \cdot \left[x(p', w') - x(p, w)\right] \geq 0 \ \text{ и } x\,(p, w) \neq x\,(p', w'),$$

что противоречит тому, что условие (2.F.1) должно быть выполнено для любых компенсированных изменений цен (причем при $x(p, w) \neq x(p', w')$ неравенство должно быть строгим). ■

Неравенство (2.F.1) можно представить в виде $\Delta p \cdot \Delta x \leq 0$, где $\Delta p = (p' - p)$ и $\Delta x = \left[x(p', w') - x(p, w)\right]$, что можно проинтерпретировать как некую форму *закона спроса*: *изменения спроса и цены противонаправлены*. Утверждение 2.F.1 говорит нам о том, что закон спроса выполнен для *компенсированных* изменений цен. В связи с этим мы будем называть его *законом компенсированного спроса*.

Наиболее простой случай — влияние на спрос на некоторое благо l компенсированного изменения его собственной цены p_l. Если изменяется только данная цена, то $\Delta p = (0, \ldots, 0, \Delta p_l, 0, \ldots, 0)$. Поскольку $\Delta p \cdot \Delta x = \Delta p_l \cdot \Delta x_l$, то, согласно утверждению 2.F.1, если $\Delta p_l > 0$, то должно быть выполнено $\Delta x_l < 0$. Данная ситуация проиллюстрирована на рис. 2.F.4. При начальном положении (p, w) компенсированное уменьшение цены блага 1 приводит к повороту бюджетной линии вокруг точки $x(p, w)$. Согласно слабой аксиоме выявленных предпочтений спрос на благо 1 может измениться только в сторону увеличения.

Рис. 2.F.5 должен убедить вас, что слабая аксиома выявленных предпочтений (или же предположение о выборе наилучшего согласно предпочтениям набора, рассматриваемое в главе 3) не является достаточным условием выполнения закона спроса при *некомпенсированных* изменениях цен. На данном рисунке изменение цен с p до p' осуществляется за счет снижения цены блага 1, но в этом случае слабая аксиома выявленных предпочтений не налагает никаких ограничений на расположение нового потребительского набора: как показано на рисунке, спрос на благо 1 снижается.

В случае когда потребительский спрос $x(p, w)$ является дифференцируемой функцией от цен и богатства, утверждение 2.F.1 имеет очень важное

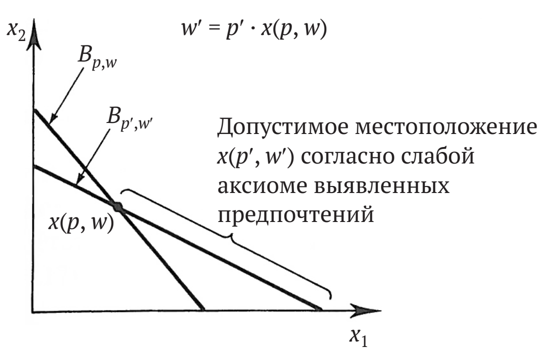


Рис. 2.F.4. При компенсированном **изменении цен** спрос на благо не возрастает по своей цене

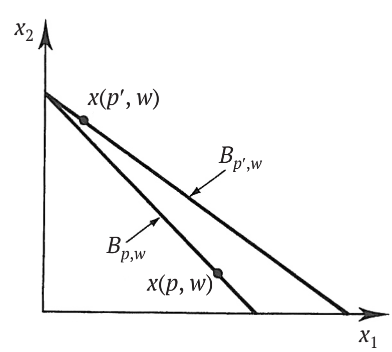


Рис. 2.F.5. Спрос на благо 1 может снизиться при уменьшении его цены в случае некомпенсированного изменения цен

дифференциальное следствие. Рассмотрим дифференциально малое изменение цен dp при исходной комбинации цен и богатства (p, w). Предположим, что изменение цен сопровождается компенсированным изменением богатства $dw = x(p, w) \cdot dp$ (это просто дифференциальный аналог выражения $\Delta w = x(p, w) \cdot dp$). Тогда согласно утверждению 2.F.1 должно быть выполнено

$$dp \cdot dx \leq 0. \tag{2.F.5}$$

Теперь по правилу дифференцирования сложной функции мы можем записать изменение спроса, порожденное таким компенсированным изменением цен, как

$$dx = D_p x(p, w)\, dp + D_w x(p, w)\, dw. \tag{2.F.6}$$

Следовательно,

$$dx = D_p x(p, w) dp + D_w x(p, w) \left[x(p, w) \cdot dp \right], \tag{2.F.7}$$

или

$$dx = \left[D_p x(p, w) + D_w x(p, w) x(p, w)^T \right] dp. \tag{2.F.8}$$

Наконец, подставляя (2.F.8) в (2.F.5), получим, что для любого возможного дифференциально малого изменения цен dp должно быть выполнено

$$dp \cdot \left[D_p x(p, w) + D_w x(p, w) x(p, w)^T \right] dp \leq 0. \tag{2.F.9}$$

Выражение в квадратных скобках в условии (2.F.9) представляет собой матрицу размерности $L \times L$, которую мы обозначим через $S(p, w)$, т. е.

$$S(p, w) = \begin{bmatrix} s_{11}(p, w) & . & . & . & s_{1L}(p, w) \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ s_{L1}(p, w) & . & . & . & s_{LL}(p, w) \end{bmatrix},$$

где (l, k)-й элемент матрицы равен

$$s_{lk}(p, w) = \frac{\partial x_l(p, w)}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(p, w)}{\partial w} x_k(p, w). \tag{2.F.10}$$

Матрица $S(p, w)$ называется матрицей *замещения*, или матрицей *Слуцкого*, а ее элементы — *коэффициентами замещения*.

Термин «замещение» здесь уместен, поскольку элементы матрицы $s_{lk}(p, w)$ характеризуют дифференциально малое изменение потребления товара l (т. е. замещение его (или им) другими товарами) в результате дифференциально малого изменения цены товара k, когда богатство скорректировано таким образом, что потребитель может по-прежнему в точности позволить себе исходный потребительский набор (т. е. в результате изменения только относительных цен). Чтобы убедиться в этом, заметим, что изменение спроса на благо l, если богатство индивида остается неизменным, составляет $\left(\partial x_l(p,\ w)\ /\ \partial p_k\right)dp_k$. Для того чтобы потребитель мог «в точности» себе позволить исходный потребительский набор, его богатство должно измениться на величину $x_k(p,\ w)dp_k$. Тогда влияние такого изменения богатства на спрос на благо l составит $\left(\partial x_l(p, w)/\partial w\right)\left[\,x_k(p,\ w)dp_k\,\right]$. В сумме эти два эффекта дают в точности $s_{lk}(p,\ w)dp_k$.

Подведем итог рассуждениям, проиллюстрированным соотношениями (2.F.5)–(2.F.10), в утверждении 2.F.2.

Утверждение 2.F.2. Если дифференцируемая функция вальрасианского спроса $x(p,\ w)$ удовлетворяет закону Вальраса, слабой аксиоме выявленных предпочтений и однородна нулевой степени, то для любых $(p,\ w)$ матрица Слуцкого $S(p,\ w)$ удовлетворяет условию $v \cdot S(p,\ w) \cdot$ $\cdot\, v \le 0$ для любого $v \in \mathbb{R}^L$.

Матрица, удовлетворяющая описанному в утверждении 2.F.2 свойству, называется *отрицательно полуопределенной* (и отрицательно *определенной* при строгом неравенстве для всех $v \neq 0$). Более подробную информацию о таких матрицах можно найти в разделе M. D.

Обратите внимание, что отрицательная полуопределенность матрицы $S(p,\ w)$ означает, что $s_{ll}(p,\ w) \le 0$, т. е. *эффект замещения для блага l по своей цене всегда неположителен*.

Интересным следствием условия $s_{ll}(p, w) \le 0$ является тот факт, что только инфериорное благо может быть товаром Гиффена при $(p,\ w)$. Действительно,

$$s_{ll}(p,\ w) = \partial x_l(p,\ w)\ /\ \partial p_l + \left[\partial x_l(p,\ w)\ /\ \partial w\right]x_l(p,\ w) \le 0,$$

и поскольку $\partial x_l(p,\ w)\ /\ \partial p_l > 0$, то должно быть выполнено $\partial x_l(p,\ w)\ /\ \partial w < 0$.

Следует также отметить, что из утверждения 2.F.2 *не следует*, вообще говоря, что матрица $S(p,\ w)$ симметрична[11]. При $L = 2$ матрица $S(p,\ w)$ симметрична (доказать этот факт вам предлагается в упражнении 2.F.11). Однако если $L > 2$, то при введенных предположениях (однородность нулевой степени, закон Вальраса и слабая аксиома выявленных предпочтений) матрица $S(p,\ w)$ необязательно является симметричной (см. примеры, приведенные в упражнениях 2.F.10 и 2.F.15). В главе 3 (раздел 3.H) мы увидим,

[11] Это вопрос терминологии. В математической литературе принято считать, что «определенные» матрицы симметричны. Строго говоря, если симметрия не предполагается, то матрица должна называться «квазиопределенной». Однако для простоты мы используем понятие «определенная» матрица без предположения о симметричности: если матрица также симметрична, то мы явно это оговариваем (см. упражнение 2.F.9).

что симметричность матрицы $S(p, w)$ тесно связана с возможностью выведения спроса из задачи максимизации полезности.

Исходя из предположений об однородности нулевой степени и выполнении закона Вальраса мы можем получить еще одну характеристику матрицы замещения $S(p, w)$.

Утверждение 2.F.3. Пусть функция вальрасианского спроса $x(p, w)$ дифференцируема, однородна нулевой степени и удовлетворяет закону Вальраса. Тогда $p \cdot S(p, w) = 0$ и $S(p, w) \cdot p = 0$ для любой комбинации цен и богатства (p, w).

Упражнение 2.F.7. Докажите утверждение 2.F.3. (*Подсказка*: воспользуйтесь утверждениями 2.E.1–2.E.3.)

Из утверждения 2.F.3 следует, что матрица $S(p, w)$ всегда сингулярна (т. е. имеет ранг, меньший или равный L), поэтому в утверждении 2.F.2 говорится об отрицательной полуопределенности, а не об отрицательной определенности матрицы $S(p, w)$ (см. упражнение 2.F.17).

Утверждение 2.F.2 устанавливает отрицательную полуопределенность матрицы $S(p, w)$ как необходимое следствие слабой аксиомы выявленных предпочтений. В связи с этим может возникнуть вопрос: является ли это свойство достаточным для выполнения слабой аксиомы выявленных предпочтений (т. е. верно ли, что отрицательная полуопределенность матрицы $S(p, w)$ в действительности эквивалентна выполнению слабой аксиомы выявленных предпочтений)? Другими словами, если у нас есть функция спроса $x(p, w)$, удовлетворяющая закону Вальраса, и однородная нулевой степени, порождающая отрицательно полуопределенную матрицу замещения, то должна ли она удовлетворять слабой аксиоме выявленных предпочтений? Ответ на этот вопрос такой: почти*, но не совсем*. В упражнении 2.F.16 приведен пример функции спроса с отрицательно полуопределенной матрицей замещения, но не согласующейся со слабой аксиомой выявленных предпочтений. Достаточное условие в действительности имеет такой вид: $v \cdot S(p, w) \cdot v < 0$, где $v \neq \alpha p$ для любого скаляра α, т. е. матрица $S(p, w)$ должна быть отрицательно определенной для всех векторов, кроме тех, которые пропорциональны p. Этот результат получен в работе П. Самуэльсона (см. (Samuelson, 1947) или (Kihlstrom, Mas-Colell, Sonnenschein, 1976) в более продвинутом варианте). В данном случае различие между необходимыми и достаточными условиями имеет ту же природу, что и различие между необходимыми и достаточными условиями второго порядка в задаче минимизации функции.

Наконец, как связана теория потребительского спроса, основанная только на предположениях об однородности нулевой степени, законе Вальраса и согласованности выбора в терминах слабой аксиомы выявленных предпочтений, с теорией, основанной на выборе набора, наилучшего согласно рациональным предпочтениям?

Учитывая материал главы 1, мы могли бы ожидать, что из утверждения 1.D.2 следует, что эти два подхода эквивалентны. Однако мы не можем апеллировать к этому утверждению, поскольку семейство вальрасианских бюджетных множеств содержит не все возможные бюджеты, в частности, оно не содержит те бюджеты, которые формируются только из наборов с двумя или тремя товарами.

В действительности, две данные теории не эквивалентны. Что касается вальрасианских функций спроса, то теория, построенная на основе слабой аксиомы выявленных предпочтений, если так можно выразиться, «слабее», чем теория, базирующаяся на рациональных предпочтениях, в том смысле, что она налагает меньше ограничений. Это отражено в главе 3, где будет показано, что если спрос выведен из предпочтений или может быть выведен из предпочтений, то соответствующая матрица Слуцкого должна быть симметричной при всех (p, w). На данном этапе изложения поводом к размышлению может послужить пример 2.F.1, изначально предложенный в работе (Hiks, 1956).

Пример 2.F.1. В трехтоварной экономике рассмотрим три бюджетных множества, определяемые векторами цен $p^1 = (2, 1, 2)$, $p^2 = (2, 2, 1)$, $p^3 = (1, 2, 2)$ и богатством $w = 8$ (одинаковым для всех трех бюджетов). Предположим, что соответствующий (единственный) выбор потребителя будет следующим: $x^1 = (1, 2, 2)$, $x^2 = (2, 1, 2)$, $x^3 = (2, 2, 1)$. В упражнении 2.F.2 вас просят убедиться, что любые две данные пары потребительских наборов удовлетворяют слабой аксиоме выявленных предпочтений, но при этом x^3 выявленно предпочитается x^2, x^2 выявленно предпочитается x^1, а x^1 выявленно предпочитается x^3. Подобная ситуация несовместима с существованием рациональных предпочтений, лежащих в основе выбора потребителя (в силу нарушения транзитивности).

Этот пример может рассматриваться лишь как *повод* к размышлению, а не как решение вопроса, поскольку спрос определен только для трех данных бюджетов, и, следовательно, мы не можем быть уверены, что он удовлетворяет требованиям слабой аксиомы выявленных предпочтений при всех возможных конкурентных бюджетах. Поэтому окончательное решение этого вопроса мы отложим до главы 3. ■

Подводя итог, сформулируем три основных вывода, полученных в разделе 2.F:

1) Требование согласованности выбора потребителя, сформулированное в виде слабой аксиомы выявленных предпочтений (вкупе с однородностью нулевой степени и законом Вальраса), эквивалентно требованию выполнения закона компенсированного спроса.
2) Из закона компенсированного спроса, в свою очередь, следует отрицательная полуопределенность матрицы замещения $S(p, w)$.
3) Из этих предположений *не* следует симметричность матрицы $S(p, w)$, за исключением случая $L = 2$.

Литература

Burtless G., Hausman J. A. (1978). The effects of taxation on labor supply: Evaluating the Gary negative income tax experiment. *Journal of Political Economy* 86: 1103–1130.

Deaton A., Muelbauer J. (1980). *Economics and Consumer Behavior*. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.

Hicks J. (1956). *A Revision of Demand Theory*. Oxford: Oxford University Press.
Kihlstrom R., Mas-Colell A., Sonnenschein H. (1976). The demand theory of the weak axiom of revealed preference. *Econometrica* 44: 971–978.
Malinvaud E. (1978). *Lectures in Microeconomic Theory*. New York: Elsevier.
Samuelson P. (1947). *Foundations of Economic Analysis*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Упражнения

2.D.1$^{\mathbf{A}}$. Потребитель живет два периода (обозначим их 1 и 2) и в каждом периоде потребляет единственное потребительское благо. Богатство потребителя при рождении составляет $w > 0$. Каково его вальрасианское бюджетное множество (на протяжении всей жизни)?

2.D.2$^{\mathbf{A}}$. Индивид потребляет благо x и часы досуга h. Цена потребительского блага равна p, а ставка заработной платы потребителя составляет $s = 1$. Каково вальрасианское бюджетное множество потребителя?

2.D.3$^{\mathbf{B}}$. Рассмотрите расширение вальрасианского бюджетного множества до произвольного потребительского множества X: $B_{p,w} = \left\{x \in X\colon p \cdot x \leq w\right\}$. Считайте, что $(p, w) \gg 0$.

a) Если X — это множество, изображенное на рис. 2.C.3, то будет ли множество $B_{p,w}$ выпуклым?

b) Покажите, что если X — выпуклое множество, то множество $B_{p,w}$ также выпукло.

2.D.4$^{\mathbf{A}}$. Покажите, что бюджетное множество на рис. 2.D.4 не является выпуклым.

2.E.1$^{\mathbf{A}}$. В тексте.

2.E.2$^{\mathbf{B}}$. В тексте.

2.E.3$^{\mathbf{B}}$. Используя утверждения 2.E.1–2.E.3, покажите, что $p \cdot D_p x(p, w)p = -w$. Проинтерпретируйте полученный результат.

2.E.4$^{\mathbf{B}}$. Покажите, что если спрос $x(p, w)$ однороден первой степени по w (т. е. $x(p, \alpha w) = \alpha x(p, w)$ для всех $\alpha > 0$) и удовлетворяет закону Вальраса, то $\varepsilon_{lw}(p, w) = 1$ для всех l. Проинтерпретируйте полученный результат. Можно ли что-нибудь сказать о $D_w x(p, w)$, виде функций Энгеля и соответствующих кривых в этом случае?

2.E.5$^{\mathbf{B}}$. Пусть $x(p, w)$ — однородная первой степени по w функция спроса, удовлетворяющая закону Вальраса и свойству однородности нулевой степени. Предположим также, что все перекрестные ценовые эффекты равны нулю, т. е. $\partial x_l(p, w)/\partial p_k = 0$ при любых $k \neq l$. Покажите, что тогда для каждого l выполнено: $x_l(p, w) = \alpha_l w/p_l$, где $\alpha_l > 0$ — константа, не зависящая от (p, w).

2.E.6$^{\mathbf{A}}$. Убедитесь, что утверждения 2.E.1–2.E.3 справедливы, взяв в качестве примера функции спроса из упражнения 2.E.1 при $\beta = 1$.

2.E.7[A]**.** Пусть потребитель в двухтоварной экономике имеет функцию спроса $x(p, w)$, удовлетворяющую закону Вальраса. Функция спроса потребителя на первое благо имеет вид: $x_1(p, w) = \alpha w / p_1$. Выведите функцию спроса на второе благо. Будет ли эта функция однородна нулевой степени?

2.E.8[B]**.** Покажите, что эластичность спроса на благо l по цене p_k, $\varepsilon_{lk}(p, w)$, может быть представлена в виде: $\varepsilon_{lk}(p, w) = d\ln\left(x_l(p, w)\right) / d\ln(p_k)$, где $\ln(\cdot)$ — функция натурального логарифма. Получите аналогичное выражение для $\varepsilon_{lw}(p, w)$. Покажите, что если мы оцениваем параметры $\left(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \gamma\right)$ уравнения $\ln\left(x_l(p, w)\right) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln p_1 + \alpha_2 \ln p_2 + \gamma \ln w$, то эти оценки параметров дают нам оценки эластичностей $\varepsilon_{l1}(p, w)$, $\varepsilon_{l2}(p, w)$ и $\varepsilon_{lw}(p, w)$.

2.F.1[B]**.** Покажите, что для вальрасианских функций спроса формулировка слабой аксиомы выявленных предпочтений, приведенная в определении 2F. 1, совпадает с формулировкой, приведенной в определении 1.C.1.

2.F.2[B]**.** Убедитесь в справедливости выводов, сформулированных в примере 2.F.1.

2.F.3[B]**.** Предположим, у вас есть некоторая информация о покупках индивида, который потребляет только два блага.

	Первый год		Второй год	
	Количество	Цена	Количество	Цена
Благо 1	100	100	120	100
Благо 2	100	100	?	80

Определите, при каких значениях количества блага 2, потребляемого во второй год, можно сделать следующие выводы:

a) потребитель ведет себя непоследовательно (т. е. его выбор не согласуется со слабой аксиомой выявленных предпочтений);

b) потребительский набор первого года выявленно предпочитается набору второго года (в предположении, что слабая аксиома выявленных предпочтений выполнена);

c) потребительский набор второго года выявленно предпочитается набору первого года (в предположении, что слабая аксиома выявленных предпочтений выполнена);

d) недостаточно информации, чтобы ответить на вопросы (a), (b) и/или (c);

e) для данного потребителя благо 1 является инфериорным (при некоторой цене) (Считайте, что слабая аксиома выявленных предпочтений выполнена.);

f) Для данного потребителя благо 2 является инфериорным (при некоторой цене). (Считайте, что слабая аксиома выявленных предпочтений выполнена.)

2.F.4[A]. Рассмотрите два разных периода потребления: период 0 и период 1. Пусть в период t цены, богатство и объем потребления составляют p^t, w_t и $x^t = x(p^t, w_t)$ соответственно. Зачастую в прикладных задачах возникает необходимость в индексе, характеризующем объем потребления индивида. Количественный индекс *Ласпейреса* дает оценку изменения объема потребления, где в качестве весов выступают цены нулевого периода: $L_Q = \left(p^0 \cdot x^1\right) / \left(p^0 \cdot x^0\right)$. В количественном индексе *Пааше* в качестве весов используются цены первого периода: $P_Q = \left(p^1 \cdot x^1\right) / \left(p^1 \cdot x^0\right)$. Наконец, мы можем использовать также индекс изменения расходов потребителя: $E_Q = \left(p^1 \cdot x^1\right) / \left(p^0 \cdot x^0\right)$. Докажите следующие утверждения:

a) если $L_Q < 1$, то потребитель выявленно предпочитает набор x^0 набору x^1;

b) если $P_Q > 1$, то потребитель выявленно предпочитает набор x^1 набору x^0;

c) нельзя сказать, какой набор выявленно предпочитается потребителем, если $E_Q > 1$ или $E_Q < 1$. Следует заметить, что на агрегированном уровне E_Q соответствует изменению валового национального продукта (в процентах).

2.F.5[C]. Пусть $x(p, w)$ — дифференцируемая функция спроса, удовлетворяющая слабой аксиоме выявленных предпочтений, закону Вальраса и свойству однородности нулевой степени. Покажите, что если функция $x(\cdot, \cdot)$ однородна первой степени по w (т. е. $x(p, \alpha w) = \alpha x(p, w)$ для всех (p, w) и $\alpha > 0$), то закон спроса выполнен даже для *некомпенсированных* изменений цен. Для упрощения задания можно доказать только инфинитезимальный вариант данного утверждения, т. е. показать, что $dp \cdot D_p x(p, w)\, dp \le 0$ при любых dp.

2.F.6[A]. Пусть функция $x\,(p, w)$ однородна нулевой степени. Покажите, что слабая аксиома выявленных предпочтений выполнена тогда и только тогда, когда для некоторого $w > 0$ и любых p, p' выполнено: $p' \cdot x(p, w) > w$ и $p \cdot x(p', w) \le w$ при $x(p', w) \ne x(p, w)$.

2.F.7[B]. В тексте.

2.F.8[A]. Пусть $\hat{s}_{lk}(p, w) = \left[p_k \;/\; x_l(p, w)\right] s_{lk}(p, w)$ — коэффициент замещения в терминах эластичности. Выразите $\hat{s}_{lk}(p, w)$ через $\varepsilon_{lk}(p, w)$, $\varepsilon_{lw}(p, w)$ и $b_k(p, w)$.

2.F.9[B]. Симметричная матрица A размерности $n \times n$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда $(-1)^k \left|A_{kk}\right| > 0$ для всех $k \le n$, где A_{kk} — подматрица, полученная исключением из матрицы A последних $n - k$ строк и столбцов. Для полуопределенности симметричной матрицы A следует заменить строгие неравенства на нестрогие при условии, что эти нестрогие неравенства выполнены для всех матриц, сформированных путем перестановки строк и столбцов матрицы A (см. более подробно об этом в разделе M. D. математического приложения).

a) Покажите, что произвольная (возможно, несимметричная) матрица A отрицательно определена (или полуопределена) тогда и только тогда, когда матрица $A + A^T$ отрицательно определена (или полуопределена). Покажите также, что приведенное выше условие на определители подматриц (можно показать, что оно является необходимым) не является достаточным в случае несимметричной матрицы.

b) Покажите, что при $L = 2$ необходимое и достаточное условие того, что матрица замещения $S(p, w)$, имеющая ранг 1, отрицательно полуопределена, заключается в том, что любой диагональный элемент матрицы (т. е. любой эффект замещения по своей цене) имеет отрицательный знак.

2.F.10[B]. Рассмотрите функцию спроса из упражнения 2.E.1. Считайте, что $\beta = 1$ и $w = 1$.

a) Вычислите матрицу замещения и покажите, что при $p = (1, 1, 1)$ она отрицательно полуопределена, но не симметрична.

b) Покажите, что данная функция спроса не удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений. (*Подсказка*: рассмотрите вектор цен $p = (1, 1, \varepsilon)$ и покажите, что матрица замещения не является отрицательно полуопределенной при малом $\varepsilon > 0$.)

2.F.11[A]. Покажите, что при $L = 2$ матрица $S(p, w)$ всегда симметрична. (*Подсказка*: воспользуйтесь утверждением 2.F.3.)

2.F.12[A]. Покажите, что если функция вальрасианского спроса $x(p, w)$ порождена рациональными предпочтениями, то она должна удовлетворять слабой аксиоме выявленных предпочтений.

2.F.13[C]. Предположим, что функция $x(p, w)$ может быть многозначной.

a) Опираясь на формулировку слабой аксиомы выявленных предпочтений, приведенную в разделе 1.C, выведите обобщенный вариант определения 2.F.1 для отображения вальрасианского спроса.

b) Покажите, что если $x(p, w)$ удовлетворяет этой обобщенной слабой аксиоме выявленных предпочтений и закону Вальраса, то $x(\cdot)$ также удовлетворяет следующему условию:

$$\text{для любых } x \in x(p, w) \text{ и } x' \in x(p', w')$$

$$\text{если } p \cdot x' < w, \text{ то } p \cdot x > w'. \tag{*}$$

c) Покажите, что из обобщенной слабой аксиомы выявленных предпочтений и закона Вальраса вытекает следующий обобщенный вариант закона компенсированного спроса: при любой начальной комбинации цен и богатства (p, w) и спросе $x \in x(p, w)$

для любого компенсированного изменения цен до p' и уровня богатства $w' = p' \cdot x$ выполнено:

$$(p' - p) \cdot (x' - x) \leq 0$$

для всех $x' \in x(p', w')$, причем для $x' \in x(p, w)$ неравенство строгое.

d) Покажите, что если $x(p, w)$ удовлетворяет закону Вальраса и обобщенному закону компенсированного спроса, описанному в пункте (c), то $x(p, w)$ удовлетворяет обобщенной слабой аксиоме выявленных предпочтений.

2.F.14[A]. Покажите, что если $x(p, w)$ — функция вальрасианского спроса, удовлетворяющая слабой аксиоме выявленных предпочтений, то $x(p, w)$ должна быть однородной нулевой степени.

2.F.15[B]. Рассмотрите случай $L = 3$ и индивида с потребительским множеством $\mathbb{R}^3$. Функция спроса потребителя $x(p, w)$ обладает свойством однородности нулевой степени и удовлетворяет закону Вальраса, причем (при фиксированной цене $p_3 = 1$) выполнено

$$x_1(p, w) = -p_1 + p_2$$

и

$$x_2(p, w) = -p_2.$$

Покажите, что данная функция спроса удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений, убедившись, что ее матрица замещения обладает следующим свойством: $v \cdot S(p, w)\, v < 0$ для всех $v \neq \alpha p$. (*Подсказка*: воспользуйтесь свойствами матриц, описанными в разделе M. D. математического приложения.) Покажите также, что матрица замещения не является симметричной. (*Замечание*: тот факт, что мы допускаем отрицательные уровни потребления, здесь несуществен для нахождения удовлетворяющей слабой аксиоме выявленных предпочтений функции спроса с несимметричной матрицей замещения; для потребительских наборов только с неотрицательными уровнями потребления нам нужно было бы специфицировать более сложную функцию спроса.)

2.F.16[B]. Рассмотрите случай $L = 3$ и индивида, имеющего потребительское множество $\mathbb{R}^3$. Предположим, что функция спроса $x(p, w)$ такова:

$$x_1(p, w) = \frac{p_2}{p_3},$$

$$x_2(p, w) = -\frac{p_1}{p_3},$$

$$x_3(p, w) = \frac{w}{p_3}.$$

a) Покажите, что функция $x(p, w)$ однородна нулевой степени по (p, w) и удовлетворяет закону Вальраса.

b) Покажите, что $x(p, w)$ не удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений.

c) Покажите, что $v \cdot S(p, w)v = 0$ для всех $v \in \mathbb{R}^3$.

2.F.17^B. Пусть в экономике с L-товарами функция вальрасианского спроса потребителя имеет вид

$$x_k(p, w) = \frac{w}{\left(\sum_{l=1}^{L} p_l\right)}, \text{ где } k = 1, \ldots, L.$$

a) Является ли данная функция спроса однородной нулевой степени по (p, w)?

b) Удовлетворяет ли данная функция спроса закону Вальраса?

c) Вычислите матрицу замещения Слуцкого для данной функции спроса. Будет ли она отрицательно полуопределенной? Отрицательно определенной? Симметричной?

Глава 3. Классическая теория спроса

3.А. Введение

Эта глава посвящена изложению классической теории потребительского выбора, основанной на предпочтениях.

Мы приступим к изучению этой теории в разделе 3.В, начав с определения понятия отношения предпочтения потребителя и описания некоторых его основных свойств. Всюду в этой главе мы предполагаем, что отношение предпочтения является рациональным, т. е. оно позволяет получить полное и транзитивное ранжирование альтернатив, выбираемых потребителем. Также рассматриваются еще два свойства предпочтений — *монотонность* (и ее аналог — *локальная ненасыщаемость*) и *выпуклость,* — которые будут активно использоваться в дальнейшем анализе.

В разделе 3.С обсуждается вопрос существования и непрерывности функции полезности, представляющей предпочтения. Мы показываем, что не всякое отношение предпочтения можно описать функцией полезности, а затем формулируем предпосылку относительно предпочтений, известную как *непрерывность*, выполнение которой гарантирует существование (непрерывной) функции полезности.

В разделе 3.D мы приступаем к изучению задачи принятия решения потребителем в экономике с L-товарами, цены которых потребитель считает фиксированными и не зависящими от его действий (т. е. потребитель выступает ценополучателем). Формулируется задача потребителя как задача *максимизации полезности* при ограничении, задаваемом вальрасианским бюджетным множеством. Центральное место в нашем исследовании занимают оптимальный выбор потребителя, описываемый *вальрасианским* (или *рыночным*, или *обычным*) *отображением спроса*, и оптимальное значение полезности потребителя, описываемое *косвенной функцией полезности*.

Раздел 3.Е посвящен *задаче минимизации расходов* потребителя, тесно связанной с задачей максимизации полезности. Подобно тому как анализировались отображение спроса и функция значения задачи максимизации полезности, исследуются и соответствующие понятия для задачи минимизации расходов, которые известны как *отображение хиксианского* (или *компенсированного*) *спроса* и *функция расходов* соответственно. Проводится также первоначальный формальный анализ взаимосвязи между задачами минимизации расходов и максимизации полезности.

В разделе 3.F излагаются фундаментальные математические понятия, лежащие в основе теории двойственности. Этот материал позволяет сформировать представление о структуре теории спроса, основанной на предпочтениях. При первом знакомстве с данной главой раздел 3.F можно пропустить, не теряя общей нити изложения. Однако мы бы все же рекомендовали ознакомиться с этим материалом.

В разделе 3.G продолжается анализ задач максимизации полезности и минимизации расходов. В нем формулируются некоторые наиболее важные результаты теории спроса, которые демонстрируют фундаментальную связь между спросом и функциями значения для двух рассматриваемых задач.

Раздел 3.H завершает анализ теории потребительского спроса, основанной на предпочтениях, поиском ответа на вопрос, каким образом и в каких случаях мы можем выявить лежащие в основе поведения потребителя предпочтения. Эта задача традиционно называется *задачей интегрируемости (восстановления)*. Согласно результатам, представленным в этом разделе, свойства потребительского спроса, названные в разделах 3.D–3.G *необходимыми* следствиями поведения, основанного на выборе наилучшего согласно предпочтениям набора, также являются и *достаточными* в том смысле, что любое поведение потребителя относительно спроса на блага, удовлетворяющее этим свойствам, может быть рационализировано как поведение, согласующееся с выбором наилучшего согласно предпочтениям набора.

Результаты разделов 3.D–3.H также позволяют сопоставить два подхода к теории потребительского спроса: подход, основанный на предпочтениях, и теорию выбора, изложенную в разделе 2.F. Хотя, как выясняется, различия между двумя данными подходами незначительны, их нельзя назвать эквивалентными: основанная на наблюдаемом выборе потребителя теория спроса, базирующаяся на слабой аксиоме выявленных предпочтений, налагает меньше ограничений на спрос, чем основанная на предпочтениях теория, изложенная в этой главе. Дополнительное условие, налагаемое предположением о рациональности предпочтений, — это условие *симметричности* матрицы Слуцкого. В результате мы приходим к выводу, что сам по себе факт выполнения слабой аксиомы не гарантирует существования рационального отношения предпочтения, лежащего в основе потребительского спроса.

Анализ, предпринятый в разделах 3.B–3.H, полностью сконцентрирован на позитивных (т. е. описательных) следствиях подхода, основанного на предпочтениях. Однако одно из наиболее важных преимуществ такого анализа заключается в том, что он формирует основу для нормативного анализа, или анализа *благосостояния*. В разделе 3.I мы впервые поднимаем эту тему, рассматривая влияние изменения цен на благосостояние потребителя. В этом контексте мы обсуждаем возможность использования традиционной концепции маршаллианского излишка как меры благосостояния потребителя.

Наконец, в заключительном разделе 3.J мы возвращаемся к подходу, основанному на выборе потребителя, и задаемся вопросом, существует ли некий более сильный вариант слабой аксиомы, выполнение которого гарантировало бы эквивалентность теории потребительского спроса, основанной на выборе, и теории, основанной на предпочтениях. В качестве ответа мы приводим *сильную аксиому выявленных предпочтений* и показываем, что если выбор потребителя ей удовлетворяет, то поведение потребителя согласуется с лежащими в его основе предпочтениями.

В приложении А обсуждаются некоторые технические вопросы, связанные с непрерывностью и дифференцируемостью вальрасианского спроса.

Для дальнейшего изучения приведенной в данной главе теории предлагаем ознакомиться с исчерпывающим изложением классической теории спроса в книге (Deaton, Muellbauer, 1980).

3.B. Отношение предпочтения: основные свойства

В классическом подходе к теории спроса анализ поведения потребителя начинается с описания его предпочтений относительно товарных наборов на потребительском множестве $X \subset \mathbb{R}^L_+$.

Предпочтения потребителя описываются отношением предпочтения $\succsim$ (отношением «по крайней мере не хуже чем»), определенным на множестве X. Мы предполагаем, что это отношение предпочтения является рациональным (см. определение в разделе 1.B), т. е. *полным* и *транзитивным*. Для удобства еще раз сформулируем эти свойства, приведенные в определении 1.B.1[1].

Определение 3.B.1. Отношение предпочтения $\succsim$ на множестве X называется *рациональным*, если оно обладает следующими свойствами:

1) *Полнота*. Для любых $x, y \in X$ либо $x \succsim y$, либо $y \succsim x$ (либо и то и другое).

2) *Транзитивность*. Для любых $x, y, z \in X$, если $x \succsim y$ и $y \succsim z$, то $x \succsim z$.

В дальнейшем мы также будем использовать еще два предположения: будем считать, что блага *желаемы* и предпочтения *выпуклы*.

1) *Предположение о том, что блага желаемы*. Зачастую разумно считать, что большие объемы товаров предпочитаются меньшим. Эта особенность предпочтений описывается свойством монотонности. В определении 3.B.2 мы предполагаем, что потребление большего объема благ всегда в принципе доступно, т. е. если $x \in X$ и $y \geq x$, то $y \in X$.

[1] См. подробное обсуждение этих свойств в разделе 1.B.

Определение 3.B.2. Отношение предпочтения $\succsim$ на множестве X называется *монотонным*, если из $x \in X$ и $y >> x$ следует, что $y \succ x$. Отношение предпочтения *строго монотонно*, если из $y \geq x$ и $y \neq x$ следует, что $y \succ x$.

Предположение о монотонности предпочтений выполнено в том случае, если товары являются именно «благами», а не «антиблагами». Однако даже если некоторый товар является антиблагом, мы по-прежнему можем считать предпочтения монотонными, поскольку зачастую есть возможность переопределить товары таким образом, чтобы данная предпосылка выполнялась. Например, если товаром является мусор, то мы можем определить товар «отсутствие мусора»[2].

Следует заметить, что если отношение предпочтения $\succsim$ монотонно, то индивид может быть безразличен к увеличению объема некоторых товаров, но не всех. Тогда как строгая монотонность говорит о том, что если набор y содержит некоторого товара больше, чем набор x, и любого другого товара не меньше, то набор y строго предпочитается набору x.

Однако в большинстве случаев, рассматриваемых в теории потребителя, выполняется более слабое, чем монотонность, предположение о желаемости товаров, известное как *локальная ненасыщаемость*.

Определение 3.B.3. Отношение предпочтения $\succsim$ на множестве X называется *локально ненасыщаемым*, если для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $y \in X$, такой что $\|y - x\| \leq \varepsilon$ и $y \succ x$[3].

Исследование предпочтений на локальную ненасыщаемость проиллюстрировано на рис. 3.B.1 для случая $X = \mathbb{R}^L_+$. Локальная ненасыщаемость говорит о том, что для любого потребительского набора $x \in \mathbb{R}^L_+$ и любой произвольно малой окрестности x, обозначенной через $\varepsilon > 0$, существует другой набор, $y \in \mathbb{R}^L_+$, принадлежащий этой окрестности набора x, который предпочитается набору x. Следует заметить, что набор y может содержать даже меньшее количество каждого товара, чем набор x, как показано на рисунке. Тем не менее при $X = \mathbb{R}^L_+$ свойство локальной ненасыщае-

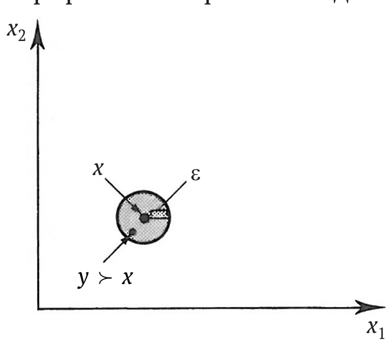


Рис. 3.B.1. Исследование на локальную ненасыщаемость

[2] Часто также бывает удобно рассматривать предпочтения, определенные относительно объема благ, доступного для потребления (т. е. запасов благ, имеющихся в распоряжении), а не относительно уровней потребления как таковых. В этом случае, если потребитель может свободно избавляться от любых ненужных товаров, его предпочтения относительно объема товаров, имеющихся в распоряжении, монотонны до тех пор, пока некоторое благо всегда желаемо.

[3] $\|x - y\|$ — Евклидово расстояние между точками x и y, т. е. $\|x - y\| = \left[\sum_{l=1}^{L}(x_l - y_l)^2\right]^{1/2}$.

мости исключает возможность ситуации, когда все товары являются антиблагами, поскольку в этом случае набор, содержащий нулевое количество каждого товара (точка $x = 0$), будет точкой насыщения.

Упражнение 3.B.1. Докажите справедливость следующих утверждений:

a) Если отношение предпочтения $\succsim$ строго монотонно, то оно монотонно.

b) Если отношение предпочтения $\succsim$ монотонно, то оно локально ненасыщаемо.

Имея отношение предпочтения $\succsim$ и потребительский набор x, мы можем определить три связанных с ними множества потребительских наборов. *Множество безразличия*, содержащее точку x, — это множество всех наборов, эквивалентных набору x, т. е. формально это множество $\{y \in X : y \sim x\}$. *Верхнее лебеговское множество* набора x — это множество всех наборов, которые не хуже набора x: $\{y \in X : y \succsim x\}$. *Нижнее лебеговское множество* набора x — это множество всех наборов, которые не лучше набора x: $\{y \in X : x \succsim y\}$. Одним из следствий локальной ненасыщаемости (а следовательно, и монотонности) является невозможность существования «толстых» множеств безразличия. Множество безразличия на рис. 3.B.2(a) не может удовлетворять свойству локальной ненасыщаемости, поскольку, если бы это было так, внутри круга с центром в точке x, изображенного на рисунке, должна была бы найтись лучшая точка. В то же время множество безразличия на рис. 3.B.2(b) удовлетворяет свойству локальной ненасыщаемости. На рис. 3.B.2(b) также изображены верхнее и нижнее лебеговские множества для набора x.

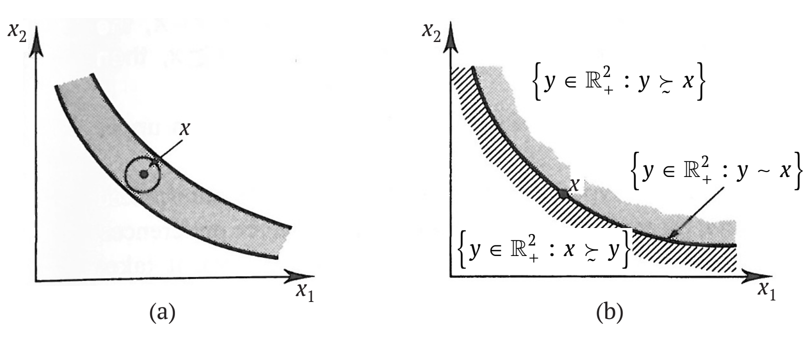
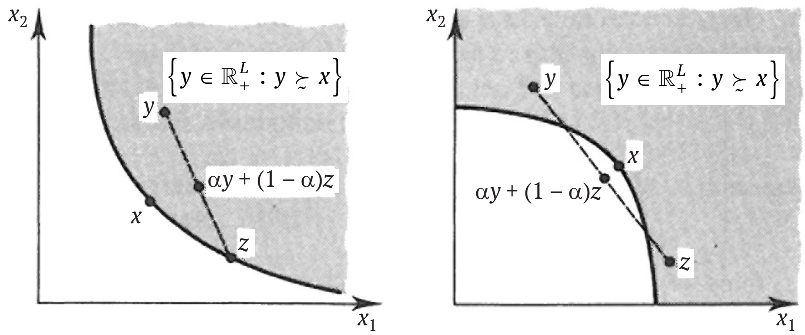


Рис. 3.B.2. (a) При «толстой» кривой безразличия свойство локальной ненасыщаемости предпочтений не выполняется.
(b) Предпочтения, удовлетворяющие свойству локальной ненасыщаемости

2) *Предположение о выпуклости предпочтений*. Вторая важная предпосылка — предпосылка о выпуклости отношения предпочтения $\succsim$ — касается выбора между разными благами, который должен сделать потребитель.

Определение 3.B.4. Отношение предпочтения $\succsim$ на множестве X называется *выпуклым*, если для любого $x \in X$ выпукло верхнее лебеговское множество $\{y \in X : y \succsim x\}$, т. е. если $y \succsim x$ и $z \succsim x$, то $\alpha y + (1 - \alpha)z \succsim x$ для любого $\alpha \in [0, 1]$.

На рис. 3.B.3(a) изображено выпуклое верхнее лебеговское множество, а на рис. 3.B.3(b) верхнее лебеговское множество невыпукло.



(a) (b)

Рис. 3.B.3. (a) Выпуклые предпочтения. (b) Невыпуклые предпочтения

Предпосылка о выпуклости является довольно сильной, но вместе с тем это одна из центральных экономических гипотез. Ее можно проинтерпретировать в терминах *убывания предельной нормы замещения*, т. е. для выпуклых предпочтений для любой начальной потребительской ситуации x и любых двух товаров требуется все большее и большее количество одного блага, чтобы компенсировать потерю каждой последующей единицы другого[4].

Выпуклость также может рассматриваться как формальное отражение того факта, что экономический агент склонен к диверсификации. Действительно, при выполнении предположения о выпуклости, если набор x эквивалентен набору y, набор, содержащий половину каждого блага из данных наборов $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$, не может быть хуже ни набора x, ни набора y. В главе 6 мы проинтерпретируем эту диверсификацию в терминах выбора в условиях неопределенности. Склонность к диверсификации — характерная черта реальной экономической жизни. Экономическая теория столкнулась бы с серьезными трудностями, если бы эта постулируемая предрасположенность к диверсификации не имела значимого дескриптивного содержания. Однако нет сомнений, что можно легко придумать такую ситуацию, когда она нарушается. Например, вам может нравиться и молоко, и апельсиновый сок, но их смесь приносит меньшее удовольствие.

[4] В более общем случае выпуклость эквивалентна убыванию предельной нормы замещения между любыми двумя благами в предположении, что допускается существование «композитных товаров», сформированных в виде линейной комбинации L базовых товаров.

Определение 3.B.4 может быть сформулировано и для потребительского множества X общего вида. Однако де-факто предположение о выпуклости будет выполнено только в том случае, если множество X выпукло. Таким образом, данная гипотеза исключает товары, которые могут потребляться только в целых количествах, или ситуации, подобные изображенной на рис. 2.C.3.

Хотя предположение о выпуклости предпочтений может показаться сильным, такое впечатление несколько обманчиво по двум причинам. Во-первых, довольно большое число (хотя и не все) результатов данной главы может быть без изменения распространено на случай невыпуклого потребительского множества. Во-вторых, как мы показываем в приложении A главы 4 и в разделе 17.I, отсутствие выпуклости зачастую может быть нивелировано с помощью регуляризирующих эффектов агрегирования по потребителям. ■

Мы также будем иногда пользоваться более сильным вариантом предпосылки о выпуклости.

Определение 3.B.5. Отношение предпочтения $\succsim$ на множестве X называется *строго выпуклым*, если для любого x из $y \succsim x$, $z \succsim x$ и $y \neq z$ следует, что $\alpha y + (1-\alpha)z \succ x$ для любого $\alpha \in (0, 1)$.

На рис. 3.B.3(a) проиллюстрированы строго выпуклые предпочтения, а на рис. 3.B.4 — предпочтения хотя и выпуклы, но не строго выпуклы.

В приложениях (особенно тех, которые имеют эконометрическую природу) обычно рассматриваются такие предпочтения, для которых по единственному множеству безразличия можно полностью охарактеризовать отношение предпочтения. Примерами двух классов таких предпочтений являются *гомотетичные* и *квазилинейные* предпочтения.

Определение 3.B.6. Монотонное отношение предпочтения $\succsim$ на множестве $X = \mathbb{R}_+^L$ называется *гомотетичным*, если для любого $\alpha \geq 0$ из $x \sim y$ следует, что $\alpha x \sim \alpha y$.

Гомотетичное отношение предпочтения проиллюстрировано на рис. 3.B.5.

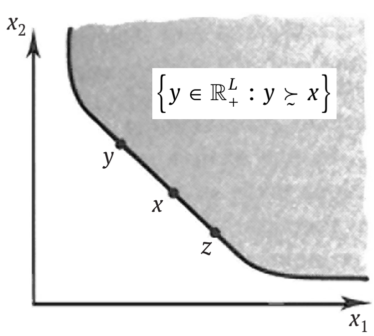


Рис. 3.B.4. Выпуклое, но не строго выпуклое отношение предпочтения

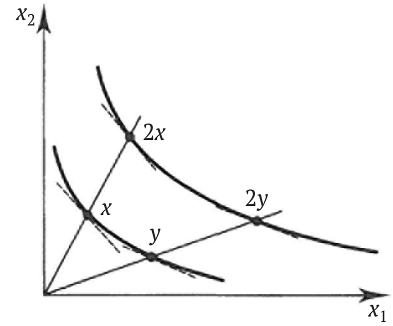


Рис. 3.B.5. Гомотетичные предпочтения

Определение 3.B.7. Отношение предпочтения $\succsim$ на множестве $X = (-\infty,\ \infty) \times \mathbb{R}_+^{L-1}$ называется *квазилинейным* по товару 1 (который в этом случае называется *товаром-измерителем*), если[5]:

1) Все множества безразличия представляют собой параллельное смещение друг друга вдоль оси товара 1, т. е. если $x \sim y$, то $(x + \alpha e_1) \sim (y + \alpha e_1)$ для $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$.
2) Благо 1 желаемо, т. е. $x + \alpha e_1 \succ x$ для всех x и $\alpha > 0$.

Следует заметить, что в определении 3.B.7 мы считаем, что не существует нижней границы возможного потребления первого блага (потребительское множество имеет вид $(-\infty,\ \infty) \times \mathbb{R}_+^{L-1}$). Эта предпосылка удобна в случае квазилинейных предпочтений (упражнение 3.D.4 показывает, почему это так). На рис. 3.B.6 проиллюстрировано квазилинейное отношение предпочтения.

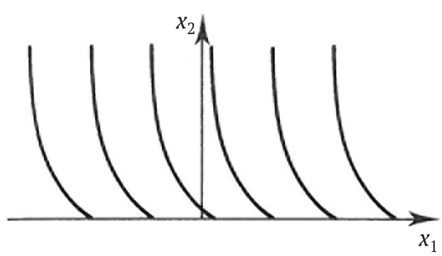


Рис. 3.B.6. Квазилинейные предпочтения

3.C. Предпочтения и полезность

Для аналитических целей очень удобно, если есть возможность описать предпочтения потребителя с помощью функции полезности, поскольку тогда для решения задачи потребителя можно применить технику математического программирования. В этом разделе мы анализируем, в каком случае это может быть сделано. К сожалению, при введенных ранее предпосылках рациональное отношение предпочтения необязательно представимо функцией полезности. Мы начнем с примера, иллюстрирующего этот факт, а затем введем еще одну предпосылку относительно отношения предпочтения, вполне естественную с экономической точки зрения (называемую *непрерывностью*), которая гарантирует представление предпочтений функцией полезности.

Пример 3.C.1. *Лексикографическое отношение предпочтения*. Для простоты предположим, что $X = \mathbb{R}_+^2$, и пусть $x \succsim y$, если либо «$x_1 > y_1$», либо «$x_1 = y_1$ и $x_2 \geq y_2$». Это так называемое *лексикографическое отношение предпочтения*. Такое название обусловлено схожестью с тем, как организован словарь: товар 1 имеет наибольший

[5] В общем случае предпочтения могут быть квазилинейными по любому товару l.

приоритет при определении порядка предпочтений, как и первая буква в слове при распределении слов в словаре. Когда объем первого товара в двух товарных наборах одинаков, то предпочтения потребителя определяет объем второго товара в двух данных наборах. В упражнении 3.С.1 вас просят убедиться в том, что лексикографические предпочтения являются полными, транзитивными, строго монотонными и строго выпуклыми. Тем не менее можно показать, что не существует функции полезности, представляющей данные предпочтения. И это интуитивно понятно. При таких предпочтениях никакие два различных набора не будут эквивалентны, т. е. множества безразличия состоят из единственного элемента, и каждый элемент имеет две координаты. При этом каждому из этих множеств безразличия должно быть приписано некоторое число, причем так, чтобы сохранилось упорядочение наборов. Другими словами, каждой точке нужно приписать свое значение полезности из одномерной вещественной прямой. В действительности, для того чтобы строго обосновать этот факт, требуется несколько более сложная аргументация. Для читателей, хорошо знакомых с математикой, мы приводим ее в следующем абзаце. ■

Предположим, что существует функция полезности $u(\cdot)$. Для любого x_1 мы должны выбрать рациональное число $r(x_1)$, такое что $u(x_1, 2) > r(x_1) > u(x_1, 1)$. Заметим, что в силу лексикографического характера предпочтений из $x_1 > x_1'$ следует, что $r(x_1) > r(x_1')$ (поскольку $r(x_1) > u(x_1, 1) > u(x_1', 2) > r(x_1')$). Следовательно, $r(\cdot)$ дает взаимооднозначное отображение множества действительных чисел (которое несчетно) в множество рациональных чисел (которое счетно), что невозможно с математической точки зрения. Таким образом, мы приходим к выводу, что не существует функции полезности, представляющей данные предпочтения. ■

Для того чтобы гарантировать существование функции полезности, необходимо ввести предпосылку о непрерывности отношения предпочтения.

Определение 3.С.1. Отношение предпочтения $\succsim$ на множестве X называется *непрерывным*, если оно сохраняется в пределе, т. е. для любой последовательности пар $\left\{(x^n, y^n)\right\}_{n=1}^{\infty}$, где $x^n \succsim y^n$ для любого n, $x = \lim_{n\to\infty} x^n$ и $y = \lim_{n\to\infty} y^n$, выполнено $x \succsim y$.

Непрерывность говорит о том, что предпочтения потребителя не имеют «скачков», когда, например, потребитель предпочитает каждый элемент в последовательности $\left\{x^n\right\}$ соответствующему элементу из последовательности $\left\{y^n\right\}$, но при этом вдруг имеет обратные предпочтения в отношении предельных точек последовательностей x и y.

Эквивалентно непрерывность можно определить следующим образом: для всех x верхнее лебеговское множество $\left\{y \in X : y \succsim x\right\}$ и нижнее лебеговское множество $\left\{y \in X : x \succsim y\right\}$ являются *замкнутыми*, т. е. содержат свои граничные точки. Из определения 3.С.1 следует, что для любой последовательности точек $\left\{y^n\right\}_{n=1}^{\infty}$, где $x \succsim y^n$ для любого n и $y = \lim_{n\to\infty} y^n$ выполнено $x \succsim y$ (т. е. в этом случае $x^n = x$ для всех n). Следовательно, из непрерывности предпочтений в соответствии с определением 3.С.1 следует, что нижнее лебеговское множество является замкнутым; аналогично для верхнего лебеговского множества. Доказательство обратного утверждения (из замкнутости нижнего и верхнего лебеговских множеств следует выполнение определения 3.C.1) более сложно и остается в качестве упражнения (см. упражнение 3.C.3).

Пример 3.C.1 (**продолжение**). Лексикографические предпочтения не являются непрерывными. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим последовательность наборов $x^n = (1 / n, 0)$ и $y^n = (0, 1)$. Для любого n выполнено $x^n \succ y^n$, однако $\lim\limits_{n\to\infty} y^n = (0, 1) \succ (0, 0) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n$. Другими словами, до тех пор пока первая компонента набора x больше, чем соответствующая компонента набора y, набор x предпочитается набору y, даже если y_2 существенно больше, чем x_2. Но как только первые компоненты наборов становятся одинаковыми, играют роль только вторые компоненты, и поэтому в предельных точках последовательностей предпочтения становятся обратными. ■

Оказывается, непрерывность отношения предпочтения $\succsim$ является достаточным условием существования функции полезности, представляющей предпочтения. В действительности она даже гарантирует существование *непрерывной* функции полезности.

Утверждение 3.C.1. Пусть рациональное отношение предпочтения $\succsim$ непрерывно на множестве X. Тогда существует непрерывная функция полезности $u(x)$, представляющая данные предпочтения $\succsim$.

Доказательство. Для случая $X = \mathbb{R}^L_+$ и монотонного отношения предпочтения существует относительно простое интуитивное доказательство, которое мы здесь и предлагаем (см. рис. 3.C.1).

Обозначим диагональный луч в $\mathbb{R}^L_+$ (множество векторов, у которых все L-компоненты равны) через Z. Обозначим также для удобства через e L-мерный вектор, все элементы которого равны 1. Тогда $\alpha e \in Z$ для любого неотрицательного числа $\alpha \geq 0$.

Заметим, что для каждого $x \in \mathbb{R}^L_+$ из монотонности следует, что $x \succsim 0$. Кроме того, для любого $\bar{\alpha}$, такого что $\bar{\alpha}e \gg x$ (как показано

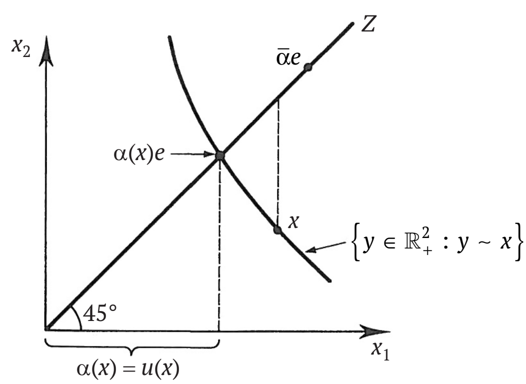


Рис. 3.C.1. Построение функции полезности

на рисунке), имеем $\bar{\alpha}e \succsim x.$ Тогда можно показать, что в силу монотонности и непрерывности предпочтений существует единственное значение $\alpha(x) \in [0, \bar{\alpha}],$ такое что $\alpha(x)e \sim x$.

Формально это можно доказать следующим образом. В силу непрерывности верхнее и нижнее лебеговские множества набора x являются замкнутыми. Следовательно, множества $A^+ = \{\alpha \in \mathbb{R}_+ : \alpha e \succsim x\}$ и $A^- = \{\alpha \in \mathbb{R}_+ : x \succsim \alpha e\}$ непусты и замкнуты. Заметим, что в силу полноты отношения предпочтения $\succsim$, $\mathbb{R}_+ \subset (A^+ \cup A^-)$. Из непустоты и замкнутости множеств A^+ и A^- наряду с тем фактом, что множество $\mathbb{R}_+$ является связанным, следует, что $A^+ \cap A^- = \varnothing$. Таким образом, существует число α, такое что $\alpha e \sim x$. Кроме того, в силу монотонности $\alpha_1 e \succ \alpha_2 e$ при $\alpha_1 > \alpha_2$. Следовательно, может существовать не более одного числа, удовлетворяющего условию $\alpha e \sim x$. Это число и есть $\alpha(x)$. ■

Теперь возьмем $\alpha(x)$ в качестве функции полезности, т. е. припишем значение полезности $u(x) = \alpha(x)$ каждому x. Этот уровень полезности также проиллюстрирован на рис. 3.C.1. Нам необходимо проверить два свойства данной функции: то, что она представляет предпочтения $\succsim$ (т. е. что $\alpha(x) \geq \alpha(y) \Leftrightarrow x \succsim y$), и ее непрерывность. Доказательство последнего более сложно, поэтому мы его приводим мелким шрифтом. А тот факт, что $\alpha(x)$ представляет данные предпочтения, следует из самого построения. Формально предположим сначала, что $\alpha(x) \geq \alpha(y)$. В силу монотонности из этого следует, что $\alpha(x)e \succsim \alpha(y)e.$ Поскольку $x \sim \alpha(x)e$ и $y \sim \alpha(y)e$, имеем $x \succsim y$. Предположим, с другой стороны, что $x \succsim y$. Тогда $\alpha(x)e \sim x \succsim y \sim \alpha(y)e$, а значит, в силу монотонности выполнено $\alpha(x) \geq \alpha(y)$. Таким образом, $\alpha(x) \geq \alpha(y) \Leftrightarrow x \succsim y$.

Теперь докажем, что $\alpha(x)$ — непрерывная функция для всех x, т. е. для любой последовательности $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ с пределом $x = \lim_{n\to\infty} x^n$ имеем $\lim_{n\to\infty} \alpha(x^n) = \alpha(x)$. Поэтому рассмотрим последовательность $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$, такую что $x = \lim_{n\to\infty} x^n$.

Во-первых, заметим, что последовательность $\{\alpha(x^n)\}_{n=1}^{\infty}$ должна содержать сходящуюся подпоследовательность. В силу монотонности для любого $\varepsilon > 0$ $\alpha(x')$ принадлежит компактному подмножеству множества $\mathbb{R}_+$, $[\alpha_0, \alpha_1]$, для всех x', таких что $\|x' - x\| \leq \varepsilon$ (см. рис. 3.C.2). Поскольку последовательность $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к x, то существует такое N, что $\alpha(x^n)$ принадлежит данному компактному множеству для всех $n > N$. Но любая бесконечная последовательность, содержащаяся в компактном множестве, должна иметь сходящуюся подпоследовательность (см. раздел M.F математического приложения).

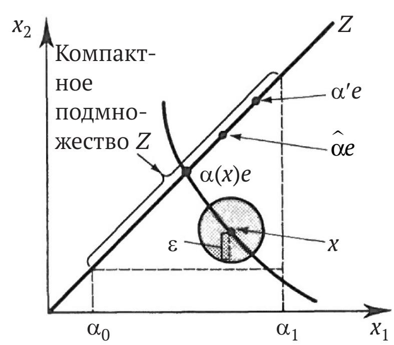


Рис. 3.C.2. Доказательство непрерывности построенной функции полезности

Осталось показать, что все сходящиеся подпоследовательности $\left\{\alpha(x^n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ сходятся к $\alpha(x)$. Чтобы убедиться в этом, предположим противное, т. е. что существует некоторая строго возрастающая функция $m(\cdot)$, которая приписывает каждому положительному целому числу n положительное целое $m(n)$ и для которой подпоследовательность $\left\{\alpha(x^{m(n)})\right\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $\alpha' \neq \alpha(x)$. Сначала покажем, что при $\alpha' > \alpha(x)$ получим противоречие. Для начала заметим, что тогда из монотонности следует, что $\alpha' e \succ \alpha(x)e$. Пусть теперь $\hat{\alpha} = \frac{1}{2}\left[\alpha' + \alpha(x)\right]$. Точка $\hat{\alpha}e$ лежит на луче Z посередине между точками $\alpha' e$ и $\alpha(x)e$ (см. рис. 3.C.2). В силу монотонности предпочтений $\hat{\alpha}e \succ \alpha(x)e$. Тогда, поскольку $\alpha\left(x^{m(n)}\right) \to \alpha' > \hat{\alpha}$, существует такое $\bar{N}$, что для всех $n > \bar{N}$ имеем $\alpha\left(x^{m(n)}\right) > \hat{\alpha}$. Следовательно, для всех таких n $x^{m(n)} \sim \alpha\left(x^{m(n)}\right)e \succ \hat{\alpha}e$ (где последнее соотношение следует из монотонности предпочтений). Поскольку предпочтения непрерывны, из этого следует $x \succsim \hat{\alpha}e$. Но если $x \sim \alpha(x)e$, то $\alpha(x)e \succsim \hat{\alpha}e$, а значит, мы пришли к противоречию. Аналогично можно показать, что ситуация $\alpha' < \alpha(x)$ также невозможна. Таким образом, поскольку все сходящиеся подпоследовательности $\left\{\alpha(x^n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ должны сходиться к $\alpha(x)$, то $\lim_{n\to\infty} \alpha(x^n) = \alpha(x)$, что и требовалось доказать. ■

Начиная с этого момента будем считать, что отношение предпочтения потребителя непрерывно и, следовательно, представимо непрерывной функцией полезности. Как мы отмечали в разделе 1.B, функция полезности $u(\cdot)$, представляющая отношение предпочтения $\succsim$, неединственна: любое строго возрастающее преобразование $u(\cdot)$, $v(x) = f(u(x))$, где $f(\cdot)$ — строго возрастающая функция, также описывает отношение предпочтения $\succsim$. В утверждении 3.C.1 говорится о том, что если отношение предпочтения $\succsim$ непрерывно, то существует *некоторая* непрерывная функция полезности, представляющая $\succsim$. Однако не все функции полезности, представляющие $\succsim$, являются непрерывными: любое строго возрастающее, но не непрерывное преобразование непрерывной функции также представляет предпочтения $\succsim$.

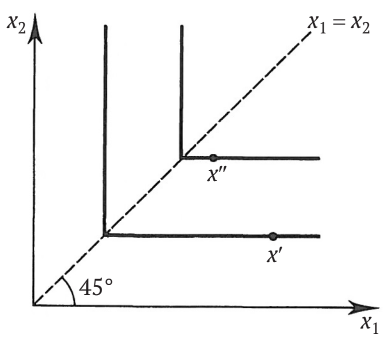


Рис. 3.C.3. Леонтьевские предпочтения не могут быть представлены дифференцируемой функцией полезности

Для аналитических целей также удобно считать, что функция $u(\cdot)$ дифференцируема. Однако возможно, что непрерывные предпочтения не могут быть представлены дифференцируемой функцией полезности. Простейший пример такой ситуации проиллюстрирован на рис. 3.C.3 для случая *леонтьевских* предпочтений, когда $x'' \succsim x'$ тогда и только тогда, когда $\min\left\{x_1'', x_2''\right\} \geq \min\left\{x_1', x_2'\right\}$. Недифференцируемость обусловлена изломом кривых безразличия при $x_1 = x_2$.

Тем не менее для удобства в дальнейшем изложении мы будем предполагать, что функция полезности дважды непрерывно дифференцируема. Можно привести условие, сформулированное в терминах предпочтений, из которого следует это свойство, но мы не будем здесь этого делать. Интуитивно понятно, что для этого требуется, чтобы множества безразличия были гладкими поверхностями.

Ограничения на предпочтения порождают ограничения на вид функций полезности. Из свойства монотонности, например, следует, что функция полезности должна быть возрастающей: $u(x) > u(y)$, если $x >> y$.

С другой стороны, если предпочтения выпуклы, то функция полезности $u(\cdot)$ должна быть *квазивогнутой* (и аналогично из строгой выпуклости предпочтений следует строгая квазивогнутость $u(\cdot)$). Функция полезности $u(\cdot)$ квазивогнута, если множество $\left\{y \in \mathbb{R}_+^L : u(y) \geq u(x)\right\}$ выпукло для любого x, или, что то же самое, если $u(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$ для любых x, y и $\alpha \in [0, 1]$. (Если неравенство строгое для всех $x \neq y$ и $\alpha \in (0, 1)$, то $u(\cdot)$ строго квазивогнута. Более подробно квазивогнутость и строгая квазивогнутость описаны в разделе М.С математического приложения.) В действительности, хотя это весьма тонкий момент, может *не* существовать вогнутой функции полезности, представляющей некоторое выпуклое отношение предпочтения $\succsim$.

В упражнении 3.С.5 вас просят доказать еще два результата, касающиеся взаимосвязи функции полезности и описываемого ею отношения предпочтения:

1) Непрерывное отношение предпочтения $\succsim$ на множестве $X = \mathbb{R}_+^L$ гомотетично тогда и только тогда, когда оно может быть представлено однородной первой степени функцией полезности $u(x)$ (т. е. такой, что $u(\alpha x) = \alpha u(x)$ для любого $\alpha > 0$).
2) Непрерывное отношение предпочтения $\succsim$ на множестве $(-\infty, \infty) \times \times \mathbb{R}_+^{L-1}$ квазилинейно по первому товару тогда и только тогда, когда его можно представить функцией полезности вида $u(x) = x_1 + + \varphi(x_2, \ldots, x_L)$.

Важно понимать, что хотя из монотонности и выпуклости отношения предпочтения $\succsim$ следует, что *все* функции полезности, описывающие $\succsim$, являются возрастающими и квазивогнутыми, (1) и (2) говорят только о том, что существует *по крайней мере одна* функция полезности, имеющая указанный вид. Возрастание и квазивогнутость представляют собой *ординалистские* свойства $u(\cdot)$, т. е. такие, которые сохраняются при произвольном возрастающем преобразовании полезности. Тогда как вид функции полезности в (1) и (2) не сохраняется при таком преобразовании — это *кардиналистское* свойство; просто такой вид функции полезности удобен для описания предпочтений[6].

[6] Таким образом, в этом смысле непрерывность тоже является кардиналистским свойством функции полезности. См. также обсуждение кардиналистских и ординалистских свойств функции полезности в разделе 1.В.

3.D. Задача максимизации полезности

Теперь перейдем к изучению задачи принятия решения потребителем. Всюду далее будем считать, что потребитель имеет рациональные, непрерывные, локально ненасыщаемые предпочтения, представимые непрерывной функцией полезности $u(x)$. Кроме того, до конца этой главы для определенности будем считать, что потребительское множество имеет вид $X = \mathbb{R}^L_+$.

Задача выбора потребителем наиболее предпочтительного потребительского набора при данных ценах $p >> 0$ и уровне богатства $w > 0$ теперь может быть записана как *задача максимизации полезности* (*UMP* — от англ. *utility maximization problem*):

$$\max_{x \geq 0} u(x) \text{ при } p \cdot x \leq w.$$

Другими словами, задача потребителя заключается в выборе такого потребительского набора из вальрасианского бюджетного множества $B_{p,w} = \left\{x \in \mathbb{R}^L_+ : p \cdot x \leq w\right\}$, который доставляет ему наибольший уровень полезности. Начнем с результата, приведенного в утверждении 3.D.1.

Утверждение 3.D.1. Если $p >> 0$ и функция полезности $u(\cdot)$ непрерывна, то задача максимизации полезности имеет решение.

Доказательство. Если $p >> 0$, то бюджетное множество $B_{p,w} = \left\{x \in \mathbb{R}^L_+ : p \cdot x \leq w\right\}$ представляет собой компакт, поскольку оно ограничено (для любого $l = 1, \ldots, L$ выполнено $x_l \leq (w / p_l)$ для всех $x \in B_{p,w}$) и замкнуто. Тогда искомый результат следует из того факта, что непрерывная функция всегда достигает максимального значения на любом компактном множестве (см. раздел M.F математического приложения). ■

Сформулировав утверждение о существовании решения задачи максимизации полезности, охарактеризуем ее решение — множество оптимальных потребительских наборов, а также максимальное значение полезности потребителя (функцию значения задачи потребителя).

Отображение/функция вальрасианского спроса

Правило, приписывающее множество оптимальных потребительских векторов (являющихся решением задачи максимизации полезности) каждой комбинации цен и богатства $(p, w) >> 0$, обозначается через $x(p, w) \in \mathbb{R}^L_+$ и называется *отображением вальрасианского* (или *обычного*, или *рыночного*) *спроса*. Пример для случая $L = 2$ проиллюстрирован на рис. 3.D.1(a), где точка $x(p, w)$ принадлежит множеству безразличия с наибольшим уровнем полезности для любого набора из бюджетного множества $B_{p,w}$. Заметим, что в общем случае при данных $(p, w) >> 0$ множество оптимальных

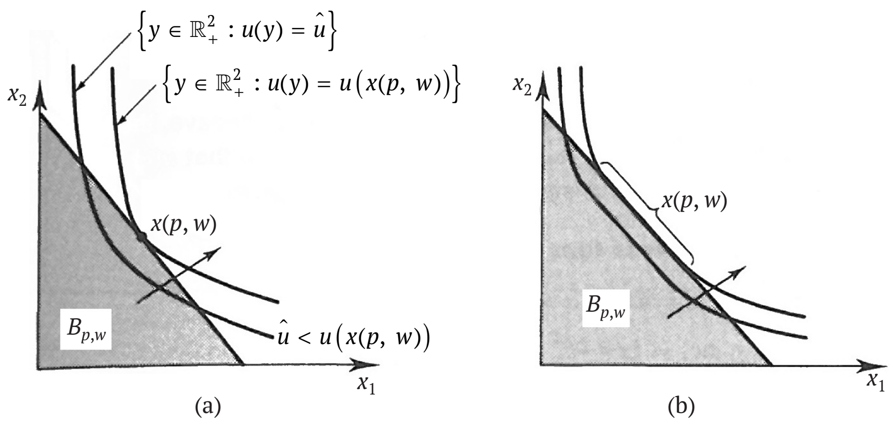


Рис. 3.D.1. Задача максимизации полезности.
(a) Единственное решение. (b) Множественность решений

наборов $x(p, w)$ может содержать более одного элемента, как показано на рис. 3.D.1(b). Если же $x(p, w)$ принимает единственное значение для всех $(p, w) >> 0$, то мы будем говорить о *функции вальрасианского* (или *обычного*, или *рыночного*) *спроса*[7].

Свойства $x(p, w)$, указанные в утверждении 3.D.2, следуют непосредственно из анализа задачи потребителя.

Утверждение 3.D.2. Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция полезности, представляющая локально ненасыщаемое отношение предпочтения $\succsim$, определенное на потребительском множестве $X = \mathbb{R}^L_+$. Тогда отображение вальрасианского спроса $x(p, w)$ обладает следующими свойствами:

1) *Однородность нулевой степени по* (p, w): $x(\alpha p, \alpha w) = x(p, w)$ для любых p, w и $\alpha > 0$.
2) *Закон Вальраса*: $p \cdot x = w$ для всех $x \in x(p, w)$.
3) *Выпуклость/единственность*: если отношение предпочтения $\succsim$ выпукло, т. е. функция полезности $u(\cdot)$ квазивогнута, то $x(p, w)$ — выпуклое множество. Более того, если отношение предпочтения $\succsim$ строго выпукло, т. е. функция полезности $u(\cdot)$ строго квазивогнута, то $x(p, w)$ состоит из единственного элемента.

Доказательство. Докажем по порядку каждое из этих свойств.

1) Для доказательства однородности заметим, что для любого $\alpha > 0$ выполнено

$$\left\{x \in \mathbb{R}^L_+ : \alpha p \cdot x \le \alpha w\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^L_+ : p \cdot x \le w\right\},$$

[7] Эта функция спроса также называется *функцией маршаллианского спроса*. Однако такая терминология может создать путаницу, поэтому мы ее здесь не используем. В маршаллианском анализе частичного равновесия (где эффект дохода отсутствует) все рассматриваемые в этой главе виды функций спроса совпадают, поэтому становится неясно, какая именно функция спроса достойна носить имя Маршалла в более общей постановке.

т. е. множество допустимых потребительских наборов в задаче потребителя не меняется при изменении всех цен и богатства в одной и той же пропорции в соответствии с константой $\alpha > 0$. Следовательно, множество потребительских наборов, максимизирующих полезность, в обоих случаях должно быть одинаковым, а значит, $x(p, w) = x(\alpha p, \alpha w)$. Следует отметить, что это свойство не требует введения никаких предположений относительно функции полезности $u(\cdot)$.

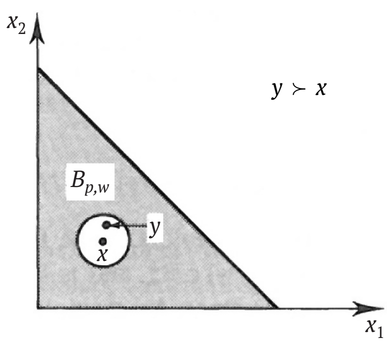


Рис. 3.D.2. Закон Вальраса следует из локальной ненасыщаемости

2) Выполнение закона Вальраса следует из локальной ненасыщаемости. Действительно, если $p \cdot x < w$ для некоторого $x \in$ $\in x(p, w)$, то должен существовать другой потребительский набор y, достаточно близко расположенный к набору x, для которого выполнено $p \cdot y < w$ и $y \succ x$ (см. рис. 3.D.2). Но это противоречит тому, что x — решение задачи максимизации полезности потребителя.

3) Предположим, что функция полезности $u(\cdot)$ квазивогнута, и рассмотрим два набора, x и x', $x \neq x'$, принадлежащие множеству $x(p, w)$. Для доказательства утверждения нам нужно показать, что набор $x'' = \alpha x + (1 - \alpha)x'$ также принадлежит множеству $x(p, w)$ для любого $\alpha \in [0, 1]$. Во-первых, заметим, что $u(x) = u(x')$. Обозначим данный уровень полезности через u^*. В силу квазивогнутости функции полезности $u(x'') \geq u^*$ (см. рис. 3.D.3(a)). Кроме того, поскольку $p \cdot x \leq w$ и $p \cdot x' \leq w$, мы также имеем

$$p \cdot x'' = p \cdot \left[\alpha x + (1 - \alpha)x'\right] \leq w.$$

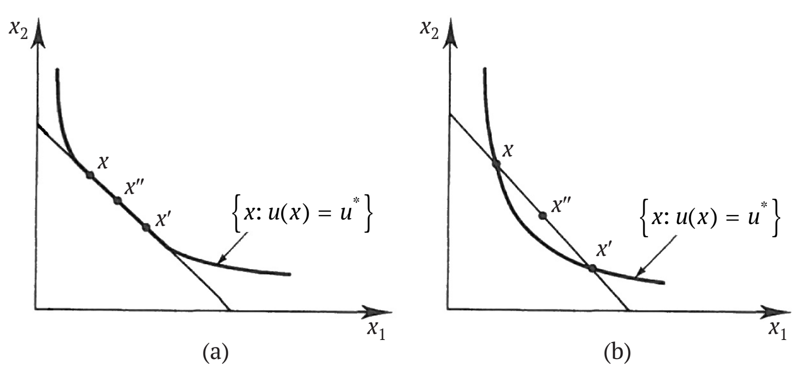


Рис. 3.D.3. (a) Из выпуклости предпочтений следует выпуклость $x(p, w)$. (b) Из строгой выпуклости предпочтений следует, что $x(p, w)$ принимает единственное значение

Следовательно, набор x'' удовлетворяет ограничению задачи потребителя, т. е. является допустимым (проще говоря, набор x'' допустим, поскольку множество $B_{p,w}$ выпукло). Таким образом, поскольку $u(x'') \geq u^*$ и набор x'' допустим, то $x'' \in x(p, w)$, что и доказывает выпуклость множества $x(p, w)$, если функция полезности $u(\cdot)$ квазивогнута.

Предположим теперь, что $u(\cdot)$ *строго* квазивогнута. Используя тот же подход, но с учетом строгой квазивогнутости функции полезности, мы можем показать, что набор x'' является допустимым и $u(x'') > u^*$ для всех $\alpha \in (0, 1)$. Поскольку это противоречит предположению о том, что наборы x и x' принадлежат множеству $x(p, w)$, мы приходим к выводу, что множество $x(p, w)$ может содержать не более одного элемента. Рис. 3.D.3(b) иллюстрирует эту ситуацию. Обратите внимание на его отличие от рис. 3.D.3(a), обусловленное строгой квазивогнутостью функции полезности $u(x)$. ■

Если функция полезности $u(\cdot)$ непрерывно дифференцируема, то оптимальный потребительский набор $x^* \in x(p, w)$ можно охарактеризовать условиями первого порядка. (*Необходимые*) *условия Куна — Таккера* (см. раздел М.К математического приложения) говорят о том, что если $x^* \in x(p, w)$ — решение задачи потребителя, то существует *множитель Лагранжа* $\lambda \geq 0$, такой что для любого $l = 1, \ldots, L$ выполнено[8]:

$$\frac{\partial u\left(x^*\right)}{\partial x_l} \leq \lambda p_l \ \text{ и } \ \frac{\partial u\left(x^*\right)}{\partial x_l} = \lambda p_l, \ \text{ если } \ x_l^* > 0. \tag{3.D.1}$$

Если обозначить вектор-градиент функции $u(\cdot)$ в точке x через $\nabla u(x) = \left[\partial u(x) / \partial x_1, \ \ldots, \ \partial u(x) / \partial x_L\right]$, то мы можем эквивалентным образом представить (3.D.1) в матричной записи:

$$\nabla u\left(x^*\right) \leq \lambda p \tag{3.D.2}$$

и

$$x^*\left[\nabla u\left(x^*\right) - \lambda p\right] = 0. \tag{3.D.3}$$

Таким образом, для внутреннего оптимума (т. е. если $x^* \gg 0$) выполнено условие

$$\nabla u\left(x^*\right) = \lambda p. \tag{3.D.4}$$

На рис. 3.D.4(a) проиллюстрированы условия первого порядка для внутреннего оптимума при $L = 2$. Условие (3.D.4) говорит о том, что во внутреннем оптимуме вектор-градиент функции полезности потребителя $\nabla u\left(x^*\right)$

[8] Строго говоря, эти необходимые условия Куна — Таккера справедливы только в том случае, если выполнены условия регулярности (см. раздел М.К математического приложения). Для задачи потребителя они выполнены. Всякий раз, если, используя необходимые условия Куна — Таккера, мы не упоминаем условий регулярности, следует считать, что эти условия выполнены.

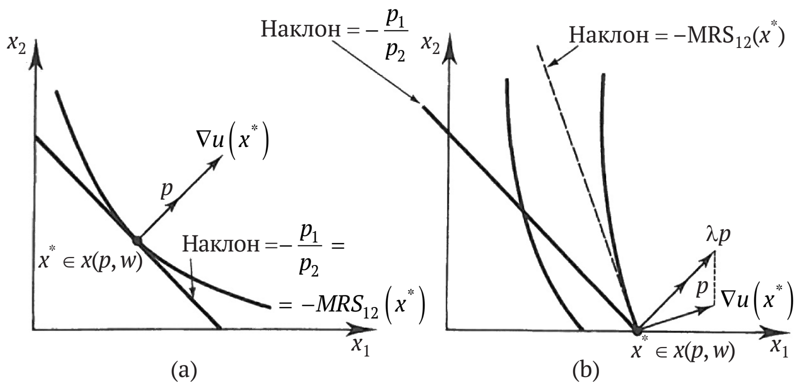


Рис. 3.D.4 (a) Внутреннее решение. (b) Граничное решение

должен быть пропорционален вектору цен (как показано на рис. 3.D.4(a)). Если $\nabla u\left(x^*\right) >> 0,$ то это эквивалентно тому, что для любых двух благ l и k имеем

$$\frac{\partial u\left(x^*\right) / \partial x_l}{\partial u\left(x^*\right) / \partial x_k} = \frac{p_l}{p_k}. \tag{3.D.5}$$

Выражение в левой части (3.D.5) — *предельная норма замещения блага k благом l в точке x^**, $MRS_{lk}\left(x^*\right)$. Она показывает, какое количество блага k требуется потребителю, чтобы компенсировать уменьшение потребления блага l на малую единицу[9]. В случае $L = 2$ наклон кривой безразличия в точке x^* равен $-MRS_{12}\left(x^*\right)$. Условие (3.D.5) говорит о том, что во внутреннем оптимуме предельная норма замещения между двумя благами для потребителя должна быть равна отношению цен данных благ, предельной норме их обмена (по рыночным ценам), как показано на рис. 3.D.4(a). Если бы это было не так, то потребитель мог бы улучшить свое положение, немного изменив свое потребление. Например, если $\left[\partial u\left(x^*\right) / \partial x_l\right] / \left[\partial u\left(x^*\right) / \partial x_k\right] > \left(p_l / p_k\right)$, то увеличение блага l на величину dx_l при одновременном снижении потребления блага k на величину $\left(p_l / p_k\right) dx_l$ допустимо и приводит к росту полезности на величину $\left[\partial u\left(x^*\right) / \partial x_l\right] dx_l - \left[\partial u\left(x^*\right) / \partial x_k\right]\left(p_l / p_k\right) dx_l > 0$.

На рис. 3.D.4(b) проиллюстрированы условия первого порядка для случая $L = 2$, когда оптимальный потребительский набор x^* лежит на границе потребительского множества (где $x_2^* = 0$). В этом случае вектор-градиент

[9] Заметим, что если полезность остается неизменной при дифференциально малых изменениях x_l и x_k, dx_l и dx_k, то $\left[\partial u / \partial x_l\right] dx_l + \left[\partial u / \partial x_k\right] dx_k = 0.$ Таким образом, когда x_l сокращается на величину $dx_l < 0$, то для того чтобы полезность осталась неизменной, требуется увеличение x_k на величину $dx_k = MRS_{lk}\left(x^*\right)\left(-dx_l\right)$.

необязательно пропорционален вектору цен. В частности, согласно условиям первого порядка $\partial u_l\left(x^*\right)/\partial x_l \leq \lambda p_l$ для тех благ l, для которых $x_l^* = 0$ и $\partial u_l\left(x^*\right)/\partial x_l = \lambda p_l$ для тех l, для которых $x_l^* > 0$. Таким образом, на рисунке мы видим, что $MRS_{12}\left(x^*\right) > p_1/p_2$. В отличие от случая внутреннего оптимума неравенство между предельной нормой замещения и отношением цен в граничном оптимуме возможно, поскольку потребитель более не может снизить потребление блага 2 (и соответственно увеличить потребление блага 1).

Множитель Лагранжа λ в условиях первого порядка (3.D.2) и (3.D.3) характеризует предельную (или теневую) стоимость ослабления ограничения задачи максимизации полезности (это общее свойство множителей Лагранжа — см. разделы M.K и M.L математического приложения). Он равен значению предельной полезности богатства в оптимуме. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим для простоты случай, когда $x(p, w)$ — дифференцируемая функция и $x(p, w) \gg 0$. По правилу дифференцирования сложной функции изменение полезности при малом увеличении w составляет $\nabla u\left(x(p, w)\right) \times$ $\times\, D_w x(p, w)$, где $D_w x(p, w) = \left[\partial x_1(p, w) / \partial w, \ldots, \partial x_L(p, w) / \partial w\right]$. Подставляя выражение для $\nabla u\left(x(p, w)\right)$ из условия (3.D.4), получим

$$\nabla u\left(x(p, w)\right) \cdot D_w x(p, w) = \lambda p \cdot D_w x(p, w) = \lambda,$$

где последнее равенство получено с учетом того, что $p \cdot x(p, w)$ для всех w (закон Вальраса) и, следовательно, $p \cdot D_w x(p, w) = 1$. Таким образом, предельное изменение полезности в результате малого увеличения богатства (предельная полезность богатства) в точности равно λ[10].

Мы видели, что условия (3.D.2) и (3.D.3) обязательно должны быть выполнены для любого $x^* \in x(p, w)$. С другой стороны, в каком случае выполнение этих условий первого порядка для некоторого набора x гарантирует, что x является решением задачи потребителя? Другими словами, в каком случае условия первого порядка являются *достаточными* для того, чтобы набор x был решением задачи? Если $u(\cdot)$ квазивогнута и монотонна, причем $\nabla u(x) \neq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}_+^L$, то условия первого порядка Куна — Таккера действительно являются достаточными (см. раздел M.K математического приложения). Что будет, если $u(\cdot)$ не является квазивогнутой? В этом случае, если $u(\cdot)$локально квазивогнута в точке x^* и x^* удовлетворяет условиям первого порядка, то x^* — локальный максимум. Локальную квазивогнутость можно проверить с помощью исследования определителя *окаймленной матрицы Гессе* функции $u(\cdot)$ в точке x^*. (Более подробно об этом см. в разделах M.C и M.D математического приложения). ■

Пример 3.D.1 иллюстрирует использование условий первого порядка для получения оптимального потребительского набора.

[10] Заметим, что если монотонность $u(\cdot)$ несколько усилить требованием $\nabla u(x) \geq 0$ и $\nabla u(x) \neq 0$ для всех x, то из условия (3.D.4) и $p \gg 0$ также будет следовать, что λ — положительная величина для любого решения задачи максимизации полезности.

Пример 3.D.1. *Нахождение функции спроса для функции полезности Кобба — Дугласа*. Функция полезности *Кобба — Дугласа* для случая $L = 2$ имеет вид: $u(x_1, x_2) = kx_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$, где $\alpha \in (0, 1)$ и $k > 0$. Данная функция является возрастающей при всех $(x_1, x_2) >> 0$ и однородной первой степени. Для нашего анализа удобнее использовать функцию полезности, полученную с помощью возрастающего преобразования данной функции, которая является строго вогнутой: $u(x_1, x_2) = \alpha\ln x_1 + (1 - \alpha)\ln x_2$. Тогда задачу потребителя можно представить в виде

$$\max_{x_1, x_2} \alpha \ln x_1 + (1 - \alpha) \ln x_2$$

$$\text{при } p_1x_1 + p_2x_2 = w. \tag{3.D.6}$$

(Заметим, что поскольку $u(\cdot)$ — возрастающая функция, то бюджетное ограничение выполняется как равенство в любом решении задачи.)

Поскольку $\ln 0 = -\infty$, то оптимальный выбор потребителя $\left(x_1(p, w), x_2(p, w)\right)$ строго положителен и удовлетворяет условиям первого порядка (для простоты записи мы обозначили уровни потребления просто через x_1 и x_2):

$$\frac{\alpha}{x_1} = \lambda p_1 \tag{3.D.7}$$

и

$$\frac{1-\alpha}{x_2} = \lambda p_2 \tag{3.D.8}$$

для некоторого $\lambda \geq 0$ и бюджетного ограничения $p \cdot x(p, w) = w$. Из условий (3.D.7) и (3.D.8) следует, что

$$p_1x_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha} p_2x_2,$$

или, используя бюджетное ограничение,

$$p_1x_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha}(w - p_1x_1).$$

Следовательно (снова добавим аргументы x_1 и x_2),

$$x_1(p, w) = \frac{\alpha w}{p_1}$$

и (с учетом бюджетного ограничения)

$$x_2(p, w) = \frac{(1-\alpha)w}{p_2}.$$

Заметим, что для функции полезности Кобба — Дугласа расходы на каждый товар составляют постоянную долю богатства потребителя при любом векторе цен p (доля α расходуется на первое благо, соответственно $(1 - \alpha)$ — на второе). ■

Упражнение 3.D.1. Проверьте выполнение свойств, перечисленных в утверждении 2.D.2, для вальрасианской функции спроса в случае функции полезности Кобба — Дугласа.

Для анализа реакции спроса на изменение цен и богатства также было бы удобно, если бы функция вальрасианского спроса была непрерывной и дифференцируемой. Поскольку это в некотором роде технические требования, то мы рассмотрим условия, при которых спрос удовлетворяет этим свойствам, в приложении A к данной главе. В этом приложении мы покажем, что оба эти свойства выполняются при довольно общих условиях. Действительно, если предпочтения непрерывны, строго выпуклы и локально ненасыщаемы на потребительском множестве $\mathbb{R}^L_+$, то спрос $x(p, w)$ (который в этом случае является функцией) *всегда* непрерывен при $(p, w) >> 0$.

Косвенная функция полезности

Для каждой комбинации цен и богатства $(p, w) >> 0$ значение полезности в решении задачи потребителя обозначается через $v(p, w) \in \mathbb{R}$. Оно равно $u\left(x^*\right)$ для любого $x^* \in x(p, w)$. Функция $v(p, w)$ называется *косвенной функцией полезности* и зачастую выступает очень удобным аналитическим инструментом. В утверждении 3.D.3 приведены основные свойства этой функции.

Утверждение 3.D.3. Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция полезности, представляющая локально ненасыщаемое отношение предпочтения $\succsim$, определенное на потребительском множестве $X = \mathbb{R}^L_+$. Тогда косвенная функция полезности $v(p, w)$:

1) однородна нулевой степени;
2) строго возрастает по w и не возрастает по p_l для любого l;
3) квазивыпукла, т. е. множество $\{(p, w) : v(p, w) \le \bar{v}\}$ является выпуклым для любого $\bar{v}$ [11];
4) непрерывна по p и w.

Доказательство. За исключением квазивыпуклости и непрерывности все свойства следуют немедленно из приведенных выше рассуждений. Мы не будем здесь доказывать непрерывность, однако отметим следующее: когда предпочтения строго выпуклы, непрерывность следует из того, что $x(p, w)$ и $u(x)$ — непрерывные функции, поскольку $v(p, w) = u\left(x(p, w)\right)$ (напомним, что непрерывность функции $x(p, w)$ будет доказана в приложении A к данной главе).

Чтобы убедиться в квазивыпуклости функции $v(p, w)$, предположим, что $v(p, w) \le \bar{v}$ и $v(p', w') \le \bar{v}$. Для любого $\alpha \in [0, 1]$ рассмотрим комбинацию цен и дохода $(p'', w'') = \left(\alpha p + (1-\alpha)p', \alpha w + + (1-\alpha)w'\right)$.

Для того чтобы установить квазивыпуклость, нам нужно показать, что $v(p'', w'') \le \bar{v}$. Другими словами, нам нужно показать, что для любого x, такого что $p'' \cdot x \le w''$, должно быть выполнено $u(x) \le \bar{v}$. Заметим, что если $p'' \cdot x \le w''$, то

$$\alpha p \cdot x + (1-\alpha)p' \cdot x \le \alpha w + (1-\alpha)w'.$$

[11] Обратите внимание, что свойство (3) говорит о том, что функция $v(p, w)$ квази*выпукла*, а *не* квази*вогнута*. Отметим также, что свойство (3) справедливо без требования квазивогнутости функции $u(\cdot)$.

Следовательно, либо $p \cdot x \le w$, либо $p' \cdot x \le w'$ (либо и то и другое). Если выполнено первое неравенство, то $u(x) \le v(p,\ w) \le \bar{v}$, т. е. мы получили искомый результат. Если же выполнено последнее неравенство, то $u(x) \le v(p',\ w') \le \bar{v}$, и мы приходим к тому же выводу. ■

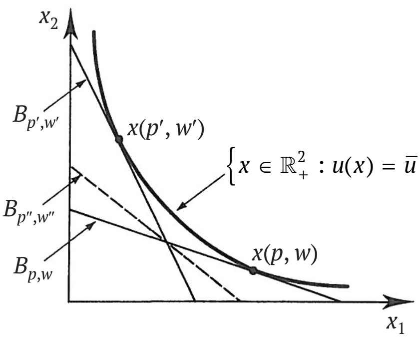


Рис. 3.D.5. Косвенная функция полезности $v(p, w)$ квазивыпукла

Квазивыпуклость функции $v(p, w)$ проиллюстрирована на рис. 3.D.5 для случая $L = 2$. На рисунке при бюджетных множествах, определенных комбинациями цен и богатства (p, w) и (p', w'), достигается одно и то же максимальное значение полезности $\bar{u}$. Бюджетная линия, соответствующая $(p'',\ w'') = \left(\alpha p + (1-\alpha)p',\ \alpha w + (1-\alpha)w'\right)$, отмечена на рис. 3.D.5 пунктиром. Поскольку (p'', w'') является выпуклой комбинацией (p, w) и (p', w'), то данная бюджетная линия лежит между бюджетными линиями для этих пар цен и богатства. Как видно из рисунка, уровень полезности, достигаемый при (p'', w''), не может быть больше $\bar{u}$.

Заметим, что косвенная функция полезности зависит от вида функции полезности, представляющей предпочтения. В частности, если $v(p, w)$ — косвенная функция полезности в случае, когда предпочтения потребителя описываются функцией полезности $u(\cdot)$, то косвенная функция полезности, соответствующая другой функции полезности, описывающей эти же предпочтения, $\tilde{u}(x) = f\left(u(x)\right)$, имеет вид $\tilde{v}(p,\ w) = f\left(v(p,\ w)\right)$.

Пример 3.D.2. Пусть функция полезности имеет вид $u(x_1, x_2) = \alpha \ln x_1 + (1-\alpha) \ln x_2$. Тогда, подставляя $x_1(p, w)$ и $x_2(p, w)$ из примера 3.D.1 в $u(x)$, получаем

$$v(p,\ w) = u\left(x(p,\ w)\right) =$$
$$= \left[\alpha \ln \alpha + (1-\alpha)\ln(1-\alpha)\right] + \ln w - \alpha \ln p_1 - (1-\alpha)\ln p_2.$$

Упражнение 3.D.2. Убедитесь в выполнении всех четырех свойств, приведенных в утверждении 3.D.3, для косвенной функции полезности, полученной в примере 3.D.2.

3.E. Задача минимизации расходов

В этом разделе мы проанализируем задачу минимизации расходов (EMP — от англ. *expenditure minimization problem*) при $p \gg 0$ и $u > u(0)$[12]:

$$\min_{x \ge 0} p \cdot x$$
$$\text{при } u(x) \ge u. \qquad \text{(EMP)}$$

[12] Полезность $u(0)$ — это полезность от потребления набора $x = (0, 0, \ldots, 0)$. Ограничение $u > u(0)$ исключает из рассмотрения тривиальные ситуации.

Если в задаче максимизации полезности вычисляется максимальный уровень полезности, который может быть достигнут при данном уровне богатства w, то в задаче минимизации расходов вычисляется минимальный уровень богатства, необходимый для достижения заданного уровня полезности u. Другими словами, задача минимизации расходов является «двойственной» по отношению к задаче максимизации полезности. Она формализует ту же цель эффективного использования покупательной способности потребителя, но в ситуации, когда целевая функция задачи и ограничение поменялись местами[13].

На протяжении всего раздела будем считать, что функция полезности $u(\cdot)$, представляющая отношение предпочтения $\succsim$, определенное на потребительском множестве $\mathbb{R}_+^L$, является непрерывной.

Задача минимизации расходов проиллюстрирована на рис. 3.E.1. Оптимальный потребительский набор x^* в данном случае — это наиболее дешевый набор, позволяющий потребителю иметь уровень полезности u. С геометрической точки зрения это точка из множества $\left\{x \in \mathbb{R}_+^L : u(x) \geq u\right\}$, лежащая на самой низкой из возможных бюджетных линий при векторе цен p.

В утверждении 3.E.1 формализована взаимосвязь между задачами максимизации полезности и минимизации расходов.

Утверждение 3.E.1. Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция полезности, представляющая локально ненасыщаемое отношение предпочтения $\succsim$, определенное на потребительском множестве $X = \mathbb{R}_+^L$, и пусть $p >> 0$. Тогда

1) Если x^* — оптимальный набор задачи максимизации полезности при уровне богатства $w > 0$, то x^* — оптимальный набор задачи минимизации расходов при достижении уровня полезности $u\left(x^*\right)$. Кроме того, минимальный уровень расходов в задаче минимизации расходов в точности равен w.

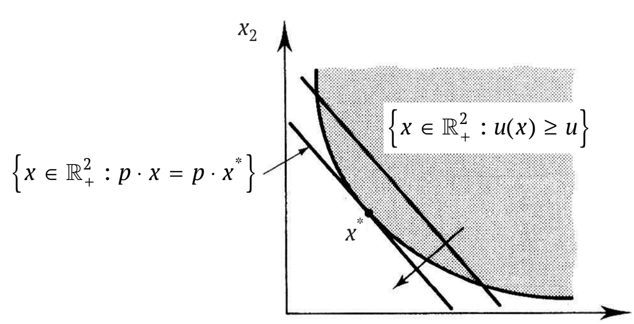


Рис. 3.E.1. Задача минимизации расходов

[13] Термин «двойственная» задача обычно применяется к парам задач и концепций, которые формально похожи, за исключением того, что объемы и цены, и (или) максимизация и минимизация, и (или) целевая функция и ограничение меняются ролями.

2) Если x^* — оптимальный набор задачи минимизации расходов при достижении уровня полезности $u > u(0)$, то x^* — оптимальный набор задачи максимизации полезности при уровне богатства $p \cdot x^*$. Кроме того, максимальный уровень полезности в задаче максимизации полезности в точности равен u.

Доказательство. (1) Пусть x^* не является оптимальным набором задачи минимизации расходов при достижении уровня полезности $u\left(x^*\right)$. Тогда существует набор x', такой что $u\left(x'\right) > u\left(x^*\right)$ и $p \cdot x' < p \cdot x^* \leq w$. В силу локальной ненасыщаемости мы можем найти набор x'' в окрестности набора x', такой что $u(x'') > u(x')$ и $p \cdot x'' < w$. Но из этого следует, что $x'' \in B_{p,w}$ и $u\left(x''\right) > u\left(x^*\right)$, что противоречит оптимальности набора x^* для задачи максимизации полезности. Таким образом, x^* должен быть оптимальным набором задачи минимизации расходов при достижении уровня полезности $u\left(x^*\right)$, а минимальный уровень расходов составляет $p \cdot x^*$. Наконец, поскольку x^* является решением задачи максимизации полезности при уровне богатства w, то по закону Вальраса $p \cdot x^* = w$.

(2) Поскольку $u > u(0)$, то должно быть выполнено $x^* \neq 0$, а следовательно, $p \cdot x^* > 0$. Предположим, что набор x^* не является оптимальным набором в задаче максимизации полезности при уровне богатства $p \cdot x^*$. Тогда существует набор x', такой что $u\left(x'\right) > u\left(x^*\right)$ и $p \cdot x' \leq p \cdot x^*$. Рассмотрим набор $x'' = \alpha x'$, где $\alpha \in (0, 1)$ (т. е. x'' — это x' в «уменьшенном масштабе»). В силу непрерывности функции $u(\cdot)$, если значение α достаточно близко к 1, то должно быть выполнено $u\left(x''\right) > u\left(x^*\right)$ и $p \cdot x'' < p \cdot x^*$. Но это противоречит оптимальности набора x^* для задачи минимизации расходов. Таким образом, набор x^* должен быть оптимальным набором задачи максимизации полезности при уровне богатства $p \cdot x^*$, а максимальный уровень полезности, следовательно, равен $u\left(x^*\right)$. В утверждении 3.E.3(2) мы покажем, что если x^* является решением задачи минимизации расходов при достижении уровня полезности u, то $u\left(x^*\right) = u$. ■

Как и для задачи максимизации полезности при $p >> 0$, решение задачи минимизации расходов существует при довольно общих условиях. Требуется только, чтобы множество ограничений было непусто, т. е. $u(\cdot)$ должна достигать значений по крайней мере не меньших u при *некотором* x (см. упражнение 3.E.3). С этого момента будем считать, что это так; в частности, это условие выполнено для любого $u > u(0)$, если функция $u(\cdot)$ не ограничена сверху.

Теперь мы приступим к изучению оптимального потребительского набора и функции значения задачи минимизации расходов. Сначала рассмотрим функцию значения.

Функция расходов

При данных ценах $p >> 0$ и заданном уровне полезности $u > u(0)$ значение задачи минимизации расходов (значение целевой функции в решении задачи) обозначается через $e(p, u)$. Функция $e(p, u)$ называется *функцией расходов*. Ее значение для любых (p, u) — это просто $p \cdot x^*$, где x^* — любое решение задачи минимизации расходов. Основные свойства функции расходов приведены в утверждении 3.E.2, которое аналогично утверждению 3.D.3, описывающему основные свойства косвенной функции полезности, полученной из задачи максимизации полезности.

Утверждение 3.E.2. Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция полезности, представляющая локально ненасыщаемое отношение предпочтения $\succsim$, определенное на потребительском множестве $X = \mathbb{R}^L_+$. Тогда функция расходов $e(p, u)$:

1) однородна первой степени по p;
2) строго возрастает по u и не убывает по p_l для любого l;
3) вогнута по p;
4) непрерывна по p и u.

Доказательство. Мы приводим только доказательство свойств (1), (2) и (3).

1) Множество ограничений задачи минимизации расходов при изменении цен остается неизменным. Таким образом, для любого $\alpha > 0$ минимизация функции $(\alpha p) \cdot x$ на этом множестве дает те же оптимальные потребительские наборы, что и минимизация функции $p \cdot x$. Пусть x^* — оптимальный потребительский набор в обоих случаях, тогда $e(\alpha p, u) = \alpha p \cdot x^* = \alpha e(p, u)$.
2) Пусть функция $e(p, u)$ не является строго возрастающей по u, и обозначим через x' и x'' оптимальные потребительские наборы при достижении уровня полезности u' и u'' соответственно, где $u'' > u'$ и $p \cdot x' \geq p \cdot x'' > 0$. Рассмотрим набор $\tilde{x} = \alpha x''$, где $\alpha \in (0, 1)$. В силу непрерывности функции $u(\cdot)$ существует такое значение α, достаточно близкое к 1, что $u(\tilde{x}) > u'$ и $p \cdot x' > p \cdot \tilde{x}$. Но это противоречит тому, что x' — оптимальный набор задачи минимизации расходов при достижении уровня полезности u'.
   Для того чтобы показать, что $e(p, u)$ не убывает по p_l, рассмотрим векторы цен p'' и p', такие что $p''_l \geq p'_l$ и $p''_k = p'_k$ для всех $k \neq l$. Пусть x'' — оптимальный набор задачи минимизации расходов при векторе цен p''. Тогда $e(p'', u) = p'' \cdot x'' \geq p' \cdot x'' \geq e(p', u)$, где последнее неравенство следует непосредственно из определения $e(p', u)$.
3) Для доказательства вогнутости зафиксируем полезность на уровне $\bar{u}$ и положим $p'' = \alpha p + (1 - \alpha)p'$ при $\alpha \in [0, 1]$. Пусть x'' — оптимальный набор задачи минимизации расходов при ценах p''. Тогда

$$e(p'', \bar{u}) = p'' \cdot x'' = \alpha p \cdot x'' + (1 - \alpha)p' \cdot x'' \geq$$
$$\geq \alpha e(p, \bar{u}) + (1 - \alpha)e(p', \bar{u}),$$

где последнее неравенство получено с учетом того, что $u(x'') \geq \bar{u}$, и определения функции расходов, откуда следует, что $p \cdot x'' \geq e(p, \bar{u})$ и $p' \cdot x'' \geq e(p', \bar{u})$. ■

Вогнутость функции $e(p, \bar{u})$ по p при данном уровне полезности $\bar{u}$ довольно легко понять интуитивно. Предположим, что первоначально у нас были цены $\bar{p}$ и пусть $\bar{x}$ — оптимальный потребительский вектор задачи минимизации расходов при данных ценах. Если цены изменятся, но мы не позволим потребителю изменить уровень потребления $\bar{x}$, то его расходы составят $p \cdot \bar{x}$, что представляет собой *линейное* выражение относительно p. Однако если потребитель может изменить уровень потребления, как в задаче минимизации расходов, то минимальный уровень его расходов не может быть больше этой величины. Следовательно, как показано на рис. 3.E.2(a), где мы зафиксировали цену p_1 и меняли цену p_2, график функции $e(p, \bar{u})$ лежит ниже графика линейной функции $p \cdot \bar{x}$ при всех $p \neq \bar{p}$ и касается его при $\bar{p}$. А это говорит как раз о вогнутости функции, поскольку аналогичная взаимосвязь с линейной функцией должна иметь место в каждой точке графика функции $e(\cdot, u)$ (см. рис. 3.E.2(b)).

Утверждение 3.E.1 позволяет нам проследить важную взаимосвязь между функцией расходов и косвенной функцией полезности, определенной в разделе 3.D. В частности, для любых $p >> 0$, $w > 0$ и $u > u(0)$ выполнено

$$e\big(p,\ v(p,\ w)\big) = w \ \text{ и } \ v\big(p,\ e(p,\ u)\big) = u. \tag{3.E.1}$$

Из этих условий следует, что для любого фиксированного вектора цен $\bar{p}$, $e(\bar{p},\ \cdot)$ и $v(\bar{p},\ \cdot)$ являются обратными друг другу (см. упражнение 3.E.8). Так, в упражнении 3.E.9 вас просят показать, что с помощью соотношений (3.E.1) утверждение 3.E.2 может быть непосредственно получено из утверждения 3.D.3, и наоборот. Другими словами, существует прямая взаимосвязь между свойствами функции расходов и косвенной функции полезности. Обе эти функции характеризуют одни и те же особенности, лежащие в основе задачи потребительского выбора.

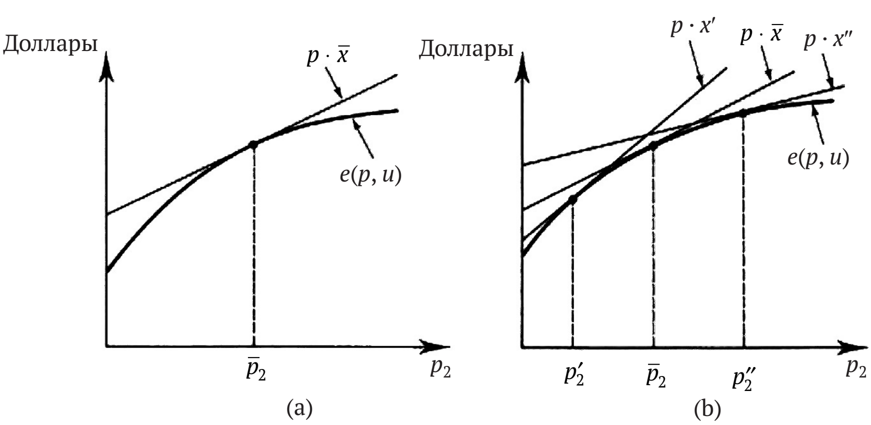


Рис. 3.E.2. Вогнутость функции расходов по p

Функция хиксианского (или компенсированного) спроса

Множество оптимальных товарных наборов задачи минимизации расходов обозначается через $h(p, u) \subset \mathbb{R}^L_+$ и называется отображением *хиксианского, или компенсированного, спроса* либо *функцией*, если соответствие однозначное. (Почему используется термин «компенсированный спрос», мы объясним далее.) На рис. 3.E.3 проиллюстрировано множество решений $h(p, u)$ при двух различных векторах цен p и p'.

Три основных свойства хиксианского спроса приведены в утверждении 3.E.3, аналогичном утверждению 3.D.2 для вальрасианского спроса.

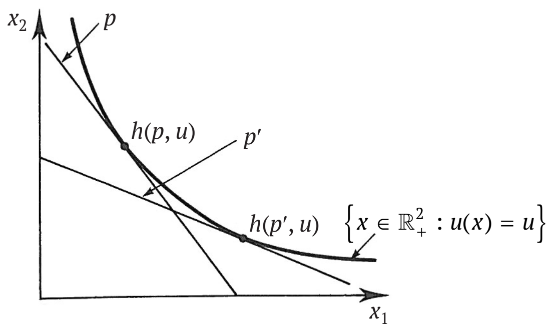


Рис. 3.E.3. Функция хиксианского (или компенсированного) спроса

Утверждение 3.E.3. Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция полезности, представляющая локально ненасыщаемое отношение предпочтения $\succsim$, определенное на потребительском множестве $X = \mathbb{R}^L_+$. Тогда для любого $p \gg 0$ отображение хиксианского спроса $h(p, u)$ обладает следующими свойствами:

1) *однородности нулевой степени* по p: $h(\alpha p, u) = h(p, u)$ для любых p, u и $\alpha > 0$;
2) *удовлетворяет ограничению задачи минимизации расходов как равенству*: для любого $x \in h(p, u)$ $u(x) = u$;
3) *выпуклости/единственности*: если предпочтения $\succsim$ выпуклы, то $h(p, u)$ — выпуклое множество, а если предпочтения $\succsim$ *строго* выпуклы, так что $u(\cdot)$ строго квазивогнута, то множество $h(p, u)$ состоит из единственного элемента.

Доказательство. (1) Однородность нулевой степени по p следует из того, что оптимальный вектор в задаче минимизации $p \cdot x$ при условии $u(x) \geq u$ будет таким же, как и в задаче минимизации $\alpha p \cdot x$, при том же ограничении для любого числа $\alpha > 0$.

(2) Это свойство следует из непрерывности функции u(·). Предположим, что существует набор $x \in h(p, u)$, такой что $u(x) > u$. Рассмотрим набор $x' = \alpha x$, где $\alpha \in (0, 1)$. В силу непрерывности функции

полезности для α, достаточно близкого к 1, выполнено $u(x') \geq u$ и $p \cdot x' < p \cdot x$, что противоречит тому, что x — оптимум задачи минимизации расходов при данном уровне полезности u.

(3) Доказательство свойства (3) аналогично доказательству свойства (3) утверждения 3.D.2 и остается в качестве упражнения (см. упражнение 3.E.4). ■

Как и для задачи максимизации полезности в случае, когда функция полезности $u(\cdot)$ дифференцируема, оптимальный потребительский набор задачи минимизации расходов можно охарактеризовать с помощью условий первого порядка. Учитывая утверждение 3.E.1, следует ожидать, что эти условия первого порядка будут подобны условиям первого порядка задачи максимизации полезности. В упражнении 3.E.1 вас просят исследовать эту взаимосвязь.

Упражнение 3.E.1. Пусть функция полезности $u(\cdot)$ дифференцируема. Покажите, что условия первого порядка задачи минимизации расходов имеют вид

$$p \geq \lambda \nabla u\left(x^*\right) \tag{3.E.2}$$

и

$$x^*\left[p - \lambda \nabla u\left(x^*\right)\right] = 0 \tag{3.E.3}$$

для некоторого $\lambda \geq 0$. Сравните эти условия первого порядка с условиями первого порядка задачи максимизации полезности.

Мы не будем обсуждать свойства непрерывности и дифференцируемости хиксианского спроса. При минимальной корректировке они будут такими же, как и для вальрасианского спроса, довольно подробное исследование этих свойств приведено в приложении А.

Опираясь на утверждение 3.E.1, мы можем установить следующую взаимосвязь между вальрасианским и хиксианским спросом:

$$h(p,\ u) = x\left(p,\ e(p,\ u)\right) \text{ и } x(p,\ w) = h\left(p,\ v(p,\ w)\right). \tag{3.E.4}$$

Первое соотношение объясняет использование термина *компенсированный спрос* для описания $h(p, u)$: при изменении цен $h(p, u)$ характеризует в точности тот уровень спроса, который бы имел место, если бы богатство потребителя одновременно было скорректировано так, чтобы он смог по-прежнему иметь уровень полезности u. Такой тип компенсации богатства, проиллюстрированный на рис. 3.E.4, называется *компенсацией богатства по Хиксу*. На рис. 3.E.4 потребитель первоначально сталкивается с комбинацией цен и дохода $(p,\ w)$, затем цены меняются и становятся равными p', где $p_1' = p_1$ и $p_2' > p_2$. Компенсация богатства по Хиксу — это сумма $\Delta w_{\text{Hicks}} = e(p', u) - w$. Таким образом, функция спроса $h(p, u)$ предполагает уровень полезности потребителя при изменении цен неизменным,

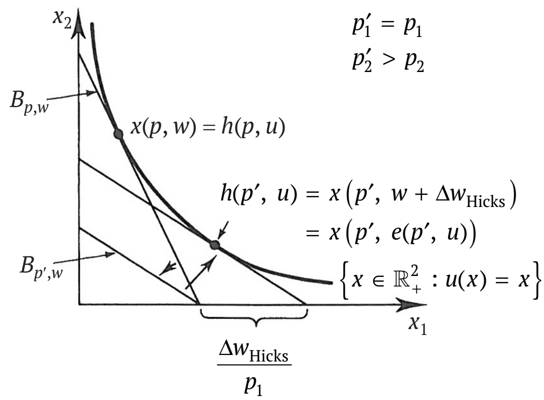


Рис. 3.E.4. Компенсация богатства по Хиксу

в отличие от функции вальрасианского спроса, которая фиксирует уровень богатства, но позволяет меняться полезности.

Как и в случае функций значения задач минимизации расходов и максимизации полезности, соотношения (3.E.4) позволяют установить прочную связь между хиксианским спросом $h(p, u)$ и вальрасианским спросом $x(p, w)$. В частности, в упражнении 3.E.10 вас просят с помощью соотношений (3.E.4) получить свойства каждого из этих отображений как прямое следствие аналогичного свойства другого отображения.

Хиксианский спрос и закон компенсированного спроса

Одним из важных свойств хиксианского спроса является то, что он удовлетворяет *закону компенсированного спроса*: спрос меняется противонаправленно изменению цены, сопровождающемуся компенсацией богатства по Хиксу. В утверждении 3.E.4 мы доказываем этот факт для случая однозначного хиксианского спроса.

Утверждение 3.E.4. Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция полезности, представляющая локально ненасыщаемое отношение предпочтения $\succsim$, и $h(p, u)$ содержит единственный элемент при всех $p \gg 0$. Тогда функция хиксианского спроса $h(p, u)$ удовлетворяет закону компенсированного спроса: для всех p' и p''

$$(p'' - p') \cdot \left[h(p'', u) - h(p', u)\right] \leq 0. \qquad (3.E.5)$$

Доказательство. Для любого $p \gg 0$ потребительский набор $h(p, u)$ является решением задачи минимизации расходов и, следовательно, дает уровень расходов при ценах p не больший, чем любой другой набор, позволяющий достичь уровня полезности не ниже u, т. е.

$$p'' \cdot h(p'', u) \leq p'' \cdot h(p', u)$$

и

$$p' \cdot h(p'', u) \geq p' \cdot h(p', u),$$

откуда следует искомый результат. ■

Из утверждения 3.E.4 следует, что для компенсированного спроса влияние изменения собственной цены неположительно, т. е. если меняется только p_l, то согласно утверждению 3.E.4 $(p_l'' - p_l') \cdot \left[h_l(p'', u) - h_l(p', u)\right] \leq 0$. Для вальрасианского спроса аналогичное соотношение *не всегда* выполнено: вальрасианский спрос может не удовлетворять закону спроса. Например, спрос на благо может уменьшаться при снижении его цены (см. обсуждение товаров Гиффена в разделе 2.E и иллюстрацию этого случая на рис. 2.F.5 с обсуждением в разделе 2.F.)

Пример 3.E.1. *Хиксианский спрос и функция расходов для функции полезности Кобба — Дугласа*. Пусть потребитель имеет функцию полезности Кобба — Дугласа для случая двух благ, приведенную в примере 3.D.1, т. е. $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$. Выписывая условия первого порядка (см. упражнение 3.E.1) и используя ограничение $u\left(h_1(p, u), h_2(p, u)\right) = u$, получим следующие функции хиксианского спроса:

$$h_1(p, u) = \left[\frac{\alpha p_2}{(1-\alpha) p_1}\right]^{1-\alpha} u$$

и

$$h_2(p, u) = \left[\frac{(1-\alpha) p_1}{\alpha p_2}\right]^{\alpha} u.$$

Вычислив $e(p, u) = p \cdot h(p, u)$, найдем функцию расходов:

$$e(p, u) = \left[\alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1}\right] p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha} u. \blacksquare$$

Упражнение 3.E.2. Проверьте выполнение свойств функций хиксианского спроса и функции расходов, указанных в утверждениях 3.E.2 и 3.E.3, для случая функции полезности Кобба — Дугласа.

В этом и предыдущем разделах мы получили несколько базовых свойств вальрасианского и хиксианского спроса, а также косвенной функции полезности и функции расходов. Раздел 3.G посвящен дальнейшему исследованию этих концепций. Однако сначала в разделе 3.F, который рассматривается как опциональный, мы предлагаем математическое введение в теорию двойственности. Материал, изложенный в разделе 3.F, позволяет глубже понять взаимосвязь между задачами максимизации полезности и минимизации расходов. Однако следует подчеркнуть, что изучение этого раздела не является необходимым для понимания остальных разделов данной главы.

3.F. Двойственность: математическое введение

Этот раздел представляет собой математическое отступление, посвященное некоторым аспектам теории выпуклых множеств и функций.

Напомним, что множество $K \subset \mathbb{R}^L$ называется выпуклым, если $\alpha x + (1-\alpha) z \in K$ для любых $x, z \in K$ и $\alpha \in [0, 1]$. Следует также отметить, что пересечение двух выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Полупространство — это множество вида $\left\{x \in \mathbb{R}^L : p \cdot x \geq c\right\}$ для некоторых $p \in \mathbb{R}^L$ и $c \in \mathbb{R}$. Вектор $p \neq 0$ называется *вектором нормали* к полупространству, а граница данного множества $\left\{x \in \mathbb{R}^L : p \cdot x = c\right\}$ называется *гиперплоскостью*. Термин *нормаль* объясняется тем, что при $p \cdot x = p \cdot x' = c$ имеем $p(x - x') = 0$, т. е. вектор p ортогонален (перпендикулярен или нормален) гиперплоскости (см. рис. 3.F.1). Заметим, что и полупространство, и гиперплоскость представляют собой выпуклые множества.

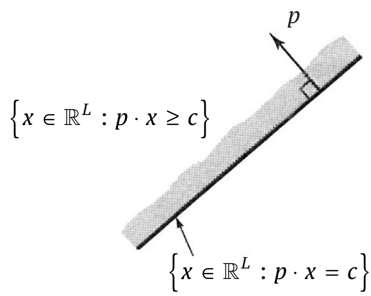


Рис. 3.F.1. Полупространство и гиперплоскость

Предположим теперь, что $K \subset \mathbb{R}^L$ — выпуклое множество, которое также является замкнутым (т. е. содержит все свои граничные точки), и рассмотрим произвольную точку $\bar{x} \notin K$ вне данного множества. Фундаментальная теорема теории выпуклых множеств, теорема о разделяющей гиперплоскости, говорит о том, что существует полупространство, содержащее K и не содержащее $\bar{x}$ (см. раздел M.G математического приложения). Другими словами, существуют $p \in \mathbb{R}^L$ и $c \in \mathbb{R}$, такие что $p \cdot \bar{x} < c \leq p \cdot x$ для всех $x \in K$. Теория двойственности базируется на том, что замкнутое выпуклое множество может быть эквивалентно («двойственно») описано как пересечение полупространств, его содержащих, что проиллюстрировано на рис. 3.F.2(a). Поскольку любой $\bar{x} \notin K$ исключается некоторым полупространством, содержащим K, то, изображая такие полупространства для все большего и большего количества точек $\bar{x} \notin K$, мы получим, что их пересечение (затемненная площадь на рисунке) становится равным K.

В общем случае, если множество K невыпукло, пересечение полупространств, содержащих K, представляет собой наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее K, которое называется *замкнутой выпук-*

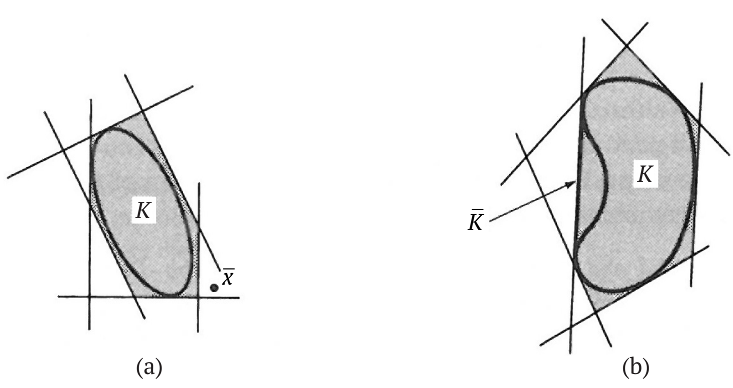


Рис. 3.F.2. Замкнутое множество выпукло тогда и только тогда, когда оно равно пересечению полупространств, его содержащих. (a) K — выпуклое множество. (b) K — невыпуклое множество

лой оболочкой K. На рис. 3.F.2(b) проиллюстрирован случай невыпуклого множества K, где замкнутая выпуклая оболочка K обозначена через $\bar{K}$.

Для любого данного замкнутого (но необязательно выпуклого) множества $K \subset \mathbb{R}^L$ и вектора $p \in \mathbb{R}^L$ мы можем определить *опорную функцию* множества K.

Определение 3.F.1. Для любого непустого замкнутого множества $K \subset \mathbb{R}^L$ опорная функция множества K, определенная для любого $p \in \mathbb{R}^L$, имеет вид

$$\mu_K(p) = \inf\{p \cdot x : x \in K\}.$$

Инфимум множества чисел, используемый в определении 3.F.1, — это обобщенный вариант наименьшего значения множества. В частности, его использование возможно в ситуациях, когда минимума не существует, т. е. когда могут быть найдены точки множества произвольно близко от некоторого граничного значения, но ни одна из них в действительности не достигает этого значения. Например, рассмотрим строго положительную функцию $f(x)$, асимптотически приближающуюся к нулю с ростом x. Минимума этой функции не существует, а инфимум равен нулю. Кроме того, в данной формулировке $\mu_K(p)$ может принимать значение $-\infty$, когда во множестве K находятся такие точки, для которых величина $p \cdot x$ принимает неограниченно большое (по модулю) отрицательное значение.

Если множество K выпукло, то функция $\mu_K(\cdot)$ дает альтернативное («двойственное») описание K, поскольку мы можем восстановить множество K по имеющейся информации о $\mu_K(\cdot)$. В частности, для каждого p множество $\left\{x \in \mathbb{R}^L : p \cdot x \geq \mu_K(p)\right\}$ представляет собой полупространство, содержащее K. Кроме того, как мы уже отмечали ранее, если $x \notin K$, то $p \cdot x < \mu_K(p)$ для некоторого p. Таким образом, пересечение полупространств, порожденных любыми возможными значениями p, и есть в точности множество K, т. е.

$$K = \left\{x \in \mathbb{R}^L : p \cdot x \geq \mu_K(p) \text{ для любого } p\right\}.$$

Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что если множество K невыпукло, то $\left\{x \in \mathbb{R}^L : p \cdot x \geq \mu_K(p) \text{ для любого } p\right\}$ — наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее K.

Функция $\mu_K(\cdot)$ однородна первой степени. Что более интересно, *она вогнута*. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим $p'' = \alpha p + (1 - \alpha)p'$, где $\alpha \in [0, 1]$. Для простоты предположим, что инфимум в действительности достигается, т. е. существует $z \in K$, такой что $\mu_K(p'') = p'' \cdot z$. Тогда, поскольку

$$\mu_K(p'') = \alpha p \cdot z + (1 - \alpha)p' \cdot z \geq \alpha\mu_K(p) + (1 - \alpha)\mu_K(p'),$$

мы приходим к выводу, что функция $\mu_K(\cdot)$ является вогнутой.

Вогнутость функции $\mu_K(\cdot)$ можно проиллюстрировать графически. На рис. 3.F.3 изображена функция значения $\varphi_x(\mathrm{p}) = p \cdot x$ при различном вы-

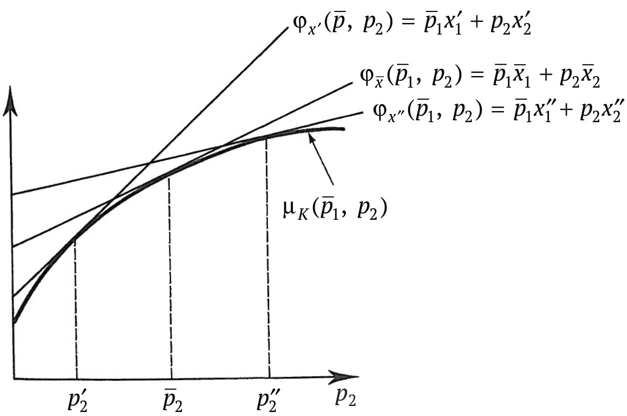


Рис. 3.F.3. Опорная функция $\mu_K(p)$ является вогнутой

боре $x \in K$ как функции от p_2 (при p_1, фиксированном на уровне $\bar{p}_1$). Для каждого x функция $\varphi_x(\cdot)$ является линейной функцией от p_2. На рисунке также изображен график функции $\mu_K(\cdot)$. При каждом значении p_2 $\mu_K(\bar{p}_1, p_2)$ равна минимальному значению (формально, инфимуму) различных линейных функций φ_x при $p = (\bar{p}_1,\ p_2)$, т. е. $\mu_K(\bar{p}_1,\ p_2) = \min\{\varphi_x(\bar{p}_1,\ p_2) : x \in K\}$. Например, при $p_2 = \bar{p}_2$ для всех $x \in K$ выполнено $\mu_K(\bar{p}_1, \bar{p}_2) = \varphi_{\bar{x}}(\bar{p}_1, \bar{p}_2) \le \varphi_x(\bar{p}_1, \bar{p}_2)$. Таким образом, как видно из рисунка, $\mu_K(\cdot)$ — «нижняя огибающая» функций $\varphi_x(\cdot)$. Как инфимум семейства линейных функций, $\mu_K(\cdot)$ вогнута.

В утверждении 3.F.1, *теореме двойственности*, формулируется центральный результат данной математической теории, который широко используется в экономике.

Утверждение 3.F.1 (*теорема двойственности*). Пусть K — непустое замкнутое множество, и пусть $\mu_K(\cdot)$ — его опорная функция. Тогда существует единственный $\bar{x} \in K$, такой что $\bar{p} \cdot \bar{x} = \mu_K(\bar{p})$ тогда и только тогда, когда функция $\mu_K(\cdot)$ дифференцируема при $\bar{p}$. Более того, в этом случае

$$\nabla \mu_K(\bar{p}) = \bar{x}.$$

Наиболее важный результат этой теоремы (полное доказательство которой мы не будем приводить) состоит в том, что если доставляющий минимум вектор $\bar{x}$ при $\bar{p}$ единствен, то градиент опорной функции в точке $\bar{p}$ равен $\bar{x}$. Для лучшего понимания этого результата рассмотрим линейную функцию $\varphi_{\bar{x}}(p) = p \cdot \bar{x}$. По определению $\bar{x}$ имеем $\mu_K(\bar{p}) = \varphi_{\bar{x}}(\bar{p})$. Кроме того, производные $\varphi_{\bar{x}}(\cdot)$ в точке $\bar{p}$ удовлетворяют условию $\nabla\varphi_{\bar{x}}(p) = \bar{x}$. Таким образом, теорема двойственности говорит о том, что до тех пор, пока речь идет о первых производных функции $\mu_K(\cdot)$, можно считать, что функция $\mu_K(\cdot)$ линейна по p, т. е. первые производные функции $\mu_K(\cdot)$ в точке $\bar{p}$ будут в точности теми же, что и производные функции $\varphi_{\bar{x}}(p) = p \cdot \bar{x}$.

Это довольно очевидно. Предположим, что функция $\mu_K(\cdot)$ дифференцируема в точке $\bar{p}$, и рассмотрим функцию $\xi(p) = p \cdot \bar{x} - \mu_K(p)$, где $\bar{x} \in K$ и $\mu_K(\bar{p}) = \bar{p} \cdot \bar{x}$. По определению $\mu_K(\cdot)$ $\xi(p) = p \cdot \bar{x} - \mu_K(p) \geq 0$ для всех p. Кроме того, нам известно, что $\xi(\bar{p}) = \bar{p} \cdot \bar{x} - \mu_K(\bar{p}) = 0$. Таким образом, функция $\xi(\cdot)$ достигает минимума при $p = \bar{p}$, а значит, ее частные производные в точке $\bar{p}$ должны быть равны нулю. Отсюда и следует искомый результат: $\nabla\xi(\bar{p}) = \bar{x} - \nabla\mu_K(\bar{p}) = 0$ [14].

Вспоминая обсуждение задачи минимизации расходов в разделе 3.E, мы видим, что функция расходов представляет собой как раз опорную функцию множества $\left\{x \in \mathbb{R}^L_+ : u(x) \geq u\right\}$. В связи с этим свойства функции расходов, приведенные ранее в утверждении 3.E.2, такие как однородность нулевой степени и вогнутость, немедленно следуют из свойств опорной функции, изложенных в данном разделе. В разделе 3.G мы исследуем следствия теоремы двойственности для теории спроса.

Обсуждение теории двойственности и ее приложений можно найти в работе (Green, Heller, 1981), а ее дальнейшее развитие в работе (Diewert, 1982). Одними из первых работ по приложению двойственности к теории потребителя являются работы (McKenzie, 1956–1957).

Первая часть теоремы двойственности говорит о том, что функция $\mu_K(\cdot)$ дифференцируема в точке $\bar{p}$ тогда и только тогда, когда вектор, доставляющий минимум функции в точке $\bar{p}$, единствен. Если множество K не является строго выпуклым, то при некотором $\bar{p}$ минимизирующий вектор будет неединствен, и, следовательно, $\mu_K(\cdot)$ будет иметь излом в точке $\bar{p}$. Тем не менее в каком-то смысле (который можно формализовать с помощью концепции производных по направлению) градиент $\mu_K(\cdot)$ в точке $\bar{p}$ по-прежнему равен векторам, минимизирующим функцию, но теперь таких векторов много.

Эта ситуация проиллюстрирована на рис. 3.F.4 при $L = 2$. На рис. 3.F.4(a) изображено строго выпуклое множество K. Для всех p минимизирующий вектор единствен, например, при $\bar{p} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ он равен $\bar{x} = (1, 1)$. На рис. 3.F.4(b) изображен график $\mu_K\left(\frac{1}{2}, p_2\right)$ как функции от p_2. Как нетрудно заметить, функция является вогнутой и дифференцируемой при p_2, причем наклон графика функции равен 1 (значение $\bar{x}_2$) при $p_2 = \frac{1}{2}$.

На рис. 3.F.5(a) изображено выпуклое, но не строго выпуклое множество K. При $\bar{p} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ минимум функции достигается на отрезке $[x', x'']$. Если $p_1 > p_2$, то минимизирующим вектором является x', а значение опорной функции составляет $p_1x'_1 + p_2x'_2$, тогда как если $p_1 < p_2$, то оптимален вектор x'' и опорная функция до-

[14] Поскольку $\bar{x} = \nabla\mu_K(\bar{p})$ при любом $\bar{x}$, доставляющем минимум функции в точке $\bar{p}$, то либо $\bar{x}$ единствен, либо, если он неединствен, функция $\mu_K(\cdot)$ не может быть дифференцируемой при $\bar{p}$. Таким образом, функция $\mu_K(\cdot)$ дифференцируема в точке $\bar{p}$ тогда и только тогда, когда существует единственное значение, доставляющее минимум данной функции при $\bar{p}$.

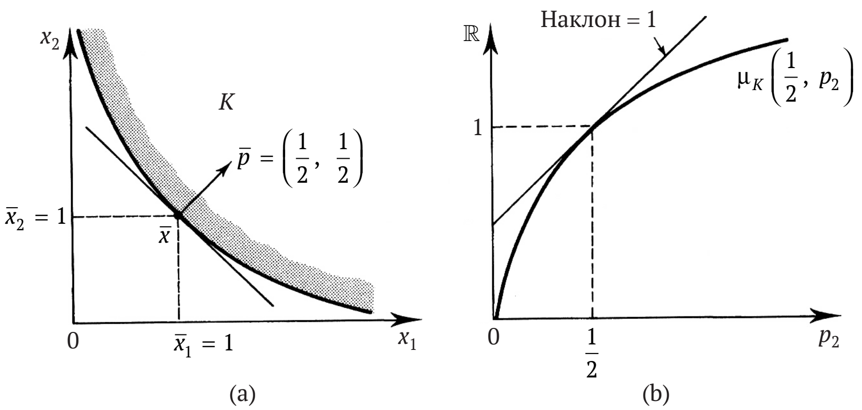


Рис. 3.F.4. Теорема двойственности при единственном минимизирующем векторе $\bar{p}$. (a) Вектор минимума. (b) Опорная функция

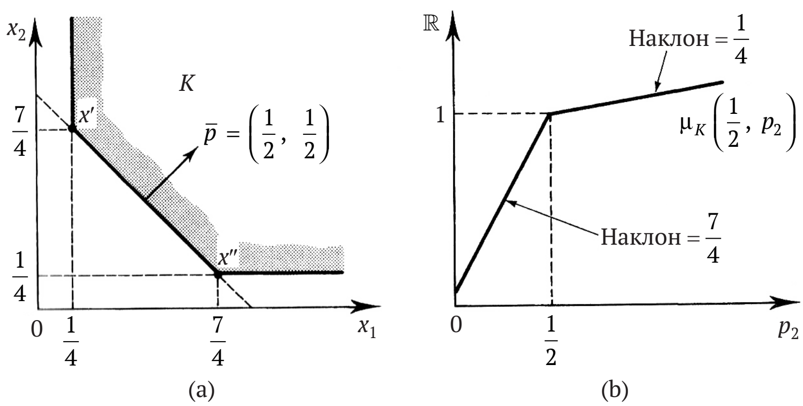


Рис. 3.F.5. Теорема двойственности при множестве векторов, доставляющих минимум функции при $\bar{p}$. (a) Множество векторов, доставляющих минимум. (b) Опорная функция

стигает значения $p_1 x_1'' + p_2 x_2''$. На рис. 3.E.5(b) изображен график $\mu_K\left(\frac{1}{2}, p_2\right)$ как функции от p_2. При $p_2 < \frac{1}{2}$ его наклон равен $\frac{7}{4}$, значению x_2', а при $p_2 > \frac{1}{2}$ его наклон равен $\frac{1}{4}$, значению x_2''. График функции имеет излом при $\bar{p} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, том самом векторе цен, при котором имеет место множественность минимизирующих функцию векторов, причем производная по p_2 слева равна $\frac{7}{4}$, а справа — $\frac{1}{4}$. Таким образом, область значений производных по направлению при $\bar{p} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ равна области значений x_2 в точке минимума. ■

3.G. Взаимосвязь между спросом, косвенной функцией полезности и функцией расходов

Мы продолжаем исследование задач максимизации полезности и минимизации расходов. В этом разделе мы рассмотрим проблему трех взаимосвязей: между функцией хиксианского спроса и функцией расходов, между функциями хиксианского и вальрасианского спроса и между функцией вальрасианского спроса и косвенной функцией полезности.

Как и ранее, будем считать, что $u(\cdot)$ — непрерывная функция полезности, представляющая локально ненасыщаемые предпочтения $\succsim$ (определенные на потребительском множестве $X = \mathbb{R}^L_+$), ограничившись рассмотрением случая $p >> 0$. Кроме того, для простоты предположим, что предпочтения $\succsim$ строго выпуклы, так что вальрасианский и хиксианский спрос, $x(p, w)$ и $h(p, u)$, определены однозначно[15].

Хиксианский спрос и функция расходов

Зная функцию хиксианского спроса, мы легко можем вычислить функцию расходов: $e(p, u) = p \cdot h(p, u)$. Результат, представленный в утверждении 3.G.1, устанавливает более значимую связь между двумя данными концепциями, описывая эту взаимосвязь в обратном направлении.

Утверждение 3.G.1. Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция полезности, представляющая локально ненасыщаемое и строго выпуклое отношение предпочтения $\succsim$, определенное на потребительском множестве $X = \mathbb{R}^L_+$. Тогда для всех p и u хиксианский спрос $h(p, u)$ — это вектор производных функции расходов по ценам

$$h(p, u) = \nabla_p e(p, u), \tag{3.G.1}$$

т. е. $h_l(p, u) = \partial e(p, u) / \partial p_l$ для всех $l = 1, \ldots, L$.

Таким образом, зная функцию расходов, мы можем вычислить хиксианский спрос потребителя с помощью простого дифференцирования.

Мы приводим три доказательства этого важного результата.

Доказательство 1 (*по теореме двойственности*). Данный результат немедленно следует из теоремы двойственности (утверждение 3.F.1). Поскольку функция расходов является опорной функцией множества $K = \left\{x \in \mathbb{R}^L_+ : u(x) \geq u\right\}$ и оптимальным вектором, соответствующим этой опорной функции, является $h(p, u)$, то из утверждения 3.F.1 следует, что $h(p, u) = \nabla_p e(p, u)$. Заметим, что соотношение (3.G.1) помогает лучше понять смысл термина «двойственный» в этом кон-

[15] В действительности все результаты данного раздела носят локальный характер и выполнены при всех векторах цен $\bar{p}$, таких что для всех p, близких к $\bar{p}$, оптимальный потребительский набор в задачах максимизации полезности и минимизации расходов при ценах p единствен.

тексте. В частности, точно так же, как производные функции полезности $u(\cdot)$ по количеству товаров имеют ценовую интерпретацию (мы показали в разделе 3.D, что в оптимуме они равны ценам, умноженным на постоянный коэффициент пропорциональности), (3.G.1) говорит о том, что производные функции расходов $e(\cdot, u)$ по ценам имеют количественную интерпретацию (они равны хиксианскому спросу). ■

Доказательство 2 (*с помощью условий первого порядка*). В этом случае для простоты предположим, что $h(p, u) >> 0$, и будем считать, что функция $h(p, u)$ дифференцируема в точке (p, u).

Используя правило дифференцирования сложной функции, изменение функции расходов можно записать следующим образом:

$$\nabla_p e(p,\ u) = \nabla_p \left[p \cdot h(p,\ u) \right] = h(p,\ u) + \left[p \cdot D_p h(p,\ u) \right]^T. \quad (3.G.2)$$

Воспользовавшись условиями первого порядка для внутреннего решения задачи минимизации расходов, $p = \lambda \nabla u\left(h(p,\ u)\right)$, преобразуем последнее соотношение:

$$\nabla_p e(p,\ u) = h(p,\ u) + \lambda \left[\nabla u\left(h(p,\ u)\right) \cdot D_p h(p,\ u) \right]^T.$$

Поскольку условие $u\left(h(p,\ u)\right) = u$ выполнено для всех p (так как $h(p, u)$ является решением задачи минимизации расходов), то $\nabla u\left(h(p,\ u)\right) \cdot D_p h(p,\ u) = 0$, откуда и следует искомый результат. ■

Доказательство 3 (*по теореме об огибающей*). При том же упрощающем предположении, которое было сделано в доказательстве 2, мы можем непосредственно воспользоваться *теоремой об огибающей*. Рассмотрим функцию значения $\varphi(\alpha)$ задачи условной минимизации

$$\min_x f(x, \alpha)$$

$$\text{при } g(x, \alpha) = 0.$$

Если $x^*(\alpha)$ — это (дифференцируемое) решение данной задачи как функция от параметров $\alpha = \left(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_M\right)$, то теорема об огибающей гласит, что для любого $\bar{\alpha} = \left(\bar{\alpha}_1,\ \ldots,\ \bar{\alpha}_M\right)$ выполнено

$$\frac{\partial \varphi(\bar{\alpha})}{\partial \alpha_m} = \frac{\partial f(x^*(\bar{\alpha}), \bar{\alpha})}{\partial \alpha_m} - \lambda \frac{\partial g(x^*(\bar{\alpha}), \bar{\alpha})}{\partial \alpha_m}$$

при $m = 1, \ldots, M$ или, в матричной записи:

$$\nabla_\alpha \varphi(\bar{\alpha}) = \nabla_\alpha f\left(x^*(\bar{\alpha}),\ \bar{\alpha}\right) - \lambda \nabla_\alpha g\left(x^*(\bar{\alpha}),\ \bar{\alpha}\right).$$

Дальнейшее обсуждение этого результата можно найти в разделе M.L математического приложения[16].

Поскольку параметрами задачи минимизации расходов выступают цены, которые фигурируют только в целевой функции $p \cdot x$, то изменение функции значения данной задачи при изменении цен в точке $\bar{p}$, $\nabla_p e(\bar{p}, u)$ представляет собой просто вектор частных производных целевой функции по p, оцененный при оптимальном векторе $h(\bar{p}, u)$. Следовательно, $\nabla_p e(p, u) = h(p, u)$. ■

Идея, лежащая в основе этих доказательств, одна и та же: если мы находимся в точке оптимума задачи минимизации расходов, то изменение спроса в результате изменения цен не оказывает влияния (первого порядка) на потребительские расходы. Особенно ясно это видно в доказательстве 2. В условии (3.G.2) с помощью правила дифференцирования сложной функции выделяются два эффекта: прямое влияние изменения цен на расходы при неизменном спросе (первое слагаемое) и косвенное влияние изменения цен на расходы, обусловленное изменением спроса при фиксированных ценах (второе слагаемое). Однако поскольку вычисления производятся в точке, соответствующей минимуму расходов, то из условий первого порядка задачи минимизации расходов следует, что второй эффект равен нулю.

В утверждении 3.G.2 перечислены свойства производных функции хиксианского спроса по ценам, $D_p h(p, u)$, которые следуют из утверждения 3.G.1 (свойства (1)–(3)), а также приводится еще один результат относительно этих производных (свойство (4)).

Утверждение 3.G.2. Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция полезности, представляющая локально ненасыщаемое и строго выпуклое отношение предпочтения $\succsim$, определенное на потребительском множестве $X = \mathbb{R}^L_+$. Предположим также, что функция $h(\cdot, u)$ непрерывно дифференцируема по (p, u), и обозначим матрицу ее производных размерности $L \times L$ через $D_p h(p, u)$. Тогда

(1) $D_p h(p, u) = D_p^2 e(p, u)$.

(2) $D_p h(p, u)$ — отрицательно полуопределенная матрица.

(3) $D_p h(p, u)$ — симметричная матрица.

(4) $D_p h(p, u)p = 0$.

Доказательство. Свойство (1) немедленно следует из утверждения 3.G.1, если воспользоваться дифференцированием. Свойства (2) и (3) следуют из свойства (1) и того факта, что поскольку $e(p, u)$ — дважды непрерывно дифференцируемая вогнутая функция, то она имеет симметричную и отрицательно полуопределенную матрицу Гессе (матрицу вторых производных) (см. раздел M.C математического

[16] Доказательство 2, по сути, представляет собой доказательство теоремы об огибающей для специального случая, когда изменение параметров (в данном случае цен) влияет только на целевую функцию задачи.

приложения). Наконец, для доказательства свойства (4) заметим, что поскольку $h(p, u)$ однородна нулевой степени по p, то $h(\alpha p, u) - h(p, u) = 0$ для всех α. Дифференцируя последнее выражение по α, получим $D_p h(p, u)p = 0$. (Следует заметить, что поскольку $h(p, u)$ однородна нулевой степени, то условие $D_p h(p, u)p = 0$ следует непосредственно из формулы Эйлера (см. раздел M.B. математического приложения).) ■

Отрицательная полуопределенность матрицы $D_p h(p, u)$ представляет собой дифференциальный аналог закона компенсированного спроса (3.E.5). В частности, дифференциальная версия условия (3.E.5) имеет вид $dp \cdot dh\,(p, u) \leq 0$. Поскольку $dh(p, u) = D_p h(p, u)dp$, то, подставляя это выражение в последнее соотношение, получаем: $dp \cdot D_p h(p, u)dp \leq 0$ для всех dp, следовательно, матрица $D_p h(p, u)$ отрицательно полуопределена. Заметим, что из отрицательной полуопределенности следует, что $\partial h_l(p, u) / \partial p_l \leq 0$ для всех l, т. е. для компенсированного спроса эффект изменения собственной цены неположителен. Этот же результат мы получили ранее непосредственно из условия (3.E.5).

Симметричность матрицы $D_p h(p, u)$ — довольно неожиданный результат. Из него следует, что перекрестные производные компенсированного спроса по цене между любыми двумя благами l и k должны удовлетворять условию: $\partial h_l(p, u) / \partial p_k = \partial h_k(p, u) / \partial p_l$. Эту симметричность довольно сложно проинтерпретировать в простых экономических терминах. Как подчеркивается в работе (Samuelson, 1947), это одно из тех свойств, которые невозможно получить без помощи математического аппарата. Поскольку мы знаем, что $D_p h(p, u) = \nabla_p^2 e(p, u)$, то симметричность матрицы $D_p h(p, u)$ отражает тот факт, что перекрестные производные (дважды непрерывно дифференцируемой) функции равны. Интуитивно это означает, что, когда вы поднимаетесь на вершину горы, независимо от маршрута вам придется в конечном счете забраться на одну и ту же высоту[17]. Как мы

[17] Для того чтобы понять, почему это так, рассмотрим дважды непрерывно дифференцируемую функцию $f(x, y)$. Мы можем выразить изменение значения этой функции при переходе от точки (x', y') к точке (x'', y'') как сумму (формально интеграл) двух различных путей изменения:

$$f(x'', y'') - f(x', y') = \int_{y'}^{y''} \left[\partial f(x', t) / \partial y\right] dt + \int_{x'}^{x''} \left[\partial f(s, y'') / \partial x\right] ds$$

и

$$f(x'', y'') - f(x', y') = \int_{x'}^{x''} \left[\partial f(s, y') / \partial x\right] ds + \int_{y'}^{y''} \left[\partial f(x'', t) / \partial y\right] dt.$$

Для того чтобы два данных выражения были равны, должно быть выполнено

$$\int_{y'}^{y''} \left[\frac{\partial f(x'', t)}{\partial y} - \frac{\partial f(x'', t)}{\partial y}\right] dt = \int_{x'}^{x''} \left[\frac{\partial f(s, y'')}{\partial x} - \frac{\partial f(s, y')}{\partial x}\right] ds$$

или

$$\int_{y'}^{y''} \left\{\int_{x'}^{x''} \left[\frac{\partial f^2(s, t)}{\partial y \partial x}\right] ds\right\} dt = \int_{x'}^{x''} \left\{\int_{y'}^{y''} \left[\frac{\partial f^2(s, t)}{\partial x \partial y}\right] dt\right\} ds.$$

покажем в разделах 13.H и 13.J, такая независимость от пути тесно связана со свойством транзитивности или «отсутствия циклов» рациональных предпочтений.

Будем называть блага l и k *субститутами* при (p, u), если $\partial h_l(p,\ u)\ /\ \partial p_k\ \geq$ ≥ 0, и *комплементами*, если данная производная неположительна (в случае когда вальрасианский спрос обладает аналогичными свойства при (p, w), блага называют *валовыми* субститутами и *валовыми* комплементами при (p, w) соответственно). Поскольку $\partial h_l(p,\ u)\ /\ \partial p_l\ \leq 0$, то из свойства (4) утверждения 3.G.2 следует, что должно существовать благо k, для которого $\partial h_l(p,\ u)\ /\ \partial p_k\ \geq 0.$ Таким образом, из утверждения 3.G.2 следует, что каждое благо имеет по крайней мере один субститут.

Функции хиксианского и маршаллианского спроса

Хотя функция хиксианского спроса непосредственно не наблюдаема (она зависит от уровня полезности потребителя), мы покажем, что тем не менее $D_p h(p, u)$ может быть получена на основе наблюдаемой функции вальрасианского спроса $x(p, w)$ (все ее аргументы в принципе наблюдаемы). Этот важный результат, известный как *уравнение Слуцкого*, означает, что свойства, перечисленные в утверждении 3.G.2, обусловливают определенное поведение наблюдаемой функции вальрасианского спроса $x(p, w)$.

Утверждение 3.G.3 (*уравнение Слуцкого*). Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция полезности, представляющая локально ненасыщаемое и строго выпуклое отношение предпочтения $\succsim$, определенное на потребительском множестве $X = \mathbb{R}^L_+.$ Тогда для всех (p, w) и $u = v(p, w)$ выполнено

$$\frac{\partial h_l(p,\ u)}{\partial p_k} = \frac{\partial x_l(p,\ w)}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(p,\ w)}{\partial w}\, x_k(p,\ w) \ \text{ для всех } l, k, \qquad (3.G.3)$$

или, эквивалентно, в матричной записи

$$D_p h(p, u) = D_p x(p, w) + D_w x(p, w) x(p, w)^T. \qquad (3.G.4)$$

Доказательство. Рассмотрим потребителя, сталкивающегося с комбинацией цен и богатства $(\bar{p},\ \bar{w})$ и достигающего уровня полезности $\bar{u}.$ Заметим, что уровень богатства потребителя $\bar{w}$ должен удовлетворять условию $\bar{w} = e(\bar{p},\ \bar{u}).$ Согласно условию (3.E.4) для всех (p, u) $h_l(p,\ u) = x_l\left(p,\ e(p,\ u)\right).$ Дифференцируя это выражение по p_k и оценивая в точке $(\bar{p},\ \bar{u}),$ получим

$$\frac{\partial h_l(\bar{p},\ \bar{u})}{\partial p_k} = \frac{\partial x_l(\bar{p},\ e(\bar{p},\ \bar{u}))}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(\bar{p},\ e(\bar{p},\ \bar{u}))}{\partial w} \frac{\partial e(\bar{p},\ \bar{u})}{\partial p_k}.$$

Таким образом, из равенства смешанных производных следует, что эти два различных способа «взобраться на вершину функции» дают один и тот же результат. Соответственно, если смешанные частные производные не равны в точке (x'', y''), то для (x', y'), достаточно близкой к (x'', y''), последнее условие не будет выполнено.

С учетом утверждения 3.G.1 это соотношение можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{\partial h_l(\bar{p},\ \bar{u})}{\partial p_k} = \frac{\partial x_l(\bar{p},\ e(\bar{p},\ \bar{u}))}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(\bar{p},\ e(\bar{p},\ \bar{u}))}{\partial w} h_k(\bar{p},\ \bar{u}).$$

Наконец, поскольку $\bar{w} = e(\bar{p},\ \bar{u})$ и $h_k(\bar{p},\ \bar{u}) = x_k(\bar{p},\ e(\bar{p},\ \bar{u})) = x_k(\bar{p},\ \bar{w})$, имеем

$$\frac{\partial h_l(\bar{p},\ \bar{u})}{\partial p_k} = \frac{\partial x_l(\bar{p},\ \bar{w})}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(\bar{p},\ \bar{w})}{\partial w} x_k(\bar{p},\ \bar{w}). \ \blacksquare$$

На рис. 3.G.1(a) изображены кривые вальрасианского и хиксианского спроса на благо l как функции от p_l при условии, что все остальные цены фиксированы на уровне $\bar{p}_{-l}$ (через $\bar{p}_{-l}$ мы обозначили вектор, включающий все цены, кроме p_l, и будем в дальнейшем пользоваться этим обозначением, записывая вектор цен как $p = (p_l,\ \bar{p}_{-l})$). На рисунке изображены график функции вальрасианского спроса $x(p,\ \bar{w})$ и график функции хиксианского спроса $h(p,\ \bar{u})$ при заданном уровне полезности $\bar{u} = v\big((\bar{p}_l,\ \bar{p}_{-l}),\ \bar{w}\big)$. Заметим, что две данные функции спроса равны при $p_l = \bar{p}_l$. Уравнение Слуцкого описывает взаимосвязь между наклонами графиков данных функций при ценах $\bar{p}_l$. На рис. 3.G.1(a) кривая вальрасианского спроса в точке $\bar{p}_l$ расположена более полого, чем кривая хиксианского спроса при этих же ценах (т. е. производная функции вальрасианского спроса в данной точке по абсолютной величине меньше производной функции хиксианского спроса в этой же точке также по абсолютной величине). Как показывает уравнение Слуцкого, это соответствует ситуации, когда благо l является нормальным благом при $(\bar{p},\ \bar{w})$. Когда p_l становится больше $\bar{p}_l$, мы долж-

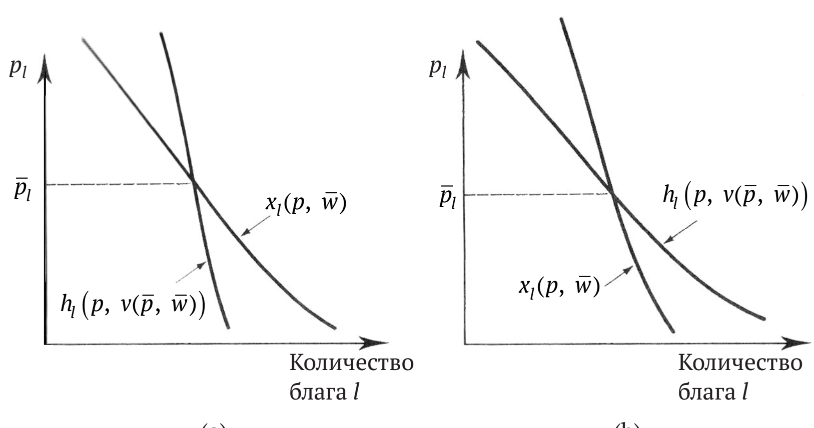


Рис. 3.G.1. Функции вальрасианского и хиксианского спроса на благо l.
(a) Нормальное благо. (b) Инфериорное благо

ны увеличить богатство индивида, чтобы он остался на том же уровне полезности. Следовательно, при отсутствии такой компенсации, если l — нормальное благо, спрос на него падает в большей степени. На рис. 3.G.1(b) проиллюстрирована ситуация, когда благо l является инфериорным. В этом случае кривая хиксианского спроса более пологая, чем кривая вальрасианского спроса.

Из утверждения 3.G.3 следует, что матрица производных по цене $D_p h(p, u)$ функции хиксианского спроса имеет вид

$$S(p,\ w) = \begin{bmatrix} s_{11}(p,\ w) & . & . & . & s_{1L}(p,\ w) \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ s_{L1}(p,\ w) & . & . & . & s_{LL}(p,\ w) \end{bmatrix},$$

где $s_{lk}(p,\ w) = \partial x_l(p,\ w) / \partial p_k + \left[\partial x_l(p,\ w) / \partial w\right] x_k(p,\ w)$. Эту матрицу называют *матрицей замещения Слуцкого*. Заметим, что матрицу $S(p, w)$ можно вычислить непосредственно на основе (наблюдаемой) функции вальрасианского спроса $x(p, w)$. Поскольку $S(p, w) = D_p h(p, u)$, то из утверждения 3.G.2 следует, что, когда потребитель выбирает наилучший согласно предпочтениям набор, матрица $S(p, w)$ должна обладать следующими тремя свойствами: она должна быть отрицательно полуопределенной, симметричной и удовлетворять условию $S(p, w)p = 0$.

Как было показано в разделе 2.F, матрица замещения Слуцкого $S(p, w)$ является матрицей производных компенсированного спроса при другой форме компенсации богатства, так называемой *компенсации богатства по Слуцкому*. Вместо того чтобы варьировать богатство так, чтобы полезность осталась неизменной, как мы делали до сих пор, компенсация по Слуцкому корректирует богатство таким образом, чтобы при новых ценах в точности был доступен первоначальный потребительский набор $\bar{x}$. Таким образом, мы приходим к следующему важному выводу: *производная функции хиксианского спроса равна производной данного альтернативного компенсированного спроса по Слуцкому*.

Этот результат можно понимать так. Предположим, у нас есть функция полезности $u(\cdot)$ и первоначально мы имеем ситуацию $(\bar{p},\ \bar{w})$, где $\bar{x} = x(\bar{p},\ \bar{w})$ и $\bar{u} = u(\bar{x})$. Меняя цены до уровня p', мы бы хотели так изменить богатство, чтобы компенсировать эффект богатства, возникающий в результате изменения цен. В принципе эта компенсация может быть осуществлена двумя способами. С одной стороны, с помощью изменения богатства на величину $\Delta w_{\text{Slutsky}} = p' \cdot x(p,\ w) - \bar{w}$ мы позволяем потребителю иметь такой уровень богатства, которого в точности хватает, чтобы потребитель мог позволить себе первоначальный набор $\bar{x}$. С другой стороны, мы можем изменить богатство потребителя на величину $\Delta w_{\text{Hiks}} = e(p',\ \bar{u}) - \bar{w}$, чтобы он остался на том же уровне полезности. Заметим, что $\Delta w_{\text{Hiks}} \le \Delta w_{\text{Slutsky}}$, причем неравенство, вообще говоря, будет строгим для любого дискретного изменения (см. рис. 3.G.2). Но, поскольку $\nabla_p e(\bar{p},\ \bar{u}) = h(\bar{p},\ \bar{u}) = x(\bar{p},\ \bar{w})$, две данные схемы компенсации *идентичны* при дифференциально малом изменении цен по сравнению с на-

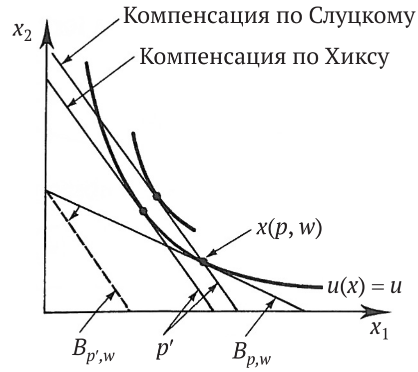


Рис. 3.G.2. Компенсации богатства по Слуцкому и Хиксу

чальным уровнем $\bar{p}$. Интуитивно понятно, что так происходит вследствие того же условия, которое привело нас к утверждению 3.G.1: при дифференциально малом изменении цен совокупное влияние на расходы при условии достижения уровня полезности $\bar{u}$ (компенсация по Хиксу) просто совпадает с прямым эффектом изменения цен в предположении, что потребительский набор $\bar{x}$ остался без изменений. Но это не что иное, как вычисление компенсации по Слуцкому. Следовательно, производные функций компенсированного спроса при двух данных механизмах компенсации равны. ■

Соотношение $D_p h(p, u) = S(p, w)$ позволяет нам сравнить результаты подхода к потребительскому спросу, основанного на предпочтениях, с изложенным в разделе 2.F подходом к потребительскому выбору, построенному на слабой аксиоме выявленных предпочтений. В разделе 2.F мы пришли к заключению, что если $x(p, w)$ удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений (а кроме того, однородности нулевой степени и закону Вальраса), то матрица $S(p, w)$ отрицательно полуопределена, причем $S(p, w)p = 0$. Более того, мы утверждали, что за исключением случая $L = 2$ спрос, удовлетворяющий слабой аксиоме выявленных предпочтений, необязательно порождает симметричную матрицу замещения Слуцкого. Следовательно, полученные результаты говорят о том, что подход, основанный на предпочтениях, налагает более сильные ограничения на спрос, чем те, которые следуют из теории наблюдаемого выбора, построенной на слабой аксиоме выявленных предпочтений. В действительности же невозможно представить себе такие предпочтения, которые рационализируют спрос в случае, когда матрица замещения не является симметричной. В разделе 3.I мы продолжим изучение роли, которую играет свойство симметричности матрицы замещения в исследовании взаимосвязи между подходами к спросу, основанными на предпочтениях и выборе потребителя.

Вальрасианский спрос и косвенная функция полезности

Мы видели, что решение задачи минимизации расходов, $h(p, u)$, представляет собой производную по p функции значения задачи минимизации расходов $e(p, u)$. Точного аналога этого утверждения в контексте задачи максимизации полезности не существует. Вальрасианский спрос как ординалистская концепция не может быть равен производной косвенной функции полезности по цене, поскольку косвенная функция полезности не инвариантна к возрастающим преобразованиям полезности. Однако при небольшой корректировке, основанной на нормировке производных $v(p, w)$ по p с помощью предельной полезности богатства, мы получаем аналогичный результат. Это утверждение, называемое *тождеством Роя* (в честь Рене Роя), с точки зрения сопоставления решения задачи и ее функции значения аналогично утверждению 3.G.1 для задачи минимизации расходов. Как и для утверждения 3.G.1, мы приведем несколько доказательств данного утверждения.

Утверждение 3.G.4 (*тождество Роя*). Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция полезности, представляющая локально ненасыщаемое и строго выпуклое отношение предпочтения $\succsim$, определенное на потребительском множестве $X = \mathbb{R}^L_+$. Предположим также, что косвенная функция полезности дифференцируема при $(\bar{p}, \bar{w}) \gg 0$. Тогда

$$x(\bar{p}, \bar{w}) = -\frac{1}{\nabla_w v(\bar{p}, \bar{w})} \nabla_p v(\bar{p}, \bar{w}).$$

Другими словами, для любого $l = 1, \ldots, L$

$$x_l(\bar{p}, \bar{w}) = -\frac{\partial v(\bar{p}, \bar{w}) / \partial p_l}{\partial v(\bar{p}, \bar{w}) / \partial w}.$$

Доказательство 1. Пусть $\bar{u} = v(\bar{p}, \bar{w})$. Поскольку тождество $v\big(p, e(p, \bar{u})\big) = \bar{u}$ выполнено для всех p, то, дифференцируя его по p и вычисляя производную в точке $p = \bar{p}$, получим

$$\nabla_p v\big(\bar{p}, e(\bar{p}, \bar{u})\big) + \frac{\partial v\big(\bar{p}, e(\bar{p}, \bar{u})\big)}{\partial w} \nabla_p e(\bar{p}, \bar{u}) = 0.$$

Однако согласно утверждению 3.G.1 $\nabla_p e(\bar{p}, \bar{u}) = h(\bar{p}, \bar{u})$, поэтому подстановка этого выражения дает

$$\nabla_p v\big(\bar{p}, e(\bar{p}, \bar{u})\big) + \frac{\partial v\big(\bar{p}, e(\bar{p}, \bar{u})\big)}{\partial w} h(\bar{p}, \bar{u}) = 0.$$

Наконец, поскольку $\bar{w} = e(\bar{p}, \bar{u})$, мы можем записать это выражение как

$$\nabla_p v(\bar{p}, \bar{w}) + \frac{\partial v(\bar{p}, \bar{w})}{\partial w} x(\bar{p}, \bar{w}) = 0,$$

откуда после преобразования получаем искомый результат. ■

В доказательстве 1 тождества Роя используется результат утверждения 3.G.1. В доказательствах 2 и 3 подчеркивается тот факт, что оба эти результата являются следствием одной идеи: поскольку мы находимся в точке оптимума, то при оценке влияния дифференциально малого изменения цены на функцию значения можно пренебречь реакцией спроса на изменение цены. Таким образом, тождество Роя и утверждение 3.G.1 могут рассматриваться как аналогичные результаты для задач максимизации полезности и минимизации расходов. (Действительно, в упражнении 3.G.1 вас просят получить результат утверждения 3.G.1 как следствие тождества Роя, показав, таким образом, что в доказательстве 1 можно изменить порядок изложения на обратный.)

Доказательство 2 (*с помощью условий первого порядка*). Предположим, что функция спроса $x(p, w)$ дифференцируема и $x(\bar{p},\ \bar{w}) >> 0$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{\partial v(\bar{p},\ \bar{w})}{\partial p_l} = \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial u\left(x(\bar{p},\ \bar{w})\right)}{\partial x_k} \frac{\partial x_k(\bar{p},\ \bar{w})}{\partial p_l}.$$

Заменяя $\partial u\left(x(\bar{p},\ \bar{w})\right)/\partial x_k$ в соответствии с условиями первого порядка задачи максимизации полезности и пользуясь тем, что $\sum_k p_k \left(\partial x_k(\bar{p},\ \bar{w})/\partial p_l\right) = -x_l(\bar{p},\ \bar{w})$ (по утверждению 2.E.2), имеем

$$\frac{\partial v(\bar{p},\ \bar{w})}{\partial p_l} = \sum_{k=1}^{L} \lambda p_k \frac{\partial x_k(\bar{p},\ \bar{w})}{\partial p_l} = -\lambda x_l(\bar{p},\ \bar{w}).$$

Наконец, как мы уже показали, $\lambda = \partial v(\bar{p},\ \bar{w})/\partial w$ (см. раздел 3.D). Тогда, используя этот факт, получаем искомый результат. ■

Доказательство 2 опять по сути своей представляет собой доказательство теоремы об огибающей, на этот раз для случая, когда варьируемый параметр входит только в ограничение задачи. Следующее доказательство непосредственно опирается на теорему об огибающей.

Доказательство 3 (*с помощью теоремы об огибающей*). Применительно к задаче максимизации полезности теорема об огибающей прямо говорит о том, что воздействие предельного изменения p_l на полезность эквивалентно влиянию данного изменения на бюджетное ограничение потребителя, взвешенное с помощью множителя Лагранжа λ. То есть $\partial v(\bar{p},\ \bar{w})/\partial p_l = -\lambda x_l(\bar{p},\ \bar{w})$. Аналогично влияние дифференциально малого изменения богатства на полезность потребителя $\partial v(p,\ w)/\partial w$ в точности равно λ. Из этих двух фактов и следует искомый результат. ■

Утверждение 3.G.4 вносит весомый вклад в понимание теории спроса. Вальрасианский спрос гораздо легче получить из косвенной функции полезности, чем непосредственно из функции полезности. Для получения

$x(p, w)$ из косвенной функции полезности требуется только вычислить производные и не требуется решать никаких систем уравнений, образуемых условиями первого порядка. Таким образом, зачастую может быть намного удобнее описывать вкусы потребителя с помощью косвенной функции полезности. В главе 4, например, мы рассмотрим особый тип предпочтений, характеризующихся тем, что для них кривые богатство — потребление линейны в некотором диапазоне богатства. С помощью тождества Роя нетрудно убедиться в том, что таким свойством обладает косвенная функция полезности, имеющая форму *Гормана:* $v(p, w) = a(p) + b(p)w$ (см. упражнение 3.G.11).

На рис. 3.G.3 сведены воедино полученные взаимосвязи между спросом и функциями значения задач максимизации полезности и минимизации расходов (подобный рисунок был приведен в работе (Deaton, Muellbauer, 1980). Стрелками, изображенными сплошными линиями, отмечены взаимосвязи, рассмотренные в разделах 3.D и 3.E. Решая задачи максимизации полезности и минимизации расходов для некоторой функции полезности, мы можем получить оптимальные потребительские наборы $x(p, w)$ и $h(p, u)$, а также функции значений $v(p, w)$ и $e(p, u)$. Кроме того, для двух рассматриваемых задач мы можем из функций значения получить функции спроса и наоборот, используя соотношения (3.E.1) и (3.E.4).

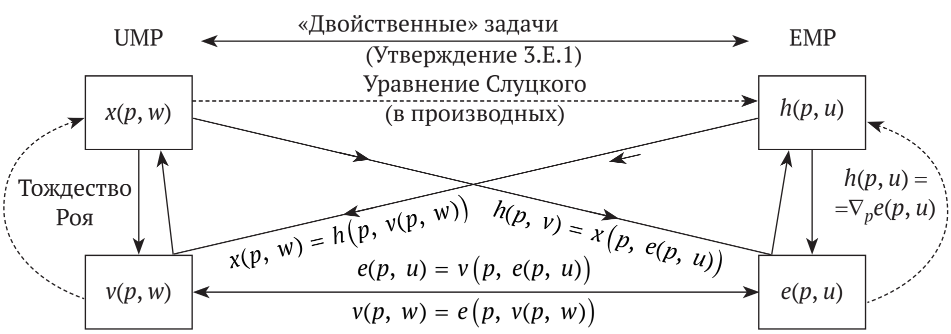


Рис. 3.G.3. Взаимосвязь между задачей максимизации полезности (UMP) и задачей минимизации расходов (EMP)

Взаимосвязи, полученные в данном разделе, представлены на рис. 3.G.3 пунктирными стрелками. Как мы видели, вектор спроса для каждой задачи может быть вычислен из ее функции значения, а производные функции хиксианского спроса могут быть получены из наблюдаемого вальрасианского спроса с помощью уравнения Слуцкого.

3.H. Интегрируемость

Если непрерывно дифференцируемая функция спроса $x(p, w)$ порождена рациональными предпочтениями, то, как мы видели, она должна быть однородной нулевой степени, удовлетворять закону Вальраса и при всех

(p, w) иметь симметричную и отрицательно полуопределенную матрицу замещения $S(p, w)$. Теперь поставим следующий вопрос: *если мы наблюдаем функцию спроса $x(p, w)$, обладающую этими свойствами, то можем ли мы найти предпочтения, рационализирующие $x(\cdot)$*? Как будет показано в этом разделе (хотя, возможно, и не совсем строго), ответ на этот вопрос утвердительный: эти условия являются достаточными для существования рациональных предпочтений, их порождающих. Эта задача, известная как *задача интегрируемости*, была впервые рассмотрена еще XIX в. в работе (Antonelli, 1886). Мы же следуем подходу, изложенному в работе (Hurwicz, Uzawa, 1971).

Имеется ряд причин теоретического и практического свойства, объясняющих, почему этот вопрос и результат представляют интерес.

С теоретической точки зрения этот результат говорит о двух фактах. Во-первых, однородность нулевой степени, выполнение закона Вальраса и симметричность и отрицательная полуопределенность матрицы замещения — это не только необходимые следствия теории спроса, основанной на предпочтениях, но и *все* возможные ее следствия. Если спрос потребителя удовлетворяет этим свойствам, то существует *некоторое* рациональное отношение предпочтения, которое могло бы породить такой спрос.

Во-вторых, этот результат завершает наше исследование взаимосвязи между теорией спроса, основанной на предпочтениях, и теорией спроса, основанной на наблюдаемом выборе потребителя (базирующейся на слабой аксиоме выявленных предпочтений). Как мы уже видели в разделе 2.F, хотя рациональное отношение предпочтения всегда порождает спрос, обладающий симметричной матрицей замещения, это может быть неверно для спроса, удовлетворяющего слабой аксиоме выявленных предпочтений. Другими словами, мы уже знаем, что, когда матрица $S(p, w)$ несимметрична, спрос, удовлетворяющий слабой аксиоме выявленных предпочтений, не может быть рационализирован предпочтениями. В этом разделе мы покажем, что спрос, удовлетворяющий слабой аксиоме выявленных предпочтений (вкупе с однородностью нулевой степени и законом Вальраса), может быть рационализован предпочтениями тогда и только тогда, когда он обладает симметричной матрицей замещения $S(p, w)$. Таким образом, гипотеза рациональных предпочтений по сравнению со слабой аксиомой выявленных предпочтений добавляет единственный дополнительный факт к свойствам спроса — симметричность матрицы замещения, а все остальное (однородность нулевой степени и закон Вальраса) также следует и из слабой аксиомы.

С практической точки зрения данный результат представляет интерес по крайней мере по двум причинам. Во-первых, как мы покажем в разделе 3.J, для того чтобы сделать вывод об эффекте богатства, нам необходимо знать предпочтения потребителя (или, по крайней мере, его функцию расходов). Данный результат говорит, каким образом и в каких случаях мы можем восстановить эту информацию, основываясь на наблюдаемом поведении потребителя.

Во-вторых, при проведении эмпирического анализа спроса нам зачастую хотелось бы иметь функции спроса относительно простого вида. Тогда, если мы ограничиваемся рассмотрением только тех функций, которые можно вывести из лежащих в их основе предпочтений, то у нас есть два пути. Первый — специфицировать различные функции полезности и выводить из них функции спроса до тех пор, пока не найдем такую, которая нам подходит. Однако результат, рассматриваемый в этом разделе, открывает перед нами более простой путь: он позволяет начать со спецификации функции спроса, а затем просто проверить, удовлетворяет ли она необходимым и достаточным условиям, которые мы сформулируем далее в этом разделе. Другими словами, в действительности нет необходимости перебирать различные функции полезности: данный результат позволяет проверить, возможно ли в принципе получить такую функцию.

Задачу восстановления предпочтений $\succsim$ из спроса $x(p, w)$ можно разделить на две части: (1) восстановление функции расходов $e(p, u)$ по спросу $x(p, w)$ и (2) восстановление предпочтений по функции расходов $e(p, u)$. Мы начнем с анализа наиболее простой из этих задач — пункта (2).

Восстановление предпочтений по функции расходов

Пусть $e(p, u)$ — функция расходов потребителя. Согласно утверждению 3.E.2 она является строго возрастающей по u и непрерывной, неубывающей, однородной первой степени и вогнутой по p. Кроме того, если спрос определяется однозначно, то, как мы знаем, функция $e(p, u)$ должна быть дифференцируемой (по утверждениям 3.F.1 и 3.G.1).

Если у нас есть функция расходов $e(p, u)$, то как восстановить отношение предпочтения, ее порождающее? Для этого требуется найти для каждого уровня полезности u множество наборов «по крайней мере не хуже чем» $V_u \subset \mathbb{R}^L$, такое что $e(p, u)$ дает минимальные расходы, необходимые для приобретения набора из V_u при ценах $p >> 0$. Другими словами, мы бы хотели определить множество V_u, такое что для всех $p >> 0$ выполнено

$$e(p,\ u) = \min_{x \geq 0} p \cdot x$$

$$\text{при } x \in V_u.$$

В терминах раздела 3.F V_u — это множество, опорной функцией которого является именно $e(p, u)$.

Утверждение 3.H.1 гласит, что на эту роль подходит множество

$$V_u = \left\{ x \in \mathbb{R}^L : p \cdot x \geq e(p,\ u) \text{ для всех } p >> 0 \right\}.$$

Утверждение 3.H.1. Пусть функция $e(p, u)$ строго возрастает по u и является непрерывной, возрастающей, однородной первой степени, вогнутой и дифференцируемой по p. Тогда для любого уровня полезности u и $e(p, u)$ является функцией расходов, соответствующей множеству наборов «по крайней мере не хуже чем»

$$V_u = \left\{x \in \mathbb{R}^L : p \cdot x \geq e(p,\ u) \text{ для всех } p >> 0\right\}.$$

То есть $e(p, u) = \min\{p \cdot x : x \in V_u\}$ для всех $p >> 0$.

Доказательство. Из свойств функции расходов $e(p, u)$ и определения V_u следует, что множество V_u непусто, замкнуто и ограничено снизу. При $p >> 0$ можно показать, что эти условия гарантируют, что $\min\{p \cdot x : x \in V_u\}$ существует. Из определения V_u немедленно следует, что $e(p, u) \leq \min\{p \cdot x : x \in V_u\}$. Для доказательства результата осталось показать, что последнее соотношение выполняется как равенство. Мы покажем это, доказав, что $e(p, u) \geq \min\{p \cdot x : x \in V_u\}$.

Для любых p и p' из вогнутости $e(p, u)$ по p следует, что (см. раздел M.C математического приложения)

$$e(p',\ u) \leq e(p,\ u) + \nabla_p e(p,\ u) \cdot (p' - p).$$

Поскольку $e(p, u)$ однородна первой степени по p, то согласно формуле Эйлера $e(p, u) = p \cdot \nabla_p e(p, u)$. Таким образом, $e(p', u) \leq p' \times \times \nabla_p e(p, u)$ для любого p'. Однако поскольку $\nabla_p e(p, u) \geq 0$, то это означает, что $\nabla_p e(p, u) \in V_u$. Отсюда следует, что $\min\{p \cdot x : x \in V_u\} \leq p \times \times \nabla_p e(p, u) = e(p, u)$, что и требовалось (последнее равенство получено с помощью формулы Эйлера). Таким образом, мы получили искомый результат. ■

Опираясь на утверждение 3.H.1, мы можем построить множество V_u для любого уровня полезности u. Поскольку функция $e(p, u)$ строго возрастает по u, то при $u' > u$ множество V_u полностью содержит в себе множество $V_{u'}$. Кроме того, как отмечено в доказательстве утверждения 3.H.1, каждое множество V_u является замкнутым, выпуклым и ограниченным снизу. Тогда эти различные множества «по крайней мере не хуже чем» определяют отношение предпочтения $\succsim$, функцией расходов которого является $e(p, u)$ (см. рис. 3.H.1).

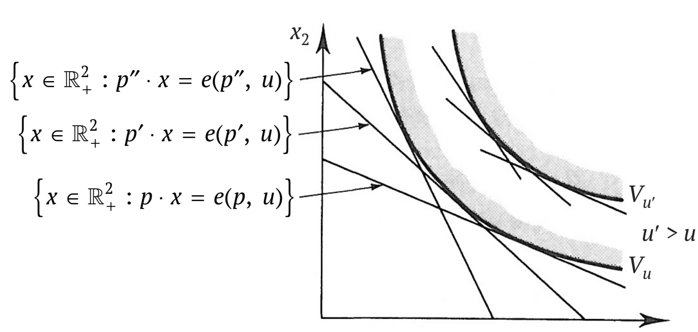


Рис. 3.H.1. Восстановление предпочтений по функции расходов

Утверждение 3.H.1 остается верным и доказывается аналогично, когда функция $e(p, u)$ недифференцируема по p. Тогда отношение предпочтения строится так же, как в доказательстве утверждения для выпуклого отношения предпочтения, порождающего $e(p, u)$. Однако может случиться так, что существуют невыпуклые предпочтения, которые также порождают $e(p, u)$. На рис. 3.H.2 проиллюстрирована ситуация, когда реальное множество «по крайней мере не хуже чем» невыпукло. Граница этого множества изображена на рисунке пунктирной линией. Сплошная линия показывает границу множества $V_u = \{x \in \mathbb{R}^L : p \cdot x \geq e(p, u)$ для всех $p >> 0\}$. Формально это множество является выпуклой оболочкой фактического множества «по крайней мере не хуже чем» и также порождает функцию расходов $e(p, u)$.

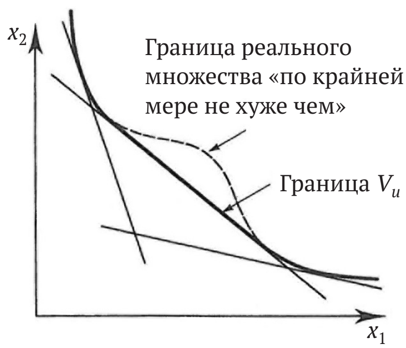


Рис. 3.H.2. Восстановление предпочтений по функции расходов, когда предпочтения потребителя невыпуклы

Если функция $e(p, u)$ дифференцируема, то любое отношение предпочтения, порождающее $e(p, u)$, должно быть выпукло. В противном случае будут существовать некоторые уровни полезности u и векторы цен $p >> 0$, такие что минимум расходов будет доставлять не один, а множество векторов (см. рис. 3.H.2). При такой паре цена — полезность функция расходов недифференцируема по p.

Восстановление функции расходов по спросу

Осталось восстановить $e(p, u)$ по наблюдаемому поведению потребителя, характеризуемому вальрасианской функцией спроса $x(p, w)$. Посмотрим, как решить эту задачу (которую можно назвать «задачей интегрируемости»), полагая, что спрос $x(p, w)$ удовлетворяет закону Вальраса, однороден нулевой степени и принимает единственное значение.

Сначала изучим случай двух товаров ($L = 2$) и введем нормировку $p_2 = 1$. Возьмем произвольную комбинацию цен и богатства $\left(p_1^0,\ 1,\ w^0\right)$ и припишем значение полезности u^0 набору $x\left(p_1^0,\ 1,\ w^0\right)$. Теперь попытаемся определить значение функции расходов $e\left(p_1,\ 1,\ u^0\right)$ для всех $p_1 > 0$. Поскольку компенсированный спрос является производной функции расходов по ценам (утверждение 3.G.1), то вопрос о восстановлении $e(\cdot)$ эквивалентен решению («интегрированию») дифференциального уравнения с независимой переменной p_1 и зависимой переменной e. Для простоты введем обозначения: $e(p_1) = \left(p_1,\ 1,\ u^0\right)$ и $x(p_1, w) = (p_1, 1, w)$. Таким образом, нам нужно решить следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{de(p_1)}{dp_1} = x_1\left(p_1,\ e(p_1)\right) \tag{3.Н.1}$$

при начальном условии[18] $e\left(p_1^0\right) = w^0$.

Если $e(p_1)$ — решение (3.Н.1) при $e\left(p_1^0\right) = w^0$, то $e(p_1)$ является функцией расходов, соответствующей уровню полезности u^0. Заметим, в частности, что если матрица замещения отрицательно полуопределена, то $e(p_1)$ будет обладать всеми свойствами функции расходов (при нормировке $p_2 = 1$). Во-первых, в силу того что $e(p_1)$ является решением дифференциального уравнения, по построению она непрерывна по p_1. Во-вторых, поскольку $x_1(p, w) \geq 0$, из (3.Н.1) следует, что $e(p_1)$ не убывает по p_1. В-третьих, дифференцируя уравнение (3.Н.1), получим

$$\frac{d^2e(p_1)}{dp_1^2} = \frac{\partial x_1\left(p_1,\ 1,\ e(p_1)\right)}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1\left(p_1,\ 1,\ e(p_1)\right)}{\partial w} x_1\left(p_1,\ 1,\ e(p_1)\right) =$$
$$= s_{11}\left(p_1, 1,\ e(p_1)\right) \leq 0,$$

т. е. $e(p_1)$ вогнута по p_1.

Решение уравнения (3.Н.1) — это стандартная задача поиска решения обыкновенного дифференциального уравнения, поэтому ее анализ мы опустим. Несколько простых условий регулярности гарантируют, что решение (3.Н.1) существует при любых начальных условиях $\left(p_1^0,\ w^0\right)$. На рис. 3.Н.3 проиллюстрирована суть решения: при каждом уровне цены p_1

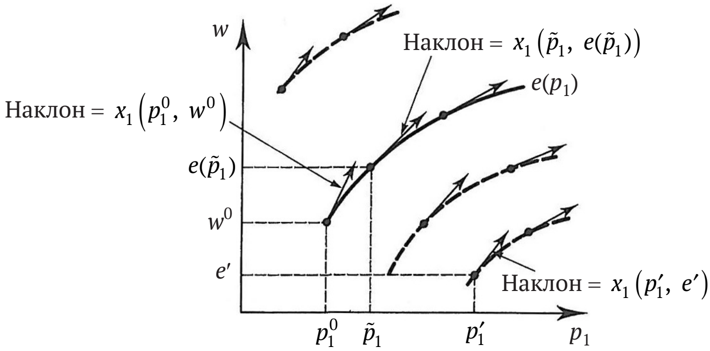


Рис. 3.Н.3. Восстановление функции расходов по функции спроса $x(p, w)$

[18] Формально (3.Н.1) представляет собой неавтономную систему в плоскости (p_1, e). Заметим, что p_1 здесь играет роль переменной t.

и уровне расходов e у нас есть направление изменения и наклон $x_1(p_1, e)$. Поэтому при начальном условии $\left(p_1^0,\ w^0\right)$ график функции $e(p_1)$ — это кривая, исходящая из точки $\left(p_1^0,\ w^0\right)$, изменяющаяся в заданном направлении.

В общем случае L товаров ситуация становится более сложной. Обыкновенное дифференциальное уравнение (3.H.1) должно быть заменено системой дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial e(p)}{\partial p_1} = x_1\left(p,\ e(p)\right); \\ &. \\ &. \\ &. \\ &\frac{\partial e(p)}{\partial p_L} = x_L\left(p,\ e(p)\right) \end{aligned} \qquad (3.\text{H}.2)$$

при начальных условиях p^0 и $e(p^0) = w^0$. При $L > 2$ существование решения системы (3.H.2) *нельзя* гарантировать автоматически. Действительно, если существует решение $e(p)$, то его матрица Гессе $D_p^2 e(p)$ должна быть симметричной, поскольку симметрична матрица Гессе любой дважды непрерывно дифференцируемой функции. Дифференцируя систему (3.H.2), которую можно записать в виде $\nabla_p e(p) = x\left(p,\ e(p)\right)$, получаем

$$D_p^2 e(p) = D_p x\left(p,\ e(p)\right) + D_w x\left(p,\ e(p)\right) x\left(p,\ e(p)\right)^T = S\left(p,\ e(p)\right).$$

Следовательно, необходимым условием существования решения является симметричность матрицы Слуцкого для $x(p, w)$. Это утешительный факт, поскольку, как нам известно из предыдущих разделов, если рыночный спрос порожден предпочтениями, то матрица Слуцкого действительно симметрична. Оказывается, симметричность матрицы $S(p, w)$ также является и достаточным условием для восстановления функции расходов потребителя. Основной результат теории уравнений в частных производных (называемый *теоремой Фробениуса*) гласит, что симметричность $L \times L$ матрицы производных системы (3.3.2) во всех точках ее области определения является необходимым и достаточным условием существования решения системы (3.H.2). Кроме того, если решение $e(p_1, u_0)$ действительно существует, то в случае отрицательной полуопределенности матрицы $S(p, w)$, оно обладает всеми свойствами функции расходов.

Таким образом, мы приходим к заключению, что необходимыми и достаточными условиями восстановления функции расходов являются симметричность и отрицательная полуопределенность матрицы Слуцкого[19]. Напомним, что в разделе 2.F мы показали, что дифференцируемая функция

[19] При минимальных требованиях технического характера.

спроса, удовлетворяющая слабой аксиоме выявленных предпочтений, условию однородности нулевой степени и закону Вальраса, с необходимостью имеет отрицательно полуопределенную матрицу Слуцкого. Более того, при $L = 2$ матрица Слуцкого обязательно симметрична (см. упражнение 2.F.12). Следовательно, в случае $L = 2$ мы всегда можем найти предпочтения, которые рационализируют любую дифференцируемую функцию спроса, удовлетворяющую этим свойствам. Однако при $L > 2$ матрица Слуцкого для спроса, удовлетворяющего слабой аксиоме выявленных предпочтений (наряду с однородностью нулевой степени и законом Вальраса), необязательно симметрична, а предпочтения, рационализирующие функцию спроса, удовлетворяющую слабой аксиоме выявленных предпочтений, существуют только тогда, когда это свойство выполнено.

Заметим, что если нам известно, что матрица $S(p, w)$ симметрична при всех (p, w), то мы в действительности можем использовать (3.H.1) для решения (3.H.2). Предположим, что при начальных условиях p^0 и $e(p^0) = w^0$ мы хотим восстановить $e(\bar{p})$. Меняя по одной цене в каждый момент времени, мы можем разделить задачу на L подзадач, в которых на каждом шаге меняется только одна цена, скажем цена блага l. Тогда при фиксированных p_k, при $k \neq l$, l-е уравнение системы (3.H.2) будет представлять собой уравнение вида (3.H.1), где индекс 1 заменен на l. Это уравнение может быть решено тем же способом, что и (3.H.1). Проведя итерации для всех благ, мы в конечном счете получим $e(\bar{p})$. Следует отметить, что этот метод механически также работает, даже если $S(p, w)$ несимметрична. Однако в случае когда $S(p, w)$ несимметрична (а следовательно, не может быть соотнесена с некоторым отношением предпочтения и функцией расходов), значение $e(\bar{p})$ *будет зависеть от спецификации пути изменения цен от* p^0 до $\bar{p}$ (т. е. от того, какая цена повышается первой). С экономической точки зрения этот результат абсурден, но с математикой не поспоришь!

3.I. Оценка изменения благосостояния

До сих пор мы изучали теорию потребительского спроса, основанную на предпочтениях, с позитивной (поведенческой) точки зрения. В этом разделе мы исследуем нормативную сторону теории потребителя, называемую *анализом благосостояния*. Анализ благосостояния заключается в оценке влияния изменения экономической среды на положение потребителя.

Как мы видели, целый ряд результатов теории потребителя может быть получен как с помощью подхода, основанного на слабой аксиоме выявленных предпочтений (см. раздел 2.F), так и исходя из предпочтений потребителя. Однако в анализе благосостояния ключевую роль играет именно подход, основанный на предпочтениях, поскольку вне его рамок у нас нет инструментария для оценки уровня благосостояния потребителя.

В этом разделе мы рассмотрим потребителя с рациональным, непрерывным и локально ненасыщаемым отношением предпочтения $\succsim$. Будем считать, когда это удобно, что функция расходов и косвенная функция полезности потребителя дифференцируемы.

Здесь мы сосредоточимся на влиянии изменения цен на благосостояние потребителя. Это только пример, хотя и важный с исторической точки зрения, широкого спектра возможных вопросов, касающихся влияния на благосостояние потребителя, которые могут возникнуть. Предположим, что потребитель имеет фиксированный уровень богатства $w > 0$ и первоначальный вектор цен равен p^0. Нам бы хотелось оценить влияние изменения цен с p^0 до p^1 на благосостояние потребителя. В качестве примера такого изменения цен можно привести налоговую политику государства, приводящую к подобным изменениям рыночных цен[20].

Для начала предположим, что нам известны предпочтения потребителя $\succsim$. Например, мы можем выявить отношение предпочтения $\succsim$ по информации о (наблюдаемой) вальрасианской функции спроса потребителя $x(p, w)$, как было показано в разделе 3.H. В этом случае имеет смысл сосредоточиться на том, стало ли потребителю хуже после изменения цен: если $v(p, w)$ — косвенная функция полезности, соответствующая предпочтениям $\succsim$, то положение потребителя ухудшается тогда и только тогда, когда $v(p^1, w) - v(p^0, w) < 0$.

Хотя любой косвенной функции полезности, выведенной из предпочтений $\succsim$, достаточно для проведения такого сравнения, один класс косвенных функций полезности заслуживает отдельного упоминания, поскольку позволяет получить оценку изменения благосостояния в денежных единицах. Такие функции называются *денежными* косвенными функциями полезности и строятся с помощью функции расходов. Итак, возьмем произвольную косвенную функцию полезности $v(\cdot, \cdot)$, выберем произвольный вектор цен $\bar{p} \gg 0$ и рассмотрим функцию $e\left(\bar{p}, v(p, w)\right)$. Эта функция показывает, какое богатство требуется потребителю, чтобы достичь уровня полезности $v(p, w)$ при ценах $\bar{p}$. Заметим, что расходы строго возрастают как функция от уровня $v(p, w)$ (см. рис. 3.I.1). Таким образом, будучи функцией от (p, w), $e\left(\bar{p}, v(p, w)\right)$ сама по себе является косвенной функцией полезности для предпочтений $\succsim$, причем разность

$$e\left(\bar{p}, v(p^1, w)\right) - e\left(\bar{p}, v(p^0, w)\right)$$

дает меру изменения благосостояния в денежных единицах[21].

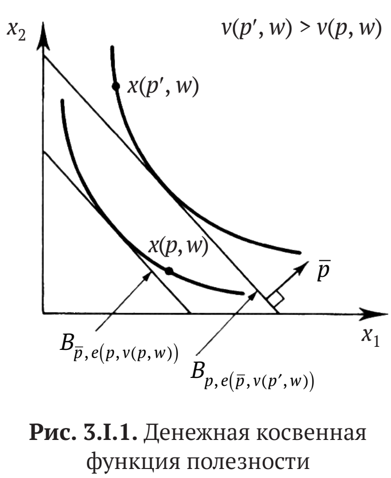


Рис. 3.I.1. Денежная косвенная функция полезности

Денежная косвенная функция полезности может быть построена подобным образом для любого вектора цен $\bar{p} \gg 0$.

[20] Для наглядности и простоты изложения здесь мы не будем рассматривать изменения, влияющие на богатство потребителя. Однако предлагаемый анализ легко распространяется и на этот случай (см. упражнение 3.I.12).

[21] Заметим, что эта мера не зависит от выбора начальной косвенной функции полезности $v(p, w)$, а только от предпочтений потребителя $\succsim$ (см. рис. 3.I.1).

В качестве вектора цен $\bar{p}$ логично выбрать либо начальный вектор цен p^0, либо вектор новых цен p^1. Такой выбор позволяет получить две хорошо известные меры изменения благосостояния, введенные Хиксом (Hicks, 1939), — *эквивалентную вариацию* (*EV* — от англ. *equivalent variation*) и *компенсирующую вариацию* (*CV* — от англ. *compensating variation*). Формально, положив $u^0 = v(p^0, w)$ и $u^1 = v(p^1, w)$ и учитывая, что $e(p^0, u^0) = e(p^1, u^1) = w$, введем следующие определения:

$$EV(p^0, p^1, w) = e(p^0, u^1) - e(p^0, u^0) = e(p^0, u^1) - w \tag{3.I.1}$$

и

$$CV\,(p^0, p^1, w) = e(p^1, u^1) - e(p^1, u^0) = w - e(p^1, u^0). \tag{3.I.2}$$

Эквивалентную вариацию можно трактовать как денежную сумму, такую что потребителю безразлично: получить эту сумму денег или столкнуться с изменением цен. Другими словами, это такое изменение богатства потребителя, которое *эквивалентно* изменению цен с точки зрения влияния на богатство (следовательно, эта величина отрицательна, если изменение цен ухудшает положение потребителя). Итак, заметим, что $e(p^0, u^1)$ — уровень богатства, при котором потребитель достигает в точности уровня полезности u^1, т. е. такого уровня, который порождается изменением цен при исходных ценах p^0. Следовательно, $e(p^0, u^1) - w$ — чистое изменение богатства, при котором потребитель достигает уровня полезности u^1 при ценах p^0. Мы также можем выразить эквивалентную вариацию через косвенную функцию полезности $v(\cdot, \cdot)$ следующим образом: $v(p^0, w + EV) = u^1$ [22].

С другой стороны, компенсирующая вариация измеряет чистый доход планера, который должен *компенсировать* потребителю изменение цен, после того как это произошло, позволяя потребителю вернуться на исходный уровень полезности u^0. (Следовательно, компенсирующая вариация отрицательна, если планер должен заплатить потребителю положительную компенсацию, поскольку изменение цен ухудшило его положение.) Ее можно трактовать как в точности ту сумму денег, которую потребитель готов принять от планера, чтобы позволить изменить цены (но с обратным знаком). Компенсирующую вариацию также можно записать следующим образом: $v(p^1, w - CV) = u^0$.

На рис. 3.I.2 изображены эквивалентная и компенсирующая вариации изменения благосостояния. Поскольку и *EV*, и *CV* характеризуют изменение денежной косвенной функции полезности, то обе эти меры дают корректное ранжирование благосостояния при альтернативах p^0 и p^1, т. е. положение потребителя при ценах p^1 лучше тогда и только тогда, когда эти меры положительны. Однако, вообще говоря, суммы денег, полученные при использовании *EV* и *CV*, будут различными, поскольку расчет этих мер изменения благосостояния опирается на разные векторы цен, при которых осуществляется компенсация.

[22] Заметим, что если $u^1 = v(p^0, w + EV)$, то $e(p^0, u^1) = e\left(p^0, v(p^0, w + EV)\right) = w + EV$, откуда получаем (3.I.1).

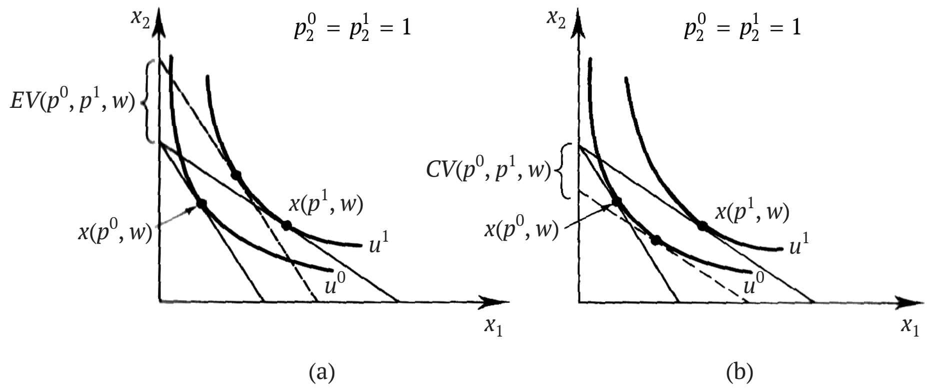


Рис. 3.I.2. Эквивалентная (a) и компенсирующая (b) вариации изменения благосостояния

Эквивалентную и компенсирующую вариации можно проиллюстрировать с помощью кривых хиксианского спроса. Для простоты предположим, что меняется только цена блага 1, т. е. $p_1^0 \neq p_1^1$ и $p_l^0 = p_l^1 = \bar{p}_l$ при $l \neq 1$. Поскольку $w = e(p^0, u^0) = e(p^1, u^1)$ и $h_1(p, u) = \partial e(p, u) / \partial p_1$, мы можем представить эквивалентную вариацию следующим образом:

$$EV(p^0, p^1, w) = e(p^0, u^1) - w = e(p^0, u^1) - e(p^1, u^1) =$$
$$= \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(p_1, \bar{p}_{-1}, u^1) dp_1,$$

где $\bar{p}_{-1} = (\bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_L)$. Таким образом, изменение благосостояния потребителя, измеренное с помощью эквивалентной вариации, может быть представлено площадью, ограниченной p_1^0 и p_1^1, слева от кривой хиксианского спроса на благо 1, соответствующей уровню полезности u^1 (она равна этой площади при $p_1^1 < p_1^0$ и этой величине с обратным знаком, если $p_1^1 > p_1^0$). На рис. 3.I.3(a) указанная площадь затемнена.

Аналогично компенсирующую вариацию можно записать как

$$CV(p^0, p^1, w) = \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(p_1, \bar{p}_{-1}, u^0) dp_1. \tag{3.I.4}$$

Обратите внимание, что теперь мы используем начальный уровень полезности u^0. Графическая иллюстрация компенсирующей вариации приведена на рис. 3.I.3(b).

На рис. 3.I.3 проиллюстрирован случай, когда благо 1 является нормальным. Как видно из рисунка, в этом случае мы имеем $EV(p^0, p^1, w) > > CV(p^0, p^1, w)$ (вы можете убедиться, что такой же результат будет иметь место при $p_1^1 > p_1^0$). Взаимосвязь EV и CV будет обратной, если благо 1

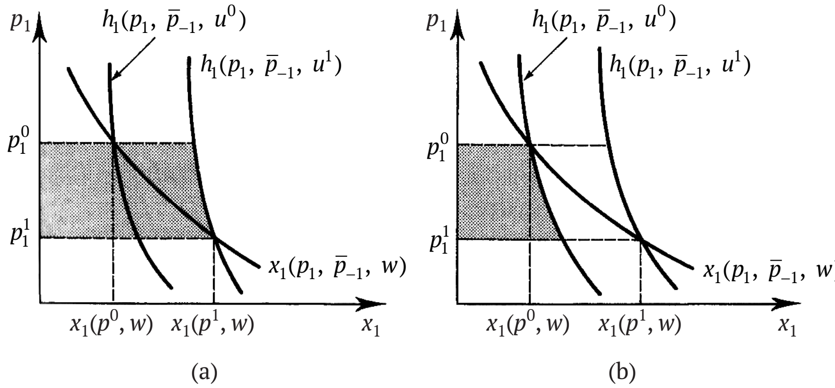


Рис. 3.I.3. (a) Эквивалентная вариация. (b) Компенсирующая вариация

является инфериорным (см. упражнение 3.I.3). Однако если для первого блага эффект богатства отсутствует (например, если предпочтения потребителя квазилинейны по некоторому благу $l \neq 1$), то CV и EV будут *одинаковыми*, поскольку в этом случае выполнено

$$h_1(p_1,\ \bar{p}_{-1},\ u^0) = x_1(p_1,\ \bar{p}_{-1},\ w) = h_1(p_1,\ \bar{p}_{-1},\ u^1).$$

В случае нулевого эффекта богатства мы называем общее значение CV и EV, равное также площади, слева от рыночной (т. е. вальрасианской) кривой спроса на благо 1, ограниченной p_1^0 и p_1^1, изменением *маршаллианского потребительского излишка*[23].

Упражнение 3.I.1. Предположим, изменение цен с p^0 до p^1 сопровождается изменением цен обоих благ: блага 1 — с p_1^0 до p_1^1, блага 2 — с p_2^0 до p_2^1. Запишите эквивалентную вариацию как сумму интегралов от соответствующих функций хиксианского спроса на блага 1 и 2. Представьте аналогичным образом компенсирующую вариацию. Покажите также, что если эффект богатства для обоих благ равен нулю, то компенсирующая и эквивалентная вариации равны.

Пример 3.I.1. *Чистые потери от налогообложения*. Рассмотрим ситуацию, когда новый вектор цен p^1 связан с введением налога на некоторое благо. Для определенности будем считать, что налогом облагается товар 1, т. е. за каждую приобретенную единицу первого блага потребитель должен заплатить налог t. Такой налог меняет эффективную цену блага 1 следующим образом: $p_1^1 = p_1^o + t$, тогда как цены всех остальных товаров $l \neq 1$ остаются неизменными, фиксированными на уровне p_l^0 (т. е. для всех $l \neq 1$ выполнено $p_l^1 = p_l^0$). Совокупный доход от такого налогообложения, таким образом, равен $T = tx_1(p^1, w)$.

[23] Этот термин был введен в работе (Marshall, 1920), где площадь слева от кривой рыночного спроса использовалась как мера благосостояния в специальном случае нулевого эффекта богатства.

Альтернативой такого потоварного налога, позволяющей правительству получить тот же уровень дохода без изменения цен, является введение «паушального» налога T, затрагивающего непосредственно богатство потребителя. Улучшится или ухудшится положение потребителя при таком паушальном налоге по сравнению с потоварным налогом? Положение потребителя будет хуже при потоварном налоге, если эквивалентная вариация при потоварном налоге $EV(p^0, p^1, w)$, которая отрицательна, меньше $-T$, величины богатства, которую потребитель потеряет при паушальном налоге. В терминах функции расходов это говорит о том, что положение потребителя хуже при потоварном налоге, если $w - T > e(p^0, u^1)$, т. е. когда богатство потребителя за вычетом паушального налога больше, чем богатство, необходимое при ценах p^0, чтобы достичь уровня полезности потребителя при потоварном налоге, u^1. Разность $(-T) - EV(p^0, p^1, w) = w - T - e(p^0, u^1)$ называется *чистыми потерями от потоварного налога* и представляет собой дополнительную сумму денег, снижающую благосостояние потребителя при потоварном налоге, сверх необходимой для получения того же дохода государства, что и посредством паушального налога.

Чистые потери можно описать и с помощью функции хиксианского спроса при уровне полезности u^1. Поскольку $T = tx_1(p^1, w) = th_1(p^1, u^1)$, то можем представить чистые потери следующим образом (как и ранее, положим $\bar{p}_{-1} = (\bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_L)$, где $p_l^0 = p_l^1 = \bar{p}_l$ для всех $l \neq 1$):

$$\begin{aligned}(-T) - EV(p^0, p^1, w) &= e(p^1, u^1) - e(p^0, u^1) - T = \\ &= \int_{p_1^0}^{p_1^0+t} h_1(p_1, \bar{p}_{-1}, u^1)dp_1 - th_1(p_1^0 + t, \bar{p}_{-1}, u^1) = \\ &= \int_{p_1^0}^{p_1^0+t} \left[h_1(p_1, \bar{p}_{-1}, u^1) - h_1(p_1^0 + t, \bar{p}_{-1}, u^1)\right]dp_1. \end{aligned} \tag{3.I.5}$$

Поскольку $h_1(p, u)$ не возрастает по p_1, то это выражение (а значит, и чистые потери от налогообложения) неотрицательно и строго положительно, если $h_1(p, u)$ строго убывает по p_1. На рис. 3.I.4(a) чистые потери представлены площадью заштрихованной треугольной области. Эта область иногда называется *треугольником чистых потерь*.

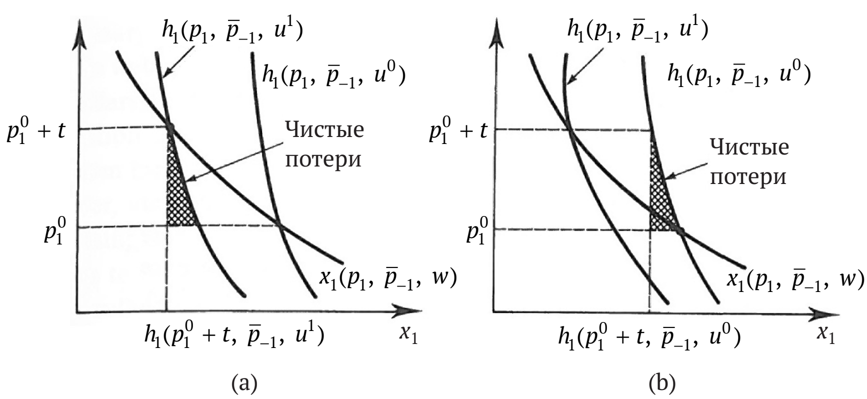


Рис. 3.I.4. Чистые потери от потоварного налога. (a) Мера, основанная на u^1. (b) Мера, основанная на u^0

Чистые потери также можно проиллюстрировать в пространстве товаров. Например, предположим, что $L = 2$, и введем нормировку $p_2^0 = 1$. Рассмотрим рис. 3.I.5. Поскольку $(p_1^0 + t)x_1(p^1, w) + p_2^0 x_2(p^1, w) = w$, то набор $x(p^1, w)$ лежит не только на бюджетной линии бюджетного множества $B_{p^1,w}$, но также и на бюджетной линии бюджетного множества $B_{p^0,w-T}$. И наоборот, бюджетное множество, при котором потребитель достигает уровня полезности u^1 при ценах p^0, — это бюджетное множество $B_{p^0,e(p^0,u^1)}$ (или, эквивалентно, $B_{p^0,w+EV}$). Тогда чистые потери представляют собой расстояние по вертикальной оси между бюджетными линиями, соответствующими бюджетным множествам $B_{p^0,w-T}$ и $B_{p^0,e(p^0,u^1)}$ (напомним, что $p_2^0 = 1$).

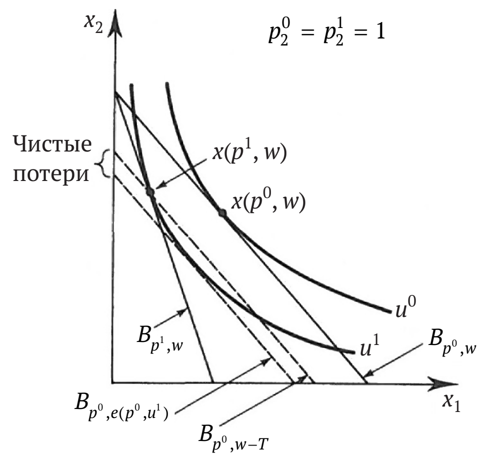


Рис. 3.I.5. Альтернативная иллюстрация чистых потерь от потоварного налога

Тот же треугольник чистых потерь может быть вычислен с помощью хиксианского спроса $h_1(p, u^0)$. Он также измеряет потери от потоварного налога, но другим способом. В частности, предположим, что мы исследуем излишек или дефицит, который может возникнуть, если правительство будет выплачивать компенсацию потребителю, чтобы после введения налога он получал исходный уровень полезности u^0. Правительство столкнется с дефицитом, если собранные налоги $th_1(p^1, u^0)$ меньше, чем $-CV(p^0, p^1, w)$, что эквивалентно $th_1(p^1, u^0) < e(p^1, u^0) - w$. Таким образом, дефицит можно записать как

$$-CV(p^0, p^1, w) - th_1(p^1, u^0) = e(p^1, u^0) - e(p^0, u^0) - th_1(p^1, u^0) =$$

$$= \int_{p_1^0}^{p_1^0+t} h_1(p_1, \bar{p}_{-1}, u^0)dp_1 - th_1(p_1^0 + t, \bar{p}_{-1}, u^0) =$$

$$= \int_{p_1^0}^{p_1^0+t} \left[h_1(p_1, \bar{p}_{-1}, u^0)dp_1 - h_1(p_1^0 + t, \bar{p}_{-1}, u^0) \right] dp_1. \quad (3.I.6)$$

Это выражение строго положительно, если $h_1(p, u)$ строго убывает по p_1. Чистые потери в данном случае равны площади заштрихованного треугольника на рис. 3.I.4(b). ■

Упражнение 3.I.2. Вычислите производные чистых потерь (3.I.5) и (3.I.6) по t и покажите, что эти производные, оцененные при $t = 0$, равны нулю, а если $h_1(p, u^0)$ строго убывает по p_1, то они строго положительны при всех $t > 0$. Проинтерпретируйте полученный результат.

До сих пор мы рассматривали только вопрос о том, улучшится ли положение потребителя при ценах p^1 по сравнению с исходной ситуацией при ценах p^0. Мы видели, что обе рассматриваемые меры, EV и CV, корректно характеризуют изменение благосостояния потребителя при переходе от p^0 к p^1. Предположим теперь, что вектор цен p^0 сравнивается с двумя возможными векторами цен, p^1 и p^2. В этом случае p^1 лучше для потребителя, чем p^2, тогда и только тогда, когда $EV(p^0, p^1, w) > EV(p^0, p^2, w)$, поскольку

$$EV(p^0, p^1, w) - EV(p^0, p^2, w) = e(p^0, u^1) - e(p^0, u^2).$$

Таким образом, $EV(p^0, p^1, w)$ и $EV(p^0, p^2, w)$ могут использоваться не только для сравнения двух данных векторов цен с p^0, но также и для ответа на вопрос, который из них лучше для потребителя. Однако сравнение компенсирующих вариаций $CV(p^0, p^1, w)$ и $CV(p^0, p^2, w)$ может некорректно отражать изменение цены с p^1 до p^2. Проблема в том, что при расчете CV за основу берутся новые цены в денежной косвенной функции полезности: p^1 для расчета $CV(p^0, p^1, w)$ и p^2 — для $CV(p^0, p^2, w)$. Поэтому

$$CV(p^0, p^1, w) - CV(p^0, p^2, w) = e(p^2, u^0) - e(p^1, u^0),$$

и эта разность может некорректно отражать изменение благосостояния при переходе от p^1 к p^2 (см. упражнение 3.I.4 и (Chipman, Moore, 1980)). Другими словами, при фиксированном p^0 мера $EV(p^0, \cdot, w)$ действительно является косвенной функцией полезности (на самом деле денежной), а $CV(p^0, \cdot, w)$ — нет[24].

Интересный пример сравнения нескольких возможных векторов цен возникает в том случае, когда правительство решает, какое из благ обложить налогом. Предположим, например, что рассматриваются две различные схемы формирования налогового дохода T: налог на благо 1 в размере t_1 (приводящий к новому вектору цен p^1) и налог на благо 2 в размере t_2 (приводящий к новому вектору цен p^2). Заметим, что поскольку они дают одни и те же налоговые поступления, то выполнено условие: $t_1 x_1(p^1, w) = t_2 x_2(p^2, w) = T$ (см. рис. 3.I.6). Налог t_1 лучше, чем налог t_2, тогда и только тогда, когда $EV(p^0, p^1, w) > EV(p^0, p^2, w)$, налог t_1 лучше, чем t_2, тогда и только тогда, когда $[(-T) - EV(p^0, p^1, w)] < [(-T) - EV(p^0, p^2, w)]$, т. е. тогда и только тогда, когда чистые потери от налога t_1 меньше чистых потерь от налога t_2. ■

Подводя итог, заметим, что если нам известна функция расходов потребителя, то мы можем в точности оценить влияние изменения цен на благосостояние потребителя и, более того, можем получить эту оценку в удобных (денежных) единицах. В принципе на этом можно было бы остановиться, поскольку, как было показано в разделе 3.H, мы можем восстановить предпочтения потребителя и функцию расходов по наблюдаемой вальрасианской функции спроса $x(p, w)$[25]. Однако прежде чем поста-

[24] Безусловно, мы можем корректно ранжировать p^1 и p^2 в зависимости от того, положительна или отрицательна $CV(p^1, p^2, w)$.

[25] На практике вы можете использовать любую современную технику для восстановления предпочтений.

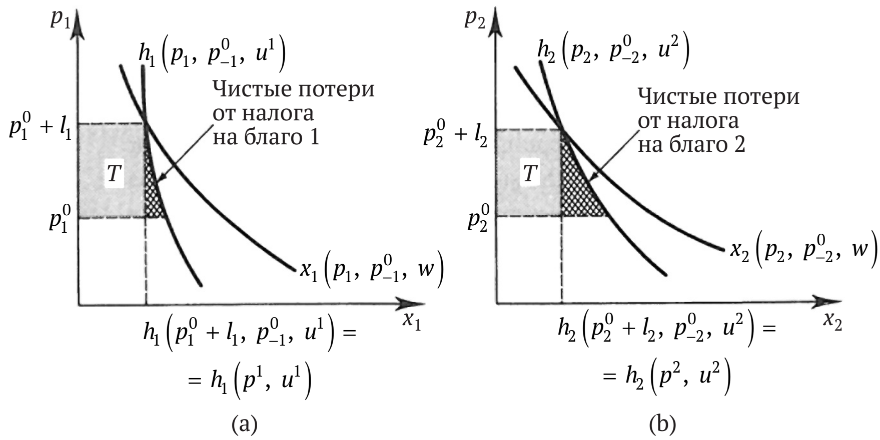


Рис. 3.I.6. Сравнение двух налогов, приносящих доход T.
(a) Налог на благо 1. (b) Налог на благо 2

вить точку, мы рассмотрим еще два момента. Сначала попробуем понять, можем ли мы что-либо еще сказать о влиянии изменения цен на благосостояние потребителя, когда у нас *недостаточно* информации для восстановления функции расходов. Мы опишем критерий, позволяющий получить достаточное условие того, что благосостояние потребителя возрастет в результате изменения цен, для применения которого требуется информация только о двух векторах цен, p^0 и p^1, и первоначальном потребительском наборе $x(p^0, w)$. А в заключение мы подробно обсудим вопрос о том, насколько правомерно оценивать изменения благосостояния с помощью площади слева от рыночной (вальрасианской) кривой спроса, — проблему, имеющую большое историческое значение.

Анализ благосостояния при частичной информации

В некоторых случаях может оказаться, что у нас нет возможности получить функцию расходов потребителя, поскольку мы имеем лишь ограниченную информацию о его вальрасианском спросе. Здесь мы рассмотрим вопрос о том, какие выводы можно сделать, если *единственная* доступная нам информация — это знание двух векторов цен p^0 и p^1 и начального потребительского набора $x^0 = x(p^0, w)$. Мы начнем с утверждения 3.I.1, в котором приводится простое достаточное условие того, что в результате изменения цен благосостояние потребителя возрастет.

Утверждение 3.I.1. Пусть потребитель имеет локальное ненасыщаемое рациональное отношение предпочтения $\succsim$. Если $(p^1 - p^0) \cdot x^0 < 0$, то потребителю строго лучше при ценах и богатстве (p^1, w), чем при (p^0, w).

Доказательство. Результат следует из теории выявленных предпочтений. Поскольку по закону Вальраса $p^0 \cdot x^0 = w$, если $(p^1 - p^0) \cdot x^0 < 0$, то $p^1 \cdot x^0 < w$. Но если это так, то набор x^0 по-прежнему доступен при ценах p^1 и, более того, он лежит внутри бюджетного множества $B_{p^1, w}$.

В силу локальной ненасыщаемости предпочтений в бюджетном множестве $B_{p^1,w}$ должен существовать потребительский набор, который потребитель строго предпочитает набору x^0. ■

Условие, приведенное в утверждении 3.I.1, можно рассматривать как аппроксимацию первого порядка фактического изменения благосостояния. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим разложение функции $e(p, u)$ в ряд Тейлора до первого члена в окрестности точки p^0:

$$e(p^1,\ u^0) = e(p^0,\ u^0) + (p^1 - p^0) \cdot \nabla_p e(p^0,\ u^0) + o\left(\left\|p^1 - p^0\right\|\right). \quad (3.I.7)$$

Если $(p^1 - p^0) \cdot \nabla_p e(p^0, u^0) < 0$ и остаточный член второго порядка можно отбросить, то имеем $e(p^1, u^0) < e(p^0, u^0) = w$, поэтому мы приходим к выводу, что благосостояние потребителя выше после изменения цен. Из вогнутости функции $e(\cdot, u^0)$ по p следует, что остаточный член неположителен. Следовательно, отбрасывание остаточного члена не приводит к ошибке: соотношение $e(p^1, u^0) < w$ действительно выполнено, если $(p^1 - p^0) \cdot \nabla_p e(p^0, u^0) < 0$. Тогда согласно утверждению 3.G.1 $(p^1 - p^0) \cdot \nabla_p e(p^0, u^0) = (p^1 - p^0) \cdot h_p(p^0, u^0) = (p^1 - p^0) \cdot x^0$, а значит, мы получаем в точности то условие, которое приведено в утверждении 3.I.1.

Что будет, если $(p^1 - p^0) \cdot x^0 > 0$? Можем ли мы что-нибудь сказать о том, как изменилось благосостояние потребителя в этом случае? Вообще говоря, нет. Однако внимательно посмотрев на первый член разложения в ряд Тейлора (3.I.7), можно заметить, что мы можем дать определенный ответ на этот вопрос, если изменение цен достаточно мало, так что остаточный член становится незначимым относительно члена первого порядка и им можно пренебречь. Таким образом, мы получаем результат, приведенный в утверждении 3.I.2.

Утверждение 3.I.2. Пусть потребитель имеет дифференцируемую функцию расходов. Тогда если $(p^1 - p^0) \cdot x^0 > 0$, то существует достаточно малое $\bar{\alpha} \in (0, 1)$, такое что для всех $\alpha < \bar{\alpha}$ выполнено: $e\left((1-\alpha)p^0 + \alpha p^1,\ u^0\right) > w$, и, следовательно, потребителю строго лучше при комбинации цен и дохода (p^0, w), чем при $\left((1-\alpha)p^0 + \alpha p^1,\ w\right)$.

На рис. 3.I.7 этот результат проиллюстрирован для случая, когда вектор p^1 таков, что $(p^1 - p^0) \cdot x^0 < 0$ (рис. 3.I.7(а)) и $(p^1 - p^0) \cdot x^0 > 0$ (рис. 3.I.7(б)). На этом рисунке в пространстве цен изображено множество цен $\left\{p \in \mathbb{R}^2_+ : e(p,\ u^0) \geq e(p^0,\ u^0)\right\}$. Вид изображенных кривых обусловлен вогнутостью функции $e(\cdot, u)$. Начальный вектор цен p^0 принадлежит этому множеству. По утверждению 3.G.1 градиент функции расходов в этой точке, $\nabla_p e(p^0, u^0)$, равен x^0, первоначальному потребительскому набору. Вектор $(p^1 - p^0)$ — это вектор, соединяющий точку p^0 с точкой новых цен p^1. На рис. 3.I.7(а) изображен случай, когда $(p^1 - p^0) \cdot x^0 < 0$. Как видно из этого рисунка, p^1 не принадлежит множеству $\left\{p \in \mathbb{R}^2_+ : e(p,\ u^0) \geq e(p^0,\ u^0)\right\}$,

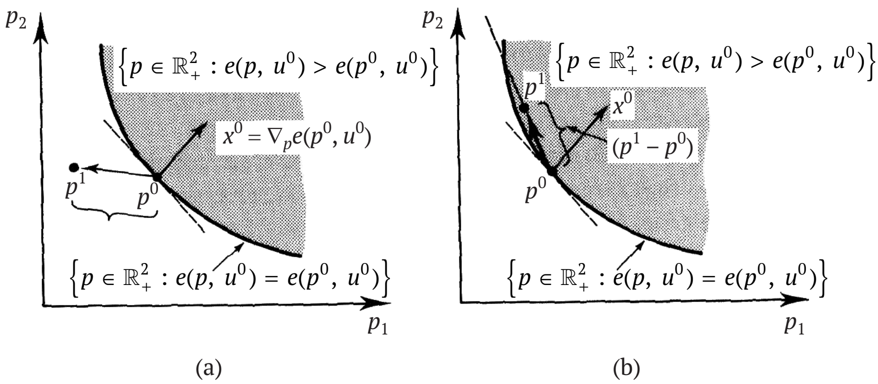


Рис. 3.I.7. Тесты на изменение благосостояния из утверждений 3.I.1 и 3.I.2.
(а) $(p^1 - p^0) \cdot x^0 < 0$. (б) $(p^1 - p^0) \cdot x^0 > 0$

и поэтому $e(p^0, u^0) < e(p^1, u^0)$. На рис. 3.I.7(b) показано, что поскольку $(p^1 - p^0) \cdot x^0 > 0$ и точка p^1 расположена достаточно близко к точке p^0 (на луче $p^1 - p^0$), то вектор цен p^1 принадлежит множеству $\{p \in \mathbb{R}^2_+ : e(p, u^0) > e(p^0, u^0)\}$.

Площадь слева от кривой вальрасианского (рыночного) спроса как мера изменения благосостояния

С помощью новых вычислительных возможностей восстановление предпочтений/ функции расходов потребителя по наблюдаемому потребительскому поведению в рамках подхода, изложенного в разделе 3.I, стало гораздо проще, чем это было ранее[26]. Традиционно, однако, в прикладном анализе применяется практика приблизительной оценки фактического изменения благосостояния.

Как мы уже видели в (3.I.3) и (3.I.4), изменение благосостояния, вызванное изменением цены блага 1, в точности равно площади слева от соответствующей кривой хиксианского спроса. Тем не менее использование такой меры может быть весьма проблематичным, ввиду того что хиксианский спрос ненаблюдаем. Более простая процедура, чаще всего используемая, основана на расчете с помощью кривой вальрасианского, а не хиксианского спроса. Мы назовем эту меру изменения благосостояния *вариацией площади* (*AV* – от англ. *area variation*):

$$AV(p^0, p^1, w) = \int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1(p_1, \bar{p}_{-1}, w)dp_1. \tag{3.I.8}$$

Если эффект дохода для блага 1 равен нулю, то, как мы уже показывали, $x_1(p, w) = h_1(p, u^0) = h_1(p, u^1)$ для всех p, и вариация площади в точности равна эквивалентной и компенсирующей вариациям. Это соответствует ситуации, рассмотренной в работе (Marshall, 1920), когда предельная полез-

[26] Также стало намного легче оценивать сложные системы спроса, получаемые из задач максимизации полезности, откуда напрямую можно получить параметры функции расходов.

ность блага-измерителя постоянна. В связи с этим в случае, когда AV дает точную меру изменения благосостояния, эту меру называют изменением *маршаллианского излишка потребителя*.

В общем случае, как видно из рис. 3.I.3(a) и 3.I.3(b), когда благо 1 является нормальным, вариация площади превышает величину компенсирующей вариации и меньше величины эквивалентной вариации (убедитесь в справедливости этого результата как в случае снижения p_1, так и в случае повышения p_1). Если благо 1 является инфериорным, то имеет место обратное соотношение. Таким образом, при оценивании изменения благосостояния в результате изменения цен разных благ или при сравнении двух разных возможных изменений цен с помощью вариации площади мы можем получить некорректную меру изменения благосостояния (например, см. упражнение 3.I.10).

Однако вполне естественно, что если эффект богатства для рассматриваемых благ невелик, то погрешности аппроксимации также незначительны, и поэтому мера вариации площади дает почти точный результат. Маршалл утверждал, что если некоторое благо — это всего лишь одно благо из многих, то тогда, поскольку дополнительная единица богатства распределяется на все эти блага, эффект богатства для данного блага невелик. Следовательно, будет незначительна и ошибка при оценивании изменения благосостояния в результате изменения цен на это благо с помощью меры вариации площади. Подробное обсуждение этой идеи можно найти в работе (Vives, 1987). Однако важно понимать, что если мы имеем дело с большим числом товаров, то, хотя погрешность аппроксимации может быть и мала для каждого отдельного индивида, на агрегированном уровне она может быть уже достаточно велика.

Если изменение цены $\left(p_1^1 - p_1^0\right)$ мало, то тогда ошибка оценивания при использовании меры вариации площади также невелика и представляет собой долю фактического изменения благосостояния. Рассмотрим, например, компенсирующую вариацию[27]. Как мы видим из рис. 3.I.8, площадь $B + D$, характеризующая разницу между вариацией площади и компенсирующей вариацией, как доля компенсирующей вариации становится меньше при малом $\left(p_1^1 - p_1^0\right)$. Отсюда, казалось бы, следует, что мера вариации площади — хорошая аппроксимация компенсирующей вариации при малом изменении цен. Однако следует заметить, что это свойство будет также выполнено, если вместо функции вальрасианского спроса мы возьмем

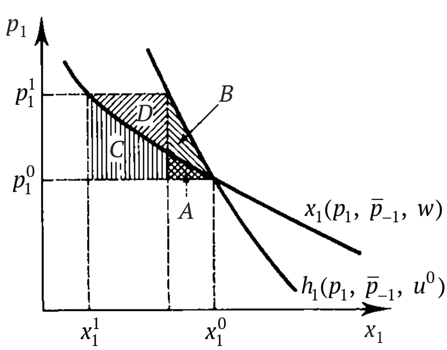


Рис. 3.I.8. Погрешность при использовании вариации площади как меры изменения благосостояния

[27] Аналогично можно рассмотреть и эквивалентную вариацию.

любую функцию, принимающую значение $x_1\left(p_1^0,\ p_{-1}^0,\ w\right)$ при p_1^0[28]. Действительно, погрешность приближения в терминах *доли чистых потерь* может быть довольно велика (этот факт был отмечен в работе (Haisman, 1981)). Например, на рис. 3.I.8 чистые потери, подсчитанные с помощью кривой вальрасианского спроса, представляют собой площадь $A + C$, тогда как в действительности они равны площади $A + B$. В процентном выражении различие между этими двумя площадями необязательно уменьшается при уменьшении разницы в ценах[29].

Если разница в ценах $\left(p_1^1 - p_1^0\right)$ мала, то можно использовать аппроксимации более высоких порядков. Итак, предположим, что мы взяли аппроксимацию $h(p,\ u^0)$ с помощью разложения в ряд Тейлора до членов первого порядка в точке p^0:

$$\tilde{h}(p,\ u^0) = h(p^0,\ u^0) + D_p h(p^0,\ u^0)(p - p^0)$$

и взяли в качестве оценки изменения благосостояния

$$\int_{p_1^1}^{p_1^0} \tilde{h}_1(p_1,\ \bar{p}_{-1},\ u^0)dp_1. \tag{3.I.9}$$

График функции $\tilde{h}_1(p_1,\ \bar{p}_{-1},\ u^0)$ изображен на рис. 3.I.9. Как видно из рисунка, поскольку график функции $\tilde{h}_1(p_1,\ \bar{p}_{-1},\ u^0)$ имеет в точке p^0 тот же наклон, что и реальная кривая хиксианского спроса $h_1(p,\ u^0)$, то при небольших изменениях цен эта аппроксимация ближе к фактическому изменению благосостояния, чем выражение (3.I.8) (и в отличие от меры вариации площади она дает адекватную аппроксимацию чистых потерь). Поскольку кривая хиксианского спроса может быть получена как первая производная функции расходов, то данное разложение функции хиксианского спроса до членов первого порядка в точке p^0, по сути, представляет собой раз-

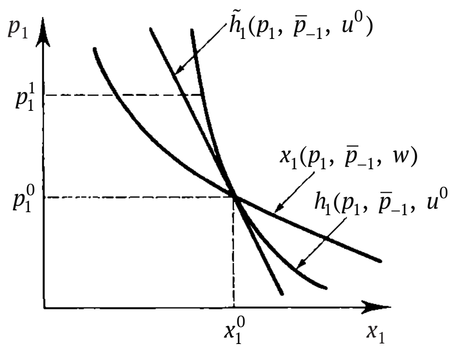


Рис. 3.I.9. Аппроксимация первого порядка $h(p, u^0)$ в точке p^0

[28] Указанное свойство означает, что функция вальрасианского спроса дает аппроксимацию первого порядка для компенсирующей вариации. Действительно, заметим, что производные $CV(p^1,\ p^0,\ w)$, $EV(p^1,\ p^0,\ w)$ и $AV(p^1,\ p^0,\ w)$ по p_1^1, вычисленные в точке p_1^0, в точности равны $x_1\left(p_1^0,\ p_{-1}^0,\ w\right)$.

[29] Таким образом, например, в рассмотренной выше задаче при сравнении чистых потерь, обусловленных введением на два разных товара налогов, позволяющих получить налоговый сбор T, мера вариации площади может давать некорректную оценку изменения благосостояния даже при небольших налогах.

ложение функции расходов до членов второго порядка в этой же точке. Таким образом, данную аппроксимацию можно рассматривать как естественное распространение теста первого порядка, рассмотренного выше (см. выражение (3.I.7)).

Аппроксимация (3.I.9) может быть получена на основе информации о наблюдаемой функции вальрасианского спроса $x_1(p, w)$. Чтобы убедиться в этом, заметим, что поскольку $h(p^0, u^0) = x(p^0, w)$ и $D_p h(p^0, u^0) = S(p^0, w)$, то $\tilde{h}(p,\ u^0)$ можно выразить только в терминах функции вальрасианского спроса и ее производных в точке (p^0, w):

$$\tilde{h}(p,\ u^0) = x(p^0,\ w) + S(p^0,\ w)(p - p^0).$$

В частности, если меняется только цена блага 1, то имеем

$$\tilde{h}_1(p_1,\ \bar{p}_{-1},\ u^0) = x_1(p_1^0,\ \bar{p}_{-1},\ w) + s_{11}(p_1^0,\ \bar{p}_{-1},\ w)(p_1 - p_1^0),$$

где

$$s_{11}(p_1^0,\ \bar{p}_{-1},\ w) = \frac{\partial x_1(p^0,\ w)}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1(p^0,\ w)}{\partial w}\, x_1(p^0,\ w).$$

Когда разность $(p^1 - p^0)$ мала, эта процедура дает лучшую аппроксимацию фактической компенсирующей вариации, чем мера вариации площади. Однако если величина $(p^1 - p^0)$ велика, мы не можем сказать, что дает лучшую аппроксимацию. Возможно, что доминировать будет и мера вариации площади: в конце концов ее использование гарантирует некую чувствительность аппроксимации спроса вне p^0, тогда как использование $\tilde{h}(p,\ u^0)$ не дает такой гарантии.

3.J. Сильная аксиома выявленных предпочтений

Мы видели, что в контексте теории спроса выбор потребителя может удовлетворять слабой аксиоме выявленных предпочтений, но при этом не быть порожденным некоторым рациональным отношением предпочтения (см. разделы 2.F и 3.G). Следовательно, возникает вопрос: можем ли мы получить необходимое и достаточное условие согласованности поведения потребителя, аналогичное слабой аксиоме выявленных предпочтений, из которого следовало бы, что выбор потребителя может быть рационализован предпочтениями? Утвердительный ответ на этот вопрос был получен в работе (Houthakker, 1950), в которой была сформулирована *сильная аксиома выявленных предпочтений* (SA — от англ. *strong axiom*), своего рода рекурсивное замыкание слабой аксиомы выявленных предпочтений[30].

Определение 3.J.1. Функция рыночного спроса $x(p, w)$ удовлетворяет *сильной аксиоме выявленных предпочтений*, если для любой комбинации цен и богатства

[30] См. изложение теории выявленных предпочтений в работе (Mas-Colell, 1982).

$$\left(p^1,\ w^1\right),\ \ldots,\ \left(p^N,\ w^N\right),$$

такой что $x(p^{n+1}, w^{n+1}) \neq x(p^n, w^n)$ для всех $n \leq N - 1$, имеем: $p^N \cdot x(p^1, w^1) >$ $> w^N$ при $p^n \cdot x(p^{n+1}, w^{n+1}) \leq w^n$ для всех $n \leq N - 1$.

Другими словами, если набор $x(p^1, w^1)$ *прямо или косвенно выявленно предпочитается* набору $x\left(p^N,\ w^N\right)$, то набор $x\left(p^N,\ w^N\right)$ не может (прямо) выявленно предпочитаться набору $x(p^1, w^1)$ (т. е. набор $x(p^1, w^1)$ не может быть доступен при ценах и богатстве $\left(p^N,\ w^N\right)$). В частности, в примере 2.F.1 сильная аксиома выявленных предпочтений не выполнена. Очевидно, что сильная аксиома выявленных предпочтений выполнена, если спрос порожден рациональными предпочтениями. Обратный результат гораздо менее очевиден. Он сформулирован в утверждении 3.J.1, доказательство которого довольно сложно (см. ниже).

Утверждение 3.J.1. Если функция вальрасианского спроса $x(p, w)$ удовлетворяет сильной аксиоме выявленных предпочтений, то существует рациональное отношение предпочтения $\succsim$, рационализирующее спрос $x(p, w)$, т. е. такое, что для всех (p, w) $x(p,\ w) \succ y$ для любого $y \neq x(p,\ w)$, где $y \in B_{p,w}$.

Доказательство. Мы следуем доказательству, приведенному в работе (Richter, 1966). Это доказательство базируется на теории множеств и существенно отличается от техники дифференциальных уравнений, использованной в оригинальной работе (Houthakker, 1950)[31].

Определим отношение $\succ^1$ на товарных векторах следующим образом: $x \succ^1 y$, если $x \neq y$, где $x = x(p, w)$ и $p \cdot y \leq w$ для некоторых (p, w). Отношение $\succ^1$ следует читать как «прямо выявленно предпочитается». На основе $\succ^1$ построим новое отношение $\succ^2$, «прямо или косвенно выявленно предпочитается»: $x \succ^2 y$, если существует такое упорядочение $x^1 \succ^1 x^2 \succ^1,\ \ldots,\ \succ^1 x^N$, где $x^1 = x$ и $x^N = y$. Заметим, что отношение $\succ^2$ транзитивно по построению. В соответствии с сильной аксиомой выявленных предпочтений отношение $\succ^2$ также иррефлексивно (т. е. не выполнено $x \succ^2 x$). Согласно аксиоме теории множеств (известной как лемма Цорна) справедливо следующее утверждение: *каждое транзитивное и иррефлексивное отношение* $\succ^2$ (называемое также *частичным порядком*), *имеет продолжение* $\succ^3$, являющееся иррефлексивным и транзитивным отношением, такое что, во-первых, из $x \succ^2 y$ следует, что $x \succ^3 y$, а во-вторых, для любых $x \neq y$ либо $x \succ^3 y$, либо $y \succ^3 x$. Наконец, мы можем следующим

[31] Существует и третий подход, основанный на методах линейного программирования, предложенный в работе (Afriat, 1967).

образом определить $\succsim$: $x \succsim y$, если $x = y$ или $x \succ^3 y$. Нетрудно убедиться, что отношение $\succsim$ является полным и транзитивным, причем $x(p, w) \succ y$ при $p \cdot y \leq w$ и $y \neq x(p, w)$. ■

В доказательстве утверждения 3.J.1 используется только однозначность $x(p, w)$. При условии что выбор определен однозначно, этот же результат можно применить к абстрактной теории выбора, изложенной в главе 1. И тот факт, что бюджеты конкурентны, несуществен.

В упражнении 3.J.1 вас просят показать, что при $L = 2$ слабая аксиома выявленных предпочтений эквивалентна сильной. Таким образом, согласно утверждению 3.J.1, если $L = 2$ и спрос удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений, то мы всегда можем найти рационализирующее отношение предпочтения (с этим результатом мы уже сталкивались в разделе 3.H). Однако при $L > 2$ сильная аксиома оказывается действительно сильнее слабой. Фактически утверждение 3.J.1 говорит нам о том, что основанная на выборе потребителя теория спроса, базирующаяся на сильной аксиоме выявленных предпочтений, по сути эквивалентна теории спроса, построенной на предпочтениях, изложенной в этой главе.

Таким образом, сильная аксиома выявленных предпочтений по существу эквивалентна как гипотезе рациональности предпочтений, так и симметричности и отрицательной полуопределенности матрицы Слуцкого. А слабая аксиома выявленных предпочтений, как мы видели, по сути эквивалентна отрицательной полуопределенности матрицы Слуцкого. В связи с этим естественно возникает вопрос: существует ли такое предположение относительно предпочтений, более слабое, чем рациональность, которое приводит к теории потребительского спроса, эквивалентной той, которая базируется на слабой аксиоме выявленных предпочтений? Невыполнение сильной аксиомы выявленных предпочтений означает наличие циклов в потребительском выборе, а нарушение условия симметричности матрицы Слуцкого порождает зависимость от пути изменения цен при попытке «вернуться назад» к предпочтениям. А это, в свою очередь, означает, что предпочтения могут не удовлетворять аксиоме транзитивности. Дальнейшее обсуждение этой проблемы можно найти в приложении (совместном с У. Шафером (W. Shafer)) к работе (Khilstrom, Mas-Collel, Sonnenschein, 1976). ■

Приложение А. Непрерывность и дифференцируемость вальрасианского спроса

В этом приложении мы исследуем свойства непрерывности и дифференцируемости отображения вальрасианского спроса $x(p, w)$. Будем считать, что $x \gg 0$ при всех $(p, w) \gg 0$ и $x \in x(p, w)$.

Непрерывность

Поскольку спрос $x(p, w)$, вообще говоря, является отображением, то мы начнем не с широко известного свойства непрерывности функций, а с более общего понятия *полунепрерывности сверху*.

Определение 3.AA.1. Отображение вальрасианского спроса $x(p, w)$ полунепрерывно сверху в точке $(\bar{p}, \bar{w})$, если при $(p^n, w^n) \to (\bar{p}, \bar{w})$, $x^n \in x(p^n, w^n)$ для всех n и $x = \lim\limits_{n\to\infty} x^n$ имеем $x \in x(p, w)$[32].

Другими словами, отображение спроса полунепрерывно сверху в точке $(\bar{p}, \bar{w})$, если для любой последовательности пар цена — богатство предел любой последовательности оптимальных потребительских наборов оптимален (хотя и необязательно единствен) при предельной комбинации цен и богатства. Если спрос $x(p, w)$ принимает единственное значение при всех $(p, w) >> 0$, то это определение эквивалентно обычному определению непрерывности функции.

На рис. 3.AA.1 изображено полунепрерывное сверху отображение спроса. При $p^n \to p$, $x(\cdot, w)$ демонстрирует скачкообразное изменение спроса при векторе цен p: спрос равен x^n для всех p^n, но вдруг превращается в отрезок потребительских наборов $[\bar{x}, \bar{\bar{x}}]$ при p. Спрос полунепрерывен сверху, поскольку $\bar{x}$ (предельный оптимальный набор последовательности x^n) принадлежит отрезку $[\bar{x}, \bar{\bar{x}}]$ (множеству оптимальных наборов при векторе цен p). Дальнейшее обсуждение полунепрерывности сверху можно найти в разделе M.H математического приложения.

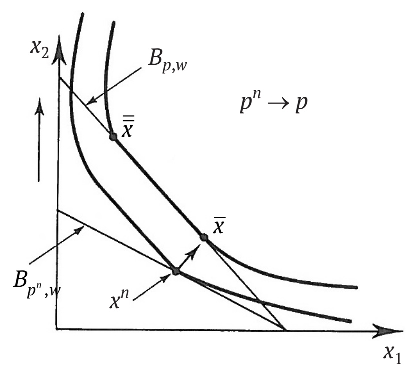


Рис. 3.AA.1. Полунепрерывное сверху отображение вальрасианского спроса

Утверждение 3.AA.1. Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция полезности, представляющая собой локально ненасыщаемое отношение предпочтения $\succsim$, определенное на потребительском множестве $X = \mathbb{R}^L_+$. Тогда соответствующее отображение спроса $x(p, w)$ полунепрерывно сверху при всех $(p, w) >> 0$. Более того, если спрос $x(p, w)$ является функцией (т. е. если $x(p, w)$ содержит единственный элемент при всех (p, w)), то он непрерывен при всех $(p, w) >> 0$.

Доказательство. Для проверки полунепрерывности сверху рассмотрим последовательности $\left\{ (p^n, w^n) \right\}_{n=1}^{\infty} \to (\bar{p}, \bar{w}) >> 0$ и $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$, где $x^n \in x(p^n, w^n)$ для всех n, причем $x^n \to \tilde{x}$ и $\tilde{x} \notin x(\bar{p}, \bar{w})$. Поскольку $p^n \cdot x^n \le w^n$ для всех n, то, взяв предел при $n \to \infty$, получим $\bar{p} \cdot \tilde{x} \le \bar{w}$. Таким образом, $\tilde{x}$ — допустимый потребительский набор при бюджетном множестве $B_{\bar{p},\bar{w}}$. Однако поскольку он не является оптималь-

[32] Мы используем запись $z^n \to z$ как аналог записи $z = \lim_{n\to\infty} z^n$. Это определение полунепрерывности сверху применимо только к отображениям, которые «локально ограничены» (см. раздел M.H математического приложения). При сделанных предположениях отображение вальрасианского спроса удовлетворяет этому требованию при всех $(p, w) >> 0$.

ным в этом бюджетном множестве, должно быть выполнено $u(\bar{x}) > u(\tilde{x})$ для некоторого $\bar{x} \in B_{\bar{p},\bar{w}}$.

В силу непрерывности $u(\cdot)$ существует набор y, расположенный произвольно близко к набору $\bar{x}$, такой что $p \cdot y < w$ и $u(y) > u(\tilde{x})$. Этот набор y отмечен на рис. 3.AA.2.

Заметим, что если n достаточно велико, то имеем $p^n \cdot y < w^n$ (поскольку $(p^n, w^n) \to (\bar{p}, \bar{w})$). Следовательно, набор y принадлежит бюджетному множеству B_{p^n,w^n} и должно быть выполнено $u(x^n) \geq u(y)$, поскольку $x^n \in x(p^n, w^n)$. Тогда в пределе при $n \to \infty$ из непрерывности $u(\cdot)$ следует, что $u(\tilde{x}) \geq u(y)$, т. е. мы пришли к противоречию. Таким образом, должно быть выполнено $\tilde{x} \in x(p, w)$, что означает полунепрерывность сверху спроса $x(p, w)$.

Аналогично можно установить непрерывность в случае, если $x(p, w)$ является функцией. ■

Предположим, что потребительское множество — произвольное замкнутое множество $X \subset \mathbb{R}^L_+$. Тогда свойство непрерывности (или полунепрерывности сверху) по-прежнему выполнено при любых $(\bar{p}, \bar{w})$, удовлетворяющих следующему критерию (*условию существования локально более дешевого потребительского набора*): «Пусть набор $x \in X$ доступен потребителю (т. е. $\bar{p} \cdot x \leq \bar{w}$). Тогда сколь угодно близко к набору x существует набор $y \in X$, который стоит меньше, чем $\bar{w}$ (т. е. $\bar{p} \cdot y < \bar{w}$)». Например, на рисунке 3.AA.3 товар 2 доступен только в неделимых количествах. Тогда условие существования локально более дешевого потребительского набора не выполнено при ценах и богатстве $(\bar{p}, \bar{w}) = (1, \bar{w}, \bar{w})$, когда становится в точности доступна единица блага 2. С помощью рисунка (на котором пунктирной линией отмечена эквивалентность точек (0, 1) и z) нетрудно убедиться, что спрос не удовлетворяет свойству полунепрерывности сверху при $p_2 = \bar{w}$. В частности, при ценах и богатстве $(p^n, \bar{w})$, таких что $p_1^n = 1$ и $p_2^n > \bar{w}$, $x(p^n, \bar{w})$ характеризуется потреблением только блага 1, тогда как при $(\bar{p}, \bar{w}) = (1, \bar{w}, \bar{w})$ имеем $x(\bar{p}, \bar{w}) = (0, 1)$. Заметим, что доказательство утверждения 3.AA.1 перестает быть верным, когда усло-

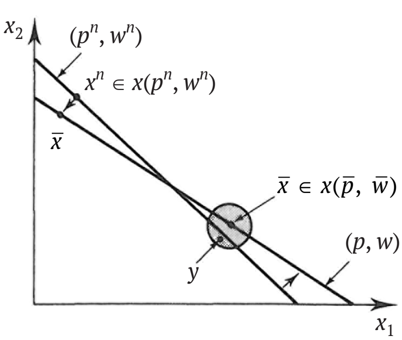


Рис. 3.AA.2. Поиск набора y, такого что $p \cdot y < w$ и $u(y) > u(\tilde{x})$

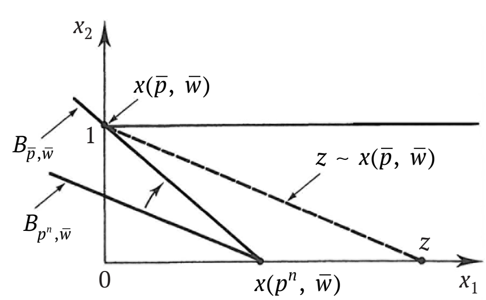


Рис. 3.AA.3. Условие существования локально более дешевого потребительского набора не выполнено при комбинации цена — богатство $(\bar{p}, \bar{w}) = (1, \bar{w}, \bar{w})$

вие существования локально более дешевого потребительского набора не выполнено, поскольку в этом случае мы не можем найти потребительский набор y с описанными выше свойствами. ■

Дифференцируемость

Согласно утверждению 3.AA.1, если $x(p, w)$ является функцией, то эта функция непрерывна, но зачастую удобно, чтобы эта функция была также и дифференцируема. Поэтому теперь мы рассмотрим вопрос о том, в каких случаях функция спроса будет удовлетворять этому свойству. Всюду в этом разделе будем считать, что $u(\cdot)$ — строго квазивогнутая и дважды непрерывно дифференцируемая функция, причем $\nabla u(x) \neq 0$ для всех x.

Как мы показали в разделе 3.D, из условий первого порядка задачи максимизации полезности (UMP) следует, что $x(p, w) \gg 0$ при некотором $\lambda > 0$ является единственным решением системы из $L + 1$ уравнений с $L + 1$ неизвестными:

$$\begin{aligned} \nabla u(x) - \lambda p &= 0; \\ p \cdot x - w &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, по *теореме о неявной функции* (см. раздел M.E математического приложения) дифференцируемость решения $x(p, w)$ как функции от параметров системы (p, w) зависит от того, имеет ли матрица Якоби данной системы ненулевой определитель. Матрица Якоби (т. е. матрица производных $L + 1$ компонент функций по $L + 1$ переменным (x, λ)) имеет вид

$$\begin{bmatrix} D^2u(x) & -p \\ p^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Поскольку $\nabla u(x) = \lambda p$ и $\lambda > 0$, то определитель этой матрицы не равен нулю тогда и только тогда, когда определитель окаймленной матрицы Гессе функции $u(x)$ в точке x не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} D^2u(x) & \nabla u(x) \\ [\nabla u(x)]^T & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Это условие имеет наглядную геометрическую интерпретацию. Оно означает, что множество безразличия, содержащее точку x, имеет ненулевую кривизну в точке x. Другими словами, оно не является (даже инфинитезимально) плоским. Это условие можно также рассматривать как некоторое «усиление» строгой квазивогнутости (как строго вогнутая функция $f(x) = -(x^4)$ имеет $f''(0) = 0$, так и строго квазивогнутая функция может иметь окаймленный Гессиан, равный нулю в некоторой точке).

Таким образом, мы приходим к заключению, что $x(p, w)$ дифференцируема *тогда и только тогда*, когда окаймленный Гессиан функции $u(\cdot)$ не равен нулю в точке $x(p, w)$. Следует также отметить один интересный факт (который мы не будем здесь доказывать): если функция $x(p, w)$ дифференцируема в точке (p, w), то матрица Слуцкого $S(p, w)$ имеет максимальный возможный ранг, т. е. ранг $S(p, w)$ равен $L - 1$[33].

Литература

Afriat S. (1967). The construction of utility functions from expenditure data // *International Economic Review* **8**: 67–77.

Antonelli G.B. (1886). *Sulla Toria Matematica della Economia Politica.* Pisa: Nella tipografia del Folchetto. (English translation: On the mathematical theory of political economy. In *Preferences, Utility and Demand*, edited by J. Chipman, L. Hurwicz, H. Sonnenschein. N.Y.: Harcourt Brace Jovanovich, 1971.)

Chipman J., Moore J. (1980). Compensating variation, consumer's surplus, and welfare // *American Economic Review* **70**: 933–948.

Deaton A., Muellbauer J. (1980). *Economics and Consumer Behavior*. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.

Debreu G. (1960). Topological methods in cardinal utility. In *Mathematical Methods in the Social Studies, 1959*, edited by K. Arrow, S. Karlin, P. Suppes. Stanford, Calif.: Stanford University Press.

Diewert W.F. (1982). Duality approaches to microeconomic theory. Chap. 12 in *Handbook of Mathematical Economics*. Vol. 2, edited by K. Arrow, M. Intriligator. Amsterdam: North-Holland.

Green J.R., Heller W. (1981). Mathematical analysis and convexity with applications to economics. Chap. 1 in *Handbook of Mathematical Economics*. Vol. 1, edited by K. Arrow, M. Intriligator. Amsterdam: North-Holland.

Hausman J. (1981). Exact consumer surplus and deadweight loss // *American Economic Review* **71**: 662–676.

Hicks J. (1939). *Value and Capital*. Oxford: Clarendon Press.

Houthakker H.S. (1950). Revealed preference and the utility function. *Economica* **17**: 159–174.

Hurwicz L., Uzawa H. (1971). On the integrability of demand functions. Chap. 6 in *Preferences, Utility and Demand*, edited by J. Chipman, L. Hurwicz, H. Sonnenschein. N.Y.: Harcourt Brace Jovanovich.

Kihlstrom R., Mas-Colell A., Sonnenschein H. (1976). The demand theory of the weak axiom of revealed preference. *Econometrica* **44**: 971–978.

McKenzie L. (1956–1957). Demand theory without a utility index // *Review of Economic Studies* **24**: 185–189.

Marshall A. (1920). *Principles of Economics*. L.: Macmillan.

Mas-Colell A. (1982). Revealed preference after Samuelson, in *Samuelson and Neoclassical Economics*, edited by G. Feiwel. Boston: Kluwer-Nijhoff.

Richter M. (1966). Revealed preference theory. *Econometrica* **34**: 635–645.

[33] Это утверждение применимо только к спросу, порожденному дважды непрерывно дифференцируемой функцией полезности, и может быть неверно, когда это условие не выполнено. Например, функция спроса $x(p, w) = \left(w / (p_1 + p_2), w / (p_1 + p_2)\right)$ дифференцируема и порождена функцией полезности $u(x) = \min\{x_1, x_2\}$, которая не является дважды непрерывно дифференцируемой при всех x. Матрица замещения для данной функции спроса состоит только из нулевых элементов, а следовательно, ее ранг равен нулю.

Samuelson, P. (1947). *Foundations of Economics Analysis.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Slutsky E. (1915). Sulla teoria del bilancio del consumatore. *Giornali degli Economisti* **51**: 1–26. (English translation: On the theory of the budget of the consumer, in *Readings in Price Theory*, edited by G. Stigler, K. Boulding. Chicago: Richard Irwin, 1952.)

Stone J.E. (1954). Linear expenditure systems and demand analysis: An application to the pattern of British demand // *Economic Journal* **64**: 511–527.

Vivex X. (1987). Small income effects: A Marshallian theory of consumer surplus and downward sloping demand // *Review of Economic Studies* **54**: 87–103.

Упражнения

3.B.1[A]. В тексте.

3.B.2[B]. Отношение предпочтения $\succsim$, определенное на потребительском множестве $X = \mathbb{R}^L_+$, *слабо монотонно* тогда и только тогда, когда из $x \geq y$ следует $x \succsim y$. Покажите, что если отношение предпочтения $\succsim$ транзитивно, локально ненасыщаемо и слабо монотонно, то оно монотонно.

3.B.3[A]. Изобразите кривые безразличия для отношения предпочтения, которое локально ненасыщаемо, но не монотонно.

3.C.1[B]. Убедитесь, что лексикографическое отношение предпочтения является полным, транзитивным, строго монотонным и строго выпуклым.

3.C.2[B]. Покажите, что если $u(\cdot)$ — непрерывная функция полезности, представляющая отношение предпочтения $\succsim$, то отношение предпочтения $\succsim$ непрерывно.

3.C.3[C]. Покажите, что если для любого x верхнее и нижнее лебеговские множества $\left\{y \in \mathbb{R}^L_+ : y \succsim x\right\}$ и $\left\{y \in \mathbb{R}^L_+ : x \succsim y\right\}$ замкнуты, то отношение предпочтения $\succsim$ непрерывно в соответствии с определением 3.C.1.

3.C.4[B]. Приведите пример отношения предпочтения, которое не является непрерывным, но может быть представлено функцией полезности.

3.C.5[C]. Докажите следующие утверждения:

a) непрерывное отношение предпочтения $\succsim$ гомотетично тогда и только тогда, когда его можно представить однородной первой степени функцией полезности $u(x)$, т. е. $u(\alpha x) = \alpha u(x)$ для любого $\alpha > 0$;

b) непрерывное отношение предпочтения $\succsim$ на множестве $(-\infty, \infty) \times \mathbb{R}^{L-1}_+$ является квазилинейным по первому товару тогда и только тогда, когда его можно представить функцией полезности $u(x)$, имеющей вид: $u(x) = x_1 + \varphi(x_2, \ldots, x_L)$. (*Подсказка*: существование некоторой непрерывной функции полезности, описывающей данные предпочтения, гарантируется утверждением 3.G.1.)

Ответив на вопросы (a) и (b), сделайте вывод о том, будут ли данные свойства функции $u(\cdot)$ кардиналистскими.

3.C.6[B]. Предположим, в двухтоварной экономике функция полезности потребителя имеет вид $u(x) = \left[\alpha_1 x_1^{\rho} + \alpha_2 x_2^{\rho}\right]^{1/\rho}$. Эта функция полезности называется *функцией полезности с постоянной эластичностью замещения* (*CES* – от англ. *constant elasticity of substitution*).

a) Покажите, что при $\rho = 1$ кривые безразличия линейны.

b) Покажите, что при $\rho \to 0$ данная функция полезности представляет те же предпочтения, что и (обобщенная) функция полезности Кобба — Дугласа $u(x) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$.

c) Покажите, что при $\rho \to -\infty$ кривые безразличия превращаются в «прямые углы», т. е. данная функция полезности в пределе имеет ту же карту безразличия, что и леонтьевская функция полезности $u(x) = \min\{x_1, x_2\}$.

3.D.1[A]. В тексте.

3.D.2[A]. В тексте.

3.D.3[B]. Пусть $u(x)$ — дифференцируемая и строго квазивогнутая функция полезности, и пусть функция вальрасианского спроса $x(p, w)$ дифференцируема. Докажите следующие утверждения:

a) Если $u(x)$ однородна первой степени, то функция спроса $x(p, w)$ и косвенная функция полезности $v(p, w)$ однородны первой степени (и, следовательно, могут быть представлены в виде $x(p, w) = w\tilde{x}(p)$ и $v(p, w) = w\tilde{v}(p)$, а кривая богатство – потребление (см. раздел 2.E) представляет собой луч, выходящий из начала координат. Что можно сказать в этом случае об эластичности спроса по богатству?

b) Если $u(x)$ строго квазивогнута и $v(p, w)$ однородна первой степени по w, то $u(x)$ должна быть однородной первой степени.

3.D.4[B]. Пусть потребительское множество имеет вид $(-\infty, \infty) \times \mathbb{R}_+^{L-1}$. Предположим, что предпочтения строго выпуклы и квазилинейны. Введем нормировку $p_1 = 1$.

a) Покажите, что функции вальрасианского спроса на блага $2, \ldots, L$ не зависят от богатства. Какой вывод из этого следует относительно эффекта богатства (см. раздел 2.E) для спроса на благо 1?

b) Покажите, что косвенная функция полезности может быть представлена в виде $v(p, w) = w + \varphi(p)$ при некоторой функции $\varphi(\cdot)$.

c) Предположим для простоты, что $L = 2$, и запишем функцию полезности потребителя как $u(x_1, x_2) = x_1 + \eta(x_2)$. Будем считать, что потребительское множество имеет вид $\mathbb{R}_+^2$, т. е. имеет место ограничение на неотрицательность потребления блага-измерителя x_1. Зафиксируем цены p и проанализируем изменение вальрасианского спроса потребителя при изменении богатства w. В каком случае ограничение на неотрицательность потребления блага-измерителя несущественно?

3.D.5[B]. Вновь рассмотрим CES-функцию полезности из упражнения 3.C.6 и предположим, что $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

a) Найдите функцию вальрасианского спроса и косвенную функцию полезности для данной функции полезности.

b) Убедитесь, что полученные функции удовлетворяют всем свойствам, перечисленным в утверждениях 3.D.2 и 3.D.3.

c) Найдите отображение вальрасианского спроса и косвенную функцию полезности для случая линейной функции полезности и леонтьевской функции полезности (см. упражнение 3.C.6). Покажите, что функция вальрасианского спроса и косвенная функция полезности для CES-функции полезности сходятся к данным функциям при ρ, стремящемся к 1 и $-\infty$ соответственно.

d) Определим *эластичность замещения между благами* 1 и 2 следующим образом:

$$\xi_{12}(p,\ w) = -\frac{\partial\left[x_1(p,\ w) \ /\ x_2(p,\ w)\right]}{\partial[p_1 \ /\ p_2]} \frac{p_1 \ /\ p_2}{x_1(p,\ w) \ /\ x_2(p,\ w)}.$$

Покажите, что для CES-функции полезности $\xi_{12}(p, w) = 1 / (1 - \rho)$, что объясняет ее название. Вычислите $\xi_{12}(p, w)$ для следующих функций полезности: линейной, леонтьевской и Кобба — Дугласа.

3.D.6[B]. Рассмотрите экономику с тремя благами, в которой потребитель имеет функцию полезности $u(x) = (x_1 - b_1)^{\alpha}(x_2 - b_2)^{\beta}(x_3 - b_3)^{\gamma}$.

a) Почему без потери общности мы можем положить $\alpha + \beta + \gamma = 1$? Далее считайте, что это условие выполнено.

b) Выпишите условия первого порядка задачи максимизации полезности и найдите функцию вальрасианского спроса потребителя и косвенную функцию полезности. Полученная система спроса была введена в работе (Stone, 1954) и называется *линейной системой расходов*.

c) Убедитесь, что найденные функции спроса удовлетворяют всем свойствам, перечисленным в утверждениях 3.D.2 и 3.D.3.

3.D.7[B]. Пусть в экономике имеется два товара и нам даны два бюджетных множества B_{p^0,w^0} и B_{p^1,w^1} при ценах и богатстве $p^0 = (1,\ 1)$, $w^0 = 8$ и $p^1 = (1, 4)$, $w^1 = 26$ соответственно. Известно, что при комбинации цен и богатства (p^0, w^0) потребитель выбрал набор $x^0 = (4, 4)$, а при (p^1, w^1) потребитель выбрал набор x^1, такой что $p \cdot x^1 = w^1$.

a) Определите диапазон допустимых значений набора x^1, если выбор наборов x^0 и x^1 согласуется с выбором наилучшего согласно предпочтениям набора.

b) Определите диапазон допустимых значений набора x^1, если выбор наборов x^0 и x^1 согласуется с выбором наилучшего согласно предпочтениям набора, когда предпочтения квазилинейны по *первому* благу.

c) Определите диапазон допустимых значений набора x^1, если выбор наборов x^0 и x^1 согласуется с выбором наилучшего согласно предпочтениям набора, когда предпочтения квазилинейны по *второму* благу.

d) Определите диапазон допустимых значений набора x^1, если выбор наборов x^0 и x^1 согласуется с выбором наилучшего согласно предпочтениям набора, в случае когда оба блага являются нормальными.

e) Определите диапазон допустимых значений набора x^1, если выбор наборов x^0 и x^1 согласуется с выбором наилучшего согласно предпочтениям набора, когда предпочтения гомотетичны.

(*Подсказка*: наилучший подход к решению этого упражнения — исходить, насколько это возможно, из хороших рисунков.)

3.D.8^{A}. Покажите, что для всех (p, w) $w\partial v(p, w) / \partial w = -p \cdot \nabla_p v(p, w)$.

3.E.1^{A}. В тексте.

3.E.2^{A}. В тексте.

3.E.3^{B}. Докажите, что решение задачи минимизации расходов (EMP) существует, если $p >> 0$ и существует некоторый набор $x \in \mathbb{R}^L_+$, удовлетворяющий условию $u(x) \geq u$.

3.E.4^{B}. Покажите, что если предпочтения потребителя $\succsim$ выпуклы, то $h(p, u)$ — выпуклое множество. Покажите также, что если предпочтения $\succsim$[34] строго выпуклы, то множество $h(p, u)$ состоит из единственного элемента.

3.E.5^{B}. Покажите, что если функция полезности $u(\cdot)$ однородна первой степени, то функции $h(p, u)$ и $e(p, u)$ однородны первой степени по u (т. е. они могут быть представлены в виде $h(p, u) = u\tilde{h}(p)$[35] и $e(p, u) = u\tilde{e}(p)$[36]).

3.E.6^{B}. Рассмотрите функцию полезности с постоянной эластичностью замещения (определенную в упражнении 3.C.6 и рассматриваемую также в упражнении 3.D.5 при $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$). Получите функцию хиксианского спроса и функцию расходов. Проверьте, удовлетворяют ли они свойствам, перечисленным в утверждениях 3.E.2 и 3.E.3.

3.E.7^{B}. Покажите, что если предпочтения $\succsim$ квазилинейны по благу 1, то функции хиксианского спроса на блага 2, ..., L не зависят от u. Какой вид будет иметь в этом случае функция расходов?

3.E.8^{A}. Для функции полезности Кобба — Дугласа убедитесь, что соотношения (3.E.1) и (3.E.4) выполнены. Обратите внимание, что функция расходов может быть получена как обратная к косвенной функции полезности, и наоборот.

---

[34] Формула исправлена, так как в оригинальном тексте опечатка. — *Примеч. пер.*
[35] Формула исправлена, так как в оригинальном тексте опечатка. — *Примеч. пер.*
[36] Формула исправлена, так как в оригинальном тексте опечатка. — *Примеч. пер.*

3.E.9^{B}. Используя соотношения (3.E.1), покажите, что из свойств косвенной функции расходов, указанных в утверждении 3.D.3, следует утверждение 3.E.2. Подобным же образом, используя соотношения (3.E.1), докажите, что из утверждения 3.E.2 следует утверждение 3.D.3.

3.E.10^{B}. Используя соотношения (3.E.1) и (3.E.4), а также свойства косвенной функции полезности и функции расходов, покажите, что из утверждения 3.D.2 следует утверждение 3.E.3[37]. Затем, опираясь на этот факт, докажите, что из утверждения 3.E.3 следует утверждение 3.D.2.

3.F.1^{B}. Приведите строгое доказательство того, что замкнутое выпуклое множество $K \subset \mathbb{R}^L$ равно пересечению полупространств, его содержащих (используйте теорему о разделяющей гиперплоскости).

3.F.2^{A}. Проиллюстрируйте на рисунке тот факт, что теорема о разделяющей гиперплоскости неверна для невыпуклых множеств. Затем покажите, что если множество K замкнуто и невыпукло, то всегда существует точка $x \notin K$, которая не может быть отделена от K.

3.G.1^{B}. Докажите, что утверждение 3.G.1 следует из тождества Роя (утверждение 3.G.4).

3.G.2^{B}. Убедитесь на примере функции полезности Кобба — Дугласа в выполнении всех утверждений, приведенных в разделе 3.G.

3.G.3^{B}. Рассмотрите функцию полезности, приведенную в упражнении 3.D.6 (линейную систему расходов).

a) Получите функции хиксианского спроса и функцию расходов. Проверьте выполнение свойств, перечисленных в утверждениях 3.E.2 и 3.E.3.

b) Покажите, что производные функции расходов представляют собой хиксианские функции спроса, полученные в пункте (a).

c) Убедитесь в выполнении уравнения Слуцкого.

d) Убедитесь, что коэффициенты замещения по своей цене отрицательны, а компенсированные перекрестные ценовые коэффициенты симметричны.

e) Покажите, что матрица $S(p, w)$ отрицательно полуопределена и имеет ранг 2.

3.G.4^{B}. Функция полезности $u(x)$ *аддитивно сепарабельна*, если она имеет вид $u(x) = \sum_l u_l(x_l)$.

a) Покажите, что аддитивная сепарабельность является кардиналистским свойством, сохраняющимся только при линейном преобразовании функции полезности.

b) Покажите, что порожденное данной функцией полезности ранжирование любой группы товаров не зависит от того, какие фиксированные значения мы припишем полезности остав-

[37] В оригинале допущена ошибка: вместо утверждения 3.E.4 должно быть утверждение 3.E.3. — *Примеч. пер.*

шихся товаров. Оказывается, это ординалистское свойство является не только необходимым, но и достаточным условием существования аддитивно сепарабельного представления предпочтений. (*Не* стоит пытаться доказать этот факт – это слишком сложно (см. Debreu, 1960).)

c) Покажите, что функции вальрасианского и хиксианского спроса, порожденные аддитивно сепарабельной функцией полезности, исключают возможность инфериорных благ, если функции $u_l(\cdot)$ строго вогнуты. (При ответе на вопрос можете считать, что функции дифференцируемы и решение внутреннее.)

d) (более сложный вопрос) Пусть все $u_l(\cdot)$ одинаковы и дважды дифференцируемы: положим, $\hat{u}(\cdot) = u_l(\cdot)$. Покажите, что если $-[t\hat{u}''(t)\ /\ \hat{u}'(t)] < 1$ для всех t, то вальрасианский спрос $x(p, w)$ обладает *свойством валовой заменимости*, т. е. $\partial x_l(p,\ w)\ /\ \partial p_k > 0$ для всех l и $k \neq l$.

3.G.5$^{\mathbf{C}}$ (*хиксианские композитные товары*). Предположим, есть две группы желаемых потребителем товаров, x и y, цены которых соответственно равны p и q. Предпочтения потребителя описываются функцией полезности $u(x, y)$, а его богатство составляет $w > 0$. Предположим, что цены благ y всегда изменяются пропорционально относительно друг друга, т. е. их можно представить как $q = \alpha q_0$. Для любого числа $z \geq 0$ определим функцию

$$\tilde{u}(x,\ z) = \max_{y} u(x,\ y)$$

$$\text{при } q_0 \cdot y \leq z.$$

a) Покажите, что если рассмотреть экономику с благами x и единственным композитным благом z, где $\tilde{u}(x,\ z)$ — функция полезности потребителя, а α — цена композитного блага, то решение задачи $\max\limits_{x,z} \tilde{u}(x,\ z)$ при $p \cdot x + \alpha z \leq w$ будет характеризовать фактический уровень потребления x и $z = q_0 \cdot y$.

b) Покажите, что свойства функций вальрасианского спроса, указанные в утверждениях 3.D.2 и 3.G.4, выполнены для $x(p, \alpha, w)$ и $z(p, \alpha, w)$.

c) Покажите, что свойства, указанные в утверждениях 3.E.3 и 3.G.1–3.G.3, выполнены для функций хиксианского спроса, полученных при функции полезности $\tilde{u}(x,\ z)$.

3.G.6$^{\mathrm{B}}$. (Ф. Фишер) Потребитель с богатством $w > 0$ в экономике с тремя благами (блага обозначены через x_1, x_2 и x_3, а их цены через p_1, p_2 и p_3 соответственно) имеет следующие функции спроса на товары 1 и 2:

$$x_1 = 100 - 5\frac{p_1}{p_3} + \beta\frac{p_2}{p_3} + \delta\frac{w}{p_3};$$

$$x_2 = \alpha + \beta \frac{p_1}{p_3} + \gamma \frac{p_2}{p_3} + \delta \frac{w}{p_3},$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — ненулевые константы.

a) Объясните, как получить спрос на благо 3 (не нужно непосредственно вычислять спрос).

b) Будут ли функции спроса x_1 и x_2 однородными соответствующей степени?

c) Какие ограничения на значения параметров α, β, γ и δ налагает максимизация полезности?

d) Учитывая результат пункта (c), при фиксированном уровне x_3 изобразите кривые безразличия потребителя в пространстве x_1, x_2.

e) Какой вывод относительно вида функции полезности потребителя $u(x_1, x_2, x_3)$ можно сделать, исходя из ответа на пункт (d)?

3.G.7[A]. Используя концепцию косвенной функции спроса, можно получить интересный результат теории двойственности. Зафиксируем w на некотором уровне, скажем $w = 1$, и введем обозначения $x(p, 1) = x(\text{p})$ и $v(p, 1) = v(p)$. Тогда *косвенная функция спроса* $g(x)$ — это функция, обратная к $x(p)$, т. е. это правило, приписывающее каждому товарному набору $x \gg 0$ вектор цен $g(x)$, такой что $x = x\left(g(x), 1\right)$. Покажите, что

$$g(x) = \frac{1}{x \cdot \nabla u(x)} \nabla u(x).$$

Используя утверждение 3.G.4, покажите также, что

$$x(p) = \frac{1}{p \cdot \nabla v(p)} \nabla v(p).$$

Обратите внимание, что приведенные выражения совершенно симметричны. Таким образом, прямой (вальрасианский) спрос представляет собой нормированную производную косвенной функции полезности, а косвенный спрос — нормированную производную прямой полезности.

3.G.8[B]. Косвенная функция полезности $v(p, w)$ логарифмически однородна, если $v(p, \alpha w) = v(p, w) + \ln \alpha$ при $\alpha > 0$ (другими словами, $v(p, w) = \ln\left(v^*(p, w)\right)$, где функция $v^*(p, w)$ однородна первой степени). Покажите, что если функция $v(\cdot, \cdot)$ логарифмически однородна, то $x(p, 1) = -\nabla_p v(p, 1)$.

3.G.9[C]. Вычислите матрицу Слуцкого по косвенной функции полезности.

3.G.10[B]. Каким свойствам должны удовлетворять функции $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$ в форме Гормана $v(p, w) = a(p) + b(p)w$, чтобы функция $v(p, w)$ была косвенной функцией полезности?

3.G.11$^{\text{B}}$. Убедитесь в том, что косвенная функция полезности в форме Гормана характеризуется линейными кривыми богатство – потребление.

3.G.12$^{\text{B}}$. Какие ограничения на форму Гормана налагают гомотетичные и квазилинейные предпочтения?

3.G.13$^{\text{C}}$. Предположим, косвенная функция полезности $v(p, w)$ представляет собой многочлен степени n по w (с коэффициентами, которые могут зависеть от p). Покажите, что кривая богатство – потребление содержится в линейном подпространстве размерности не выше $n + 1$. Проинтерпретируйте данный результат.

3.G.14$^{\text{A}}$. В приведенной ниже матрице представлены эффекты замещения для (вальрасианского) спроса потребителя, имеющего рациональные предпочтения и потребляющего три блага при ценах $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ и $p_3 = 6$:

$$\begin{bmatrix} -10 & ? & ? \\ ? & -4 & ? \\ 3 & ? & ? \end{bmatrix}$$

Вставьте пропущенные числа. Обладает ли полученная матрица всеми свойствами матрицы замещения?

3.G.15$^{\text{B}}$. Рассмотрите функцию полезности

$$u = 2x_1^{1/2} + 4x_1^{1/2}.$$

a) Найдите функции спроса на блага 1 и 2 как функции от цен и богатства.

b) Найдите функцию компенсированного спроса $h(\cdot)$.

c) Найдите функцию расходов и убедитесь, что $h(p, u) = \nabla_p e(p, u)$.

d) Найдите косвенную функцию полезности и проверьте выполнение тождества Роя.

3.G.16$^{\text{C}}$. Рассмотрите следующую функцию расходов:

$$e(p,\ u) = \exp\left\{\sum_l \alpha_l \log p_l + \left(\prod_l p_l^{\beta_l}\right) u\right\}.$$

a) Какие ограничения на параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_1, \ldots, \beta_n$ являются необходимыми для того, чтобы данная функция могла быть получена из максимизации полезности?

b) Найдите соответствующую данной функции расходов косвенную функцию полезности.

c) Проверьте выполнение тождества Роя и уравнения Слуцкого.

3.G.17$^{\text{B}}$. (из (Hausman, 1981)) Пусть $L = 2$. Рассмотрите «локальную» косвенную функцию полезности, определенную в окрестности точки $(\bar{p},\ \bar{w})$ следующим образом:

$$v(p,\ w) = \exp(-bp_1/p_2)\left[\frac{w}{p_2} + \frac{1}{b}\left(a\frac{p_1}{p_2} + \frac{a}{b} + c\right)\right]^{38}.$$

a) Убедитесь, что локальная функция спроса на первое благо имеет вид

$$x_1(p,\ w) = a\frac{p_1}{p_2} + b\frac{w}{p_2} + c.$$

b) Убедитесь, что локальная функция расходов имеет вид

$$e(p,\ u) = p_2 u \exp(bp_1/p_2) - \frac{1}{b}\left(ap_1 + \frac{a}{b}p_2 + cp_2\right)^{39}.$$

c) Убедитесь, что локальная функция хиксианского спроса на первое благо имеет вид

$$h_1(p,\ u) = ub\exp(bp_1/p_2) - \frac{a}{b}^{40}.$$

3.G.18[C]. Покажите, что все блага связаны друг с другом (слабым) замещением, т. е. для любых двух благ l и k либо $\partial h_l(p,\ u)\ /\ \partial p_k \geq 0,$ либо существует благо r, такое что $\partial h_l(p,\ u)\ /\ \partial p_r \geq 0$ и $\partial h_r(p,\ u)\ /\ \partial p_k \geq 0,$ либо существует… и т. д. (*Подсказка*. Сначала рассмотрите случай двух товаров. Затем при изучении случая трех благ воспользуйтесь понятием композитного товара, исследуемого в упражнении 3.G.5, а затем уже перейдите к рассмотрению случая L товаров.)

3.H.1[C]. Покажите, что если функция $e(p, u)$ непрерывна, возрастает по u, однородна первой степени, не убывает и вогнута по p, то функция полезности $u(x) = \sup\{u : x \in V_u\}$, где

$$V_u = \{y : p \cdot y > e(p,\ u) \text{ для всех } p >> 0\},$$

определенная при $x >> 0$, удовлетворяет условию

$$e(p,\ u) = \min\{p \cdot x : u(x) \geq u\}$$

для любых $p >> 0$.

3.H.2[B]. Используя утверждение 3.F.1, покажите, что если $e(p, u)$ дифференцируема по p, то не существует (строго монотонных) невыпуклых предпочтений, порождающих $e(\cdot)$.

3.H.3[A]. Как восстановить $v(p, w)$ из $e(p, u)$?

[38] Формула исправлена, поскольку в оригинальном тексте опечатка (знак минус перед экспонентой в оригинальном тексте – это опечатка). — *Примеч. пер.*

[39] Формула исправлена, поскольку в оригинальном тексте опечатка (знак минус перед выражением в оригинальном тексте – это опечатка). — *Примеч. пер.*

[40] Формула исправлена, поскольку в оригинальном тексте опечатка (знак минус перед выражением в оригинальном тексте – это опечатка). — *Примеч. пер.*

3.H.4[B]. Предположим, вам изначально дана не функция вальрасианского спроса, а косвенная функция спроса $g(x)$, определенная в упражнении 3.G.7. Как в этом случае вы будете восстанавливать предпочтения $\succsim$? Ограничьтесь рассмотрением случая $L = 2$.

3.H.5[B]. Предположим, вам известна косвенная функция полезности. Как вы восстановите на ее основе функцию расходов и прямую функцию полезности?

3.H.6[B]. Предположим, вам даны функции вальрасианского спроса $x_l(p, w) = \alpha_l w / p_l$ для всех $l = 1, \ldots, L$, где $\sum_l \alpha_l = 1$. Выведите функцию расходов из этой системы спроса. Какова функция полезности потребителя?

3.H.7[B]. Ответьте на следующие вопросы для функции спроса из упражнения 2.F.17.

a) Пусть уровень полезности, соответствующий набору $x = (1, 1, \ldots, 1)$, равен 1. Какова функция расходов $e(p, 1)$, соответствующая уровню полезности $u = 1$? (*Подсказка*: для ответа на вопрос воспользуетесь результатом пункта (d) упражнения 2.F.17.)

b) Каково верхнее лебеговское множество потребительского набора $x = (1, 1, \ldots, 1)$?

3.I.1[B]. В тексте.

3.I.2[B]. В тексте.

3.I.3[B]. Рассмотрите изменение цен с первоначального вектора p^0 до нового $p^1 \leq p^0$, где меняется только цена блага l. Покажите, что $CV(p^0, p^1, w) > EV(p^0, p^1, w)$, если l — инфериорное благо.

3.I.4[B]. Приведите пример ситуации, когда, сопоставляя $CV(p^0, p^1, w)$ и $CV(p^0, p^2, w)$, нельзя прийти к корректному выводу относительно соотношения благосостояния потребителя при p^1 и p^2.

3.I.5[B]. Покажите, что если функция полезности $u(x)$ квазилинейна по первому благу (и цена первого блага равна $p_1 = 1$), то $CV(p^0, p^1, w) = EV(p^0, p^1, w)$ для любых (p^0, p^1, w).

3.I.6[A]. Предположим, что в экономике $i = 1, \ldots, I$ потребителей с функциями полезности $u_i(x)$ и богатством w_i. Рассмотрите изменение цен с p^0 до p^1. Покажите, что, если $\sum CV_i(p^0, p^1, w_i) > 0$, то тогда мы можем найти $\{w_i'\}_{i=1}^I$, такие что $\sum_i w_i' \leq \sum_i w_i$ и $v_i(p^1, w_i') \geq v_i(p^0, w_i)$ для всех i, т. е. в принципе изменение цен можно компенсировать всем потребителям.

3.I.7[B]. Рассмотрите экономику с тремя благами (т. е. $L = 3$), где третье благо является благом-измерителем (пусть $p_3 = 1$). Функция рыночного спроса $x(p, w)$ характеризуется следующим спросом на блага 1 и 2:

$$x_1(p, w) = a + bp_1 + cp_2;$$

$$x_2(p, w) = d + ep_1 + gp_2.$$

a) Какие условия на параметры модели налагает максимизация полезности?

b) Вычислите эквивалентную вариацию при изменении цен с $(p_1, p_2) = (1, 1)$ до $(\bar{p}_1, \bar{p}_2) = (2, 2)$. Убедитесь, что без соответствующей симметрии отсутствует независимость от пути. В дальнейшем до конца упражнения считайте, что симметричность имеет место.

c) Пусть EV_1, EV_2 и EV — эквивалентные вариации при изменении цен с $(p_1, p_2) = (1, 1)$ до $(2, 1)$, $(1, 2)$ и $(2, 2)$ соответственно. Сравните EV с $EV_1 + EV_2$ как функцией от параметров задачи. Проинтерпретируйте полученный результат.

d) Предположим, что увеличение цен в пункте (c) связано с введением налогов. Обозначим чистые потери в каждом из трех случаев через DW_1, DW_2 и DW. Сравните DW с $DW_1 + DW_2$ как функцией от параметров задачи.

e) Предположим, что первоначальные цены равны $(p_1, p_2) = (1, 1)$. Правительство хотело бы увеличить фиксированную (небольшую) сумму дохода R посредством потоварных налогов. Обозначим через t_1 и t_2 ставки налогов на оба рассматриваемых блага. Найдите оптимальные ставки налогов как функции от параметров спроса, если критерием оптимальности является минимизация чистых потерь.

3.I.8[B]. Предположим, на рынке предлагаются три вида товаров (т. е. $L = 3$). Пусть $p_3 = 1$, а функции спроса на блага 1 и 2 имеют вид

$$x_1(p, w) = a_1 + b_1 p_1 + c_1 p_2 + d_1 p_1 p_2;$$
$$x_2(p, w) = a_2 + b_2 p_1 + c_2 p_2 + d_2 p_1 p_2.$$

a) Обратите внимание, что в данном случае спрос на блага 1 и 2 не зависит от богатства. Укажите наиболее общий класс функций полезности, для которых спрос обладает этим свойством.

b) Покажите, что если функции спроса из пункта (a) порождены максимизацией полезности, то значения параметров не могут быть произвольными. Приведите настолько полный, насколько это возможно, список ограничений на параметры, налагаемых максимизацией полезности. Обоснуйте свой ответ.

c) Предположим, что условия, полученные в пункте (b), выполнены. Пусть первоначальные цены благ описываются вектором $p = (p_1, p_2)$. Рассмотрите изменение цен до уровня $p' = (p_1', p_2')$ и укажите меру изменения благосостояния в результате изменения цен с уровня p до уровня p'.

d) Пусть параметры имеют следующие значения: $a_1 = a_2 = 3 / 2$, $b_1 = c_2 = 1$, $c_1 = b_2 = {}^1/_2$ и $d_1 = d_2 = 0$. Предположим, что первоначально цены равны $p = (1, 1)$. Вычислите эквивалентную вариацию при изменении цен до уровня p' в каждом из следующих случаев: (1) $p' = (2, 1)$, (2) $p' = (1, 2)$, (3) $p' = (2, 2)$. Обозначим соответствующие эквивалентные вариации через EV_1, EV_2 и EV_3. При каком условии будет выполнено $EV_3 = EV_1 + EV_2$? Объясните полученный результат.

3.I.9[B]. В экономике с одним потребителем правительство рассматривает вопрос о введении налога t на единицу потребления блага l и передаче вырученных средств потребителю (который тем не менее не учитывает влияния своих покупок на размер выплаты). Будем считать, что $s_{ll}(p, w) < 0$ для всех (p, w). Покажите, что оптимальный налог (в смысле максимизации полезности потребителя) равен нулю.

3.I.10[B]. Приведите пример, в котором подход, основанный на мере вариации площади, некорректно сопоставляет благосостояние потребителя при p^0 и p^1. (*Подсказка*: рассмотрите случай, когда изменение цен с уровня p^0 до уровня p^1 сопровождается изменением цен более чем одного блага.)

3.I.11[B]. Предположим, у нас есть информация не только о p^0, p^1 и x^0, но и о $x^1 = x(p^1, w)$. Покажите, что если $(p^1 - p^0) \cdot x^1 > 0$, то тогда положение потребителя должно быть хуже при комбинации цен и богатства (p^1, w), чем при (p^0, w). Проинтерпретируйте данный критерий как аппроксимацию первого порядка функции расходов в точке p^1. Покажите также, что этот критерий можно записать в виде $p^0 \cdot (x^1 - x^0) < 0$, и приведите графическую иллюстрацию для случая $L = 2$ в пространстве (x_1, x_2). (*Подсказка*: отметьте точку x^0 во множестве $\left\{x \in \mathbb{R}^L_+ : u(x) = u^0\right\}$.)

3.I.12[B]. Модифицируйте меры эквивалентной и компенсирующей вариаций на случай изменения как цен, так и богатства, т. е. на случай изменения с (p^0, w^0) до (p^1, w^1). Также укажите, как изменится в этом случае критерий «частичной информации», описанный в разделе 3.J.

3.J.1[C]. Покажите, что при $L = 2$ спрос $x(p, w)$ удовлетворяет сильной аксиоме выявленных предпочтений тогда и только тогда, когда удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений.

3.AA.1[B]. Предположим, потребительское множество имеет вид:

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 + x_2 \geq 1\right\},$$

а функция полезности — $u(x) = x_2$. Покажите, что (a) условия существования локально более дешевого потребительского набора не выполнено при $(p, w) = (1, 1, 1)$; (b) рыночный спрос в этой точке терпит разрыв. Приведите графическую иллюстрацию.

3.AA.2[C]. Считая, что предпосылки утверждения 3.AA.1 выполнены, покажите, что спрос $h(p, u)$ полунепрерывен сверху, а функция расходов $e(p, u)$ непрерывна (даже если мы заменим минимум на инфимум и рассмотрим вектор цен $p \geq 0$). Кроме того, приведите условия дифференцируемости $h(p, u)$, если $h(p, u)$ — функция.

Глава 4. Агрегированный спрос

4.A. Введение

Для решения большинства экономических задач важнее понимать поведение потребителей агрегированно, а не рассматривать поведение отдельного потребителя. В этой главе мы исследуем вопрос о том, в какой мере теория индивидуального потребителя, разработанная в главах 1–3, может быть применена к *агрегированному спросу*, определяемому как суммарный спрос всех потребителей, имеющихся в экономике. В действительности существует ряд различных свойств индивидуального спроса, относительно которых мы можем надеяться, что они также будут выполнены и при агрегировании. Но какие именно это свойства, зависит от конкретного рассматриваемого приложения.

В этой главе мы поднимаем три вопроса, касающиеся агрегированного спроса.

1) Индивидуальный спрос может быть представлен как функция от цен и индивидуального уровня богатства. *В каком случае агрегированный спрос можно представить как функцию от цен и агрегированного богатства?*
2) Индивидуальный спрос, порожденный рациональными предпочтениями, обязательно удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений. *В каком случае агрегированный спрос удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений?* Или в более общей постановке: в каком случае мы можем применить теорию, развитую в главе 2 (особенно в разделе 2.F), к агрегированному спросу?
3) Индивидуальный спрос значим с точки зрения благосостояния: используя его, мы можем получить меры изменения благосостояния потребителя, как показано в разделе 3.I. *В каком случае на основе агрегированного спроса можно строить оценки изменения благосостояния?* В частности, в каком случае меры благосостояния, рассмотренные в разделе 3.I, вычисленные с помощью функции агрегированного спроса, имеют смысл?

Эти три вопроса (с некоторой натяжкой) можно назвать теориями агрегирования для *эконометристов*, приверженцев *позитивной теории* и сторонников *теории благосостояния* соответственно.

Эконометриста интересует, в какой мере допустимо предположение о простой структуре агрегированного спроса в процедурах построения различных оценок. Один из таких аспектов, обсуждаемый в этой главе, — это вопрос о том, в какой мере допустимо моделировать агрегированный спрос как функцию только от агрегированных перемеренных, таких как агрегированный (или, что то же самое, средний) уровень богатства потребителей. Этот вопрос крайне важен, поскольку эконометрические данные могут быть доступны только в агрегированном виде.

С другой стороны, в рамках позитивного (поведенческого) подхода исследователя интересует то, в какой мере позитивистские ограничения теории индивидуального спроса применимы в агрегированном случае. Такой подход может быть важным при построении прогнозов на основе моделей рыночного равновесия, в которых агрегированный спрос играет центральную роль[1].

Исследователя теории благосостояния волнуют нормативные аспекты агрегированного спроса. Ему бы хотелось использовать меры изменения благосостояния, полученные в разделе 3.I, для оценки значимости изменений экономической среды с точки зрения благосостояния. В идеале он бы хотел трактовать агрегированный спрос так, как если бы он был порожден «репрезентативным потребителем», и соответственно использовать оценку изменения благосостояния этого индивида как меру изменения агрегированного благосостояния.

Хотя условия, которые мы обозначили как важные в каждом из указанных вопросов, тесно связаны друг с другом, с концептуальной точки зрения они весьма различны. Как мы увидим далее, во всех трех случаях требуется выполнение довольно жестких условий, чтобы желаемые свойства были выполнены при агрегировании. Мы по очереди обсудим все три вышеуказанных вопроса в разделах 4.B–4.D.

Наконец, в приложении A обсуждаются регуляризирующие (т. е. «сглаживающие») эффекты, возникающие при агрегировании большого числа потребителей.

4.B. Агрегированный спрос и агрегированное богатство

Пусть в экономике имеется I потребителей с рациональными отношениями предпочтения $\succsim_i$ и соответствующими функциями вальрасианского спроса $x_i(p, w_i)$. В общем случае при данных ценах $p \in \mathbb{R}^L$ и уровнях богатства $(w_1, \ldots, w_I)$ для I потребителей агрегированный спрос может быть записан в виде

$$x(p,\ w_1,\ \ldots,\ w_I) = \sum_{i=1}^{I} x_i(p,\ w_i).$$

[1] Эконометристу этот вопрос также может быть интересен, поскольку в процедурах оценивания могут учитываться априорные ограничения на свойства агрегированного спроса.

Таким образом, агрегированный спрос зависит не только от цен, но также и от уровней богатства различных потребителей. В этом разделе мы рассмотрим следующий вопрос: в каком случае мы можем представить агрегированный спрос в более простом виде $x\left(p,\ \sum_i w_i\right)$, т. е. в каком случае есть основания считать, что агрегированный спрос зависит только от совокупного богатства $\sum_i w_i$.

Для выполнения этого свойства в общем случае агрегированный спрос для любых двух распределений одинакового совокупного богатства между потребителями должен быть одним и тем же. То есть для любых $(w_1, \ldots, w_I)$ и $(w_1', \ldots, w_I')$, таких что $\sum_i w_i = \sum_i w_i'$, должно быть выполнено $\sum_i x_i(p,\ w_i) = \sum_i x_i(p,\ w_i')$.

Для изучения вопроса о выполнении этого условия рассмотрим дифференциально малое изменение $(dw_1, \ldots, dw_I) \in \mathbb{R}^L$ первоначального распределения богатства $(w_1, \ldots, w_I)$, такое что $\sum_i dw_i = 0$. Если агрегированный спрос может быть представлен как функция от агрегированного богатства, то в предположении дифференцируемости функций спроса получаем

$$\sum_i \frac{\partial x_{li}(p,\ w_i)}{\partial w_i} dw_i = 0 \ \text{для любого } l.$$

Это может быть верно для всех перераспределений $(dw_1, \ldots, dw_I)$, удовлетворяющих условию $\sum_i dw_i = 0$, по сравнению с первоначальным распределением богатства $(w_1, \ldots, w_I)$ тогда и только тогда, когда коэффициенты при различных dw_i равны, т. е.

$$\frac{\partial x_{li}(p,\ w_i)}{\partial w_i} = \frac{\partial x_{lj}(p,\ w_j)}{\partial w_j} \tag{4.B.1}$$

для любого l, любых двух индивидов i и j и всех $(w_1, \ldots, w_I)$[2].

Коротко говоря, для любого фиксированного вектора цен p и любого товара l эффект богатства при ценах p должен быть одинаков независимо от того, о каком потребителе идет речь и каков уровень его богатства[3]. Интуитивно довольно понятно, что в этом случае изменения индивидуального спроса в результате любого перераспределения богатства между по-

[2] Обычно мы пренебрегаем ограничениями на граничные распределения, поэтому, строго говоря, наши утверждения в этом разделе носят только локальный характер.

[3] Следует заметить, что $\partial x_{li}(p,\ w_i) / \partial w_i = \partial x_{li}(p,\ w_i') / \partial w_i$ для всех $w_i \neq w_i'$, поскольку при любых значениях w_j, $j \neq i$, условие (4.B.1) должно быть выполнено при распределениях богатства $(w_1, \ldots, w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, \ldots, w_I)$ и $(w_1, \ldots, w_{i-1}, w'_i, w_{i+1}, \ldots, w_I)$. Следовательно, $\partial x_{li}(p,\ w_i) / \partial w_i = \partial x_{lj}(p,\ w_j) / \partial w_j = \partial x_{li}(p,\ w_i') / \partial w_i$ для любых $j \neq i$.

требителями будут нейтрализованы. С геометрической точки зрения это условие эквивалентно утверждению о том, что для всех потребителей кривые богатство — потребление представляют собой параллельные прямые. На рис. 4.B.1 представлены прямые богатство — потребление для двух потребителей.

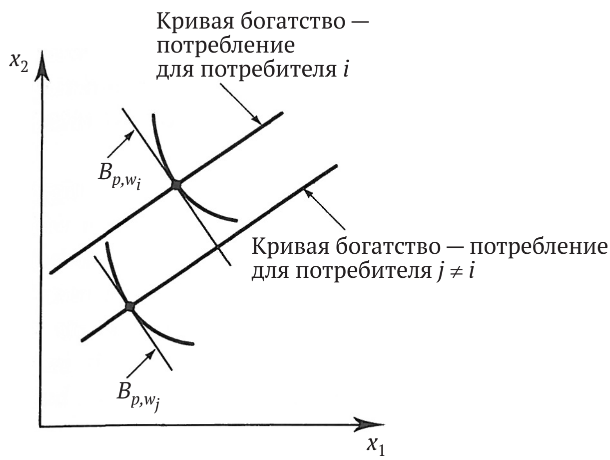


Рис. 4.B.1. Из инвариантности агрегированного спроса к перераспределению богатства следует, что кривые богатство — потребление для разных потребителей являются параллельными прямыми

Одним специальным случаем, когда выполнено данное свойство, является ситуация, при которой все потребители имеют одинаковые гомотетичные предпочтения. Другим — когда все потребители имеют квазилинейные предпочтения по одному и тому же благу. Оба случая являются примерами более общего результата, сформулированного в утверждении 4.B.1.

Утверждение 4.B.1. Необходимым и достаточным условием того, что кривые богатство — потребление потребителей являются параллельными прямыми при любом векторе цен p, является возможность представления предпочтений косвенной функцией полезности, имеющей форму Гормана, причем коэффициенты при w_i должны быть одинаковы для каждого потребителя i, т. е.

$$v_i(p, w_i) = a_i(p) + b(p)w_i.$$

Доказательство. Доказать достаточность вам предлагается в упражнении 4.B.1 (это не очень сложно; нужно воспользоваться тождеством Роя). Не забывайте, что мы пренебрегаем граничными распределениями (т. е. данный результат имеет локальную значимость). А доказательство необходимости довольно сложно; обсуждение этого результата можно найти в работе (Deaton, Muellbauer, 1980). ■

Таким образом, агрегированный спрос можно представить как функцию от агрегированного богатства тогда и только тогда, когда все потребители имеют предпочтения, которые порождают косвенную функцию полезности в форме Гормана с одинаковыми коэффициентами при богатстве $b(p)$. Нет необходимости говорить, что это очень сильное ограничение на предпочтения[4].

Тогда возникает вопрос, можно ли несколько ослабить ограничения на предпочтения, если рассматривать функции агрегированного спроса на более широком множестве агрегированных переменных, а не только как функцию от совокупного (или, что то же самое, среднего) уровня богатства? Например, агрегированный спрос может зависеть как от среднего (математического ожидания), так и от дисперсии статистического распределения богатства или даже от самого статистического распределения в целом. Заметим, что последнее условие очень жестко. Это означает, что агрегированный спрос зависит только от того, сколько среди потребителей бедных и богатых, а не от того, кто именно беден или богат.

Более общие формы зависимости от распределения богатства действительно справедливы при более слабых условиях, чем требование зависимости агрегированного спроса только от совокупного богатства. В качестве простейшего примера заметим, что агрегированный спрос зависит только от статистического распределения богатства, если все потребители имеют одинаковые, но произвольные предпочтения и различаются только уровнем богатства. Здесь мы не будем подробно обсуждать этот вопрос: хорошее изложение этого материала можно найти в работах (Deaton, Muellbauer, 1980; Lau, 1982; Jorgenson, 1990).

Есть и другой путь, следуя которому мы, возможно, сможем получить положительный ответ на поставленный вопрос. До сих пор мы обсуждали проблему представления функции агрегированного спроса как функции от агрегированного богатства при *любом* распределении богатства среди потребителей. Требование выполнения этого условия для любого возможного распределения богатства довольно жестко. Действительно, во многих ситуациях индивидуальный уровень богатства может порождаться таким способом, который создает определенные ограничения на множество индивидуальных уровней богатства. Если это так, то агрегированный спрос можно представить как функцию от цен и агрегированного богатства.

Например, когда мы рассматриваем модели общего равновесия в части IV, то в них богатство индивидов формируется за счет владения акциями фирм и обладания заданными фиксированными запасами благ. Таким образом, индивидуальный уровень реального богатства является функцией от установившегося вектора цен.

С другой стороны, индивидуальный уровень богатства может частично определяться различными правительственными программами по пере-

---

[4] Однако следует отметить, что ему отвечают некоторые интересные и важные классы предпочтений. Например, если предпочтения квазилинейны по благу l, то существует косвенная функция полезности вида $a_i(p) + w_i / p_l$. Тогда, положив $b(p) = 1 / p_l$, мы получаем косвенную функцию полезности в форме Гормана с одинаковыми для всех потребителей $b(p)$.

распределению богатства среди потребителей (см. раздел 4.D). И опять-таки эти программы могут накладывать определенные ограничения на множество возможных распределений богатства.

Для того чтобы лучше понять проблему, рассмотрим крайний случай. Предположим, что уровень богатства индивида i, $w_i(p, w)$, представляет собой функцию от цен p и агрегированного богатства w. Это верно, например, для модели общего равновесия, упомянутой выше. Или, например, в случае когда индивид обязан платить налоги с заработной платы (что сказывается на конечном уровне его богатства и совокупном (реальном) богатстве всего общества в целом). Будем называть семейство функций $\left(w_1(p, w), \ldots, w_I(p, w)\right)$, где $\sum\limits_i w_i(p, w) = w$ для всех (p, w), *правилом распределения богатства*. Тогда, если уровень богатства индивидов порождается правилом распределения богатства, то мы действительно всегда можем представить функцию агрегированного спроса в виде $x(p, w) = \sum\limits_i x_i\left(p, w_i(p, w)\right)$, т.е. агрегированный спрос зависит только от цен и совокупного богатства.

4.C. Агрегированный спрос и слабая аксиома выявленных предпочтений

Наследует ли функция агрегированного спроса $x(p, w_1, \ldots, w_I) = \sum_i x_i(p, w_i)$ позитивистские свойства индивидуального спроса? Мы сразу же можем указать три таких свойства: непрерывность, однородность нулевой степени и закон Вальраса (т.е. $p \cdot x(p, w_1, \ldots, w_I) = \sum\limits_i w_i$ для всех $(p, w_1, \ldots, w_I)$). В этом разделе мы проанализируем условия, при которых агрегированный спрос также удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений — одному из основных свойств функции индивидуального вальрасианского спроса с точки зрения позитивной теории.

Изучая этот вопрос, мы будем считать, что агрегированный спрос представим в виде $x(p, w)$, где w — совокупное богатство. Это та самая форма спроса, для которой в главе 2 мы формулировали определение слабой аксиомы выявленных предпочтений. Дополнительно также введем предпосылку о существовании правила распределения богатства $\left(w_1(p, w), \ldots, w_I(p, w)\right)$, определяющего уровни богатства индивидов в зависимости от уровня цен и совокупного богатства (обсуждение правил распределения богатства можно найти в конце раздела 4.B)[5]. Имея правило распределе-

[5] Предположение о существовании правила распределения богатства имеет также и методологическое преимущество. Оно позволяет избежать вопросов, связанных с различным агрегированием, поскольку проблема агрегирования, отмеченная в разделе 4.B (инвариантность спроса к перераспределениям богатства), таким образом, полностью исключается из рассмотрения.

ния богатства, мы можем автоматически записать агрегированный спрос как

$$x(p,\ w) = \sum_i x_i\left(p,\ w_i(p,\ w)\right).$$

Следовательно, с формальной точки зрения функция агрегированного спроса $x(p, w)$ в этом случае зависит только от агрегированного богатства, а значит, это верно и для функции рыночного спроса, определенной в главе 2[6]. Теперь попытаемся ответить на вопрос, удовлетворяет ли функция $x(\cdot, \cdot)$ слабой аксиоме выявленных предпочтений.

Для наглядности изложения мы рассмотрим конкретный простой пример использования правила распределения богатства: ограничимся рассмотрением случая, когда относительное богатство потребителей остается неизменным, т. е. не зависит от цен. Другими словами, мы предполагаем, что нам даны доли богатства $\alpha_i \geq 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$, так что $w_i(p, w) = \alpha_i w$ для любого уровня совокупного богатства $w \in \mathbb{R}$[7]. Таким образом, имеем

$$x(p,\ w) = \sum_i x_i(p,\ \alpha_i w).$$

Итак, вспомним формулировку слабой аксиомы выявленных предпочтений, приведенную в главе 2.

Определение 4.C.1. Функция агрегированного спроса $x(p, w)$ удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений, если из $p \cdot x(p', w') \leq$ $\leq w$ и $x(p, w) \neq x(p', w')$ следует, что $p' \cdot x(p, w) > w'$ для любых (p, w) и (p', w').

Приведем пример ситуации, когда агрегированный спрос не удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений.

Пример 4.C.1. *Случай, когда агрегированный спрос не удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений*. Рассмотрим экономику с двумя товарами и двумя потребителями. Предположим, что богатство равномерно распределено между потребителями, т. е. $w_1 = w_2 = w/2$, где w — агрегированное богатство. Векторы цен p и p', а также соответствующий им индивидуальный спрос $x_1(p, w/2)$ и $x_2(p, w/2)$ при ценах p и $x_1(p', w/2)$ и $x_2(p', w/2)$ при ценах p' представлены на рис. 4.C.1.

Индивидуальный спрос удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений, тогда как агрегированный спрос — нет. На рис. 4.C.1 отмечены векторы $\frac{1}{2}x(p,\ w)$

[6] Заметим, что эта функция приписывает товарные наборы комбинациям цен и богатства, и, если все $w_i(\cdot, \cdot)$ непрерывны и однородны первой степени, то данная функция непрерывна, однородна нулевой степени и удовлетворяет закону Вальраса.

[7] Заметим, что в соответствии с данным правилом распределения богатства уровни богатства $(w_1, \ldots, w_I)$ остаются неизменными и рассматриваются только изменения вектора цен p. Это связано с тем, что из однородности нулевой степени функции $x(p, w_1, \ldots, w_I)$ следует: при пропорциональном изменении цен и богатства спрос остается неизменным. Однако использование долей богатства с аналитической точки зрения более удобно.

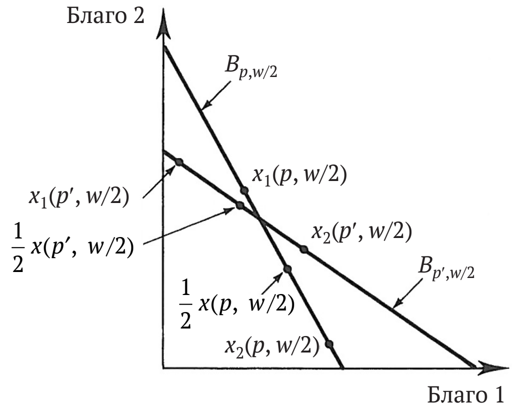


Рис. 4.C.1. Агрегированный спрос не удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений

и $\frac{1}{2}x(p', w)$, равные среднему спросу двух потребителей (следовательно, для каждого вектора цен они должны лежать посередине отрезка, соединяющего два индивидуальных потребительских вектора). Как видно из рисунка, выполнены следующие соотношения:

$$\frac{1}{2}p \cdot x(p', w) < w/2 \text{ и } \frac{1}{2}p' \cdot x(p, w) < w/2,$$

откуда (умножив обе части на 2) получаем противоречие со слабой аксиомой выявленных предпочтений при данных комбинациях цен и богатства. ■

Причина, по которой в ситуации на рис. 4.C.1 слабая аксиома выявленных предпочтений не выполняется, кроется в эффекте богатства. Как вы помните из главы 2 (утверждение 2.F.1), $x(p, w)$ удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений тогда и только тогда, когда выполнен закон спроса при *компенсированном* изменении цен. Точнее, тогда и только тогда, когда для любых (p, w) и любого компенсированного изменения цен p' (т. е. такого, что $w' = p' \cdot x(p, w)$) выполнено

$$(p' - p) \cdot \left[x(p', w') - x(p, w)\right] \leq 0, \tag{4.C.1}$$

причем неравенство строгое, если $x(p, w) \neq x(p', w')$[8].
Если рассматриваемое изменение цен и богатства, скажем с (p, w) до (p', w'), соответствует компенсированному изменению цен для *каждого* потребителя i, т. е. если $\alpha_i w' = p' \cdot x_i(p, \alpha_i w)$ для любого i, то в случае когда индивидуальный спрос удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений, согласно утверждению 2.F.1 для всех $i = 1, \ldots, I$ справедливо следующее соотношение:

[8] Заметим, что если $p \cdot x(p', w') \leq w$ и $x(p', w') \neq x(p, w)$, то согласно слабой аксиоме выявленных предпочтений должно быть выполнено $p' \cdot x(p, w) > w'$.

$$(p' - p) \cdot \left[x_i(p',\ \alpha_i w') - x_i(p,\ \alpha_i w) \right] \leq 0, \tag{4.C.2}$$

причем неравенство строгое, если $x_i(p', \alpha_i w) \neq x_i(p, \alpha_i w')$. Суммируя (4.C.2) по всем потребителям i, получаем в точности (4.C.1). Таким образом, мы приходим к выводу, что агрегированный спрос удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений при любом изменении цен и богатства, компенсированном каждому потребителю.

Однако проблема заключается в том, что изменение цен и богатства, компенсированное на агрегированном уровне, т. е. такое, что $w' = p' \times \times x(p, w)$, может не компенсировать богатство каждого отдельного индивида, т. е. может быть так, что для некоторого или для всех потребителей i $\alpha_i w' \neq p' \cdot x_i(p, \alpha_i w)$. Если это так, то индивидуальный эффект богатства (который, за исключением $p \cdot D_{wi}\, x(p, \alpha_i w)$, по сути больше никаким условием не ограничен) может перевешивать «правильный», но, возможно, небольшой индивидуальный эффект замещения. В результате условие (4.C.2) может оказаться для некоторого потребителя i невыполненным, что в итоге может повлечь нарушение аналогичного условия в агрегированном виде (4.C.1).

Столкнувшись с тем, что такое базовое свойство индивидуального спроса, как слабая аксиома выявленных предпочтений, вообще говоря, может быть не выполнено для агрегированного спроса, мы хотели бы понять, существуют ли какие-либо ограничения на индивидуальные предпочтения, при которых такой проблемы не возникнет. Предыдущие рассуждения наводят нас на мысль, что имеет смысл проанализировать, каковы следствия предпосылки о том, что закон спроса (выражение (4.C.2)) выполнен на индивидуальном уровне при изменениях цен, которые остались некомпенсированными. Действительно, предположим, что по сравнению с начальной ситуацией (p, w_i) произошло некомпенсированное изменение цен p', $w_i' = w_i$. Если соотношение (4.C.2) тем не менее выполнено, то тогда также выполнено и (4.C.1). Формализуем сказанное, введя в следующем определении новое понятие.

Определение 4.C.2. Функция индивидуального спроса $x_i(p, w_i)$ удовлетворяет *закону некомпенсированного спроса* (*ULD* – от англ. *uncompensated law of demand*), если

$$(p' - p) \cdot \left[x_i(p',\ w_i) - x_i(p,\ w) \right] \leq 0 \tag{4.C.3}$$

для любых p, p' и w_i, причем неравенство строгое, если $x_i(p', w_i) \neq \neq x_i(p, w_i)$.

Аналогичное определение можно привести и для функции агрегированного спроса $x(p, w)$.

В свете нашего обсуждения слабой аксиомы выявленных предпочтений в разделе 2.F следующая дифференциальная версия закона некомпенсированного спроса не должна показаться неожиданной (вас просят привести соответствующее доказательство в упражнении 4.C.1):

если $x_i(p, w_i)$ удовлетворяет закону некомпенсированного спроса, то матрица $D_p x_i(p, w_i)$ отрицательно полуопределена, т. е. $dp \cdot D_p x_i(p, w_i) dp \leq 0$ для всех dp.

Как и в случае слабой аксиомы выявленных предпочтений, верно обратное утверждение:

если матрица $D_p x_i(p, w_i)$ отрицательно определена для всех p, то $x_i(p, w_i)$ удовлетворяет закону некомпенсированного спроса.

Аналогичная дифференциальная версия утверждения справедлива и для функции агрегированного спроса $x(p, w)$.

Огромным достоинством закона некомпенсированного спроса, в отличие от слабой аксиомы выявленных предпочтений, является то, что он сохраняется при агрегировании. Суммируя неравенства (4.C.3) для отдельных индивидов при $w_i = \alpha_i w$, получаем $(p' - p) \cdot \left[x(p', w) - x(p, w) \right] \leq 0$, причем неравенство будет строгим, если $x(p, w) \neq x'(p, w)$. Таким образом, мы пришли к утверждению 4.C.1.

Утверждение 4.C.1. Если функция вальрасианского спроса каждого потребителя $x_i(p, w_i)$ удовлетворяет закону некомпенсированного спроса, то это справедливо и для агрегированного спроса $x(p, w) = \sum_i x_i(p, \alpha_i w)$. Следовательно, агрегированный спрос $x(p, w)$ удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений.

Доказательство. Рассмотрим произвольные комбинации цен и богатства (p, w) и (p', w), такие что $x(p, w) \neq x(p', w)$. Тогда для некоторого потребителя i должно быть выполнено

$$x_i(p, \alpha_i w) \neq x_i(p', \alpha_i w).$$

Следовательно, просуммировав (4.C.3) по всем i, получим

$$(p' - p) \cdot \left[x(p, w) - x(p', w) \right] < 0.$$

Это условие выполнено для всех p, p' и w.

Для проверки слабой аксиомы выявленных предпочтений возьмем любые (p, w) и (p', w'), такие что $x(p, w) \neq x(p', w')$ и $p \cdot x(p', w') \leq w$[9]. Положим $p'' = (w / w')p'$. В силу однородности нулевой степени $x(p'', w) = x(p', w')$. Тогда из условий $(p'' - p) \cdot \left[x(p'', w) - x(p, w) \right] < 0$, $p \cdot x(p'', w) \leq w$ и закона Вальраса следует, что $p'' \cdot x(p, w) > w$, т. е. $p' \cdot x(p, w) > w'$, что и требовалось доказать. ■

Насколько сильные ограничения на индивидуальное поведение потребителя налагает закон некомпенсированного спроса? Очевидно, что он не следует из выбора наилучшего согласно предпочтениям набора (см. упражнение 4.C.3). В утверждениях 4.C.2 и 4.C.3 приводятся достаточные

[9] Строго говоря, это доказательство необходимо, поскольку, хотя мы и знаем, что слабая аксиома выявленных предпочтений эквивалентна закону спроса при компенсированном изменении цен, однако теперь мы имеем дело с некомпенсированными изменениями цен.

условия того, что индивидуальный спрос удовлетворяет закону некомпенсированного спроса.

Утверждение 4.C.2. Если отношение предпочтения $\succsim_i$ гомотетично, то $x_i(p, w_i)$ удовлетворяет закону некомпенсированного спроса.

Доказательство. Рассмотрим дифференцируемый случай (т. е. предположим, что функции $x_i(p, w_i)$ дифференцируемы и отношение предпочтения $\succsim_i$ представимо дифференцируемой функцией полезности). Матрица $D_p x_i(p, w_i)$ имеет вид

$$D_p x_i(p,\ w_i) = S_i(p,\ w_i) - \frac{1}{w_i} x_i(p,\ w_i) x_i(p,\ w_i)^T,$$

где $S_i(p, w_i)$ — матрица Слуцкого потребителя i. Поскольку $\left[dp \cdot x_i(p,\ w_i)\right]^2 > 0$ за исключением случая, когда $dp \cdot x_i(p, w_i) = 0$, и $dp \cdot S_i(p, w_i) dp < 0$ за исключением случая, когда dp пропорционально p, то можно сделать вывод, что матрица $D_p x_i(p, w_i)$ отрицательно определена, а следовательно, закон некомпенсированного спроса выполнен. ■

В утверждении 4.C.2 вывод получен при минимальном участии эффектов замещения: они все произвольно малы, а эффекты богатства сами по себе, оказывается, ведут себя довольно хорошо. Но, к сожалению, случай гомотетичных предпочтений – это единственный случай, для которого вышесказанное верно (см. упражнение 4.C.4). В общем случае для выполнения закона некомпенсированного спроса требуется, чтобы эффекты замещения (которые всегда ведут себя хорошо) были довольно велики, чтобы преодолеть возможную «несговорчивость» эффектов богатства.

В утверждении 4.C.3 представлен интересный результат (по работам (Mitiushin, Polterovich, 1978; Milleron, 1974); см. также обсуждение этого результата в работе (Mas-Colell, 1991)): приведено конкретное выражение, характеризующее относительное доминирование эффектов замещения.

Утверждение 4.C.3. Пусть отношение предпочтения $\succsim_i$, определенное на потребительском множестве $X = \mathbb{R}^L_+$, представимо дважды непрерывно дифференцируемой вогнутой функцией полезности $u_i(\cdot)$. Если

$$-\frac{x_i \cdot D^2 u_i(x_i) x_i}{x_i \cdot \nabla u_i(x_i)} < 4 \ \text{для всех } x_i,$$

то $x_i(p, w_i)$ удовлетворяет закону некомпенсированного спроса.

Мы не будем приводить доказательство утверждения 4.C.3. Заинтересованному и отважному читателю предлагается сделать это самостоятельно в упражнении 4.C.5.

Условие, приведенное в утверждении 4.C.3, нельзя назвать очень жестким. В частности, обратите внимание, как просто оно выглядит в случае гомотетичных предпочтений (упражнение 4.C.6). Поэтому на вопрос, насколько сильные ограничения на индивидуальное поведение налагает закон некомпенсированного спроса, по всей видимости, можно ответить так: ограничения есть, но не очень жесткие[10].

Кроме того, следует заметить, что выполнение закона некомпенсированного спроса для агрегированного спроса не требует обязательного его выполнения на индивидуальном уровне. Это может быть следствием самого агрегирования. Пример, приведенный в утверждении 4.C.4 (по работе (Hildenbrand, 1983)), не слишком реалистичен, но тем не менее очень поучителен.

Утверждение 4.C.4. Пусть все потребители имеют одинаковые предпочтения $\succsim$, определенные на множестве $\mathbb{R}_+^L$ (с индивидуальными функциями спроса $\tilde{x}(p,\ w)$). Предположим также, что индивидуальное богатство равномерно распределено на интервале $[0,\ \bar{w}]$ (строго говоря, для этого требуется континуум потребителей). Тогда функция агрегированного (точнее, среднего) спроса

$$x(p) = \int_0^{\bar{w}} \tilde{x}(p,\ w)dw$$

удовлетворяет закону некомпенсированного спроса.

Доказательство. Рассмотрим дифференцируемый случай. Возьмем $v \neq 0$. Тогда

$$v \cdot Dx(p)v = \int_0^{\bar{w}} v \cdot D_p\tilde{x}(p,\ w)vdw.$$

Кроме того,

$$D_p\tilde{x}(p,\ w) = S(p,\ w) - D_w\tilde{x}(p,\ w)\tilde{x}(p,\ w)^T,$$

где $S(p, w)$ — матрица Слуцкого для индивидуальной функции спроса x(·, ·) в точке (p, w). Следовательно,

$$v \cdot Dx(p)v = \int_0^{\bar{w}} v \cdot S(p, w)vdw - \int_0^{\bar{w}} \big(v \cdot D_w\tilde{x}(p, w)\big)\big(v \cdot \tilde{x}(p, w)\big)dw.$$

Первый член последнего выражения отрицателен, если только v не пропорционально p. Что касается второго, то заметим, что

[10] Не стремясь умалить значимость этого заключения, следует все-таки подчеркнуть, что утверждение 4.C.1, которое гласит, что закон некомпенсированного спроса сохраняется при суммировании, выполнено для не зависящих от цен правил распределения богатства, рассматриваемых в этом разделе. Если же распределение реального богатства может зависеть от цен (как это обычно и бывает в приложениях общего равновесия в части IV), то агрегированный спрос может не удовлетворять слабой аксиоме выявленных предпочтений, даже если индивидуальный спрос удовлетворяет закону некомпенсированного спроса (см. упражнение 4.C.13). Мы еще вернемся к обсуждению этого вопроса в разделе 17.F.

$$2\left(v \cdot D_w \tilde{x}(p, w)\right)\left(v \cdot \tilde{x}(p, w)\right) = \frac{d\left(v \cdot \tilde{x}(p, w)\right)^2}{dw}.$$

Таким образом, учитывая, что $\tilde{x}(p, 0) = 0$, получаем

$$-\int_0^{\bar{w}} \left(v \cdot D_w \tilde{x}(p, w)\right)\left(v \cdot \tilde{x}(p, w)\right) dw =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\bar{w}} \frac{d\left(v \cdot \tilde{x}(p, w)\right)^2}{dw} dw = -\frac{1}{2}\left(v \cdot \tilde{x}(p, \bar{w})\right)^2 \leq 0.$$

Следует также заметить, что, когда v пропорционально p, данное выражение отрицательно. ■

Как вы помните, закон некомпенсированного спроса аддитивен по группам потребителей. Следовательно, для того чтобы применить утверждение 4.С.4, нам нужна не идентичность предпочтений потребителей, а выполнение условия, что для каждого отношения предпочтения распределение богатства (условное по предпочтениям) будет равномерным на некотором интервале, включающем 0 (в действительности, достаточно невозрастания функции плотности; см. упражнение 4.С.7).

Как следует из утверждения 4.С.4, свойства агрегированного спроса зависят от того, как распределены предпочтения и богатство. Поэтому мы можем сформулировать задачу в довольно общем виде и попытаться ответить на вопрос, какие условия на распределение предпочтений и богатства гарантируют выполнение слабой аксиомы выявленных предпочтений для агрегированного спроса[11].

Как уже отмечалось в разделе 2.F, можно показать, что для функции рыночного спроса $x(p, w)$ выполнена слабая аксиома выявленных предпочтений, если для всех (p, w) матрица Слуцкого $S(p, w)$ для функции $x(p, w)$ удовлетворяет условию $dp \cdot S(p, w)dp < 0$ для всех $dp \neq 0$, непропорциональных p. Теперь проанализируем, когда это будет выполнено для функции агрегированного спроса.

Уравнение Слуцкого для функции агрегированного спроса имеет вид

$$S(p, w) = D_p x(p, w) + D_w x(p, w) x(p, w)^T. \tag{4.C.4}$$

Или, поскольку $x(p, w) = \sum_i x_i(p, \alpha_i w)$,

$$S(p, w) = D_p x(p, w) + \left[\sum_i \alpha_i D_{wi} x_i(p, \alpha_i w)\right] x(p, w)^T. \tag{4.C.5}$$

Далее обозначим через $S_i(p, w_i)$ индивидуальные матрицы Слуцкого. Тогда, суммируя индивидуальные уравнения Слуцкого, получаем

$$\sum_i S_i(p, \alpha_i w) = \sum_i D_p x_i(p, \alpha_i w) + \sum_i D_{wi} x_i(p, \alpha_i w) x_i(p, \alpha_i w)^T. \tag{4.C.6}$$

Поскольку $D_p x(p, w) = \sum_i D_p x_i(p, \alpha_i w)$, то мы можем подставить (4.С.6) в (4.С.5). Тогда

[11] В нескольких последующих абзацах мы следуем работам (Jerison, 1982) и (Freixas, Mas-Collel, 1987).

$$S(p, w) = \sum_i S_i(p, w_i) -$$

$$-\sum_i \alpha_i \left[D_{wi} x_i(p, \alpha_i w) - D_w x(p, w) \right] \left[\frac{1}{\alpha_i} x_i(p, \alpha_i w) - x(p, w) \right]^T . \qquad (4.C.7)$$

Заметим, что в силу эффектов богатства матрица Слуцкого для агрегированного спроса *не* является суммой индивидуальных матриц Слуцкого. Их разность

$$C(p, w) = \sum_i S_i(p, \alpha w) - S(p, w) =$$

$$= \sum_i \alpha_i \left[D_{wi} x_i(p, \alpha_i w) - D_w x(p, w) \right] \left[\frac{1}{\alpha_i} x_i(p, \alpha_i w) - x(p, w) \right]^T \qquad (4.C.8)$$

представляет собой ковариационную матрицу для векторов $D_{wi}x_i(p, \alpha_i w)$, характеризующих эффект богатства и пропорционально скорректированных векторами потребления $(1/\alpha_i)x_i(p, \alpha_i w)$. Первые показывают, как предельный доллар расходов распределяется между товарами, а последние дают эту же характеристику, но для среднего доллара (т. е. $(1/\alpha_i w)x_{li}(p, \alpha_i w)$ — это потребление блага l потребителем i в расчете на единицу богатства). Каждому «наблюдению» приписывается вес α_i. Заметим также, что, как это и должно быть, выполнены следующие соотношения:

$$\sum_i \alpha_i \left[D_{wi} x_i(p, \alpha_i w) - D_w x(p, w) \right] = 0 \text{ и } \sum_i \alpha_i \left[(1/\alpha_i) x_i(p, \alpha_i w) - x(p, w) \right] = 0.$$

Для индивидуальных матриц Слуцкого $S_i(\cdot, \cdot)$ всегда выполнено условие $dp \times S_i(p, \alpha_i w)dp < 0$ при $dp \neq 0$, непропорциональном p. Следовательно, *достаточным* условием того, что матрица Слуцкого для агрегированного спроса обладает желаемым свойством, является положительная полуопределенность матрицы $C(p, w)$. Грубо говоря, это будет так, если в среднем для всех потребителей имеет место *положительная зависимость* между потреблением некоторого товара (на единицу богатства) и эффектом богатства для этого товара.

На рис. 4.C.2(a) для случая $L = 2$ проиллюстрирована ситуация, когда в предположении равномерного распределения богатства между потребителями эта зависимость положительна: потребители с уровнем потребления блага выше среднего тратят бо́льшую, чем в среднем, долю своей последней единицы богатства на это благо. На рис. 4.C.2(b) имеет место противоположный результат — зависимость отрицательна[12, 13].

Как следует из нашего обсуждения, агрегированный спрос удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений в двух интересных случаях: (1) все $D_{wi}\, x_i(p, \alpha_i w)$ равны (т. е. равны эффекты богатства) и (2) равны все $(1/\alpha_i)x_i(p, \alpha_i w)$ (т. е. потребление пропорционально). В обоих случаях выполнено условие $C(p, w) = 0$, и, следовательно, $dp \cdot S(p, w)dp < 0$ при $dp \neq 0$, непропорциональном p.

[12] Убедитесь, что кривые богатство — потребление для случая, описанного в примере 4.C.1, будут действительно выглядеть так, как показано на рис. 4.C.2(b).

[13] Априори мы не можем сказать, какой из вариантов более вероятен. Поскольку спрос при нулевом богатстве равен нулю, это означает, что потребитель *какой-нибудь* доллар должен распределить между двумя благами в соответствии с долями, аналогичными долям распределения среднего доллара. Однако если уровень богатства не близок к нулю, то это необязательно верно для *предельного* доллара расходов. Может даже случиться так, что в силу начинающегося насыщения доли распределения предельного доллара могут отражать потребительские пристрастия, противоположные тем, которые справедливы для среднего доллара. Эмпирическое исследование данной проблемы можно найти в работе (Hildenbrand, 1994).

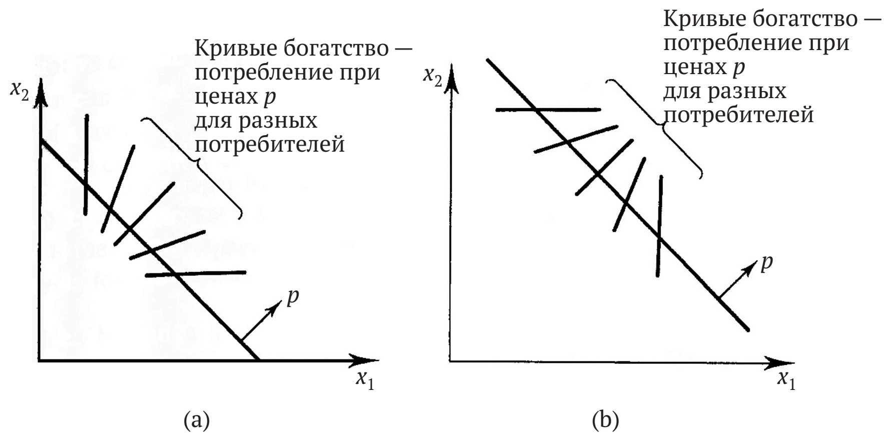


Рис. 4.C.2. Взаимосвязь расходов на товар в расчете на единицу богатства с эффектом богатства для данного товара для разных потребителей, когда все потребители имеют одинаковое богатство. (a) Положительная зависимость. (b) Отрицательная зависимость

Случай (1) имеет интересное следствие. Если все потребители имеют косвенные функции полезности, представимые в форме Гормана $v_i(p, w_i) = a_i(p) + b(p)w$, где коэффициент $b(p)$ одинаков для всех потребителей, то (как мы видели в разделе 4.B) эффекты богатства для всех потребителей одинаковы, а значит, можно сделать вывод, что слабая аксиома выявленных предпочтений выполнена. Как мы знаем из раздела 4.B, такое семейство косвенных функций полезностей является одним из следствий инвариантности агрегированного спроса к перераспределению богатства. Таким образом, условие выполнения слабой аксиомы выявленных предпочтений для агрегированного спроса при фиксированном распределении богатства является менее жестким, чем условие инвариантности к перераспределению богатства, рассмотренное в разделе 4.B. Так, если выполнено второе условие, то первое также выполнено, но при этом агрегированный спрос (при фиксированном распределении богатства) может удовлетворять слабой аксиоме выявленных предпочтений, даже если он не инвариантен к перераспределению богатства (например, индивидуальные предпочтения могут быть гомотетичными, но не одинаковыми для всех потребителей).

Потратив столько времени на изучение слабой аксиомы выявленных предпочтений, вы можете спросить: а что можно сказать о сильной аксиоме выявленных предпочтений? Мы не рассматривали сильную аксиому по трем причинам.

Во-первых, слабая аксиома выявленных предпочтений — робастное свойство, тогда как сильная – нет (как вы помните, сильная аксиома дает симметричную матрицу Слуцкого). Априори шансы, что она будет выполнена в реальной экономике, близки к нулю. Например, если мы возьмем группу потребителей с одинаковыми предпочтениями и богатством, тогда агрегированный спрос, очевидно, будет удовлетворять сильной аксиоме выявленных предпочтений. Однако если мы затем чуть-чуть изменим предпочтения всех потребителей, то отрицательная полуопределенность матриц Слуцкого (а следовательно, и слабая аксиома выявленных предпочтений) по-прежнему сохранится, тогда как симметричность (и, следовательно, сильная аксиома выявленных предпочтений) почти наверняка нет.

Во-вторых, бóльшая часть строгих результатов теории общего равновесия, полученных в рамках позитивного подхода (они будут рассмотрены в части IV, особенно в главах 15 и 17), которые порождают желание применить теорию агрегирования, рассматриваемую в этой главе, зависит от выполнения на агрегированном уровне слабой аксиомы выявленных предпочтений, а не сильной.

В-третьих, хотя можно было бы предположить, что существование отношения предпочтения, объясняющего агрегированное поведение (то, что мы получаем из слабой аксиомы выявленных предпочтений), могло бы быть условием использования мер агрегированного спроса (таких как агрегированный потребительский излишек) в качестве индикаторов благосостояния, однако, как мы увидим в разделе 4.D, в действительности в любом случае требуется несколько больше.

4.D. Агрегированный спрос и существование репрезентативного потребителя

В этом разделе мы покажем, в каком случае можно получить содержательные меры агрегированного благосостояния, основываясь на функции агрегированного спроса и мерах оценки благосостояния для индивидуальных потребителей, рассмотренных в разделе 3.I. Точнее, в каком случае мы можем считать, что функция агрегированного спроса порождена неким *репрезентативным потребителем*, чьи предпочтения могут быть использованы в качестве меры агрегированного социального (или *общественного*) благосостояния.

В качестве отправной точки рассмотрим правило распределения богатства $\left(w_1(p, w), \ldots, w_I(p, w)\right)$, согласно которому при каждом уровне агрегированного богатства $w \in \mathbb{R}$ каждому индивиду приписывается определенный индивидуальный уровень богатства. Предположим, что $\sum_i w_i(p, w) = w$ для всех (p, w), и будем считать, что все функции $w_i(\cdot, \cdot)$ непрерывны и однородны первой степени. Как мы показали в разделах 4.B и 4.C, в этом случае агрегированный спрос имеет вид обычной функции рыночного спроса $x(p, w) = \sum_i x_i\left(p, w_i(p, w)\right)$. В частности, функция $x(p, w)$ непрерывна, однородна нулевой степени и удовлетворяет закону Вальраса. Важно не забывать, что функция агрегированного спроса $x(p, w)$ зависит от правила распределения богатства (за исключением специальных случаев, отмеченных в разделе 4.B).

Полезно начать с обсуждения того, что понимается под существованием репрезентативного потребителя в рамках позитивного или поведенческого подхода.

Определение 4.D.1. *Репрезентативный потребитель* с точки зрения позитивной теории (*п-репрезентативный потребитель*) существует в том случае, если существует рациональное отношение предпочтения $\succsim$ на множестве $\mathbb{R}_+^L$, такое что функция агрегированного спроса $x(p, w)$ является в точности функцией вальрасианского спроса, порожденной данным отношением предпочтения, т. е. $x(p, w) \succ x$, если $x \neq x(p, w)$ и $p \cdot x \leq w$.

Таким образом, п-репрезентативного потребителя следует трактовать как некоторого вымышленного индивида, чья задача максимизации полезности на бюджетном множестве общества $\left\{x \in \mathbb{R}^L_+ : p \cdot x \le w\right\}$ могла бы породить функцию агрегированного спроса для данной экономики.

Другими словами, если существует п-репрезентативный потребитель, то агрегированный спрос можно рассматривать как индивидуальный спрос данного репрезентативного потребителя и использовать его для оценки изменения благосостояния так же, как мы делали в разделе 3.I[14]. Однако, хотя это условие является необходимым для существования искомого свойства агрегированного спроса, оно не является достаточным. Нам также нужен способ приписывания уровней благосостояния этой фиктивной индивидуальной функции спроса, что ведет к определению репрезентативного потребителя с точки зрения *нормативного* подхода. Однако для того чтобы это сделать, сначала надо уточнить, что понимается под термином *общественное благосостояние*. Для этого мы введем понятие *функции общественного благосостояния*, функции, которая характеризует «полезность общества» при любом наборе индивидуальных полезностей.

Определение 4.D.2. *Функция общественного благосостояния* (*Бергсона — Самуэльсона*) — это функция $W : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}$, которая приписывает значение полезности всем возможным векторам уровней полезности I потребителей в экономике $(u_1, \ldots, u_I) \in \mathbb{R}^I$.

В основе функции общественного благосостояния $W(u_1, \ldots, u_I)$ лежит идея о корректном выражении мнения общества о том, как должны сравниваться индивидуальные полезности, для того чтобы упорядочить возможные общественные исходы. (Мы в этом разделе не затрагиваем вопроса о том, откуда берется это ранжирование общественных предпочтений. Эта тема подробно обсуждается в главах 21 и 22.) Предположим также, что функция общественного благосостояния является возрастающей, вогнутой и, когда необходимо, дифференцируемой.

Предположим теперь, что существует некоторый процесс такого перераспределения богатства при данных ценах p и агрегированном уровне богатства w, что достигается максимум общественного благосостояния (например, можно считать, что центральная власть беневолентна). Другими словами, при любых (p, w) распределение богатства $\left(w_1(p, w), \ldots, w_I(p, w)\right)$ является решением следующей задачи:

$$\max_{w_1,\ldots,w_I} W\left(v_1(p, w_1), \ldots, v_I(p, w_I)\right) \text{ при } \sum_{i=1}^{I} w_i \le w, \tag{4.D.1}$$

[14] Заметим, что если п-репрезентативный потребитель существует, то агрегированный спрос удовлетворяет свойствам, отмеченным в разделе 4.C. Действительно, агрегированный спрос удовлетворяет не только слабой аксиоме выявленных предпочтений, но также и сильной аксиоме. Таким образом, свойство агрегирования, которое мы обсуждаем в данном разделе, сильнее, чем то, которое рассматривалось в разделе 4.C.

где $v_i(p, w_i)$ — косвенная функция полезности потребителя i[15 16]. Значение целевой функции задачи (4.D.1) в оптимальной точке дает общественную косвенную функцию полезности $v(p, w)$. Как следует из утверждения 4.D.1, эта косвенная функция полезности является косвенной функцией полезности п-репрезентативного потребителя при функции агрегированного спроса $x(p,\ w) = \sum_i x_i\left(p,\ w_i(p,\ w)\right)$.

Утверждение 4.D.1. Пусть при каждом уровне цен p и агрегированном богатстве p распределение богатства $\left(w_1(p,\ w),\ \ldots,\ w_I(p,\ w)\right)$ является решением задачи (4.D.1). Тогда функция значения $v(p, w)$ задачи (4.D.1) является косвенной функцией полезности п-репрезентативного потребителя при функции агрегированного спроса $x(p,\ w) = \sum_i x_i\left(p,\ w_i(p,\ w)\right)$.

Доказательство. В упражнении 4.D.1 вас просят показать, что функция $v(p, w)$ действительно обладает свойствами косвенной функции полезности. Тогда для доказательства данного утверждения можно воспользоваться тождеством Роя и с его помощью получить из $v(p, w)$ функцию вальрасианского спроса, которую мы обозначим через $x_R(p, w)$, а затем убедиться, что она в действительности совпадает с $x(p, w)$.

Начнем с того, что выпишем условия первого порядка задачи (4.D.1) при данных (p, w). Пренебрегая граничными решениями, получим, что для некоторого $\lambda \geq 0$ должно быть выполнено

$$\lambda = \frac{\partial W}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial w_1} = \ldots = \frac{\partial W}{\partial v_I}\frac{\partial v_I}{\partial w_I}. \tag{4.D.2}$$

(Для краткости записи мы опустили точку, в которой вычисляются производные.) Условие (4.D.2) говорит о том, что при общественно оптимальном распределении богатства общественная полезность одной дополнительной единицы богатства одинакова вне зависимости от того, кто ее получает.

По тождеству Роя $x_R(p,\ w) = -\left[1/(\partial v(p,\ w)/\partial w)\right]\nabla_p v(p,\ w)$. Поскольку $v(p, w)$ — функция значения задачи (4.D.1), то $\partial v\ /\ \partial w = \lambda$

[15] В этом разделе мы предполагаем, что прямые функции полезности $u_i(\cdot)$ вогнуты. Это позволяет нам быть уверенными, что во всех рассматриваемых оптимизационных задачах условия первого порядка являются достаточными для определения глобальных оптимумов. В частности, тогда $v_i(p, \cdot)$ являются вогнутыми функциями по w_i.

[16] В упражнении 4.D.1 вас просят показать, что при желании задачу (1) можно эквивалентным образом сформулировать как задачу максимизации общественной полезности, но не по распределению богатства, а по распределению наборов благ при совокупной стоимости при ценах p, не превышающей w. Тот факт, что при оптимальном перераспределении благ мы также должны ограничиваться перераспределением богатства, по сути, является вариантом второй фундаментальной теоремы экономики благосостояния, подробное обсуждение которой предлагается в главе 16.

(см. раздел M.K математического приложения). Кроме того, для любого товара l по правилу дифференцирования сложной функции с учетом (4.D.2) (что эквивалентно применению теоремы об огибающей) получаем

$$\frac{\partial v}{\partial p_l} = \sum_i \frac{\partial W}{\partial v_i}\frac{\partial v_i}{\partial p_l} + \lambda \sum_i \frac{\partial w_i}{\partial p_l} = \sum_i \frac{\partial W}{\partial v_i}\frac{\partial v_i}{\partial p_l},$$

где второе равенство получено с учетом того, что из $\sum_i w_i(p,\ w) = w$ для всех (p, w) следует $\sum_i (\partial w_i\ /\ \partial p_l) = 0.$ Таким образом, в матричной записи имеем

$$\nabla_p v(p,\ w) = \sum_i (\partial W\ /\ \partial v_i)\nabla_p v_i\left(p,\ w_i(p,\ w)\right).$$

Наконец, из условия первого порядка (4.D.2) и тождества Роя получаем

$$\begin{aligned} x_R(p,\ w) &= -\frac{1}{\lambda}\sum_i \left[\frac{\lambda}{\partial v_i\ /\ \partial w_i}\right]\nabla_p v_i\left(p,\ w_i(p,\ w)\right) = \\ &= -\sum_i \left[\frac{1}{\partial v_i\ /\ \partial w_i}\right]\nabla_p v_i\left(p,\ w_i(p,\ w)\right) = \\ &= \sum_i x_i\left(p,\ w_i(p,\ w)\right) = x(p,\ w), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. ■

Вооружившись утверждением 4.D.1, мы теперь можем ввести понятие *репрезентативного потребителя с точки зрения нормативного подхода*.

Определение 4.D.3. П-репрезентативный потребитель с предпочтениями $\succsim$ относительно агрегированного спроса $x(p,\ w) = \sum_i x_i\left(p,\ w_i(p,\ w)\right)$ является *репрезентативным потребителем с нормативной точки зрения* (*н-репрезентативным потребителем*) относительно функции общественного благосостояния $W(\cdot)$, если для всех (p, w) распределение богатства $\left(w_1(p,\ w),\ \ldots,\ w_I(p,\ w)\right)$ является решением задачи (4.D.1) и, следовательно, функция значения задачи (4.D.1) является косвенной функцией полезности, описывающей отношение предпочтения $\succsim$.

Если существует н-репрезентативный потребитель, то его предпочтения определяют благосостояние общества, и функция агрегированного спроса $x(p, w)$ может быть использована для оценки изменения благосостояния с помощью тех методов, которые были описаны в разделе 3.I. Однако используя эту технику, не стоит забывать о правиле распределения богатства (т. е. о том распределении богатства, которое является решением задачи (4.D.1) при данной функции общественного благосостояния), лежащем в основе всего построения, и поэтому «уровень богатства» всегда следует понимать как «оптимально распределенный уровень богатства». Дальнейшее обсуждение этого вопроса можно найти в работах (Samuelson, 1956; Chipman, Moore, 1979).

Пример 4.D.1. Пусть все потребители имеют гомотетичные предпочтения, представимые однородными первой степени функциями полезности. Рассмотрим функцию общественного благосостояния $W(u_1, \ ..., \ u_I) = \sum_i \alpha_i \ln u_i$, где $\alpha_i > 0$ и $\sum_i \alpha_i = 1$. Тогда оптимальное распределение богатства (для задачи (4.D.1)) характеризуется правилом независимости от цен, рассмотренным нами в разделе 4.C, т. е. $w_i(p, w) = \alpha_i w$. (Вас просят продемонстрировать этот факт в упражнении 4.D.6.) Следовательно, в гомотетичном случае агрегированный спрос $x(p, \ w) = \sum_i x_i(p, \ \alpha_i w)$ можно трактовать как спрос н-репрезентативного потребителя, порожденный данной функцией общественного благосостояния. ■

Упражнение 4.D.2. Пусть предпочтения всех потребителей представимы косвенными функциями полезности, имеющими форму Гормана $v_i(p, w) = a_i(p) + b(p)w_i$. Обратите внимание, что $b(p)$ не имеет индекса потребителя i. Как вы помните, в частности, это возможно в том случае, когда предпочтения потребителей квазилинейны по общему благу-измерителю. Из раздела 4.B нам также известно, что в этом случае агрегированный спрос $x(p, w)$ не зависит от правила распределения богатства[17].

Рассмотрим теперь *утилитаристскую* функцию общественного благосостояния $\sum_i u_i$. Тогда *любое* правило распределения богатства $\left(w_1(p, \ w), \ ..., \ w_I(p, \ w)\right)$ является решением оптимизационной задачи (4.D.1), и из этой задачи получаем косвенную функцию полезности очень простого вида: $v(p, \ w) = \sum_i a_i(p) + b(p)w$. (Вас просят убедиться в этом в упражнении 4.D.7.) Тогда один из выводов, который отсюда следует, заключается в том, что когда косвенные функции полезности имеют форму Гормана (с одинаковым $b(p)$) и функция общественного благосостояния является утилитаристской, агрегированный спрос *всегда* можно трактовать как спрос, порожденный н-репрезентативным потребителем.

Когда потребители имеют косвенные функции полезности в форме Гормана (с одинаковым $b(p)$), концепцию н-репрезентативного потребителя можно усилить. Вообще говоря, предпочтения репрезентативного потребителя зависят от вида функции общественного благосостояния, *но не в этом случае*. Действительно, убедимся в том, что если косвенные функции полезности потребителей имеют форму

[17] Как обычно, мы пренебрегаем ограничением неотрицательности потребления.

Гормана (с одинаковым $b(p)$), то предпочтения репрезентативного потребителя не зависят от того, какая именно функция общественного благосостояния используется[18]. Другими словами, мы покажем, что $v(p,\ w) = \sum_i a_i(p) + b(p)w$ — допустимая функция косвенной полезности для н-репрезентативного потребителя при *любой* функции общественного благосостояния $W(u_1, \ldots, u_I)$.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим некоторую функцию общественного благосостояния $W(\cdot)$ и обозначим функцию значения задачи (4.D.1) при функции общественного благосостояния $W(\cdot)$ через $v^*(p, w)$. Мы должны показать, что упорядочение, порожденное функциями $v(\cdot)$и $v^*(\cdot)$, будет одним и тем же, т. е. для любых пар (p, w) и (p', w'), таких что $v(p, w) < v(p', w')$, имеем: $v^*(p, w) < v^*(p', w')$. Возьмем векторы индивидуального богатства $(w_1, \ldots, w_I)$ и $(w'_1,\ \ldots,\ w'_I)$, являющиеся решением задачи (4.D.1) при целевой функции $W(\cdot)$ и ценах (p, w) и (p', w') соответственно. Введем обозначения: $u_i = a_i(p) + b(p)w_i$, $u'_i = a_i(p) + b(p)w'_i$, $u = (u_1, \ldots, u_I)$ и $u' = (u'_1,\ \ldots,\ u'_I)$. Тогда $v^*(p, w) = W(u)$ и $v^*(p', w') = W(u')$. Кроме того, $v(p,\ w) = \sum_i a_i(p) + b(p)w = \sum_i u_i$ и аналогично $v(p',\ w') = \sum_i u'_i$. Таким образом, из $v(p, w) < v(p', w')$ следует, что $\sum_i u_i < \sum_i u'_i$. Мы утверждаем, что $\nabla W(u') \cdot (u - u') < 0$, где $W(\cdot)$ — вогнутая функция, откуда следует искомый результат: $W(u) < W(u')$[19]. Согласно (4.D.2) в оптимуме выполнено соотношение $(\partial W / \partial v_i)(\partial v_i / \partial w_i) = \lambda$ для всех i, причем в рассматриваемом случае $\partial v_i / \partial w_i = b(p)$ для всех i. Следовательно, $\partial W / \partial v_i = \partial W / \partial v_j > 0$ для любых i, j. Это означает, что из $\sum_i u_i < \sum_i u'_i$ следует, что $\nabla W(u') \times (u - u') < 0$.

Этот факт, возможно, легче воспринять, учитывая, что если косвенные функции полезности имеют форму Гормана (с одинаковым $b(p)$), то (p', w') лучше с общественной точки зрения, чем (p, w), при утилитаристской функции общественного благосостояния $\sum_i u_i$ *тогда и только тогда*, когда по сравнению с (p, w) (p', w') удовлетворяет следующему *критерию потенциальной компенсации*: для любого распределения $(w_1, \ldots, w_I)$ богатства w существует распределение $(w'_1, \ldots, w'_I)$ богатства w', такое что $v_i(p',\ w'_i) > v_i(p,\ w_i)$ для всех i. Убедиться в этом довольно просто. Пусть

[18] Но при этом, безусловно, оптимальные правила распределения богатства зачастую зависят от вида функции общественного благосостояния. Только для утилитаристской функции общественного благосостояния неважно, как именно распределено богатство.

[19] Действительно, из вогнутости $W(\cdot)$ следует, что $W(u') + \nabla W(u') \cdot (u - u') \geq W(u)$ (см. раздел М.С математического приложения).

$$\left(\sum_i a_i(p') + b(p')w'\right) - \left(\sum_i a_i(p) + b(p)w\right) = c > 0.$$

Тогда уровни богатства w_i' неявно определяются условием $a_i(p') + b(p')w_i' = a_i(p) + b(p)w_i + c / I$, что и требовалось[20]. Если нам известно, что (p', w') по сравнению с (p, w) удовлетворяет критерию потенциальной компенсации, то непосредственно из формулировки оптимизационной задачи (4.D.1) следует, что (p', w') лучше, чем (p, w), для любого н-репрезентативного потребителя, т. е. для любой функции общественного благосостояния, какую бы мы ни использовали (см. упражнение 4.D.8).

Два только что представленных свойства (независимость предпочтений репрезентативного потребителя от функции общественного благосостояния и критерий потенциальной компенсации) мы еще обсудим в разделах 10.F и 22.C. Здесь мы лишь подчеркнем, что эти свойства не являются общими свойствами н-репрезентативных потребителей. Выбирая правила распределения богатства, являющиеся решением (4.D.1), мы можем генерировать н-репрезентативного потребителя для любого множества индивидуальных полезностей и любой функции общественного благосостояния. Для того чтобы выполнялись свойства, которые мы только что рассматривали, индивидуальные предпочтения должны быть представимы косвенными функциями полезности в форме Гормана (с одинаковым $b(p)$). ■

Крайне важно подчеркнуть различие между концепциями п-репрезентативного потребителя и н-репрезентативного потребителя. *Не*верно считать, что если агрегированный спрос может быть порожден п-репрезентативным потребителем, то предпочтения этого репрезентативного потребителя имеют нормативный характер. Возможна даже ситуация, когда п-репрезентативный потребитель существует, но *не* существует функции общественного благосостояния, порождающей н-репрезентативного потребителя. Мы несколько подробнее остановимся на этом в следующих параграфах (см. также (Dow, Werlang, 1988; Jerison, 1994)).

Пусть у нас есть правило распределения богатства $\left(w_1(p, w), \ldots, w_I(p, w)\right)$, и предположим, что существует п-репрезентативный потребитель с функцией полезности $u(x)$ при агрегированном спросе $x(p, w) = \sum_i x_i\left(p, w_i(p, w)\right)$. В принципе, используя технику восстановления предпочтений, представленную в разделе 3.H, можно определить предпочтения репрезентативного потребителя на основе информации о $x(p, w)$. Теперь зафиксируем произвольную комбинацию цен и богатства $(\bar{p}, \bar{w})$ и положим $\bar{x} = x(\bar{p}, \bar{w})$. Относительно вектора агрегированного потребления $\bar{x}$ мы можем определить множество наборов «по крайней мере не хуже чем»

[20] Мы по-прежнему пренебрегаем ограничением на неотрицательность богатства.

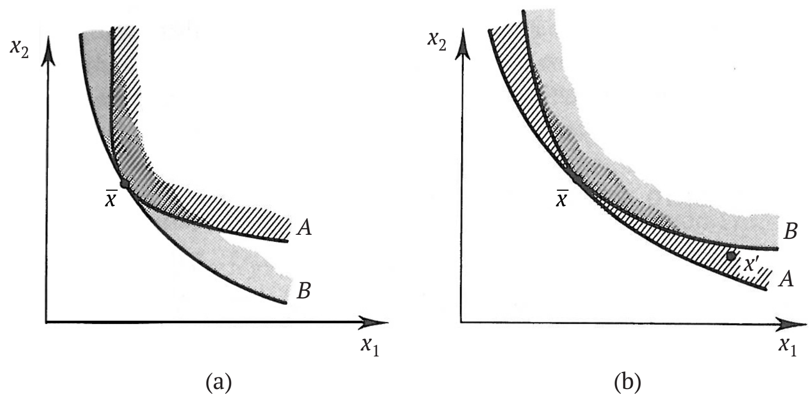
для репрезентативного потребителя:

$$B = \left\{x \in \mathbb{R}^L_+ : u(x) \geq u(\bar{x})\right\} \subset \mathbb{R}^L_+.$$

Далее, положим $\bar{w}_i = w_i(\bar{p},\ \bar{w})$ и $\bar{x}_i = x_i(\bar{p},\ \bar{w})$ и рассмотрим множество

$$A = \left\{x = \sum_i x_i : x_i \succsim_i \bar{x}_i \text{ для всех } i\right\} \subset \mathbb{R}^L_+.$$

Другими словами, A — множество векторов агрегированного потребления, для которых существует такое распределение товаров между потребителями, что положение каждого потребителя не хуже, чем при $(\bar{x}_1,\ \ldots,\ \bar{x}_I)$. Границу этого множества иногда называют *контуром Скитовского*. Заметим, что множества A и B поддерживаются вектором цен $\bar{p}$ в точке $\bar{x}$ (см. рис. 4.D.1).



$$A = \left\{x = \sum_i x_i : u_i(x_i) \geq u_i(\bar{x}_i) \text{ для всех } i\right\}$$
$$B = \left\{x \in \mathbb{R}^2_+ : u(x) \geq u(\bar{x})\right\}$$

Рис. 4.D.1. Сравнение множества «по крайней мере не хуже чем» п-репрезентативного потребителя с суммой множеств «по крайней мере не хуже чем» индивидуальных потребителей. (a) п-репрезентативный потребитель может быть н-репрезентативным потребителем. (b) п-репрезентативный потребитель не может быть н-репрезентативным потребителем

Если данное распределение богатства получено из решения задачи максимизации общественного благосостояния вида (4.D.1) (т. е. если п-репрезентативный потребитель в действительности является н-репрезентативным потребителем), то это налагает существенные ограничения на взаимосвязь множеств A и B: в этом случае каждый элемент множества A должен также являться и элементом множества B. Это обусловлено тем, что функция общественного благосостояния, соответствующая н-репрезентативному потребителю, возрастает по уровню полезности каждого потребителя (и, следовательно, любому агрегированному потребительскому набору, который может быть распределен так, чтобы гарантировать каждому потребителю уровень полезности не ниже уровня, соответствующего оптимальному распределению $\bar{x}$, должен приносить бо́льшую общественную полезность, чем последний (см. упражнение 4.D.4)). Таким образом, *необходимое* условие существования н-репрезентативного потребителя имеет вид $A \subset B$. Случай, когда это необходимое условие выполнено, проиллюстрирован на рис. 4.D.1(a).

Однако при определенных условиях п-репрезентативный потребитель с функцией полезности $u(x)$ может существовать, когда это условие не выполнено, как показано на рис. 4.D.1(b). Для того чтобы несколько дальше продвинуться в понимании этого вопроса, в упражнении 4.D.9 вас просят показать, что из $A \subset B$ следует, что матрица $\sum_i S_i(\bar{p}, \bar{w}_i) - S(\bar{p}, \bar{w})$ положительно полуопределена. Здесь $S(p, w)$ и $S_i(p, w_i)$ — матрицы Слуцкого для агрегированного и индивидуального спроса соответственно. Грубо говоря, можно сказать, что эффекты замещения для агрегированного спроса должны быть по абсолютной величине больше суммы индивидуальных эффектов замещения (геометрически это означает, что граница множества B в точке $\bar{x}$ должна быть более пологой, чем граница множества A). Это наблюдение позволяет нам построить простые примеры ситуаций, когда агрегированный спрос может быть рационализирован предпочтениями, но при этом н-репрезентативного потребителя может не существовать.

Предположим, например, что правило распределения богатства имеет вид: $w_i(p, w) = \alpha_i w$. Предположим также, что матрица $S(p, w)$ симметрична для всех (p, w) (при $L = 2$ это условие выполнено автоматически). Тогда, как гласит теорема об интегрируемости (см. раздел 3.H), достаточное условие существования соответствующих предпочтений имеет вид: для всех (p, w) выполнено $dp \cdot S(p, w)dp < 0$ (p, w) при $dp \neq 0$, непропорциональных p. С другой стороны, как мы только что видели, необходимым условием существования н-репрезентативного потребителя является положительная полуопределенность матрицы $C(\bar{p}, \bar{w}) = \sum_i S_i(\bar{p}, \bar{w}_i) - S(\bar{p}, \bar{w})$ (это та самая матрица, которую мы рассматривали в разделе 4.C, см. выражение 4.C.8). Таким образом, если матрица $S(p, w)$ удовлетворяет достаточному условию для всех (p, w), но при этом матрица $C(\bar{p}, \bar{w})$ не является положительно полуопределенной (т. е. эффекты богатства таковы, что $S(\bar{p}, \bar{w})$ «менее отрицательна», чем $\sum_i S_i(\bar{p}, \bar{w}_i)$), то п-репрезентативный потребитель существует, но он не может стать н-репрезентативным потребителем при любой функции общественного благосостояния (см. пример, приведенный в упражнении 4.D.10). В любом примере такого рода мы приходим к агрегированному потреблению, которое могло бы удовлетворять критерию потенциальной компенсации (т. е. благосостояние каждого потребителя могло бы повыситься при соответствующем перераспределении), но при этом оно рассматривается как инфериорное при функции полезности, рационализирующей агрегированный спрос (на рис. 4.D.1(b) это может быть перемещение, например, из точки $\bar{x}$ в точку x'.)

Вывод из вышесказанного довольно очевиден: существование предпочтений, объясняющих поведение, недостаточно для того, чтобы придать им значимость с точки зрения благосостояния. Для того чтобы последнее имело место, необходимо также, чтобы эти предпочтения были разумны. ■

Приложение А. Регуляризирующие эффекты агрегирования

Это приложение посвящено рассмотрению следующего момента: как мы знаем, агрегирование может оказывать разрушающее действие на хорошие свойства индивидуального спроса, но, с другой стороны, агрегирование может быть очень удобно в плане *регуляризирующих* эффектов. Говоря о регуляризирующих эффектах, мы имеем в виду, что средний (в расчете на одного потребителя) спрос имеет тенденцию быть более непрерывным и гладким, как функция от цен, чем отдельные (индивидуальные) компоненты полученной суммы.

Как вы помните, если предпочтения строго выпуклы, то функции индивидуального спроса являются непрерывными. Мы уже отмечали, что в этом случае агрегированный спрос также будет непрерывен. Но средний спрос может быть (почти) непрерывен, даже если индивидуальный спрос не обладает таким свойством. Ключевым здесь является вопрос о *разбросе* индивидуальных предпочтений.

Пример 4.AA.1. Рассмотрим двухтоварную экономику, в которой потребители имеют квазилинейные предпочтения по второму благу (которое выступает благом-измерителем). При этом первое благо доступно только в целочисленных объемах, и потребители хотели бы иметь не больше одной единицы этого блага. Таким образом, если положить полезность от нулевого объема первого блага равной единице, то предпочтения потребителя i полностью описываются величиной v_{1i}, полезностью потребления одной единицы первого блага, выраженной в благе-измерителе. Тогда очевидно, что спрос на первое благо потребителя i представляет собой следующее отображение:

$$x_{1i}(p_1) = \begin{cases} 1, \text{ если } p_1 < v_{1i}, \\ \{0, 1\}, \text{ если } p_1 = v_{1i}, \\ 0, \text{ если } p_1 > v_{1i}. \end{cases}$$

Это отображение спроса проиллюстрировано на рис. 4.AA.1(a). Как видно из рисунка, индивидуальный спрос не является непрерывным: имеет место скачок спроса с 0 до 1 при $p_1 = v_{1i}$.

Предположим теперь, что в экономике много потребителей. Более того, рассмотрим предельный случай, когда в экономике континуум потребителей. Тогда мы можем сказать, что индивидуальные предпочтения разбросаны, если не существует

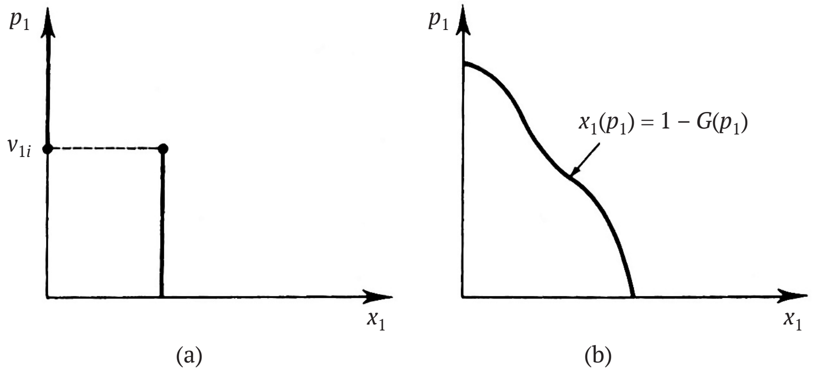


Рис. 4.AA.1. Регуляризирующий эффект агрегирования.
(a) Индивидуальный спрос. (b) Агрегированный спрос,
когда распределение величин v_1 описывается функцией $G(\cdot)$

концентрированной группы потребителей, имеющих некоторое конкретное значение v_1, точнее, если функция статистического распределения величин v_1, $G(v_1)$, является непрерывной. Обозначим через $x_1(p_1)$ средний спрос на первое благо. Тогда имеем: $x_1(p_1)$ = «масса потребителей с $v_1 > p_1$» = $1 - G(p_1)$.

Таким образом, агрегированный спрос $x_1(\cdot)$, проиллюстрированный на рис. 4.AA.1(b), представляет собой хорошую непрерывную функцию, несмотря на то что ни одно из отображений индивидуального спроса таковым не является. Заметим, что, имея только конечное число потребителей, мы бы не смогли добиться такого результата: функция распределения $G(\cdot)$ не была бы непрерывной, но если потребителей очень много, то она становится почти непрерывной. ■

Мы вернемся к обсуждению регуляризирующих эффектов агрегирования в разделе 17.I и покажем, что в общем случае (без ограничений на разброс предпочтений) агрегирование большого количества отображений спроса порождает (почти) *выпуклозначное* отображение среднего спроса.

Литература

Chipman J.S., Moore J. (1979). On social welfare functions and aggregation of preferences // *Journal of Economic Theory*. **21**. 111–139.

Deaton A., Muellbauer J. (1980). *Economics and Consumer Behavior*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Dow J., Werlang S. (1988). The consistency of welfare judgments with a representative consumer // *Journal of Economic Theory*. **44**. 265–280.

Freixas X., Mas-Colell A. (1987). Engel curves leading to the weak axiom in the aggregate // *Econometrica*. **21**. 63–80.

Hildenbrand W. (1983). On the “law of demand” // *Econometrica*. **51**. 997–1020.

Hildenbrand W. (1994). *Market Demand: Theory and Empirical Evidence*. Princeton: Princeton University Press.

Jerison M. (1982). The representative consumer and the weak axiom when the distribution of income is fixed // Working paper. Department of Economics, SUNY Albany.

Jerison M. (1994). Optimal income distribution rules and representative consumers // *Review of Economic Studies*. **61**. 739–771.

Jorgenson D. (1990). Aggregate consumer behavior and the measurement of social welfare // *Econometrica*. **58**. 1007–1030.

Lau L. (1982). A note on the fundamental theorem of exact aggregation // *Economic letters*. **9**. 119–126.

Mas-Collel A. (1991). On the uniqueness of equilibrium once again. Chap. 12 in *Equilibrium Theory and Applications* / W. Barnett, B. Cornet, C. d’Aspremont, J. Gabszewicz, A. Mas-Colell (ed.). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Milleron J.C. (1974). Unicité et stabilité de l’équilibre en économie de distribution. Seminaire d’Econométrie Roy-Malinvaud, preprint.

Mitiushin L.G., Polterovich W.M. (1978). Criteria for monotonicity of demand functions [in Russian] // *Ekonomika i Matematicheskie Metody*. **14**. 122–128.

Samuelson P. (1956). Social indifference curves // *Quarterly Journal of Economics*. **70**. 1–22.

Упражнения

4.B.1$^{\text{B}}$. Докажите часть утверждения 4.B.1, касающуюся достаточности. Покажите также, что если предпочтения представимы косвенными функциями полезности в форме Гормана с одинаковыми $b(p)$, то эти предпочтения можно описать функциями расходов вида $e_i(p, u_i) = c(p)u_i + d_i(p)$.

4.B.2$^{\text{B}}$. Пусть в экономике I потребителей и L товаров. Потребители различаются только уровнем богатства w_i и параметром вкуса s_i, который можно трактовать как *размер семьи*. Обозначим косвенную функцию полезности потребителя i через $v(p, w_i, s_i)$, а соответствующую функцию вальрасианского спроса потребителя i — через $x(p, w_i, s_i)$.

a) Зафиксируем $(s_1, \ldots, s_I)$. Покажите, что если для любого распределения богатства $(w_1, \ldots, w_I)$ агрегированный спрос может быть представлен как функция только от p и агрегированного богатства $w = \sum_i w_i$ (или, эквивалентно, среднего богатства) и если отношения предпочтения всех потребителей $\succsim_i$ гомотетичны, то все потребители должны иметь одинаковые предпочтения (и поэтому спрос $x(p, w_i, s_i)$ не должен зависеть от s_i).

b) Приведите достаточное условие того, что агрегированный спрос зависит только от агрегированного богатства и $\sum_i s_i$ (или, эквивалентно, среднего богатства и среднего размера семьи).

4.C.1$^{\text{C}}$. Докажите, что если $x_i(p, w_i)$ удовлетворяет закону некомпенсированного спроса, то матрица $D_p x_i(p, w_i)$ отрицательно полуопределена (т. е. $dp \cdot D_p x_i(p, w_i) dp \leq 0$ для всех dp). Покажите также, что если матрица $D_p x_i(p, w_i)$ отрицательно определена для всех p, то $x_i(p, w_i)$ удовлетворяет закону некомпенсированного спроса (вторую часть утверждения доказать сложнее).

4.C.2$^{\text{A}}$. Докажите вариант утверждения 4.C.1, используя (достаточные) дифференциальные версии закона некомпенсированного спроса и слабой аксиомы выявленных предпочтений. (Напомним, что в разделе 2.F было показано, что достаточное условие выполнения слабой аксиомы выявленных предпочтений имеет вид: $v \cdot S(p, w)v < 0$ для любого v, непропорционального p.)

4.C.3$^{\text{A}}$. Приведите графический пример для случая двух товаров, когда отношение предпочтения, порождающее вальрасианский спрос, не удовлетворяет закону некомпенсированного спроса. Проинтерпретируйте полученный результат.

4.C.4$^{\text{C}}$. Покажите, что если отношение предпочтения $\succsim_i$ на множестве $\mathbb{R}^2_+$ характеризуется L-образными кривыми безразличия и функция спроса $x_i(p, w_i)$ удовлетворяет закону некомпенсированного спроса, то отношение предпочтения $\succsim_i$ должно быть гомотетичным. (*Подсказка*: из условия, что кривые безразличия L-образны, следует, что $S_i(p, w_i) = 0$ для всех (p, w_i). Покажите, что если $D_{wi}x_i(\bar{p}, \bar{w}_i) \neq (1 / \bar{w}_i)x_i(\bar{p}, \bar{w}_i)$, то существует вектор $v \in \mathbb{R}^L$, такой что $v \cdot D_p x_i(\bar{p}, \bar{w}_i)v > 0$.)

4.C.5[C]. Докажите утверждение 4.C.3. Для удобства мы можем положить богатство равным единице, т. е. $w = 1$. Доказательство лучше всего провести в терминах косвенной функции спроса $g_i(x) = \left(1 / x \cdot \nabla u_i(x)\right)\nabla u_i(x)$ (обратите внимание, что $x = x_i(g_i(x), 1)$). Для индивидуального потребителя закон некомпенсированного спроса двойствен себе, т. е. эквивалентен условию $\left(g_i(x) - g_i(y)\right) \times (x - y) < 0$ для всех $x \neq y$. В свою очередь это свойство следует из отрицательной определенности матрицы $Dg_i(x)$ для всех x. Поэтому можно сосредоточиться на доказательстве последнего свойства. Точнее, возьмем $v \neq 0$ и введем обозначения $q = \nabla u_i(x)$ и $C = D^2u_i(x)$, тогда нам нужно доказать, что $v \cdot Dg_i(x)v < 0$. (*Подсказка*: сначала можно предположить, что $q \cdot v = q \cdot x$, затем продифференцировать $g_i(x)$ и воспользоваться соотношением $v \cdot Cv - x \cdot Cv = \left(v - \frac{1}{2}x\right) \cdot C\left(v - \frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{4}x \cdot Cx$.)

4.C.6[A]**.** Покажите, что если $u_i(x_i)$ однородны первой степени, т. е. предпочтения $\succsim_i$ гомотетичны, то $\sigma_i(x_i) = 0$ для всех x_i (коэффициент $\sigma_i(x_i)$ определен в утверждении 4.C.3).

4.C.7[B]. Покажите, что утверждение 4.C.4 по-прежнему будет верно, если распределение богатства характеризуется невозрастающей функцией плотности на отрезке $[0, \bar{w}]$. Однако более реалистично было бы предположить, что распределение богатства является *унимодальным* (т. е. таким, когда возрастающая и затем убывающая функция плотности имеет одну вершину). Покажите, что существуют унимодальные распределения, для которых вывод, сделанный в данном утверждении, неверен.

4.C.8[A]. Получите выражение (4.C.7) — агрегированный вариант матрицы Слуцкого.

4.C.9[A]. Убедитесь, что если индивидуальные предпочтения $\succsim_i$ гомотетичны, то матрица $C(p, w)$, определенная выражением (4.C.8), положительно полуопределена.

4.C.10[C]. Покажите, что в примере Хильденбранда, рассмотренном в утверждении 4.C.4, матрица $C(p, w)$ положительно полуопределена. Покажите, что агрегированный спрос при таком распределении богатства удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений. (*Замечание*: сначала нужно определить матрицу $C(p, w)$ для случая континуума потребителей, рассматриваемого в этом примере.)

4.C.11[B]. Рассмотрите экономику с двумя благами, 1 и 2, и двумя потребителями, 1 и 2, имеющими функции полезности $u_1(x_{11}, x_{21}) = x_{11} + 4\sqrt{x_{21}}$ и $u_2(x_{12}, x_{22}) = 4\sqrt{x_{12}} + x_{22}$. Предположим, что потребители имеют одинаковый уровень богатства $w_1 = w_2 = w / 2$.

a) Найдите индивидуальные функции спроса и функцию агрегированного спроса.

b) Получите индивидуальные матрицы Слуцкого $S_i(p, w / 2)$ (при $i = 1, 2$) и матрицу Слуцкого в агрегированном случае, $S(p, w)$. (*Подсказка*: обратите внимание, что в примере с двумя благами, чтобы определить всю матрицу целиком, достаточно вычислить лишь один ее элемент.) Покажите, что $dp \cdot S(p, w)dp < 0$ для всех $dp \neq 0$, непропорциональных p. Убедитесь, что агрегированный спрос удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений.

c) Вычислите матрицу $C(p, w) = \sum_i S_i(p, w / 2) - S(p, w)$ при ценах $p_1 = p_2 = 1$. Покажите, что полученная матрица положительно полуопределена при $w > 16$ и отрицательно полуопределена при $8 < w < 16$. Покажите, что в последнем случае $dp \cdot C(p, w)dp < 0$ при некотором dp (т. е. матрица $C(p, w)$ *не* является положительно полуопределенной). Таким образом, можно сделать вывод, что положительная полуопределенность матрицы $C(p, w)$ не является необходимым условием выполнения слабой аксиомы выявленных предпочтений.

d) Для обоих случаев, $w > 16$ и $8 < w < 16$, приведите графическую иллюстрацию на плоскости (x_1, x_2), изобразив потребительский набор потребителя и кривую богатство — потребление при ценах $p_1 = p_2 = 1$. Сравните полученный результат с рис. 4.C.2.

4.C.12[B]. Согласно результатам, изложенным в разделах 4.B и 4.C, если для любого вектора $(w_1, ...w_I)$ агрегированный спрос может быть представлен как функция только от агрегированного богатства (т. е. в виде $x\left(p, \sum_i w_i\right)$), то агрегированный спрос должен удовлетворять слабой аксиоме выявленных предпочтений. *Функция распределения* $F : [0, \infty) \to [0, 1]$ богатства $(w_1, ..., w_I)$ определяется как $F(w) = (1 / I)$ (*число* потребителей с $w_i \leq w$ для любого w). Предположим теперь, что для любого $(w_1, ..., w_I)$ агрегированный спрос может быть записан как функция от соответствующего *распределения* агрегированного богатства $F(\cdot)$. Покажите, что агрегированный спрос может не удовлетворять слабой аксиоме выявленных предпочтений. (*Подсказка*: достаточно привести пример для случая двух благ и двух потребителей с одинаковыми предпочтениями и уровнями богатства $w_1 = 1$ и $w_2 = 3$, когда слабая аксиома выявленных предпочтений не выполняется. Попытайтесь привести графическую иллюстрацию. Важно убедиться в том, что четыре должным образом расположенные кривые безразличия не пересекаются.)

4.C.13[C]. Рассмотрим экономику с двумя благами и двумя потребителями. Пусть правило распределения богатства имеет вид $w_1(p, w) = wp_1/(p_1 + p_2)$, $w_2(p, w) = wp_2/(p_1 + p_2)$. Приведите пример, когда потребители имеют гомотетичные предпочтения, но тем не менее агрегированный спрос не удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений. Достаточно привести подробную графическую иллюстрацию. Почему в этом случае утверждение 4.C.1 неприменимо?

4.D.1[B]. В этой задаче мы рассмотрим концепцию н-репрезентативного потребителя. Обозначим через $v(p, w)$ значение целевой функции задачи (4.D.1) в оптимальной точке, а через $\left(w_1(p, w), \ldots\right.$ $\left.\ldots, w_I(p, w)\right)$ — соответствующее оптимальное правило распределения богатства. Убедитесь в том, что $v(p, w)$ также является оптимальным значением следующей задачи:

$$\max_{x_1,\ldots,x_I} W\left(u_1(x_1),\ \ldots,\ u_I(x_I)\right) \text{ при } p \cdot \left(\sum_i x_i\right) \le w,$$

и в том, что $\left(x_1\left(p,\ w_1(p,\ w)\right),\ \ldots,\ x_I\left(p,\ w_I(p,\ w)\right)\right)$ является решением этой задачи. Обратите внимание, что для того, чтобы максимизировать общественное благосостояние при данных ценах p и богатстве w, общественному планировщику нет необходимости непосредственно контролировать потребление, а нужно только оптимально распределять богатство и позволить потребителям независимо принимать решения относительно объемов потребления при данных ценах p.

4.D.2[B]. Убедитесь в том, что функция $v(p, w)$ — оптимальное значение задачи (4.D.1) — обладает свойствами косвенной функции полезности (т. е. покажите, что она однородна нулевой степени, возрастает по w, убывает по p и квазивыпукла).

4.D.3[B]. Было бы неплохо набить руку в работе с неравенствами и использовании условий Куна — Таккера. Докажите утверждение 4.D.1 еще раз, учитывая возможность угловых решений.

4.D.4[C]. Пусть существует н-репрезентативный потребитель с правилом распределения богатства $\left(w_1(p, w), \ldots, w_I(p, w)\right)$. Для любого $x \in \mathbb{R}^L_+$ определим

$$u(x) = \max_{x_1,\ldots,x_I} W\left(u_1(x_1),\ \ldots,\ u_I(x_I)\right) \text{ при } \sum_i x_i \le x.$$

а) Приведите условия того, что $u(\cdot)$ обладает свойствами функции полезности, т. е. монотонна, непрерывна и квазивогнута (или даже вогнута).

b) Покажите, что для любых (p, w) вальрасианский спрос, полученный из задачи $\max_x u(x)$ при $p \cdot x \leq w$, совпадает с функцией агрегированного спроса.

4.D.5[A]. Пусть в экономике I потребителей, причем потребитель i имеет функцию полезности $u_i(x_i)$ и функцию спроса $x_i(p, w_i)$. Богатство потребителя i, w_i, определяется в соответствии с правилом распределения $w_i = \alpha_i w$, где $\alpha_i \geq 0$ и $\sum_i \alpha_i = 1$. Приведите пример (скажем, множество функций полезности), когда в данной экономике *не* существует п-репрезентативного потребителя.

4.D.6[B]. Докажите утверждения, приведенные в примере 4.D.1.

4.D.7[B]. Докажите утверждения, приведенные во втором абзаце примера 4.D.2.

4.D.8[A]. Будем говорить, что (p', w') удовлетворяет *критерию потенциальной компенсации* по сравнению с (p, w), если для любого распределения $(w_1, \ldots, w_I)$ богатства w существует распределение $(w_1', \ldots, w_I')$ богатства w', такое что $v_i(p', w_i') > v_i(p, w_i)$ для всех i. Покажите, что если (p', w') удовлетворяет данному критерию по сравнению с (p, w), то любой н-репрезентативный потребитель должен предпочесть (p', w') комбинации (p, w).

4.D.9[B]. Покажите, что из $A \subset B$ (эти множества определены в разделе 4.D) следует, что матрица $S(\bar{p}, \bar{w}) - \sum_i S_i(\bar{p}, \bar{w}_i)$ отрицательно полуопределена. (*Подсказка*: рассмотрите функцию $g(p) = e\left(p, u(\bar{x})\right) - \sum_i e_i\left(p, u_i(\bar{x}_i)\right)$, где $e(\cdot)$ — функция расходов при функции полезности $u(\cdot)$, а $e_i(\cdot)$ — функция расходов при $u_i(\cdot)$. Заметим, что из $A = \sum_i \left\{x_i : u_i(x_i) \geq u_i(\bar{x}_i)\right\}$ следует, что $\sum_i e_i(p, u_i(\bar{x}_i))$ — оптимальное значение задачи $\min_{x \in A} p \cdot x$. Отсюда с учетом условия $A \subset B$ получаем, что $g(p) \leq 0$ для всех p и $g(\bar{p}) = 0$. Таким образом, матрица $D^2 g(\bar{p})$ отрицательно полуопределена. Затем нужно показать, что $D^2 g(\bar{p}) = S(\bar{p}, \bar{w}) - \sum_i S_i(\bar{p}, \bar{w}_i)$.)

4.D.10[A]. Покажите, что в примере, рассмотренном в упражнении 4.C.11, существует п-репрезентативный потребитель, рационализирующий агрегированный спрос, но при этом н-репрезентативного потребителя не существует.

4.D.11[C]. Покажите, что при $L > 2$ в примере Хильденбранда, рассмотренном в утверждении 4.C.4, может не существовать п-репрезентативного потребителя. (*Подсказка*: покажите, что матрица Слуцкого может оказаться несимметричной.)

Глава 5. Производство

5.A. Введение

В этой главе мы приступаем к изучению предложения и будем рассматривать процесс производства благ и услуг, потребляемых индивидами. Мы считаем, что предложение формируется производственными единицами, которые мы будем называть фирмами. Под фирмой можно понимать как крупную корпорацию, так и любой другой бизнес, и, кроме того, мы можем использовать этот термин при описании производственных возможностей индивидов или домохозяйств. Множество всех фирм может включать некоторые производственные единицы, которые в действительности никогда не будут созданы. Таким образом, представленная теория охватывает как активные производственные процессы, так и потенциальные, но неактивные.

Полное описание фирмы содержит много различных аспектов: кто ею владеет? кто ею управляет? как ею управляют? как она организована? что она может сделать? На все эти вопросы мы отвечаем в последнюю очередь. Это объясняется не тем, что эти вопросы неинтересны (наоборот!), но нам бы хотелось в первую очередь описать минимальный концептуальный аппарат, позволяющий анализировать рыночное поведение. В связи с этим наша модель производственных возможностей будет очень простой: фирма рассматривается как «черный ящик», способный преобразовывать факторы производства в выпуск готовой продукции.

В разделе 5.B мы вводим понятие *производственного множества* фирмы — множества, описывающего *производственные процессы* или *производственные планы*, которые технологически доступны данной фирме. Затем мы перечисляем и обсуждаем некоторые основные свойства производственных множеств, вводя такие понятия, как *отдача от масштаба*, *свобода расходования* и *свободный вход*.

Изучив технологические возможности фирмы в разделе 5.B, в разделе 5.C мы переходим к обсуждению цели фирмы — *максимизации прибыли*. Затем мы формулируем и исследуем задачу максимизации прибыли и двух сопутствующих концепций, *функции прибыли* и *отображения предложения* фирмы, которые представляют собой соответственно функцию значения и оптимальные векторы задачи максимизации прибыли фирмы.

С задачей максимизации прибыли фирмы связана задача минимизации издержек производства. Мы также исследуем задачу минимизации издержек фирмы и связанные с ней концепции: *функцию издержек* фирмы и *отображение условного спроса на факторы производства*. Как и в случае задач максимизации полезности и минимизации расходов в теории спроса, здесь значительную роль играет теория двойственности, иллюстрирующая взаимосвязь задач максимизации прибыли и минимизации издержек.

В разделе 5.D приводится детальный анализ геометрии издержек и производственных взаимосвязей в важном с теоретической точки зрения специальном случае однопродуктовой технологии.

Теория агрегирования изучается в разделе 5.E. Мы показываем, что агрегирование предложения осуществляется существенно проще, чем агрегирование спроса, и агрегированное предложение играет более значимую роль, чем агрегированный спрос в теории потребителя, который был рассмотрен в главе 4.

В разделе 5.F мы затрагиваем вопросы экономики благосостояния. Здесь мы вводим понятие *эффективного производства* и изучаем его взаимосвязь с максимизацией прибыли. С незначительными оговорками мы приходим к выводу, что производственные планы, максимизирующие прибыль, эффективны, причем при наличии выпуклости обратное также верно: эффективный план доставляет максимум прибыли при соответствующем выборе вектора цен. Таким образом, мы формируем первое представление об идеях *фундаментальных теорем экономик благосостояния*.

В разделе 5.G мы обращаем внимание на то, что максимизацию прибыли можно рассматривать как следствие выбора потребителем наилучшего согласно предпочтениям набора. Мы подробно обсуждаем этот момент и сопутствующие вопросы.

Приложение A посвящено более детальному изучению важного частного случая линейной производственной технологии. Эта модель называется *моделью линейного производства*.

5.B. Производственные множества

Как и в предыдущих главах, мы будем рассматривать экономику с L-товарами. *Производственный вектор* (также называемый вектором *затраты — выпуск* или вектором *чистого выпуска* либо *производственным планом*) представляет собой вектор $y = (y_1, \ldots, y_L) \in \mathbb{R}^L$, описывающий (чистые) выпуски L товаров в рамках производственного процесса. Будем считать, что положительным координатам этого вектора соответствуют объемы выпуска готовой продукции, а отрицательным — объемы использования факторов производства. Некоторые координаты производственного вектора могут быть равны нулю: это означает, что в данном производственном процессе данный товар не участвует.

Пример 5.B.1. Пусть $L = 5$, тогда $y = (-5, 2, -6, 3, 0)$ следует понимать так: производится 2 и 3 единицы благ 2 и 4 соответственно и при этом используется 5 и 6 единиц благ 1 и 3 соответственно. Благо 5 не производится и не применяется в качестве фактора производства в данном производственном процессе. ■

Для анализа поведения фирмы нам необходимо сначала указать такие производственные векторы, которые технологически возможны. Множество всех технологически допустимых производственных векторов будем называть *производственным множеством* и обозначать через $Y \subset \mathbb{R}^L$: любой $y \in Y$ допустим, а $y \notin Y$ — нет. Производственное множество — основополагающее понятие рассматриваемой теории.

Множество всех допустимых производственных планов лимитировано в первую очередь технологическими ограничениями. Однако во многих конкретных моделях свой вклад в определение границ производственного множества могут вносить также правовые нормы или контрактные обязательства.

Иногда удобно производственное множество Y описывать с помощью функции $F(\cdot)$, называемой *трансформационной функцией*. Трансформационная функция $F(\cdot)$ обладает следующим свойством: $Y = \left\{y \in \mathbb{R}^L : F(y) \le 0\right\}$ и $F(y) = 0$ тогда и только тогда, когда y принадлежит границе множества Y. Множество граничных точек множества Y, $\left\{y \in \mathbb{R}^L : F(y) = 0\right\}$, называется *трансформационной границей*. На рис. 5.B.1 приведена иллюстрация для случая двух благ.

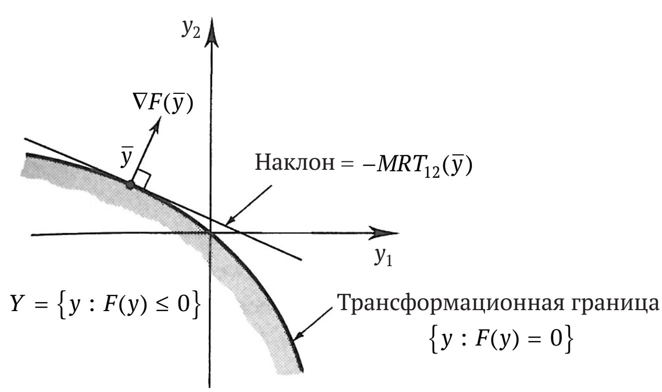


Рис. 5.B.1. Производственное множество и трансформационная граница

Если функция $F(\cdot)$ дифференцируема, а производственный вектор $\bar{y}$ удовлетворяет условию $F(\bar{y}) = 0$, то для любых двух товаров l и k отношение

$$MRT_{lk}(\bar{y}) = \frac{\partial F(\bar{y})/\partial y_l}{\partial F(\bar{y})/\partial y_k}$$

называется *предельной нормой трансформации* (*MRT* — от англ. *marginal rate of transformation*) *блага k в благо l в точке* $\bar{y}$ [1]. Предельная норма трансформации показывает, насколько может увеличиться (чистый) выпуск блага *k*, если фирма уменьшит (чистый) выпуск блага *l* на одну предельную единицу. Действительно, из $F(\bar{y}) = 0$ получаем

$$\frac{\partial F(\bar{y})}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial F(\bar{y})}{\partial y_l} dy_l = 0,$$

и, следовательно, наклон трансформационной границы в точке $\bar{y}$ на рис. 5.B.1 в точности равен $-MRT_{12}(\bar{y})$.

Технологии, в которых проводится различие между множествами факторов производства и выпусков

Во многих реальных производственных процессах множество благ, которые могут быть произведены (выпусков), отличается от множества благ, используемых в производстве (факторов производства). В этом случае иногда удобно ввести различные обозначения для выпусков и факторов производства фирмы. Например, можно через $q = (q_1, \ldots, q_M) \geq 0$ обозначить уровни производства *M* выпусков, а через $z = (z_1, \ldots, z_{L-M}) \geq 0$ — объемы использования *L*–*M* факторов производства, считая, что объем использования фактора производства z_l теперь является *неотрицательной* величиной (для удобства обозначения будем считать все блага, в действительности не используемые в производственном процессе, факторами производства).

Одна из моделей производства, с которой наиболее часто приходится сталкиваться, — модель с единственным выпуском. Технология с единственным выпуском обычно описывается посредством *производственной функции* $f(z)$, показывающей, какой максимальный объем выпуска *q* может быть произведен с помощью $(z_1, \ldots, z_{L-1}) \geq 0$ единиц факторов производства. Например, если производится благо *L*, то производственная функция $f(\cdot)$порождает следующее производственное множество:

$$Y = \left\{(-z_1, \ldots, -z_{L-1}, q) : q - f(z_1, \ldots, z_{L-1}) \leq 0 \text{ и } (z_1, \ldots, z_{L-1}) \geq 0\right\}.$$

Зафиксировав уровень выпуска, мы можем определить *предельную норму технического замещения* (*MRTS* — от англ. *marginal rate of technical substitution*) фактора производства *k* фактором *l* в точке $\bar{z}$ как

$$MRTS_{lk}(\bar{z}) = \frac{\partial f(\bar{z})/\partial z_l}{\partial f(\bar{z})/\partial z_k}.$$

Величина $MRTS_{lk}(\bar{z})$ показывает, какой дополнительный объем фактора *k* должен быть использован, чтобы выпуск остался на уровне $\bar{q} = f(\bar{z})$

[1] Как и в главе 3, при вычислении подобных отношений мы всегда предполагаем, что $\partial F(\bar{y})/\partial y_k \neq 0$.

при уменьшении объема использования фактора l на малую величину. Это производственный аналог предельной нормы замещения в теории потребителя, и если в теории потребителя мы рассматривали такой выбор между двумя товарами, чтобы полезность осталась неизменной, то здесь мы исследуем выбор между факторами производства, сохраняющий неизменным уровень выпуска. Следует заметить, что $MRTS_{lk}$ — это просто переименование предельной нормы трансформации фактора k в фактор l в специальном случае технологии с единственным выпуском и многими факторами производства.

Пример 5.B.2. *Производственная функция Кобба — Дугласа*. Производственная функция *Кобба — Дугласа* с двумя факторами производства имеет вид: $f(z_1, z_2) = z_1^{\alpha} z_2^{\beta}$, где $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$. Предельная норма технического замещения между двумя факторами производства в точке $z = (z_1, z_2)$ будет следующей: $MRTS_{12}(z) = \alpha z_2/\beta z_1$. ■

Свойства производственных множеств

Теперь перейдем к обсуждению довольно исчерпывающего списка предполагаемых свойств производственных множеств. Целесообразность каждого из этих предположений зависит от конкретной ситуации (в действительности некоторые из них являются взаимоисключающими)[2].

(1) Производственное множество Y *непусто*. Это предположение просто означает, что фирме есть что делать. В противном случае не имеет смысла изучать поведение фирмы.

(2) Производственное множество Y *замкнуто*. Множество Y содержит свою границу. Таким образом, предел последовательности технологически допустимых векторов затраты — выпуск также допустим; формально из $y^n \to y$ и $y^n \in Y$ следует, что $y \in Y$. Это условие следует рассматривать в первую очередь как техническое предположение[3].

(3) *Отсутствие рога изобилия*. Предположим, что $y \in Y$ и $y \geq 0$, т. е. в векторе y нет ни одного фактора производства. Тогда свойство отсутствия рога изобилия выполнено, если с помощью этого производственного вектора ничего не может быть произведено. Другими словами, если $y \in Y$ и $y \geq 0$, то $y = 0$, т. е. невозможно произвести что-то из ничего. С геометрической точки зрения $Y \cap \mathbb{R}_+^L \subset \{0\}$. Для случая $L = 2$ на рис. 5.B.2(a) изображено производственное множество, не удовлетворяющее свойству отсутствия рога изобилия, а на рис. 5.B.2(b) — множество, удовлетворяющее этому свойству.

(4) *Возможность бездействия*. Это свойство означает, что $0 \in Y$, т. е. возможна полная ликвидация фирмы. Например, оба множества на рис. 5.B.2 удовлетворяют этому свойству. Зачастую для справедливости этого

[2] Более развернутое обсуждение этих свойств можно найти в работе (Koopmans, 1957) и в главе 3 работы (Debreu, 1959).

[3] Однако, как показано в упражнении 5.B.4, существует интересный с экономической точки зрения случай, когда с данным условием возникают сложности.

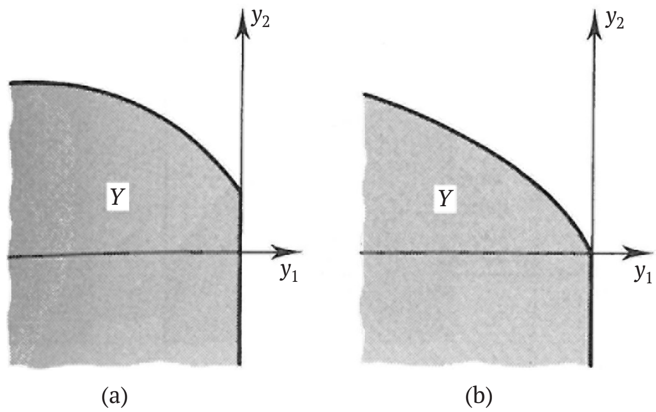


Рис. 5.B.2. Свойство отсутствия рога изобилия.
(a) Нарушение свойства отсутствия рога изобилия.
(b) Выполнение свойства отсутствия рога изобилия

предположения очень важен момент времени, в который анализируются производственные возможности фирмы. Если мы рассматриваем фирму, которая могла бы иметь множество технологических возможностей, но при этом еще не организована, то бездействие, очевидно, возможно. Однако если некоторые производственные решения уже приняты или если подписаны контракты на поставку некоторых факторов производства, которые нельзя отменить, то бездействие невозможно. В этом случае говорят, что некоторые издержки являются *невозвратными*. На рис. 5.B.3 представлены два примера. На рис. 5.B.3(a) проиллюстрированы *промежуточные* производственные возможности, возникающие, когда фирма уже обязалась использовать по крайней мере $-\bar{y}_1$ единиц блага 1 (возможно, в силу того что уже подписала конт-

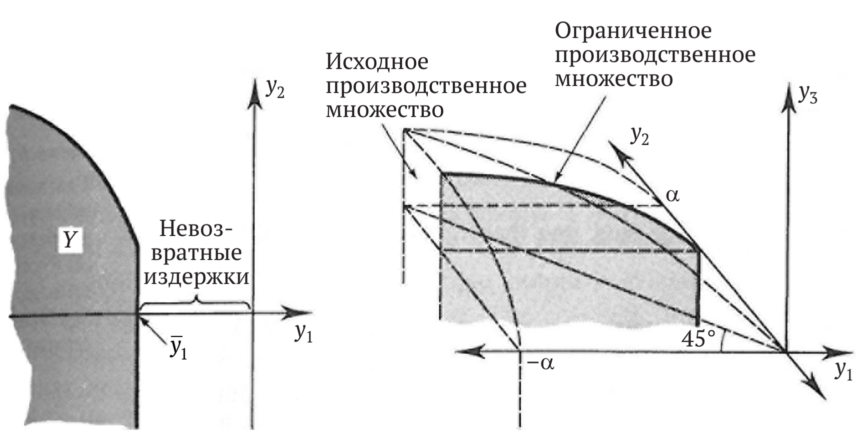


Рис. 5.B.3. Два производственных множества с невозвратными издержками.
(a) Обязательства по минимальному уровню расходов.
(b) Один из факторов производства фиксирован

ракт на приобретение этого объема). Таким образом, данное множество представляет собой *ограниченное производственное множество*, отражающее оставшееся множество выбора для фирмы, изначально имеющей производственное множество Y, подобное изображенному на рис. 5.B.2. На рис. 5.B.3(b) приведен еще один пример невозвратных издержек. Для случая одного выпуска (благо 3) и двух факторов производства (блага 1 и 2) на рисунке представлено ограниченное производственное множество, возникающее вследствие того, что использование второго фактора производства без возможности изменения установлено на уровне $\bar{y}_2 < 0$ (здесь, в отличие от рис. 5.B.3(a), невозможно увеличение использования данного фактора).

(5) *Свобода расходования*. Свойство свободы расходования выполнено, если всегда возможно поглощение любого дополнительного объема факторов производства без какого-либо снижения выпуска. То есть если $y \in Y$ и $y' \leq y$ (так что согласно y' производится не более чем тот же самый объем готовой продукции с использованием по крайней мере того же объема факторов производства), то $y' \in Y$. Более сжато это можно записать как $Y - \mathbb{R}^L_+ \subset Y$ (см. рис. 5.B.4), а интерпретируется это следующим образом: дополнительный объем факторов производства (или выпусков) может быть ликвидирован без каких-либо издержек.

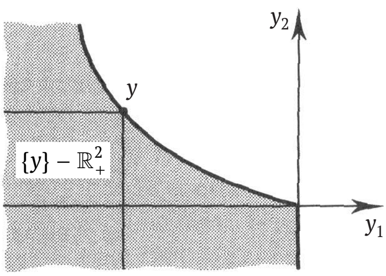


Рис. 5.B.4. Свойство свободы расходования

(6) *Необратимость*. Пусть $y \in Y$ и $y \neq 0$. Тогда свойство необратимости означает, что $-y \notin Y$. Другими словами, невозможно обратить технологически допустимый производственный вектор, так чтобы из некоторого объема выпуска получить тот же объем фактора производства, который был использован для его производства. Если, например, одной из характеристик товара является время его доступности, то необратимость следует из требования, что факторы производства должны быть использованы до того, как появятся выпуски.

Упражнение 5.B.1. Изобразите два производственных множества для случаев, когда свойство необратимости нарушается и когда оно выполнено.

(7) *Невозрастающая отдача от масштаба*. Производственное множество Y демонстрирует невозрастающую отдачу от масштаба, если для любого $y \in Y$ выполнено $\alpha y \in Y$ для любого $\alpha \in [0, 1]$. Другими словами, пропорционально уменьшая любой допустимый вектор затраты — выпуск, получим также допустимый производственный вектор (см. рис. 5.B.5). Заметим, что из невозрастающей отдачи от масштаба следует возможность бездействия (свойство (4)).

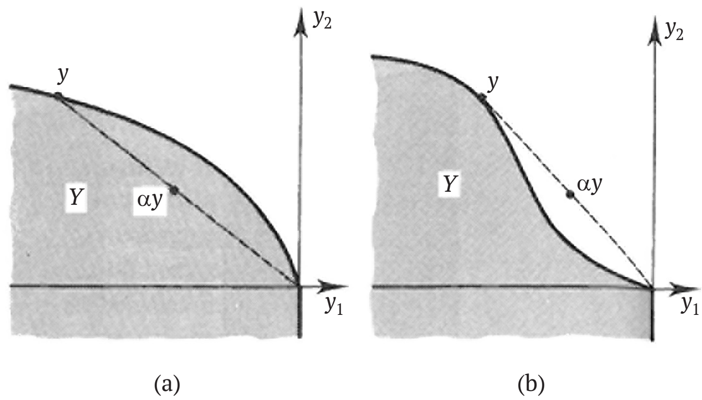


Рис. 5.В.5. Свойство невозрастающей отдачи от масштаба. (a) Условие невозрастающей отдачи от масштаба выполнено. (b) Условие невозрастающей отдачи от масштаба не выполнено

(8) *Неубывающая отдача от масштаба*. В отличие от предыдущего случая, производственный процесс характеризуется неубывающей отдачей от масштаба, если для любого $y \in Y$ выполнено: $\alpha y \in Y$ для любого $\alpha \geq 1$. Другими словами, любой допустимый вектор затраты — выпуск может быть пропорционально увеличен. На рис. 5.В.6(a) представлен типичный пример: здесь готовая продукция (благо 2) может быть произведена при постоянных затратах фактора (блага 1), но начало производства требует фиксированных издержек. Для существования неубывающей отдачи от масштаба неважно, являются эти издержки невозвратными (как на рис. 5.В.6(b)) или нет (как на рис. 5.В.6(a), где возможно бездействие).

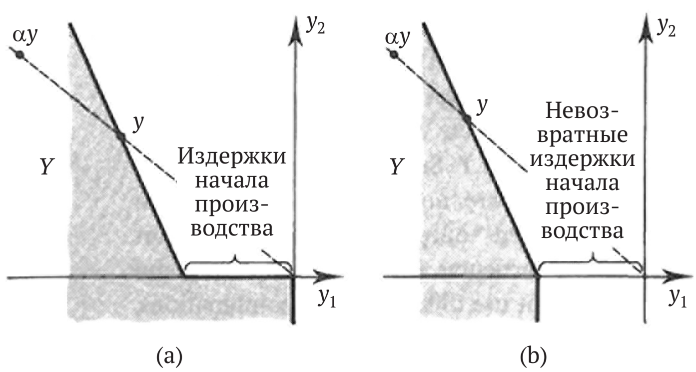


Рис. 5.В.6. Свойство неубывающей отдачи от масштаба

(9) *Постоянная отдача от масштаба*. Это свойство представляет собой объединение свойств (7) и (8). Производственное множество Y демонстрирует постоянную отдачу от масштаба, если из $y \in Y$ следует, что

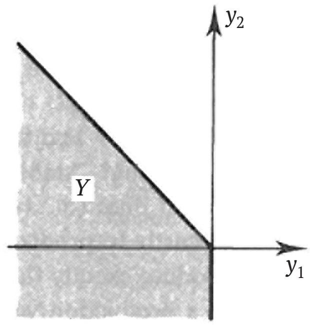


Рис. 5.B.7. Технология, удовлетворяющая свойству постоянной отдачи от масштаба

$\alpha y \in Y$ для любого $\alpha \geq 0$. С геометрической точки зрения в этом случае Y является *конусом* (см. рис. 5.B.7).

Для случая технологии с единственным выпуском данные свойства производственного множества можно переформулировать в терминах производственной функции $f(\cdot)$ (см. упражнение 5.B.2 и пример 5.B.3).

Упражнение 5.B.2. Пусть $f(\cdot)$ — производственная функция, соответствующая технологии с единственным выпуском, и пусть Y — производственное множество данной технологии. Покажите, что Y удовлетворяет свойству постоянной отдачи от масштаба тогда и только тогда, когда функция $f(\cdot)$ однородна первой степени.

Пример 5.B.3. *Отдача от масштаба для производственной функции Кобба — Дугласа*. Для производственной функции Кобба — Дугласа, определенной в примере 5.B.2, $f\left(2z_1,\ 2z_2\right) = 2^{\alpha+\beta} z_1^{\alpha} z_2^{\beta} = 2^{\alpha+\beta} f\left(z_1,\ z_2\right)$. Таким образом, при $\alpha + \beta = 1$ имеет место постоянная отдача от масштаба, при $\alpha + \beta < 1$ — убывающая отдача от масштаба, при $\alpha + \beta > 1$ — возрастающая. ■

(10) *Аддитивность* (*или свобода входа*). Пусть $y \in Y$ и $y' \in Y$. Свойство аддитивности требует, чтобы было выполнено $y + y' \in Y$. Формально это также можно записать как $Y + Y \subset Y$. Это означает, например, что $ky \in Y$ для любого положительного *целого* числа k. На рис. 5.B.8 приведен пример аддитивного производственного множества Y. Обратите внимание, что в данном примере выпуск доступен только в целочисленных количествах (возможно, в силу неделимости). Экономическая интерпретация условия аддитивности состоит в том, что если векторы y и y' оба допустимы, то можно построить два завода, не связанные друг с другом, и реализовывать производственные планы y и y' независимо. В результате получаем производственный вектор $y + y'$.

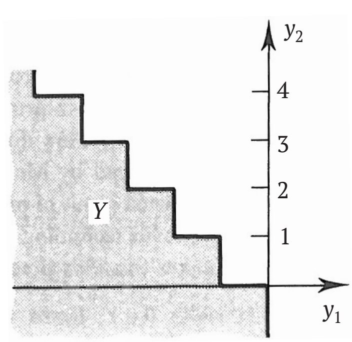


Рис. 5.B.8. Производственное множество, удовлетворяющее свойству аддитивности

Аддитивность также связана с проблемой входа. Если $y \in Y$ производится одной фирмой, а другая фирма входит на рынок и производит $y' \in Y$, то чистый результат — вектор $y + y'$. Следовательно, *агрегированное производственное множество* (производственное множество, описывающее допустимые производственные планы в экономике в целом) должно удовлетворять свойству аддитивности, если присутствует возможность неограниченного или (как он называется в литературе) *свободного входа*.

(11) *Выпуклость*. Это одно из фундаментальных предположений микроэкономики. Оно постулирует выпуклость производственного множества Y. То есть если $y, y' \in Y$ и $\alpha \in [0, 1]$, то $\alpha y + (1 - \alpha)y' \in Y$. Например, выпуклое производственное множество Y изображено на рис. 5.B.5(a), а на рис. 5.B.5(b) — невыпуклое.

Предположение о выпуклости производственного множества можно проинтерпретировать как совмещение двух идей относительно производственных возможностей. Первая — невозрастающая отдача от масштаба. В частности, если возможно бездействие (т. е. если $0 \in Y$), то из выпуклости следует невозрастающая отдача производственного множества Y. Чтобы убедиться в этом, заметим, что для любого $\alpha \in [0, 1]$ мы можем записать: $\alpha y = \alpha y + (1 - \alpha)0$. Следовательно, если $y \in Y$ и $0 \in Y$, то выпуклость означает, что $\alpha y \in Y$. Во-вторых, выпуклость отражает идею о том, что «несбалансированные» комбинации факторов производства не являются более продуктивными, чем сбалансированные (или, симметрично, «несбалансированные» комбинации выпусков не являются менее затратными в производстве, чем сбалансированные). В частности, если производственным планам y и y' соответствуют одинаковые объемы выпуска, но при использовании различных комбинаций факторов производства, то производственный вектор, в котором используется средний уровень каждого фактора производства по двум данным планам, позволяет произвести по крайней мере такой же объем выпуска, как и y или y'.

В упражнении 5.B.3 эти идеи проиллюстрированы для случая технологии с единственным выпуском.

Упражнение 5.B.3. Покажите, что для технологии с единственным выпуском производственное множество Y выпукло тогда и только тогда, когда производственная функция $f(z)$ вогнута.

(12) *Y — выпуклый конус*. Это объединение свойств выпуклости (свойство (11)) и постоянной отдачи от масштаба (свойство (9)). Формально производственное множество Y представляет собой выпуклый конус, если для любых производственных векторов $y, y' \in Y$ и констант $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$ выполнено: $\alpha y + \beta y' \in Y$. Производственное множество, представленное на рис. 5.B.7, является выпуклым конусом.

В утверждении 5.B.1 сформулирован важный факт о соотношении свойств производственных множеств.

Утверждение 5.B.1. Производственное множество Y аддитивно и характеризуется невозрастающей отдачей от масштаба тогда и только тогда, когда оно представляет собой выпуклый конус.

Доказательство. В одну сторону доказательство очевидно: свойства невозрастающей отдачи от масштаба и аддитивности непосредственно следуют из определения выпуклого множества. В обратную сторону: нужно показать, что если производственное множество характеризуется невозрастающей отдачей от масштаба и удовлетворяет свойству аддитивности, то для любых y, $y' \in Y$ и $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ выполнено $\alpha y + \beta y' \in Y$. Для этого возьмем произвольное целое число k, такое что $k > \max\{\alpha, \beta\}$. В силу аддитивности $ky \in Y$ и $ky' \in Y$. Поскольку $(\alpha/k) < 1$ и $\alpha y = (\alpha/k)ky$, то из невозрастающей отдачи от масштаба следует, что $\alpha y \in Y$. Аналогично $\beta y' \in Y$. Наконец, опять в силу аддитивности, $\alpha y + \beta y' \in Y$. ■

Утверждение 5.B.1 дает обоснование предположения о выпуклости производственного множества. Неформально мы могли бы сказать, что если допустимые комбинации затраты — выпуск всегда могут быть пропорционально уменьшены и если также возможно одновременное функционирование нескольких технологий без взаимного вмешательства, то технология выпукла. (См. ряд примеров, в которых имеет место взаимное влияние технологий и, как следствие, нет выпуклости, в приложении А главы 11.)

Крайне важно не упустить из внимания тот факт, что производственное множество описывает технологию, а не ограничения на ресурсы. Можно показать, что если все факторы производства (включая, скажем, предпринимательский ресурс) явным образом учтены в технологии, то всегда возможно реплицирование производства. Но при этом мы не говорим, что удвоение выпуска в действительности допустимо, а лишь что в принципе это было бы возможно, если бы *все* факторы производства были удвоены. С этой точки зрения (впервые предложенной А. Маршаллом), которой большое внимание уделяется в работе (McKenzie, 1959), убывающая отдача от масштаба может означать просто то, что какой-то фактор производства оказался неучтенным. По этой причине некоторые экономисты уверены, что среди моделей с выпуклыми технологиями фундаментальную роль играет модель с постоянной отдачей от масштаба. В утверждении 5.B.2 формализуется эта идея.

Утверждение 5.B.2. Для любого выпуклого производственного множества $Y \subset \mathbb{R}^L$ при $0 \in Y$ существует выпуклое производственное множество с постоянной отдачей от масштаба $Y' \subset \mathbb{R}^{L+1}$, такое что $Y = \left\{y \in \mathbb{R}^L : (y, \ -1) \in Y'\right\}$.

Доказательство. Положим $Y' = \{y' \in \mathbb{R}^{L+1} : y' = \alpha(y, -1)$ для некоторого $y \in Y$ и $\alpha \geq 0\}$ (см. рис. 5.B.9). ■

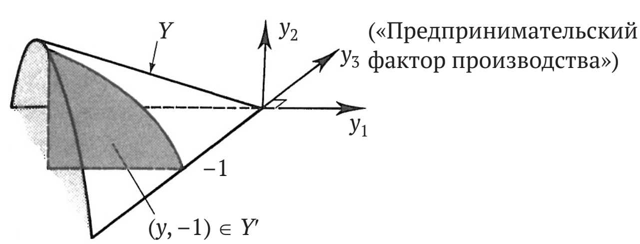


Рис. 5.B.9. Производственное множество с постоянной отдачей от масштаба и «предпринимательским фактором производства»

Дополнительный фактор производства, включенный в расширенное производственное множество (благо $L + 1$), можно назвать «предпринимательским фактором производства». (Обоснование такого названия можно найти в упражнении 5.B.12. В конкурентной среде отдача от этого предпринимательского фактора производства в точности равна прибыли фирмы.) По сути, следствием утверждения 5.B.2 является то, что, рассматривая в конкурентной экономике модель с выпуклой технологией, мы концептуально почти ничего не потеряем, если ограничимся рассмотрением только постоянной отдачи от масштаба.

5.C. Максимизация прибыли и минимизация издержек

В этом разделе мы приступим к изучению рыночного поведения фирмы. Как и при анализе потребительского спроса, будем исходить из того, что существует вектор цен для всех L благ, который мы обозначим через $p = (p_1, \ldots, p_L) >> 0$. Будем считать, что эти цены не зависят от производственных планов фирмы (т. е. примем предпосылку о том, что фирма ведет себя как *ценополучатель*).

На протяжении всей этой главы предполагается, что цель фирмы состоит в максимизации ее прибыли. (Здесь правомерно возникает вопрос, почему это так, и мы кратко ответим на него в разделе 5.G.) Кроме того, всюду будем полагать, что производственное множество Y удовлетворяет свойствам *непустоты, замкнутости и свободы расходования* (см. раздел 5.B).

Задача максимизации прибыли

При данном векторе цен $p >> 0$ и производственном векторе $y \in \mathbb{R}^L$ прибыль фирмы, реализующей производственный план y, составляет $p \cdot y = \sum_{l=1}^{L} p_l y_l$. В силу договоренности относительно знаков координат вектора y эта величина представляет собой в точности разность между совокупным доходом (выручкой) и совокупными издержками. Тогда при технологических ограничениях, описываемых производственным множеством Y, *задача максимизации прибыли* фирмы (PMP — от англ. *profit maximization problem*) имеет вид

$$\max_y p \cdot y \text{ при } y \in Y. \tag{PMP}$$

При описании производственного множества Y с помощью трансформационной функции $F(\cdot)$ мы эквивалентным образом можем переписать задачу максимизации прибыли в виде

$$\max_y p \cdot y \text{ при } F(y) \leq 0.$$

Для данного производственного множества Y *функция прибыли* фирмы $\pi(p)$, ставящая в соответствие каждому p сумму денег $\pi(p) = \max \{p \cdot y : \in Y\}$, представляет собой значение целевой функции в решении задачи максимизации прибыли. Соответственно определим *отображение предложения* фирмы при ценах p, обозначив его через $y(p)$ как множество всех векторов, доставляющих максимум прибыли фирмы, т. е. $y(p) = \{y \in Y : p \cdot y = \pi(p)\}$[4]. На рис. 5.C.1 проиллюстрировано решение задачи максимизации прибыли для строго выпуклого производственного множества Y. Оптимальному вектору $y(p)$ соответствует точка множества Y, в которой достигается наиболее высокий уровень прибыли. Таким образом, на рисунке $y(p)$ принадлежит *изопрофитной линии* (прямой в пространстве $\mathbb{R}^2$, все точки которой характеризуются одним и тем же уровнем прибыли), расположенной дальше всех остальных вправо вверх (на северо-восток) и касательной к границе множества Y в точке $y(p)$.

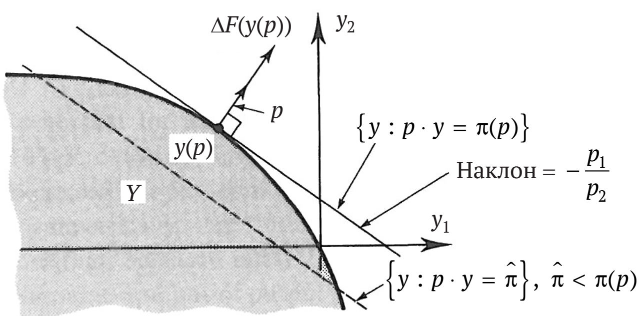


Рис. 5.C.1. Задача максимизации прибыли

Вообще говоря, $y(p)$ может быть множеством, а не точкой. Также возможна ситуация, когда не существует производственного плана, максимизирующего прибыль фирмы. Например, система цен может быть такова, что не существует верхнего ограничения на прибыль фирмы. В этом случае мы говорим, что $\pi(p) = +\infty$[5]. Для конкретного примера рассмотрим случай $L = 2$ и предположим, что фирма, технология которой характеризуется постоянной отдачей от масштаба, производит одну единицу блага 2 из каждой используемой единицы блага 1. Тогда $\pi(p) = 0$ при $p_2 \leq p_1$, а если $p_2 > p_1$, то прибыль фирмы равна $(p_2 - p_1)y_2$, где y_2 — объем производства блага 2. Очевидно, что при соответствующем выборе y_2 в этом случае мы можем получить сколь угодно большую прибыль. Следовательно, $\pi(p) = +\infty$ при $p_2 > p_1$.

---

[4] Мы используем термин *отображение предложения*, проводя параллель с терминологией в отношении *спроса* в теории потребителя. Однако следует заметить, что $y(p)$ было бы уместнее назвать *чистым* предложением. В частности, отрицательные элементы вектора предложения можно интерпретировать как спрос на факторы производства.

[5] Строго говоря, чтобы учесть возможность того, что $\pi(p) = +\infty$ (как и в других случаях, когда не существует производственного плана, максимизирующего прибыль фирмы), функцию прибыли фирмы следует определить как $\pi(p) = \sup\{p \cdot y : y \in Y\}$. Но мы для удобства продолжим использовать max (учитывая при этом, что подобная ситуация возможна).

Упражнение 5.С.1. Докажите в общем случае, что если производственное множество Y характеризуется неубывающей отдачей от масштаба, то либо $\pi(p) \le 0$, либо $\pi(p) = +\infty$.

Если трансформационная функция $F(\cdot)$ дифференцируема, то для характеристики решения задачи максимизации прибыли можно использовать условия первого порядка. Если $y^* \in y(p)$, то для некоторого $\lambda \ge 0$ y^* должен удовлетворять условиям первого порядка:

$$p_l = \lambda \frac{\partial F\left(y^*\right)}{\partial y_l} \text{ при } l = 1, \ldots, L,$$

или, в матричной записи,

$$p = \lambda \nabla F\left(y^*\right). \tag{5.C.1}$$

Другими словами, *вектор цен* p *и градиент* $\nabla F\left(y^*\right)$ *пропорциональны* (этот факт проиллюстрирован на рис. 5.С.1). Условие (5.С.1) также позволяет получить следующее условие на соотношение цен: $p_l/p_k = MRT_{lk}\left(y^*\right)$ для всех l, k. При $L = 2$ это говорит о том, что наклон трансформационной границы в точке, соответствующей максимизирующему прибыль производственному плану, должен быть равен отношению цен со знаком минус, как показано на рис. 5.С.1. Если бы это было не так, то небольшое изменение производственного плана могло бы привести к росту прибыли фирмы.

В случае когда производственное множество Y описывает технологию с единственным выпуском и дифференцируемой производственной функцией $f(z)$, мы можем рассматривать задачу фирмы просто как задачу выбора уровней использования факторов производства z. В этом частном случае мы можем через (скаляр) $p > 0$ обозначить цену готовой продукции фирмы, а через $w \gg 0$ — цены факторов производства[6]. Вектор факторов производства z^* доставляет максимум прибыли при ценах (p, w), если является решением следующей задачи:

$$\max_{z \ge 0} pf(z) - w \cdot z.$$

Если вектор z^* оптимален, то тогда он должен удовлетворять условию первого порядка при $l = 1, \ldots, L-1$:

$$p\frac{\partial f\left(z^*\right)}{\partial z_l} \le w_l \text{ и } p\frac{\partial f\left(z^*\right)}{\partial z_l} = w_l, \text{ если } z_l^* > 0,$$

[6] До сих пор мы всегда использовали обозначение p для вектора цен, а здесь мы его используем только для обозначения цены готовой продукции, а вектор цен факторов производства обозначаем через w. Такие обозначения довольно стандартны. Однако по умолчанию, если только речь не идет о ситуации, когда блага явным образом классифицируются на факторы производства и выпуски (как в случае с единственным выпуском), мы продолжим использовать p для обозначения вектора всех цен: $p = (p_1, \ldots, p_L)$.

или, в матричной записи,

$$p\nabla f\left(z^*\right) \le w \text{ и } \left[p\nabla f\left(z^*\right) - w\right] \cdot z^* = 0^{7}. \qquad (5.C.2)$$

Таким образом, предельный продукт каждого фактора производства l, действительно используемого в производстве (т. е. при $z_l^* > 0$), должен быть равен отношению его цены к цене выпуска, т. е. w_l/p. Следует заметить также, что для любых двух факторов производства l и k при $\left(z_l^*, z_k^*\right) \gg 0$ из условия (5.C.2) следует, что $MRTS_{lk} = w_l/w_k$, т. е. предельная норма технического замещения между двумя факторами производства равна отношению их цен, характеризующему экономическую норму замещения. Это соотношение представляет собой частный случай более общего условия (5.C.1).

Если производственное множество Y выпукло, то условия первого порядка (5.C.1) и (5.C.2) являются не только необходимыми, но и достаточными для определения решения задачи максимизации прибыли.

Утверждение 5.C.1, в котором перечислены свойства функции прибыли и отображения предложения, может быть получено с использованием тех же методов, которые применялись в главе 3 при изучении теории потребительского спроса. Обратите внимание, что с математической точки зрения функцию прибыли можно получить из соотношений двойственности, подобно тому, как мы делали в главе 3. Действительно, $\pi(p) = -\mu_{-Y}(p)$, где $\mu_{-Y}(p) = \min\{p \cdot (-y) : y \in Y\}$ представляет собой опорную функцию множества $-Y$. Таким образом, перечень наиболее важных свойств в утверждении 5.C.1 можно также трактовать как следствие более общих свойств опорных функций, рассмотренных в разделе 3.F.

Утверждение 5.C.1. Пусть $\pi(\cdot)$ — функция прибыли при производственном множестве Y, а $y(\cdot)$ — соответствующее отображение предложения. Предположим также, что множество Y замкнуто и удовлетворяет свойству свободы расходования. Тогда

1) $\pi(\cdot)$ однородна первой степени.
2) $\pi(\cdot)$ выпукла.
3) Если множество Y выпукло, то $Y = \{y \in \mathbb{R}^L : p \cdot y \le \pi(p)$ для всех $p \gg 0\}$.
4) отображение $z(\cdot)$ однородно первой степени по w.
5) Если множество Y выпукло, то $y(p)$ — выпуклое множество при всех p. Более того, если множество Y строго выпукло, то $y(p)$ принимает единственное значение (если непусто).
6) (*лемма Хотеллинга*) Если $y(\bar{p})$ состоит из единственной точки, то $\pi(\cdot)$ дифференцируема в точке $\bar{p}$ и $\nabla\pi(\bar{p}) = y(\bar{p})$.

[7] Здесь мы учитываем возможность граничных решений, в отличие от условия (5.C.1), поскольку предположение о разделении благ на факторы производства и выпуски порождает ограничение $z \ge 0$, тогда как формулировка задачи, дающая условия первого порядка (5.C.1), допускает, что чистый выпуск каждого блага может быть как положительной, так и отрицательной величиной. Тем не менее, используя условия первого порядка (5.C.2), мы, как правило, будем считать, что $z^* \gg 0$.

7) Если $y(\cdot)$ является функцией, дифференцируемой в точке $\bar{p}$, то $Dy(\bar{p}) = D^2\pi(\bar{p})$ — симметричная, положительно полуопределенная матрица, причем $Dy(\bar{p})\bar{p} = 0$.
Свойства (2), (3), (6) и (7) нетривиальны.

Упражнение 5.C.2. Докажите, что $\pi(\cdot)$ — выпуклая функция (свойство (2) утверждения 5.C.1). (*Подсказка*: пусть $y \in y(\alpha p + (1 - \alpha)p')$, тогда $\pi(\alpha p + (1 - \alpha)p') = \alpha p \cdot y + (1 - \alpha)p' \cdot y \leq \alpha\pi(p) + (1 - \alpha)\pi(p')$.)

Свойство (3) говорит нам о том, что если множество Y замкнуто, выпукло и удовлетворяет свойству свободы расходования, то $\pi(p)$ дает нам альтернативный («двойственный») способ описания технологии. Как и в случае представления предпочтений косвенной функцией полезности (или функцией расходов, см. главу 3), функция прибыли дает более сложное описание технологии, чем производственное множество Y само по себе, поскольку зависит от цен и поведения фирмы как ценополучателя. И, как показывает свойство (6), такое описание технологии обладает рядом достоинств при использовании в приложениях, зачастую позволяя немедленно определить предложение фирмы.

Свойство (6) связывает предложение с производными функции прибыли. Оно представляет собой прямое следствие теоремы о двойственности (утверждение 3.F.1). Как и в утверждении 3.G.1, соотношение $\nabla\pi(\bar{p}) = y(\bar{p})$ можно вывести из условий первого порядка при использовании теоремы об огибающей.

Положительная полуопределенность матрицы $Dy(p)$ в свойстве (7), которая в свете свойства (6) является следствием выпуклости функции $\pi(\cdot)$, — математическое выражение *закона предложения* в общем виде: *объем и цена изменяются однонаправленно*. С учетом договоренности о знаках координат производственного вектора это означает, что *если цена выпуска увеличивается* (а все остальные цены остаются неизменными), то *предложение готовой продукции также возрастает*, а *если увеличивается цена фактора производства*, то *спрос на этот фактор сокращается*.

Заметим, что закон предложения выполнен при *любых* изменениях цен. Поскольку, в отличие от теории спроса, здесь отсутствует бюджетное ограничение и не требуется какой-либо компенсации. По сути, в данном случае отсутствуют эффекты богатства, а имеют место только эффекты замещения.

Для недифференцируемого случая закон предложения записывается в виде:

$$(p - p') \cdot (y - y') \geq 0 \tag{5.C.3}$$

для всех p, p', $y \in y(p)$ и $y' \in y(p')$. В такой форме этот закон можно вывести и непосредственно с помощью выявленных предпочтений. Действительно,

$$(p - p') \cdot (y - y') = (p \cdot y - p \cdot y') + (p' \cdot y' - p' \cdot y) \geq 0,$$

где неравенство следует из условий $y \in y(p)$ и $y' \in y(p')$ (т. е. из того факта, что вектор y доставляет максимум прибыли при ценах p, а y' — при ценах p').
Из свойства (7) утверждения 5.С.1 следует, что матрица $Dy(p)$, *матрица замещения предложения*, имеет свойства, подобные тем, которыми обладает матрица замещения в теории спроса, хотя и с обратным знаком. Таким образом, эффекты замещения по своей цене неотрицательны, как показано выше (т. е. $\partial y_l(p)/\partial p_l \geq 0$ для всех l), и перекрестные эффекты симметричны (т. е. $\partial y_l(p)/\partial p_k = \partial y_k(p)/\partial p_l$ для всех l, k). Условие $Dy(p)p = 0$ следует из однородности $y(\cdot)$ (свойство (4)), подобно тому как это было показано при обсуждении матрицы замещения в теории спроса в главе 3.

Минимизация издержек

Важным следствием выбора фирмой производственного плана, максимизирующего прибыль, является то, что не существует другого способа производства того же объема выпуска при более низких затратах на факторы производства. Таким образом, минимизация издержек является необходимым условием максимизации прибыли. В связи с этим имеет смысл независимо исследовать *задачу минимизации издержек* фирмы. Эта задача представляет интерес по ряду причин. Во-первых, с ее помощью мы можем получить очень важные результаты и соотношения с технической точки зрения. Во-вторых, как мы увидим в главе 12, в случае когда фирма не является ценополучателем на рынке готовой продукции, мы более не можем использовать функцию прибыли для анализа ее поведения. Однако до тех пор, пока фирма принимает цены заданными на рынке факторов производства, результаты, вытекающие из задачи минимизации издержек, по-прежнему справедливы. В-третьих, если производственное множество характеризуется неубывающей отдачей от масштаба, функция значения и оптимальные векторы задачи минимизации издержек, для которых уровень выпуска фиксирован, ведут себя лучше, чем функция прибыли и отображение предложения задачи максимизации прибыли (например, как вы помните из упражнения 5.С.1, в этом случае функция прибыли может принимать только значения 0 и $+\infty$).

Для определенности сконцентрируемся на рассмотрении фирмы с единственным выпуском. Как обычно, обозначим через z неотрицательный вектор факторов производства, через $f(z)$ — производственную функцию, через q — объем выпуска, а через $w >> 0$ — вектор цен факторов производства. Тогда *задачу минимизации издержек* (CMP — от англ. *cost minimization problem*) можно представить в следующем виде (в предположении свободы расходования выпуска):

$$\min_{z \geq 0} w \cdot z \text{ при } f(z) \geq q. \qquad \text{(CMP)}$$

Оптимальное значение целевой функции задачи минимизации издержек в решении задачи называется *функцией издержек* $c(w, q)$. Соответствующее множество оптимального выбора объемов факторов производства, обозначаемое через $z(w, q)$, называется *отображением условного спроса на факторы производства* (или *функцией*, если это множество состоит из одного элемента). Термин «условный» подчеркивает, что спрос на факторы получен при условии достижения определенного уровня выпуска q.

Решение задачи минимизации издержек проиллюстрировано на рис. 5.C.2(a) для случая двух факторов производства. Затемненной областью отмечено множество векторов факторов производства z, с помощью которых можно произвести по крайней мере тот же уровень выпуска q. Это проекция (на положительный ортант пространства факторов производства) части производственного множества Y, которая порождает уровень выпуска, по крайней мере равный q, как показано на рис. 5.C.2(b). На рис. 5.C.2(a) решение задачи минимизации издержек $z(w, q)$ лежит на ближайшей к началу координат изокосте (прямой в $\mathbb{R}^2$, на которой лежат все комбинации факторов производства, дающие один и тот же уровень издержек), которая пересекает множество $\left\{z \in \mathbb{R}^L_+ : f(z) \geq q\right\}$.

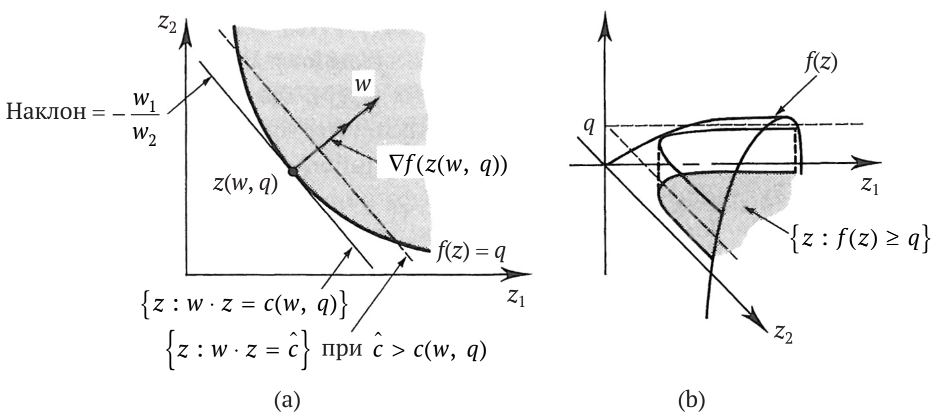


Рис. 5.C.2. Задача минимизации издержек. (a) Два фактора производства. (b) Изокванта как срез производственного множества

Если z^* — решение задачи минимизации издержек и производственная функция $f(\cdot)$ дифференцируема, то для некоторого $\lambda \geq 0$ для каждого фактора производства $l = 1, \ldots, L - 1$ должно быть выполнено следующее условие первого порядка:

$$w_l \geq \lambda \frac{\partial f\left(z^*\right)}{\partial z_l} \text{ и } w_l = \lambda \frac{\partial f\left(z^*\right)}{\partial z_l}, \text{ если } z_l^* > 0,$$

или, в матричной записи,

$$w \geq \lambda \nabla f\left(z^*\right) \text{ и } \left[w - \lambda \nabla f\left(z^*\right)\right] \cdot z^* = 0. \tag{5.C.4}$$

Как и в задаче максимизации прибыли, если производственное множество Y выпукло (т. е. если производственная функция $f(\cdot)$ вогнута), то условие (5.C.4) является не только необходимым, но и достаточным для того, чтобы z^* было решением минимизации издержек[8].

Из условия (5.C.4), как и из условия (5.C.2) задачи максимизации прибыли, следует, что для любых двух факторов производства l и k при $(z_l, z_k) >> 0$ выполнено $MRTS_{lk} = w_l/w_k$. Такое соотношение вполне ожидаемо, поскольку, как мы уже отмечали, максимизация прибыли подразумевает такой выбор уровня использования факторов производства, который дает минимальные издержки производства выбранного уровня выпуска q. При $L = 2$ из условия (5.C.4) следует, что в точке z^* наклон *изокванты*, соответствующей уровню выпуска q, в точности равен отношению цен факторов производства со знаком минус, т. е. $-w_1/w_2$. Этот факт проиллюстрирован также на рис. 5.C.2(a).

Как обычно, множитель Лагранжа λ можно проинтерпретировать как предельную стоимость ослабления ограничения $f\left(z^*\right) \geq q$. Таким образом, множитель λ равен $\partial c(w,\ q)/\partial q$, *предельным издержкам производства*.

Обратите внимание на близость формальной терминологии в данном разделе и в теории потребителя. Замените $f(\cdot)$ на $u(\cdot)$, q на u и z на x (т. е. проинтерпретируйте производственную функцию как функцию полезности), и задача минимизации издержек (CMP) превратится в задачу минимизации расходов (EMP), рассмотренную в разделе 3.E. Таким образом, в утверждении 5.C.2 свойства (1)–(7) функции расходов и отображения условного спроса на факторы производства следуют из анализа, представленного в разделах 3.E–3.G, при соответствующей интерпретации величин. (А свойства (8) и (9) вам предлагается доказать в упражнении 5.C.3.)

Утверждение 5.C.2. Пусть $c(w,\ q)$ — функция издержек для технологии с единственным выпуском при производственном множестве Y и производственной функции $f(\cdot)$, и пусть $z(w, q)$ — соответствующее отображение условного спроса на факторы производства. Предположим также, что производственное множество Y замкнуто и удовлетворяет свойству свободы расходования. Тогда

1) $c(\cdot)$ однородна первой степени по w и не убывает по q.
2) $c(\cdot)$ — вогнутая функция по w.
3) Если множества $\{z \geq 0 : f(z) \geq q\}$ выпуклы по каждому q, то $Y =$ $= \{(-z, q) : w \cdot z \geq c(w, q)$ для всех $w >> 0\}$.
4) $z(\cdot)$ однороден первой степени по w.
5) Если множество $\{z \geq 0 : f(z) \geq q\}$ выпукло, то $z(w,\ q)$ — выпуклое множество. Более того, если множество $\{z \geq 0 : f(z) \geq q\}$ строго выпукло, то множество $z(w,\ q)$ состоит из одного элемента.

[8] Однако следует отметить, что условия первого порядка являются достаточными для решения минимизации издержек до тех пор, пока множество $\{z : f(z) \geq q\}$ выпукло. Таким образом, ключевым фактором достаточности условий первого порядка является *квазивогнутость* функции $f(\cdot)$. Это крайне важный момент, поскольку квазивогнутость $f(\cdot)$ совместима с возрастающей отдачей от масштаба (см. пример 5.C.1).

6) (*лемма Шепарда*) Если множество $z(\bar{w}, q)$ состоит из одной точки, то функция $c(\cdot)$ дифференцируема по w в точке $\bar{w}$ и $\nabla_w c(\bar{w}, q) = z(\bar{w}, q)$.
7) Если $z(\cdot)$ дифференцируем в точке $\bar{w}$, то $D_w z(\bar{w}, q) = D_w^2 c(\bar{w}, q)$ — симметричная, отрицательно полуопределенная матрица, причем $D_w z(\bar{w}, q)\bar{w} = 0$.
8) Если $f(\cdot)$ однородна первой степени (т. е. демонстрирует постоянную отдачу от масштаба), то $c(\cdot)$ и $z(\cdot)$ однородны первой степени по q.
9) Если $f(\cdot)$ вогнута, то $c(\cdot)$ — выпуклая функция по q (это, в частности, означает, что предельные издержки не убывают по q).

В упражнении 5.C.4 вас просят показать, что свойства (1)–(7) утверждения 5.C.2 также справедливы для технологий с множественностью выпусков.

Функция издержек может быть особенно полезна в том случае, когда производственное множество характеризуется постоянной отдачей от масштаба. В этом случае $y(\cdot)$ принимает неединственное значение при любом векторе цен, соответствующем ненулевому уровню производства, а значит, при этих ценах лемму Хотеллинга (утверждение 5.C.1(6)) применять нельзя. Несмотря на это, возможно, что в этом случае условный спрос на факторы производства $z(w, q)$ будет принимать единственное значение, что позволяет использовать лемму Шепарда. Однако при этом не следует забывать, что функция издержек содержит не больше информации, чем функция прибыли. Действительно, как мы знаем из свойств (3) утверждений 5.C.1 и 5.C.2, при условии выпуклости существует взаимнооднозначное соответствие между функциями прибыли и издержек, т. е. любую из этих функций можно использовать для восстановления производственного множества, а затем вывести другую функцию.

С помощью функции издержек мы можем следующим образом переформулировать задачу выбора фирмой уровня производства, максимизирующего прибыль:

$$\max_{q>0} pq - c(w, q). \tag{5.C.5}$$

Необходимое условие первого порядка, характеризующее q^* как уровень выпуска, максимизирующий прибыль, тогда имеет вид

$$p - \frac{\partial c\left(w, q^*\right)}{\partial q} \le 0 \text{ и } p - \frac{\partial c\left(w, q^*\right)}{\partial q} = 0, \text{ если } q^* > 0. \tag{5.C.6}$$

Таким образом, во внутреннем оптимуме (т. е. при $q^* > 0$) *цена равна предельным издержкам*[9]. Если функция $c(w, q)$ выпукла по q, то условие

[9] Это условие можно было также получить, сопоставляя условия первого порядка (5.C.4) задачи минимизации издержек (CMP) и условия первого порядка (5.C.2) задачи максимизации прибыли (PMP): действительно, эти условия совпадают тогда и только тогда, когда $\lambda = p$. Напомним, что λ, множитель при ограничении задачи минимизации издержек, равен $\partial c(w, q)/\partial q$.

первого порядка (5.C.6) также является достаточным условием того, что q^* — оптимальный уровень выпуска фирмы. (Более подробному изучению взаимосвязи между предложением фирмы и свойствами ее технологии, функцией издержек посвящен раздел 5.D.)

Мы могли бы и далее продолжать изучать функции прибыли и издержек, потратив на это еще не одну страницу. Некоторые примеры и ряд дополнительных свойств приведены в упражнениях. А заинтересованного в более развернутом обсуждении этой проблематики читателя мы отсылаем к работе (McFadden, 1978).

Пример 5.C.1. *Функции прибыли и издержек для производственной функции Кобба — Дугласа*. В этом примере мы получим функции прибыли и издержек для производственной функции Кобба — Дугласа из примера 5.B.2 вида $f(z_1, z_2) = z_1^{\alpha} z_2^{\beta}$. Как вы помните из примера 5.B.3, случай $\alpha + \beta = 1$ соответствует постоянной отдаче от масштаба, $\alpha + \beta < 1$ — убывающей, а $\alpha + \beta > 1$ — возрастающей.

Функции условного спроса на факторы производства и функция издержек имеют тот же самый вид и выводятся точно так же, как функция расходов в разделе 3.E (см. пример 3.E.1; единственное отличие в вычислениях заключается в том, что здесь мы не предполагаем, что $\alpha + \beta = 1$):

$$z_1(w_1, w_2, q) = q^{1/(\alpha+\beta)}(\alpha w_2/\beta w_1)^{\beta/(\alpha+\beta)},$$

$$z_2(w_1, w_2, q) = q^{1/(\alpha+\beta)}(\beta w_1/\alpha w_2)^{\alpha/(\alpha+\beta)}$$

и

$$c(w_1, w_2, q) = q^{1/(\alpha+\beta)}\left[(\alpha/\beta)^{\beta/(\alpha+\beta)} + (\alpha/\beta)^{-\alpha/(\alpha+\beta)}\right] w_1^{\alpha/(\alpha+\beta)} w_2^{\beta/(\alpha+\beta)}.$$

Функция издержек имеет форму $c(w_1, w_2, q) = q^{1/(\alpha+\beta)}\theta\varphi(w_1, w_2)$, где

$$\theta = \left[(\alpha/\beta)^{\beta/(\alpha+\beta)} + (\alpha/\beta)^{-\alpha/(\alpha+\beta)}\right]$$

является константой, а $\varphi(w_1, w_2) = w_1^{\alpha/(\alpha+\beta)} w_2^{\beta/(\alpha+\beta)}$ — функцией, не зависящей от уровня выпуска q. При постоянной отдаче от масштаба $\theta\varphi(w_1, w_2)$ представляет собой издержки производства на единицу выпуска.

Одним из способов получения функции предложения и функции прибыли фирмы является использование функции издержек и решения задачи (5.C.5). Применяя (5.C.6), получаем следующие условия первого порядка этой задачи:

$$p \le \theta\varphi(w_1, w_2)\left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right) q^{(1/(\alpha+\beta))-1},\ p = \theta\varphi(w_1, w_2)\left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right) q^{(1/(\alpha+\beta))-1}, \text{ если } q > 0. \quad (5.C.7)$$

Условие первого порядка (5.C.7) является достаточным условием максимума при $\alpha + \beta \le 1$, поскольку в этом случае функция издержек фирмы выпукла по q.

При $\alpha + \beta < 1$ из (5.B.7) находим единственный оптимальный уровень выпуска:

$$q(w_1, w_2, p) = (\alpha + \beta)[p/\theta\varphi(w_1, w_2)]^{(\alpha+\beta)/(1-\alpha-\beta)}.$$

Тогда спрос на факторы производства можно найти из соотношений

$$z_l(w_1, w_2, p) = z_l\left(w_1, w_2, q(w_1, w_2, p)\right), \text{ где } l = 1, 2,$$

а функцию прибыли — из условия

$$\pi(w_1,\ w_2,\ p) = pq(w_1,\ w_2,\ p) - w \cdot z\big(w_1, w_2, q(w_1,\ w_2,\ p)\big).$$

При $\alpha + \beta = 1$ правая часть условия первого порядка (5.C.7) равна $\theta\varphi(w_1, w_2)$, единичным издержкам производства (которые не зависят от q). Если величина $\theta\varphi(w_1, w_2)$ больше p, то оптимальным является уровень выпуска $q = 0$; если эта величина меньше p, то решения задачи не существует (снова с ростом q прибыль фирмы неограниченно растет); при $\theta\varphi(w_1, w_2) = p$ решением задачи максимизации прибыли является любой неотрицательный уровень выпуска, а прибыль фирмы равна нулю.

Наконец, если $\alpha + \beta > 1$ (т. е. при возрастающей отдаче от масштаба), величина q, удовлетворяющая условию первого порядка (5.C.7), не дает максимального уровня прибыли. (Фактически в этом случае функция издержек строго вогнута по q, и поэтому любой уровень выпуска, удовлетворяющий условию первого порядка (5.C.7), дает *минимальную* прибыль, при условии что выпуск должен производиться с минимальными издержками.) Действительно, поскольку $p > 0$, то удвоение уровня выпуска по сравнению с любым данным q приводит к росту дохода фирмы в два раза, но при этом издержки факторов производства увеличиваются менее чем вдвое, а именно в $2^{1/(\alpha+\beta)} < 2$ раз[10]. Таким образом, прибыль фирмы может быть сколь угодно большой. Следовательно, при возрастающей отдаче от масштаба решения задачи максимизации прибыли (PMP) не существует. ■

5.D. Геометрия издержек и предложения в случае единственного выпуска

В этом разделе мы продолжим исследовать взаимосвязь между технологией фирмы, ее издержками и предложением готовой продукции в частном, но широко применяемом случае фирмы, производящей единственный выпуск. Значительное преимущество рассмотрения именно случая единственного выпуска — возможность использования наглядных графических иллюстраций.

На протяжении всего раздела будем обозначать объем выпуска через q и будем считать цены факторов производства постоянными, фиксированными на уровне $\bar{w} \gg 0$. Для удобства введем новые обозначения: обозначим функцию издержек фирмы через $C(q) = c(\bar{w},\ q)$, и при $q > 0$ обозначим через $AC(q) = C(q)/q$ средние издержки фирмы. Будем считать, что производная функции издержек существует, и обозначим предельные издержки фирмы через $C'(q) = dC(q)/dq$.

Как вы помните из (5.C.6), при данной цене готовой продукции p все уровни выпуска, доставляющие максимум прибыли, $q \in q(p)$, должны удовлетворять условию первого порядка (в предположении, что $C'(q)$ существует):

$$p \le C'(q),\ p = C'(q),\ \text{если } q > 0. \tag{5.D.1}$$

Если производственное множество Y выпукло, то $C(\cdot)$ — выпуклая функция (см. свойство (9) утверждения 5.C.2), а следовательно, предельные издержки

[10] В оригинальном тексте допущена ошибка: должно быть именно такое соотношение, а не $2^{1/(\alpha+\beta)} > 2$. — *Примеч. пер.*

не убывают. В этом случае, как мы уже отмечали в разделе 5.C, условия первого порядка являются не только необходимыми, но и достаточными для того, чтобы q был уровнем выпуска, максимизирующим прибыль при ценах p.

Два примера выпуклых производственных множеств представлены на рис. 5.D.1 и 5.D.2. На этих рисунках предполагается, что фирма использует только один фактор производства, цена которого положена равной 1 (этот фактор производства можно трактовать как совокупные расходы на факторы производства)[11]. На рис. 5.D.1(a) изображено производственное множество, (b) — функция издержек , (c) — средние и предельные издержки для случая убывающей отдачи от масштаба. Обратите внимание, что график функции издержек получается поворотом производственного множества на 90 градусов. Получение графиков средних и предельных издержек из графика функции издержек проиллюстрировано на рис. 5.D.1(b) (для уровня выпуска $\hat{q}$). На рис. 5.D.2 те же графики изображены для случая постоянной отдачи от масштаба.

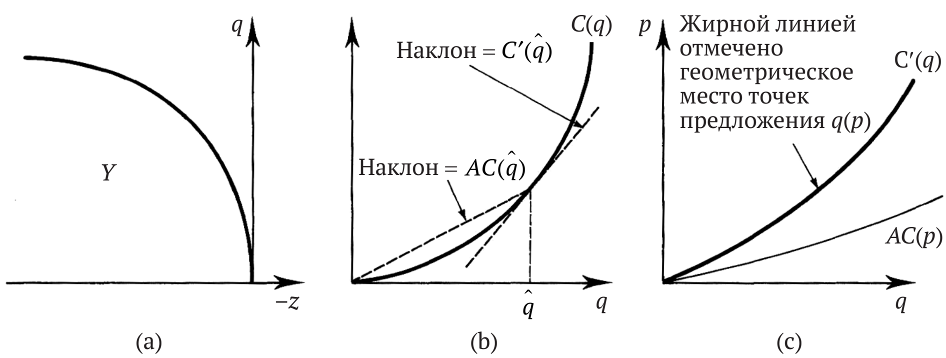


Рис. 5.D.1. Строго выпуклая технология (убывающая отдача от масштаба).
(a) Производственное множество. (b) Функция издержек.
(c) Средние издержки, предельные издержки и предложение

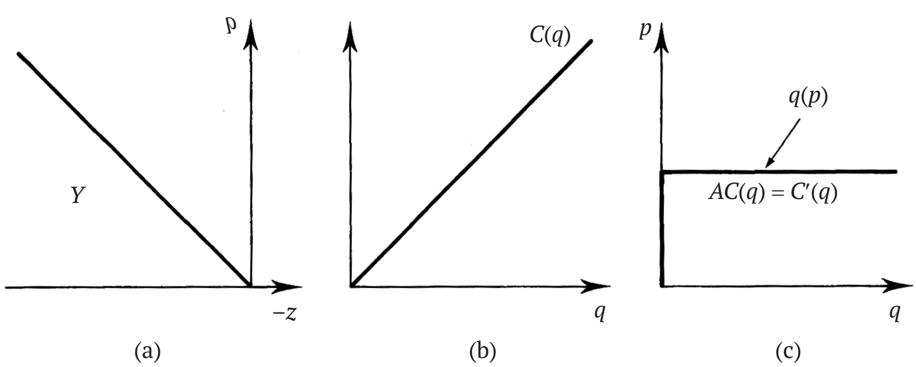


Рис. 5.D.2. Технология с постоянной отдачей от масштаба.
(a) Производственное множество. (b) Функция издержек.
(c) Средние издержки, предельные издержки и предложение

[11] Таким образом, единственный фактор производства можно рассматривать как хиксианский композитный товар, аналогично тому, как это показано в упражнении 3.G.5.

На рис. 5.D.1(c) и 5.D.2(c) жирной линией отмечена кривая предложения фирмы $q(\cdot)$ (геометрическое место точек, соответствующих максимизирующему прибыль выпуску фирмы). (*Замечание*: *на этом и последующих рисунках кривая предложения фирмы отмечена жирной линией*.) Поскольку технологии в двух данных примерах выпуклы, то кривая предложения фирмы в каждом случае в точности совпадает с такими комбинациями (q, p), которые удовлетворяют условию первого порядка (5.D.1).

Если технология невыпукла, например в силу присутствия некоторой неделимости, то из выполнения необходимого условия первого порядка (5.D.1) более не следует, что q доставляет максимум прибыли. Тогда кривая предложения будет только подмножеством множества комбинаций (q, p), удовлетворяющих (5.D.1).

На рис. 5.D.3 изображен случай невыпуклой технологии. Как видно из рисунка, сначала технология характеризуется возрастающей отдачей от масштаба и на этом участке средние издержки убывают, а затем имеет место убывающая отдача от масштаба и на соответствующем участке средние издержки возрастают. Уровень (уровни) выпуска, соответствующий минимальным средним издержкам, называется *эффективным масштабом*, и если этот уровень единствен, то мы будем обозначать его через $\bar{q}$. Рассмотрим кривые издержек на рис. 5.D.3(a) и (b): как видно из рисунков, при $\bar{q}$ выполнено условие $AC(\bar{q}) = C'(\bar{q})$. В упражнении 5.D.1 вас просят доказать этот факт в общем случае.

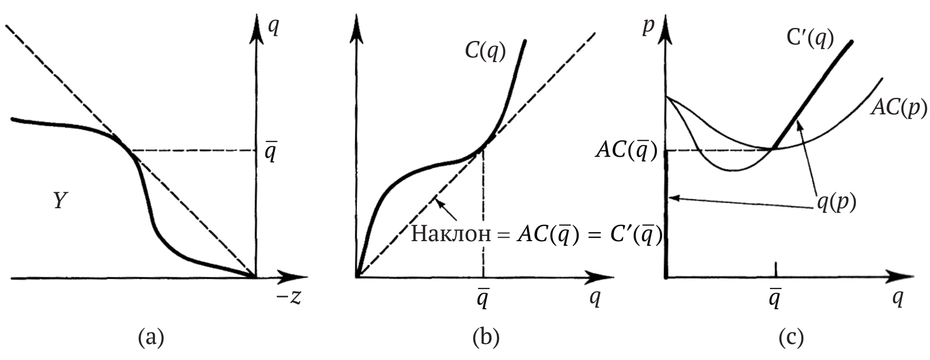


Рис. 5.D.3. Невыпуклая технология. (a) Производственное множество. (b) Функция издержек. (c) Средние издержки, предельные издержки и предложение

Упражнение 5.D.1. Покажите, что $AC(\bar{q}) = C'(\bar{q})$ при любом $\bar{q}$, удовлетворяющем условию $AC(\bar{q}) \le AC(q)$ для любого q.

Кривая предложения для невыпуклой технологии отмечена жирной линией на рис. 5.D.3(c). При $p > AC(\bar{q})$ максимум прибыли фирмы достигается при единственном уровне выпуска, удовлетворяющем условию $p = C'(q) > AC(q)$. (Следует заметить, что при этом фирма получает строго положительную прибыль, что больше нулевой прибыли при уровне выпуска $q = 0$, которая, в свою очередь, больше отрицательной прибыли, получаемой при выборе уровня выпуска $q > 0$ при $p = C'(q) < AC(q)$.) С другой стороны, при $p < AC(\bar{q})$ любой уровень выпуска $q > 0$ дает отрицательную прибыль, и поэтому оптимальным уровнем выпуска в этом случае является $q = 0$ (обратите внимание, что $q = 0$ удовлетворяет необходимому условию первого порядка (5.D.1), поскольку $p < C'(0)$). Если же $p = AC(\bar{q})$, то максимум прибыли доставляет множество уровней выпуска $\{0, \bar{q}\}$. Соответственно, предложение будет таким, как показано на рис. 5.D.3(c).

Один из важных источников невыпуклости технологии — фиксированные издержки начала производства, которые могут быть как возвратными, так и невозвратными. На рис. 5.D.4 и 5.D.5 (аналогичных рис. 5.D.1 и 5.D.2) представлено два случая с возвратными фиксированными издержками начала производства (т. е. бездействие предполагается возможным). На этих рисунках проиллюстрирована ситуация, когда фирма сталкивается с фиксированными издержками K тогда и только тогда, когда

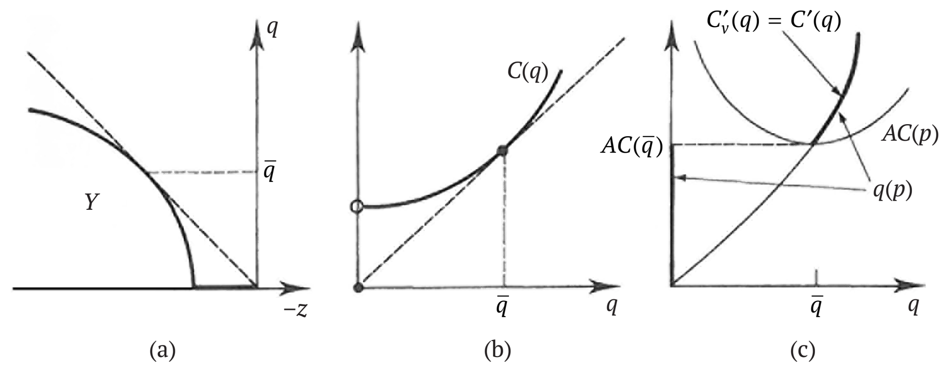


Рис. 5.D.4. Строго выпуклые переменные издержки при возвратных издержках начала производства. (a) Производственное множество. (b) Функция издержек. (c) Средние издержки, предельные издержки и предложение

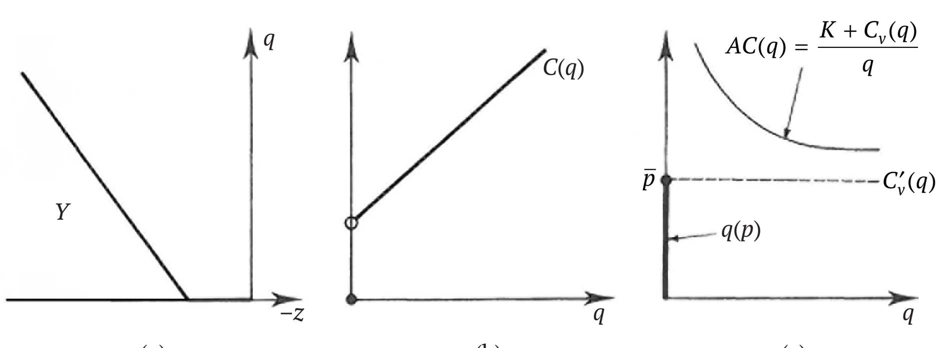


Рис. 5.D.5. Переменные издержки при постоянной отдаче от масштаба и возвратных издержках начала производства. (a) Производственное множество. (b) Функция издержек. (c) Средние издержки, предельные издержки и предложение

производит положительный объем выпуска, причем издержки фирмы выпуклы. Таким образом, совокупные издержки имеют вид: $C(0) = 0$, и $C(q) = C_v(q) + K$ при $q > 0$, где $K > 0$, и $C_v(q)$, *функция переменных издержек*, является выпуклой (причем $C_v(0) = 0$). На рис. 5.D.4 продемонстрирован случай строго выпуклой функции $C_v(\cdot)$, тогда как на рис. 5.D.5 $C_v(\cdot)$ линейна. На рисунках также проиллюстрировано предложение фирмы. В обеих ситуациях фирма производит положительный объем выпуска только в том случае, если ее прибыль достаточно велика, чтобы покрыть не только переменные издержки, но и фиксированные издержки K. Предложение, представленное на рис. 5.D.5(c), следует трактовать так: при $p > \bar{p}$ предложение бесконечно велико, а при $p \leq \bar{p}$ оптимальным для фирмы является выпуск $q = 0$.

На рис. 5.D.6 продемонстрирован несколько видоизмененный случай ситуации, изображенной на рис. 5.D.4: здесь фиксированные издержки являются невозвратными, т. е. $C(0) > 0$. Таким образом, в этом случае $C(q) = C_v(q) + K$ для всех $q \geq 0$, и, следовательно, фирма должна платить сумму K в любом случае: производит она положительный объем выпуска или нет. Хотя здесь и невозможно бездействие, функция издержек фирмы выпукла, а значит, мы снова оказываемся в ситуации, когда условие первого порядка (5.D.1) является достаточным. Поскольку фирма должна платить сумму K независимо от того, производит ли она положительный уровень выпуска, то она не закроется просто потому, что прибыль отрицательна. Следует заметить, что поскольку переменные издержки $C_v(\cdot)$ выпуклы и $C_v(0) = 0$, то из $p = C_v'(q)$ следует, что $pq > C_v(q)$, т. е. фирма покрывает свои переменные издержки, производя уровень выпуска, удовлетворяющий условию первого порядка. Следовательно, предложение фирмы будет таким, как показано на рис. 5.D.6(c). Обратите внимание, что предложение фирмы в точности такое же, как и в случае, когда ей вообще не приходится нести невозвратных издержек K (см. рис. 5.D.1(c)).

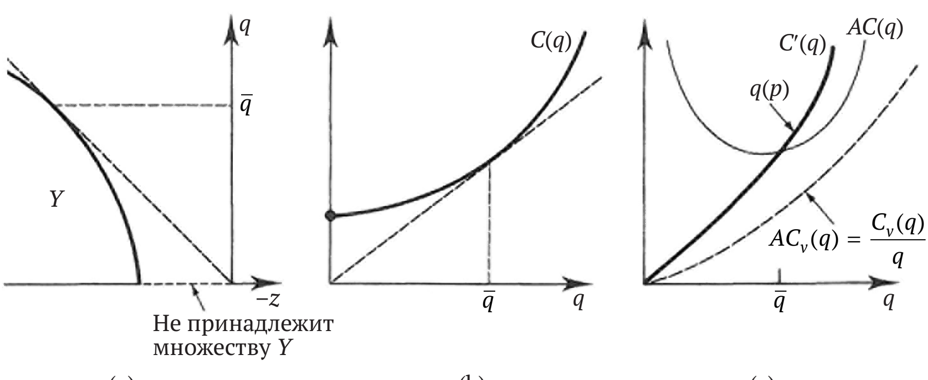


Рис. 5.D.6. Строго выпуклые переменные издержки при невозвратных издержках. (a) Производственное множество. (b) Функция издержек. (c) Средние издержки, предельные издержки и предложение

Упражнение 5.D.2. Изобразите предложение фирмы в случае частично невозвратных издержек, т. е. в случае, когда $C(q) = K + C_v(q)$, если $q > 0$, и $0 < C(0) < K$.

Как мы уже отмечали в разделе 5.B, одной из причин невозвратных издержек, по крайней мере в краткосрочном периоде, является выбор факторов производства, обусловленный некоторыми предварительными договоренностями, которые не могут быть изменены. Например, предположим, что в производстве используются два фактора и технология описывается производственной функцией $f(z_1, z_2)$. Как вы помните, цены факторов производства предполагаются фиксированными на уровне $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$. На рис. 5.D.7(a) график функции издержек без учета каких-либо предварительных обязательств по приобретению факторов производства обозначен через $C(\cdot)$. Будем называть соответствующую функцию издержек *функцией долгосрочных издержек*. Если объем использования одного из факторов производства, скажем z_2, в краткосрочном периоде фиксирован на уровне $\bar{z}_2$, то *краткосрочная функция издержек* фирмы принимает вид $C(q|\,\bar{z}_2) = \bar{w}_1 z_1 + \bar{w}_2 \bar{z}_2$, где z_1 выбирается так, что $f(z_1, \bar{z}_2) = q$. Графики нескольких таких краткосрочных функций издержек, соответствующих различным уровням z_2, представлены на рис. 5.D.7(a). Поскольку ограничения на выбор фирмой факторов производства могут только увеличить издержки производства, то кривая $C(q|\,\bar{z}_2)$ лежит над кривой $C(q)$ при всех уровнях q, за исключением такого q, для которого уровень $\bar{z}_2$ является оптимальным в долгосрочном периоде (т. е. такого q, что $z_2(\bar{w}, q) = \bar{z}_2$). Таким образом, $C(q|\,z_2(\bar{w}, q)) = C(q)$ для всех q. Из этого факта, а также

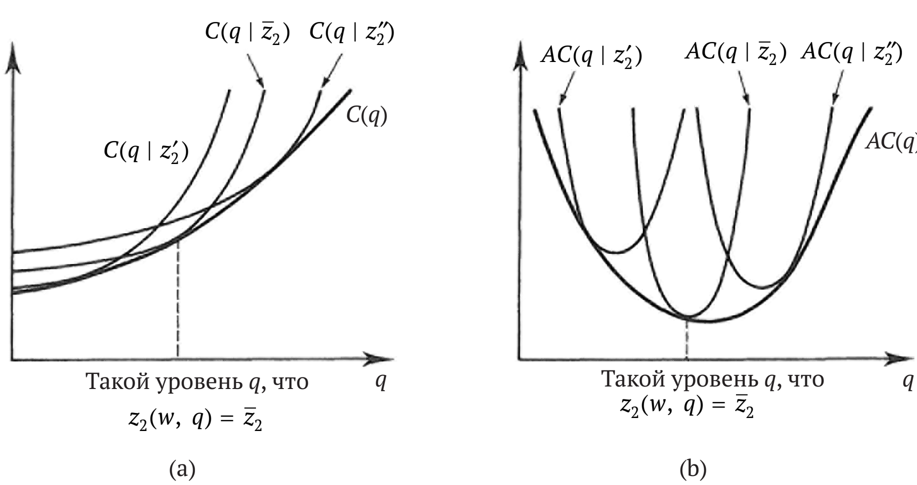


Рис. 5.D.7. Издержки в случае, когда уровень использования одного из факторов производства фиксирован в краткосрочном периоде, а в долгосрочном — может свободно изменяться. (a) Долгосрочная и краткосрочные функции издержек. (b) Средние издержки в долгосрочном и краткосрочном периодах

из условия $C(q' | z_2(\bar{w},\ q)) \geq C(q')$ для всех q', следует: $C'(q) = C'(q | z_2(\bar{w},\ q))$ для всех q, т. е. если уровень использования второго фактора, z_2, зафиксирован на оптимальном в долгосрочном периоде уровне, то краткосрочные предельные издержки равны долгосрочным предельным издержкам. С геометрической точки зрения это означает, что кривая $C(\cdot)$ огибает снизу семейство краткосрочных кривых издержек $C(q | \bar{z}_2)$, полученных при всех возможных значениях z_2.

Наконец, следует заметить, что при данных функциях долгосрочных и краткосрочных издержек функции средних долгосрочных и краткосрочных издержек и функции предложения фирмы в краткосрочном и долгосрочном периодах могут быть получены аналогично тому, как было показано ранее в этом разделе. Средние издержки для случая, изображенного на рис. 5.D.7(a), представлены на рис. 5.D.7(b). (В упражнении 5.D.3 вам предлагается более подробно исследовать предложение фирмы в краткосрочном и долгосрочном периодах.)

5.E. Агрегирование

В этом разделе мы будем изучать теорию агрегированного (чистого) предложения. Как мы видели в разделе 5.C, следствием отсутствия бюджетного ограничения является отсутствие эффекта богатства для индивидуального предложения фирмы: при изменении цен имеет место только эффект замещения. Поэтому, в отличие от теории агрегированного спроса, агрегирование в производстве осуществляется намного проще[12].

Итак, пусть в экономике имеется J производственных единиц (фирм или, возможно, заводов), технология каждой из которых описывается производственным множеством $Y_1, \ldots, Y_J$. Будем считать, что все множества Y_j непусты, замкнуты и удовлетворяют свойству свободы расходования. Обозначим через $\pi_j(p)$ и $y_j(p)$ функцию прибыли и отображение предложения соответственно для производственного множества Y_j. *Отображение агрегированного предложения* представляет собой сумму отображений индивидуального предложения:

$$y(p) = \sum_{j=1}^{J} y_j(p) = \{y \in \mathbb{R}^L : y = \sum_j y_j \text{ для некоторого } y_j \in y_j(p), j = 1, \ldots, J\}.$$

Предположим на минуту, что все $y_j(\cdot)$представляют собой однозначные дифференцируемые функции вектора цен p. Тогда, как мы знаем из утверждения 5.C.1, все $Dy_j(p)$ — симметричные, положительно полуопределенные матрицы. Поскольку эти два свойства при сложении сохраняются, то мы можем сделать вывод, что матрица $Dy(p)$ будет также *симметричной и положительно полуопределенной*.

[12] Классической по этому вопросу, а также по материалу, изложенному в разделе 5.F, является работа (Koopmans, 1957), которая к тому же просто хорошо написана.

Как и в теории индивидуальной фирмы, из положительной полуопределенности матрицы $Dy(p)$ следует *закон предложения* в агрегированном варианте: если цена возрастает, то также возрастает и соответствующее *агрегированное* предложение. Это свойство агрегированного предложения, как и в случае отдельной фирмы, справедливо при *всех* изменениях цен. Можно также доказать этот закон агрегированного предложения непосредственно, используя (5.C.3): $(p - p') \cdot [y_j(p) - y_j(p')] \geq 0$ для всех j. Тогда, суммируя по всем j, получим

$$(p - p') \cdot [y(p) - y(p')] \geq 0.$$

Симметричность $Dy(p)$ предполагает, что соответствующий $y(p)$ является «репрезентативным производителем». И теперь мы строго докажем, что это действительно так.

Для данных $Y_1, \ldots, Y_J$ определим *агрегированное производственное множество* следующим образом:

$$Y = Y_1 + \ldots + Y_J = \{y \in \mathbb{R}^L : y = \sum_j y_j \text{ для некоторого } y_j \in y_j(p), j = 1, \ldots, J\}.$$

Агрегированное производственное множество Y описывает производственные векторы, которые агрегированно допустимы, если все производственные множества используются вместе. Пусть $\pi^*(p)$ и $y^*(p)$ — функция прибыли и отображение предложения, соответствующие агрегированному производственному множеству Y. Это функция прибыли и отображение предложения, которые возникли бы, если бы работала одна фирма, принимающая цены заданными, имеющая технологию, описываемую всеми индивидуальными производственными множествами.

В утверждении 5.E.1 приводится строгий результат относительно агрегирования предложения: *агрегированная прибыль, равная сумме прибыли всех производственных единиц, максимизирующих свою прибыль и принимающих цену заданной, будет такой же, как если бы эти производственные единицы координировали свои действия* (*т. е. свои* y_j), *руководствуясь максимизацией совокупной прибыли*.

Утверждение 5.E.1. Для всех $p >> 0$ выполнено

1) $\pi^*(p) = \sum_j \pi_j(p)$;

2) $y^*(p) = \sum_j y_j(p)$ $(= \{\sum_j y_j : y_j \in y_j(p)$ для всех $j\})$.

Доказательство. (1) Для доказательства первого соотношения следует заметить, что если мы возьмем любую совокупность производственных планов $y_j \in Y_j$, $j = 1, \ldots, J$, то $\sum_j y_j \in Y$. Поскольку $\pi^*(\cdot)$ — функция прибыли, соответствующая производственному множеству Y, то $\pi^*(p) \geq p \cdot \left(\sum_j y_j\right) = \sum_j p \cdot y_j$. Отсюда следует, что

$\pi^*(p) \geq \sum_j \pi_j(p)$. С другой стороны, рассмотрим произвольный вектор $y \in Y$. По определению множества Y, существуют $y_j \in Y_j$, $j = 1, \ldots, J$, такие что $\sum_j y_j = y$. Тогда $p \cdot y = p \cdot \left(\sum_j y_j\right) = \sum_j p \cdot y_j \leq \sum_j \pi_j(p)$ для всех $y \in Y$. Таким образом, $\pi^*(p) \leq \sum_j \pi_j(p)$. Из двух полученных неравенств следует, что $\pi^*(p) = \sum_j \pi_j(p)$.

(2) Для доказательства второго неравенства мы должны показать, что $\sum_j y_j(p) \subset y^*(p)$ и $y^*(p) \subset \sum_j y_j(p)$. Для доказательства первого соотношения рассмотрим любое множество индивидуальных производственных планов: $y_j \in y_j(p)$, $j = 1, \ldots, J$. Тогда $p \cdot \left(\sum_j y_j\right) = \sum_j p \cdot y_j = \sum_j \pi_j(p) = \pi^*(p)$, где последнее равенство следует из части (1) утверждения. Следовательно, $\sum_j y_j \in y^*(p)$, а значит, $\sum_j y_j(p) \subset y^*(p)$. С другой стороны, возьмем любой произвольный $y \in y^*(p)$. Тогда $y = \sum_j y_j$ для некоторого $y_j \in Y_j$, $j = 1, \ldots, J$. Поскольку $p \cdot \left(\sum_j y_j\right) = \pi^*(p) = \sum_j \pi_j(p)$ и для любого j выполнено $p \cdot y_j \leq \pi_j(p)$, то $p \cdot y_j = \pi_j(p)$ для любого j. Таким образом, $y \in y_j(p)$ для всех j, и, значит, $y \in \sum_j y_j(p)$. Следовательно, мы показали, что $y^*(p) \subset \sum_j y_j(p)$. ■

Суть утверждения 5.E.1 проиллюстрирована на рис. 5.E.1. Это утверждение можно интерпретировать как результат децентрализации: для того чтобы найти решение задачи максимизации агрегированной прибыли при данных ценах p, достаточно найти решения соответствующих индивидуальных задач, а потом их просуммировать.

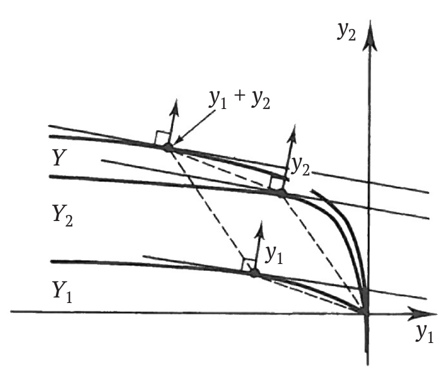


Рис. 5.E.1. Максимизация совокупной прибыли как результат индивидуальной максимизации прибыли

Несмотря на то что этот результат может показаться очень простым, он тем не менее имеет много важных следствий. Рассмотрим, например, случай фирмы, производящей единственный выпуск. Согласно данному утверждению, если фирмы, сталкиваясь с ценой выпуска p и ценами факторов производства w, максимизируют свою прибыль, то их предложение максимизирует агрегированную прибыль. Но это означает, что если $q = \sum_j q_j$ — агрегированный выпуск, производимый фирмами, то совокупные издержки производства в точности равны $c(w, q)$ — значению *функции агрегированных издержек* (функции издержек, соответствующей агрегированному производственному множеству Y). *Таким образом, распределение производства выпуска q между фирмами характеризуется минимизацией издержек*. Кроме того, это позволяет нам установить связь между функцией агрегированного предложения готовой продукции $q(p)$ и функцией агрегированных издержек, подобно тому как это было проделано для индивидуальной фирмы в разделе 5.D. (Этот факт особенно важен в контексте изучения моделей частичного равновесия на конкурентных рынках, рассматриваемых в главе 10.)

Подведем итог вышесказанному: если фирмы максимизируют прибыль, принимая цены заданными, то агрегирование производственной части экономики осуществляется превосходно.

Как и в случае теории потребителя (см. приложение А главы 4), агрегирование может иметь важный регуляризирующий эффект в контексте производства. Следует отметить один интересный факт: в случае когда в экономике много фирм или заводов со схожими технологиями, *агрегированное* производственное множество может быть почти выпуклым, даже если производственные множества отдельных фирм таковыми не являются. Это проиллюстрировано на рис. 5.E.2 для случая J фирм с одинаковыми производственными множествами, такими как показано на рис. 5.E.2(a). Определив среднее производственное множество как $(1/J)(Y_1 + \ldots + Y_J) = \{y : y = (1/J)(y_1 + \ldots + y_J)$ для некоторого $y_j \in Y_j, j = 1, \ldots, J\}$, нетрудно заметить, что при больших значениях J это множество почти выпукло, как показано на рис. 5.E.2(b)[13].

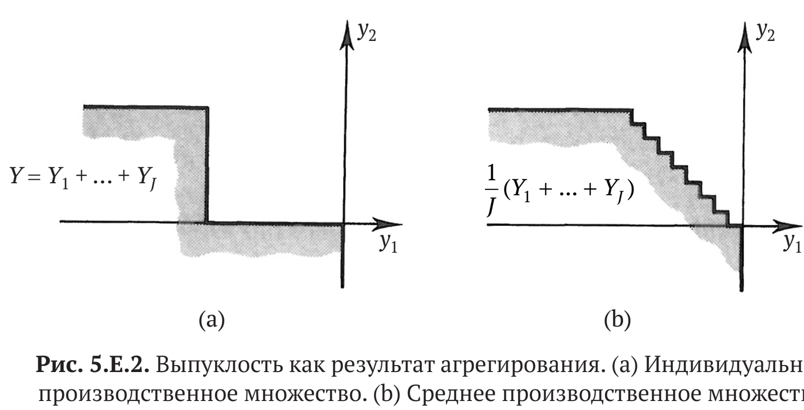


Рис. 5.E.2. Выпуклость как результат агрегирования. (a) Индивидуальное производственное множество. (b) Среднее производственное множество

[13] Обратите внимание, что данное производственное множество ограничено сверху. Это важно, поскольку гарантирует, что невыпуклость индивидуального производственного множества конечна. Если индивидуальное производственное множество подобно тому, что показано на рис. 5.B.4, где ни производственное множество, ни невыпуклость не ограничены, то среднее множество будет характеризоваться значительной невыпуклостью (для любого J). На рис. 5.B.5 мы имеем случай неограниченного производственного множества, но с ограниченной невыпуклостью. Что касается рисунка 5.E.2, то в этом случае среднее множество почти выпукло.

5.F. Эффективное производство

Поскольку экономики благосостояния по большей части сконцентрированы на вопросах эффективности (см., например, главы 10 и 16), то полезно было бы иметь алгебраическую и геометрическую характеристики производственных планов, которые однозначно можно считать безотходными. Это приводит нас к определению 5.F.1.

Определение 5.F.1. Производственный вектор $y \in Y$ *эффективен*, если не существует производственного вектора $y' \in Y$, такого что $y' \geq y$ и $y' \neq y$.

Иными словами, производственный вектор эффективен, если не существует другого допустимого производственного вектора, который порождал бы выпуск не меньше y без использования дополнительных факторов производства и в соответствии с которым фактически производится больше некоторого выпуска или используется меньше некоторого фактора производства.

Как видно из рисунка 5.F.1, всякий эффективный производственный вектор y должен принадлежать границе множества Y, однако обратное, вообще говоря, неверно: существует много граничных точек множества Y, которые не являются эффективными.

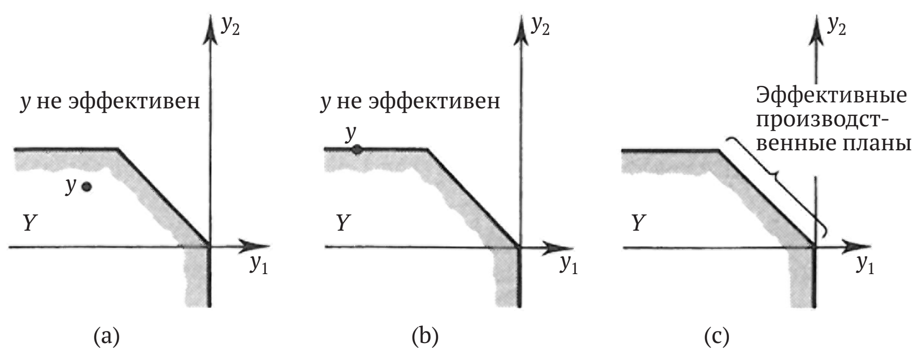


Рис. 5.F.1.

Теперь покажем, что концепция эффективности неразрывно связана с максимизацией прибыли. Предлагаемое обсуждение — лишь первый шаг в изучении проблемы эффективности, подробное исследование которой мы продолжим в главе 10 и в наибольшей степени в главе 16.

В утверждении 5.F.1 приводится простой, но очень важный результат. По сути, это утверждение представляет собой один из вариантов *первой фундаментальной теоремы экономики благосостояния*.

Утверждение 5.F.1. Если $y \in Y$ — производственный вектор, максимизирующий прибыль при некоторых ценах $p \gg 0$, то y эффективен.

Доказательство. Предположим противное: пусть существует вектор $y' \in Y$, такой что $y' \neq y$ и $y' \geq y$. Поскольку $p \gg 0$, то отсюда сле-

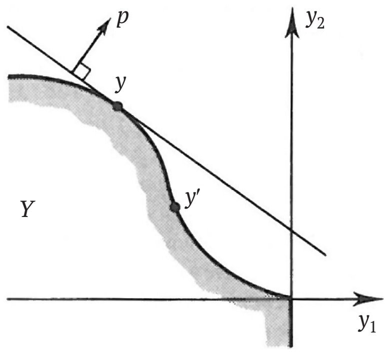


Рис. 5.F.2. Максимизирующий прибыль (при ценах $p >> 0$) производственный план является эффективным

дует, что $p \cdot y' > p \cdot y$, что противоречит предположению о том, что y доставляет максимум прибыли. ■

Следует подчеркнуть, что утверждение 5.F.1 справедливо, даже если производственное множество невыпукло, что показано на рис. 5.F.2.

Сопоставляя данный факт с результатами агрегирования, рассмотренными в разделе 5.E, можно прийти к следующему выводу: утверждение 5.F.1 гласит, что *если каждая фирма независимо максимизирует свою прибыль, сталкиваясь с одними и теми же фиксированными ценами $p >> 0$, то агрегированное производство общественно эффективно*. Другими словами, в экономике в целом не существует другого общественного плана, в соответствии с которым можно было бы получить больший выпуск без использования дополнительных факторов производства. Это согласуется с заключением, к которому мы пришли в разделе 5.E: в случае фирм с единственным выпуском агрегированный уровень выпуска производится с наименьшими возможными издержками тогда, когда все фирмы, сталкиваясь с одними и теми же ценами, максимизируют свою прибыль.

Однако строгая положительность цен в утверждении 5.F.1 — не слишком приятная предпосылка, а без нее данное утверждение перестает быть верным (вам предлагается самостоятельно показать это в упражнении 5.F.1).

Упражнение 5.F.1. Приведите пример такого производственного плана $y \in Y$, который доставляет максимум прибыли при некоторых ценах $p \geq 0$, $p \neq 0$, но при этом не является эффективным.

Утверждение, обратное утверждению 5.F.1, гласит, что любой эффективный производственный вектор максимизирует прибыль фирмы при *некоторой* системе цен. Однако, как нетрудно убедиться, посмотрев на эффективный производственный вектор y' на рис. 5.F.2, в общем случае это неверно: утверждение становится справедливым, если добавить предпосылку о выпуклости производственного множества. Утверждение 5.F.2, более сложное, чем утверждение 5.F.1, представляет собой вариант так называемой *второй фундаментальной теоремы экономики благосостояния*.

Утверждение 5.F.2. Пусть множество Y выпукло. Тогда любой эффективный производственный план $y \in Y$ доставляет максимум прибыли при некотором ненулевом векторе цен $p \geq 0$[14].

Доказательство. Данное доказательство основано на применении теоремы о разделяющей гиперплоскости для выпуклых множеств (см.

[14] Как станет ясно из доказательства, этот результат также применим к *слабо эффективным* производствам, как, например, y на рисунке 5.F.1(b), где не существует $y' \in Y$, такого что $y' >> y$.

раздел M.G математического приложения). Пусть $y \in Y$ — эффективный производственный план. Введем следующее обозначение: $P_y = \left\{y' \in \mathbb{R}^L : y' >> y\right\}$. Множество P_y изображено на рис. 5.F.3: оно является выпуклым, и, поскольку y эффективен, $Y \cap P_y = \varnothing$. Следовательно, мы можем воспользоваться теоремой о разделяющей гиперплоскости, для того чтобы показать, что существует *некоторый* вектор $p \neq 0$, такой что $p \cdot y' \geq p \cdot y''$ для любых $y' \in P_y$ и $y'' \in Y$ (см. рис. 5.F.3). Заметим, что отсюда, в частности, следует, что $p \cdot y' \geq p \cdot y$ для любого $y' >> y$. Таким образом, должно быть выполнено условие $p \geq 0$, поскольку если $p_l < 0$ для некоторого блага l, то $p \cdot y' < p \cdot y$ для некоторого $y' >> y$, такого что разность $y_l' - y_l$ достаточно велика.

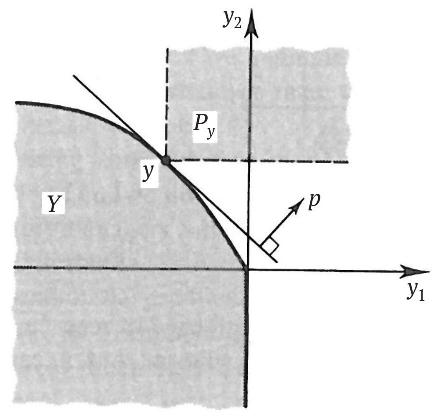


Рис. 5.F.3. Использование теоремы о разделяющей гиперплоскости для доказательства утверждения 5.F.2: если множество Y выпукло, то каждый эффективный $y \in Y$ доставляет максимум прибыли при некоторых ценах $p \geq 0$

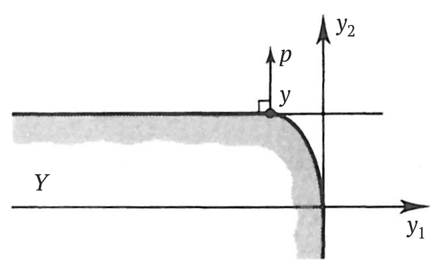


Рис. 5.F.4. Утверждение 5.F.2[1] нельзя распространить на случай $p >> 0$

Теперь возьмем произвольный $y'' \in Y$. Тогда $p \cdot y' \geq p \cdot y''$ для любого $y' \in P_y$. И поскольку вектор y' может быть выбран сколь угодно близким к y, то можно сделать вывод, что $p \cdot y' \geq p \cdot y''$ для любого $y'' \in Y$. А это означает, что производственный план y доставляет максимум прибыли при ценах p. ■

Вторую часть утверждения 5.F.2 нельзя распространить на случай $p >> 0$. Например, на рис. 5.F.4 изображен эффективный производственный вектор y, который не может быть поддержан никаким положительным вектором цен.

В качестве иллюстрации утверждения 5.F.2 рассмотрим случай фирмы, производящей единственный выпуск в соответствии с вогнутой производственной функцией $f(z)$. Зафиксируем вектор факторов производства на уровне $\bar{z}$ и будем считать, что функция $f(\cdot)$ дифференцируема в точке $\bar{z}$, причем $\nabla f(\bar{z}) >> 0$. Положим цену готовой продукции равной 1. Тогда согласно условию (5.C.2) вектор цен факторов производства, при котором эффективный уровень производства является максимизирующим прибыль, в точности равен вектору предельных производительностей, т. е. $w = \nabla f(\bar{z})$.

[1] В оригинальном тексте опечатка (написано 5.C.2 вместо 5.F.2). — *Примеч. пер.*

5.G. Замечания о целях фирмы

Предпосылка в теории потребителя о том, что потребитель выбирает наилучший набор согласно своим предпочтениям, выглядит вполне разумной, однако в отношении предположения о максимизации прибыли фирмой сказать то же самое нельзя. Почему фирма должна иметь именно такую цель, а не руководствоваться, например, максимизацией дохода от продаж или объема трудовых ресурсов? Цели, которыми руководствуется фирма, в экономическом анализе должны вытекать из целей тех индивидов, которые ею управляют. В рассматриваемых нами экономиках фирмами владеют индивиды, которые по сути своей являются также и потребителями. Фирма, находящаяся в собственности одного индивида, имеет вполне ясные цели — цели ее владельца. В этом случае единственный вопрос заключается в том, совпадают ли эти цели с максимизацией прибыли. Однако если у фирмы более одного владельца, то ситуация несколько усложняется. Действительно, мы должны либо как-то примирить любые противоречащие друг другу цели, которые могут иметь собственники фирмы, либо показать, что никакого конфликта целей не существует.

К счастью, есть способ ответить на эти вопросы и привести крепкую теоретическую базу для обоснования максимизации прибыли. Мы покажем, что при разумных предположениях это именно та цель, к которой должны стремиться все собственники фирм.

Пусть фирма имеет производственное множество Y и находится в собственности у потребителей. То, что фирмой владеют потребители, просто означает, что каждый потребитель $i = 1, \ldots, I$ имеет долю $\theta_i \geq 0$ в прибыли фирмы, где $\sum_i \theta_i = 1$ (некоторые θ_i могут быть равны нулю). Таким образом, если фирма принимает производственное решение $y \in Y$, то потребитель i с функцией полезности $u_i(\cdot)$ решает следующую задачу:

$$\max_{x_i \geq 0} u_i(x_i) \text{ при } p \cdot x_i \leq w_i + \theta_i p \cdot y,$$

где w_i — богатство потребителя без учета прибыли фирмы. Значит, при фиксированных ценах чем выше прибыль фирмы, тем больше совокупный доход потребителя-собственника i, т. е. тем больше его бюджетное множество. Отсюда следует, что при любом фиксированном векторе цен p потребители-собственники *единодушно* предпочитают, чтобы фирма реализовывала производственный план $y' \in Y$, а не $y \in Y$, если $p \cdot y' > p \cdot y$. Таким образом, мы приходим к выводу, что в рамках предположения о том, что фирма выступает ценополучателем, все собственники фирмы независимо от своих функций полезности будут требовать от менеджеров фирмы максимизации ее прибыли[15].

[15] В действительности существуют еще общественные и квазиобщественные организации, такие как университеты, которые не имеют *собственников* по аналогии с акционерами частных фирм. Поэтому их цели могут быть иными, и проводимые рассуждения к ним не относятся.

Следует отметить три предпосылки, которые неявно предполагались в приведенных выше рассуждениях: (1) цены фиксированы и не зависят от действий фирмы, (2) прибыль детерминирована и (3) владельцы фирмы могут контролировать поведение менеджеров. Рассмотрим эти предположения более развернуто.

1) Если бы цены зависели от объемов производства фирмы, то цели ее собственников могли бы зависеть от их вкусов как потребителей. Предположим, например, что каждый потребитель не имеет богатства, за исключением того, что он получает от участия в прибыли фирмы (т. е. $w_i = 0$). Пусть $L = 2$ и фирма производит благо 1 из блага 2 в соответствии с производственной функцией $f(\cdot)$. Положим цену блага 2 равной 1 и предположим также, что цена блага 1 в терминах блага 2 равна $p(q)$, если фирма производит объем выпуска q. Если, например, предпочтения собственников фирмы таковы, что они заботятся только об объемах потребления блага 2, то тогда их задача имеет вид: $\max_{z\geq 0} p\left(f(z)\right) f(z) - z$, т. е. задача потребителя сводится к максимизации объема потребления блага 2. С другой стороны, если бы они заботились только об объемах потребления блага 1, то задача потребителя преобразовалась бы к виду: $\max_{z\geq 0} f(z) - \left[z/p\left(f(z)\right)\right]$, поскольку если они получают $p\left(f(z)\right) f(z) - z$ единиц блага 2, то это дает им $\left[p\left(f(z)\right) f(z) - z\right]/p\left(f(z)\right)$ единиц блага 1. Но эти задачи имеют разные решения. (Убедитесь в этом, выписав условия первого порядка.) Более того, отсюда следует, что если собственники фирмы имеют различные вкусы как потребители, то они не смогут прийти к соглашению относительно того, что делать фирме (более подробно этот вопрос рассмотрен в упражнении 5.G.1).
2) Если выпуск фирмы является случайной величиной, то важно проводить различие между выпуском, который продается до и после разрешения неопределенности. Если выпуск продается после разрешения неопределенности (как в случае с сельскохозяйственной продукцией, продаваемой на спот-рынках после сбора урожая), тогда рассуждения о единодушном решении владельцев фирмы максимизировать прибыль перестают быть верными. Это связано с тем, что прибыль, а следовательно, и получаемое богатство, теперь недетерминированы, а значит, отношение к риску и ожидания владельцев фирмы будут оказывать влияние на их предпочтения относительно производственных планов. Например, строго несклонные к риску индивиды предпочтут относительно менее рискованные производственные планы, чем умеренно не склонные к риску.

   С другой стороны, если выпуск продается до разрешения неопределенности (как в случае, когда сельскохозяйственная продукция продается на фьючерсных рынках до сбора урожая), то риск полностью берет на себя покупатель. В этом случае прибыль фирмы является детерминированной величиной и рассуждения о единодушном решении собственников в отношении максимизации прибыли по-прежнему верны. Фактически эту ситуацию можно трактовать так, как будто фирма производит товар, который продается до разрешения неопределенности на обычном рынке. (Более углубленный анализ вопроса в этом разделе уведет нас слишком далеко от рассматриваемой проблематики. Мы вернемся к нему в разделе 18.G, изучив предварительно основы теории выбора в условиях неопределенности в главе 6.)

3) Очевидно, что акционеры обычно не имеют возможности осуществлять контроль напрямую. Им нужны менеджеры, которые, вполне естественно, руководствуются своими собственными целями. Особенно в случае когда собственность распылена, очень важно понять с теоретической точки зрения, как и до какой степени осуществляется контроль собственников над менеджерами фирмы. Здесь имеет смысл обратить внимание на такие факторы, как степень наблюдаемости действий менеджера и доля индивидуальных собственников. (Эти вопросы будут рассмотрены в разделе 14.C («Агентские контракты как механизм внутреннего контроля») и в разделе 19.G («Фондовая биржа как механизм внешнего контроля»).)

Приложение А: линейная производственная модель

Особенности производственной модели с выпуклой технологией с постоянной отдачей от масштаба заслуживают более детального изучения.

Для данной технологии с постоянной отдачей от масштаба Y *луч*, порожденный вектором $\bar{y} \in Y$, представляет собой множество $\{y \in Y: y = \alpha\bar{y}$ для некоторого числа $\alpha \geq 0\}$. Мы можем рассматривать этот луч как описание производственного *процесса*, который может быть осуществлен при любом *масштабировании операций*. Другими словами, производственный план $\bar{y}$ может быть пропорционально увеличен или уменьшен в соответствии с множителем $\alpha \geq 0$, что порождает другие возможные производственные планы.

Здесь мы сосредоточимся на изучении специального случая технологий с постоянной отдачей от масштаба, поскольку это упрощает вычисления и, следовательно, очень удобно в приложениях. Предположим, что у нас есть в качестве основы набор *большого конечного числа производственных процессов* (скажем, M), каждый из которых может быть реализован при произвольном масштабировании операций, и любое произвольное число таких процессов может осуществляться одновременно. Обозначим M производственных процессов, которые будем называть *элементарными*, через $a_1 \in \mathbb{R}^L$, ..., $a_M \in \mathbb{R}^L$. Тогда производственное множество можно записать в виде

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^L : y = \sum_{m=1}^{M} \alpha_m a_m \text{ для некоторых чисел } (\alpha_1, \ldots, \alpha_M) \geq 0\}.$$

Число α_m называется *интенсивностью элементарного производственного процесса m*. Оно измеряет масштаб операций m-го процесса. С геометрической точки зрения Y — *многогранный конус*, множество, представляющее собой выпуклую оболочку конечного числа лучей.

Производственный процесс вида (0, ..., 0, −1, 0, ..., 0), где −1 располагается на l-м месте, называется *процессом расходования* блага l. Впредь будем считать, что кроме набора из M элементарных производственных процессов также доступны L процессов расходования. На рис. 5.AA.1 представлено производственное множество для случая $L = 2$ и $M = 2$.

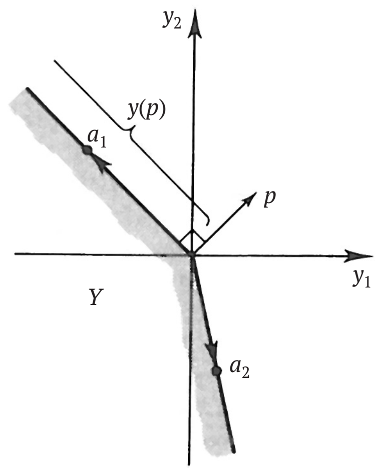


Рис. 5.AA.1. Производственное множество, порожденное двумя производственными процессами

При данном векторе цен $p \in \mathbb{R}^L_+$ максимизирующий прибыль план во множестве Y существует тогда и только тогда, когда $p \cdot a_m \leq 0$ для любого m. Чтобы убедиться в этом, заметим, что если $p \cdot a_m < 0$, то максимизирующая прибыль интенсивность производственного процесса m равна $\alpha_m = 0$. Если же $p \cdot a_m = 0$, то при любой интенсивности процесс m приносит нулевую прибыль. Наконец, если $p \cdot a_m > 0$ для некоторого m, то, взяв произвольно большое α_m, получим произвольно большую прибыль. Следует отметить, что из наличия процессов расходования благ следует, что должен найтись такой вектор цен $p \in \mathbb{R}^L_+$, для которого максимизирующий прибыль производственный план существует. Если $p_l < 0$, то l-й процесс расходования приносит строго положительную (а значит, сколь угодно большую) прибыль.

Для любого вектора цен p, порождающего нулевую прибыль, обозначим через $A(p)$ множество производственных процессов, которые приносят прибыль, в точности равную нулю: $A(p) = \{a_m : p \cdot a_m = 0\}$. Если $a_m \notin A(p)$, то $p \cdot a_m < 0$, и поэтому производственный процесс m при ценах p не используется. Следовательно, множество уровней предложения готовой продукции, максимизирующих прибыль, $y(p)$, представляет собой выпуклый конус, порожденный производственными процессами из множества $A(p)$,

т. е. $y(p) = \left\{ \sum_{a_m \in A(p)} \alpha_m a_m : \alpha_m \geq 0 \right\}$. Множество $y(p)$ изображено на рис. 5.AA.1.

На этом рисунке вектор цен p и производственный процесс a_1 дают прибыль, в точности равную нулю, а производственный процесс a_2 влечет потери (если вообще используется). Таким образом, $A(p) = \{a_1\}$ и $y(p) = \{y : y = \alpha_1 a_1$ для любого числа $\alpha_1 \geq 0\}$ — луч, порожденный производственным процессом a_1.

Один из значимых результатов (который мы оставим без доказательства) линейной производственной модели заключается в том, что в данной модели справедливо утверждение, обратное к утверждению 5.F.1, т. е. мы можем усилить утверждение 5.F.2, сказав, что *каждый эффективный* $y \in Y$ *доставляет максимум прибыли при некоторых ценах* $p >> 0$.

Важным специальным случаем линейной производственной модели является *модель затраты — выпуск Леонтьева*. Эта модель обладает двумя дополнительными особенностями:

1) Существует один товар, скажем L-й, который не производится ни одним из производственных процессов. По этой причине мы назовем этот товар *первичным фактором*. В большинстве приложений модели Леонтьева в качестве первичного фактора выступает труд.
2) Каждый элементарный производственный процесс имеет не более одной положительной компоненты. Это называется предпосылкой об *отсутствии совместного производства*. Таким образом, это означает, что каждое благо, за исключением первичного фактора, производится в соответствии с определенной производственной функцией с постоянной отдачей от масштаба при использовании остальных благ и первичного фактора в качестве факторов производства.

Модель затраты — выпуск Леонтьева без возможности замещения

Простейшая модель Леонтьева — это модель, в которой каждое производимое благо выпускается в рамках только одного производственного процесса. В этом случае естественно обозначить процесс по производству блага $l = 1, \ldots, L$ через $a_l = (a_{1l}, \ldots, a_{Ll}) \in \mathbb{R}^L$. Соответственно число элементарных производственных процессов M равно $L - 1$. На рис. 5.AA.2 представлен пример изоквант, соответствующих единичному уровню выпуска блага 1 (множество $\{(z_2, z_3) : f(z_2, z_3) = 1\}$) для случая $L = 3$. На этом рисунке процессы расходования благ 2 и 3 используются для того, чтобы избавиться от любого избытка факторов производства. Поскольку факторы производства должны применяться в фиксированных пропорциях (за исключением процессов расходования), то этот специальный случай называется *моделью Леонтьева с отсутствием возможности замещения*.

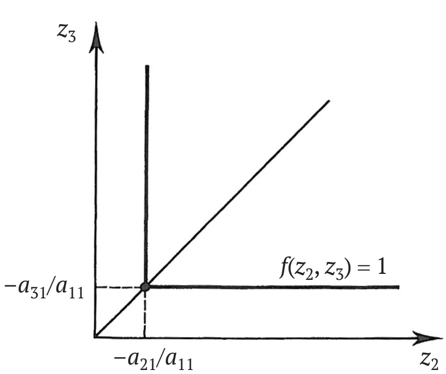


Рис. 5.AA.2. Изокванта единичного выпуска в случае производства блага 1 в модели Леонтьева без замещения

Если мы введем нормировку векторов производственных процессов $a_{ll} = 1$ для всех $l = 1, \ldots, L - 1$, то вектор интенсивности производственного процесса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{L-1}) \in \mathbb{R}^{L-1}$ будет равен вектору *валового* производства благ с 1 по $L - 1$. Для определения уровней *чистого* производства удобно обозначить через A матрицу размерности $(L - 1) \times (L - 1)$, где l-й столбец равен вектору процесса a_l со знаком минус, за исключением того что последний элемент его был удален, а элемент a_{ll} заменен на нуль (как вы помните, элементы a_{kl} при $k \neq l$ неположительны):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1,L-1} \\ -a_{21} & 0 & \dots & -a_{2,L-1} \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & & \cdot \\ -a_{L-1,1} & -a_{L-1,2} & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицу A называют *матрицей затраты — выпуск Леонтьева*. Ее kl-й элемент, $-a_{kl} \geq 0$, показывает, какой объем блага k необходим для производства одной единицы блага l. Введем еще одно обозначение: пусть $b \in \mathbb{R}^{L-1}$ — вектор потребности в первичном факторе, $b = (-a_{L1}, \dots, -a_{L,L-1})$. Тогда вектор $(I - A)\alpha$ описывает уровень чистого производства $L - 1$ выпуска, когда производственные процессы осуществляются с интенсивностью $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{L-1})$. Действительно, как вы помните, производственные процессы нормированы так, чтобы уровни валового производства $L - 1$ производимого блага были в точности равны $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{L-1})$. С другой стороны, $A\alpha$ показывает, какой объем каждого из этих благ используется в качестве факторов производства других благ. Следовательно, их разность $(I - A)\alpha$ характеризует чистое производство благ $1, \dots, L - 1$. Кроме того, следует отметить, что скаляр $b \cdot \alpha$ показывает совокупные затраты первичного фактора. В итоге при введенных обозначениях мы можем описать множество технологически допустимых производственных векторов (в предположении свободы расходования) следующим образом:

$$Y = \left\{ y : y \leq \begin{bmatrix} I - A \\ -b \end{bmatrix} \alpha \quad \text{для некоторого} \quad \alpha \in \mathbb{R}^L_+ \right\}.$$

Если $(I - A)\bar{\alpha} >> 0$ для некоторого $\bar{\alpha} \geq 0$, то говорят, что матрица затраты—выпуск A *продуктивна*. Другими словами, матрица затраты — выпуск A продуктивна, если существует *некоторый* производственный план, в соответствии с которым производится положительный чистый объем $L - 1$ блага, при условии что доступно достаточное количество первичного фактора.

Примечательной особенностью теории затраты — выпуск Леонтьева является так называемое свойство *все или ничего*, сформулированное в утверждении 5.AA.1.

Утверждение 5.AA.1. Если матрица A продуктивна, то для любого неотрицательного объема $L - 1$ производимых товаров $c \in R^{L-1}_+$ существует вектор интенсивности производственного процесса $\alpha \geq 0$, такой что $(I - A)\alpha = c$. То есть если матрица A продуктивна, то можно произвести любой неотрицательный чистый объем готовой продукции (возможно, для конечного потребления) в предположении, что доступно достаточное количество первичного фактора.

Доказательство. Покажем, что если матрица A продуктивна, то матрица, обратная к $(I - A)$, существует и неотрицательна. Это позволит нам прийти к искомому результату, поскольку тогда мы сможем получить уровни чистого выпуска $c \in \mathbb{R}_{+}^{L-1}$, положив (неотрицательную) интенсивность производственного процесса равной $\alpha = (I - A)^{-1}c$.

Для доказательства сначала рассмотрим один факт из матричной алгебры: покажем, что если матрица A продуктивна, то матрица $\sum_{n=0}^{N} A^n$, где A^n — матрица A в степени n, имеет предел при $N \to \infty$. Поскольку матрица A состоит только из неотрицательных элементов, то каждый элемент матрицы $\sum_{n=0}^{N} A^n$ *не убывает* по N. Следовательно, для того чтобы установить, что матрица $\sum_{n=0}^{N} A^n$ имеет предел, достаточно показать, что ее элементы ограничены сверху. Поскольку матрица A продуктивна, то существуют $\bar{\alpha}$ и $\bar{c} \gg 0$, такие что $\bar{c} = (I - A)\bar{\alpha}$. Если мы умножим обе части этого равенства на $\sum_{n=0}^{N} A^n$, то получим $\left(\sum_{n=0}^{N} A^n\right)\bar{c} = (I - A^{N+1})\bar{\alpha}$ (как вы помните, $A^0 = I$). Но $\left(I - A^{N+1}\right)\bar{\alpha} \le \bar{\alpha}$, поскольку элементы матрицы A^{N+1} неотрицательны. Следовательно, $\left(\sum_{n=0}^{N} A^n\right)\bar{c} \le \bar{\alpha}$. При $\bar{c} \gg 0$ отсюда следует, что ни один из элементов матрицы $\sum_{n=0}^{N} A^n$ не может быть больше $\left[\max\left\{\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_{L-1}\right\} / \min\{\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_{L-1}\}\right]$, а значит, мы доказали существование искомой верхней границы. Таким образом, мы приходим к выводу, что $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ существует.

Из факта существования $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ следует, что $\lim_{N\to\infty} A^N = 0$. Следовательно, поскольку $\left(\sum_{n=0}^{N} A^n\right)(I - A) = (I - A^{N+1})$ и $\lim_{N\to\infty}(I - A^{N+1}) = I$, то должно быть выполнено $\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (I - A)^{-1}$. (Если A — число, то это обычная школьная формула сложения членов геометрического ряда.) Таким образом, матрица $(I - A)^{-1}$ существует и все ее элементы неотрицательны, откуда следует искомый результат. ■

Каков экономический смысл матрицы $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ из доказательства утверждения 5.AA.1? Предположим, мы хотим произвести вектор конечного потребления $c \in \mathbb{R}_+^{L-1}$. Какой объем совокупного производства потребуется для этого? Для производства конечного выпуска $c = A^0 c$ нам необходимо использовать в качестве факторов производства объем производимых благ, равный $A(A^0 c) = Ac$. В свою очередь для производства этого объема нужно использовать $A(Ac) = A^2 c$ дополнительно производимых благ и так далее до бесконечности. Следовательно, *совокупный* объем благ, который требуется произвести, равен пределу $\left(\sum_{n=0}^{N} A^n\right)c$ при $N \to \infty$. Таким образом, вектор $c \geq 0$ может быть произведен тогда и только тогда, когда матрица $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ хорошо определена (т. е. все ее элементы конечны).

Пример 5.AA.1. Пусть $L = 3$, $a_1 = (1, -1, -2)$ и $a_2 = (-\beta, 1, -4)$, где $\beta \geq 0$ — некоторая константа. Интенсивность производственного процесса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ порождает положительный чистый выпуск блага 2, если $\alpha_2 > \alpha_1$, и положительный чистый выпуск блага 1, если $\alpha_1 - \beta\alpha_2 > 0$. Матрица затраты—выпуск A и матрица $(I - A)^{-1}$ имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ и } (I - A)^{-1} = \frac{1}{1-\beta}\begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда $\beta < 1$. На рис. 5.AA.3(a) изображен случай, когда матрица A продуктивна. Затемненная область представляет собой векторы чистых выпусков, которые могут быть порождены двумя производственными процессами (обратите внимание, что эти два вектора производственных процессов могут покрыть все пространство $\mathbb{R}_+^2$). На рис. 5.AA.3(b), напротив, матрица A не является продуктивной: ни один строго положительный

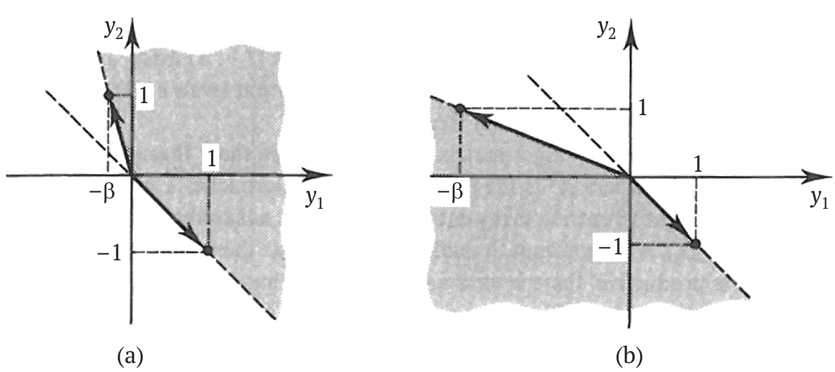


Рис. 5.AA.3. Модель Леонтьева из примера 5.AA.1.
(a) Матрица A продуктивна ($\beta < 1$). (b) Матрица A непродуктивна ($\beta \geq 1$)

вектор чистого выпуска не может быть получен в рамках двух данных производственных процессов при неотрицательном масштабировании. (Затемненная область вновь представляет те векторы, которые могут быть порождены двумя данными векторами производственных процессов; здесь множество пересечения этой области с $\mathbb{R}^2_+$ состоит из одной точки (0, 0).) Заметим также, что чем ближе β к 1, тем бóльшая интенсивность процесса требуется для производства любого вектора конечного потребления. ■

Модель Леонтьева с возможностью замещения

Теперь перейдем к рассмотрению модели Леонтьева в общем виде, когда существует более одного процесса, в соответствии с которым можно произвести каждое благо. Как мы увидим, свойства модели без возможности замещения сохраняются и в более общем случае, когда замещение возможно.

Во-первых, следует заметить, что вычисление производственной функции для блага, скажем блага 1, теперь становится задачей линейного программирования (см. раздел М.М математического приложения). Действительно, пусть $a_1 \in \mathbb{R}^L$, ..., $a_{M_1} \in \mathbb{R}^L$ — набор из M_1 элементарных производственных процессов, способных произвести благо 1, и предположим также, что нам дан первоначальный уровень благ 2, ..., L, равный $z_2, \ldots, z_L$. Тогда максимально возможный уровень производства блага 1 при данных доступных факторах производства $f(z_2, \ldots, z_L)$ является решением задачи

$$\max_{\alpha_1 \geq, \ldots, \alpha_{M_1} \geq 0} \alpha_1 a_{11} + \ldots + \alpha_{M_1} a_{1M_1}$$

$$\text{при } \sum_{m=1}^{M_1} \alpha_m a_{lm} \geq -z_l \text{ для всех } l = 2, \ldots, L.$$

Как известно из теории линейного программирования, $L - 1$ двойственных переменных $(\lambda_2, \ldots, \lambda_L)$ этой задачи (т. е. множители, соответствующие $L - 1$ ограничению) можно проинтерпретировать как предельные производительности $L - 1$ фактора производства. Точнее, для любого $l = 2, \ldots, L$ имеем $\left(\partial f / \partial z_l\right)^+ \leq \lambda_l \leq \left(\partial f / \partial z_l\right)^-$, где $\left(\partial f / \partial z_l\right)^+$ и $\left(\partial f / \partial z_l\right)^-$ — соответственно частные производные функции $f(\cdot)$ по l-му благу слева и справа в точке $(z_2, \ldots, z_L)$.

На рис. 5.АА.4 представлена изокванта единичного выпуска для случая, когда благо 1 может быть произведено из двух других благ (благ 2 и 3), используемых в качестве факторов производства, в соответствии с двумя возможными производственными процессами $a_1 = (1, -2, -1)$ и $a_2 = (1, -1, -2)$. Если отношение факторов производства либо больше 2, либо меньше $^1/_2$, то один из процессов расходования используется для того, чтобы исключить любой избыток факторов производства.

Вектор $y \in \mathbb{R}^L$ удобно представить в виде $y = (y_{-L}, y_L)$, где $y_{-L} = (y_1, \ldots, y_{L-1})$. Предположим, что рассматриваемая модель Леонтьева *продуктивна* в том смысле, что существует технологически допустимый вектор $y \in Y$, такой что $y_{-L} >> 0$.

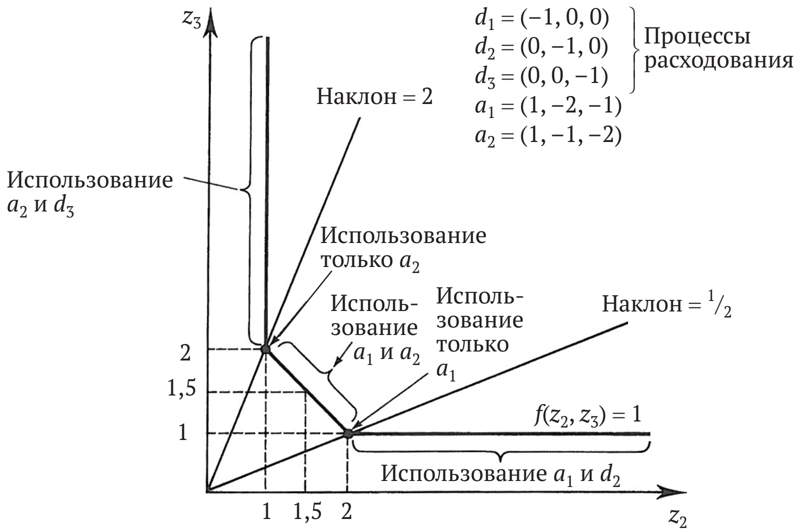


Рис. 5.АА.4. Изокванта, соответствующая единичному выпуску блага 1, в модели Леонтьева с замещением

Замечательным следствием модели Леонтьева (в предположении постоянной отдачи от масштаба, отсутствия совместного производства и единственности первичного фактора) является то, что каждому благу можно поставить в соответствие *единственную оптимальную технику* (которая может быть образована из нескольких элементарных техник, соответствующих этому благу). Это означает, что оптимальные техники (по одной на каждый выпуск), поддерживающие эффективные производственные векторы, могут быть выбраны независимо от конкретного вектора выпуска, который предполагается произвести (до тех пор пока чистый выпуск производимого блага положителен). Таким образом, хотя замещение в принципе возможно, эффективное производство не требует замещения техник для изменения желаемого уровня конечного потребления. В этом как раз и состоит суть знаменитой *теоремы об отсутствии замещения*[16] (см. (Samuelson, 1951)).

Утверждение 5.АА.2 (*теорема об отсутствии замещения*). Рассмотрим продуктивную модель Леонтьева затраты—выпуск с $L-1$ производимым благом и $M_l \geq 1$ элементарными процессами производства благ $l = 1, \dots$ $\dots, L-1$. Тогда существует $L-1$ производственный процесс $(a_1, \dots, a_{L-1})$, где a_l — неотрицательные линейные комбинации M_l элементарных процессов по производству блага l, так что *все* эффективные производственные векторы $y_{-L} \gg 0$ могут быть порождены данными $L-1$ производственными процессами.

Доказательство. Пусть $y \in Y$ — эффективный производственный вектор, такой что $y_{-L} \gg 0$. Вообще говоря, вектор y должен быть по-

[16] В русскоязычной литературе эта теорема нередко называется теоремой (Самуэльсона) о замещении. — *Примеч. пер.*

рожден набором из $L-1$ производственных процессов $(a_1, \ldots, a_{L-1})$ (некоторые из которых могут быть «смесью» исходных процессов), осуществляемых с интенсивностью $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{L-1}) \gg 0$, т. е. $y = \sum_{l=1}^{L-1} \alpha_l a_l$. Покажем, что любой эффективный производственный план y', где $y'_{-L} \gg 0$, может быть достигнут с помощью производственных процессов $(a_1, \ldots, a_{L-1})$.

Поскольку вектор $y \in Y$ эффективен, то существует вектор цен $p \gg 0$, такой что y доставляет максимум прибыли при p (это следует из утверждения 5.F.2 для случая линейной производственной модели). Тогда из $p \cdot a_l \le 0$ для всех $l = 1, \ldots, L-1$, $\alpha_l > 0$ и соотношения

$$0 = p \cdot y = p \cdot \left(\sum_{l=1}^{L-1} \alpha_l a_l \right) = \sum_{l=1}^{L-1} \alpha_l p \cdot a_l$$

следует, что $p \cdot a_l = 0$ для всех $l = 1, \ldots, L-1$.

Рассмотрим теперь любой другой эффективный производственный вектор $y' \in Y$, для которого $y'_{-L} \gg 0$. Мы хотим показать, что y' может быть порожден данными производственными процессами $(a_1, \ldots, a_{L-1})$. Обозначим через A матрицу затраты — выпуск, соответствующую производственным процессам $(a_1, \ldots, a_{L-1})$. Поскольку $y_{-L} \gg 0$, то матрица A продуктивна по определению. Следовательно, согласно утверждению 5.AA.1 существуют интенсивности производственных процессов $(\alpha''_1, \ldots, \alpha''_{L-1})$, такие что производственный вектор $y'' = \sum_{l=1}^{L-1} \alpha''_l a_l$ имеет $y''_{-L} = y'_{-L}$. Заметим, что поскольку $p \cdot a_l = 0$ для всех $l = 1, \ldots, L-1$, то должно быть выполнено $p \cdot y'' = 0$. Это означает, что y'' доставляет максимум прибыли при $p \gg 0$ (как вы помните, максимальная прибыль при p равна нулю), а отсюда следует, что производственный вектор y'' является эффективным согласно утверждению 5.F.1. Но тогда мы имеем два производственных вектора, y' и y'', для которых выполнено $y'_{-L} = y''_{-L}$ и которые оба являются эффективными. Следовательно, должно быть выполнено $y''_L = y'_L$. Значит, приходим к выводу, что y' может быть произведен только с помощью производственных процессов $(a_1, \ldots, a_{L-1})$, что и требовалось доказать. ■

Важнейшей предпосылкой теоремы об отсутствии замещения является предпосылка о единственности первичного фактора производства. Если бы было более одного первичного фактора производства, то выбор оптимальной техники должен был бы зависеть от относительных цен этих факторов. В свою очередь, логично было бы ожидать, что эти относительные цены зависят от структуры конечного спроса (например, если спрос смещается от благ, производство которых капиталоемко, в сторону благ с трудоемким производством, то стоит ожидать, что цена труда относительно цены капитала возрастет). Тем не менее следует отметить, что результат об отсутствии замещения остается верным до тех пор, пока цены первичных факторов остаются неизменными.

Дальнейшее обсуждение рассмотренного в этом приложении материала можно найти в работе (Gale, 1960).

Литература

Champsaur P., Milleron J.-C. (1983). *Advanced Exercises in Microeconomics. Cambridge*, Mass.: Harvard University Press.

Debreu G. (1959). *Theory of Value*. New York: Wiley.

Gale D. (1960). *The Theory of Linear Economic Models*. New York: McGraw-Hill.

Koopmans T. (1957). *Three Essays on the State of Economic Science*. Essay 1. New York: McGraw-Hill.

McFadden D. (1978). Cost, revenue and profit functions. In *Production economics: A dual approach to theory and applications*, edited by M. Fuss and D. McFadden. Amsterdam: North-Holland.

McKenzie L. (1959). On existence of general equilibrium for competitive market. *Econometrica* **27**: 54–71.

Samuelson P. (1951). Abstract of a theorem concerning substitutability in open Leontief models. In *Activity analysis of production and allocation*, edited by T. Koopmans. New York: Wiley.

Упражнения

5.B.1[A]. В тексте.

5.B.2[A]. В тексте.

5.B.3[A]. В тексте.

5.B.4[B]. Пусть производственное множество Y описывает технологию отдельной производственной единицы. Обозначим через Y^+ аддитивное замыкание множества Y, т. е. наименьшее аддитивное производственное множество, содержащее Y (другими словами, Y^+ — совокупное производственное множество при реплицировании технологии Y произвольное число раз). Изобразите множество Y^+ для каждого примера производственного множества, проиллюстрированного в разделе 5.B. В частности, обратите внимание, что для типичной технологии с убывающей отдачей от масштаба, представленной на рис. 5.B.5(a), аддитивное замыкание Y^+ не удовлетворяет условию замкнутости (2). Объясните, почему это так, и сравните данное аддитивное замыкание с соответствующим множеством для рис. 5.B.5(b), где множество Y^+ замкнуто.

5.B.5[C]. Покажите, что если множество Y замкнуто и выпукло и $-\mathbb{R}^L_+ \subset Y$, то оно удовлетворяет свойству свободы расходования.

5.B.6[B]. Рассмотрите экономику с тремя благами, где блага 1 и 2 выступают в качестве факторов производства, а третье благо производится:

обозначим объем его выпуска через q. Готовая продукция может быть произведена с помощью двух техник, которые могут быть использованы одновременно или по отдельности. Техники, вообще говоря, могут быть нелинейными. Первая (соответственно вторая) техника использует только первый (соответственно второй) фактор производства. Таким образом, первая (соответственно вторая) техника полностью описывается функцией $\varphi_1(q_1)$ [соответственно $\varphi_2(q_2)$], характеризующей минимальный объем первого фактора производства (соответственно второго), *достаточный* для производства готовой продукции в объеме q_1 (соответственно q_2). Функции $\varphi_1(\cdot)$ и $\varphi_2(\cdot)$ являются возрастающими, причем $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$.

a) Опишите трехмерное производственное множество, соответствующее данным техникам. Считайте, что технология удовлетворяет свойству свободы расходования.

b) Приведите достаточные условия на $\varphi_1(\cdot)$ и $\varphi_2(\cdot)$, чтобы производственное множество было аддитивным.

c) Обозначим через w_1 и w_2 цены факторов производства. Выпишите необходимые условия первого порядка задачи максимизации прибыли и проинтерпретируйте их. При каких условиях на $\varphi_1(\cdot)$ и $\varphi_2(\cdot)$ эти условия первого порядка будут не только необходимыми, но и достаточными?

d) Покажите, что если $\varphi_1(\cdot)$ и $\varphi_2(\cdot)$ строго вогнуты, то минимизирующий издержки производственный план не может одновременно использовать обе техники. Объясните смысл требования вогнутости функций и изобразите изокванты в двумерном пространстве факторов производства.

5.C.1^{A}. В тексте.

5.C.2^{A}. В тексте.

5.C.3^{B}. Докажите свойства (8) и (9) утверждения 5.C.2. (*Подсказка*: доказать свойство (8) достаточно просто, (9) — сложнее. Попробуйте начать с рассмотрения случая одного фактора производства.)

5.C.4^{A}. Докажите свойства (1)–(7) утверждения 5.C.2 для случая множественности выпусков.

5.C.5^{A}. Покажите, что для выполнения свойства (3) утверждения 5.C.2 достаточно квазивогнутости функции $f(\cdot)$. Покажите также, что квазивогнутость функции $f(\cdot)$ совместима с возрастающей отдачей от масштаба.

5.C.6^{C}. Пусть $f(z)$ — вогнутая производственная функция технологии, использующей $L - 1$ факторов производства $(z_1, \dots, z_{L-1})$. Предположим также, что $\partial f(z)/\partial z_l \geq 0$ для всех l и $z \geq 0$, а матрица $D^2 f(z)$ отрицательно определена для всех z. Используя условия первого порядка задачи фирмы и теорему о неявной функции, докажите следующие утверждения:

a) Увеличение цены готовой продукции всегда приводит к росту максимизирующего прибыль уровня выпуска.

b) Увеличение цены готовой продукции приводит к росту спроса на *некоторый* фактор производства.

c) Увеличение цены фактора производства приводит к сокращению спроса на этот фактор.

5.C.7[C]. Фирма-ценополучатель, производящая единственный продукт в соответствии с технологией $q = f(z_1, \dots, z_{L-1})$, сталкивается с ценой готовой продукции p и ценами факторов производства $w_1, \dots, w_{L-1}$. Пусть функция $f(\cdot)$ является строго вогнутой и возрастающей, причем $\partial^2 f(z)/\partial z_l \partial z_k > 0$[17] для всех $l \neq k$. Покажите, что для всех $l = 1, \dots$ $\dots, L-1$ функции спроса на факторы производства $z_l(p, w)$ удовлетворяют условиям $\partial z_l(p,\ w)/\partial p > 0$ и $\partial z_l(p,\ w)/\partial w_k < 0$ при $l \neq k$.

5.C.8[B]. Фирма «Альфа Инкорпорэйтэд» (*AI* — от англ. *Alpha Incorporated*) производит единственный выпуск q из двух факторов производства z_1 и z_2. Предположим, вам дали задание определить технологию *AI* на основе 100 имеющихся ежемесячных наблюдений. Два из этих наблюдений приведены в следующей таблице:

	Цены факторов производства		Объемы использования факторов производства		Цена готовой продукции	Уровень выпуска
Месяц	w_1	w_2	z_1	z_2	p	q
3	3	1	40	50	4	60
95	2	2	55	40	4	60

С какой проблемой вы столкнетесь, пытаясь справиться с заданием?

5.C.9[A]. Найдите функцию прибыли $\pi(p)$ и функцию (отображение) предложения $y(p)$ для технологий с единственным выпуском, имеющих следующие производственные функции $f(z)$:

a) $f(z) = \sqrt{z_1 + z_2}$;

b) $f(z) = \sqrt{\min\{z_1,\ z_2\}}$;

c) $f(z) = (z_1^\rho + z_2^\rho)^{1/\rho}$, где $\rho \leq 1$.

5.C.10[A]. Найдите функцию издержек $c(w, q)$ и функции (или отображения) условного спроса на факторы производства $z(w, q)$ для каждой из следующих технологий по производству единственного выпуска с постоянной отдачей от масштаба, описываемых производственной функцией $f(z)$:

a) $f(z) = z_1 + z_2$ (факторы производства — совершенные субституты);

b) $f(z) = \min\{z_1, z_2\}$ (леонтьевская технология);

c) $f(z) = (z_1^\rho + z_2^\rho)^{1/\rho}$, где $\rho \leq 1$ (технология с постоянной эластичностью замещения).

[17] В оригинальном тексте допущена ошибка в знаке производной (написано меньше нуля, а должно быть больше нуля, т. е. все факторы производства должны быть взаимодополняющими). — *Примеч. пер.*

5.C.11[A]. Покажите, что $\partial z_l(w,q)/\partial q > 0$ тогда и только тогда, когда предельные издержки в точке q возрастают по w_l.

5.C.12[A]. Как мы выяснили в конце раздела 5.B, любое выпуклое множество Y можно трактовать как сегмент технологии с постоянной отдачей от масштаба $Y' \subset \mathbb{R}^{L+1}$, где $(L + 1)$-я координата фиксирована на уровне -1. Покажите, что если $y \in Y$ доставляет максимум прибыли при ценах p, то $(y, -1) \in Y'$ доставляет максимум прибыли при $(p, \pi(p))$, где прибыль трактуется как цена неявного фиксированного фактора производства. Обратное также верно. Если $(y, -1) \in Y'$ максимизирует прибыль при ценах (p, p_{L+1}), то $y \in Y$ доставляет максимум прибыли при ценах p и прибыль равна p_{L+1}.

5.C.13[B]. Фирма-ценополучатель производит выпуск q с помощью двух факторов производства, z_1 и z_2, в соответствии с дифференцируемой вогнутой производственной функцией $f(z_1, z_2)$. Пусть цена готовой продукции фирмы равна $p > 0$, а цены факторов производства $(w_1, w_2) \gg 0$. Но у фирмы есть две необычные особенности. Во-первых, вместо того чтобы максимизировать прибыль, фирма максимизирует свой доход (т. е. менеджер фирмы старается достичь наибольшего объема продаж в долларовом выражении по сравнению с другими фирмами). Во-вторых, фирма имеет ограничение по объему наличности. В частности, фирма располагает только C долларами до начала производства, и поэтому ее совокупные расходы на приобретение факторов производства не могут превышать C.

Предположим, у вашего друга-эконометриста имеются данные о доходе фирмы при различных ценах готовой продукции и факторов производства, а также о финансовом ограничении фирмы, и на основании этих данных он определил, что уровень дохода фирмы R можно представить как следующую функцию от переменных (p, w_1, w_2, C):

$$R(p,\ w_1,\ w_2,\ C) = p\left[\gamma + \ln C - \alpha \ln w_1 - (1-\alpha)\ln w_2\right],$$

где γ и α — скалярные величины, значения которых он вам сообщил. Какой объем фактора производства z_1 будет использовать фирма при ценах $(p,\ w_1,\ w_2)$ и объеме средств C, имеющихся на приобретение факторов производства?

5.D.1[A]. В тексте.

5.D.2[A]. В тексте.

5.D.3[B]. Пусть фирма может произвести благо L из $L - 1$ факторов производства $(L > 2)$. Цены факторов обозначим через $w \in \mathbb{R}^{L-1}$, а цену готовой продукции — через p. Фирма имеет дифференцируемую функцию издержек $c(w, q)$, строго выпуклую по q. Кроме того, будем считать, что $c(w, q)$ — это функция издержек, когда все факторы являются переменными, а в краткосрочном периоде фактор 1 фиксирован.

Предположим, что изначально фирма находится в точке, в которой она производит объем блага L, максимизирующий прибыль в долгосрочном периоде при ценах w и p, равный $q(w, p)$ (т. е. фирма производит уровень выпуска, оптимальный при долгосрочной функции издержек $c(w, q)$), и все факторы производства используются в оптимальном объеме (т. е. $z_l = z_l(w, q(w, p))$ для всех $l = 1, \ldots, L - 1$, где $z_l(\cdot, \cdot)$ — функция спроса на фактор производства в долгосрочном периоде). Покажите, что при малом увеличении цены блага L максимизирующий прибыль выпуск фирмы меняется в большей степени в долгосрочном периоде, чем в краткосрочном. (*Подсказка*: определите функцию краткосрочных издержек $c_s(w, q|z_1)$, характеризующую минимальные издержки производства уровня выпуска q при объеме использования фактора производства 1, фиксированном на уровне z_1.)

5.D.4[B]. Рассмотрите фирму, имеющую определенное множество факторов производства и выпусков. Пусть фирма производит M выпусков; обозначим вектор уровней выпуска через $q = (q_1, \ldots, q_M)$. При фиксированных ценах факторов производства функция издержек фирмы имеет вид $C(q_1, \ldots, q_M)$. Говорят, что функция $C(\cdot)$ *субаддитивна*, если для всех $(q_1, \ldots, q_M)$ не существует способа распределить производство объемов $(q_1, \ldots, q_M)$ между несколькими фирмами, каждая из которых имеет функцию издержек $C(\cdot)$, и таким образом снизить издержки производства. То есть не существует множества из, скажем, J фирм и набора производственных векторов $\left\{q_j = (q_{1j}, \ldots, q_{Mj})\right\}_{j=1}^{J}$, таких что $\sum_j q_j = q$ и $\sum_j C(q_j) < C(q)$.

Если функция издержек $C(\cdot)$ субаддитивна, то зачастую говорят о *естественной монополии* в отрасли, поскольку производство обходится дешевле, когда оно осуществляется только одной фирмой.

a) Рассмотрите случай, когда фирма производит единственный выпуск, т. е. $M = 1$. Покажите, что если функция издержек $C(\cdot)$ характеризуется убывающими средними издержками, то $C(\cdot)$ является субаддитивной.

b) Перейдем теперь к рассмотрению случая множественности выпусков, т. е. предположим, что $M > 1$. Проиллюстрируйте на примере, что следующая модификация предпосылки об убывании средних издержек на случай фирмы, производящей множество выпусков, *не*достаточна для того, чтобы гарантировать субаддитивность функции $C(\cdot)$:

$C(\cdot)$ характеризуется *убыванием средних издержек вдоль луча*, если для любого $q \in \mathbb{R}_+^M$,

$C(q) > C(kq)/k$ для любого $k > 1$.

c) (*Более сложное задание*) Докажите, что если $C(\cdot)$ характеризуется убыванием средних издержек вдоль луча *и* квазивыпукла, то тогда $C(\cdot)$ субаддитивна. (Считайте, что $C(\cdot)$ является непрерывной, возрастающей и удовлетворяет условию $C(0) = 0$.)

5.D.5[B]. Рассмотрите два блага: фактор производства z и выпуск q. Будем считать, что производственная функция $q = f(z)$ характеризуется возрастающей отдачей от масштаба.

a) Пусть $f(\cdot)$ дифференцируема. Верно ли, что из возрастающей отдачи от масштаба следует, что средний продукт будет с необходимостью не убывать по фактору производства? А что можно сказать о предельном продукте?

b) Пусть имеется репрезентативный потребитель с функцией полезности $u(q) - z$ (знак «минус» указывает на то, что фактор производства забирается у потребителя). Предположим, что $\bar{q} = f(\bar{z})$ — производственный план, максимизирующий полезность репрезентативного потребителя. Покажите, используя математические выкладки или экономические рассуждения (без учета граничных решений), что равенство предельной полезности предельным издержкам — необходимое условие этой максимизационной задачи.

c) Пусть, как и в пункте (b), существует репрезентативный потребитель. Верно ли следующее утверждение: «Равенство предельных издержек предельной полезности — достаточное условие оптимальности производственного плана»? Обоснуйте свой ответ.

5.E.1[A]. Предполагая, что все $\pi_j(\cdot)$ дифференцируемы и $\pi^*(p) = \sum_{j=1}^{J} \pi_j(p)$, докажите, что $y^*(p) = \sum_{j=1}^{J} y_j(p)$, используя технику дифференциального исчисления.

5.E.2[A]. Убедитесь, что утверждение 5.E.1 и его интерпретация не зависят от предпосылки о выпуклости множеств $Y_1, \dots, Y_J$.

5.E.3[B]. Предполагая, что множества $Y_1, \dots, Y_J$ выпуклы и удовлетворяют свойству свободы расходования и, кроме того, множество $\sum_{j=1}^{J} Y_j$ замкнуто, покажите, что последнее множество можно представить в виде: $\left\{ y : p \cdot y \le \sum_{j=1}^{J} \pi_j(p) \text{ для всех } p \gg 0 \right\}$[18].

5.E.4[B]. Пусть фирма производит единственный выпуск из двух факторов производства. Технологий производства много, и в соответствии с каждой из них можно произвести не более одной единицы вы-

[18] Здесь необходимо добавить предпосылку, что существуют $p^* \gg 0$ и $y^* \in \sum_j Y_j$, такие что $p^* \cdot y^* \ge p^* \cdot y$ для любого $y \in \sum_j Y_j$. Поскольку в противном случае, обозначив функцию прибыли при технологии $\sum_j Y_j$ через $\pi^*(\cdot)$, мы можем столкнуться с тем, что множество $\left\{ y \in \mathbb{R}^L : p \cdot y \le \pi^*(p) \text{ для всех } p \gg 0 \right\}$ пусто. И тогда все, что мы получим, — это равенство $\sum_j Y_j$ и $\left\{ y \in \mathbb{R}^L : p \cdot y \le \pi^*(p) \text{ для всех } p \ge 0 \right\}$. Эта предпосылка также необходима для справедливости утверждения 5.C.1(3). — *Примеч. пер.*

пуска при фиксированных и пропорциональных затратах факторов производства z_1 и z_2. То есть технология характеризуется вектором $z = (z_1, z_2)$, и мы можем описать все семейство технологий функцией плотности $g(z_1, z_2)$. Предположим, что распределение равномерно на квадрате $[0, 10] \times [0, 10]$.

a) При ценах факторов производства $w = (w_1, w_2)$ решите задачу максимизации прибыли фирмы. Считайте, что цена готовой продукции равна 1.

b) Получите функцию прибыли $\pi(w_1, w_2, 1)$ при
$w_1 \geq \frac{1}{10}$ и $w_2 \geq \frac{1}{10}$.

c) Найдите функцию агрегированного спроса на факторы производства. Лучше всего, если вы сделаете это напрямую и убедитесь, что полученный ответ верен, опираясь на результат пункта (b) (решая задачу этим способом, вы также сможете проверить, правильно ли ответили на вопрос пункта (b)).

d) Что вы можете сказать об агрегированной производственной функции? Если предположить, что полученная вами в пункте (b) функция прибыли верна при $w_1 \geq 0$ и $w_2 \geq 0$, то какова будет соответствующая агрегированная производственная функция?

5.F.5[A]. (М. Вайцман (M. Weitzman)). Пусть имеется J заводов, производящих единственный выпуск. Средние издержки завода j составляют $AC_j(q_j) = \alpha + \beta_j q_j$ при $q_j \geq 0$. Обратите внимание, что коэффициент α для всех заводов одинаков, а коэффициент β_j может быть разным. Рассмотрите задачу определения минимизирующего издержки агрегированного производственного плана по производству совокупного выпуска q, где $q < \left(\alpha / \max_j \left|\beta_j\right|\right)$.

a) Как должен быть распределен выпуск между J заводами, если $\beta_j > 0$ для всех j?

b) Как должен быть распределен выпуск между J заводами, если $\beta_j < 0$ для всех j?

c) Что если для некоторых заводов $\beta_j > 0$, а для остальных $\beta_j < 0$?

5.F.1[A]. В тексте.

5.G.1[B]. Пусть $f(z)$ — производственная функция фирмы, производящей единственный выпуск из единственного фактора производства. Предположим, что владельцы фирмы имеют квазилинейные функции полезности, где производственный фактор, используемый фирмой, выступает в качестве блага-измерителя.

a) Покажите, что необходимое условие единодушного согласия потребителей — собственников фирмы на производственный план z заключается в том, что доли потребления блага собственниками фирмы при ценах $p(z)$ совпадают с их долями собственности.

b) Предположим, что все владельцы имеют одинаковые доли собственности. Прокомментируйте возможность противоречащих друг другу инструкций для менеджеров и объясните, как это зависит от вкусов потребителей-собственников в отношении выпуска.

c) Считая, что все владельцы фирмы имеют одинаковые предпочтения и одинаковые доли собственности, покажите, что все собственники фирмы единодушно будут согласны на максимизацию прибыли в терминах фактора производства. (Как вы помните, мы исходим из предположения, что предпочтения потребителей квазилинейны по фактору производства и, как следствие, благо-измеритель, по сути, определен.)

5.AA.1[A]. Найдите функцию издержек $c(w, 1)$ и спрос на факторы производства $z(w, 1)$ для производственной функции, представленной на рис. 5.AA.4. Убедитесь, что если множество $z(w, 1)$ состоит из единственного элемента, то выполнено $z(w, 1) = \nabla_w c(w, 1)$.

5.AA.2[B]. Рассмотрите модель Леонтьева затраты — выпуск без возможности замещения. Пусть матрица затрат A продуктивна и вектор потребности в первичном факторе b строго положителен.

a) Покажите, что для любого $\alpha \geq 0$ следующий производственный план является эффективным:

$$y = \begin{bmatrix} I - A \\ -b \end{bmatrix} \alpha.$$

b) Зафиксируем цену первичного фактора на уровне, равном 1. Покажите, что любой производственный план, такой что $\alpha \gg 0$, доставляет максимум прибыли при единственном векторе цен.

c) Покажите, что цены, полученные в пункте (b), можно интерпретировать как объем первичного фактора, прямо или косвенно включенный в производство одной единицы различных благ.

d) (*Более сложное задание*). Пусть матрица A соответствует техникам, выделенным в теореме об отсутствии замещения для модели, в которой замещение в принципе возможно. Покажите, что каждая компонента вектора цен, полученного из A в пункте (c), меньше или равна соответствующей компоненте вектора цен, полученного при любом другом выборе техник.

5.AA.3[B]. Пусть имеются два производимых блага и труд. Матрица затраты—выпуск имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix},$$

где a_{lk} — объем блага l, необходимый для производства одной единицы блага k.

a) Пусть $\alpha = {}^1\!/_2$. Предположим также, что вектор коэффициентов труда имеет вид

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

где b_1 (соответственно b_2) — объем труда, требуемый для производства одной единицы блага 1 (соответственно блага 2). Изобразите множество производственных возможностей для двух данных благ, считая, что труд доступен в объеме 10 единиц.

b) При значениях α и b из пункта (a) вычислите равновесные цены p_1, p_2 (положим цену труда (заработную плату) равной 1) из условий максимизации прибыли (считайте, что оба блага производятся в положительном объеме).

c) При значениях α и b из пункта (a) вычислите объем труда, прямо или косвенно включенный в производство чистой (т. е. доступной для потребления) единицы блага 1. Как полученный объем труда соотносится с вашим ответом на вопрос пункта (**b**)?

d) Предположим, имеется еще одна техника по производству блага 2. К

$$\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; b_2 = 2$$

теперь добавляется еще и

$$\begin{bmatrix} a'_{12} \\ a'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \; b'_2 = \beta.$$

Принимая во внимания обе данные техники, проиллюстрируйте графически множество уровней блага 1 и объемов использования труда, необходимых для производства одной единицы блага 2. (Считайте, что имеет место свобода расходования.)

e) Что говорит теорема об отсутствии замещения в условиях пункта? Определите значение параметра β, при котором происходит переключение оптимальных техник.

5.AA.4$^{\text{B}}$. Рассмотрите следующую модель линейного производства:

$a_1 = (1, -1, 0, 0)$; $a_3 = (0, 0, -1, 1)$;
$a_2 = (0, -1, 1, 0)$; $a_4 = (2, 0, 0, -1)$.

a) Принадлежит ли каждый из следующих векторов затраты — выпуск агрегированному производственному множеству? Обоснуйте свой ответ:

$y_1 = (6, 0, 0, -2)$; $y_4 = (0, -4, 0, 4)$;
$y_2 = (5, -3, 0, -1)$; $y_5 = (0, -3, 4, 0)$.
$y_3 = (6, -3, 0, 0)$;

b) Докажите, что вектор затраты — выпуск $y = (0, -5, 5, 0)$ эффективен, указав такой вектор цен $p >> 0$, при котором y доставляет максимум прибыли.

c) Вектор затраты — выпуск $y = (1, -1, 0, 0)$ является допустимым, но не эффективным. Объясните почему.

5.AA.5$^{\text{B}}$. (По мотивам упражнения из учебного пособия (Champsaur, Milleron, 1983).) Пусть имеются четыре блага, обозначаемые индексом $l = 1, 2, 3, 4$. Технология фирмы описывается восемью элементарными процессами a_m, $m = 1, \dots, 8$, которые (с учетом обычных договоренностей о знаках) имеют вид

$a_1 = (-3, -6, 4, 0)$; $a_5 = (-11, -19, 12, 0)$;
$a_2 = (-7, -9, 3, 2)$; $a_6 = (-4, -3, -2, 5)$;
$a_3 = (-1, 2, 3, -1)$; $a_7 = (-8, -5, 0, 10)$;
$a_4 = (-8, -13, 3, 1)$; $a_8 = (-2, -4, 5, -2)$[19].

Предполагается, что любой производственный процесс может быть осуществлен при любом неотрицательном значении интенсивности $\alpha_m \geq 0$, причем все производственные процессы могут быть задействованы одновременно при любом масштабе операций (т. е. при любом $\alpha_m \geq 0$, $m = 1, \dots, 8$ производство $\sum_m \alpha_m a_m$ доступно).

a) Определите соответствующее производственное множество Y и покажите, что оно выпукло.

b) Убедитесь, что выполнено свойство отсутствия рога изобилия.

c) Убедитесь, что множество Y *не* удовлетворяет свойству свободы расходования. Свойство свободы расходования было бы выполнено, если бы к приведенному списку элементарных производственных процессов были добавлены еще и другие процессы. Какими должны быть эти процессы (приведите конкретные численные значения)?

d) Покажите, основываясь на непосредственном сравнении a_1 с a_5, a_2 с a_4, a_3 с a_8 и a_6 с a_7, что четыре из данных элементарных производственных процессов не являются эффективными.

e) Покажите, что a_1 и a_2 неэффективны, указав две положительные линейные комбинации a_3 и a_7, доминирующие a_1 и a_2 соответственно.

f) Можете ли вы привести полное описание множества эффективных производственных векторов?

g) Предположим, что объемы четырех благ, доступных в качестве ресурсов фирмы, составляют

$$s_1 = 480;\ s_2 = 300;\ s_3 = 0;\ s_4 = 0.$$

Сталкиваясь с таким ограничением на чистое использование ресурсов, фирма заинтересована в максимизации чистого производства третьего блага. Сформулируйте задачу фирмы как задачу линейного программирования.

h) Сможете ли вы, опираясь на полученное представление о множестве эффективных производственных векторов, решить оптимизационную задачу из пункта (g)? (*Подсказка*: задача может быть решена графически.)

[19] Опечатка в оригинальном тексте: последний вектор должен быть $a_8 = (-2, -4, 5, -2)$, а не $a_8 = (-2, -4, 5, 2)$. — *Примеч. пер.*

Глава 6. Выбор в условиях неопределенности

6.A. Введение

В разделе 6.B мы начнем наше исследование выбора в условиях неопределенности, рассмотрев подход, в котором альтернативы с неопределенным исходом описываются с помощью объективно известных вероятностей, определенных на абстрактном множестве возможных исходов. Такое представление рисковых альтернатив называется *лотереями*. В духе главы 1 мы считаем, что индивид имеет рациональное отношение предпочтения на множестве данных лотерей. Затем мы приводим *теорему об ожидаемой полезности*, занимающую центральное место в рассматриваемой теории. Эта теорема говорит о том, что при определенных условиях мы можем представить предпочтения с помощью функции полезности очень удобного вида — *в форме ожидаемой полезности*. Ключевым предположением, позволяющим получить этот результат, является аксиома независимости, которую мы также подробно обсудим.

В оставшихся разделах мы сфокусируем наше внимание на специальном случае, когда исходами рисковых альтернатив являются денежные суммы (или любая другая одномерная мера потребления). Этот случай лежит в основе большей части теории финансов и портфельной теории, а также используется в целом ряде других разделов прикладной экономики.

В разделе 6.C мы введем концепцию *несклонности к риску* и обсудим способы ее оценивания. Затем мы проведем сравнение степени несклонности к риску как среди различных индивидов, так и при разных уровнях индивидуального богатства.

Раздел 6.D посвящен сравнению распределения денежного дохода. Здесь мы будем искать ответы на следующие вопросы: в каком случае можно однозначно сказать, что одно распределение денежного дохода «лучше», чем другое, а также в каком случае можно сказать, что одно распределение «более рисковое», чем другое? Отвечая на эти вопросы, мы придем к концепциям *стохастического доминирования первого и второго порядка* соответственно.

В разделе 6.E мы распространим базовую теорию на случай, когда функция полезности зависит не только от денежного выигрыша, но и *от состояния природы*, а также разработаем подход к моделированию неопределенности в терминах состояний природы — очень удобный с аналитической точки зрения подход, который мы будем активно использовать далее в нашей книге.

В разделе 6.F мы кратко рассмотрим теорию *субъективной вероятности*. Используемое в разделе 6.B предположение о том, что нам известны объективные вероятности наступления состояний природы для рисковых альтернатив, с которыми мы сталкиваемся, в действительности малореалистично. Поэтому концепция субъективной вероятности дает возможность моделировать выбор в условиях неопределенности в случае, когда индивид не имеет какой-либо объективной информации о вероятностях наступления различных рисковых альтернатив.

Дальнейшее обсуждение проблем, рассматриваемых в этой главе, можно найти в работах (Kreps, 1988; Machina, 1987), а также в прекрасном сборнике оригинальных статей (Diamond, Rothschild, 1978).

6.B. Теория ожидаемой полезности

Мы начнем этот раздел с описания формального аппарата моделирования риска. Затем мы используем этот подход для исследования предпочтений на множестве рисковых альтернатив и формулировки крайне важной теоремы об ожидаемой полезности.

Описание рисковых альтернатив

Представим, что индивид сталкивается с выбором из набора рисковых альтернатив. Каждая рисковая альтернатива может привести к целому ряду возможных *исходов*, причем невозможно определить заранее, в момент выбора, к какому именно исходу она приведет.

Обозначим множество всех возможных исходов через C[1]. Эти исходы могут принимать самые разные формы. Например, они могут представлять собой наборы товаров: в этом случае $C = X$, т. е. совпадает с потребительским множеством индивида. Исходы также могут принимать форму денежных выплат. Именно этот случай мы по большей части и будем рассматривать далее в этой главе. Однако пока будем считать, что C — некоторое абстрактное множество, т. е. рассмотрим наиболее общий случай.

Во избежание технических сложностей в этом разделе будем исходить из того, что множество возможных исходов C конечно, и будем нумеровать исходы индексом $n = 1, \ldots, N$.

На протяжении всего раздела и нескольких последующих будем считать также, что вероятности исходов выбираемых альтернатив *объективно известны*. В качестве примера рисковой альтернативы можно привести игру в рулетку (с несмещенной осью) на деньги.

Основополагающей концепцией рассматриваемой теории является концепция *лотереи* как формального способа описания рисковых альтернатив.

---

[1] Элементы множества C вслед за работой (Savage, 1954) часто также называют *последствиями*.

Определение 6.B.1. *Простой лотереей* L называется набор вероятностей $L = (p_1, \ldots, p_N)$, где p_n — вероятность наступления исхода n, $p_n \geq 0$ и $\sum_n p_n = 1$.

Простую лотерею можно геометрически представить как точку в $(N-1)$-*мерном симплексе* $\Delta = \left\{p \in \mathbb{R}_+^N : p_1 + \ldots + p_N = 1\right\}$. На рис. 6.B.1(a) изображен симплекс для случая $N = 3$. Каждая вершина симплекса соответствует вырожденной лотерее, гарантированно дающей один из исходов (вероятности наступления остальных исходов равны нулю). Каждая точка в симплексе представляет собой лотерею на множестве трех исходов. При $N = 3$ симплекс удобно изображать в двумерном пространстве, как показано на рис. 6.B.1(b), где он имеет форму равностороннего треугольника[2].

В простой лотерее исходы детерминированы. Более общим вариантом, называемым *сложной лотереей*, является лотерея, исходами которой могут быть сами простые лотереи[3].

Определение 6.B.2. Пусть имеется K простых лотерей $L_k = (p_1^k, \ldots, p_N^k)$, $k = 1, \ldots, K$, и вероятностей $\alpha_k \geq 0$, где $\sum_k \alpha_k = 1$. Тогда *сложной лотереей*

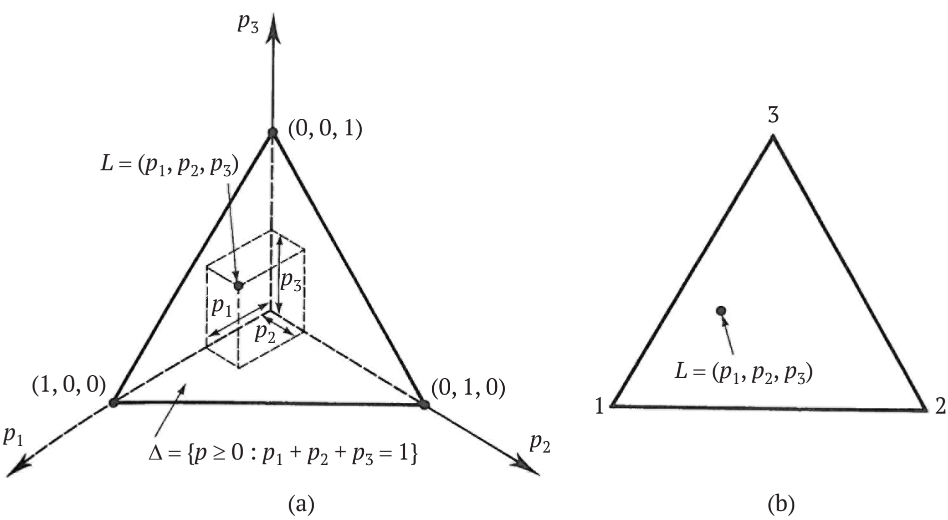


Рис. 6.B.1. Представление симплекса при $N = 3$.
(a) Трехмерное представление. (b) Двумерное представление

[2] Напомним, что равносторонние треугольники обладают следующим свойством: сумма перпендикуляров из любой точки к каждой из сторон равна высоте треугольника. Поэтому при $N = 3$ принято изображать симплекс в виде равностороннего треугольника с высотой, равной 1, поскольку в этом случае у нас есть удобное геометрическое свойство — вероятность p_n исхода n в лотерее, соответствующей некоторой точке в симплексе, равна длине перпендикуляра из этой точки к стороне, противоположной вершине с индексом n.

[3] Мы также можем определить сложные лотереи с более чем двумя уровнями вложенности, но не делаем этого, поскольку в данной главе у нас нет такой необходимости. Принцип построения таких лотерей точно такой же.

$(L_1, \ldots, L_K; \alpha_1, \ldots, \alpha_K)$ называется рисковая альтернатива, которая дает простую лотерею L_k с вероятностью α_k, где $k = 1, \ldots, K$.

Для любой сложной лотереи $(L_1, \ldots, L_K; \alpha_1, \ldots, \alpha_K)$ мы можем вычислить *редуцированную лотерею* как простую лотерею $L = (p_1, \ldots, p_N)$, которая порождает то же конечное распределение вероятностей на исходах. Значение вероятностей p_n вычисляется путем умножения вероятности выпадения лотереи L_k, равной α_k, на вероятность p_n^k наступления исхода n в соответствии с лотерей L_k и последующего суммирования по всем k. То есть вероятность исхода n в редуцированной лотерее равна

$$p_n = \alpha_1 p_n^1 + \ldots + \alpha_K p_n^K,$$

где $n = 1, \ldots, N$[4]. Следовательно, редуцированная лотерея L любой сложной лотереи $(L_1, \ldots, L_K; \alpha_1, \ldots, \alpha_K)$ может быть получена векторным сложением $L = \alpha_1 L_1 + \ldots \alpha_K L_K \in \Delta$.

На рис. 6.В.2 в симплексе Δ изображены две простые лотереи, L_1 и L_2, а также изображена редуцированная лотерея $\frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{2}L_2$ сложной лотереи $\left(L_1, L_2; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, которая дает с вероятностью $\frac{1}{2}$ либо лотерею L_1, либо лотерею L_2. Эта редуцированная лотерея лежит посередине отрезка, соединяющего L_1 и L_2. Линейная структура пространства лотерей занимает центральное место в теории выбора в условиях неопределенности, и мы будем интенсивно использовать ее дальше.

Предпочтения и лотереи

Имея способ моделирования рисковых альтернатив, мы теперь рассмотрим предпочтения индивида на множестве рисковых альтернатив. Теоретический анализ, приведенный далее, базируется на *принципе конечного*

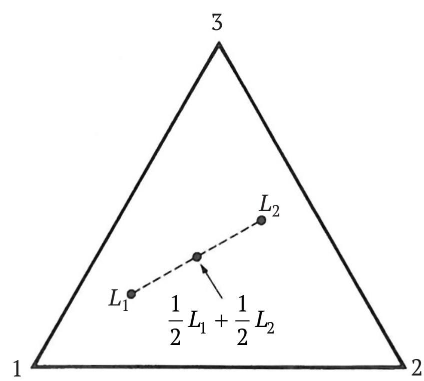


Рис. 6.В.2. Редуцированная лотерея сложной лотереи

[4] Обратите внимание, что $\sum_n p_n = \sum_k \alpha_k \left(\sum_n p_n^k\right) = \sum_k \alpha_k = 1$.

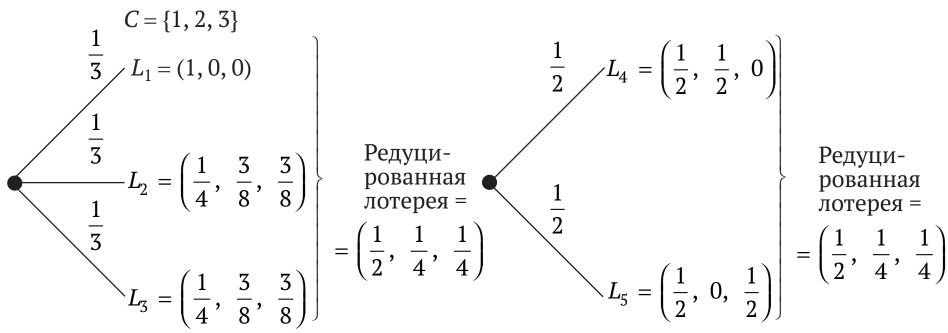


Рис. 6.В.3. Две сложные лотереи с одинаковой редуцированной лотереей

эффекта: мы предполагаем, что для любой рисковой альтернативы индивиду важны лишь итоговые вероятности наступления исходов, т. е. значима только редуцированная лотерея. Другими словами, не имеет значения, берутся вероятности наступления различных исходов из простой лотереи или из сложной. На рис. 6.В.3 представлены две различные сложные лотереи, которые приводят к одной и той же редуцированной лотерее. Согласно принципу конечного эффекта для индивида две данные лотереи эквивалентны.

Теперь мы хотели бы вписать задачу выбора в условиях неопределенности в общие рамки теории выбора, изложенной в главе 1 (см. раздел 1.В). В соответствии с принятым принципом конечного эффекта в качестве множества альтернатив, которое мы обозначим через $\mathscr{L}$, возьмем *множество всех простых лотерей на множестве исходов C*. Будем считать, что индивид имеет рациональное отношение предпочтения $\succsim$ на множестве $\mathscr{L}$, т. е. полное и транзитивное отношение, позволяющее сравнивать любые пары простых лотерей. Следует подчеркнуть, что, пожалуй, предположение о рациональности предпочтений в данном случае более сильно, чем в теории выбора в условиях определенности, рассмотренной в главе 1. Чем сложнее альтернативы, тем более тяжелое бремя возлагается на постулаты рациональности. В действительности их реалистичность в контексте неопределенности — весьма спорный вопрос. Однако, поскольку мы бы хотели сконцентрироваться на свойствах, характерных именно для неопределенности, то мы здесь не будем более подробно обсуждать предпосылку о рациональности.

Введем два дополнительных предположения о предпочтениях индивида на множестве лотерей. Наиболее важное и в некотором смысле спорное из них — это *аксиома независимости*. Однако сначала сформулируем аксиому непрерывности, аналогичную той, что обсуждалась в разделе 3.С.

Определение 6.В.3. Отношение предпочтения $\succsim$, определенное на множестве простых лотерей $\mathscr{L}$, называется *непрерывным*, если для любых лотерей $L, L', L'' \in \mathscr{L}$ множества

$$\left\{\alpha \in [0, 1] : \alpha L + (1 - \alpha)L' \succsim L''\right\} \subset [0, 1]$$

и

$$\{\alpha \in [0, 1] : L'' \succsim \alpha L + (1-\alpha)L'\} \subset [0, 1]$$

являются замкнутыми.

Другими словами, непрерывность означает, что небольшие изменения вероятностей не изменят порядка предпочтений между двумя лотереями. Например, если предпочтения индивида таковы, что «прекрасное автомобильное путешествие без происшествий» для него лучше, чем «сидеть дома», то смесь исхода «прекрасное автомобильное путешествие без происшествий» с достаточно небольшой, но положительной вероятностью исхода «смерть в автомобильной катастрофе» по-прежнему предпочитается альтернативе «сидеть дома». Таким образом, непрерывность исключает случай, когда индивид, принимающий решение, имеет лексикографические предпочтения («безопасность превыше всего») на альтернативах с нулевой вероятностью некоторого исхода (в данном случае «смерть в автомобильной катастрофе»).

Как и в главе 3, аксиома непрерывности гарантирует существование функции полезности, представляющей предпочтения $\succsim$ индивида, т. е. такой функции U: $\mathscr{L} \to \mathbb{R}$, что $L \succsim L'$ тогда и только тогда, когда $U(L) \geq U(L')$. Введем второе предположение — аксиому независимости, которая еще в большей степени определяет структуру функции $U(\cdot)$[5].

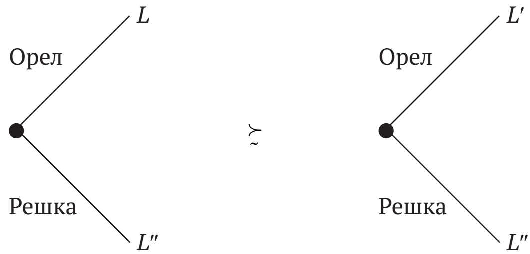
Определение 6.B.4. Отношение предпочтения $\succsim$, определенное на множестве простых лотерей $\mathscr{L}$, удовлетворяет *аксиоме независимости*, если для любых $L, L', L'' \in \mathscr{L}$ и $\alpha \in (0, 1)$ выполнено

$$L \succsim L' \text{ тогда и только тогда, когда } \alpha L + (1-\alpha)L'' \succsim \alpha L' + (1-\alpha)L''.$$

Другими словами, если каждую из двух данных лотерей смешать с третьей, то порядок предпочтения между полученными смешанными лотереями будет таким же, как и для исходных лотерей, *независимо* от того, какую лотерею мы взяли в качестве третьей.

Предположим, например, что $L \succsim L'$ и $\alpha = \frac{1}{2}$. Тогда $\frac{1}{2}L + \frac{1}{2}L''$ можно рассматривать как сложную лотерею, соответствующую подбрасыванию монеты, когда индивид получает L, если выпадает орел, и L'' — если выпадает решка. Аналогично $\frac{1}{2}L' + \frac{1}{2}L''$ соответствует игре с подбрасыванием монеты, когда в случае выпадения орла индивид получает L', а в случае решки — L'' (см. рис. 6.B.4). Заметим, что если выпадет орел, то лотерея $\frac{1}{2}L + \frac{1}{2}L''$ по крайней мере не хуже, чем лотерея $\frac{1}{2}L' + \frac{1}{2}L''$, однако в случае выпадения решки эти две сложные лотереи дают один и тот же результат. В соответствии с аксиомой независимости в этом случае мы должны

[5] Аксиома независимости впервые была сформулирована в работе (von Neumann, Morgenstern, 1944) как побочный результат в теории игр.



тогда и только тогда, когда

$$L \succsim L'$$

Рис. 6.B.4. Аксиома независимости

сделать вывод, что лотерея $\frac{1}{2}L + \frac{1}{2}L''$ по крайней мере не хуже, чем лотерея $\frac{1}{2}L' + \frac{1}{2}L''$.

Аксиома независимости занимает центральное место в теории выбора в условиях неопределенности. Она не похожа ни на одну концепцию из тех, с которыми мы сталкивались, изучая формальную теорию выбора, основанного на предпочтениях, в главе 1 или ее приложения в главах 3 и 5. Это обусловлено именно тем, что она использует фундаментальные свойства неопределенности рассматриваемой модели. В теории потребительского спроса, например, нет никакой причины ожидать, что предпочтения потребителя на различных наборах благ 1 и 2 должны быть независимы от количества других благ, которые приобретает потребитель. Тогда как в контексте данного раздела, напротив, вполне естественно предположить, что предпочтения индивида относительно двух лотерей, скажем L и L', должны определять, какую из двух лотерей он предпочитает иметь в качестве части сложной лотереи *независимо* от того, каков второй возможный исход данной сложной лотереи, которую обозначим через L''. Этот второй исход лотереи L'' должен быть несуществен для выбора индивида, поскольку, в отличие от теории потребителя, он не потребляет лотерею L или L' совместно с лотереей L'', а только *вместо* нее (если L или L' реализуются как исходы).

Упражнение 6.B.1. Покажите, что если предпочтения $\succsim$, определенные на множестве простых лотерей $\mathscr{L}$, удовлетворяют аксиоме независимости, то для всех $\alpha \in (0, 1)$ и $L, L', L'' \in \mathscr{L}$ выполнено

$$L \succ L' \text{ тогда и только тогда, когда } \alpha L + (1-\alpha)L'' \succ \alpha L' + (1-\alpha)L''$$

и

$$L \sim L' \text{ тогда и только тогда, когда } \alpha L + (1-\alpha)L'' \sim \alpha L' + (1-\alpha)L''.$$

Покажите также, что если $L \succ L'$ и $L'' \succ L'''$, то $\alpha L + (1-\alpha)L'' \succ \alpha L' + (1-\alpha)L'''$.

Как мы увидим далее, аксиома независимости неразрывно связана с возможностью представления предпочтений на множестве лотерей функцией полезности, имеющей *форму ожидаемой полезности*. Но прежде чем сформулировать этот результат, определим понятие ожидаемой полезности и проанализируем некоторые ее свойства.

Определение 6.B.5. Функция полезности U: $\mathscr{L} \to \mathbb{R}$ имеет *форму ожидаемой полезности*, если каждому из N возможных исходов можно присвоить числа $(u_1, \ldots, u_N)$ таким образом, что для любой простой лотереи $L = (p_1, \ldots, p_N)$ выполнено

$$U(L) = u_1 p_1 + \ldots + u_N p_N.$$

Функция полезности U: $\mathscr{L} \to \mathbb{R}$, имеющая форму ожидаемой полезности, называется *функцией ожидаемой полезности Неймана — Моргенштерна* (von Neumann — Morgenstern).

Обратите внимание, что если через L^n обозначить лотерею, дающую исход n с вероятностью единица, то $U(L^n) = u_n$. Таким образом, термин *ожидаемая полезность* вполне естествен, поскольку в функции ожидаемой полезности Неймана — Моргенштерна полезность от лотереи можно рассматривать как математическое ожидание значений полезности u_n на N-исходах.

Выражение $U(L) = \sum_n u_n p_n$ представляет собой общий вид *функции, линейной по вероятностям* $(p_1, \ldots, p_N)$. Поэтому условие линейности функции полезности по вероятностям можно трактовать как другой способ описания функции, имеющей форму ожидаемой полезности.

Утверждение 6.B.1. Функция полезности U: $\mathscr{L} \to \mathbb{R}$ имеет *форму ожидаемой полезности* тогда и только тогда, когда она *линейна*, т. е. тогда и только тогда, когда она обладает следующим свойством:

$$U\left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k L_k\right) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k U(L_k) \qquad (6.B.1)$$

для любых K лотерей $L_k \in \mathscr{L}$, $k = 1, \ldots, K$, и вероятностей $(\alpha_1, \ldots, \alpha_K) \geq 0$, где $\sum_k \alpha_k = 1$.

Доказательство. Предположим, что U обладает свойством (6.B.1). Мы можем записать любую лотерею $L = (p_1, \ldots, p_N)$ как выпуклую комбинацию вырожденных лотерей $(L_1, \ldots, L_N)$, т. е. $L = \sum_n p_n L^n$. Тогда имеем: $U(L) = U\left(\sum_n p_n L^n\right) = \sum_n p_n U(L^n) = \sum_n p_n u_n$. Таким образом, $U(\cdot)$ имеет форму ожидаемой полезности.

И наоборот, предположим, что $U(\cdot)$ имеет форму ожидаемой полезности и рассмотрим произвольную сложную лотерею $(L_1, \ldots, L_K; \alpha_1, \ldots, \alpha_K)$, где $L_k = (p_1^k, \ \ldots, \ p_N^k)$. Редуцированная лотерея для данной сложной лотереи имеет вид: $L = \sum_k \alpha_k L_k$. Следовательно,

$$U\left(\sum_k \alpha_k L_k\right) = \sum_n u_n \left(\sum_k \alpha_k p_n^k\right) = \sum_k \alpha_k \left(\sum_n u_n p_n^k\right) = \sum_k \alpha_k U(L_k).$$

Таким образом, рассматриваемая функция обладает свойством (6.B.1). ■

Свойство ожидаемой полезности относится к *кардиналистским* свойствам функций полезности, определенных на пространстве лотерей. В частности, утверждение 6.B.2 говорит о том, что форма ожидаемой полезности сохраняется только при возрастающих *линейных* преобразованиях.

Утверждение 6.B.2. Пусть U: $\mathscr{L} \to \mathbb{R}$ — функция ожидаемой полезности Неймана — Моргенштерна, описывающая отношение предпочтения $\succsim$ на множестве простых лотерей $\mathscr{L}$. Тогда $\tilde{U}$: $\mathscr{L} \to \mathbb{R}$ — другая функция ожидаемой полезности Неймана — Моргенштерна, отражающая те же предпочтения $\succsim$ тогда и только тогда, когда существуют числа $\beta > 0$ и γ, такие что $\tilde{U}(L) = \beta U(L) + \gamma$ для любой лотереи $L \in \mathscr{L}$.

Доказательство. Сначала выберем две такие лотереи $\overline{L}$ и $\underline{L}$, что $\overline{L} \succsim L \succsim \underline{L}$ для всех $L \in \mathscr{L}$[6]. Если $\overline{L} \sim \underline{L}$, то каждая функция полезности является константой, откуда немедленно следует искомый результат. В связи с этим будем считать, что $\overline{L} \succ \underline{L}$.

Заметим, во-первых, что если $U(\cdot)$ — функция ожидаемой полезности Неймана — Моргенштерна и $\tilde{U}(L) = \beta U(L) + \gamma$, то

$$\tilde{U}\left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k L_k\right) = \beta U\left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k L_k\right) + \gamma = \beta\left[\sum_{k=1}^{K} \alpha_k U(L_k)\right] + \gamma =$$
$$= \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \left[\beta U(L_k) + \gamma\right] = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \tilde{U}(L_k).$$

Поскольку $\tilde{U}(\cdot)$ обладает свойством (6.B.1), то она имеет форму ожидаемой полезности.

Докажем обратное: нам надо показать, что если $\tilde{U}(\cdot)$ и $U(\cdot)$ имеют форму ожидаемой полезности, то существуют такие числа $\beta > 0$ и γ,

[6] Можно показать, что такие лотереи (наилучшая и наихудшая) существуют. Например, мы можем в качестве них взять лотереи, которые доставляют соответственно максимум и минимум линейной (а следовательно, непрерывной) функции $U(\cdot)$ на вероятностном симплексе (который является компактным множеством).

что $\tilde{U}(L) = \beta U(L) + \gamma$ для всех $L \in \mathscr{L}$. Для этого возьмем произвольную лотерею $L \in \mathscr{L}$ и определим $\lambda_L \in [0, 1]$, такое что

$$U(L) = \lambda_L U(\overline{L}) + (1 - \lambda_L) U(\underline{L}).$$

Таким образом,

$$\lambda_L = \frac{U(L) - U(\underline{L})}{U(\overline{L}) - U(\underline{L})}. \tag{6.B.2}$$

Поскольку $\lambda_L U(\overline{L}) + (1 - \lambda_L) U(\underline{L}) = U\left(\lambda_L \overline{L} + (1 - \lambda_L)\underline{L}\right)$ и $U(\cdot)$ представляет предпочтения $\succsim$ на множестве лотерей, то $L \sim \lambda_L \overline{L} + (1 - \lambda_L)\underline{L}$. Тогда, поскольку $\tilde{U}(\cdot)$ также является функцией, линейной по вероятностям, и представляет те же предпочтения, то

$$\tilde{U}(L) = \tilde{U}\left(\lambda_L \overline{L} + (1 - \lambda_L)\underline{L}\right) = \lambda_L \tilde{U}(\overline{L}) + (1 - \lambda_L)\tilde{U}(\underline{L}) =$$
$$= \lambda_L \left(\tilde{U}(\overline{L}) - \tilde{U}(\underline{L})\right) + \tilde{U}(\underline{L}).$$

Подставляя λ_L из выражения (6.B.2) и проводя простые преобразования, приходим к заключению, что $\tilde{U}(L) = \beta U(L) + \gamma$, где

$$\beta = \frac{\tilde{U}(\overline{L}) - \tilde{U}(\underline{L})}{U(\overline{L}) - U(\underline{L})}$$

и

$$\gamma = \tilde{U}(\underline{L}) - U(\underline{L}) \frac{\tilde{U}(\overline{L}) - \tilde{U}(\underline{L})}{U(\overline{L}) - U(\underline{L})},$$

что и требовалось доказать. ■

Следствием утверждения 6.B.2 является тот факт, что для функции полезности в форме ожидаемой полезности разность уровней полезности имеет свой смысл. Например, пусть возможны четыре исхода, тогда утверждение «разность уровня полезности от исходов 1 и 2 больше, чем разность полезностей от исходов 3 и 4», т. е. $u_1 - u_2 > u_3 - u_4$, эквивалентно тому, что

$$\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_4 > \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3.$$

Следовательно, это утверждение означает, что лотерея $L = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$ предпочитается лотерее $L' = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$. Такое ранжирование разностей полезности сохраняется при любом линейном преобразовании функции ожидаемой полезности Неймана — Моргенштерна.

Заметим, что если отношение предпочтения $\succsim$ на множестве $\mathscr{L}$ представимо функцией полезности $U(\cdot)$, имеющей форму ожидаемой полезности, то, поскольку линейная функция полезности непрерывна, отсюда следует, что отношение $\succsim$ непрерывно на $\mathscr{L}$. Кроме того, что более важно, отношение предпочтения $\succsim$ также должно удовлетворять аксиоме независимости (вас просят доказать этот факт в упражнении 6.B.2).

Упражнение 6.B.2. Покажите, что если отношение предпочтения $\succsim$ на множестве $\mathscr{L}$ представимо функцией полезности $U(\cdot)$, имеющей форму ожидаемой полезности, то для данного отношения предпочтения $\succsim$ должна выполняться аксиома независимости.

Согласно теореме существования функции ожидаемой полезности, занимающей центральное место в данном разделе, обратное утверждение также верно.

Теорема существования функции ожидаемой полезности

Теорема существования функции ожидаемой полезности говорит о том, что если предпочтения индивида на лотереях удовлетворяют аксиомам непрерывности и независимости, то эти предпочтения могут быть представлены функцией полезности, имеющей форму ожидаемой полезности. Это наиболее важный результат в теории выбора в условиях неопределенности, и мы еще не раз убедимся в этом в дальнейшем.

Прежде чем переходить к формулировке и доказательству теоремы, имеет смысл попытаться интуитивно понять ее результат.

Рассмотрим случай, когда возможны только три исхода. Как мы уже видели, аксиома непрерывности гарантирует, что предпочтения на лотереях могут быть представлены некоторой функцией полезности. Предположим, что мы изображаем карту безразличия в симплексе, как это показано на рис. 6.B.5. Для простоты будем считать, что у нас есть некая стандартная карта с одномерными кривыми безразличия. Поскольку форма

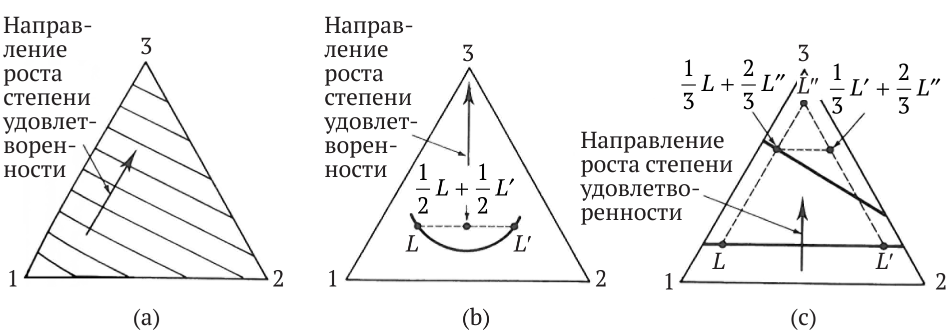


Рис. 6.B.5. Геометрическое обоснование теоремы существования функции ожидаемой полезности. (a) Отношение предпочтения $\succsim$ представимо функцией полезности, имеющей форму ожидаемой полезности. (b) Противоречие с аксиомой независимости. (c) Противоречие с аксиомой независимости

ожидаемой полезности предполагает линейность по вероятностям, то тот факт, что предпочтения можно представить функцией полезности, имеющей форму ожидаемой полезности, эквивалентен тому, что данные кривые безразличия представляют собой параллельные прямые (убедитесь в этом). На рис. 6.B.5(a) изображена карта безразличия, удовлетворяющая этому свойству. Теперь мы хотим показать, что это свойство кривых безразличия в действительности является следствием аксиомы независимости.

Кривые безразличия представляют собой прямые линии, если для любой пары лотерей L, L' выполнено: из $L \sim L'$ следует, что $\alpha L + (1 - \alpha)L' \sim L$ для всех $\alpha \in [0, 1]$. На рис. 6.B.5(b) изображен случай, когда кривые безразличия не являются прямыми линиями, тогда $L \sim L'$, но $\frac{1}{2}L' + \frac{1}{2}L \succ L.$ А это эквивалентно следующему соотношению:

$$\frac{1}{2}L' + \frac{1}{2}L \succ \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}L. \tag{6.B.3}$$

Но поскольку $L \sim L'$, то из аксиомы независимости следует, что должно быть выполнено $\frac{1}{2}L' + \frac{1}{2}L \sim \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}L$ (см. упражнение 6.B.1), что противоречит (6.B.3), а значит, мы приходим к выводу, что кривые безразличия должны быть прямыми линиями.

На рис. 6.B.5(c) изображены две прямые, но не параллельные кривые безразличия. И в этом случае также можно продемонстрировать нарушение аксиомы независимости, пример которого проиллюстрирован на рисунке. Здесь у нас имеется две лотереи, для которых выполнено $L \succsim L'$ (в действительности $L \sim L'$), но при этом соотношение $\frac{1}{3}L + \frac{2}{3}L'' \succsim \frac{1}{3}L' + \frac{2}{3}L''$ не выполнено для лотереи L'', изображенной на рисунке. Таким образом, если предпочтения удовлетворяют аксиоме независимости, то кривые безразличия должны быть параллельными прямыми линиями.

В утверждении 6.B.3 мы даем строгую формулировку теоремы об ожидаемой полезности и затем приводим ее доказательство.

Утверждение 6.B.3 (*теорема о существовании функции ожидаемой полезности*). Пусть рациональное отношение предпочтения $\succsim$, определенное на пространстве лотерей $\mathscr{L}$, удовлетворяет аксиомам непрерывности и независимости. Тогда предпочтения $\succsim$ могут быть представлены функцией полезности, имеющей форму ожидаемой полезности, т. е. каждому исходу $n = 1, \ldots, N$ можно присвоить число u_n, так что для любых двух лотерей $L = (p_1, \ldots, p_N)$ и $L' = (p'_1, \ \ldots, \ p'_N)$ выполнено

$$L \succsim L' \text{ тогда и только тогда, когда } \sum_{n=1}^{N} u_n p_n \geq \sum_{n=1}^{N} u_n p'_n. \tag{6.B.4}$$

Доказательство. Проведем доказательство в несколько шагов. Для простоты будем считать, что на множестве $\mathscr{L}$ существует наилучшая и наихудшая лотереи, $\bar{L}$ и $\underline{L}$ (так что $\bar{L} \succsim L \succsim \underline{L}$ для любой лотереи $L \in \mathscr{L}$)[7]. Если $\overline{L} \sim \underline{L}$, то все лотереи из множества $\mathscr{L}$ для индивида эквивалентны и, следовательно, утверждение тривиально. Поэтому всюду далее будем предполагать, что $\overline{L} \succ \underline{L}$.

Шаг 1. Если $L \succ L'$ *и* $\alpha \in (0, 1)$*, то* $L \succ \alpha L + (1-\alpha)L' \succ L'$.

Действительно, невырожденная смесь двух лотерей с точки зрения предпочтений будет занимать промежуточную позицию между двумя исходными лотереями. Формально утверждение следует из аксиомы независимости. В частности, поскольку $L \succ L'$, то по аксиоме независимости (вспомните упражнение 6.B.1)

$$L = \alpha L + (1-\alpha)L \succ \alpha L + (1-\alpha)L' \succ \alpha L' + (1-\alpha)L' = L'.$$

Шаг 2. Пусть $\alpha, \beta \in [0, 1]$, *тогда* $\beta\overline{L} + (1-\beta)\underline{L} \succ \alpha\overline{L} + (1-\alpha)\underline{L}$ *тогда и только тогда*, *когда* $\beta > \alpha$.

Предположим, что $\beta > \alpha$. Заметим, во-первых, что справедливо следующее соотношение:

$$\beta\overline{L} + (1-\beta)\underline{L} = \gamma\overline{L} + (1-\gamma)\left[\alpha\overline{L} + (1-\alpha)\underline{L}\right],$$

где $\gamma = \left[(\beta-\alpha)/(1-\alpha)\right] \in (0, 1]$. Согласно утверждению шага 1 $\overline{L} \succ$ $\succ \alpha\overline{L} + (1-\alpha)\underline{L}$. Применив утверждение шага 1 еще раз, получим: $\gamma\overline{L} + (1-\gamma)(\alpha\overline{L} + (1-\alpha)\underline{L}) \succ \alpha\overline{L} + (1-\alpha)\underline{L}$, откуда следует, что $\beta\overline{L} +$ $+ (1-\beta)\underline{L} \succ \alpha\overline{L} + (1-\alpha)\underline{L}$.

Для доказательства обратного утверждения предположим, что $\beta \le \alpha$. Тогда если $\beta = \alpha$, то $\beta\overline{L} + (1-\beta)\underline{L} \sim \alpha\underline{L} + (1-\alpha)\underline{L}$. Предположим теперь, что $\beta < \alpha$. Но по доказанному выше (если поменять местами α и β) должно быть выполнено $\alpha\overline{L} + (1-\alpha)\underline{L} \succ \beta\overline{L} + (1-\beta)\underline{L}$.

Шаг 3. Для любой лотереи $L \in \mathscr{L}$ *существует единственное число* α_L*, такое что* $\left[\alpha_L\overline{L} + (1-\alpha_L)\underline{L}\right] \sim L$.

Существование такого числа α_L следует из непрерывности отношения предпочтения $\succsim$ и того факта, что $\overline{L}$ и $\underline{L}$ наилучшая и наихудшая лотереи соответственно. Единственность можно доказать, воспользовавшись результатом шага 2.

Существование числа α_L можно доказать аналогично тому, как это было сделано в доказательстве утверждения 3.C.1. Итак, рассмотрим множества

$$\left\{\alpha \in [0, 1] : \alpha\overline{L} + (1-\alpha)\underline{L} \succsim L\right\} \text{ и } \left\{\alpha \in [0, 1] : L \succsim \alpha\overline{L} + (1-\alpha)\underline{L}\right\}.$$

Поскольку отношение предпочтения $\succsim$ по условию непрерывно и полно, то оба множества замкнуты и любое $\alpha \in [0, 1]$ принадлежит по крайней мере одному из этих множеств. Кроме того, так как данные множества являются непустыми и отрезок [0, 1] — связное множество, то отсюда следует, что существует некоторое α, кото-

[7] В действительности в случае конечного множества исходов этот факт следует из аксиомы независимости (см. упражнение 6.B.3).

рое принадлежит обоим множествам. Это доказывает существование такого числа α_L, для которого выполнено $\alpha_L \overline{L} + (1-\alpha_L)\underline{L} \sim L$.

Шаг 4. Функция $U : \mathcal{L} \to R$, *ставящая в соответствие* $U(L) = \alpha_L$ *всем* $L \in \mathcal{L}$, *представляет собой отношение предпочтения* $\succsim$.

Заметим, что согласно утверждению шага 3 для любых двух лотерей $L, L' \in \mathcal{L}$ имеем

$L \succsim L'$ тогда и только тогда, когда $\alpha_L \overline{L} + (1-\alpha_L)\underline{L} \succsim \alpha_{L'} \overline{L} + (1-\alpha_{L'})\underline{L}$.

Таким образом, по утверждению шага 2 $L \succsim L'$ тогда и только тогда, когда $\alpha_L \geq \alpha_{L'}$.

Шаг 5. Функция полезности $U(\cdot)$, *ставящая в соответствие* $U(L) = \alpha_L$ *со всеми* $L \in \mathcal{L}$, *линейна и, следовательно, имеет форму ожидаемой полезности.*

Мы хотим показать, что для любых лотерей $L, L' \in \mathcal{L}$ и $\beta \in [0, 1]$ выполнено $U\left(\beta L + (1-\beta)L'\right) = \beta U(L) + (1-\beta)U(L')$. По определению

$$L \sim U(L)\overline{L} + (1 - U(L))\underline{L}$$

и

$$L' \sim U(L')\overline{L} + \left(1 - U(L')\right)\underline{L}.$$

Тогда, (дважды) применив аксиому независимости, получим

$$\beta L + (1-\beta)L' \sim \beta\left[U(L)\overline{L} + \left(1-U(L)\right)\underline{L}\right] + (1-\beta)L' \sim$$
$$\sim \beta\left[U(L)\overline{L} + \left(1-U(L)\right)\underline{L}\right] + (1-\beta)\left[U(L')\overline{L} + \left(1-U(L')\right)\underline{L}\right].$$

Проведя преобразования, нетрудно заметить, что последняя лотерея с алгебраической точки зрения идентична лотерее

$$\left[\beta U(L) + (1-\beta)U(L')\right]\overline{L} + \left[1 - \beta U(L) - (1-\beta)U(L')\right]\underline{L}.$$

Другими словами, сложная лотерея, дающая лотерею $\left[U(L)\overline{L} + (1 - U(L))\underline{L}\right]$ с вероятностью β и лотерею $\left[U(L')\overline{L} + (1 - U(L'))\underline{L}\right]$ с вероятностью $(1-\beta)$, имеет ту же самую редуцированную лотерею, что и сложная лотерея, которая дает лотерею $\overline{L}$ с вероятностью $\left[\beta U(L) + (1-\beta)U(L')\right]$ и лотерею $\underline{L}$ с вероятностью $\left[(1 - \beta U(L) - (1-\beta)U(L')\right]$.

Таким образом,

$$\beta L + (1-\beta)L' \sim \left[\beta U(L) + (1-\beta)U(L')\right]\overline{L} + \left[1 - \beta U(L) - (1-\beta)U(L')\right]\underline{L}.$$

Отсюда по построению функции $U(\cdot)$ на шаге 4 имеем

$$U\left(\beta L + (1-\beta)L'\right) = \beta U(L) + (1-\beta)U(L'),$$

что и требовалось доказать.

Следовательно, соединив воедино шаги 1–5, мы получаем доказательство существования функции полезности, представляющей предпочтения $\succsim$ и имеющей форму ожидаемой полезности. ■

Обсуждение теории ожидаемой полезности

Во-первых, следует отметить техническое преимущество теоремы о существовании функции ожидаемой полезности: функция ожидаемой полезности крайне удобна с аналитической точки зрения. И этот факт, возможно более чем что-либо, обусловливает ее повсеместное использование в экономике. С функцией ожидаемой полезности очень удобно работать, а без нее — крайне сложно. Как мы уже отмечали, в последующих главах мы не раз убедимся в значимости этого результата. Далее в этой главе мы обсудим ряд примеров аналитического применения функции ожидаемой полезности.

Во-вторых, теорема о существовании функции ожидаемой полезности дает преимущество нормативного характера: ожидаемая полезность — хороший ориентир для действий. Зачастую потребителям сложно воспринимать рисковые альтернативы системно. Но если индивид считает, что его выбор должен удовлетворять аксиомам, на которых базируется теорема о существовании ожидаемой полезности (особенно аксиоме независимости), то данная теорема может быть использована как руководство для принятия решений. Этот момент проиллюстрирован в примере 6.B.1.

Пример 6.B.1 (*ожидаемая полезность как ориентир для принятия решения*). Может оказаться так, что индивид неспособен охарактеризовать свои предпочтения относительно лотерей L и L', изображенных на рис. 6.B.6. Эти две лотереи слишком похожи друг на друга: различия в вероятностях исходов слишком малы для восприятия. Однако если индивид ожидает, что его предпочтения должны удовлетворять предпосылкам теоремы о существовании ожидаемой полезности, то тогда он может рассмотреть лотерею L'', расположенную на прямой, проходящей через L и L', на существенном расстоянии от L. Лотерея L'' может быть недоступна для индивида, но если он решит, что $L'' \succ L$, то тогда также должно быть выполнено $L' \succ L$. Действительно, если $L'' \succ L$, то тогда существует кривая безразличия, разделяющая эти две лотереи, как показано на рисунке, а из того факта, что кривые безразличия пред-

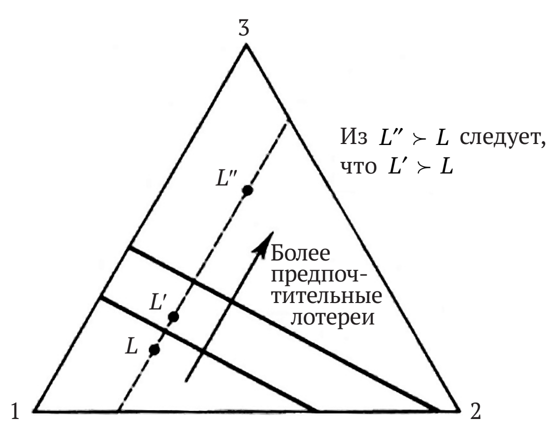


Рис. 6.B.6. Ожидаемая полезность как ориентир для принятия решения

ставляют собой семейство параллельных прямых линий, следует, что существует также кривая безразличия, отделяющая L' от L, так что $L' \succ L$. Заметим, что такой вывод невозможно было бы получить в рамках общей теории выбора, изложенной в главе 1, поскольку при отсутствии гипотезы о существовании ожидаемой полезности кривые безразличия необязательно имеют форму прямых (в общем случае могло бы быть выполнено $L'' \succ L$ и $L \succ L'$).

Конкретный пример применения теоремы о существовании функции ожидаемой полезности приведен в упражнении 6.B.4. ■

Однако с дескриптивной точки зрения теорема о существовании ожидаемой полезности (и косвенно ее базовая предпосылка — аксиома независимости) не без изъянов, что проиллюстрировано в примерах 6.B.2 и 6.B.3.

Пример 6.B.2 (*парадокс Алле*). В этом примере, известном как парадокс Алле (по работе (Allais, 1953)), продемонстрирована одна из наиболее известных ситуаций, когда предпочтения не согласуются с ожидаемой полезностью; его следует мыслить как эксперимент. Итак, пусть возможны следующие денежные призы (соответственно число исходов $N = 3$):

Первый приз	Второй приз	Третий приз
2 500 000 долларов	500 000 долларов	0 долларов

Индивиду предлагается пройти два теста. В первом тесте нужно выбрать одну из лотерей L_1 и L_1':

$$L_1 = (0, 1, 0) \qquad L_1' = (0.1, 0.89, 0.01).$$

На втором этапе предлагается выбрать между лотереями L_2 и L_2':

$$L_2 = (0, 0.11, 0.89) \qquad L_2' = (0.1, 0, 0.9).$$

Все четыре лотереи, рассматриваемые в примере, изображены в симплексе на рис. 6.B.7.

Как правило, индивиды демонстрировали следующие предпочтения: $L_1 \succ L_1'$ и $L_2' \succ L_2$[8].

Первое соотношение означает, что индивид предпочитает получить 500 000 долларов гарантированно, чем участвовать в лотерее, по которой с вероятностью $^1/_{10}$ можно получить в пять раз больше, но при этом столкнуться с небольшим риском вообще ничего не получить. Второе соотношение говорит о том, что, учитывая все обстоятельства, получение 2 500 000 долларов с вероятностью $^1/_{10}$ предпочитается получению только 500 000 долларов с чуть большей вероятностью 11/100.

Однако такой выбор не согласуется с ожидаемой полезностью. Это проиллюстрировано на рис. 6.B.7: прямые линии, соединяющие L_1 с L_1' и L_2 с L_2', параллельны. Следовательно, если индивид имеет линейные кривые безразличия, расположенные таким образом, что L_1 предпочитается L_1', то параллельная прямая безразличия должна быть такова, что L_2 предпочитается L_2', и наоборот. Таким образом, выбор L_1 и L_2' не согласуется с предпочтениями, удовлетворяющими предпосылкам теоремы о существовании ожидаемой полезности.

[8] В нашем эксперименте, проведенном на занятиях, примерно половина студентов сделала такой же выбор.

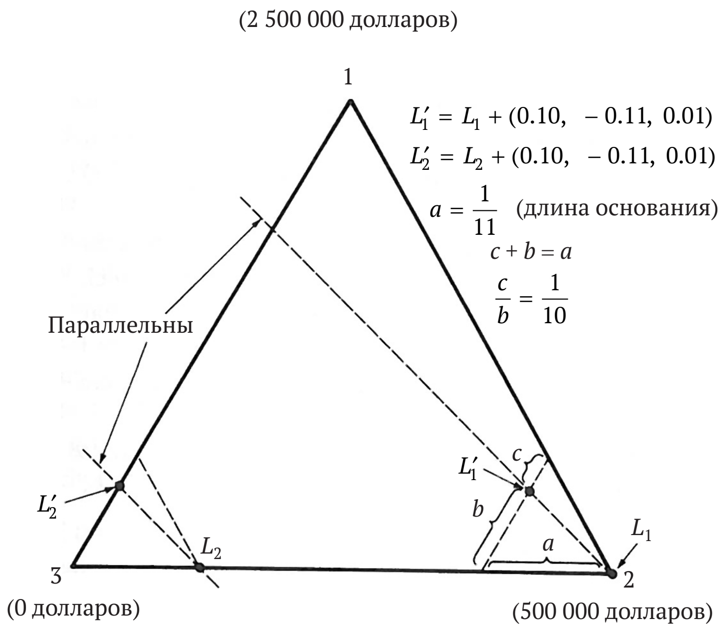


Рис. 6.В.7. Иллюстрация парадокса Алле в вероятностном симплексе

Покажем это формально: предположим, что предпочтения представимы функцией ожидаемой полезности Неймана — Моргенштерна. Обозначим через u_{25}, $u_{0.5}$ и u_0 значения полезности на трех заданных исходах. Тогда из $L_1 \succ L_1'$ следует, что

$$u_{0.5} > 0.1u_{25} + 0.89u_{0.5} + 0.01u_0.$$

Добавив к обеим частям неравенства $0.89u_0 - 0.89u_{0.5}$, получим

$$0.11u_{0.5} + 0.89u_0 > 0.1u_{25} + 0.9u_0,$$

а значит, для индивида с предпочтениями, представимыми функцией ожидаемой полезности Неймана — Моргенштерна, должно быть выполнено $L_2 \succ L_2'$. ■

Можно выделить четыре наиболее распространенных подхода к объяснению парадокса Алле. Первый, впервые озвученный Дж. Маршаком и Л. Сэвиджем, опирается на нормативную интерпретацию теории ожидаемой полезности. Согласно этому подходу выбор в условиях неопределенности представляет собой рефлективную деятельность, в рамках которой индивид должен быть готов корректировать ошибки, если доказано, что они несовместимы с базовыми принципами выбора, на которых основана аксиома независимости (во многом подобно тому, как корректируются арифметические ошибки).

Согласно второму подходу значение парадокса Алле для экономики в целом не столь велико, поскольку в нем используются малореалистичные выигрыши и вероятности близки к 0 и 1.

Третий подход — попытка подогнать парадокс под теорию, в которой предпочтения определены на более крупных и сложных объектах, чем простые лотереи на конечном множестве исходов. Например, индивид может оценивать не только то, что он получает, но также и то, что он получает в сравнении с тем, что мог бы получить, сделав иной выбор. Это так называемая *теория сожалений*. В рассмотренном примере соотношение $L_1 \succ L_1'$ может быть обусловлено тем, что сожаление от возможности получить нуль по лотерее L_1' по сравнению с гарантированным получением 500 000 долларов по лотерее L_1 слишком велико. С другой стороны, при выборе одной из лотерей L_2 и L_2' фактор сожаления уже не оказывает такого влияния на выбор: индивид с большой долей вероятности может ничего не получить в любом случае.

Четвертый подход состоит в том, чтобы рассматривать заданный набор лотерей, но отказаться от аксиомы независимости в пользу менее строгого предположения. Более подробно этот момент рассматривается в упражнении 6.B.5.

Пример 6.B.3 (*парадокс Макины)*. Рассмотрим три следующих исхода: «поездка в Венецию», «просмотр хорошего фильма о Венеции» и «остаться дома». Будем считать, что вы предпочитаете первый исход второму, а второй третьему.

Предположим, вам предложили выбрать одну из двух лотерей. Первая лотерея сулит «поездку в Венецию» с вероятностью 99,9% и «просмотр хорошего фильма о Венеции» с вероятностью 0,1%. По второй лотерее «поездка в Венецию» наступает опять с вероятностью 99,9%, а с вероятностью 0,1% реализуется исход «остаться дома». Согласно аксиоме независимости вы должны предпочесть первую лотерею второй. Однако вполне было бы понятно, если бы ваш выбор был обратным. Выбор второй лотереи рационален, если вы предчувствуете, что если поездка в Венецию не состоится, то изменятся и предпочтения относительно двух других исходов: вы будете сильно *разочарованы* и расстроены несостоявшейся поездкой, так что фильм о Венеции лишь усугубит ваше состояние.

Идея разочарования близка к идее сожаления, которую мы обсуждали в контексте парадокса Алле, но это не совсем одно и то же. Обе концепции используют влияние «того, что могло бы произойти» на уровень удовлетворения, испытываемого индивидом, и именно поэтому они не согласуются с аксиомой независимости. Но при этом разочарование более тесно связано с тем, что могло бы произойти, если бы реализовался другой исход лотереи, тогда как сожаление касается выбора, который не был сделан. ■

В силу проиллюстрированных в приведенных выше примерах феноменов идет довольно активный поиск стройной теории выбора в условиях неопределенности, которая не базировалась бы на аксиоме независимости (см. (Machina, 1987; Hey, Orme, 1994)). Тем не менее в экономике повсеместно используется теорема о существовании ожидаемой полезности.

Иногда звучат доводы против практической значимости нарушения аксиомы независимости, основанные на том, что индивиды с такими предпочтениями в действительности уйдут с рынка, поскольку открыты для сделок, ведущих к гарантированной потере денег[9]. Предположим, например, что есть три лотереи, такие что $L \succ L'$ и $L \succ L''$, но в нарушение аксиомы независимости $\alpha L' + (1-\alpha)L'' \succ L$ для

[9] Так называемых *Dutch books*.

некоторого $\alpha \in (0, 1)$. Тогда, в случае если индивид изначально владеет правом на лотерею L, он будет готов заплатить немного денег, чтобы обменять L на сложную лотерею, дающую лотерею L' с вероятностью α и лотерею L'' — с вероятностью $(1 - \alpha)$. Но как только первый этап этой лотереи остается позади и индивид получает либо лотерею L', либо лотерею L'', он снова готов заплатить, чтобы обменять полученную лотерею на L. Следовательно, заплатив дважды, он может остаться в своем исходном положении.

Это также может служить хорошим обоснованием выпуклости множества «не хуже чем» для отношения предпочтения $\succsim$, т. е. для выполнения соотношения $L \succsim \alpha L' + (1 - \alpha)L''$ при $L \succsim L'$ и $L \succsim L''$. Это свойство следует из аксиомы независимости, но слабее ее. Обоснование, построенное по такой логике, можно привести и для аксиомы независимости в общем виде, но оно представляется более натянутым (см: Green 1987).

Наконец, можно говорить о применении ожидаемой полезности с некоторой осторожностью, упирая на то, что во многих практических ситуациях на итоговое разрешение неопределенности влияют действия, предпринимаемые индивидами. Зачастую эти действия должны быть явно описаны, но не всегда это делается. Пример 6.В.4 иллюстрирует возникающие при этом трудности.

Пример 6.В.4 (*индуцированные предпочтения)*. Предположим, вас пригласили на обед, на котором вам могут предложить либо рыбу (F), либо мясо (M). Вам бы хотелось проявить знание этикета и прийти с белым вином, если будут подавать рыбу (F), и с красным — если будут подавать мясо (M). Но купить вино вы должны *до* того, как разрешится неопределенность и вы узнаете, что будет подано к обеду.

Предположим теперь, что бутылка красного вина стоит столько же, сколько и бутылка белого, и, кроме того, будем считать, что вам безразлично, будет на обеде M или F. Если вы считаете, что возможными исходами являются F и M, то, очевидно, для вас лотереи, дающие F и M с определенностью, эквивалентны. Но тогда по аксиоме независимости этим лотереям для вас также должна быть эквивалентна лотерея, которая дает F и M с вероятностями $^1/_2$. Но в действительности для вас эти лотереи не эквивалентны, поскольку если вы точно знаете, что именно будет подано на обед (F или M), то вы сможете принести правильное вино, тогда как в противном случае вам придется либо покупать и то и другое вино, либо с вероятностью $^1/_2$ ошибиться с выбором.

Однако этот пример не противоречит аксиоме независимости. Для того чтобы апеллировать к аксиоме, структура принятия решения должна быть такой, чтобы удовлетворение, получаемое от исхода, не зависело от любых действий, предпринимаемых индивидом до разрешения неопределенности. *Таким образом, предпочтения не должны быть индуцированы или выведены из ex ante возможных действий*[10]. Здесь действие «приобретение бутылки вина» предпринимается до того, как разрешится неопределенность относительно меню обеда.

[10] Ex post действия не создают проблем. Например, предположим, что $u_n(a_n)$ — функция полезности на исходе n, когда действие a_n предпринимается после разрешения неопределенности. Следовательно, индивид выбирает действие a_n так, чтобы оно было решением задачи $\max_{a_n \in A_n} u_n(a_n)$, где A_n — множество возможных действий при наступлении исхода n. Тогда мы можем положить $u_n = \max_{a_n \in A_n} u_n(a_n)$ и оценивать лотереи на множестве N исходов в соответствии теорией ожидаемой полезности.

Чтобы иметь возможность рассматривать эту ситуацию в рамках нашего подхода, мы должны включить *ex ante* действия как часть описания исходов. Например, в данном случае мы должны рассматривать четыре исхода: «принести красное вино, когда подают M», «принести белое вино, когда подают M», «принести красное вино, когда подают F» и «принести белое вино, когда подают F». При любой неопределенности относительно того, что будет подано на обед, вы индуцируете лотерею на данных исходах своим выбором того или иного действия. В данном контексте вполне вероятно, что вам будут безразличны исходы «мясо и покупка красного вина», «рыба и покупка белого вина» или любая лотерея на этих двух исходах согласно аксиоме независимости. ■

Хотя это и не противоречит постулатам теории ожидаемой полезности, а значит, не представляет серьезной концептуальной трудности, пример с индуцированными предпочтениями тем не менее затрагивает проблему сложности практического применения данной теории. Этот пример иллюстрирует тот факт, что при попытке приложения теории ожидаемой полезности к исследованию многих реальных экономических ситуаций можно столкнуться с тем, что эти ситуации не укладываются в рамки теории ожидаемой полезности, поскольку предпочтения почти всегда в некоторой степени индуцированы[11].

Теорема о существовании ожидаемой полезности в действительности требует от индуцированных предпочтений определенной структуры. Например, предположим, что полное множество исходов имеет вид $B \times A$, где $B = \{b_1, \ldots, b_N\}$ — множество возможных реализаций экзогенной рандомизации, а A — множество возможных (*ex ante*) действий индивида. По условию теоремы о существовании ожидаемой полезности для любых $a \in A$ и $b_n \in B$ мы можем исходу (b_n, a) приписать некоторое значение полезности $u_n(a)$. Тогда для любой экзогенной лотереи $L = (p_1, \ldots, p_n)$ на множестве B мы можем определить функцию полезности с помощью максимизации ожидаемой полезности:

$$U(L) = \max_{a \in A} \sum_n p_n u_n(a).$$

В упражнении 6.B.6 вас просят показать, что хотя $U(L)$ — функция, определенная на множестве $\mathscr{L}$, она необязательно линейна, но при этом, тем не менее, *выпукла*, т. е.

$$U\left(\alpha L + (1-\alpha)L'\right) \leq \alpha U(L) + (1-\alpha)U(L').$$

На рис. 6.B.8 изображена карта безразличия для индуцированных предпочтений в вероятностном симплексе при $N = 3$.

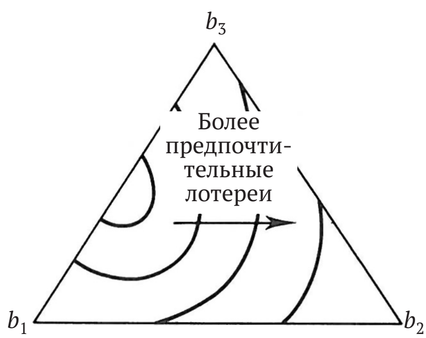


Рис. 6.B.8. Карта безразличия для индуцированных предпочтений относительно лотерей на множестве $B = \{b_1, b_2, b_3\}$

---

[11] Рассмотрим, например, предпочтения относительно лотерей, исходами которых являются суммы денег, доступные завтра. Если только предпочтения индивида относительно сегодняшнего и завтрашнего потребления неаддитивно сепарабельны, то его решение о том, какой уровень потребления выбрать сегодня, — решение, которое нужно принять до разрешения неопределенности относительно завтрашнего богатства, — оказывает такое влияние на предпочтения относительно лотерей, которое противоречит аксиоме независимости.

6.С. Денежные лотереи и несклонность к риску

Во многих экономических ситуациях индивиды демонстрируют *несклонность к риску*. В этом разделе мы формализуем понятие несклонности к риску и изучим некоторые его свойства.

Начиная с этого раздела и до конца главы мы будем рассматривать только такие рисковые альтернативы, исходами которых являются суммы денег. В случае денежных исходов удобно трактовать деньги как непрерывную величину. Строго говоря, при обсуждении описания предпочтений функцией ожидаемой полезности в разделе 6.В мы предполагали конечное число исходов. Однако эту теорию с незначительными техническими усложнения нетрудно распространить и на случай бесконечной области определения. Мы начнем с краткого обсуждения основных изменений, необходимых в этом случае.

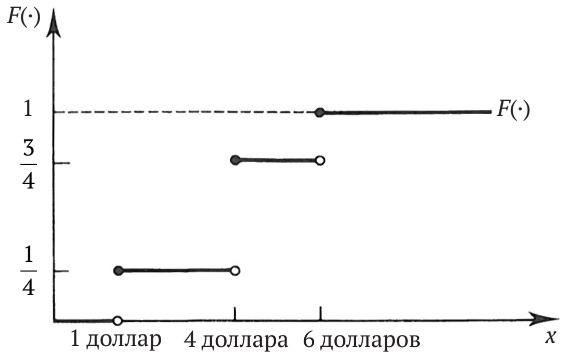
Лотереи на денежных исходах и ожидаемая полезность

Обозначим сумму денег непрерывной переменной x. Мы можем описать денежную лотерею с помощью *кумулятивной функции распределения* $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$. Другими словами, для любого x $F(x)$ — это вероятность того, что реализовавшийся выигрыш не превышает величины x. Заметим, что если функция распределения лотереи имеет соответствующую функцию плотности $f(\cdot)$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ для всех x. Преимущество описания лотерей посредством функций распределения, а не функций плотности распределения состоит в первую очередь в том, что первый способ носит более общий характер, поскольку не исключает априори возможность дискретного множества исходов. Например, график функции распределения лотереи только с тремя денежными исходами, вероятности наступления которых положительны, представлен на рис. 6.С.1.

Заметим, что при описании лотерей с помощью функций распределения сохраняется линейность их структуры (как, впрочем, и для функций плотности). Например, итоговое распределение денег, $F(\cdot)$, порожденное сложной лотереей $(L_1, \ldots, L_K; \alpha_1, \ldots, \alpha_K)$, представляет собой просто взвешенное среднее распределений, порожденных каждой из лотерей, входящих в данную сложную: $F(x) = \sum_k \alpha_k F_k(x)$, где $F_k(\cdot)$ — распределение выигрышей в лотерее L_k.

С этого момента для описания лотерей на денежных исходах мы будем пользоваться только функциями распределения. В связи с этим под множеством лотерей $\mathscr{L}$ теперь будет пониматься *множество всех функций распределения на неотрицательных суммах денег* или в общем случае на интервале $[a, +\infty)$.

Как и в разделе 6.В, рассмотрим индивида, имеющего рациональные предпочтения $\succsim$, определенные на множестве $\mathscr{L}$. Согласно теореме о су-



$$\left\{\begin{matrix} \text{Prob(1 dollar)} = \dfrac{1}{4} \\ \text{Prob(4 dollars)} = \dfrac{1}{2} \\ \text{Prob(6 dollars)} = \dfrac{1}{4} \end{matrix}\right\} \to F(x)\begin{cases} 0, \text{ если } & x < 1 \\ \dfrac{1}{4}, \text{ если } & x \in [1,\ 4) \\ \dfrac{3}{4}, \text{ если } & x \in [4,\ 6) \\ 1, \text{ если } & x \geq 6 \end{cases}$$

Рис. 6.C.1. Функция распределения

ществовании ожидаемой полезности в случае исходов, описываемых непрерывной переменной, каждой неотрицательной сумме денег можно приписать значение полезности $u(x)$, такое что любую лотерею $F(\cdot)$ можно оценить функцией полезности $U(\cdot)$, имеющей вид

$$U(F) = \int u(x)dF(x). \tag{6.C.1}$$

Соотношение (6.C.1) — не что иное, как прямое распространение формы ожидаемой полезности на непрерывный случай. Функция полезности Неймана — Моргенштерна $U(\cdot)$ представляет собой математическое ожидание значений $u(x)$ на множестве реализаций величины x. В дискретном случае, описанном в разделе 6.B, $u(x)$ принимала значения $(u_1, \ldots, u_N)$[12]. Заметим, что, как и ранее, функция $U(\cdot)$ линейна по $F(\cdot)$.

Основное достоинство представления предпочтений с помощью ожидаемой полезности состоит в том, что такое представление сохраняет очень удобную форму математического ожидания, делая полезность от денежных лотерей чувствительной не только к среднему, но и к моментам распределения денежных выигрышей более высокого порядка (см. наглядный квадратичный пример в упражнении 6.C.2).

Важно проводить различие между функцией полезности $U(\cdot)$, определенной на лотереях, и функцией полезности $u(\cdot)$, определенной на конкретных суммах денег. По этой причине мы будем называть $U(\cdot)$ — *функци-*

[12] При данной функции распределения $F(x)$ ожидаемое значение функции $\varphi(x)$ равно $\int \varphi(x)dF(x)$. В случае когда функция $F(\cdot)$ имеет соответствующую функцию плотности $f(x)$, это выражение можно записать в виде $\int \varphi(x)f(x)dx$. Заметим также, что для простоты записи мы не указываем пределы интегрирования, когда интеграл берется по всему множеству возможных реализаций x.

ей ожидаемой полезности Неймана — Моргенштерна, а $u(\cdot)$ — *функцией полезности Бернулли*[13].

Общие аксиомы, изложенные в разделе 6.В, позволяют описать предпочтения ожидаемой полезностью, но не налагают никаких ограничений на функцию полезности Бернулли $u(\cdot)$. Однако аналитическая мощь ожидаемой полезности в значительной степени зависит от вида функции полезности Бернулли $u(\cdot)$, поскольку она отражает важные экономические аспекты выбора потребителя. Для простоты в рассматриваемом здесь случае денежных исходов имеет смысл считать, что функция $u(\cdot)$ является *возрастающей* и *непрерывной*[14]. Далее мы всюду будем исходить из того, что оба эти предположения выполнены.

В действительности, есть еще одно условие — *ограниченность* (сверху и снизу) функции $u(\cdot)$. Для того чтобы продемонстрировать обоснованность условия ограниченности функции полезности сверху (для ограниченности снизу можно привести аналогичные аргументы), мы обратимся к знаменитому *Санкт-Петербургскому парадоксу*. Предположим, что функция $u(\cdot)$ не ограничена, так что для любого целого числа m существует сумма денег x_m, такая что $u(x_m) > 2^m$. Рассмотрим следующую лотерею: подбрасываем монету до тех пор, пока не выпадет решка; если это происходит на m-м подбрасывании, то лотерея дает выигрыш x_m. Поскольку вероятность этого исхода равна $1/2^m$, то ожидаемая полезность от такой лотереи составляет $\sum_{m=1}^{\infty} u(x_m)(1/2^m) \geq \sum_{m=1}^{\infty} (2^m)(1/2^m) = +\infty$. Но это означает, что индивид должен предпочесть отдать все свое богатство за возможность сыграть в такую лотерею, что совершенно нелепо (а сколько готовы были бы заплатить вы?)[15].

Далее этот раздел мы посвятим изучению важного понятия *несклонности к риску*, его формулировке в терминах функции полезности Бернулли $u(\cdot)$ и способах измерения[16].

Несклонность к риску и способы ее измерения

Концепция несклонности к риску формирует один из наиболее важных аналитических подходов к экономическому анализу выбора в условиях неопределенности, и в этой книге мы его применяем всякий раз, когда сталкиваемся с неопределенностью. Начнем наше обсуждение несклонности к риску с общего определения, в котором, вообще говоря, не предполагается существования функции ожидаемой полезности.

[13] Эта терминология не стандартизирована. Зачастую функцией полезности Неймана — Моргенштерна или функцией ожидаемой полезности называют $u(\cdot)$. Однако мы предпочитаем, чтобы функция $u(\cdot)$ имела свое собственное имя, и поэтому называем ее функцией Бернулли в честь Даниила Бернулли, впервые ее отметившего.

[14] В приложениях иногда делается исключение из предпосылки о непрерывности в точке $x = 0$: в этом случае полагают $u(0) = -\infty$.

[15] На практике большинство широко используемых функций полезности не ограничено. А парадоксального результата удается избежать, поскольку класс распределений, изучаемых в каждом конкретном приложении, ограничен одним. Заметим также, что если все же считать, что $u(\cdot)$ определена на интервале $(-\infty, \infty)$, то тогда любая функция $u(\cdot)$, не являющаяся константой, не может быть одновременно вогнутой и ограниченной (сверху и снизу).

[16] Классическими в этой области считаются работы (Arrow, 1971) и (Pratt, 1964).

Определение 6.C.1. Индивид *несклонен к риску* (или демонстрирует *несклонность к риску*), если для любой лотереи $F(\cdot)$ вырожденная лотерея, дающая сумму денег $\int x dF(x)$, с определенностью по крайней мере не хуже, чем сама лотерея $F(\cdot)$. Если индивиду всегда (т. е. для любой лотереи $F(\cdot)$) безразлично, какую из двух данных лотерей выбрать, то говорят, что он *нейтрален к риску*. Наконец, будем говорить, что индивид *строго несклонен к риску*, если эти лотереи для него эквивалентны только в том случае, если они одинаковы (т. е. когда $F(\cdot)$ является вырожденной лотереей).

Если предпочтения индивида можно представить функцией ожидаемой полезности с функцией полезности Бернулли $u(x)$, то непосредственно из данного определения следует, что индивид не склонен к риску тогда и только тогда, когда

$$\int u(x) dF(x) \leq u\left(\int x dF(x)\right) \text{ для всех лотерей } F(\cdot). \qquad (6.C.2)$$

Неравенство (6.B.2) называется *неравенством Йенсена* и служит определением вогнутой функции (см. раздел M.C математического приложения). Следовательно, в рамках теории ожидаемой полезности мы видим, что несклонность к риску эквивалентна вогнутости функции $u(\cdot)$, а строгая несклонность к риску — строгой вогнутости функции $u(\cdot)$. И это интуитивно понятно: действительно, строгая вогнутость означает, что предельная полезность денег убывает. Таким образом, при любом уровне богатства x выигрыш в полезности от дополнительного доллара меньше (по абсолютной величине), чем снижение уровня полезности в результате уменьшения богатства на один доллар. Отсюда следует, что не стоит идти на риск равновероятного выигрыша или проигрыша одного доллара. Это проиллюстрировано на рис. 6.C.2(a): мы рассматриваем игру, в которой можно выиграть или проиграть 1 доллар, имея первоначальное богатство 2 доллара. Полезность Неймана — Моргенштерна от этой игры равна $\frac{1}{2}u(1) + \frac{1}{2}u(3)$, что строго меньше, чем полезность от первоначального гарантированного богатства $u(2)$.

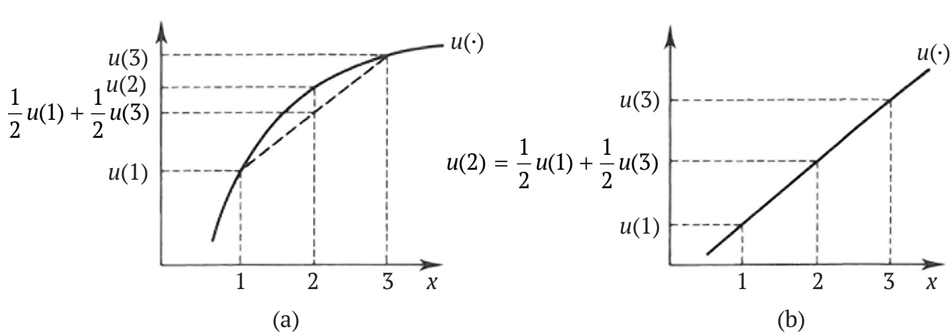


Рис. 6.C.2. Несклонность к риску (a) и нейтральность к риску (b)

Для нейтрального к риску индивида, максимизирующего полезность, условие (6.C.2) должно выполняться как *равенство* для всех $F(\cdot)$. Следовательно, индивид нейтрален к риску тогда и только тогда, когда его бернуллевская функция полезности от денег $u(\cdot)$ линейна. На рис. 6.C.2(b) изображен график функции полезности (Неймана — Моргенштерна), соответствующей описанной выше игре для индивида, нейтрального к риску. В данном случае для индивида игра, дающая ожидаемый уровень богатства в 2 доллара, эквивалентна игре, по которой можно гарантированно получить 2 доллара. В определении 6.C.2 приведены две важные концепции, используемые для анализа несклонности к риску.

Определение 6.C.2. Для данной функции полезности Бернулли $u(\cdot)$ определим следующие концепции:

1) *Гарантированный эквивалент* лотереи $F(\cdot)$, обозначаемый $c(F, u)$, — это такая сумма денег, что для индивида безразлично, участвовать в лотерее $F(\cdot)$ или получить сумму денег $c(F, u)$ с определенностью, т. е.

$$u\big(c(F,\ u)\big) = \int u(x)dF(x). \tag{6.C.3}$$

2) Для любой фиксированной суммы денег x и положительного числа ε *вероятностная премия*, обозначаемая $\pi(x, \varepsilon, u)$, представляет собой превышение вероятности выигрыша по сравнению со справедливой игрой, такое что для индивида гарантированный исход x эквивалентен игре с двумя исходами, $x + \varepsilon$ и $x - \varepsilon$, т. е.

$$u(x) = \left(\frac{1}{2} + \pi(x,\ \varepsilon,\ u)\right)u(x+\varepsilon) + \left(\frac{1}{2} - \pi(x,\ \varepsilon,\ u)\right)u(x-\varepsilon). \tag{6.C.4}$$

Данные концепции проиллюстрированы на рис. 6.C.3. На рис. 6.C.3(a) показано построение $c(F, u)$ для игры с равновероятным получением 1 и 3 дол-

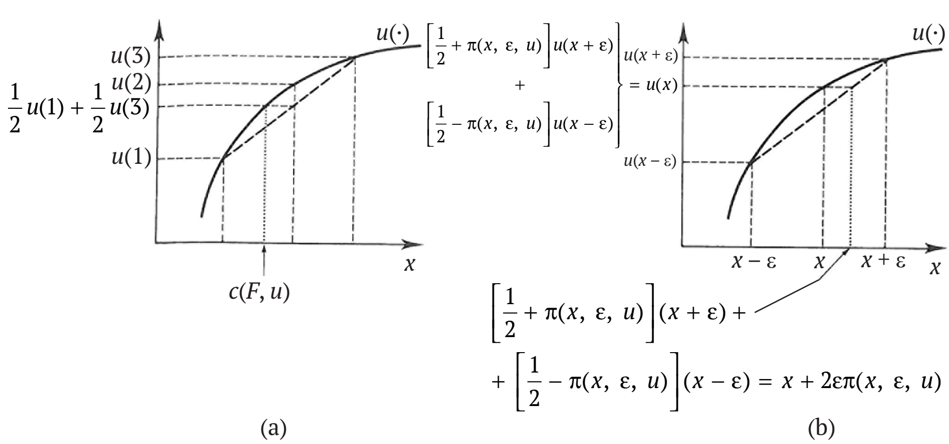


Рис. 6.C.3. Гарантированный эквивалент (a) и вероятностная премия (b)

ларов. Обратите внимание, что $c(F, u) < 2$, а это означает, что индивид готов отказаться от некоторого ожидаемого дохода в обмен на гарантированный исход. В действительности выполнение неравенства $c(F,\ u) \le \int x dF(x)$ для всех $F(\cdot)$ эквивалентно тому, что индивид не склонен к риску. В этом нетрудно убедиться: поскольку $u(\cdot)$ по предположению не убывает, то

$$c(F,\ u) \le \int x dF(x) \Leftrightarrow u\left(c(F,\ u)\right) \le u\left(\int x dF(x)\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \int u(x) dF(x) \le u\left(\int x dF(x)\right),$$

где последнее соотношение следует из определения $c(F, u)$.

На рис. 6.C.3(b) представлено построение $\pi(x,\ \varepsilon,\ u)$. Как мы видим, $\pi(x, \varepsilon, u) > 0$, т. е. индивиду должна быть предложена игра с бóльшим ожидаемым выигрышем, чем при справедливой игре, для того чтобы он согласился в ней участвовать. В действительности выполнение соотношения $\pi(x, \varepsilon, u) \ge 0$ для всех x и $\varepsilon > 0$ также эквивалентно несклонности к риску (см. упражнение 6.C.3).

Все эти факты сведены воедино в следующем утверждении.

Утверждение 6.C.1. Предположим, что индивид максимизирует ожидаемую полезность с функцией полезности Бернулли $u(\cdot)$, определенной на денежных суммах. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) Индивид не склонен к риску.
2) Функция полезности $u(\cdot)$ вогнута[17].
3) $c(F,\ u) \le \int x dF(x)$ для всех $F(\cdot)$.
4) $\pi(x, \varepsilon, u) \ge 0$ для всех x и ε.

Использование концепции несклонности к риску проиллюстрировано в примерах 6.C.1–6.C.3.

Пример 6.C.1 (*страхование*). Рассмотрите строго не склонного к риску индивида, имеющего первоначальное богатство w, который сталкивается с риском потерять сумму D долларов. Вероятность потери составляет π. Однако у индивида есть возможность приобрести страховку: единица страховки стоит q долларов и дает выплату в 1 доллар в случае наступления страхового случая. Таким образом, если индивид приобретет α единиц страховки, то его богатство составит $w - \alpha q$ в случае отсутствия потерь и $w - \alpha q - D + \alpha$ в противном случае. Заметим (это нам понадобится при дальнейшем обсуждении), что таким образом ожидаемое богатство индивида равно $w - \pi D + \alpha(\pi - q)$. Цель индивида заключается в том, чтобы выбрать оптимальный уровень α, который определяется из задачи максимизации ожидаемой полезности:

$$\max_{\alpha \ge 0} (1 - \pi) u(w - \alpha q) + \pi u(w - \alpha q - D + \alpha).$$

[17] Напомним, что если функция $u(\cdot)$ дважды дифференцируема, то вогнутость эквивалентна выполнению условия $u''(x) \le 0$ для всех x.

Если α^* — оптимальная величина страхового покрытия, то она должна удовлетворять условию первого порядка:

$$-q(1-\pi)u'\left(w-\alpha^* q\right)+\pi(1-q)u'\left(w-D+\alpha^*(1-q)\right)\leq 0,$$

$$\text{и } -q(1-\pi)u'\left(w-\alpha^* q\right)+\pi(1-q)u'\left(w-D+\alpha^*(1-q)\right)\leq 0, \text{ если } \alpha^*>0.$$

Предположим теперь, что цена единицы страховки q *актуарно справедлива* в том смысле, что она равна ожидаемым издержкам страховой компании, т. е. $q = \pi$. Тогда условия первого порядка можно преобразовать к виду

$$u'\left(w-D+\alpha^*(1-\pi)\right)-u'\left(w-\alpha^*\pi\right)\leq 0,$$

$$\text{и } u'\left(w-D+\alpha^*(1-\pi)\right)-u'\left(w-\alpha^*\pi\right)=0, \text{ если } \alpha^*>0.$$

Поскольку $u'(w-D) > u'(w)$, то должно быть выполнено $\alpha^* > 0$, и, следовательно,

$$u'\left(w-D+\alpha^*(1-\pi)\right)=u'\left(w-\alpha^*\pi\right).$$

В силу того что $u'(\cdot)$ — строго убывающая функция, отсюда следует

$$w-D+\alpha^*(1-\pi)=w-\alpha^*\pi,$$

что эквивалентно

$$\alpha^*=D.$$

Таким образом, *если страховка актуарно справедлива, то индивид страхуется полностью*. Соответственно итоговое богатство индивида составляет $w - \pi D$ независимо от того, понесет он потери или нет.

Приведенное доказательство страхования на всю сумму потерь основано на использовании условий первого порядка, без которых, вообще говоря, можно было обойтись. Заметим, что при $q = \pi$ ожидаемое богатство индивида составляет $w - \pi D$ при любом α. А поскольку $\alpha = D$ позволяет ему достичь уровня богатства $w - \pi D$ с определенностью, то из определения несклонности к риску напрямую следует, что для данного индивида это значение α является оптимальным. ■

Пример 6.C.2 (*спрос на рисковый актив*). *Актив* — это право на получение финансового дохода в будущем. Предположим, что имеется два актива: безрисковый актив, имеющий доходность 1 на каждый вложенный доллар, и рисковый актив, доходность от единицы вложений в который является случайной величиной z. Случайная величина доходности z имеет функцию распределения $F(z)$, удовлетворяющую условию $\int z dF(z) > 1$, т. е. ожидаемая доходность по рисковому активу превышает доходность по безрисковому.

Индивид имеет первоначальное богатство w, которое он может распределить между двумя данными активами. Обозначим через α и β суммы вложений в рисковый и безрисковый активы соответственно. Таким образом, при любой реализации случайной величины z инвестиционный *портфель* (α, β) приносит доход $\alpha z + \beta$. При этом, безусловно, должно быть выполнено условие $\alpha + \beta = w$.

Вопрос заключается в том, как выбрать величины α и β. Ответ зависит от функции распределения $F(\cdot)$, богатства w и функции полезности Бернулли $u(\cdot)$. Задача максимизации полезности индивида имеет вид

$$\max_{\alpha,\beta\geq 0}\int u(\alpha z+\beta)dF(z) \text{ при } \alpha+\beta=w.$$

Эту задачу можно эквивалентно представить как задачу максимизации $\int u(w+\alpha(z-1))dF(z)$ при условии $0 \le \alpha \le w$. Если обозначить через α^* оптимальную величину вложений в рисковый актив, то эта величина должна удовлетворять условиям первого порядка Куна — Таккера[18]:

$$\varphi(\alpha^*) = \int u'\left(w + \alpha^*[z-1]\right)(z-1)dF(z) \begin{cases} \le 0, & \text{если } \alpha^* < w, \\ \ge 0, & \text{если } \alpha^* > 0. \end{cases}$$

Заметим, что из условия $\int z dF(z) > 1$ следует, что $\varphi(0) > 0$, а это означает, что $\alpha^* = 0$ не удовлетворяет условиям первого порядка. Таким образом, мы можем сделать вывод, что в оптимальном портфеле $\alpha^* > 0$. Общий принцип, проиллюстрированный на этом примере, гласит, что *если риск благоприятен, то не склонный к риску индивид всегда вложит хотя бы небольшую сумму денег в рисковый актив*.

Аналогичный принцип справедлив и для примера 6.C.1, если страховка не является актуарно справедливой. В упражнении 6.C.1 вас просят показать, что если $q > \pi$, то индивид не будет страховаться полностью (т. е. возьмет на себя часть риска). ■

Пример 6.C.3 (*обобщенная задача формирования портфеля инвестиций*). В предыдущем примере мы определили функцию $U(\alpha, \beta)$, следующим образом зависящую от портфеля инвестиций (α, β): $U(\alpha, \beta) = \int u(\alpha z + \beta)dF(z)$. Заметим, что тогда $U(\cdot)$ — возрастающая, непрерывная и вогнутая функция полезности. Теперь обобщим рассмотренную выше задачу на случай N активов (один из которых может быть безрисковым). Пусть актив n имеет доходность z_n на единицу инвестированных в него средств. Доходности активов совместно распределены в соответствии с функцией распределения $F(z_1, \ldots, z_N)$. Тогда полезность владения портфелем активов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ составляет

$$U(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) = \int u(\alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_N z_N)dF(z_1, \ldots, z_N).$$

Данная функция полезности от портфелей, определенная на $\mathbb{R}^N_+$, также является возрастающей, непрерывной и вогнутой (см. упражнение 6.C.4). Это означает, что формально мы можем трактовать активы как обычные товары и применять к ним теорию спроса, изложенную в главах 2 и 3. Обратите внимание, в частности, на тот факт, что несклонность к риску приводит к выпуклости кривых безразличия (на множестве портфелей). ■

Предположим, что исходами лотерей являются не денежные суммы, а векторы физических благ. Формально пространство исходов тогда представляет собой потребительское множество $\mathbb{R}^L_+$ (причем все предыдущее изложение можно рассматривать как специальный случай, когда благо единственно). В этой более общей постановке формулировка концепции несклонности к риску, приведенная в определении 6.C.1, абсолютно корректна. Более того, если существует функция полезности Бернулли $u: \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$, то тогда несклонность к риску по-прежнему эквивалентна вогнутости функции $u(\cdot)$. Следовательно, здесь мы получаем еще одно обоснование предположения о выпуклости, которое мы обсуждали в главе 3: в рамках предпосылок теоремы о существовании ожидаемой полезности выпуклость предпочтений

[18] Целевая функция задачи вогнута по α, поскольку из вогнутости $u(\cdot)$ следует, что $\int u''\left(w + \alpha(z-1)\right)(z-1)^2 dF(z) \le 0$.

относительно детерминированных величин физических товаров должна быть выполнена, если для любой лотереи, выигрышами по которой являются товарные наборы, индивид всегда предпочитает гарантированное получение среднего товарного набора лотерее с таким ожидаемым выигрышем.

В упражнении 6.С.5 вас просят показать, что если предпочтения на лотереях с товарными выигрышами демонстрируют несклонность к риску, то тогда при данных ценах товаров индуцированные предпочтения на денежных лотереях (когда решение о потребление принимается после реализации того или иного состояния мира, т. е. когда уровень богатства индивида определен) также характеризуются несклонностью к риску. Таким образом, можно построить теорию несклонности к риску на базе лотерей, определенных на итоговом потреблении благ.

Мера несклонности к риску

Теперь, когда мы знаем, что означает несклонность к риску, мы можем попытаться оценить степень несклонности к риску. Начнем с формулировки одной из важных мер несклонности к риску и обсуждения некоторых ее свойств.

Определение 6.С.3. Для (дважды дифференцируемой) функции полезности Бернулли $u(\cdot)$, определенной на денежных суммах, *коэффициент абсолютной несклонности к риску Эрроу — Пратта* в точке x определяется следующим образом: $r_A(x) = -u''(x)/u'(x)$.

Меру несклонности к риску Эрроу — Пратта можно обосновать так. Мы знаем, что нейтральность к риску эквивалентна линейности функции $u(\cdot)$, т. е. $u''(x) = 0$ для всех x. Следовательно, представляется вполне логичным, что степень несклонности к риску связана с *кривизной* графика функции $u(\cdot)$. На рис. 6.С.4 в качестве примера мы изобразили два графика функций Бернулли, $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$, пронормированные (с помощью выбора начала координат и единиц измерения) таким образом, что уровень полезности и предельные полезности в точке x у данных функций равны. Гарантированный эквивалент при незначительном риске со средним x для функции $u_2(\cdot)$ меньше, чем для $u_1(\cdot)$, что говорит об увеличении несклонности к риску с ростом кривизны графика функции полезности Бернулли в точке x. Одной из возможных мер кривизны графика функции полезности Бернулли в точке x является вторая производная функции $u''(x)$, однако ее нельзя считать корректной мерой, поскольку она неинвариантна к положительному линейному преобразованию функции полезности. Самая простая модификация, позволяющая устранить этот недостаток и сделать меру

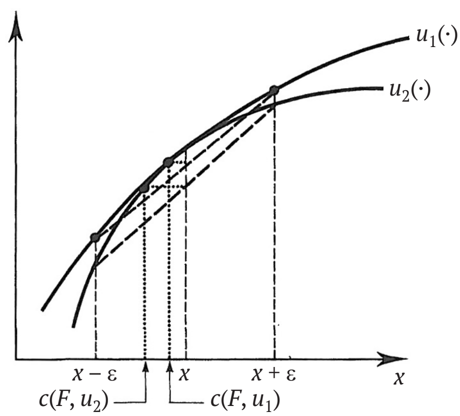


Рис. 6.С.4. Разная степень несклонности к риску

инвариантной, — разделить вторую производную функции полезности на первую: $u''(x)/u'(x)$. И если изменим знак так, чтобы получить положительное число для возрастающей и вогнутой функции $u(\cdot)$, мы получим в точности меру Эрроу — Пратта.

Более четкое обоснование того, что $r_A(x)$ характеризует степень несклонности к риску, можно получить, рассмотрев фиксированное богатство x и исследовав поведение вероятностной премии $\pi(x, \varepsilon, u)$ при $\varepsilon \to 0$ (для простоты запишем ее как $\pi(\varepsilon)$). Дважды дифференцируя тождество (6.B.4), характеризующее $\pi(\cdot)$, по ε (в предположении, что $\pi(\cdot)$ дифференцируема) и оценивая производную в точке $\varepsilon = 0$, получим $4\pi'(0)u'(x) + u''(x) = 0$. Следовательно,

$$r_A(x) = 4\pi'(0).$$

Таким образом, $r_A(x)$ характеризует норму роста вероятностной премии в условиях определенности при незначительном риске, описываемом ε[19]. Ниже мы обнаружим еще ряд подобных интерпретаций меры Эрроу — Пратта.

Заметим, что, дважды проинтегрировав $r_A(\cdot)$, можно восстановить функцию полезности $u(\cdot)$ с точностью до констант. Постоянные интегрирования не играют роли, поскольку функция полезности Бернулли определена только с точностью до двух констант (начала координат и единиц измерения). Таким образом, мера несклонности к риску Эрроу — Пратта $r_A(\cdot)$ полностью характеризует поведение индивида в условиях неопределенности.

Пример 6.C.4. Рассмотрим функцию полезности $u(x) = -e^{-ax}$ при $a > 0$. Тогда $u'(x) = ae^{-ax}$ и $u''(x) = -a^2e^{-ax}$. Следовательно, $r_A(x, u) = a$ для всех x. Тогда из приведенных выше рассуждений следует, что общий вид функции полезности Бернулли с мерой абсолютной несклонности к риску Эрроу — Пратта, равной константе $a > 0$ для всех x, будет следующим: $u(x) = -\alpha e^{-ax} + \beta$ при некотором $\alpha > 0$ и β. ■

Имея на вооружении меру несклонности к риску, мы можем использовать ее в упражнениях сравнительной статики. Рассмотрим две стандартные ситуации: сравнение отношения к риску разных индивидов с различными функциями полезности и сравнение отношения к риску некоторого индивида при разных уровнях богатства.

Сравнение индивидов

В каком случае, имея две бернуллевские функции полезности $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$, мы можем сказать, что индивид с функцией полезности $u_2(\cdot)$ однозначно *более не склонен к риску*, чем индивид с функцией полезности $u_1(\cdot)$? Существует несколько возможных подходов к ответу на этот вопрос, которые представляются вполне разумными:

(1) $r_A(x, u_2) \geq r_A(x, u_1)$ для всех x.

(2) Существует возрастающая вогнутая функция $\psi(\cdot)$, такая что $u_2(x) = \psi\left(u_1(x)\right)$ для всех x, т. е. функция $u_2(\cdot)$ представляет собой вогнутое преобразование

[19] Аналогичный вывод взаимосвязи $r_A(\cdot)$ с нормой изменения гарантированного эквивалента при незначительном риске см. в упражнении 6.C.20.

функции $u_1(\cdot)$. (Другими словами, можно сказать, что $u_2(\cdot)$ «более вогнута», чем $u_1(\cdot)$.)

(3) $c(F, u_2) \le c(F, u_1)$ для любой лотереи $F(\cdot)$.

(4) $\pi(x, \varepsilon, u_2) \ge \pi(x, \varepsilon, u_1)$ для любых x и ε.

(5) Если индивид с функцией полезности u_2 считает, что лотерея $F(\cdot)$ по крайней мере не хуже, чем безрисковый исход $\bar{x}$, то индивид с функцией полезности $u_1(\cdot)$ также полагает, что $F(\cdot)$ по крайней мере не хуже $\bar{x}$, т. е. из $\int u_2(x)dF(x) \ge u_2(\bar{x})$ следует, что $\int u_1(x)dF(x) \ge u_1(\bar{x})$ для любых $F(\cdot)$ и $\bar{x}$[20].

В действительности все эти утверждения эквивалентны.

Утверждение 6.C.2. Определения (1)–(5), характеризующие отношение «более не склонен к риску чем», эквивалентны.

Доказательство. Мы не будем приводить полное доказательство утверждения, оставив доказательство некоторых его частей в качестве упражнения (см. упражнения 6.C.6 и 6.C.7). Здесь мы установим только эквивалентность утверждений (1) и (2) в предположении дифференцируемости функций полезности.

Покажем сначала, что соотношение $u_2(x) = \psi\left(u_1(x)\right)$ всегда будет выполнено для некоторой возрастающей функции $\psi(\cdot)$. Это верно просто в силу того, что $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$ с ординалистской точки зрения идентичны (бóльшие суммы денег предпочитаются меньшим). Дифференцируя это соотношение (дважды), получим

$$u_2'(x) = \psi'\left(u_1(x)\right)u_1'(x)$$

и

$$u_2''(x) = \psi'\left(u_1(x)\right)u_1''(x) + \psi''\left(u_1(x)\right)\left(u_1'(x)\right)^2.$$

Поделив обе части последнего соотношения на $u_2'(x) > 0$ и воспользовавшись первым соотношением, получим, что коэффициент Эрроу — Пратта для второго индивида равен:

$$r_A(x,\ u_2) = r_A(x,\ u_1) - \frac{\psi''\left(u_1(x)\right)}{\psi'\left(u_1(x)\right)}u_1'(x).$$

Таким образом, $r_A(x, u_2) \ge r_A(x, u_1)$ для всех x тогда и только тогда, когда $\psi''(u_1) \le 0$ для всех u_1 в области значений $u_1(\cdot)$. ■

Отношение «более не склонен к риску чем» представляет собой *частичное упорядочение* бернуллевских функций полезности; оно является транзитивным, но далеко не полным. Как правило, две функции полезности Бернулли, $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$, оказываются несравнимыми, т. е. для некото-

[20] Другими словами, любой риск, на который готов пойти индивид с функцией полезности $u_2(\cdot)$, по сравнению с определенностью также будет приемлем и для индивида с функцией полезности $u_1(\cdot)$.

рого x выполнено $r_A(x, u_1) > r_A(x, u_2)$, но при этом $r_A(x', u_1) < r_A(x', u_2)$ для некоторого другого $x' \neq x$.

Пример 6.C.2 (продолжение). Вернемся к обсуждению задачи выбора оптимального портфеля инвестиций из безрискового и рискового активов, которую мы начали рассматривать в примере 6.C.2. Предположим теперь, что имеются два индивида с бернуллевскими функциями полезности $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$, и обозначим через α_1^* и α_2^* соответствующий оптимальный уровень инвестиций в рисковый актив. Покажем, что если индивид с функцией полезности $u_2(\cdot)$ более не склонен к риску, чем индивид с функцией полезности $u_1(\cdot)$, то $\alpha_2^* < \alpha_1^*$, т. е. второй индивид вкладывает в рисковый актив меньшую сумму денег, чем первый.

Вспоминая проведенные ранее рассуждения, запишем задачу поиска оптимального распределения средств между активами для индивида с функцией полезности $u_1(\cdot)$:

$$\max_{0 \le \alpha \le w} \int u_1(w - \alpha + \alpha z) dF(z).$$

Предполагая, что решение внутреннее, получим следующее условие первого порядка:

$$\int (z-1) u_1'\left(w + \alpha_1^*[z-1]\right) dF(z) = 0. \tag{6.C.5}$$

Аналогичное соотношение выполнено и для индивида с функцией полезности $u_2(\cdot)$:

$$\varphi_2(\alpha_2^*) = \int (z-1) u_2'\left(w + \alpha_2^*[z-1]\right) dF(z) = 0. \tag{6.C.6}$$

Как мы знаем, из вогнутости функции $u_2(\cdot)$ следует, что функция $\varphi_2(\cdot)$ является убывающей. Таким образом, если мы покажем, что $\varphi_2(\alpha_1^*) < 0$, то это будет означать выполнение искомого результата: $\alpha_2^* < \alpha_1^*$. Итак, поскольку $u_2(x) = \psi\left(u_1(x)\right)$, имеем

$$\varphi_2(\alpha_1^*) = \int (z-1) \psi'\left(u_1\left(w + \alpha_1^*[z-1]\right)\right) u_1'\left(w + \alpha_1^*[z-1]\right) dF(z) < 0. \tag{6.C.7}$$

Для того чтобы понять последнее неравенство, следует обратить внимание на то, что подынтегральное выражение в (6.C.7) отличается от соответствующего выражения в (6.C.5) множителем $\psi'(\cdot)$, который представляет собой положительную убывающую функцию от z (как вы помните, условие, что индивид с функцией полезности $u_2(\cdot)$ более несклонен к риску, чем индивид с функцией полезности $u_1(\cdot)$, означает, что существует возрастающая вогнутая функция $\psi(\cdot)$, т. е. ее производная $\psi'(\cdot)$ является положительной и убывающей). Следовательно, в интеграле (6.C.7) относительно меньший вес приписывается положительным значениям $(z-1)u_1'\left(w + \alpha_1^*[z-1]\right)$, получаемым при $z > 1$, по сравнению с отрицательными значениями, реализующимися при $z < 1$. А поскольку в интеграле (6.C.5) положительные и отрицательные значения подынтегрального выражения в сумме дают нуль, то в (6.C.7) «перевешивают» отрицательные значения. Таким образом, мы получили искомый результат. ■

Сравнение по уровню богатства

Обычно считается, что более состоятельные индивиды готовы пойти на больший риск, чем те, что беднее. Хотя в основе этого могут лежать различия функций полезности индивидов, однако наиболее вероятно, что источник такого различия кроется в том, что более богатые индивиды «могут позволить себе рискнуть». В этом разделе мы обсудим следствия условия, приведенного в определении 6.C.4.

Определение 6.C.4. Функция полезности Бернулли $u(\cdot)$, определенная на денежных суммах, демонстрирует *убывающую абсолютную несклонность к риску*, если $r_A(x, u)$ является убывающей функцией от x.

Индивиды, предпочтения которых удовлетворяют условию убывания абсолютной несклонности к риску, с ростом богатства готовы пойти на больший риск. Рассмотрим два уровня первоначального богатства $x_1 > x_2$. Обозначим приращение (или снижение) уровня богатства через z. Тогда индивид оценивает риск при уровнях богатства x_1 и x_2, ориентируясь на бернуллевские функции полезности $u_1(z) = u(x_1 + z)$ и $u_2(z) = u(x_2 + z)$ соответственно. Сравнение отношения индивида к риску при изменении уровня богатства сводится по существу к сравнению функций полезности $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$, т. е. к задаче, которую мы только что обсуждали в предыдущем разделе. Если $u(\cdot)$ характеризуется убывающей абсолютной несклонностью к риску, то $r_A(z, u_2) \geq r_A(z, u_1)$ для всех z. А это условие (1) утверждения 6.C.2. Следовательно, результат утверждения 6.C.3 непосредственно следует из утверждения 6.C.2.

Утверждение 6.C.3. Следующие свойства эквивалентны:

1) Функция полезности Бернулли $u(\cdot)$ демонстрирует убывающую абсолютную несклонность к риску.
2) При $x_2 < x_1$ $u_2(z) = u(x_2 + z)$ является вогнутым преобразованием $u_1(z) = u(x_1 + z)$.
3) Для любой лотереи $F(z)$ гарантированный эквивалент лотереи, сформированной путем добавления рисковой составляющей z к уровню богатства x, равный сумме c_x, для которой выполнено $u(c_x) = \int u(x + z)dF(z)$, таков, что разность $(x - c_x)$ убывает по x. Другими словами, чем выше уровень богатства x, тем меньше индивид готов заплатить, чтобы избежать риска.
4) Вероятностная премия $\pi(x, \varepsilon, u)$ убывает по x.
5) Для любой лотереи $F(z)$, если $\int u(x_2 + z)dF(z) \geq u(x_2)$ и $x_2 < x_1$, то $\int u(x_1 + z)dF(z) \geq u(x_1)$.

Упражнение 6.C.8. Пусть бернуллевская функция полезности $u(\cdot)$ характеризуется убыванием абсолютной несклонности к риску. Покажите, что в модели спроса на активы из примера 6.C.2 (и продолжения примера 6.C.2) оптимальное распределение ресурсов между рисковым и безрисковым активами таково, что с ростом богатства объем вложений в рисковый актив возрастает (т. е. рисковый актив является нормальным благом).

Предпосылка об убывании абсолютной несклонности к риску дает и много других важных экономических результатов, касающихся поведения индивидов в отношении риска. В приложениях она зачастую недостаточна сильна, но поскольку она очень удобна с аналитической точки зрения, то ее «усиливают» предпосылкой о *невозрастании относительной несклонности к риску*.

Для лучшего понимания концепции относительной несклонности к риску следует обратить внимание на то, что концепция абсолютной несклонности к риску основана на сравнении отношения к рисковым проектам, исходами которых являются *выигрыши или потери* текущего богатства *в абсолютном выражении*. Представляет интерес и вопрос оценки рисковых проектов, исходами которых являются выигрыши и проигрыши *в процентах* от текущего богатства. Концепция относительной несклонности к риску как раз и позволяет ответить на этот вопрос.

Пусть параметр $t > 0$ характеризует *пропорциональное* увеличение или уменьшение богатства. Тогда индивид с бернуллевской функцией полезности $u(\cdot)$ и первоначальным богатством x может оценить риск (в процентном отношении к текущему богатству) с помощью функции полезности $\tilde{u}(t) = u(tx)$. Первоначальному уровню богатства соответствует $t = 1$. Как нам уже известно, при небольшом изменении риска в окрестности точки $t = 1$ степень несклонности к риску характеризуется величиной $\tilde{u}''(1)/\tilde{u}'(1)$. А поскольку, как нетрудно заметить, $\tilde{u}''(1)/\tilde{u}'(1) = xu''(x)/u'(x)$, то мы приходим к концепции, сформулированной в определении 6.C.5.

Определение 6.C.5. Для данной бернуллевской функции полезности $u(\cdot)$ *коэффициент относительной несклонности к риску* в точке x равен $r_R(x, u) = -xu''(x)/u'(x)$.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как эта мера меняется при изменении богатства. Свойство *невозрастания относительной несклонности к риску* говорит о том, что с ростом богатства индивид становится менее не склонным к риску по отношению к играм, которые пропорциональны его богатству. Это условие является более сильным, чем условие убывания абсолютной несклонности к риску. Действительно, $r_R(x, u) = xr_A(x, u)$, поэтому не склонный к риску индивид с убывающей относительной несклонностью к риску всегда будет характеризоваться также убыванием абсолютной несклонности к риску, но обратное, вообще говоря, неверно.

Как и ранее, проанализируем различные следствия данной концепции. В утверждении 6.C.4 приведены соотношения, аналогичные утверждению 6.C.3.

Утверждение 6.C.4. Следующие условия для функции полезности Бернулли $u(\cdot)$, определенной на денежных суммах, эквивалентны:

1) $r_R(x, u)$ убывает по x.
2) При $x_2 < x_1$ $\tilde{u}_2(t) = u(tx_2)$ является вогнутым преобразованием $\tilde{u}_1(t) = u(tx_1)$.

3) Для любой лотереи $F(t)$ при $t > 0$ гарантированный эквивалент лотереи $\bar{c}_x$, определенный как $u(\bar{c}_x) = \int u(tx)dF(t)$, таков, что отношение $x/\bar{c}_x$ убывает по x.

Доказательство. Здесь мы покажем только, что из (1) следует (3). Рассмотрим некоторое распределение $F(t)$ при $t > 0$ и для любого x определим $u_x(t) = u(tx)$. Пусть $c(x)$ — обычный гарантированный эквивалент (в соответствии с определением 6.C.2): $u_x(c(x)) = \int u_x(t)dF(t)$. Заметим, что $-u_x''(t)/u_x'(t) = -(1/t)tx\left[u''(tx)/u'(tx)\right]$ для любого x. Следовательно, если (1) выполнено, то индивид с функцией полезности $u_{x'}(\cdot)$ более не склонен к риску, чем индивид с функцией полезности $u_x(\cdot)$ при $x' > x$. Таким образом, по утверждению 6.C.2 $c(x') > c(x)$, и можно сделать вывод, что функция $c(\cdot)$ является возрастающей. Далее, согласно определению $u_x(\cdot)$, $u_x\left(c(x)\right) = u\left(xc(x)\right)$ и, кроме того,

$$u_x\left(c(x)\right) = \int u_x(t)dF(t) = \int u(tx)dF(t) = u(\bar{c}_x).$$

Отсюда следует, что $\bar{c}_x/x = c(x)$ и отношение $x/\bar{c}_x$ убывает, что и требовалось доказать. ■

Пример 6.C.2 (продолжение). В упражнении 6.C.11 вас просят показать, что если $r_R(x, u)$ убывает по x, то доля богатства, инвестируемая в рисковый актив $\gamma = \alpha/w$, возрастает с ростом богатства индивида w, а если $r_R(x, u)$ возрастает по x, то имеет место обратный результат. Если же $r_R(x, u)$ — константа, не зависящая от x, то тогда доля дохода, инвестируемая в рисковый актив, не зависит от w (специальные случаи функции полезности $u(\cdot)$ приведены в упражнении 6.C.12). Модели с постоянной относительной несклонностью к риску можно часто встретить в теории финансов, поскольку эта предпосылка позволяет существенно упростить модель с аналитической точки зрения. Если выполнена предпосылка о постоянной относительной несклонности к риску, то не имеет значения, как именно богатство в экономике в целом и его распределение между индивидами изменяются с течением времени, поскольку выбор портфеля с точки зрения доли инвестируемого бюджета остается неизменным (до тех пор пока отдача по безрисковому активу и распределение доходности рискового актива также остаются неизменными). ■

6.D. Сравнение распределений в терминах доходности и риска

В этом разделе мы продолжим изучение денежных лотерей. В отличие от раздела 6.C, где мы сравнивали функции полезности, здесь наша цель — сравнение распределения выигрышей. Существует два наиболее естественных способа сравнения исходов: по уровню доходности и по дисперсии доходности. В связи с этим мы попытаемся обозначить две идеи: во-первых, распределение $F(\cdot)$ дает однозначно более высокую доходность, чем распределение $G(\cdot)$, и, во-вторых, распределение $F(\cdot)$ однозначно менее рисковое, чем распределение G(·). Эти идеи называются соответственно *стохастическим доминированием первого порядка* и *стохастическим доминированием второго порядка*[21].

Далее в рассуждениях мы будем предполагать, что распределения $F(\cdot)$ таковы, что $F(0) = 0$ и $F(x) = 1$ для некоторого x.

Стохастическое доминирование первого порядка

Мы хотим придать четкий смысл выражению «распределение $F(\cdot)$ дает однозначно более высокую доходность, чем распределение $G(\cdot)$». Можно предложить по крайней мере два критерия. Во-первых, мы можем попытаться оценить, предпочтет ли любой индивид, максимизирующий ожидаемую полезность и считающий, что чем больше денег, тем лучше, распределение $F(\cdot)$ распределению $G(\cdot)$. Во-вторых, мы можем проверить, будет ли для любой суммы денег x вероятность получения суммы денег, по крайней мере равной x, выше при распределении $F(\cdot)$, чем при распределении $G(\cdot)$. К счастью, оба указанных критерия приводят к одной и той же концепции.

Определение 6.D.1. Будем говорить, что имеет место *стохастическое доминирование первого порядка* распределения $F(\cdot)$ над распределением $G(\cdot)$, если для любой неубывающей функции $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ выполнено

$$\int u(x)dF(x) \geq \int u(x)dG(x).$$

Утверждение 6.D.1. Стохастическое доминирование первого порядка распределения $F(\cdot)$ над распределением $G(\cdot)$ имеет место тогда и только тогда, когда $F(x) \leq G(x)$ для любого x.

Доказательство. Рассмотрим распределения $F(\cdot)$ и $G(\cdot)$ и обозначим их разность через $H(x) \equiv F(x) - G(x)$. Предположим, что $H(\bar{x}) > 0$ для некоторого $\bar{x}$. Тогда мы можем определить неубывающую функцию $u(\cdot)$ следующим образом: $u(x) = 1$ при $x > \bar{x}$ и $u(x) = 0$ при $x \leq \bar{x}$. Для данной функции выполнено $\int u(x)dH(x) = -H(\bar{x}) < 0$, что доказывает утверждение в одну сторону.

Для доказательства обратного утверждения мы сначала без доказательства воспользуемся тем фактом, что достаточно установить эквивалентность для дифференцируемых функций полезности $u(\cdot)$. Как и ранее, обозначим через $H(x) \equiv F(x) - G(x)$ разность функций распределения $F(\cdot)$ и $G(\cdot)$. Применяя интегрирование по частям, получим

$$\int u(x)dH(x) = \left[u(x)H(x)\right]_0^\infty - \int u'(x)H(x)dx.$$

Поскольку $H(0) = 0$ и $H(x) = 0$ для больших x, то первый член в последнем выражении равен нулю. Отсюда следует, что $\int u(x)dH(x) \geq 0$

[21] Эти концепции были введены в работе (Rothschild, Stiglitz, 1970).

(что эквивалентно $\int u(x)dF(x) - \int u(x)dG(x) \geq 0$) тогда и только тогда, когда $\int u'(x)H(x)dx \leq 0$. Таким образом, если $H(x) \leq 0$ для всех x и функция $u(\cdot)$ возрастает, то $\int u'(x)H(x)dx \leq 0$, откуда следует искомое утверждение. ■

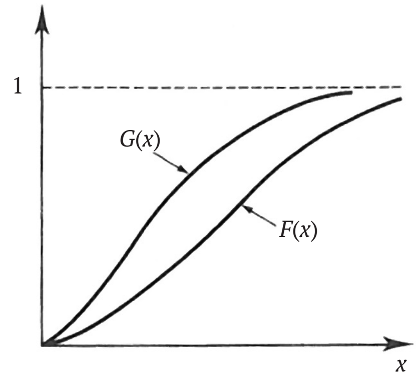


Рис. 6.D.1. Стохастическое доминирование первого порядка распределения $F(\cdot)$ над распределением $G(\cdot)$

В упражнении 6.D.1 вас просят убедиться в справедливости утверждения 6.D.1 для случая лотерей на трех возможных исходах. На рис. 6.D.1 представлены распределения $F(\cdot)$ и $G(\cdot)$. В ситуации, изображенной на рисунке, имеет место доминирование первого порядка распределения $F(\cdot)$ над распределением $G(\cdot)$, поскольку график функции $F(\cdot)$ расположен ниже графика функции $G(\cdot)$. Следует отметить два важных момента: во-первых, из стохастического доминирования первого порядка *не* следует, что доходность в каждом возможном состоянии в доминирующем распределении выше, чем в доминируемом. Так, на рисунке множество возможных исходов для двух данных распределений одинаково. Во-вторых, хотя из доминирования первого порядка распределения $F(\cdot)$ над распределением $G(\cdot)$ следует, что средняя доходность x при распределении $F(\cdot)$, $\int xdF(x)$, больше, чем при распределении $G(\cdot)$, обратное неверно, т. е. из сравнения математических ожиданий *нельзя* сделать вывод о стохастическом доминировании первого порядка одного распределения над другим, поскольку важно все распределение в целом (см. упражнение 6.D.3).

Пример 6.D.1. Рассмотрим сложную лотерею, исходами которой на первом шаге являются реализации величины x, имеющей функцию распределения $G(\cdot)$, а на втором шаге к исходам x первого шага добавляется «положительный вероятностный сдвиг». Другими словами, если исход x реализуется на первом шаге, то на втором шаге итоговая сумма денег составляет $x + z$, причем функция распределения величины z, $H_x(z)$, такова, что $H_x(0) = 0$. Таким образом, $H_x(\cdot)$ порождает *итоговую* доходность, равную по крайней мере x с вероятностью единица. (Заметим, что распределения, применяемые к различным x, могут быть разными.)

Обозначим через $F(\cdot)$ результирующее редуцированное распределение. Тогда для любой неубывающей функции $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ выполнено

$$\int u(x)dF(x) = \int\left[\int u(x+z)dH_x(z)\right]dG(x) \geq \int u(x)dG(x).$$

Таким образом, имеет место доминирование первого порядка распределения $F(\cdot)$ над распределением $G(\cdot)$.

Пример подобной ситуации проиллюстрирован на рис. 6.D.2. На рис. 6.D.2(a) распределение $G(\cdot)$ равновероятно дает исходы 1 и 4 доллара. Исход 1 доллар затем

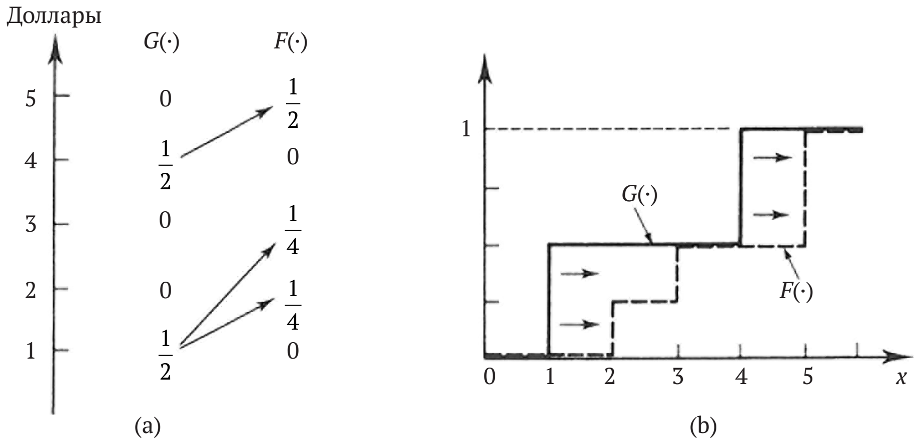


Рис. 6.D.2. Стохастическое доминирование первого порядка распределения $F(\cdot)$ над распределением $G(\cdot)$

может равновероятно привести к исходам 2 и 3 доллара, а исход 4 доллара приводит к исходу 5 долларов с вероятностью единица. На рисунке 6.D.2(b) продемонстрировано, что $F(x) \le G(x)$ для любого x.

Можно показать, что выполнено и обратное соотношение: если имеет место стохастическое доминирование первого порядка распределения $F(\cdot)$ над распределением $G(\cdot)$, то распределение $F(\cdot)$ можно получить из $G(\cdot)$, используя подход, аналогичный тому, который был продемонстрирован в примере. Таким образом, это позволяет получить еще один способ характеризации отношения стохастического доминирования первого порядка. ■

Стохастическое доминирование второго порядка

Стохастическое доминирование первого порядка затрагивает такие сравнения, как «больше/лучше» и «меньше/хуже». Теперь же мы хотим сравнить распределения в терминах относительного *риска* или *дисперсии*. Для того чтобы не смешивать этот вопрос с выбором между доходностью и риском, *далее в этом разделе мы ограничимся рассмотрением распределений с одинаковым средним*.

Итак, для двух данных распределений $F(\cdot)$ и $G(\cdot)$ с одинаковым средним (т. е. при $\int x dF(x) = \int x dG(x)$) будем говорить, что распределение $G(\cdot)$ рискованнее распределения $F(\cdot)$, если любой не склонный к риску индивид предпочитает распределение $F(\cdot)$ распределению $G(\cdot)$. Это условие формализовано в определении 6.D.2.

Определение 6.D.2. Для любых двух распределений $F(\cdot)$ и $G(\cdot)$ с одинаковым средним будем говорить, что имеет место *стохастическое доминирование второго порядка распределения* $F(\cdot)$ над распределением $G(\cdot)$ (или распределение $F(\cdot)$ *менее рисковое*, чем распределение $G(\cdot)$), если для любой неубывающей вогнутой функции $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ выполнено

$$\int u(x) dF(x) \ge \int u(x) dG(x).$$

В примере 6.D.2 приведен альтернативный способ характеристики стохастического доминирования второго порядка.

Пример 6.D.2. *Преобразование, сохраняющее среднее* (*математическое ожидание*). Рассмотрим следующую сложную лотерею: на первом шаге мы имеем лотерею на исходах x с функцией распределения $F(\cdot)$. На втором шаге мы рандомизируем каждый возможный исход x так, что результирующий выигрыш описывается случайной величиной $x + z$, причем случайная величина z имеет функцию распределения $H_x(z)$ и характеризуется нулевым средним (т. е. $\int z dH_x(z) = 0$). Таким образом, математическое ожидание случайной величины $x + z$ равно математическому ожиданию случайной величины x. Обозначим результирующую редуцированную лотерею через $G(\cdot)$. В том случае, когда лотерея $G(\cdot)$ может быть получена из лотереи $F(\cdot)$ подобным образом для некоторого распределения $H_x(\cdot)$, мы будем говорить, что лотерея $G(\cdot)$ может быть получена из лотереи $F(\cdot)$ с помощью *преобразования, сохраняющего среднее*.

Например, пусть согласно распределению $F(\cdot)$ можно равновероятно получить 2 и 3 доллара. На втором шаге исходу 2 доллара может соответствовать равновероятное получение 1 и 3 долларов, а исходу 3 доллара — равновероятное получение 2 и 4 долларов. Тогда распределение $G(\cdot)$ приписывает вероятность $^1/_4$ четырем исходам: 1, 2, 3 и 4 доллара. Данные распределения $F(\cdot)$ и $G(\cdot)$ проиллюстрированы на рис. 6.D.3.

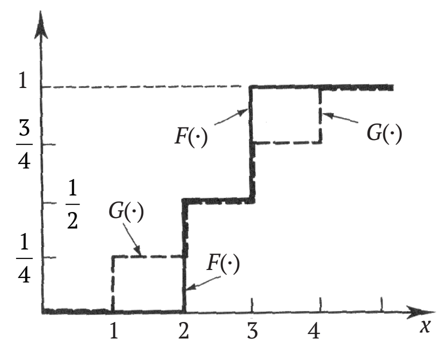


Рис. 6.D.3. Распределение $G(\cdot)$ получено из распределения $F(\cdot)$ с помощью преобразования, сохраняющего среднее

Описанное двухшаговое преобразование сохраняет среднее при распределении $G(\cdot)$ таким же, как и при распределении $F(\cdot)$. Кроме того, если функция $u(\cdot)$ вогнута, то мы можем сделать вывод, что

$$\int u(x)dG(x) = \int\left(\int u(x+z)dH_x(z)\right)dF(x) \le \int u\left(\int (x+z)dH_x(z)\right)dF(x) = \int u(x)dF(x),$$

а это означает стохастическое доминирование второго порядка распределения $F(\cdot)$ над распределением $G(\cdot)$. Оказывается, что обратное также верно: если имеет место стохастическое доминирование второго порядка распределения $F(\cdot)$ над распределением $G(\cdot)$, то распределение $G(\cdot)$ получено из распределения $F(\cdot)$ с помощью преобразования, сохраняющего среднее. Следовательно, эквивалентно можно пользоваться двумя способами описания соотношения между распределениями: *1) $G(\cdot)$ получено из $F(\cdot)$ с помощью преобразования, сохраняющего среднее, 2) имеет место стохастическое доминирование второго порядка распределения $F(\cdot)$ над распределением $G(\cdot)$.* ■

В примере 6.D.3 приведена еще одна иллюстрация преобразования, сохраняющего среднее.

Пример 6.D.3. *Элементарное увеличение риска*. Будем говорить, что $G(\cdot)$ представляет собой элементарное увеличение риска по сравнению с $F(\cdot)$, если лотерея $G(\cdot)$ порождена лотереей $F(\cdot)$ путем перемещения всей массы, которую $F(\cdot)$ приписывает интервалу $[x', x'']$, в граничные точки x' и x'' так, что среднее сохраняется неизменным. Это проиллюстрировано на рис. 6.D.4. Элементарное увеличение риска представляет собой преобразование, сохраняющее среднее. (В упражнении 6.D.3 вас

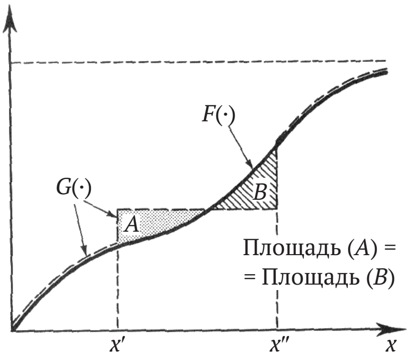


Рис. 6.D.4. $G(\cdot)$ — элементарное увеличение риска по отношению к $F(\cdot)$

просят убедиться в том, что если $G(\cdot)$ — элементарное увеличение риска по сравнению с $F(\cdot)$, то тогда имеет место стохастическое доминирование второго порядка распределения $F(\cdot)$ над распределением $G(\cdot)$.) ■

Можно предложить и другой подход к концепции стохастического доминирования второго порядка. Предположим, у нас есть два распределения, $F(\cdot)$ и $G(\cdot)$, с одинаковым средним. Напомним, что для простоты мы считаем, что $F(\bar{x}) = G(\bar{x}) = 1$ для некоторого $\bar{x}$. Интегрируя по частям (и не забывая о равенстве средних), получим

$$\int_0^{\bar{x}} \left(F(x) - G(x)\right) dx = -\int_0^{\bar{x}} x d\left(F(x) - G(x)\right) + \left(F(\bar{x}) - G(\bar{x})\right)\bar{x} = 0. \quad (6.D.1)$$

Таким образом, площади под графиками функций распределения на интервале $[0, \bar{x}]$ одинаковы. В силу этого факта области, отмеченные буквами A и B на рис. 6.D.4, должны иметь одинаковую площадь. Заметим, что для функций распределения, изображенных на рисунке, отсюда следует, что

$$\int_0^{x} G(t)dt \geq \int_0^{x} F(t)dt \text{ для всех } x. \quad (6.D.2)$$

Оказывается, выполнение условия (6.D.2) эквивалентно стохастическому доминированию второго порядка распределения $F(\cdot)$ над распределением $G(\cdot)$[22]. В качестве иллюстрации предположим, что распределения $F(\cdot)$ и $G(\cdot)$ имеют одинаковое среднее и график функции $G(\cdot)$ изначально расположен выше графика функции $F(\cdot)$, а затем всюду ниже (как на рис. 6.D.3 и 6.D.4). Тогда в силу (6.D.1) условие (6.D.2) должно быть выполнено и мы можем сказать, что распределение $G(\cdot)$ более рисковое, чем $F(\cdot)$. В качестве более сложного примера рассмотрим рис. 6.D.5, на котором представлены два распределения с одинаковым средним, удовлетворяющие условию (6.D.2). Для того

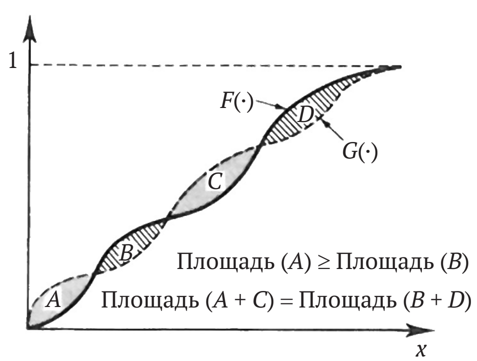


Рис. 6.D.5. Стохастическое доминирование второго порядка распределения $F(\cdot)$ над распределением $G(\cdot)$

[22] Мы не будем здесь приводить доказательство этого факта. Его можно провести в том же ключе, что и доказательство утверждения 6.D.1, но учитывая, что придется интегрировать по частям дважды, а также принимая во внимание соотношение (6.D.1).

чтобы убедиться в выполнении соотношения (6.D.2), обратите внимание, что площадь A должна быть по крайней мере не меньше площади B и, кроме того, площади B + D и A + C должны быть равны (что следует из равенства средних (т. е. (6.D.1))).

Утверждение 6.D.2 мы приводим без доказательства.

Утверждение 6.D.2. Рассмотрим два распределения, $F(\cdot)$ и $G(\cdot)$, с одинаковым средним. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) Имеет место стохастическое доминирование второго порядка распределения $F(\cdot)$ над распределением $G(\cdot)$.
2) Распределение $G(\cdot)$ получено из распределения $F(\cdot)$ с помощью преобразования, сохраняющего среднее.
3) Выполнено условие (6.D.2).

В упражнении 6.D.4 вас просят убедиться в эквивалентности этих утверждений с помощью вероятностного симплекса.

6.E. Полезность, зависящая от состояния

В этом разделе мы несколько расширим анализ, представленный в двух предыдущих разделах. Так, в разделах 6.C и 6.D мы считали, что индивид заботится только о распределении получаемых денежных сумм. По сути это означает, что причина, по которой реализовался тот или иной платеж, не играет никакой роли. Однако если эта причина связана, например, с состоянием здоровья, то данная предпосылка вряд ли будет выполнена[23]. Функция распределения денежных выплат тогда не может больше считаться подходящим объектом индивидуального выбора. В этом разделе мы рассмотрим ситуации, в которых индивид заботится не только о денежной отдаче, но и о лежащих в основе ее получения событиях или *состояниях природы*, которые ее порождают.

Начнем с рассмотрения удобной структуры для моделирования случайных альтернатив, которая, в отличие от лотерей, учитывает лежащее в основе событий состояние природы (в нашей книге мы еще не раз столкнемся с подобной ситуацией, особенно в главе 19).

Описание неопределенности в случае зависимости от состояния

В разделах 6.C и 6.D мы моделировали рисковую альтернативу с помощью функции распределения на денежных исходах. Однако зачастую нам известно, что случайный исход порожден некоторыми обусловливающими его причинами. Тогда возможно более детальное описание рисковых альтернатив. Например, денежный платеж по страховому полису может за-

[23] С другой стороны, если это такое событие, как цена некоторой ценной бумаги в инвестиционном портфеле, то данное предположение довольно хорошо характеризует реальное положение дел.

висеть от того, произошел или нет некоторый несчастный случай, выигрыш по акциям предприятия – от того, находится ли экономика в состоянии рецессии, а выигрыш в казино – от числа, которое выпало на рулетке.

Будем называть лежащие в основе выигрыша причины *состояниями* или *состояниями природы*. Обозначим множество всех состояний через S, а отдельное состояние – индексом $s \in S$. Для простоты будем считать, что множество состояний конечно и каждому состоянию s соответствует объективная вероятность $\pi_S > 0$ его наступления. Кроме того, для простоты обозначим также через S совокупное количество состояний.

Тогда рисковая альтернатива с (неотрицательным) денежным доходом может быть описана как функция, отображающая реализации состояний природы во множество возможных денежных выигрышей $\mathbb{R}_+$. На формальном языке такая функция называется *случайной переменной*.

Определение 6.Е.1. *Случайная переменная* — это функция $g : S \to \mathbb{R}_+$, отображающая состояния на денежные исходы[24].

Каждая случайная переменная $g(\cdot)$ порождает денежную лотерею, описываемую функцией распределения $F(\cdot)$, где $F(x) = \sum_{\{s: g(s) \le x\}} \pi_s$ для всех x. Заметим, что при переходе от описания неопределенности с помощью случайной переменной к лотереям теряется некоторая информация: мы не можем отследить, какое именно состояние порождает тот или иной денежный исход, — остается только агрегированная вероятность наступления каждого денежного исхода.

Поскольку мы считаем множество S конечным, то мы можем описать случайную переменную с денежными выигрышами вектором $(x_1, \ldots, x_S)$, где x_S — неотрицательный денежный выигрыш в состоянии s. Тогда множество всех неотрицательных случайных переменных представляет собой $\mathbb{R}^S_+$.

Предпочтения, зависящие от состояния, и обобщенная функция ожидаемой полезности

Базовым элементом нашей теории теперь является рациональное отношение предпочтения $\succsim$ на множестве $\mathbb{R}^S_+$ всех неотрицательных случайных переменных. Заметим, что с формальной точки зрения эта постановка аналогична той, которую мы рассматривали в главах 2–4 при изучении потребительского выбора. И схожесть между ними не только внешняя. Если мы определим товар s как случайную переменную, которая приносит один доллар тогда и только тогда, когда наступает состояние природы s (такой товар называется *контингентным* (обусловленным) в главе 19), то множество всех неотрицательных случайных переменных $\mathbb{R}^S_+$ — это не что иное, как множество всех неотрицательных наборов этих S контингентных товаров.

[24] Для определенности ограничимся рассмотрением исходов, представляющих собой неотрицательные суммы денег. Однако, как и в разделе 6.В, мы могли бы с тем же успехом рассматривать произвольное множество исходов C вместо $\mathbb{R}_+$.

Было бы очень удобно, если бы в духе предыдущих разделов этой главы мы могли бы представить предпочтения индивида на множестве денежных исходов с помощью функции полезности, которая обладает *обобщенной формой ожидаемой полезности*.

Определение 6.E.2. Отношение предпочтения $\succsim$ можно представить с помощью *обобщенной функции ожидаемой полезности*, если для любого состояния $s \in S$ существует функция $u_s : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, такая что для любых наборов $(x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{R}^s_+$ и $(x_1', \ldots, x_s') \in \mathbb{R}^s_+$,

$$(x_1, \ldots, x_S) \succsim (x_1', \ldots, x_S') \text{ тогда и только тогда,}$$
$$\text{когда } \sum_s \pi_s u_s(x_s) \geq \sum_s \pi_s u_s(x_s').$$

Для лучшего понимания определения 6.E.2 стоит вспомнить анализ, проведенный в разделе 6.B. Если имеет значение только распределение денежных выигрышей и если предпочтения на денежных распределениях удовлетворяют аксиомам ожидаемой полезности, то теорема о существовании ожидаемой полезности говорит о возможности представления предпочтений функцией ожидаемой полезности, *не зависящей от состояния* (или *одинаковой для всех состояний*) $\sum_s \pi_s u(x_s)$, где $u(\cdot)$ — бернуллевская функция полезности, определенная на денежных суммах[25]. Определение обобщенной функции полезности 6.E.2 предполагает возможность существования разных функций полезности $u_s(\cdot)$ в каждом состоянии мира.

Прежде чем перейти к рассмотрению условий существования обобщенной функции ожидаемой полезности, покажем, насколько она полезна в качестве инструмента анализа выбора в условиях неопределенности. Удобство этой функции полезности в первую очередь обусловлено поведением множеств безразличия в окрестности *линии неопределенности*, множества случайных переменных, которые дают одну и ту же сумму денег в каждом состоянии природы. На рис. 6.E.1 в пространстве $\mathbb{R}^s_+$ для случая $S = 2$ и вогнутых функций полезности $u_s(\cdot)$ (как мы увидим далее, вогнутость функций полезности следует из несклонности к риску) изображены предпочтения индивида, зависящие от состояния мира. Линия определенности на рис. 6.E.1 представляет собой множество всех таких точек, для которых выполнено $x_1 = x_2$. Предельная норма замещения в любой точке $(\bar{x}, \bar{x})$ равна $\pi_1 u_1'(\bar{x}) / \pi_2 u_2'(\bar{x})$. Таким образом, наклон кривых безразличия на линии определенности отражает зависимость как от состояния, так и от вероятности наступления этих состояний. В отличие от этой ситуации, в случае функции полезности, не зависящей от состояния

[25] Заметим, что случайная переменная $(x_1, \ldots, x_S)$ порождает денежную лотерею, по которой можно получить выигрыш x_S с вероятностью π_S. Таким образом, ожидаемая полезность от этой лотереи равна $\sum_s \pi_s u(x_s)$.

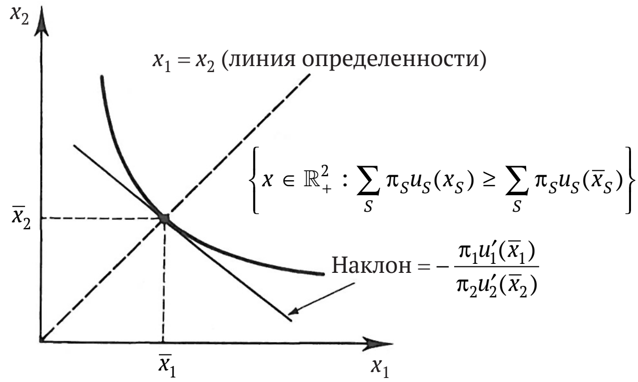


Рис. 6.E.1. Предпочтения, зависящие от состояния

(т. е. одинаковой во всех состояниях), предельная норма замещения в любой точке на линии определенности равна отношению вероятностей наступления состояний мира (откуда следует, что этот наклон будет одинаков во всех точках на линии определенности).

Пример 6.E.1. *Страховка в случае функции полезности, зависящей от состояния*. Одно интересное следствие зависимости полезности от состояния можно увидеть на примере актуарно справедливой страховки. Предположим, что возможно только два состояния: состояние 1 — это состояние, когда индивид не несет потерь, и состояние 2 — когда есть потери. (Эта экономическая ситуация аналогична рассмотренной в примере 6.C.1.) Первоначально (т. е. если страховка не приобретается) индивид сталкивается со случайной переменной $(w, w - D)$, описывающей богатство индивида в обоих возможных состояниях. Эта ситуация проиллюстрирована на рис. 6.E.2(a). Мы можем описать страховой контракт случайной переменной $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$, специфицирующей чистое изменение богатства в двух состояниях мира (выплата по страховке минус страховая премия, которую заплатил индивид). Таким образом, если индивид приобретает страховой контракт (z_1, z_2), то его результирующее богатство составляет$(w + z_1, w - D + z_2)$. Страховой полис (z_1, z_2) актуарно справедлив, если ожидаемая выплата по нему равна нулю, т. е. если выполнено условие $\pi_1 z_1 + \pi_2 z_2 = 0$.

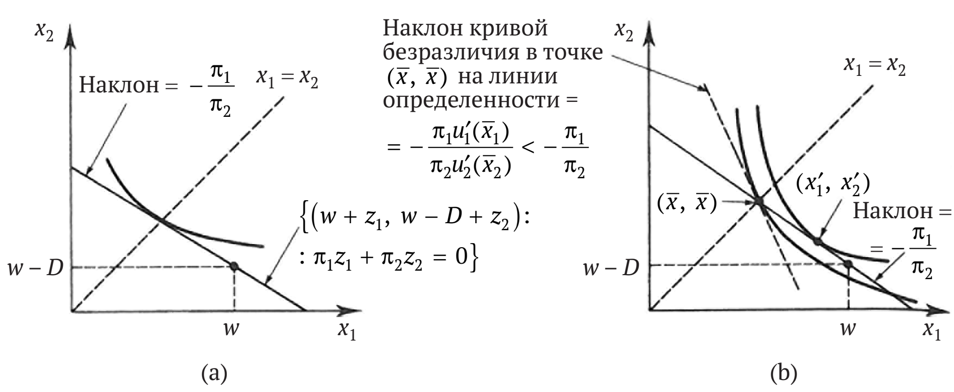


Рис. 6.E.2. Покупка страховки в случае функции полезности, зависящей от состояния.
(a) Функция полезности одинакова во всех состояниях.
(b) Функция полезности, зависящая от состояния

На рис. 6.E.2(a) изображен оптимальный страховой контракт, когда не склонный к риску, максимизирующий ожидаемую полезность индивид с предпочтениями, не зависящими от состояния, может приобрести любой желаемый актуарно справедливый страховой полис. Его бюджетное множество представляет собой прямую линию, изображенную на рисунке. Как мы видели в примере 6.C.2, при таких условиях индивид с функцией полезности, не зависящей от состояния, предпочтет застраховаться полностью. Здесь мы еще раз наглядно убеждаемся в этом результате, поскольку если функция полезности не зависит от состояния, то бюджетная линия касается кривой безразличия в точке, лежащей на линии определенности.

На рис. 6.E.2(b) проиллюстрирован случай предпочтений, зависящих от состояния природы. Теперь индивид предпочитает точку (x_1', x_2') гарантированному исходу $(\overline{x}, \overline{x})$, что обусловлено желанием иметь больший выигрыш в состоянии мира 1, для которого $u_1'(\cdot)$ относительно больше, при меньшем выигрыше в состоянии 2. ■

Существование обобщенной функции ожидаемой полезности

Теперь перейдем к обсуждению условий существования обобщенной функции ожидаемой полезности.

Во-первых, заметим, что поскольку $\pi_s > 0$ для любого s, то мы можем формально включить π_s в определение функции полезности в состоянии мира s. Другими словами, для того чтобы получить обобщенную функцию ожидаемой полезности, достаточно, чтобы существовали такие функции u_s, что

$$(x_1, \ldots, x_s) \succsim (x_1', \ldots, x_s') \text{ тогда и только тогда, когда } \sum_s u_s(x_s) \geq \sum_s u_s(x_s').$$

Если такие функции $u_s(\cdot)$ существуют, то мы можем определить функции $\tilde{u}_s(\cdot) = (1/\pi_s)u_s(\cdot)$ для каждого состояния мира $s \in S$ и тогда получим, что $\sum_s u_s(x_s) \geq \sum_s u_s(x_s')$ тогда и только тогда, когда $\sum_s \pi_s\tilde{u}_s(x_s) \geq \sum_s \pi_s\tilde{u}_s(x_s')$. В связи с этим начиная с этого момента мы будем решать вопрос о существовании аддитивно сепарабельной формы $\sum_s u_s(\cdot)$, и вероятности π_s более не будут фигурировать в проводимом анализе.

Оказывается, что обобщенная функция ожидаемой полезности может быть получена *точно тем же образом*, что и функция ожидаемой полезности в разделе 6.B, если мы соответствующим образом увеличим множество, на котором определены предпочтения[26]. Соответственно теперь можно учитывать возможность того, что в каждом состоянии s денежный выигрыш – это не просто некоторая детерминированная сумма денег x_s, а случайная переменная с функцией распределения $F_s(\cdot)$. Обозначим эти рисковые альтернативы через $L = (F_1, \ldots, F_s)$. Таким образом L — это такая сложная лотерея, призами в которой выступают денежные игры, обусловленные реализацией состояния мира s. Обозначим множество всех таких возможных лотерей через $\mathscr{L}$.

[26] Увеличив область определения еще более, чем предполагается в данном рассмотрении, мы могли бы даже рассматривать существование обобщенной функции ожидаемой полезности как следствие теоремы существования ожидаемой полезности.

Рассмотрим теперь рациональное отношение предпочтения $\succsim$ на множестве $\mathscr{L}$. Заметим, что лотерею $\alpha L + (1-\alpha)L' = \left(\alpha F_1 + (1-\alpha)F_1', \ldots, \alpha F_S + (1-\alpha)F_S'\right)$ можно по-прежнему интерпретировать как редуцированную лотерею, образованную рандомизацией между лотереями L и L', хотя здесь мы имеем дело с редуцированной лотереей в каждом состоянии s. Следовательно, мы можем использовать те же рассуждения, что и в разделе 6.B, и потребовать выполнения аксиомы независимости.

Определение 6.E.3. Отношение предпочтения $\succsim$ на множестве $\mathscr{L}$ удовлетворяет *обобщенной аксиоме независимости*, если для любых L, L', $L'' \in \mathscr{L}$ и $\alpha \in (0, 1)$ выполнено

$$L \succsim L' \text{ тогда и только тогда, когда } \alpha L + (1-\alpha)L'' \succsim \alpha L' + (1-\alpha)L''.$$

Мы можем также ввести предпосылку о непрерывности предпочтений. За исключением другой интерпретации множества $\mathscr{L}$, *аксиома непрерывности* будет иметь тот же вид, что и в разделе 6.B, поэтому здесь мы просто сошлемся на ее формулировку в определении 6.B.3.

Утверждение 6.E.1 (*теорема о существовании обобщенной функции ожидаемой полезности*). Пусть отношение предпочтения $\succsim$ на множестве $\mathscr{L}$ удовлетворяет аксиоме непрерывности и обобщенной аксиоме независимости. Тогда мы можем приписать полезность $u_s(\cdot)$ денежным суммам в каждом состоянии мира s так, что для любых $L = (F_1, \ldots, F_s)$ и $L' = (F_1', \ldots, F_s')$ выполнено

$$L \succsim L' \text{ тогда и только тогда,}$$
$$\text{когда } \sum_s \left(\int u_s(x_s)dF_s(x_s)\right) \geq \sum_s \left(\int u_s(x_s)dF_s'(x_s)\right).$$

Доказательство. Доказательство почти полностью совпадает с доказательством теоремы о существовании функции ожидаемой полезности (утверждение 6.B.2).

Для простоты ограничимся рассмотрением конечного множества денежных исходов $\{x_1, \ldots, x_N\}$. Тогда мы можем отождествить множество $\mathscr{L}$ с множеством Δ^S, где Δ — $(N-1)$-мерный симплекс. Мы хотим показать, что отношение предпочтения $\succsim$ можно представить линейной функцией полезности $U(L)$ на множестве Δ^S. Чтобы убедиться в этом, заметим, что с точностью до аддитивной константы, которой можно пренебречь, функция $U\left(p_1^1, \ldots, p_N^1, \ldots, p_1^S, \ldots, p_N^S\right)$ линейна по своим аргументам, если ее можно представить в виде $U(L) = \sum_{n,s} u_{n,s} p_n^s$ для некоторых значений $u_{n,s}$. В этом случае мы можем записать $U(L) = \sum_s \left(\sum_n u_{n,s} p_n^s\right)$ и тогда, положив $u_s(x_n) = u_{n,s}$, получим в точности искомый вид функции полезности на множестве $\mathscr{L}$.

Выберем $\overline{L}$ и $\underline{L}$, такие что $\overline{L} \succsim L \succsim \underline{L}$ для всех $L \in \mathscr{L}$. Как и в доказательстве утверждения 6.B.2, мы можем определить $U(L)$ соотношением

$$L \sim U(L)\overline{L} + (1 - U(L))\underline{L}.$$

Тогда, применяя обобщенную аксиому независимости аналогично тому, как мы использовали аксиому независимости в доказательстве утверждения 6.B.2, приходим к выводу, что $U(L)$ действительно линейная функция полезности на множестве $\mathscr{L}$. ■

Утверждение 6.E.1 позволяет описать предпочтения на гарантированных исходах $(x_1, \ldots, x_S) \in \mathbb{R}_+^S$ функцией полезности вида $\sum_s u_s(x_s)$, которая обладает двумя свойствами. Во-первых, она аддитивно сепарабельна по состояниям мира. Во-вторых, каждая функция $u_s(\cdot)$ представляет собой бернуллевскую функцию полезности, которая может быть использована для оценки денежных лотерей в состоянии s посредством ожидаемой полезности. В силу второго свойства несклонность к риску (определяемая тем же образом, что и в разделе 6.C) эквивалентна вогнутости каждой функции $u_s(\cdot)$.

Существует другой подход к представлению предпочтений обобщенной функцией ожидаемой полезности, базирующийся на предпочтениях $\succsim$, определенных на множестве $\mathbb{R}_+^S$, который не используется для предпочтений, определенных на более широком множестве. В основе этого подхода лежит так называемая *аксиома условной* (*по событию*) *независимости*.

Определение 6.E.4. Отношение предпочтения $\succsim$ удовлетворяет *аксиоме условной* (*по событию*) *независимости*, если для любого подмножества состояний $E \subset S$ (E называют *событием*) $(x_1, \ldots, x_s)$ и $(x_1', \ldots, x_s')$ отличаются только членами, соответствующими множеству E (т. е. $x_s' = x_s$ при $s \notin E$), то упорядочение наборов $(x_1, \ldots, x_s)$ и $(x_1', \ldots, x_s')$ с точки зрения предпочтений не зависит от (общего) выигрыша в состояниях, не принадлежащих множеству E. Формально предположим, что $(x_1, \ldots, x_s)$, $(x_1', \ldots, x_s')$, $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_s)$ и $(\overline{x}_1', \ldots, \overline{x}_s')$ таковы, что

$$\text{для всех } s \notin E \quad x_s = x_s' \text{ и } \overline{x}_s = \overline{x}_s';$$

$$\text{для всех } s \in E \quad x_s = \overline{x}_s \text{ и } x_s' = \overline{x}_s'.$$

Тогда $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_s) \succsim (\overline{x}_1', \ldots, \overline{x}_s')$ тогда и только тогда, когда $(x_1, \ldots, x_s) \succsim (x_1', \ldots, x_s')$.

Интуитивное содержание этой аксиомы аналогично аксиоме независимости. Она гласит, что, если две случайные переменные в дополнении множества E неразличимы, их упорядочивание может зависеть только от тех значений, которые они принимают на множестве E. Другими словами, вкусы, обусловленные некоторым событием, не могут зависеть от выигрышей, которые можно было бы получить в состояниях мира, которые не реализовались.

Если отношение предпочтения $\succsim$ можно представить с помощью обобщенной функции ожидаемой полезности, то аксиома условной (по событию) независимости выполнена, поскольку $(x_1, \dots, x_S) \succsim (x'_1, \dots, x'_S)$ тогда и только тогда, когда $\sum_s \big(u_s(x_s) - u_s(x'_s)\big) \geq 0$, и любой член этой суммы, такой что $x_s = x'_s$, сокращается. Что касается обратного соотношения, то здесь справедливо утверждение 6.E.2.

Утверждение 6.E.2. Пусть существуют по крайней мере три состояния мира, а предпочтения $\succsim$ на множестве $\mathbb{R}^S_+$ непрерывны и удовлетворяют аксиоме условной (по событию) независимости. Тогда предпочтения $\succsim$ могут быть представлены обобщенной функцией ожидаемой полезности.

Идея доказательства. Полное доказательство утверждения слишком сложно, чтобы приводить его во всех подробностях. Мы хотим показать, что при данных предпосылках предпочтения могут быть представлены аддитивно сепарабельной функцией полезности $\sum_s u_s(x_s)$. Показать это непросто, и это не связано именно с неопределенностью. Условия существования аддитивно сепарабельной функции полезности для непрерывных предпочтений на положительном ортанте евклидова пространства (т. е. в контексте главы 3) хорошо известны и понятны. Оказывается, эти условия формально идентичны аксиоме условной (по событию) независимости (см. упражнение 3.G.4). ■

Хотя аксиома условной (по событию) независимости позволяет представить предпочтения обобщенной функцией ожидаемой полезности $\sum_s \pi_s u_s(x_s)$, следует подчеркнуть, что рандомизация на множестве денежных выигрышей в состоянии мира s в этом подходе не рассматривается, и поэтому мы не можем здесь соотнести несклонность к риску со свойствами функции полезности $u_s(\cdot)$. Таким образом, подход, основанный на обобщенной аксиоме независимости, предполагает не только более строгую основу (предпочтения определены на множестве $\mathscr{L}$, а не на меньшем множестве $\mathbb{R}^S_+$), но и дает более строгие результаты.

6.F. Теория субъективной вероятности

До сих пор, изучая теорию выбора в условиях неопределенности, мы считали, что риск, описываемый посредством численных значений вероятностей, воспринимается индивидом как объективный факт. Но в реальной жизни такое случается довольно редко. Индивиды, как правило, составляют свое мнение о шансах наступления недетерминированных событий, которые необязательно могут быть выражены в количественной форме. Но даже когда речь идет о вероятностях, как, например, в случае, когда врач обсуждает с пациентом вероятности возможных исходов медикаментозного лечения, они зачастую выражаются в неточных *субъективных* оценках.

Было бы очень удобно и с теоретической и с практической точки зрения, если бы мы могли утверждать, что выбор, осуществленный индивидом, был таковым, *как если бы* индивид имел вероятностные ожидания. И даже более того, нам бы хотелось, чтобы хорошо определенные вероятностные ожидания можно было бы выявить, наблюдая выбор индивида. В этом и есть смысл *теории субъективной вероятности*. Данная теория утверждает, что даже если состояния мира не сопоставляются с распознаваемыми объективными вероятностями, но из условий согласованности, налагаемых на предпочтения относительно игр, по-прежнему следует, что индивид ведет себя так, *как если бы* исходам приписывался некоторый уровень полезности, то состояния природы соответствовали бы вероятности их наступления, а решения принимались на основе ожидаемой полезности. Более того, такая рациональность индивидуального поведения с помощью функции ожидаемой полезности может быть представлена единственным образом (с точностью до положительного линейного преобразования функций полезности). Таким образом, данная теория представляет собой обобщение теории ожидаемой полезности, влекущее серьезные последствия. Классической работой по теории субъективной вероятности считается работа (Savage, 1954), которая хорошо написана, но использует довольно сложный математический аппарат. Однако можно значительно продвинуться в понимании данной теории, если ввести в рассмотрение лотереи с объективными случайными исходами. Этот подход был предложен в работе (Anscombe, Aumann, 1963), именно его мы и будем здесь придерживаться.

Начнем, как и в разделе 6.E, с множества состояний $\{1, \ldots, S\}$. Вероятности на множестве $\{1, \ldots, S\}$ не заданы. В действительности нам бы хотелось их *вывести*. Как и ранее, случайная переменная с денежным выигрышем представляет собой вектор $x = (x_1, \ldots, x_S) \in \mathbb{R}_+^S$[27]. Будем также считать, что денежные выигрыши в состояниях мира не детерминированы, а представляют собой денежные лотереи с объективными функциями распределения F_s. Таким образом, наше множество рисковых альтернатив, обозначаемое через $\mathscr{L}$, представляет собой множество всех S-мерных векторов $(F_1, \ldots, F_s)$ функций распределения.

Предположим теперь, что нам дано рациональное отношение предпочтения $\succsim$ на множестве $\mathscr{L}$. Будем считать, что предпочтения $\succsim$ удовлетворяют аксиоме непрерывности и обобщенной аксиоме независимости, сформулированной в разделе 6.E. Тогда в силу утверждения 6.E.1 можно сделать вывод, что существуют функции полезности $u_s(\cdot)$, такие что любой

[27] Для определенности будем рассматривать денежные выигрыши. Однако все последующие рассуждения справедливы и для произвольного множества исходов.

$(x_1, \ldots, x_S) \in \mathbb{R}^S_+$ можно оценить с помощью $\sum_s u_s(x_s)$, где $u_s(\cdot)$ — бернуллевская функция полезности в состоянии мира s.

Существование функций $u_s(\cdot)$ тем не менее не позволяет нам идентифицировать субъективные вероятности. Действительно, для *любого* вектора $(\pi_1, \ldots, \pi_s) >> 0$ мы можем определить $\tilde{u}_s(\cdot) = (1/\pi_s)u_s(\cdot)$ и тогда оценить $(x_1, \ldots, x_s)$ с помощью $\sum_s \pi_s \tilde{u}_s(x_s)$. Что нам нужно, так это найти способ отделить полезность от вероятностей.

Рассмотрим пример. Предположим, игра, позволяющая получить один доллар в состоянии мира 1 и не дающая выигрыша в состоянии мира 2, предпочитается игре, приносящей один доллар в состоянии мира 2 и не дающей выигрыша в состоянии мира 1. Если *нет причины считать, что нумерация состояний оказывает какое-либо воздействие на ценность денег*, то естественно предположить, что индивид оценивает состояние 2 как менее вероятное по сравнению с состоянием 1.

Данный пример предлагает еще один постулат рассматриваемой теории. Предпочтения на денежных лотереях в состоянии мира s должны быть такими же и в любом другом состоянии мира s', т. е. отношение к риску при выборе между играми должно быть одно и то же во всех состояниях мира. Чтобы формализовать это свойство, зададим предпочтения $\succsim_s$ в состоянии мира s, определенные на множестве лотерей в состоянии мира s, следующим образом:

$$F_s \succsim_s F_s', \text{ если } \int u_s(x_s)dF_s(x_s) \geq \int u_s(x_s)dF_s'(x_s).$$

Определение 6.F.1. Предпочтения в состояниях мира $(\succsim_1, \ldots, \succsim_S)$, определенные на лотереях данного состояния, *не зависят от состояния*, если $\succsim_s = \succsim_{s'}$ для любых состояний s и s'.

Если предпочтения не зависят от состояния, то функции полезности $u_s(\cdot)$ и $u_{s'}(\cdot)$ одинаковы с точностью до возрастающего линейного преобразования. Следовательно, существует функция полезности $u(\cdot)$, такая что для всех $s = 1, \ldots, S$

$$u_s(\cdot) = \pi_s u(\cdot) + \beta_s$$

для некоторых $\pi_s > 0$ и β_s. Более того, поскольку мы описываем одни и те же предпочтения, то если мы разделим все π_s и β_s на общий множитель, то можем нормализовать π_s так, чтобы $\sum_s \pi_s = 1$, и эти π_s и будут нашими субъективными вероятностями.

Утверждение 6.F.1 (*теорема о существовании функции субъективной ожидаемой полезности*). Пусть отношение предпочтения $\succsim$ на множестве $\mathscr{L}$ удовлетворяет аксиоме непрерывности и обобщенной аксиоме независимости. Предположим также, что предпочтения индивида не зависят от состояния мира. Тогда существуют вероятности

$(\pi_1, \ldots, \pi_S) >> 0$ и функция полезности $u(\cdot)$, определенная на денежных суммах, такая что для любых $(x_1, \ldots, x_S)$ и $(x'_1, \ldots, x'_S)$ имеем

$$(x_1, \ldots, x_S) \succsim (x'_1, \ldots, x'_S) \text{ тогда и только тогда, когда } \sum_s \pi_s u(x_s) \geq \sum_s \pi_s u(x'_s).$$

Более того, данные вероятности определены единственным образом, а функция полезности единственна с точностью до выбора начала координат и масштаба.

Доказательство. Существование мы уже доказали, а установить единственность вас просят в упражнении 6.F.1. ■

Преимущество представления предпочтений с помощью функции субъективной ожидаемой полезности с практической точки зрения аналогично преимуществам функции объективной ожидаемой полезности, которые мы обсуждали в разделе 6.B, поэтому мы не будем здесь повторяться и заново их перечислять. Главное достоинство данной теории состоит в том, что она дает точную количественную оценку неопределенности, позволяя при этом оставаться в рамках хорошо изученной теории вероятностей.

Но есть и проблемы. Правдоподобность аксиом не может быть полностью отделена от сложности ситуаций выбора. Чем более сложными они становятся, тем с большей натяжкой воспринимаются даже на первый взгляд абсолютно невинные аксиомы. Например, разумно ли считать, что предпочтения, определенные на огромном множестве случайных переменных, должны удовлетворять аксиоме полноты? Или рассмотрим неявную предпосылку (такие предпосылки зачастую наиболее коварны), что ситуация в действительности может быть формализована так, как указано в модели. Это постулирует возможность перечислить все потенциально вероятные состояния мира (или, по крайней мере, привести достаточно дезагрегированную версию этого списка). Таким образом, любая сложность, до сих пор возникавшая на пути построения нашей модели рационального потребителя (т. е. касающаяся транзитивности, полноты и независимости), в данной модели может проявиться особенно сильно.

Существуют также трудности, характерные именно для необъективной природы вероятностей. Обсуждению этого момента посвящен пример 6.F.1.

Пример 6.F.1. Данный пример представляет собой вариант *парадокса Элсберга*[28]. Рассмотрим две урны, которые мы обозначим через R и H, каждая из которых содержит 100 шаров. Шары бывают двух цветов: белые и черные. В урне R находится 49 белых шаров и 51 черный. Количество шаров разного цвета в урне H не специфицировано. Из каждой урны случайным образом вынимается шар, назовем его *R-шар* и *H-шар* соответственно. Цвет вынутых шаров не раскрывается. Теперь рассмотрим две ситуации выбора. В обоих экспериментах индивид должен выбрать либо R-шар, либо H-шар. После того как выбор сделан, объявляется цвет шара. В первой ситуации выбора вручается приз 100 долларов, если выбранный шар оказывается черно-

[28] По работе (Ellsberg, 1961).

го цвета. Во второй ситуации выбора тот же приз вручается, если выбран белый шар. При имеющейся информации в первом эксперименте большинство людей выбирают R-шар. Тогда, если принятие решения основывается на субъективных вероятностях, это должно означать, что H-шар будет белым с вероятностью, превышающей 0,49. Следовательно, во втором эксперименте большинство индивидов должно предпочесть H-шар. Однако оказывается, что в большинстве случаев в реальных экспериментах этого не происходит. Индивид, осуществляющий выбор, понимает, что, выбрав R-шар, он имеет шанс выиграть только в 49% случаев, однако этот шанс «безопаснее» и понятнее. Степень неопределенности, связанная с выбором H-шара, гораздо менее ясна. ■

В работе (Knight, 1921) предложено проводить различие между *риском* и *неопределенностью* в зависимости от того, объективны или нет вероятности наступления состояний мира. В некоторой степени теория субъективной вероятности лишает такое разграничение смысла, сводя всю неопределенность к риску с помощью ожиданий, выраженных в вероятностях. Однако пример 6.F.1 показывает, что все-таки некоторое различие остается, поэтому этот вопрос по-прежнему является полем активных исследований (см., например, (Bewley, 1986), (Gilboa, Schmeidler, 1989)).

Литература

Allais M. 91953). Le comprotement de l'homme retionnel devant le risque, critique des postulats et axioms de l'école Américaine. *Econometrica* **21**: 503–546.

Anscombe F., Aumann R. (1963). A definition of subjective probability. *Annals of Mathematical Statistics* **34**: 199–205.

Arrow K. J. (1971). *Essays in the Theory of Risk Bearing*. Chicago: Markham.

Bewley T. (1986). *Knightian Decision Theory*: Part 1. New Haven: Cowels Foundation Discussion Paper No. 807.

Dekel E. (1986). An axiomatic characterization of preferences under uncertainty: Weakening the independence axiom. *Journal of Economic Theory* **40**: 304–318.

Diamond P., Rothschild M. (1978). *Uncertainty in Economics: Readings and Exercises*. New York: Academic Press.

Ellsberg D. (1961). Risk, ambiguity, and the Savage axioms. *Quarterly Journal of Economics* **75**: 643–669.

Gilboa I., Schmeidler D. (1989). Maximin expected utility with a unique prior. *Journal of Mathematical Economics* **18**: 141–153.

Grether D., Plott C.H. (1979) Economic theory of choice and the preference reversal phenomenon. *American Economic Review* **69**: 623–638.

Green J. (1987). "Making book against oneself", the independence axiom, and nonlinear utility theory. *Quarterly Journal of Economics* **98**: 785–796.

Hey J., Orme C. (1994). Investigating generalizations of expected utility theory using experimental data. *Econometrica* **62**: 1291–1326.

Knight F. (1921). *Risk, Uncertainty and Profit*. Boston, Mass.: Houghton Mifflin. Reprint, London: London School of Economics 1946.

Kreps D. (1988). *Notes on Theory of Choice*. Boulder, Colo.: Westview Press.

Machina M. (1987). Choice under uncertainty: Problems solved and unsolved. *The Journal of Perspectives* **1**: 121–154.

Pratt J. (1964). Risk aversion in the small and in the large. *Econometrica* **32**: 122–136. Reprinted in Diamond and Rothschild.

Rothschild M., Stiglitz J. (1970). Increasing risk I: A definition. *Journal of Economic Theory* **2**: 225–243. Reprinted in Diamond and Rothschild.

Savage L. (1954). *The Foundations of Statistics*. New York: Wiley.

Von Neumann J., Morgenstern O. (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton. N.J.: Princeton University Press.

Упражнения

6.B.1^{A}. В тексте.

6.B.2^{A}. В тексте.

6.B.3^{B}. Покажите, что если множество исходов C конечно и рациональное отношение предпочтения $\succsim$ на множестве лотерей $\mathscr{L}$ удовлетворяет аксиоме независимости, то тогда на множестве $\mathscr{L}$ существуют наилучшая и наихудшая лотереи. То есть мы можем найти лотереи $\overline{L}$ и $\underline{L}$, такие что $\overline{L} \succsim L \succsim \underline{L}$ для всех $L \in \mathscr{L}$.

6.B.4^{B}. Цель этого упражнения состоит в том, чтобы проиллюстрировать, как теория ожидаемой полезности позволяет принимать согласованные решения, имея дело с крайне малыми вероятностями, путем рассмотрения относительно больших вероятностей. Предположим, агентство по безопасности хотело бы выработать критерий, в соответствии с которым должна проводиться эвакуация населения в склонной к наводнениям местности. Пусть вероятность наводнения равна 1%. Существует четыре возможных исхода:

A) В эвакуации нет необходимости, и эвакуация не производится.
B) Эвакуация производится, хотя в ней нет необходимости.
C) Эвакуация производится, когда в ней есть необходимость.
D) Эвакуация не производится, и наводнение приводит к катастрофе.

Предположим, что для агентства гарантированный исход B и лотерея, по которой наступает исход A с вероятностью p и исход D с вероятностью $1 - p$, эквивалентны, а также для агентства эквивалентны гарантированный исход C и лотерея, дающая исход A[29] с вероятностью q и исход D с вероятностью $1 - q$. Предположим, кроме того, что агентство предпочитает исход A исходу D и $p \in (0, 1)$, $q \in (0, 1)$. Будем считать, что все условия теоремы существования функции ожидаемой полезности выполнены.

a) Постройте функцию полезности агентства, имеющую форму ожидаемой полезности.

[29] Опечатка в оригинальном тексте (вместо A было напечатано B). — *Примеч. пер.*

b) Рассмотрите два различных критерия:

Критерий 1. Этот критерий приводит к эвакуации в 90% случаев, когда наводнение происходит, и эвакуация будет произведена без необходимости в 10% случаев, когда наводнения не будет.

Критерий 2. Этот критерий более консервативен. Он приводит к эвакуации в 95% случаев, когда наводнение произойдет, и в 15%[30] случаев эвакуация будет произведена без необходимости, когда наводнения не будет.

Сначала выведите распределение вероятностей на четырех возможных исходах при двух данных критериях. Затем, используя функцию полезности, полученную в пункте (a), определите, какой критерий предпочтет агентство.

6.B.5[B]. Цель этого упражнения — показать, что парадокс Алле совместим с более слабым вариантом аксиомы независимости. Рассмотрим следующую аксиому, известную как *аксиому о промежуточном положении* (см. Dekel, 1986):

Для всех L, L' и $\lambda \in (0, 1)$, если $L \sim L'$, то $\lambda L + (1 - \lambda)L' \sim L$.

Рассмотрим ситуацию с тремя возможными исходами.

a) Покажите, что отношение предпочтения на лотереях, удовлетворяющее аксиоме независимости, также удовлетворяет аксиоме о промежуточном положении.

b) Используя представление предпочтений в симплексе аналогично рис. 6.B.1(b), покажите, что если выполнены аксиома непрерывности и аксиома о промежуточном положении, то кривые безразличия для предпочтений на лотереях будут прямыми линиями. И наоборот, покажите, что если кривые безразличия представляют собой прямые линии, то выполнена аксиома о промежуточном положении. Обязательно ли эти прямые линии должны быть параллельны?

c) Пользуясь результатом пункта (b), покажите, что аксиома о промежуточном положении слабее (носит менее ограничительный характер), чем аксиома независимости.

d) Используя рис. 6.B.7, покажите, что выбор индивида в парадоксе Алле совместим с аксиомой о промежуточном положении, изобразив на рисунке карту безразличия, удовлетворяющую аксиоме о промежуточном положении, и выбор индивида в парадоксе Алле.

6.B.6[B]. Докажите, что индуцированная функция полезности $U(\cdot)$, определенная в последнем параграфе раздела 6.B, выпукла. Приведите пример такого множества исходов и бернуллевской функции полезности, для которых индуцированная функция полезности нелинейна.

[30] Опечатка в оригинальном тексте (вместо 15% было напечатано 5%). — *Примеч. пер.*

6.B.7[A]. Рассмотрите две следующие лотереи:

$$L:\begin{cases}200\ \text{долларов с вероятностью}\ 0,7;\\ 0\ \text{долларов с вероятностью}\ 0,3;\end{cases}$$

$$L':\begin{cases}1200\ \text{долларов с вероятностью}\ 0,1;\\ 0\ \text{долларов с вероятностью}\ 0,9.\end{cases}$$

Обозначим через x_L и $x_{L'}$ суммы денег, полученные с определенностью, которые индивид считает эквивалентными лотереям L и L' соответственно. Покажите, что если предпочтения транзитивны и монотонны, то индивид должен предпочесть лотерею L лотерее L' тогда и только тогда, когда $x_L > x_{L'}$ (*Замечание*: в реальных экспериментах, однако, часто наблюдается обратное: L предпочитается L', но $x_L < x_{L'}$. Подробности см. в работе (Grether, Plott, 1979)).

6.C.1[B]. Рассмотрите задачу выбора страховки, изложенную в примере 6.C.1. Покажите, что если страховка не является актуарно справедливой, а именно $q > \pi$, то индивид не будет страховаться полностью.

6.C.2[B]. **a)** Покажите, что если индивид имеет функцию полезности Бернулли $u(\cdot)$ квадратичного вида

$$u(x) = \beta x^2 + \gamma x,$$

то его полезность от распределения определяется только средним (математическим ожиданием) и дисперсией распределения. (*Замечание*: для вогнутости функции $u(\cdot)$ параметр β должен быть отрицательным. Поскольку функция $u(\cdot)$ тогда убывает при $x > -\gamma/2\beta$, то $u(\cdot)$ имеет смысл рассматривать, только когда в распределении не фигурируют значения больше $-\gamma/2\beta$.)

b) Предположим, что функция полезности $U(\cdot)$ на распределениях имеет вид

$$U(F) = (\text{математическое ожидание } F) - r(\text{дисперсия } F),$$

где $r > 0$. Убедитесь, что без дополнительных ограничений на множество возможных распределений (см. например, упражнение 6.C.19) функция $U(\cdot)$ несовместима с бернуллевской функцией полезности. Приведите пример двух лотерей L и L', определенных на одних и тех же денежных суммах, скажем x' и $x'' > x'$, таких что лотерея L приписывает бо́льшую вероятность исходу x'', чем лотерея L', и тем не менее в соответствии с $U(\cdot)$лотерея L' предпочитается лотерее L.

6.C.3[B]. Докажите, что четыре пункта утверждения 6.C.1 эквивалентны. (*Подсказка*: эквивалентность (1), (2) и (3) уже продемонстрирована. Что касается (4), то докажите, что из (1) следует (4), а из (4) следует $u\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)\geq\frac{1}{2}u(x)+\frac{1}{2}u(y)$ для любых x и y, что в действительности достаточно для доказательства эквивалентности (2).)

6.C.4[B]. Пусть существует N рисковых активов, доходности которых z_n (где $n=1,\ldots,N$) на единицу вложений совместно распределены в соответствии с функцией распределения $F(z_1, \ldots, z_N)$. Предположим также, что все доходности неотрицательны с вероятностью единица. Рассмотрите индивида, имеющего непрерывную возрастающую и вогнутую бернуллевскую функцию полезности $u(\cdot)$, определенную на множестве $\mathbb{R}_+$. Определим функцию полезности $U(\cdot)$ данного индивида на множестве всех неотрицательных портфелей $\mathbb{R}_+^N$ следующим образом:

$$U(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)=\int u(\alpha_1 z_1+\ldots+\alpha_N z_N)dF(z_1, \ldots, z_N).$$

Докажите, что функция $U(\cdot)$ является (a) возрастающей, (b) вогнутой и (c) непрерывной (что доказать сложнее).

6.C.5[A]. Рассмотрите индивида с функцией полезности $u(\cdot)$, определенной на множестве $\mathbb{R}_+^L$, как в главе 3.

a) Объясните, почему вогнутость функции $u(\cdot)$ можно интерпретировать как несклонность индивида к риску по отношению к лотереям, исходами которых являются наборы из L товаров.

b) Предположим теперь, что бернуллевская функция полезности $\tilde{u}(\cdot)$[31], зависящая от богатства, получена из задачи максимизации функции полезности, определенной на наборах товаров при каждом данном уровне богатства w при фиксированных ценах этих товаров. Покажите, что если функция полезности, определенная на множестве товаров, демонстрирует несклонность к риску, то это справедливо и в отношении бернуллевской функции полезности, зависящей от богатства. Проинтерпретируйте полученный результат.

c) Покажите, что утверждение, обратное утверждению из пункта (b), вообще говоря, неверно: существуют невогнутые функции $u:\mathbb{R}_+^L\to\mathbb{R}$, такие что для любого вектора цен полученная бернуллевская функция полезности, зависящая от богатства, демонстрирует несклонность к риску.

6.C.6[B]. Для утверждения 6.C.2

a) докажите эквивалентность условий (2) и (3);

b) докажите эквивалентность условий (3) и (5).

6.C.7[A]. Докажите, что в утверждении 6.C.2 из условия (3) следует условие (4), а из условия (4) следует (1).

6.C.8[A]. В тексте.

[31] Опечатка в оригинальном тексте: вместо $\tilde{u}(\cdot)$ было $u(\cdot)$. — *Примеч. пер.*

6.C.9[B]. (М. Кимбалл). Цель этой задачи — проанализировать последствия неопределенности и мер предосторожности в простой задаче принятия решения относительно потребления и сбережений.

В двухпериодной экономике первоначальное богатство потребителя в первом периоде равно w. Функция полезности потребителя имеет вид

$$g(c_1, c_2) = u(c_1) + v(c_2)^{32},$$

где $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ — вогнутые функции, а c_1 и c_2 — уровень потребления в первом и втором периодах соответственно. Пусть x — объем сбережений потребителя в первом периоде (так что $c_1 = w - x$ и $c_2 = x$), через x_0 обозначим оптимальное значение x в рассматриваемой задаче.

Теперь добавим в эту экономику неопределенность. Предположим, что если потребитель сберегает сумму x в первом периоде, то его богатство во втором периоде составляет $x + y$, где случайная величина y распределена по закону $F(\cdot)$. Далее всюду обозначим через $E[\cdot]$ математическое ожидание распределения $F(\cdot)$. Будем считать, что бернуллевская функция, определенная на реализованных уровнях богатства в двух периодах (w_1, w_2), имеет вид $u(w_1) + v(w_2)$. Тогда потребитель решает следующую задачу:

$$\max_x u(w - x) + E[v(x + y)].$$

Обозначим решение этой задачи через x^*.

a) Покажите, что если $E[v'(x + y)] > v'(x_0)$, то $x^* > x_0$.

b) Определим *коэффициент абсолютной осторожности* для функции полезности $v(\cdot)$ при уровне богатства x следующим образом: $-v'''(x)/v''(x)$. Покажите, что если коэффициент абсолютной осторожности для функции полезности $v_1(\cdot)$ не больше, чем коэффициент абсолютной осторожности для функции полезности $v_2(\cdot)$ при всех уровнях богатства, то из $E[v_1'(x_0 + y)] > v_1'(x_0)$ следует, что $E[v_2'(x_0 + y)] > v_2'(x_0)$. Какие выводы можно сделать из этого факта в контексте пункта (a)?

c) Покажите, что если $v'''(\cdot) > 0$ и $E[y] = 0$, то $E[v'(x + y)] > v'(x)$ для всех значений x.

d) Покажите, что если коэффициент абсолютной несклонности к риску для функции $v(\cdot)$ убывает по богатству, то $-v'''(x)/v''(x) > -v''(x)/v'(x)$ для всех x и, следовательно, $v''' > 0$.

6.C.10[A]. Докажите эквивалентность условий (1)–(5) утверждения 6.C.3. (*Подсказка*: положите $u_1(z) = u(w_1 + z)$ и $u_2(z) = u(w_2 + z)$ и покажите, что каждое из пяти условий в утверждении 6.C.3 имеет эквивалентный аналог в утверждении 6.C.2.)

[32] Опечатка в оригинальном тексте: вместо $g(\cdot)$ было $u(\cdot)$. — *Примеч. пер.*

6.C.11[B]. Для модели из примера 6.C.2 покажите, что если $r_R(x, u)$ возрастает по x, то доля богатства, инвестируемая в рисковый актив, $\gamma = \alpha/x$, убывает по x. Аналогично, если $r_R(x, u)$ убывает по x, то $\gamma = \alpha/x$ возрастает по x. (*Подсказка*: положите $u_1(t) = u(tw_1)$ и $u_2(t) = u(tw_2)$ и воспользуйтесь фактом, полученным в ходе анализа примера 6.C.2: если один индивид более несклонен к риску, чем другой, то оптимальный уровень инвестиций в рисковый актив у первого индивида ниже, чем у второго. Можете также попытаться привести прямое доказательство, опираясь на условия первого порядка.)

6.C.12[B]. Пусть $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — строго возрастающая бернуллевская функция полезности. Покажите, что

a) $u(\cdot)$ демонстрирует постоянную относительную несклонность к риску, равную $\rho \neq 1$, тогда и только тогда, когда $u(x) = \beta x^{1-\rho} + \gamma$, где $\beta > 0$ при $\rho < 1$ и $\beta < 0$ при $\rho > 1$[33] и $\gamma \in \mathbb{R}$.

b) $u(\cdot)$ демонстрирует постоянную относительную несклонность к риску, равную 1, тогда и только тогда, когда $u(x) = \beta \ln x + \gamma$, где $\beta > 0$ и $\gamma \in \mathbb{R}$.

c) $\lim\limits_{\rho \to 1} \left(x^{1-\rho} / (1 - \rho) \right) = \ln x$ для всех $x > 0$.

6.C.13[B]. Пусть фирма нейтральна к риску, т. е. максимизирует ожидаемую прибыль, и если есть некоторая неопределенность относительно цен, то производственные решения принимаются после разрешения этой неопределенности. Предположим, имеется два варианта. Первый: неопределенность относительно цен. Второй: цены детерминированы и равны ожидаемому вектору цен в первом варианте. Покажите, что максимизирующая ожидаемую прибыль фирма предпочтет первую альтернативу второй.

6.C.14[B]. Рассмотрите двух не склонных к риску индивидов (т. е. индивидов, бернуллевские функции полезности которых вогнуты), осуществляющих выбор на множестве денежных лотерей. Говорят, что индивид с функцией полезности $u^*(\cdot)$ строго более не склонен к риску, чем индивид с функцией полезности $u(\cdot)$, тогда и только тогда, когда существует положительная константа k и невозрастающая и вогнутая функция $v(\cdot)$, такая что $u^*(x) = ku(x) + v(x)$ для всех x. Будем считать, что денежные суммы ограничены интервалом $[0, r]$.

a) Покажите, что если индивид с функцией полезности $u^*(\cdot)$ строго более не склонен к риску, чем индивид с функцией полезности $u(\cdot)$, то индивид с $u^*(\cdot)$ более не склонен к риску, чем индивид с $u(\cdot)$, в обычном смысле теоремы Эрроу — Пратта.

b) Покажите, что если функция $u(\cdot)$ ограничена, то на всем интервале $[0, +\infty)$ не существует другой функции $u^*(\cdot)$ для строго,

[33] Опечатка в оригинальном тексте: некорректно написаны ограничения на параметр β. — *Примеч. пер.*

более не склонного к риску индивида, чем индивид с функцией полезности $u(\cdot)$, кроме функции вида $u^*(\cdot) = ku(\cdot) + c$, где c — константа. (*Подсказка*: обратите внимание, что здесь мы пренебрегаем условием, ограниченности денежных сумм интервалом $[0, r]$.)

c) Пользуясь результатом пункта (b), покажите, что концепция строго большей несклонности к риску строже (т. е. носит более ограничительный характер), чем концепция большей несклонности к риску в соответствии с теоремой Эрроу — Пратта.

6.C.15[A]. Предположим, что в мире с неопределенностью существует два актива. Первый актив безрисковый – он приносит 1 доллар дохода. Второй приносит суммы денег a и b с вероятностями π и $1 - \pi$ соответственно. Обозначим спрос на два данных актива через (x_1, x_2). Пусть предпочтения индивида удовлетворяют аксиомам существования ожидаемой полезности, причем индивид не склонен к риску. Богатство индивида равно 1, этой же величине равны цены рассматриваемых активов. Следовательно, бюджетное ограничение индивида имеет вид

$$x_1 + x_2 = 1, x_1, x_2 \in [0, 1].$$

a) Приведите простое *необходимое* условие (включающее только параметры a и b) строго положительного спроса на безрисковый актив.

b) Приведите простое *необходимое* условие (включающее только параметры a, b и π) строго положительного спроса на рисковый актив.

В оставшихся пунктах считайте, что условия, полученные в пунктах (a)–(b), выполнены.

c) Выпишите условия первого порядка задачи максимизации ожидаемой полезности от инвестиций в рассматриваемые активы.

d) Пусть $a < 1$. Используя условия первого порядка, покажите, что $dx_1/da \leq 0$.

e) Как вы думаете, каков знак производной $dx_1/d\pi$? Приведите экономическую интерпретацию.

f) Можете ли вы обосновать свою догадку относительно знака производной в пункте (e) с помощью условий первого порядка?

6.C.16[A]. Рассмотрите индивида с бернуллевской функцией полезности $u(\cdot)$ и первоначальным богатством w. Пусть лотерея L дает выигрыш G с вероятностью p и выигрыш B с вероятностью $1 - p$.

a) Если индивид владеет лотереей, то какова минимальная цена, за которую он согласится ее продать?

b) Если индивид не владеет лотереей, то какова максимальная цена, за которую он будет готов ее купить?

c) Как соотносятся цены продажи и покупки: будут ли они равны? Приведите экономическую интерпретацию своего ответа.

Приведите условия на параметры задачи, при которых цены покупки и продажи равны.

d) Пусть $G = 10$, $B = 5$, $w = 10$ и $u(x) = \sqrt{x}$. Вычислите цены продажи и покупки для данной лотереи и данной функции полезности.

6.C.17[B]. Предположим, индивид сталкивается с двухпериодной задачей формирования портфеля инвестиций. В период $t = 0{,}1$ богатство индивида w_t должно быть распределено между двумя активами: безрисковым, с доходностью R, и рисковым, с доходностью x. Первоначальное богатство индивида в период 0 составляет w_0. Богатство индивида в период $t = 1{,}2$ зависит от портфеля α_{t-1}, выбранного в момент времени $t - 1$, и от доходности x_t рискового актива, реализовавшейся в период t, следующим образом:

$$w_t = \left((1 - \alpha_{t-1})R + \alpha_{t-1}x_t\right)w_{t-1}.$$

Цель индивида — максимизация ожидаемой полезности от конечного богатства w_2. Пусть случайные величины x_1 и x_2 независимо одинаково распределены. Докажите, что для индивида оптимально выбрать $\alpha_0 = \alpha_1$, если его функция полезности характеризуется постоянной относительной несклонностью к риску. Покажите также, что это условие не будет выполнено, если функция полезности индивида характеризуется постоянной абсолютной несклонностью к риску.

6.C.18[B]. Предположим, что предпочтения индивида описываются бернуллевской функцией полезности $u(x) = \sqrt{x}$.

a) Вычислите коэффициенты Эрроу — Пратта абсолютной и относительной несклонности к риску при уровне богатства $w = 5$.

b) Вычислите гарантированный эквивалент и вероятностную премию для лотереи $\left(16,\ 4;\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

c) Вычислите гарантированный эквивалент и вероятностную премию для лотереи $\left(36,\ 16;\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и сравните результат с ответом на пункт (b). Проинтерпретируйте полученный результат.

6.C.19[C]. Рассмотрите индивида с бернуллевской функцией полезности $u(x) = -e^{-\alpha x}$, где $\alpha > 0$, имеющего (детерминированное) богатство w. Предположим, что существует один безрисковый актив и N рисковых активов. Доходность безрискового актива на единицу вложений составляет r. Доходности рисковых активов — случайные величины, имеющие нормальное совместное распределение с математическим ожиданием $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_N)$ и ковариационной матрицей V. Будем считать, что рисковые активы не дублируют друг друга, так что матрица V имеет полный ранг. Выведите функцию спроса на рассматриваемые $N + 1$ активов.

6.C.20[A]. Рассмотрите денежную лотерею, приносящую выигрыш $x + \varepsilon$ с вероятностью $^1/_2$ и $x - \varepsilon$ с вероятностью $^1/_2$. Вычислите вторую производную гарантированного эквивалента данной лотереи по ε. Покажите, что предел этой производной при $\varepsilon \to 0$ в точности равен $-r_A(x)$.

6.D.1.[A]. Цель этого упражнения — доказательство утверждения 6.D.1 в двумерном вероятностном симплексе. Пусть возможны три денежных исхода: 1 доллар, 2 доллара и 3 доллара. Рассмотрите вероятностный симплекс, изображенный на рисунке 6.B.1(b).

a) Для некоторой лотереи L на трех рассматриваемых исходах определите область вероятностного симплекса, в которой лежат такие лотереи, что имеет место стохастическое доминирование первого порядка распределений данных лотерей над распределением лотереи L.

b) Для некоторой лотереи L определите область вероятностного симплекса, в которой лежат лотереи L', такие что $F(x) \le G(x)$ для любого x, где $F(\cdot)$— функция распределения лотереи L', а $G(\cdot)$ — функция распределения лотереи L. (Обратите внимание, что мы получаем ту же область, что и в пункте (a).)

6.D.2[A]. Докажите, что если имеет место стохастическое доминирование первого порядка распределения $F(\cdot)$ над распределением $G(\cdot)$, то математическое ожидание x при распределении $G(\cdot)$, $\int xdG(x)$, не может превышать математического ожидания при распределении $F(\cdot)$, $\int xdF(x)$[34]. Приведите также пример таких распределений, что $\int xdF(x) > \int xdG(x)$, но при этом не выполнено условие стохастического доминирования первого порядка распределения $F(\cdot)$ над распределением $G(\cdot)$.

6.D.3[A]. Убедитесь, что если распределение $G(\cdot)$ представляет собой элементарное увеличение риска по сравнению с распределением $F(\cdot)$, то имеет место стохастическое доминирование второго порядка распределения $F(\cdot)$ над распределением $G(\cdot)$.

6.D.4[A]. Цель этого упражнения — убедиться в эквивалентности трех положений утверждения 6.D.2 в двумерном вероятностном симплексе. Пусть возможны три денежных исхода: 1, 2 и 3 доллара. Рассмотрите вероятностный симплекс, изображенный на рис. 6.B.1(b).

a) Если две лотереи имеют одинаковое математическое ожидание, то как они будут расположены по отношению друг к другу в вероятностном симплексе.

b) Для некоторой лотереи L определите область в симплексе, в которой лежат лотереи L', такие что имеет место стохастическое доминирование второго порядка распределения лотереи L над распределением данных лотерей.

[34] Исправлена опечатка в оригинальном тексте. — *Примеч. пер.*

c) Для некоторой лотереи L определите область симплекса, в которой лежат лотереи L', полученные с помощью преобразования распределения L, сохраняющего среднее.

d) Для некоторой лотереи L определите область симплекса, в которой лежат лотереи L', для которых выполнено условие (6.D.2), где $F(\cdot)$ и $G(\cdot)$ — распределения лотерей L и L' соответственно. Обратите внимание, что в пунктах (b)–(d) вы получили одну и ту же область.

6.E.1[B]. Цель этого упражнения – показать, что предпочтения могут не быть транзитивными при наличии мотива сожалений. Пусть существуют S состояний мира, обозначаемые индексами $s = 1, \ldots, S$, и пусть состояние мира s реализуется с вероятностью π_s. Определим ожидаемое сожаление, соответствующее лотерее $x = (x_1, \ldots, x_S)$ по отношению к лотерее $x' = (x'_1, \ldots, x'_S)$, следующим образом:

$$\sum_{s=1}^{S} \pi_s h\left(\max\{0, x'_s - x_s\}\right),$$

где $h(\cdot)$ — возрастающая функция. (Функция $h(\cdot)$ называется *функцией оценки сожаления*. Она оценивает меру сожаления индивида после того, как становится известно, какое состояние мира реализовалось.) Будем говорить, что лотерея x по крайней мере не хуже лотереи x' при наличии мотива сожаления тогда и только тогда, когда ожидаемое сожаление, связанное с x по отношению к x', не больше, чем ожидаемое сожаление, связанное с x' по отношению к x.

Пусть $S = 3$, $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \dfrac{1}{3}$ и $h(x) = \sqrt{x}$. Рассмотрите три следующие лотереи:

$$x = (0, -2, 1),$$

$$x' = (0, 2, -2),$$

$$x'' = (2, -3, -1).$$

Покажите, что отношение предпочтения на множестве данных лотерей не является транзитивным.

6.E.2[A]. Предположим, что в экономике с неопределенностью возможны два состояния природы ($s = 1,2$) и существует единственное потребительское благо. Предпочтения на лотереях единственного индивида в данной экономике удовлетворяют условиям существования функции ожидаемой полезности. Пусть данный индивид не склонен к риску, и для простоты также предположим, что его функция полезности не зависит от состояния.

Индивиду доступны два контингентных блага: первое (соответственно второе) приносит одну единицу потребительского блага в состоянии мира $s = 1$ (соответственно $s = 2$) и ничего в противном случае. Обозначим вектор двух данных контингентных благ через (x_1, x_2).

a) Покажите, что отношение предпочтения индивида на векторах (x_1, x_2) выпукло.

b) Покажите, что индивид также демонстрирует несклонность к риску, выбирая между лотереями, исходами которых являются векторы (x_1, x_2).

c) Покажите, что функции вальрасианского спроса на блага x_1 и x_2 таковы, что данные блага являются нормальными.

6.E.3[B]. Пусть $g : S \to \mathbb{R}_+$ — случайная переменная с математическим ожиданием $E(g) = 1$. Для любого $\alpha \in (0, 1)$ определим новую случайную переменную $g^* : S \to \mathbb{R}_+$ как $g^*(s) = \alpha g(s) + (1 - \alpha)$, причем $E\left(g^*\right) = 1$. Обозначим через $G(\cdot)$ и $G^*(\cdot)$ функции распределения случайных переменных $g(\cdot)$ и $g^*(\cdot)$ соответственно. Покажите, что имеет место доминирование второго порядка распределения $G^*(\cdot)$ над распределением $G(\cdot)$. Проинтерпретируйте полученный результат.

6.F.1[B]. Докажите, что в теореме о существовании субъективной ожидаемой полезности (утверждение 6.F.2) полученная функция $u(\cdot)$, определенная на денежных суммах, определена единственным образом с точностью до выбора начала координат и масштаба. То есть если обе функции, $u(\cdot)$ и $\hat{u}(\cdot)$, удовлетворяют условиям теоремы, то существуют $\beta > 0$ и $\gamma \in \mathbb{R}$, такие что $\hat{u}(x) = \beta u(x) + \gamma$ для всех x. Докажите также, что субъективные вероятности определены однозначно.

6.F.2[A]. Цель данного упражнения — объяснить результаты экспериментов, описанных в примере 6.F.1, с помощью теории *неединственности априорных ожиданий* (см. (Gilboa, Schmeidler, 1989).

Рассмотрим индивида с бернуллевской функцией полезности $u(\cdot)$, определенной на исходах $\{0, 1000\}$. Пронормируем функцию $u(\cdot)$ так, чтобы $u(0) = 0$ и $u(1000) = 1$.

Вероятностное ожидание, что H-шар имеет белый цвет, обозначим через $\pi \in [0, 1]$. Предположим, что ожидания индивида определены неоднозначно, а множество ожиданий задается подмножеством P множества $[0, 1]$. Обозначим также действия, которые может предпринять индивид, через R и H, где R означает, что он выбирает R-шар, а H – H-шар.

Как и в примере 6.F.1, индивид сталкивается с двумя различными ситуациями выбора. В ситуации выбора W он получает 1000 долларов, если выбранный шар оказывается белым, и 0 долларов в противном случае. В ситуации B индивид получает 1000 долларов, если выбран черный шар, и 0 долларов в противном случае. Для каждой из двух данных ситуаций выбора определим функцию полезности на множестве действий R и H:

Для ситуации W, $U_W : \{R, H\} \to \mathbb{R}$ определяется следующим образом:

$$U_W(R) = 0{,}49 \text{ и } U_W(H) = \min\{\pi : \pi \in P\}.$$

Для ситуации B, $U_B : \{R, H\} \to \mathbb{R}$ определяется следующим образом:

$$U_B(R) = 0{,}51 \text{ и } U_B(H) = \min\{(1 - \pi) : \pi \in P\}.$$

Другими словами, полезность индивида от выбора R — это ожидаемая полезность от 1000 долларов, полученных с (объективной) вероятностью, вычисленной исходя из количества белых и черных шаров в урне R. Однако полезность от выбора H — это ожидаемая полезность от 1000 долларов, полученных с вероятностью, связанной с наиболее пессимистичными ожиданиями из множества P.

a) Докажите, что если множество P состоит из единственного ожидания, то функции U_W и U_B получены из функции полезности Неймана — Моргенштерна, причем $U_W(R) > U_W(H)$ тогда и только тогда, когда $U_B(R) < U_B(H)$.

b) Укажите множество P, такое что $U_W(R) > U_W(H)$ и $U_B(R) > U_B(H)$.

Часть II

ТЕОРИЯ ИГР

В части I мы анализировали индивидуальное принятие решения и в абстрактной постановке, и в более специфической экономической формулировке. Наша первоначальная цель состояла в том, чтобы заложить основы для изучения того, каким образом одновременные действия многих агентов (в том числе фирм), заинтересованных только в собственной выгоде, порождают экономические исходы в рыночной экономике. Дальнейшее изложение в значительной мере посвящено именно этой задаче. Однако в части II мы покажем, каким образом может моделироваться взаимодействие многих агентов в более общей постановке.

Главной особенностью взаимодействия многих агентов является потенциальное присутствие стратегической взаимозависимости. В части I, когда мы рассматривали индивидуальное принятие решения, агент сталкивался с ситуацией, когда его благополучие зависело только от его собственного выбора (возможно, в условиях некоторой неопределенности). Теперь же, когда взаимодействуют несколько агентов и имеет место стратегическая взаимозависимость, каждый агент осознает, что выигрыш, который он получает (полезность или прибыль) зависит не только от его собственных действий, но также и от действий *других* агентов. Поэтому наилучшие для агента действия могут зависеть от действий, которые уже предприняли другие агенты, от их ожидаемых действий в тот момент времени, когда он сам принимает решение, и даже от их будущих действий, которые они могут предпринять, или же решений ничего не предпринимать в ответ на текущие действия рассматриваемого агента.

Для анализа ситуаций, в которых имеет место стратегическая взаимозависимость, мы будем использовать инструментарий *некооперативной теории игр*. Хотя термин «игра», как может показаться, принижает значение теории, он подчеркивает ее ключевую особенность: агентов заботит выбор стратегий и выигрыш (в общем смысле максимизации полезности или прибыли) во многом так же, как игроков большинства обычных игр.

Экономические ситуации взаимодействия нескольких агентов могут значительно различаться степенью стратегической взаимозависимости. В условиях монополии (где товар продается только одной фирмой, см. раздел 12.B) или совершенной конкуренции (когда все агенты воспринимают цену как заданную, см. главу 10 и часть IV), составляющая стратегического взаимодействия настолько незначительна, что для анализа нет необходимости использовать теоретико-игровой подход[1]. Однако в других обстоятельствах, таких как анализ олигополистических рынков (когда на рынке действует не один продавец, но все-таки их немного, см. разделы с 12.C по 12.G), ключевая роль стратегического взаимодействия делает теорию игр незаменимой для анализа.

Часть II разделена на три главы. В главе 7 дается краткий вводный курс, в котором рассматриваются базовые понятия некооперативной теории игр, в том числе что такое игра, несколько способов представления игр, а также центральная концепция теории — *стратегии* игрока. В главе 8 показано, каким образом мы можем предсказать исходы в играх, в которых все игроки ходят одновременно и которые называются *играми с одновременными ходами*. Это ограничение позволит нам выделить несколько центральных проблем, откладывая на некоторое время более трудные. В главе 9 рассматриваются *динамические игры*, в которых ходы игроков могут предшествовать друг другу и где возникает ряд этих более трудных (но и интересных) проблем.

Обратите внимание, что мы использовали термин *некооперативный* для характеристики того раздела теории игр, который обсуждается в главе II. Существует другое направление в теории игр, известное как *кооперативная теория игр*, которое мы здесь не рассматриваем. В отличие от некооперативной теории игр, базовые единицы анализа в кооперативной теории игр — это группы и подгруппы индивидов. В соответствии с теорией предполагается, что именно они способны достичь определенных исходов посредством обязывающих кооперативных соглашений. Кооперативная теория игр занимает важное место в теории общего равновесия, и мы дадим краткое введение в этот раздел теории игр в приложении А к главе 18. Следует подчеркнуть, что термин *некооперативная теория игр не* означает, что она не может объяснить сотрудничество в группах индивидов. Наоборот, некооперативная теория фокусируется на том, как сотрудничество может возникнуть в результате рационального поведения в отсутствие возможности заключать обязывающие соглашения (например, см. анализ повторяющегося взаимодействия среди олигополистов в главе 12).

Для дальнейшего изучения некооперативной теории игр можно рекомендовать следующий ряд отличных работ: (Fudenberg, Tirole, 1991; Myerson, 1992; Osborne, Rubinstein, 1994) и для начального курса (Gibbons, 1992; Binmore, 1992). В работе (Kreps, 1990) приводится очень интересное обсуждение ряда сильных и слабых сторон теории. Работы (von Neumann, Morgenstern, 1944; Luce, Raiffa, 1957; Schelling, 1960) остаются классикой.

---

[1] И тем не менее мы можем его использовать в обоих случаях. См., например, доказательство существования конкурентного равновесия в главе 17, приложение B. Более того, далее мы еще покажем, что совершенную конкуренцию можно трактовать как предельный случай олигополистического стратегического взаимодействия. См., например, раздел 12.F.

Литература

Binmore K. (1992). *Fun and Games: A Text on Game Theory*. Lexington, Mass.: D. C. Heath.

Fudenberg D., Tirole J. (1991). *Game Theory*. Cambidge, Mass.: MIT Press.

Gibbons R. (1992). *Game Theory for Applied Economists*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Kreps D. M. (1990). *Game Theory and Economic Modeling*. New York: Oxford University Press.

Luce R. D., Raiffa H. (1957). *Games and Decisions: Introduction and Critical Survey*. New York: Wiley.

Myerson R.B. (1992). *Game Theory: Analysis of Conlict*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Osborne M. J., Rubinstein A. (1994). *A Course in Game Theory*, Cambridge, Mass.: MIT Press.

Schelling T. (I960). *The Strategy of Conlict*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Von Neumann J., Morgenstern O. (1944). *The Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Глава 7. Базовые элементы некооперативной теории игр

7.A. Введение

Мы начинаем изучение некооперативной теории игр со знакомства с ее базовыми понятиями. Этот материал служит введением к анализу игр в главах 8 и 9.

В разделе 7.B дано неформальное представление концепции *игры*. В нем описаны четыре базовых элемента, присутствующие при любой постановке задачи стратегического взаимодействия, которые мы должны знать, чтобы задать игру.

В разделе 7.C мы покажем, каким образом игра может быть описана с помощью того, что мы назовем *представлением игры в развернутой форме*. Представление игры в развернутой форме дает весьма подробное описание игры, в том числе указание, кто ходит и когда, что можно предпринять в свой ход, что известно на момент хода и к каким исходам приведут различные комбинации предпринятых участниками игры действий.

В разделе 7.D вводится центральная концепция теории игр — *стратегия* игрока. Стратегия игрока — это детальный, учитывающий все обстоятельства план действий, которые игрок будет предпринимать, для любого развития игры. Затем мы покажем, как можно использовать понятие стратегии, чтобы получить гораздо более компактное представление игры, известное как *нормальная* (*или стратегическая*) *форма представления*.

В разделе 7.E мы рассмотрим возможность рандомизации игроком своего выбора. Это приведет нас к введению понятия *смешанной стратегии*.

7.B. Что такое игра?

Игра — это формальное представление ситуации, в которой ряд индивидов взаимодействует в условиях стратегической взаимозависимости. Под этим мы подразумеваем, что благосостояние каждого индивида зависит не только от его собственных действий, но также и от действий других индивидов. Более того, действия, которые для индивида являются наилучшими, могут зависеть от действий, ожидаемых от других игроков.

Чтобы описать ситуацию стратегического взаимодействия, мы должны знать ответы на следующие вопросы:

(*i*) *Игроки*: кто участвует?
(*ii*) *Правила*: кто когда ходит? Что они знают в момент хода? Что они могут делать?
(*iii*) *Исходы*: для каждого возможного набора действий игроков, каков исход игры?
(*iv*) *Выигрыши*: каковы предпочтения индивидов (т. е. функции полезности) на возможных исходах?

Мы начнем с обсуждения пунктов (*i*)–(*iii*). Простым примером игры может служить «*Орлянка*», в которую часто играют на школьном дворе.

Пример 7.B.1. *«Орлянка»*. Пункты (*i*)–(*iii*) выглядят следующим образом.
Игроки. В игре участвуют два игрока, обозначаемые 1 и 2.
Правила. Игроки одновременно выкладывают монету орлом или решкой вверх.
Исходы. Если две монеты выкладываются одинаково (или обе орлом вверх, или обе вверх решкой), игрок 1 выплачивает 1 доллар игроку 2; и в противном случае игрок 2 выплачивает 1 доллар игроку 1. ■

Рассмотрим другой пример, игру *«Крестики-нолики»*.

Пример 7.B.2. *«Крестики-нолики»*. Пункты (*i*)–(*iii*) выглядят следующим образом:
Игроки. В игре участвуют два игрока, X и O.
Правила. Игроки используют игровое поле, разделенное на девять квадратов, размещенных в три ряда, один над другим, по три квадрата. В свой ход игроки ставят свой знак (X или O) в еще незаполненном квадрате (см. рис. 7.B.1). Игрок X ходит первым. Оба игрока видят все ходы, сделанные ранее.
Исходы. Игрок, который первым заполнит три квадрата в ряду (горизонтальном, вертикальном или по диагонали), выигрывает и получает 1 доллар от другого игрока. Если никому не удастся это сделать к тому моменту, когда все квадраты будут заполнены, игра заканчивается ничьей и никто ничего не выплачивает и ничего не получает. ■

Чтобы завершить описание этих двух игр, мы должны задать предпочтения игроков на множестве возможных исходов (пункт (*iv*) в нашем списке). Как правило, мы описываем предпочтения игроков с помощью функции полезности, которая приписывает некоторый уровень полезности каждому возможному исходу. Часто функцию полезности называют *функцией выигрыша*, а уровень полезности называют *выигрышем*. Здесь мы предполагаем, что эта функция принимает форму ожидаемой полезности (см. главу 6). Таким образом, когда мы рассматриваем ситуации, в которых исходы случайны, мы можем оценить рисковые альтернативы с помощью ожидаемой полезности игрока.

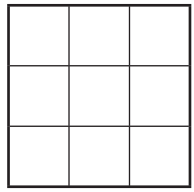


Рис. 7.B.1. Поле для игры «Крестики-нолики»

В дальнейшем мы будем считать, что в игре «Орлянка» и в игре «Крестики-нолики» выигрыш каждого игрока просто равен сумме денег, которую он выиграет или проиграет. Заметьте, что в обоих примерах действия, которые максимизируют выигрыш игрока, зависят от действий, ожидаемых от оппонента.

В примерах 7.B.1 и 7.B.2 присутствует чистый конфликт: то, что выигрывает один из игроков, другой проигрывает. Такие игры называются *играми с нулевой суммой*. Но стратегическое взаимодействие и теория игр не ограничиваются ситуациями чистых или даже частичных конфликтов. Рассмотрим ситуацию в примере 7.B.3.

Пример 7.B.3. *«Встреча в Нью-Йорке»*. Пункты (*i*)–(*iv*) выглядят следующим образом.

Игроки. Два игрока, м-р Томас и м-р Шеллинг.

Правила. Два игрока находятся далеко друг от друга и не могут общаться. Предполагается, что они должны встретиться в Нью-Йорке в полдень для совместного ланча, но забыли договориться, где именно. Каждый должен решить, куда идти (каждый может выбрать только одно место).

Исходы. Если они встретятся, то насладятся компанией друг друга во время ланча. В противном случае каждому придется есть в одиночестве.

Выигрыши. Каждый из них оценивает компанию другого в 100 долларов (выигрыш каждого составляет 100 долларов, если они встретятся, и 0 долларов, если встреча не состоится).

В этом примере интересы обоих игроков полностью совпадают. Их проблема состоит только в координации. Тем не менее выигрыш каждого игрока зависит от действий другого игрока; и, что еще более важно, *оптимальный выбор каждого игрока зависит от того, что он думает о будущих действиях другого*. ■

Хотя информация, заданная в пунктах (*i*)–(*iv*), полностью описывает игру, для анализа полезно представить эту информацию в определенной форме. Мы рассматриваем один из способов в разделе 7.C.

7.C. Представление игры в развернутой форме

Если нам известны пункты (*i*)–(*iv*), описанные в разделе 7.B (игроки, правила, исходы и выигрыши), то мы можем формально представить игру в так называемой *развернутой форме*. В развернутой форме фиксируется, кто когда ходит, какие действия каждый игрок может предпринять, что игроки знают, когда они делают ход, к какому исходу приведут действия, предпринятые игроками, и каковы выигрыши игроков при каждом возможном исходе.

Мы начнем с неформального знакомства с элементами представления игры в развернутой форме, рассмотрев несколько примеров. После этого мы приведем формальное описание развернутой формы (кто-то из вас, возможно, захочет начать с него и затем вернуться к примерам).

Представление игры в развернутой форме опирается на понятийный аппарат, известный как *дерево игры*. Для начала полезно рассмотреть очень простую версию игры «Орлянка», которую мы назовем «*Орлянка, версия B*».

Пример 7.C.1. «*Орлянка, версия B» и ее развернутая форма*. «Орлянка, версия B» аналогична игре «Орлянка» из примера 7.B.1, за исключением того что игроки ходят последовательно, а не одновременно. В частности, игрок 1 выкладывает свою монету (орлом или решкой вверх) первым. Затем, после того как увидит ход игрока 1, свой ход делает игрок 2. (Это очень выгодная игра для игрока 2!)

Представление игры в развернутой форме изображено на рис. 7.C.1. Игра начинается в *начальном узле решения* (отмеченном незакрашенным кругом), в котором игрок 1 делает ход, решая разместить монету орлом или решкой вверх. Каждый из двух возможных вариантов выбора игрока 1 отмечен *ветвью* из этого первоначального узла решения. На конце каждой ветви размещается другой узел решения (отмеченный закрашенной точкой), в котором игрок 2 может выбрать одно из двух действий: выложить монету орлом или решкой вверх, после того как увидит выбор игрока 1. Начальный узел называется *узлом решения игрока 1*, следующие два называются *узлами решения игрока 2*. После того как игрок 2 сделает ход, игра заканчивается, что отмечено *терминальными узлами*.

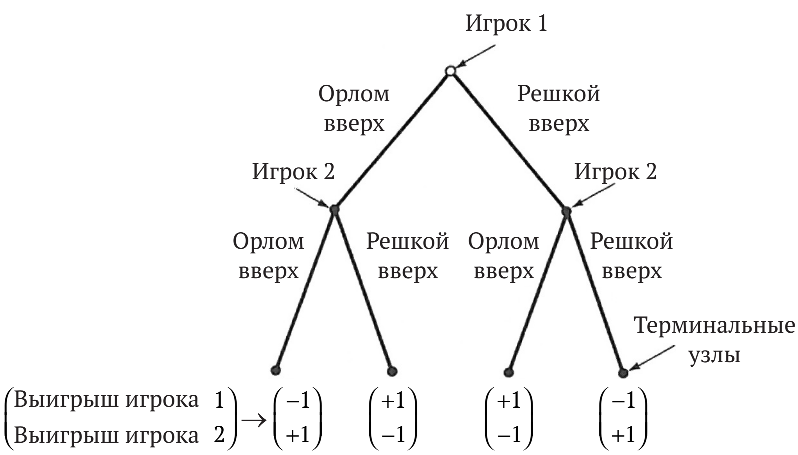


Рис. 7.C.1. Развернутая форма для игры «Орлянка, версия B»

Обратите внимание, что изображение на рис. 7.C.1 похоже на дерево. Как у настоящего дерева, на рисунке существует единственный путь по ветвям от начального узла (иногда также называемого *корнем*) к каждой точке на дереве. Такое изображение известно как дерево игры. ■

Пример 7.C.2. *Развернутая форма игры «Крестики-нолики»*. Более замысловатое дерево игры на рис. 7.C.2 представляет развернутую форму игры «Крестики-нолики» (в целях экономии места многие части дерева не показаны). Обратите внимание, что каждый путь по дереву представляет собой единственно возможную последовательность ходов игроков. В частности, когда рассматриваемая позиция на поле (например, в двух левых углах стоит X, а в двух правых углах стоит O) может быть достигнута несколькими различными последовательностями ходов, каждая из этих последовательностей изображена отдельно на дереве игры. Узлы показывают не только текущую позицию, но и *как она была достигнута*. ■

И в игре «Орлянка, версия B», и в игре «Крестики-нолики», когда приходит время ходить, игрок знает предыдущие ходы контрагента. Такие игры называются играми с *совершенной информацией* (см. определение 7.C.1).

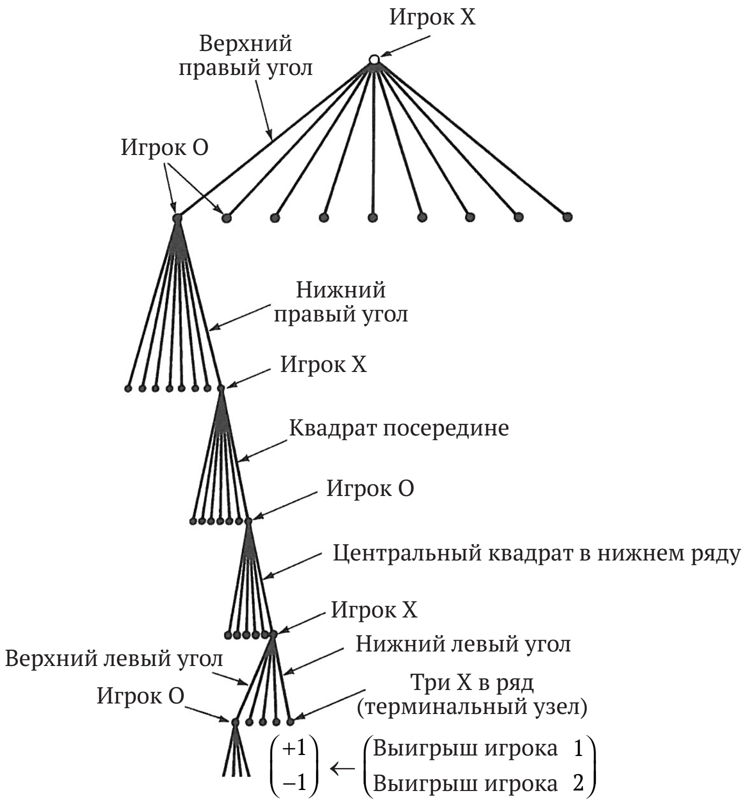
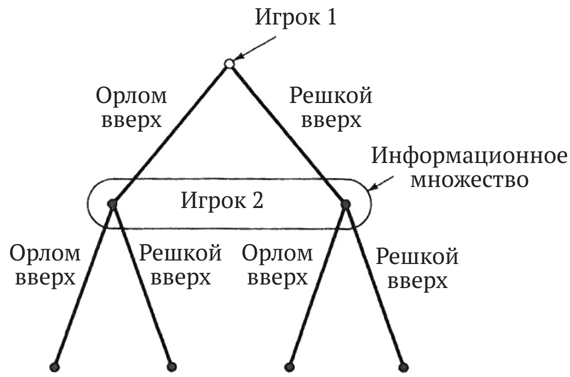


Рис. 7.С.2. Часть развернутой формы игры «Крестики-нолики»

Понятие *информационного множества* позволяет нам учесть, что это может быть не так. Формально элементы информационного множества — это подмножество определенных узлов решения игрока. Интерпретация заключается в следующем: когда игроки достигают одного из узлов решения в информационном множестве и пришла очередь игрока сделать ход, он не знает точно, в каком из узлов этого информационного множества оказался. Причина этого неведения кроется в том, что игрок не осведомлен о чем-то, что произошло в игре ранее. Анализ еще одной вариации игры «Орлянка», которую мы назовем «*Орлянка, версия С*», поможет прояснить понятие информационного множества.

Пример 7.С.3. «*Орлянка, версия С» и ее развернутая форма*. Эта версия «Орлянки» очень похожа на игру «Орлянка, версия В» (в примере 7.С.1), за исключением того что когда игрок 1 выкладывает монету, он прикрывает ее рукой. Следовательно, игрок 2 не видит выбор игрока 1 до тех пор, пока сам не сделает ход.

Развернутая форма этой игры представлена на рис. 7.С.3. Она схожа с представлением игры на рис. 7.С.1, за исключением того что мы нарисовали контур, внутри которого оказались два узла решения игрока 2, чтобы показать, что эти узлы находятся в одном информационном множестве. Смысл этого информационного множества заключается в следующем: когда подходит очередь игрока 2 сделать ход, он не может сказать, в каком из этих двух узлов он находится, поскольку не видел пре-



$$\begin{pmatrix}\text{Выигрыш игрока } 1\\ \text{Выигрыш игрока } 2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}-1\\+1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}+1\\-1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}+1\\-1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-1\\+1\end{pmatrix}$$

Рис. 7.C.3. Развернутая форма для игры «Орлянка, версия C»

дыдущего хода игрока 1. Заметим, что у игрока 2 в каждом из двух узлов информационного множества одинаковый набор возможных действий. Это всегда так, если игрок 2 не может различить узлы решения; если бы это было не так, то он мог бы понять, какой ход был сделан игроком 1, просто по тем действиям, которые ему доступны.

В принципе мы можем также соотнести понятие узла решения игрока 1 с понятием информационного множества. Поскольку игрок 1 знает, что до его хода ничего не происходило, в его информационном множестве только один узел (игрок 1 точно знает, в каком узле решения он находится, когда ходит). Строго говоря, мы должны также нарисовать контур вокруг узла решения на рис. 7.C.3. Тем не менее графическое изображение развернутой формы обычно упрощают, не выделяя информационные множества, содержащие один узел. Таким образом, мы понимаем, что любой узел решения, вокруг которого не обведен контур, — это элемент информационного множества, состоящего из одного элемента. На рис. 7.C.1 и 7.C.2, например, каждый узел решения принадлежит информационному множеству, состоящему из одного элемента. ■

Перечисление всех информационных множеств игрока формирует список всех возможных различимых, с точки зрения игрока, «событий» или «обстоятельств», в которых ему предоставляется ход. Так, в примере 7.C.1, с точки зрения игрока 2, существуют два различимых события, которые могут произойти и при наступлении которых он должен будет сделать ход. Каждое событие соответствует тому, что он оказался в одном из двух своих информационных множеств, каждое из которых содержит один узел решения. А в примере 7.C.3 игрок 2 считает, что возможна только одна ситуация, когда ему придется сделать ход (и эта ситуация точно возникнет).

В примере 7.C.3 мы отметили естественное ограничение на информационные множества. В каждом узле информационного множества игрок должен иметь одинаковый набор возможных действий. Другое ограничение, которое мы введем, состоит в том, что игрок обладает так называемой *совершенной памятью*. Проще говоря, совершенная память означает, что игрок не забывает то, что он когда-то знал, включая свои собственные действия. На рис. 7.C.4 изображены два дерева игры, в которых это условие не выполнено. На рис. 7.C.4 (a) в ходе игры игрок 2 забывает ход игрока 1, который он знал (а именно что выбрал игрок 1 — *l* или *r*). На рис. 7.C.4 (b) игрок 1 забывает свой собственный предыдущий ход[1]. Все игры, кото-

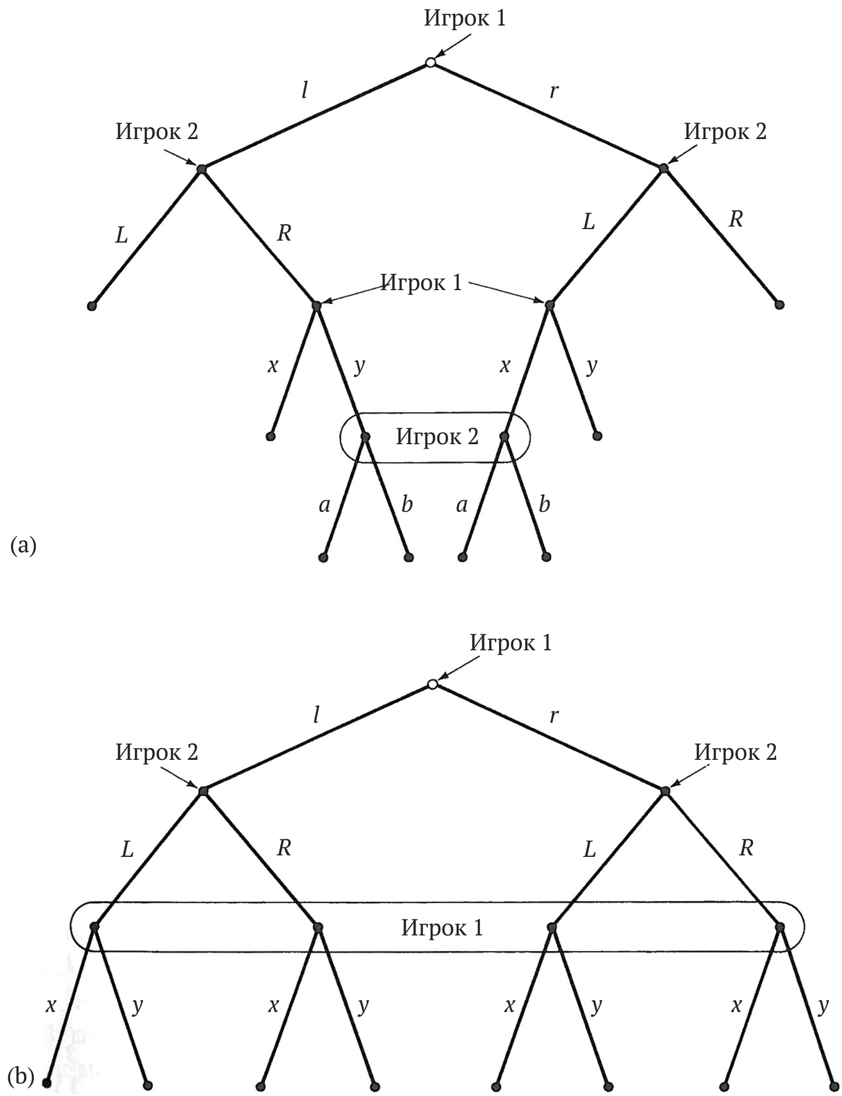


Рис. 7.C.4. Две игры, для которых не выполнено свойство совершенной памяти

[1] В терминах формального описания развернутой формы, которое будет дано ниже в этом разделе, если мы обозначаем информационное множество, содержащее узел решения x, через $H(x)$, игра формально характеризуется как игра с совершенной памятью, если выполнены следующие два условия: (*i*) если $H(x) = H(x')$, то x не может быть ни предшествующим, ни последующим узлом для x'; (*ii*) если x и x' — это два узла решения для игрока i, такие что $H(x) = H(x')$, и если узел x'' — предшественник узла x (необязательно непосредственный), который также находится в информационном множестве игрока i, а действие a'' в информационном множестве $H(x'')$ ведет к x, то должен быть предшественник узла x', принадлежащий информационному множеству $H(x'')$, и действие в этом предшествующем узле, который находится на пути к x', также должно быть a''.

рые мы будем рассматривать в этой книге, удовлетворяют свойству совершенной памяти.

Использование информационных множеств позволяет нам описать игры не только с последовательными ходами, но и с одновременными. Это показано на рис. 7.C.4 для (стандартной) игры «Орлянка» из примера 7.B.1.

Пример 7.C.4. *Развернутая форма игры «Орлянка».* Предположим теперь, что игроки кладут свои монеты одновременно. Для каждого игрока эта игра стратегически эквивалентна версии C. В версии C игрок 1 не мог видеть выбор игрока 2, поскольку игрок 1 ходил первым, а игрок 2 не мог видеть выбор игрока 1, так как игрок 1 его не показывал. В этой игре игроки не могут видеть выбор друг друга, поскольку они ходят одновременно. До тех пор пока они не могут видеть выбор друг друга, порядок игры не имеет значения. Таким образом, чтобы описать (стандартную) игру «Орлянка», мы можем использовать дерево игры, изображенное на рис. 7.C.3. Заметим, что по этой логике мы можем также описать эту игру с помощью дерева, в котором по сравнению с деревом на рис. 7.C.3 вместо узла решения игрока 1 стоит узел решения игрока 2, а вместо узлов решения игрока 2 — узлы решения игрока 1. ■

Теперь мы можем вернуться к понятию игры с совершенной информацией и предложить вашему вниманию формальное определение.

Определение 7.C.1. Игра является игрой с *совершенной информацией*, если каждое информационное множество содержит один узел решения. В противном случае игра называется игрой с *несовершенной информацией*.

До этого момента исход игры однозначно определялся теми ходами, которые выбирали игроки. Тем не менее во многих играх существует элемент случайности. Это также может быть отражено в представлении игры в развернутой форме добавлением *случайных ходов природы*. Проиллюстрируем это с помощью еще одной вариации игры *«Орлянка»*, а именно *«Орлянка, версия D»*.

Пример 7.C.5. *«Орлянка, версия D» и ее развернутая форма.* Предположим, что перед тем как начать играть в *«Орлянку, версия B»*, два игрока подбрасывают монету, чтобы определить, кто ходит первым. Таким образом, с равной вероятностью свою монету первым может выкладывать как игрок 1, так и игрок 2. На рис. 7.C.5 дерево этой игры изображено начинающимся с *хода природы* в начальном узле, от которого идут две ветви, каждая с вероятностью 1/2. Обратите внимание, что это выглядит так, будто природа — это еще один игрок, который должен выбрать одно из двух своих действий с заданной вероятностью (на рис. 7.C.5 H обозначает орла, а T соответственно решку). ■

Базовым постулатом в теории игр является то, что все игроки знают структуру игры, знают, что их конкуренты знают, что они знают, и т. д. Используя язык теории игр, мы говорим, что структура игры является *общеизвестной информацией* [см. работы (Aumann, 1976; Milgrom, 1981), в которых обсуждается это понятие].

Кроме того что развернутая форма может быть представлена графически, она может быть описана математически. Базовые компоненты

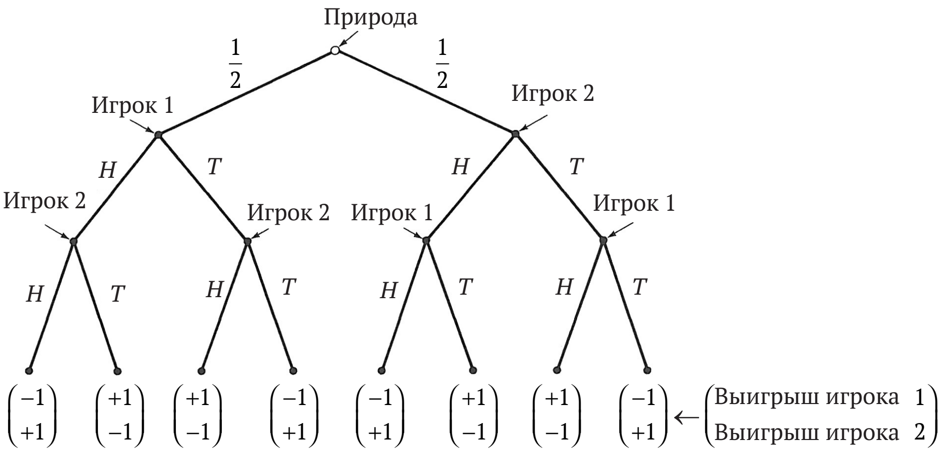


Рис. 7.С.5. Развернутая форма игры «Орлянка, версия D»

довольно легко объясняются и могут помочь запомнить основные элементы игры. Формально игра, представленная в развернутой форме, состоит из следующих элементов[2].

(i) Конечное множество узлов $\mathscr{X}$, конечное множество возможных действий A и конечное множество игроков {1, …, I}.

(*ii*) Функция $p\colon \mathscr{X} \to \{\mathscr{X} \cup \varnothing\}$ определяет единственного непосредственного предшественника каждого узла x; $p(x)$ непусто для всех $x \in \mathscr{X}$, кроме одного узла, который называется *начальным узлом* x_0. Тогда непосредственные последующие узлы для x определяются как $s(x) = p^{-1}(x)$ и множество всех предшествующих и последующих узлов для узла x можно найти, применяя итеративно $p(x)$ и $s(x)$. Чтобы структура была древообразной, эти множества не должны пересекаться (предшественник узла x не может следовать за ним). Множество терминальных узлов обозначим $T = \{x \in \mathscr{X} : s(x) = \varnothing\}$. Все остальные узлы $\mathscr{X} \setminus T$ называются узлами решения.

(*iii*) Функция $\alpha\colon \mathscr{X} \setminus \{x_0\} \to \mathscr{A}$ определяет действие, которое ведет к любому неначальному узлу x от его непосредственного предшественника $p(x)$ и удовлетворяет следующему свойству: если $x', x'' \in s(x)$ и $x' \neq x''$, то $\alpha(x') \neq \alpha(x'')$. Множество альтернатив, доступных в узле решения x, определяется как $c(x) = \{a \in \mathscr{A} : a = \alpha(x')$ для некоторого $x' \in s(x)\}$.

(*iv*) Совокупность информационных множеств $\mathscr{H}$ и функция $H\colon \mathscr{X} \to \mathscr{H}$, ставящая каждый узел решения x в соответствие информационному множеству $H(x) \in \mathscr{H}$. Таким образом, информационные множества

[2] Чтобы быть точными в терминологии, заметим, что набор пунктов с (*i*) по (*vi*) формально известен как развернутая *форма игры*, а добавление пункта (*vii*), описания предпочтений на исходах, определяет *игру*, представленную в развернутой форме. Мы не будем делать различия между этими понятиями. См. работу (Kuhn, 1953) или раздел 2 в работе (Kreps, Wilson, 1982), где обсуждаются это различие и другие моменты, касающиеся развернутой формы.

в $\mathscr{H}$ являются разбиением $\mathscr{X}$. Во всех узлах решения, соответствующих одному информационному множеству, доступны одни и те же действия; формально $c(x) = c(x')$, если $H(x) = H(x')$. Тогда альтернативы, доступные в информационном множестве H, можно записать как $C(H) = \left\{a \in \mathscr{A} : a \in c(x) \text{ для } x \in H\right\}$.

(*v*) Функция $\iota: \mathscr{H} \to \left\{0, 1, \ldots, I\right\}$ для каждого информационного множества в $\mathscr{H}$ определяет игрока (или природу — формально игрока 0), который ходит в узлах решения, принадлежащих этому информационному множеству. Можно обозначить совокупность информационных множеств игрока *i* как $\mathscr{H}_i = \left\{H \in \mathscr{H} : i = \iota\left(H\right)\right\}$.

(*vi*) Функция $\rho: \mathscr{H}_0 \times \mathscr{A} \to \left[0; 1\right]$ ставит в соответствие вероятности действиям в информационных множествах, в которых ходит природа и которые удовлетворяют условиям $\rho(H, a) = 0$, если $a \notin C\left(H\right)$, и $\sum\limits_{\alpha \in C(H)} \rho(H, a) = 1$ для всех $H \in \mathscr{H}_0$.

(*vii*) Набор функций выигрыша $u = \left\{u_1\left(\cdot\right), \ldots, u_n\left(\cdot\right)\right\}$ приписывает полезности игрокам в каждом терминальном узле $u_i : T \to \Re$. Поскольку, как было отмечено в разделе 7.B, мы хотим учесть возможность случайной реализации исходов, то полагаем, что $u_i(\cdot)$ является функцией полезности Бернулли.

Таким образом, формально игра в развернутой форме будет определяться набором

$$\Gamma_E = \left\{\mathscr{X}, \mathscr{A}, I, p\left(\cdot\right), \alpha\left(\cdot\right), \mathscr{H}, H\left(\cdot\right), \iota\left(\cdot\right), \rho\left(\cdot\right), u\right\}.$$

Следует заметить, что в только что приведенной формулировке игры используются три множества с конечным числом элементов. Поскольку в экономических приложениях, обсуждаемых в следующих главах, мы часто будем иметь дело с играми, в которых соответствующие множества имеют бесконечное число элементов, кратко опишем их здесь, хотя и неформально. Формальное определение представления игры в развернутой форме может быть без особого труда обобщено на эти бесконечные случаи, хотя могут иметь место существенные различия в прогнозируемых исходах конечных экономических моделей и моделей, в которых это свойство не выполняется, как мы увидим позже (например, в главах 12 и 20).

Во-первых, мы предположили, что у игроков имеется конечное число действий, доступных в каждом узле решения. Под это описание не попадают игры, в которых, скажем, игроки могут выбрать любое число из некоторого интервала $[a, b] \subset \mathbb{R}$. По сути, если мы допускаем, что множество действий бесконечно, это подразумевает, что и множество узлов решения также бесконечно. Но и с этими изменениями пункты (*i*)–(*vii*) остаются базовыми элементами представления игры в развернутой форме (например, узлы решения и терминальные узлы все еще соединены единственным путем по дереву игры).

Во-вторых, мы описали развернутую форму игры, заканчивающейся через конечное число ходов (поскольку множество узлов решения конечно). И в самом деле, все примеры, которые мы рассмотрели, попадают в эту категорию. Тем не менее существуют и другие виды игр. Например, предположим, что два вечноживущих игрока (возможно, две фирмы) играют в орлянку каждый год 1 января. Игроки дисконтируют полученные или потерянные в будущем денежные суммы в соответствии со ставкой процента r и максимизируют свою дисконтированную чистую выгоду. В этой игре нет терминальных узлов. И тем не менее мы все же можем поставить в соответствие дисконтированные выигрыши обоих игроков каждой (бесконечной) последовательности их ходов. Конечно, на самом деле нарисовать все дерево игры невозможно, но тем не менее базовые элементы развернутой формы можно охарактеризовать, как и раньше (только выигрыши приписываются пути по дереву игры, а не терминальным узлам).

В-третьих, иногда мы можем считать, что в игре принимает участие бесконечное число игроков. Например, эта особенность присуща моделям с перекрывающимися поколениями игроков (как во многих макроэкономических моделях), а также моделям входа на рынок, в которых мы можем допустить существование бесконечного числа потенциальных фирм-претендентов. В подобных играх с этой проблемой можно справиться довольно легко.

Обратите внимание, что все три обобщения требуют ослабления предположения о том, что существует конечное множество узлов. Игры с конечным числом узлов, такие как мы рассматривали выше, известны как конечные игры.

В учебных целях в части II мы будем иметь дело только с конечными играми, за исключением случаев, когда указано иное. Обобщить формальные концепции, которые мы обсудили, для экономических игр, рассматриваемых далее в книге и не являющихся конечными, не представляет труда.

7.D. Стратегии и нормальная форма представления игры

Центральной концепцией теории игр является понятие *стратегии* игрока. Стратегия — это полный, учитывающий все обстоятельства план (или правило принятия решения), в соответствии с которым игрок будет действовать в тех возможных, различимых ситуациях, где он, вероятно, должен будет сделать ход. Напомним, что множество таких ситуаций определяется, с точки зрения игрока, набором его информационных множеств, каждое из которых представляет возможные различимые ситуации, где он, вероятно, должен будет ходить (см. раздел 7.C). Таким образом, стратегия игрока равнозначна описанию того, как он собирается ходить в каждом из своих информационных множеств, если оно окажется достигнутым в ходе игры. Запишем это формально.

Определение 7.D.1. Пусть $\mathscr{H}_i$ — набор информационных множеств игрока i; $\mathscr{A}$ — множество возможных действий в игре; $C(H) \subset \mathscr{A}$ — множество действий, доступных в информационном множестве H. Тогда стратегия игрока i — это функция $s_i\colon \mathscr{H}_i \to \mathscr{A}$, такая что $s_i(H) \in C(H)$ для всех $H \in \mathscr{H}_i$.

Тот факт, что стратегии представляют собой полный, учитывающий все обстоятельства план, невозможно переоценить. И это часто недопонимают те, кто только приступил к изучению теории игр. Игрок формулирует собственную стратегию таким образом, будто бы он должен был до начала игры составить перечень указаний своему гипотетическому представителю, чтобы тот мог действовать от его имени, просто сверяясь с данным перечнем.

Стратегия, будучи полным, обстоятельным планом, часто определяет действия игрока в информационных множествах, которые, возможно, и не будут достигнуты в процессе игры.

Например, в игре крестики-нолики стратегия игрока O указывает, что он должен предпринять в свой первый ход, если игрок X начинает игру, отметив крестиком центральную клетку. Но реальную игру игрок X может начать, например, с нижего правого угла, а не с центральной клетки, что сделает часть плана игрока O уже неактуальной.

На самом деле есть еще более тонкий момент. Стратегия игрока может включать план действий в узлах, которые сама же стратегия делает недостижимыми. Скажем, полный, обстоятельный план для игрока X в игре «Крестики-нолики» включает описание его действий после того, как он сыграет центр, а игрок O затем сыграет в правый нижний угол, даже если, в соответствии с собственной стратегией, он должен сделать первый ход верхний левый угол. Не исключено, что такое требование покажется странным, но его значение станет ясней, когда речь зайдет о динамических играх в главе 9. И тем не менее следует запомнить: стратегия представляет собой полный, учитывающий все обстоятельства план, в соответствии с которым игрок будет действовать в каждом информационном множестве, если он должен будет сделать в нем ход.

Рассмотрим стратегии игроков в разных версиях игры «Орлянка».

Пример 7.D.1. Стратегии в игре «Орлянка, версия B». В игре «Орлянка, версия B» стратегия игрока 1 просто указывает его ход в первоначальном узле решения. У него есть две возможные стратегии. Он может сыграть орла (H) или решку (T). А вот стратегия игрока 2 указывает, как он будет играть (H или T) в каждом из его двух информационных множеств, т. е. что он будет делать, если игрок 1 выберет H, и что он будет делать, если игрок 1 выберет T. Таким образом, у игрока 2 есть четыре возможные стратегии.

Стратегия 1 (s1): играть H, если игрок 1 сыграет H; играть H, если игрок 1 сыграет T.
Стратегия 2 (s2): играть H, если игрок 1 сыграет H; играть T, если игрок 1 сыграет T.
Стратегия 3 (s3): играть T, если игрок 1 сыграет H; играть H, если игрок 1 сыграет T.
Стратегия 4 (s4): играть T, если игрок 1 сыграет H; играть T, если игрок 1 сыграет T. ■

Пример 7.D.2. Стратегии в игре «Орлянка, версия C». В игре «Орлянка, версия C» стратегии игрока 1 точно такие же, как и в версии B. Но у игрока 2 теперь только две возможные стратегии: «играть H» и «играть T», поскольку теперь у него только одно информационное множество. Теперь он не может определять свои действия в зависимости от предыдущих действий игрока 1. ■

Часто нам будет удобно представлять профиль стратегий игроков в игре, в которой I участников, как вектор $s = (s_1, \ldots, s_I)$, где s_i — стратегия, выбранная игроком i. Иногда мы будем записывать профиль стратегий s в виде (s_i, s_{-i}), где s_{-i} — (I – 1)-вектор стратегий всех игроков, кроме i.

Представление игры в нормальной форме

Каждый профиль стратегий $s = (s_1, \ldots, s_I)$ приводит к некоторому исходу игры: последовательности ходов, действительно предпринятых, и вероятностному распределению на терминальных узлах игры. Таким образом, для любого профиля стратегий $(s_1, \ldots, s_I)$ можно определить выигрыши, получаемые каждым игроком. Следовательно, мы можем определить игру в терминах стратегий и связанных с ними выигрышей. Этот второй способ представления игры известен как нормальная, или стратегическая, форма. В сущности, это сжатая версия развернутой формы.

Определение 7.D.2. Для игры с n игроками *представление игры в нормальной форме* Γ_N задает для каждого игрока i множество стратегий S_i (так что $s_i \in S_i$) и функцию выигрыша $u_i(s_1, \ldots, s_I)$, приписывающую уровень полезности Неймана — Моргенштерна каждому, возможно случайному, исходу, возникающему при выборе стратегий $(s_1, \ldots, s_I)$. Формально мы записываем: $\Gamma_N = \left[I,\ \{S_i\},\ \{u_i(\cdot)\}\right]$.

Когда игра записывается в нормальной форме, нет необходимости помнить ряд конкретных ходов, связанных с каждой стратегией. Можно просто пронумеровать все доступные стратегии, записав множество стратегий игрока i как $S_i = \{s_{1i}, s_{2i}, \ldots\}$, и затем ссылаться на каждую стратегию по ее номеру.

Как именно представить игру в нормальной форме, показано в примере 7.D.3 для игры «Орлянка, версия B».

Пример 7.D.3. *Нормальная форма игры «Орлянка, версия B»*. Множество стратегий для обоих игроков мы уже описали в примере 7.D.1. Функции выигрышей задаются как

$$u_1(s_1,\ s_2) = \begin{cases} +1, \text{ если } (s_1,\ s_2) = (\text{H, стратегии 3 или 4) или (T, стратегии 1 или 3)}, \\ -1, \text{ если } (s_1,\ s_2) = (\text{H, стратегии 1 или 2) или (T, стратегии 2 или 4)}, \end{cases}$$

и $u_2(s_1, s_2) = -u_1(s_1, s_2)$. Эту информацию удобно представить в матричной форме, см. рис. 7.D.1. (Строки соответствуют стратегиям игрока 1, а столбцы — стратегиям игрока 2. В каждой ячейке выигрыши игроков записаны как $(u_1(s_1, s_2), u_2(s_1, s_2))$. ■

Упражнение 7.D.2. Изобразите нормальные формы для игр «Орлянка, версия C» и стандартной версии игры «Орлянка».

		Игрок 2			
		s_1	s_2	s_3	s_4
Игрок 1	H	−1, +1	−1, +1	+1, −1	+1, −1
	T	+1, −1	−1, +1	+1, −1	−1, +1

Рис. 7.D.1. Нормальная форма игры «Орлянка, версия B» (в матричном виде)

Идея использования представления игры в нормальной форме для изучения поведения в игре состоит в том, что такое представление позволяет рассматривать проблему принятия решения игроком как проблему выбора им стратегии (учитывающего все обстоятельства плана) при стратегиях, которые, как думает игрок, будут использоваться его конкурентами. Поскольку каждый игрок сталкивается с такой проблемой, мы можем считать, что игроки одновременно выбирают свои стратегии из множеств $\{S_i\}$. Это можно представить так, будто каждый игрок одновременно с другими записал свою стратегию на листе бумаги и передал рефери, который затем определил бы исходы игры в соответствии с представленными стратегиями.

Из предшествующего изложения ясно, что для любого представления игры в развернутой форме существует единственное представление игры в нормальной форме (точнее, единственная с точностью до любого переименования или перенумерации стратегий). А вот обратное неверно. Несколько различных развернутых форм могут быть представлены одной и той же нормальной формой. Например, нормальная форма на рис. 7.D.1 представляет не только развернутую форму на рис. 7.C.1, но и развернутую форму, изображенную на рис. 7.D.2.

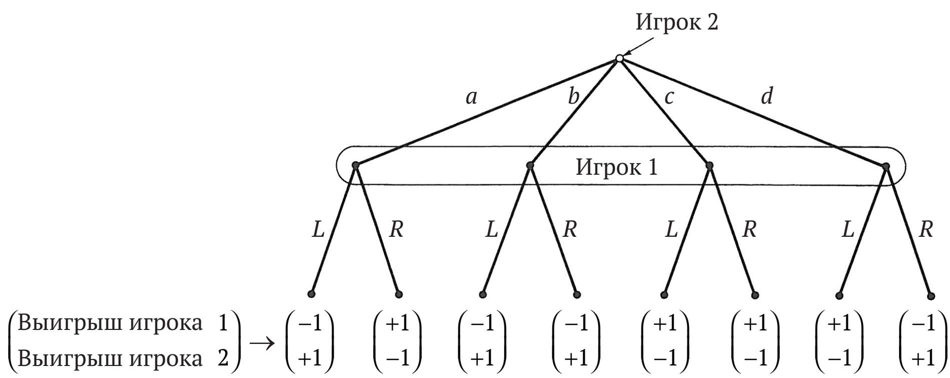


Рис. 7.D.2. Развернутая форма, которая может быть представлена нормальной формой, изображенной на рис. 7.D.1

В последней игре игроки ходят одновременно, игрок 1 выбирает одну из двух стратегий, L и R, а игрок 2 выбирает одну из стратегий a, b, c и d. В терминах их представления единственное различие нормальных форм этих игр состоит в том, что у них разные «подписи» строк и столбцов.

Поскольку в сжатом представлении игры в нормальной форме обычно опускаются некоторые детали, которые присутствуют в развернутой форме, возникает вопрос, насколько важен этот пропуск и содержит ли нормальная форма всю важную информацию о стратегиях. Вопрос можно поставить немного по-другому. Действительно ли сценарий, по которому игроки одновременно записывают свои стратегии и передают их рефери, эквивалентен сценарию, по которому игра разворачивается во времени, как описывается в развернутой форме? В настоящее время этот вопрос является предметом споров специалистов в теории игр. Дискуссии касаются моментов, возникающих в динамических играх, подобных тем, что изучаются в главе 9.

Для игр с одновременными ходами, которые мы будем изучать в главе 8, где все игроки выбирают свои действия в одно и то же время, нормальная форма содержит всю важную информацию о стратегиях. В играх с одновременными ходами стратегии игроков — это просто непротиворечивый выбор действий. В этом случае одновременный выбор игроками стратегий в нормальной форме эквивалентен одновременному выбору действий в развернутой форме (в которой игроки не видят выбора друг друга).

7.E. Рандомизированный выбор

До настоящего момента мы предполагали, что игроки делают свой выбор детерминированно. Тем не менее нет причин априори исключать возможность того, что игроки могут рандомизировать, когда сталкиваются с проблемой выбора. В главах 8 и 9 мы увидим, что при определенных обстоятельствах возможность рандомизации может играть важную роль в анализе игры.

Как следует из определения 7.D.1, детерминированная стратегия для игрока i, которую мы теперь назовем *чистой стратегией*, определяет детерминированный выбор $s_i(H)$ в каждом информационном множестве игрока $H \in \mathscr{H}_i$. Предположим, что (конечное) множество чистых стратегий игрока i — это S_i. Один из способов рандомизации для игрока состоит в том, чтобы выбрать случайным образом один элемент из этого множества. Данный вид рандомизации приводит к тому, что принято называть *смешанной стратегией*.

Определение 7.E.1. При заданном (конечном) множестве чистых стратегий S_i *смешанная стратегия* игрока i, $\sigma_i : S_i \to [0; 1]$ ставит в соответствие каждой чистой стратегии $s_i \in S_i$ вероятность $\sigma_i(s_i) \geq 0$, с которой игрок использует эту стратегию, где $\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$.

Предположим, что у игрока i есть M чистых стратегий, представленных множеством $S_i = \{s_{1i}, \ldots, s_{Mi}\}$. Следовательно, множество возможных смешанных стратегий игрока i должно соответствовать точкам симплекса (вспомните, как мы использовали симплекс для представления лотерей в главе 6):

$$\Delta(S_i) = \left\{(\sigma_{1i}, \ldots, \sigma_{Mi}) \in \Re^M : \sigma_{mi} \geq 0 \text{ для всех } m = 1, \ldots, M \text{ и } \sum_{m=1}^{M} \sigma_{mi} = 1\right\}.$$

Этот симплекс называется *смешанным расширением* множества S_i. Обратите внимание, что чистая стратегия может трактоваться как особый случай смешанной стратегии, в которой вероятностное распределение на элементах S_i вырождено.

Когда игроки рандомизируют свой выбор на множестве чистых стратегий, то полученные исходы сами по себе случайны, что ведет к распределению вероятностей на терминальных узлах игры. Поскольку для каждого игрока i функция выигрыша является функцией Неймана — Моргенштерна, выигрыш игрока i, заданный профилем смешанных стратегий $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_I)$ для I игроков, равен ожидаемой полезности $E_\sigma[u_i(s)]$, где ожидание взято по вероятностям, которые порождены профилем смешанных стратегий σ на профиле чистых стратегий $s = (s_1, \ldots, s_I)$. Таким образом, если $S = S_1 \times \ldots \times S_I$, то полезность Неймана — Моргенштерна i-го игрока при использовании профиля смешанных стратегий σ имеет вид

$$\sum_{s \in S} \left[\sigma_1(s_1) \cdot \sigma_2(s_2) \cdot \ldots \cdot \sigma_I(s_I) \right] \cdot u_i(s).$$

Это выражение в дальнейшем будем обозначать $u_i(\sigma)$ (что, правда, не совсем корректно). Обратите внимание на следующий факт: полагая, что каждый игрок рандомизирует свой выбор, мы тем самым считаем реализации рандомизации игроков независимыми[3].

Чтобы учесть возможность выбора игроками смешанных стратегий, не нужно менять базовое определение представления игры в нормальной форме. Мы можем просто рассмотреть нормальную форму игры $\Gamma_N = \left[I, \left\{ \Delta(S_i) \right\}, \left\{ u_i(\cdot) \right\} \right]$, в которой множество стратегий расширено так, чтобы включить и чистые, и смешанные стратегии.

Обратите внимание, что точно так же мы можем трактовать формирование игроком его смешанной стратегии. У игрока i есть доступ к частному сигналу θ_i, который равномерно распределен на интервале [0, 1] и не зависит от сигналов других игроков. Игрок формирует смешанную стратегию, ставя свой план действий в зависимость от реализации этого сигнала. То есть он определяет чистую стратегию $s_i(\theta_i) \in S_i$ для каждой реализации θ_i. Мы вернемся к этой альтернативной интерпретации смешанных стратегий в главе 8.

Если же мы используем представление игры в развернутой форме, то для игрока i существует другой способ рандомизации. Игрок может рандомизировать свой выбор не на множестве чистых стратегий в S_i (потенциально очень большом), а отдельно на возможных действиях в каждом своем информационном множестве $H \in \mathscr{H}_i$. Этот способ рандомизации называется *поведенческой стратегией*.

Определение 7.E.2. При заданной развернутой форме игры Γ_E *поведенческая стратегия* игрока i определяет для каждого информационного множества $H \in \mathscr{H}_i$ и действия $a \in C(H)$ вероятность $\lambda_i(a, H) \geq 0$, такую что $\sum_{a \in C(H)} \lambda_i(a, H) = 1$ для всех $H \in \mathscr{H}_i$.

Интуитивно кажется понятным, что для игр с совершенной памятью (а мы будем работать только с ними) два типа рандомизации эквивалентны. Для любой поведенческой стратегии игрока i существует смешанная

[3] Тем не менее в главе 8 мы обсудим возможность того, что рандомизации игроков могут коррелировать.

стратегия этого игрока, дающая точно то же распределение на множестве исходов при любых стратегиях, смешанных или поведенческих, которые могут использоваться конкурентами игрока *i*, и наоборот [этот результат приведен в работе (Khun, 1953); см. упражнение 7.E.1]. Поэтому каждый раз мы будем использовать ту форму рандомизированной стратегии, которая в данном случае более удобна. Обычно мы рассматриваем поведенческие стратегии при анализе представления игры в развернутой форме и смешанные стратегии, когда рассматриваем нормальную форму.

Поскольку способ, которым мы вводим рандомизацию, — это только вопрос удобства анализа, то, допуская некоторую неточность в терминологии, мы будем в дальнейшем называть все рандомизированные стратегии *смешанными стратегиями*.

Литература

Aumann R. (1976). Agreeing to disagree. *Annals of Statistics* **4**: 1236–39.

Kreps D.M., Wilson R. (1982). Sequentia equilibrium. *Econometrica* **50**: 863–94.

Kuhn H.W. (1953). Extensive games and the problm of information. In *Contribution to the Theory of Games*. vol. 2, edited by H.W. Kuhn and A.W. Ticker. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 193–216.

Milgrom P. (1981). An axiomatic characterisation of common knowledge. *Econometrica* **49**: 219–22.

Упражнения

7.C.1[A]. Предположим, что в игре «Встреча в Нью-Йорке» (см. пример 7.B.3) существует два возможных места встречи: центральный вокзал Нью-Йорка и Эмпайр-стейт-билдинг. Изобразите развернутую форму (дерево игры) для этой игры.

7.D.1[B]. Сколько стратегий у игрока i в игре, в которой у игрока i есть N информационных множеств, пронумерованных $n = 1, \ldots, N$, и M_n возможных действий в информационном множестве n?

7.D.2[A]. В тексте.

7.E.1[B]. Рассмотрите игру двух участников, представление которой в развернутой форме (за исключением выигрышей) дано на рис. 7.Ex.1.

a) Какие стратегии есть у игрока 1? У игрока 2?

b) Покажите, что для любой поведенческой стратегии, которую может использовать игрок 1, существует эквивалентная по реализации смешанная стратегия, т. е. смешанная стратегия, которая порождает такое же вероятностное распределение на терминальных узлах для *любой* смешанной стратегии игрока 2.

c) Покажите, что обратное тоже верно: для любой смешанной стратегии игрока 1 существует эквивалентная по реализации поведенческая стратегия.

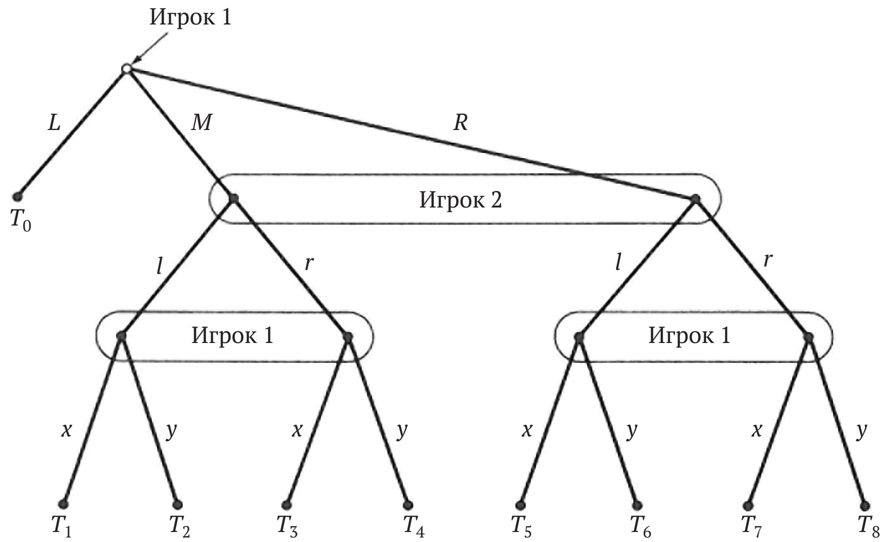


Рис. 7. Ex.1

d) Предположим, мы изменили игру, объединив информационные множества игрока 1, соответствующие его ходу во второй раз (таким образом, все четыре узла теперь принадлежат одному информационному множеству). Покажите, что игра теперь не является игрой с совершенной памятью. Какой из двух результатов, пункта (b) или (c), все еще справедлив?

Глава 8. Игры с одновременными ходами

8.A. Введение

Рассмотрим теперь основной вопрос теории игр: какими должны быть ожидания относительно хода и результатов игры, в которой участвуют рациональные игроки, полностью информированные о структуре игры и рациональности друг друга? В этой главе мы изучим *игры с одновременными ходами*, в которых все игроки ходят только один раз и в одно и то же время. С точки зрения обучения начать с таких игр разумно, поскольку они позволяют нам сосредоточиться на анализе стратегического взаимодействия в простейшей из возможных постановок и избежать вплоть до главы 9 некоторых сложных моментов, возникающих в более общих, динамических играх.

В разделе 8.B мы введем понятия *доминирующей* стратегии и *доминируемой* стратегии. Эти понятия и их обобщение в форме процедуры *последовательного доминирования* позволяют ввести первое и обоснованное ограничение на множество стратегий, которые должны выбирать рациональные игроки.

В разделе 8.C мы обобщим эти идеи, введя понятие *рационализируемой стратегии*. Мы покажем, что игроки будут использовать рационализируемые стратегии, поскольку они обладают общеизвестной информацией о рациональности друг друга и о структуре игры.

К сожалению, во многих играх множество рационализируемых стратегий не позволяет точно прогнозировать поведение игроков. Поэтому в остальных разделах главы мы будем рассматривать концепции решения, позволяющие дать более точные прогнозы, добавив условия «равновесия», относящиеся к поведению игроков.

В разделе 8.D мы начинаем изучать базирующиеся на понятии равновесия концепции решения игр с весьма важной и широко используемой концепции *равновесия по Нэшу*. Эта концепция к предположению об общеизвестности рациональности игроков добавляет следующее требование: ожидания игроков относительно поведения друг друга *верны*. Тем самым мы часто значительно сужаем множество прогнозируемых исходов игры. Мы обсудим разумность этого требования, а также условия, при которых можно гарантировать существование равновесия по Нэшу.

В разделах 8.E и 8.F мы рассмотрим два обобщения концепции равновесия по Нэшу. В разделе 8.E мы разовьем понятие равновесия по Нэшу, для того чтобы иметь возможность анализировать ситуации с *неполной информацией*, когда выигрыши каждого игрока могут до некоторой степени быть известны ему одному. Это приводит нас к концепции *равновесия Байеса — Нэша*. В разделе 8.F мы исследуем возможные последствия того, что с небольшой, но положительной вероятностью игроки, выбирая свои стратегии, могут ошибаться. Мы сформулируем понятие *совершенного равновесия* (*по Нэшу*) *дрожащей руки* (*в нормальной форме*), представляющее собой очередное обобщение концепции равновесия по Нэшу, в котором добавляется требование робастности равновесий к возможным небольшим ошибкам.

В этой главе мы изучим игры с одновременными ходами, используя представление в нормальной форме (см. раздел 7.D). Таким образом, мы используем $\Gamma_N = \left[I, \left\{S_i\right\}, \left\{u_i(\cdot)\right\}\right]$ в случае, если рассматриваем только чистые (нерандомизированные) стратегии, и $\Gamma_N = \left[I, \left\{\Delta\left(S_i\right)\right\}, \left\{u_i(\cdot)\right\}\right]$, когда допускаем, что выбор игроков может быть рандомизированным (см. раздел 7.E, в котором обсуждается рандомизированный выбор). Для каждого игрока i профиль стратегий всех игроков, кроме i, будем обозначать $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_I)$, аналогичный смысл имеет профиль смешанных стратегий σ_{-i}. Будем записывать: $s = (s_i, s_{-i})$ и $\sigma = (\sigma_i, \sigma_{-i})$, а также обозначим $S = S_1 \times \ldots \times S_I$ и $S_{-i} = S_1 \times \ldots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \ldots \times S_I$.

8.B. Доминирующие и доминируемые стратегии

Мы начинаем изучение игр с одновременными ходами с обсуждения прогнозов, которые можно сделать, основываясь на простейшем критерии сравнения доступных стратегий — критерии *доминирования*.

Чтобы максимально упростить анализ, мы первоначально пренебрежем возможностью игроков рандомизировать выбор стратегий. Следовательно, будем рассматривать игру $\Gamma_N = \left[I, \left\{S_i\right\}, \left\{u_i(\cdot)\right\}\right]$, в которой множество стратегий содержит только чистые стратегии.

Рассмотрим игру, матрица выигрышей которой изображена на рис. 8.B.1, известную как «*Дилемма заключенного*». Сюжет в основе игры следующий. Два индивида арестованы по подозрению в совершении серьезного преступления и содержатся в разных камерах. Прокурор пытается добиться признания от каждого заключенного. Каждому в отдельности говорят, что если сознается только он, то получит мягкий приговор на один год, тогда как непризнавшийся заключенный попадет в тюрьму на десять лет. Тем не менее если он единственный не признается, то именно он отсидит в тюрьме десять лет. Если же сознаются оба, то к обоим будет проявлено некоторое снисхождение — каждый получит пять лет. Наконец, если никто не сознается, то все еще останется возможность осудить обоих за менее тяжкое преступление на два года. Каждый игрок минимизирует время в тюрьме (или максимизирует, если рассматриваем отрицательные значения, выигрыши, указанные на рис. 8.B.1).

		Заключенный 2	
		Не сознаваться	Сознаться
Заключенный 1	Не сознаваться	−2, −2	−10, −1
	Сознаться	−1, −10	−5, −5

Рис. 8.B.1. Дилемма заключенного

Каков исход в этой игре? Существует единственный правдоподобный ответ: (сознаться, сознаться). Чтобы понять, почему, обратите внимание, что «сознаться» является лучшей стратегией каждого игрока *независимо от того, что предпримет другой игрок*. Такая стратегия называется *строго доминирующей стратегией*.

Определение 8.B.1. Стратегия $s_i \in S_i$ называется *строго доминирующей стратегией* для игрока i в игре $\Gamma_N = \left[I, \{S_i\}, \{u_i(\cdot)\}\right]$, если для каждого $s'_i \neq s_i$ выполнено $u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i})$ для всех $s_{-i} \in S_{-i}$.

Другими словами, стратегия s_i является строго доминирующей стратегией для игрока i, если она максимизирует его выигрыш при любых стратегиях, которые могут использовать конкуренты игрока i. (Почему используется наречие *строго* в определении 8.B.1, станет понятно, когда мы сформулируем определение 8.B.3.) Если у игрока есть строго доминирующая стратегия, как в игре «Дилемма заключенного», то следует ожидать, что именно ее он и будет использовать.

Примечательно, что, хотя исход (сознаться, сознаться) в «Дилемме заключенного» и является единственно логичным, он не является лучшим исходом для игроков, если рассматривать их как *единое сообщество*. Оба игрока предпочли бы, чтобы никто из них не сознался. Поэтому «Дилемма заключенного» является характерным примером эгоистичного рационального поведения, которое не ведет к социально оптимальному результату.

Одна из возможных трактовок исхода в «Дилемме заключенного» состоит в том, что максимизация заключенным только собственного выигрыша негативно сказывается на выигрыше другого. Отклоняясь от исхода (не сознаваться, не сознаваться), игрок уменьшает срок своего пребывания в тюрьме до 1 года, но увеличивает этот срок на 8 лет для своего партнера (после изучения материала главы 11 мы поймем, что это пример *экстерналий*).

Доминируемые стратегии

Несомненно, что игроки будут использовать строго доминирующие стратегии, если они у них есть, однако такие стратегии редко существуют. Чаще на стратегии s_{-i} конкурентов лучшим ответом является одна стратегия игрока i, а на стратегии s'_{-i} — другая (вспомните стандартную игру

«Орлянка» из главы 7). Но даже в этом случае все еще можно использовать идею доминирования для исключения стратегий, которые никогда не будут выбраны. В частности, следует ожидать, что игрок i не будет использовать *доминируемые* стратегии, для которых найдется альтернативная стратегия, дающая ему бо́льший выигрыш независимо от того, какие стратегии выберут другие игроки.

Определение 8.В.2. Стратегия $s_i \in S_i$ называется *строго доминируемой* стратегией для игрока i в игре $\Gamma_N = \left[I, \left\{S_i\right\}, \left\{u_i(\cdot)\right\}\right]$, если существует другая стратегия $s_i' \in S_i$, такая что для всех $s_{-i} \in S_{-i}$ выполнено

$$u_i\left(s_i', s_{-i}\right) > u_i\left(s_i, s_{-i}\right).$$

В этом случае говорят, что стратегия s_i' *строго доминирует* стратегию s_i.

Опираясь на данное определение, можно переформулировать определение строго доминирующей стратегии (определение 8.В.1) следующим образом: стратегия s_i является строго доминирующей стратегией для игрока i в игре $\Gamma_N = \left[I, \left\{S_i\right\}, \left\{u_i(\cdot)\right\}\right]$, если она строго доминирует любую другую стратегию в S_i.

Пример 8.В.1. Рассмотрите игру, изображенную на рис. 8.В.2. В игре нет строго доминирующих стратегий, но стратегия D игрока 1 строго доминируется стратегией M (а также стратегией U). ■

		Игрок 2	
		L	R
	U	1, −1	−1, −1
Игрок 1	M	−1, 1	1, −1
	D	−2, 5	−3, 2

Рис. 8.В.2. Стратегия D строго доминирует

В определении 8.В.3 вводится родственное, но более слабое понятие доминируемой стратегии, которое тоже важно.

Определение 8.В.3. Стратегия $s_i \in S_i$ называется *слабо доминируемой* стратегией для игрока i в игре $\Gamma_N = \left[I, \left\{S_i\right\}, \left\{u_i(\cdot)\right\}\right]$, если существует другая стратегия $s_i' \in S_i$, такая что для всех $s_{-i} \in S_{-i}$ выполнено

$$u_i\left(s_i', s_{-i}\right) \geq u_i\left(s_i, s_{-i}\right)$$

и для *некоторого* s_{-i} это неравенство выполнено как строгое. В этом случае будем говорить, что стратегия s_i' *слабо доминирует* стратегию s_i. Стратегия является *слабо доминирующей* стратегией для игрока i в игре $\Gamma_N = \left[I, \left\{S_i\right\}, \left\{u_i(\cdot)\right\}\right]$, если она слабо доминирует любую другую стратегию в S_i.

Таким образом, стратегия является слабо доминируемой, если использование другой стратегии дает по крайней мере не меньшие выигрыши при всех s_{-i} и строго бо́льшие для некоторых s_{-i}.

Пример 8.B.2. На рис. 8.B.3 изображена игра, в которой у игрока 1 есть две слабо доминируемые стратегии, *U* и *M*. Обе слабо доминируются стратегией *D*. ■

		Игрок 2	
		L	*R*
	U	5, 1	4, 0
Игрок 1	*M*	6, 0	3, 1
	D	6, 4	4, 4

Рис. 8.B.3. Стратегии *U* и *M* слабо доминируют

В отличие от строго доминируемых стратегий, стратегии, которые являются слабо доминируемыми, нельзя отбросить исключительно на основании принципов рациональности. Для любой альтернативной стратегии, которую игрок *i* может выбрать, существует по крайней мере один профиль стратегий конкурентов, в ответ на который слабо доминируемая стратегия дает не худший результат. Например, в игре на рис. 8.B.3 игрок 1, основываясь на рациональности, может выбрать *M*, если он *абсолютно уверен*, что игрок 2 будет играть *L*. Однако если игрок 1 полагает, что вероятность выбора игроком стратегии *R* больше нуля (неважно, насколько она мала), то для него *M* больше не является рациональным выбором. Таким образом, как следствие *осторожности*, стратегия *M* отбрасывается. В общем случае если игроки полагают, что существует положительная вероятность выбора любой стратегии конкурента, то слабо доминируемые стратегии можно игнорировать. Мы не будем развивать эту идею здесь, а вернемся к ней в разделе 8.F. Пока же будем по-прежнему считать, что у игроков могут быть любые предположения об игре оппонентов, в том числе и абсолютно определенные.

Последовательное удаление строго доминируемых стратегий

Как уже отмечалось, исключение строго доминируемых стратегий редко приводит к единственному прогнозу в игре (например, вспомните игру на рис. 8.B.2). Однако логику исключения строго доминируемых стратегий можно обобщить, как показано в примере 8.B.3.

Пример 8.B.3. На рис. 8.B.4 приведена модификация «Дилеммы заключенного», которую мы назвали «*Брат окружного прокурора*».

Сюжет игры (несколько надуманный!) теперь следующий. Один из заключенных, например 1, — брат окружного прокурора. У окружного прокурора есть некоторая свобода действий в выборе наказания, и, в частности, он может отпустить заключенного 1, если ни один из заключенных не сознается. Теперь если заключенный 2 сознается, то заключенному 1 тоже следует сознаться, но если заключенный 2 выберет стратегию «не сознаваться», то лучшим ответом для заключенного 2 становится стратегия «не сознаваться». Таким образом, нельзя отбросить ни одну из стратегий заключенного 1 как доминируемую, а следовательно, исключение строго доминируемых (равно как и слабо доминируемых) стратегий не приводит к единственному прогнозу.

И тем не менее получить единственный прогнозируемый исход все же возможно, если обобщить логику исключения строго доминируемых стратегий. Заметим, что стратегия «не сознаваться» все еще является строго доминируемой для игрока 2. И если заключенный 1 исключает возможность выбора игроком 2 стратегии «не сознаваться», то стратегия «сознаться» для заключенного 1 становится, несомненно, оптимальным действием, т. е. она является строго доминирующей стратегией, как только строго доминируемая стратегия игрока 2 отбрасывается. Таким образом, единственный прогнозируемый исход в игре «Брат окружного прокурора» должен остаться прежним: (сознаться, сознаться). ■

		Заключенный 2	
		Не сознаваться	Сознаться
Заключенный 1	Не сознаваться	0, −2	−10, −1
	Сознаться	−1, −10	−5, −5

Рис. 8.B.4. Игра «Брат окружного прокурора»

Обратите внимание, что для решения игры из примера 8.B.3 мы воспользовались тем, что выигрыши игроков являются общеизвестной информацией, а также тем, что игроки рациональны. Для исключения строго доминируемых стратегий требуется только рациональность каждого из игроков. Однако для процедуры, которую мы только что проделали, требуется не только рациональность заключенного 2, но и чтобы игрок 1 *знал*, что заключенный 2 рационален. Другими словами, игроку не нужно ничего знать о выигрышах оппонента или быть уверенным в его рациональности, чтобы исключить из анализа строго доминируемые стратегии как собственный выбор, но такая информация *необходима*, чтобы исключить из анализа одну из своих стратегий на основании того, что она является доминируемой в случае, если его оппоненты никогда не выберут *свои* доминируемые стратегии.

В общем случае, если мы готовы предположить, что все игроки рациональны и что этот факт, так же как и выигрыши игроков, является общеизвестной информацией (т. е. каждый знает, что каждый знает, что… каждый игрок рационален), то мы можем и не останавливаться после двух итераций. Мы можем исключить не только строго доминируемые стратегии и стратегии, которые являются строго доминируемыми после первого удаления стратегий, но также стратегии, которые являются строго доминируемыми после *следующего* удаления, и т. д. Заметим, что после каждого исключения стратегий может оказаться, что некоторые из оставшихся стратегий стали доминируемыми, поскольку, чем меньше стратегий, которые могут выбрать оппоненты игрока, тем более вероятно, что какая-нибудь из его стратегий окажется доминируемой. Однако каждая дополнительная итерация подразумевает, что информация игроков о рациональности друг друга должна быть еще «на уровень глубже». Игрок должен знать не только, что его конкуренты рациональны, но также что они знают, что он рационален, и т. д.

Особенность процесса последовательного исключения строго доминируемых стратегий состоит в том, что порядок удаления не влияет на множество остающихся стратегий (см. упражнение 8.B.4). То есть если в некоторый момент оказалось, что несколько стратегий (одного или нескольких игроков) являются строго доминируемыми, то мы можем исключить их все сразу или же в любой последовательности, и это не повлечет изменений множества стратегий, которые мы получим. И это большая удача, поскольку нас бы не устроило, если бы прогноз зависел от произвольно выбранного порядка отбрасывания.

В упражнении 8.B.5 дан интересный пример игры, в которой последовательное отбрасывание строго доминируемых стратегий приводит к единственному прогнозу. Это «*дуополия Курно*» (мы обсудим ее детально в главе 12).

Последовательное удаление *слабо* доминируемых стратегий обосновать сложнее. Как уже отмечалось, довод в пользу удаления слабо доминируемой стратегии игрока i базируется на том, что игрок допускает возможность появления любой комбинации стратегий своих конкурентов с положительной вероятностью. Тем не менее эта гипотеза противоречит логике последовательного удаления, которая как раз и подразумевает, что исключаемые стратегии, как ожидается, не будут использованы. Эта несогласованность приводит к тому, что процедура последовательного исключения слабо доминируемых стратегий имеет весьма неприятную особенность, заключающуюся в том, что прогноз *может* зависеть от порядка удаления. В качестве примера рассмотрим игру на рис. 8.B.3. Если сначала исключить стратегию U, то затем исключим стратегию L, а после этого можем исключить стратегию M. Таким образом, наш прогноз — это (D, R). Если же первой мы исключим стратегию M, то затем исключим стратегию R и после этого можем исключить стратегию U. И теперь наш прогноз — это (D, L).

Возможность использования смешанных стратегий

Если мы допускаем, что игроки могут рандомизировать свой выбор на множестве чистых стратегий, то определение строго доминируемых и доминирующих стратегий обобщается следующим образом.

Определение 8.B.4. Стратегия $\sigma_i \in \Delta(S_i)$ называется *строго доминируемой* для игрока i в игре $\Gamma_N = \left[I, \{\Delta(S_i)\}, \{u_i(\cdot)\}\right]$, если существует другая стратегия $\sigma_i' \in \Delta(S_i)$, такая что для всех $\sigma_{-i} \in \prod_{j \neq i} \Delta(S_j)$ выполнено

$$u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}).$$

В этом случае мы говорим, что стратегия σ_i' *строго доминирует* стратегию σ_i. Стратегия σ_i называется *строго доминирующей стратегией* игрока i

в игре $\Gamma_N = \left[I, \{\Delta(S_i)\}, \{u_i(\cdot)\}\right]$, если она строго доминирует любую другую стратегию в $\Delta(S_i)$.

Используя это определение и структуру смешанных стратегий, можно еще кое-что сказать о множестве строго доминируемых стратегий в игре $\Gamma_N = \left[I, \{\Delta(S_i)\}, \{u_i(\cdot)\}\right]$.

Заметим сначала, что, когда мы проверяем, доминирует ли стратегия σ_i' игрока i стратегию σ_i, требуется рассмотреть только выигрыши, которые получает игрок i, используя эти две стратегии в ответ на *чистые* стратегии своих оппонентов. То есть

$$u_i\left(\sigma_i', \sigma_{-i}\right) > u_i\left(\sigma_i, \sigma_{-i}\right) \text{ для всех } \sigma_{-i}$$

тогда и только тогда, когда

$$u_i\left(\sigma_i', s_{-i}\right) > u_i\left(\sigma_i, s_{-i}\right) \text{ для всех } s_{-i}.$$

Это действительно так, поскольку можно записать

$$u_i\left(\sigma_i', \sigma_{-i}\right) - u_i\left(\sigma_i, \sigma_{-i}\right) = \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \left[\prod_{k \neq i} \sigma_k(s_k)\right]\left[u_i(\sigma_i', s_{-i}) - u_i(\sigma_i, s_{-i})\right].$$

Данное выражение положительно для всех σ_{-i} тогда и только тогда, когда величина $\left[u_i\left(\sigma_i', s_{-i}\right) - u_i\left(\sigma_i, s_{-i}\right)\right]$ больше нуля для всех s_{-i}. Одно из следствий этого результата сформулировано в качестве утверждения 8.B.1.

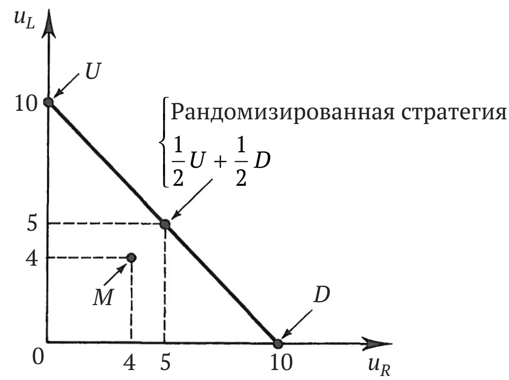
Утверждение 8.B.1. Чистая стратегия $s_i \in S_i$ игрока i является строго доминируемой в игре $\Gamma_N = \left[I, \{\Delta(S_i)\}, \{u_i(\cdot)\}\right]$ тогда и только тогда, когда существует другая стратегия $\sigma_i' \in \Delta\left(S_i\right)$, такая что $u_i\left(\sigma_i', s_{-i}\right) >$ $> u_i\left(s_i, s_{-i}\right)$ для всех $s_{-i} \in S_{-i}$.

Другими словами, чтобы проверить, является ли чистая стратегия s_i доминируемой в ситуации, когда возможна рандомизация, к условию, указанному в определении 8.B.2, нужно только добавить проверку, найдется ли смешанная стратегия игрока i, дающая больший выигрыш, чем s_i, при любом возможном профиле чистых стратегий конкурентов игрока i.

На самом деле это новое требование может привести к исключению дополнительных чистых стратегий, поскольку может оказаться, что чистая стратегия s_i доминируется только рандомизированной комбинацией других чистых стратегий; т. е. чтобы доминировать стратегию, даже чистую, может потребоваться рассмотреть альтернативные рандомизированные стратегии. Для наглядности рассмотрим игру, изображенную на рис. 8.B.5 (a). У игрока 1 три стратегии: U, M и D. Заметим, что стратегия U — прекрасный ответ, если игрок 2 выберет стратегию L, но плохой, если игрок 1 выберет стратегию R, а стратегия D — прекрасный ответ на R, но плохой на L. С другой стороны, выбор стратегии M — хороший, хоть и не потрясающий, ответ и на L, и на R. Ни одна из этих трех чистых стратегий не является строго доминируемой двумя другими. Но если мы допускаем, что игрок 1 может рандомизировать, то смешивание стратегий U и D с вероятностями $^1/_2$ принесет игроку 1 ожидаемый выигрыш, равный 5, независимо от выбора игрока 2, т. е. стратегия M становится строго доминируемой (напомним, что выигрыши — это значения функции полезности Неймана — Моргенштерна). Это показано на рис. 8.B.5 (b), на котором в пространстве $\mathbb{R}^2$ отмечены ожидаемые выигрыши игрока 1 при использовании стратегий U, Игрок 2

		L	R
Игрок 1	U	10, 1	0, 4
	M	4, 2	4, 3
	D	0, 5	10, 2

(a)



(b)

Рис. 8.B.5. Доминирование чистой стратегии рандомизированной стратегией

D, M и рандомизированной стратегии $^1/_2U + {^1/_2}D$ (по оси u_R отмечены ожидаемые выигрыши игрока 1, если игрок 2 выбирает R, соответственно по оси u_L — ожидаемые выигрыши, если игрок 2 выбирает L). Ожидаемые выигрыши при использовании стратегий, при которых рандомизируются стратегии U и D, и в частности от использования рандомизированной стратегии $^1/_2U + {^1/_2}D$, лежат на отрезке, соединяющем точки (0, 10) и (10, 0). Как можно заметить, выигрыши при выборе $^1/_2U + {^1/_2}D$ строго больше выигрышей при выборе стратегии M.

Теперь, когда мы охарактеризовали множество недоминируемых чистых стратегий игрока i, нужно понять, какие же смешанные стратегии являются недоминируемыми. Можно исключить любую смешанную стратегию, которая использует доминируемую чистую стратегию. Если чистая стратегия s_i является строго доминируемой для игрока i, то любая смешанная стратегия, в которой эта стратегия выбирается с положительной вероятностью, также является строго доминируемой.

Упражнение 8.B.6. Покажите, что если чистая стратегия s_i является строго доминируемой стратегией в игре $\Gamma_N = \left[I, \left\{\Delta(S_i)\right\}, \left\{u_i(\cdot)\right\}\right]$, то любая смешанная стратегия, в которой s_i выбирается с положительной вероятностью, также является строго доминируемой.

Но это не единственные смешанные стратегии, которые могут оказаться доминируемыми. Смешанные стратегии, в которых используются недоминируемые чистые стратегии, тоже могут быть доминируемыми. Например, если бы стратегия M в игре на рис. 8.B.5 (a) давала игроку 1 выигрыш 6 в ответ на любую стратегию игрока 2, то, хотя стратегии U и D по-прежнему не были бы строго доминируемыми, стратегия M строго доминировала бы рандомизированную стратегию $^1/_2U + {^1/_2}D$ (посмотрите, где лежала бы на рис. 8.B.5 (b) точка (6, 6)).

Таким образом, чтобы найти множество строго доминируемых стратегий игрока i в игре $\Gamma_N = \left[I, \left\{\Delta(S_i)\right\}, \left\{u_i(\cdot)\right\}\right]$, мы можем сначала исключить строго доминируемые чистые стратегии в соответствии с критерием утверждения 8.B.1. Обозначим множество недоминируемых чистых стратегий игрока i как $S_i'' \subset S_i$. Затем исключим все доминируемые смешанные стратегии из множества $\Delta\left(S_i''\right)$. Оставшиеся стратегии как раз и составляют множество недоминируемых стратегий игрока i (чистых и смешанных).

Как и в случае чистых стратегий, мы можем обобщить логику отбрасывания в игре $\Gamma_N = \left[I, \{\Delta(S_i)\}, \{u_i(\cdot)\}\right]$, воспользовавшись процедурой последовательного исключения. Из приведенного обсуждения понятно, что такая процедура осуществляется в два этапа. На первом этапе проводится последовательное исключение доминируемых чистых стратегий в соответствии с критерием утверждения 8.B.1, который используется для выявления доминируемых чистых стратегий после каждого исключения. Обозначим оставшиеся множества чистых стратегий $\left\{\bar{S}_1^u, \ldots, \bar{S}_I^u\right\}$. На втором этапе исключаются доминируемые смешанные стратегии, принадлежащие множествам $\left\{\Delta\left(\bar{S}_1^u\right), \ldots, \Delta\left(\bar{S}_I^u\right)\right\}$.

8.C. Рационализируемые стратегии

В разделе 8.B мы исключили из анализа строго доминируемые стратегии, поскольку при любых ожиданиях относительно выбора стратегий других игроков рациональный игрок никогда не выберет такую стратегию. Для обоснования последовательного удаления строго доминируемых стратегий мы использовали предпосылку о том, что рациональность каждого игрока и структура игры являются общеизвестной информацией.

Однако такая информированность игроков о рациональности каждого из них и о структуре игры позволяет нам исключить больше, чем только последовательно строго доминируемые стратегии. В данном разделе мы развиваем эту идею, вводя понятие рационализируемых стратегий. Множество рационализируемых стратегий состоит только из таких стратегий, которые могут быть выбраны участниками игры, в которой структура игры и рациональность игроков являются общеизвестной информацией. На протяжении всего раздела мы рассматриваем игры $\Gamma_N = \left[I, \{\Delta(S_i)\}, \{u_i(\cdot)\}\right]$ (т. е. выбор смешанных стратегий допускается).

Начнем с определения 8.C.1.

Определение 8.C.1: В игре $\Gamma_N = \left[I, \{\Delta(S_i)\}, \{u_i(\cdot)\}\right]$ стратегия σ_i является наилучшим ответом i-го игрока на стратегии его соперников σ_{-i}, если

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i', \sigma_{-i})$$

для любых $\sigma_i' \in \Delta(S_i)$. Стратегия σ_i *никогда не будет наилучшим ответом*, если не существует σ_{-i}, для которых σ_i была бы наилучшим ответом.

Стратегия σ_i является наилучшим ответом на σ_{-i}, в случае если она представляет собой оптимальный выбор i-го игрока, полагающего, что его соперники будут играть σ_{-i}. Стратегия i-го игрока σ_i никогда не будет наилучшим ответом, если i-й игрок не ожидает выбора соперниками стратегий

σ_{-i}, которые обосновывали бы выбор стратегии σ_i[1]. Очевидно, игроку не следует играть стратегию, которая никогда не может быть наилучшим ответом.

Заметим, что строго доминируемая стратегия никогда не может быть наилучшим ответом. Однако в общем случае некоторые стратегии никогда не могут быть наилучшими ответами, даже если не являются строго доминируемыми (более подробное обсуждение этой зависимости приведено в конце данного раздела и выделено мелким шрифтом). Таким образом, если исключить стратегии, которые никогда не могут быть наилучшим ответом, то будут исключены по крайней мере строго доминируемые стратегии и, может быть, некоторые другие.

Кроме того, как и в случае строго доминируемых стратегий, использование предпосылки о том, что информация о рациональности и структуре игры является общеизвестной, позволяет последовательно удалять стратегии, которые никогда не будут наилучшим ответом. В частности, рациональный игрок не должен выбирать стратегию, которая никогда не будет наилучшим ответом, раз он однажды исключил возможность того, что любой из его соперников может играть стратегию, которая никогда не является его наилучшим ответом, и т. д.

В равной степени важно, что стратегии, которые остаются после такого последовательного удаления, могут быть обоснованы или рационализированы рациональным игроком, с некоторыми разумными предположениями о выборе его соперников, т. е. при допущении, что не предполагается, что какой-то игрок выберет стратегию, которая никогда не будет наилучшим ответом, или стратегию, которая является наилучшим ответом только при предположении, что кто-то другой будет играть такую стратегию, и т. д. (Пример 8.C.1 иллюстрирует данную идею.) В результате набор стратегий, оставшихся после процесса такого последовательного удаления, можно определенно назвать множеством стратегий, которые могут быть сыграны рациональными игроками в игре, в которой рациональность игроков и структура игры являются общеизвестной информацией. Их называют рационализируемыми стратегиями [концепция была предложена независимо в работах (Bernheim, 1984; Pearce, 1984)].

---

[1] Мы говорим здесь так, будто догадки игроков обязательно являются детерминированными в том смысле, что игрок уверен, что его соперники будут играть определенный профиль смешанных стратегий σ_{-i}. Может возникнуть идея о вероятностных предположениях, т. е. принимающих форму невырожденного вероятностного распределения на возможных профилях смешанных стратегий его соперников. Фактически стратегия σ_i является оптимальным выбором i-го игрока при данном вероятностном предположении (в соответствии с которым выбор оппонентов интерпретируется как независимая случайная переменная), только если она является оптимальным выбором при некотором детерминированном предположении. Причина состоит в том, что если σ_i является оптимальным выбором при вероятностном предположении, то тогда она должна быть наилучшим ответом на профиль смешанных стратегий σ_{-i}, в котором любой возможный профиль чистых стратегий $s_{-i} \in S_{-i}$ используется с точно такой же «сложной» вероятностью, подразумеваемой вероятностным предположением.

Определение 8.С.2: В игре $\Gamma_N = \left[I, \left\{\Delta\left(S_i\right)\right\}, \left\{u_i(\cdot)\right\}\right]$ стратегии из $\Delta(S_i)$, остающиеся после последовательного удаления стратегий, которые никогда не являются наилучшим ответом, называются рационализируемыми стратегиями i-го игрока.

Заметим, что рационализируемых стратегий не может быть больше стратегий, оставшихся после последовательного удаления строго доминируемых стратегий, поскольку на каждой стадии итеративного процесса в определении 8.С.2 все стратегии, которые строго доминируются на данной стадии, исключаются. Как и в случае последовательного удаления строго доминируемых стратегий, порядок удаления стратегий, которые никогда не являются наилучшим ответом, не может повлиять на множество стратегий, которые останутся в итоге (см. упражнение 8.С.2).

Пример 8.С.1. Рассмотрим изображенную на рис. 8.С.1 игру из работы (Bernheim, 1984). Каким будет множество рационализируемых чистых стратегий для двух игроков? На первом этапе исключения мы можем удалить стратегию b_4, которая никогда не будет наилучшим ответом, поскольку строго доминируется стратегией, в соответствии с которой игрок выбирает стратегии b_1 и b_3 с вероятностью $^1/_2$ каждую. Поскольку стратегия b_4 исключена, стратегию a_4 тоже можно исключить, так как она доминируется стратегией a_2 после удаления b_4. С этого момента никакую другую стратегию вычеркнуть нельзя: a_1 является наилучшим ответом на b_3, a_2 наилучшим ответом на b_2, и a_3 наилучший ответ на b_1. Аналогично можно проверить, что каждая из стратегия b_1, b_2 и b_3 является наилучшим ответом на одну из стратегий a_1, a_2 и a_3. Таким образом, множество рационализируемых чистых стратегий 1-го игрока — это стратегии $\{a_1, a_2, a_3\}$, а множество $\{b_1, b_2, b_3\}$ — множество рационализируемых стратегий 2-го игрока.

Игрок 2

Игрок 1		b_1	b_2	b_3	b_4
	a_1	0, 7	2, 5	7, 0	0, 1
	a_2	5, 2	3, 3	5, 2	0, 1
	a_3	7, 0	2, 5	0, 7	0, 1
	a_4	0, 0	0, -2	0, 0	10, -1

Рис. 8.С.1. $\{a_1, a_2, a_3\}$ — рационализируемые стратегии 1-го игрока, $\{b_1, b_2, b_3\}$ — рационализируемые стратегии 2-го игрока

Заметим, что для каждой из этих рационализируемых стратегий игрок может выстроить цепочку обоснований своего выбора, никогда не основываясь на предположении о том, что другой игрок может использовать стратегию, которая никогда не будет наилучшим ответом[2]. Например, в игре на рис. 8.С.1 1-й игрок может обосновать выбор a_2 ожиданием, что 2-й игрок выберет стратегию b_2, выбор которой 1-й игрок может обосновать ожиданием, что 2-й игрок будет думать, что 1-й игрок со-

[2] Фактически этот подход «цепи обоснований» к определению множества рационализируемых стратегий использовался в первоначальном определении этого понятия [за формальной трактовкой обратитесь к (Bernhein, 1984; Pearce, 1984)].

бирается выбрать a_2, что разумно, если игрок 1 ожидает, что 2-й игрок думает, что он, 1-й игрок, полагает, что 2-й игрок выберет b_2, и т. д. Таким образом, 1-й игрок может сконструировать (бесконечную) цепочку обоснований для игры стратегии a_2 $(a_2, b_2, a_2, b_2, \ldots)$, где каждый элемент обосновывает использование следующего элемента.

Подобным образом 1-й игрок может рационализировать выбор стратегии a_1 цепочкой обоснований $(a_1, b_3, a_3, b_1, a_1, b_3, a_3, b_1, a_1, \ldots)$. Здесь 1-й игрок обосновывает выбор a_1 ожиданием, что 2-й игрок выберет b_3. Он обосновывает ожидание, что 2-й игрок сыграет b_3, полагая, что 2-й игрок считает, что он, 1-й игрок, выберет a_3. Он объясняет свое ожидание тем, что, по его мнению, 2-й игрок считает, что он, 1-й игрок, ожидает, что 2-й игрок выберет b_1. И так далее.

Предположим, однако, что 1-й игрок попытался обосновать a_4. Он смог бы сделать это, только полагая, что 2-й игрок выберет b_4, но не существует предположения, согласно которому 2-й игрок мог бы обосновать выбор b_4. Следовательно, 1-й игрок не может обосновать игру нерационализируемой стратегии a_4. ■

Можно показать, что при довольно слабых условиях игрок всегда имеет по крайней мере одну рационализируемую стратегию[3]. К сожалению, игроки могут иметь множество рационализируемых стратегий, как в примере 8.C.1. Если мы хотим уменьшить количество прогнозируемых стратегий, нам нужно ввести дополнительные предположения к предпосылке об общеизвестности информации о рациональности. В соответствии с концепцией решения, изучаемой в оставшейся части главы, это делается путем введения требований «равновесия» на выбор стратегий игроками.

Мы сказали, что множество рационализируемых стратегий не больше множества, остающегося после последовательного удаления строго доминируемых стратегий. Однако оказывается, что в случае игр двух игроков ($I = 2$) эти два множества идентичны, поскольку в играх с двумя игроками (смешанная) стратегия σ_i является наилучшим ответом на выбор некоторой стратегии соперником, когда σ_i не является строго доминируемой.

Покажем, что это выглядит убедительным, рассмотрев еще раз игру на рис. 8.B.5 (в упражнении 8.C.3 требуется привести доказательство в общем виде). Предположим, что выигрыши при использовании стратегии M изменены таким образом, что M не является строго доминируемой. Тогда, как показано на рис. 8.C.2, выигрыши при использовании M лежат где-то выше линии, соединяющей точки, соответствующие выигрышам при использовании стратегий U и D. Является ли здесь M наилучшим ответом? Да. Чтобы увидеть это, заметим, что если 2-й игрок играет стратегию R с вероятностью $\sigma_2(R)$, то тогда ожидаемый выигрыш 1-го игрока при выборе стратегии с выигрышами (u_R, u_L) составляет $\sigma_2(R)u_R + + (1 - \sigma_2(R))u_L$. Точки, которые приносят тот же ожидаемый результат, что и стратегия M, лежат, следовательно, на гиперплоскости с нормалью $\big((1 - \sigma_2(R),\ \sigma_2(R)\big)$. Нетрудно видеть, что стратегия M является наилучшим ответом на $\sigma_2(R) = \dfrac{1}{2}$, она приносит ожидаемый выигрыш, строго больший, чем любой ожидаемый выигрыш, достигаемый при выборе стратегий U и/или D.

Однако, если игроков больше двух, могут быть стратегии, которые никогда не являются наилучшими ответами, но и не строго доминируемы. Это связано с тем, что рандомизация игроками является независимой. Если рандомизация соперни-

[3] Например, это так, когда равновесие по Нэшу (определенное в разделе 8.Г) существует.

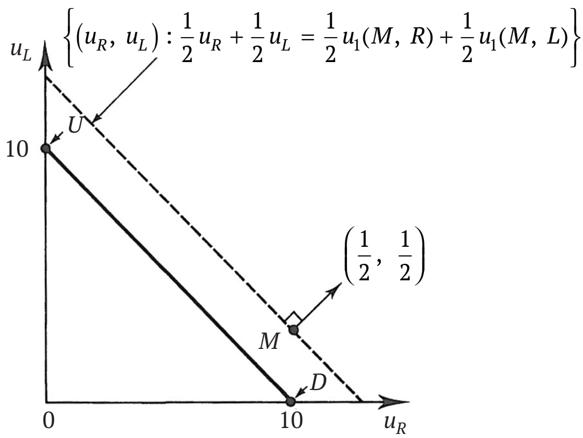


Рис. 8.C.2 В игре с двумя игроками стратегия является наилучшим ответом, если она не является строго доминируемой

ками i-го игрока является коррелированной (мы обсудим, каким образом это может произойти, в конце разделов 8.D и 8.E), эквивалентность возникнет снова. В упражнении 8.C.4 иллюстрируются эти моменты.

8.D. Равновесие по Нэшу

В этом разделе мы представляем и обсуждаем наиболее широко используемую концепцию решения в экономических приложениях теории игр, а именно *равновесие по Нэшу* (по имени автора, изложившего концепцию в работе (Nash, 1951)). Начиная с этого момента и до конца книги мы будем регулярно к ней обращаться.

Для простоты изложения мы сперва исключим возможность рандомизации игроками своих стратегий и ограничимся анализом игры $\Gamma_N = \left[I, \{S_i\}, \{u_i(\cdot)\}\right]$. Возможность рандомизации введем в этом разделе позже.

Начнем с формулировки определения 8.D.1.

Определение 8.D.1. Профиль стратегий $s = (s_1, \ldots, s_I)$ называется *равновесием по Нэшу* в игре $\Gamma_N = \left[I, \{S_i\}, \{u_i(\cdot)\}\right]$, если для каждого $i = 1, \ldots, I$ выполнено

$$u_i\left(s_i, s_{-i}\right) \geq u_i\left(s_i', s_{-i}\right)$$

для всех $s_i' \in S_i$.

Таким образом, в равновесии по Нэшу каждый игрок выбирает стратегию, которая является наилучшим ответом (см. определение 8.C.1) на стратегии, которые *фактически* выбирают его конкуренты. Выделенные курсивом слова показывают, в чем отличие концепции равновесия по Нэшу от концепции рационализируемости, которая была представлена в разделе 8.C. В соответствии с концепцией рационализируемости, базирующейся на предпосылке об общеизвестности игрокам факта рациональности друг друга и структуры игры, требуется только, чтобы стратегия игрока была лучшим ответом на некоторые разумные предположения об игре конкурентов, где прилагательное «разумные» подразумевает, что предположения о выборе конкурентов также могут быть обоснованными. В концепции равновесия по Нэшу к этому добавляется требование, что эти предположения верны.

В примерах 8.D.1 и 8.D.2 показано, каким образом применяется концепция.

Пример 8.D.1. Рассмотрите игру с одновременными ходами, в которой участвуют два игрока (на рис. 8.D.1). Профиль стратегий (M, m) — равновесие по Нэшу. Если игрок 1 выбирает M, то лучший ответ игрока 2 — выбрать m, и аналогично для игрока 2. Более того, (M, m) — единственный профиль (чистых) стратегий, который является равновесием по Нэшу. Например, профиль стратегий (U, r) не может быть равновесием по Нэшу, поскольку в ответ на стратегию r игрока 2 игрок 1 предпочел бы отклониться, выбрав стратегию D. (Самостоятельно проверьте другие варианты). ■

		Игрок 2		
		l	m	r
	U	5,3	0,4	3,5
Игрок 1	M	4,0	5,5	4,0
	D	3,5	0,4	5,3

Рис. 8.D.1. Равновесие по Нэшу

Пример 8.D.2. *Равновесие по Нэшу в игре на рис. 8.C.1.* В этой игре единственный равновесный по Нэшу профиль (чистых) стратегий — это (a_2, b_2). Лучший ответ игрока 1 на b_2 — это a_2, а лучший ответ игрока 2 на a_2 — это b_2. Таким образом, (a_2, b_2) — равновесие по Нэшу.

При любом другом профиле стратегий по крайней мере у одного из игроков есть стимул отклониться. (На самом деле, профиль стратегий (a_2, b_2) является единственным равновесием по Нэшу, даже если допустить возможность рандомизации. См. упражнение 8.D.1.)

Этот пример демонстрирует общую взаимосвязь концепций равновесия по Нэшу и концепции рационализируемых стратегий. *Каждая стратегия из профиля равновесных по Нэшу стратегий рационализируема*, поскольку стратегия каждого игрока в равновесии по Нэшу может быть обоснована равновесными по Нэшу стратегиями других игроков. Таким образом, в общем случае концепция равновесия по Нэшу позволяет получить прогноз, по крайней мере настолько же определенный, насколько позволяет концепция рационализируемости. На самом деле, часто концепция по Нэшу позволяет получить *более* определенный прогноз. Например, в игре на рис. 8.C.1 рационализируемые стратегии a_1, a_3, b_1 и b_3 больше не входят в число прогнозируемых, поскольку для них не выполнено требование того, что ожидания игроков о выборе друг друга должны быть верными. ■

В предыдущих двух примерах использование концепции равновесия по Нэшу позволяет дать единственный прогноз в игре. Однако это не всегда возможно. Рассмотрим игру «Встреча в Нью-Йорке».

Пример 8.D.3. *Равновесие по Нэшу в игре «Встреча в Нью-Йорке»*. На рис. 8.D.2 изображена простая версия игры «Встреча в Нью-Йорке». У м-ра Томаса и м-ра Шеллинга по два варианта выбора. Каждый из них в полдень может прийти либо на смотровую площадку Эмпайр-стейт-билдинг, либо к часам на Центральном вокзале Нью-Йорка. В игре существует два равновесия по Нэшу (если исключить возможность рандомизации): (Эмпайр-стейт-билдинг, Эмпайр-стейт-билдинг) и (Центральный вокзал Нью-Йорка, Центральный вокзал Нью-Йорка). ■

		М-р Шеллинг	
		Эмпайр-стейт-билдинг	Центральный вокзал Нью-Йорка
М-р Томас	Эмпайр-стейт-билдинг	100, 100	0, 0
	Центральный вокзал Нью-Йорка	0, 0	100, 100

Рис. 8.D.2. Равновесие по Нэшу в игре «Встреча в Нью-Йорке»

Пример 8.D.3 демонстрирует, насколько важно в концепции равновесия по Нэшу предположение о верных ожиданиях относительно поведения друг друга. В определении равновесия по Нэшу ничего не сказано о том, *какой* исход следует ожидать, если равновесий много. И тем не менее предполагается, что игроки верно прогнозируют, какой именно исход наступит.

Определение равновесия по Нэшу можно переформулировать в более компактном виде, использовав понятие отображения наилучшего ответа. Формально отображение наилучшего ответа i-го игрока $b_i : S_{-i} \to S_i$ в игре $\Gamma_N = \left[I, \{S_i\}, \{u_i(\cdot)\}\right]$ — это отображение, которое ставит в соответствие каждому набору стратегий других игроков $s_{-i} \in S_{-i}$ множество стратегий i-го игрока, таких что

$$b_i\left(s_{-i}\right) = \left\{s_i \in S_i\colon\ u_i\left(s_i, s_{-i}\right) \geq u_i\left(s_i', s_{-i}\right) \text{ для всех } s_i' \in S_i\right\}.$$

Воспользовавшись этим понятием, можем переформулировать определение равновесия по Нэшу следующим образом. Профиль стратегий $(s_1, \ldots, s_I)$ составляет равновесие по Нэшу в игре $\Gamma_N = \left[I, \{S_i\}, \{u_i(\cdot)\}\right]$ тогда и только тогда, когда $s_i \in b_i(s_{-i})$ для $i = 1, \ldots, I$.

Обсуждение концепции равновесия по Нэшу

Какие у нас есть основания ожидать, что предположения игроков об игре друг друга окажутся верны? А точнее, почему нас интересует именно концепция равновесия по Нэшу?

Для обоснования концепции равновесия по Нэшу был предложен ряд аргументов, и, несомненно, вам эти аргументы покажутся в разной степени убедительными. Более того, один аргумент может показаться весьма разумным для одного приложения, но весьма неубедительным для другого. До недавнего времени все эти аргументы были неформальными, как и наше дальнейшее обсуждение. Обоснованность концепции равновесия по Нэшу — один из самых важных открытых вопросов в теории игр, в частности, потому, что эта концепция широко используется в приложениях.

(1) *Равновесие по Нэшу как следствие рациональных умозаключений.* Один из аргументов состоит в том, что, поскольку каждый игрок может продумать, каковы же стратегические соображения его оппонентов, рациональность сама по себе подразумевает, что игроки должны быть способны верно спрогнозировать поведение конкурентов. Хотя этот аргумент может показаться убедительным, он ошибочен. Как мы видели в разделе 8.C, тот факт, что рациональность игроков (наряду со структурой игры) является общеизвестной информацией, влечет за собой выбор рационализируемых стратегий. Рациональность необязательно приводит к тому, что прогноз игроков относительно поведения конкурентов верен.

(2) *Равновесие по Нэшу как необходимое условие в случае существования единственного прогнозируемого исхода в игре.* Более удовлетворительная версия предыдущего аргумента состоит в том, что если в игре существует единственный прогнозируемый исход, то рациональные игроки должны это понимать. Поэтому, для того чтобы ни один из игроков не хотел отклониться, этот прогнозируемый исход и должен быть равновесием по Нэшу. В немного другой формулировке (как в работе (Kreps, 1990)): если игроки полагают и разделяют ожидания, что существует *очевидный* (в частности, единственный) способ действий в игре, то соответствующие стратегии и должны составлять равновесие по Нэшу.

Конечно, этот аргумент применим, только если в игре существует единственный прогноз относительно выбора игроков. И тем не менее обсуждение рационализируемости в разделе 8.C показывает, что сам по себе факт, что рациональность является общеизвестной информацией, этого не подразумевает. Следовательно, данный аргумент на самом деле полезен только при наличии некоторого обоснования, почему определенный профиль стратегий может быть очевидным способом действий в игре. Остальные аргументы в пользу применения равновесия по Нэшу, которые мы обсудим, могут рассматриваться как комбинации этого аргумента с обоснованием, почему может существовать «очевидный» способ действий в игре.

(3) *Фокальные точки.* Иногда определенные исходы мы называем, следуя работе (Schelling, 1960), *фокальными*. Например, рассмот-

рим игру «Встреча в Нью-Йорке» на рис. 8.D.2 и предположим, что рестораны вокруг Центрального вокзала Нью-Йорка настолько лучше, чем вокруг Эмпайр-стейт-билдинг, что выигрыши от встречи на Центральном вокзале (1000, 1000), а не (100, 100). Тогда выбор Центрального вокзала представляется очевидным способом действий. Кроме того, фокальные исходы могут быть культурологически обусловлены. Как указывал Шеллинг в своей работе, два человека, не являющиеся жителями Нью-Йорка, скорее будут полагать, что встреча на смотровой площадке Эмпайр-стейт-билдинг (знаменитая туристическая достопримечательность) является фокальной, тогда как коренные нью-йоркцы сочтут Центральный вокзал более подходящим выбором. В обоих случаях притягательность одного из исходов естественна. Из обоснования (2) следует, что притягательность такого рода может привести к исходу, который является логичным прогнозом, только если этот исход является равновесием по Нэшу.

(4) *Равновесие по Нэшу как самоподдерживающееся соглашение.* Еще один аргумент в пользу концепции равновесия по Нэшу вытекает из предположения, что игроки до начала игры могут вступать в переговоры без возможности заключать связывающие соглашения. Если игроки договариваются, как играть, соответствующий исход становится естественным кандидатом на реализацию в игре. Тем не менее, поскольку игроки не могут обязать друг друга выбрать стратегии, о которых договорились, любое соглашение, достигнутое игроками, должно быть самоподдерживающимся, если мы хотим, чтобы оно было обоснованным. Следовательно, любое обоснованное соглашение должно соответствовать профилю равновесных по Нэшу стратегий. Конечно, даже если игроки согласились выбирать равновесные по Нэшу стратегии, они все еще могут отклониться, если полагают, что остальные поступят так же. По существу, это обоснование предполагает, что если игроки договорились, какие стратегии выбирать, то соответствующий исход становится фокальной точкой.

(5) *Равновесие по Нэшу как устойчивая традиция.* Определенный ход игры может сложиться, если игра повторяется неоднократно и возникает устойчивая традиция. В этом случае для всех игроков может быть «очевидным», что традиция будет поддерживаться. Другими словами, традиция становится фокальной. В качестве хорошего примера можно рассмотреть игру, в которую нью-йоркцы играют каждый день. Назовем ее «Прогулка по деловой части Манхеттена». Каждый день люди, направляющиеся на работу, решают, по какой стороне тротуара идти. Со временем сложилась устойчивая традиция идти по правой стороне. Традиция поддерживается тем, что если кто-то один отклонится от этого неписаного правила, то будет безжалостно растоптан. *Возможно*, что в какой-то день

индивид может решить идти по левой стороне, полагая, что все остальные думают, что традиция изменилась. И тем не менее прогноз, что мы останемся в равновесии по Нэшу «все идут справа», кажется в этом случае разумным. Заметим, чтобы стать устойчивой традицией, исход должен быть равновесием по Нэшу. Если же исход не является равновесием по Нэшу, то индивиды отклонились бы от него, если в какой-то момент такой исход реализуется.

Понятие равновесия как точки покоя некоторого динамического процесса подстраивания лежит в основе традиционного обращения к понятию равновесия в экономике. В этом смысле обоснование равновесия по Нэшу как устойчивой традиции наиболее близко к подходу экономической теории.

Формально моделировать возникновение устойчивых социальных норм непросто. Одна из сложностей состоит в том, что повторяющаяся однодневная игра может трактоваться как часть динамической игры. Таким образом, когда мы анализируем поведение рациональных игроков, выбирающих стратегии в «большой» игре, мы снова возвращаемся к исходной дилемме. Почему мы должны полагать, что в этой большой игре будет реализовано равновесие по Нэшу? В соответствии с одним из вариантов ответа на подобное замечание, которому в настоящее время пытаются дать формальное обоснование, предполагается, что игроки используют эвристический метод, прикидывая, каким будет поведение их оппонентов в ситуациях, когда игра повторяется (обратите внимание, это подразумевает некоторое ослабление предпосылки о полной рациональности). Например, игрок может полагать, что сегодня оппонент повторит то, что делал вчера. Если так, то каждый день игроки будут выбирать наилучший ответ на вчерашний выбор других игроков. Если возникнет комбинация стратегий, которая является стационарной точкой этого процесса (т. е. игра сегодня развивается таким же образом, как вчера), то соответствующий профиль стратегий должен быть равновесием по Нэшу. Тем не менее непонятно, будет ли процесс из любой начальной точки сходиться к стационарному исходу; оказывается, что сходимость зависит от игры[4].

Равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях

Несложно обобщить определение равновесия по Нэшу для игр, в которых мы допускаем рандомизацию на множестве чистых стратегий.

Определение 8.D.2. *Профиль смешанных стратегий* $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_I)$ составляет равновесие по Нэшу в игре $\Gamma_N = \left[I, \left\{\Delta(S_i)\right\}, \left\{u_i(\cdot)\right\}\right]$, если для любого $i = 1, \ldots, I$ выполнено

$$u_i\left(\sigma_i, \sigma_{-i}\right) \geq u_i\left(\sigma_i', \sigma_{-i}\right)$$

для всех $\sigma_i' \in \Delta\left(S_i\right)$.

[4] Фактически этот подход восходит к предложенной Курно (в работе (Cournot, 1838)) процедуре близорукого подстраивания. Из недавних примеров упомянем работу (Milgrom, Roberts, 1990). Интересно, что эта работа объясняет «сверхрациональный» исход, соответствующий равновесию по Нэшу, с помощью *ослабления* предпосылки о рациональности. Этим подходом можно воспользоваться для определения возможности появления различных равновесий по Нэшу в случае, если существует множественность равновесий.

Пример 8.D.4. В качестве простого примера рассмотрим стандартную версию игры «Орлянка», изображенную на рис. 8.D.3. В этой игре нет равновесия в чистых стратегиях. С другой стороны, интуитивно понятно, что в игре существует равновесие в смешанных стратегиях, в котором каждый игрок выбирает орел или решку с равными вероятностями. Когда игрок рандомизирует таким образом, его конкуренту безразлично, выбирать орел или решку, и, таким образом, конкурент также готов рандомизировать выбор стратегий орел и решка с равными вероятностями. ■

		Игрок 2: Орел	Игрок 2: Решка
Игрок 1	Орел	−1, +1	+1, −1
	Решка	+1, −1	−1, +1

Рис. 8.D.3. Игра «Орлянка»

Неслучайно игрокам, рандомизирующим свой выбор в равновесии по Нэшу в игре «Орлянка», безразлично, что выбрать, орел или решку. Как сформулировано в утверждении 8.D.1, равновесие в смешанных стратегиях в общем случае характеризуется тем, что с положительной вероятностью выбираются те стратегии игрока, которые дают ему одинаковый выигрыш, когда оппоненты выбирают равновесные стратегии.

Утверждение 8.D.1. Обозначим через $S_i^+ \subset S_i$ множество чистых стратегий, которые игрок i выбирает с положительной вероятностью при розыгрыше профиля смешанных стратегий $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_I)$. Профиль стратегий σ является равновесием по Нэшу в игре $\Gamma_N = \left[I, \left\{\Delta\left(S_i\right)\right\}, \left\{u_i(\cdot)\right\}\right]$ тогда и только тогда, когда

(i) $u_i\left(s_i, \sigma_{-i}\right) = u_i\left(s_i', \sigma_{-i}\right)$ для всех $s_i, s_i' \in S_i^+$;

(ii) $u_i\left(s_i, \sigma_{-i}\right) \geq u_i\left(s_i', \sigma_{-i}\right)$ для всех $s_i \in S_i^+$ и всех $s_i' \notin S_i^+$.

Доказательство. Докажем необходимость. Заметим, что если хотя бы одно из условий (i) или (ii) не выполнено, то существуют стратегии $s_i \in S_i^+$ и $s_i' \in S_i$, такие что $u_i\left(s_i', \sigma_{-i}\right) > u_i\left(s_i, \sigma_{-i}\right)$. Тогда игрок i мог бы увеличить свой выигрыш, выбирая стратегию s_i' вместо стратегии s_i.

Докажем достаточность. Предположим, что условия (i) и (ii) выполнены, однако профиль смешанных стратегий σ не является равновесием по Нэшу. Тогда среди игроков есть такой игрок i, для которого существует стратегия σ_i', такая что $u_i\left(\sigma_i', \sigma_{-i}\right) > u_i\left(\sigma_i, \sigma_{-i}\right)$. Но если это так, то должна существовать чистая стратегия s_i', которую игрок i выбирает с положительной вероятностью при игре смешанной стратегии σ_i', такая что $u_i\left(s_i', \sigma_{-i}\right) > u_i\left(\sigma_i, \sigma_{-i}\right)$. Поскольку $u_i\left(\sigma_i, \sigma_{-i}\right) = u_i\left(s_i, \sigma_{-i}\right)$ для всех $s_i \in S_i^+$, это противоречит условиям (i) и (ii). ■

Следовательно, профиль смешанных стратегий σ является равновесием по Нэшу в игре $\Gamma_N = \left[I, \left\{\Delta\left(S_i\right)\right\}, \left\{u_i(\cdot)\right\}\right]$ тогда и только тогда, когда каждому игроку используемые с положительной вероятностью чистые стратегии дают одинаковый выигрыш в ответ на заданные стратегии оппонентов, и этот выигрыш не меньше, чем выигрыши, которые дают стратегии, которые выбираются с нулевой вероятностью.

Из утверждения 8.D.1 следует, что для того, чтобы проверить, является ли профиль стратегий σ равновесием по Нэшу, достаточно проверить, нет ли у игроков стимула отклониться, выбрав одну из чистых стратегий (т. е. заменить стратегию игрока σ_i на некоторую чистую стратегию s_i'). Если ни один из игроков не может увеличить выигрыш, выбрав чистую стратегию вместо смешанной, профиль стратегий σ является равновесием по Нэшу. Таким образом, мы получаем полезный результат, сформулированный в следствии 8.D.1.

Следствие 8.D.1. Профиль чистых стратегий $s = (s_1, \ldots, s_I)$ является равновесием по Нэшу в игре $\Gamma_N = \left[I, \left\{S_i\right\}, \left\{u_i(\cdot)\right\}\right]$ тогда и только тогда, когда этот профиль является равновесием в (вырожденных) смешанных стратегиях в игре $\Gamma_N' = \left[I, \left\{\Delta\left(S_i\right)\right\}, \left\{u_i(\cdot)\right\}\right]$.

Другими словами, чтобы найти равновесия в чистых стратегиях в игре $\Gamma_N' = \left[I, \left\{\Delta\left(S_i\right)\right\}, \left\{u_i(\cdot)\right\}\right]$, достаточно рассмотреть игру $\Gamma_N = \left[I, \left\{S_i\right\}, \left\{u_i(\cdot)\right\}\right]$, в которой рандомизация недопустима.

Кроме того, утверждение 8.D.1 весьма полезно для поиска равновесий в смешанных стратегиях, как это показано в примере 8.D.5.

Пример 8.D.5. *Равновесия в смешанных стратегиях в игре «Встреча в Нью-Йорке».* Попытаемся найти равновесие в смешанных стратегиях в вариации игры «Встреча в Нью-Йорке», в которой выигрыши от встречи на Центральном вокзале равны (1000, 1000). В соответствии с утверждением 8.D.1, если м-р Томас собирается рандомизировать между Эмпайр-стейт-билдинг и Центральным вокзалом, они должны давать ему одинаковый выигрыш. Предположим, м-р Шеллинг выбирает Центральный вокзал с вероятностью σ_s. Тогда, если м-р Томас выберет Центральный вокзал, его ожидаемый выигрыш составит $1000\sigma_s + 0(1 - \sigma_s)$, а если Эмпайр-стейт-билдинг, то ожидаемый выигрыш будет $100(1 - \sigma_s) + 0\sigma_s$. Ожидаемые выигрыши равны только при $\sigma_s = {}^1/_{11}$. Теперь, чтобы м-р Шеллинг выбрал $\sigma_s = {}^1/_{11}$, ему также должно быть безразлично, какую из двух чистых стратегий выбрать. Проведя вычисления, аналогичные приведенным выше, мы найдем, что вероятность, с которой м-р Томас выбирает Центральный вокзал, также должна быть равна ${}^1/_{11}$. Таким образом, делаем вывод, что профиль стратегий, в котором каждый игрок идет к Центральному вокзалу с вероятностью ${}^1/_{11}$, является равновесием по Нэшу. ■

Обратим внимание, что в соответствии с утверждением 8.D.1 игрокам из примера 8.D.5 все равно, какие вероятности приписывать чистым стратегиям, используемым с положительной вероятностью в смешанных стратегиях. Что определяет вероятности, с которыми используются чистые стратегии игрока, так это соображения, касающиеся равновесия: необходимо, чтобы *другому* игроку было безразлично, какую из *его* чистых стратегий использовать.

Этот факт заставляет некоторых экономистов и исследователей, занимающихся теорией игр, искать ответ на вопрос, насколько полезна концепция равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях. Они отмечают две проблемы. Во-первых, если чистые стратегии игроков всегда дают им такой же ожидаемый выигрыш, как и их равновесные смешанные стратегии, непонятно, почему они должны утруждать себя рандомизацией. Один ответ на это замечание состоит в том, что игроки на самом-то деле не рандомизируют свой выбор. Наоборот, они могут делать определенный выбор под влиянием кажущихся несущественными переменных («сигналов»), которые видят только они. Например, рассмотрим, каким образом питчер (подающий) команды из высшей бейсбольной лиги «смешивает свои подачи», чтобы бэттер (отбивающий) не был к ним готов. У питчера может быть абсолютно детерминистский план, но этот план может зависеть от того, с какой ноги он встанет в день игры или от числа светофоров, горевших красным светом, которые он проезжал по дороге на стадион. В результате для бэттера поведение питчера выглядит случайным, хотя оно таковым не является. Мы уже коротко обсудили интерпретацию смешанных стратегий как обусловленных реализацией сигнала в разделе 7.E и рассмотрим ее еще более детально в разделе 8.E.

Второй момент, вызывающий сомнения, — это устойчивость равновесий в смешанных стратегиях. Игроки должны рандомизировать с абсолютно верными вероятностями, но у них нет стимула это делать. Возможный вариант ответа на такое замечание зависит от причин, по которым мы можем ожидать реализации равновесия по Нэшу. Например, использование верных вероятностей плохо объяснимо существованием устойчивой традиции, но выглядит весьма логичным, если равновесие является результатом самоподдерживающегося соглашения.

До этого момента мы предполагали, что игроки рандомизируют независимо. Например, в игре «Встреча в Нью-Йорке» из примера 8.D.5 мы могли описать равновесие в смешанных стратегиях следующим образом. Природа генерирует *приватные и независимо распределенные* сигналы $(\theta_1, \theta_2) \in [0, 1] \times [0, 1]$ двум игрокам, и каждый игрок i приписывает действия различным возможным реализациям сигнала θ_i.

Однако теперь предположим, что существуют также публичные сигналы, которые могут видеть оба игрока. Пусть такой сигнал $\theta \in [0, 1]$. В этом случае появляется много новых возможностей. Например, оба игрока могут решить идти к Центральному вокзалу, если $\theta < \frac{1}{2}$, а к Эмпайр-стейт-билдинг, если $\theta \geq \frac{1}{2}$. По-прежнему каждый игрок выбирает стратегию случайным образом, но теперь координация их действий идеальна, и они всегда встречаются. И, что более важно, эти решения обладают характерной особенностью равновесия. Если один из игроков решит следовать этому правилу решения, то для другого оптимально сделать то же самое. Это пример *коррелированного равновесия* (см. работу (Aumann, 1974)). В общем случае мы можем допустить существование коррелированных равновесий, в которых сигналы природы частично приватные или частично публичные.

Возможность такой корреляции может оказаться весьма важной, поскольку экономические агенты видят много публичных сигналов. Формально коррелированное равновесие — это частный случай концепции равновесия Байеса — Нэша, которую мы рассмотрим в разделе 8.E. Здесь же мы обсуждение завершаем.

Существование равновесия по Нэшу

Всегда ли существует в игре равновесие по Нэшу? К счастью, оказывается, что при достаточно слабых предпосылках ответ на этот вопрос положителен. Здесь мы приводим два из наиболее важных результатов, касающихся существования. Их доказательства, базирующиеся на теореме о неподвижной точке, приведены в приложении A к этой главе. (В утверждении 9.B.1 раздела 9.B сформулирован еще один результат.)

Утверждение 8.D.2. В любой игре $\Gamma_N = \left[I, \left\{\Delta\left(S_i\right)\right\}, \left\{u_i(\cdot)\right\}\right]$, в которой множества $S_1, \ldots, S_I$ содержат конечное число элементов, существует равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях.

Таким образом, для класса игр, которые мы рассматривали, равновесие по Нэшу всегда существует, если мы допускаем рандомизацию игроками. (Если вы хотите убедиться в этом, не разбираясь в доказательстве, попытайтесь выполнить задание упражнения 8.D.6.) Возможность рандомизировать для этого результата существенна. Мы уже видели в (стандартной) игре «Орлянка», например, что в игре с конечным числом чистых стратегий равновесия в чистых стратегиях может и не существовать.

До настоящего момента мы рассматривали игры с конечными множествами стратегий. Тем не менее в экономических приложениях мы часто встречаемся с играми, в которых стратегии естественно моделировать как непрерывные переменные. Это может быть весьма полезным для существования равновесия в чистых стратегиях. В частности, имеет место результат, сформулированный в утверждении 8.D.3.

Утверждение 8.D.3. Равновесие по Нэшу существует в игре $\Gamma_N = \left[I, \left\{S_i\right\}, \left\{u_i(\cdot)\right\}\right]$, если для всех $i = 1, \ldots, I$

(i) множество стратегий S_i — непустое, выпуклое и компактное подмножество некоторого евклидова множества $\mathbb{R}^M$;

(ii) функция выигрыша $u_i(s_1, \ldots, s_I)$ непрерывна по $(s_1, \ldots, s_I)$ и квазивогнута по s_i.

Утверждение 8.D.3 — весьма важный результат, предпосылки этого утверждения выполнены во многих экономических приложениях. Выпуклость множеств стратегий и природа функций выигрыша помогают устранить трудности, позволяя найти равновесие в чистых стратегиях[5].

[5] Заметим, что конечное множество стратегий S_i не может быть выпуклым. Фактически использование смешанных стратегий в утверждении 8.D.2 позволяет нам добиться существования равновесия по аналогии с тем, как предпосылки в утверждении 8.D.3 гарантируют существование равновесия по Нэшу в чистых стратегиях. Использование смешанных стратегий

Равновесие существует и при других предпосылках. В ситуациях, когда функции выигрышей $u_i(\cdot)$ не являются квазивогнутыми, но являются непрерывными, все еще можно доказать существование равновесия по Нэшу. И даже если функции выигрышей не непрерывны, для множества случаев можно показать, что равновесие в смешанных стратегиях существует (см. (Disgupta, Maskin, 1986)).

Разумеется, все эти результаты не означают, что равновесия в игре *не существует*, если предпосылки утверждений не выполнены. Мы только не можем быть *уверены* в его существовании.

8.E. Игры с неполной информацией: равновесие Байеса — Нэша

До этого момента мы предполагали, что игроки обладают всей относящейся к делу информацией друг о друге, включая информацию о выигрышах, которые они получают при различных исходах игры. Такие игры называются играми с *полной информацией*. Однако если задуматься, то несложно понять, что это очень сильное предположение. Всегда ли две фирмы в отрасли знают издержки друг друга? Знает ли руководство фирмы, ведущее переговоры с профсоюзом, издержки членов профсоюза, если они будут бастовать в течение месяца? Очевидно, что ответ на эти вопросы отрицателен. Наоборот, во многих ситуациях игроки обладают так называемой *неполной информацией*.

Неполнота информации может привести к тому, что нам нужно будет анализировать ожидания игроков относительно предпочтений их контрагентов, их ожидания относительно их ожиданий относительно предпочтений и т. д., по аналогии с тем, как мы рассуждали, анализируя рационализируемость[6].

К счастью, существует широко используемый подход, предложенный Харсаньи (Harsanyi, 1967–1968), позволяющий избавиться от необходимости такого анализа. В соответствии с этим подходом предполагается, что предпочтения каждого игрока определяются реализацией некоторой случайной переменной. И хотя точное значение случайной переменной известно только игроку, предпочтения которого эта переменная определяет, априорное вероятностное распределение является общеизвестной информацией для всех остальных игроков. В этом случае ситуация с неполной информацией переинтерпретируется как игра с несовершенной информацией. Природа делает первый ход, выбирая реализацию случайных переменных, определяющих *тип* предпочтений каждого игрока, а каждый игрок видит реализацию только своей случайной переменной. Такие игры называются *байесовскими играми*.

делает выпуклым новое множество стратегий игроков и позволяет получить функции выигрышей, обладающие удобными для доказательства утверждения свойствами (более подробное изложение см. в приложении A).

[6] Более детальное обсуждение вопроса можно найти в работе (Mertens, Zamir, 1985).

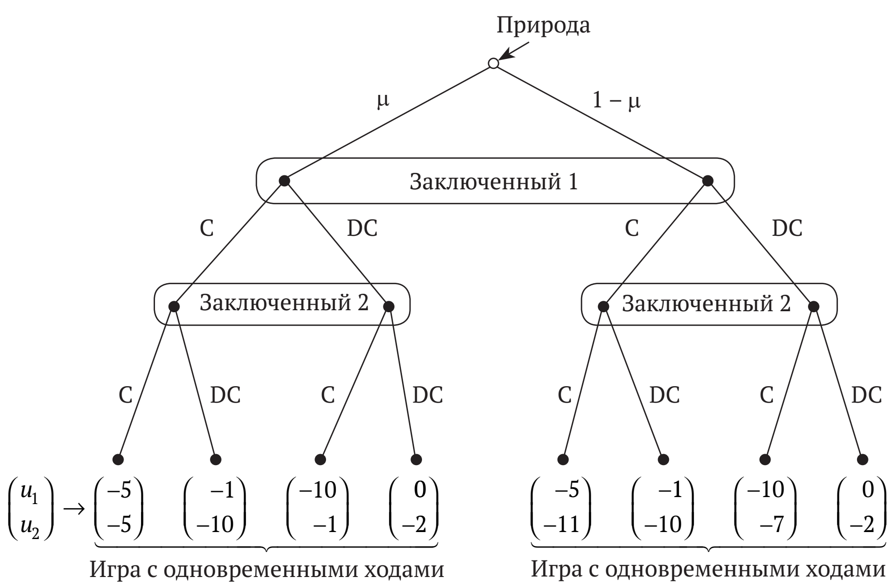
Пример 8.E.1. Рассмотрим модификацию игры «Брат окружного прокурора», рассматривавшейся в примере 8.B.3. С вероятностью μ предпочтения заключенного 2 определяются выигрышами, указанными в нормальной форме на рис. 8.B.4 (мы будем называть это *предпочтения типа I*), а с вероятностью $(1 - \mu)$ заключенный 2 ненавидит доносить на своих сообщников (это *тип II*). В этом случае, сознавшись, он испытывает угрызения совести, эквивалентные 6 годам заключения. Предпочтения заключенного 1 всегда характеризуются выигрышами, указанными на рис. 8.B.4. Развернутая форма этой байесовской игры представлена на рис. 8.E.1 (на рисунке C и НС обозначают «сознаться» и «не сознаваться» соответственно (от англ. «confess» и «don't confess»)).

В этой игре чистая стратегия (полный, учитывающий все обстоятельства план) игрока 2 может рассматриваться как функция, ставящая в соответствие каждому типу игрока действия, которые он должен предпринять. Следовательно, у заключенного 2 теперь четыре возможные стратегии:

(сознаться, если тип I, сознаться, если тип II);
(сознаться, если тип I, не сознаваться, если тип II);
(не сознаваться, если тип I, сознаться, если тип II);
(не сознаваться, если тип I, не сознаваться, если тип II).

Игрок 1 ничего не знает о типе второго игрока, а потому для него по-прежнему чистая стратегия в этой игре — это (безусловный) выбор либо «сознаться», либо «не сознаваться». ■

Формально в байесовской игре у каждого игрока i есть функция выигрыша $u_i(s_i, s_{-i}, \theta_i)$, где $\theta_i \in \Theta_i$ — случайная переменная, выбранная приро-



		Заключенный 2	
		DC	C
Заключенный 1	DC	0, −2	−10, −1
	C	−1, −10	−5, −5

		Заключенный 2	
		DC	C
Заключенный 1	DC	0, −2	−10, −7
	C	−1, −10	−5, −11

Рис. 8.E.1. Игра с неполной информацией «Брат окружного прокурора»

дой, реализацию которой видит только игрок i. Совместное вероятностное распределение переменных θ_i задается функцией $F(\theta_1, \ldots, \theta_I)$, которая, как предполагается, является общеизвестной информацией для всех игроков. Пусть $\Theta = \Theta_1 \times \ldots \times \Theta_I$. Тогда байесовскую игру можно описать как совокупность пяти элементов: $\left[I, \{S_i\}, \{u_i(\cdot)\}, \Theta, F(\cdot)\right]$.

Чистая стратегия игрока i в байесовской игре — это функция $s_i(\theta_i)$, или правило принятия решения, в соответствии с которым определяется выбор стратегии игрока в зависимости от его типа θ_i. Следовательно, множество чистых стратегий s_i игрока i, $\mathscr{S}_i$, является множеством всех таких функций. Ожидаемый выигрыш игрока i, имеющего тип θ, при заданном профиле чистых стратегий I игроков $(s_1(\cdot), \ldots, s_I(\cdot))$ можно записать как

$$\tilde{u}_i\left(s_1(\cdot), \ldots, s_I(\cdot)\right) = E_\theta\left(u_i\left(s_1\left(\theta_1\right), \ldots, s_I\left(\theta_I\right), \theta_i\right)\right). \tag{8.E.1}$$

Теперь мы можем сформулировать определение равновесия по Нэшу (в чистых стратегиях) для этой игры с несовершенной информацией, которое в данном контексте называется равновесием Байеса — Нэша[7].

Определение 8.E.1. Профиль стратегий $(s_1(\cdot), \ldots, s_I(\cdot))$ называется равновесием Байеса — Нэша (в чистых стратегиях) в байесовской игре $\left[I, \{S_i\}, \{u_i(\cdot)\}, \Theta, F(\cdot)\right]$, если $(s_1(\cdot), \ldots, s_I(\cdot))$ является равновесием по Нэшу в игре $\Gamma_N = \left[I, \{\mathscr{S}_i\}, \{\tilde{u}_i(\cdot)\}\right]$. То есть если для $i = 1, \ldots, I$ выполнено

$$\tilde{u}_i\left(s_i(\cdot), s_{-i}(\cdot)\right) \geq \tilde{u}_i\left(s_i'(\cdot), s_{-i}(\cdot)\right)$$

для всех $s_i'(\cdot) \in \mathscr{S}_i$, где $\tilde{u}_i\left(s_i(\cdot), s_{-i}(\cdot)\right)$ задается (8.E.1).

Для поиска равновесий Байеса — Нэша (в чистых стратегиях) удобно воспользоваться тем фактом, что во всех таких равновесиях каждый игрок должен выбирать наилучший ответ на распределение стратегий своих оппонентов для каждого из своих типов. Формально утверждение записывается следующим образом.

Утверждение 8.E.1. Профиль правил принятия решения $(s_1(\cdot), \ldots, s_n(\cdot))$ является равновесием Байеса — Нэша в байесовской игре $\left[I, \{S_i\}, \{u_i(\cdot)\}, \Theta, F(\cdot)\right]$ тогда и только тогда, когда для всех i и всех $\bar{\theta}_i \in \Theta_i$, появляющихся с положительной вероятностью, выполнено[8]

$$E_{\theta_{-i}}\left(u_i\left(s_i\left(\bar{\theta}_i\right), s_{-i}\left(\theta_{-i}\right), \bar{\theta}_i\right) \,\middle|\, \bar{\theta}_i\right) \geq E_{\theta_{-i}}\left(u_i\left(s_i', s_{-i}\left(\theta_{-i}\right), \bar{\theta}_i\right) \,\middle|\, \bar{\theta}_i\right) \tag{8.E.2}$$

[7] Здесь мы рассмотрим только случай чистых стратегий. Смешанные стратегии подразумевают рандомизацию на стратегиях из $\mathscr{S}_i$. Заметим также, что мы не указали явным образом, конечны ли множества Θ_i. Если конечны, то множества стратегий $\mathscr{S}_i$ конечны, если нет, то множества $\mathscr{S}_i$ содержат бесконечное число возможных функций $s_i(\cdot)$. Тем не менее в любом случае базовое определение равновесия Байеса — Нэша остается таким же.

[8] Здесь дана формулировка (и, соответственно, доказательство) для случая, когда множества Θ_i конечны. Когда у игрока может быть бесконечное число типов, условие (8.E.2) должно выполняться на подмножестве Θ_i, которое имеет полную меру (т. е. случается с вероятностью, равной единице). Тогда говорится, что (8.E.2) выполняется почти для каждого $\bar{\theta}_i \in \Theta_i$.

для всех $s_i' \in S_i$, где ожидаемый выигрыш рассчитывается по реализациям случайных переменных других игроков при условии реализации сигнала $\bar{\theta}_i$ игрока i.

Доказательство. Докажем необходимость. Если (8.E.2) не выполняется для некоторого игрока i при некотором сигнале $\bar{\theta}_i \in \Theta_i$, появляющемся с положительной вероятностью, то игрок i может увеличить выигрыш, сменив свою стратегию в случае реализации $\bar{\theta}_i$, что противоречит тому, что $(s_1(\cdot), \ldots, s_I(\cdot))$ является равновесием Байеса — Нэша. Для доказательства достаточности заметим, что если условие (8.E.2) выполнено для всех $\bar{\theta}_i \in \Theta_i$, появляющихся с положительной вероятностью, то игрок i не может увеличить свой выигрыш, который он получает, выбирая стратегию $s_i(\cdot)$. ■

По существу, утверждение 8.E.1 позволяет трактовать каждый тип игрока i как отдельного игрока, максимизирующего свой выигрыш при условном вероятностном распределении на множестве стратегий его конкурентов.

Пример 8.E.1 (продолжение). Чтобы в этой игре найти равновесие Байеса — Нэша (в чистых стратегиях), заметим сперва, что тип I игрока 2 должен выбирать «сознаться» с вероятностью 1, поскольку для этого типа «сознаться» является доминирующей стратегией. Аналогично у типа II заключенного 2 тоже есть доминирующая стратегия — «не сознаваться». При таком поведении заключенного 2 наилучший ответ игрока 1 — это выбрать «не сознаваться», если $\left(-10\mu + 0(1-\mu)\right) > \left(-5\mu - 1(1-\mu)\right)$, откуда $\mu < {}^1/_6$, и выбрать «сознаться», если $\mu > {}^1/_6$. (И ему безразлично, какую стратегию выбрать, если $\mu = {}^1/_6$.) ■

Пример 8.E.2. В консорциум исследований и разработок «Альфабета» входят две (неконкурирующие) фирмы, 1 и 2. Правила консорциума таковы, что все научно-исследовательские разработки, выполненные одной из фирм, становятся полностью доступны другой. Предположим, появился новый продукт, «Зиггер», который может разрабатываться каждой фирмой. Издержки разработки нового продукта для каждой фирмы составляют $c \in (0, 1)$. Прибыль от разработки для каждой фирмы i известна только ей. Формально каждая фирма i может оказаться типа θ_i, где θ_i — независимая случайная величина, которая равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Прибыль от разработки продукта «Зиггер» для фирмы типа θ_i составляет $(\theta_i)^2$. Порядок игры следующий. Каждая фирма видит реализацию случайной величины, определяющей ее собственный тип, но не видит реализацию типа другой фирмы. Затем обе фирмы одновременно и независимо решают, разрабатывать им «Зиггер» или нет.

Найдем равновесие Байеса — Нэша в этой игре. Будем записывать $s_i(\theta_i) = 1$, если тип θ_i фирмы i принимает решение разрабатывать «Зиггер», и $s_i(\theta_i) = 0$ — в противном случае. Если фирма i, тип которой θ_i, разрабатывает «Зиггер», ее выигрыш составляет $(\theta_i)^2$ — независимо от того, разрабатывает ли этот продукт фирма j. Если фирма типа θ_i принимает решение не разрабатывать «Зиггер», ее ожидаемый выигрыш равен $(\theta_i)^2 \operatorname{Prob}\left(s_j(\theta_j) = 1\right)$. Следовательно, участие в разработке «Зиггера» для типа θ_i фирмы i является наилучшим ответом тогда и только тогда, когда (в предположении, что фирма i участвует в разработке продукта, если ей безразлично — участвовать или нет)

$$\theta_i \geq \left[\frac{c}{1 - \text{Prob}\left(s_j\left(\theta_j\right) = 1\right)} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{8.E.3}$$

Обратите внимание, что для любой заданной стратегии фирмы j наилучший ответ фирмы i принимает вид правила «с отсечением». Для всех типов θ_i выше значения в правой части неравенства (8.E.3) выгодно разрабатывать продукт, а для всех θ_i ниже этого значения — невыгодно. (Заметим, что, если бы фирма i существовала в изоляции, ей было бы все равно, участвовать в разработке продукта или нет при $\theta_i = \sqrt{c}$. Но из неравенства (8.E.3) следует, что в ситуации, когда фирма i — член консорциума, значение θ_i, при котором фирме безразлично, участвовать в разработке или нет, (немного) выше. Это результат того, что каждая фирма надеется стать безбилетником, рассчитывая, что прикладывать усилия будет другая фирма. Более детально этот феномен обсуждается в главе 11.)

Предположим, что пороговые значения фирм 1 и 2 в равновесии Байеса — Нэша — $\hat{\theta}_1,\ \hat{\theta}_2 \in (0,\ 1)$ соответственно (можно показать, что в любом равновесии Байеса — Нэша в этой игре для $i = 1,\ 2$ выполнено $0 < \hat{\theta}_i < 1$). Воспользовавшись тем, что $\text{Prob}\left(s_j\left(\theta_j\right) = 1\right) = 1 - \hat{\theta}_j$, из (8.E.3) для $i = 1$ и 2 получим

$$\left(\hat{\theta}_1\right)^2 \hat{\theta}_2 = c$$

и

$$\left(\hat{\theta}_1\right)^2 \hat{\theta}_2 = c.$$

Поскольку из $\left(\hat{\theta}_1\right)^2 \hat{\theta}_2 = \left(\hat{\theta}_2\right)^2 \hat{\theta}_1$ следует $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2$, можем сделать вывод, что в любом равновесии Байеса — Нэша в этой игре пороговые значения для двух фирм одинаковы и равны $\theta^* = (c)^{1/3}$. В этом равновесии вероятность того, что ни одна из фирм не будет разрабатывать продукт, составляет $\left(\theta^*\right)^2$, вероятность того, что только одна фирм будет участвовать в разработках, равна $2\theta^*\left(1 - \theta^*\right)$ и вероятность участия в разработках обеих фирм — $\left(1 - \theta^*\right)^2$. ■

В упражнениях в конце этой главы рассматривается несколько других примеров равновесий Байеса — Нэша. Еще одно важное приложение изучается в главе 23.

В разделе 8.D мы утверждали, что смешанные стратегии можно интерпретировать как ситуации, где игроки используют детерминированные стратегии, обусловливая выбор, казалось бы, не имеющими отношения к делу сигналами (вспомните подающего бейсбольной команды). Теперь мы можем кое-что к этому добавить. Предположим, у нас есть игра с полной информацией, в которой существует единственное равновесие в смешанных стратегиях, в котором игроки действительно рандомизируют свой выбор. Теперь изменим эту игру, введя множество разных типов (формально континуум) каждого игрока, реализация которых не зависит друг от друга. Кроме того, предположим, что у всех типов игрока одинаковые предпочтения. Равновесие Байеса — Нэша (в чистых стратегиях) в этой байесовской игре полностью эквивалентно равновесию по Нэшу в смешанных стратегиях в исходной игре с полной информацией. Более того, во многих случаях можно показать, что существует «близкая» байесовская игра, в которой предпочтения различных типов игрока различаются весьма незначительно, равновесия Байеса — Нэша близки к распределению смешанных стратегий и у каждого типа есть определенные предпочтения относительно выбора стратегий. Эти результаты известны как теоремы об интерпретации на основе чистых стратегий (см. работу (Harsanyi, 1973)).

Здесь уместно вспомнить о понятии коррелированных равновесий, которое мы ввели в разделе 8.D. В частности, если мы предположим, что в предыдущем абзаце реализация различных типов игроков статистически коррелирована, то равновесие Байеса — Нэша (в чистых стратегиях) в такой байесовской игре является коррелированным равновесием в исходной игре с полной информацией. Множество всех коррелированных равновесий в игре $\left[I, \left\{S_i\right\}, \left\{u_i(\cdot)\right\}\right]$ можно найти, рассмотрев все возможные байесовские игры такого рода (т. е. мы учитываем все сигналы, которые могут видеть игроки).

8.F. Возможность ошибок: совершенное равновесие дрожащей руки

В разделе 8.B было отмечено, что, хотя рациональность сама по себе не мешает выбору слабо доминируемой стратегии, такие стратегии непривлекательны, поскольку они всегда доминируются, кроме тех случаев, когда игрок абсолютно уверен, какой выбор в игре сделают его соперники. Фактически, как показывает игра, изображенная на рис. 8.F.1, понятие равновесия по Нэшу не препятствует использованию таких стратегий. В этой игре (D, R) является равновесием по Нэшу, когда оба игрока с определенностью играют слабо доминируемую стратегию.

	L	R
U	1; 1	0; −3
D	−3; 0	0; 0

Рис. 8.F.1. (D, R) — равновесие по Нэшу в слабо доминируемых стратегиях

Здесь мы разовьем идею, упомянутую в разделе 8.B и состоящую в том, что *осторожность* может помешать использовать такие стратегии. Обсуждение приводит нас к усилению понятия равновесия по Нэшу, известному как *совершенное равновесие (по Нэшу) дрожащей руки (в нормальной форме)*, которое определяет равновесие по Нэшу как устойчивое к тому, что игроки с некоторыми очень маленькими вероятностями могут ошибаться.

Вслед за работой (Selten, 1975) для любой нормальной формы игры $\Gamma_N = \left[I, \left\{\Delta(S_i)\right\}, \left\{u_i(\cdot)\right\}\right]$ мы можем определить возмущенную игру $\Gamma_\varepsilon =$

$= \left[I, \left\{ \Delta_\varepsilon \left(S_i \right) \right\}, \left\{ u_i(\cdot) \right\} \right]$, выбирая для каждого i-го игрока и стратегии $s_i \in S_i$ число $\varepsilon_i(s_i) \in (0; 1)$, где $\sum\limits_{s_i \in S_i} \varepsilon_i(s_i) < 1$. Тогда множество стратегий i-го игрока в возмущенной игре определяется следующим образом:

$$\Delta_\varepsilon(S_i) = \left\{ \sigma_i : \sigma_i(s_i) \geq \varepsilon_i(s_i) \text{ для всех } s_i \in S_i \text{ и } \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1 \right\},$$

т. е. в игре Γ_ε, полученной из игры Γ_N требованием, чтобы каждый i-й игрок выбирал любую из своих стратегий s_i с какой-то положительной вероятностью $\varepsilon_i(s_i)$, которая интерпретируется как неизбежная вероятность того, что стратегия si будет сыграна по ошибке.

Определив эту возмущенную игру, рассмотрим в качестве прогнозов в игре Γ_N только те равновесия по Нэшу σ, которые робастны к возможностям ошибок игроков. Применяемый нами тест робастности приблизительно может быть описан следующим образом. Рассматривая σ как робастное равновесие, мы хотим, чтобы имели место по крайней мере слабые возмущения игры Γ_N, равновесия которых близки к σ. Формальное определение (нормальной формы) совершенного равновесия дрожащей руки (название отражает идею, что игроки совершают ошибки из-за дрожания рук) дано ниже.

Определение 8.F.1. Равновесие по Нэшу σ в игре $\Gamma_N = \left[I, \left\{ \Delta(S_i) \right\}, \left\{ u_i(\cdot) \right\} \right]$ является совершенным равновесием дрожащей руки (в нормальной форме), если существует некоторая последовательность возмущенных игр $\left\{ \Gamma_{\varepsilon^k} \right\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся к Γ_N (т. е. такая, что $\lim\limits_{k \to \infty} \varepsilon_i^k(s_i) = 0$ для всех i и $s_i \in S_i$), для которой существует некоторая соответствующая последовательность равновесий по Нэшу $\left\{ \sigma^k \right\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся к σ (т. е. такая, что $\lim\limits_{k \to \infty} \sigma^k = \sigma$).

Мы используем в определении понятие «нормальная форма», потому что в работе (Selten, 1975) также предлагает несколько иную концепцию равновесия дрожащей руки для динамических игр; мы обсудим ее в главе 9[9].

Заметим, что концепция совершенного равновесия дрожащей руки (нормальной формы) обеспечивает сравнительно нестрогий тест на робастность: мы требуем только, чтобы существовала некоторая возмущенная игра, в которой имеется равновесие, произвольно близкое к σ. Более сильный тест требовал бы, чтобы равновесие σ было робастно ко всем возмущениям, близким к первоначальной игре.

---

[9] Фактически (Selton, 1975) первоначально был заинтересован вопросом выявления желательных равновесий в динамических играх. Подробнее см. главу 9, приложение B.

В общем случае критерий в определении 8.F.1 применить сложно, поскольку в соответствии с ним требуется поиск равновесий во всех возможных возмущенных играх. Результат, представленный в утверждении 8.F.1, упрощает проверку того факта, является ли равновесие по Нэшу совершенным равновесием дрожащей руки (в этом утверждении полностью смешанная стратегия — это смешанная стратегия, в которой каждая чистая стратегия играется с положительной вероятностью).

Утверждение 8.F.1. Равновесие по Нэшу σ в игре $\Gamma_N = \left[I, \left\{\Delta(S_i)\right\}, \left\{u_i(\cdot)\right\}\right]$ является совершенным равновесием дрожащей руки (в нормальной форме) тогда и только тогда, когда существует некоторая последовательность полностью смешанных стратегий $\left\{\sigma^k\right\}_{k=1}^{\infty}$, такая что $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma^k = \sigma$ и σ_i — наилучший ответ на каждый элемент последовательности $\left\{\sigma_{-i}^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ для всех $i = 1, \ldots, I$.

Доказать данный результат вас просят в упражнении 8.F.1 [см. также (Selten, 1975)]. Результат, представленный в утверждении 8.F.2, является непосредственным следствием из определения 8.F.1 и утверждения 8.F.1.

Утверждение 8.F.2. Если $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_I)$ является совершенным равновесием дрожащей руки (в нормальной форме), то тогда σ_i не является слабо доминируемой стратегией для любого $i = 1, \ldots, I$. Следовательно, для любого (в нормальной форме) совершенного равновесия дрожащей руки ни одна слабо доминируемая стратегия не может играться с положительной вероятностью.

Обратное утверждение (т. е. что любое равновесие по Нэшу, в котором не играются слабо доминируемые стратегии, является совершенным равновесием дрожащей руки) оказывается верным для игр с двумя игроками, но не является таковым для игр с бо́льшим числом участников. Следовательно, усиление дрожащей руки исключает не только равновесия по Нэшу в слабо доминируемых стратегиях. Причина в том, что, когда соперники игрока ошибаются с малой вероятностью, это может вызвать только ограниченное множество вероятностных распределений на их неравновесных стратегиях. Например, если каждый из двух соперников игрока имеет маленькую вероятность ошибки, существует гораздо бо́льшая вероятность того, что ошибется один, чем сразу оба. Если равновесная стратегия игрока является единственным наилучшим ответом, только в случае, когда оба его соперника ошибаются, его стратегия не может быть наилучшим ответом на любое локальное возмущение стратегий его соперников, даже если его стратегия не является слабо доминируемой (в упражнении 8.F.2 приводится пример). Однако если «дрожание» игроков будет коррелированным (например, как в концепции коррелированного равновесия), то обратное утверждение к утверждению 8.F.2 будет выполняться вне зависимости от числа игроков.

Зелтен (Selten, 1975) также доказал аналог результата утверждения 8.D.2 о существовании: в каждой игре $\Gamma_N = \left[I, \left\{\Delta(S_i)\right\}, \left\{u_i(\cdot)\right\}\right]$ с конечным множеством стратегий $S_1, \ldots, S_n$ существует совершенное равновесие дрожащей руки. Следствием этого результата является тот факт, что в любой такой игре существует по крайней мере одно равновесие по Нэшу, в котором никто не использует слабо доминируемых стратегий с положительной вероятностью. Таким образом, если мы решаем принять только равновесия по Нэшу, в которых не играются слабо доминируемые стратегии, то, не умаляя общности, можно считать, что будет существовать по крайней мере одно такое равновесие[10].

Майерсон (Myerson, 1978) предложил усовершенствование вышеизложенной концепции Зелтена, в котором игроки с меньшей вероятностью делают ошибки, которые обходятся им наиболее дорого (идея состоит в том, что игроки будут прилагать больше усилий, чтобы избежать таких ошибок). Он установил, что данная концепция, названная *правильным равновесием по Нэшу*, существует при условиях, описанных в предыдущих абзацах про совершенное равновесие дрожащей руки. В работе (Van Damme, 1983) можно найти изложение этих и других тонкостей усовершенствования «дрожащей руки».

Приложение А: существование равновесия по Нэшу

В этом приложении мы докажем утверждения 8.D.2 и 8.D.3. А начнем мы с доказательства леммы 8.AA.1, в которой сформулирован ключевой технический результат.

Лемма 8.AA.1. Если множества $S_1, \ldots, S_I$ непусты, множество стратегий игрока S_i компактно и выпукло, функция выигрышей $u_i(\cdot)$ непрерывна по $(s_1, \ldots, s_I)$ и квазивогнута по s_i, то отображение наилучшего ответа $b_i(\cdot)$ непусто, выпукло и полунепрерывно сверху[11].

Доказательство. Заметим сперва, что $b_i(s_{-i})$ — множество решений задачи максимизации непрерывной функции $u_i(\cdot, s_{-i})$ на компактном множестве S_i. Следовательно, оно непусто (по теореме M.F.2 математического приложения). Множество $b_i(s_{-i})$ выпукло, поскольку выпукло множество решений задачи максимизации квазивогнутой функции (в данном случае функции $u_i(\cdot, s_{-i})$) на выпуклом множестве (здесь S_i). Наконец, для того чтобы доказать полунепрерывность сверху, мы должны показать, что для любой последовательности $\left(s_i^n, s_{-i}^n\right) \to \left(s_i, s_{-i}\right)$, такой что $s_i^n \in b_i\left(s_{-i}^n\right)$ для всех n, выполнено $s_i \in b_i\left(s_{-i}\right)$. Чтобы убедиться в этом, заметим, что при всех n выпол-

[10] Одним из примеров игры, для которой это утверждение не выполняется, является «Дуополия Бертрана», изучаемая в главе 12. В игре существует единственное равновесие по Нэшу и равновесные стратегии являются слабо доминируемыми. Это следствие того, что стратегии являются непрерывными переменными (а значит, множества S_i не являются конечными). К счастью, это равновесие может трактоваться как предел недоминируемых равновесий в «близких» дискретных версиях игры (более подробно см. в упражнении 12.C.3).

[11] Понятие полунепрерывного сверху отображения рассматривается в разделе M.H математического приложения.

нено $u_i\left(s_i^n, s_{-i}^n\right) \geq u\left(s_i', s_{-i}^n\right)$ для всех $s_i' \in S_i$. Следовательно, из непрерывности $u_i(\cdot)$ следует $u_i\left(s_i, s_{-i}\right) \geq u\left(s_i', s_{-i}\right)$. ■

Удобно доказать сначала утверждение 8.D.3.

Утверждение 8.D.3. В игре $\Gamma_N = \left[I, \left\{S_i\right\}, \left\{u_i(\cdot)\right\}\right]$ существует равновесие по Нэшу, если для всех $i = 1, \ldots, I$

(i) множество стратегий S_i непустое, выпуклое и компактное подмножество некоторого евклидова множества $\mathbb{R}^M$;

(ii) функция выигрыша $u_i(s_1, \ldots, s_I)$ непрерывна по $(s_1, \ldots, s_I)$ и квазивогнута по s_i.

Доказательство. Определим отображение $b : S \to S$ следующим образом:

$$b(s_1, \ldots, s_I) = b_1(s_{-1}) \times \ldots \times b_I(s_{-I}).$$

Заметим, что $b(\cdot)$ — это отображение непустого, выпуклого и компактного множества $S = S_1 \times \ldots \times S_I$ в себя. Кроме того, по лемме 8.AA.1, $b(\cdot)$ — непустое, выпуклое и полунепрерывное сверху отображение. Таким образом, все условия теоремы Какутани о неподвижной точке выполнены (см. раздел M.I математического приложения). Следовательно, существует неподвижная точка этого отображения и профиль стратегий $s \in S$, такой что $s \in b(s)$. Стратегии в неподвижной точке составляют равновесие по Нэшу, поскольку по построению $s_i \in b_i(s_{-i})$ для всех $i = 1, \ldots, I$. ■

Теперь переходим к доказательству утверждения 8.D.2.

Утверждение 8.D.2. В любой игре $\Gamma_N = \left[I, \left\{\Delta\left(S_i\right)\right\}, \left\{u_i(\cdot)\right\}\right]$, в которой множества $S_1, \ldots, S_I$ содержат конечное число элементов, существует равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях.

Доказательство. Игра $\Gamma_N = \left[I, \left\{\Delta\left(S_i\right)\right\}, \left\{u_i(\cdot)\right\}\right]$, множество стратегий которой $\left\{\Delta\left(S_i\right)\right\}$, а функции выигрыша

$$u_i\left(\sigma_1, \ \ldots, \ \sigma_I\right) = \sum_{s \in S}\left(\prod_{k=1}^{I} \sigma_k\left(s_k\right)\right) u_i\left(s\right) \text{ для всех } i = 1, \ldots, I,$$

удовлетворяет всем предпосылкам утверждения 8.D.3. Следовательно, утверждение 8.D.2 является непосредственным следствием уже доказанного утверждения.

Литература

Aumann, R. (1974). Subjectivity and correlation in randomized strategies. *Journal of Mathematical Economics* **1**: 67–96.

Bernheim, B.D. (1984). Rationalizable strategic behavior. *Econometrica* **52**: 1007–28.

Bernheim, B.D. (1986). Axiomatic characterizations of rational choice in strategic environments. *Scandinavian Journal of Economics* **88**: 473–88.

Brandenberger, A., and E. Dekel. (1987). Rationalizability and correlated equilibria. *Econometrica* **55**: 1391–1402.

Cournot, A. (1838). *Recherches sur les Principes Mahèmatiques de la Thèorie des Richesses*. [English edition: Research into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. New York: Macmillan, 1897.]

Dasgupta, P., and E.Maskin. (1986). The existence of equilibrium in discontinuous economic games. *Review of Economic Studies* **53**: 1–41.

Harsanyi, J. (1967–68). Games with incomplete information played by Bayesian players. *Management Science* **14**: 159–82, 320–34, 486–502.

Harsanyi, K. (1973). Games with randomly disturbed payoffs: A new rationale for mixed-strategy equilibrium points. *International Journal of Game Theory* **2**: 1–23.

Kreps, D.M. (1990). *Game Theory and Economic Modelling*. Oxford: Oxford University Press.

Mertnes, J.F., and S.Zamir. (1985). Formulation of Bayesian analysis for games with incomplete information. *International Journal of Game Theory* **10**: 619–32.

Milgrom, P., and J.Roberts. (1990). Rationalizability, learning, and equilibrium in games with strategic complementarities. *Econometrica* **58**: 1255–78.

Myerson, R.B. (1978). Refinements of the Nash equilibrium concept. *International Journal of Game Theory* **7**: 73–80.

Nash, J.F. (1951). Non-cooperative games. *Annals of Mathematics* **54**: 289–95.

Pearce, D.G. (1984). Rationalizable strategic behavior and the problem of perfection. *Econometrica* **52**: 1029–50.

Schelling, T. (1960). *The Strategy of Conflict.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Selten, R. (1975). Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. *International Journal of Game Theory* **4**: 25–55.

Van Damme, E. (1983). *Refinements of the Nash Equilibrium Concept.* Berlin: Springer-Verlag.

Упражнения

8.B.1^{A}. Пусть в отрасли существуют I фирм. Каждая фирма пытается убедить конгресс дать отрасли субсидию. Обозначим h_i количество часов усилий, прилагаемых i-й фирмой, $c_i(h_i) = w_i(h_i)^2$ — функцию издержек от усилий i-й фирмой, где w_i — положительная константа. При векторе усилий фирм $(h_1, \ldots, h_I)$ объем получаемой субсидии задается в виде $\alpha \sum_i h_i + \beta \left(\prod_i h_i \right)$, где α и β — константы. Рассмотрите игру, где фирмы одновременно и независимо друг от друга принимают решение об уровне усилий. Покажите, что каждая фирма имеет строго доминирующую стратегию тогда и только тогда, когда $\beta = 0$. Какой будет строго доминирующая стратегия i-й фирмы в этом случае?

8.B.2^{B}. **a)** Докажите, что если игрок имеет две слабо доминирующие стратегии, то при любом выборе стратегии его соперником обе стратегии принесут ему одинаковые выигрыши.

b) Приведите пример игры двух игроков, в которой игрок имеет две слабо доминирующие чистые стратегии, но его соперник предпочтет, чтобы он играл скорее одну из них, чем другую.

8.B.3$^{\mathbf{B}}$. Рассмотрите следующий аукцион (известный как аукцион второй цены или аукцион Викри). На объект аукциона претендует I покупателей. Оценка объекта i-го покупателя (в денежном измерении) равна v_i. Правила аукциона таковы, что каждый игрок должен подать ставку (неотрицательное число) в запечатанном конверте. Затем конверты распечатываются и покупатель, заявивший максимальную цену, получает объект, но платит аукционеру сумму, равную второй максимальной ставке. Если максимальную цену заявят несколько покупателей, каждый получит объект с одинаковой вероятностью. Покажите, что подача ставки в размере v_i с определенностью является слабо доминирующей стратегией для i-го покупателя. Также обоснуйте утверждение, что это единственная слабо доминирующая стратегия i-го покупателя.

8.B.4$^{\mathbf{C}}$. Покажите, что порядок исключения не влияет на множество стратегий, остающихся в процессе последовательного удаления строго доминируемых стратегий.

8.B.5$^{\mathbf{C}}$. Рассмотрите модель дуополии Курно (широко обсуждаемую в главе 12), в которой две фирмы, 1 и 2, одновременно выбирают объемы выпуска q_1 и q_2, которые они будут продавать на рынке. Цена, которую они получат за каждую проданную единицу своих объемов, равна $P(q_1, q_2) = a - b(q_1 + q_2)$. Издержки равны на каждую проданную единицу.

a) Докажите, что последовательное исключение строго доминируемых стратегий позволит найти единственное равновесие в данной игре.

b) Останется ли это утверждение верным, если в игре будет три фирмы вместо двух?

8.B.6$^{\mathbf{B}}$. В тексте.

8.B.7$^{\mathbf{B}}$. Покажите, что любая строго доминирующая стратегия в игре $\Gamma_N = \left[I, \left\{\Delta\left(S_i\right)\right\}, \left\{u_i(\cdot)\right\}\right]$ должна быть чистой стратегией.

8.C.1$^{\mathbf{A}}$. Докажите, что если исключение строго доминируемых стратегий приводит к единственному равновесию в игре, это равновесие также является результатом исключения стратегий, никогда не являющихся наилучшим ответом.

8.C.2$^{\mathbf{C}}$. Докажите, что порядок удаления не влияет на множество стратегий, остающихся в процессе последовательного удаления стратегий, никогда не являющихся наилучшим ответом.

8.C.3$^{\mathbf{C}}$. Докажите, что если в игре с двумя участниками (с конечным множеством стратегий) чистая стратегия s_i i-го игрока никогда не является наилучшим ответом на любую смешанную стратегию соперника, то s_i строго доминируется некоторой смешанной стратегией $\sigma_i \in \Delta(S_i)$. [Подсказка: попытайтесь использовать теорему об опорной гиперплоскости, сформулированную в разделе M.G математического приложения.]

8.C.4^B^. Рассмотрите игру Γ_N с игроками 1, 2 и 3, где $S_1 = \{L, M, R\}$, $S_2 = \{U, D\}$ и $S_3 = \{l, r\}$. Выигрыши 1-го игрока от каждой из трех его стратегий, обозначим их (u_L, u_M, u_R), зависят от выбора стратегий 2-м и 3-м игроками в каждой из четырех ячеек, изображенных ниже, где $(\pi, \varepsilon, \eta) >> 0$. Предположим, что $\eta < 4\varepsilon$.

		Стратегия игрока 3	
		l	r
Стратегия игрока 2	U	$\pi + 4\varepsilon, \pi - \eta, \pi - 4\varepsilon$	$\pi - 4\varepsilon, \pi + \frac{\eta}{2}, \pi + 4\varepsilon$
	D	$\eta + 4\varepsilon, \pi + \frac{\eta}{2}, \pi - 4\varepsilon$	$\pi - 4\varepsilon, \pi - \eta, \pi + 4\varepsilon$

a) Обоснуйте, что (чистая) стратегия M никогда не является наилучшим ответом для 1-го игрока при любой независимой рандомизации 2-го и 3-го игроков.

b) Покажите, что (чистая) стратегия M не является строго доминируемой.

c) Покажите, что (чистая) стратегия M может быть наилучшим ответом, если рандомизация 2-го и 3-го игроков будет коррелированной.

8.D.1^B^. Покажите, что (a_2, b_2), сыгранные с определенностью, — единственное равновесие в смешанных стратегиях в игре, изображенной на рис. 8.C.1.

8.D.2^B^. Покажите, что если существует единственный профиль стратегий, остающихся после последовательного удаления строго доминируемых стратегий, то этот профиль является равновесием по Нэшу.

8.D.3^B^. Рассмотрите аукцион первой скрытой цены с двумя покупателями. Оценка каждого i-го покупателя, равная v_i, известна обоим. Правила аукциона таковы, что каждый игрок подает ставку в закрытом конверте. Потом конверты открываются, и тот покупатель, что сделал максимальную ставку, получает объект и платит аукционеру сумму, равную своей ставке. Если покупатели заявили одинаковые суммы, каждый получит объект с вероятностью $^1/_2$. Ставки должны быть в долларах (предполагается, что оценки тоже).

a) Существуют ли строго доминируемые стратегии?

b) Существуют ли слабо доминируемые стратегии?

c) Существует ли равновесие по Нэшу? Каково оно? Будет ли оно единственным?

8.D.4[B]. Рассмотрите ситуацию торга, в которой два агента рассматривают возможность участия в рискованном предприятии, которое позволит им заработать 100 долларов, но они должны договориться о том, как их разделить. Торг происходит следующим образом: оба агента предъявляют спрос одновременно. Если суммарный их спрос больше 100, переговоры не удались и каждый не получает ничего. Если сумма их спроса меньше 100, они реализуют проект, каждый получает, сколько хотел, а остальное идет на благотворительность.

a) Какие стратегии каждого игрока являются строго доминируемыми?

b) Какие стратегии каждого игрока слабо доминируемые?

c) Что в этой игре является равновесием по Нэшу в чистых стратегиях?

8.D.5[B]. Потребители равномерно распределены по пляжу длиной в 1 милю. Цены на мороженое регулируемые, поэтому потребители идут к ближайшему продавцу, поскольку не любят гулять (предполагаем, что все потребители купят мороженое по регулируемым ценам, даже если они должны будут пройти целую милю). Если в одной точке располагается больше одного продавца, они делят прибыль поровну.

a) Рассмотрите игру, в которой два продавца мороженого одновременно выбирают свое местоположение. Покажите, что существует единственное равновесие по Нэшу в чистых стратегиях и что в нем оба продавца будут располагаться в центре променада.

b) Покажите, что в случае трех продавцов равновесия в чистых стратегиях не существует.

8.D.6[B]. Рассмотрите игру двух участников в следующей форме (буквы показывают произвольные выигрыши):

		Игрок 2	
		b_1	b_2
Игрок 1	a_1	u, v	l, m
	a_2	w, x	y, z

Покажите, что равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях всегда существует в этой игре. [*Подсказка*: задайте стратегию 1-го игрока через вероятность выбора им действия a_1 и стратегию 2-го игрока через вероятность выбора им действия b_1; затем проверьте соотношение наилучших ответов двух игроков.]

8.D.7[C]. (*Теорема о минимаксе*) Игра двух участников $\Gamma_N = \left[I, \{S_1, S_2\}, \{u_1(\cdot), u_2(\cdot)\}\right]$ является игрой *с нулевой суммой*, если $u_2(s_1, s_2) = -u_1(s_1, s_2)$ для любых $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$.

Определим максиминный ожидаемый уровень полезности i-го игрока $\underline{w}_i$ как уровень, который он может гарантировать себе в игре $\Gamma_N = \left[I, \left\{\Delta\left(S_1\right), \Delta\left(S_2\right)\right\}, \left\{u_1(\cdot), u_2(\cdot)\right\}\right]$:

$$\underline{w}_i = \underset{\sigma_i}{\text{Max}}\left[\underset{\sigma_{-i}}{\text{Min}}\, u_i\left(\sigma_i, \sigma_{-i}\right)\right].$$

Определим минимаксный уровень полезности i-го игрока $\underline{v}_i$ как наихудший ожидаемый уровень полезности, который он может быть вынужден получить, если ответит на действия соперника:

$$\underline{v}_i = \underset{\sigma_{-i}}{\text{Min}}\left[\underset{\sigma_i}{\text{Max}}\, u_i\left(\sigma_i, \sigma_{-i}\right)\right].$$

a) Покажите, что $\underline{v}_i \geq \underline{w}_i$ в любой игре.

b) Докажите, что в любом равновесии по Нэшу в смешанных стратегиях игры с нулевой суммой $\Gamma_N = \left[I, \left\{\Delta\left(S_1\right), \Delta\left(S_2\right)\right\}, \left\{u_1(\cdot), u_2(\cdot)\right\}\right]$ ожидаемая полезность i-го игрока u_i^o удовлетворяет условию $u_i^o = \underline{v}_i = \underline{w}_i$. [*Подсказка*: такое равновесие должно существовать в силу утверждения 8.D.2.]

c) Покажите, что если $\left(\sigma_1', \sigma_2'\right)$ и $\left(\sigma_1'', \sigma_2''\right)$ являются равновесными по Нэшу в игре с нулевой суммой $\Gamma_N = [\text{I}, \{\Delta(S_1), \Delta(S_2)\}, \{u_1(\cdot), u_2(\cdot)\}]$, тогда то же верно и для $\left(\sigma_1', \sigma_2''\right)$ и $\left(\sigma_1'', \sigma_2'\right)$.

8.D.8$^{\text{C}}$. Рассмотрите игру с одновременными ходами в нормальной форме $\Gamma_N = \left[I, \left\{\Delta\left(S_i\right)\right\}, \left\{u_i(\cdot)\right\}\right]$. Предположим, что для всех i S_i является выпуклым множеством и $u_i(\cdot)$ строго квазивыпукла. Докажите, что любое равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях в этой игре будет вырожденным, каждый игрок будет играть единственную чистую стратегию с вероятностью 1.

8.D.9$^{\text{B}}$. Рассмотрите следующую игру [на основе примера из (Kreps, 1990)]:

		Игрок 2			
		LL	*L*	*M*	*R*
Игрок 1	*U*	100, 2	−100, 1	0, 0	−100, −100
	D	−100, −100	100, −49	1, 0	100, 2

a) Если бы в этой игре вы были 2-м игроком и играли ее только один раз без возможности общения с 1-м игроком до игры, какую стратегию вы бы выбрали?

b) Что будет равновесиями по Нэшу (в чистых и смешанных стратегиях) в этой игре?

c) Является ли выбранная вами стратегия в (a) компонентом равновесного по Нэшу профиля стратегий? Является ли она рационализируемой стратегией?

d) Предположим, что теперь возможно общение до игры. Станете ли вы играть иначе, чем в (a)?

8.E.1[B]. Рассмотрите следующую стратегическую ситуацию. Две противоборствующие армии готовы захватить остров. Генерал каждой армии может выбрать как «нападать», так и «не нападать». Кроме того, каждая армия может быть «сильной» или «слабой» с одинаковой вероятностью (силы каждой армии независимы) и тип армии известен только ее генералу. Выигрыши следующие: остров, будучи захваченным, стоит M. Армия может захватить остров как путем атаки, когда соперник не атакует, так и когда атакует, но сама армия сильная, а соперник слабый. Если атакуют обе армии одинаковой силы, никто не захватывает остров. Армия также имеет «издержки» сражения, равные s, если армия сильная, и равные w, если слабая, причем $s < w$. Издержек сражения нет, если соперник не атаковал.

Найдите все равновесия Байеса — Нэша в чистых стратегиях в этой игре.

8.E.2[C]. Рассмотрите аукцион первой скрытой цены из упражнения 8.D.3, но сейчас предположим, что каждый i-й покупатель наблюдает только свою собственную оценку v_i. Эта оценка распределена равномерно и независимо на $\left[0, \bar{v}\right]$ для каждого покупателя.

a) Найдите симметричное равновесие Байеса — Нэша (в чистых стратегиях) в данном аукционе. (Предположите, что заявки могут быть любыми действительными числами.) [*Подсказка*: ищите равновесия, в которых заявка покупателя является линейной функцией его оценки.]

b) Что если будет I покупателей? Что случится с равновесной функцией каждого покупателя $s(v_i)$, если I вырастет?

8.E.3[B]. Рассмотрите линейную модель Курно, описанную в упражнении 8.B.5. Однако теперь предположим, что каждая фирма с вероятностью μ имеет издержки на единицу продукции в размере c_L и с вероятностью $(1 - \mu)$ — в размере c_H, причем $c_H > c_L$. Найдите равновесие Байеса — Нэша.

8.F.1[C]. Докажите утверждение 8.F.1.

8.F.2[B]. Рассмотрите следующую игру трех игроков (van Damme, 1983), в которой 1-й игрок выбирает ряды $S_1 = \{U, D\}$, 2-й игрок выбирает колонки $S_2 = \{L, R\}$, а третий игрок выбирает матрицы $S_3 = \{B_1, B_2\}$:

B_1

	L	R
U	(1, 1, 1)	(1, 0, 1)
D	(1, 1, 1)	(0, 0, 1)

B_2

	L	R
U	(1, 1, 0)	(0, 0, 0)
D	(0, 1, 0)	(1, 0, 0)

Каждая ячейка показывает выигрыши трех игроков (u_1, u_2, u_3) для комбинаций стратегий. И (D, L, B_1), и (U, L, B_1) являются равновесиями по Нэшу в чистых стратегиях. Покажите, что (D, L, B_1) не является (в нормальной форме) совершенным равновесием дрожащей руки, хотя ни одна из этих трех стратегий не является слабо доминируемой.

8.F.3^C^. Докажите, что каждая игра $\Gamma_N = \left[I, \left\{\Delta\left(S_i\right)\right\}, \left\{u_i(\cdot)\right\}\right]$, в которой S_i — конечные множества, имеет (в нормальной форме) совершенные равновесия дрожащей руки. [*Подсказка*: покажите, что в каждой возмущенной игре существует равновесие и что для каждой последовательности возмущенных игр, сходящейся к начальной игре Γ_N, и для соответствующей последовательности равновесий существует последовательность, сходящаяся к равновесию Γ_N.]

Глава 9. Динамические игры

9.A. Введение

В главе 8 мы рассматривали игры с одновременными ходами. Однако в большинстве экономических ситуаций игроки совершают действия последовательно[1]. Например, профсоюз и фирма могут делать повторные и встречные предложения друг другу во время переговоров относительно нового контракта. Подобным же образом фирмы на рынке могут осуществлять инвестиции в ожидании их будущего влияния на конкурентные взаимодействия. Поэтому в данной главе мы будем изучать *динамические игры*.

Один способ решения проблемы прогнозов в динамических играх состоит просто в приведении их к представлению в нормальной форме и дальнейшем применении концепции решения, представленной в главе 8. Однако в динамических играх возникает новый важный аспект — правдоподобность стратегии игрока. Он и будет главным вопросом данной главы.

Рассмотрим яркий, хотя и надуманный пример. Вы приходите в аудиторию, и ваш преподаватель, вменяемый, но очень увлеченный теорией игр, объявляет: «Это очень важный курс, и я хочу ввести особое требование. Любой, кто не бросит остальные курсы, не будет допущен к итоговому экзамену и поэтому курс ему не будет зачтен». После минуты смущения и некоторых размышлений вы сначала подумаете: «Поскольку я действительно предпочел его курс остальным, было бы лучше следовать его указаниям» (ведь вы внимательно изучили главу 8 и знаете, что такое наилучший ответ). Но после некоторых раздумий вы спросите себя: «Действительно ли он отстранит меня от итогового экзамена, если я не подчинюсь? Это серьезная организация, и он определенно потеряет работу, если выполнит свою угрозу». Вы откажетесь бросить другие курсы, и он действительно не отстранит вас от экзамена. Можно сказать, что в этом примере объявленная стратегия преподавателя «Я не допущу вас к экзамену, если вы не бросите остальные курсы» не является правдоподобной, т. е. может быть названа пустой. Мы хотим исключить из числа равновесных стратегий в динамических играх такие пустые угрозы.

---

[1] Как в большинстве настольных игр.

В разделе 9.B мы покажем, что понятия равновесия по Нэшу, рассмотренного в главе 8, недостаточно для исключения неправдоподобных стратегий. Мы представим более сильную концепцию решения, известную как совершенное в подыграх равновесие по Нэшу, которая поможет нам это осуществить. Главная идея, на которой базируется эта концепция, — секвенциальная *рациональность*: равновесные стратегии должны определять оптимальное поведение начиная от любой точки игры. Этот принцип тесно связан с процедурой *обратной индукции*.

В разделе 9.C мы покажем, что концепции совершенного в подыграх равновесия недостаточно для полной реализации идеи секвенциальной рациональности в играх с несовершенной информацией. Затем, развивая анализ, мы представим понятие *слабого совершенного байесовского равновесия* (также известного как *слабое секвенциальное равновесие*). Особенность слабого совершенного байесовского равновесия состоит в том, что оно позволяет ввести явным образом *ожидания* игроков относительно того, что может быть известным до их хода, для проверки секвенциальной рациональности стратегии игрока. Прилагательное «слабое» означает, что понятие слабого совершенного байесовского равновесия налагает минимум ограничений на обоснованность соответствующих ожиданий игроков. Поскольку слабое совершенное байесовское равновесие может оказаться слишком слабым, мы также рассмотрим некоторые связанные с ним концепции равновесия, которые налагают более сильные требования на обоснованность ожиданий, кратко обсуждая понятия *совершенного байесовского равновесия* и, в некоторой степени более детально, понятие *секвенциального равновесия*.

В разделе 9.D мы продвинемся еще дальше в наших рассуждениях, пытаясь найти ответ на вопрос, какие ожидания и в каких ситуациях можно отнести к необоснованным. Это позволит нам улучшить прогнозы. Таким образом, мы подойдем к рассмотрению понятия *прямой индукции*.

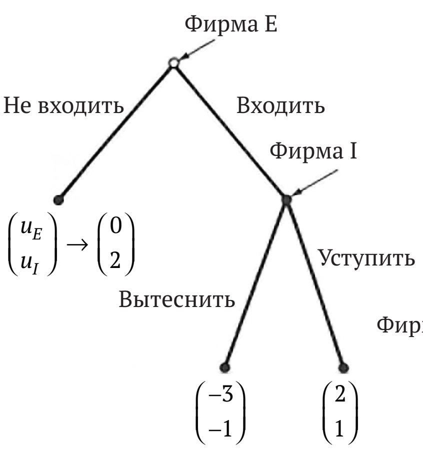
В приложении А в качестве примера использования совершенного в подыграх равновесия по Нэшу в важном экономическом приложении изучается модель двустороннего торга, повторяющаяся конечное и бесконечное число раз. В приложении В рассматривается концепция *совершенного равновесия по Нэшу дрожащей руки в развернутой форме* в продолжение обсуждения, начатого в разделе 9.C.

Нужно заметить, что, как и в соответствующей литературе, весь анализ в этой главе состоит в попытках усилить концепцию равновесия по Нэшу. То есть мы требуем, чтобы наш прогноз был равновесием по Нэшу, и затем предлагаем дополнительные условия, при которых такое равновесие стало бы удовлетворительным прогнозом. Однако решение поставленных вопросов не ограничивается указанным подходом. Например, нас могут интересовать неправдоподобные стратегии, даже если мы не накладываем ограничений взаимно правильных ожиданий для равновесия по Нэшу и вместо этого хотим сосредоточиться на рационализируемых исходах. Для изучения неравновесных подходов такого типа обратитесь к работе (Bernheim, 1984) и особенно (Pearce, 1984).

9.B. Секвенциальная рациональность, обратная индукция и совершенное в подыграх равновесие

Мы начнем с примера, иллюстрирующего, что в динамических играх понятие равновесия по Нэшу может не давать здравых прогнозов. Это наблюдение приводит нас к усилению понятия равновесия по Нэшу, известному как *совершенное в подыграх равновесие по Нэшу*.

Пример 9.B.1. Рассмотрим следующую игру «*Хищничество*». Фирма E (новичок) размышляет о входе на рынок, на котором в настоящий момент имеется единственная фирма-старожил (фирма I). Если она это сделает (выбрав стратегию «Входить»), старожил может ответить одним из двух способов: может как уступить часть рынка новичку, снизив свои продажи, что в результате не приведет к снижению рыночной цены, так и сразиться с новичком, вовлекаясь в затратную ценовую войну, в результате которой значительно снижается рыночная цена. Развернутая и нормальная формы этой игры представлены на рис. 9.B.1.



		Фирма I	
		Вытеснять, если Фирма E играет «Входить»	Уступить, если Фирма E играет «Входить»
Фирма E	Не входить	0, 2	0, 2
	Входить	−3, −1	2, 1

Рис. 9.B.1. Развернутая и нормальная формы для примера 9.B.1. Равновесие по Нэшу (σ_E, σ_I) = (Не входить, Вытеснить, если фирма E играет «Входить») представляет собой неправдоподобную угрозу

Изучая нормальную форму, мы видим, что в этой игре есть два равновесия по Нэшу в чистых стратегиях: (σ_E, σ_I) = (Не входить, Вытеснять, если фирма E играет «Входить») и (σ_E, σ_I) = (Входить, Уступить, если фирма E играет «Входить»). Рассмотрим первый из этих профилей стратегий. Фирма E не захочет входить на рынок, если фирма I будет вытеснять ее после входа. С другой стороны, «Вытеснять, если фирма E играет "Входить"» является выбором для старожила, если фирма E сыграет «Не входить». Аналогично рассуждая, получим, что вторая пара стратегий также является равновесием по Нэшу.

Однако (Не входить, Вытеснять, если фирма E играет «Входить») не является разумным прогнозом этой игры. Как и в примере о преподавателе, который мы привели в разделе 9.A, фирма E может предвидеть, что, если она действительно войдет, старожил предпочтет уступить часть рынка (при таком действии фирма I заработает 1 вместо −1). Следовательно, стратегия старожила «Вытеснять, если фирма E играет "Входить"» не является правдоподобной. ■

Пример 9.В.1 иллюстрирует проблему, возникающую при использовании понятия равновесия по Нэшу в динамических играх. В этом примере понятие равновесия позволяет старожилу высказывать неправдоподобную угрозу, которую новичок никогда не примет всерьез при выборе своей стратегии. Проблема с понятием равновесия по Нэшу возникает здесь из-за того, что, когда новичок играет «Не входить», действия в узлах решения, которые не достигаются при выборе равновесных стратегий (здесь действия фирмы I в узле решения, следующего после не выбранного фирмой Е хода «Входить»), не влияют на выигрыш фирмы I. В результате фирма I может планировать *абсолютно любое* действие в этом узле решения: при выборе стратегии фирмы Е «Не входить» выигрыш фирмы I в любом случае максимизируется. *Но* — и в этом суть дела — стратегия фирмы I, т. е. что она намерена делать в недостигаемом узле, может действительно свидетельствовать о том, что фирма Е, при данной стратегии фирмы I, захочет сыграть «Не входить».

Чтобы исключить такие прогнозы, как (Не входить, Уступать, если фирма Е играет «Входить»), мы потребуем, чтобы равновесные стратегии игроков удовлетворяли так называемому *принципу секвенциальной рациональности*: стратегия игрока должна специфицировать оптимальные действия *в любом узле дерева игры*. Это означает, что в каком бы узле дерева ни находился игрок, его стратегия должна определять оптимальный после этого узла ход при данных стратегиях соперников. Очевидно, что стратегия фирмы I «Вытеснить, если фирма Е играет "Входить"» не будет удовлетворять этому требованию: единственной оптимальной стратегией после входа для фирмы I будет «Уступить».

В примере 9.В.1 показана простая процедура, которая может использоваться для поиска желаемого (т. е. секвенциально рационального) равновесия по Нэшу (σ_E, σ_I) = (Входить, Уступить, если фирма Е играет «Входить»). Сначала мы определяем оптимальное поведение для фирмы I после входа — «Уступить». Как только мы сделали это, определяем оптимальное поведение фирмы Е на более ранней стадии игры, учитывая то, что случится после входа. Заметьте, что этот второй шаг может быть сделан при анализе *редуцированной* развернутой формы игры, в которой часть игры, в которой фирма I принимает решение после входа, заменена выигрышами, которые получаются после оптимального поведения фирмы I после входа. Рассмотрим рис. 9.В.2. Эта редуцированная игра становится простой задачей выбора стратегии одним игроком, в которой оптимальным решением фирмы Е является действие «Входить». Таким образом, мы определяем профиль секвенциально рациональных равновесных по Нэшу стратегий (σ_E, σ_I) = (Входить, Уступить, если фирма Е играет «Входить»).

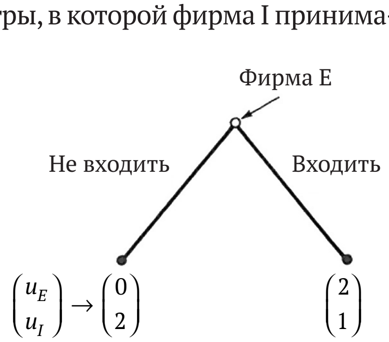


Рис. 9.В.2 Редуцированная игра как результат определения выбора фирмы I после входа фирмы Е в примере 9.В.1

Процедура, при которой сначала находится оптимальное поведение в «конце» игры (в рассматриваемом примере — узел после входа) и затем определяется оптимальное поведение на более ранней стадии игры с учетом поведения в дальнейшем, известна как *обратная индукция* (или *обратное программирование*). Эта процедура тесно связана с идеей секвенциальной рациональности, поскольку гарантирует, что стратегии игроков специфицируют оптимальное поведение в каждом узле решения игры.

Игра из примера 9.B.1 относится к классу игр, в которых процедура обратной индукции наиболее успешно реализует идею секвенциальной рациональности — это *конечные игры с совершенной информацией*. В этих играх каждое информационное множество содержит единственный узел решения и существует конечное число таких узлов (см. главу 7)[2]. Мы обсудим общее применение процедуры обратной индукции к такому классу игр до формального определения понятия равновесия.

Обратная индукция в конечных играх с совершенной информацией

Для применения идеи обратной индукции в конечных играх с совершенной информацией определим оптимальные действия в конечных узлах решения дерева (тех, для которых единственные последующие узлы — терминальные). Так же как и при решении после входа фирмы I в примере 9.B.1, игра в таких узлах не подразумевает дальнейшего стратегического взаимодействия игроков, и, таким образом, определение оптимального поведения в этих узлах представляет собой простую задачу выбора стратегии одним игроком. Затем, при выбранных действиях в последних узлах, мы можем перейти к предпоследним узлам решения и определить в них оптимальные действия игроков, которые считают, что в следующих узлах игроки сделают оптимальный выбор, и так далее вверх по дереву игры.

Эту процедуру легко применить, используя редуцирование игры. На каждом этапе после нахождения оптимальных действий в текущих конечных узлах решения мы можем получить новую редуцированную игру, удалив части игры, следующие после этих узлов, и приписав этим узлам выигрыши, которые уже определены на предыдущем этапе.

Пример 9.B.2. Рассмотрим конечную игру трех игроков с совершенной информацией, изображенную на рис. 9.B.3(a). Стрелки на рис. 9.B.3(a) показывают оптимальные действия в конечных узлах решения игры. Рис. 9.B.3(b) показывает редуцированную игру, полученную путем замены этих конечных узлов выигрышами, которые будут результатом оптимального выбора, после того как эти узлы будут достигнуты. Рис. 9.B.3(c) показывает редуцированную игру, полученную на следующем этапе процедуры обратной индукции, где конечные узлы решения редуцированной игры рис. 9.B.3(b) заменены выигрышами, получаемыми при оптимальном выборе в этих узлах (также показаны стрелками). Таким образом, процедура обрат-

[2] Предпосылка о конечности важна для некоторых аспектов анализа. Мы обсудим это ближе к концу раздела.

ной индукции определяет профиль стратегий (σ_1, σ_2, σ_3), в котором $\sigma_1 = R$, $\sigma_2 =$ = «a, если игрок 1 играет R» и

$$\sigma_3 = \begin{cases} r, \text{ если игрок 1 играет } L, \\ r, \text{ если игрок 1 играет } R \text{ и игрок 2 играет } a, \\ r, \text{ если игрок 1 играет } R \text{ и игрок 2 играет } b. \end{cases}$$

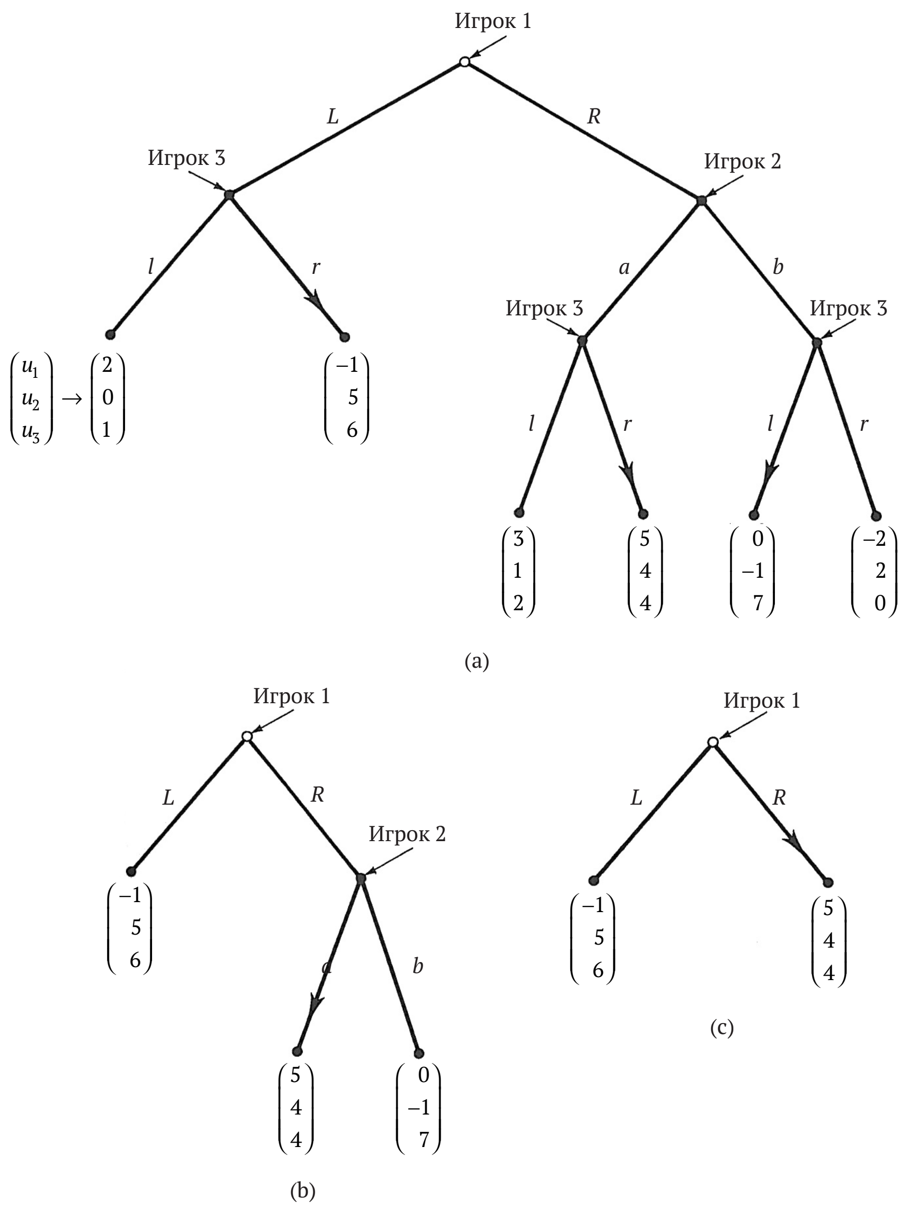


Рис. 9.B.3. Редуцированные игры в процедуре обратной индукции в конечной игре с совершенной информацией. (a) Исходная игра. (b) Первая редуцированная игра. (c) Вторая редуцированная игра

Заметим, что указанный профиль стратегий является равновесием по Нэшу в данной игре трех игроков, но эта игра имеет также другие равновесия по Нэшу в чистых стратегиях. (В упражнении 9.B.3 вас просят найти все равновесия и показать, что равновесия по Нэшу, которые не были получены в результате применения процедуры обратной индукции, не удовлетворяют принципу секвенциальной рациональности.) ■

Фактически в конечных играх с совершенной информацией мы будем получать общий результат, сформулированный в утверждении 9.B.1.

Утверждение 9.B.1 (*теорема Цермело*). В любой конечной игре с совершенной информацией Γ_E существует равновесие по Нэшу в чистых стратегиях, которое может быть получено с помощью обратной индукции. Кроме того, если ни один игрок не имеет одинаковых выигрышей в каких-либо двух терминальных узлах, то существует единственное равновесие по Нэшу, которое может быть получено таким способом.

Доказательство. Во-первых, заметим, что в конечных играх с совершенной информацией процедура обратной индукции полностью определена: игрок, который действует в каждом узле решения, имеет конечное число возможных выборов, поэтому оптимальные действия обязательно существуют на каждой стадии процедуры (если игроку все равно, мы можем выбрать любое из его оптимальных действий). Кроме того, процедура полностью определяет все стратегии игроков после конечного числа этапов. Во-вторых, заметим, что ни один игрок не имеет одинаковых выигрышей в любых двух терминальных узлах, поэтому оптимальные действия должны быть единственными на любых этапах процедуры, и, таким образом, в этом случае процедура обратной индукции определяет единственный профиль стратегий игры.

Остается показать, что профиль стратегий $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_I)$, построенный с помощью процедуры обратной индукции, обязательно является равновесием по Нэшу в игре Γ_E. Предположим, что это не так. Тогда некоторый игрок i будет отклоняться, скажем, к стратегии $\hat{\sigma}_i$, которая увеличивает его выигрыш при данных стратегиях других игроков, продолжающих играть стратегии σ_{-i}. То есть в предположении, что $u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$ является функцией выигрышей i-го игрока[3],

$$u_i\left(\hat{\sigma}_i,\ \sigma_{-i}\right) > u_i\left(\sigma_i,\ \sigma_{-i}\right). \tag{9.B.1}$$

Покажем, почему это неверно, воспользовавшись способом доказательства по индукции. Будем говорить, что узел решения x имеет длину n, если среди различных путей от него до терминальных уз-

[3] Точнее, $u_i(\cdot)$ является функцией выигрышей i-го игрока в нормальной форме, полученной из развернутой формы игры Γ_E.

лов максимальное число узлов решения, лежащих между ним и терминальным узлом, равно n. Обозначим N максимальную длину для всех узлов решения игры; так как Γ_E является конечной игрой, N является конечным числом. Определим как $\hat{\sigma}_i(n)$ стратегию, которая играется в соответствии со стратегией σ_i во всех узлах с длиной $0, \ldots, n$ и в соответствии со стратегией $\hat{\sigma}_i$ во всех узлах с длиной больше n.

Профиль стратегий σ, построенный посредством процедуры обратной индукции, удовлетворяет соотношению $u_i\left(\hat{\sigma}_i(0),\ \sigma_{-i}\right) \geq$ $\geq u_i\left(\hat{\sigma}_i,\ \sigma_{-i}\right)$. То есть i-му игроку может быть по крайней мере так же «хорошо» при выборе стратегии $\hat{\sigma}_i$, как в случае ходов, определенных стратегией σ_i, во всех узлах длины 0 (т. е. в конечных узлах решения игры), и стратегией $\hat{\sigma}_i$ в остальных.

Заметим, что если $u_i\left(\hat{\sigma}_i(n-1),\ \sigma_{-i}\right) \geq u_i\left(\hat{\sigma}_i,\ \sigma_{-i}\right)$, то $u_i\left(\hat{\sigma}_i(n),\ \sigma_{-i}\right) \geq$ $\geq u_i\left(\hat{\sigma}_i,\ \sigma_{-i}\right)$. Это прямое следствие. Единственное различие между $\hat{\sigma}_i(n)$ и $\hat{\sigma}_i(n-1)$ состоит в ходе i-го игрока в узлах длины n. При обеих стратегиях i-й игрок ходит в соответствии с σ_i во всех узлах, следующих за узлами длины n, и в соответствии со стратегией $\hat{\sigma}_i$ до них. Но при том что все игроки играют в соответствии с профилем стратегий σ после узлов длины n, ходы, выведенные для узлов решения длины n с помощью обратной индукции, названные σ_i, должны быть оптимальными в этих узлах для i-го игрока. Следовательно, $u_i\left(\hat{\sigma}_i(n),\ \sigma_{-i}\right) \geq u_i\left(\hat{\sigma}_i(n-1),\ \sigma_{-i}\right)$.

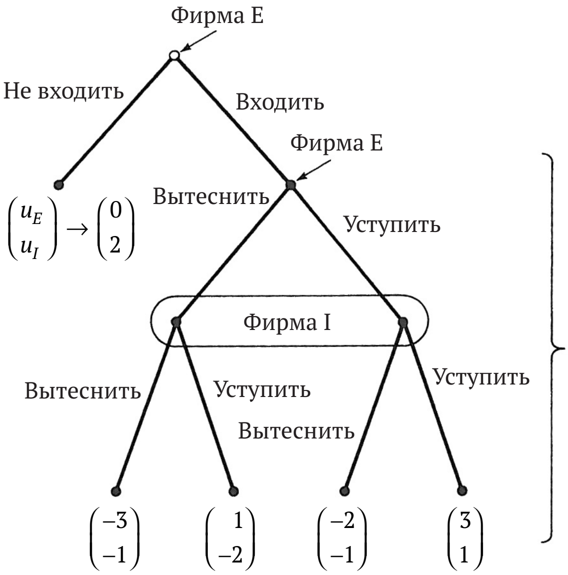
Применяя индукцию, мы, таким образом, имеем $u_i\left(\hat{\sigma}_i(N),\ \sigma_{-i}\right) \geq$ $\geq u_i\left(\hat{\sigma}_i,\ \sigma_{-i}\right)$. Но $\hat{\sigma}_i(N) = \sigma_i$, и мы получаем противоречие (9.B.1). Следовательно, профиль стратегий σ должен составлять равновесие по Нэшу в Γ_E. ■

Заметим, кстати, что в соответствии с утверждением 9.B.1 равновесие по Нэшу в чистых стратегиях существует во всех конечных играх с совершенной информацией.

Совершенное в подыграх равновесие по Нэшу

Теперь стало понятно, как применяется принцип секвенциальной рациональности в примере 9.B.1 и в целом в конечных играх с совершенной информацией. Однако прежде чем сформулировать общую концепцию решения, полезно рассмотреть еще один пример. В нем будет показано, как можно определить равновесие по Нэшу, удовлетворяющее принципу секвенциальной рациональности в более общих играх, в том числе с несовершенной информацией.

Пример 9.B.3. Рассмотрим ту же ситуацию, что и в примере 9.B.1, за исключением того что сейчас фирмы I и E играют игру с одновременными ходами после входа. Обе выбирают между «Вытеснить» и «Уступить». Развернутая и нормальная формы игры представлены на рис. 9.B.4.



Игра с одновременными ходами:

		Фирма I: Уступить	Фирма I: Выступить
Фирма E	Уступить	3, 1	−2, −1
	Вытеснить	1, −2	−3, −1

		Фирма I: Уступить, если Фирма E играет «Входить»	Фирма I: Вытеснять, если Фирма E играет «Входить»
Фирма E	Не входить; Уступить, если Входить	0, 2	0, 2
	Не входить; Вытеснить, если Входить	0, 2	0, 2
	Входить; Уступить, если Входить	3, 1	−2, −1
	Входить; Вытеснить, если Входить	1, −2	−3, −1

Рис. 9.В.4. Нормальная и развернутая формы игры из примера 9.В.3. В равновесии по Нэшу, удовлетворяющем требованию секвенциальной рациональности, обе фирмы должны играть «Уступить» после входа

Изучая нормальную форму, мы видим, что в этой игре три равновесия по Нэшу в чистых стратегиях (σ_E, σ_I)[4].

((Не входить, Уступить, если Входить), (Вытеснить, если фирма E играет Входить)),
((Не входить, Вытеснить, если Входить), (Вытеснить, если фирма E играет Входить)),
((Входить, Уступить, если Входить), (Уступить, если фирма E играет Входить)).

Однако заметим, что (Уступить, Уступить) является единственным равновесием по Нэшу в игре с одновременными ходами, которая следует после входа. Таким образом, фирмы должны ожидать, что они обе будут играть «Уступить» после входа

[4] Стратегия новичка в первых двух равновесиях может показаться странной. Фирма E планирует совершить действие при условии входа, наряду с тем что в то же время входить не планирует. Однако вспомним из раздела 7.D, что стратегия — это полный, учитывающий все обстоятельства план. В действительности причина, по которой мы настаиваем на этом требовании, состоит в необходимости проверить динамическую рациональность стратегии игрока.

фирмы E[5]. Но если это так, фирма E должна войти. Поэтому логика секвенциальной рациональности предполагает, что только последнее из трех равновесий — разумный прогноз игры. ■

Требование секвенциальной рациональности, проиллюстрированное этим и предыдущими примерами, отражается в концепции *совершенного в подыграх равновесия по Нэшу* [представленной в работе (Selten, 1965)]. Однако до формального определения этой концепции мы должны специфицировать, что такое *подыгра*.

Определение 9.B.1. *Подыгра* в развернутой форме игры Γ_E — это подмножество игры, обладающее следующими свойствами:

(i) Начинается с информационного множества, содержащего единственный узел решения, содержит все последующие узлы решения (речь идет как о непосредственно следующих за узлом, так и о дальних последователях) и *только* эти узлы.

(ii) Если узел решения x принадлежит подыгре, то ей принадлежит и каждый $x' \in H(x)$ тоже, где $H(x)$ — информационное множество, которому принадлежит x (т. е. информационные множества не «разрываются»).

Заметим, что согласно определению 9.B.1 сама игра в целом является подыгрой[6]. Например, на рис. 9.B.1 представлены две подыгры: сама игра в целом и часть дерева игры, начинающаяся с узла принятия решения фирмы I. Игра на рис. 9.B.4 также имеет две подыгры: сама игра в целом и часть игры, начинающаяся с узла решения фирмы E после входа. На рис. 9.B.5 штриховыми линиями обведены три части игры рис. 9.B.4, которые *не являются* подыграми.

Наконец, заметим, что в конечных играх с совершенной информацией каждый узел решения является начальным узлом подыгры. (В упражнении 9.B.1 вас просят проверить данное утверждение для игры примера 9.B.2.)

Главная черта подыгры состоит в том, что, изучаемая в отдельности, она представляет собой полноправную игру. Поэтому мы можем найти в ней равновесия по Нэшу. Далее будем говорить, что профиль стратегий σ

---

[5] Вспомним, что на протяжении этой главы мы принимаем предпосылку о том, что рациональные игроки всегда разыгрывают некоторое равновесие по Нэшу в любой стратегической ситуации, в какой бы они ни оказались (т. е. мы предполагаем, что игроки имеют взаимно верные ожидания). Однако для двух обстоятельств, связанных с этой предпосылкой в динамических играх, имеется ряд тонкостей. Например, если игроки никогда не достигнут определенных частей игры, аргумент устойчивых социальных норм, приведенный в разделе 8.D, больше не может быть логичным обоснованием предположения, что равновесие по Нэшу было бы сыграно, *если* та часть игры была бы достигнута. Во-вторых, идея динамической рациональности весьма убедительна, даже если мы не принимаем эту предпосылку. Например, здесь мы бы получили тот же результат, если бы предположили, что ни один игрок не будет использовать последовательно строго доминируемые стратегии в игре с одновременными ходами, следующей за входом.

[6] В литературе термин *собственная подыгра* иногда используется с тем же значением, которое мы приписали *подыгре*. Мы выбрали безусловный термин *подыгра*, чтобы сделать понятным, как определяется сама игра.

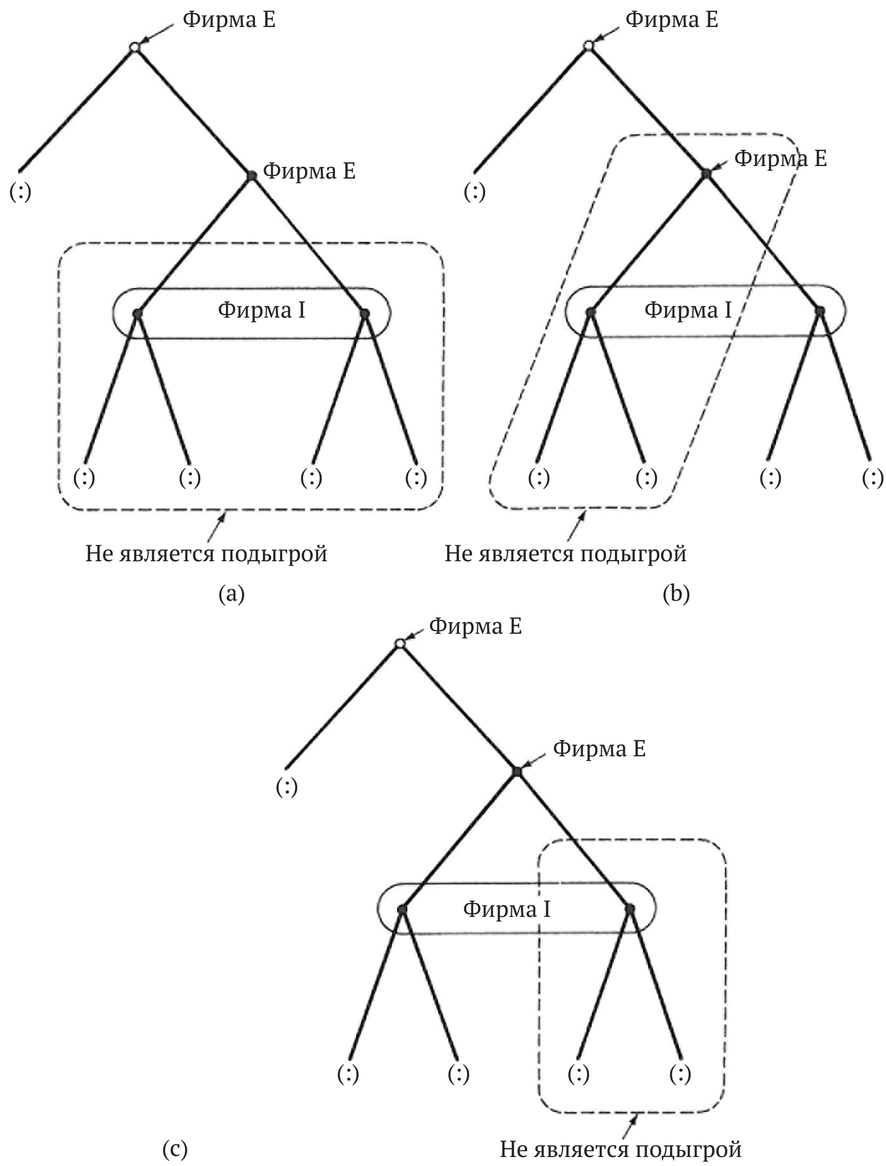


Рис. 9.B.5. Три части игры, дерево которой изображено на рис. 9.B.4, не являющиеся подыграми

в развернутой форме игры Γ_E *приводит* к равновесию по Нэшу в определенной подыгре Γ_E, если ходы, определенные σ для информационных множеств внутри подыгры, составляют равновесие по Нэшу в этой подыгре, когда она рассматривается в отдельности.

Определение 9.B.2. Профиль стратегий $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_I)$ в развернутой форме игры Γ_E с I игроками составляет *совершенное в подыграх равновесие по Нэшу* (SPNE), если он приводит к равновесию по Нэшу в каждой подыгре Γ_E.

Заметим, что любое SPNE является равновесием по Нэшу (так как сама игра в целом является подыгрой), но не любое равновесие по Нэшу является совершенным в подыграх.

Упражнение 9.B.2. Рассмотрите игру Γ_E в развернутой форме. Покажите, что

(а) Если единственной подыгрой является сама игра в целом, то все равновесия по Нэшу являются совершенными в подыграх.

(б) Совершенное в подыграх равновесие по Нэшу приводит к совершенному в подыграх равновесию по Нэшу в каждой подыгре Γ_E.

Только правдоподобные равновесия по Нэшу в примерах 9.B.1 и 9.B.3 являются также и SPNE. В примере 9.B.1 в любом совершенном в подыграх равновесии по Нэшу фирма I выберет «Уступить, если фирма E сыграет “Входить”», поскольку это строго доминирующая стратегия фирмы I в подыгре, следующей за входом. Также в примере 9.B.3 в любом SPNE обе фирмы должны играть «Уступить» после входа, поскольку это единственное равновесие по Нэшу в этой подыгре.

Заметим также, что в конечных играх с совершенной информацией, таких как, например, игры из примеров 9.B.1 и 9.B.2, множество SPNE состоит из множества равновесий по Нэшу, которые могут быть получены посредством процедуры обратной индукции. Вспомним, в частности, что в конечных играх с совершенной информацией каждый узел решения дает начало подыгре. Таким образом, в любом SPNE стратегии должны определять действия в каждом из конечных узлов решения игры, являющиеся оптимальными в начинающейся там подыгре одного игрока. Учитывая заданные таким образом ходы в конечных узлах решения в любом SPNE, рассмотрим процесс игры в подыграх, начинающихся в предпоследних узлах решения. В соответствии с требованиями SPNE равновесная по Нэшу стратегия должна приводить игрока, совершающего ход на предпоследнем узле, к выбору оптимальной стратегии с учетом ходов, которые будут происходить в последних узлах. И так далее. Применение этой идеи и утверждения 9.B.1 является результатом, который записан в утверждении 9.B.2.

Утверждение 9.B.2. В каждой конечной игре с совершенной информацией Γ_E существует совершенное в подыграх равновесие по Нэшу в чистых стратегиях. Кроме того, если ни один игрок не имеет одинаковых выигрышей в любых двух терминальных узлах, то существует единственное совершенное в подыграх равновесие по Нэшу[7].

Фактически для нахождения множества совершенных в подыграх равновесий по Нэшу в (конечной) динамической игре Γ_E можно применять

[7] Результат также напрямую следует из утверждения 9.B.1. В самом деле, поскольку профиль стратегий, полученный при помощи процедуры обратной индукции, составляет равновесие по Нэшу в самой игре в целом, он также является равновесием по Нэшу в каждой подыгре.

обобщение процедуры обратной индукции. Эта *обобщенная процедура обратной индукции* работает следующим образом.

1. Начните с конца дерева игры и определите равновесия по Нэшу в каждой из *конечных* подыгр (т. е. в тех, для которых не существует других подыгр, вложенных в данные).
2. Выберите одно равновесие по Нэшу в каждой из этих конечных подыгр и выведите редуцированную развернутую форму игры, в которой эти конечные подыгры будут заменены выигрышами, получаемыми в результате разыгрывания этих подыгр, когда игроки используют данные равновесные стратегии.
3. Повторите шаги 1 и 2 для редуцированной игры. Продолжайте процедуру до тех пор, пока каждый ход в Γ_E не будет определен. Этот набор ходов во всевозможных информационных множествах Γ_E составляет профиль SPNE стратегий.
4. Если ни на одном шаге этого процесса не случается множественности равновесий, данный профиль стратегий является единственным SPNE. Если наблюдается множественность равновесий, полное множество SPNE определяется путем повторения процедуры для каждого возможного равновесия, которое может иметь место в рассматриваемых подыграх.

Применение этой обобщенной процедуры обратной индукции для определения множества SPNE формально можно обосновать результатом, приведенным в утверждении 9.B.3.

Утверждение 9.B.3. Рассмотрим развернутую форму игры Γ_E и некоторую подыгру S из Γ_E. Предположим, что профиль стратегий σ^S является SPNE в подыгре S, и обозначим $\hat{\Gamma}_E$ редуцированную игру, полученную путем замены подыгры S терминальными узлами с выигрышами, равными полученным выигрышам от игры σ^S. Тогда

(i) В любом SPNE σ игры Γ_E, в котором σ^S играется в подыгре S, ходы игроков в информационных множествах вне подыгры S должны составлять SPNE редуцированной игры $\hat{\Gamma}_E$.

(ii) Если $\hat{\sigma}$ является SPNE игры $\hat{\Gamma}_E$, то профиль стратегий σ, который определяет ходы в σ^S при информационных множествах подыгры S и ходы в $\hat{\sigma}$ при информационных множествах вне S, составляет SPNE игры Γ_E.

Доказательство. (i) Предположим, что профиль стратегий σ, определяющий ходы в информационных множествах вне подыгры S, не составляет SPNE редуцированной игры $\hat{\Gamma}_E$. Тогда существует подыгра игры $\hat{\Gamma}_E$, в которой σ не приводит к равновесию по Нэшу. В этой подыгре $\hat{\Gamma}_E$ какой-то игрок имеет отклонение, которое увеличивает его выигрыш при данных стратегиях его соперников.

Но тогда этот игрок имеет также прибыльное отклонение в соответствующей подыгре игры Γ_E. Он делает те же изменения в своих ходах в информационных множествах вне S и оставляет свои ходы в информационных множествах в S без изменений. Следовательно, σ не могло быть SPNE всей игры Γ_E.

(ii) Предположим, что $\hat{\sigma}$ составляет SPNE редуцированной игры $\hat{\Gamma}_E$ и σ является профилем стратегий во всей игре Γ_E, определенным ходами в σ^S при информационных множествах подыгры S и ходами в $\hat{\sigma}$ при информационных множествах вне S. Докажем, что σ составляет равновесие по Нэшу в каждой подыгре Γ_E. Это напрямую следует из построения σ для подыгр Γ_E, которые либо целиком лежат в подыгре S, либо никогда не пересекаются с подыгрой S (т. е. не являются вложенными в подыгру S). Таким образом, рассмотрим любую подыгру, которая является вложенной в подыгру S. Если некоторый i-й игрок имеет прибыльное отклонение в этой подыгре при данных стратегиях его соперников, то он также должен иметь прибыльное отклонение, оставляющее его ходы внутри подыгры S неизменными, поскольку, по предположению, игроку наиболее выгодно внутри подыгры S выбирать ходы, определенные профилем стратегий σ^S при таких же действиях соперников. Но если он имеет такое прибыльное отклонение, то он должен иметь прибыльное отклонение в соответствующей подыгре редуцированной игры $\hat{\Gamma}_E$, что противоречит тому, что $\hat{\sigma}$ составляет SPNE $\hat{\Gamma}_E$. ■

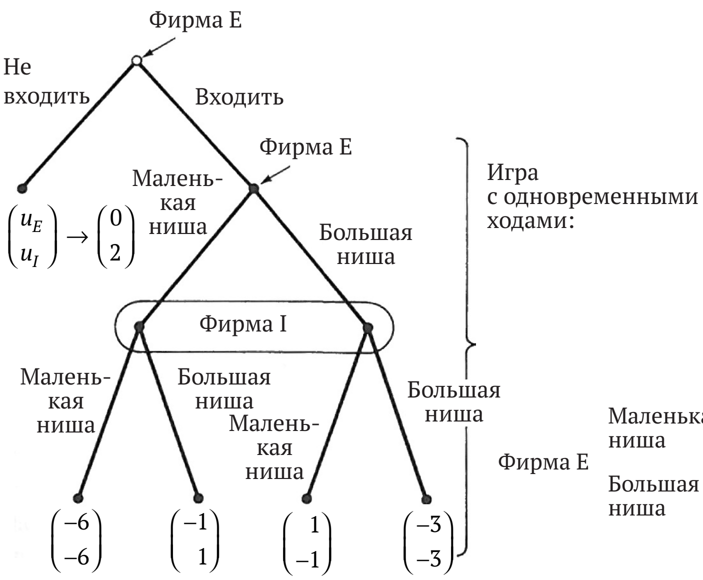
Заметим, что для конечных подыгр Γ_E множество равновесий по Нэшу и SPNE совпадает, поскольку эти подыгры не содержат вложенных подыгр. Определение равновесия по Нэшу в этих конечных подыграх, таким образом, позволяет нам индуктивно применять утверждение 9.B.3.

Данная обобщенная процедура обратной индукции сводится к нашей прошлой процедуре обратной индукции в случае игр с совершенной информацией. Но она также применяется и к играм с несовершенной информацией, что иллюстрирует пример 9.B.3. В нем мы можем найти единственное SPNE, определяя сначала единственное равновесие по Нэшу в подыгре после входа: (Уступить, Уступить). Действуя таким образом, мы можем заменить эту подыгру выигрышами, которые получаются в ней при равновесии. Сформированная редуцированная игра во многом совпадает с изображенной на рис. 9.B.2, с единственным отличием: выигрыш фирмы E при выборе стратегии «Входить» теперь равен 3 вместо 2. Следовательно, таким способом мы можем вывести единственное SPNE игры примера 9.B.3:

(σ_E, σ_I) = ((Входить, Уступить, если Входить), (Уступить, если фирма E играет «Входить»)).

Игра примера 9.B.3 решается просто по двум причинам. Во-первых, существует единственное равновесие в подыгре после входа. Если бы это было не так, поведение в игре на более ранних этапах зависело бы от того, *какое* равновесие сложилось после входа. Этот момент иллюстрирует пример 9.B.4[8].

Пример 9.B.4. *Игра «Выбор ниши»*. Рассмотрим модификацию игры из примера 9.B.3. Теперь вместо дилеммы, стоящей перед двумя фирмами, вытеснить с рынка или уступить часть рынка, будем предполагать, что на самом деле на рынке есть две ниши, одна большая и одна маленькая. После входа обе фирмы одновременно решают, какую нишу занять. Например, ниши могут соответствовать двум типам потребителей и фирмы могут решать, на какой тип они будут ориентироваться при



Фирма E \ Фирма I	Маленькая ниша	Большая ниша
Маленькая ниша	−6, −6	−1, 1
Большая ниша	1, −1	−3, −3

Рис. 9.B.6. Развернутая форма игры «Выбор ниши». В подыгре после входа существует множество равновесий по Нэшу

дизайне продукта. Обе фирмы потерпят убытки, если выберут одинаковую нишу, причем убытки будут больше в случае выбора маленькой ниши. Если они выберут разные ниши, то фирма, которая ориентируется на большую нишу, заработает прибыль, а фирма в маленькой нише понесет убытки, но меньшие, чем в случае, когда обе фирмы ориентируются на одну нишу. Развернутая форма игры представлена на рис. 9.B.6.

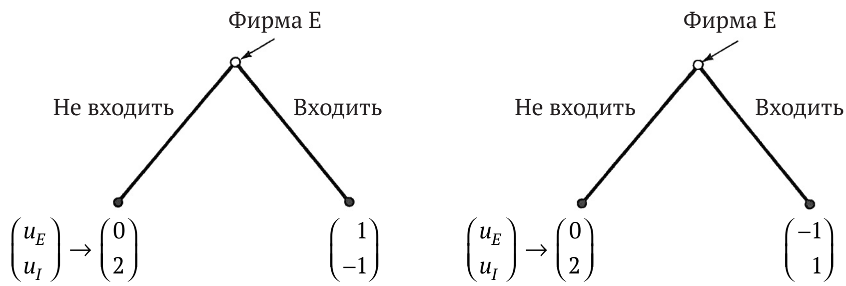
Для поиска SPNE в этой игре рассмотрим сначала подыгру после входа. Существует два равновесия по Нэшу в чистых стратегиях в этой игре с одновременными ходами: (Большая ниша, Маленькая ниша) и (Маленькая ниша, Большая ниша)[9].

[8] Подобные вопросы могут возникнуть в играх с совершенной информацией, если игроки безразличны между двумя действиями. Однако наличие множественности равновесий в подыграх при одновременных ходах в известном смысле является более робастным феноменом. Множественные равновесия обычно устойчивы к маленьким изменениям в выигрышах игроков, но связи с играми с совершенной информацией нет.

[9] Мы ограничиваем здесь внимание SPNE в чистых стратегиях. Также существуют равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях в подыгре после входа. В упражнении 9.B.6 вас просят проверить, являются ли такие смешанные стратегии равновесным поведением после входа.

В любом SPNE в чистых стратегиях стратегии фирм должны приводить к одному из этих двух равновесий по Нэшу в подыгре после входа. Предположим сначала, что фирмы будут играть (Большая ниша, Маленькая ниша). В этом случае выигрыши при достижении подыгры после входа будут $(u_E, u_I) = (1, -1)$, редуцированная игра изображена на рис. 9.B.7(a). В этом случае новичку оптимально выбрать вход. Следовательно, одно SPNE это

(σ_E, σ_I) = ((Входить, Большая ниша, если Входить), (Маленькая ниша, если фирма E играет «Входить»)).



(a) (b)

Рис. 9.B.7. Редуцированные игры после нахождения равновесия по Нэшу (в чистых стратегиях) в подыгре после входа игры «Выбора ниши». (a) Редуцированная подыгра, если равновесие по Нэшу (Большая ниша, Маленькая ниша). (b) Редуцированная подыгра, если равновесие по Нэшу (Маленькая ниша, Большая ниша)

Теперь предположим, что равновесием после входа является (Маленькая ниша, Большая ниша). Тогда выигрыши при достижении подыгры после входа будут $(u_E, u_I) = (-1, 1)$, редуцированная игра изображена на рис. 9.B.7(b). В этом случае новичку оптимально играть «Не входить». Следовательно, второе SPNE в чистых стратегиях — это

(σ_E, σ_I) = ((Не входить, Маленькая ниша, если Входить), (Большая ниша, если фирма E играет «Входить»)). ■

Вторая причина, по которой игра из примера 9.B.3 решается просто, состоит в том, что она содержит только одну подыгру, отличную от самой игры в целом. Подобно играм с совершенной информацией, игра с несовершенной информацией в общем случае может иметь множество подыгр, в котором одна подыгра вложена в другую и бóльшая подыгра вложена в еще бóльшую подыгру и т. д.

Ниже мы рассмотрим один интересный класс игр с несовершенной информацией, в которых обобщенная процедура обратной индукции приводит к более общему результату.

Утверждение 9.B.4. Рассмотрим развернутую форму игры Γ_E с I игроками, включающую последовательное разыгрывание T игр с одновременными ходами, $\Gamma_N^t = \left[I, \ \left\{\Delta\left(S_i^t\right)\right\}, \ \left\{u_i^t(\cdot)\right\}\right]$ для $t = 1, \ldots, T$, с наблюдением игроками чистых стратегий, сыгранных в каждой игре, сразу после того как игра произошла. Предположим, что выигрыш каждого игрока равен сумме его выигрышей в T играх. Если существует единственное равновесие по Нэшу в каждой игре Γ_N^t, скажем $\sigma^t = \left(\sigma_1^t, \ldots, \sigma_I^t\right)$, то существует единственное SPNE в игре Γ_E, состоящее в том, что каждый i-й игрок играет стратегию σ_i^t в каждой игре Γ_N^t независимо от того, что случилось до этого.

Доказательство. Проведем доказательство по индукции. Результат, очевидно, верен для $T = 1$. Теперь предположим, что он верен для всех $T \leq n - 1$. Покажем, что он верен для $T = n$.

По предположению в любом SPNE всей игры, после ходов в игре Γ_N^1, в оставшихся $n - 1$ играх с одновременными ходами просто должны осуществляться равновесные по Нэшу ходы в каждой игре (так как любое SPNE в целой игре приводит к SPNE в каждой подыгре). Предположим, i-й игрок получает G_i от равновесной игры в этих $n - 1$ играх. Затем в редуцированной игре, в которой все подыгры, следующие за Γ_N^1, заменены на их равновесные выигрыши, i-й игрок получит $u_i\left(s_1^1, \ldots, s_I^1\right) + G_i$, где $\left(s_1^1, \ldots, s_I^1\right)$ — профиль чистых стратегий, сыгранных в игре Γ_N^1. Единственное равновесие по Нэшу в этой редуцированной игре, очевидно, σ^1. Следовательно, результат верен для $T = n$. ■

Идея, лежащая в основе утверждения 9.B.4, состоит в применении обратной индукции: ходы в последней игре должны составлять единственное равновесие по Нэшу в этой сыгранной игре, поскольку на этот момент игроки встречаются только в ней. Но если ходы в последней игре предопределены, то, когда игроки играют предпоследнюю игру, она снова такова, как если бы они играли только эту игру в отдельности (обдумайте случай $T = 2$). И т. д.

Интересным аспектом утверждения 9.B.4 является то, каким образом концепция SPNE исключает зависимость стратегий от истории игры в рассматриваемом здесь классе игр. Стратегия игрока может потенциально обещать в итоге награду или наказание другим игрокам, если они предпримут определенные действия в начале игры. Но пока в каждой игре существует единственное равновесие по Нэшу, SPNE-стратегии не могут быть зависимыми от прошлого[10].

Упражнения 9.B.9 и 9.B.11 иллюстрируют дополнительные примеры использования концепции совершенного в подыграх равновесия по Нэшу. В приложении A мы рассмотрим важное экономическое применение концепции совершенного в подыграх равновесия в конечных играх с совершенной информацией (всего лишь один пример с бесконечным числом возможных действий в некоторых узлах решения): конечную модель двустороннего торга.

[10] Это отсутствие зависимости от истории существенно зависит от единственной предпосылки утверждения 9.B.4. При множественности равновесий по Нэшу во вложенных играх мы можем получить результаты, которые не являются простым повторением игры статического равновесия по Нэшу. (См. упражнение 9.B.9.)

Ранее в нашем анализе предполагалось, что изучаемая игра является конечной. Это предположение важно, поскольку позволяет нам найти совершенное равновесие по Нэшу начиная с конца игры и двигаясь вверх. В общем случае в играх, где возможна бесконечная последовательность ходов (так что по некоторым путям дерева игры никогда не дойти до терминальных узлов), определение совершенного в подыграх равновесия по Нэшу остается таким же, как в определении 9.B.2: стратегии должны приводить к равновесию по Нэшу в каждой подыгре. Однако отсутствие определенной точки завершения игры может снизить мощность концепции SPNE, поскольку мы не можем больше использовать конец игры для точного определения поведения. В играх, в которых всегда есть будущее, иногда широкий диапазон ходов может быть признан секвенциально рациональным (т. е. как часть SPNE). Замечательный пример читатель найдет в главе 12 и ее приложении A, где будут рассмотрены *бесконечно повторяющиеся игры* в контексте изучения олигополистического ценообразования.

Однако не всегда бесконечность горизонта снижает мощность концепции совершенного в подыграх равновесия. В приложении A данной главы мы изучим модель с бесконечным двусторонним торгом, в которой концепция SPNE предсказывает единственный исход, и этот исход совпадает с исходом соответствующей конечной модели торга в случае более длинного горизонта.

Методы, используемые для поиска совершенного в подыграх равновесия, могут быть различными. Иногда привлекается метод, показывающий, что игра может быть редуцирована, поскольку после определенной точки будет играться равновесие (см. упражнение 9.B.11). В других ситуациях может быть использовано свойство стационарности, если игра им обладает. Примером такого рода является анализ модели бесконечного двустороннего торга в приложении A.

После сделанного анализа логика секвенциальной рациональности может показаться неоспоримой. Однако все не настолько очевидно. Например, принцип секвенциальной рациональности нигде не может быть настолько убедительным, как в конечных играх с совершенной информацией. Шахматы являются игрой такого типа (игра заканчивается, если последние 50 ходов были сделаны игроками без движения пешек и без взятия фигур), и поэтому ее исход должен быть легко предсказуем. Конечно, «*неспособность*» игроков сделать это придает игре увлекательность. То же самое можно сказать про более простую игру — китайские шашки. Понятно, что на практике игроки могут быть только ограниченно рациональными. В результате нам легче действовать в играх, являющихся сравнительно простыми, в играх, где повторение помогает игрокам научиться продумывать игру до конца, или в играх, где большие ставки заставляют игроков быть максимально рациональными. Конечно, ограниченная рациональность имеет отношение не только к динамическим играм и совершенным в подыграх равновесиям по Нэшу, но также к играм с одновременными ходами, содержащими множество возможных стратегий.

Однако существует интересная неестественность концепции SPNE, связанная с вопросом ограниченной рациональности, которая не возникает в контексте игр с одновременными ходами. В частности, концепция SPNE требует, чтобы игроки играли SPNE, где бы в дереве игры они ни оказались, даже после последовательности событий, обратной теоретическим прогнозам. Чтобы лучше ее понять, рассмотрим следующий пример из работы (Rosenthal, 1981), известный как *игра «Сороконожка»*.

Пример 9.B.5. *Игра «Сороконожка»*. В этой конечной игре с совершенной информацией присутствуют два игрока, 1 и 2. Каждый игрок начинает игру с 1 долларом. Начиная с игрока 1 они поочередно объявляют либо «стоп», либо «продолжаю». Когда игрок говорит «продолжаю», судья берет 1 доллар из его кучки и помещает в кучку его соперника 2 доллара. Как только какой-то игрок скажет «стоп», игра заканчивается, и каждый игрок получает деньги из своей кучки. В качестве альтернативы игра прекращается, когда в кучках обоих игроков собирается по 100 долларов. Развернутая форма этой игры изображена на рис. 9.B.8.

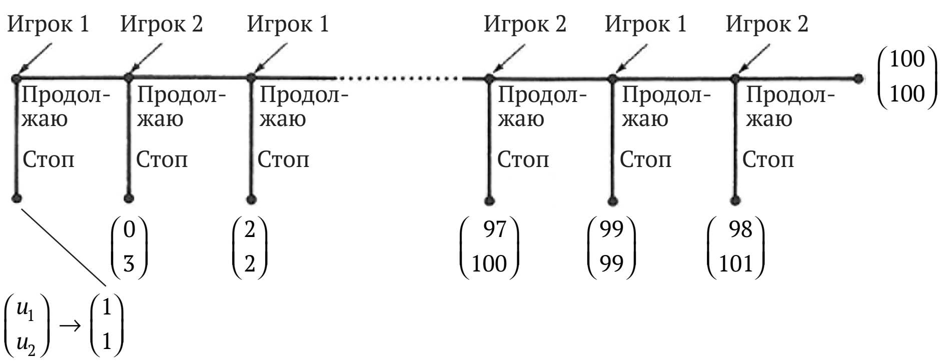


Рис. 9.B.8. Игра «Сороконожка»

Единственное SPNE в этой игре заключается в том, что оба игрока говорят «стоп» всякий раз, когда их ход, и каждый игрок получает 1 доллар в этом равновесии. Чтобы увидеть это, рассмотрим ход 2-го игрока в конечном узле решения игры (после того как игроки скажут «продолжаю» 197 раз). Его оптимальным ходом, если он достигнет этой точки, будет сказать «стоп»; таким способом он заработает 101 доллар вместо выигрыша в 100 долларов, если скажет «продолжаю». Теперь рассмотрим, что случится, если игра достигнет предпоследнего узла решения. Игрок 1, предвидя ход 2-го игрока в конечном узле решения, также скажет «стоп»; делая так, он заработает 99 долларов по сравнению с 98 долларами, если скажет «продолжаю». Продолжая двигаться таким образом назад по дереву игры, мы определим, что сказать «стоп» — оптимальный ход в каждом узле решения.

Поразительная особенность SPNE в игре «Сороконожка» заключается в том, что такое равновесие явно «неудачно» для игроков. Действительно, каждый получает 1 доллар, тогда как, многократно повторяя «продолжаю», он мог бы получить 100 долларов.

Является ли это равновесие (единственным) разумным SPNE прогнозом в игре «Сороконожка»? Рассмотрим первоначальное решение игрока 1 сказать «стоп». Чтобы оно было рациональным, 1-й игрок должен быть абсолютно уверен, что, если он вместо этого скажет «продолжаю», 2-й игрок скажет «стоп» в свой первый ход. Конечно, «продолжаю» было бы лучше для 1-го игрока, пока он мог бы быть уверен, что 2-й игрок сказал бы «продолжаю» при своем следующем ходе. Почему 2-й игрок может ответить на ход 1-го игрока «продолжаю», также говоря «продолжаю»? Во-первых, как мы обратили внимание, 2-й игрок может не быть полностью рациональным и поэтому может не сделать вычислений обратной индукции, предполагаемых понятием SPNE. Но однажды увидев, что 1-й игрок выбрал «продолжаю» — случай, который никогда не произойдет в соответствии с прогнозом SPNE, — он может учесть возможность того, что 1-й игрок нерационален в смысле, требуемом понятием SPNE. Если, как результат, он подумает, что 1-й игрок сказал бы «продолжаю» при своем следующем ходе, если представится шанс, тогда 2-й игрок сам бы захотел сказать «продолжаю». Понятие SPNE отрицает такую возможность, вместо этого полагая, что в любой точке игры игроки рассчитывают, что оставшиеся ходы в игре будут SPNE, даже если игра до этой точки противоречит теории. Один способ разрешения этого противоречия — представить концепцию SPNE как трактовку любого отклонения от описанной игры в результате крайне маловероятной «ошибки», которая вряд ли случится вновь. В приложении B мы обсудим одно понятие, которое сделает эту идею более ясной. ■

9.C. Ожидания и секвенциальная рациональность

Хотя концепция совершенного в подыграх равновесия зачастую полезна для отражения принципа секвенциальной рациональности, тем не менее иногда ее недостаточно. Рассмотрим пример 9.C.1, являющийся модификацией игры входа, рассмотренной в примере 9.B.1.

Пример 9.C.1. Предположим, что существуют две стратегии, которые фирма E может использовать для входа, «Вход$_1$» и «Вход$_2$», такие что фирма-старожил не может сказать, какая из них была использована фирмой E, если вход произошел. На рис. 9.C.1 изображена эта игра и выигрыши в ней.

Как в исходной игре входа в примере 9.B.1, здесь существуют два равновесия по Нэшу в чистых стратегиях: (Не входить, Вытеснить, если вход произошел) и (Вход$_1$, Уступить, если вход произошел). Однако первое из этих равновесий не является разумным; независимо от используемой стратегии входа фирмы E, старожил предпочтет уступить часть рынка, если вход произойдет. *Но критерий совершенствования подыграми здесь абсолютно бесполезен*: поскольку единственной подыгрой является сама игра в целом, оба равновесия по Нэшу в чистых стратегиях являются совершенными в подыграх. ■

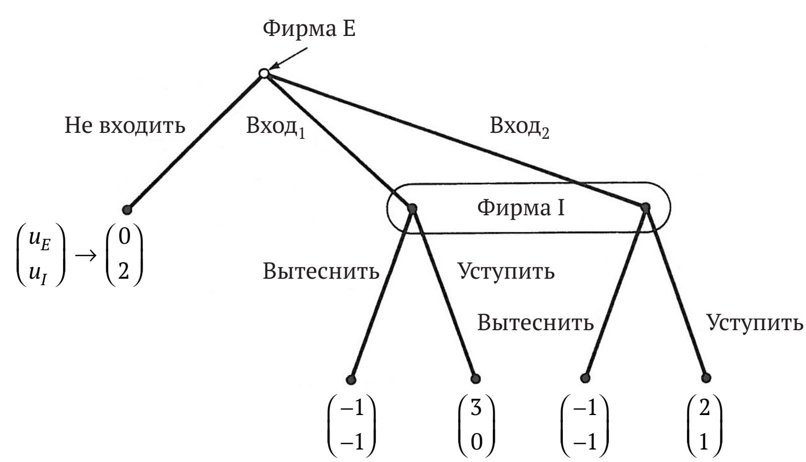


Рис. 9.C.1. Развернутая форма для примера 9.C.1. Понятие SPNE может оказаться неудачным, если требовать от равновесия секвенциальную рациональность

Как можно исключить здесь неправдоподобное равновесие? Одна возможность (в духе принципа секвенциальной рациональности) состоит в требовании, чтобы действия старожила после входа были оптимальными для *некоторых ожиданий*, которые он может иметь относительно того, какая стратегия входа была использована фирмой E. Конечно, в примере 9.C.1 «Вытеснять, если вход произошел» не является выбором при *любом* ожидании, которое может иметь фирма I. Здесь мы можем формально рассматривать ожидания игроков и использовать их для проверки секвенциальной рациональности их стратегий.

Сформулируем теперь концепцию равновесия, которую назовем *слабым совершенным байесовским равновесием* [Майерсон (Myerson, 1991) относит это же понятие к *слабому секвенциальному равновесию*], которая расширяет принцип секвенциальной рациональности путем формального добавления понятия ожиданий[11] и состоит в том, чтобы в любой точке игры стратегия игрока описывала оптимальные действия, начиная с этой точки при данных стратегиях соперников, и его ожидания относительно того, что случится далее в игре, и те его ожидания, которые согласованы с сыгранными стратегиями.

Прежде чем дать соответствующее определение, сформулируем два понятия, являющиеся его важными компонентами: понятия *системы ожиданий* и секвенциальной *рациональности стратегий*. Понятие ожиданий весьма простое.

Определение 9.C.1. *Система ожиданий* μ в развернутой форме игры Γ_E является детализацией вероятности $\mu(x) \in [0, 1]$ для каждого узла решения x в Γ_E, такой что

$$\sum_{x \in H} \mu(x) = 1$$

для всех информационных множеств H.

Систему ожиданий можно представить как точное определение для каждого информационного множества оценки игроком, делающим ход в этом множестве, сравнительной вероятности нахождения в каждом из различных узлов решения информационного множества, в зависимости от ходов, при которых это информационное множество было достигнуто.

Для определения секвенциальной рациональности удобно обозначить через $E[u_i \mid H, \mu, \sigma_i, \sigma_{-i}]$ ожидаемую полезность i-го игрока от нахождения в информационном множестве H, если его ожидания условной вероятно-

[11] Понятие *совершенного байесовского равновесия* впервые было развито для ответа на требование динамической рациональности в динамических играх с несовершенной информацией, т. е. (используя терминологию, представленную в разделе 8.E) в динамических байесовских играх. Понятие *слабого совершенного байесовского равновесия* является вариантом, представленным здесь в основном для образовательных целей (причина, по которой мы используем термин *слабый*, станет понятна ниже). Майерсон (Myerson, 1991) относит это понятие к *слабому секвенциальному равновесию*, поскольку оно может рассматриваться как слабый тип понятия секвенциального равновесия, представленного в определении 9.C.4.

сти нахождения в различных узлах в H представлены μ, он следует стратегии σ_i и его соперники используют стратегии σ_{-i}. [Мы не выписываем подробно формулу для этого выражения, хотя оно концептуально простое: представим, что вероятностное распределение $\mu(x)$ среди узлов $x \in H$ определено природой; тогда ожидаемый выигрыш i-го игрока определяется вероятностным распределением, которое вызывается в терминальных узлах сочетанием этого начального распределения со стратегиями игроков начиная с этого момента.]

Определение 9.C.2. Профиль стратегий $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_I)$ в развернутой форме игры Γ_E секвенциально *рационален в информационном множестве H при данной системе ожиданий* μ, если, обозначая через $\iota(H)$ игрока, делающего ход в информационном множестве H, имеем

$$E\left[u_{\iota(H)} | \, H, \, \mu, \; \sigma_{\iota(H)}, \, \sigma_{-\iota(H)}\right] \geq E\left[u_{\iota(H)} | \, H, \, \mu, \, \tilde{\sigma}_{\iota(H)}, \, \sigma_{-\iota(H)}\right]$$

для всех $\tilde{\sigma}_{\iota(H)} \in \Delta\left(S_{\iota(H)}\right)$. Если профиль стратегий σ удовлетворяет этому условию для *всех* информационных множеств H, то мы говорим, что σ секвенциально *рационален при данной системе ожиданий* μ.

Интуитивно понятно, что профиль стратегий $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_I)$ секвенциально рационален, если никто не считает нужным отклониться к другому профилю стратегий в каждом из достигаемых множеств при данных его ожиданиях относительно того, что уже произошло (что воплощено в μ), и стратегиях его соперников.

Исходя из этих двух понятий, мы можем теперь определить слабое совершенное байесовское равновесие. В определении используются два условия. Во-первых, стратегии должны быть секвенциально рациональными при данных ожиданиях. Во-вторых, когда возможно, ожидания должны быть согласованы со стратегиями. Идея, лежащая в основе условия согласованности с ожиданиями, во многом та же, что и идея, на которой базируется понятие равновесия по Нэшу (см. раздел 8.D): в равновесии игроки должны иметь верные ожидания относительно выбора стратегий их соперниками.

Для обоснования введенного в определение слабого совершенного байесовского равновесия специального требования согласованности ожиданий рассмотрим, как можно определить понятие согласованных ожиданий в особом случае, когда равновесная стратегия каждого игрока определяет строго положительную вероятность для каждого возможного действия в каждом из его информационных множеств (известна как *полностью смешанная стратегия*)[12]. В этом случае каждое информационное множество игры достигается с положительной вероятностью. Стандартное понятие

[12] Эквивалентно полностью смешанная стратегия может быть представлена как стратегия, имеющая строго положительную вероятность для каждой чистой стратегии игрока в нормальной форме, полученной из развернутой формы игры Γ_E.

ожиданий, согласованных с игрой равновесного профиля стратегий σ, в этом случае простое: для каждого узла x в данном информационном множестве H игрок должен вычислить вероятность достижения данного узла при игре стратегии σ, $\text{Prob}(x \mid \sigma)$, и затем, используя *правило Байеса,* определить условную вероятность нахождения в каждом из этих узлов при такой игре, при которой данное информационное множество было достигнуто[13]:

$$\text{Prob}\left(x \mid H, \sigma\right) = \frac{\text{Prob}\left(x \mid \sigma\right)}{\sum\limits_{x' \in H} \text{Prob}\left(x' \mid \sigma\right)}.$$

Предположим, что в игре из примера 9.C.1 фирма E использует полностью смешанную стратегию, которая устанавливает вероятности $^1/_4$ для «Не входить», $^1/_2$ для «Вход$_1$» и $^1/_4$ для «Вход$_2$». Тогда вероятность достижения фирмой I информационного множества при данной стратегии равна $^3/_4$. По правилу Байеса вероятность нахождения в левом узле информационного множества фирмы I, при условии достижения этого информационного множества, равна $^2/_3$, а условная вероятность нахождения в правом узле этого множества равна $^1/_3$. Для того чтобы ожидания входа фирмы I были согласованы со стратегией фирмы E, ожидания фирмы I должны быть в точности равны этим вероятностям.

Более сложная проблема возникает, если игроки не используют полностью смешанные стратегии. В этом случае некоторые информационные множества могут больше не достигаться с положительной вероятностью, и, таким образом, мы не можем использовать правило Байеса для вычисления условных вероятностей для узлов в этих информационных множествах. На интуитивном уровне эта проблема соответствует тому, что, даже если игроки сыграли бы игру многократно, равновесная игра не создает опыта, на котором они могли бы основывать свои ожидания в этих информационных множествах. Понятие слабого совершенного байесовского равновесия определяет, что именно игроки должны ожидать, если бы они внезапно достигли этих информационных множеств. В частности, оно позволяет нам устанавливать в этих информационных множествах любые ожидания. Этим и объясняется использование атрибута «*слабый*».

Теперь мы можем дать формальное определение.

Определение 9.C.3. Профиль стратегий и система ожиданий (σ, μ) являются *слабым совершенным байесовским равновесием* (слабым PBE) в развернутой форме игры Γ_E, если они обладают следующими свойствами:

(i) Профиль стратегий σ секвенциально рационален при данной системе ожиданий μ.

(ii) Система ожиданий μ выведена из профиля стратегий σ посредством правила Байеса везде, где это возможно. То есть для любо-

[13] Правило Байеса является основным правилом статистического вывода. См., например, работу (DeGroot, 1970), где оно рассматривается как *теорема Байеса*.

го информационного множества H, такого что $\text{Prob}(H \mid \sigma) > 0$ (читается как «вероятность достижения информационного множества H положительна при стратегии σ»), должно быть выполнено

$$\mu(x) = \frac{\text{Prob}(x \mid \sigma)}{\text{Prob}(H \mid \sigma)} \text{ для всех } x \in H.$$

Заметим, что определение формально включает в себя ожидания в виде части равновесия путем определения *пары стратегии – ожидания* (σ, μ) как слабого совершенного байесовского равновесия. Однако в литературе оно трактуемо немного шире: набор стратегий σ будет определен как равновесие, при условии что существует по крайней мере один обусловленный набор ожиданий μ, такой что (σ, μ) удовлетворяет определению 9.C.3. Однако бывает весьма полезно точно определить, что же представляют собой эти ожидания, например, когда мы проверяем, удовлетворяют ли они критериям «разумности», которые мы обсудим в разделе 9.D.

Понять связь между концепцией слабого PBE и того же равновесия по Нэшу можно из характеристики равновесия по Нэшу, данной в утверждении 9.C.1.

Утверждение 9.C.1. Профиль стратегий σ является равновесием по Нэшу в развернутой форме игры Γ_E тогда и только тогда, когда существует система ожиданий μ, таких что:

(i) Профиль стратегий σ секвенциально рационален при данной системе ожиданий μ *во всех информационных множествах H, таких что* $\text{Prob}(H \mid \sigma) > 0$.

(ii) Система ожиданий μ выведена из профиля стратегий σ посредством правила Байеса там, где это возможно.

В упражнении 9.C.1 вам предлагается доказать этот результат. Выделенная курсивом часть условия (i) — единственное отличие от определения 9.C.3: для равновесия по Нэшу мы требуем секвенциальной рациональности только на равновесном пути. Поэтому слабое совершенное байесовское равновесие в игре Γ_E является равновесием по Нэшу, но не каждое равновесие по Нэшу является слабым PBE.

Теперь проиллюстрируем применение понятия слабого PBE. Сначала рассмотрим, как это понятие представлено в примере 9.C.1.

Пример 9.C.1 (продолжение). Очевидно, что фирма I должна играть «Уступить, если вход произошел» в любом слабом совершенном байесовском равновесии, поскольку это оптимальное действие фирмы I, начинающееся в ее информационном множестве при *любой* системе ожиданий. Таким образом, равновесные по Нэшу стратегии (Не входить, Вытеснить, если вход произошел) не могут быть частью любого слабого PBE.

Что можно сказать о другом равновесии по Нэшу в чистых стратегиях (Вход$_1$, Уступить, если вход произошел)? Чтобы показать, что этот профиль стратегий является частью слабого PBE, необходимо дополнить эти стратегии системой ожиданий, удовлетворяющей критерию (ii) определения 9.C.3 и ведущей к секвенциальной рациональности этих стратегий. Заметим сначала, что для удовлетворения критерия (ii) старожил должен ожидать, что с вероятностью, равной 1, находится в левом узле своего информационного множества, поскольку это информационное множество достигается с положительной вероятностью при данных стратегиях (Вход$_1$, Уступить, если вход произошел) [спецификация ожиданий в этом информационном множестве полностью описывает систему ожиданий в данной игре, поскольку единственное другое информационное множество — множество, состоящее из одного элемента]. Кроме того, эти стратегии действительно секвенциально рациональны при данной системе ожиданий. Фактически эта пара стратегии — ожидания составляет единственное слабое PBE в данной игре (в чистых или смешанных стратегиях). ■

Примеры 9.C.2, 9.C.3 дают представление о применении концепции слабого PBE.

Пример 9.C.2. Рассмотрим следующую игру входа «совместное предприятие». Теперь существует второй потенциальный новичок E2. История следующая: фирма E1 обладает необходимыми мощностями для входа на рынок, но ей не хватает некоторых важных мощностей, которые есть у фирмы E2. В результате E1 рассматривает предложение совместного предприятия с фирмой E2, в котором E2 делит свои мощности с E1 и две фирмы делят прибыли от входа. Фирма E1 имеет три первоначальных выбора: входить самостоятельно, предложить совместное предприятие с E2, остаться вне рынка. Если она предлагает совместное предприятие, фирма E2 может принять его или отклонить. Если E2 принимает предложение, то E1 входит с помощью E2. Если нет, то E1 должна решить, входить ли самостоятельно. Старожил может наблюдать, вошла ли E1, но не может наблюдать, вошла ли она с помощью E2. «Вытеснить» является наилучшим ответом для старожила, если у E1 нет поддержки (E1 может потом быть быстро побеждена), но не является оптимальной для старожила, если E1 помогают (E1 тогда является более сильным конкурентом). Наконец, если у E1 нет поддержки, она может хотеть войти, только если старожил уступит часть рынка; но если у E1 есть помощь E2, то тогда, поскольку она будет достаточно сильным конкурентом, ее вход будет прибыльным независимо от того, играет ли старожил стратегию вытеснения. Развернутая форма игры изображена на рис. 9.C.2.

Чтобы найти слабое PBE в этой игре, заметим сперва, что в любом слабом PBE фирма E2 должна согласиться на совместное предприятие, если E1 предложит его, поскольку E2, таким образом, будет уверена в положительном выигрыше независимо от стратегии фирмы I. Но если так, то тогда в любом слабом PBE фирма E1 должна предложить совместное предприятие, поскольку если E2 примет это предложение, то фирма E1 окажется в лучшем положении, чем если бы она осталась вне рынка или входила самостоятельно, независимо от стратегии фирмы I после входа. Заметим, что эти два вывода означают, что информационное множество фирмы I достигается с положительной вероятностью (фактически с определенностью) в любом слабом PBE. Применяя концепцию совершенного байесовского равновесия к этому информационному множеству, мы можем заключить, что ожидания в этом информационном множестве должны составлять вероятность нахождения в среднем узле, равную 1. При этом в любом слабом PBE стратегия фирмы I должна иметь вид «Уступить, если вход произошел». Наконец, если фирма I играет «Уступить, если вход произошел», то тогда фирма E1 должна войти, если предлагает совместное предприятие, которое фирма E2 потом отклоняет.

Получаем, что единственное слабое PBE в этой игре является парой стратегии – ожидания со стратегиями $(\sigma_{E1}, \sigma_{E2}, \sigma_I)$ = ((Предложить совместное предприятие, Входить, если E2 отклоняет), (Принять), (Уступить, если вход произошел)) и системой

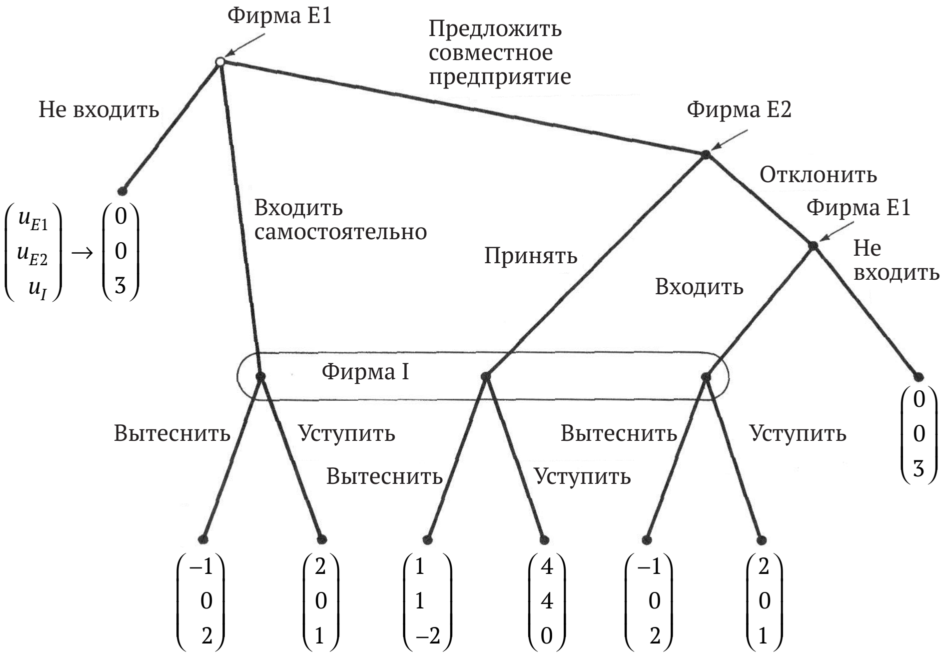


Рис. 9.C.2. Развернутая форма игры примера 9.C.2

ожиданий μ (средний узел информационного множества старожила) = 1. Заметим, что это не единственное равновесие по Нэшу или, по-другому, не единственное SPNE. Например, $(\sigma_{E1}, \sigma_{E2}, \sigma_I)$ = ((Не входить, Не входить, если E2 отклоняет), (Отклонить), (Вытеснить, если вход произошел)) является SPNE в этой игре. ■

Пример 9.C.3. В играх из примеров 9.C.1, 9.C.2 фокус с определением слабых PBE состоял в выявлении того факта, что некоторый игрок имеет оптимальную стратегию, которая не зависит от его ожиданий и (или) от будущей игры его соперников. Однако в игре, изображенной на рис. 9.C.3, это уже не так. Фирма I теперь

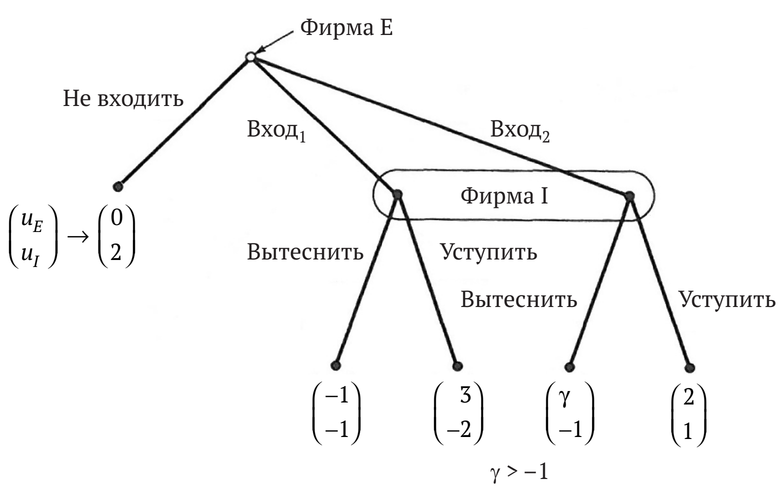


Рис. 9.C.3. Развернутая форма игры примера 9.C.3

желает вытеснять с рынка, если думает, что фирма E сыграла «Вход$_1$», и оптимальная стратегия фирмы E зависит от поведения фирмы I (заметим, что $\gamma > -1$).

Чтобы найти равновесие в этой игре, найдем *неподвижную точку*, при которой поведение, вызванное ожиданиями, согласовано с этими ожиданиями. Мы ограничим внимание случаем, где $\gamma > 0$. [В упражнении 9.C.2 вас просят определить множество слабых PBE в случае $\gamma \in (-1, 0)$.] Обозначим через σ_F вероятность, с которой фирма I вытесняет с рынка после входа. Пусть μ_1 обозначает ожидания фирмы I, что стратегией входа фирмы E было «Вход$_1$», если вход произошел, и пусть $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ обозначают вероятности, с которыми фирма E выбирает теперь «Не входить», «Вход$_1$» и «Вход$_2$» соответственно.

Заметим сначала, что фирма I желает играть «Вытеснить» с положительной вероятностью, если и только если $-1 \geq -2\mu_1 + 1(1-\mu_1)$, или $\mu_1 \geq \dfrac{2}{3}$.

Предположим сначала, что $\mu_1 > \dfrac{2}{3}$ в слабом PBE. Тогда фирма I должна играть «Вытеснить» с вероятностью 1. Но тогда фирма E должна играть «Вход$_2$» с вероятностью 1 (так как $\gamma > 0$) и понятие слабого PBE потребовало бы, чтобы $\mu_1 = 0$, что противоречит нашему предположению.

Предположим теперь, что $\mu_1 < \dfrac{2}{3}$ в слабом PBE. Тогда фирма I должна играть «Уступить» с вероятностью 1. Но, если так, фирма E должна играть «Вход$_1$» с вероятностью 1, и понятие слабого PBE тогда потребовало бы, чтобы $\mu_1 = 1$, что снова противоречит нашему предположению.

Следовательно, в любом слабом PBE в этой игре должно быть $\mu_1 = \dfrac{2}{3}$. Если так, то тогда фирма E должна рандомизировать в равновесии с положительной вероятностью для обеих стратегий: «Вход$_1$» и «Вход$_2$», причем «Вход$_1$» в два раза более вероятен, чем «Вход$_2$». Это означает, что вероятность хода фирмы I «Вытеснить» заставляет фирму E быть безразличной между «Вход$_1$» и «Вход$_2$». Следовательно, $-1\sigma_F + 3(1-\sigma_F) = \gamma\sigma_F + 2(1-\sigma_F)$, или $\sigma_F = 1/(\gamma + 2)$. Выигрыш фирмы E от хода «Вход$_1$», или «Вход$_2$» тогда равен $(3\gamma + 2)/(\gamma + 2) > 0$, и, таким образом, фирма E должна играть «Не входить» с нулевой вероятностью. Следовательно, единственным слабым PBE в этой игре при $\gamma > 0$ являются $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) = \left(0, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$, $\sigma_F = 1/(\gamma + 2)$ и $\mu_1 = \dfrac{2}{3}$. ■

Усиление понятия слабого совершенного байесовского равновесия

Мы охарактеризовали понятие из определения 9.C.3 как *слабое* совершенное байесовское равновесие, поскольку требования согласованности, которые оно налагает на ожидания, минимальны: *единственное* условие для ожиданий (кроме того, что они являются неотрицательными числами, в сумме дающими 1 внутри каждого информационного множества) состоит в том, что, будучи найденными по правилу Байеса, они должны быть согласованы с равновесными стратегиями на равновесном пути. *Нет никаких ограничений, налагаемых на ожидания вне равновесного пути* (т. е. в информационных множествах, не достигаемых с положительной вероятностью при игре равновесных стратегий). Существует несколько усилений этого понятия, налагающих дополнительные требования согласованности на ожидания вне равновесного пути. Примеры 9.C.4, 9.C.5 показывают, почему зачастую необходимо усиление концепции слабого PBE.

Пример 9.C.4. Рассмотрим игру, изображенную на рис. 9.C.4. Чистые стратегии и ожидания (стратегии показаны стрелками в выбранных ветках в каждом информационном множестве, ожидания показаны числами в скобках в узлах информационных множеств) составляют слабое PBE. Ожидания удовлетворяют критерию (ii) определения 9.C.3; только информационное множество 1-го игрока достигается с положительной вероятностью, и ожидания 1-го игрока там отражают вероятности, заданные природой. Но ожидания, определенные для 2-го игрока, в этом равновесии не вполне разумны; информационное множество 2-го игрока может быть достигнуто, только если 1-й игрок отклонится путем выбора действия y с положительной вероятностью, отклонение должно быть независимо от фактического хода природы, так как 1-му игроку оно неизвестно. Следовательно, для 2-го игрока было бы разумно иметь только те ожидания, которые задают одинаковую вероятность двум узлам в его информационном множестве. Здесь желательно потребовать, чтобы ожидания были по крайней мере «структурно согласованы» вне равновесного пути в том смысле, что должно существовать *некоторое* субъективное вероятностное распределение на профиле стратегий, которое могло бы согласовать стратегии с ожиданиями. ■

Пример 9.C.5. Вторая и более значимая проблема состоит в том, что слабое совершенное байесовское равновесие не обязано быть совершенным в подыграх. Чтобы увидеть это, рассмотрим снова игру входа из примера 9.B.3. Одно слабое PBE этой игры состоит из стратегий (σ_E, σ_I) = ((Не входить, Уступить, если Входить), (Вытеснить, если фирма E играет «Входить»)), вместе с ожиданиями для фирмы I, заданными вероятностью 1, что фирмой E сыграна «Вытеснить». Это слабое PBE изображено на рис. 9.C.5.

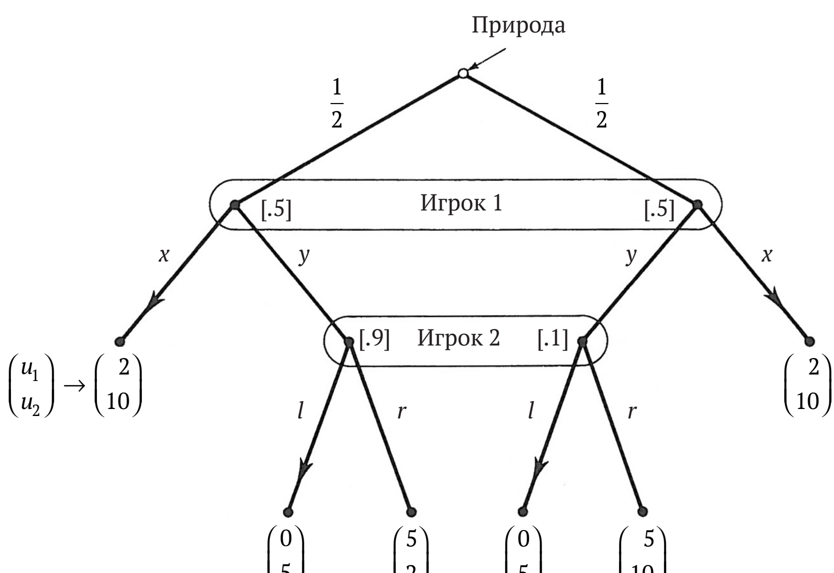


Рис. 9.C.4. Развернутая форма игры из примера 9.C.4. Ожидания в слабом PBE могут не быть структурно согласованными

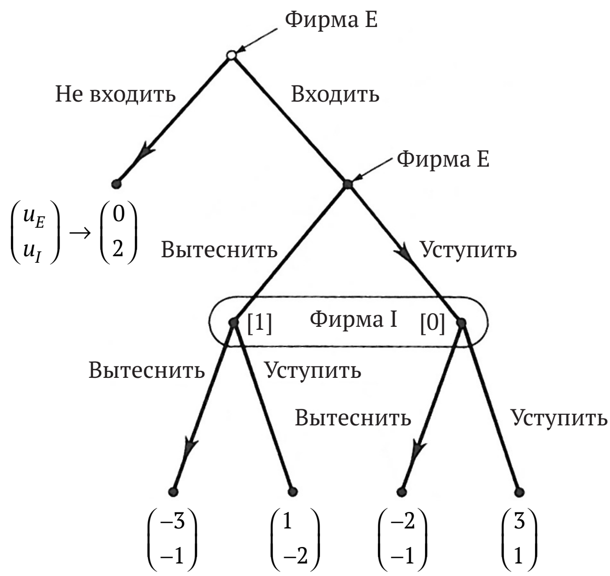


Рис. 9.C.5. Развернутая форма игры из примера 9.C.5.
Слабое PBE может не быть совершенным в подыграх

Но заметим, что эти стратегии не являются совершенными в подыграх; они не составляют равновесие по Нэшу в подыгре после входа.

Проблема состоит в том, что ожидания фирмы I относительно игры после входа фирмы E не ограничены понятием слабого PBE, поскольку информационное множество фирмы I лежит вне равновесного пути. ■

Эти два примера показывают, что концепция слабого PBE может быть слишком слабой. Поэтому к понятию слабого PBE часто добавляют дополнительные требования согласованности ожиданий, чтобы избежать этих проблем. Получившуюся концепцию равновесия определяют как *совершенное байесовское равновесие* (равновесие, в котором играется слабое PBE в каждой подыгре). Мы также сделаем это в дальнейшем изложении, при обсуждении сигналинга в разделе 13.C. Формальные определения и обсуждение некоторых понятий совершенного байесовского равновесия можно найти в работах (Fudenberg, Tirole, 1991a; 1991b).

Важная концепция равновесия, которая также усиливает концепцию слабого PBE путем включения дополнительного требования согласованности ожиданий, — понятие секвенциального равновесия, развитое Крепсом и Уилсоном (Kreps, Wilson, 1982). В отличие от определений совершенного байесовского равновесия (из раздела 13.C), понятие секвенциального равновесия вводит эти требования согласованности опосредованно с помощью формального представления ограниченной последовательности стратегий. Определение 9.C.4 описывает эти требования.

Определение 9.C.4. Профиль стратегий и система ожиданий (σ, μ) являются *секвенциальным равновесием* в развернутой форме игры Γ_E, если они обладают следующими свойствами:

(i) Профиль стратегий σ секвенциально рационален при данной системе ожиданий μ.

(ii) Существует последовательность полностью смешанных стратегий $\left\{\sigma^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ с $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma^k = \sigma$, такая что $\mu = \lim\limits_{k\to\infty} \mu^k$, где через μ^k обозначены ожидания, полученные из профиля стратегий σ^k на основе правила Байеса.

В сущности, концепция секвенциального равновесия требует, чтобы ожидания были согласованными, поскольку они получены из некоторого множества полностью смешанных стратегий, которые «близки» к равновесным стратегиям σ (т. е. из слабого возмущения равновесных стратегий). Это вытекает из требования того, что игроки могут (приблизительно) объяснить свои ожидания некоторыми заявлениями, в которых, с некоторой малой вероятностью, они ошибаются в выборе стратегий. Заметим, что каждое секвенциальное равновесие является слабым совершенным байесовским равновесием, поскольку ограниченные ожидания в определении 9.C.4 полностью совпадают с ожиданиями, полученными из равновесных стратегий σ с помощью правила Байеса на равновесном пути профиля стратегий σ. Но, вообще говоря, обратное не всегда верно.

Как будет показано ниже, концепция секвенциального равновесия усиливает концепцию слабого совершенного байесовского равновесия, в определенной степени решая проблемы, описанные в примерах 9.C.4, 9.C.5.

Пример 9.C.4 (продолжение). Рассмотрим снова игру, изображенную на рис. 9.C.4. В этой игре все ожидания, которые могут быть получены на основе любой последовательности полностью смешанных стратегий, задают равную вероятность двум узлам информационного множества 2-го игрока. При данных обстоятельствах в любом секвенциальном равновесии 2-й игрок должен играть r и 1-й игрок, следовательно, должен играть y. Фактически стратегии (y, r) и ожидания, придающие равную вероятность двум узлам в обоих информационных множествах игроков, составляют единственное секвенциальное равновесие в этой игре. ■

Пример 9.C.5 (продолжение). Единственные секвенциальные равновесные стратегии в игре из примера 9.C.5 (см. рис. 9.C.5) совпадают с единственным SPNE: (σ_E, σ_I) = ((Входить, Уступить, если Входить), (Уступить, если фирма E играет «Входить»)). Чтобы проверить это, рассмотрим полностью смешанную стратегию $\bar{\sigma}$ и любой узел x в информационном множестве фирмы I, которое обозначим H_I. Пусть z обозначает узел решения фирмы E, следующий после входа (начальный узел подыгры после входа), ожидания $\mu_{\bar{\sigma}}$, вызванные $\bar{\sigma}$ в информационном множестве H_I, равны

$$\mu_{\sigma}(x) = \frac{\text{Prob}(x \mid \bar{\sigma})}{\text{Prob}(H_I \mid \bar{\sigma})} = \frac{\text{Prob}(x \mid z,\ \bar{\sigma})\text{Prob}(z \mid \bar{\sigma})}{\text{Prob}(H_I \mid z,\ \bar{\sigma})\text{Prob}(z \mid \bar{\sigma})},$$

где $\text{Prob}\left(x \mid z, \bar{\sigma}\right)$ — вероятность достижения узла x при стратегии $\bar{\sigma}$ при условии достижения узла z. Сокращая выражение и замечая, что $\text{Prob}(H_I \mid z,\ \bar{\sigma}) = 1,$ получим $\mu_{\sigma}(x) = \text{Prob}(x \mid z, \bar{\sigma})$. Но это как раз вероятность того, что фирма E осуществляет ход, приводящий к узлу x при стратегии $\bar{\sigma}$. Таким образом, любая последовательность полностью смешанных стратегий $\left\{\bar{\sigma}^k\right\}_{k=1}^{\infty}$, которая сходится к σ, должна формировать ограниченные ожидания для фирмы I, соответствующие ходу в узле z, определенному фактической стратегией σ_E фирмы E. Из этого непосредственно следует, что стратегии в любом секвенциальном равновесии должны определять равновесное по Нэшу поведение в этой подыгре после входа и, таким образом, составлять совершенное в подыграх равновесие по Нэшу. ■

Утверждение 9.C.2. В каждом секвенциальном равновесии (σ, μ) в развернутой форме игры Γ_E, равновесный профиль стратегий σ составляет совершенное в подыграх равновесие по Нэшу в Γ_E.

Таким образом, концепция секвенциального равновесия усиливает оба понятия: SPNE и слабого PBE; каждое секвенциальное равновесие является и слабым PBE, и SPNE.

Хотя понятие секвенциального равновесия ограничивает ожидания вне равновесного пути в достаточной мере, чтобы решить проблемы, связанные с понятием слабого PBE, проиллюстрированные примерами 9.C.4, 9.C.5, в ряде случаев требования на ожидания вне равновесного пути, воплощенные в концепции секвенциального равновесия, могут быть слишком сильными. Например, они могут подразумевать, что любые два игрока с одинаковой информацией должны иметь в точности одинаковые ожидания относительно отклонений других игроков, вызывающих игру с достижением данной части дерева игры.

В приложении B мы кратко опишем еще одну связанную (и по-прежнему сильную) концепцию равновесия, *совершенное равновесие по Нэшу дрожащей руки в развернутой форме*, впервые предложенную Зелтеном (Selten, 1975)[14].

9.D. Обоснованные ожидания и прямая индукция

В разделе 9.C мы поняли, насколько важны ожидания в недостигаемых информационных множествах для проверки секвенциальной рациональности стратегий. Хотя концепция слабого совершенного байесовского равновесия и связанные с ней более сильные концепции, рассмотренные в разделе 9.C, могут помочь исключить пустые угрозы, во многих играх мы можем, однако, допустить большой спектр поведения вне равновесного пути посредством выбора подходящих ожиданий вне его (мы кратко рассмотрим несколько примеров). В последнее время большое количество исследований направлено на выявление дополнительных ограничений, которым должны удовлетворять обоснованные ожидания. В этом разделе мы приведем краткое описание этих идей. (Мы встретимся с ними снова, когда будем изучать модели сигналинга в главе 13, особенно в приложении A к этой главе.)

[14] Зелтен дал ему имя *совершенное равновесие по Нэшу дрожащей руки*; мы добавили «*в развернутой форме*», чтобы помочь отличить его от понятия в нормальной форме, представленного в разделе 8.F.

Для начала рассмотрим две игры, изображенные на рис. 9.D.1. Первая является вариантом игры входа (рис. 9.C.1), в котором фирма I сочтет разумным вытеснять с рынка, если ей станет известно, что новичок использовал стратегию «Вход$_1$»; вторая является вариантом игры «Выбор ниши» из примера 9.B.4, в котором фирма E выберет теперь во время своего входа нишу. Также на каждом рисунке показано слабое совершенное байесовское равновесие (стрелки обозначают выбор чистых стратегий, и числа в скобках в информационном множестве фирмы I обозначают ожидания).

Возможно, кому-то покажется, что ни в одной игре представленное равновесие не будет разумным[15]. Рассмотрим игру на рис. 9.D.1(a). В изоб-

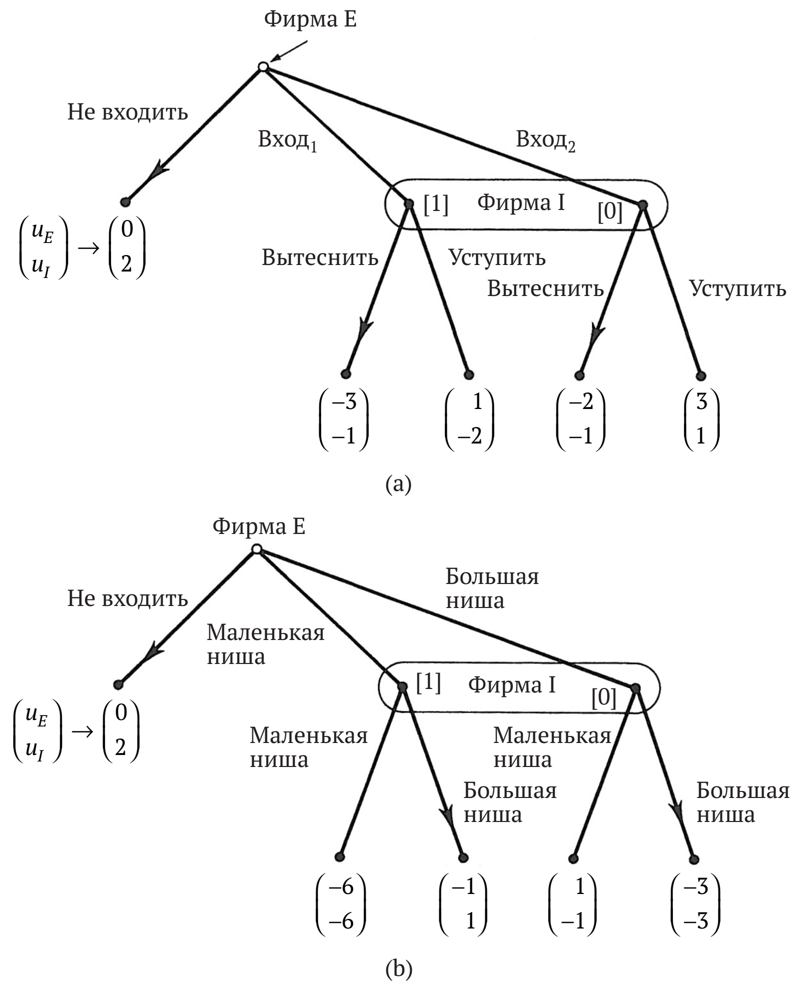


Рис. 9.D.1 Два слабых PBE с необоснованными ожиданиями

[15] Для простоты мы сосредотачиваемся здесь на слабом совершенном байесовском равновесии. Приведенные этапы применимы также к более сильным связанным концепциям, рассмотренным в разделе 9.C. Фактически все слабые совершенные байесовские равновесия, изученные здесь, также являются секвенциальными равновесиями; более того, они также являются совершенными дрожащей руки в развернутой форме.

раженном слабом PBE, если вход происходит, фирма I играет «Вытеснить», поскольку ожидает, что фирма E выберет «Вход$_1$». Но «Вход$_1$» строго доминируется для фирмы E стратегией «Вход$_2$». Следовательно, кажется разумным считать, что, если фирма E решила войти, она должна использовать стратегию «Вход$_2$». Конечно, как обычно предполагается в литературе, можно представить, как фирма E произносит следующую речь перед входом: «Я вошла, но заметьте, я никогда не использовала бы для этого “Вход$_1$”, поскольку “Вход$_2$” — всегда лучшая для меня стратегия входа. Подумайте об этом тщательно перед выбором вашей стратегии».

Аналогичные аргументы могут быть использованы и в случае слабого PBE, изображенного на рис. 9.D.1(b). Стратегию «Маленькая ниша» теперь строго доминирует другая стратегия той же фирмы: «Не входить» (но не стратегия «Большая ниша»). И снова фирма I не может обоснованно поддерживать изображенные ожидания. В этом случае фирма I должна распознать, что если фирма E скорее войдет, чем сыграет «Не входить», она должна выбрать большую нишу. Теперь вы можете представить, как фирма E говорит: «Заметьте, что единственный способ, которым я могла бы улучшить свое положение в случае входа, нежели выбрав “Не входить”, — ориентирование на большую нишу».

Приведенные обоснования известны как ход *прямой индукции* [см. (Kohlberg, 1989) и (Kohlberg, Mertens, 1986)]. При использовании обратной индукции игрок решает, что для него является оптимальным действием в некоторой точке дерева игры, на основании своих рассуждений о действиях, которые его соперникам будет разумно сыграть в *последних* точках игры. Напротив, при использовании прямой индукции игроки размышляют, что разумно могло произойти ранее. Например, здесь фирма I принимает решение о своем оптимальном после входа действии, предполагая, что фирма E должна вести себя рационально при принятии решения о входе.

Такого рода идеи могут быть расширены за счет включения аргументов, базирующихся на *доминировании равновесий*. Например, предположим, что мы прирастили игру на рис. 9.D.1(b) тем, что дали фирме I ход, после того как фирма E сыграла «Не входить», как изображено на рис. 9.D.2 (возможно, «Не входить» в действительности приводит ко входу фирмы I на некоторый другой рынок, на котором фирма E имеет единственную возможную стратегию входа).

Рисунок иллюстрирует слабое PBE этой игры, в котором фирма E играет «Не входить» и фирма I ожидает, что фирма E выберет «Маленькая ниша» везде, где достигается ее информационное множество после входа. В этой игре «Маленькая ниша» не является более строго доминируемой для фирмы E стратегией «Не входить», так что предыдущий наш аргумент неприменим. Все же, если фирма E отклонится от этого равновесия путем входа, мы можем представить фирму I, полагающую, что, поскольку фирма E могла бы получить выигрыш 0, следуя своей равновесной стратегии, она должна надеяться получить больше, чем при входе, и, таким образом, выбрать ориентацию на «Большую нишу». В этом случае мы говорим, что «Маленькая ниша» является *доминируемым равновесием* для фирмы E; т. е. оно доминируемо, если фирма E считает, что свой равновесный выигрыш она может получить с опре-

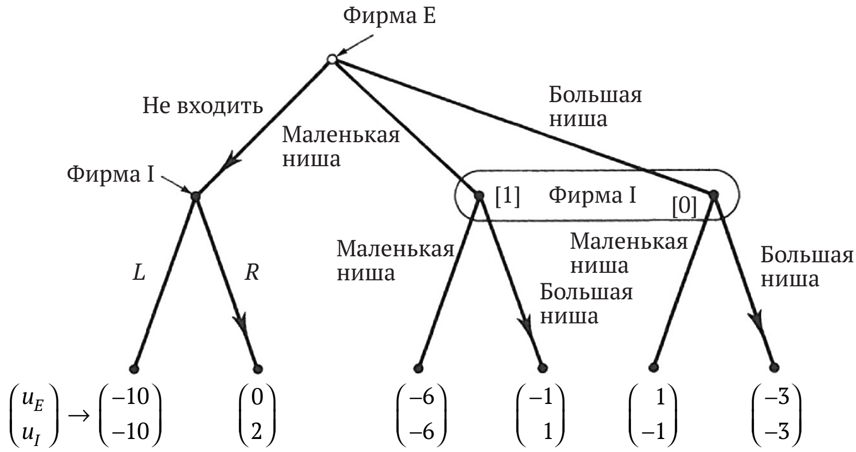


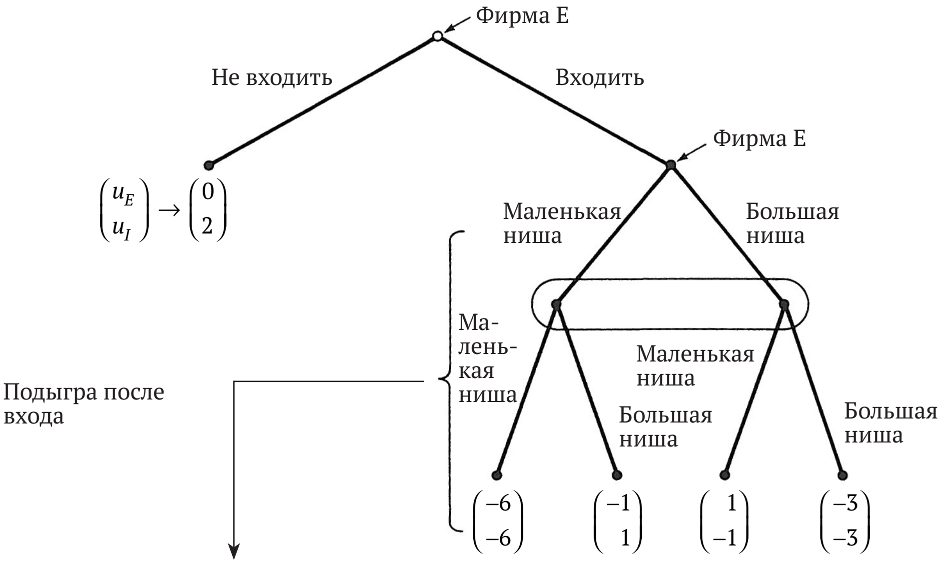
Рис. 9.D.2. Стратегия «Маленькая ниша» является равновесно доминируемой для фирмы E

деленностью при следовании своей равновесной стратегии. Такой тип доводов включен в интуитивный критерий совершенствования, который мы обсудим в разделе 13.C и приложении A главы 13 в контексте моделей сигналинга.

Прямая индукция представляется абсолютно убедительной. Например, пересмотрим начальную игру «Выбора ниши», изображенную на рис. 9.D.3. Вспомним, что существует два равновесия по Нэшу (в чистых стратегиях) в подыгре после входа: (Большая ниша, Маленькая ниша) и (Маленькая ниша, Большая ниша). Однако обоснование прямой индукции в игре на рис. 9.D.1(b) кажется одинаково хорошо применимым и здесь: стратегия (Входить, Маленькая ниша, если Входить) является строго доминируемой для фирмы E игрой «Не входить». В результате старожил должен сделать вывод, что, если фирма E сыграла «Входить», она намеревается ориентироваться на большую нишу в игре после входа. Если так, фирме I лучше ориентироваться на маленькую нишу. Таким образом, прямая индукция исключает одно из двух равновесий по Нэшу в подыгре после входа.

Хотя эти аргументы и кажутся убедительными, здесь также существует несколько проблем. Например, предположим, что игроки ошибаются с очень маленькой вероятностью. Будут ли только что приведенные обоснования прямой индукции в таком случае убедительными? Наверное, нет. Чтобы понять почему, представим, что фирма E входит в игру, изображенную на рис. 9.D.1(a), когда предполагалось, что она сыграла «Не входить». Теперь фирма I может объяснить себе отклонение как результат ошибки со стороны фирмы E, которая может равновероятно привести к выбору фирмой E как стратегии «Вход$_1$», так и стратегии «Вход$_2$». И речь фирмы E не вызовет доверия: «Конечно, фирма E говорит мне это, — рассуждает старожил. — «Она сделала ошибку и теперь пытается улучшить свое положение, убеждая меня уступить».

Чтобы лучше это увидеть, рассмотрим игру на рис. 9.D.3. Теперь, после того как вошла фирма E и две фирмы думают о послевходной игре с одно-



		Фирма I	
		Маленькая ниша	Большая ниша
Фирма E	Маленькая ниша	−6, −6	−1, 1
	Большая ниша	1, −1	−3, −3

Рис. 9.D.3. В игре после входа прямая индукция определяет равновесие (Большая ниша, Маленькая ниша)

временными ходами, фирма E произносит речь. Но старожил резко отвечает: «Забудьте это! Я думаю, вы просто ошиблись, и даже если это не так, я собираюсь выбрать большую нишу!»

Все эти вопросы представляются интересными и важными, однако они очень сложны.

Существенная черта такого применения прямой индукции состоит в применении (в нормальной форме) понятия доминирования для сужения множества предсказанных ходов в динамических играх. Оно сильно отличается от приведенного выше обсуждения (которое основывается на развернутой форме), как именно игроки ходят в динамических играх. Возникает естественный вопрос: можем ли мы как-то использовать представление в нормальной форме для предсказания ходов в динамических играх?

Существуют по крайней мере две причины, позволяющие думать, что это возможно. Во-первых, как было показано в главе 7, логически привлекательно думать, что одновременный выбор игроками своих стратегий в нормальной форме (т. е. объявление вероятностных планов арбитру) эквивалентен тому, что они в действительности динамически доиграли игру до конца, как представлено в развернутой форме. Во-вторых, во многих случаях представляется, что концепция слабого доминирования может реализовываться в предположении секвенциальной рациональности. Например, для конечных игр с совершенной информацией, в которых никто из игроков не имеет одинаковых выигрышей в любых двух терминальных узлах, любой профиль стратегий, остающихся в процессе последовательного удаления слабо доминируемых стратегий, приводит к тому же предсказанному результату, что и концепция SPNE (рассмотрите пример 9.B.1 и выполните упражнение 9.D.1).

Использование нормальной формы поддерживается также тем обстоятельством, что концепции в развернутой форме, такие как слабое PBE, могут быть чувствительны к кажущимся несущественным изменениям в развернутой форме. Например, если разделить решение фирмы E в игре на рис. 9.D.1(a) на решение «Не входить» или «Входить», приводящее к действиям «Вход$_1$» или «Вход$_2$» [как мы сделали для игры на рис. 9.D.1(b)], единственное SPNE (и, следовательно, единственное секвенциальное равновесие) будет состоять во входе фирмы E и игре «Вход$_2$» и решении фирмы I уступить. Однако редуцированная нормальная форма, связанная с этими двумя играми (т. е. нормальная форма, из которой мы исключили почти все стратегии, кроме стратегий с одинаковыми выигрышами), инвариантна относительно этих изменений в развернутой форме; следовательно, любое равновесие, основанное на (редуцированной) нормальной форме, оказалось бы не затронутым этими изменениями.

В силу сказанного выше возобновился интерес к использованию нормальной формы как инструмента для прогнозирования ходов в динамических играх [см., в частности, (Kohlberg, Mertens, 1986)]. В то же время вопрос остается открытым. Многие теоретики полагают, что существует некоторая потеря информации, имеющей стратегическое значение, при переходе от развернутой формы к более краткой нормальной форме. Например, действительно ли игры на рис. 9.D.3 и 9.D.1(b) идентичны? Если бы вы были фирмой I, вы бы положились с большей вероятностью на обоснование обратной индукции в игре рис. 9.D.3, чем в игре рисунка 9.D.1(b)? Имеет ли значение для вашего ответа, прошла ли минута или месяц между двумя решениями фирмы E в игре на рис. 9.D.3? Эти вопросы остаются открытыми.

Приложение А: конечно и бесконечно повторяющийся двусторонний торг

В данном приложении мы изучим две модели двустороннего торга как экономически значимые примеры использования концепции совершенного в подыграх равновесия по Нэшу. Мы начнем с изучения модели конечно повторяющегося торга и затем рассмотрим ее бесконечный аналог.

Пример 9.AA.1. *Конечно повторяющийся двусторонний торг.* Два игрока, 1 и 2, договариваются о дележе v долларов. Правила следующие: игра начинается в периоде 1; в периоде 1 игрок 1 делает предложение о дележе (действительное число между 0 и v) игроку 2, которое затем игрок 2 может принять или отклонить. Если он принимает предложение, дележ незамедлительно происходит и игра заканчивается. Если он его отклоняет, ничего не случается до периода 2. В периоде 2 роли игроков меняются на противоположные, и игрок 2 делает предложение игроку 1, которое тот может затем принять или отклонить. У каждого игрока есть дисконтирующий фактор $\delta \in (0, 1)$, таким образом, доллар, полученный в период t, стоит δ^{t-1} в долларах периода 1. Однако после конечного числа периодов T, если игроки еще не достигли соглашения, торг заканчивается и каждый игрок не получает ничего. Часть развернутой формы этой игры изображена на рис. 9.AA.1 [эта игра из работы (Stahl, 1972)].

В данной игре существует единственное совершенное в подыграх равновесие по Нэшу. Чтобы увидеть это, предположим сначала, что T нечетное, так что игрок 1 делает предложение в периоде T, если соглашение не было достигнуто ранее. Теперь

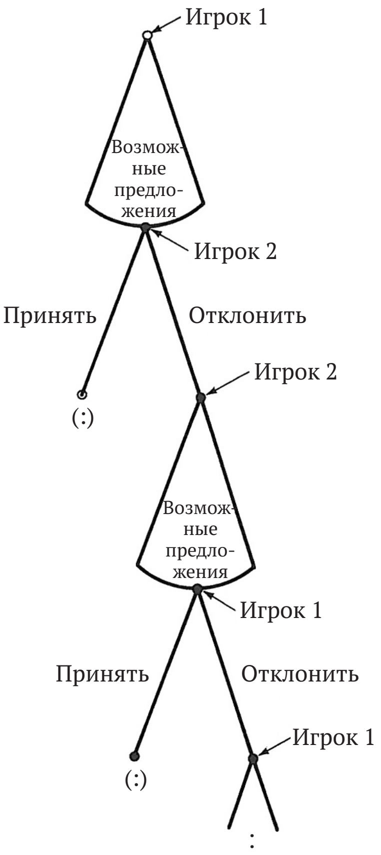


Рис. 9.AA.1. Игра альтернативных предложений двустороннего торга

игрок 2 желает принять *любое* предложение в этом периоде, поскольку он получит 0, если откажется и игра закончится (он безразличен относительно предложения с нулевым выигрышем). При данном обстоятельстве единственное SPNE в подыгре, которая начинается в последнем периоде, если ранее не было достигнуто соглашение, состоит в том, что игрок 1 предлагает игроку 2 нуль и игрок 2 соглашается[16]. Следовательно, выигрыши при равновесных ходах в этой подыгре равны $(\delta^{T-1}v, 0)$.

Теперь рассмотрим ходы в подыгре, начинающейся в периоде $T-1$, если соглашение не было достигнуто ранее. Игрок 2 делает предложение в этом периоде. В любом SPNE игрок 1 примет предложение в периоде $T-1$, если и только если оно обеспечивает ему выигрыш, по крайней мере равный $\delta^{T-1}\nu$, так как в противном случае ему будет выгоднее отказаться от предложения и подождать до периода T, чтобы сделать предложение (он получит $\delta^{T-1}\nu$ в этом случае). При данных обстоятельствах в любом SPNE игрок 2 должен сделать предложение в периоде $T-1$, которое дает игроку 1 выигрыш в точности равный $\delta^{T-1}\nu$, и игрок 1 примет это предложение (заметим, что это лучшее предложение 2-го игрока среди тех, которые могли быть принятыми, и делать предложение, от которого откажутся, менее предпочтительно для игрока 2, поскольку при этом он получит нулевой выигрыш). Получаемые выигрыши в случае, если игра достигнет периода $T-1$, должны быть следующими: $(\delta^{T-1}\nu, \delta^{T-2}\nu - \delta^{T-1}\nu)$.

Продолжая аналогичным образом, можно определить, что единственное SPNE в случае нечетного T состоит в соглашении, достигаемом в периоде 1. Выигрыш для игрока 1 равен

$$\nu_1^*(T) = v\left[1 - \delta + \delta^2 - \ldots + \delta^{T-1}\right] = v\left[\left(1-\delta\right)\left(\frac{1-\delta^{T-1}}{1-\delta^2}\right) + \delta^{T-1}\right].$$

Выигрыш для игрока 2 равен $\nu_2^*(T) = \nu - \nu_1^*(T)$.

Если, напротив, T четное, то тогда игрок 1 должен получить $\nu - \delta\nu_1^*(T-1)$, поскольку в любом SPNE игрок 2 (он будет первым, кто сделает предложение в подыг-

[16] Заметим, что если игрок 2 не желает принимать нулевое предложение, то игрок 1 не имеет оптимальной стратегии; он будет стремиться сделать предложение как можно ближе к нулю (так как игрок 1 примет любое предложение со строго положительным значением). Если предположение, что игрок 1 примет предложение, при котором ему безразлично, принимать или нет, беспокоит вас, вы можете убедиться, что анализ игры, в которой предложения могут быть в бесконечно малых приращениях (пенни), дает тот же результат, который получился, когда размер этих приращений стремился к нулю.

ре с нечетным числом периодом, которая начнется в периоде 2, если он откажется от предложения игрока 1 в периоде 1) примет предложение в периоде 1, если и только если оно обеспечит ему по крайней мере $\delta v_1^*(T-1)$, и игрок 1 предложит точно такое количество.

Наконец, заметим, что с ростом числа периодов ($T \to \infty$) выигрыш 1-го игрока стремится к $v/(1+\delta)$, а выигрыш 2-го игрока — к $\delta v/(1+\delta)$. ■

В примере 9.AA.1 применение концепции SPNE было относительно прямым; мы должны просто начать с конца игры и двигаться вверх. Теперь мы рассмотрим аналог этой игры с бесконечным горизонтом планирования. Как мы заметили в разделе 9.B, когда игра имеет бесконечный горизонт планирования, мы не можем найти SPNE таким простым способом. Кроме того, во многих играх при введении бесконечного горизонта планирования в качестве совершенных в подыграх равновесий можно получить множество поведенческих алгоритмов. Однако в моделях бесконечно повторяющегося торга концепция SPNE вполне сильна. В этой игре существует единственное SPNE, и оно относится к предельному результату модели с конечным горизонтом планирования при стремлении длины горизонта T к бесконечности.

Пример 9.AA.2. *Бесконечно повторяющийся двусторонний торг.* Изучим расширение игры конечно повторяющегося торга, рассмотренного в 9.AA.1, когда торг не заканчивается после T раундов предложений и может потенциально продолжаться бесконечно. Если это происходит, каждый игрок получает нуль. Эта модель заимствована из работы (Rubinstein, 1982).

Мы утверждаем, что эта игра имеет единственное SPNE: игроки достигают немедленного соглашения в периоде 1, игрок 1 зарабатывает $v/(1+\delta)$ и игрок 2 — $\delta v/(1+\delta)$.

Примененный здесь метод анализа, в соответствии с работой (Shaked, Sutton, 1984), активно использует стационарность игры (подыгра, начинающаяся в периоде 2, выглядит точно так же, как подыгра в периоде 1, но роли игроков противоположны).

Сначала обозначим через $\bar{v}_1$ максимальный выигрыш, который получает игрок 1 в *любом* SPNE (т. е. здесь может, в принципе, иметь место множество SPNE)[17]. В случае стационарности модели также существует максимальный выигрыш, который игрок 2 может ожидать в подыгре, начинающейся в периоде 2 после его отказа от предложения игрока 1 в периоде 1 и в которой игрок 2 первый выдвигает предложение. В результате выигрыш игрока 1 в любом SPNE не может быть ниже, чем $\underline{v}_1 = v - \delta\bar{v}_1$, поскольку в противной ситуации игроку 1 могло бы быть выгоднее, если бы он в периоде 1 предложил игроку 2 чуть-чуть больше, чем $\delta\bar{v}_1$. Игрок 2 точно примет любое такое предложение, поскольку он заработает только $\delta\bar{v}_1$ при отказе от него (заметим, что мы используем здесь совершенствование подыграми, поскольку требуем, чтобы продолжение игры после отказа являлось SPNE в продолжающейся подыгре и чтобы ответ игрока 2 был оптимальным при данном обстоятельстве).

Затем обоснуем, что $\bar{v}_1$ не может быть больше, чем $v - \delta\underline{v}_1$. Чтобы увидеть это, заметим, что в любом SPNE игрок 2 откажется от любого предложения в периоде 1, которое приносит ему меньше, чем $\delta\underline{v}_1$, поскольку он может заработать по крайней мере $\delta\underline{v}_1$, отказавшись от него и подождав предложения в периоде 2. Таким образом,

[17] Можно показать, как правильно определить этот максимум, но мы не станем здесь этого делать.

игрок 1 не может заработать больше, чем $v - \delta\underline{v}_1$, при выдвижении предложения, которое принимается в периоде 1. Может ли какое-то предложение отвергаться в периоде 1? Поскольку игрок 2 должен заработать по крайней мере $\delta\underline{v}_1$, если это случится, то соглашение не может произойти до периода 2, игрок 1 не может заработать таким путем больше, чем $\delta v - \delta\underline{v}_1$. Следовательно, имеем, что $\bar{v}_1 \le v - \delta\underline{v}_1$.

Эти выводы означают, что

$$\bar{v}_1 \le v - \delta\underline{v}_1 = (\underline{v}_1 + \delta\bar{v}_1) - \delta\underline{v}_1,$$

таким образом,

$$\bar{v}_1(1 - \delta) \le \underline{v}_1(1 - \delta).$$

При данных определениях $\underline{v}_1$ и $\bar{v}_1$ следует, что $\bar{v}_1 = \underline{v}_1$, и, таким образом, SPNE-выигрыш игрока 1 определен единственным образом. Обозначим его v_1°. Так как $v_1^\circ = v - \delta v_1^\circ$, игрок 1 должен получить $v_1^\circ = v/(1+\delta)$, а игрок 2 должен получить $v_2^\circ = v - v_1^\circ = \delta v/(1+\delta)$. Вдобавок, вспоминая объяснения предыдущего параграфа, заметим, что соглашение будет достигнуто в первом периоде (игрок 1 решит сделать предложение, которое игрок 2 примет). SPNE-стратегии следующие: игрок, который получил предложение, принимает его, если и только если ему предложили по крайней мере δv_1°, в то время как игрок, делающий предложение, предлагает в точности δv_1° игроку, получающему предложение.

Заметим, что эти равновесные стратегии, исходы и выигрыши в точности представляют собой пределы при $T \to \infty$ стратегий, исходов и выигрышей в конечной игре из примера 9AA1. ■

Совпадение равновесия в модели с бесконечным горизонтом планирования с пределом равновесия при конечном горизонте планирования в этой модели не является общим свойством игр с бесконечным горизонтом. Обсуждение бесконечно повторяющихся игр в главе 12 прольет свет на этот вопрос.

Мы хотим также обратить внимание, что исходы теоретико-игровых моделей торга могут быть абсолютно чувствительными к точной спецификации процесса торга и предпочтений игроков. Это иллюстрируют упражнения 9.B.7 и 9.B.13.

Приложение B: совершенное равновесие по Нэшу дрожащей руки в развернутой форме

Здесь мы углубим анализ, представленный в разделе 9.C, обсуждая другую концепцию равновесия, которая усиливает требования состоятельности ожиданий в понятии слабого PBE: *совершенное равновесие по Нэшу дрожащей руки в развернутой форме* [в соответствии с работой (Selten, 1975)]. Фактически это самая сильная концепция равновесия среди рассмотренных в разделе 9.C.

Определение совершенного равновесия по Нэшу дрожащей руки в развернутой форме имеет тот же вид, что и в случае нормальной формы (см. раздел 8.F), но «дрожания» применены не к смешанным стратегиям игроков, а скорее к выбору игрока в каждом из его информационных множеств. Можно оценить эту идею с помощью *агентской нормальной формы*, названной так в работе (Selten, 1975). Это нормальная форма, которую мы могли бы получить, если бы представили, что у игрока имеется набор агентов, ответственных за его ход в каждом из его информационных множеств (для каждого разный), каждый из них действует независимо, пытаясь максимизировать выигрыш игрока.

Определение 9.BB.1. Профиль стратегий σ в развернутой форме игры Γ_E является *совершенным равновесием по Нэшу дрожащей руки в развернутой форме*, если и только если оно является совершенным равновесием по Нэшу в нормальной форме при агентской нормальной форме, полученной из Γ_E.

Чтобы понять, почему желательно иметь «дрожания», происходящие в каждом информационном множестве, а не в стратегиях (как в концепции в нормальной форме, представленной в разделе 8.F), рассмотрим рис. 9.BB.1, взятый из работы (van Damme, 1983). Эта игра имеет единственное совершенное в подыграх равновесие по Нэшу: $(\sigma_1, \sigma_2) = ((NR, L), l)$. Но можно проверить, что $(\sigma_1, \sigma_2) = ((NR, L), l)$ — не является единственным совершенным равновесием по Нэшу дрожащей руки в нормальной форме: такими же являются $((R, L), r)$ и $((R, M), r)$. Причина этого кроется в том, что в нормальной форме колебание игрока 1 к стратегии (NR, M) может быть бóльшим, чем к (NR, L), несмотря на то обстоятельство, что последняя стратегия представляет собой лучший выбор для игрока 1 во втором узле решения.

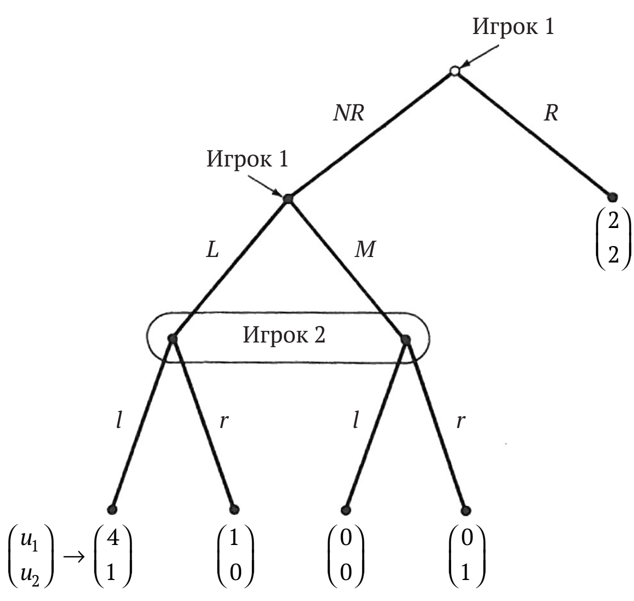


Рис. 9.BB.1. Профили стратегий $((R, L), r)$ и $((R, M), r)$ являются совершенными дрожащей руки в нормальной форме, но не являются совершенными в подыграх

При таком колебании наилучшим ответом игрока 2 на возмущенную стратегию игрока 1 будет r. Однако нетрудно видеть, что единственным совершенным равновесием дрожащей руки в развернутой форме является $((NR, L), l)$, поскольку агент, который ходит во втором узле решения игрока 1, задает вероятность, максимально возможную на L.

Когда мы сравниваем определения 9.BB.1 и 9.C.4, становится очевидным, что любое совершенное равновесие по Нэшу дрожащей руки в развернутой форме является секвенциальным равновесием. В частности, даже если критерий усиления дрожащей руки не сформулирован в терминах ожиданий, мы можем использовать последовательность (полностью смешанных) равновесных стратегий $\left\{\sigma^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ в возмущенных играх в агентской нормальной форме как последовательность наших стратегий для получения секвенциальных равновесных ожиданий. Поскольку ограниченные стратегии σ в совершенном равновесии по Нэшу дрожащей руки в развернутой форме являются наилучшими ответами на каждый элемент этой последовательности, они также являются наилучшими ответами друг на друга при этих полученных ожиданиях. (Поэтому каждое совершенное по Нэшу равновесие дрожащей руки в развернутой форме является совершенным в подыграх.)

По существу, если введены «дрожания», понятие совершенного равновесия по Нэшу дрожащей руки в развернутой форме делает каждую часть дерева достижимой при возмущенных стратегиях, и, поскольку необходимо, чтобы равновесные стратегии были наилучшими ответами на возмущенные стратегии, оно гарантирует, что равновесные стратегии являются секвенциально рациональными. Главное различие между этим понятием и понятием секвенциального равновесия состоит в том, что, подобно его аналогу в нормальной форме, понятие совершенного равновесия по Нэшу дрожащей руки в развернутой форме может исключить некоторые секвенциальные равновесия, в которых играются слабо доминируемые стратегии. Рис. 9.BB.2 (незначительная модификация игры рис. 9.C.1) показывает секвенциальное равновесие, стратегии в котором не являются совершенными дрожащей руки в развернутой форме.

Однако в общем смысле понятия совершенно близки [см. работу (Kreps, Wilson, 1982) для формального сравнения]; и поскольку гораздо легче проверить, какие стратегии являются наилучшими ответами при ограниченных ожиданиях, чем проверить, что они являются наилучшими ответами для последовательности стратегий, секвенциальное равновесие обычно используется намного чаще. Интересное обсуждение этого понятия можно найти в работе (van Damme, 1983).

Литература

Bernheim B.D. (1984). Rationalizable strategic behavior. *Econometrica* **52**: 1007–28.

DeGroot M.H. (1970). *Optimal Statistical Decisions*. New York: McGraw-Hill.

Fudenberg D., Tirole J. (1991a). Perfect Bayesian and sequential equilibrium. *Journal of Economic Theory* **53**: 236–60.

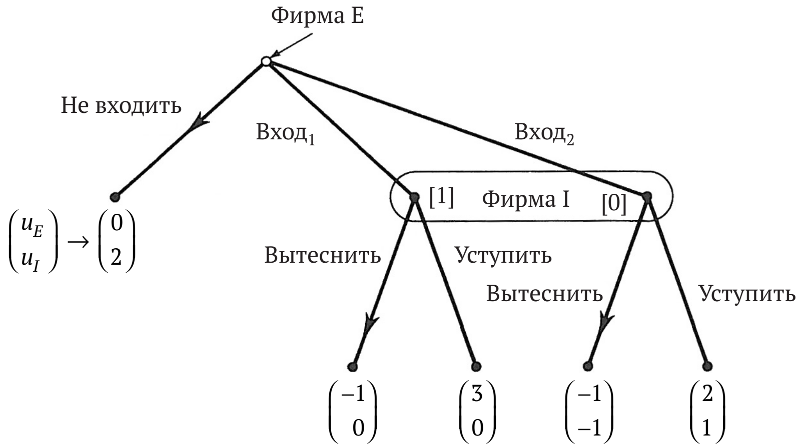


Рис. 9.BB.2. Секвенциальное равновесие необязательно является совершенным дрожащей руки в развернутой форме

Fudenberg D., Tirole J. (1991b). *Game Theory*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

Kohlberg E. (1989). Refinement of Nash equilibrium: the main ideas. Harvard Business School Working Paper No. 89–073.

Kohlberg E., Mertens J.-F. (1986). On the strategic stability of equilibria. *Econometrica* **54**: 1003–38.

Kreps D.M., Wilson R. (1982). Sequential equilibrium. *Econometrica* **50**: 863–94.

Moulin H. (1981). *Game Theory for the Social Sciences*. New York: New York University Press.

Myerson R. (1991). *Game Theory: Analysis of Conflict.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Pearce D.G. (1984). Rationalizable strategic behavior and the problem of perfection. *Econometrica* **52**: 1029–50.

Rosenthal R. (1981). Games of perfect information, predatory pricing, and the chain-store paradox. *Journal of Economic Theory* **25**: 92–100.

Rubinstein A. (1982). Perfect equilibrium in a bargaining model. *Econometrica* **50**: 97–109.

Selten R. (1965). Spieltheoretische behandlung eines oligopolmodells mit nachfragetragheit. *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenscaft* **121**: 301–24.

Selten R. (1975). Re-examination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. *International Journal of Game Theory* **4**: 25–55.

Shaked A., Sutton J. (1984) Involuntary unemployment as a perfect equilibrium in a bargaining mogel. *Econometrica* **52**: 1351–64.

Stahl I. (1972). *Bargaining Theory*. Stockholm: Economics Research Unit.

van Damme E. (1983). *Refinements of the Nash Equilibrium Concept*. Berlin:Springer-Verlag.

Упражнения

9.B.1$^{\mathrm{A}}$. Сколько существует подыгр в игре из примера 9.B.2 (изображенной на рис. 9.B.3)?

9.B.2$^{\mathrm{A}}$. В тексте.

9.B.3[B]**.** Проверьте, что стратегии, найденные с помощью обратной индукции в примере 9.B.2, составляют равновесие по Нэшу в изучаемой здесь игре. Также найдите *все другие* равновесия по Нэшу в чистых стратегиях в этой игре. Докажите, что каждое из этих равновесий не удовлетворяет принципу секвенциальной рациональности.

9.B.4[B]**.** Докажите, что в конечной с нулевой суммой игре с совершенной информацией существуют единственные совершенные в подыграх равновесные по Нэшу выигрыши.

9.B.5[B]**.** (E. Maskin) Рассмотрите игру с двумя игроками, игрок 1 и игрок 2, в которой каждый игрок i может выбрать действие из конечного множества M_i, которое содержит m_i действий. При выбранных действиях m_i выигрыш игрока i составит $\varphi_i(m_1, m_2)$.

a) Предположим сначала, что два игрока ходят одновременно. Сколько стратегий имеет каждый игрок?

b) Теперь предположим, что первым ходит игрок 1 и игрок 2 наблюдает ход игрока 1 перед выбором своего хода. Сколько стратегий имеется у каждого игрока?

c) Предположим, что игра в (b) имеет множество SPNE. Покажите, что в этом случае существуют две пары ходов, (m_1, m_2) и $\left(m_1', m_2'\right)$ (где $m_1 \neq m_1'$ и $m_2 \neq m_2'$), такие что или

$$\text{(i)}\ \varphi_1\left(m_1, m_2\right) = \varphi_1\left(m_1', m_2'\right),$$

или

$$\text{(ii)}\ \varphi_2\left(m_1, m_2\right) = \varphi_2\left(m_1', m_2'\right).$$

d) Предположим, что для любой пары ходов (m_1, m_2) и $\left(m_1', m_2'\right)$, таких что $m_1 \neq m_1'$ или $m_2 \neq m_2'$, условие (ii) нарушается (т. е. игрок 2 никогда не безразличен между парой ходов). Предположим также, что существует равновесие по Нэшу в чистых стратегиях в игре в (a), в котором π_1 — выигрыш игрока 1. Покажите, что в любом SPNE игры в (b) выигрыш игрока 1 по крайней мере равен π_1. Будет ли этот вывод справедлив для любого равновесия *по Нэшу* игры в (b)?

e) Покажите на примере, что вывод в (d) может не выполняться, если выполняется условие (ii) для некоторой пары стратегий (m_1, m_2) и $\left(m_1', m_2'\right)$ с $m_1 \neq m_1'$ либо $m_2 \neq m_2'$ или если мы заменим фразу *равновесие по Нэшу в чистых стратегиях* на фразу *равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях*.

9.B.6[B]**.** Найдите равновесие в смешанных стратегиях при фактической рандомизации в подыгре после входа игры «Выбор ниши» в примере 9.B.4. Существует ли в ней SPNE, которое вызывает такое поведение в подыгре после входа? Какие стратегии являются SPNE?

9.B.7[B]**.** Рассмотрите конечную игру двустороннего торга в приложении A (пример 9.AA.1); но вместо предположения, что игроки дисконтируют будущие выигрыши, предполагайте, что сделать предложение стоит $c < v$. (Эти издержки несет только игрок, делающий предложение, и игроки, сделавшие предложение, несут эти издержки, даже если соглашение не было достигнуто.) Что является SPNE в этой альтернативной модели? Что будет, если T стремится к ∞?

9.B.8$^{\mathbf{C}}$. Докажите, что в каждой (конечной) игре Γ_E существует совершенное в подыграх равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях.

9.B.9$^{\mathbf{B}}$. Рассмотрите игру, в которой следующая игра с одновременными ходами происходит дважды:

		Игрок 2		
		b_1	b_2	b_3
	a_1	10, 10	2, 12	0, 13
Игрок 1	a_2	12, 2	5, 5	0, 0
	a_3	13, 0	0, 0	1, 1

Игроки наблюдают действия, выбранные на первом этапе игры, до второго этапа игры. Что в этой игре является совершенным в подыграх равновесием по Нэшу в чистых стратегиях?

9.B.10$^{\mathbf{B}}$. Рассмотрите еще раз игру в примере 9.B.3, но изменим игру после входа так, что теперь оба игрока выбирают «Уступить» вместо получения выигрышей $(u_E, u_I) = (3, 1)$ и играют следующую игру с одновременными ходами:

		Фирма I	
		l	r
Фирма E	U	3, 1	0, 0
	D	0, 0	x, 3

Что является SPNE в этой игре, если $x \geq 0$? Если $x < 0$?

9.B.11$^{\mathbf{B}}$. Две фирмы, A и B, работают на рынке, объем которого снижается. Игра начинается в периоде 0, и игроки могут конкурировать в периодах 0, 1, 2, 3, ... (т. е. бесконечно), если они так решат. Дуопольные прибыли в периоде t для фирмы A равны $105 - 10t$, для фирмы B — $10,5 - t$. Монопольные прибыли (те, которые фирма получила бы, оставшись на рынке одна) равны $510 - 25t$ для фирмы A и $51 - 2t$ для фирмы B.

Предположим, что в начале каждого периода каждая фирма должна решить, «остаться» или «выйти», если она еще активна (они делают это одновременно, если активны обе). Если фирма однажды выходит, она остается вне рынка навсегда и зарабатывает 0 в каждом последующем периоде. Фирмы максимизируют свои (недисконтируемые) суммы прибылей.

Что является совершенным в подыграх равновесным по Нэшу результатом этой игры (и каковы равновесные стратегии фирм)?

9.B.12^C. Рассмотрите модель бесконечно повторяющегося двустороннего торга в приложении А (пример 9.АА.2). Предположите, что факторы дисконтирования δ_1 и δ_2 двух игроков различны. Каким теперь будет (единственное) совершенное в подыграх равновесие по Нэшу?

9.B.13^B. Что является совершенным в подыграх равновесием по Нэшу в варианте бесконечного горизонта планирования упражнения 9.B.7?

9.B.14^B. В момент времени 0 фирма-старожил (фирма I) уже находится на рынке виджетов, потенциальный новичок (фирма E) рассматривает вход. Чтобы войти, фирма E должна понести издержки $K > 0$. Единственная возможность входа у фирмы E существует в момент времени 0. Существуют три производственных периода. В каждом периоде, в которых обе фирмы активны на рынке, происходит игра, изображенная на рис. 9.Ex.1. Фирма E ходит первой, решая, остаться или уйти с рынка. Если она остается, фирма I решает, вытеснять ли конкурента с рынка (верхний выигрыш фирмы E). Если однажды фирма E сыграла «Выйти», она остается вне рынка навсегда; фирма E получает нуль в каждом периоде, следующем после выхода с рынка, и фирма I получает x. Фактор дисконтирования для обеих фирм равен δ.

Предположим, что:

(A.1) $x > z > y$.

(A.2) $y + \delta x > (1 + \delta)z$.

(A.3) $1 + \delta > K$.

a) Что в этой игре является (единственным) совершенным в подыграх равновесием по Нэшу?

b) Предположим теперь, что фирма E имеет финансовое ограничение. В частности, если фирма I однажды вытесняла с рынка фирму E (в любом периоде), фирма E будет вынуждена находиться с этого момента вне рынка. Что в этой игре является

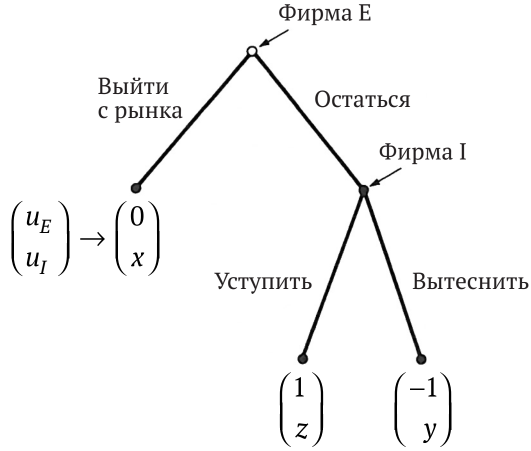


Рис. 9. Ex.1

(единственным) совершенным в подыграх равновесием по Нэшу? (Если ответ зависит от значений переменных при трех предположениях, определите, каким именно образом.)

9.C.1$^{\mathbf{B}}$. Докажите утверждение 9.C.1.

9.C.2$^{\mathbf{B}}$. Что является множеством слабых PBE в игре примера 9.C.3, когда $\gamma \in (-1, 0)$?

9.C.3$^{\mathbf{C}}$. Покупатель и продавец торгуются. Продавец владеет объектом, который покупатель оценивает в $v > 0$ (оценка продавца равна нулю). Эта оценка известна покупателю, но не продавцу. Априорное распределение оценки является общеизвестной информацией. Есть два периода торга. Продавец делает предложение (т. е. называет цены) в начале каждого периода, которое покупатель может только принять или отклонить. Игра заканчивается, когда предложение принято или после двух периодов, в зависимости от того, что наступит раньше. Оба игрока дисконтируют выигрыши периода 2 с фактором дисконтирования $\delta \in (0, 1)$.

Предположим, что везде, где покупателю безразлично, он всегда принимает предложение продавца.

a) Охарактеризуйте слабое совершенное байесовское равновесие (в чистых стратегиях) для случая, в котором v может принимать два значения, v_L и v_H, где $v_H > v_L > 0$ и $\lambda = \mathrm{Prob}(v_H)$.

b) Будет ли это иметь место в случае, когда v равномерно распределена на $\left[\underline{v},\ \bar{v}\right]$?

9.C.4$^{\mathbf{C}}$. Истец, Ms. P., подает иск против Ms. D. (ответчик). Если Ms. P. выиграет, она получит π долларов за ущерб от Ms. D. Ms. D. знает вероятность, с которой Ms. P. выиграет, $\lambda \in [0, 1]$, но Ms. P. нет (Ms. D. может знать, если она действительно была виновата). Они обе имеют строго положительные издержки похода в суд, c_p и c_d. Априорное распределение λ имеет плотность $f(\lambda)$ (которая является общеизвестной информацией).

Предположим, что переговоры по досудебному соглашению происходят следующим образом: Ms. P. делает Ms. D. предложение (количество долларов), которое можно только принять или отклонить. Если Ms. D. принимает, она платит и игра заканчивается. Если не принимает, они идут в суд.

a) Что в этой игре является слабым совершенным байесовским равновесием (в чистых стратегиях)?

b) Какое влияние оказывают изменения в c_p, c_d, π?

c) Теперь позволим Ms. D., после отклонения ее предложения, решить в конечном счете не идти в суд. Что является слабым совершенным байесовским равновесием? Каковы эффекты изменений в (b)?

9.C.5$^{\mathbf{C}}$. Рассмотрите снова упражнение 9.C.4. Предположите теперь, что Ms. P. знает λ.

9.C.6[B]. Что является секвенциальным равновесием в играх из упражнений 9.C.3 и 9.C.5?

9.C.7[B]. (на основе работы K.Bagwell и развитой как упражнение E.Maskin). Рассмотрите развернутую форму игры, изображенную на рис. 9. Ex.2.

a) Найдите совершенное в подыграх равновесие по Нэшу в этой игре. Является ли оно единственным? Существуют ли в ней другие равновесия по Нэшу?

b) Теперь предположим, что игрок 2 не может наблюдать ход игрока 1. Изобразите новую развернутую форму. Найдите множество равновесий по Нэшу.

c) Теперь предположим, что игрок 2 верно наблюдает ход игрока 1 с вероятностью $p \in (0, 1)$ и неверно с вероятностью $(1 - p)$ (т. е. если игрок 1 играет T, игрок 2 наблюдает T с вероятностью p и наблюдает B с вероятностью $(1 - p)$). Предположим, что склонность игрока 2 к неверному наблюдению (т. е. заданная значением p) является общеизвестной информацией для обоих игроков. Какова развернутая форма теперь? Покажите, что в ней существует единственное слабое совершенное байесовское равновесие. Каково оно?

9.D.1[B]. Покажите, что при условии, заданном в утверждении 9.B.2 для существования единственного совершенного в подыграх равновесия по Нэшу в конечной игре с совершенной информацией, существует порядок последовательного удаления слабо доминируемых стратегий, для которого профили всех оставшихся стратегий приводят к одинаковому результату (т. е. имеются идентичные равновесные пути и выигрыши) — совершенному в подыграх равновесию по Нэшу. [Фактически *любой* порядок удаления приводит к такому результату; см. работу (Moulin, 1981).]

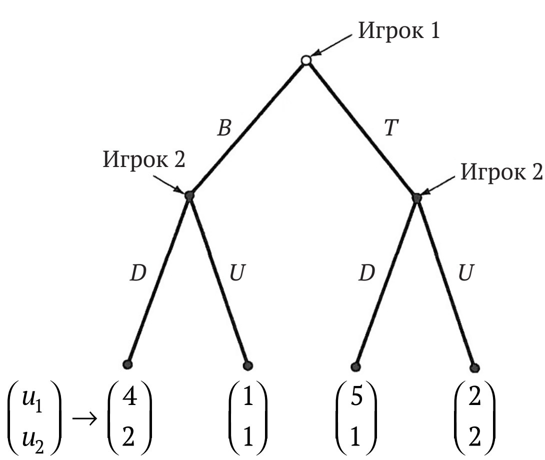


Рис. 9. Ex.2

Часть III

РЫНОЧНОЕ РАВНОВЕСИЕ И ПРОВАЛЫ РЫНКА

В части III мы рассмотрим фундаментальный экономический вопрос — *организацию производства и распределение произведенных товаров между потребителями*. Эту проблему мы будем изучать с точки зрения двух теорий: *позитивной* и *нормативной*.

В позитивной (или *дескриптивной*) перспективе мы можем исследовать проблему формирования производства и потребления при различных институциональных механизмах. Вопрос институциональной организации играет центральную роль в *рыночной экономике* (или *экономике с частной собственностью*). В рыночной экономике индивидуальные потребители обладают правом собственности на различные активы (как, например, их труд) и имеют полную свободу распоряжения этими активами, обменивая их на рынке на другие активы и блага. Аналогично фирмы, которые сами принадлежат потребителям, принимают решение относительно производственного плана, приобретают на рынке необходимые факторы производства и продают готовую продукцию. Грубо говоря, мы можем охарактеризовать *рыночное равновесие* как такой исход рыночной экономики, в котором каждый экономический агент (т. е. каждый потребитель и фирма) имеет наилучшее положение из возможных при данных действиях всех остальных агентов.

В отличие от позитивного подхода, с нормативной (или *перспективной*) точки зрения нас интересует *общественно оптимальный* план производства и потребления (при этом, безусловно, требуется еще конкретизировать, что понимается под выражением «общественно оптимальный»), и тогда мы можем исследовать, в какой степени конкретные институты, такие как рыночная экономика, ведут себя в этом отношении хорошо.

В главе 10 мы приступим к изучению конкурентной (или совершенно конкурентной) рыночной экономики. Это такая рыночная экономика, в которой каждое благо продается на рынке по общеизвестным ценам и все агенты принимают эти цены заданными (как вы помните, анализируя индивидуальное поведение в части I, мы, как правило, рассматривали именно этот случай). Начнем с определения для общего случая двух ключевых концепций: *конкурентного* (или *вальрасианского*) *равновесия* и *Парето-оптимальности* (или *Парето-эффективности*). Концепция конкурентного равновесия специфицирует понятие рыночного равновесия для конкурентных рыночных экономик. А концепция Парето-оптимальности предлагает нам наиболее простой непротиворечивый критерий, которому должен удовлетворять любой оптимальный экономический исход. Говорят, что экономический исход Парето-оптимален, если невозможно улучшить положение некоторых потребителей, не ухудшая при этом положения каких-либо других потребителей. Данная концепция представляет собой формализацию идеи об отсутствии ущерба для общества и позволяет отделить вопрос об экономической эффективности от более противоречивых (и политических) вопросов, касающихся идеального *распределения* благосостояния среди индивидов.

Затем в главе 10 будет проведено исследование двух данных концепций и анализ их взаимосвязи в специальном случае — в контексте *модели частичного равновесия*. Модель частичного равновесия, являющаяся основой для нашего анализа на всем протяжении части III, позволяет существенно упростить задачу с аналитической точки зрения: в рамках этой модели мы можем анализировать только один рынок (или небольшую группу связанных рынков) в каждый момент времени. Для этого частного случая мы сформулируем два центральных результата, касающихся вопроса оптимальности конкурентных равновесий и известных как *фундаментальные теоремы экономики благосостояния*. Приведем их грубые формулировки.

Первая фундаментальная теорема благосостояния. Если все возможные блага продаются на рынке по общеизвестным ценам (т. е. если имеется полная система рынков) и если домохозяйства и фирмы совершенно конкурентны (т. е. принимают цены заданными), то рыночный исход Парето-оптимален. Другими словами, если рынки полны, то *любое конкурентное равновесие с необходимостью является Парето-оптимальным*.

Вторая фундаментальная теорема благосостояния. Если предпочтения домохозяйств и производственные множества фирм выпуклы, имеет место полная система рынков, цены на которых общеизвестны, и каждый агент ведет себя как ценополучатель, то *любой Парето-оптимальный исход может быть реализован как конкурентное равновесие при соответствующем выборе паушальных трансфертов*.

В первой фундаментальной теореме описывается множество условий, при которых можно гарантировать, что рыночная экономика приведет к Парето-оптимальному результату. В некотором смысле она представляет собой формализацию «невидимой руки» рынка, о которой писал Адам Смит. Вторая теорема благосостояния позволяет продвинуться еще дальше. Согласно ей при том же наборе предпосылок, что и в первой теореме, а также при условиях выпуклости предпочтений и технологии *все* Парето-оптимальные исходы в принципе могут быть реализованы посредством рыночного механизма. Таким образом, центральная власть, желающая реализовать конкретный Парето-оптимальный исход (отражающий, скажем, политический консенсус относительно перераспределения ресурсов), всегда может это сделать, перераспределив соответствующим образом богатство и затем «позволив работать рынку».

В некотором смысле первая теорема благосостояния отводит совершенно конкурентному случаю роль мерила исходов рыночной экономики. В частности, любая неэффективность, возникающая в рыночной экономике, и, следовательно, любое Парето-улучшающее вмешательство в функционирование рынка *должны* свидетельствовать о нарушении предпосылок данной теоремы.

Остальные разделы части III, главы 11–14, следует рассматривать как развитие этой темы. В этих главах мы изучим различные варианты того, как фактические рынки могут отходить от совершенно конкурентного идеала, в результате чего рыночные равновесия перестают быть Парето-оптимальными — такая ситуация известна как *провал рынка*.

Глава 11 посвящена *экстерналиям* и *общественным благам*. В обоих случаях действия одного агента непосредственно влияют на функцию полезности или производственное множество других экономических агентов. Как мы увидим, присутствие таких не торгуемых на рынке «благ» или «антиблаг» (в результате чего предпосылка первой теоремы благосостояния о полноте рынков перестает быть верной) приводит к тому, что рыночное равновесие перестает быть Парето-оптимальным.

В главе 12 мы рассмотрим ситуации, когда некоторые экономические агенты обладают *рыночной властью*, а значит, более нельзя считать, что они являются ценополучателями. И вновь это приводит к нарушению предпосылок первой теоремы благосостояния, и в результате рыночные равновесия перестают быть Парето-оптимальными.

В главах 13 и 14 будут рассмотрены случаи, когда имеет место *асимметрия информации* среди участников рынка. Предпосылка о полноте рынков в первой теореме благосостояния неявно предполагает, что характеристики торгуемых на рынке товаров наблюдаемы для всех участников рынка, поскольку в противном случае могут отсутствовать рынки для тех товаров, которые имеют различные характеристики. В главе 13 основное внимание будет уделено случаю асимметрии информации между агентами в момент заключения контракта. В ходе обсуждения мы выделим несколько явлений, возникающих в результате несовершенства информации: *неблагоприятный отбор*, *использование сигналов* и *скрининг*, а также исследуем вопрос о том, каковы порождаемые ими потери благосостояния. В отличие от 13-й главы, в главе 14 мы проанализируем случай постконтрактной асимметрии информации, проблемы, которая приведет нас к *модели принципал — агент*. Здесь также наличие асимметрии информации препятствует торговле всеми возможными товарами и, как следствие, может привести к неэффективным по Парето рыночным исходам.

В части III мы будем активно использовать инструменты анализа, разработанные в частях I и II. Особенно в главе 10, где мы будем часто обращаться к материалу части I, а в главах 12 и 13 в основном будем опираться на теоретико-игровые подходы, изложенные в части II.

Гораздо более полный и подробный анализ экономики конкурентных рынков и фундаментальных теорем благосостояния будет проведен в части IV.

Глава 10. Конкурентные рынки

10.А. Введение

В этой главе мы впервые рассмотрим экономику в целом, где на рынках осуществляется взаимодействие потребителей и фирм. Эта глава преследует две основные цели: во-первых, формально описать и изучить две ключевые концепции — *Парето-оптимальность* и *конкурентное равновесие*, и, во-вторых, предложить специфический, но при этом хорошо интерпретируемый контекст для изучения рыночного равновесия — *модель частичного равновесия*.

Раздел 10.В мы начнем с введения понятия *Парето-оптимального* (или *Парето-эффективного*) *распределения* и концепции *конкурентного* (или *вальрасианского*) *равновесия* в общей постановке.

Затем, в разделе 10.С, мы сузим круг рассматриваемых ситуаций до контекста частичного равновесия. Анализ частичного равновесия, начало которому было положено А. Маршаллом (Marshall, 1920), предполагает рассмотрение рынка отдельного блага (или группы благ), расходы потребителя на которое составляют лишь небольшую долю его совокупного бюджета. В такой ситуации разумно предполагать, что изменения на рынке данного блага почти не оказывают влияния на цены всех остальных товаров, т. е. на рассматриваемом рынке эффектом богатства можно пренебречь. Мы учитываем все эти особенности, применяя наиболее простой из возможных способов: рассматриваем модель с двумя благами, в которой расходы на все товары, кроме анализируемого, трактуются как один композитный товар (называемый *благом-измерителем*) и функции полезности всех потребителей имеют квазилинейную форму по благу-измерителю. Изучение конкурентных равновесий в рамках этой простой модели позволяет активно использовать графический анализ кривых спроса и предложения. Кроме того, проводится анализ сравнительной статики, позволяющий определить влияние экзогенных изменений рыночной среды. В качестве иллюстрации мы рассмотрим влияние искажающего товарного налогообложения на рыночное равновесие.

В разделе 10.D мы будем исследовать свойства Парето-оптимальных распределений в модели частичного равновесия. В этом специфическом контексте будет продемонстрирована справедливость *фундаментальных* *теорем экономик благосостояния*: конкурентные равновесные распределения с необходимостью Парето-оптимальны и любое Парето-оптимальное распределение может быть реализовано как конкурентное равновесие при соответствующих паушальных трансфертах. Как мы уже отмечали во введении к части III, этот результат — важная отправная точка для последующего анализа, показывающая, что в совершенно конкурентном случае рыночные равновесия дают желаемый экономический исход. В то же время этот результат можно рассматривать и как способ идентификации ситуаций провала рынка, обсуждению которых посвящены главы 11–14.

В разделе 10.E мы рассмотрим меру изменения благосостояния в контексте частичного равновесия и покажем, что эта мера может быть представлена площадью между должным образом определенными кривыми спроса и предложения. В качестве приложения мы проанализируем чистые потери от искажающего налогообложения.

Раздел 10.F посвящен анализу *свободного входа*, т. е. такой ситуации, когда все потенциальные фирмы имеют доступ к наиболее эффективной технологии и могут входить на рынок или уходить с него в ответ на изменение возможности получения прибыли. Мы введем понятие *долгосрочного конкурентного равновесия* и затем используем его для того, чтобы провести различие между долгосрочной и краткосрочной сравнительной статикой изменений рыночных условий.

В разделе 10.G мы проведем развернутое обсуждение применения анализа частичного равновесия в экономическом моделировании.

Корни изложенного в этой главе материала уходят глубоко в историю экономической мысли. Прекрасным источником для дальнейшего обсуждения этого вопроса является работа (Stigler, 1987). Надо подчеркнуть, что анализ конкурентного равновесия и Парето-оптимальности, представленный здесь, следует рассматривать как первое знакомство с этими концепциями. В части IV мы еще вернемся к этой теме, рассматривая ее подробнее и в более общем случае, поэтому в этой части будут даны дополнительные ссылки на источники.

10.B. Парето-оптимальность и конкурентные равновесия

В этом разделе мы введем и обсудим понятия *Парето-оптимальности* (или *Парето-эффективности*) и *конкурентного* (или *вальрасианского*) равновесия в общей формулировке.

Рассмотрим экономику, состоящую из I потребителей (обозначаемых индексом $i = 1, \ldots, I$), J фирм (обозначаемых индексом $j = 1, \ldots, J$) и L благ (обозначаемых индексом $l = 1, \ldots, L$). Предпочтения потребителя i относительно потребительских наборов $x_i = (x_{1i}, \ldots, x_{Li})$ из его потребительского множества $X_i \subset \mathbb{R}^L$ описываются функцией полезности $u_i(\cdot)$. Совокупный объем каждого блага $l = 1, \ldots, L$, изначально имеющийся в экономике, назовем *запасом* блага l и обозначим через $\omega_l \geq 0$, где $l = 1, \ldots, L$. С помощью производственных технологий фирм также можно преобразовать некоторые первоначальные запасы благ в дополнительный объем некоторых других благ. Каждая фирма j обладает производственными возможностями, описываемыми производственным множеством $Y_j \subset \mathbb{R}^L$. Элементами множества Y_j являются производственные векторы $y_j = (y_{1j}, \ldots, y_{Lj}) \in \mathbb{R}^L$. Таким образом, если $(y_1, \ldots, y_j) \in \mathbb{R}^{LJ}$ — производственные векторы J фирм, то совокупный (чистый) объем блага l, доступный в рассматриваемой экономике, равен $\omega_l + \sum_j y_{lj}$ (напомним, что отрицательные координаты производственного вектора соответствуют факторам производства, см. раздел 5.B).

Начнем с определения 10.B.1, в котором описывается множество возможных исходов в данной экономике.

Определение 10.B.1. *Экономическое распределение* $(x_1, \ldots, x_I, y_1, \ldots, y_J)$ — это спецификация потребительского вектора $x_i \in X_i$ для каждого потребителя $i = 1, \ldots, I$ и производственного вектора $y_j \in Y_j$ для каждой фирмы $j = 1, \ldots, J$. Распределение $(x_1, \ldots, x_I, y_1, \ldots, y_J)$ *допустимо*, если

$$\sum_{i=1}^{I} x_{li} \leq \omega_l + \sum_{j=1}^{j} y_{lj} \text{ для всех } l = 1, \ldots, L.$$

Таким образом, экономическое распределение допустимо, если совокупный объем потребления каждого блага не превышает совокупного доступного объема этого блага, формируемого за счет первоначального запаса и производства.

Парето-оптимальность

Зачастую важно понимать, порождает ли экономическая система «оптимальный» экономический исход. Значимым условием оптимальности любого экономического распределения является удовлетворение критерию *Парето-оптимальности* (или *Парето-эффективности*).

Определение 10.B.2. Допустимое распределение $(x_1, \ldots, x_I, y_1, \ldots, y_J)$ *Парето-оптимально* (или *Парето-эффективно*), если не существует другого допустимого распределения $(x_1', \ldots, x_I', y_1', \ldots, y_J')$, такого что $u_i(x_i') \geq u_i(x_i)$ для всех $i = 1, \ldots, I$ и $u_i(x_i') > u_i(x_i)$ для некоторых i.

В Парето-оптимальном распределении первоначальные ресурсы и технологические возможности экономики используются эффективно в том смысле, что не существует альтернативного способа организации производства и распределения благ, который позволил бы улучшить положение некоторого потребителя, не ухудшая при этом положения другого потребителя.

На рис. 10.B.1 проиллюстрирована концепция Парето-оптимальности, где изображено множество допустимых уровней полезности в экономике с двумя потребителями. Это множество называется *множеством возмож-*

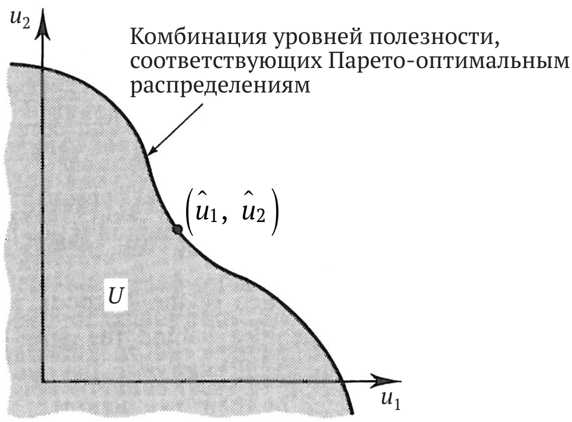


Рис. 10.В.1. Множество возможных уровней полезности

ных уровней полезности, и в случае двух потребителей оно определяется следующим образом:

$$U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2\text{: существует допустимое распределение } (x_1, x_2, y_1, \ldots, y_J), \text{ такое что } u_i \leq u_i(x_i) \text{ при } i = 1, 2\}.$$

Множество Парето-оптимальных распределений состоит из таких распределений, которые порождают комбинации уровней полезности, лежащие на (северо-восточной) границе множества возможных уровней полезности, таких как точка $(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$. В любой такой точке невозможно улучшить положение одного потребителя, не ухудшая положение другого.

Важно отметить, что критерий Парето-оптимальности не гарантирует, что распределение будет в каком-либо смысле справедливым. Например, используя все ресурсы и технологические возможности общества для улучшения положения отдельного потребителя, оставляя остальных потребителей на минимально возможном уровне полезности, мы получим Парето-оптимальное распределение, которое, может быть, не очень желаемо с дистрибутивной точки зрения. Тем не менее Парето-оптимальность можно рассматривать как простой критерий «желательности» распределения: в конце концов он говорит о том, что ресурсы общества не тратятся напрасно.

Конкурентные равновесия

На протяжении всей главы будем анализировать экономику с конкурентными рынками. В этой экономике первоначальным запасом и технологическими возможностями общества (т. е. фирмами) владеют потребители. Предположим, что потребитель i имеет первоначальный запас блага l, равный ω_{li}, причем $\sum_i \omega_{li} = \omega_l$. Обозначим вектор первоначального запаса потребителя i через $\omega_i = (\omega_{1i}, \ldots, \omega_{Li})$. Предположим также, что потребитель i владеет долей θ_{ij} фирмы j (где $\sum_i \theta_{ij} = 1$), что дает ему право на получение доли θ_{ij} прибыли фирмы j.

В конкурентной экономике существуют рынки для всех L благ и все потребители и производители принимают цены заданными. В основе тезиса о том, что экономические агенты ведут себя как ценополучатели, лежит следующая предпосылка: мы считаем, что потребители и производители малы относительно рынка в целом и поэтому их действия не оказывают влияния на рыночные цены[1].

Обозначим вектор рыночных цен на блага 1, ..., L через $p = (p_1, \ldots, p_L)$. В определении 10.B.3 вводится понятие конкурентного (вальрасианского) равновесия.

Определение 10.B.3. Распределение $\left(x_1^*, \ldots, x_I^*, y_1^*, \ldots, y_J^*\right)$ и вектор цен $p^* \in \mathbb{R}^L$ образуют *конкурентное* (или *вальрасианское*) *равновесие*, если выполнены следующие условия:

1) *Максимизация прибыли*. Для каждой фирмы j y_j^* является решением задачи

$$\max_{y_j \in Y_j} p^* \cdot y_j. \tag{10.B.1}$$

2) *Максимизация полезности*. Для каждого потребителя i x_i^* является решением задачи

$$\max_{x_i \in X_i} u_i(x_i)$$

$$\text{при } p^* \cdot x_i \le p^* \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij}(p^* \cdot y_j^*). \tag{10.B.2}$$

3) *Рынки уравновешены*. Для каждого блага $l = 1, \ldots, L$ выполнено

$$\sum_{i=1}^{I} x_{li}^* = \omega_l + \sum_{j=1}^{J} y_{lj}^*. \tag{10.B.3}$$

В определении 10.B.3 указаны три вида условий, которые должны быть выполнены в конкурентном равновесии. Условия (1) и (2) отражают основополагающие предпосылки, присущие почти всем экономическим моделям: экономические агенты стремятся выбрать для себя наилучший из возможных вариантов. Условие (1) гласит, что каждая фирма должна выбирать производственный план, максимизирующий ее прибыль, принимая заданным равновесный вектор цен готовой продукции и факторов производства (обоснование предположения о том, что фирма максимизирует прибыль, можно найти в разделе 5.G). Мы подробно изучали такое конкурентное поведение фирмы в главе 5.

[1] Строго говоря, они считают, что *равновесные* рыночные цены не зависят от их действий. Мы еще обсудим этот вопрос более подробно ниже в этом разделе.

Согласно условию (2) каждый потребитель должен выбирать потребительский набор, доставляющий максимум его полезности при бюджетном ограничении, определяемом равновесными ценами и богатством потребителя. Мы подробно исследовали такое конкурентное поведение потребителя в главе 3. Однако здесь есть одно отличие: богатство потребителя теперь представляет собой функцию от цен. Такая зависимость богатства от цен возникает по двум причинам. Во-первых, цены определяют стоимость первоначального запаса потребителя: например, индивид, изначально владеющий недвижимостью, становится беднее, если цена на недвижимость падает. Во-вторых, равновесные цены влияют на прибыль фирмы и, следовательно, на доход потребителя как акционера.

Условие (3) имеет несколько иную природу. Согласно ему при равновесных ценах выбор желаемого уровня потребления и производства, определяемый условиями (1) и (2), в действительности оказывается согласованным в том смысле, что агрегированное предложение каждого товара (т. е. его совокупный запас плюс чистое производство) равно агрегированному спросу на него. Если бы на некоторое благо при текущих ценах имело место избыточное предложение или спрос, то экономика не была бы в состоянии равновесия. Например, если существует избыточный спрос на некоторый товар при существующих ценах, то некий потребитель, который не получает такого объема данного товара, какого ему бы хотелось, мог бы улучшить свое положение, предложив заплатить за него чуть больше текущей рыночной цены, тем самым вынудив продавцов предложить это благо сначала ему. Аналогично если существует избыточное предложение, то некий продавец может посчитать, что выгоднее предложить свою продукцию по цене чуть ниже текущей рыночной цены[2].

Заметим, что, объясняя, почему в равновесии не должно быть избыточного спроса или предложения, мы фактически использовали тот факт, что потребители и производители *могут* влиять на рыночные цены. Как согласуется приведенное объяснение с предпосылкой о том, что экономические агенты являются ценополучателями?

Для разрешения этого кажущегося парадокса следует обратить внимание на тот факт, что потребители и производители *всегда* имеют возможность изменить существующие цены (при отсутствии каких-либо институциональных ограничений, не позволяющих это сделать). Поэтому, предполагая, что экономические агенты принимают цены заданными, мы имеем в виду только то, что у них нет *стимула* менять цены, если при заданных ценах спрос и предложение уравновешены (как мы уже видели, они *действительно* имеют стимул менять цены, которые не уравновешивают спрос и предложение).

Заметьте, что до тех пор пока потребитель может осуществлять желаемые сделки по текущим рыночным ценам, он не станет предлагать цену выше рыночной, чтобы убедить продавцов продать товар сначала ему. Аналогично, если производитель мо-

[2] Строго говоря, вторая часть этого утверждения требует положительности цены. Действительно, если бы цена была равна нулю (т. е. благо раздавалось бы бесплатно), то в равновесии избыточное предложение допустимо. В оставшейся части этой главы, однако, мы будем рассматривать такие предпочтения потребителей, что подобная возможность отсутствует (будем считать, что все блага желаемы). Поэтому мы не будем здесь учитывать такую возможность.

жет осуществлять желаемый объем продаж по текущим ценам, то у него нет стимула сбивать рыночную цену. Таким образом, при цене, уравновешивающей спрос и предложение, потребители не хотят повышать цены, а фирмы не хотят их снижать.

Сложнее ответить на вопрос о том, что произойдет, если покупатель постарается снизить цену, которую должен платить, или продавец постарается повысить взимаемую плату? Продавец, например, может иметь возможность повысить цены продаваемых благ по сравнению с конкурентным уровнем (см. главу 12). В этом случае нет причин считать, что такая рыночная власть не будет использована. В связи с этим, чтобы предпосылка о том, что экономические агенты являются ценополучателями, была корректна, необходимо убедиться, что при соответствующих (конкурентных) условиях подобной рыночной властью не обладает ни один из агентов. Этому и посвящены разделы 12.F и 18.C, где мы формализуем идею о том, что желаемые для участников рынка объемы торговли малы относительно размеров рынка в целом, поэтому у них не возникает стимула отклоняться от рыночных цен. Таким образом, в должным образом определенном равновесии такие экономические агенты ведут себя подобно ценополучателям.

Заметим, что согласно определению 10.B.3, если распределение $\left(x_1^*, \ldots, x_I^*, y_1^*, \ldots, y_J^*\right)$ и вектор цен $p^* >> 0$ образуют конкурентное равновесие, то это будет также верно и для распределения $\left(x_1^*, \ldots, x_I^*, y_1^*, \ldots, y_J^*\right)$ и вектора цен $\alpha p^* = \left(\alpha p_1^*, \ldots, \alpha p_L^*\right)$ для любого числа $\alpha > 0$ (см. упражнение 10.B.2). Таким образом, без потери общности мы можем пронормировать цены. В этой главе мы всюду будем пользоваться следующей нормировкой: считать цену одного блага равной 1.

Для характеристики конкурентных равновесий также очень полезна лемма 10.B.1.

Лемма 10.B.1. Если распределение $(x_1, \ldots, x_I, y_1, \ldots, y_J)$ и вектор цен $p >> 0$ удовлетворяют условию уравновешенности рынков (10.B.3) для всех благ $l \neq k$ и если бюджетное ограничение каждого потребителя выполняется как равенство, т. е. $p \cdot x_i = p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} p \cdot y_j$ для всех i, то рынок блага k также уравновешен.

Доказательство. Сложим бюджетные ограничения по всем I потребителям и преобразуем полученное выражение:

$$\sum_{l \neq k} p_l \left(\sum_{i=1}^{I} x_{li} - \omega_l - \sum_{j=1}^{J} y_{lj} \right) = -p_k \left(\sum_{i=1}^{I} x_{ki} - \omega_k - \sum_{j=1}^{J} y_{kj} \right).$$

В силу равенства спроса и предложения на рынках благ $l \neq k$ левая часть последнего соотношения равна нулю. Таким образом, правая часть также должна быть равна нулю. Поскольку $p_k > 0$, отсюда следует, что рынок блага k также уравновешен. ■

В моделях, рассматриваемых в этой главе, лемма 10.B.1 позволит нам идентифицировать конкурентные равновесия, проверяя условия уравновешенности только на $L - 1$ рынке. Действительно, лемма 10.B.1 позволяет избежать двойного счета. Если бюджетные ограничения потребителей выполняются как равенства, то денежная стоимость планируемых каждым потребителем покупок равна денежной стоимости того, что он планирует продать, плюс денежная стоимость его доли (θ_{ij}) в (чистом) предложении фирм, поэтому совокупная стоимость планируемых покупок в экономике должна быть равна совокупной стоимости планируемых продаж. Если эти стоимости равны на всех рынках, кроме одного, то равенство должно быть также выполнено и на оставшемся рынке.

10.C. Анализ частичного конкурентного равновесия

В рамках маршаллианского анализа частичного равновесия рассматривается рынок одного блага (или нескольких благ, как показано в разделе 10.G), занимающий небольшую часть в экономике в целом. Небольшие размеры рынка для его анализа с точки зрения частичного равновесия важны по двум причинам[3]. Во-первых, как подчеркивал А. Маршалл (Marshall, 1920), когда расходы на рассматриваемое благо составляют лишь небольшую долю в совокупных расходах потребителя, то только небольшая доля любого дополнительного доллара богатства будет потрачена на это благо, следовательно, можно ожидать, что эффект богатства для этого блага будет невелик. Во-вторых, при равномерно распределенном эффекте замещения небольшой размер изучаемого рынка приводит к тому, что при изменениях на данном рынке цены на остальные блага останутся почти неизменными[4]. В силу фиксированности остальных цен мы можем трактовать расходы на все остальные блага как один композитный товар, который мы будем называть *благом-измерителем* (см. упражнение 3.G.5).

Опираясь на вышеуказанную интерпретацию частичного равновесия, исследуем простую квазилинейную модель с двумя благами. Пусть имеются два товара: благо l и благо-измеритель. Обозначим через x_i и m_i объемы потребления потребителем i блага l и блага-измерителя соответственно. Каждый потребитель $i = 1, \ldots, I$ имеет квазилинейную функцию полезности следующего вида (см. разделы 3.B и 3.C):

$$u_i(m_i, x_i) = m_i + \varphi_i(x_i).$$

Пусть потребительское множество каждого потребителя составляет $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, другими словами, для удобства будем считать, что объем потребления блага-измерителя m может быть отрицательным. Это предположение позволит нам избежать проблем с граничными решениями. Предположим также, что функции $\varphi_i(\cdot)$ ограничены сверху и дважды дифференцируемы, причем $\varphi_i'(x_i) > 0$ и $\varphi_i''(x_i) < 0$ для всех $x_i \geq 0$. Введем также нормировку $\varphi_i(0) = 0$.

[3] Эти причины были сформулированы в работе (Vives, 1987). (См. упражнение 10.C.1 для иллюстрации.)

[4] Это далеко не единственное возможное обоснование того, что цены остальных благ остаются неизменными (см. раздел 10.G).

В рамках анализа частичного равновесия мы считаем, что благо l — это благо, рынок которого мы исследуем, а благо-измеритель — это композитное благо (т. е. m — это совокупные расходы на все остальные блага). Как вы помните, для квазилинейных функций полезности эффект богатства для блага, отличного от блага-измерителя, равен нулю.

В дальнейшем будем считать, что цена блага-измерителя равна 1, а цену блага l обозначим через p.

Каждая фирма $j = 1, \ldots, J$ в этой экономике с двумя благами может произвести благо l из блага m. Объем блага-измерителя, необходимый фирме j для производства $q_j \geq 0$ единиц блага l, описывается функцией издержек $c_j(q_j)$ (напоминаем, что цена блага-измерителя равна 1). Обозначим через z_j объем использования фирмой j блага m в качестве фактора производства. Тогда производственное множество фирмы j имеет вид

$$Y_j = \left\{(-z_j,\ q_j) : q_j \geq 0 \ \text{ и } \ z_j \geq c_j(q_j)\right\}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что функции $c_j(\cdot)$ дважды дифференцируемы, причем $c_j'(q_j) > 0$ и $c_j''(q_j) \geq 0$ для всех $q_j \geq 0$. (В контексте частичного равновесия мы можем трактовать функции $c_j(q_j)$ как функции, полученные из некоторой функции издержек со многими факторами производства $c_j(\bar{w}, q_j)$ при фиксированном векторе цен факторов производства $\bar{w}$[5].)

Для простоты будем считать, что первоначальный запас блага l отсутствует, поэтому весь потребляемый объем данного блага должен быть произведен фирмами. Первоначальный запас блага-измерителя у потребителя i равен (скалярной величине) $\omega_{mi} > 0$, совокупный запас этого блага обозначим через $\omega_m = \sum_i \omega_{mi}$.

Теперь охарактеризуем конкурентные равновесия в данной двухтоварной квазилинейной модели. Следуя определению 10.B.3, рассмотрим сначала, к чему приводит максимизация прибыли и полезности.

При данной цене p^* блага l равновесный уровень выпуска фирмы j q_j^* должен быть решением следующей задачи:

$$\max_{q_j \geq 0} p^* q_j - c_j(q_j).$$

Необходимое и достаточное условие первого порядка для этой задачи имеет вид

$$p^* \leq c_j'\left(q_j^*\right),\ p^* = c_j'\left(q_j^*\right),\ \text{если}\ q_j^* > 0.$$

С другой стороны, равновесный потребительский вектор $\left(m_i^*,\ x_i^*\right)$ для потребителя i должен являться решением задачи

[5] В некоторых упражнениях в конце данной главы предлагается проанализировать эффект экзогенного изменения этих цен факторов производства.

$$\max_{m_i \in \mathbb{R}, x_i \in \mathbb{R}_+} m_i + \varphi_i(x_i)$$

$$\text{при } m_i + p^* x_i \le \omega_{mi} + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} \left(p^* q_j^* - c_j\left(q_j^*\right)\right).$$

В любом решении этой задачи бюджетное ограничение выполняется как равенство. Тогда, выражая m_i из бюджетного ограничения и подставляя в целевую функцию, мы можем переписать задачу потребителя i как задачу выбора только оптимального уровня потребления блага l. Таким образом, x_i^* должно быть решением следующей задачи:

$$\max_{x_i \ge 0} \varphi_i(x_i) - p^* x_i + \left[\omega_{mi} + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} \left(p^* q_j^* - c_j\left(q_j^*\right)\right)\right].$$

Необходимое и достаточное условие первого порядка этой задачи имеет вид

$$\varphi_i'\left(x_i^*\right) \le p^*,\ \varphi_i'\left(x_i^*\right) = p^*, \text{ если } x_i^* > 0.$$

Для последующего анализа удобно описывать равновесное распределение уровнем производства и потребления блага l, т. е. $\left(x_1^*, \ldots, x_I^*, q_1^*, \ldots, q_J^*\right)$, не забывая при этом, что равновесный уровень потребления блага-измерителя потребителем i составляет $m_i^* = \left[\omega_{mi} + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} \left(p^* q_j^* - c_j\left(q_j^*\right)\right)\right] - p^* x_i^*$, а равновесный уровень использования блага-измерителя в качестве фактора производства фирмой j равен $z_j^* = c_j\left(q_j^*\right)$.

В завершение описания условий равновесия в этой модели напомним, что по лемме 10.B.1 нам необходимо убедится только в уравновешенности рынка блага l[6]. Таким образом, распределение $\left(x_1^*, \ldots, x_I^*, q_1^*, \ldots, q_J^*\right)$ и цена p^* образуют конкурентное равновесие тогда и только тогда, когда

$$p^* \le c_j'\left(q_j^*\right),\ p^* = c_j'\left(q_j^*\right), \text{ если } q_j^* > 0,\ j = 1, \ldots, J, \tag{10.C.1}$$

$$\varphi_i'\left(x_i^*\right) \le p^*,\ \varphi_i'\left(x_i^*\right) = p^*, \text{ если } x_i^* > 0,\ i = 1, \ldots, I, \tag{10.C.2}$$

$$\sum_{i=1}^{I} x_i^* = \sum_{j=1}^{J} q_j^*. \tag{10.C.3}$$

[6] Заметим, что в любом конкурентном равновесии должно быть выполнено $p^* > 0$. В противном случае потребители будут предъявлять неограниченный спрос на благо l (поскольку, как вы помните, $\varphi_i'(\cdot) > 0$).

Согласно условию (10.C.1) в любом внутреннем решении предельная выгода p^* фирмы j от продажи дополнительной единицы блага l в точности равна предельным издержкам $c_j'\left(q_j^*\right)$. Условие (10.C.2) гласит, что предельная выгода $\varphi_i'\left(x_i^*\right)$ потребителя i от потребления дополнительной единицы блага l в точности равна предельным издержкам его приобретения p^*. Условие (10.C.3) — условие уравновешенности рынка. Вместе эти $I + J + 1$ условия характеризуют $(I + J + 1)$ равновесную величину $\left(x_1^*, \ldots, x_I^*, q_1^*, \ldots, q_J^*\right)$ и p^*. Заметим, что, до тех пор пока $\max_i \varphi_i'(0) > \min_j c_j'(0)$, совокупное потребление и производство блага l в конкурентном равновесии должно быть строго положительно (это следует из условий (10.C.1) и (10.C.2)). Для простоты в дальнейших рассуждениях будем предполагать, что это условие выполнено.

Условия (10.C.1)–(10.C.3) обладают одним очень важным свойством. В них ни в каком виде не присутствуют первоначальные запасы потребителей и доли участия в прибыли фирмы. В связи с этим можно сделать вывод: *равновесное распределение и цена не зависят от распределения первоначальных запасов и долей участия в прибыли фирмы*. Этот важный результат является следствием квазилинейности предпочтений потребителей[7].

Конкурентное равновесие в этой модели очень удобно представить с помощью традиционной маршаллианской техники построения графиков, когда равновесная цена определяется как точка пересечения кривых агрегированного спроса и агрегированного предложения.

Мы можем получить функцию агрегированного спроса на благо l из условия (10.C.2). Поскольку $\varphi_i''(\cdot) < 0$ и $\varphi_i(\cdot)$ ограничена, то функция $\varphi_i'(\cdot)$ строго убывает по x_i, принимая все значения из интервала $(0, \varphi_i'(0)]$. Следовательно, для каждого возможного уровня $p > 0$ мы можем определить единственное значение x_i, которое обозначим через $x_i(p)$, удовлетворяющее условию (10.C.2). Заметим, что если $p \geq \varphi_i'(0)$, то $x_i(p) = 0$. На рис. 10.C.1(a) проиллюстрировано это построение для цены $\bar{p} > 0$. Функция $x_i(\cdot)$ — это *функция вальрасианского спроса* на благо l (см. раздел 3.D), которая в силу квазилинейности предпочтений не зависит от уровня богатства потребителя. Данная функция является непрерывной и невозрастающей по p для всех $p > 0$ и строго убывающей при любом $p < \varphi_i'(0)$ (при любом таком p имеем: $x_i'(p) = 1 / \varphi_i''(x_i(p)) < 0$).

Функция агрегированного спроса на благо l тогда представляет собой функцию $x(p) = \sum_i x_i(p)$, которая является непрерывной и невозрастающей по всем $p > 0$ и строго убывающей при $p < \max_i \varphi_i'(0)$. Построение графика этой функции проиллюстрировано на рис. 10.C.1(b) для случая $I = 2$. Кривая агрегированного спроса получается горизонтальным суммирова-

[7] В разделе 10.G мы подробнее обсудим эту общую особенность равновесий в экономиках с квазилинейными функциями полезности.

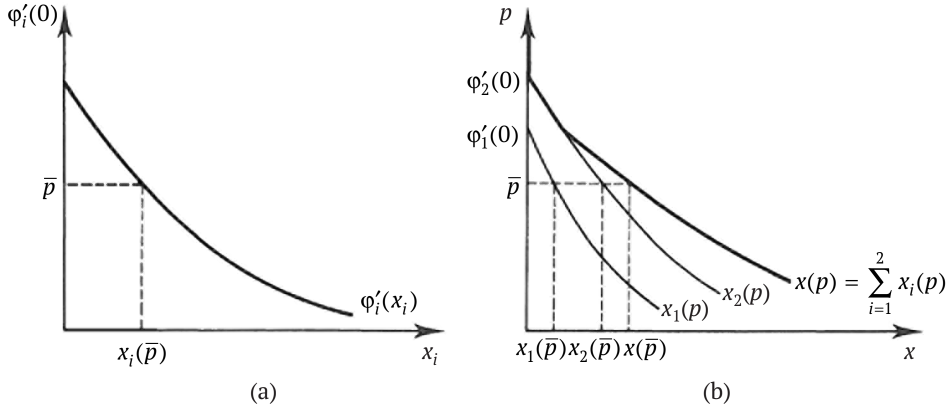


Рис. 10.C.1. Построение графика функции агрегированного спроса.
(a) Определение спроса потребителя *i*. (b) Построение графика функции агрегированного спроса (для $I = 2$)

нием индивидуальных кривых спроса; на рисунке она выделена жирным. Заметим, что $x(p) = 0$ при $p \geq \max_i \varphi_i'(0)$.

Функция агрегированного предложения аналогичным образом может быть получена из условия (10.C.1)[8]. Предположим сначала, что все функции $c_j(\cdot)$ строго выпуклы и $c_j'(q_j) \to \infty$ при $q_j \to \infty$. Тогда для любого $p > 0$ мы можем через $q_j(p)$ обозначить единственный уровень выпуска q_j, удовлетворяющий условию (10.C.1). Заметим, что при $p \leq c_j'(0)$ выполнено $q_j(p) = 0$. На рис. 10.C.2(a) представлено такое построение для цены $\bar{p} > 0$. Функция $q_j(\cdot)$ — это *функция предложения* блага *l* фирмой *j* (см. разделы 5.C и 5.D).

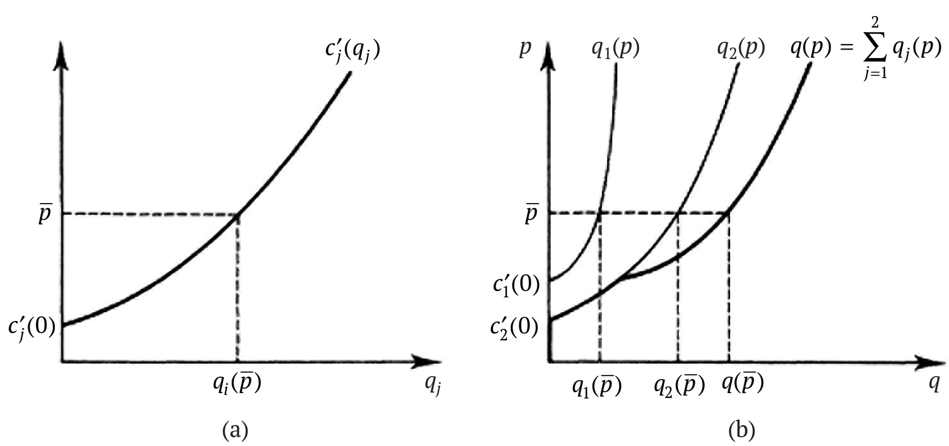


Рис. 10.C.2. Построение графика функции агрегированного предложения.
(a) Определение предложения фирмы *j*. (b) Построение графика функции агрегированного предложения (для $J = 2$)

[8] См. подробное обсуждение индивидуального предложения фирмы в случае одного фактора производства и единственного выпуска в разделе 5.D.

Эта функция непрерывна и не убывает при всех $p > 0$ и строго возрастает при любом $p > c_j'(0)$ (при любом таком p $q_j'(p) = 1 / c_j''(q_j(p)) > 0$).

Тогда *функция агрегированного предложения* (или функция предложения *отрасли*) блага l имеет вид: $q(p) = \sum_j q_j(p)$. Эта функция непрерывна и не убывает при всех $p > 0$ и строго возрастает при $p > \min_j c_j'(0)$. Построение графика данной функции проиллюстрировано на рис. 10.C.2(b) для случая $J = 2$: кривая агрегированного предложения получена путем горизонтального суммирования индивидуальных кривых предложения фирм и на рисунке выделена жирным. Следует заметить, что $q(p) = 0$ при $p \le \min_j c_j'(0)$.

Для определения равновесной цены блага l нам нужно только найти такую цену p^*, при которой агрегированный спрос равен агрегированному предложению, т. е. $x(p^*) = q(p^*)$. Если $\max_i \varphi_i'(0) > \min_j c_j'(0)$, как мы предположили, то при любой цене $p \ge \max_i \varphi_i'(0)$ $x(p) = 0$ и $q(p) > 0$. Аналогично при любой цене $p \le \min_j c_j'(0)$: $x(p) > 0$ и $q(p) = 0$. Тогда существование равновесной цены $p^* \in \left(\min_j c_j'(0), \max_i \varphi_i'(0)\right)$ гарантируется непрерывностью функций $x(\cdot)$ и $q(\cdot)$. Решение проиллюстрировано на рис. 10.C.3. Заметим также, что поскольку $x(\cdot)$ строго убывает при всех $p < \max_i \varphi_i'(0)$, а $q(\cdot)$ строго возрастает при всех $p > \min_j c_j'(0)$, то такая равновесная цена единственна[9]. Уровни индивидуального потребления и производства блага l в этом равновесии определяются следующим образом: $x_i^* = x_i(p^*)$ при $i = 1, \ldots, I$ и $q_j^* = q_j(p^*)$ при $j = 1, \ldots, J$.

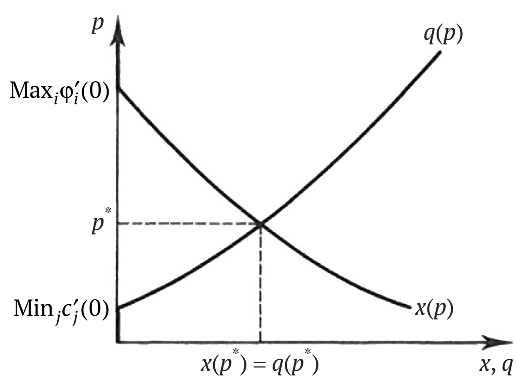


Рис. 10.C.3. При равновесной цене спрос равен предложению

[9] Однако здесь следует быть внимательным, поскольку свойство единственности равновесной цены может быть не выполнено при более общей постановке задачи, когда имеет место эффект богатства (см. главу 17).

В более общем случае, когда некоторые $c_j(\cdot)$ выпуклы, но не строго выпуклы (например, если $c_j(\cdot)$ линейна, как в случае постоянной отдачи от масштаба), тогда $q_j(\cdot)$ — выпуклозначное отображение, а не функция, и поэтому предложение фирмы может быть хорошо определено только на некотором подмножестве цен[10]. Тем не менее основные особенности проведенного анализа остаются без изменений. На рис. 10.С.4 представлено определение равновесного значения p в случае, когда для всех j функции издержек имеют вид: $c_j(q_j) = cq_j$, где $c > 0$. Единственное отличие от случая строго выпуклых издержек заключается в том, что при $J > 1$ нельзя однозначно определить равновесный уровень производства отдельной фирмы.

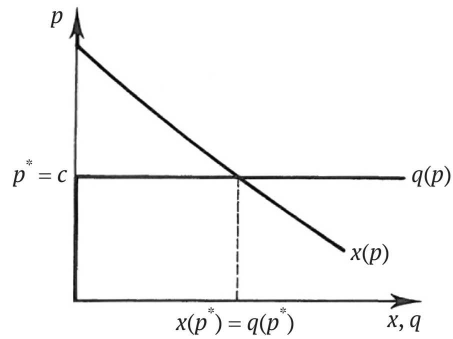


Рис. 10.С.4. Равновесие при $c_j(q_j) = c_jq_j$ для всех $j = 1, \ldots, J$

Функции, обратные функциям агрегированного спроса и предложения, также имеют интересную интерпретацию. При любом данном уровне агрегированного выпуска блага l, скажем $\bar{q}$, обратная функция предложения отрасли, $q^{-1}(\bar{q})$, показывает цену, которая порождает агрегированное предложение $\bar{q}$. Другими словами, когда каждая фирма выбирает оптимальный уровень выпуска, сталкиваясь с ценой $p = q^{-1}(\bar{q})$, агрегированное предложение в точности равно $\bar{q}$. Это продемонстрировано на рис. 10.С.5. Следует заметить, что выбор такого уровня выпуска для всех действующих фирм характеризуется равенством их предельных издержек величине $q^{-1}(\bar{q})$. В результате предельные издержки производства дополнительной единицы блага l в точке $\bar{q}$ в точности равны $q^{-1}(\bar{q})$ независимо от того, какая именно действующая на рынке фирма производит этот выпуск. Таким образом, $q^{-1}(\cdot)$ — функцию, обратную функции предложения отрасли, можно трактовать как функцию предельных издержек отрасли, которую мы обозначим $C'(\cdot) = q^{-1}(\cdot)$[11].

Только что описанное получение функции $C'(\cdot)$ полностью согласуется с рассуждениями, приведенными в разделе 5.Е. Как мы видели в этом разделе, агрегированное предложение J фирм, $q(p)$, доставляет максимум агрегированной прибыли при цене p. Следовательно, мы можем соотнести $q(\cdot)$ с функцией предельных

---

[10] Например, если функция издержек фирмы j имеет вид $c_j(q_j) = c_jq_j$, где $c_j > 0$, то при $p > c_j$ имеем $q_j(p) = \infty$. В результате если $p > c_j$, то агрегированное предложение равно $q(p) = \sum_j q_j(p) = \infty$, другими словами, агрегированное предложение $q(\cdot)$ не определено при таких значениях цены p.

[11] Формально функция предельных издержек отрасли $C'(\cdot)$ представляет собой производную функции агрегированных издержек $C(\cdot)$, описывающую совокупные издержки производства, которые понесет некий центральный орган, управляющий всеми J фирмами, если он стремится произвести данный агрегированный уровень блага l с минимальными совокупными издержками (см. упражнение 10.С.3).

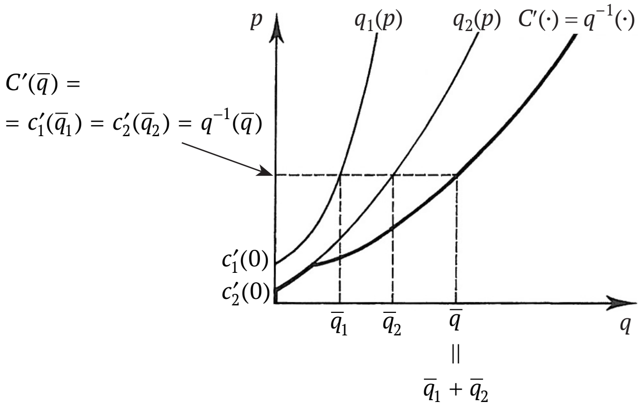


Рис. 10.С.5. Функция предельных издержек отрасли

издержек отрасли $C'(\cdot)$ точно так же, как мы это делали в разделе 5.D для случая функции предельных издержек отдельной фирмы, и ее предложением. Таким образом, при выпуклой технологии кривая агрегированного предложения блага l совпадает с графиком функции предельных издержек отрасли $C'(\cdot)$, и поэтому $q^{-1}(\cdot) = C'(\cdot)$[12].

Аналогично при любом данном уровне агрегированного спроса $\bar{x}$ *обратная функция спроса* $P(\bar{x}) = x^{-1}(\bar{x})$ характеризует цену, при которой агрегированный спрос равен $\bar{x}$. То есть когда каждый потребитель определяет для себя оптимальный уровень спроса на благо l при этой цене, совокупный спрос в точности равен $\bar{x}$. Заметим, что при этих индивидуальных уровнях спроса (в предположении, что они положительны) предельная выгода каждого потребителя от дополнительной единицы блага l, выраженная в благе-измерителе, $\varphi_i'(x_i)$, в точности равна $P(\bar{x})$. Это проиллюстрировано на рис. 10.С.6. Значение обратной функции спроса при объеме потребления $\bar{x}$, $P(\bar{x})$, таким образом, можно трактовать как *предельную общественную выгоду от блага l* при условии, что агрегированный объем $\bar{x}$ эффективно распределен между I потребителями (см. точную формулировку этого утверждения в упражнении 10.С.4).

В данной интерпретации мы можем рассматривать конкурентное равновесие как ситуацию, когда уровень агрегированного выпуска таков, что предельная общественная выгода от блага l в точности равна предельным издержкам. А это означает, что равновесное распределение должно быть общественно оптимальным. Изучением этого вопроса мы займемся в разделе 10.D.

---

[12] Более формально, согласно утверждению 5.E.1 агрегированное предложение можно получить из максимизации прибыли при данной функции агрегированных издержек $C(\cdot)$. Это дает нам условие первого порядка $p = C'(q(p))$. Следовательно, $q(\cdot) = C'^{-1}(\cdot)$, что эквивалентно $q^{-1}(\cdot) = C'(\cdot)$.

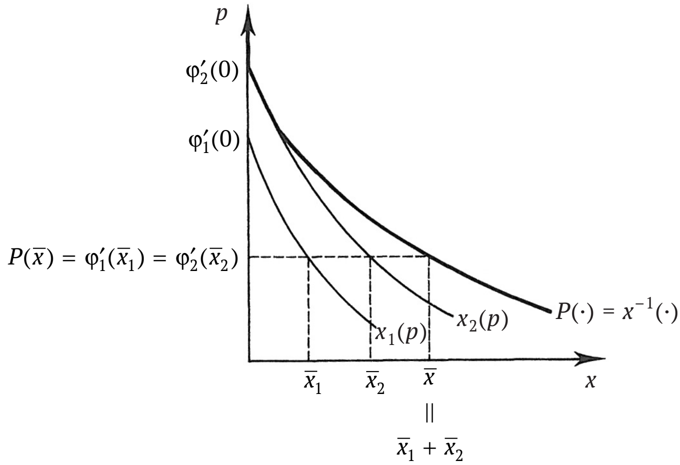


Рис. 10.C.6. Обратная функция спроса

Сравнительная статика

Иногда полезно знать, насколько изменение условий на рассматриваемом конкурентном рынке влияет на равновесный исход. Такой вопрос может возникнуть, например, при необходимости сравнения рыночных исходов нескольких подобных рынков, различающихся какими-либо измеримыми показателями (например, можно сравнивать цену на мороженое в ряде городов с различным уровнем средней температуры). Анализ подобных вопросов называется *анализом сравнительной статики*.

В общем случае можно считать, что предпочтения каждого потребителя зависят от некоторого вектора экзогенных параметров $\alpha \in \mathbb{R}^M$, так что функцию полезности $\varphi_i(\cdot)$ можно представить в виде $\varphi_i(x_i, \alpha)$. Аналогично на технологию каждой фирмы может влиять некоторый вектор экзогенных параметров $\beta \in \mathbb{R}^S$, так что функцию издержек $c_j(\cdot)$ можно записать как $c_j(q_j, \beta)$. Кроме того, в некоторых ситуациях потребители и фирмы сталкиваются с налогами и субсидиями, в результате которых эффективная цена (т. е. цена за вычетом налогов и субсидий), которую платят потребители или получают фирмы, может отличаться от рыночной цены p. Обозначим через $\hat{p}_i(p, t)$ и $\hat{p}_j(p, t)$ соответственно эффективную цену, которую платит потребитель i, и эффективную цену, которую получает фирма j при налогах и субсидиях $t \in \mathbb{R}^K$. Например, если потребитель i должен заплатить налог t_i (выраженный в благе-измерителе) за единицу потребления блага l, то $\hat{p}_i(p, t) = p + t_i$. Если же потребитель i сталкивается с налогом t_i в процентах от цены продажи, то $\hat{p}_i(p, t) = p(1 + t_i)$.

При данных значениях параметров (α, β, t) окажется, что $I + J$ равновесных уровней потребления и производства $\left(x_1^*, \ldots, x_I^*, q_1^*, \ldots, q_J^*\right)$ и равновесная цена p^* определяются как решение следующей системы из $I + J + 1$ уравнений (для простоты предполагаем, что $x_i^* > 0$ для всех i и $q_j^* > 0$ для всех j):

$$\varphi_i'\left(x_i^*,\ \alpha\right) = \hat{p}_i\left(p^*,\ t\right),\ i = 1, \ldots, I, \tag{10.C.4}$$

$$c_j'\left(q_j^*,\ \beta\right) = \hat{p}_j\left(p^*,\ t\right),\ j = 1, \ldots, J, \tag{10.C.5}$$

$$\sum_{i=1}^{I} x_i^* = \sum_{j=1}^{J} q_j^*. \tag{10.C.6}$$

Данные $I + J + 1$ уравнений неявно описывают равновесное распределение и цену как функции от экзогенных параметров (α, β, t). Если все рассматриваемые функции дифференцируемы, то мы можем воспользоваться теоремой о дифференцировании неявной функции для получения предельного изменения равновесного распределения и цен в результате дифференциально малого изменения значений этих параметров (см. раздел M.E математического приложения). В примере 10.C.1 мы рассматриваем одно такое упражнение сравнительной статики — это лишь один пример из огромного числа возможных ситуаций, которые естественным образом возникают в экономических приложениях. (Упражнения в конце главы содержат еще ряд примеров.)

Пример 10.C.1. *Сравнительная статика: влияние налога с продаж*. Предположим, что вводится налог с продаж, при котором потребители должны платить сумму $t \geq 0$ (в единицах блага-измерителя) за каждую потребляемую единицу блага l. Нам бы хотелось оценить влияние введения такого налога на рыночную цену. Обозначим через $x(p)$ и $q(p)$ функции агрегированного спроса и предложения на благо l соответственно при отсутствии налога (будем считать, что выполнены все введенные ранее предположения относительно этих функций).

В терминах ранее введенных обозначений функции $\varphi_i(\cdot)$и $c_j(\cdot)$ не зависят от каких-либо экзогенных параметров, $\hat{p}_i(p,\ t) = p + t$ для всех i и $\hat{p}_j(p, t) = p$ для всех j. В принципе, подставив эти выражения в систему равновесных уравнений (10.C.4)–(10.C.6), мы можем получить выражение, характеризующее влияние предельного увеличения налога на цену, непосредственно используя теорему о неявной функции (см. упражнение 10.C.5). Однако здесь мы выбрали более простой путь получения ответа. Так, заметим, что агрегированный спрос при налоге t и цене p равен $x(p + t)$, поскольку для потребителей введение налога эквивалентно увеличению цены на t. Таким образом, равновесная рыночная цена при налоге t, которую мы обозначим через $p^*(t)$, должна удовлетворять следующему условию:

$$x\left(p^*(t) + t\right) = q\left(p^*(t)\right). \tag{10.C.7}$$

Предположим, мы хотим оценить влияние предельного увеличения налога на цены, которые платят потребители и получают производители. Предполагая, что функции $x(\cdot)$ и $q(\cdot)$ дифференцируемы при $p = p^*(t)$, дифференцируя (10.C.7), получим

$$p^{*\prime}(t) = -\frac{x'\left(p^*(t) + t\right)}{x'\left(p^*(t) + t\right) - q'\left(p^*(t)\right)}. \tag{10.C.8}$$

Из (10.C.8) и предположений относительно $x'(\cdot)$ и $q'(\cdot)$ немедленно следует, что $-1 \leq p^{*\prime} < 0$ при любом t. Таким образом, цена $p^*(t)$, которую получают производители, с ростом t снижается, тогда как совокупные издержки приобретения блага для потребителей $p^*(t) + t$ (слабо) возрастают. Совокупные объемы производства и потребления блага снижаются (также слабо). Эта ситуация проиллюстрирована на рис. 10.C.7(a), где равновесный уровень агрегированного потребления при ставке t обозначен через $x^*(t)$. Обратите внимание, что из (10.C.8) следует, что когда величина $q'\left(p^*(t)\right)$ достаточно велика, то $p^{*\prime}(t) \approx 0$, и поэтому на цену, получаемую фирмами, налог почти не оказывает влияния: почти все бремя налога несут на себе потребители. И наоборот, когда $q'\left(p^*(t)\right) = 0$, выполнено $p^{*\prime}(t) = -1$, и поэтому в этом случае налог ощущают только фирмы. На рис. 10.C.7(b) и (c) эти случаи проиллюстрированы графически.

Подставляя в (10.C.8) $x'(\cdot)$ и $q'(\cdot)$, мы можем выразить предельное изменение равновесной цены p^* в терминах производных функций индивидуальной полезности и издержек. Например, если обозначать через $p^* = p^*(0)$ цену до введения налога, то получим

$$p^{*\prime}(0) = -\frac{\sum_{i=1}^{I}\left[\varphi_i''\left(x_i\left(p^*\right)\right)\right]^{-1}}{\sum_{i=1}^{I}\left[\varphi_i''\left(x_i\left(p^*\right)\right)\right]^{-1} - \sum_{j=1}^{J}\left[c_j''\left(q_j\left(p^*\right)\right)\right]^{-1}}. \blacksquare$$

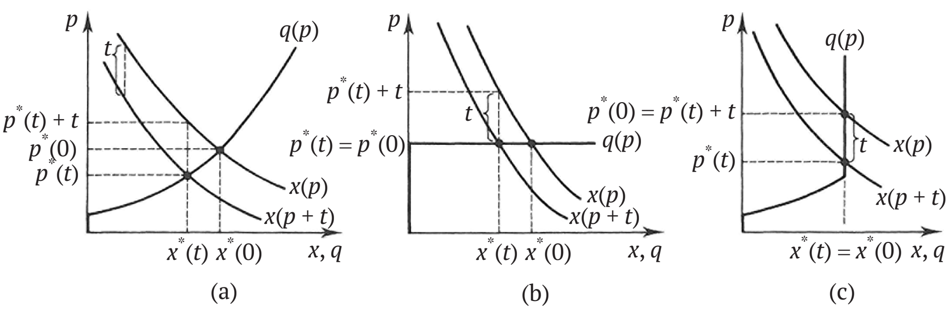


Рис. 10.C.7. Сравнительная статика для налога с продаж

На протяжении всего раздела мы считали, что предпочтения потребителей и технологии фирм выпуклы (и даже строго выпуклы, когда речь идет о предпочтениях потребителей). Что произойдет, если отказаться от этой предпосылки? На рис. 10.C.8 представлена одна из возможных проблем, которая в этом случае может возникнуть. Показаны функция спроса и отображение предложения для экономики с одной фирмой (т. е. при $J = 1$)[13]. Функция издержек этой фирмы $c(\cdot)$ непрерывна и дифференцируема, но не выпукла. На рисунке тонкой линией изображен график функции предельных издержек фирмы $c'(\cdot)$. Как видно, функция $c'(\cdot)$ не является невозрастающей. Более жирной линией на рисунке отмечено фактическое отображение предложения фирмы $q(\cdot)$ (убедитесь в том, что оно определяется действительно так, как показано на рисунке)[14]. Нетрудно заметить, что в данном случае график отображения предложения не совпадает с кривой предельных издержек, поэтому графики

[13] Мы взяли случай $J = 1$ только для наглядности.

[14] См. подробное обсуждение взаимосвязи между отображением предложения и функцией предельных издержек фирмы при невыпуклой технологии в разделе 5.D.

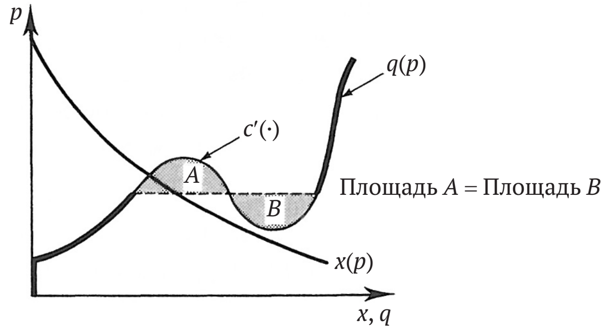


Рис. 10.C.8. Отсутствие конкурентного равновесия при невыпуклой технологии

отображения предложения и кривая спроса не пересекаются. Таким образом, в этом случае *конкурентного равновесия не существует*.

Следовательно, можно предположить, что предпосылка о выпуклости играет ключевую роль в существовании конкурентного равновесия. Мы убедимся в этом в главе 17, где для более общего случая будут приведены условия, гарантирующие существование конкурентного равновесия.

10.D. Фундаментальные теоремы благосостояния в контексте частичного равновесия

В этом разделе мы обсудим свойства Парето-оптимальных распределений в контексте квазилинейной экономики с двумя благами, описанной в разделе 10.C, а также проследим фундаментальную связь между множеством Парето-оптимальных распределений и множеством конкурентных равновесий.

Квазилинейная форма функций полезности потребителей существенно упрощает процесс поиска Парето-оптимальных распределений. В частности, *если предпочтения потребителей квазилинейны, то граница множества возможных уровней полезности в такой экономике линейна* (см. определение этого множества в разделе 10.B) *и все точки на этой границе соответствуют таким распределениям благ, которые отличаются только уровнем потребления блага-измерителя потребителями*.

Для того чтобы убедиться в этом, предположим, что потребление и производство блага l зафиксировано на уровне $\left(\bar{x}_1,\ \dots,\ \bar{x}_I,\ \bar{q}_1,\ \dots,\ \bar{q}_J\right)$. При таких уровнях производства совокупный объем блага-измерителя, доступный для потребления, составляет $\omega_m - \sum_j c_j\left(\bar{q}_j\right)$. В силу квазилинейного вида функций полезности мы можем без каких-либо ограничений менять полезность потребителей с помощью трансфертов в терминах блага-измерителя, поэтому множество полезностей, которое может быть достигнуто I потребителями при соответствующем распределении имеющегося в их распоряжении объема блага-измерителя, имеет вид

$$\left\{(u_1,\ \ldots,\ u_I): \sum_{i=1}^{I} u_i \leq \sum_{i=1}^{I} \varphi_i\left(\bar{x}_i\right) + \omega_m - \sum_{j=1}^{J} c_j\left(\bar{q}_j\right)\right\}. \tag{10.D.1}$$

Границей этого множества является гиперплоскость с вектором нормали (1, …, 1). Для случая $I = 2$ это множество представляет собой заштрихованную область на рис. 10.D.1.

Следует отметить, что, меняя уровни потребления и производства блага l, мы осуществляем параллельный сдвиг границы данного множества. Таким образом, в каждом Парето-оптимальном распределении уровни потребления и производства $\left(x_1^*,\ \ldots,\ x_I^*,\ q_1^*,\ \ldots,\ q_J^*\right)$ должны быть таковы, чтобы эта граница была сдвинута как можно дальше от начала координат, что на рис. 10.D.1 показано жирной границей заштрихованного множества возможных уровней полезности. Будем называть такие объемы *оптимальными уровнями потребления и производства* блага l. Если оптимальный уровень потребления и производства блага l единствен, то Парето-оптимальные распределения могут различаться только распределением блага-измерителя среди потребителей[15].

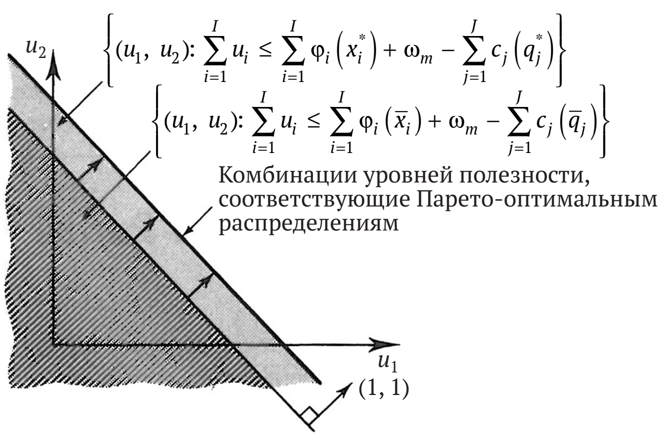


Рис. 10.D.1. Множество возможных уровней полезности в квазилинейной экономике

[15] Оптимальный индивидуальный уровень производства блага может не быть неединственным, если функции издержек фирм выпуклы, но не строго. Невозможность однозначно определить индивидуальный уровень производства возникает, например, в том случае, когда все фирмы имеют одинаковые технологии с постоянной отдачей от масштаба. Однако при сделанных предположениях о том, что функции $\varphi_i(\cdot)$ строго вогнуты, а функции $c_j(\cdot)$ выпуклы, оптимальные индивидуальные уровни потребления блага l будут определены единственным образом, а следовательно, это будет верно и для оптимального агрегированного уровня производства $\sum_j q_j^*$ блага l. А это означает, что в рамках наших предположений уровень потребления в двух различных Парето-оптимальных распределениях может различаться только распределением блага-измерителя между потребителями. Если, более того, функции $c_j(\cdot)$ строго выпуклы, то оптимальный индивидуальный уровень производства также определен единственным образом. (См. упражнение 10.D.1.)

Из (10.D.1) следует, что оптимальные уровни потребления и производства блага l могут быть получены как решение следующей задачи:

$$\max_{\substack{(x_1,\dots,x_I)\geq 0\\ (q_1,\dots,q_J)\geq 0}} \sum_{i=1}^{I} \varphi_i(x_i) - \sum_{j=1}^{J} c_j(q_j) + \omega_m \tag{10.D.2}$$

$$\text{при } \sum_{i=1}^{I} x_i - \sum_{j=1}^{J} q_j = 0.$$

Величина $\sum\limits_{i=1} \varphi_i(x_i) - \sum\limits_{j=1} c_j(q_j)$ в целевой функции задачи (10.D.2) называется *маршаллианским агрегированным излишком* (или просто *агрегированным излишком*). Эта величина представляет собой совокупную полезность, порожденную потреблением блага l, за вычетом издержек его производства (в терминах блага-измерителя). Тогда оптимальные уровни производства и потребления блага l доставляют максимум агрегированного излишка.

С учетом сделанных предположений о выпуклости (предпочтений и функций издержек) условия первого порядка задачи (10.D.2) являются необходимыми и достаточными условиями оптимальности объемов потребления и производства блага. Если обозначить через μ множитель при ограничении задачи (10.D.2), то $I + J$ оптимальных величин $\left(x_1^*, \dots, x_I^*, q_1^*, \dots, q_J^*\right)$ и множитель μ должны удовлетворять следующим $I + J + 1$ условиям:

$$\mu \leq c_j'\left(q_j^*\right),\ \mu = c_j'\left(q_j^*\right), \text{ если } q_j^* > 0,\ j = 1, \dots, J, \tag{10.D.3}$$

$$\varphi_i'\left(x_i^*\right) \leq \mu,\ \varphi_i'\left(x_i^*\right) = \mu, \text{ если } x_i^* > 0,\ i = 1, \dots, I, \tag{10.D.4}$$

$$\sum_{i=1}^{I} x_i^* = \sum_{j=1}^{J} q_j^*. \tag{10.D.5}$$

Эти условия должны быть вам знакомы: они в точности совпадают с условиями (10.C.1)–(10.C.3) раздела 10.C, если μ заменить на p^*. Это наблюдение очень важно. Отсюда мы сразу можем заключить, что любой исход конкурентного равновесия в рассматриваемой модели Парето-оптимален, поскольку любое распределение в конкурентном равновесии характеризуется такими уровнями потребления и производства блага l, $\left(x_1^*, \dots, x_I^*, q_1^*, \dots, q_J^*\right)$, которые удовлетворяют условиям (10.D.3)–(10.D.5) при $\mu = p^*$. Таким образом, мы пришли к результату, известному как *первая фундаментальная теорема экономики благосостояния* (утверждение 10.D.1) для рассматриваемой квазилинейной экономики с двумя благами.

Утверждение 10.D.1 (*первая фундаментальная теорема экономики благосостояния*). Если цена p^* и распределение $\left(x_1^*, \ldots, x_I^*, q_1^*, \ldots, q_J^*\right)$ образуют конкурентное равновесие, то равновесное распределение Парето-оптимально.

В первой фундаментальной теореме приводятся условия, при которых рыночные равновесия с необходимостью Парето-оптимальны. Этот результат справедлив с высокой долей общности и представляет собой формальное выражение «невидимой руки» Адама Смита (см. более подробное обсуждение этого результата в разделе 16.C). Однако не менее важны и условия, при которых данное утверждение не выполняется. В моделях, для которых первая фундаментальная теорема выполнена, в этом разделе и разделе 16.C имеет место «полнота» рынков в том смысле, что рынок любого товара существует и все участники рынка принимают цены заданными. В главах 11–14 мы исследуем ситуации, когда по крайней мере одно из этих условий не выполнено и в результате рыночный исход не Парето-оптимален.

Мы также можем сформулировать утверждение, обратное утверждению 10.D.1, известное как *вторая фундаментальная теорема экономики благосостояния*. Как мы видели в разделе 10.C, равновесная цена блага l, p^* и равновесные уровни потребления и производства блага $\left(x_1^*, \ldots, x_I^*, q_1^*, \ldots, q_J^*\right)$, а также прибыль фирм не зависят от изменений уровня богатства потребителей. Поэтому трансферт в виде блага-измерителя от потребителя i к потребителю i' приведет только к изменению равновесного потребления блага-измерителя каждым из этих потребителей на величину, в точности равную величине трансферта, и никаких других изменений не произойдет. Таким образом, при соответствующем перераспределении первоначальных запасов блага-измерителя результирующее распределение в конкурентном равновесии может давать любой вектор полезности, принадлежащий границе множества возможных уровней полезности. Поэтому вторая теорема благосостояния гласит, что в квазилинейной экономике с двумя благами центральная власть, заинтересованная в достижении определенного Парето-оптимального распределения, всегда может реализовать этот исход с помощью трансфертов для потребителей (выраженных в благе-измерителе) и затем «позволить работать рынку». Это формализовано в утверждении 10.D.2.

Утверждение 10.D.2 (*вторая фундаментальная теорема экономики благосостояния*). Для любых Парето-оптимальных уровней полезности $\left(u_1^*, \ldots, u_I^*\right)$ существуют трансферты, выраженные в благе-измерителе, $(T_1, \ldots, T_I)$, удовлетворяющие условию $\sum_i T_i = 0$, такие что конкурентное равновесие при первоначальных запасах $(\omega_{m1} + T_1, \ldots, \omega_{mI} + T_I)$ дает уровни полезности, в точности равные $\left(u_1^*, \ldots, u_I^*\right)$.

В разделе 16.D мы исследуем условия, при которых вторая теорема благосостояния выполнена в конкурентных экономиках более общего вида. Оказывается, для справедливости этого утверждения, в дополнение к требованиям первой теоремы благосостояния, требуется выпуклость предпочтений и производственных множеств — те предположения, из которых мы исходили в рассматриваемой модели. Тогда как для справедливости первой теоремы благосостояния, как мы увидим в главе 16, предположений о выпуклости не требуется.

Следует обратить особое внимание на соотношение между p и μ в условиях, характеризующих равновесие (10.C.1)–(10.C.3), и в условиях, характеризующих Парето-оптимальные распределения, (10.D.3)–(10.D.5). Конкурентная цена в точности равна теневой цене при ресурсном ограничении на благо l в задаче на поиск Парето-оптимума (10.D.2). Тогда можно сказать, что цена блага в конкурентном равновесии отражает его предельную общественную оценку. В конкурентном равновесии каждая фирма производит такой уровень выпуска, при котором цена равна предельным издержкам, поэтому предельные издержки производства равны предельной общественной оценке выпуска фирмы. Аналогично каждый потребитель, выбирая такой уровень потребления, где предельная полезность блага равна его цене, фактически находится в точке, где предельная выгода от потребления блага в точности равна предельным издержкам. Это соотношение между рыночными ценами и оптимальными теневыми ценами в конкурентной экономике выполнено в довольно широком классе случаев (см. дальнейшее обсуждение этого вопроса в разделе 16.F).

Альтернативным способом поиска множества Парето-оптимальных распределений является решение следующей задачи:

$$\max_{\{x_i, m_i\}_{i=1}^{I}, \{z_j, q_j\}_{j=1}^{J}} m_1 + \varphi_1(x_1) \tag{10.D.6}$$

при

(1) $m_i + \varphi_i(x_i) \geq \bar{u}_i,\ i = 2, \ldots, I,$

(2l) $\sum_{i=1}^{I} x_i - \sum_{j=1}^{J} q_j \leq 0,$

(2m) $\sum_{i=1}^{I} m_i + \sum_{j=1}^{J} z_j \leq \omega_m,$

(3) $z_j \geq c_j(q_j),\ j = 1, \ldots, J.$

Задача (10.D.6) — задача поиска Парето-оптимальных распределений — это задача максимизации полезности потребителя 1 при условии, что все остальные потребители в рассматриваемой экономике имеют уровень полезности не ниже определенного требуемого уровня (ограничения (1)), а также ресурсных ограничений (ограничения (2l) и (2m)) и технологических ограничений (ограничения (3)). Решая задачу (10.D.6) при различных уровнях полезности остальных индивидов ($\bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_I$), мы можем описать все Парето-оптимальные исходы в данной экономике (см.

упражнение 10.D.3; в общем случае этот результат справедлив, если предпочтения потребителей строго монотонны). В упражнении 10.D.4 вас просят вывести условия (10.D.3)–(10.D.5), используя этот альтернативный подход.

10.E. Анализ благосостояния в модели частичного равновесия

Исследователей часто интересует мера изменения уровня общественного благосостояния в результате изменений рыночных условий, таких, например, как улучшение технологии, введение новой политики налогообложения или устранение некоторых существующих несовершенств рынка. В модели частичного равновесия провести такой анализ благосостояния особенно просто, что в значительной степени и объясняет популярность этой модели.

При дальнейшем анализе будем считать, что об уровне благосостояния общества можно судить по функции общественного благосостояния $W(u_1, \ldots, u_I)$, приписывающей значение общественного благосостояния каждому вектору полезностей $(u_1, \ldots, u_I)$ (см. более подробно об этой концепции в главах 4, 16 и 22). Кроме того, будем предполагать (как и в теории н-репрезентативного потребителя, изложенной в разделе 4.D), что существует некоторая центральная власть, которая в целях максимизации общественного благосостояния осуществляет перераспределение богатства с помощью трансфертов, выраженных в благе-измерителе[16]. Главное упрощение, порожденное квазилинейной спецификацией индивидуальных функций полезности, состоит в том, что, когда существует центральная власть, таким образом перераспределяющая богатство, *изменения общественного благосостояния могут быть оценены в терминах изменения агрегированного маршаллианского излишка* (эта концепция была введена в разделе 10.D) *при любой функции общественного благосостояния, которую может иметь общество*.

Чтобы убедиться в этом (в действительности мы уже анализировали этот вопрос в примере 4.D.2), рассмотрим некоторые заданные уровни потребления и производства блага l, $(x_1, \ldots, x_I, q_1, \ldots, q_I)$, такие что $\sum_i x_i = \sum_j q_j$.

Как мы видели в разделе 10.D и, в частности, на рис. 10.D.1, векторы полезности $(u_1, \ldots, u_I)$, достижимые посредством перераспределения блага-измерителя при данных уровнях потребления и производства блага l, описываются следующим множеством:

$$\left\{(u_1, \ldots, u_I) \colon \sum_{i=1}^{I} u_i \le \omega_m + \sum_{i=1}^{I} \varphi_i(x_i) - \sum_{j=1}^{J} c_j(q_j)\right\}.$$

[16] Как и в разделе 4.D, мы предполагаем, что потребители считают эти трансферты не зависящими от их собственных действий, т. е. в стандартной терминологии это *паушальные* трансферты. Можно мыслить это так, как будто центральная власть осуществляет трансферты до открытия рынков.

Далее, если центральная власть перераспределяет объем блага-измерителя так, чтобы максимизировать $W(u_1, \ldots, u_I)$, то полученный в итоге максимальный уровень благосостояния должен быть тем выше, чем больше данное множество (т. е. чем дальше от начала координат расположена граница множества). Следовательно, изменение уровней потребления и производства блага l приводит к росту благосостояния (при оптимальном перераспределении блага-измерителя) тогда и только тогда, когда это изменение увеличивает агрегированный маршаллианский излишек:

$$S(x_1, \ldots, x_I, q_1, \ldots, q_J) = \sum_{i=1}^{I} \varphi_i(x_i) - \sum_{j=1}^{J} c_j(q_j). \qquad (10.\text{E}.1)$$

На рис. 10.Е.1 приведена графическая иллюстрация. На нем изображены три вектора полезности для случая $I = 2$. Первоначальный вектор полезности $u^0 = \left(u_1^0, u_2^0\right)$ соответствует распределению, в котором уровни потребления и производства блага l составляют $\left(x_1^0, \ldots, x_I^0, q_1^0, \ldots, q_J^0\right)$ и распределение богатства оптимально; вектор полезности $u^1 = \left(u_1^1, u_2^1\right)$, полученный в результате изменения уровней потребления и производства блага l до $\left(x_1^1, \ldots, x_I^1, q_1^1, \ldots, q_J^1\right)$ в отсутствие каких-либо трансфертов в терминах блага-измерителя, и вектор полезности $u^{1^*} = \left(u_1^{1^*}, u_2^{1^*}\right)$, полученный в результате такого изменения при перераспределении блага-измерителя, оптимизирующем общественное благосостояние. Как видно из рисунка, подобное изменение увеличивает агрегированный излишек, а следовательно, также приводит к росту благосостояния при оптимальных трансфертах в терминах блага-измерителя, даже если в отсутствие трансфертов благосостояние может снизиться. Таким образом, до тех пор

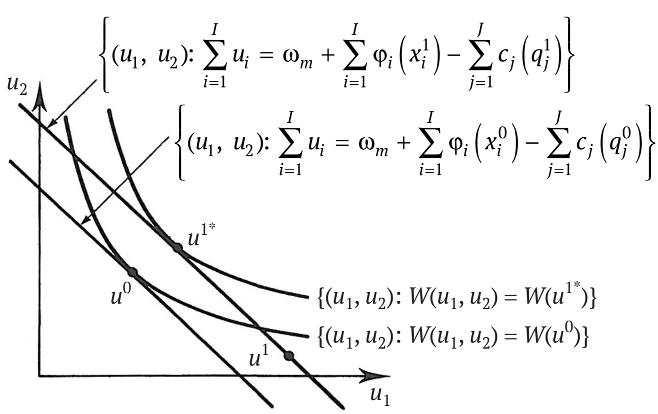


Рис. 10.Е.1. При паушальном перераспределении в целях максимизации общественного благосостояния изменения благосостояния в квазилинейной модели соответствуют изменениям в агрегированном излишке

пока перераспределение богатства осуществляется так, чтобы максимизировать функцию общественного благосостояния, изменения в благосостоянии могут быть оценены с помощью изменений маршаллианского агрегированного излишка (опять-таки при *любой* функции общественного благосостояния)[17].

Во многих представляющих интерес ситуациях маршаллианский излишек имеет удобное (и важное с точки зрения экономической истории) представление в виде площади между кривыми агрегированного спроса и предложения блага l.

Но прежде чем перейти к более подробному обсуждению этого момента, сначала оговорим две ключевые предпосылки. Обозначим через $x = \sum_i x_i$ агрегированное потребление блага l. Будем считать, во-первых, что для любого x индивидуальный уровень потребления блага l оптимально распределен среди потребителей. То есть, вспоминая наше обсуждение обратной функции спроса $P(\cdot)$ в разделе 10.C (см. рис. 10.C.6), для любого потребителя i: $\varphi_i'(x_i) = P(x)$. Это условие будет выполнено, если, например, все потребители принимают цену заданной и сталкиваются с одной и той же ценой. Аналогично обозначим через $q = \sum_j q_j$ агрегированный выпуск блага l; будем считать, что производство любого совокупного объема q оптимально распределено между фирмами. То есть, вспоминая обсуждение кривой предельных издержек отрасли $C'(\cdot)$в разделе 10.C (см. рис. 10.C.5), для любой фирмы выполнено j: $c_j'(q_j) = C'(q)$. Это условие будет справедливо, если, например, все фирмы принимают цены заданными и сталкиваются с одной и той же ценой. Обратите внимание, что мы не требуем, чтобы цены, с которыми сталкиваются потребители и фирмы, были одинаковы[18].

Рассмотрим теперь дифференциально малое изменение $(dx_1, \ldots, dx_I, dq_1, \ldots, dq_J)$ потребляемых и производимых объемов блага l, удовлетворяющее условию $\sum_i dx_i = \sum_j dq_j$, и введем обозначение $dx = \sum_i dx_i$. Тогда изменение агрегированного маршаллианского излишка будет следующим:

---

[17] Следует заметить, что в особом случае, когда функция общественного благосостояния в действительности является «утилитаристской» функцией общественного благосостояния $\sum_i u_i$, необходимость в трансфертах отпадает. В этом случае достаточно, чтобы все доступные единицы блага-измерителя достались потребителям (т. е. чтобы ни одна из них не была потрачена впустую или каким-либо другим образом отнята у потребителей).

[18] Например, потребители могут быть вынуждены платить налог с приобретенной единицы блага, что приводит к отличию цены, которую платит потребитель, от той цены, которую получают фирмы (см. пример 10.C.1). Сделанные здесь предположения также выполнены и в модели монополии, которую мы обсудим в разделе 12.B, где существует единственная фирма (и поэтому не встает вопрос об оптимальном распределении производства) и все потребители действуют как ценополучатели, сталкиваясь с одной и той же ценой. Примером, когда предположение об оптимальном распределении производства не выполнено, является модель дуополии Курно (см. главу 12), в случае когда фирмы характеризуются разной эффективностью. В этой модели фирмы с различными издержками в равновесии имеют различный уровень предельных издержек.

$$dS = \sum_{i=1}^{I} \varphi_i'(x_i)dx_i - \sum_{j=1}^{J} c_j'(q_j)dq_j. \qquad (10.E.2)$$

Поскольку $\varphi_i'(x_i) = P(x)$ для всех i и $c_j'(q_j) = C'(q)$ для всех j, то

$$dS = P(x)\sum_{i=1}^{I} dx_i - C'(q)\sum_{j=1}^{J} dq_j. \qquad (10.E.3)$$

Наконец, поскольку $x = q$ (в силу допустимости) и $\sum_j dq_j = \sum_i dx_i = dx$, то отсюда получаем

$$dS = [P(x) - C'(x)]dx. \qquad (10.E.4)$$

Это дифференциально малое изменение маршаллианского излишка проиллюстрировано на рис. 10.E.2(a). Выражение (10.E.4) интуитивно довольно понятно: оно гласит, что в точке, где уровень агрегированного потребления равен x, предельное влияние увеличения объема агрегированного потребления, dx, на общественное благосостояние равно предельной выгоде потребителей от этого потребления, $P(x)dx$, за вычетом предельных издержек производства дополнительного выпуска, $C'(x)dx$ (все в терминах блага-измерителя).

Мы также можем проинтегрировать выражение (10.E.4), чтобы выразить величину агрегированного маршаллианского излишка при уровне агрегированного потребления x (обозначим эту величину через $S(x)$). Тогда $S(x)$ — это интеграл от разности обратной функции спроса и функции предельных издержек отрасли:

$$S(x) = S_o + \int_0^x \left[P(s) - C'(s)\right]ds, \qquad (10.E.5)$$

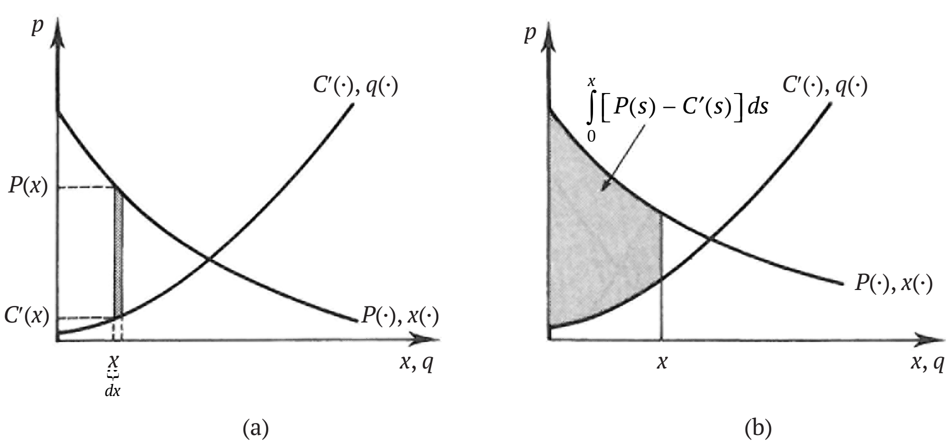


Рис. 10.E.2. (a) Дифференциально малое изменение маршаллианского излишка. (b) Маршаллианский излишек при уровне агрегированного потребления x

где S_0 — постоянная интегрирования, равная величине агрегированного излишка при отсутствии потребления или производства блага l (эта величина равна нулю, если $c_j(0) = 0$ для всех j). Выражение (10.E.5) проиллюстрировано на рис. 10.E.2(b): величина этого интеграла в точности равна площади, расположенной между кривыми агрегированного спроса и предложения блага l вплоть до объема этого блага, равного x.

Из (10.E.5) следует, что величина агрегированного маршаллианского излишка достигает максимума при уровне агрегированного потребления x^*, таком что $P(x^*) = C'(x^*)$, т. е. при уровне агрегированного потребления в конкурентном равновесии[19]. Это согласуется с утверждением 10.D.1, первой теоремой благосостояния, которая говорит о том, что равновесное распределение должно быть Парето-оптимальным.

Пример 10.E.1. *Влияние искажающего налогообложения на благосостояние*. Вернемся снова к исследованию влияния потоварного налога, начало которому было положено в примере 10.C.1. Предположим теперь, что власть, отвечающая за благосостояние общества, поддерживает сбалансированный бюджет и возвращает собранные налоги потребителям в виде паушальных трансфертов. Какое влияние такая схема налогов и трансфертов оказывает на благосостояние?[20]

Для ответа на этот вопрос удобно обозначить через $\left(x_1^*(t),\ \ldots,\ x_I^*(t),\ q_1^*(t),\ \ldots,\ q_J^*(t)\right)$ и $p^*(t)$ объемы равновесного потребления и производства блага l и уровень цен соответственно при ставке налога t. Заметим, что $\varphi_i'\left(x_i^*(t)\right) = p^*(t) + t$ для всех i и $c_j'\left(q_j^*(t)\right) = p^*(t)$ для всех j. Таким образом, положив $x^*(t) = \sum_i x_i^*(t)$ и $S^*(t) = S\left(x^*(t)\right)$, мы можем использовать (10.E.5) для того, чтобы выразить изменение агрегированного маршаллианского излишка в результате введения налога:

$$S^*(t) - S^*(0) = \int_{x^*(0)}^{x^*(t)} \left[P(s) - C'(s)\right] ds. \tag{10.E.6}$$

Выражение (10.E.6) отрицательно, поскольку $x^*(t) < x^*(0)$ (вспомните анализ, проведенный в примере 10.C.1) и $P(x) \geq C'(x)$ для всех $x \leq x^*(0)$, причем неравенство будет строгим при $x < x^*(0)$. Таким образом, общественное благосостояние достигает оптимального значения при $t = 0$. Потери благосостояния при $t > 0$ называются *чистыми потерями благосостояния от искажающего налогообложения* и равны площади затемненной области на рис. 10.E.3, которая называется *треугольником чистых потерь*.

[19] Чтобы убедиться в этом, сначала проверьте, что $S''(x) \leq 0$ для всех x, т. е. $S(\cdot)$ — вогнутая функция. Следовательно, $x^* > 0$ доставляет максимум агрегированного излишка тогда и только тогда, когда $S'(x^*) = 0$. Затем убедитесь, что $S'(x) = P(x) - C'(x)$ для всех $x > 0$.

[20] Эта задача тесно связана с задачей, рассмотренной в примере 3.I.1 (здесь мы точно так же, как и в этом примере, можем анализировать ситуацию, отвечая на вопрос, каковы издержки искажающего налогообложения по сравнению с паушальным налогом, приносящим некоторый доход, с точки зрения благосостояния. Чистые потери благосостояния в этом случае будут такими же). Однако предлагаемое здесь решение проблемы несколько расширяет рамки квазилинейной модели, анализируемой в примере 3.I.1, на случай, когда потребителей много и присутствует фирма. В конце этого раздела мы также коснемся подхода, основанного на теории н-репрезентативного потребителя, изложенной в разделе 4.D.

Обратите внимание, что поскольку $S^{*\prime}(t) = \left[P\left(x^*(t)\right) - C'\left(x^*(t)\right)\right]x^{*\prime}(t)$, то $S^{*\prime}(0) = 0$. Если взять в качестве начальной точки ситуацию, когда налог отсутствует, то влияние малого изменения налога на благосостояние будет равно нулю. Но как только ставка налога становится больше нуля, возникает предельный эффект, который строго отрицателен. И, действительно, так и должно быть: если мы начинаем двигаться из точки (внутреннего) максимума благосостояния, то небольшое смещение из оптимальной точки не оказывает влияния первого порядка на благосостояние.

Иногда условия задачи требуют проводить различие между компонентами агрегированного маршаллианского излишка, непосредственно связанными с потребителями, фирмами и налоговыми органами[21]. *Агрегированный потребительский излишек*, когда эффективная цена для потребителей равна $\hat{p}$, и, следовательно, агрегированное потребление — $x(\hat{p})$, определяется как валовая выгода потребителей от потребления блага l за вычетом совокупных расходов потребителей на это благо (последнее представляет собой издержки потребителей в терминах упущенного потребления блага-измерителя):

$$CS(\hat{p}) = \sum_{i=1}^{I} \varphi_i\left(x_i(\hat{p})\right) - \hat{p}x(\hat{p}).$$

Снова пользуясь тем, что уровень потребления оптимален, получим

$$CS(\hat{p}) = \int_0^{x(\hat{p})} P(s)ds - \hat{p}x(\hat{p}) = \int_0^{x(\hat{p})} \left[P(s) - \hat{p}\right]ds. \qquad (10.E.7)$$

Наконец, интеграл (10.E.7) равен[22]

$$CS(\hat{p}) = \int_{\hat{p}}^{\infty} x(s)ds. \qquad (10.E.8)$$

Таким образом, поскольку потребители сталкиваются с эффективной ценой $p^*(t) + t$ при налоге t, то изменение потребительского излишка в результате введения налога составляет

$$CS\left(p^*(t) + t\right) - CS\left(p^*(0)\right) = -\int_{p^*(0)}^{p^*(t)+t} x(s)ds. \qquad (10.E.9)$$

На рис. 10.E.3 уменьшение потребительского излишка соответствует площади (*dbcf*).

Агрегированная прибыль, или *агрегированный излишек производителя*, когда фирмы сталкиваются с эффективной ценой $\hat{p}$, равен

$$\Pi(\hat{p}) = \hat{p}q(\hat{p}) - \sum_{j=1}^{J} c_j\left(q_j(\hat{p})\right).$$

---

[21] Например, если множество активных потребителей блага l отличается от множества владельцев фирм, производящих это благо, то такое различие позволяет нам лучше понять влияние перераспределения налога при отсутствии трансфертов между владельцами фирм и потребителями.

[22] Это легко понять из геометрических соображений. Например, если $\hat{p} = p^*(0)$, то интегралы (10.E.7) и (10.E.8) оба равны площади (*daf*) на рис. 10.E.3. Формально эквивалентность можно установить, проведя замену переменных и интегрируя по частям (см. упражнение 10.E.2).

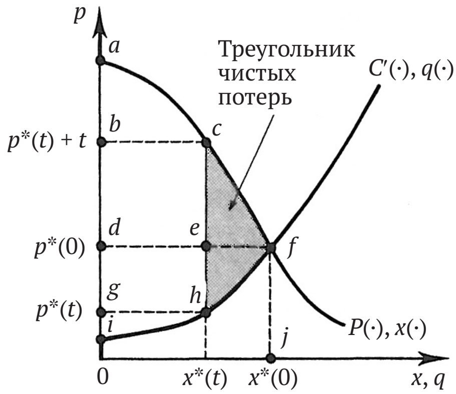


Рис. 10.E.3. Чистые потери благосостояния в результате искажающего налогообложения

Снова пользуясь оптимальностью распределения производства между фирмами, получаем[23]:

$$\Pi(\hat{p}) = \Pi_0 + \int_0^{q(\hat{p})} \left[\hat{p} - C'(s)\right] ds = \tag{10.E.10}$$

$$= \Pi_0 + \int_0^{\hat{p}} q(s)ds, \tag{10.E.11}$$

где Π_0 — постоянная интегрирования, равная прибыли при $q_j = 0$ для всех j ($\Pi_0 = 0$, если $c_j(0) = 0$ для всех j). Поскольку производители не платят налога, то они сталкиваются с ценой $p^*(t)$ при ставке налога t. Таким образом, изменение излишка производителя будет следующим:

$$\Pi\left(p^*(t)\right) - \Pi\left(p^*(0)\right) = -\int_{p^*(t)}^{p^*(0)} q(s)ds. \tag{10.E.12}$$

Уменьшение излишка производителя представлено на рис. 10.E.3 площадью (*gdfh*).

Наконец, *доход от налога* (налоговые поступления) равен $tx^*(t)$. На рис. 10.E.3 ему соответствует площадь (*gbch*).

Совокупные чистые потери благосостояния в результате введения налога равны суммарному уменьшению излишка потребителя и излишка производителя за вычетом дохода от налога. ■

Полученная здесь мера измерения благосостояния тесно связана с обсуждением н-репрезентативного потребителя в разделе 4.D. Как вы помните, там было показано, что если центральная власть перераспределяет богатство так, чтобы максимизировать функцию общественного благосостояния при данных ценах p, руководствуясь при этом правилом распределения богатства $(w_1(p, w), \ldots, w_I(p, w))$, то тогда существует н-репрезентативный потребитель с косвенной функцией полезности $v(p, w)$, спрос

[23] При $\hat{p} = p^*(0)$ оба интеграла, (10.E.10) и (10.E.11), равны площади (*idf*) на рис. 10.E.3. Эквивалентность этих двух интегралов формально можно установить с помощью замены переменных и интегрирования по частям.

которого $x(p,\ w)$ в точности равен агрегированному спросу (т. е. $x(p,\ w) = \sum_i x_i\left(p,\ w_i(p,\ w)\right)$), и полезность этого потребителя может быть использована в качестве меры общественного благосостояния. С учетом материала, изложенного в разделе 3.I, это означает, что мы можем оценить изменение благосостояния в результате изменения цены — дохода, сложив компенсирующую или эквивалентную вариацию для репрезентативного потребителя при изменении цены и изменение богатства этого потребителя (см. упражнение 3.I.12). Однако в квазилинейном случае компенсирующая и эквивалентная вариации совпадают и могут быть вычислены с помощью непосредственного интегрирования вальрасианской функции спроса репрезентативного потребителя, т. е. с помощью интегрирования функции агрегированного спроса. Следовательно, в примере 10.E.1 для репрезентативного потребителя компенсирующая вариация при изменении цены в точности равна изменению потребительского излишка (см. выражение (10.E.9)). С другой стороны, изменение богатства репрезентативного потребителя равно изменению агрегированной прибыли плюс доход от налога, возвращаемый потребителям. Таким образом, совокупное изменение благосостояния в результате введения схемы налог — трансферт, измеренное с помощью н-репрезентативного потребителя, в точности равно чистым потерям, вычисленным в примере 10.E.1[24].

Другим способом обоснования агрегированного излишка как меры благосостояния в квазилинейной модели является рассмотрение *потенциального Парето-улучшения*. Рассмотрим пример с налогом. Можно сказать, что изменение налога представляет собой *потенциальное* Парето-улучшение, если существует множество паушальных трансфертов в терминах блага-измерителя, которые могли бы улучшить положение всех потребителей, если бы были введены до изменения налога. В контексте квазилинейной экономики это выполнено тогда и только тогда, когда агрегированный излишек возрастает при изменении налога. Этот подход иногда называют *принципом компенсации*, поскольку он отвечает на вопрос, возможна ли в принципе при изменениях для тех, кто выигрывает, компенсация тем, кто проигрывает, так чтобы положение всех улучшилось. (См. также обсуждение в примере 4.D.2 и раздел 22.C.)

Завершим этот раздел замечанием: когда благо-измеритель представляет собой много благ, то предпринятый анализ благосостояния остается справедливым только в том случае, когда цены всех благ, отличных от l, не искажены, в том смысле что они равны истинным предельным полезностям этих благ и производственным издержкам. Тогда рынки этих благ должны быть конкурентными и все участники рынка должны сталкиваться с одной и той же ценой. Если это условие не выполнено, то издержки производства для производителей блага l не отражают реальных издержек для общества использования данных благ в качестве факторов производства. Подобная ситуация проиллюстрирована в упражнении 10.G.3.

10.F. Свободный вход и конкурентные равновесия в долгосрочном периоде

До сих пор мы считали, что множество фирм и их технологические возможности фиксированы. В этом разделе мы рассмотрим случай, когда потенциально возможно существование бесконечного числа фирм, каждая

[24] Мера чистых потерь благосостояния соответствует также мере, рассмотренной в примере 3.I.1 для случая одного потребителя, где мы неявно ограничивались анализом случая, когда облагаемое налогом благо характеризуется постоянными издержками в расчете на единицу потребления.

из которых имеет доступ к наиболее эффективной производственной технологии. Более того, фирмы могут входить на рынок или покидать его в зависимости от уровня прибыли. Такой сценарий, называемый *свободным входом*, хорошо описывает ситуацию, когда исследуются долгосрочные исходы рынка. Далее мы сформулируем и изучим концепцию долгосрочного конкурентного равновесия, а затем обсудим возможности использования этой концепции для анализа долгосрочных и краткосрочных эффектов сравнительной статики.

Итак, предположим, что каждая из бесконечного числа потенциальных фирм имеет доступ к технологии производства блага l, описываемой функцией издержек $c(q)$, где q — уровень выпуска блага l *отдельной* фирмой. Будем считать, что $c(0) = 0$, т. е. фирма получит нулевую прибыль, если просто примет решение свернуть свою деятельность, выбрав $q = 0$. Пользуясь терминологией раздела 5.B, можно сказать, что в долгосрочном периоде отсутствуют невозвратные издержки. Обозначим через $x(\cdot)$ функцию агрегированного спроса, а через $P(\cdot)$ — обратную функцию спроса.

В долгосрочном конкурентном равновесии нам нужно определить не только цену и уровни выпуска для всех фирм, но также и количество фирм, действующих в отрасли. В рамках предположения об идентичности фирмы мы ограничимся рассмотрением только таких равновесий, в которых все работающие фирмы производят один и тот же уровень выпуска. Поэтому долгосрочное конкурентное равновесие будет описываться набором (p, q, J), содержащим цену p, выпуск каждой отдельной фирмы q и целое число J, соответствующее числу фирм, работающих в отрасли (соответственно, совокупный выпуск отрасли составляет $Q = Jq$)[25]. Центральную роль в определении числа действующих на рынке фирм здесь играет предположение о свободе входа на рынок и выхода с него: фирма входит на рынок, если она может получить положительную прибыль по текущей рыночной цене, и выходит с рынка, если может заработать только отрицательную прибыль, производя при данной цене положительный уровень выпуска. Если все фирмы, присутствующие на рынке и потенциальные участники рынка, считают, что их действия не влияют на цены, то из этого следует, что все присутствующие на рынке фирмы должны иметь в любом конкурентном долгосрочном равновесии прибыль, в точности равную нулю. В противном случае либо не будет ни одной фирмы, желающей работать на данном рынке (если прибыль отрицательна), либо на рынок войдет бесконечно большое число фирм (если прибыль положительна). Таким образом, мы приходим к следующему определению равновесия, сформулированному в определении 10.F.1.

[25] Предположение о том, что все фирмы, работающие в отрасли, производят один и тот же уровень выпуска, без потери общности можно заменить предположением о строгой выпуклости функции издержек $c(\cdot)$ на множестве $(0, \infty]$. Тогда отображение предложения фирмы будет содержать не более одного положительного уровня выпуска при любой данной цене p.

Определение 10.F.1. При данной функции агрегированного спроса $x(p)$ и функции издержек $c(q)$ для каждой потенциально активной фирмы, такой что $c(0) = 0$, набор (p^*, q^*, J^*) составляет *долгосрочное конкурентное равновесие*, если

1) q^* является решением задачи $\max_{q \geq 0} p^* q - c(q)$ (условие максимизации прибыли),
2) $x(p^*) = J^* q^*$ (условие равенства спроса и предложения),
3) $p^* q^* - c(q^*) = 0$ (условие свободы входа).

Цена в долгосрочном равновесии — это такая цена, при которой спрос равен долгосрочному предложению, где долгосрочное предложение рассчитывается с учетом свободного входа и выхода с рынка. В частности, если $q(\cdot)$ — отображение предложения индивидуальной фирмы с функцией издержек $c(\cdot)$ и функцией прибыли $\pi(\cdot)$, то *отображение долгосрочного агрегированного предложения* определяется следующим образом[26]:

$$Q(p) = \begin{cases} \infty, \text{ если } \pi(p) > 0 \\ \{Q \geq 0: Q = Jq \text{ для некоторого целого } J \geq 0 \text{ и } q \in q(p)\}, \text{ если } \pi(p) = 0. \end{cases}$$

Если $\pi(p) > 0$, то каждая фирма готова предложить положительный объем выпуска и, следовательно, агрегированное предложение становится бесконечно большим. Если $\pi(p) = 0$ и $Q = Jq$ для некоторого $q \in q(p)$, то мы имеем такую ситуацию: на рынке действует J фирм, каждая из которых предлагает объем q, а остальные фирмы не работают (поскольку $c(0) = 0$, то такой выбор максимизирует прибыль в том числе и тех фирм, которые предпочитают ничего не производить). С учетом вышесказанного относительно отображения долгосрочного предложения, p^* является равновесной ценой в долгосрочном конкурентном равновесии тогда и только тогда, когда $x(p^*) \in Q(p^*)$[27].

Теперь проанализируем концепцию долгосрочного конкурентного равновесия. Рассмотрим сначала случай, когда функция издержек $c(\cdot)$ характеризуется постоянной отдачей от масштаба, т. е. $c(q) = cq$ при $c > 0$. Предположим также, что $x(c) > 0$. В этом случае условие (1) определения 10.F.1 говорит нам о том, что в любом долгосрочном конкурентном равновесии должно быть выполнено $p^* \leq c$ (в противном случае не существует такого уровня выпуска, который доставлял бы максимум прибыли). Но при любой такой цене агрегированное потребление строго положительно, поскольку

[26] В терминах основных свойств производственных множеств, описанных в разделе 5.B, отображение предложения в долгосрочном периоде представляет собой отображение предложения производственного множества Y^+, где Y — производственное множество индивидуальной фирмы (т. е. при функции издержек $c(\cdot)$), а Y^+ — его «аддитивное замыкание» (т. е. наименьшее множество, которое содержит Y и аддитивно: $Y^+ + Y^+ \subset Y^+$ (см. упражнение 5.B.4)).

[27] В частности, если (p^*, q^*, J^*) — долгосрочное равновесие, то из условия (1) определения 10.F.1 следует, что $q^* \in q(p^*)$, а из условия (3) следует, что $\pi(p^*) = 0$. Следовательно, по условию (2) $x(p^*) \in Q(p^*)$. И обратно: если $x(p^*) \in Q(p^*)$, то $\pi(p^*) = 0$ и существуют $q^* \in q(p^*)$ и J^*, такие что $x(p^*) = J^* q^*$. Таким образом, все три условия определения 10.F.1 выполнены.

$x(c) > 0$, и тогда согласно условию (2) имеем $q^* > 0$, а по условию (3) должно быть выполнено $(p^* - c)q^* = 0$. Таким образом, приходим к выводу, что $p^* = c$ и агрегированное потребление составляет $x(c)$. Однако следует заметить, что J^* и q^* однозначно *не определены*: подходят любые J^* и q^*, такие что $J^*q^* = x(c)$ и выполнены условия (1) и (2).

Такое долгосрочное равновесие проиллюстрировано на рис. 10.F.1. Отображение предложения индивидуальной фирмы $q(\cdot)$ — на рис. 10.F.1(a), а на рис. 10.F.1(b) продемонстрирована цена в долгосрочном равновесии и агрегированный выпуск, полученные как точка пересечения графика функции агрегированного спроса $x(\cdot)$ с кривой долгосрочного предложения

$$Q(p) = \begin{cases} \infty, & \text{если } p > c, \\ [0,\ \infty), & \text{если } p = c, \\ 0, & \text{если } p < c. \end{cases}$$

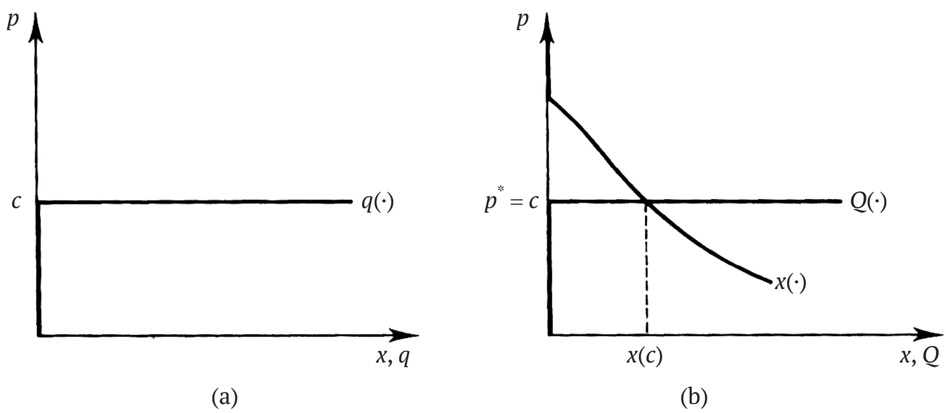


Рис. 10.F.1. Долгосрочное конкурентное равновесие при постоянной отдаче от масштаба. (a) Отображение предложения фирмы. (b) Долгосрочное равновесие

Обратимся теперь к случаю, когда функция издержек $c(\cdot)$ является возрастающей и строго выпуклой (т. е. производственная технология индивидуальной фирмы характеризуется строго убывающей отдачей от масштаба). Предположим также, что $x(c'(0)) > 0$. При такой функции издержек *долгосрочного конкурентного равновесия не существует*. Для того чтобы понять, почему это так, в первую очередь следует заметить, что если $p > c'(0)$, то $\pi(p) > 0$ и, следовательно, предложение в долгосрочном периоде будет бесконечно большим. С другой стороны, если $p \leq c'(0)$, то долгосрочное предложение равно нулю, тогда как $x(p) > 0$. Эта ситуация проиллюстрирована на рис. 10.F.2: график функции спроса $x(\cdot)$ не имеет точек пересечения с кривой долгосрочного агрегированного предложения

$$Q(p) = \begin{cases} \infty, & \text{если } p > c'(0), \\ 0, & \text{если } p \leq c'(0). \end{cases}$$

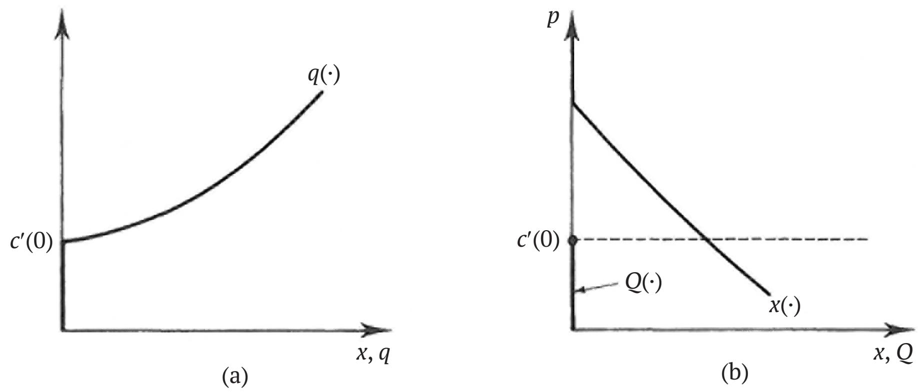


Рис. 10.F.2. Отсутствие долгосрочного конкурентного равновесия при строго выпуклых издержках. (a) Отображение предложения фирмы. (b) Нет пересечений долгосрочного предложения и спроса

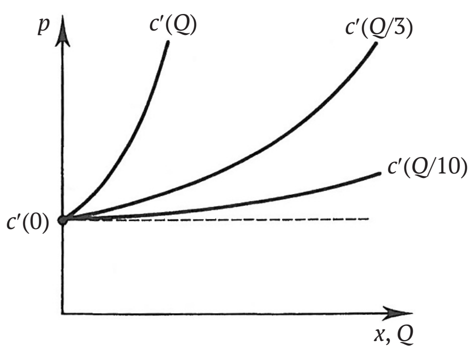


Рис. 10.F.3. Поведение предельных издержек отрасли в пределе при $J \to \infty$ в случае строго выпуклых издержек

На эту проблему можно взглянуть и с другой стороны. Как показано в упражнении 5.B.4, долгосрочное агрегированное производственное множество в вышеописанной ситуации является выпуклым, но не замкнутым. Это можно увидеть на рис. 10.F.3, где изображены графики функций предельных издержек отрасли, состоящей из J фирм, $c'(Q/J)$, при различных значениях J (в частности, при $J = 1$, $J = 3$ и $J = 10$). Обратите внимание, что с ростом J график этой функции предельных издержек приближается к графику функции предельных издержек при постоянных предельных издержках $c'(0)$ (*но никогда не достигает его*).

Вообще говоря, неудивительно, что для того, чтобы гарантировать существование равновесия с детерминированным количеством фирм, долгосрочная функция издержек должна демонстрировать строго положительный эффективный масштаб, т. е. *должен существовать строго положительный уровень выпуска* $\bar{q}$, *при котором достигается минимум средних издержек производства* (см. более подробное обсуждение концепции эффективного масштаба в разделе 5.D).

Предположим, в частности, что при функции издержек $c(\cdot)$ существует единственный эффективный масштаб $\bar{q} > 0$, и обозначим минимальный уровень средних издержек через $\bar{c} = c(\bar{q})/\bar{q}$. Предположим также, что $x(\bar{c}) > 0$. Если в долгосрочном равновесии (p^*, q^*, J^*) выполнено $p^* > \bar{c}$, то $p^*\bar{q} > \bar{c}\,\bar{q}$, и поэтому $\pi(p^*) > 0$. Таким образом, в любом долгосрочном равновесии должно быть выполнено: $p^* \le \bar{c}$. С другой стороны, если $p^* < \bar{c}$, то $x(p^*) > 0$, но поскольку $p^*q - c(q) = p^*q - (c(q)/q)q \le (p^* - \bar{c})q < 0$ для всех $q > 0$, то фирма получает отрицательную прибыль при любом положительном уровне выпуска. Таким образом, цена $p^* < \bar{c}$ также не может быть равновесной. Следовательно, в любом долгосрочном равновесии имеем: $p^* = \bar{c}$. Более того, если $p^* = \bar{c}$, то предложение всех фирм, действующих на рынке, должно быть равно $q^* = \bar{q}$ (это единственный строго положительный уровень выпуска, при котором фирма получает неотрицательную прибыль), а равновесное число действующих фирм тогда составляет $J^* = x(\bar{c})/\bar{q}$[28]. Подобное равновесие проиллюстрировано на рис. 10.F.4. Отображение долгосрочного агрегированного предложения имеет вид

$$Q(p) = \begin{cases} \infty, & \text{если } p > \bar{c}, \\ \{Q \ge 0 : Q = J\bar{q} \text{ для некоторого целого } J \ge 0\}, & \text{если } p = \bar{c}, \\ 0, & \text{если } p < \bar{c}. \end{cases}$$

Обратите внимание, что равновесная цена и агрегированный выпуск будут в точности такими же, как если бы фирмы имели технологию с постоянной отдачей от масштаба и издержками производства единицы выпуска, равными $\bar{c}$.

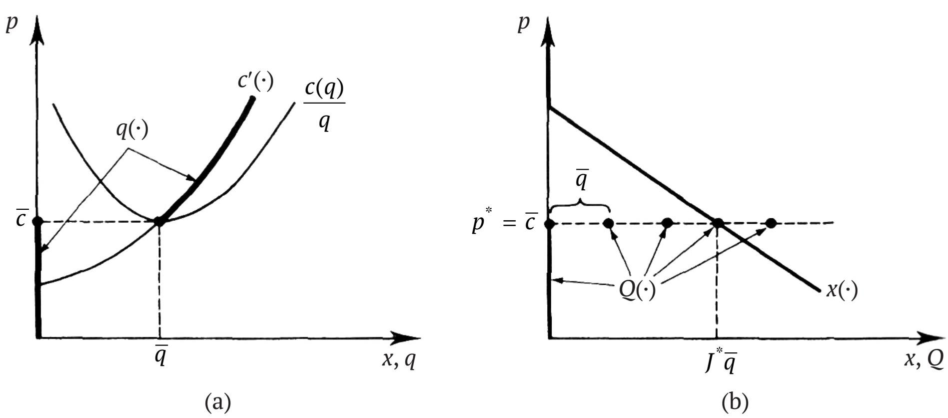


Рис. 10.F.4. Долгосрочное конкурентное равновесие, когда средние издержки характеризуются строго положительным эффективным масштабом. (a) Отображение предложения фирмы. (b) Долгосрочное равновесие

[28] Обратите внимание, что когда функция $c(\cdot)$ дифференцируема, то из условия (1) определения 10.F.1 следует, что $c'(q^*) = p^*$, тогда как из условия (3) получаем $p^* = c(q^*)/q^*$. Таким образом, *необходимое* условие существования равновесия имеет вид $c'(q^*) = c(q^*)/q^*$. А это и есть условие того, что q^* является критической точкой средних издержек (продифференцируйте выражение $c(q)/q$ и воспользуйтесь упражнением 5.D.1). В случае когда средние издержки $c(q)/q$ имеют U-образную форму (т. е. не имеют других критических точек, отличных от точки глобального минимума, как показано на рис. 10.F.4), отсюда следует, что $q^* = \bar{q}$ и, соответственно, $p^* = \bar{c}$ и $J^* = x(\bar{c})/\bar{q}$. Следует заметить, однако, что доказательство, приведенное в тексте, верно и без данной предпосылки относительно формы кривой средних издержек.

Следует отметить несколько моментов относительно равновесия, представленного на рис. 10.F.4. Во-первых, если эффективный масштаб операций достаточно велик по сравнению с величиной рыночного спроса, то может оказаться, что равновесное число фирм, действующих на рынке, мало. В этом случае естественно возникает вопрос: насколько здесь уместна предпосылка о том, что цены принимаются заданными (например, если $J^* = 1$)? Действительно, в этой ситуации надо учитывать рыночную власть фирмы (см. подробнее главу 12).

Во-вторых, спрос при цене $\bar{c}$, $x(\bar{c})$, должен быть равен целому числу, умноженному на $\bar{q}$. Если это не так, то долгосрочного равновесия не существует, поскольку кривая спроса и кривая долгосрочного предложения не пересекутся[29]. Отсутствие конкурентного равновесия в данном случае может быть обусловлено теми же причинами, которые мы уже упоминали в разделе 10.C (мелким шрифтом): технологии производства в долгосрочном периоде могут быть невыпуклыми.

Однако когда эффективный масштаб фирмы мал относительно размера рынка в целом, то о «проблеме целочисленности» можно не беспокоиться. Действительно, рассмотрев олигополистические рынки в главе 12, мы увидим, что когда эффективные масштабы в этом смысле малы, то равновесная цена при олигополии близка к $\bar{c}$, равновесной цене, которую мы бы получили, если бы просто проигнорировали ограничение, что число фирм J^* должно быть целым. Интуитивно это можно объяснить так: в случае когда эффективный масштаб мал, в отрасли довольно много фирм, и поэтому в равновесии, хотя и не строго конкурентном, цена близка к $\bar{c}$. Таким образом, если эффективный масштаб мал относительно размера рынка (измеряемого величиной $x(\bar{c})$), то, проигнорировав проблему целочисленности и считая, что фирмы принимают цены заданными, мы получим результат, близкий к верному.

В-третьих, когда равновесие существует, как показано на рис. 10.F.4, то равновесный исход максимизирует агрегированный маршаллианский излишек, а следовательно, является Парето-оптимальным. Действительно, как видно из рис. 10.F.4, агрегированный излишек в рассматриваемом равновесии равен

$$\max_{x \geq 0} \int_0^x P(s)ds - \bar{c}x,$$

[29] Однако можно рассмотреть и промежуточный вариант, когда, в отличие от постоянной отдачи (где любой масштаб эффективен) и случая единственного эффективного масштаба, существует целый диапазон эффективных масштабов $[\bar{q}, \bar{\bar{q}}]$ (т. е. кривая средних издержек имеет «плоское дно»). В этом случае проблема целочисленности уже так остро не стоит. Для того чтобы долгосрочное конкурентное равновесие существовало, теперь требуется только, чтобы существовало такое $q \in [\bar{q}, \bar{\bar{q}}]$, чтобы $x(\bar{c})/q$ было целым числом. Безусловно, с ростом интервала $[\bar{q}, \bar{\bar{q}}]$ возрастают не только шансы существования долгосрочного равновесия, но и вероятность того, что равновесное число фирм будет неоднозначно (например, в случае когда имеет место множественность равновесий с различным числом фирм).

максимальному значению агрегированного излишка, в случае когда фирмы имеют функцию издержек $\bar{c}q$. Но поскольку $c(q) \geq \bar{c}q$ для всех q, то это должна быть наибольшая достижимая величина агрегированного излишка при фактической функции издержек $c(\cdot)$, т. е.

$$\max_{x>0} \int_0^x P(s)ds - \bar{c}x \geq \int_0^{\hat{x}} P(s)ds - Jc(\hat{x}/J)$$

для всех $\hat{x}$ и J. Этот факт иллюстрирует проблему, которую мы обсуждали в конце раздела 10.D: первая теорема благосостояния остается справедливой, даже если отказаться от предпосылки о выпуклости индивидуальных производственных множеств (мы докажем это для довольно общего случая в главе 16).

Сравнительная статика в краткосрочном и долгосрочном периодах

Хотя в долгосрочном периоде фирмы могут входить на рынок и уходить с него в ответ на изменение возможностей получения прибыли, такие изменения могут потребовать времени. Например, уходя из отрасли, фирма может закрыть фабрики, сократить штат работников, продать оборудование и т. д. Может быть, даже потребуется заплатить сторонней фирме, чтобы организовать работу, пока не найдется подходящий покупатель на завод и оборудование. Поэтому, исследуя с помощью сравнительной статики влияние шоков на рынок, важно провести различие между долгосрочными и краткосрочными эффектами.

Предположим, например, что мы находимся в точке долгосрочного равновесия с J^* фирмами, действующими на рынке, каждая из которых производит q^* единиц выпуска. Пусть возникает шок со стороны спроса (аналогично можно рассмотреть шок предложения). В краткосрочном периоде организовать фирму и войти с ней на рынок может оказаться просто невозможно, поэтому по крайней мере на протяжении некоторого периода времени на рынке по-прежнему будет только J^*. Более того, эти J^* фирм могут столкнуться с краткосрочной функцией издержек $c_S(\cdot)$, которая отличается от долгосрочной функции издержек $c(\cdot)$, так как в краткосрочном периоде уровень использования некоторых факторов производства может быть фиксирован. Например, долгосрочная функция издержек фирмы может иметь вид

$$c(q) = \begin{cases} K + \psi(q), & \text{если } q > 0, \\ 0, & \text{если } q = 0, \end{cases} \qquad (10.F.1)$$

где $\psi(0) = 0$, $\psi'(q) > 0$ и $\psi(q)'' > 0$. Однако в краткосрочном периоде фирме, действующей на рынке, может оказаться довольно сложно покрыть фиксированные издержки, если она выберет $q = 0$. Поэтому в краткосрочном периоде функция издержек фирмы будет следующей:

$$c_S(q) = K + \psi(q) \quad \text{для всех } q \geq 0. \qquad (10.F.2)$$

Либо $c(q)$ может представлять собой функцию издержек технологии с несколькими факторами производства, и в краткосрочном периоде фирма может не иметь возможности варьировать уровень использования некоторых факторов производства (см. обсуждение этого вопроса в разделе 5.B, а также в качестве иллюстрации упражнения 10.F.5 и 10.F.6.)

Всякий раз, когда различие между краткосрочным и долгосрочным периодами оказывается значимым, *анализ сравнительной статики влияния шоков спроса в краткосрочном периоде* лучше всего проводить, считая, что в конкурентном равновесии на рынке действует J^* фирм, каждая из которых имеет функцию издержек $c_S(\cdot)$, а функцию спроса использовать новую. Таким образом, используется концепция равновесия, рассмотренная в разделе 10.C, в предположении, что функции издержек фирм имеют вид $c_S(\cdot)$. Тогда как для проведения *анализа сравнительной статики в долгосрочном периоде* следует применять концепцию долгосрочного равновесия (т. е. при свободе входа) при новой функции спроса и долгосрочной функции издержек $c(\cdot)$.

Пример 10.F.1. *Анализ сравнительной статики в краткосрочном и долгосрочном периодах при фиксированных издержках, которые в краткосрочном периоде невозвратны.* Предположим, что долгосрочная функция издержек $c(\cdot)$ описывается условием (10.F.1), а в краткосрочном периоде фиксированные издержки K являются невозвратными, т. е. функция издержек $c_S(\cdot)$ задается соотношением (10.F.2). Функция агрегированного спроса первоначально имеет вид $x(\cdot, \alpha_0)$, и в долгосрочном равновесии в отрасли функционирует J_0 фирм, каждая из которых производит $\bar{q}$ единиц готовой продукции (эффективный масштаб при функции издержек $c(\cdot)$), а равновесная цена равна $p^* = \bar{c} = c(\bar{q})/\bar{q}$. Это равновесие проиллюстрировано на рис. 10.F.5.

Предположим теперь, что график функции спроса сдвигается так, как показано на рис. 10.F.5, и новая функция спроса имеет вид $x(\cdot, \alpha_1)$. Краткосрочное равновесие характеризуется пересечением графика этой функции спроса с графиком отображения предложения отрасли, состоящей из J_0 фирм, каждая из которых имеет краткосрочную функцию издержек $c_S(\cdot)$. Отображение агрегированного предложения

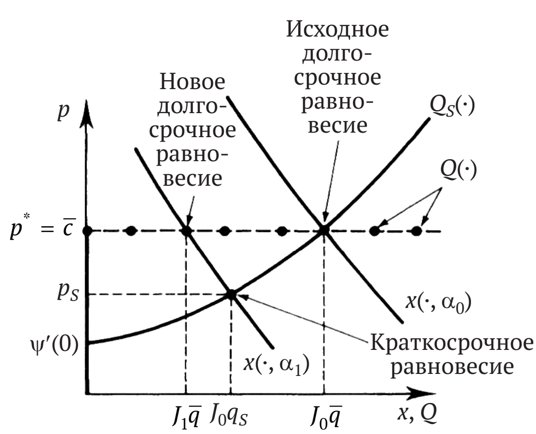


Рис. 10.F.5. Сравнительная статика в краткосрочном и долгосрочном периодах для ситуации из примера 10.F.1

в краткосрочном периоде на рисунке отмечено как $Q_S(\cdot)$. Таким образом, в краткосрочном периоде шок спроса приводит к падению цены до уровня p_S, а выпуск отдельной фирмы снижается до уровня q_S. Прибыль фирм также сокращается: поскольку $p_s < \bar{c}$, то действующие на рынке фирмы в краткосрочном периоде теряют деньги.

Однако в долгосрочном периоде в ответ на уменьшение спроса фирмы уходят с рынка, и поэтому число фирм падает до уровня $J_1 < J_0$, причем каждая фирма имеет уровень выпуска $\bar{q}$. Цена возвращается к уровню $p^* = \bar{c}$, агрегированное потребление составляет $x(\bar{c}, \alpha_1)$, и все фирмы на рынке по-прежнему получают нулевую прибыль. Новое долгосрочное равновесие также проиллюстрировано на рис. 10.F.5. ■

Такое разделение динамических аспектов на два периода хотя и удобно в качестве первого приближения, но все-таки считается довольно грубым. Зачастую разумнее полагать, что существует несколько различных краткосрочных периодов, соответствующих различным уровням корректировки издержек: в очень коротком периоде производственные возможности могут быть полностью фиксированными; в среднем периоде некоторые факторы можно откорректировать, тогда как другие — нет. Вероятно, вход и выход имеют место только в «очень долгосрочном периоде». Более того, в рамках рассмотренной нами методологии краткосрочный и долгосрочный периоды трактуются в отрыве друг от друга. Этот подход не учитывает, например, возможности межпериодного замещения для потребителей, когда завтра ожидается, что цена товара будет отличной от сегодняшней (межпериодное замещение может играть особо значимую роль в очень коротких периодах, когда тот факт, что многие производственные решения не могут быть изменены, может вызвать повышенную чувствительность цен к шокам спроса).

Однако это не следует рассматривать как изъян конкурентной модели как таковой. Указанные факторы наиболее остро проявляются только при наиболее радикальных методологических упрощениях, которые мы здесь рассматриваем. Корректное моделирование этих проблем требует построения моделей, где динамика присутствует в явном виде, а ожидания играют центральную роль. В главе 20 мы исследуем такие динамические модели конкурентных рынков довольно подробно. Но тем не менее предложенное здесь простое разделение на два периода (долгосрочный и краткосрочный) зачастую очень удобно в качестве отправной точки анализа.

10.G. Заключительные замечания об анализе частичного равновесия

В принципе анализ Парето-оптимальных исходов и конкурентных равновесий требует одновременного рассмотрения всей экономики в целом (к этой задаче мы приступим в части IV). Частичный анализ можно трактовать как некоторое удобное упрощение по двум причинам. С точки зрения позитивной теории он позволяет определить равновесный исход на конкретном изучаемом рынке отдельно от других рынков. С нормативной точки зрения он позволяет использовать агрегированный маршаллианский излишек как меру благосостояния, который во многих интересующих нас случаях можно представить площадью между кривыми агрегированного спроса и предложения.

В модели, рассмотренной в разделах 10.C–10.F, справедливость обоих этих упрощений неявно базируется на двух предпосылках: во-первых, на предпосылке о том, что цены всех товаров, отличных от рассматриваемого, остаются фиксированными; во-вторых, предполагается, что эффект богатства на анализируемом рынке равен нулю. В этом разделе мы внимательнее изучим эти предположения (см. также пример, иллюстрирующий рамки анализа частичного равновесия, в разделе 15.E).

Предположение о том, что цены всех благ, за исключением рассматриваемого (скажем, блага l), остаются фиксированными, весьма существенно для ограничения нашего позитивного и нормативного анализа рынком одного блага. В разделе 10.B мы обосновали это предположение, исходя из того что рынок блага l мал и оказывает незначительное влияние на остальные рынки. Однако это не единственно возможное обоснование. Например, из теоремы о невозможности замещения (см. приложение A к главе 5) следует, что цены всех остальных благ останутся неизменными, если благо-измеритель является единственным первичным (т. е. не производимым) фактором производства, все производимые блага за исключением блага l производятся с помощью технологии с постоянной отдачей от масштаба, где благо-измеритель и производимые товары, отличные от l, используются в качестве факторов производства, и отсутствует совместное производство[30].

Однако даже в том случае, когда мы не можем считать все остальные цены фиксированными, иногда можно применять обобщенный анализ частичного равновесия на отдельном рынке. Зачастую нас интересует не отдельный рынок, а некоторая группа товаров, тесно взаимосвязанных друг с другом либо с точки зрения вкуса потребителей (классическим примером являются чай и кофе), либо с точки зрения технологии фирм. В этом случае невозможно корректно анализировать только один рынок, предполагая остальные цены фиксированными, поскольку важную роль играет *одновременное* определение *всех* цен в данной группе. Но тем не менее, если можно считать, что на цены благ, не относящихся к рассматриваемой группе, изменения на рынках товаров из данной группы не оказывают влияния, и если для товаров, принадлежащих данной группе, отсутствует

[30] Простым примером такой ситуации является случай, когда все производимые блага, отличные от l, производятся непосредственно из блага-измерителя в соответствии с технологией с постоянной отдачей от масштаба. В этом случае равновесная цена каждого из этих благ равна объему блага-измерителя, который должен быть использован в качестве фактора в данном производстве на единицу производимого выпуска. Вообще говоря, цены производимых благ, отличных от l, останутся неизменными в условиях теоремы об отсутствии замещения, поскольку все эффективные производственные векторы могут быть получены из единственного множества техник. В любом равновесии цена каждого производимого блага, отличного от l, должна быть равна объему блага-измерителя, необходимому для производства единицы данного блага в эффективной производственной технике и в том случае, если благо-измеритель непосредственно используется в качестве фактора производства и если факторами производства выступают производимые блага, отличные от l, которые, в свою очередь, произведены с использованием блага-измерителя (или с использованием других благ, которые сами произведены с помощью блага-измерителя, и т. д.).

эффект богатства, то мы можем во многом опираться на анализ, представленный в разделах 10.C–10.F.

Действительно, предположим, что группа состоит из M благ, и пусть $x_i \in \mathbb{R}^M_+$ и $q_j \in \mathbb{R}^M$ — векторы потребления и производства этих M благ. Каждый потребитель имеет функцию полезности вида

$$u_i(m_i,\ x_i) = m_i + \varphi_i(x_i),$$

где m_i — потребление блага-измерителя (т. е. совокупные расходы на товары, не принадлежащие рассматриваемой группе). Функции издержек фирм имеют вид $c_j(q_j)$. При такой спецификации остаются справедливыми без изменения многие базовые результаты, полученные в предыдущем разделе (как правило, это вопрос просто переинтерпретации векторов x_i и q_j). В частности, результаты, касающиеся единственности равновесия и его независимости от первоначального распределения, рассмотренные в разделе 10.C, по-прежнему верны (см. упражнение 10.G.1), а также и теоремы благосостояния, сформулированные в разделе 10.D. Однако возможность анализировать изменение благосостояния с помощью площади между кривыми спроса и предложения теперь гораздо более ограничена, поскольку нельзя не учитывать перекрестные эффекты между рынками с взаимосвязанными ценами[31]. (В упражнениях 10.G.3–10.G.5 вас просят рассмотреть некоторые аспекты этого вопроса.)

С другой стороны, предпосылка об отсутствии эффекта богатства для блага l играет решающую роль при ответе на вопрос, насколько обоснован анализ благосостояния, подобный тому, который мы проводили в данной главе. В отсутствие этой предпосылки, как мы увидим в части IV, Парето-оптимальное распределение не может быть определено независимо от конкретного распределения богатства, и, как мы уже видели в разделе 3.I, потребительский излишек, вычисленный с помощью функций вальрасианского спроса, не может считаться корректной мерой компенсирующей и эквивалентной вариаций (для вычисления которых используются функции хиксианского спроса) в общем случае. Однако предпосылка об отсут-

---

[31] Случай, когда анализ рынка одного блага l по-прежнему абсолютно корректен, если функции полезности и издержек имеют вид

$$u_i(m_i,\ x_i) = m_i + \varphi_{li}(x_{li}) + \varphi_{-l,i}(x_{-l,i})$$

и

$$c_j(q_j) = c_{lj}(q_{lj}) + c_{-l,j}(q_{-l,j}),$$

где $x_{-l,i}$ и $q_{-l,j}$ — векторы потребления и производства благ, принадлежащих рассматриваемой группе, но отличных от l. При такой аддитивной сепарабельности по благу l рынки благ данной группы, отличных от l, не оказывают влияния на равновесную цену на рынке блага l. Благо l, по сути, не зависит от группы, и мы можем трактовать такую изолированность данного рынка аналогично тому, как это делали в предыдущих разделах. (В действительности нам даже нет необходимости вводить предположение о том, что на остальных рынках, принадлежащих рассматриваемой группе, цены остаются неизменными. То, что происходит на этих рынках, никак не сказывается на анализе равновесия и благосостояния для блага l.) См. также упражнение 10.G.2.

ствии эффектов богатства гораздо менее критична для проведения позитивного анализа (поиска равновесия, анализа сравнительной статики и т. д.). Даже при наличии эффекта богатства аппарат, основанный на анализе спроса и предложения, по-прежнему может быть весьма полезен в рамках позитивной теории. Например, поведение фирм при этом никак не меняется. С другой стороны, потребители имеют функцию спроса, которая при фиксированных ценах остальных благ теперь зависит только от цены блага l и богатства. Если уровень богатства определяется первоначальным запасом и владением акциями фирм, то мы можем трактовать богатство само по себе как функцию от цены блага l (напомним, что цены всех остальных благ предполагаются фиксированными), и поэтому мы опять можем представить спрос как функцию только от цены данного блага. Формально анализ сводится к описанному в разделе 10.C: равновесие на рынке блага l характеризуется пересечением кривых спроса и предложения[32].

Литература

Marshall A. (1920). *Principles of Economics*. New York: Macmillan.

Stigler G. (1987). *The theory of price*, 4th ed. New York: Macmillan.

Vivex X. (1987). Small income effects: A Marshallian theory of consumer surplus and downward sloping demand// *Review of Economic Studies* **54**: 87–103.

Упражнения

10.B.1[B]**.** Концепцию, сформулированную в определении 10.B.2, иногда также называют *сильной Парето-эффективностью*. Исход *слабо Парето-эффективен*, если не существует другого допустимого распределения, в котором положение *всех* индивидов *строго* лучше.

a) Покажите, что если исход сильно Парето-эффективен, то он также и слабо Парето-эффективен.

b) Покажите, что если предпочтения всех потребителей непрерывны и строго монотонны, то две данные концепции Парето-эффективности эквивалентны для любого допустимого[33] распределения. Для простоты будем считать, что $X_i = \mathbb{R}^L_+$ для всех i.

---

[32] Однако наличие эффектов богатства может привести и к некоторым новым интересным явлениям со стороны спроса. Один из таких феноменов — *кривая спроса с положительным наклоном на некотором интервале цен.* Такое может произойти, если потребители имеют запас блага l, поскольку тогда увеличение цены этого блага приводит к росту богатства потребителей. Это в результате может привести к увеличению чистого спроса на благо l, даже если это благо является нормальным.

[33] В тексте упражнения опущена предпосылка о внутренности распределения, которая есть в оригинальном тексте, в соответствии с правкой задач в решебнике Hara Ch., Segal I., Tadelis S., *Solution Manual for Microeconomic Theory A. Mas-Colell, M. Whinston and J. Green*. Oxford University Press, 1997. — *Примеч. пер.*

c) Приведите пример ситуации, когда две данные концепции неэквивалентны. Почему в пункте (b) так важна предпосылка о строгой монотонности предпочтений?

10.B.2[A]**.** Покажите, что если распределение $\left(x_1^*, \ldots, x_I^*, y_1^*, \ldots, y_J^*\right)$ и вектор цен $p^* >> 0$ образуют конкурентное равновесие, то распределение $\left(x_1^*, \ldots, x_I^*, y_1^*, \ldots, y_J^*\right)$ и вектор цен αp^* также образуют конкурентное равновесие при любом числе $\alpha > 0$.

10.C.1[B]**.** Пусть предпочтения потребителя i можно представить функцией полезности вида $u_i(x_{1i}, \ldots, x_{Li}) = \sum_l \log(x_{li})$ (предпочтения Кобба — Дугласа).

a) Выведите функцию спроса потребителя на благо l. Каков эффект богатства?

b) Рассмотрим теперь последовательность ситуаций, в которых мы пропорционально увеличиваем как число благ, так и богатство потребителя. Что можно сказать об эффекте богатства в пределе?

10.C.2[B]**.** Рассмотрим квазилинейную модель, представленную в разделе 10.C, для случая двух благ, одного потребителя и одной фирмы (т. е. $I = 1$ и $J = 1$). Первоначальный запас блага-измерителя равен $\omega_m > 0$, а первоначальный запас блага l отсутствует. Пусть потребитель имеет квазилинейную функцию полезности вида $\varphi(x) + m$, где $\varphi(x) = \alpha + \beta \ln x$ и $(\alpha, \beta) >> 0$. Пусть функция издержек фирмы имеет вид $c(q) = \sigma q$, где $\sigma > 0$. Предположим также, что потребитель получает всю прибыль фирмы. И фирма и потребитель принимают цены заданными. Пронормируем цену блага m, положив ее равной 1, и обозначим цену блага l через p.

a) Выпишите условия первого порядка задач потребителя и фирмы.

b) Найдите равновесную цену и уровень выпуска блага l. Как эти величины зависят от параметров α, β и σ?

10.C.3[B]**.** Пусть некий центральный орган управляет J фирмами, производящими благо l из блага-измерителя в соответствии с дифференцируемыми выпуклыми функциями издержек $c_j(q_j)$. Обозначим через $C(q)$ минимальный уровень издержек при производстве q единиц агрегированного выпуска, т. е.

$$C(q) = \min_{(q_1, \ldots, q_J) \geq 0} \sum_{j=1}^{J} c_j(q_j)$$

$$\text{при } \sum_{j=1}^{J} q_j \geq q.$$

a) Выпишите условия первого порядка данной задачи минимизации издержек.

b) Покажите, что для распределения минимизирующего издержки выпуска $\left(q_1^*, \ldots, q_J^*\right)$ справедливо $C'(q) = c_j'(q_j^*)$ для всех j, где $q_j^* > 0$ (т. е. предельные издержки при уровне агрегированного выпуска q равны предельным издержкам каждой отдельной фирмы, вычисленным при оптимальном распределении производства уровня выпуска q).

c) Покажите, что если все фирмы максимизируют прибыль, сталкиваясь с ценой $p = C'(q)$ (при цене блага-измерителя, равной 1), то выбираемый ими уровень выпуска дает в результате агрегированный выпуск, равный q. Таким образом, $C'(\cdot)$— функция, обратная функции предложения отрасли $q(\cdot)$.

10.C.4[B]**.** Пусть правительство должно распределить x единиц блага l между I потребителями, каждый из которых имеет квазилинейную функцию полезности вида $\varphi_i(x_i) + m_i$, где $\varphi_i(\cdot)$ — дифференцируемая возрастающая и строго вогнутая функция. Правительство хотело бы распределить благо l таким образом, чтобы достигался максимум суммы полезностей потребителей $\sum_i u_i$.

a) Выпишите задачу правительства и условия первого порядка.

b) Пусть $\gamma(x)$ — функция значения задачи правительства, и пусть $P(x) = \gamma'(x)$ — ее производная. Покажите, что если $\left(x_1^*, \ldots, x_I^*\right)$ — оптимальное распределение блага l при данном доступном его количестве x, то $P(x) = \varphi_i'(x_i^*)$ для всех i, где $x_i^* > 0$.

c) Покажите, что если все потребители максимизируют полезность при цене блага l, равной $P(x)$ (при цене блага-измерителя, равной 1), то агрегированный спрос на благо l в точности равен x. Таким образом, $P(\cdot)$ — функция, обратная функции агрегированного спроса $x(\cdot)$.

10.C.5[B]**.** Вычислите дифференциально малое изменение равновесной цены в ответ на дифференциально малое изменение налога для примера 10.C.1, применив теорему о неявной функции к системе уравнений (10.C.4)–(10.C.6).

10.C.6[B]**.** Пусть на совершенно конкурентном рынке вводится налог на покупку/продажу товара. Возможны два вида налога: *потоварный* налог, когда при покупке/продаже каждой единицы товара нужно заплатить в виде налога фиксированную величину, равную t (именно этот случай рассмотрен в тексте), и *пропорциональный* (адвалорный) налог, когда сумма, уплачиваемая в виде налога, является некоторой фиксированной долей τ от выручки продавца. Будем считать, что анализ частичного равновесия здесь применим.

a) Покажите, что при потоварном налоге цена, которую платит за товар потребитель, и объем покупок не зависят от того, кто платит налог — потребитель или производитель.

b) Покажите, что при пропорциональном налоге, вообще говоря, не будет иметь место результат, аналогичный результату пункта (a). Какой способ налогообложения (налогообложение потребителя или производителя) приведет к более высоким расходам на покупку товара для потребителя? Есть ли какие-то частные случаи, когда способ взимания пропорционального налога также не будет иметь значения?

10.C.7$^{\text{B}}$**.** Пусть на конкурентном рынке для потребителей введен пропорциональный (адвалорный) налог τ (см. определение в упражнении 10.C.6). Функция агрегированного спроса имеет вид $x(p) = Ap^{\varepsilon}$, где $A > 0$ и $\varepsilon < 0$, а функция агрегированного предложения — $q(p) = \alpha p^{\gamma}$, где $\alpha > 0$ и $\gamma > 0$. Вычислите изменение в процентном отношении издержек потребителя и выгоды производителя на единицу продаж для небольшого («предельного») налога. Введем обозначение: $\kappa = (1 + \tau)$. Будем считать, что здесь применим анализ частичного равновесия.

Вычислите эластичность равновесной цены по κ. Покажите, что при $\gamma = 0$ производители несут на себе все бремя налога, тогда как совокупные расходы потребителей на приобретение товара остаются неизменными, а при $\varepsilon = 0$ все бремя налога несут потребители. Что произойдет в случае, когда эластичности (по абсолютной величине) стремятся к бесконечности?

10.C.8$^{\text{B}}$**.** Рассмотрим отрасль, в которой действует J совершенно конкурентных фирм, производящих благо l. Каждая фирма имеет дифференцируемую функцию издержек вида $c(q, \alpha)$, которая строго выпукла по q, а α — экзогенный параметр, оказывающий влияние на издержки (это может быть некоторый технологический параметр или цена фактора производства). Предположим также, что $\partial c(q,\ \alpha)/\partial\alpha > 0$. Пусть $x(p)$ — дифференцируемая функция агрегированного спроса на благо l, причем $x'(\cdot) \leq 0$. Будем считать, что анализ частичного равновесия в данном случае применим.

Обозначим через $q^*(\alpha)$ и $p^*(\alpha)$ равновесный выпуск *одной* фирмы и равновесную цену соответственно при данном α.

a) Как изменится прибыль каждой фирмы при бесконечно малом увеличении α?

b) Приведите наиболее слабое достаточное условие в терминах предельных и средних издержек и (или) их производных, гарантирующее убывание равновесной прибыли при бесконечно малом увеличении α при любой функции спроса $x(\cdot)$, такой что $x'(\cdot) \leq 0$. Покажите также, что если это условие не выполняется, то существуют такие функции спроса, при которых прибыль с ростом α возрастает.

c) Проинтерпретируйте условие, полученное в пункте (b), в терминах условного спроса на фактор k, считая, что параметр α является ценой k-го фактора производства.

10.C.9$^{\text{B}}$**.** Пусть имеется J идентичных фирм, производящих благо l в соответствии с функцией издержек $c(w, q)$, где w — вектор цен факторов производства. Будем считать, что здесь применим анализ частичного равновесия. Покажите, что увеличение цены k-го фактора, w_k, приводит к уменьшению равновесной цены блага l тогда и только тогда, когда фактор k является *инфериорным*, т. е. если при фиксированных ценах факторов производства использование фактора k приводит к уменьшению уровня выпуска фирмы.

10.C.10$^{\text{B}}$**.** Рассмотрите рынок с функцией спроса $x(p) = \alpha p^{\varepsilon}$ и J фирмами, каждая из которых имеет функцию предельных издержек $c'(q) = \beta q^{\eta}$, где $(\alpha, \beta, \eta) >> 0$ и $\varepsilon < 0$. Найдите цену и уровень выпуска фирм в конкурентном равновесии. Проведите анализ сравнительной статики, исследовав влияние изменения параметров α и β на равновесные величины. Как полученные результаты зависят от параметров ε и η?

10.C.11$^{\text{B}}$**.** Пусть допустимо применение анализа частичного равновесия. Предположим, что фирмы 1 и 2 производят положительный уровень выпуска в конкурентном равновесии. Функция издержек фирмы j имеет вид $c(q, \alpha_j)$, где α_j — экзогенный технологический параметр. Если параметр α_1 отличается от параметра α_2 на бесконечно малую величину, то какова разница в прибыли фирм?

10.D.1$^{\text{B}}$**.** Докажите, что если функции $\varphi_i(\cdot)$ строго вогнуты, а функции издержек $c_j(\cdot)$ выпуклы, то оптимальный уровень потребления блага l, являющийся решением задачи (10.D.2), определен единственным образом. Отсюда следует, что оптимальный уровень агрегированного производства блага l также определен однозначно. Покажите, что если функции издержек $c_j(\cdot)$ строго выпуклы, то оптимальный индивидуальный уровень производства блага l в задаче (10.D.2) также определен единственным образом.

10.D.2$^{\text{B}}$**.** Найдите оптимальный уровень потребления и производства блага l в экономике, описанной в упражнении 10.C.2. Сравните полученный результат с равновесным уровнем, полученным в этом упражнении.

10.D.3$^{\text{B}}$**.** Рассмотрите квазилинейную экономику с двумя благами, описанную в разделе 10.D. Покажите, что любое распределение, являющееся решением задачи (10.D.6), Парето-оптимально и любое Парето-оптимальное распределение является решением задачи (10.D.6) при *некотором* выборе уровней полезности $\left(\bar{u}_2, \ \dots, \ \bar{u}_I\right)$.

10.D.4$^{\text{B}}$**.** Выпишите условия первого порядка для задачи (10.D.6) и сравните их с условиями (10.D.3)–(10.D.5).

10.E.1$^{\text{C}}$**.** Пусть в некоторой стране благо l производит $J_d > 0$ отечественных фирм и $J_f > 0$ зарубежных. Все отечественные фирмы имеют одинаковые выпуклые функции издержек производства блага l, $c_d(q_j)$, а все зарубежные фирмы — одинаковые выпуклые функции издержек $c_f(q_j)$. Будем считать, что здесь применим анализ частичного равновесия.

Правительство рассматриваемой страны предполагает ввести пошлину τ за каждую импортируемую единицу блага l, с тем чтобы максимизировать благосостояние своей страны, измеряемое маршаллианским излишком (т. е. суммой полезностей отечественных потребителей за вычетом издержек отечественных фирм).

a) Покажите, что если функция $c_f(\cdot)$ строго выпукла, то введение небольшой пошлины на импорт повысит благосостояние рассматриваемой страны.

b) Покажите, что если функция $c_f(\cdot)$ характеризуется постоянной отдачей от масштаба, то введение небольшой пошлины на импорт снизит благосостояние рассматриваемой страны.

10.E.2[B]**.** Потребительский излишек в случае, когда потребители сталкиваются с эффективной ценой $\hat{p}$, можно представить следующим образом:

$$CS(\hat{p}) = \int_0^{x(\hat{p})} \left[P(s) - \hat{p}\right] ds.$$

Докажите, что этот интеграл равен $CS(\hat{p}) = \int_{\hat{p}}^{\infty} x(s) ds$, введя замену переменных и применив интегрирование по частям.

10.E.3[C] (*задача налогообложения Рамсея*). Рассмотрите полностью сепарабельную квазилинейную модель с L благами, в которой каждый потребитель имеет функцию полезности вида $u_i(x_i) = x_{1i} + \sum_{l=2}^{L} \varphi_{li}(x_{li})$ и каждое благо $2, \ldots, L$ производится из блага 1 в соответствии с технологией с постоянной отдачей от масштаба, согласно которой из c_l единиц блага 1 можно произвести одну единицу блага l. Пусть все потребители изначально обладают запасом только блага-измерителя, блага 1, т. е. потребители являются чистыми продавцами блага 1 фирмам и чистыми покупателями благ $2, \ldots, L$.

Пусть спрос потребителя i на каждое благо $l \neq 1$ может быть записан в виде $x_{li}(p_l)$, т. е. спрос на благо l не зависит от богатства потребителя и цен всех остальных благ. Следовательно, мерой благосостояния может выступать сумма маршаллианских агрегированных излишков на $L - 1$ рынках товаров (за исключением рынка блага-измерителя) (см. подробное обсуждение этого вопроса в разделе 10.G и упражнении 10.G.2).

Предположим, правительство должно собрать R единиц блага 1 за счет (потоварных) налогов. Заметим, что такие налоги подразумевают налогообложение *сделок* по данному благу, а *не* индивидуального уровня потребления данного блага.

Обозначим через t_l налог (в единицах блага 1), который должен заплатить потребитель за каждую приобретенную единицу блага $l \neq 1$, а через t_1 — налог (в единицах блага 1), который потребители должны платить за каждую единицу блага 1, проданную фирме. Введем нормировку, положив цену блага 1 равной единице. Таким образом, при каждом выборе $t = (t_1, \ldots, t_L)$ потребитель платит в совокупности $c_l + t_l$ за каждую приобретенную единицу блага $l \neq 1$ и должен расстаться с $(1 + t_1)$ единицами блага 1 за каждую единицу блага 1, проданную фирме.

- **a)** Рассмотрите два возможных налоговых вектора, t и t'. Покажите, что если вектор t' таков, что $(c_l + t'_l) = \alpha(c_l + t_l)$ и $(1 + t'_1) = (1/\alpha)(1 + t_1)$ для некоторого числа $\alpha > 0$, то два данных множества налогов позволяют получить один и тот же налоговый сбор. Отсюда следует, что правительство может ограничиться рассмотрением таких налогов, при которых одно благо не подлежит налогообложению.
- **b)** Пусть благо 1 не облагается налогом (т. е. $t_1 = 0$). Каким условиям должны удовлетворять налоги на блага $2, \ldots, L$, если правительство стремится минимизировать потери благосостояния, вызванные налогообложением. Запишите полученные условия в терминах эластичности спроса на каждое благо.
- **c)** В каком случае ставки налога для всех благ должны быть равны? Какие блага в общем случае должны облагаться налогом по более высокой ставке? В каком случае оптимально облагать налогом только благо 1?

10.F.1$^{\mathrm{A}}$**.** Покажите, что если функция издержек $c(q)$ строго выпукла по q и $c(0) = 0$, то $\pi(p) > 0$ тогда и только тогда, когда $p > c'(0)$.

10.F.2$^{\mathrm{B}}$**.** Рассмотрите рынок с функцией спроса $x(p) = A - Bp$, где каждая потенциальная фирма имеет функцию издержек $c(q) = K + \alpha q + \beta q^2$, где $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

- **a)** Найдите цену, выпуск каждой фирмы, агрегированный выпуск и количество фирм в долгосрочном конкурентном равновесии. Как равновесные величины зависят от параметра A? Считайте, что ограничением целочисленности количества фирм можно пренебречь.
- **b)** Проанализируйте реакцию краткосрочного конкурентного равновесия на изменение параметра A, используя характеристику долгосрочного равновесия, полученную в пункте (а). Как изменение цены зависит от уровня параметра A в исходном равновесии? Что произойдет при $A \to \infty$? Как на этот результат влияет размер рынка?

10.F.3$^{\mathrm{B}}$**.** (Д. Пирс). Рассмотрим модель частичного равновесия, в которой каждая (потенциальная) фирма имеет долгосрочную функцию издержек $c(\cdot)$, где $c(q) = K + \varphi(q)$ при $q > 0$, причем $c(0) = 0$. Пусть

$\varphi'(q) > 0$ и $\varphi''(q) > 0$[34], и обозначим через $\overline{q}$ эффективный масштаб фирмы. Предположим также, что первоначально существует долгосрочное равновесие с J^* фирмами. Пусть правительство предполагает ввести два типа налогов: пропорциональный (адвалорный) налог τ (см. упражнение 10.C.6) на продажу блага, и налог T, который должна платить любая действующая на рынке фирма (причем фирма считается «действующей», если продает положительный объем блага). Если бы эти налоги могли приносить одинаковый объем дохода при первоначальном объеме продаж и количестве фирм, то какой бы налог позволил получить больший сбор, после того как отрасль перейдет в новое долгосрочное равновесие? (Считайте, что ограничением целочисленности количества фирм можно пренебречь и ставки налогов малы[35].)

10.F.4$^{\text{B}}$**.** (Дж. Панзар). Пусть технология производства единственного блага l с помощью многих факторов производства характеризуется дважды непрерывно[36] дифференцируемой функцией издержек $c(w, q)$, где $w = (w_1, \ldots, w_K)$ — вектор цен факторов производства, а q — объем выпуска блага l. При данных ценах факторов производства w обозначим через $\overline{q}(w)$ эффективный масштаб фирмы (будем считать, что он определен единственным образом)[37]. Пусть $\overline{q}(w) > 0$ при всех w. Обозначим также через $p_l^*(w)$ цену блага l в долгосрочном равновесии при ценах факторов производства w. Покажите, что функция $p_l^*(w)$ является неубывающей, однородной первой степени и вогнутой. (Считайте, что здесь применим анализ частичного равновесия и ограничением целочисленности фирм можно пренебречь.)

10.F.5$^{\text{C}}$**.** Пусть J фирм производят благо l из K факторов производства в соответствии с дифференцируемой функцией издержек $c(w, q)$, строго выпуклой по q. Пусть $x(p, \alpha)$ — дифференцируемая функция агрегированного спроса на благо l, причем $\partial x(p,\ \alpha)/\partial p < 0$ и $\partial x(p,\ \alpha)/\partial \alpha > 0$ (α — экзогенный параметр, влияющий на спрос). Функция $c(w, q)$ является функцией издержек, когда можно свободно менять объемы использования всех факторов производства, а в краткосрочном периоде объем использования фактора k фиксирован.

Предположим, что первоначально мы находимся в равновесии, где все факторы производства используются в оптимальном объеме, необходимом для производства уровня выпуска q^* при ценах факторов производства w. Обозначим через $z_k(w, q)$ условный спрос фирмы на фактор производства k, когда все факторы производства могут свободно варьироваться, $z_k^* = z_k(w,\ q^*)$.

[34] Знак производной исправлен в соответствии с правкой в решебнике. — *Примеч. пер.*
[35] Это замечание добавлено в соответствии с правкой в решебнике. — *Примеч. пер.*
[36] Выражение скорректировано в соответствии с правкой в решебнике. — *Примеч. пер.*
[37] Выражение в скобках добавлено в соответствии с правкой в решебнике. — *Примеч. пер.*

a) Покажите, что реакция фирмы на увеличение равновесной цены блага l будет более значительной в долгосрочном периоде, чем в краткосрочном.

b) Покажите, что отсюда следует, что тогда в долгосрочном равновесии малое увеличение параметра α оказывает меньшее влияние на цену p_l, чем в краткосрочном равновесии. Покажите также, что равновесный агрегированный уровень потребления блага l будет демонстрировать противоположную реакцию. (Считайте, что и в краткосрочном, и в долгосрочном равновесии количество фирм равно J.)

10.F.6[B]**.** Пусть технология производства некоторого блага описывается производственной функцией Кобба — Дугласа вида $f(z_1, z_2) = z_1^{\alpha} z_2^{1-\alpha}$, где $\alpha \in (0, 1)$, z_1 — объем использования капитала, а z_2 — объем использования труда. В долгосрочном периоде оба фактора являются переменными, однако в краткосрочном периоде объем использования капитала фиксирован. Функция спроса на продукцию, производимую отраслью, имеет вид $x(p) = a - bp$. Цены факторов производства описываются вектором (w_1, w_2). Найдите равновесную цену и агрегированный уровень производства и потребления в долгосрочном периоде. Найдите также функцию предложения отрасли в краткосрочном периоде, считая, что количество фирм и объем использования капитала фиксированы на уровне долгосрочного равновесия.

10.F.7[B]**.** Рассмотрите ситуацию, когда фирмы, действующие на рынке в краткосрочном периоде, могут увеличить объем использования фактора производства, но не могут его уменьшить. Покажите, что тогда кривая краткосрочных издержек будет иметь излом (т. е. будет недифференцируемой) в точке текущего (долгосрочного) равновесия. Проанализируйте вытекающие из этого факта следствия с точки зрения относительной вариабельности краткосрочных цен и объемов.

10.G.1[B]**.** Рассмотрите случай взаимосвязанных групп из M товаров. Пусть функция полезности потребителя i имеет вид $u_i(x_{1i}, \ldots, x_{Mi}) = m_i + \varphi_i(x_{1i}, \ldots, x_{Mi})$. Будем считать, что функции $\varphi_i(\cdot)$ дифференцируемы и строго вогнуты. Пусть функция издержек фирмы j, $c_j(q_{1j}, \ldots, q_{Mj})$, дифференцируема и выпукла.

Пронормируем цену блага-измерителя, положив ее равной 1. Выведите $(I + J + 1)M$ уравнений, характеризующих $(I + J + 1)M$ равновесных объемов потребления $\left(x_{1i}^*, \ldots, x_{Mi}^*\right)$, где $i = 1, \ldots, I$, выпуска $\left(q_{1j}^*, \ldots, q_{Mj}^*\right)$, где $i = 1, \ldots, J$, и цен $\left(p_1^*, \ldots, p_M^*\right)$. (*Подсказка*: выведите условия первого порядка задач потребителей и фирм и выпишите $M - 1$ условий уравновешенности рынков аналогично тому, как мы делали в случае рынка одного блага.) Покажите, что равновесные цены и объемы данных M благ не зависят от богатства потребителей, равновесный индивидуальный уровень потребления и уровень агрегированного производства определены единственным образом, а также покажите, что если функции $c_j(\cdot)$ строго выпуклы, то равновесный индивидуальный уровень производства также определяется единственным образом.

10.G.2[B]**.** Рассмотрите случай, когда функции $\varphi_i(\cdot)$ и $c_j(\cdot)$ в упражнении 10.G.1 сепарабельны по благу l (одному из благ в группе), т. е. $\varphi_i(\cdot) = \varphi_{li}(x_{li}) + \varphi_{-l,i}(x_{-l,i})$ и $c_j(\cdot) = c_{lj}(q_{lj}) + c_{-l,j}(q_{-l,j})$. Покажите, что в этом случае равновесную цену и уровень производства и потребления блага l можно определить независимо от остальных благ в группе. Покажите также, что при тех же предположениях, которые были сделаны в разделе 10.E при изучении рынка одного блага, изменения благосостояния в результате изменений на рынке этого блага можно оценить маршаллинаским агрегированным излишком для данного блага, т. е. $\sum_i \varphi_{li}(x_{li}) - \sum_j c_{lj}(q_{lj})$, который графически представляет собой площадь между кривыми спроса и предложения на благо l. Обратите внимание на следствие, вытекающее из данного результата в случае, когда имеет место сепарабельность по всем благам, т. е. $\varphi_i(\cdot) = \sum_l \varphi_{li}(x_{li})$ и $c_j(\cdot) = \sum_l c_{lj}(q_{lj})$.

10.G.3[B]**.** Рассмотрите экономику с тремя благами ($l = 1, 2, 3$), в которой каждый потребитель имеет предпочтения, описываемые функцией полезности $u(x) = x_1 + \varphi(x_2, x_3)$. Пусть имеется единственная фирма, производящая блага 2 и 3 из блага 1 в соответствии с функцией издержек $c(q_2, q_3) = c_2q_2 + c_3q_3$. Предположим, что рассматривается (бесконечно малое) изменение (потоварного) налога на одном из рынков, скажем рынке блага 2.

a) Покажите, что если на цену блага 3 налог не оказывает искажающего воздействия (т. е. $t_3 = 0$), то изменение агрегированного излишка, вызванное изменением налога, может быть описано только изменением площади между кривыми спроса и предложения на благо 2 при цене блага 3, фиксированной на первоначальном уровне.

b) Покажите, то если на рынке блага 3 первоначально $t_3 > 0$, то, используя меру благосостояния только для одного рынка, полученную в пункте (a), можно переоценить уменьшение агрегированного излишка, если благо 3 является заменителем блага 2, и, наоборот, неодооценить, если благо 3 является взаимодополняющим к благу 2. Как можно интуитивно понять этот результат? Какова корректная мера изменения благосостояния в этом случае?

10.G.4[B]**.** Рассмотрите экономику с тремя благами ($l = 1, 2, 3$), в которой каждый потребитель имеет предпочтения, описываемые функцией полезности $u(x) = x_1 + \varphi(x_2, x_3)$. Пусть имеется единственная фирма, производящая блага 2 и 3 из блага 1 в соответствии с функцией издержек $c(q_2, q_3) = c_2q_2 + c_3q_3$. Получите выражение, описывающее потери в благосостоянии в результате увеличения ставки налога на оба блага.

10.G.5$^{\text{B}}$**.** Рассмотрите экономику с тремя благами ($l = 1, 2, 3$), в которой каждый потребитель имеет предпочтения, описываемые функцией полезности $u(x) = x_1 + \varphi(x_2, x_3)$. Пусть имеется единственная фирма, производящая блага 2 и 3 из блага 1 в соответствии с функцией издержек $c(q_2, q_3) = c_2(q_2) + c_3(q_3)$, где $c_2(\cdot)$ и $c_3(\cdot)$ — строго возрастающие строго выпуклые функции.

a) Если блага 2 и 3 являются взаимозаменяющими, то каково будет влияние увеличения налога на благо 2 на цену, которую платит потребитель за благо 3? А что будет, если блага являются взаимодополняющими?

b) Пусть $c_2(q_2) = c_2q_2$[38]. Насколько смещенной будет оценка потерь благосостояния, полученная с помощью формулы, выведенной в пункте (b) упражнения 10.G.3, если считать, что цена, которую платят потребители за благо 3, задана на том уровне, который был до изменения налога. Рассмотрите случаи, когда блага являются взаимозаменяющими и взаимодополняющими.

[38] Формула изменена в соответствии с правкой в решебнике. — *Примеч. пер.*

Глава 11. Экстерналии и общественные блага

11.A. Введение

В главе 10 мы продемонстрировали тесную связь между конкурентным равновесием в условиях заданности цен и Парето-оптимальностью (или Парето-эффективностью)[1].

Первая теорема благосостояния говорит нам о том, что конкурентное равновесие с необходимостью является Парето-оптимальным. Из второй теоремы следует, что в случае выполнения надлежащих предположений выпуклости любое Парето-оптимальное распределение может быть достигнуто как конкурентное распределение после соответствующего паушального распределения богатства. В предположениях этих теорем возможности для вмешательства, улучшающего благосостояния в рыночной экономике, строго ограничены трансфертами богатства, служащими целям перераспределения.

В этой главе мы начинаем исследование *провалов рынка:* ситуаций, в которых некоторые предположения теорем благосостояния *не* выполнены и в которых вследствие этого нельзя положиться на рыночные равновесия в достижении Парето-оптимальных состояний. В этой главе мы изучим два типа провалов рынка, известных как *экстерналии* и *общественные блага.*

В десятой главе мы предположили, что предпочтения потребителя определяются исключительно на множестве благ, которые он мог бы захотеть потреблять. Аналогично производство фирмы зависело лишь от ее выбора на множестве факторов производства. Однако в действительности потребитель или фирма в некоторых ситуациях могут быть подвергнуты воздействию других агентов в экономике, т. е. могут иметь место *внешние эффекты* от действий других потребителей или фирм. Например, воздействие на i-го соседа в три часа ночи громкой музыки, прослушиваемой некоторым потребителем, не позволит ему спать. Таким же образом на улов рыбы могут подействовать выбросы химического предприятия, расположенного выше по течению. Учет этих воздействий в наших формальных моделях, использующих предпочтения и технологии, является в принципе несложным делом. Нам нужно всего лишь определить предпочтения агента или производственное множество с учетом как его (агента) дей-

[1] См. также главу 16.

ствий, так и действий агента, создающего внешний эффект. Но результат этого воздействия на рыночное равновесие будет значительным: в общем случае, когда присутствуют внешние эффекты, конкурентные равновесия не являются Парето-оптимальными.

Общественные блага, как и предполагает их название, являются благами, которым присущ «общественный» характер, в том смысле что потребление единицы блага одним агентом не ограничивает потребление этого блага другим. Примеров множество: дороги, национальная оборона, проекты по мониторингу наводнений и знания — все они имеют эту характеристику. При частном обеспечении общественных благ возникает особый тип экстерналий: если один индивид производит единицу общественного блага, то все индивиды от этого выигрывают. В результате частное обеспечение общественных благ, как правило, не является Парето-оптимальным.

Мы начнем исследование экстерналий и общественных благ в разделе 11.B, рассмотрев, возможно, простейшую экстерналию, где в экономике участвуют только два агента, и один из них своей деятельностью напрямую воздействует на другого. В этой задаче мы проиллюстрируем неэффективность конкурентного равновесия при наличии экстерналии. Затем мы рассмотрим три традиционных решения этой проблемы неэффективности: использование квот, налогов, проведение децентрализованного торга по объемам экстерналии. Последнее из решений предполагает связь между наличием экстерналий и отсутствием рынка некоторых благ, факт, который мы рассмотрим довольно детально.

В разделе 11.C мы изучим общественные блага. Сначала мы выведем условие, которое характеризует оптимальный уровень общественного блага, и затем проиллюстрируем неэффективность, проистекающую из частного обеспечения благ. Эту неэффективность по Парето можно рассматривать как следствие экстерналии, воздействующей на потребителей блага, проблему, которая в этом *контексте* известна как *проблема безбилетника.* Мы также рассмотрим возможные решения проблемы безбилетника. Можно использовать как вмешательство, основанное на объеме (государственное обеспечение блага), так и ценовое вмешательство (посредством налогов и субсидий), и тогда в принципе проблема безбилетника исправима. Напротив, децентрализованный торг и решения, основанные на конкурентном равновесии, нежизненны в контексте общественных благ.

В разделе 11.D мы вернемся к изучению экстерналий. Мы рассмотрим случаи, когда многие агенты производят и потребляют экстерналии. Многосторонние экстерналии могут быть классифицированы в соответствии с их *исчерпаемостью* (либо их можно назвать *частными* или *конкурентными*) или *неисчерпаемостью* (также можно назвать *общественными* или *неконкурентными*). Мы покажем, что рыночные решения хорошо работают для первого типа экстерналий и плохо — для второго, когда экстерналия обладает характеристикой общественного блага (или антиблага).

И действительно, этот факт может неплохо объяснить, почему многие экстерналии, являющиеся серьезными социальными проблемами (например, загрязнение воды, кислотные дожди, пробки на дорогах), имеют форму неисчерпаемых многосторонних экстерналий.

В разделе 11.E мы исследуем другую проблему, которая может возникнуть в подобных обстоятельствах: индивиды могут скрывать информацию о воздействии экстерналий на их благосостояние. Тогда мы увидим, что этот тип информационной асимметрии может затруднить попытки как частных лиц, так и правительственных агентств по достижению оптимальных состояний.

В приложении A мы изучим связь между экстерналиями и наличием невыпуклых технологий и проследим воздействие этих невыпуклостей на наш анализ.

Литература по экстерналиям и общественным благам обширна. Полезное введение в тему и ссылки можно найти в работах (Baumol, Oates, 1988; Laffont, 1988).

11.B. Простая двусторонняя экстерналия

Довольно удивительно, что так трудно сформулировать полноценное определение экстерналии. Тем не менее неформальное определение 11.B.1 вполне подойдет для начала.

Определение 11.B.1. *Экстерналия* возникает всякий раз, когда на благосостояние потребителя или множество производственных возможностей фирмы напрямую воздействует другой агент в экономике.

Хотя это определение выглядит довольно просто, оно содержит тонкий момент, служащий источником непонимания. Когда мы говорим «напрямую», мы хотим сказать, что исключаем все эффекты воздействия посредством цен. Например, если экстерналия заключается в воздействии выбросов нефтеперерабатывающего завода на продуктивность рыболовецкой фирмы, а не в том, что рентабельность фирмы зависит от цены нефти (которая, со своей стороны, зависит в некоторой степени от выпуска продукции заводом). Последний тип воздействия (названный Финером (Viner, 1931) *денежной экстерналией*) представлен на любом конкурентном рынке, но, как мы видели в главе 10, не создает неэффективности. Действительно, поведение, предполагающее ценополучение, гарантирует рынку именно тот механизм, который обеспечивает Парето-оптимальность. Поэтому можно предположить, что наличие экстерналии — это не просто технологическое явление, а функция множества существующих рынков. Мы поговорим об этом ниже.

В этом разделе мы поговорим о воздействии внешних эффектов на конкурентные равновесия и государственную политику в контексте очень простой модели частичного равновесия с двумя агентами. Рассмотрим двух агентов, пронумерованных $i = 1, 2$, которые являются малой частью большой экономики. В соответствии с этой интерпретацией мы предположим, что действия этих агентов не сказываются на ценах $p \in \mathbb{R}^L$, где

L — число торгуемых в этой экономике товаров. При этих ценах богатство i-го потребителя равно w_i.

В противоположность стандартной конкурентной модели мы предположим, что каждый потребитель имеет предпочтения потребления, определенные на множестве L товаров $(x_{1i}, \ldots, x_{Li})$, но и от действия $h \in \mathbb{R}_+$, предпринятого первым потребителем. Таким образом, дифференцируемая функция полезности i-го потребителя принимает вид $u_i(x_{1i}, \ldots, x_{Li}, h)$, и мы предположим, что $\partial u_2\left(x_{12}, \ \ldots, \ x_{L2}, \ h\right)/\partial h \neq 0$. Так как выбор первым потребителем величины h воздействует на благосостояние второго, то создается экстерналия. Например, если потребители — близкие соседи и h показывает величину громкости музыки, прослушиваемой первым агентом. Или же потребители могут жить вдоль реки, при этом первый потребитель живет выше по течению. В этом случае h может представлять собой объем загрязнений, создаваемых первым потребителем; чем больше h, тем меньше радости приносит второму потребителю жизнь на реке. Тут мы должны сразу оговориться, что внешние эффекты не всегда действуют отрицательно на своих получателей. Например, если первый потребитель занимается украшением своего участка, то это благотворно воздействует на второго[2].

В дальнейшем будет удобно определить для любого потребителя с номером i функцию полезности, зависящую от уровня h, с учетом того что оптимальный набор покупок i-го потребителя произведен по ценам $p \in \mathbb{R}^L$ и его богатство равно w_i:

$$v_i\left(p, \ w_i, \ h\right) = \max_{x_i \geq 0} u_i\left(x_i, \ h\right) \text{ при } p \cdot x_i \leq w_i.$$

Для удобства вывода результатов мы также предположим, что функции полезности потребителей принимают квазилинейную форму по благу, цена которого равна единице (так называемое благо-измеритель), ниже мы приведем комментарии, в которых содержится оценка упрощений, вытекающих из этого предположения.

В этом случае можем записать функцию полезности $v_i(\cdot)$, являющуюся решением поставленной задачи, как $v_i(p, w_i, h) = \varphi_i(p, h) + w_i$[3]. Поскольку цены L торгуемых товаров не меняются под воздействием тех изменений, которые мы рассматриваем, будем игнорировать вектор цен p и писать просто $\varphi_i(h)$. Будем также предполагать, что функции $\varphi_i(\cdot)$ дважды дифференцируемы с $\varphi_1''(\cdot) < 0$. Но будьте внимательны — условие вогнутости не так невинно, как может показаться на первый взгляд: смотрите приложение А, где содержится обсуждение этого вопроса.

---

[2] Экстерналию, благотворно действующую на реципиента, обычно называют *положительной,* в противном случае она называется *отрицательной экстерналией*.

[3] Действительно, предположим, что $u_i(x_i, h) = g_i(x_{-1i}, h) + x_{1i}$, где x_{-1i} — набор потребляемых товаров помимо первого i-м потребителем. Тогда вальрасианская функция спроса на $L - 1$ торгуемых товаров $x_{-1i}(\cdot)$ не будет зависеть от их богатств и $v_i(p, w_i, h) = g_1(x_{-1i}(p, h), h) - p \cdot x_{-1i}(p, h) + w_i$. Таким образом, обозначая $\varphi_i(p, h) = g_i(x_{-1i}(p, h), h) - p \cdot x_{-1i}(p, h)$, мы получаем требуемый вид.

Хотя мы будем использовать потребительскую интерпретацию, тем не менее все, что мы здесь делаем, может быть применено с тем же успехом к случаю, когда два агента являются фирмами (или же к случаю одной фирмы и одного потребителя). Например, мы могли бы рассмотреть фирму j, у которой «выведенная» функция прибыли $\pi_j(p, h)$ зависит от h при данных ценах p. Если опустить вектор цен p, то функция прибыли фирмы может быть записана как $\pi_j(h)$, и она будет играть ту же роль, что и используемая ниже $\varphi_i(h)$.

Неоптимальность конкурентного равновесия

Предположим, что мы находимся в состоянии конкурентного равновесия, в котором цены товаров равны p. То есть в положении равновесия каждый из двух потребителей максимизирует свою полезность при наличии ограничений в виде своего богатства и цен торгуемых товаров p. Следовательно, первый потребитель выберет $h \geq 0$, чтобы максимизировать $\varphi_1(h)$. Таким образом, равновесный уровень h, а именно h^*, удовлетворяет необходимому и достаточному условию

$$\varphi_1'\left(h^*\right) \leq 0 \text{ и } \varphi_1'\left(h^*\right) = 0, \text{ если } h^* > 0. \tag{11.B.1}$$

Следовательно, для внутренних решений будет выполнено $\varphi_1'\left(h^*\right) = 0$.

Напротив, в любом из Парето-оптимальных распределений оптимальный уровень h, а именно h^o, должен максимизировать *суммарный потребительский излишек* двух потребителей, так что мы должны решать задачу[4]

$$\max_{h \geq 0} \varphi_1\left(h\right) + \varphi_2\left(h\right).$$

Эта задача своими необходимым и достаточным условиями первого порядка для h^0 имеет

$$\varphi_1'\left(h^o\right) \leq -\varphi_2'\left(h^o\right) \text{ и } \varphi_1'\left(h^o\right) = -\varphi_2'\left(h^o\right), \text{ если } h^o > 0. \tag{11.B.2}$$

Отсюда для внутреннего решения задачи на Парето-оптимальность имеем $\varphi_1'\left(h^o\right) = -\varphi_2'\left(h^o\right)$.

Когда присутствуют внешние эффекты, так что $\varphi_2'\left(h\right) \neq 0$ при всех h, равновесный уровень h неоптимален, если только не выполнено $h^o = h^* = 0$. Рассмотрим, например, случай внутреннего решения, т. е. когда $(h^*, h^o) \gg 0$. Если $\varphi_2'(\cdot) < 0$, так что в наличии отрицательная экстерналия, то имеем

[4] Вспомним рассуждения, которые приводились в разделах 10.D и 10.E, или просто заметим, что в любом Парето-оптимальном распределении, в котором h^o — уровень h и w_i — богатство i-го потребителя для $i = 1, 2$, невозможно изменить h и перераспределить богатство таким образом, чтобы благосостояние одного из агентов улучшилось без ухудшения благосостояния другого. Таким образом, $(h^o, 0)$ должно быть решением задачи $\max_{h,T} \varphi_1(h) + w_1 - T$ при $\varphi_2\left(h\right) + w_2 + T \geq \bar{u}_2$ при некотором $\bar{u}_2$. Так как ограничение выполняется как равенство для любого из решений, то подстановка вместо T ограничения в формулу для целевой функции показывает, что h^o должно максимизировать суммарный потребительский излишек двух потребителей $\varphi_1(h) + \varphi_2(h)$.

$\varphi_1'\left(h^o\right) = -\varphi_2'\left(h^o\right) > 0$; из-за того что $\varphi_1'(\cdot)$ убывает и $\varphi_1'\left(h^*\right) = 0,$ мы получим $h^* > h^o$. Напротив, когда $\varphi_2'(\cdot) > 0,$ h представляет положительную экстерналию, и $\varphi_1'\left(h^o\right) = -\varphi_2'\left(h^o\right) < 0,$ откуда получаем $h^* < h^o$.

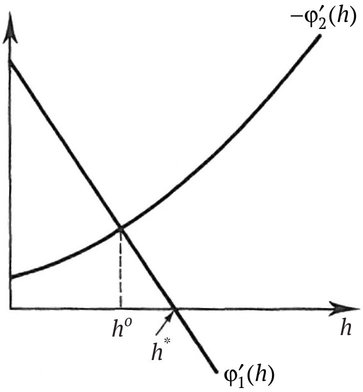


Рис. 11.B.1. Равновесный h^* и оптимальный h^o уровни отрицательной экстерналии

На рис. 11.B.1 мы видим решение задачи для в случая, когда h представляет отрицательную экстерналию, так что $\varphi_2'\left(h\right) < 0$ при всех h. На рисунке изображены графики $\varphi_1'(\cdot)$ и $-\varphi_2'(\cdot)$. Конкурентное равновесное значение h^* достигается в точке, в которой график $\varphi_1'(\cdot)$ пересекает горизонтальную ось. Напротив, оптимальный уровень экстерналии h^o соответствует точке пересечения графиков двух функций.

Заметим, что оптимальность не влечет за собой полного запрета отрицательной экстерналии. Скорее, уровень экстерналии должен быть подобран так, чтобы предельный выигрыш от увеличения на единицу активности, создающей экстерналию для первого потребителя, т. е. $\varphi_1'\left(h^o\right),$ был бы равен предельным издержкам для второго потребителя, т. е. $-\varphi_2'\left(h^o\right)$.

В этом примере квазилинейность полезностей привела к независимости оптимального уровня экстерналии от богатства потребителей. Однако в отсутствие свойства квазилинейности эффекты богатства приведут к зависимости этого уровня от богатства потребителей. Рассмотрите упражнение 11.B.2 в качестве иллюстрации. Заметим, что если рассматриваемые агенты являются фирмами, то эффекты богатства всегда отсутствуют.

Традиционные решения проблемы экстерналий

Получив неэффективность конкурентного рыночного равновесия при наличии экстерналии, мы теперь рассмотрим три возможных решения этой проблемы. Сначала рассмотрим вводимые правительством квоты и налоги, а затем проанализируем, как можно прийти к эффективному результату при возможно меньшем уровне вмешательства, просто стимулируя сделки между потребителями по определению уровня экстерналии.

Квоты и налоги

Для определенности будем считать, что h создает отрицательный внешний эффект, так что $h^o < h^*$. Наиболее прямым способом правительственного вмешательства достижения эффективности будет ограничение активности, порождающей экстерналию. Правительство может просто потребовать, чтобы экстерналия не превышала h^o, своего оптимального уровня.

С учетом этого ограничения, конечно, первый потребитель зафиксирует экстерналию на уровне h^o.

Вторым возможным решением для правительства будет восстановление оптимальности за счет введения налога на активность, порождающую экстерналию. Это решение известно под названием *налогообложения Пигу,* в честь Пигу (Pigou, 1932). Чтобы увидеть, как это работает, допустим, что первый потребитель обязан заплатить налог в размере t_h за единицу h. Тогда нетрудно видеть, что налог по ставке $t_h = -\varphi_2'\left(h^o\right) > 0$ позволит получить оптимальный уровень экстерналии. Действительно, при таком налоге первый потребитель выберет уровень h, чтобы выйти на решение задачи

$$\max_{h\geq 0} \varphi_1\left(h\right) - t_h h. \tag{11.B.3}$$

Необходимым и достаточным условием первого порядка для решения этой задачи является

$$\varphi_1'(h) \leq t_h \text{ и } \varphi_1'(h) = t_h, \text{ если } h > 0. \tag{11.B.4}$$

При условии что $t_h = -\varphi_2'\left(h^o\right)$, $h = h^o$ удовлетворяют условию (11.B.4), вспомним, что h^o определяется условием $\varphi_1'\left(h^o\right) \leqslant -\varphi_2'\left(h^o\right)$ с выполнением в виде равенства, если $h^o > 0$. Более того, если $\varphi_1''\left(\cdot\right) < 0$, h^o должно быть единственным решением задачи (11.B.3). Рисунок 11.B.2 иллюстрирует это решение в случае $h^o > 0$.

Заметим, что налог, восстанавливающий оптимальность, в точности равен *предельной экстерналии* в оптимальном решении[5]. То есть он в точности равен величине, которую готов был бы заплатить второй потребитель, чтобы немного понизить h по сравнению с оптимальным уровнем h^o.

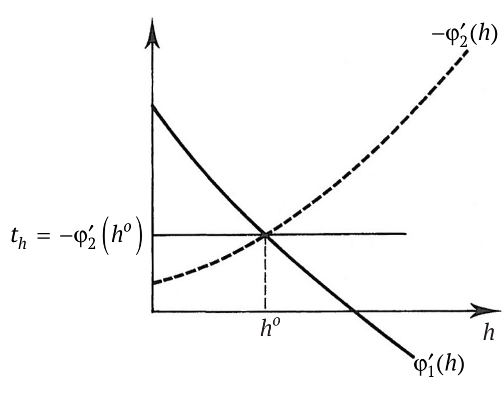


Рис. 11.B.2. Налог Пигу, восстанавливающий оптимальность

[5] В случае когда $h^o = 0$, любой налог, превышающий $-\varphi_2'\left(0\right)$, также приведет к оптимальному результату.

Когда первый потребитель сталкивается с таким налогом, он, естественно, подсчитывает индивидуальное соотношение выгод и потерь, что делает *внутренней* экстерналию, которую он создает для второго потребителя.

Принципы решения задачи, когда имеют дело с положительной экстерналией, абсолютно такие же, но так как мы полагаем $t_h = -\varphi_2'\left(h^o\right) < 0,$ то t_h имеет вид потоварной *субсидии* (т. е. первый потребитель *получает* платеж за каждую единицу экстерналии, которую он создает).

Стоит сделать несколько дополнительных замечаний касательно этого пигувианского решения. Прежде всего, мы в действительности можем достичь этого оптимального решения путем налогообложения производства экстерналии или же субсидированием снижения ее производства. Рассмотрим, например, случай отрицательной экстерналии. Предположим, что правительство платит субсидию размера $s_h = -\varphi_2'\left(h^o\right) > 0$ за каждую единицу h, которую первый потребитель снизит по сравнению с h^*, равновесным конкурентным значением. Если это так, то первый потребитель будет максимизировать функцию $\varphi_1(h) + s_h(h^* - h) = \varphi_1(h) - t_h h + t_h h^*$. Но это эквивалентно налогообложению по ставке t_h производства экстерналии h в комбинации с паушальным налогообложением величины $t_h h^*$. Следовательно, субсидирование уменьшения производства экстерналии в комбинации с паушальным трансфертом копирует действие налога.

Еще один аргумент, который выше не прозвучал: вообще говоря, более существенным является взимание налогов непосредственно с производителя экстерналии. Например, в случае с первым потребителем, который слушает громкую музыку, мы будем взимать налог при продаже проигрывающих устройств, вместо того чтобы брать налоги с тех, кто ее громко слушает. В общем, мы не получим восстановления оптимальности. Первый потребитель будет вынужден снизить свои закупки оборудования (например, он вместо покупки проигрывателя дисков и магнитофона купит лишь проигрыватель дисков), но он сможет с таким же успехом включать это устройство на максимальную громкость. Типичный пример из этой серии — когда фирма производит вредные выбросы наряду с производством продукции. Налог на производство продукции может снизить объем выпускаемой продукции, но может совершенно не сказаться на уровне выбросов (или, что является более общим наблюдением, уменьшить выбросы незначительно). Взимание налога с объема производства позволяет достичь оптимальности лишь в специальном случае, когда существует фиксированное монотонное соотношение между объемом производства и объемом выбросов. В этом специальном случае объемы выбросов можно оценить по уровню производства и налог на производство, по сути, является налогом на выбросы (см. упражнение 11.B.5 в качестве иллюстрации).

Наконец, заметим, что налог/субсидия и квота с одинаковым успехом позволяют достичь оптимальности. Однако у правительства должно быть достаточно информации о выгодах и издержках экстерналии для обоих потребителей, чтобы правильно установить квоту или налог. В разделе 11.E мы увидим, что если у правительства такой информации нет, то обычно эти подходы не совпадают.

Поощрение сделок на рынке экстерналий: принуждение к обеспечению прав собственности

Другим подходом к проблеме экстерналий является менее интервенционистский метод, направленный всего лишь на поддержание условий того, чтобы стороны сами пришли к оптимальному соглашению относительно уровня экстерналии.

Предположим, мы юридически оформили право собственности на деятельность, приводящую к производству экстерналии. Например, мы предоставили право на поддержание «нулевого уровня экстерналии» для окружающей среды второму потребителю. В этом случае первый потребитель не сможет произвести экстерналию без разрешения второго потребителя. Для простоты давайте представим, что торг между сторонами происходит в форме предложения со стороны второго потребителя первому в виде «не хочешь — не бери», это предложение состоит в требовании платежа T за разрешение произвести экстерналию уровня h[6]. Потребитель 1 согласится с этим предложением в том и только в том случае, если он по меньшей мере не потеряет по сравнению с тем, если бы он отказался от предложения, т. е. тогда и только тогда, когда $\varphi_1(h) - T \geq \varphi_1(0)$. Следовательно, потребитель 2 для своего предложения выберет значения (h, T), чтобы они были решением задачи

$$\max_{h \geq 0, T} \varphi_2\left(h\right) + T \text{ при } \varphi_1(h) - T \geq \varphi_1(0).$$

Поскольку такое ограничение является активным для любого решения этой задачи, то $T = \varphi_1(h) - \varphi_1(0)$. Поэтому оптимальное предложение второго потребителя дает тот уровень h, который является решением задачи

$$\max_{h \geq 0} \varphi_2\left(h\right) + \varphi_1\left(h\right) - \varphi_1\left(0\right). \tag{11.B.5}$$

Но этот уровень в точности равен h^o, т. е. это представляет собой социально оптимальный уровень.

Более того, заметим, что юридически точное оформление прав собственности между двумя потребителями несущественно для достижения оптимальности. Предположим, например, что потребитель 1 имеет право производить экстерналию в любом объеме, в каком только пожелает. В этом случае, в отсутствие соглашения, будет произведена экстерналия в объеме h^*. Теперь потребитель 2 должен будет предложить $T < 0$ (т. е. заплатить первому), чтобы получить $h < h^*$. В частности, потребитель 1 согласится на уровень h в том и только в том случае, если выполнено $\varphi_1(h) - T \geq \varphi_1(h^*)$.

[6] Каждый из вариантов торга, описанных в приложении А главы 9, даст один и тот же результат.

В результате потребитель 2 сделает предложение по достижению h, являющемуся решением задачи $\max\limits_{h>0}\left(\varphi_2\left(h\right)+\varphi_1\left(h\right)-\varphi_1\left(h^*\right)\right)$. И снова мы выйдем на оптимальный уровень h^o. Распределение прав собственности влияет лишь на окончательный уровень богатства потребителей, так как уровень платежей первого потребителя второму может быть различным. В первом случае потребитель 1 платит $\varphi_1\left(h^o\right)-\varphi_1\left(0\right)>0$ за разрешение достичь уровня $h^o>0$; во втором случае он «платит» $\varphi_1\left(h^o\right)-\varphi_1\left(h^*\right)<0$ в ответ, чтобы уровень составлял $h^o<h^*$.

Здесь мы встречаемся с проявлением известной *теоремы Коуза* (см. (Coase, 1960): если торговля экстерналиями может осуществляться, то торг приведет к эффективному результату вне зависимости от распределения прав собственности.

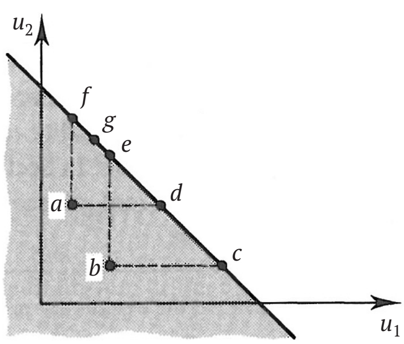


Рис. 11.B.3. Окончательное распределение полезностей после различных вариантов распределения прав собственности и различных процедур торга

Этот факт проиллюстрирован на рисунке 11.B.3, на котором изображены множества потребительских возможностей для двух потребителей. Каждая точка на границе этого множества соответствует распределению с уровнем экстерналий h^o. Точки a и b соответствуют уровням полезности, достижимым при уровнях экстерналий 0 и h^* в отсутствие каких-либо трансфертов. Они образуют начальное расположение после распределения прав собственности (потребителям 2 и 1 соответственно), но перед торгом. В конкретной процедуре торга мы приняли договоренность (право предложения «не хочешь — не бери» у второго), уровни полезности после торга обозначены на рисунке точками f и e соответственно. Если бы переговорная сила (т. е. сила сделать предложение «не хочешь — не бери») была бы на стороне первого, то после торга уровни полезности соответствовали бы точкам d и c. Другие процедуры торга (например, те, которые рассмотрены в приложении A главы 9) могут привести к другим точкам на отрезках [f, d] и [e, c] соответственно.

Заметим, что наличие четко оформленных и соблюдаемых юридически прав собственности существенно, для того чтобы этот вариант торга произошел. Если права собственности плохо определены, то будет неясно, нужно ли получать первому потребителю разрешения от второго на производство экстерналии. Если права собственности не могут быть подкреплены (непросто измерить уровень h), то потребителю 1 не нужно покупать право на производство экстерналии у потребителя 2. По этой причине сторонники этого подхода фокусируют внимание на отсутствии юридических институтов как основном препятствии на пути достижения оптимальности.

Такое решение проблемы экстерналий имеет существенное преимущество по сравнению со схемами налогообложения и квот в смысле требований к информированности правительства. Потребители должны знать предпочтения друг друга, но правительству этого не требуется. Однако необходимо подчеркнуть, что потребители должны обладать этой информацией, для того чтобы торг привел к эффективному решению. В разделе 11.Е мы увидим, что если потребители находятся в неведении относительно предпочтений друг друга, торг *необязательно* приводит к эффективному решению.

Стоит сделать еще два замечания относительно этих трех типов решения проблемы экстерналий. Во-первых, в случае когда два агента являются фирмами, одной из эффективных форм торга может оказаться продажа одной фирмы другой. Фирма, появившаяся в результате продажи, сможет затем интернизировать в полном объеме экстерналию в ходе максимизации своей прибыли[7].

Во-вторых, все три подхода предполагают, что активность, создающая экстерналию, измерима. Это не тривиальное требование; во многих случаях это измерение может оказаться технологически невозможным или очень затратным (рассмотрите стоимость измерения загрязнения воздуха или измерения шума). Необходимо надлежащим образом измерить затраты и выгоды, с тем чтобы учесть эти издержки. Если измерение очень затратно, то может оказаться оптимальным примириться с экстерналией.

Экстерналии и отсутствующие рынки

Идея о том, что торг может привести к оптимальному результату, предполагает связь между экстерналиями и отсутствующими рынками. Вообще говоря, систему рынков можно рассматривать как особый случай торговой процедуры.

Предположим, что права собственности хорошо определены и соблюдаются и что конкурентный рынок права на деятельность по производству экстерналии существует. Для простоты мы допустим, что потребитель 2 обладает правом на поддержание окружающей среды без экстерналий. Пусть p_h является ценой права на участие в одной единице активности. Для того чтобы выбрать, сколько потребуется прав на покупку, допустим h_1, потребитель 1 должен будет решить задачу

$$\max_{h_1 \geq 0} \varphi_1(h_1) - p_h h_1,$$

условие первого порядка для которой имеет вид

$$\varphi_1'(h_1) \leq p_h \text{ и } \varphi_1'(h_1) = p_h, \text{ если } h_1 > 0. \qquad (11.B.6)$$

[7] Такое решение предполагает, что владелец обладает полным контролем над своей фирмой. В более сложном (но реалистичном) случае, когда это условие не выполнено, например, вследствие того, что владельцы должны нанимать менеджеров, действия которых не вполне контролируемы, результаты слияния и результаты соглашения по объемам экстерналии могут различаться. Главы 14 и 23 представляют собой введение в тему дизайна побудительных мотивов. См. (Holmstrom, Tirole, 1989), где эти вопросы обсуждаются в контексте теории фирмы.

При решении, сколько прав продать, т. е. h_2, потребитель 2 будет решать задачу

$$\max_{h_2 \geq 0} \varphi_2\left(h_2\right) + p_h h_2,$$

условие первого порядка которой имеет вид

$$\varphi_2'\left(h_2\right) \leq -p_h \text{ и } \varphi_2'\left(h_2\right) = -p_h, \text{ если } h_2 > 0. \qquad (11.B.7)$$

При конкурентном равновесии рынок для этих прав должен уравновеситься, т. е. $h_1 = h_2$. Следовательно, из (11.B.6) и (11.B.7) вытекает, что уровень, установившийся в равновесии на конкурентном рынке прав, скажем h^{**}, удовлетворяет

$$\varphi_1'\left(h^{**}\right) \leq -\varphi_2'\left(h^{**}\right) \text{ и } \varphi_1'\left(h^{**}\right) = -\varphi_2'\left(h^{**}\right), \text{ если } h^{**} > 0.$$

Сравнивая это выражение с (11.B.2), мы видим, что h^{**} равно оптимальному уровню h^o. Равновесная цена экстерналии равна $p_h^* = \varphi_1'\left(h^o\right) = -\varphi_2'\left(h^o\right)$.

Тогда равновесные значения полезностей первого и второго потребителей равны $\varphi_1\left(h^o\right) - p_h^* h^o$ и $\varphi_2\left(h^o\right) + p_h^* h^o$ соответственно. Поэтому рынок работает как особая процедура торга, предполагающая разделение выигрышей от торговли; например, точка g на рисунке 11.B.3 может представлять полезности в конкурентном равновесии.

Мы видим, что если конкурентный рынок существует для экстерналии, то в результате достигается оптимум. Таким образом, можно считать, что экстерналии неразрывно связаны с отсутствием определенных конкурентных рынков. Эта точка зрения была первоначально высказана Мидом (Meade, 1952) и существенно развита Эрроу (Arrow, 1969). Действительно, вспомним наше первоначальное определение экстерналии, определение 11.B.1, в котором явно требовалось, чтобы действие, выбранное одним агентом, *напрямую* воздействовало на благосостояние или производственные возможности другого. Однако как только возникает рынок для экстерналии, каждый потребитель самостоятельно решает, сколько потреблять экстерналии по текущим ценам.

К сожалению, идея конкурентного рынка для экстерналии в данном примере довольно нереалистична; на рынке, где присутствуют один продавец и один покупатель, ценополучение вряд ли возможно[8]. Однако наиболее важные экстерналии производятся в многосторонних взаимодействиях, принятие цены как заданной будет более осмысленным предположением, и в результате конкурентный рынок для экстерналии приведет к эффективному результату. В разделе 11.D, где будут рассмотрены многосторонние экстерналии, мы увидим, что правильность этого вывода зависит от природы экстерналии, т. е. от того, является ли она «частной» или «общественной». Однако прежде нам нужно изучить природу общественных благ.

[8] Кстати, предположение, что права на экстерналию продаются по одной и той же цене, здесь неоправданно, потому что естественной единицы измерения для экстерналии не существует.

11.C. Общественные блага

В этом разделе мы изучим товары, которые, в отличие от тех, которыми мы занимались ранее, имеют свойство «публичности» в потреблении. Эти товары известны как *общественные блага*.

Определение 11.C.1. *Общественное благо* — это товар, использование единицы которого одним агентом не препятствует потреблению его другими агентами.

Или можно выразиться несколько иначе: общественные блага обладают свойством неисчерпаемости в следующем смысле. Потребление этого блага одним индивидом не влияет на запас его для других индивидов. Знания являются хорошим примером. Использование какого-либо знания не препятствуют его использованию другими. Напротив, товары, которые мы до сих пор изучали, предполагались *частными,* или имеющими *исчерпаемую* природу; т. е. потребление каждой дополнительной единицы блага индивидом i означает уменьшение запаса блага для любого индивида $j \neq i$[9].

Нужно разделять также блага исходя из того, возможна ли *исключаемость* индивидов из использования блага. Любое частное благо автоматически исключаемо, но общественные блага могут как обладать свойством исключаемости, так и не быть исключаемыми. Патентная система, например, является механизмом исключаемости индивидов (хотя и не совершенным) из знания, добытого другими. С другой стороны, может оказаться технически невозможно или очень дорого не допускать индивидов к использованию национальной обороны или проекта по улучшению качества воздуха. Для простоты наше обсуждение будет касаться в основном лишь тех благ, для которых исключение невозможно.

Заметим, что общественное благо необязано быть «желательным»; например, мы можем встретить общественное *антиблаго* (например, загрязненный воздух). В этом случае мы должны понимать фразу «не препятствует» в определении 11.C.1 как «не уменьшает».

Условия Парето-оптимальности

Рассмотрим множество, состоящее из I потребителей и одного общественного блага, дополнительно имеется L торгуемых обычных, частных благ. Мы вновь будем считать, что находимся в рамках модели частичного равновесия, предполагая, что количество общественного блага не оказывает влияния на цены L торгуемых благ и функция любого из потребителей является квазилинейной по благу, цена которого равна единице, и это благо тоже продается. Как и в разделе 11.B, мы можем, стало быть, определить для индивида с номером i функцию полезности, зависящую от уровня об-

[9] Возможны промежуточные случаи, когда потребление блага в некоторой степени влияет на доступность этого блага для других. Классическим примером является эффект загруженности. По этой причине блага, для которых исчерпаемости нет ни в какой степени, называют иногда *чистыми* общественными благами.

щественного блага. Пусть x обозначает количество общественного блага, мы обозначим полезность i-го потребителя $\varphi_i(x)$. Будем считать, что эта функция дважды дифференцируема и ее вторая производная $\varphi_i''(x) < 0$ при всех $x \geq 0$. Заметим, что именно из-за того, что мы имеем дело с общественным благом, x не имеет индекса i.

Издержки производства q единиц общественного блага составляют $c(q)$. Мы будем считать, что $c(\cdot)$ дважды дифференцируема и ее вторая производная $c''(q) > 0$ для всех $q \geq 0$.

Чтобы описать случай желательного общественного блага, производство которого затратно, мы будем полагать $\varphi_i'(\cdot) > 0$ для всех i и $c'(\cdot) > 0$. Всегда, за исключением случаев, когда об этом написано особо, анализ также хорошо подходит и для случая общественного антиблага, борьба с которым затратна, в этом случае $\varphi_i'(\cdot) < 0$ для всех i и $c'(\cdot) < 0$.

В этой квазилинейной модели любое Парето-оптимальное распределение должно максимизировать агрегированный общественный излишек (см. раздел 10.D), и поэтому уровень общественного блага должен быть найден из решения задачи

$$\max_{q \geq 0} \sum_{i=1}^{I} \varphi_i(q) - c(q).$$

Необходимое и достаточное условие первого порядка, определяющее оптимальный объем q^o:

$$\sum_{i=1}^{I} \varphi_i'(q^o) \leq c'(q^o) \text{ и } \sum_{i=1}^{I} \varphi_i'(q^o) = c'(q^o), \text{ если } q^o > 0. \tag{11.C.1}$$

Условие (11.C.1), являющиеся классическим условием оптимальности для общественного блага, впервые было получено Самуэльсоном (Samuelson, 1954; 1955). (Здесь оно приспособлено к случаю частичного равновесия; см. раздел 16.G для общего случая.) Во внутреннем решении выполнено $\sum_i \varphi_i'(q^o) = c'(q^o)$, так что оптимальный уровень общественного блага достигается при *равенстве суммы предельных выгод от общественного блага величине его предельных издержек*. Заметим, что это условие контрастирует с условиями с (10.D.3) по (10.D.5) для частного блага, когда для *каждого* потребителя предельные выгоды от блага приравниваются предельным издержкам.

Неэффективность частного обеспечения общественными благами

Рассмотрим обстоятельства, при которых общественное благо производится за счет частных покупок потребителей. Представим, что для общественного блага существует рынок и что каждый потребитель i выбирает, сколько ему купить общественного блага в объеме $x_i \geq 0$, воспринимая цену блага p как данную. Тогда общее количество закупленного общественного блага равно $x = \sum_i x_i$. Формально со стороны предложения мы будем считать, что общественное благо производится одной фирмой, максимизирующей прибыль с функцией издержек $c(\cdot)$ и при выборе уровня выпуска воспринимающей цену как заданную. Однако заметим, что согласно анализу, проведенному в разделе 5.E, мы можем считать, что такое поведение фирмы описывает выпуск отрасли, состоящей из J фирм-ценополучателей с агрегированной функцией издержек $c(\cdot)$.

При конкурентном равновесии с равновесной ценой p^* каждый потребитель i, покупающий общественное благо в объеме x_i^*, должен максимизировать свою полезность и решать задачу

$$\max_{x_i \geq 0} \varphi_i\left(x_i + \sum_{k \neq i} x_k^*\right) - p^* x_i. \tag{11.C.2}$$

При определении оптимального объема потребления i-й потребитель воспринимает объемы частного блага, приобретаемые другими потребителями, как заданные (как в концепции равновесия по Нэшу, изученной в разделе 8.D). Таким образом, количество x_i^*, приобретенное i-м потребителем, должно удовлетворять необходимому и достаточному условию первого порядка

$$\varphi_i'\left(x_i^* + \sum_{k \neq i} x_k^*\right) \leq p^* \text{ и } \varphi_i'\left(x_i^* + \sum_{k \neq i} x_k^*\right) = p^*, \text{ если } x_i^* > 0.$$

Если положить $x^* = \sum_i x_i^*$ и обозначить звездочкой равновесное количество общественного блага, для каждого потребителя i должно быть выполнено неравенство

$$\varphi_i'\left(x^*\right) \leq p^* \text{ и } \varphi_i(x^*) = p^*, \text{если } x_i^* > 0. \tag{11.C.3}$$

Предложение фирмы q^*, с другой стороны, должно решать задачу $\max_{q \geq 0}\left(p^* q - c\left(q\right)\right)$ и должно, следовательно, удовлетворять стандартному необходимому и достаточному условию первого порядка

$$p^* \leq c'\left(q^*\right) \text{ и } p^* = c'\left(q^*\right), \text{ если } q^* > 0. \tag{11.C.4}$$

При конкурентном равновесии $q^* = x^*$. Таким образом, полагая $\delta_i = 1$, если $x_i^* > 0$, и $\delta_i = 0$, если $x_i^* = 0$, из (11.C.3) и (11.C.4) получаем, что $\sum_i \delta_i\left(\varphi_i'\left(q^*\right) - c'\left(q^*\right)\right) = 0$. Поскольку $\varphi_i'\left(\cdot\right) > 0$ и $c'(\cdot) > 0$, это влечет за собой, что при $I > 1$ и $q^* > 0$ (так что $\delta_i = 1$ для некоторого i) мы будем иметь

$$\sum_{i=1}^{I} \varphi_i'\left(q^*\right) > c'\left(q^*\right). \qquad (11.C.5)$$

Сравнивая (11.C.5) с (11.C.1), мы видим, что всякий раз, когда $q^o > 0$ и $I > 1$, уровень общественного блага слишком низок: $q^* < q^o$[10].

Причина такой неэффективности может быть понята в рамках обсуждения экстерналий в разделе 11.B. Здесь покупка каждым потребителем общественного блага предоставляет прямую выгоду не только этому потребителю, но и любому другому. Следовательно, частное обеспечение создает ситуацию, в которой есть экстерналия. Неспособность каждого потребителя оценить создаваемые его покупкой общественного блага выгоды для других часто называется *проблемой безбилетника*: каждый из потребителей имеет стимул получить выгоду от покупки общественного блага другими, в то же время не предоставляя блага в достаточном объеме.

На самом деле в этой модели проблема безбилетника приобретает наиболее ярко выраженную форму. Чтобы это показать, предположим, что мы можем ранжировать потребителей в соответствии с их предельными выгодами в следующем смысле: $\varphi_1'(x) < \ldots < \varphi_I'(x)$ для всех $x \geq 0$. Тогда условие (11.C.3) может выполняться в виде равенства только для *одного* потребителя, и, более того, это должен быть потребитель с индексом I. Поэтому только тот потребитель, который получает наибольшую (предельную) выгоду от общественного блага, будет его предоставлять; все остальные обнулят свои покупки в равновесии. Таким образом, равновесный уровень общественного блага равен q^*, что удовлетворяет $\varphi_I'\left(q^*\right) = c'\left(q^*\right)$. На рис. 11.C.1 изображен этот уровень наряду с Парето-оптимальным уровнем. Заметим, что кривая, представляющая $\sum_i \varphi_i'(q)$, геометрически может быть получена *вертикальным* сложением индивидуальных кривых, представляющих $\varphi_i(q)$ для $i = 1, \ldots, I$ (в то время как в случае частного блага кривая совокупного спроса будет определяться *горизонтальным* сложением индивидуальных кривых спроса).

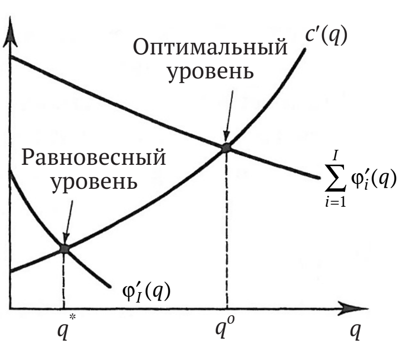


Рис. 11.C.1. Частное обеспечение приводит к неэффективному уровню желательного общественного блага

Неэффективность предоставляемого общественного блага часто может быть исправлена вмешательством правительства в производство общественных благ. Так же как и в случае экстер-

[10] Вывод следует немедленно, если $q^* = 0$. Поэтому будем считать, что $q^* > 0$. Тогда, вследствие того что $\sum_i \varphi_i'\left(q^*\right) - c'\left(q^*\right) > 0$ и $\sum_i \varphi_i'(\cdot) - c'(\cdot)$ убывают, любое решение (11.C.1) должно иметь значение, большее чем q^*. Заметим, что если бы мы имели дело с антиблагом, для которого $\varphi_i'(\cdot) < 0$ и $c'(\cdot) < 0$, то неравенства поменяли бы свой знак и мы бы имели $q^o < q^*$.

налий, это может осуществляться не только в виде действий, регулирующих количество (например, посредством взятия на себя обязательств по выпуску), но и на базе «ценового» вмешательства в форме налогов и субсидий. Например, предположим, что имеются два потребителя с функциями выгоды $\varphi_1(x_1 + x_2)$ и $\varphi_2(x_1 + x_2)$, где x_i — количество общественного блага, покупаемого потребителем i, и что $q^o > 0$.

По аналогии с анализом из раздела 11.B субсидия каждому потребителю i за приобретенную единицу блага в размере $s_i = \varphi'_{-i}\left(q^o\right)$ (или эквивалентный налог величины $-\varphi'_{-i}\left(q^o\right)$ за единицу блага, если покупки i-го потребителя окажутся ниже определенного уровня) дает ощутить каждому потребителю предельный внешний эффект от его действий, и в результате потребителем i будет произведено оптимальное количество общественного блага.

Формально, если $\left(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2\right)$ — конкурентные равновесные уровни общественного блага, закупленные двумя потребителями при наличии таких субсидий, и если $\tilde{p}$ — равновесная цена, то закупка i-м потребителем блага в количестве $\tilde{x}_i$ должно быть решением задачи $\max\limits_{x_i \geq 0} \varphi_i\left(x_i + \tilde{x}_j\right) + s_i x_i - \tilde{p} x_i$, так что $\tilde{x}_i$ должно удовлетворять необходимому и достаточному условию первого порядка

$$\varphi'_i\left(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2\right) + s_i \leq \tilde{p} \text{ и } \varphi'_i\left(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2\right) + s_i = \tilde{p}, \text{ если } \tilde{x}_i > 0.$$

Подставляя s_i и используя одновременно условие (11.C.4) и условие уравновешенности рынка $\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = \tilde{q}$, мы заключаем, что $\tilde{q}$ — совокупный объем общественного блага в конкурентном равновесии при наличии субсидий тогда и только тогда, когда

$$\varphi'_i\left(\tilde{q}\right) + \varphi'_{-i}\left(q^o\right) \leq c'\left(\tilde{q}\right),$$

причем для некоторого потребителя i это условие выполняется как равенство, если $\tilde{q} > 0$. Вспоминая (11.C.1), мы видим, что $\tilde{q} = q^o$. (В упражнении, таким образом, мы будем иметь дело с многосторонней экстерналией, изучаемой ниже в разделе 11.D).

Заметим, что оптимальное непосредственное финансирование обществом производства общественного блага, как и схема с субсидированием, требуют знания правительством выгод, получаемых потребителями от общественного блага (т. е. их желание заплатить в терминах частных благ). В разделе 11.E мы рассмотрим случай, когда это не так.

Равновесия Линдаля

Хотя частное финансирование производства общественного блага, которое мы рассмотрели, дает неэффективный уровень блага, *в принципе* существует рыночный институт, который позволяет достичь оптимальности. Предположим, что для каждого потребителя i мы имеем рынок для общественного блага, «как это устраивает потребителя i». Другими словами, мы будем полагать, что каждый потребитель потребляет общественное благо как отдельное, образующее свой рынок. Мы будем обозначать цену этого индивидуализированного блага p_i. Заметим, что p_i для разных потребителей могут быть различны. Также предположим, что при равновесной цене p_i^{**} каждый потребитель i должен решить, сколько ему требуется общественного блага x_i, и для этого он решает задачу

$$\max_{x_i \geq 0} \varphi_i\left(x_i\right) - p_i^{**} x_i.$$

Его равновесный уровень потребления x_i^{**}, таким образом, должен удовлетворять необходимому и достаточному условию первого порядка

$$\varphi_i'\left(x_i^{**}\right) \leq p_i^{**} \text{ и } \varphi_i'\left(x_i^{**}\right) = p_i^{**}, \text{ если } x_i^{**} > 0. \tag{11.C.6}$$

Мы теперь рассматриваем фирму как производителя набора из I благ по технологии, сохраняющей неизменными пропорции (т. е. уровень выпуска каждого индивидуализированного блага должен быть одинаков). Таким образом, фирма решает задачу

$$\max_{q \geq 0} \left(\sum_{i=1}^{I} p_i^{**} q \right) - c(q).$$

Равновесный уровень выпуска фирмы, равный q^{**}, будет тогда удовлетворять необходимому и достаточному условию первого порядка

$$\sum_{i=1}^{I} p_i^{**} \leq c'\left(q^{**}\right) \text{ и } \sum_{i=1}^{I} p_i^{**} = c'\left(q^{**}\right), \text{ если } q^{**} > 0. \tag{11.C.7}$$

В совокупности условия (11.C.6), (11.C.7) и условие уравновешенности рынка $x_i^{**} = q^{**}$ для всех i влекут за собой условие

$$\sum_{i=1}^{I} \varphi_i'\left(q^{**}\right) \leq c'\left(q^{**}\right) \text{ и } \sum_{i=1}^{I} \varphi_i'\left(q^{**}\right) = c'\left(q^{**}\right), \text{ если } q^{**} > 0. \tag{11.C.8}$$

Сравнивая (11.C.8) с (11.C.1), мы видим, что равновесный уровень потребления общественного блага каждым потребителем как раз и равен эффективному уровню $q^{**} = q^o$.

Этот тип равновесия при наличии индивидуализированных рынков общественного блага называется *равновесием Линдаля* в честь Линдаля (Lindahl, 1919) (см. также (Milleron, 1972) для дальнейшего обсуждения). Чтобы понять, почему мы получили эффективный уровень, заметим, что, как только мы ввели индивидуализированные рынки общественного блага, любой из потребителей, воспринимая цену блага как заданную, полностью определяет свой уровень потребления общественного блага; экстерналии исчезают.

Несмотря на привлекательные свойства равновесия Линдаля, реализм этого равновесия можно подвергнуть сомнению. Во-первых, заметим, что возможность запрета на потребление общественного блага является принципиально важной для этого вида равновесия; в противном случае у потребителя не будет оснований верить в то, что без оплаты блага он его не получит[11]. Более того, если исключение даже и возможно, то такие рынки имеют лишь одного агента со стороны спроса. В результате крайне маловероятно, что мы будем наблюдать поведение агентов как ценополучателей.

Идея, что неэффективности могут быть скорректированы за счет введения «правильных» рынков, которую мы использовали здесь и ранее в разделе 11.B, является весьма общей. В частных же случаях это «решение» может быть или не быть реалистичным. Мы убедимся в этом еще раз при изучении многосторонних экстерналий в разделе 11.D. Как мы увидим, экстерналии этого типа во многом близки общественным благам.

11.D. Многосторонние экстерналии

Во многих случаях экстерналии создаются и потребляются многими агентами. Это особенно характерно для таких экстерналий, как промышленное загрязнение, выхлопы автомобилей, загруженность дорог, они широко рассматриваются как «важные» проблемы, решение которых является предметом политики. В этом разделе мы распространим изучение экстерналий на этот тип многосторонних экстерналий.

В случае многосторонних экстерналий важно различать *исчерпаемые* (или *частные*, или *конкурентные*) экстерналии и *неисчерпаемые* (или *общественные*, или *неконкурентные*) экстерналии. Исчерпаемые экстерналии характеризуются тем свойством, что потребление такой экстерналии каким-либо агентом уменьшает воздействие этой экстерналии на других агентов. Например, если экстерналия принимает форму вываливания дополнительной единицы мусора на чей-либо участок, то меньше такого мусора будет выброшено на другие участки[12]. Таким образом, исчерпаемые экстерналии обладают характеристиками, схожими с нашими обычными (частными) благами. Напротив, загрязнение воздуха является неисчерпаемой экстерналией; количество загрязнения, воздействующего на агента, не зависит от того, что и другие агенты от него страдают. Тем самым неисчерпаемые экстерналии обладают характеристиками общественных благ (или антиблаг).

[11] Таким образом, возможность исключения может быть важной для эффективного обеспечения общественного блага, хотя сама по себе технология исключения неэффективна (Парето-оптимальное распределение не предполагает исключения).

[12] Также следует брать в расчет, имеет ли исчерпаемая экстерналия свойство *назначенного расположения*. Например, кислотный дождь исчерпаем в том смысле, что общее количество химикатов, находящееся в воздухе, где то выпадет, но место выпадения назначить невозможно, так как оно определяется погодными условиями. В этом разделе мы будем иметь дело исключительно с исчерпаемыми экстерналиями, которые имеют назначенное расположение. Аналитическое рассмотрение для случая экстерналий, не имеющих назначенного расположения, аналогично рассмотрению экстерналий, которые обладают свойством назначенного расположения.

В этом разделе мы выскажем предположение, что децентрализованное рыночное решение для многосторонних исчерпаемых благ может хорошо работать при условии, если права собственности на такие блага четко определены и соблюдаются. Напротив, решения, основанные на рыночных принципах, плохо будут работать в случае неисчерпаемых благ, в параллель с нашими выводами относительно общественных благ, как это было показано в разделе 11.C.

На протяжении этого раздела мы будем предполагать, что агенты, создающие экстерналии, отличаются от тех, кто их потребляет. Это упрощение несущественно, но облегчает анализ и способствует сравнению с предыдущими разделами (в упражнении 11.D.2 вам будет предложено рассмотреть общий случай). Для простоты рассмотрения мы будем здесь предполагать, что экстерналии создаются фирмами, и они воздействуют на потребителей. Мы также сфокусируем наше внимание на специальном, но важном случае, когда экстерналия, создаваемая фирмами, однородна (т. е. потребителям все равно, какой фирмой экстерналия создается). (В упражнении 11.D.4 вам будет предложено рассмотреть случай, когда источник экстерналии важен.)

Мы снова будем следовать модели частичного равновесия и допустим, что агенты воспринимают вектор цен p для L торгуемых благ как заданный. Имеется J фирм, создающих экстерналию в процессе производства основной продукции. Как уже обсуждалось в разделе 11.B, при данном векторе цен p мы можем определить полученную функцию прибыли j-й фирмы, зависящую от уровня производимой ею экстерналии $h_j \geq 0$, и обозначим ее $\pi_j(h_j)$. Имеется еще I потребителей, обладающих квазилинейными функциями полезности по отношению к торгуемому благу цены 1. Если задан вектор цен p, то мы через $\varphi_i\left(\tilde{h}_i\right)$ обозначим выведенную функцию полезности, зависящую лишь от уровня потребляемой экстерналии i-м потребителем $\tilde{h}_i$. Мы будем предполагать, что $\pi_j(\cdot)$ и $\varphi_i(\cdot)$ дважды дифференцируемы и $\pi''_j(\cdot) < 0$, $\varphi''_i(\cdot) > 0$. Для большей определенности мы ограничимся случаем $\varphi'_i(\cdot) < 0$ для всех i, так что будем иметь дело с отрицательной экстерналией.

Исчерпаемые экстерналии

Мы начнем со случая исчерпаемых экстерналий. Как и разделе 11.B, легко видеть, что уровень (отрицательной) экстерналии является чрезмерным в состоянии нерегулируемого конкурентного равновесия. Действительно, в конкурентном равновесии каждая фирма j желает поддерживать уровень активности величины h_j^*, удовлетворяющий условию

$$\pi_j\left(h_j^*\right) \leq 0 \text{ и } \pi_j\left(h_j^*\right) = 0, \text{ если } h_j^* > 0\,[13]. \tag{11.D.1}$$

[13] Фирмам все равно, на каких потребителей они воздействуют. Поэтому, помимо факта $\sum_i \tilde{h}_i = \sum_j h_j^*$, отдельные значения $\tilde{h}_i$ определить невозможно.

Напротив, любое Парето-оптимальное распределение предполагает уровни $\left(\tilde{h}_1^o, \ \ldots, \ \tilde{h}_I^o, \ h_1^o, \ \ldots, \ h_J^o\right)$, являющиеся решениями[14]

$$\max_{\substack{(h_1,\ldots,h_J)\geq 0 \\ (\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_I)>0}} \sum_{i=1}^{I} \varphi_i\left(\tilde{h}_i\right) + \sum_{j=1}^{J} \pi_j\left(h_j\right)$$

$$\text{при} \ \sum_{i=1}^{J} h_j = \sum_{i=1}^{I} \tilde{h}_i. \qquad (11.D.2)$$

Ограничение в (11.D.2) отражает исчерпаемость экстерналии: если $\tilde{h}_i$ увеличивается на единицу, то на долю остальных потребителей приходится на единицу меньше экстерналии. Пусть множитель μ соответствует этому ограничению, тогда необходимые и достаточные условия первого порядка задачи (11.D.2) таковы:

$$\varphi_i'\left(\tilde{h}_i^o\right) \leq \mu \ \text{и} \ \varphi_i'\left(\tilde{h}_i^o\right) = \mu, \ \text{если} \ \tilde{h}_i^o > 0, \ i = 1, \ldots, I, \qquad (11.D.3)$$

и

$$\mu \leq -\pi_j'\left(h_j^o\right) \ \text{и} \ \mu = -\pi_j'\left(h_j^o\right), \ \text{если} \ h_j^o > 0, \ j = 1, \ldots, J. \qquad (11.D.4)$$

Условия (11.D.3) и (11.D.4), наряду с ограничением в задаче (11.D.2), характеризуют оптимальные уровни производства и потребления экстерналии. Заметим, что они полностью соответствуют условиям эффективности для частного блага, выведенным в главе 10, условиям с (10.D.3) по (10.D.5), где мы интерпретируем $-\pi_j'(\cdot)$ как предельные издержки j-й фирмы по производству экстерналии. Если права собственности на экстерналию хорошо определены и поддерживаются и если I и J являются большими числами, так что ценополучение является разумной гипотезой, то по аналогии с анализом конкурентных рынков для частных благ в главе 10 можно ожидать, что введенный рынок для экстерналии приведет к оптимальным уровням производства и потребления исчерпаемой экстерналии.

Неисчерпаемые экстерналии

Теперь рассмотрим случай, когда экстерналии неисчерпаемы. Для определенности будем предполагать, что уровень экстерналии, воздействующей на *каждого* потребителя, равен $\sum_j h_j$, т. е. общему количеству экстерналий, произведенному всеми фирмами.

Если на конкурентное равновесие нет никакого воздействия, то h_j^*, уровень экстерналии, произведенной j-й фирмой, будет снова удовлетворять

[14] Целевая функция в (11.D.2) — всего лишь обычная разность между выгодами и издержками, которые характерны для совокупного излишка. Значит, $-\pi_j(\cdot)$ можно рассматривать как издержки j-й фирмы, понесенные при производстве экстерналии.

условию (11.D.1). Напротив, любое Парето-оптимальное распределение, предполагающее уровни производства экстерналии $\left(h_1^o, \ \ldots, \ h_J^o\right)$, является решением задачи

$$\max_{(h_1,\ldots,h_J)\geq 0} \sum_{i=1}^{I} \varphi_i\left(\sum_j h_j\right) + \sum_{j=1}^{J} \pi_j\left(h_j\right). \tag{11.D.5}$$

Необходимое и достаточное условие первого порядка, определяющее оптимальный уровень h_j^o, имеет вид

$$\sum_{i=1}^{I} \varphi_i'\left(\sum_j h_j^o\right) \leq -\pi_j'\left(h_j^o\right) \text{ и } \sum_{i=1}^{I} \varphi_i'\left(\sum_j h_j^o\right) = -\pi_j'\left(h_j^o\right), \text{ если } h_j^o > 0. \tag{11.D.6}$$

Условие (11.D.6) совершенно аналогично условию оптимальности для общественного блага, т. е. условию (11.C.1), где предельные издержки по производству экстерналии j-й фирмой равны $-\pi_j'(\cdot)$[15].

По аналогии с нашим обсуждением частного обеспечения общественных благ в разделе 11.C введение стандартного рынка для экстерналий *не* приведет здесь к оптимальному решению, как это было в двустороннем случае в разделе 11.B. Проблема безбилетника возникает вновь, и равновесный уровень (отрицательной) экстерналии превысит оптимальный уровень. Наконец, в случае неисчерпаемой многосторонней экстерналии решение, основанное на рыночных принципах, потребует введения индивидуализированных рынков для экстерналии, как в случае решения на основе равновесия Линдаля. Однако все проблемы, связанные с равновесием Линдаля и обсуждавшиеся в разделе 11.C, с неизбежностью возникнут и в случае таких рынков. В результате рыночные решения, вне зависимости от того, индивидуализированы они или нет, вряд ли будут работать в случае неисчерпаемой экстерналии[16].

Напротив, если имеется адекватная информация (сильное допущение!), правительство *может* достичь оптимальности, используя квоты или налоги. Введя квоты, правительство просто устанавливает верхний предел для каждой j-й фирмы, ограничивая уровень производимой экстерналии, т. е. оптимальным уровнем h_j^o. С другой стороны, как в разделе 11.B, налоги, восстанавливающие оптимальность для любой фирмы, совпадают с предельными общественными издержками, создаваемыми экстерналией. В данном случае оптимальная ставка налога одинакова для всех фирм

[15] Вспомним, что функцию издержек одной фирмы $c(\cdot)$ из раздела 11.C можно рассматривать как совокупную функцию издержек J отдельных максимизирующих прибыль фирм. Если бы мы захотели явным образом смоделировать эти J фирм в разделе 11.C, то условие оптимальности для производства общественного блага приняло бы в точности вид (11.D.6), где $c_j'\left(h_j^o\right)$ заменено на $-\pi_j'\left(h_j^o\right)$.

[16] Общественная природа экстерналии приводит к проблемам, аналогичным проблеме безбилетника в любом из решений на основе торга (см. упражнение 11.D.6 в качестве иллюстрации).

и равна $t_h = -\sum_i \varphi_i'\left(\sum_j h_j^o\right)$ за единицу производимой экстерналии. При таком налоге каждая фирма j решает задачу

$$\max_{h_j \geq 0} \pi_j\left(h_j\right) - t_h h_j,$$

необходимым и достаточным условием первого порядка для которой является условие

$$\pi_j'\left(h_j\right) \leq t_h \text{ и } \pi_j'\left(h_j\right) = t_h, \text{ если } h_j > 0.$$

При $t_h = -\sum_i \varphi_i'\left(\sum_j h_j^o\right)$ оптимальным выбором фирмы будет $h_j = h_j^o$.

Подход, основанный на модели частичного равновесия, позволяющий достичь оптимальности в случае неисчерпаемой многосторонней экстерналии, предполагает вычисление квоты на *общий* уровень экстерналии и распределения некоторого количества *торгуемых разрешений на производство экстерналии* (каждое разрешение дает право фирме произвести одну единицу экстерналии). Предположим, что общее число разрешений, выданных фирмам, равно $h^o = \sum_j h_j^o$, где фирма j получает $\bar{h}_j$ разрешений. Пусть p_h^* обозначает равновесную цену этих разрешений. Тогда спрос j-й фирмы на разрешения в объеме h_j является решением задачи $\max_{h_j \geqslant 0}\left(\pi_j\left(h_j\right) + p_h^*\left(\bar{h}_j - h_j\right)\right)$ и, таким образом, удовлетворяет необходимому и достаточному условию первого порядка $\pi_j'\left(h_j\right) \leq p_h^*$, где равенство достигается в случае $h_j > 0$. В дополнение к сказанному уравновешенность рынка разрешений предполагает $\sum_j h_j = h^o$. Тогда равновесная цена разрешений на этом рынке $p_h^* = -\sum_i \varphi_i'\left(h^o\right)$, каждая фирма j использует h_j^o и тем самым достигает оптимальности. Преимущество этого способа по сравнению с методом строгих квот проявляется, когда правительство обладает ограниченной информацией относительно функций $\pi_j(\cdot)$ и не может с точностью сказать, какая из фирм сможет эффективно справиться с бременем снижения экстерналии, в то время как, возможно, оно обладает достаточной информацией, например статистического характера, позволяющей вычислить оптимальный агрегированный уровень экстерналии h^o.

11.E. Частная информация и вторые наилучшие решения

На практике степень воздействия экстерналии на агента или степень выгоды, получаемой агентом от потребления общественного блага, обычно известны только ему. Наличие *частной* (или *асимметричной*) информации может подорвать как централизованные (например, квоты и налоги), так и децентрализованные (например, с помощью торга) попытки достичь оптимальности. В этом разделе мы дадим введение в эту проблематику, для простоты концентрируя внимание на двусторонней экстерналии, которую мы рассматривали в разделе 11.B. Следуя договоренности из раздела 11.D, мы будем полагать здесь, что агент, создающий экстерналию, является фирмой, а агент, потребляющий ее, — потребителем. (Для более общего исследования темы данного раздела см. главу 23.)

Предположим, например, что мы можем записать выведенную функцию полезности (как ее найти, см. раздел 11.B), зависящую от уровня экстерналии h, в виде $\varphi(h, \eta)$, где $\eta \in \mathbb{R}$ является параметром, называемым *типом* потребителя, от значения которого зависят издержки, понесенные потребителем от экстерналии. Аналогично пусть $\pi(h, \theta)$ обозначает выведенную функцию прибыли фирмы типа $\theta \in \mathbb{R}$. Истинные значения θ и η *наблюдаемы лишь частным образом:* только потребитель знает свой тип η и только фирма знает свой тип θ. Однако *ex ante* оценки (распределения вероятностей) величин θ и η известны всем. Для удобства мы будем предполагать, что θ и η распределены независимо. Как и раньше, мы будем предполагать, что $\pi(h, \theta)$ и $\varphi(h, \eta)$ строго вогнуты по h для любых данных значений θ и η.

Децентрализованный торг

Сначала рассмотрим децентрализованный подход к проблеме экстерналий. Вообще говоря, при наличии двусторонней асимметричной информации торг *не приведет* к эффективному уровню экстерналии. Чтобы это увидеть, снова рассмотрим случай, когда потребитель обладает правом на окружающую среду без экстерналии, и рассмотрим процедуру простого торга, заключающуюся в том, что потребитель предлагает фирме сделку по принципу «не хочешь — не бери». Для простоты будем предполагать, что есть всего два возможных уровня экстерналии — нулевой и $\bar{h} > 0$, и сфокусируемся на случае отрицательной экстерналии, в котором уровень $\bar{h}$ по сравнению с 0 является вредным для потребителя и выгодным для фирмы (этот же анализ легко может быть проведен для случая положительной экстерналии).

Удобно определить $b(\theta) = \pi(\bar{h}, \theta) - \pi(0, \theta) > 0$ как меру выгоды фирмы типа θ от активности, приводящей к производству экстерналии. Аналогично пусть $c(\eta) = \varphi(0, \eta) - \varphi(\bar{h}, \eta) > 0$ — издержки потребителя, понесенные им от экстерналии уровня $\bar{h}$. В этой простой модели нас будут интересовать значения функций b и c, зависящие от типа агентов. Следовательно, мы сфокусируемся на возможных значениях b и c, которые могут возникать у агентов. Функции распределения этих величин будем обозначать $G(b)$ и $F(c)$, понимая, что они, в свою очередь, порождены вероятностными распределениями типов θ и η (заметим, что в силу независимости θ и η b и c также независимы). Для простоты будем считать, что у этих распределений есть плотности $g(b)$ и $f(c)$, для которых $g(b) > 0$, $f(c) > 0$ для всех $b > 0$, $c > 0$.

Так как потребитель обладает правом на среду без экстерналии, то при отсутствии соглашения он будет настаивать на том, чтобы фирма придерживалась $h = 0$ (вспомним, что $c > 0$). Однако при наличии соглашения, обеспечивающего Парето-оптимальность для всех значений b и c, фирме должно быть разрешено устанавливать $h = \bar{h}$, если выполнено условие $b > c$.

Теперь посмотрим, сколько потребитель захочет получить от фирмы при наличии издержек величины c в ответ на разрешение производить экстерналию. Так как фирма знает, что потребитель будет настаивать на $h = 0$ в отсутствие соглашения, то фирма согласится заплатить сумму T в том и только в том случае, если $b \geq T$. Следовательно, потребитель знает, что если он потребует от фирмы платеж T, то вероятность того, что фирма согласится на такой платеж, равна вероятности того, что $b \geq T$, т. е. $1 - G(T)$. С учетом издержек $c > 0$ (и допуская нейтральность к риску) потребитель решает задачу по поиску оптимального T,

$$\max_T \left(1 - G(T)\right)\left(T - c\right). \tag{11.E.1}$$

Целевая функция задачи (11.E.1) представляет собой вероятность того, что фирма согласится на сделку, умноженную на чистый выигрыш потребителя, если это случится, $(T - c)$. В силу сделанных предположений целевая функция в (11.E.1) строго положительна для всех $T > c$ и равна 0 при $T = c$. Поэтому решение, скажем T_c^*, удовлетворяет $T_c^* > c$. Но отсюда, в свою очередь, вытекает, что переговорный процесс приведет к строгой вероятности неэффективного результата, так как всякий раз, когда выигрыш фирмы b удовлетворяет $c < b < T_c^*$, фирма будет отвергать предложение потребителя и будет устанавливать нулевой уровень экстерналии, в то время как оптимальность предполагает, что $h = \bar{h}$[17, 18].

Квоты и налоги

Аналогично тому, что децентрализованный торг при частном владении информацией приводит к неэффективному решению, применение квот и налогов дает такой же неэффективный результат. Более того, как показал Вейцман (Weitzman, 1974), наличие асимметричной информации приводит к тому, что эти два типа политики более не являются совершенными заменителями, как это было в модели раздела 11.B[19].

[17] Обратите внимание на сходство задачи (11.E.1) с задачей монополиста, рассматриваемой в разделе 12.B. В данном случае неспособность потребителя дискриминировать между фирмами разных типов приводит к неэффективному решению задачи по поиску оптимального решения.

[18] Мы могли бы, конечно, рассмотреть результаты при других, более сложных процедурах торга. Однако имеется результат, принадлежащий Майерсону и Саттеруэйту (Myerson, Satterthwaite, 1983), который гласит, что *не существует* процедуры торга, которая привела бы к оптимальному результату для всех значений b и c в рамках этой модели. Мы остановимся на нем в главе 23.

[19] Из последующей дискуссии также вытекают следствия, показывающие относительные преимущества в организациях механизмов контроля, основанных на количестве, по отношению к механизмам, основанным на ценах.

Для начала заметим, что при данных θ и η агрегированный излишек при экстерналии уровня h (здесь мы возвращаемся к континууму возможных уровней экстерналии) равен $\varphi(h, \eta) + \pi(h, \theta)$. Таким образом, уровень экстерналии, максимизирующий агрегированный излишек, вообще говоря, зависит от реализуемых значений (θ, η). Мы обозначим это оптимальное значение $h^o(\theta, \eta)$. На рис. 11.E.1 показаны оптимальные значения для двух различных наборов параметров: (θ', η') и (θ'', η'').

Сперва предположим, что уровень квоты $\hat{h}$ фиксирован. Тогда фирма выберет уровень экстерналии, являющийся решением задачи

$$\max_{h \geq 0} \pi\left(h,\ \theta\right),$$
$$\text{при}\ \ h \leq \hat{h}.$$

Обозначим этот оптимальный выбор $h^q\left(\hat{h},\ \theta\right)$. Типичным результатом введения такой квоты будет то, что действительный уровень экстерналии окажется гораздо менее чувствительным к значениям θ и η, чем того требует оптимальность. Уровень экстерналии, производимой фирмой, окажется совершенно нечувствительным к η. Более того, если уровень квоты $\hat{h}$ таков, что $\partial\pi\left(\hat{h},\ \theta\right)/\partial h > 0$ для всех θ, то мы будем иметь $h^q\left(\hat{h},\ \theta\right) = \hat{h}$ для любого θ. Потеря агрегированного излишка из-за квоты для типов (θ, η) представлена формулой

$$\varphi\left(h^q\left(\hat{h},\ \theta\right),\ \eta\right) + \pi\left(h^q\left(\hat{h},\ \theta\right),\ \theta\right) - \varphi\left(h^o\left(\theta,\ \eta\right),\ \eta\right) - \pi\left(h^o\left(\theta,\ \eta\right),\ \theta\right) =$$
$$= \int_{h(\theta,\eta)}^{h^q\left(\hat{h},\theta\right)} \left(\frac{\partial\pi\left(h,\ \theta\right)}{\partial h} + \frac{\partial\varphi\left(h,\ \eta\right)}{\partial h}\right) \mathrm{d}h.$$

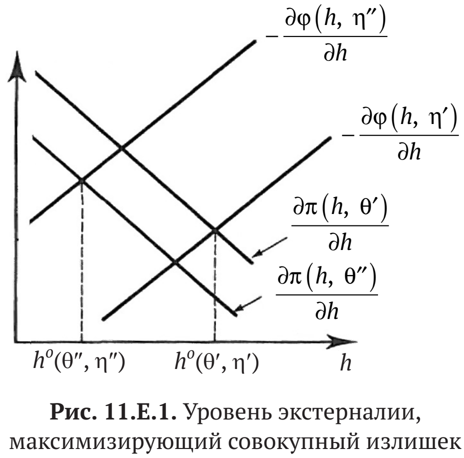


Рис. 11.E.1. Уровень экстерналии, максимизирующий совокупный излишек для двух различных значений параметров, (θ', η') и (θ'', η'')

Эта потеря изображена заштрихованной областью на рис. 11.E.2 для случая, когда квота положена равной $\hat{h} = h^o\left(\bar{\theta},\ \bar{\eta}\right)$. Это уровень экстерналии, максимизирующий общественный излишек, когда θ и η принимают свои средние значения $\bar{\theta}$ и $\bar{\eta}$ (штриховые линии на рисунке являются графиками функций $\partial\pi\left(h,\ \bar{\theta}\right)/\partial h$ и $-\partial\varphi\left(h,\ \bar{\eta}\right)/\partial h$, а сплошные — функций $\partial\pi\left(h,\ \theta\right)/\partial h$, $-\partial\varphi\left(h,\ \eta\right)/\partial h$; заметим, что в рассмотренном случае фирма хотела бы производить экстерналию вплоть до уровня квоты $\hat{h}$).

Теперь рассмотрим случай взимания с фирмы налога по ставке t единиц, измеряемых в терминах блага, имеющего единичную цену. Для любого данного значения θ фирма выберет уровень производимой экстерналии, являющийся решением задачи

$$\max_{h\geqslant 0} \pi\left(h,\ \theta\right) - th.$$

Обозначим оптимальный уровень экстерналии, выбранный фирмой, $h^t\left(t,\ \theta\right)$. Потеря совокупного излишка из-за налога по сравнению с оптимальным уровнем для типов (θ, η) может быть найдена по формуле

$$\varphi\left(h^t\left(t,\ \theta\right),\ \eta\right) + \pi\left(h^t\left(t,\ \theta\right),\ \theta\right) - \varphi\left(h^o\left(\theta,\ \eta\right),\ \eta\right) - \pi\left(h^o\left(\theta,\ \eta\right),\ \theta\right) =$$
$$\int\limits_{h(\theta,\eta)}^{h^t(t,\theta)} \left(\frac{\partial\pi\left(h,\ \theta\right)}{\partial h} + \frac{\partial\varphi\left(h,\ \eta\right)}{\partial h}\right) \mathrm{d}h.$$

Величина потерь изображена затемненной областью на рис. 11.E.3, но теперь мы допускаем, что уровень ставки выбран согласно $t = -\partial\varphi\left(h^o\left(\bar{\theta},\ \bar{\eta}\right),\ \bar{\eta}\right)/\partial h$, т. е. при этой ставке максимизируется совокупный

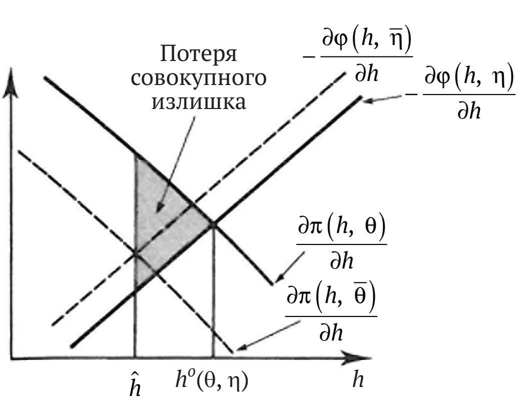


Рис. 11.E.2. Потеря совокупного излишка из-за квоты для типов (θ, η)

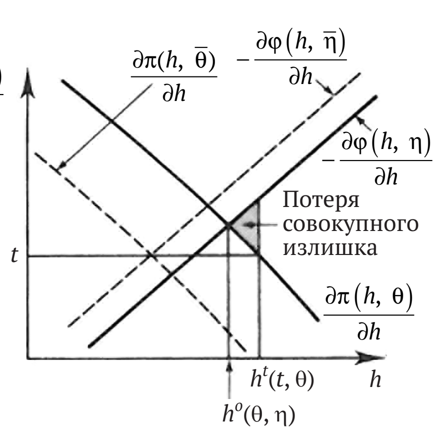


Рис. 11.E.3 Потеря совокупного излишка из-за налога для типов (θ, η)

излишек при $(\theta,\ \eta) = (\bar{\theta},\ \bar{\eta})$. Заметим, что при взимании налога, как и при введении квоты, уровень экстерналии чувствителен к изменениям предельной выгоды фирмы, но нечувствителен к изменениям предельных издержек потребителя.

Какие из этих инструментов лучше работают, налог или квота? Ответ таков: в зависимости от обстоятельств. Например, представим, что η постоянно и равно $\bar{\eta}$. Тогда для значений θ, при которых выгода для фирмы от производства экстерналии высока, как правило, квота не даст возможности произвести экстерналию, чтобы достичь оптимума. С другой стороны, поскольку фиксированная ставка t не учитывает возрастающих предельных издержек от потребления экстерналии, для таких значений θ налог может привести к перепроизводству экстерналии.

Интуитивно понятно, что когда оптимальный уровень экстерналии мало изменяется с изменением θ, мы ожидаем, что квота предпочтительнее. На рис. 11.E.4(a), например, изображен случай, когда предельные издержки потребителя равны нулю вплоть до некоторого значения h^*, а потом становятся бесконечными. В этом случае, устанавливая квоту на уровне $\hat{h} = h^*$, мы сможем максимизировать совокупный излишек для любых значений $(\theta,\ \eta)$, но никакой налог не позволит этого сделать. Придется установить ставку налога на очень высоком уровне, с тем чтобы с вероятностью единица уровень экстерналии, установленный фирмой, был не больше h^*. Но если это так, то результирующий уровень экстерналии будет большую часть времени слишком низким.

Напротив, на рис. 11.E.4(b) мы изобразили случай, когда предельные издержки потребителя, вызванные экстерналией, не зависят от h. В этом случае ставка налога, равная предельным издержкам ($t = t^*$), позволит до-

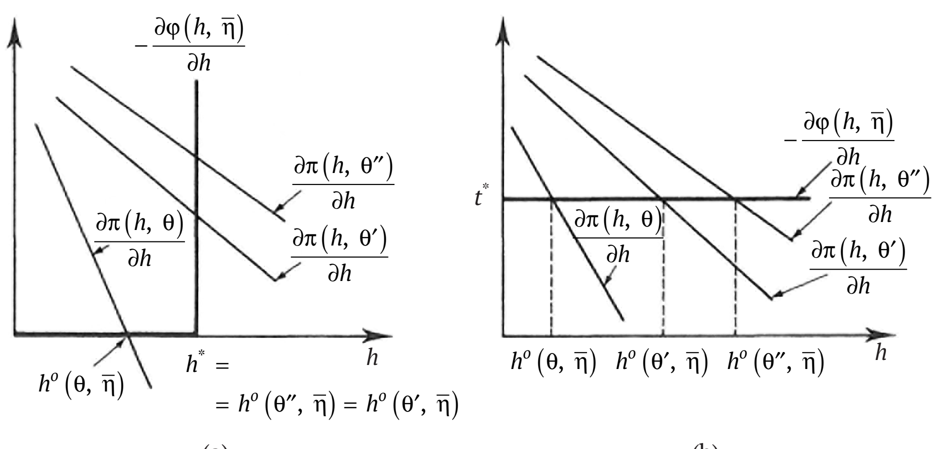


Рис. 11.E.4. Два случая, в которых квота или налог максимизируют совокупный излишек для любого значения θ:
(a) квота $\hat{h} = h^*$ максимизирует совокупный излишек для всех θ;
(b) налог $t = t^*$ максимизирует совокупный излишек для всех θ

стичь уровня экстерналии, при котором максимизируется излишек для всех (θ, η), однако квота такого эффекта не дает.

Если мы примем ожидаемое значение совокупного излишка как меру благосостояния, то увидим из этих двух примеров, что инструмент политики можно выбрать исходя из обстоятельств[20]. (В упражнении 11.E.1 вам будет предложено провести полный анализ в случае линейно-квадратичного примера.) Заметим также, что процедура торга, которую мы обсуждали, не приведет к оптимальности ни в одном из двух случаев, изображенных на рис. 11.E.4[21]. Таким образом, здесь мы имеем дело с двумя случаями, в которых введение квоты или налога справляется с неэффективностью лучше, чем специальное децентрализованное решение[22].

В упражнении 11.E.2 вам будет предложено распространить представленный здесь анализ на случай двух фирм ($j = 1, 2$), производящих экстерналию, с учетом того что фирмы идентичны, за исключением реализуемых уровней θ_j. Упражнение иллюстрирует важность уровня корреляции между θ_j для сопоставления качества регулирования за счет квот по сравнению с налогообложением. При сравнении однородной политики квотирования с однородной политикой налогообложения (однородность здесь понимается в том смысле, что одинаковые налоги или квоты применяются к обеим фирмам) мы видим, что чем менее коррелированы шоки между фирмами, тем предпочтительнее выглядит налог. Причину этого легко понять. При несовершенной корреляции однородный налог имеет преимущество, недостижимое при квотировании: налог позволяет производить экстерналию на индивидуальных уровнях, причем эти уровни зависят от реализуемых значений θ_j. Действительно, при равномерном налоге производство общего объема экстерналии всегда эффективно распределяется между фирмами.

Наличие нескольких производителей экстерналии порождает возможность создания рынка торгуемых разрешений на выбросы, так как это обсуждалось в конце раздела 11.D. Это простое дополнение к политике квотирования потенциально может снять проблему неэффективного распределения производства между фирмами, что часто характеризует политику квот. В частности, предположим, что вместо определения уровня квот для каждой фирмы в отдельности мы выделяем им торгуемые разрешения, позволяющие им производить выбросы в объеме, равном величинам квот. Предположим далее, что каждая фирма готова использовать свою квоту

---

[20] В главе 13 мы детально обсудим некоторые вопросы сравнения благосостояния в случаях, когда информация доступна лишь на частном уровне. Мы обоснуем максимизацию ожидаемого совокупного излишка в рамках модели частичного равновесия как требование Парето-оптимальности *ex ante* в случае двух агентов. Также обратите внимание на обсуждение в разделе 23.F.

[21] Строго говоря, предыдущее обсуждение торга предполагало лишь два возможных уровня экстерналии, в то время как мы имеем дело с множеством уровней мощности континуум. Это различие несущественно. Неэффективность процедуры торга, изученная ранее, окажется неэффективной и в непрерывном случае.

[22] Мы хотели бы подчеркнуть, что в этих двух примерах другие процедуры торга будут работать лучше, чем процедура, заявленная потребителем по принципу «не хочешь — не бери». Например, если фирма предлагает «не хочешь — не бери», то полная эффективность достижима в *обоих* случаях, потому что тип потребителя известен с определенностью. Поэтому наши выводы имеют качественный характер: при наличии асимметричной информации крайне трудно делать общие выводы об относительных преимуществах централизованных методов по сравнению с децентрализованными.

в отсутствие торговли. Тогда торговля должна привести *по меньшей мере* к тому же значению совокупного излишка, что и при схеме простого квотирования для любых значений типов фирм и потребителей, потому что мы получим тот же объем выбросов и у нас никогда не будет такой торговли между фирмами, которая понижала бы совокупную прибыль[23]. Конечно, та же проблема торга, которую мы ранее рассматривали, может помешать эффективному распределению производства экстерналии, но если фирмы знают величины θ_j друг друга или же их так много, что они могут составить конкуренцию на рынке прав на выбросы, то мы можем ожидать, что распределение выпусков общего объема экстерналии будет эффективным. На самом деле в том случае, когда статистическое распределение издержек между фирмами известно, а практическая реализация для отдельных фирм неизвестна, этот тип политики позволяет добиться полностью эффективного результата.

Более общие механизмы регулирования

Схемы налогообложения и квотирования, которые мы рассмотрели выше, были совершенно нечувствительны к изменениям предельных издержек экстерналии, воздействующей на агента (в нашем случае потребителя). Естественно поинтересоваться, нет ли других схем, работающих лучше, например за счет изменения уровня производимой экстерналии в ответ на издержки потребителя. Проблема здесь в том, что эти выгоды и издержки ненаблюдаемы и стороны могут быть не заинтересованы в правдивом их раскрытии. Например, предположим, что правительство просто спрашивает фирму и потребителя об их издержках и выгодах, порожденных экстерналией, и затем принимает меры по достижению оптимальности. В этом случае потребитель будет склонен завышать свои издержки, чтобы у правительства были основания для запрета на экстерналию. Вопрос в том, как разработать механизмы, которые не давали бы возможности искажать предоставляемую информацию и, как следствие, позволяли бы правительству достигать эффективного результата. Эта проблема в очень общей форме будет рассмотрена в главе 23; здесь мы ограничимся коротким анализом хорошо известной схемы.

Вернемся к случаю, когда есть только два возможных уровня экстерналии, 0 и $\bar{h}$. Могли бы мы придумать схему, позволяющую достичь оптимального уровня экстерналии для каждого значения b (величины выгоды фирмы от экстерналии) и c (величины издержек потребителя)? Докажем теперь, что ответ на этот вопрос утвердительный.

Представим себе, что правительство объявляет об установлении *механизма раскрытия*: фирму и потребителя просят сообщить их значения b и c соответственно. Пусть $\hat{b}$ и $\hat{c}$ обозначают сообщенные величины. Для любой возможной пары величин $\left(\hat{b},\ \hat{c}\right)$ правительство устанавливает разрешенный уровень экстерналии, а также уровень налога или субсидии для

[23] Однако заметим, что предположение об экстерналиях, производимых различными фирмами, как о совершенных заменителях для потребителя чрезвычайно критично для этого вывода. Если бы это было не так, то перераспределение выпусков экстерналии между фирмами могло бы понизить совокупный излишек за счет понижения благосостояния агентов, на которых действует экстерналия.

каждого из агентов. Предположим, в частности, что правительство объявляет, что оно будет устанавливать уровень экстерналии h исходя из максимизации совокупного излишка при данных значениях $\left(\hat{b},\ \hat{c}\right)$. То есть $h = \bar{h}$ в том и только в том случае, если $\hat{b} > \hat{c}$. В дополнение к этому, если производить экстерналию можно (т. е. если $h = \bar{h}$), то правительство будет взимать налог $\hat{c}$ и будет субсидировать потребителя на величину $\hat{b}$. То есть если фирма желает производить экстерналию (о чем можно судить исходя из большого значения b), ей придется платить налог согласно значению издержек потребителя; и если потребитель соглашается на производство экстерналии (сообщая низкое значение c), то он получает субсидию в размере сообщаемой выгоды фирмы.

На самом деле *при применении этой схемы фирма и потребитель* будут сообщать правду, так что оптимальный уровень производства экстерналии будет действительно достигаться при любой возможной паре (b, c). Чтобы это понять, рассмотрим предоставление оптимальной информации потребителем при фактических издержках c. Если фирма объявляет $\hat{b} > c$, то потребителю выгодно, чтобы экстерналия производилась (у него благосостояние в этом случае больше на $\hat{b} - c$, чем в отсутствие экстерналии). Следовательно, его оптимальное объявление издержек удовлетворяет $\hat{c} < \hat{b}$. Более того, так как любое такое извещение дает один тот же выигрыш, то он мог бы с таким же успехом сообщить правду, т. е. $\hat{c} = c < \hat{b}$. С другой стороны, если фирма объявляет $\hat{b} \leq c$, то потребитель предпочитает иметь нулевой уровень экстерналии. Следовательно, он будет объявлять уровень издержек $\hat{c} \geq \hat{b}$, и опять, так как любое такое объявление порождает одинаковый выигрыш, он вполне может объявить правду, т. е. $\hat{c} = c \geq \hat{b}$. Таким образом, что бы ни объявляла фирма, потребителю выгодно говорить правду. (Формально сообщение правды является для потребителя *слабо доминирующей стратегией* в смысле, рассмотренном в разделе 8.B. На самом деле эта стратегия является *единственной* слабо доминирующей; см. упражнение 11.E.3). Параллельный анализ дает аналогичное заключение и для фирмы.

Упражнение 11.E.4. Покажите, что мы могли бы добавить к процедуре, рассмотренной выше, механизм налогов и субсидий, и это не повлияло бы на свойство правдивости информации, приводящей к оптимальности, при этом дополнительные платежи любому из агентов произвольным образом зависят от объявлений агентов.

Схема, которую мы рассмотрели выше, является примером механизма, называемого механизмом Гровса — Кларка (в честь Гровса (Groves, 1973) и Кларка (Clarke, 1971); также см. раздел 23.C), и первоначально был описан как механизм, помогающий выяснить, стоит ли вкладывать в социальные проекты. Некоторые применения этого механизма в контексте общественных благ содержатся в упражнениях в конце этой главы.

Механизм Гровса — Кларка имеет две очень привлекательные черты: он позволяет достичь оптимального уровня экстерналии для любой пары (b, c), и побуждает к правде в сильном смысле (т. е. в смысле доминирующей стратегии). Но этот механизм имеет также и негативные стороны. В частности, он не приводит к сбалансированному бюджету правительства. У правительства возникает дефицит величины $(b - c)$ всякий раз при $b > c$. Мы можем воспользоваться гибкой схемой, описанной в упражнении 11.E.4, чтобы избавиться от дефицита для любых возможных (b, c), но тогда с необходимостью возникнет профицит бюджета, что влечет за собой неэффективный по Парето результат для некоторых значений (b, c) (не все единицы блага, имеющего единичную цену, останутся в руках потребителя или фирмы).

На самом деле эта проблема не может быть решена в рамках этого механизма: если мы хотим сохранить свойство, позволяющее для любых (b, c) получать правдивые ответы как доминирующую стратегию и достигать оптимального уровня экстерналии, то, вообще говоря, мы не сможем добиться сбалансированности бюджета для всех (b, c). В главе 23 мы обсудим эти вопросы в деталях и также рассмотрим другие механизмы, которые могли бы помочь нам при некоторых условиях обойти эту трудность. (Смотрите также упражнение 11.E.5, в котором условие сбалансированности бюджета требуется лишь в среднем.)

Приложение А: отсутствие выпуклости и теория экстерналий

На протяжении этой главы мы придерживались допущения, что предпочтения и производственные множества выпуклы, что влекло за собой свойство вогнутости для выведенных функций полезности и прибыли. При этих допущениях все проблемы, которые мы решали, вели себя хорошо; они имели единственные решения (или, если говорить более обще, решения, множество значений которых выпукло), эти решения непрерывно зависели от параметров задач (например, от цен L торгуемых благ или от цены экстерналии, если для нее существует рынок). И все же это не вполне невинное допущение. В этом приложении мы приведем некоторые простые примеры, показывающие, что экстерналии могут породить невыпуклые структуры, и дадим комментарии по поводу некоторых вытекающих отсюда следствий.

Мы рассмотрим двустороннюю экстерналию в модели с двумя фирмами. Будем предполагать, что первая фирма вовлечена в активность, производящую экстерналию, и эта экстерналия воздействует на производство второй фирмы. Уровень экстерналии, производимой фирмой 1, обозначим h и прибыли j-й фирмы, зависящие от экстерналии уровня h, обозначим $\pi_j(h)$ для $j = 1, 2$. Совершенно естественно предположить, что $\pi_1(\cdot)$ вогнутая: уровень h, например, мог бы быть равен выпуску первой фирмы[24]. Как покажут примеры 11.AA.1 и 11.AA.2, это может не выполняться в отношении функции прибыли второй фирмы.

[24] Заметим также, что мы могли бы вполне предположить, что $\pi_1(h) < 0$ для некоторых уровней $h \geq 0$, потому что $\pi_1(h)$ является максимизированной прибылью фирмы 1, зависящей от уровня экстерналии h (так что закрытие фирмы невозможно, если $h > 0$).

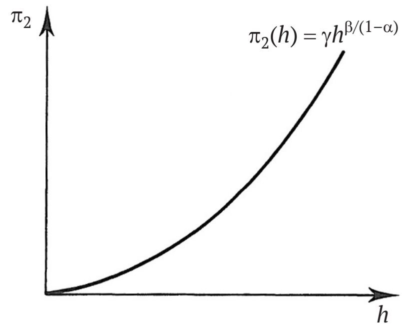


Рис. 11.AA.1. Функция прибыли второй фирмы (на которую воздействует экстерналия) из примера 11.AA.1, когда $\alpha + \beta > 1$

Пример 11.AA.1. *Положительные экстерналии как причина возрастающей отдачи от масштаба.* Предположим, что фирма 2 производит продукцию, цена которой равна единице, используя фактор, цена которого тоже для простоты взята равной единице. Производственная функция второй фирмы равна $q = h^\beta z^\alpha$, где $\alpha, \beta \in [0; 1]$. Таким образом, экстерналия является положительной[25]. Заметим, что для фиксированного h задача фирмы 2 вогнутая и удобна для анализа. Для уровня h максимизация прибыли второй фирмы может быть найдена и равна $\pi_2(\mathrm{h}) = \gamma h^{\beta/(1-\alpha)}$, где $\gamma > 0$ — константа. На рис. 11.AA.1 мы изобразили $\pi_2(\mathrm{h})$ для $\beta > 1 - \alpha$. Нетрудно видеть, что полученная функция прибыли фирмы 2 *не является вогнутой* по h, напротив, она выпуклая. Мы отразили тот факт, что если экстерналия h является фактором второй фирмы, то полная производственная функция будет обладать возрастающей отдачей от масштаба, потому что $\alpha + \beta > 1$. ■

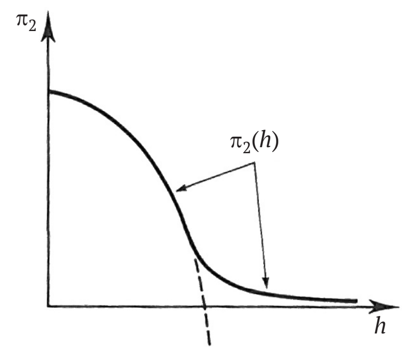


Рис. 11.AA.2. Если фирма, реципиент отрицательной экстерналии, может закрыться и получить нулевую прибыль при любом уровне экстерналии, то полученная функция прибыли $\pi_2(\cdot)$ не может быть вогнутой для всех $h \in [0; \infty]$

Пример 11.AA.2. *Отрицательные экстерналии как причина потери выпуклости.* В примере 11.AA.1 невыпуклость производственного множества второй фирмы явилась следствием потери вогнутости полученной функции прибыли, и причиной этой потери была положительная экстерналия. В данном примере потеря вогнутости полученной функции прибыли произойдет из-за отрицательной экстерналии.

Предположим, в частности, что $\pi_2'(h) \le 0$ для всех h, со строгим неравенством для некоторых h, и что вторая фирма может закрыть производство, если уровень экстерналии составит h и ее прибыль снизится до нуля[26]. В этом случае функция $\pi_2(\cdot)$ никогда не может быть вогнутой для всех $h \in [0; \infty)$, на этот факт впервые обратил внимание Старетт (Starrett, 1972). Причина этого явления проиллюстрирована на рис. 11.AA.2: если бы $\pi_2(\cdot)$ была

[25] Если рассуждать более общо, то мы могли представить себе отрасль, состоящую из многих фирм, где экстерналия создается всеми фирмами и воздействует на все фирмы отрасли (например, h мог бы быть индексом, коррелированным с выпуском, определяющим аккумулированные знания в отрасли).

[26] В более типичном случае многосторонней экстерналии способность задействованных сторон закрыть производство часто зависит от того, является ли экстерналия исчерпаемой. В случае неисчерпаемой экстерналии, такой как загрязнение воздуха, задействованные фирмы всегда могут закрыться и получить нулевую прибыль. Напротив, в случае исчерпаемой экстерналии (такой, как мусор), где $\pi_j(h)$ отражает прибыль j-й фирмы, когда фирма сама поглощает h единиц экстерналии, поглощение экстерналии может само потребовать использования факторов (например, земли для складирования мусора). Действительно, если бы это было не так для исчерпаемой экстерналии, то всегда можно было бы поглотить экстерналию, не неся общественных издержек за счет передачи экстерналии фирме, которая закроется.

строго убывающей вогнутой функцией, то для некоторых значений h она неизбежно принимала бы отрицательные значения (смотрите на штриховую кривую), но $\pi_2(\cdot)$ должна быть неотрицательной, если фирма 2 всегда сможет закрыться. ■

Потеря вогнутости может создать проблемы как для централизованных, так и для децентрализованных решений задачи экстерналий. Например, если права собственности на экстерналию определены и рынок экстерналии введен в примерах 11.AA.1 или 11.AA.2, конкурентного равновесия может не существовать (даже если предположить, что оба агента действуют как ценополучатели). Целевая функция второй фирмы не будет вогнутой, так что ее оптимальный спрос может не иметь хорошо определенных свойств и не быть непрерывным (вспомните обсуждение в разделе 10.C вопросов существования равновесия в случае невыпуклых функций издержек фирм).

Напротив, налоги и квоты могут в принципе по-прежнему способствовать достижению оптимального результата, несмотря на отсутствие вогнутости функции прибыли второй фирмы, потому что использование этих механизмов зависит лишь от функции прибыли фирмы, производящей экстерналию (в нашем случае первой фирмы), которая имеет хорошие свойства. Однако на практике невогнутость функции прибыли фирмы 2 может точно так же создать препятствия для применения этих централизованных методов. Это замечание иллюстрирует пример 11.AA.3.

Пример 11.AA.3. *Экстерналии как причина множественных локальных общественных оптимумов.* В принципе верно, что если задача фирмы, производящей экстерналию, является вогнутой, то оптимум может быть достигнут за счет налогов или квот. Но если $\pi_2(\cdot)$ не является вогнутой, то функция совокупного общественного излишка $\pi_1(h) + \pi_2(h)$ может не быть вогнутой, и в результате условия первого порядка для максимизации совокупного излишка могут оказаться всего лишь достаточными для определения локальных оптимумов. Действительно, как отмечали Баумол и Оутс (Baumol, Oates, 1988), невыпуклости, созданные экстерналиями, могут легко породить ситуации с множественными локальными общественными оптимумами, так что поиск глобального оптимума может стать очень трудной задачей.

Предположим, например, что функции прибыли двух фирм имеют вид

$$\pi_1(h) = \begin{cases} h \text{ для } h \le 1, \\ 1 \text{ для } h > 1, \end{cases}$$

$$\pi_2(h) = \begin{cases} 2\left(1 - h^2\right) \text{ для } h \le 1, \\ 0 \text{ для } h > 1. \end{cases}$$

Функция $\pi_2(\cdot)$ не является вогнутой, что может иметь место, как показали два предыдущих примера, при наличии экстерналий. Уровни прибыли двух фирм, которые достижимы для различных значений h, изображены на рис. 11.AA.3 заштрихованной фигурой $\{(\pi_1, \pi_2)\colon \pi_j \le \pi_j(h)$ при $j = 1, 2$ и некоторых $h > 0\}$ (заметим, что такое определение разрешает свободное расходование). Общественный оптимум достигается при $h = 0$ (тогда совместная прибыль равна 2), и в этом случае фирма 2 может осуществлять производство в среде, свободной от экстерналии. Этого можно добиться, установив ставку налога $t > 1$ за единицу экстерналии. Но заметим, что

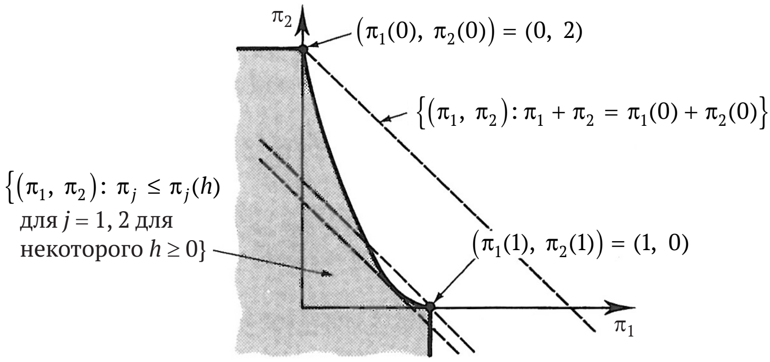


Рис. 11.AA.3. Множество возможных пар прибылей (π_1, π_2) в примере 11.AA.3 показывает, что существует много локальных максимумов совокупного излишка $\pi_1(h) + \pi_2(h)$

результат $h = 1$ (который можно получить, установив ставку на уровне $t = 0$) является локальным общественным оптимумом: если мы уменьшаем h, то увеличение совокупного излишка не наступает вплоть до $h < \frac{1}{2}$, оставаясь ниже, чем для $h = 1$. Следовательно, этот последний результат удовлетворяет условиям как первого, так и второго порядка для максимизации совокупного излишка (т. е. в этой точке предельные выгоды от экстерналии в точности равны предельным издержкам от нее), и социальный планировщик легко может ошибиться и посчитать, что общество находится в максимуме благосостояния. ■

Литература

Arrow, K.J. (1969). The organization of economic activity: Issues pertinent to the choice of market versus non-market allocation. *In collected Papers of K.J. Arrow*, Vol.2 Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1983.

Baumol, W.J. (1964). External economies and second-order optimality conditions. *American Economic Review* **54**: 368–372.

Baumol, W.J., and W.E. Oates. (1988). *The Theory of Environmental Policy*, 2nd. Ed. New York: Cambridge University Press.

Chipman, J.S. (1970). External economies of scale and competitive equilibrium. *Quarterly Journal of Economics* **84**: 347–385.

Clarke, E.H. (1971). Multipart pricing of public goods. *Public Choice* **11**: 17–33.

Coase, R. (1960). The problem of social cost. *Journal of Law and Economics* **1**: 1–44.

Groves, T. (1973). Incentives in teams. *Econometrica* **41**: 617–631.

Holmstrom, B., and J. Tirole. (1989). The theory of the firm. In *Handbook of Industrial Organization*, edited by R. Schmalensee and R.D. Willig. Amsterdam: North-Holland.

Laffont, J.-J. (1988). *Fundamentals of Public Economics*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

Lindahl, E. (1919). *Die Gerechtigkeit der Besteuring*. Lund: Gleerup. [English translation: Just taxation — a positive solution. In *Classics in the Theory of Public Finance*, edited by R.A. Musgrave and A.T. Peacock. London: Macmillan, 1958].

Marshall, A. (1920). *Principles of Economics*. London: Macmillan.

Meade, J. (1952). External economies and diseconomies in competitive situation. *Economic Journal* **62**: 54–67.

Milleron, J.-C. (1972). Theory of value with public goods: A survey article. *Journal of Economic Theory* **5:** 419–477.

Myerson, R., and M. Satterthwaite. (1983). Efficient mechanisms for bilateral trading. *Journal of Economic Theory* **29**: 265–281.

Pigou, A.C. (1932). *The Economics of Welfare*. London: Macmillan.

Romer, P. (1986). Increasing returns and long-run growth. *Journal of Political Economy* **94**: 1002–1036.

Samuelson, P.A. (1955). Diagrammatic exposition of a pure theory of public expenditure. *Review of Economics and Statistics* **37**: 350–356.

Starrett, D.A. (1972). Funamental nonconvexities in the theory of externalities. *Journal of Economic Theory* **4**: 180–199.

Viner, J. (1931). Cost curves and supply curves. *Zeitschrift für Nationalökonomie* **111**: 23–46.

Weitzman, M. (1974). Prices vs. quantities. *Review of Economics Studies* **41**: 477–491.

Упражнения

11.B.1^B^. (М. Вейцман). На ферме Джонса производится только мед. Есть два способа производить мед: с использованием пчел и без них. Ведро, полное искусственного меда, совершенно неотличимо от натурального и производится из одного галлона кленового сиропа, при этом затрачивается одна единица труда. Если тот же мед производится по устаревшей технологии (пчелами), то потребуются k единиц труда (включая уход за пчелами) и b пчел для производства ведра меда. Любым из способов фермер Джонс способен произвести вплоть до H ведер меда на своей ферме.

На соседней ферме, принадлежащей Смиту, выращиваются яблоки. Если есть пчелы, то потребуется меньше труда, потому что пчелы опыляют цветки вместо рабочих. По этой причине c пчел могут заменить одного рабочего при опылении яблонь. Смит может вырастить на своей ферме вплоть до A бушелей яблок.

Предположим, что рыночная ставка заработной платы равна w, цена пчел p_b за одно насекомое, цена галлона кленового сиропа равна p_m. Если каждый фермер производит по максимуму с наименьшими для себя издержками (допустим, цены таковы, что максимальный выпуск продукции для них эффективен), будет ли результат эффективным? Как ответ зависит от k, b, c, w, p_b и p_m? Дайте интуитивное объяснение своему ответу. Каков максимальный размер взятки, предлагаемой Смитом, чтобы Джонс перешел на производство пчелиного меда? Что произойдет с эффективностью, если обе фермы будут принадлежать одному владельцу? Как правительство может добиться эффективности, используя налоги?

11.В.2$^{\text{C}}$. Разберем проблему экстерналии с двумя потребителями, рассмотренную в разделе 11.В, но теперь допустим, что выведенная функция полезности второго потребителя зависит как от h, так и от w_2 — богатства, которое может быть потрачено на покупку товаров. Обозначим эту функцию $\varphi_2(h, w_2)$. Допустим, что $\varphi_2(h, w_2)$ дважды дифференцируемая, строго квазивогнутая функция с $\partial\varphi_2(h, w_2)/\partial w_2 > 0$, и для простоты будем считать, что экстерналия положительна, т. е. $\partial\varphi_2(h, w_2)/\partial h > 0$.

a) Поставим задачу на Парето-оптимальность для нахождения h и трансферта богатства T, чтобы максимизировать богатство первого потребителя, при условии что уровень полезности второго потребителя не ниже $\bar{u}_2$. Выведите (необходимые и достаточные) условия первого порядка, характеризующие оптимальные значения h и T, например h^o, T^o.

b) Пусть первый потребитель может купить h на рынке экстерналии. Пусть p_h — цена за единицу экстерналии и пусть $h(p_h, w_2)$ будет функцией спроса второго потребителя на h. Выразите эффект богатства $\partial h(p_h, w_2)/\partial w_2$ в терминах производных первого и второго порядка функции полезности второго потребителя.

c) Решите задачу сравнительной статики, состоящую в изменении Парето-оптимального уровня экстерналии h^o (при заданном значении u_2) по отношению к малому изменению $dw_2 > 0$ богатства второго потребителя. Покажите, что если спрос второго потребителя на экстерналию, выведенный в **(b)**, нормален при цене $p_h = \left[\partial\varphi_2\left(h^o, w_2 - T^o\right)/\partial h\right] / \left[\partial\varphi_2\left(h^o, w_2 - T^o\right)/\partial w_2\right]$ и уровне богатства $\bar{w}_2 = w_2 - T^o$ (т. е. если $\partial h(\bar{p}_h, \bar{w}_2)/\partial w_2 > 0$), то предельное увеличение богатства второго потребителя w_2 приведет к росту Парето-оптимального уровня экстерналии h^o. (Аналогично в случае отрицательной экстерналии, если спрос второго потребителя на уменьшение экстерналии является нормальным благом, то при увеличении богатства второго потребителя Парето-оптимальный уровень экстерналии убывает.)

11.В.3$^{\text{B}}$. Рассмотрите оптимальный налог Пигу, введенный в разделе 11.Б для задачи экстерналии с двумя потребителями. Что произойдет, если при наличии такого налога у потребителей появится возможность вступить в торг? Будет ли по-прежнему достижим эффективный уровень экстерналии? А что произойдет, если вместо налога будет применяться оптимальная квота?

11.В.4$^{\text{B}}$. Рассмотрите проблему экстерналии с двумя потребителями, изученную в разделе 11.В. Предположим, что второй потребитель может предпринять некоторое действие, например $e \in \mathbb{R}$, с тем чтобы изменить уровень воздействия на него экстерналии, так что теперь выведенная функция полезности будет иметь вид

$\varphi_2(h, e) + w_2$. Для определенности будем считать, что h — отрицательная экстерналия, и предположим, что $\partial^2\varphi_2(h, e)/\partial h\partial e > 0$, таким образом, увеличение e предельным образом уменьшает отрицательное воздействие экстерналии. Предположим, что в принципе как h, так и e могут быть обложены налогом или субсидированы. Нужно ли субсидировать или облагать налогом e в схеме оптимального налогообложения? Объясните почему.

11.B.5$^{\mathbf{B}}$. Предположим, что при фиксированных ценах на факторы производства $\bar{w}$ фирма производит с дифференцируемой и строго выпуклой функцией издержек $c(q, h)$, где $q \geq 0$ — уровень выпуска (при цене продукции $p > 0$) и h — уровень отрицательной экстерналии, производимой фирмой. Экстерналия воздействует на единственного потребителя, выведенная функция полезности которого равна $\varphi(h) + w$. Действия фирмы и потребителя никоим образом не влияют на цены.

a) Выведите условия первого порядка, определяющие выбор q и h.

b) Выведите условия первого порядка, характеризующие Парето-оптимальные уровни q и h.

c) Предположим, что правительство облагает налогом выпуск фирмы. Покажите, что этим приемом эффективности не добиться. Покажите, что взимание прямого налога с экстерналии *может* восстановить эффективность.

d) Покажите, что на самом деле в частном случае, когда h производится в пропорции к выпуску продукции q, так что $h(q) = \alpha q$ для некоторого $\alpha > 0$, налог на выпуск продукции *может* восстановить эффективность. Какова должна быть его величина?

11.C.1$^{\mathbf{A}}$. Рассмотрите модель из раздела 11.C, в которой I потребителей покупают общественное благо. Найдите величины субсидий за единицу блага $s_1, \ldots, s_I$, такие что потребитель i получает субсидию по ставке s_i и при этом общее количество общественного блага оптимально.

11.C.2$^{\mathbf{A}}$. Рассмотрите модель из раздела 11.C., в которой I потребителей покупают общественное благо. Покажите, что субсидия за единицу производимой продукции, выплачиваемая фирме, тоже может восстановить оптимальность.

11.C.3$^{\mathbf{C}}$. Вспомните задачу налога Рамсея из упражнения 11.E.3, но теперь предположите, что правительство может финансировать производство общественного блага x_o, которое может производиться из первого частного блага с издержками $c(x_o)$. Однако правительство по-прежнему должно сбалансировать бюджет (включая расходы на общественное благо). Теперь функция полезности потребителя i принимает вид $x_{1i} + \sum_{l=2}^{L}\varphi_{li}(x_{li}, x_o)$. Выведите и проинтерпретируйте условия, характеризующие оптимальный уровень налогообложения товаров и оптимальный уровень общественного блага. Как взаимодействуют между собой две задачи Рамсея по налогообложению и обеспечению общественного блага?

11.D.1[B]. (М. Вейцман). Студенты-первокурсники много занимаются. Рассмотрим типичную группу из I студентов. Предположим, студент с номером i занимается h_i часов. Из-за этих занятий его потеря полезности составляет $h_i^2/2$. Его выгода зависит от того, насколько успешно он учится по сравнению с одногруппниками, и имеет вид $\varphi\left(h_i/\bar{h}\right)$ для всех i, где $\bar{h} = (1/I)\sum_i h_i$ — среднее число часов, затраченное на учебу всеми студентами класса, и $\varphi(\cdot)$ — дифференцируемая вогнутая функция с $\varphi'(\cdot) > 0$ и $\lim_{h\to 0} \varphi'(h) = \infty$. Охарактеризуйте симметричное равновесие (по Нэшу). Сравните его с симметричным Парето-оптимальным распределением. Интерпретируйте результаты.

11.D.2[B]. Рассмотрите модель с I потребителями. Каждый из потребителей с номером i выбирает действие $h_i \in \mathbb{R}_+$. Полученная функция полезности потребителя i зависит от его выбора h, а также выбора других агентов и имеет вид $\varphi_i\left(h_i, \sum_i h_i\right) + w_i$, где $\varphi_i(\cdot)$ строго вогнутые. Охарактеризуйте оптимальные уровни $h_1, \ldots, h_I$. Сравните эти уровни с равновесными. Какие схемы налогообложения/субсидирования дают возможность достичь оптимальности?

11.D.3[B]. Рассмотрите отрасль, состоящую из $J > 1$ идентичных фирм, которые ведут себя как ценополучатели. Цена выпускаемой продукции равна p, и цены на факторы производства не зависят от действий фирм. Допустим, что мы имеем право воспользоваться моделью частичного равновесия и что функция совокупного спроса на их продукцию равна $x(p)$. Отрасль обладает свойством «обучения в ходе практической работы», в том смысле что функция издержек каждой фирмы, зависящая от выпуска, убывает вместе с ростом выпуска отрасли, таким образом, функция издержек j-й фирмы дважды дифференцируема и имеет вид $c(q_j, Q)$ при $Q = \sum_j q_j$, где $c(\cdot)$ строго возрастает по первому аргументу и строго убывает по второму. Обозначая соответствующие частные производные с помощью нижних индексов, допустим, что $c_q + Jc_Q > 0$ и $(1/n)c_{qq} + 2c_{qQ} + nc_{QQ} > 0$ для $n = 1$ и J. Сравните равновесный и оптимальный выпуски отрасли. Объясните, какие налоги или субсидии позволят достичь оптимальности?

11.D.4[B]. Вспомните пример неисчерпаемой экстерналии, рассмотренной в разделе 11.D, но на этот раз допустите, что экстерналии, производимые J фирмами, не являются однородными. В частности, предположите, что если $h_1, \ldots, h_J$ — уровни экстерналий, производимых фирмами, то выведенная функция полезности i-го потребителя задана формулой $\varphi_i(h_1, \ldots, h_J) + w_i$ для каждого $i = 1, \ldots, I$. Сравните равновесные и эффективные уровни $h_1, \ldots, h_J$. Какие схемы налогообложения или субсидирования позволят достичь оптимальности? При каких условиях уровень налога/субсидии одинаков для всех фирм?

11.D.5$^{\text{B}}$. *(трагедия общин)*. Доступ рыбаков к озеру Эк свободен. Издержки по использованию лодки для ловли равны $r > 0$. Когда на озере b лодок, то всего будет поймано $f(b)$ единиц рыбы (так что на лодку приходится в среднем $f(b)/b$), где $f'(b) > 0$ и $f''(b) < 0$ для всех $b \geq 0$ и $f(0) = 0$. Цена рыбы равна $p > 0$, она не зависит от улова рыбы в озере.

a) Найдите равновесное количество лодок на озере.

b) Найдите оптимальное количество лодок, которые нужны для ловли. Сравните свой ответ с **(a)**.

c) Какой налог с лодки восстановит эффективность?

d) Предположим, что владельцем озера является один человек и он может решать, сколько лодок отправить на ловлю. Сколько он пошлет лодок?

11.D.6$^{\text{B}}$. Предположим, что имеется участок земли, на который губительно воздействует экстерналия, производимая одной фирмой. Полученная функция прибыли фирмы, зависящая от экстерналии, имеет вид $\pi(h) = \alpha + \beta h - \mu h^2$, где h — уровень экстерналии и $(\alpha, \beta, \mu) >> 0$. На участке I потребителей, занимающихся фермерством, владеют землей, на каждого приходится по $1/I$ площади. Суммарный урожай может быть найден согласно значениям функции $\varphi(h) = \gamma - \eta h$, где $(\gamma, \eta) >> 0$. Полученная функция полезности каждого из I потребителей равна $\varphi(h)/I + w$.

Торг между фермерами и фирмой происходит следующим образом: все потребители одновременно принимают решение о вхождении в коалицию по проведению торгов. После чего переговорная коалиция потребителей делает фирме предложение по принципу «не хочешь — не бери», определяя уровень экстерналии и денежный трансферт. Затем фирма принимает или отвергает предложение. Если соглашения добиться не удалось, то фирма выбирает уровень экстерналии самостоятельно.

a) Пусть θ обозначает долю от I потребителей, которые образуют переговорную коалицию. Охарактеризуйте совершенное в подыграх равновесное по Нэшу значение θ (для простоты считайте, что θ — непрерывная переменная). Покажите, что когда $I = 1$, то оптимальный уровень экстерналии будет достигнут, но, если $I > 1$, мы будем иметь $\theta < 1$ в равновесии и будет произведено слишком много экстерналии.

b) Покажите, что с ростом I равновесный уровень θ убывает. Также покажите, что $\lim\limits_{I \to \infty} \theta = 0$.

11.D.7^C^. Континуум потребителей могут построить свои дома в одном из двух районов, A или B. При строительстве в районе A потребитель несет издержки c_A, а при строительстве в районе B издержки составят $c_B < c_A$. Потребители озабочены престижностью районов, которая определяется престижем людей, в них проживающих. Престиж индивидов измеряется величиной параметра θ. Престиж принимает значения между 0 и 1 и равномерно распределен по отношению к населению. Престиж района k ($k = A, B$) является функцией среднего значения θ для этого района, обозначаемого $\overline{\theta}_k$. Если индивид i с параметром престижа θ строит свой дом в районе k, его выведенная полезность за вычетом издержек на строительство составит $(1+\theta)\left(1+\overline{\theta}_k\right) - c_k$. Таким образом, индивиды с бо́льшим престижем сильнее ценят более престижный район. Предположим, что c_A и c_B меньше 1 и $c_A - c_B \in \left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$.

a) Покажите, что при одновременном выборе района для застройки (технически это означает одномоментную игру, в которой ищется равновесие по Нэшу) строительство будет вестись в обоих районах.

b) Покажите, что в любом равновесии, характеризующемся различными уровнями престижа районов, каждый житель района A должен иметь по меньшей мере такой же уровень престижа, что и любой житель района B: т. е. существует уровень отсечения θ, скажем $\hat{\theta}$, такой что для всех индивидов-застройщиков района A выполнено $\theta \geq \hat{\theta}$, а для застройщиков района B выполнено $\theta < \hat{\theta}$.

c) Покажите, что в любом равновесии, описанном в пункте **(b)**, Парето-улучшение может быть достигнуто за счет небольшого изменения уровня отсечения θ, если допустить, что возможны трансферты между индивидами.

11.E.1^B^. Рассмотрите модель из раздела 11.E и предположите, что $\partial\pi(h,\ \theta)/\partial h = \beta - bh + \theta$ и $\partial\varphi(h,\ \eta)/\partial h = \gamma - ch + \eta$, где θ и η — случайные величины с $E(\theta) = E(\eta) = E(\theta\eta) = 0$, $(\beta, b, c) >> 0$ и $\gamma < 0$. Обозначим $\mathbb{E}\left(\theta^2\right) = \sigma_\theta^2$ и $\mathbb{E}\left(\eta^2\right) = \sigma_\eta^2$.

a) Найдите лучшую квоту $\hat{h}^*$ с точки зрения планировщика, который хочет максимизировать ожидаемое значение совокупного излишка. (Допустите, что фирма может произвести количество, в точности равное этой квоте.)

b) Найдите наилучший с точки зрения этого планировщика налог t^*.

c) Сравните две предложенные схемы. Которая из них лучше и в каком случае?

11.E.2^{C}. Распространите модель из упражнения 11.E.1 на случай двух производителей. Теперь пусть $\partial\pi_i\left(h_i,\ \theta_i\right)/\partial h = \beta - bh_i + \theta_i$ для $i = 1, 2$. Пусть $\sigma_{12} = E(\theta_1\theta_2)$. Вычислите и сравните оптимальные квоты и налоги. Как выбор этих инструментов зависит от σ_{12}?

11.E.3^{B}. Покажите, что сообщение правды является единственной слабо доминирующей стратегией (при использовании механизма раскрытия информации Гровса — Кларка). Этот механизм был изучен в разделе 11.E.

11.E.4^{A}. Содержится в основном тексте главы.

11.E.5^{B}. Предположим, что правительство собирается затеять строительство для общественных нужд. Издержки проекта равны K. Есть I индивидов, пронумерованных с помощью индекса i. Выгода, получаемая от проекта i-м индивидом, известна лишь ему самому и равна b_i. Целью правительства является максимизация ожидаемого значения совокупного излишка. Выведите обобщение механизма Гровса — Кларка, который был рассмотрен в разделе 11.E для этого случая. Не могли бы вы предложить такой механизм, чтобы правительство сбалансировало свой бюджет в среднем (при усреднении по всем реализациям b_i)?

11.E.6^{B}. Распространите модель задачи 11.E на случай N возможных проектов, $n = 1, \ldots, N$, с учетом того что индивид с номером i получает лишь ему известную выгоду $b_i(n)$ от проекта с номером n.

11.E.7^{B}. Предположим, что в модели раздела 11.E тип потребителя η может принимать лишь одно возможное значение $\bar{\eta}$. Из рассмотренной модели в этом разделе следует, что в данном случае ни квота, ни налог не смогут максимизировать совокупного излишка для всех реализаций θ, если выведенная функция полезности потребителя $\varphi\left(h, \bar{\eta}\right)$ удовлетворяет $\partial\varphi\left(h,\ \bar{\eta}\right)/\partial h \in \left(0; -\infty\right)$. Покажите, что тем не менее переменная ставка налога за единицу в том случае, если общий взимаемый с фирмы налог равен $\varphi\left(h,\ \bar{\eta}\right)$ при уровне экстерналии h, позволит максимизировать совокупный излишек для всех значений θ для *любой* полученной функции полезности $\varphi\left(h,\ \bar{\eta}\right)$.

Глава 12. Рыночная власть

12.A. Введение

В конкурентной модели предполагается, что все потребители и производители действуют как ценополучатели. Фактически они ведут себя так, как если бы функции спроса или предложения, с которыми они сталкиваются, являлись бесконечно эластичными при текущих рыночных ценах. Однако это предположение может оказаться неверным, если на одной стороне рынка присутствует лишь несколько агентов, поскольку эти агенты будут обладать *рыночной властью* — способностью с выгодой для себя отклонять цены от конкурентного уровня.

Простейшим примером рыночной власти является ситуация, когда имеется лишь один продавец некоторого товара, *монополист*. Если рыночный спрос на товар представляет собой непрерывную убывающую функцию цены, то монополист, понимая, что небольшое повышение цены сверх конкурентного уровня приводит к незначительному снижению объема продаж, придет к выводу, что такое повышение имеет для него смысл.

Аналогичный эффект возникает, если на одной стороне рынка находится несколько (но не слишком много) агентов. Чаще всего агентами, обладающими рыночной властью, оказываются фирмы, немногочисленность которых является следствием невыпуклости производственных технологий (вспомним обсуждение темы входа на рынок в разделе 10.F).

В данной главе рассматривается функционирование рынков, на которых присутствует рыночная власть. Мы начнем с изучения случая монополиста-продавца некоторого товара в разделе 12.B, рассмотрим теорию монополистического ценообразования и определим, к каким потерям благосостояния оно приводит.

Остальные разделы будут посвящены случаям *олигополии*, при которой несколько фирм конкурируют на одном и том же рынке. В разделах 12.C и 12.D мы рассмотрим некоторые модели олигополистического ценообразования. Каждая из них характеризуется различными допущениями относительно структуры рынка и поведения фирм, и мы покажем, каким образом эти допущения влияют на рыночные исходы. Раздел 12.C посвящен статическим моделям олигополистического ценообразования, в которых конкуренция рассматривается как одношаговое, одновременное событие.

В противоположность этому в разделе 12.D изучаются повторяющиеся взаимодействия между фирмами и их влияние на олигополистические рынки. Этот материал представляет собой приложение теории повторяющихся игр, которая в более общем виде будет изложена в приложении А.

В разделах 12.B–12.D считается, что количество фирм на рынке экзогенно задано. Но в действительности количество активных фирм на рынке зависит от таких факторов, как величина рыночного спроса и характер конкуренции на рынке. В разделах 12.E и 12.F мы рассмотрим проблемы, возникающие при эндогенном определении количества фирм на рынке.

В разделе 12.E будет задана простая модель входа на олигополистический рынок и изучены факторы, определяющие количество активных фирм. Изложение в этом разделе аналогично разделу 10.F применительно к конкурентным рынкам.

В разделе 12.F мы возвратимся к теме, затронутой в главе 10. В нем будет показано, каким образом конкурентная модель (ценополучателя) может рассматриваться в качестве предельного случая олигополии, в котором достаточно велик размер рынка, а значит, и количество фирм, которые с прибылью для себя могут на нем функционировать. В этой модели рыночная власть активной фирмы сокращается по мере роста размера рынка; в пределе равновесная рыночная цена будет примерно соответствовать конкурентному уровню.

В разделе 12.G мы кратко покажем, каким образом фирмы на олигополистических рынках могут заранее брать на себя стратегические обязательства, чтобы с выгодой для себя влиять на условия будущей конкуренции. Этот вопрос прекрасно иллюстрирует важность достоверных обязательств при стратегических взаимодействиях, которые мы подробно рассматривали в главе 9. В приложении B мы более подробно рассмотрим особенно яркий пример стратегического обязательства, влияющего на рыночную ситуацию в будущем, — сдерживание входа за счет выбора уровня производственных мощностей.

Прежде чем приступить к изучению разделов 12.C–12.G, рекомендуем повторить главы по теории игр из раздела II, если вы еще этого не сделали. В частности, обратите внимание на главу 7 целиком, разделы 8.A–8.E, 9.A и 9.B.

Прекрасным источником для дальнейшего изучения тем, рассматриваемых в данной главе, является книга Ж.Тироля (Tirole, 1988)[1].

12.B. Монопольное ценообразование

В этом разделе мы рассмотрим ценовое поведение максимизирующего свою прибыль *монополиста*, фирмы, являющейся единственным производителем товара. Спрос на этот товар при цене p задается функцией $x(p)$,

[1] См. также обзор Шапиро (Shapiro, 1989) по темам, рассматриваемым в разделах 12.C, 12.D и 12.G.

которую мы считаем непрерывной и строго убывающей при всех p, таких что $x(p) > 0$[2]. Для удобства мы также предполагаем, что существует цена $\bar{p} < \infty$, такая что $x(p) = 0$ для всех $p \geq \bar{p}$ [3]. В данной главе будем считать, что монополисту известна функция спроса на его товар и что он может обеспечить уровень выпуска q при издержках $c(q)$.

Задача монополиста заключается в поиске такой цены p, которая максимизировала бы его прибыль (в заданных единицах измерения), или формально в решении задачи

$$\max_{p}\ px(p) - c(x(p)). \tag{12.B.1}$$

Эквивалентную формулировку в терминах объема выпуска можно получить, представив, что монополист выбирает уровень выпуска, который он намерен продать, $q \geq 0$, а цена, по которой эта продукция может быть продана, определяется *обратной функцией спроса* $p(\cdot) = x^{-1}(\cdot)$[4]. С помощью обратной функции спроса задачу монополиста можно переписать в виде

$$\max_{q \geq 0}\ p(q)q - c(q). \tag{12.B.2}$$

Наш анализ будет сконцентрирован именно на такой формулировке задачи монополиста (идентичные выводы можно с тем же успехом получить из задачи (12.B.1)). Далее мы предполагаем, что функции $p(\cdot)$ и $c(\cdot)$ непрерывны и дважды дифференцируемы при всех $q \geq 0$, что $p(0) > c'(0)$, а также что существует единственный уровень выпуска $q^{\circ} \in (0, \infty)$, такой что $p(q^{\circ}) = c'(q^{\circ})$. Тем самым q° является единственным общественно оптимальным (конкурентным) уровнем выпуска на этом рынке (см. главу 10).

При таких предположениях можно показать, что решение задачи (12.C.2) существует[5]. В предположении о дифференцируемости целевой функции оптимальный объем выпуска монополиста, который мы будем обозначать c, должен удовлетворять условию первого порядка[6]:

$$p'(q^m)q^m + p(q^m) \leq c'(q^m) \text{ и } p'(q^m)q^m + p(q^m) = c'(q^m), \text{ если } q^m > 0. \tag{12.B.3}$$

[2] В данной главе наш подход — частичное равновесие; см. его обсуждение в главе 10.

[3] Это предположение позволяет гарантировать существование оптимального решения задачи монополиста. (Смотри в упражнении 12.B.2 пример того, как в результате невыполнения этого условия оказывается, что решения не существует.)

[4] Точнее, чтобы учесть тот факт, что $x(p) = 0$ более чем при одном значении p, мы определяем $p(q) = \min\{p : x(p) = q\}$ при всех $q \geq 0$. Таким образом, $p(0) = \bar{p}$, самой низкой цене, при которой $x(p) = 0$.

[5] В частности, из условия (12.B.3) и того, что $p'(q) \leq 0$ при всех $q \geq 0$ и $p(q) \leq c'(q)$ при всех $q \geq q^{\circ}$, следует, что оптимальный выбор монополиста должен находиться в компактном множестве $[0, q^{\circ}]$. Поскольку целевая функция в задаче (12.B.2) непрерывна, то решение должно существовать (см. раздел M.F. математического приложения).

[6] Выполнения условия первого порядка (12.B.3) достаточно для того, чтобы q^m являлось оптимумом, если целевая функция задачи (12.B.2) вогнута на $[0, q^{\circ}]$. Заметим, однако, что вогнутость целевой функции определяется не только технологией фирмы, как в конкурентной модели, но и формой обратной функции спроса. В частности, даже при выпуклой функции издержек функция прибыли монополиста может нарушать условие вогнутости, если спрос является выпуклой функцией цены.

Левая часть неравенства (12.B.3) представляет собой *предельную выручку* от прироста объема выпуска q в точке q^m, которая равна производной выручки $d(p(q)q)/dq$, а правая часть — соответствующие предельные издержки в точке q^m. Поскольку $p(0) > c'(0)$, условие (12.B.3) может быть выполнено только при $q^m > 0$. Тем самым при наших предположениях *предельная выручка должна быть равна предельным издержкам* при оптимальном уровне выпуска монополиста:

$$p'(p^m)q^m + p(q^m) = c'(q^m). \tag{12.B.4}$$

Для типичного случая, при котором $p'(q) < 0$ при всех $q \geq 0$, условие (12.B .4) означает, что должно выполняться неравенство $p(q^m) > c'(q^m)$, т. е. *при монополии цена превышает предельные издержки*. Соответственно, оптимальный объем выпуска монополиста q^m должен быть ниже общественно оптимального (конкурентного) уровня выпуска $q°$. Причина этого заключается в том, что монополист понимает, что снижение объема продаваемой продукции позволит ему повысить цену, и влияние повышения цены на прибыль отражает слагаемое $p'(q^m)q^m$ в равенстве (12.B.4).

Потери благосостояния в результате искажения объема выпуска, известные как *чистые потери от монополии*, можно оценить, используя изменения совокупного маршалловского излишка (см. раздел 10.E),

$$\int_{q^m}^{q^\circ} \big(p(s) - c'(s)\big)\, ds > 0,$$

где $q°$ является общественно оптимальным (конкурентным) уровнем выпуска.

Рисунок 12.B.1 иллюстрирует монопольный исход в этом случае. Объем выпуска монополиста q^m определяется пересечением графиков предельной выручки $p'(q)q + p(q)$ и предельных издержек $c'(q)$. Монопольную цену $p(q^m)$ можно определить по кривой обратной функции спроса. Чистые потери благосостояния равны площади заштрихованной области.

Обратим внимание, что в условии (12.B.4) монопольное искажение объема выпуска отсутствует в особом случае, когда $p'(q) = 0$ при всех q. В этом

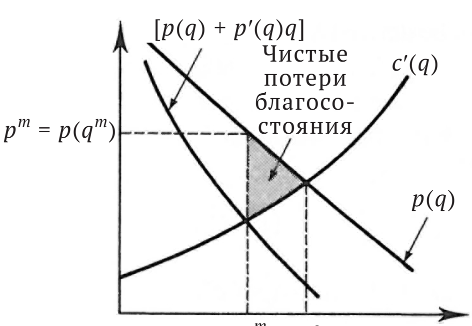


Рис. 12.B.1. Монопольное решение и потери благосостояния при $p'(\cdot) < 0$

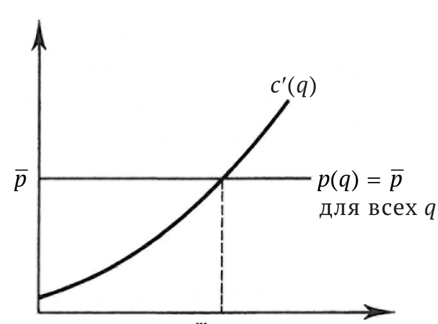


Рис. 12.B.2. Монопольное решение при $p'(q) = 0$ для всех q

случае, когда $p(q)$ равно некоторой константе $\bar{p}$ при всех $q > 0$, монополист продает тот же объем выпуска, что и конкурентная фирма-ценополучатель, поскольку он понимает, что любое повышение цены над конкурентным уровнем $\bar{p}$ приведет к потере всех продаж[7]. Этот особый случай изображен на рис. 12.B.2.

Пример 12.B.1. *Монопольное ценообразование при линейной обратной функции спроса и постоянной отдаче от масштаба.* Предположим, что обратная функция спроса на монополизированном рынке имеет вид $p(q) = a - bq$ и что функция издержек монополиста имеет вид $c(q) = cq$, где $a > c \geq 0$ (так что $p(0) > c'(0)$) и $b > 0$. В этом случае целевая функция задачи монополиста (12.B.2) вогнута, поэтому условие (12.B.4) является необходимым и достаточным для ее решения. Из условия (12.B.4) можно рассчитать оптимальный объем выпуска и цену: $q^m = (a - c)/2b$, $p^m = (a + c)/2$. Общественно оптимальный (конкурентный) уровень выпуска и цена, в свою очередь, равны $q^\circ = (a - c)/b$ и $p^\circ = p(q^\circ) = c$. ■

Хотя мы и не рассматриваем здесь эти вопросы, необходимо отметить, что поведенческие искажения, возникающие при монополии, не ограничиваются решениями о ценах. (В упражнениях 12.B.9 и 12.B.10 вам предлагается исследовать два примера таких ситуаций.)

Искажение объема выпуска при монополии в основе своей связано с тем фактом, что, если монополист намерен увеличить объем продаж, он должен понизить цену на *всю* продаваемую продукцию. На самом деле, если бы монополист имел возможность осуществлять *совершенную дискриминацию* своих потребителей в том смысле, что мог бы делать индивидуальное предложение каждому потребителю, зная его предпочтения относительно своей продукции, то в таком случае искажение объема исчезло бы.

Чтобы получить формальное подтверждение вышесказанного, предположим, что i-й потребитель имеет квазилинейную функцию полезности $u_i(q_i) + m_i$, зависящую от потребляемого количества товара q_i и количества товара-измерителя m_i, и $u_i(0) = 0$. Предположим, что монополист делает каждому потребителю предложение «не хочешь — не бери» в виде пары (q_i, T_i), где q_i — количество товара, предлагаемое i-му потребителю, а T_i — совокупный платеж, который потребитель должен сделать в ответ. Предложение (q_i, T_i) будет принято i-м потребителем тогда и только тогда, когда $u_i(q_i) - T_i \geq 0$. В результате монополист может получить от i-го потребителя платеж, в точности равный $u_i(q_i)$, в обмен на q_i единиц своей продукции, оставив потребителя с излишком от потребления товара, в точности равным нулю. Исходя из этого монополист будет выбирать объемы продукции $(q_1, \ldots, q_I)$ для продажи I потребителям таким образом, чтобы решить задачу

$$\max_{(q_1,\ldots,q_I)\geq 0} \sum_{i=1}^{I} u_i(q_i) - c\left(\sum_i q_i\right). \tag{12.B.5}$$

---

[7] Подобная обратная функция спроса возникает, например, когда i-й потребитель имеет квазилинейные предпочтения вида $u_i(q_i) + m_i$, где $u_i(q_i) = \bar{p}q_i$, а q_i равно потреблению i-м потребителем рассматриваемого товара, а m_i — его потребление товара-измерителя. (Строго говоря, при таких предпочтениях мы получим не функцию спроса, а многозначное соответствие спроса, но $p(\cdot)$, как и ранее, все-таки остается функцией.)

Отметим, однако, что любое решение задачи (12.B.5) максимизирует совокупный излишек на рынке, и поэтому монополист будет продавать каждому потребителю в точности общественно оптимальный (конкурентный) объем товара. Конечно, при отсутствии перераспределения богатства распределительные свойства такого исхода не будут чрезмерно привлекательными. Монополист получит весь совокупный излишек, порожденный его товаром, а каждый потребитель i получит нулевой излишек (т. е. благосостояние i-го потребителя будет в точности равно тому уровню, которого он бы достиг, не потребляя продукцию монополиста вовсе). Но в принципе эти проблемы можно решить с помощью паушального перераспределения товара-измерителя.

Таким образом, можно считать, что потери благосостояния от монополистического ценообразования возникают в результате ограничений, которые не позволяют монополисту осуществлять совершенную ценовую дискриминацию. На практике, однако, эти ограничения могут оказаться существенными. В их число могут входить издержки от оценки различных сумм платежей для разных потребителей, отсутствие у монополиста информации о предпочтениях потребителя, возможность перепродажи товара потребителями. Некоторые из этих факторов рассматриваются в упражнении 12.B.5. В нем приводятся условия, при которых оптимальным действием монополиста будет назначить единую цену за единицу товара, как мы и предполагали в начале этого раздела.

12.C. Статические модели олигополии

Обратимся к случаям, когда на рынке конкурируют несколько фирм. Но их все еще немного. Такие случаи называют ситуациями *олигополии*. Конкуренция между фирмами на олигополистическом рынке, по сути, представляет собой поле для стратегических взаимодействий. По этой причине для ее анализа целесообразно использовать теорию игр. Поскольку это обсуждение представляет собой первое приложение теории игр, мы сосредоточимся на сравнительно простых *статических* моделях олигополии, в которых присутствует только один период конкурентного взаимодействия, а фирмы действуют одновременно.

Начнем с изучения модели одновременного выбора цены фирмами, имеющими технологии с постоянной отдачей от масштаба, известной как *модель Бертрана*. Эта модель обладает поразительной особенностью: имея на рынке лишь две фирмы, мы получаем совершенно конкурентный исход. Этот вывод подтолкнет нас к рассмотрению трех вариантов этой модели, ослабляющих ее сильный и зачастую неправдоподобный вывод: изменим стратегию фирмы так, чтобы она выбирала не цену, а объем выпуска (*модель Курно*); введем ограничения на мощность (или, в более общей постановке, предположим, что отдача от масштаба снижается); и, наконец, введем дифференциацию продукта[8].

Одним из уроков такого анализа является то, что важнейшая часть теоретико-игрового моделирования посвящена выбору стратегий и функций выигрыша игроков. В контексте олигополистических рынков это означа-

[8] В разделе 12.D рассматривается четвертая вариация, которая допускает повторяющиеся взаимодействия между фирмами.

ет, что необходимо тщательно продумывать характеристики рынка (спрос и технологии), а также сами процессы конкуренции.

Если не отмечено иное, то в рассматриваемых моделях мы ограничиваемся равновесиями в чистых стратегиях.

Модель ценовой конкуренции Бертрана

Первой мы рассмотрим модель олигополистической конкуренции, предложенную Бертраном (Bertrand, 1883). Имеются две фирмы, максимизирующие прибыль, фирма 1 и фирма 2 (иными словами, рассматривается случай *дуополии*), на рынке, функция спроса на котором имеет вид $x(p)$. Как и в разделе 10.B, будем предполагать, что функция $x(\cdot)$ непрерывна и строго убывает по всем p, таким что $x(p) > 0$, и что существует $\bar{p} < \infty$, такая что $x(p) = 0$ для всех $p \geq \bar{p}$. Обе фирмы располагают технологиями с постоянной отдачей от масштаба и одинаковыми издержками $c > 0$ в расчете на единицу продукции. Предположим, что $x(c) \in (0, \infty)$, откуда следует, что общественно оптимальный (конкурентный) уровень выпуска на этом рынке строго положителен и конечен (см. главу 10).

Конкуренция происходит следующим образом. Две фирмы одновременно называют свои цены p_1 и p_2. Продажи j-й фирмы имеют следующий вид:

$$x_j(p_j,\ p_k) = \begin{cases} x(p_j), \text{ если } p_j < p_k, \\ \frac{1}{2}x(p_j), \text{ если } p_j = p_k, \\ 0, \text{ если } p_j > p_k. \end{cases}$$

Фирмы производят продукцию на заказ и поэтому несут производственные издержки только для уровня выпуска, равного фактическому объему продаж. При ценах p_j и p_k прибыль j-й фирмы равна $(p_j - c)x_j(p_j, p_k)$.

Модель Бертрана представляет собой хорошо определенную игру с одновременными ходами, к которой мы можем применить концепции, разработанные в главе 8. На самом деле равновесие по Нэшу в исходе этой модели, представленное в утверждении 12.C.1, сравнительно несложно распознать.

Утверждение 12.C.1. В модели дуополии Бертрана существует единственное равновесие по Нэшу $\left(p_1^*,\ p_2^*\right)$. В этом равновесии обе фирмы устанавливают свои цены на уровне издержек $p_1^* = p_2^* = c$.

Доказательство. Для начала заметим, что когда обе фирмы устанавливают свои цены равными c, это действительно будет равновесием по Нэшу. При этих ценах обе фирмы получают нулевую прибыль. Ни одна из фирм не выиграет от повышения цены, потому что тогда ей не удастся ничего продать (и она ничего не заработает), а понижение цены ниже уровня c повысит продажи фирмы, но приведет к убыткам. Остается показать, что другого равновесия по Нэшу быть не может[9]. Прежде всего предположим, что меньшая из названных цен меньше c. В этом случае фирма, объявляющая эту цену, несет убытки. Но, повышая цену сверх уровня c, самое худшее, чего добьется фирма, — нулевая прибыль. Тем самым такой выбор цены не будет являться равновесием по Нэшу.

Теперь предположим, что цена одной фирмы равна c, а цена другой строго больше c: $p_j = c$, $p_k > c$. В этом случае j-я фирма продает товар всему рынку, но получает нулевую прибыль. Немного повысив цену, например до уровня $\hat{p}_j = c + (p_k - c)/2$, j-я фирма будет по-прежнему удовлетворять весь рыночный спрос, но при строго положительной прибыли. Тем самым такое сочетание цен также не будет являться равновесием.

Наконец, предположим, что обе фирмы выбирают цену на уровне строго больше c: $p_j > c$, $p_k > c$. Без потери общности предположим, что $p_j \le p_k$. В этом случае k-я фирма может получить прибыль в размере не более $\frac{1}{2}(p_j - c)x(p_j)$. Но, установив цену на уровне $p_j - \varepsilon$ для $\varepsilon > 0$, т. е. ниже, чем у j-й фирмы, k-я фирма получит весь рынок и заработает $(p_j - \varepsilon - c)x(p_j - \varepsilon)$. Поскольку для достаточно малого $\varepsilon > 0$ $(p_j - \varepsilon - c) \times x(p_j - \varepsilon) > \frac{1}{2}(p_j - c)x(p_j)$, k-я фирма благодаря таким действиям получит строго бо́льшую прибыль. В итоге такое сочетание цен также не будет представлять собой равновесие.

Три варианта сочетания цен, которые мы сформулировали, охватывают все возможные сочетания, отличные от $p_1 = p_2 = c$, тем самым доказательство завершено. ■

Удивительным следствием утверждения 12.C.1 является то, что всего лишь при двух фирмах на рынке мы получаем совершенно конкурентный исход. По сути, конкуренция между двумя фирмами приводит к тому, что каждая из них сталкивается с бесконечно эластичной кривой спроса при цене, взимаемой конкурентом.

Основную идею утверждения 12.C.1 легко можно распространить на любое количество фирм, большее двух. (В этом случае, если j-я фирма называет самую низкую цену на рынке, например $\tilde{p}$, вместе с $\tilde{J} - 1$ остальными фирмами, она получает $(1/\tilde{J})x(\tilde{p})$.) Показать это вам предлагается в упражнении 12.C.1.

Упражнение 12.C.1. Покажите, что в любом равновесии по Нэшу в модели Бертрана с количеством фирм $J > 2$ вся продукция продается по цене, равной издержкам.

[9] Вспомним, что здесь мы ограничиваемся равновесиями в чистых стратегиях. Смотри упражнение 12.C.2, где рассматриваются равновесия в смешанных стратегиях. В нем вам предлагается показать, что при введенных здесь допущениях утверждение 12.C.1 по-прежнему выполняется: $p_1^* = p_2^* = c$ — это единственное равновесие по Нэшу в модели Бертрана как в чистых, так и в смешанных стратегиях.

Таким образом, модель Бертрана показывает, что искажения, возникающие в результате применения рыночной власти, ограничиваются особым случаем монополии. Этот результат кажется весьма примечательным, но в то же время нереалистичным в большинстве ситуаций (хотя и не во всех). В оставшейся части данного раздела мы рассмотрим три варианта модели Бертрана, которые существенным образом ослабляют полученный вывод. Во-первых, мы сделаем *объем* стратегической переменной фирм. Во-вторых, мы введем *ограничения на мощности* (или, в более общей постановке, убывающую отдачу от масштаба). В-третьих, будет разрешена *дифференциация продукта*.

Конкуренция по объемам производства (модель Курно)

Предположим, что теперь конкуренция между двумя фирмами происходит в несколько иной форме. Две фирмы одновременно принимают решения об объеме производства, q_1 и q_2. После этого цена корректируется до уровня, который обеспечивает рыночное равновесие, $p(q_1 + q_2)$, где $p(\cdot) = x^{-1}(\cdot)$ — обратная функция спроса. Эта модель известна под названием *модели Курно* (Cournot, 1838). Можно представить себе фермеров, которые решают, какое количество скоропортящихся овощей им нужно собрать утром и отправить на рынок. После этого рыночная цена устанавливается на таком уровне, при котором все отправленные овощи оказываются проданными[10]. В нашем изложении будем предполагать, что функция $p(\cdot)$ дифференцируема, причем $p'(q) < 0$ при всех $q \geq 0$. Как и ранее, обе фирмы производят продукцию при издержках $c > 0$ за единицу. Также будем предполагать, что $p(0) > c$ и существует единственный объем выпуска $q^\circ \in (0, \infty)$, такой что $p(q^\circ) = c$ (в терминах функции спроса $x(\cdot)$ это означает, что $q^\circ = x(c)$). Объем выпуска q°, таким образом, является общественно оптимальным (конкурентным) уровнем выпуска на этом рынке.

Чтобы найти равновесие по Нэшу (в чистых стратегиях) в этой модели, рассмотрим максимизационную задачу j-й фирмы при заданном уровне выпуска $\bar{q}_k$ другой фирмы, $k \neq j$:

$$\max_{q_j \geq 0} p(q_j + \bar{q}_k)q_j - cq_j. \tag{12.C.1}$$

Решая задачу (12.C.1), j-я фирма действует в точности как монополист, сталкиваясь с обратной функцией спроса $\tilde{p}(q_j) = p(q_j + \bar{q}_k)$. Оптимальный выбор объема выпуска для j-й фирмы при заданном выпуске конкурента $\bar{q}_k$ должен удовлетворять условию первого порядка:

$$p'(q_j + \bar{q}_k)q_j + p(q_j + \bar{q}_k) \leq c, \text{ и } p'(q_j + \bar{q}_k)q_j + p(q_j + \bar{q}_k) = c, \text{ если } q_j < 0. \tag{12.C.2}$$

[10] Один из сценариев, ведущих к такому исходу, состоит в том, что покупатели торгуются на аукционе за овощи, предоставленные в этот день (во многом аналогично продавцам в модели Бертрана, см. упражнение 12.C.5).

Для каждого $\bar{q}_k$ обозначим через $b_j(\bar{q}_k)$ множество оптимальных объемов выпуска для j-й фирмы; $b_j(\cdot)$ — *отображение наилучшего ответа* j-й фирмы (или *функция*, если отображение является однозначным).

Пара выбранных фирмами объемов выпуска $\left(q_1^*,\ q_2^*\right)$ является равновесием по Нэшу тогда и только тогда, когда $q_j^* \in b_j\left(q_k^*\right)$ для $k \neq j$ и $j = 1, 2$. Поэтому, если пара $\left(q_1^*,\ q_2^*\right)$ является равновесием по Нэшу, эти объемы выпуска должны удовлетворять условию[11]

$$p'\left(q_1^* + q_2^*\right)q_1^* + p\left(q_1^* + q_2^*\right) \leq c,$$
$$\text{и } p'\left(q_1^* + q_2^*\right)q_1^* + p\left(q_1^* + q_2^*\right) = c, \text{ если } q_1^* > 0 \qquad (12.C.3)$$

и

$$p'\left(q_1^* + q_2^*\right)q_2^* + p\left(q_1^* + q_2^*\right) \leq c,$$
$$\text{и } p'\left(q_1^* + q_2^*\right)q_2^* + p\left(q_1^* + q_2^*\right) = c, \text{ если } q_2^* > 0. \qquad (12.C.4)$$

Можно показать, что при наших предположениях мы должны получить $\left(q_1^*,\ q_2^*\right) >> 0$, и поэтому условия (12.C.3) и (12.C.4) должны выполняться как равенства в любом равновесии по Нэшу[12]. Складывая два равенства, получаем, что в любом равновесии по Нэшу должно быть выполнено

$$p'\left(q_1^* + q_2^*\right)\left(\frac{q_1^* + q_2^*}{2}\right) + p\left(q_1^* + q_2^*\right) = c. \qquad (12.C.5)$$

Условие (12.C.5) позволяет нам прийти к выводу, сформулированному в утверждении 12.C.2.

Утверждение 12.C.2. В любом равновесии по Нэшу в модели дуополии Курно с издержками $c > 0$ на единицу продукта для обеих фирм и обратной функцией спроса $p(\cdot)$, удовлетворяющей условиям $p'(q) < 0$ для всех $q \geq 0$ и $p(0) > c$, рыночная цена превышает c (конкурентную цену) и ниже монопольной цены.

[11] Обратите внимание, что такой метод анализа, опирающийся на использование условий первого порядка для расчета наилучших ответов, отличается от метода, примененного в анализе модели Бертрана. Причина в том, что в модели Бертрана целевая функция каждой фирмы является разрывной по переменной, являющейся объектом принятия решения, поэтому методами дифференциальной оптимизации пользоваться нельзя. К счастью, определение равновесия по Нэшу в модели Бертрана оказалось тем не менее довольно простым.

[12] Чтобы убедиться в этом, предположим, что $q_1^* = 0$. Тогда из условия (12.C.3) следует, что $p\left(q_2^*\right) \leq c$. По условию (12.C.4) и вследствие того факта, что $p'(\cdot) < 0$, это означает, что если бы было верно неравенство $q_2^* > 0$, мы получили бы $p'\left(q_2^*\right)q_2^* + p\left(q_2^*\right) < c$, откуда $q_2^* = 0$. Но это означает, что $p(0) \leq c$, а это противоречит предположению о том, что $p(0) > c$. Таким образом, должно выполняться неравенство $q_1^* > 0$. Аналогичные рассуждения приведут нас к выводу о том, что $q_2^* > 0$. Заметим, что этот вывод зависит от верности предположения о равенстве издержек для наших двух фирм. Например, фирма может установить объем выпуска равным нулю, если она существенно менее эффективна, чем ее конкурент. В упражнении 12.C.9 рассматриваются некоторые проблемы, возникающие в ситуации, когда издержки фирм различны.

Доказательство. То, что равновесная цена выше c (конкурентной цены), следует непосредственно из условия (12.C.5) и того факта, что $q_1^* + q_2^* > 0$ и $p'(q) < 0$ при всех $q \geq 0$. Далее мы докажем, что $\left(q_1^* + q_2^*\right) > q^m$, т. е. что равновесная цена при дуополии $p\left(q_1^* + q_2^*\right)$ строго меньше монопольной цены $p(q^m)$. Доказательство состоит из двух частей.

Во-первых, докажем, что $\left(q_1^* + q_2^*\right) \geq q^m$. Для этого предположим, что $q^m > \left(q_1^* + q_2^*\right)$. Увеличив объем производства до $\hat{q}_j = q^m - q_k^*$, j-я фирма (нестрого) увеличит совместную прибыль двух фирм (и в таком случае совместная прибыль фирм равна монопольному уровню прибыли, т. е. максимально возможному уровню). Кроме того, вследствие увеличения совокупного объема производства цена должна упасть, поэтому положение k-й фирмы строго ухудшится. Это означает, что положение j-й фирмы строго улучшится, т. е. существует прибыльное отклонение, если $q^m > \left(q_1^* + q_2^*\right)$. Отсюда следует, что должно выполняться неравенство $\left(q_1^* + q_2^*\right) \geq q^m$.

Во-вторых, условие (12.C.5) означает, что равенство $\left(q_1^* + q_2^*\right) = q^m$ не может выполняться, поскольку в таком случае

$$p'(q^m)\left(\frac{q^m}{2}\right) + p(q^m) = c$$

в нарушение условия первого порядка для монополии (12.B.4). Тем самым получаем, что $\left(q_1^* + q_2^*\right) > q^m$.

Утверждение 12.C.2 говорит нам о том, что наличия двух фирм *недостаточно* для получения конкурентного исхода в модели Курно в противоположность результату модели Бертрана. Причина очевидна. В этой модели фирма не сталкивается с бесконечно эластичным спросом. Наоборот, если она сокращает объем производства на (дифференциально малую) единицу, то рыночная цена повышается на $-p'(q_1 + q_2)$. Если возникает ситуация, что фирмы вместе производят конкурентный объем продукции и, следовательно, получают нулевую прибыль, то любая из них выиграет, если немного сократит свой объем выпуска.

В то же время конкуренция понижает цену по сравнению с монопольным уровнем, т. е. ценой, которая максимизировала бы их совместную прибыль. Это происходит потому, что, когда каждая из фирм определяет прибыль от продажи дополнительной единицы продукции, она не учитывает сокращения прибыли конкурента вследствие вызванного этой продажей снижения рыночной цены (заметим, что в условии первого порядка j-й фирмы (12.C.2) на $p'(\cdot)$ умножается только q_j, а в условии первого порядка для максимизации совместной прибыли фирм — совокупный объем выпуска $(q_1 + q_2)$).

Пример 12.С.1. *Дуополия Курно с линейной обратной функцией спроса и постоянной отдачей от масштаба.* Рассмотрим дуополию Курно, в которой издержки фирм на единицу продукции составляют c, а обратная функция спроса имеет вид $p(q) = a - bq$, где $a > c \geq 0$ и $b > 0$. Вспомним, что монопольный выпуск и цена равны $q^m = (a - c)/2b$ и $p^m = (a + c)/2$, а общественно оптимальный (конкурентный) выпуск и цена равны $q^\circ = (a - c)/b$ и $p^\circ = p(q^\circ) = c$. Используя условие первого порядка (12.С.2), получим, что функция наилучшего ответа j-й фирмы в модели Курно задается функцией $b_j(q_k) = \text{Max}\{0, (a - c - bq_k)/2b\}$.

Функция наилучшего ответа фирмы 1, $b_1(q_2)$, графически изображена на рис. 12.С.1. Поскольку $b_1(0) = (a - c)/2b$, график функции пересекается с осью q_1 при монопольном объеме выпуска $(a - c)/2b$. Это имеет смысл: наилучшим ответом фирмы 1 на то, что фирма 2 ничего не производит, будет производство монопольного объема выпуска. Аналогично поскольку $b_1(q_2) = 0$ для всех $q_2 \geq (a - c)/b$, то график функции наилучшего ответа фирмы 1 пересекает ось q_2 при общественно оптимальном (конкурентном) объеме выпуска $(a - c)/b$. И это также имеет смысл: если фирма 2 выбирает уровень выпуска не ниже $(a - c)/b$, то любая попытка фирмы 1 продать свою продукцию приведет к падению цены ниже c. На рисунке также изображены две изопрофиты фирмы 1; это множества вида $\{(q_1, q_2) : p(q_1 + q_2)q_1 - cq_1 = \Pi\}$ для некоторого уровня прибыли П. Уровень прибыли, соответствующий этим кривым, возрастает по мере продвижения к монопольной точке фирмы 1 $(q_1, q_2) = ((a - c)/2b, 0)$. Заметим, что изопрофиты фирмы 1 имеют нулевой наклон в точках пересечения с графиком функции наилучшего ответа фирмы 1. Это связано с тем, что наилучший ответ $b_1(\bar{q}_2)$ определяет точку максимальной прибыли фирмы 1 на прямой $q_2 = \bar{q}_2$ и поэтому должен соответствовать точке касания этой прямой и изопрофиты. Функцию наилучшего ответа фирмы 2 можно изобразить аналогично; поскольку фирмы симметричны, то и график функции будет расположен симметрично по отношению к функции наилучшего ответа фирмы 1 в пространстве (q_1, q_2) (т. е. будет пересекать ось q_2 в точке $(a - c)/2b$, а ось q_1 в точке $(a - c)/b$).

Равновесие по Нэшу, которое в этом примере будет единственным, можно рассчитать, найдя пару объемов выпуска $\left(q_1^*, q_2^*\right)$, в которой графики двух функций наилучшего ответа пересекаются, т. е. в которой $q_1^* = b_1\left(q_2^*\right)$ и $q_2^* = b_2\left(q_1^*\right)$. Она изображена на рис. 12.С.2(а) и соответствует объемам выпуска отдельных фирм, равным

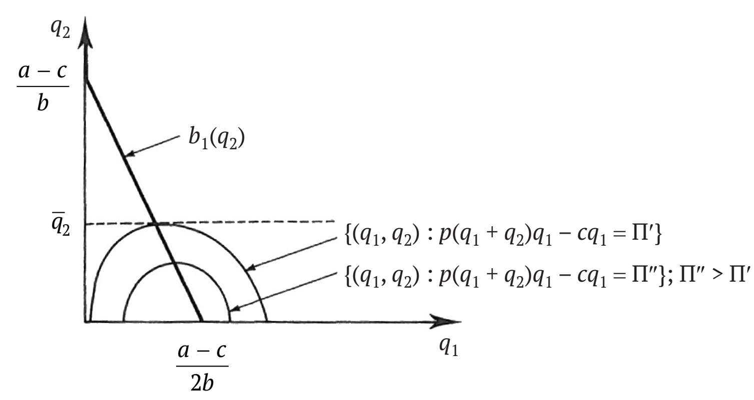


Рис. 12.С.1. Функция наилучшего ответа фирмы 1 в модели дуополии Курно из примера 12.С.1

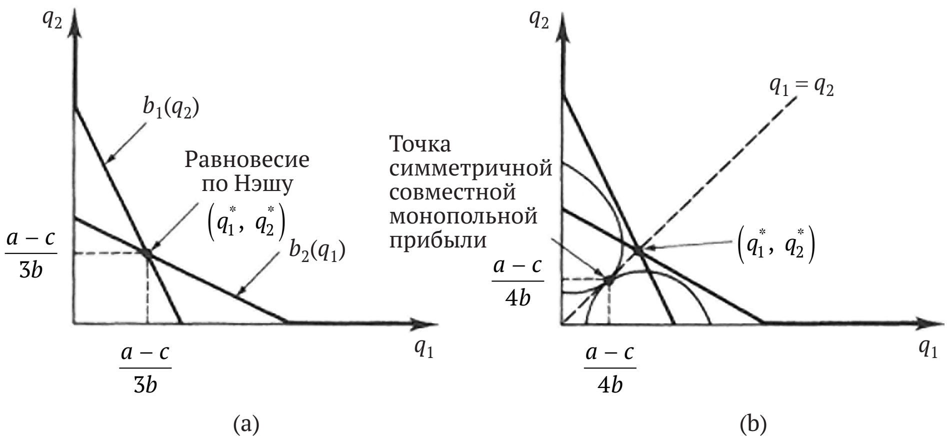


Рис. 12.C.2. Равновесие по Нэшу в модели дуополии Курно из примера 12.C.1

$q_1^* = q_2^* = \frac{1}{3}((a-c)/b)$, совокупному объему выпуска $\frac{2}{3}((a-c)/b)$ и рыночной цене $p\left(q_1^* + q_2^*\right) = \frac{1}{3}(a+2c) \in (c,\ p^m)$.

Также на рис. 12.C.2(b) изображена точка симметричной монопольной прибыли $(q^m/2, q^m/2) = ((a-c)/4b, (a-c)/4b)$. Можно убедиться, что эта точка, в которой каждая фирма производит половину монопольного объема выпуска, равного $(a-c)/2b$, является точкой максимальной прибыли для обеих фирм на луче $q_1 = q_2$. ■

Упражнение 12.C.6. Проверьте выкладки и другие утверждения в примере 12С.1.

До настоящего момента мы не вводили никаких предположений о квазивогнутости по q_j целевой функции j-й фирмы в задаче (12.C.1). Однако в отсутствие квазивогнутости этих функций равновесие по Нэшу в чистых стратегиях в этой количественной игре может не существовать. Например, как это происходит на рис. 12.C.3, где функция наилучшего ответа для фирмы без квазивогнутой целевой функции может иметь «скачок», что делает возможным отсутствие равновесия. (Строго говоря, для того чтобы могла возникнуть ситуация, аналогичная изображенной на рис. 12.C.3, у фирмы должны быть разные функции издержек; см. упражнение 12.C.8.) При квазивогнутости мы можем воспользоваться утверждением 8.D.3, чтобы показать, что равновесие по Нэшу в чистых стратегиях обязательно существует.

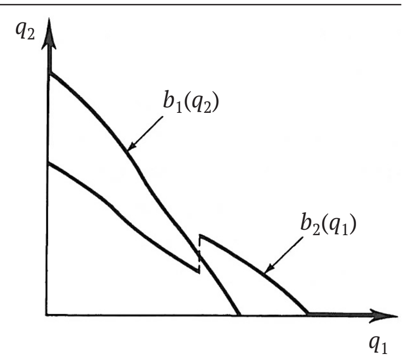


Рис. 12.C.3. Отсутствие равновесия по Нэшу (в чистых стратегиях) в модели Курно

Теперь предположим, что у нас есть $J > 2$ фирм с теми же функциями издержек и спроса, что приведены выше. Пусть Q_J^* — совокупный выпуск всех фирм в равновесии. Рассуждения, аналогичные вышеприведенным, приведут нас к следующему обобщению условия (12.C.5):

$$p'\left(Q_J^*\right)\frac{Q_J^*}{J}+p\left(Q_J^*\right)=c. \tag{12.C.6}$$

С одной стороны, при $J = 1$, условие (12.C.6) совпадает с условием первого порядка для монополии, которое мы видели в разделе 12.B. С другой стороны, мы должны получить $p\left(Q_J^*\right)\to c$ при $J\to\infty$. Чтобы убедиться в этом, заметим, что поскольку Q_J^* всегда меньше, чем общественно оптимальный (конкурентный) объем выпуска $q°$, то, при $J\to\infty$, должно выполняться $p'\left(Q_J^*\right)\left(Q_J^*/J\right)\to 0.$ Следовательно, условие (12.C.6) означает, что цена должна стремиться к предельным издержкам, по мере того как количество фирм стремится к бесконечности. Этот вывод впервые дает нам возможность затронуть «конкуренцию как предельный случай», тему, к которой мы вернемся в разделе 12.F. В упражнении 12.C.7 вас просят проверить эти утверждения для модели из упражнения 12.C.1.

Упражнение 12.C.7. Найдите цену и объем выпуска в равновесии по Нэшу в модели Курно с J фирмами, где каждая фирма имеет постоянные издержки производства на единицу продукции, равные c, а обратная функция спроса на рынке имеет вид $p(q) = a - bq$, где $a > c \geq 0$ и $b > 0$. Проверьте, что при $J = 1$ мы получаем монопольный исход; что выпуск возрастает, а цена падает при увеличении J; что при $J\to\infty$ цена и совокупный выпуск на рынке стремятся к своим конкурентным уровням.

В отличие от модели Бертрана модель Курно демонстрирует постепенное снижение рыночной власти по мере увеличения количества фирм. В то же время сценарий типа «фермер отправляет урожай на рынок» не подходит для широкого круга ситуаций. В конце концов большинство фирм выбирает именно цену, а не объем выпуска. Поэтому многие экономисты считают, что модель Курно дает верный ответ, но по неверной причине. К счастью, отклонение от модели Бертана, которое мы рассматриваем далее, дает альтернативную интерпретацию модели Курно. Основная идея состоит в том, что выбор объема выпуска в модели Курно можно рассматривать как долгосрочный выбор *производственной мощности*, а определение цены на основе обратной функции спроса отражает результат краткосрочной ценовой конкуренции с учетом выбранных производственных мощностей.

Ограничения мощности и убывающая отдача от масштаба

Во многих ситуациях будет естественным предположить, что фирмы работают в условиях постепенного снижения отдачи от масштаба, по крайней мере в краткосрочном периоде при фиксированном объеме капитала. Особый случай убывающей отдачи возникает, когда у фирмы существует ограничение мощности, не позволяющее ей выпустить больше некоторого максимального объема, например $\bar{q}$. В данном разделе мы довольно неформально рассмотрим, каким образом появление ограничений мощности влияет на выводы модели Бертрана.

При наличии ограничений мощности (или, для данного случая, при издержках, которые демонстрируют более гладкое уменьшение отдачи от масштаба) нет смысла предполагать, что объявленная цена отражает обязательство произвести *любое* требуемое количество продукции, поскольку издержки выполнения заказа, превышающего мощность фирмы, являются бесконечными. Поэтому мы внесем минимальную корректировку в правила модели Бертрана: будем считать, что объявление цены является обязательством удовлетворить спрос лишь в пределах мощности фирмы. Предположим также, что фирмам известны мощности друг друга.

Чтобы выяснить, каким образом ограничения мощности могут повлиять на исход игры с дуопольным ценообразованием, предположим, что у каждой из фирм постоянные предельные издержки $c > 0$ и ограничение мощности $\bar{q} = \frac{3}{4}x(c)$. Как и ранее, функция рыночного спроса $x(\cdot)$ непрерывна, строго убывает при всех $x(p) > 0$ и $x(c) > 0$.

В этом случае бертрановский исход $p_1^* = p_2^* = c$ больше не будет равновесием. Чтобы убедиться в этом, заметим, что поскольку фирма 2 не может удовлетворить весь спрос при цене $p_2^* = c$, то фирма 1 может рассчитывать на строго положительный уровень продаж, если установит p_1 на уровне, немного превышающем c. В результате у нее возникает стимул отклониться от уровня $p_1^* = c$.

На самом деле, если уровень мощности p удовлетворяет условию $\bar{q} < x(c)$, каждая фирма может *гарантировать* себе положительный уровень продаж при строго положительной прибыли, установив цену ниже $p(\bar{q})$, но выше c. Эта ситуация изображена на рис. 12.C.4. На нем мы предполагаем, что фирма 2, имеющая более низкую цену, удовлетворяет спрос с максимальной оценкой.

Взимая цену $p_1 \in (c,\ p(\bar{q}))$, фирма 1 покрывает оставшийся спрос по цене p_1, а ее объем продаж составляет $x(p_1) - \bar{q} > 0$. Таким образом, при наличии ограничений мощности конкуренция в общем случае не будет приводить цены к уровню издержек, на что первым обратил внимание Ф. Эджворт (Edgeworth (1897)).

Рис. 12.C.4. Расчет спроса при наличии ограничений мощности в ситуации, когда фирма с низкой ценой сначала удовлетворяет спрос с максимальной оценкой

В ситуациях с ограничениями мощности найти равновесный исход может оказаться непросто, потому что для определения объема продаж каждой из фирм недостаточно знать цены. Если фирма с низкой ценой не может обеспечить весь спрос по цене, которую она объявила, то у фирмы с высокой ценой спрос будет зависеть от того, *кому именно* удастся купить продукцию первой фирмы. Объем продаж у фирмы с высокой ценой будет выше, если потребители с низкими оценками уйдут к фирме с низкой ценой (в отличие от предположения, сделанного на рис. 12.C.4). Тем самым, чтобы определить функции спроса для фирм, нам необходимо задать *правило рационирования*, которое будет определять, кто из потребителей будет покупать продукцию у фирмы с низкой ценой, если спрос превысит ее производственную мощность. На самом деле выбор правила рационирования может оказать заметное влияние на равновесное поведение. В упражнении 12.C.11 вас просят исследовать некоторые характеристики равновесного исхода, если первыми обслуживаются потребители с самыми высокими оценками, как на рис. 12.C.4. Это правило рационирования обычно дает наилучший результат. Тем не менее с точки зрения применимости оно ничем не отличается от других правил, таких как система очередей или случайное распределение имеющихся единиц продукции между возможными покупателями.

До настоящего момента мы считали мощность фирмы экзогенно заданной. Обычно, однако, мы исходим из того, что фирмы *выбирают* свой уровень мощности, что порождает естественный вопрос: каким будет исход в модели, где фирмы сначала выбирают уровень мощности, а затем конкурируют по цене? Крепс и Шейнкман (Kreps, Scheinkman, 1983) рассматривают этот вопрос и показывают, что при определенных условиях (среди которых — предположение о том, что потребителей с высокими оценками обслуживают первыми, если спрос на продукцию фирмы с низкой ценой превышает ее мощность) единственным совершенным в подыграх равновесием по Нэшу в этой двухшаговой модели будет *равновесие по Курно*. Это естественный результат: вычисление цены по обратной кривой спроса в модели Курно можно рассматривать как замену ценовой конкуренции на втором шаге. Действительно, для широкого диапазона мощности $(\bar{q}_1, \bar{q}_2)$ единственным равновесием в подыгре с ценообразованием будет уровень цены, равный $p(\bar{q}_1 + \bar{q}_2)$ для обеих фирм (см. упражнение 12.C.11). Таким образом, эта двухшаговая модель выбора мощности и ценовой конкуренции дает нам обещанную интерпретацию модели Курно: можно считать, что конкуренция по объему выпуска отражает конкуренцию в долгосрочном периоде за счет выбора мощности, а ценовая конкуренция происходит в краткосрочном периоде при заданных уровнях мощности.

Продуктовая дифференциация

В модели Бертрана фирмы в равновесии сталкиваются с бесконечно эластичной кривой спроса. При сколь угодно малой разнице в цене каждый потребитель предпочтет обратиться к фирме, предлагающей самую низкую цену. Однако зачастую потребители видят разницу между продукцией разных фирм. Если существует дифференциация продукции, то каждая фирма будет обладать некоторой рыночной властью, возникающей в результате уникальности ее продукции. Предположим, например, что имеется $J > 1$ фирм. Каждая фирма осуществляет производство при постоянных предельных издержках $c > 0$. Спрос на продукцию j-й фирмы задается непрерывной функцией $x_j(p_j, p_{-j})$, где p_{-j} — вектор цен конкурентов j-й фирмы[13]. Выбирая цену одновременно с остальными, каждая фирма считает цены конкурентов $\overline{p}_{-j}$ заданными и выбирает p_j таким образом, чтобы решить следующую задачу:

$$\max_{p_j}(p_j - c)x_j(p_j, \overline{p}_{-j}).$$

Заметим, что пока $x_j(c, \overline{p}_{-j}) > 0$, то наилучший ответ j-й фирмы неизбежно подразумевает установление цены, превышающей ее издержки ($p_j > c$), потому что она может гарантировать себе строго положительную прибыль, установив цену на уровне немного выше c. Таким образом, при наличии продуктовой дифференциации равновесные цены будут превышать конкурентный уровень. Как и в случае конкуренции по объемам и ограничений мощности, наличие дифференциации продукта смягчает строго конкурентный результат модели Бертрана.

В прикладной литературе получили популярность различные модели продуктовой дифференциации. Одна из них подробнее рассмотрена в примере 12.С.2.

Пример 12.С.2. *Модель линейного города с продуктовой дифференциацией.* Рассмотрим город, который можно представить лежащим на отрезке длины 1, как показано на рис. 12.С.5. Имеется континуум потребителей, общее число (или, точнее, мера) которых равно i и которые распределены равномерно на этом отрезке. Местоположение потребителя определяется величиной $z \in [0, 1]$, расстоянием от левого края города. На каждом краю города находится один продавец гаджетов: фирма 1 на левом и фирма 2 на правом. Гаджеты производятся при постоянных издержках на единицу продукции, равных $c > 0$. Каждому потребителю требуется не более 1 гаджета, а выгода от наличия гаджета равна v. Совокупные издержки покупки гаджета у j-й фирмы для потребителя, находящегося на расстоянии d от нее, равны $p_j + td$, где $t/2 > 0$ можно считать издержками или отрицательной полезностью для потребителя от необходимости добираться до j-й фирмы и обратно. Наличие транспортных издержек создает дифференциацию между продуктами двух фирм, потому что различные потребители могут строго предпочесть одну фирму другой, даже если продукция продается по одной и той же цене.

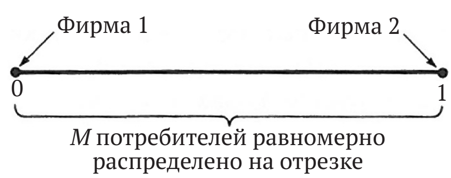


Рис. 12.С.5. Линейный город

На рис. 12.С.6(a) изображены решения потребителей, находящихся в разных точках города, для заданной пары цен p_1 и p_2. Потребители в точках $[0, z_1)$ покупают у фирмы 1. В этих точках $p_1 + tz < p_2 + t(t - z)$ (купить у фирмы 1 лучше, чем купить у фирмы 2) и $v - p_1 - tz > 0$ (купить у фирмы 1 лучше, чем не купить вообще). В точке z_1 потребителю безразлично, покупать у фирмы 1 или не покупать вообще; т. е. z_1

[13] Обратите внимание на отклонение от модели Бертана: в ней функция $x_j(p_j, p_{-j})$ терпит разрыв в точке $p_j = \mathrm{Min}_{k \neq j} p_k$.

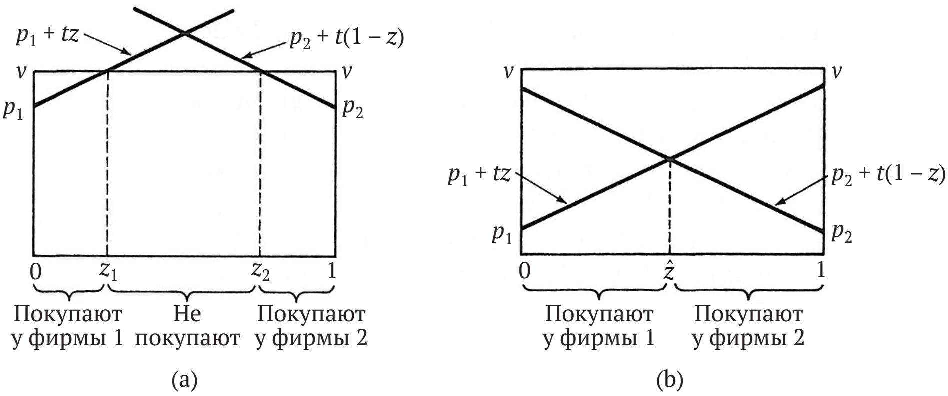


Рис. 12.C.6. Решения потребителей о покупке гаджета при ценах p_1 и p_2.
(a) Некоторые потребители не покупают гаджеты.
(b) Все потребители покупают гаджеты

удовлетворяет соотношению $v - p_1 - tz = 0$. На рис. 12.C.6(a) потребители, находящиеся в интервале (z_1, z_2), не покупают ни у одной из фирм, а потребители в интервале $(z_2, 1]$ покупают у фирмы 2.

На рис. 12.C.6(b), наоборот, изображен случай, когда при данных ценах p_1 и p_2 все потребители могут получить строго положительный излишек, покупая товар у одной из фирм. Местоположение потребителя, для которого две фирмы эквивалентны, является точка $\hat{z}$, такая что

$$p_1 + t\hat{z} = p_2 + t(1 - \hat{z})$$

или

$$\hat{z} = \frac{t + p_2 - p_1}{2t}. \tag{12.C.7}$$

В целом анализ этой модели осложняется тем, что в зависимости от параметров (v, c, t) равновесия могут охватывать области рынка, которые не соприкасаются (как на рис. 12.C.6(a)), или же фирмы в них могут сражаться за потребителей, находящихся посреди рынка (как на рис. 12.C.6(b)). Чтобы как можно больше упростить изложение, будем предполагать, что ценность гаджета для потребителя велика по сравнению с транспортными и производственными издержками, или, точнее, что $v > c + 3t$. В этом случае можно показать, что фирма никогда не будет устанавливать цену на уровне, который вынуждает некоторых потребителей воздержаться от покупки (см. упражнение 12.C.13). Поэтому ниже мы будем игнорировать вероятность того, что потребитель не будет ничего покупать.

Пусть при ценах p_1 и p_2 величина $\hat{z}$ определяется в соответствии с (12.C.7). Тогда при этой паре цен (p_1, p_2) спрос фирмы 1 равен $M\hat{z}$ при $\hat{z} \in [0, 1]$, M при $\hat{z} > 1$ и 0 при $\hat{z} < 0$ [14]. Подставив $\hat{z}$ из соотношения (12.C.7), получим

$$x_1(p_1,\ p_2) = \begin{cases} 0, \text{ если } p_1 > p_2 + t, \\ (t + p_2 - p_1)M/2t, \text{ если } p_1 \in [p_2 - t, p_2 + t], \\ M, \text{ если } p_1 < p_2 - t. \end{cases} \tag{12.C.8}$$

[14] Вспомним, что M потребителей равномерно распределены на отрезке, поэтому $\hat{z}$ — это доля тех, кто совершает покупку у фирмы 1.

Фирмы симметричны, поэтому функция спроса фирмы 2, $x_2(p_1, p_2)$, имеет вид

$$x_2(p_1,\ p_2) = \begin{cases} 0, \text{ если } p_2 > p_1 + t, \\ (t + p_1 - p_2)M/2t, \text{ если } p_2 \in [p_1 - t, p_1 + t], \\ M, \text{ если } p_2 < p_1 - t. \end{cases} \quad (12.C.9)$$

Заметим из (12.C.8) и (12.C.9), что j-я фирма в поисках наилучшего ответа на цену $\overline{p}_{-j}$, установленную конкурентом, может ограничить себя ценами в интервале $[\overline{p}_{-j} - t,\ \overline{p}_{-j} + t]$. Любая цена $p_j > \overline{p}_{-j} + t$ дает ту же прибыль, что и цена $p_j = \overline{p}_{-j} + t$ (т. е. нуль), а любая цена $p_j < \overline{p}_{-j} - t$ дает прибыль ниже, чем $p_j = \overline{p}_{-j} - t$ (все такие цены позволяют продать M единиц товара). Таким образом, наилучшим ответом на $\overline{p}_{-j}$ будет решение задачи

$$\max_{p_j}(p_j - c)(t + \overline{p}_{-j} - p_j)\frac{M}{2t},$$
$$p_j \in [\overline{p}_{-j} - t,\ \overline{p}_{-j} + t]. \quad (12.C.10)$$

Необходимое и достаточное условие первого порядка для этой задачи (условие Куна — Таккера) имеет вид

$$t + \overline{p}_{-j} + c - 2p_j \begin{cases} \leq 0, \text{ если } p_j = \overline{p}_{-j} - t, \\ = 0, \text{ если } p_j \in (\overline{p}_j - t,\ \overline{p}_{-j} + t), \\ \geq 0, \text{ если } p_j = \overline{p}_{-j} + t. \end{cases} \quad (12.C.11)$$

Решив уравнение (12.C.11), получим, что функцией наилучшего ответа j-й фирмы является

$$b(\overline{p}_{-j}) = \begin{cases} \overline{p}_{-j} + t, \text{ если } \overline{p}_{-j} \leq c - t, \\ (t + \overline{p}_{-j} + c)\ /\ 2, \text{ если } \overline{p}_{-j} \in (c - t,\ c + 3t), \\ \overline{p}_{-j} - t, \text{ если } \overline{p}_{-j} \geq c + 3t. \end{cases} \quad (12.C.12)$$

Если $\overline{p}_{-j} < c - t$, то j-я фирма устанавливает цены таким образом, чтобы ее продажи были равны нулю (она не может получать прибыль, потому что не может продавать свою продукцию по какой-либо цене выше c). Если $\overline{p}_{-j} > c + 3t$, то j-я фирма устанавливает такую цену, чтобы захватить весь рынок. В промежуточном случае наилучший ответ j-й фирмы на цену $\overline{p}_{-j}$ позволит обеим фирмам обеспечить строго положительный объем продаж.

Учитывая симметричность модели, будем искать симметричное равновесие, т. е. такое, в котором $p_1^* = p_2^* = p^*$. В любом симметричном равновесии $p^* = b(p^*)$. Изучив (12.C.12), легко видеть, что это условие выполняется только в среднем случае (заметим также, что это единственный случай, в котором обе фирмы имеют положительный объем продаж, как и должно быть в симметричном равновесии). Тогда p^* должно удовлетворять соотношению

$$p^* = \frac{1}{2}(t + p^* + c).$$

Откуда

$$p^* = c + t.$$

В равновесии по Нэшу объем продаж каждой фирмы составляет $M/2$ и каждая фирма получает прибыль $tM/2$. Заметим, что если t стремится к нулю, то продукты фирм становятся неразличимыми и равновесные цены стремятся к c, как и в модели Бертрана. С другой стороны, если транспортные издержки t возрастают, увеличивая дифференциацию между продуктами фирм, то растут и равновесные цены и прибыль.

На рис. 12.C.7 изображены функции наилучшего ответа для двух фирм (для цен, больших или равных c) и равновесия по Нэшу. Как обычно, равновесие по Нэшу находится на пересечении графиков функции наилучшего ответа. Обратите внимание, что асимметричные равновесия здесь отсутствуют. ■

Ситуация осложняется при $v < c + 3t$, потому что фирмы могут попытаться установить цены, при которых некоторые потребители не захотят приобретать продукцию ни одной из фирм. Можно показать, впрочем, что полученное равновесие будет сохраняться, пока $vK \geq c + \frac{3}{2}t.$ Наоборот, при $v < c + t$ в равновесии рыночные территории фирм не соприкасаются (фирмы являются «локальными монополистами»). В промежуточном случае, когда $v \in \left[c + t,\ c + \frac{3}{2}t\right]$, фирмы находятся на «изломе» своих функций спроса, а потребитель в положении безразличия $\hat{z}$ не получает в равновесии излишка от своей покупки. В упражнении 12.C.14 вас просят изучить эти случаи.

Основные особенности модели линейного города можно распространить на случай, когда $J > 2$. При этом в аналитических целях зачастую удобнее всего рассматривать модель *кругового города*, в котором фирмы можно расположить симметрично[15]. В этой модели, разработанной С. Салопом (Salop, 1979), потребители равномерно распределены на окружности длины 1, а фирмы расположены на равном расстоянии друг от друга. На рис. 12.C.8 изображен случай $J = 5$.

Модели, подобные этим, носят название *пространственных* моделей продуктовой дифференциации, поскольку каждой фирме соответствует «адрес» в пространстве продуктов. В более общем случае можно представить, что продукция фирм находится в некотором N-мерном пространстве характеристик, в котором распределены «адреса» потребителей (идеальные точки потребления).

Пространственные модели обладают общим свойством: каждая фирма конкурирует за потребителей только локально, т. е. исключительно с фирмами, предлагающими

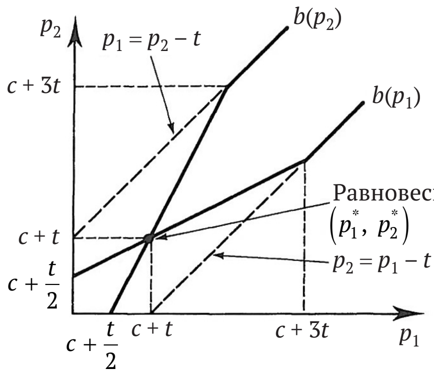


Рис. 12.C.7. Функции наилучшего ответа и равновесие по Нэшу в модели линейного города при $v > c + 3t$

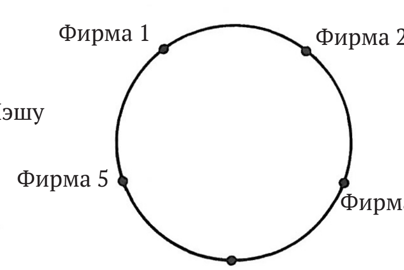


Рис. 12.C.8. Модель кругового города при $J = 5$

---

[15] На отрезке [0, 1] симметрично расположены могут быть только две фирмы. При большем количестве фирм две фирмы, находящиеся ближе всего к концам отрезка, будут иметь только одного ближайшего соседа, а фирмы внутри отрезка — двух.

аналогичную продукцию. Распространенной альтернативой пространственным моделям, в которой каждый продукт конкурирует со *всеми* остальными продуктами, является *модель репрезентативного потребителя*, предложенная в работах Спенса, Диксита и Стиглица (Spence, 1976; Dixit, Stiglitz, 1977). В этой модели постулируется наличие репрезентативного потребителя, предпочтения которого в отношении потребления J продуктов $(x_1, \ldots, x_J)$ и товара-измерителя m имеют квазилинейную форму:

$$u(m,\ x_1,\ \ldots,\ x_J) = G\left(\sum_{j=1}^{J} f(x_j)\right) + m,$$

где функции $G(\cdot)$ и $f(\cdot)$ вогнуты[16]. Нормализуя цену товара-измерителя к 1, получим следующие условия первого порядка для задачи максимизации полезности репрезентативного потребителя:

$$G'\left(\sum_{j=1}^{J} f(x_j)\right) f'(x_j) = p_j \ \text{ при } j = 1, \ldots, J. \tag{12.C.3}$$

Можно обратить эти условия первого порядка и найти функции спроса $x_j(p_1, \ldots, p_J)$ для $j = 1, \ldots, J$, которые затем могут быть использованы для задания игры с одновременным выбором цен[17].

Важный частный случай модели репрезентативного потребителя возникает в предельном случае, когда у нас есть много продуктов, каждый из которых составляет маленькую долю в продажах на рынке в целом. В пределе функцию полезности репрезентативного потребителя можно записать как $G\left(\int f(x_j)dj\right) + m,$ где x_j теперь рассматривается как функция непрерывной индексной переменной j. Это существенным образом упрощает дело, потому что j-я фирма, выбирая цену, может считать заданной величину $\overline{x} = \int f(x_j)dj,$ которая называется *индексом агрегированного выпуска*; ее собственное производство не влияет на величину этого индекса. При заданном $\overline{x}$ j-я фирма имеет функцию спроса

$$x_j(p_j,\ \overline{x}) = \psi\left(\frac{p_j}{G'(\overline{x})}\right),$$

где $\psi(\cdot) = f'^{-1}(\cdot)$. Ее оптимальный выбор может рассматриваться как функция $p_j^*(\overline{x})$ от индекса $\overline{x}$. Тем самым равновесное значение индекса агрегированного выпуска, $\overline{x}^*$, удовлетворяет соотношению $\overline{x}^* = \int f\left(x_j\left(p_j^*(\overline{x}^*),\ \overline{x}^*\right)\right)dj.$

Этот предельный случай называется *моделью монополистической конкуренции*. Первоначально она была предложена Э. Чемберлином (Chamberlin, 1933); современное изложение см. в работе (Hart, 1985). На рынках, характеризующихся монополистической конкуренцией, рыночной власти сопутствует низкий уровень стратегического взаимодействия в том смысле, что стратегия любой отдельной фирмы не влияет на выигрыш любой другой фирмы[18].

[16] На самом деле в работе (Dixit, Stiglitz, 1977) рассматриваются более общие функции полезности вида $u\left(G\left(\sum_i f(x_i)\right),\ m\right)$.

[17] В литературе также часто исследуются игры с одновременным выбором объема, в которых напрямую используется выражение (12.C.13) как обратная функция спроса для фирм.

[18] Наоборот, в пространственных моделях, даже в предельном случае с континуумом фирм, стратегическое взаимодействие сохраняется. В этом случае фирмы взаимодействуют локально, а соседи имеют значение вне зависимости от размера экономики.

12.D. Повторяющиеся взаимодействия

В моделях, представленных в разделе 12.C, было одно нереалистичное допущение об их статичной, однопериодной природе. У фирмы не было необходимости учитывать реакцию конкурентов на выбор цены или объема производства. В модели Бертрана, например, фирма может установить цену чуть меньше, чем у конкурента, и перехватить всех его потребителей. На практике, однако, в такой ситуации фирма может задуматься о том, что если она понизит цену таким образом, то конкурент ответит снижением своей цены и дело кончится краткосрочным увеличением продаж при снижении уровня цен на рынке в долгосрочном периоде.

В данном разделе мы рассматриваем простейший тип динамической модели, в которой возникают подобные опасения. Две одинаковые фирмы систематически конкурируют за объем продаж, в каждом периоде t конкуренция описывается моделью Бертрана. При этом фирмам известны все цены, которые ранее устанавливались ими *обеими*. Присутствует фактор дисконтирования $\delta < 1$, и j-я фирма пытается максимизировать дисконтированную стоимость прибыли, $\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1}\pi_{jt}$, где π_{jt} — прибыль j-й фирмы в периоде t. Игра, порождаемая этой ситуацией, является динамической игрой (см. главу 9) особого рода: она возникает в результате повторения одной и той же статической игры с одновременными ходами и называется *повторяющейся игрой*.

В этой повторяющейся игре Бертрана стратегия j-й фирмы определяет цену p_{jt}, взимаемую ею в t-м периоде, как функцию от истории всех ранее установленных обеими фирмами цен, $H_{t-1} = \{p_{1\tau},\ p_{2\tau}\}_{\tau=1}^{t-1}$. При стратегиях такого вида возможны интересные варианты поведения. Например, стратегия фирмы может предусматривать возмездие конкуренту в том случае, если он опускает цену ниже некоторого «порогового уровня». Оно может быть кратковременным, требующим понижения фирмой своей цены лишь на несколько периодов после того, как конкурент «пересек черту», или постоянным. Возмездие может зависеть от степени снижения цены ниже порогового уровня или быть одинаково суровым вне зависимости от того, насколько незначительным было нарушение. И наоборот, фирма может демонстрировать все более кооперативное поведение в ответ на кооперативные действия конкурента в прошлом. И, конечно, стратегия фирмы может определять ее поведение в t-м периоде независимо от прошлой истории (стратегия без возмездия или вознаграждения).

Для нас особенно интересной будет вероятность того, что подобные варианты реакции позволят фирмам в серии повторяющихся взаимодействий сохранять более кооперативное поведение по сравнению с тем, которое предсказывает простая однопериодная модель Бертрана. Эту вероятность мы изучим в оставшейся части данного раздела.

Для начала рассмотрим случай, когда фирмы конкурируют конечное число раз T (*игра, повторяющаяся конечное число раз*). Может ли богатое множество описанных выше возможных вариантов поведения возникнуть в совершенном в подыграх равновесии по Нэшу для этой модели? Вспоминая утверждение 9.B.4, мы видим, что это невозможно. Единственное совершенное в подыграх равновесие по Нэшу в игре Бертрана, повторяющейся конечное число раз, представляет собой T повторений статического равновесия по Бертрану, в котором цены равны издержкам. Это простое следствие обратной индукции: в последнем периоде T мы должны находиться в равновесии по Бертрану, и поэтому в данном периоде прибыль равна нулю *независимо от того, что случилось до этого.* Но тогда с точки зрения стратегии последним является период $T - 1$, и решение Бертрана должно возникнуть снова. И так далее, пока мы не доберемся до первого периода. Иными словами, обратная индукция исключает вероятность более кооперативного поведения в игре Бертрана, повторяющейся конечное число раз.

Ситуация резко меняется при расширении горизонта до бесконечного числа периодов (это *бесконечно повторяющаяся игра*). Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующие стратегии для фирм $j = 1, 2$:

$$p_{jt}(H_{t-1}) = \begin{cases} p^m, \text{ если все элементы } H_{t-1} \text{ равны } (p^m, p^m) \text{ или } t = 1, \\ c \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{12.D.1}$$

Иными словами, стратегия j-й фирмы требует, чтобы в периоде 1 она установила монопольную цену p^m. Тогда в каждом периоде $t > 1$ j-я фирма устанавливает цену p^m, если в каждом предшествующем периоде обе фирмы установит цену p^m, в противном случае взимая цену, равную издержкам. Этот тип стратегии называется *стратегией с возвращением к равновесию по Нэшу*: фирмы кооперируют до тех пор, пока одна из них не отклонится от равновесного состояния, а отклонение запускает процесс перманентного возмездия, при котором обе фирмы устанавливают цены, равные издержкам, что соответствует равновесной по Нэшу однопериодной стратегии. Заметим, что если обе фирмы следуют стратегиям из (12.D.1), то в каждом периоде они будут устанавливать монопольную цену. Они начнут с цены p^m, и никакого отклонения от этой цены не произойдет.

Для стратегий из (12.D.1) мы имеем результат, представленный в утверждении 12.D.1.

Утверждение 12.D.1. Стратегии, описанные в (12.D.1), представляют собой совершенное в подыграх равновесие по Нэшу (SPNE) для бесконечно повторяющейся игры дуополии Бертрана тогда и только тогда, когда $\delta \geq \frac{1}{2}$.

Доказательство. Вспомним, что множество стратегий является SPNE для игры с бесконечным горизонтом тогда и только тогда, когда оно задает равновесие по Нэшу в каждой подыгре (см. раздел 9.B). Для начала заметим, что, хотя у каждой подыгры в этой повторяющейся игре есть своя история ведущих к ней раундов, все эти подыгры имеют одинаковую структуру: каждая из них является бесконечно повторяющейся игрой дуополии Бертрана, в точности как и вся игра в целом. Поэтому, чтобы убедиться в том, что стратегии (12.D.1) представляют собой SPNE, необходимо показать, что после любой предшествующей истории раундов стратегии, заданные на оставшиеся периоды, представляют собой равновесие по Нэшу в бесконечно повторяющейся игре Бертрана.

На самом деле, учитывая форму стратегий в (12.D.1), нам необходимо рассмотреть лишь два типа предшествующих историй: те, в которых возникало отклонение (цена, не равная p^m), и те, в которых отклонение отсутствовало.

Рассмотрим сначала подыгру, возникающую после отклонения. Стратегии обеих фирм требуют, чтобы во всех последующих периодах были установлены цены c независимо от поведения конкурента. Эта пара стратегий является равновесием по Нэшу в бесконечно повторяющейся игре Бертрана, потому что j-я фирма может заработать не больше нуля, если оппонент всегда устанавливает цену равной c, и зарабатывает ровно нуль, устанавливая свою цену равной c во всех оставшихся периодах.

Теперь рассмотрим подыгру, начинающуюся в t-й период без предшествующих отклонений. Каждая фирма знает, что стратегия конкурента требует взимать цену p^m, пока не произойдет отклонения от p^m, и цену c после отклонения. Соответствует ли интересам j-й фирмы использование этой стратегии, если конкурент применяет ту же самую стратегию? Иными словами, составляют ли эти стратегии равновесие по Нэшу в этой подыгре?

Предположим, что j-я фирма рассматривает возможность отклониться от цены p^m в периоде $\tau \geq t$ подыгры, если до периода τ отклонений не было[19]. С t-го по $(\tau - 1)$ -й период j-я фирма в каждом периоде получит $\frac{1}{2}(p^m - c)x(p^m)$, ровно столько же, сколько и в случае, если она не отклоняется. Но начиная с τ-го периода ее выигрыш будет отличаться от выигрыша в случае, если она не отклоняется. В периоды после отклонения (периоды $\tau + 1, \tau + 2, \ldots$) конкурент j-й фирмы взимает цену c независимо от формы отклонения j-й фирмы в период τ, поэтому в каждом из этих периодов j-я фирма может заработать не больше нуля. В периоде τ j-я фирма производит оптимальное отклонение таким образом, чтобы максимизировать свой выигрыш в этом периоде (обратите внимание, что выигрыш, получаемый j-й фирмой в последующие периоды, одинаков при любой величине отклонения от цены p^m). Поэтому она будет взимать цену

[19] Из предшествующих рассуждений нам известно, что если в данной подыгре произошло отклонение, то лучшее, что может сделать j-я фирма, – устанавливать цену c в каждом периоде исходя из того, что конкурент будет поступать точно так же. Поэтому, чтобы выяснить, образуют ли эти стратегии равновесие по Нэшу в данной подыгре, нам необходимо только проверить, захочет ли j-я фирма отклониться от цены p^m, если таких отклонений раньше не было.

$p^m - \varepsilon$ при некотором произвольно малом $\varepsilon > 0$, захватит все продажи на рынке и в одном периоде получит выигрыш $(p^m - c - \varepsilon)x(p^m)$.

С другой стороны, если j-я фирма никогда не отклоняется, в периоды после τ она получает выигрыш, дисконтированный к τ-му периоду, равный $\left[\frac{1}{2}(p^m - c)x(p^m)\right] \Big/ (1-\delta)$. Таким образом, при любых t и $\tau \geq t$ j-я фирма предпочтет не отклоняться в периоде τ тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{1-\delta}\left[\frac{1}{2}(p^m - c)x(p^m)\right] \geq (p^m - c)x(p^m)$$

или

$$\delta \geq \frac{1}{2}. \qquad (12.D.2)$$

Таким образом, стратегии в (12.D.1) представляют собой SPNE тогда и только тогда, когда $\delta \geq \frac{1}{2}$. ■

Из утверждения 12.D.1 вытекает, что совершенно конкурентного исхода статической игры Бертрана можно избежать, если фирмы предвидят бесконечно повторяющееся взаимодействие. Причина в том, что, рассматривая возможность отклонения, каждая фирма принимает во внимание не только однопериодный выигрыш, который она получит от снижения цены по сравнению с конкурентом, но и упущенную прибыль в результате запуска механизма возмездия. Величина фактора дисконтирования δ важна в силу ее влияния на относительные веса будущих потерь по сравнению с текущим выигрышем от отклонения. Монопольная цена будет устойчивой тогда и только тогда, когда текущая стоимость будущих потерь по сравнению с возможным текущим выигрышем от отклонения достаточно велика, для того чтобы не дать фирмам стремиться к получению прибыли в краткосрочном периоде.

Фактор дисконтирования не следует интерпретировать буквально. Например, в модели, где рыночный спрос растет с темпом γ (т. е. $x_t(p) = \gamma^t x(p)$), при более высоких значениях γ модель ведет себя аналогично тому, как если бы увеличивался фактор дисконтирования, потому что рост спроса увеличивает размер будущих потерь, вызванных отклонением в текущем периоде. Также можно представить ситуацию, когда в каждом периоде существует вероятность γ, что взаимодействие фирм может прекратиться. Чем больше γ, тем больше фирмы, по сути, дисконтируют будущее. (Эта интерпретация выявляет тот факт, что формулировка задачи с бесконечно повторяющейся игрой может быть применима даже в случае, когда фирмы могут прекратить взаимодействие через некоторый конечный период времени; для встраивания такой логики в вышеприведенную модель требуется строго положительная вероятность продолжения игры после достижения произвольного периода.) Наконец, значение δ может отражать время, необходимое для обнаружения отклонения. Эти интерпретации будут развиты в упражнении 12.D.1.

Хотя стратегии в (12.D.1) образуют SPNE при $\delta \geq \frac{1}{2}$, они *не являются* единственным SPNE в повторяющейся модели Бертрана. В частности, можно получить результат, представленный в утверждении 12.D.2.

Утверждение 12.D.2. В бесконечно повторяющейся игре дуополии Бертрана при $\delta \geq \frac{1}{2}$ повторяющийся выбор любой цены $p \in [c, p^m]$ может поддерживаться в качестве совершенного в подыграх равновесия по Нэшу с помощью стратегий с возвращением к равновесию по Нэшу. Наоборот, при $\delta < \frac{1}{2}$ в любом совершенном в подыграх равновесии по Нэшу все продажи должны совершаться по цене, равной c в каждом периоде.

Доказательство. Что касается первой части результата, то мы уже показали в утверждении 12.D.1, что повторяющийся выбор цены p^m может поддерживаться в качестве SPNE при $\delta \geq \frac{1}{2}$. Доказательство для любой цены $p \in [c, p^m)$ следует той же самой логике, достаточно заменить цену p^m в (12.D.1) на $p \in [c, p^m)$.

Доказательство второй части результата дано ниже.

Покажем, что в случае $\delta < \frac{1}{2}$ все продажи должны осуществляться по цене c. Для начала обозначим через $v_{jt} = \sum_{t \geq \tau} \delta^{\tau-1} \pi_{jt}$ прибыль j-й фирмы, дисконтированную к периоду t, если равновесные стратегии применяются начиная с периода t. Также обозначим $\pi_t = \pi_{1t} + \pi_{2t}$.

Заметим, что поскольку j-я фирма считает оптимальным придерживаться равновесных стратегий в каждом периоде t, должно выполняться соотношение

$$\pi_t \leq v_{jt} \text{ для } j = 1, 2 \text{ и каждого } t, \tag{12.D.3}$$

поскольку j-я фирма может получить выигрыш, сколь угодно близкий к π_t, в t-м периоде, отклонившись и установив цену ниже самой низкой на рынке на сколь угодно малую величину. Кроме того, во всех последующих периодах фирма гарантирует себе неотрицательный выигрыш.

Предположим, что существует хотя бы один период t, в котором $\pi_t > 0$. Мы придем к противоречию. Необходимо рассмотреть два случая:

(i) Предположим сначала, что существует период τ с $\pi_t > 0$, такой что $\pi_\tau \geq \pi_t$ для всех t. Тогда, сложив (12.D.3) при $t = \tau$ и $j = 1, 2$, получим

$$2\pi_\tau \leq (v_{1\tau} + v_{2\tau}).$$

Но $(v_{1\tau} + v_{2\tau}) \leq [1/(1-\delta)]\pi_t$, так что это невозможно, если $\delta < \frac{1}{2}$.

(ii) Теперь предположим обратное: что такого периода не существует, т. е. для любого периода t существует период $\tau > t$, такой что $\pi_\tau > \pi_t$. Определим $\tau(t)$ при

$t \geq 1$ рекурсивно следующим образом: $\tau(1) = 1$, а при $t \geq 2$ пусть $\tau(t) = \min\left\{\tau > \tau(t-1) : \pi_\tau > \pi_{\tau(t-1)}\right\}$. Заметим, что для любого t π_t ограничена сверху монопольным уровнем прибыли $\pi^m = (p^m - c)x(p^m)$ и что последовательность $\left\{\pi_{\tau(t)}\right\}_{t=1}^{\infty}$ монотонно возрастает. Тем самым при $t \to \infty$ $\pi_{\tau(t)}$ должна сходиться к некоторому $\bar{\pi} \in (0, \pi^m]$, такому что $\pi_t < \bar{\pi}$ для всех t. Теперь, сложив (12.D.3) при $j = 1, 2$, мы должны получить

$$2\pi_{\tau(t)} \leq v_{1\tau(t)} + v_{2\tau(t)} \tag{12.D.4}$$

для всех t. Более того, $v_{1\tau(t)} + v_{2\tau(t)} \leq [1 / (1 - \delta)]\bar{\pi}$ для всех t, поэтому мы получим

$$2\pi_{\tau(t)} \leq \frac{1}{1-\delta}\bar{\pi} \tag{12.D.5}$$

для всех t. Но при $\delta < \frac{1}{2}$ условие (12.D.5) должно нарушаться при достаточно больших t.

Этим завершается доказательство утверждения. ■

Для бесконечно повторяющихся игр характерно наличие нескольких равновесий, выявленное в утверждении 12.D.2 для случая $\delta \geq \frac{1}{2}$. Обычно для заданного уровня δ возможен целый спектр кооперативных равновесий. Также возможно и полное отсутствие кооперации в форме статического равновесия по Нэшу, повторяющегося бесконечно.

В утверждении 12.D.2 также говорится, что множество SPNE в повторяющейся игре Бертрана растет по мере увеличения δ[20]. Разрывное поведение множества SPNE как функции δ, показанное в утверждении 12.D.2, является особенностью повторяющейся модели Бертрана. Повторяющаяся модель Курно и модели повторяющейся ценовой конкуренции при дифференциации продуктов обычно демонстрируют более гладкий рост максимального уровня общей прибыли, который может быть обеспечен при росте δ (см. упражнение 12.D.3).

На самом деле общий результат теории повторяющихся игр, известный как *народная теорема*, гласит: в бесконечно повторяющейся игре *любые допустимые дисконтированные выигрыши, которые для каждого игрока в каждом периоде превышают минимальный выигрыш, который он мог бы себе гарантировать в одном раунде игры с одновременными ходами, могут быть поддержаны SPNE, если игроки дисконтируют будущее достаточно слабо*. В приложении А мы приведем более точную формулировку и детальное обсуждение народной теоремы для повторяющихся игр в целом. Ее идея ясна: хотя бесконечно повторяющиеся игры допускают коопера-

[20] Строго говоря, утверждение 12.D.2 показывает это только для класса стационарных симметричных равновесий (т. е. равновесий, в которых фирмы принимают одинаковые стратегии и в которых на равновесной траектории предпринимаемые действия одни и те же в каждом периоде).

тивное поведение, они также предусматривают *крайне широкий* диапазон возможного поведения.

Наличие широкого спектра равновесий в повторяющихся играх для моделей олигополии несколько удручает. Как с практической точки зрения нам узнать, какая равновесная стратегия будет применена? Может ли на олигополистических рынках произойти «все что угодно»? Чтобы обойти эту проблему, исследователи часто предполагают, что симметрично расположенные фирмы будут считать фокальным симметричное равновесие, максимизирующее прибыль (см. раздел 8.D). Однако даже если ограничить внимание случаем симметричных фирм, его применимость будет зависеть от конкретной постановки задачи. Например, история отрасли может сделать фокальными другие равновесия: отрасль, которая исторически являлась крайне некооперативной (например, потому что δ всегда была низкой), может считать более фокальными некооперативные исходы. Предположение о возникновении симметричного равновесия более естественно для случая, когда равновесия интерпретируются на основе самоподдерживающегося соглашения, например когда олигополисты тайно обсуждают планы по ценообразованию. Поскольку антимонопольное законодательство не позволяет им заключить формальный контракт на этот счет, любой сговор между ними должен быть самоподдерживающимся и тем самым должен представлять собой SPNE. Разумно считать, что в таких условиях одинаковые фирмы согласятся на более прибыльное симметричное SPNE. (Если фирмы неодинаковы, то аналогичная логика предполагает, что фирмы согласятся на SPNE, соответствующее точке на границе их множества выигрышей в SPNE.)

Наконец, аналогично статическим моделям из раздела 12.C, интересно исследовать, как количество фирм на рынке влияет на его конкурентоспособность. Вас просят проделать это в упражнении 12.D.2.

Упражнение 12.D.2. Покажите, что при J фирмах повторяющийся выбор любой цены в интервале $p \in (c, p^m]$ может поддерживаться в качестве стационарного SPNE в бесконечно повторяющейся игре Бертрана с использованием стратегий с возвращением к равновесию по Нэшу тогда и только тогда, когда $\delta \geq (J - 1)/J$. Как это характеризует влияние роста количества фирм на рынке на сложность поддержания сговора?

На практике важной особенностью многих ситуаций олигополистического сговора (как и других ситуаций с кооперацией) является то, что возможность наблюдать за поведением конкурентов несовершенна. Например, как указывает Д. Стиглер (Stigler, 1960), конкуренты олигополиста могут втайне делать скидки потребителям. Если рыночный спрос носит стохастический характер, то фирма, наблюдая за собственным спросом, не сможет с уверенностью сказать, имели ли место отклонения от ценового сговора. Такая возможность формально ведет к исследованию *повторяющихся к игр с несовершенным наблюдением*, см., например, работы (Green, Porter, 1984; Abreu, Pearce, Stachetti, 1990). Особенностью этого класса моделей является то, что они могут объяснить наблюдаемые нарушения кооперации как неизбежный результат кооперации в условиях несовершенной способности к наблюдению. Равновесные стратегии в них должны быть такими, чтобы некоторые негативные изменения спроса приводили к нарушению кооперации, если фирмам необходимо не допустить тайных отклонений от параметров сговора.

12.E. Вход

В разделах 12.B–12.D мы анализировали рыночные исходы при монополии и олигополии, экзогенно задавая фиксированное количество активно действующих фирм. Однако в большинстве случаев нам хотелось бы рассматривать количество фирм, действующих в отрасли, как эндогенную величину. Это поднимает новый вопрос, касающийся наличия рыночной власти с точки зрения общественного благосостояния: является ли равновесное количество фирм, входящих на рынок, общественно эффективным? В разделе 10.F рассматривался случай, когда все потенциальные фирмы одинаковы. (См. случай, когда они неодинаковы, в упражнении 12.E.1.)

Естественным способом моделирования входа на рынок в условиях олигополии является двухшаговый процесс, при котором фирма при входе на рынок несет некоторые затраты на подготовку, $K > 0$, а затем, когда необходимые вложения произведены, конкурирует за бизнес. Простейшая модель, которая реализует эту идею, имеет следующую структуру.

Шаг 1. Все потенциальные фирмы одновременно принимают решение: «входить» или «не входить». Если фирма решает входить, она несет фиксированные издержки $K > 0$.

Шаг 2. Все фирмы, которые вошли на рынок, играют в некоторую олигополистическую игру.

Олигополистической игрой на шаге 2 может быть любая игра из рассмотренных в разделах 12.C и 12.D.

Формально эта двухшаговая модель входа задает динамическую игру (см. главу 9). Заметим, что на шаге 2 подыгры в точности соответствуют играм, которые мы анализировали в предыдущих разделах, потому что на этом этапе количество фирм фиксировано. В наших рассуждениях будем предполагать, что для любого положительного числа активных фирм существует единственное, симметричное (среди фирм) равновесие на шаге 2, и обозначим π_J прибыль фирмы в равновесии на этом шаге, если на рынок вошло J фирм (π_J не включает издержки входа K).

Двухшаговая модель описывает процесс входа очень просто. Динамический компонент мал, и ни одна из фирм не имеет преимущества более раннего входа на рынок, позволяющего ей препятствовать входу или сокращать конкуренцию со стороны остальных фирм (см. анализ таких возможностей в разделе 12.G и приложении B).

Рассмотрим совершенные в подыграх равновесия по Нэшу (SPNE) в чистых стратегиях для данной модели. В любом SPNE данной игры ни одна из фирм не должна испытывать желания изменить свое решение о входе на рынок, зная об аналогичных решениях других фирм. В иллюстративных целях договоримся о том, если фирме безразлично, входить на рынок или нет, то она входит. При таком предположении равновесие при J^* фирмах, входящих на рынок, существует тогда и только тогда, когда

$$\pi_{J^*} \geq K, \tag{12.E.1}$$

$$\pi_{J^*+1} < K. \tag{12.E.2}$$

Условие (12.E.1) говорит о том, что фирма, которая приняла решение о входе на рынок, получает выигрыш, по крайней мере не меньший, чем в случае, если бы она решила не входить, учитывая ожидаемый результат конкуренции с J^* фирмами. Условие (12.E.2) означает, что фирма, которая решила не входить на рынок, получает выигрыш, строго меньший, чем в случае, если бы она решила входить на рынок, учитывая ожидаемый результат конкуренции с $J^* + 1$ фирмами.

Обычно мы предполагаем, что π_J убывает по J и что $\pi_J \to 0$ и $J \to \infty$. В данном случае существует единственное целое $\hat{J}$, такое что $\pi_J \geq K$ для всех $J \leq \hat{J}$ и $\pi_J < K$ для всех $J > \hat{J}$, так что $J^* = \hat{J}$ является единственным равновесным количеством фирм[21, 22].

Проиллюстрируем определение равновесного числа фирм на двух примерах, в которых олигополистические игры на шаге 2 соответствуют моделям Курно и Бертрана, обсуждавшимся в разделе 12.C.

Пример 12.E.1. *Равновесный вход при конкуренции по Курно.* Предположим, что конкуренция на шаге 2 двухшаговой модели входа соответствует модели Курно, рассмотренной в разделе 12.C, где $c(q) = cq$, $p(q) = a - bq$, $a > c \geq 0$ и $b > 0$. Выпуск фирмы на шаге 2, q_J, и прибыль фирмы π_J заданы (см. упражнение 12.C.7) следующими выражениями:

$$q_J = \left(\frac{a-c}{b}\right)\left(\frac{1}{J+1}\right), \tag{12.E.3}$$

$$\pi_J = \left(\frac{a-c}{J+1}\right)^2\left(\frac{1}{b}\right). \tag{12.E.4}$$

Заметим, что π_J строго возрастает по J и что $\pi_J \to 0$ при $J \to \infty$. Кроме того, $Jq_J \to$ $\to (a-c)/b$ при $J \to \infty$, так что совокупный выпуск стремится к конкурентному уровню. Если решить эту систему относительно вещественного числа $\tilde{J} \in \mathbb{R}$, при котором $\pi_{\tilde{J}} = K$, получим

[21] Заметим, однако, что хотя число входящих на рынок фирм единственно, существует множество равновесий, которые различаются тем, какие именно фирмы принимают решение о входе.

[22] В отсутствие предположения о том, что фирма входит на рынок, если ей это безразлично, то условие (12.E.2) будет нестрогим неравенством. Такое изменение имеет значение с точки зрения определения равновесного количества фирм только в случае, когда имеется целое число фирм $\tilde{J}$, такое что $\pi_{\tilde{J}} = K$ (так что при $\tilde{J}$ фирмах на рынке каждая фирма получает нулевую прибыль за вычетом издержек входа K). В этом случае такое изменение позволяет $\tilde{J}$ и $\tilde{J} - 1$ являться равновесиями. С незначительными корректировками, но с определенным ущербом для простоты изложения все утверждения настоящего раздела можно распространить и на данную ситуацию.

$$(\tilde{J}+1)^2 = \frac{(a-c)^2}{bK}$$

или

$$\tilde{J} = \frac{(a-c)}{\sqrt{bK}} - 1.$$

Равновесным числом входящих на рынок фирм J^* является наибольшее целое число, меньшее или равное $\tilde{J}$. Заметим, что при возрастании K число фирм, активных на рынке, (нестрого) возрастает и что по мере возрастания числа активных фирм совокупный выпуск увеличивается, а цена снижается. В самом деле, $J^* \to \infty$ при $K \to 0$, и цена и выпуск стремятся к своему конкурентному уровню. Заметим также, что пропорциональное увеличение спроса при каждом уровне цен, что выражается в снижении b, изменяет равновесное число фирм и цену точно так же, как это было бы при снижении K. ■

Пример 12.E.2. *Равновесный ход при конкуренции по Бертрану.* Предположим теперь, что конкуренция на шаге 2 двухшаговой игры входа принимает форму модели Бертрана, рассмотренной в разделе 10.C. Снова имеем: $c(\mathrm{q}) = cq$, $p(q) = a - bq$, $a > c \geq 0$, $b > 0$. В этом случае $\pi_1 = \pi^m$, монопольному уровню прибыли, а $\pi_J = 0$ для всех $J \geq 2$. Тогда, предполагая, что $\pi^m > K$, в SPNE должно иметь место $J^* = 1$ и монопольный уровень прибыли, и объем выпуска. Сопоставляя этот результат с результатом примера 12.E.1 для модели Курно, мы видим, что наличие более интенсивной конкуренции на шаге 2 на самом деле *снижает* итоговый уровень конкуренции на рынке! ■

Вход и благосостояние

Рассмотрим, каким образом число фирм, входящих на олигополистический рынок, соотносится с числом фирм, максимизирующим общественное благосостояние при наличии олигополистической конкуренции на рынке. Начнем с изучения этого вопроса применительно к случаю отрасли с однородным товаром.

Пусть q_J — выпуск на одну фирму в симметричном равновесии, если на рынке действует олигополистическая конкуренция. Как обычно, обратная функция спроса обозначается $p(\cdot)$. Тогда $p(Jq_J)$ — это цена товара при J активных фирмах на рынке; тогда $\pi_J = p(Jq_J)q_J - c(q_J)$, где $c(\cdot)$ — функция издержек фирмы после входа на рынок. Предположим, что $c(0) = 0$.

Благосостояние будем измерять с помощью агрегированного маршаллианского излишка (см. раздел 10.E). В этом случае общественное благосостояние при J активных фирмах задается выражением

$$W(J) = \int_0^{Jq_J} p(s)ds - Jc(q_J) - JK. \tag{12.E.5}$$

Общественно оптимальным числом активных фирм в этой олигополистической отрасли, которое мы обозначим $J°$, является любое целое число, которое решает задачу $\mathrm{Max}_J W(J)$. Пример 12.E.3 показывает, что, в отличие от вывода в ситуации с конкурентным рынком, здесь равновесное число фирм не обязано быть общественно оптимальным.

Пример 12.E.3. Рассмотрим модель Курно из примера 12.E.1. На секунду отбросим условие, что количество фирм является целым числом, и найдем количество фирм $\bar{J}$, при котором $W'(\bar{J}) = 0$. Это дает

$$(\bar{J} + 1)^3 = \frac{(a - c)^2}{bK}. \tag{12.E.6}$$

Если $\bar{J}$ оказывается целым числом, то общественно оптимальным числом фирм является $J^\circ = \bar{J}$. В противном случае J° — одно из целых чисел с любой стороны от $\bar{J}$ (вспомним, что функция $W(\cdot)$ вогнутая). Теперь вспомним из (12.E.4), что $\pi_J = (1/b)\big((a - c)/(J + 1)\big)^2$. Как отмечено в примере 12.E.1, если мы считаем $\tilde{J}$ действительным числом, таким что

$$(\tilde{J} + 1)^2 = \frac{(a - c)^2}{bK}, \tag{12.E.7}$$

то равновесное число фирм является наибольшим целым, большим или равным $\tilde{J}$. Из (12.E.6) и (12.E.7) мы видим, что

$$(\tilde{J} + 1) = (\bar{J} + 1)^{3/2}.$$

Тем самым, если параметры издержек и спроса таковы, что оптимальное количество фирм в точности равно двум ($J^o = \bar{J} = 2$), то на самом деле на рынок входят 4 фирмы ($J^* = 4$, поскольку $\tilde{J} \cong 4{,}2$); если общественный оптимум равен трем ($J^o = \bar{J} = 3$), то на рынок входят 7 фирм ($J^* = 7$, поскольку $\tilde{J} = 7$); если в общественном оптимуме должно войти 8 фирм ($J^o = \bar{J} = 8$), то в действительности входят 26 фирм ($J^* = 26$, поскольку $\tilde{J} = 26$). ■

Можно ли сказать что-то более общее о природе такого смещения при входе на рынок? Оказывается, можно, если двухшаговая конкуренция удовлетворяет трем слабым условиям (изложение ниже следует работе (Mankiw, Whinston, 1986)):

$$\text{(A1) } Jq_J \ge J'q_{J'} \text{ при всех } J > J';$$

$$\text{(A2) } q_J \le q_{J'} \text{ при всех } J > J';$$

$$\text{(A3) } p(Jq_J) - c'(q_J) \ge 0 \text{ для всех } J.$$

Смысл условий (A1) и (A3) очевиден: (A1) требует, чтобы совокупный выпуск увеличивался (цена падала) при входе в отрасль большего числа фирм, а согласно (A3) цена не должна опускаться ниже предельных издержек, независимо от числа фирм, входящих в отрасль. Условие (A2) оказывается более интересным. Это предположение о «захвате» рыночной доли. Оно гласит, что, когда дополнительная фирма входит на рынок, продажи существующих фирм снижаются (нестрого). Поэтому часть продаж новой фирмы формируется за счет сокращения продаж существующих фирм. Этим условиям удовлетворяет большинство (хотя и не все) олигополистических моделей. (В модели Бертрана, например, условие (A3) не выполняется.)

Применительно к рынкам, удовлетворяющим всем трем условиям, мы получим результат, показанный в утверждении 12.E.1.

Утверждение 12.E.1. Предположим, что условия (A1)–(A3) выполняются в олигополистической игре после входа фирм на рынок, что $p'(\cdot) < 0$ и $c''(\cdot) \geq 0$. Тогда равновесное число вошедших фирм J^* не меньше $J^\circ - 1$, где J° — общественно оптимальное число вошедших фирм[23].

Доказательство. Для $J^\circ = 1$ результат тривиален, так что предположим, что $J^\circ > 1$. В предположениях данного утверждения π_J убывает по J (в упражнении 12.E.2 вас просят показать это). Чтобы получить требуемый результат, нам необходимо показать лишь, что $\pi_{J^\circ-1} \geq K$.

Для доказательства заметим сначала, что по определению J° мы должны иметь $W(J^\circ) - W(J^\circ - 1) \geq 0$, или

$$\int_{Q_{J^\circ-1}}^{Q_{J^\circ}} p(s)ds - J^\circ c(q_{J^\circ}) + (J^\circ - 1)c(q_{J^\circ-1}) \geq K,$$

где мы принимаем $Q_J = Jq_J$. Выражение можно преобразовать, получив

$$\pi_{J^\circ-1} - K \geq p(Q_{J^\circ-1})q_{J^\circ-1} - \int_{Q_{J^\circ-1}}^{Q_{J^\circ}} p(s)ds + J^\circ\left[c(q_{J^\circ}) - c(q_{J^\circ-1})\right].$$

Имея условие $p'(\cdot) < 0$ и условие (A1), получаем

$$\pi_{J^\circ-1} - K \geq p(Q_{J^\circ-1})\left[q_{J^\circ-1} + Q_{J^\circ-1} - Q_{J^\circ}\right] + J^\circ\left[c(q_{J^\circ}) - c(q_{J^\circ-1})\right]. \quad (12.E.8)$$

Но, поскольку $c''(\cdot) \geq 0$, нам известно, что $c'(q_{J^\circ-1})\left[q_{J^\circ} - q_{J^\circ-1}\right] \leq$ $\leq c(q_{J^\circ}) - c(q_{J^\circ-1})$. Используя это неравенство вместе с (12.E.8) и тем фактом, что $q_{J^\circ-1} + Q_{J^\circ-1} - Q_{J^o} = J^\circ(q_{J^\circ-1} - q_{J^\circ})$, получаем

$$\pi_{J^\circ-1} - K \geq \left[p(Q_{J^\circ-1}) - c'(q_{J^\circ-1})\right]J^\circ(q_{J^\circ-1} - q_{J^\circ}).$$

Из условий (A2) и (A3) тогда следует, что $\pi_{J^\circ-1} \geq K$[24]. ■

Идея, стоящая за доказательством утверждения 12.E.1, проиллюстрирована на рис. 12.E.1 для случая, когда $c(q) = 0$ для всех q. На рисунке прирост благосостояния от J°-й фирмы до вычета издержек входа представлен закрашенной областью (*abcd*). Поскольку вход на рынок этой фирмы общественно эффективен, площадь этой области должна быть больше или равна K. Но площадь (*abcd*) меньше, чем площадь (*abce*), которая равна $p(Q_{J^\circ-1})(Q_{J^\circ} - Q_{J^\circ-1})$. Более того, захват рыночной доли означает, что $(Q_{J^\circ} - Q_{J^\circ-1}) = J^\circ q_{J^\circ} - (J^\circ - 1)q_{J^\circ-1} \leq q_{J^\circ-1}$, таким образом, мы видим, что пло-

[23] Если задача максимизации $W(J)$ имеет более одного решения, скажем $\left\{J_1^o, \ldots, J_N^o\right\}$, то $J^* \geq \text{Max}\left\{J_1^o, \ldots, J_N^o\right\} - 1$.

[24] Заметим, что если (A1) выполняется как строгое неравенство, то вывод может быть усилен до $\pi_{J^\circ-1} > K$ (в (12.E.8) возникнет строгое неравенство). В этом случае $J^* \geq J^\circ - 1$, даже если фирмы не входят на рынок, когда им это безразлично.

щадь ($abce$) $\leq p(Q_{J^\circ-1})q_{J^\circ-1} = \pi_{J^\circ-1}$ (значение $\pi_{J^\circ-1}$ представлено на рис. 12.E.1 областью ($abfg$)). Поэтому $\pi_{J^\circ-1} \geq K$.

Тенденция к избыточному входу при наличии рыночной власти в основе своей обусловлена эффектом «захвата рынка». Если захватом рынка сопровождается вход нового участника, а цена превышает предельные издержки, то часть прибыли новой фирмы возникает за счет существующих фирм, что создает избыточный стимул ко входу.

Конечно, как указывает утверждение 12.E.1, в отрасли может оказаться и слишком мало фирм. В классическом примере рассматривается ситуация, в которой общественно оптимальное число фирм равно единице (1). Единственная фирма, рассматривающая возможность входа на рынок в качестве монополиста, сравнивает свою монопольную прибыль — заштрихованную область ($abde$) на рис. 12.E.2 — с издержками входа K. Однако фирма не может учесть и потому игнорирует увеличение потребительского излишка, возникающего в результате ее входа, — закрашенную область (fae). В итоге она может счесть вход неприбыльным, даже если он является социально предпочтительным. Однако утверждение 12.E.1 гласит, что если на рынок с однородным товаром входит слишком мало фирм, то их будет максимум одна.

Что произойдет в случае продуктовой дифференциации? Оказывается, что выводов общего характера можно сделать очень мало. Причина в том, что та проблема, которую иллюстрирует рис. 12.E.2, теперь будет возникать по отношению ко многим продуктам и приводить к слишком многочисленным выводам вида «одного не хватает». Дополнительная сложность состоит в том, что при дифференциации продуктов количество фирм — не единственный существенный фактор. У нас также может не быть правильного набора продуктов[25].

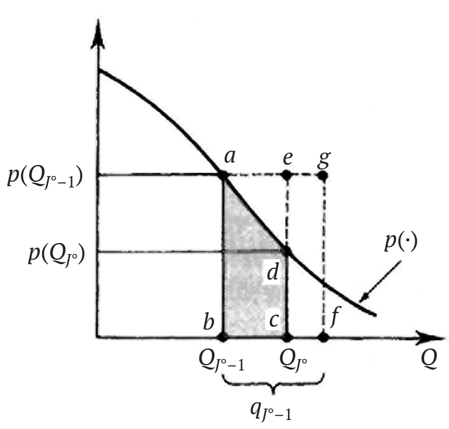


Рис. 12.E.1. Графическое объяснение утверждения 12.E.1

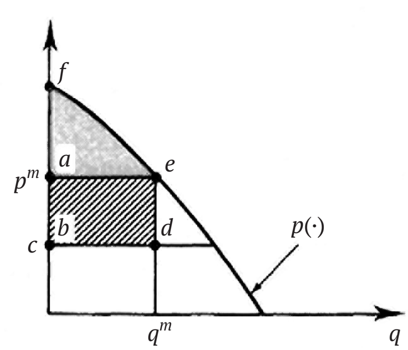


Рис. 12.E.2. Недостаточный стимул для входа

[25] См. работы (Spence, 1976; Dixit, Stiglitz, 1977; Salop, 1979; Mankiw, Whinston, 1986), в которых глубже рассматривается вопрос продуктовой дифференциации.

При альтернативном подходе к двухшаговым играм действия по входу и выбору объема выпуска/цены моделируются как одновременные. Например, одношаговые версии примеров 12.E.1 и 12.E.2 являются играми по Курно и Бертрану соответственно с функциями издержек

$$C(q) = \begin{cases} K + c(q), & \text{если } q > 0, \\ 0, & \text{если } q = 0, \end{cases}$$

и бесконечным (или очень большим) количеством фирм. Для моделей ценовой конкуренции это изменение имеет кардинальные последствия. Рассмотрим его влияние на результат примера 12.E.2, которое рассмотрено в примере 12.E.4.

Пример 12.E.4. *Одношаговая модель входа с конкуренцией по Бертрану.* Предположим, что $p > [K + cx(p)]/x(p)$ для некоторого p (параметр $c > 0$ — это издержки на единицу), т. е. предположим, что существует некоторый уровень цен, при котором монополист может получить строго положительную прибыль после уплаты издержек входа K. Предположим, что множество фирм одновременно называет цены и что фирма несет издержки K только в том случае, если она действительно осуществляет продажи. При любом равновесии в этой игре все продажи происходят при цене $p^* = \mathrm{Min}\{p : p \geq [K + cx(p)]/x(p)\}$ (если цена превышает p^*, то какая-нибудь фирма может выиграть, установив цену $p^* - \varepsilon$; если цена ниже p^*, то какая-то из фирм получит строго отрицательную прибыль) и одной фирме, которая удовлетворяет весь спрос при этой цене (если бы спрос был разбит между несколькими фирмами при цене p^*, то ни одна из них не могла бы окупить своих издержек)[26]. В этом равновесии все фирмы получают нулевую прибыль. Равновесный исход изображен на рис. 12.E.3. Обратите внимание, что он строго лучше с точки зрения благосостояния, чем исход, возникающий в результате двухшагового процесса входа, рассмотренного в примере 12.E.2, где также присутствует единственная фирма, но она объявляет монопольную цену[27]. ■

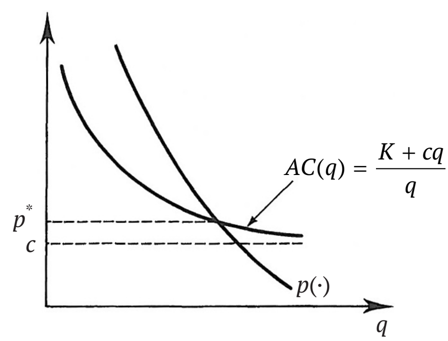


Рис. 12.E.3. Равновесие в одношаговой игре входа, рассмотренной в примере 12.E.4

В чем заключается ключевое различие между одношаговым и двухшаговым процессом входа? В двухшаговой модели фирма, входящая на рынок, должна понести фиксированные издержки до того, как начнется конкуренция, а в одношаговой мо-

[26] Заметим, что теперь мы допускаем, что потребительский спрос может полностью уйти к одной фирме, даже если несколько фирм предлагают одну и ту же цену (ранее мы считали, что разделение спроса в этом случае задано экзогенно). Это единственное разделение спроса, которое согласуется с равновесием в данном примере. Его можно формально обосновать как предел уравнений, которые возникают, если цены необходимо указывать в дискретных единицах по мере уменьшения величины этих единиц.

[27] На самом деле этот равновесный исход является решением задачи планировщика, который максимизирует благосостояние и может контролировать выпуск фирм q_j, но должен гарантировать неотрицательную прибыль всем активным фирмам, т. е. который сталкивается с ограничением $p\left(\sum_k q_k\right)q_j \geq cq_j + K$ для каждого j, при котором $q_j > 0$.

дели она может конкурировать за продажи, сохраняя за собой возможность не тратить эти средства, если продажи отсутствуют. Двухшаговый случай можно рассматривать как модель фирмы, которая однократно несет фиксированные издержки входа, но в дальнейшем участвует в конкурентных взаимодействиях в течение многих периодов. Одношаговый случай описывает ситуацию, в которой возможен вход на рынок с использованием стратегии «бей и беги» (т. е. вход на один период и уплата цены использования капитала всего лишь за один период). Если фирма должна понести фиксированные издержки при входе, она должна учитывать реакцию других фирм на свое появление. В модели Бертрана с постоянными издержками реакция будет жесткой: цена упадет до уровня издержек, а фирма в результате входа на рынок потеряет деньги. Наоборот, в одношаговой игре фирма может войти на рынок и «срезать» цены активных фирм, не боясь ответных мер. Благодаря этому вход на рынок будет более агрессивным, а равновесная цена — более низкой. Одношаговая модель входа с ценовой конкуренцией представляет собой одну из формализаций того, что в работе (Baumol, Panzar, Willig, 1982) называется *состязательным рынком*.

12.F. Конкуренция как предельный случай

В главе 10 было предложено рассматривать конкурентный рынок как предельный случай олигополистического рынка, на котором рыночная власть фирм постепенно уменьшается (см. раздел 10.B). Мы также отмечали, что такой подход создает логическую схему, позволяющую учесть случаи, когда конкурентные равновесия отсутствуют при наличии свободного входа и средних издержек, демонстрирующих строго положительный эффективный масштаб (см. раздел 10.F). Согласно нашим рассуждениям, если в подобной ситуации рынок может вместить множество фирм, то рыночный исход должен был бы приближаться к конкурентному, если бы среднеотраслевые издержки были постоянными на уровне минимальных средних издержек. В данном разделе мы изучим эти утверждения подробнее и рассмотрим идею о том, что если в условиях свободного входа величина отдельных фирм мала по отношению к объему рынка, то равновесие будет почти конкурентным.

Один пример этого феномена мы уже видели в примере 12.E.1. Здесь мы рассмотрим этот вопрос в более общей постановке. Пусть теперь рыночный спрос имеет вид $x_\alpha(p) = \alpha x(p)$, где функция $x(p)$ дифференцируема и $x'(\cdot) < 0$. Увеличение α соответствует пропорциональному увеличению спроса при всех ценах. Если обозначить через $p(q)$ обратную функцию спроса, соответствующую $x(p)$, то обратной функцией спроса, соответствующей $x_\alpha(p)$, будет $p_\alpha(q) = p(q/\alpha)$. Все потенциальные участники имеют строго выпуклую функцию издержек $c(q)$ и издержки входа $K > 0$. Обозначим уровень минимальных средних издержек фирмы $\bar{c} = \mathrm{Min}_{q>0}[K + c(q)]/q$, а (единственный) уровень эффективного масштаба фирмы $\bar{q} > 0$.

Как и в примере 12.E.1, сосредоточим внимание на случае двухшаговой модели входа с конкуренцией по Курно на втором шаге, при которой фирма несет издержки K только тогда, когда на шаге 1 она принимает решение войти на рынок. Пусть $b(Q_{-j})$ обозначает оптимальный уровень выпуска j-й фирмы при любом заданном совокупном выпуске ее конкурентов Q_{-j}. Будем предполагать, что наилучший ответ будет единственным при любых Q_{-j}.

Наконец, обозначим через p_α и Q_α цену и совокупный выпуск в совершенном в подыграх равновесии по Нэшу (SPNE) двухшаговой модели входа с конкуренцией по Курно при объеме рынка α. Обозначим через P_α множество всех цен, соответствующих SPNE для объема рынка α.

Утверждение 12.F.1. При росте объема рынка цена в любом совершенном в подыграх равновесии по Нэшу в двухшаговой модели входа с конкуренцией по Курно стремится к уровню минимальных средних издержек («конкурентной» цене). Формально

$$\max_{p_\alpha \in P_\alpha} \left| p_\alpha - \bar{c} \right| \to 0 \text{ при } \alpha \to \infty.$$

Доказательство. Рассуждение состоит из трех шагов:

(i) Во-первых, как вас просят в упражнении 12.F.1, необходимо показать, что для достаточно большого α функция наилучшего ответа активной фирмы bQ_{-j} является (слабо) убывающей по Q_{-j}.

(ii) Во-вторых, необходимо доказать, что если $b(Q_{-j})$ является убывающей, то в любом SPNE двухшаговой игры входа при рынке величины α должно выполняться неравенство $Q_\alpha < \alpha x(\bar{c}) - \bar{q}$. Рассмотрим j-ю фирму, которая в этом равновесии выбирает «не входить» на рынок, и предположим, что вместо этого она решает войти и произвести продукцию в объеме $\bar{q}$. Поскольку $b(\cdot)$ убывает, интуитивно представляется допустимым, что совокупный уровень выпуска первоначальных J_α активных фирм не может увеличиваться, если j-я фирма входит на рынок таким образом (см. приведенный ниже мелким шрифтом абзац, в котором приводится формально обоснование этого утверждения). В результате совокупный выпуск на рынке после входа j-й фирмы не превышает $(Q_\alpha + \bar{q})$; а поскольку $(Q_\alpha + \bar{q}) < \alpha x(\bar{c})$, то итоговая цена (после входа) превышает $\bar{c}$. Поэтому j-я фирма может получить строго положительную прибыль, войдя на рынок таким образом, что противоречит гипотезе о том, что мы изначально находились в SPNE.

Доказательство того, что объем выпуска существующих J_α фирм не может увеличиться после входа на рынок j-й фирмы, выглядит следующим образом. Пусть Q_{-j} — первоначальный равновесный уровень совокупного выпуска этих фирм, и пусть $\tilde{Q}_{-j}$ — их совокупный уровень выпуска после входа на рынок j-й фирмы. Предположим, что $\tilde{Q}_{-j} > Q_j$. Тогда хотя бы одна из этих фирм, скажем k-я, должна была бы увеличить свой уровень выпуска в ответ на вход j-й фирмы, $\tilde{q}_k > q_k$. Поскольку $b(\cdot)$ убывает, должно выполняться соотношение $\tilde{Q}_{-k} < Q_{-k}$; т. е. после входа j-й фирмы объем выпуска $\tilde{Q}_{-k}$ активных фирм, за исключением k-й (что включает в себя j-ю фирму), должен быть меньше, чем объем их выпуска до входа, Q_{-k}. Согласно части (c) упражнения 12.C.8, это означает, что $q_k + Q_{-k} \geq \tilde{q}_k + \tilde{Q}_{-k}$. Но $Q_{-j} = q_k + Q_{-k}$ (поскольку j-я фирма первоначально ничего не производит), и $\tilde{q}_k + \tilde{Q}_{-k} \geq \tilde{Q}_{-j}$ (поскольку выпуск j-й фирмы после ее входа на рынок неотрицателен). Тем самым $Q_{-j} \geq \tilde{Q}_{-j}$, что является противоречием.

(iii) Наконец, докажем, что из вывода (ii) следует результат. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим, насколько цена может превысить $\bar{c}$, если совокупный выпуск ниже $\alpha x(\bar{c})$ не больше чем на $\bar{q}$. Разница в цене имеет следующий вид:

$$\Delta p_\alpha = p_\alpha(\alpha x(\bar{c}) - \bar{q}) - p_\alpha(\alpha x(\bar{c})) = p\left(\frac{\alpha x(\bar{c}) - \bar{q}}{\alpha}\right) - p(x(\bar{c})).$$

Но при $\alpha \to \infty$ $(\alpha x(\bar{c}) - \bar{q})/\alpha \to x(\bar{c})$, так что $\Delta p_\alpha \to 0$. ■

В основе утверждения 12.F.1 лежат два фактора. Во-первых, процесс входа гарантирует, что фирмы будут входить на рынок, если на нем остается слишком много «места». Во-вторых, на рынке, который очень велик относительно минимального эффективного масштаба, снижение выпуска, равное минимальному эффективному масштабу, очень слабо влияет на цену. Следствием этих двух фактов является то, что по мере роста объема рынка рыночная власть исчезает, а цена приближается к уровню минимальных средних издержек (конкурентному уровню). В таком предельном случае благосостояние стремится к своему оптимальному уровню[28].

В примере 12.E.2 мы видели, что в двухшаговой модели Бертрана подобный предельный результат не имеет места[29]. Поскольку цена падает до уровня предельных издержек, даже если на рынок входят две фирмы, рынок всегда монополизирован, вне зависимости от его размера. Однако предельные свойства двухшаговой модели Бертрана носят весьма специфический характер. При любом размере рынка, пока цена превышает предельные издержки для любого конечного количества фирм, входящих на рынок, и стремится к уровню предельных издержек при возрастании количества фирм, имеет место предельный результат, аналогичный утверждению 12.F.1.

Наконец, утверждение 12.F.1 применимо только к случаю рынков с однородными товарами. При дифференциации продуктов необходимо соб-

[28] Смысл аппроксимации связан с характеристикой величины рынка α. В предположении, что α отражает количество потребителей, это означает, что потери благосостояния в расчете на одного потребителя по отношению к общественному оптимуму стремятся к нулю.

[29] Строго говоря, функции издержек фирм в примере 12.E.2 отличаются от функций издержек, предполагавшихся в утверждении 12.F.1 (средние издержки, включая K, снижаются везде в примере 12.E.2). Тем не менее можно показать, что для функции издержек из примера 12.E.2 утверждение 12.F.1 верно (при этом предполагается, что $\bar{c}$ в формулировке утверждения является предельным значением средних издержек при возрастании объема выпуска фирмы).

людать осторожность. Фирмы могут быть небольшими относительно всего множества взаимосвязанных рынков, но значительными в собственной конкретной нише. В этом случае каждая фирма может сохранять существенную рыночную власть даже в пределе, а предельное равновесие может оказаться далеко не эффективным (см. упражнение 12.F.4).

12.G. Влияние стратегических обязательств на будущую конкуренцию

Важной особенностью многих олигополистических моделей является то, что фирмы пытаются принять стратегические обязательства, чтобы изменить условия будущей конкуренции благоприятным для себя образом. Примеров стратегических обязательств множество. Так, инвестиции в снижение издержек, производственные мощности и разработку новых продуктов ведут к долгосрочным изменениям, способным повлиять на характер будущей конкуренции. На практике такого рода решения входят в число важнейших конкурентных решений, принимаемых фирмами.

Некоторые общие особенности этого типа стратегических обязательств можно проиллюстрировать, исследуя следующую простую двухшаговую модель дуополии.

Шаг 1: фирма 1 выбирает уровень стратегических инвестиций, который мы обозначим $k \in \mathbb{R}$. Выбор наблюдаем.

Шаг 2: фирмы 1 и 2 играют в некоторую олигополистическую игру, выбирая стратегии $s_1 \in S_1 \subset \mathbb{R}$ и $s_2 \in S_2 \subset \mathbb{R}$ соответственно. При уровне инвестиций k и выборе стратегий (s_1, s_2) прибыль фирм 1 и 2 задается функциями $\pi_1(s_1, s_2, k)$ и $\pi_2(s_1, s_2)$ соответственно.

Например, k может представлять собой инвестиции, снижающие предельные издержки производства фирмы 1, а шаг 2 — конкуренцию по Курно (так что $s_j = q_j$, выбор объема производства j-й фирмой). Как вариант, конкуренция на шаге 2 может быть ценовой конкуренцией в условиях дифференциации продуктов.

Будем предполагать, что при любом выборе k на шаге 2 существует единственное равновесие по Нэшу, $\left(s_1^*(k),\ s_2^*(k)\right)$ и что оно дифференцируемо по k. Также для целей нашего обсуждения будем предполагать, что $\partial\pi_1(s_1,\ s_2,\ k)/\partial s_2 < 0$ и $\partial\pi_2(s_1,\ s_2)/\partial s_1 < 0,$ т. е. что действия на шаге 2 являются «агрессивными» в том смысле, что более высокий уровень s_{-j}, установленный конкурентом j-й фирмы, снижает прибыль j-й фирмы. Поэтому фирма 1 улучшит свое положение (при прочих равных), если сможет принудить фирму 2 понизить выбираемое ею значение s_2.

Когда инвестиции фирмы 1 приведут к тому, что фирма 2 понизит s_2? Пусть $b_1(s_2, k)$ и $b_2(s_1)$ — функции наилучшего ответа для фирмы 1 и фирмы 2 на шаге 2 (обратите внимание, что наилучший ответ фирмы 1 зависит от k).

Тогда можно продифференцировать условие равновесия $s_2^* = b_2\left(b_1\left(s_2^*,\ k\right)\right)$, откуда получаем

$$\frac{ds_2^*(k)}{dk} = \frac{db_2\left(s_1^*(k)\right)}{ds_1}\left(\frac{\partial b_1\left(s_2^*(k),\ k\right)\big/\partial k}{1-\left[\partial b_1\left(s_2^*(k),\ k\right)\big/\partial s_2\right]\left[db_2\left(s_1^*(k)\right)\big/ds_1\right]}\right). \quad (12.G.1)$$

Неотрицательность второго множителя в правой части (12.G.1) часто называют *условием стабильности*. Оно означает, что простой процесс динамической корректировки, в котором фирмы играют близоруко, давая оптимальные ответы на текущие стратегии друг друга, сходится к равновесию по Нэшу из любой пары стратегий, находящихся в окрестности равновесия. Это предположение будем сохранять до конца обсуждения. Таким образом, видно, что влияние k на s_2 зависит от двух факторов: (i) делает ли k фирму 1 более или менее «агрессивной» в конкуренции на шаге 2 (т. е. каков знак $\partial b_1\left(s_2^*(k),\ k\right)\big/\partial k$)? и (ii) реагирует ли фирма 2 на ожидание более агрессивной игры со стороны фирмы 1 большей или меньшей агрессией со своей стороны (т. е. каков знак $db_2\left(s_1^*(k)\right)\big/ds_1$)?

Когда фирма 2 реагирует таким же образом на более агрессивный выбор s_1 фирмы 1 (т. е. когда $db_2\left(s_1^*(k)\right)\big/ds_1 > 0$), мы говорим, что s_2 является *стратегическим комплементом* s_1; и если фирма 2 становится менее агрессивной при более агрессивной игре со стороны фирмы 1 (т. е. $db_2\left(s_1^*(k)\right)\big/ds_1 < 0$), s_2 является *стратегическим субститутом* s_1. (Эта терминология заимствована из работы (Bulow, Geanakoplos, Klemperer, 1985); см. также соответствующую классификацию в работе (Fudenberg, Tirole, 1984).)

На рис. 12.G.1 приведены две детерминанты реакции фирмы 2, $ds_2^*(k)\big/dk$.

Пример 12.G.1. *Стратегические эффекты от инвестиций в снижение предельных издержек.* Значимость для стратегического поведения разницы между стратегическими комплементами и стратегическими субститутами может быть хорошо про-

	Стратегические субституты: $\frac{db_2(\cdot)}{ds_1} < 0$	Стратегические комплементы: $\frac{db_2(\cdot)}{ds_1} > 0$
$\frac{\partial b_1(\cdot)}{\partial k} > 0$	$\frac{ds_2^*(k)}{dk} < 0$	$\frac{ds_2^*(k)}{dk} > 0$
$\frac{\partial b_1(\cdot)}{\partial k} < 0$	$\frac{ds_2^*(k)}{dk} > 0$	$\frac{ds_2^*(k)}{dk} < 0$

Рис. 12.G.1. Детерминанты знака $ds_2^*(k)\big/dk$

демонстрирована на примере изучения стратегических эффектов от инвестиций в снижение предельных издержек в моделях объема выпуска по сравнению с моделями цены.

Предположим, что если фирма 1 инвестирует k, то ее (постоянные) издержки производства равны $c(k)$, где $c'(k) < 0$. Рассмотрим сначала случай, когда конкуренция на шаге 2 принимает форму модели Курно из примера 12.C.1, так что стратегическая переменная на шаге 2 $s_j = q_j$, выбираемому j-й фирмой объему выпуска. В этой модели мы имеем ситуацию стратегических субститутов, поскольку функция наилучшего ответа фирмы 2 на шаге 2 имеет отрицательный наклон ($db_2(q_1)/dq_1 < 0$ при всех q_1, таких что $b_2(q_1) > 0$). Как показано на рис. 12.F.2(a), снижение предельных издержек фирмы 1 вследствие увеличения k, скажем с k' до $k'' > k'$, сдвигает функцию наилучшего ответа фирмы 1 вовне от $b_1(q_2, k')$ до $b_1(q_2, k'')$; при более низких предельных издержках фирма 1 будет стремиться производить больше при любом выборе объема выпуска ее конкурента (и поэтому в терминах предшествующего анализа $\partial b_1\left(q_2^*(k),\ k\right)\big/\partial k > 0$). Тем самым в данной модели инвестиции в снижение издержек ведут к снижению уровня выпуска фирмы 2, что дает эффект, который выгоден фирме 1 (см. рис. 12.G.2(a)).

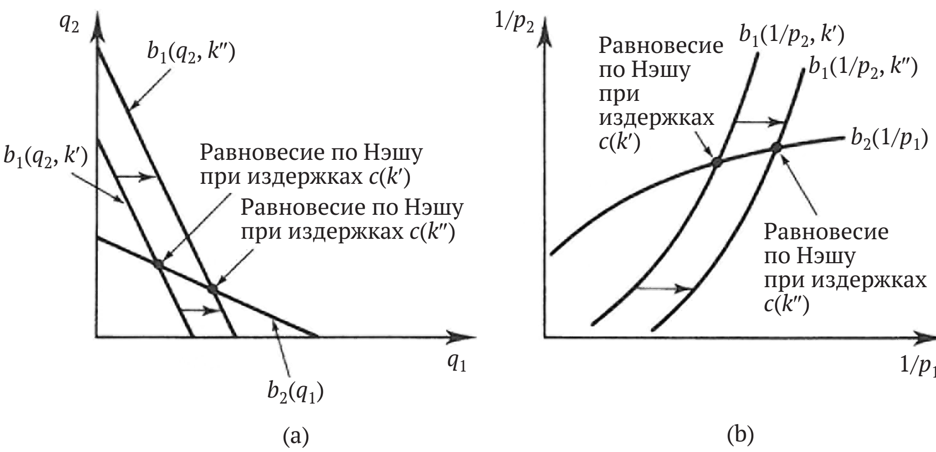


Рис. 12.G.2. Стратегические эффекты от снижения предельных издержек с $c(k')$ до $c(k'') < c(k')$. (a) Количественная модель (b) Ценовая модель

Наоборот, предположим, что конкуренция на шаге 2 принимает вид модели дифференцированной ценовой конкуренции из примера 12.C.2. Здесь мы возьмем $s_j = (1/p_j)$, чтобы обеспечить соответствие интерпретации s_j как «агрессивной» переменной (т. е. $\partial\pi_1(s_1,\ s_2,\ k)/\partial s_2 < 0$). В этой модели мы сталкиваемся со стратегическими комплементами: ожидаемое снижение цены фирмой 1 приводит к тому, что фирма 2 также снижает свою цену (т. е. $db_2(1/p_1)/d(1/p_1) > 0$). Как изображено на рис. 12.G.2(b), снижение предельных издержек фирмы 1 вследствие увеличения k с k' до $k'' > k'$ снова делает фирму 1 более агрессивной, в результате чего она устанавливает более низкую цену при любом уровне цены, установленном конкурентом; ее функция наилучшего ответа сдвигается вправо от $b_1(1/p_2, k')$ до $b_1(1/p_2, k'')$ (следовательно, в терминах предшествующего анализа, $\partial b_1\left(1\big/p_2^*(k),\ k\right)\big/\partial k > 0$). При стратегических комплементах результатом снижения предельных издержек фирмы 1 является снижение равновесной цены фирмы 2 — эффект, который для фирмы 1 нежелателен.

Таким образом, стратегические эффекты снижения предельных издержек фирмы 1 в двух рассмотренных моделях различаются, будучи выгодными для нее в модели объема и невыгодными в ценовой модели[30]. Какая из моделей точнее отражает характер конкурентного взаимодействия, зависит от конкретных характеристик ситуации в отрасли. Например, если фирмы в зрелой отрасли располагают избыточными мощностями, то ближе к действительности будет ценовая модель, а стратегический эффект будет негативным. С другой стороны, на новом рынке, где фирмы инвестируют в производственные мощности, стратегический эффект будет лучше отражать модель объема выпуска (вспомним нашу интерпретацию модели Курно в терминах выбора производственной мощности в разделе 12.C). ■

Поэтому, принимая решение об уровне инвестиций, фирма 2 должна учитывать не только их прямой эффект (скажем, прямую выгоду от снижения издержек), но и стратегические эффекты, порожденные изменениями в поведении конкурента, которые вызваны этими инвестициями. Формально производную прибыли фирмы 1 по k можно записать как

$$\frac{d\pi_1\left(s_1^*(k),\ s_2^*(k),\ k\right)}{dk} = \frac{\partial\pi_1\left(s_1^*(k),\ s_2^*(k),\ k\right)}{\partial k} +$$
$$+\frac{\partial\pi_1\left(s_1^*(k),\ s_2^*(k),\ k\right)}{\partial s_1}\frac{ds_1^*(k)}{dk} + \frac{\partial\pi_1\left(s_1^*(k),\ s_2^*(k),\ k\right)}{\partial s_2}\frac{ds_2^*(k)}{dk}.$$

Поскольку в равновесии по Нэшу на шаге 2 при уровне инвестиций k имеем $\partial\pi_1\left(s_1^*(k),\ s_2^*(k),\ k\right)\big/\partial s_1 = 0,$ это выражение упрощается до

$$\frac{d\pi_1\left(s_1^*(k),\ s_2^*(k),\ k\right)}{dk} =$$
$$= \frac{\partial\pi_1\left(s_1^*(k),\ s_2^*(k),\ k\right)}{\partial k} + \frac{\partial\pi_1\left(s_1^*(k),\ s_2^*(k),\ k\right)}{\partial s_2}\frac{ds_2^*(k)}{dk}. \qquad (12.G.2)$$

Первый член в правой части (12.G.2) представляет собой *прямой эффект* от изменения k на прибыль фирмы 1; второй член представляет собой *стратегический эффект*, возникающий в результате равновесного ответа фирмы 2 на изменение k. Поскольку $\partial\pi_1\left(s_1^*(k),\ s_2^*(k),\ k\right)\big/\partial s_2 < 0$, стратегический эффект для прибыли фирмы 1 положителен, если $ds_2^*(k)\big/dk < 0$, т. е. реакция фирмы 2 на увеличение инвестиций фирмы 1 состоит в снижении выбираемого ей уровня s_2.

В вышеприведенной дискуссии мы рассмотрели ситуации, в которых фирмы принимают стратегические обязательства, чтобы повлиять на будущую конкуренцию с другой фирмой, которая присутствует или будет присутствовать на рынке. Особенно яркий пример влияния стратегиче-

[30] Функции наилучшего ответа необязательно должны иметь такой наклон в моделях цены и объема; рассмотренные здесь конкретные примеры представляют собой «нормальные» случаи, см. упражнение 12.C.12.

ских обязательств на будущие рыночные условия, однако, возникает, когда одна фирма является первой в отрасли и стремится использовать свое преимущество первопроходца, чтобы препятствовать входу на рынок других фирм. Эту ситуацию можно анализировать формально, вводя дополнительный шаг между шагами 1 и 2, например шаг 1,5, на котором фирма 2 решает, присутствовать ли ей на рынке, и предположив, что если она выбирает вход на рынок, то должна понести первоначальные издержки $F > 0$. Фирма 2 решит не входить на рынок при заданном выборе фирмой 1 значения k на первом шаге, если ее ожидаемая прибыль на шаге 3, $\pi_2\left(s_1^*(k),\ s_2^*(k)\right)$ меньше F. Зная об этом, фирма, уже находящаяся на рынке, конечно, захочет просто объявить, что в ответ не вход любой другой фирмы она применит хищническое ценообразование (т. е. на шаге 3 выберет очень высокий уровень s_1). Проблема, однако, в том, что такая угроза должна быть *достоверной* (вспомним обсуждение в главе 9). Тем самым для предотвращения входа новых участников на рынок фирма должна выбрать уровень k, который обязывает ее к достаточно агрессивному поведению, для того чтобы фирма 2 приняла решение не входить. В каждой конкретной задаче это может быть возможным или невозможным, прибыльным или неприбыльным. В целом существует множество потенциальных механизмов (т. е. много типов переменных k), с помощью которых можно реализовать такие обязательства. В приложении В мы рассмотрим подробнее классический механизм сдерживания входа за счет расширения производственных мощностей, впервые исследованный в работах (Spence, 1977; Dixit, 1980).

Приложение А: бесконечно повторяющиеся игры и народная теорема

В данном приложении мы распространяем обсуждение бесконечно повторяющихся игр из раздела 12.D на более общий случай. Нашей главной целью является разработка формулировки одного из вариантов *народной теоремы* о бесконечно повторяющихся играх. Бесконечно повторяющиеся игры имеют очень богатую теоретическую структуру, и мы лишь затронем ограниченное число их свойств. Более подробно эти вопросы обсуждаются в книгах (Fudenberg, Tirole, 1992; Osborne, Rubinstein, 1994).

Модель

Бесконечно повторяющаяся игра состоит из бесконечной последовательности повторений однопериодной игры с одновременными ходами, которая называется *базовой игрой*. Для простоты изложения ограничимся случаем с двумя игроками.

В одноопериодной базовой игре у каждого игрока i есть компактное множество стратегий S_i; $q_i \in S_i$ является конкретным допустимым действием для i-го игрока. Обозначим $q = (q_1, q_2)$ и $S = S_1 \times S_2$. Функция выигрыша i-го игрока обозначается $\pi_i(q_i, q_j)$. На протяжении всего изложения будем ограничиваться чистыми стратегиями. Будет удобно определить выигрыш i-го игрока в одном периоде при наилучшем ответе на действие конкурента q_j как $\hat{\pi}_i(q_j) = \text{Max}_{q \in S_i} \pi_i(q, q_j)$[31]. Мы предполагаем, что в базовой игре существует единственное равновесие по Нэшу в чистых стратегиях: $q^* = \left(q_1^*, q_2^*\right)$ (предположение о единственности вводится исключительно для простоты изложения).

В бесконечно повторяющейся игре участники предпринимают действия и получают выигрыши в начале каждого периода. Выигрыши дисконтируются с фактором дисконтирования $\delta < 1$. Игроки наблюдают действия друг друга в каждом периоде и обладают совершенной памятью. Чистой стратегией в этой игре для i-го игрока является последовательность функций $\{s_{it}(\cdot)\}_{t=1}^{\infty}$, отображающих историю предыдущих действий (обозначаемую H_{t-1}) на выбор действия в период t, $s_{it}(H_{t-1}) \in S_i$. Множество всех таких чистых стратегий для i-го игрока обозначается Σ_i, и $s = (s_1, s_2) \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$ представляет собой профиль чистых стратегий для двух игроков.

Любой профиль чистых стратегий $s = (s_1, s_2)$ порождает *траекторию исходов* $Q(s)$, бесконечную последовательность действий $\{q_t = (q_{1t}, q_{2t})\}_{t=1}^{\infty}$, которые будут произведены при реализации игроками стратегий s_1 и s_2. Дисконтированный выигрыш i-го игрока от траектории исходов Q задается функцией $v_i(Q) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \delta^{\tau} \pi_i(q_{1+\tau})$. Определим также *средний выигрыш* i-го игрока от траектории исходов Q как $(1 - \delta)v_i(Q)$; это выигрыш в расчете на один период, который при бесконечном повторении принесет i-му игроку дисконтированный выигрыш $v_i(Q)$. Наконец, полезно определить дисконтированный выигрыш от продолжения на траектории исходов Q начиная с некоторого периода t (дисконтированный к периоду t): $v_i(Q, t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \delta^{\tau} \pi_i(q_{t+\tau})$.

Сразу же можно заметить следующее. Стратегии, которые требуют от i-го игрока в каждом периоде предпринимать равновесное по Нэшу действие q_i^* независимо от предшествующей истории игры, представляют собой SPNE для *любого* значения $\delta < 1$. В нижеприведенном изложении нас будет интересовать, в какой степени повторение допускает возникновение других исходов в качестве SPNE.

Стратегии с возвращением к равновесию по Нэшу и народная теорема

Начнем с вида стратегий с возвращением к равновесию по Нэшу, аналогичных рассмотренным нами применительно к игре ценообразования Бертрана в разделе 12.D.

[31] Мы предполагаем, что ограничения на множества S_i и функции $\pi_i(q_i, q_j)$ таковы, что указанная функция существует (т. е. таковы, что функция наилучшего ответа каждого игрока всегда хорошо определена).

Определение 12.AA.1. Профиль стратегии $s = (s_1, s_2)$ в бесконечно повторяющейся игре относится к типу *стратегий с возвращением к равновесию по Нэшу*, если стратегия каждого игрока требует движения по некоторой траектории исходов Q до отклонения одного из игроков и равновесных по Нэшу ходов $q^* = \left(q_1^*,\ q_2^*\right)$ в базовой игре после отклонения.

Какие траектории исходов Q могут поддерживаться в качестве траекторий исходов SPNE, использующего стратегии с возвращением к равновесию по Нэшу? Следуя логике, аналогичной той, что была использована в разделе 12.D, можно получить следующую лемму.

Лемма 12.AA.1. Профиль стратегии с возвращением к равновесию по Нэшу, требующей реализации траектории исходов $Q = \{q_{1t},\ q_{2t}\}_{t=1}^{\infty}$ до какого-либо отклонения, является SPNE тогда и только тогда, когда

$$\hat{\pi}_j(q_{jt}) + \frac{\delta}{1-\delta}\pi_j\left(q_1^*,\ q_2^*\right) \le v_i(Q,\ t), \tag{12.AA.1}$$

где $j \neq i$ для всех t и $i = 1, 2$.

Доказательство. Как было показано в разделе 12.D, предписанный ход после любого отклонения является равновесием по Нэшу в подыгре продолжения; поэтому необходимо лишь проверить, приводят ли такие стратегии к равновесию по Нэшу в подыгре, начинающейся в произвольном периоде t, при отсутствии предшествующего отклонения. Заметим сначала, что если для некоторых i и t условие (12.AA.1) не выполнено, то SPNE не имеет место. Иными словами, если до периода t не произошло отклонения, то для i-го игрока следование траектории Q не будет наилучшим ответом на аналогичные действия j-го игрока (в частности, для i-го игрока будет выгоднее отклониться в периоде t, максимизировав в нем свой выигрыш, а далее играть q_i^*).

Теперь предположим, что условие (12.AA.1) выполнено для всех i и t, но SPNE отсутствует. Тогда должен существовать некоторый период t, в котором некоторому игроку i будет выгодно отклониться от траектории исходов Q, если ранее других отклонений не было. Теперь, когда оппонент следует стратегии возвращения к равновесию по Нэшу, оптимальным для i-го игрока будет отклониться так, чтобы максимизировать свой выигрыш в периоде t, а затем играть q_i^*. Но его выигрыш от такого отклонения в точности совпадает с левой частью условия (12.AA.1), поэтому оно не может увеличить его выигрыш. ■

Условие (12.AA.1) можно переписать так, чтобы показать выбор между выгодой в одном периоде и будущими потерями:

$$\hat{\pi}_i(q_{jt}) - \pi_i(q_{1t},\ q_{2t}) \le \delta\left(v_i(Q,\ t+1) - \frac{\pi_i(q_1^*,\ q_2^*)}{1-\delta}\right) \tag{12.AA.2}$$

для всех t и $i = 1, 2$. Левая часть условия (12.AA.2) дает однопериодный выигрыш от отклонения в периоде t для i-го игрока, а правая часть дает его дисконтированные будущие потери от возвращения к равновесию по Нэшу начиная с периода $t + 1$.

Для стационарных траекторий исходов, аналогичных описанным в разделе 12.D (где каждый игрок i в каждом периоде предпринимает одно и то же действие q_i, так что $Q = (q_1, q_2), (q_1, q_2), \ldots)$, бесконечное множество неравенств, которые необходимо проверить в условии (12.AA.2), сводится всего лишь к двум: бесконечное повторение (q_1, q_2) является траекторией исходов для SPNE, использующего стратегии с возвращением к равновесию по Нэшу, тогда и только тогда, когда для $i = 1$ и 2:

$$\hat{\pi}_i(q_j) - \pi_i(q_1,\ q_2) \leq \frac{\delta}{1-\delta}\left(\pi_i(q_1,\ q_2) - \pi_i\left(q_1^*,\ q_2^*\right)\right). \tag{12.AA.3}$$

Насколько лучше могут быть результаты участников при использовании стратегии с возвращением к равновесию по Нэшу по сравнению со статическим равновесием по Нэшу $q^* = \left(q_1^*,\ q_2^*\right)$? Во-первых, при относительно мягких условиях (которым игра по Бертрану, рассмотренная в разделе 12.D, не удовлетворяет) игроки могут поддерживать стационарную траекторию исходов, на которой дисконтированные выигрыши строго выше, чем при бесконечном повторении $q^* = \left(q_1^*,\ q_2^*\right)$, если $\delta > 0$. Этот факт формально изложен в утверждении 12.AA.1.

Утверждение 12.AA.1. Рассмотрим бесконечно повторяющуюся игру с $\delta > 0$ и $S_i \subset \mathbb{R}$ для $i = 1, 2$. Предположим также, что $\pi_i(q)$ дифференцируема при $q^* = \left(q_1^*,\ q_2^*\right)$, причем $\partial\pi_i\left(q_i^*,\ q_j^*\right)/\partial q_j \neq 0$ для $j \neq i$ и $i = 1, 2$. Тогда существует некоторое $q' = \left(q_1',\ q_2'\right)$, $(\pi_1(q'),\ \pi_2(q')) >> (\pi_1(q^*),\ \pi_2(q^*))$, бесконечное повторение которого является траекторией исходов SPNE, использующего возвращение к равновесию по Нэшу.

Доказательство. При $q^* = \left(q_1^*,\ q_2^*\right)$ условие (12.AA.3) выполняется как равенство. Рассмотрим дифференциальное изменение q, (dq_1, dq_2), такое что $\left(\partial\pi_i\left(q_i^*,\ q_j^*\right)/\partial q_j\right)dq_j > 0$ для $i = 1,\ 2$. Соответствующее дифференциальное изменение прибыли i-й фирмы имеет вид

$$d\pi_i\left(q_i^*,\ q_j^*\right) = \frac{\partial\pi_i\left(q_i^*,\ q_j^*\right)}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial\pi_i\left(q_i^*,\ q_j^*\right)}{\partial q_j}dq_j = $$

$$= \frac{\partial\pi_i\left(q_i^*,\ q_j^*\right)}{\partial q_j}dq_j. \tag{12.AA.4}$$

Поскольку q_i^* является наилучшим ответом на q_j^*, то

$$d\pi_i\left(q_i^*,\ q_j^*\right) > 0. \tag{12.AA.5}$$

С другой стороны, теорема об огибающей (см. раздел M.L математического приложения) говорит нам о том, что при любом q_j

$$d\hat{\pi}_i(q_j) = \frac{\partial \pi_i\left(b_i(q_j),\ q_j\right)}{\partial q_j} dq_j,$$

где $b_i(\cdot)$ является наилучшим ответом i-го игрока на q_j в базовой игре. Отсюда

$$d\hat{\pi}_i(q_j^*) = \frac{\partial \pi_i\left(q_i^*,\ q_j^*\right)}{\partial q_j} dq_j. \tag{12.AA.6}$$

Вместе соотношения (12.AA.4) и (12.AA.6) означают, что до первого порядка это изменение не влияет на значение левой части условия (12.AA.3). Однако из (12.AA.5) следует, что правая часть (12.AA.3) до первого порядка возрастает. Поэтому для достаточно малого изменения $(\Delta q_1, \Delta q_2)$ в направлении (dq_1, dq_2) бесконечное повторение $(q_1 + \Delta q_1, q_2 + \Delta q_2)$ является стабильным в качестве траектории исходов SPNE, использующего стратегии с возвращением к равновесию по Нэшу, и по (12.AA.5) дает строго бóльшие дисконтированные выигрыши обоим игрокам по сравнению с бесконечным повторением $q^* = \left(q_1^*,\ q_2^*\right)$. ■

Утверждение 12.AA.1 гласит, что при непрерывных множествах стратегий и дифференцируемых функциях выигрыша может поддерживаться определенная степень кооперации, если существует некоторая вероятность совместными усилиями увеличить выигрыши по сравнению с равновесием Нэша в базовой игре.

Дальнейшее изучение условия (12.AA.2) показывает, что кооперация облегчается при росте δ.

Утверждение 12.AA.2. Предположим, что траектория исходов Q может поддерживаться как траектория исходов SPNE, использующего стратегии с возвращением к равновесию по Нэшу при ставке дисконтирования δ. Тогда она может поддерживаться для любого $\delta' \geq \delta$.

На самом деле, если δ становится очень большим, целый ряд исходов оказывается стабильным. Результат, сформулированный в утверждении 12.AA.3, представляющем собой *народную теорему о возвращении к равновесию по Нэшу* (первоначальная формулировка принадлежит Фридману (Friedman, 1971)), показывает, что *любая* стационарная траектория исходов, которая дает каждому игроку дисконтированный выигрыш, превышающий выигрыш от бесконечного повторения равновесия по Нэшу в базовой игре $q^* = \left(q_1^*,\ q_2^*\right)$, может поддерживаться как SPNE, если δ достаточно близко к 1.

Утверждение 12.AA.3. Для любой пары действий $q = (q_1, q_2)$, такой что $\pi_i(q_1, q_2) > \pi_i\left(q_1^*, q_2^*\right)$ для $i = 1, 2$, существует $\underline{\delta} < 1$, такое что для всех $\delta > \underline{\delta}$ бесконечное повторение $q = (q_1, q_2)$ является траекторией исходов для SPNE, использующего стратегии с возвращением к равновесию по Нэшу.

Доказательство утверждения 12.AA.3 немедленно следует из условия (12.AA.3), если положить $\delta \to 1$. С помощью более сложного доказательства логику утверждения 12.AA.3 можно распространить на нестационарные траектории исходов. Таким образом, можно «овыпуклить» множество возможных выигрышей, обозначенное в утверждении 12.AA.3, варьируя различные пары действий (q_1, q_2). Значит, любые выигрыши в заштрихованной области на рис. 12.AA.1 могут быть поддержаны в качестве средних выигрышей в SPNE[32].

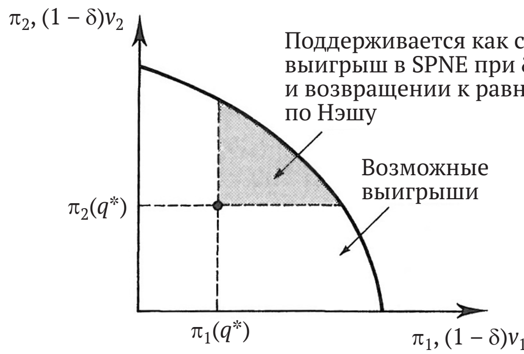


Рис. 12.AA.1. Народная теорема о возвращении к равновесию по Нэшу

Упражнение 12.AA.1. Докажите, что никакая пара действий q, таких что $\pi_i(q_1, q_2) < \pi_i\left(q_1^*, q_2^*\right)$ для некоторого i, не может быть поддержана в качестве стационарной траектории исходов SPNE, использующего стратегии с возвращением к равновесию по Нэшу.

Более строгие наказания и народная теорема

Интуитивно ясно, что для заданного уровня $\delta < 1$ чем более сурово наказание, которым можно достоверно угрожать в ответ на отклонение, тем легче предотвратить отклонение игроков от любой заданной траектории исходов. В целом возвращение к равновесию по Нэшу — не самое строгое достоверное наказание из возможных. Точно так же, как игроков можно заставить кооперироваться с помощью угрозы наказания, их можно заставить и наказывать друг друга.

[32] Подробнее см. (Fudenberg, Maskin, 1991).

Для анализа этой проблемы полезно обозначить *минимаксный выигрыш* i-го игрока как $\underline{\pi}_i = \text{Min}_{q_j}\left[\text{Max}_{q_i}\pi_i(q_i,\ q_j)\right]$[33]. Выигрыш $\underline{\pi}_i$ — это наименьший выигрыш, к которому i-го игрока может вынудить его конкурент в базовой игре, если i-й игрок ожидает действий конкурента. Заметим, прежде всего, что выигрыш i-го игрока в равновесии по Нэшу в базовой игре $q^* = \left(q_1^*,\ q_2^*\right)$ не может быть нижеπ_i. Однако важнее то, что независимо от стратегий конкурента средний выигрыш i-го игрока в бесконечно повторяющейся игре или любой подыгре внутри нее также не может быть ниже $\underline{\pi}_i$. Поэтому никакое наказание за отклонение не приведет к падению среднего выигрыша i-го игрока ниже $\underline{\pi}_i$. Выигрыши, строго большие $\underline{\pi}_i$ для каждого игрока i, называются *индивидуально рациональными выигрышами*.

Заметим, что для достоверности наказания мы должны быть уверены, что после первоначального отклонения и возникновения необходимости наказания ни один из игроков не станет отклоняться от предписанной траектории наказания. Это означает, что наказание будет достоверным тогда и только тогда, когда оно само представляет собой траекторию исходов SPNE. Утверждение 12.AA.4 гласит, что пока $\delta > 0$ и выполняются условия, аналогичные условиям утверждения 12.AA.1, в каждом случае, когда равновесный выигрыш в равновесии по Нэшу в базовой игре для каждого игрока i строго превышает $\underline{\pi}_i$, можно построить SPNE с более строгими наказаниями, чем возвращение к равновесию по Нэшу. (Доказать этот результат вас просят в упражнении 12.AA.2.)

Утверждение 12.AA.4. Рассмотрим бесконечно повторяющуюся игру с $\delta > 0$ и $S_i \subset \mathbb{R}$ для $i = 1, 2$. Предположим также, что $\pi_i(q)$ дифференцируема при $q^* = \left(q_1^*,\ q_2^*\right)$, причем $\partial\pi_i\left(q_i^*,\ q_j^*\right)\big/\partial q_j \neq 0$ для $j \neq i$ и $i = 1, 2$, и что $\pi_i\left(q_1^*,\ q_2^*\right) > \underline{\pi}_i$ для $i = 1, 2$. Тогда существует некоторое SPNE с дисконтированными выигрышами для двух игроков в размере $\left(v_1',\ v_2'\right)$, такими что $(1 - \delta)v_i' < \pi_i\left(q_1^*,\ q_2^*\right)$ для $i = 1, 2$.

В условиях утверждения 12.AA.4 при любых $\delta \in (0, 1)$ можно достоверно угрожать более суровыми наказаниями, чем возвращение к равновесию по Нэшу. Поэтому следует ожидать, что тогда могут поддерживаться более кооперативные исходы по сравнению с теми, которые поддерживаются под угрозой возвращения к равновесию по Нэшу, в тех случаях, когда полностью кооперативный исход оказывается недостижимым при использовании стратегий возвращения к равновесию по Нэшу.

Для произвольного $\delta < 1$ построение полного множества SPNE — тонкий процесс. Каждое SPNE, будь оно основано на сговоре или наказании, использует другие SPNE в качестве угрозы наказания. Подробнее о том,

[33] В целом минимаксный выигрыш игрока будет ниже, если разрешены смешанные стратегии. В этом случае формулировка народной теоремы в утверждении 12.AA.5 остается неизменной, но при указанных (потенциально) более низких уровнях $\underline{\pi}_i$.

как это делается, см. в оригинальных статьях (Abreu, 1986; 1988), а также в изложении (Fudenberg, Tirole, 1992). Как и в случае с SPNE, использующими стратегии возвращения к равновесию по Нэшу, полное множество SPNE увеличивается при возрастании δ, делая возможными и бóльшую кооперацию, и более строгие наказания. Результат, представленный в утверждении 12.AA.5, известном как *народная теорема*, гласит, что *любые* допустимые индивидуально рациональные выигрыши могут поддерживаться как средние выигрыши в SPNE, пока игроки дисконтируют будущее в достаточно малой степени[34]. (Допустимость просто означает, что существует некоторая траектория исходов Q, которая порождает эти средние выигрыши.)

Утверждение 12.AA.5 *(народная теорема).* Для любой допустимой пары индивидуально рациональных выигрышей $(\pi_1, \pi_2) >> (\underline{\pi}_1, \underline{\pi}_2)$ существует $\underline{\delta} < 1$, такое что для всех $\delta > \underline{\delta}$ (π_1, π_2) являются средними выигрышами, возникающими в SPNE.

По сравнению с утверждением 12.AA.3 утверждение 12.AA.5 гласит, что при $\delta \to 1$ могут быть поддержаны любые средние выигрыши, превышающие минимаксный выигрыш каждого игрока[35]. Это ограничивающее множество средних выигрышей SPNE показано на рис. 12.AA.2.

Пример 12.AA.1 дает некоторое представление о том, как это можно реализовать.

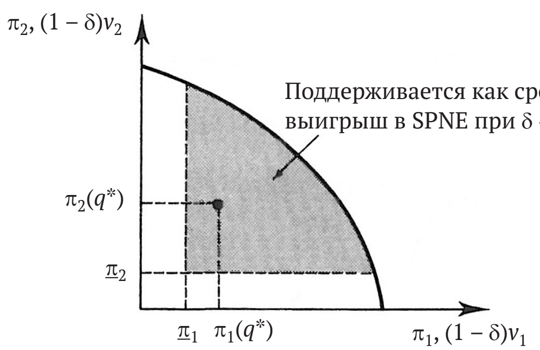


Рис. 12.AA.2. Народная теорема

[34] Название теоремы связано с тем, что некоторый вариант этого результата был известен в качестве «народной мудрости» теории игр задолго до его формального появления в литературе. См. его доказательство в (Fudenberg, Maskin, 1986; 1991). При наличии более чем двух игроков результат требует, чтобы множество допустимых выигрышей удовлетворяло дополнительному условию «размерности». При первоначальном появлении результата в литературе анализировались бесконечно повторяющиеся игры *без* дисконтирования (см., например, работу (Rubinstein, 1979)).

[35] В некоторых случаях каждому игроку можно дать в точности его минимаксный выигрыш. К таким случаям относится, например, повторяющаяся игра Бертрана, в которой равновесие по Нэшу в базовой игре дает минимаксные выигрыши. В примере 12.AA.1 показано, что это можно сделать и для достаточно большого δ в повторяющейся игре дуополии Курно.

Пример 12.AA.1. *Поддержание нулевого среднего выигрыша в бесконечно повторяющейся игре Курно.* В этом примере мы строим SPNE, в котором обе фирмы получают нулевой средний выигрыш в бесконечно повторяющейся игре Курно. В частности, пусть базовая игра представляет собой симметричную игру дуополии Курно с функцией издержек $c(q) = cq$, где $c > 0$, и непрерывной обратной функцией спроса $p(\cdot)$, такой что $p(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Будет удобно записать прибыль фирмы, когда обе фирмы выбирают объем выпуска q как $\pi(q) = (p(2q) - c)q$, а прибыль при наилучшем ответе фирмы, если ее конкурент выбирает объем выпуска q, как $\hat{\pi}(q)$[36]. Заметим, что здесь $\underline{\pi}_j = 0$ для $j = 1, 2$; если конкурент j-й фирмы выбирает объем выпуска не ниже конкурентного объема q_c, удовлетворяющего соотношению $p(q_c) = c$, то наилучшим ходом j-й фирмы будет ничего не производить и заработать нуль, так что ее нельзя принудить к выигрышу хуже нулевого.

Рассмотрим стратегии игроков, которые принимают следующий вид.

(i) Обе фирмы выбирают объем выпуска $\tilde{q}$ в периоде 1, а затем монопольный объем выпуска q^m в каждом периоде $t > 1$, пока одна из фирм не отклонится, причем объем выпуска $\tilde{q}$ удовлетворяет условию

$$\pi(\tilde{q}) + \frac{\delta}{1-\delta}\pi(q^m) = 0. \qquad (12.AA.7)$$

(ii) Если одна из фирм отклоняется, когда должен быть выбран объем выпуска $\tilde{q}$, траектория исходов в (i) начинается заново.

(iii) Если одна из фирм отклоняется, когда должен быть выбран объем выпуска q^m, происходит возвращение к равновесию по Нэшу.

Заметим, что траектория исходов, описанная в (i), дает обоим игрокам нулевой средний выигрыш по построению (вспомним (12.AA.7)), если ей следуют оба игрока.

Из утверждения 12.AA.3 мы знаем, что для некоторого $\underline{\delta} < 1$ можно поддерживать бесконечное повторение q^m с помощью возвращения к равновесию по Нэшу для всех $\delta > \underline{\delta}$. Тем самым при $\delta > \underline{\delta}$ ни одна из фирм не будет отклоняться от вышеописанных стратегий, если должен быть выбран объем выпуска q^m. Будут ли они отклоняться, если должен быть выбран объем выпуска $\tilde{q}$? Рассмотрим выигрыш j-й фирмы, если она в одном периоде отклонится от $\tilde{q}$ и будет следовать предписанной стратегии в дальнейшем. Фирма j получает $\hat{\pi}(\tilde{q}) + (\delta)(0)$, потому что при отклонении она реагирует в соответствии с функцией наилучшего ответа, а затем исходная траектория начинается снова. Следовательно, такое отклонение не увеличивает выигрыш j-й фирмы, если $\hat{\pi}(\tilde{q}) = 0$ (оно не может быть меньше нуля, потому что $\underline{\pi}_i = 0$). Это так, если $\tilde{q} \geq q_c$. Но из условия (12.AA.7) мы видим, что если δ стремится к 1, то $\pi(\tilde{q})$ должно быть все более отрицательным, чтобы (12.AA.7) выполнялось, и, в частности, что существует $\delta_c < 1$, такое что $\tilde{q}$ будет превышать q_c при всех $\delta > \delta_c$. Таким образом, при $\delta > \text{Max}\{\delta_c, \underline{\delta}\}$ эти стратегии представляют собой SPNE, которое дает обеим фирмам средний выигрыш, равный нулю[37]. ■

[36] Множества стратегий можно сделать компактными, заметив, что ни одна из фирм ни в каком периоде не выберет объем выпуска, превышающий уровень $\bar{q}$, такой что $\pi(\bar{q}) + (\delta/(1-\delta)) \times (\text{Max}_q \pi(q)) = 0$, поскольку получит лучший результат, навсегда установив объем выпуска равным нулю. Тогда мы без потерь можем позволить каждой фирме выбирать объем выпуска из компактного множества $[0, \bar{q}]$.

[37] Мы не рассматривали многопериодные отклонения, однако можно показать, что если отсутствуют выгодные однопериодные отклонения, за которыми следует возвращение к стратегиям, то отсутствуют и выгодные многопериодные отклонения (это общий принцип динамического программирования).

Приложение B: стратегическое сдерживание входа и приспособление ко входу

В данном приложении мы обсуждаем важный пример влияния достоверных обязательств на будущие рыночные условия, в которых присутствующая на рынке фирма занимается расширением производственных мощностей в преддверии входа других компаний, чтобы завоевать стратегическое превосходство над потенциальным участником рынка и, возможно, вообще не допустить его входа на рынок (первоначальный анализ этой проблемы проведен в работах (Spence, 1977; Dixit, 1980)). Ниже рассматривается следующая трехшаговая игра, заимствованная из работы (Dixit, 1980).

Шаг 1: присутствующая на рынке фирма I (инкумбент) выбирает уровень производственных мощностей своего завода, обозначаемый k_I. Производственные мощности стоят r на единицу продукции.

Шаг 2: потенциальный участник рынка, фирма E, решает, входить ей на рынок или нет. Если она входит, то несет издержки F.

Шаг 3: если фирма E входит на рынок, две фирмы выбирают свои уровни выпуска, q_I и q_E, одновременно. Итоговая цена равна $p(q_I + q_E)$. Для фирмы E выпуск стоит $(w + r)$ за единицу продукции: фирма E несет издержки, связанные с расширением производственных мощностей r, и трудовые издержки w. Для фирмы I производство не должно превышать ее ранее выбранного уровня производственных мощностей. Но ее издержки производства составляют только w на единицу продукции, потому что мощности уже построены. Если, с другой стороны, фирма E не входит на рынок, то фирма I действует как монополист, который может производить до k_I единиц продукции при издержках w на единицу.

Чтобы определить совершенное в подыграх равновесие по Нэшу (SPNE) в данной игре, начнем с анализа поведения в подыграх шага 3 и затем будем двигаться к началу.

Шаг 3: конкуренция по объемам

Подыгры на шаге 3 различаются двумя предшествующими им событиями: входом или отказом от входа фирмы E и выбором объема производственных мощностей фирмой I. Рассмотрим сначала исход конкуренции на шаге 3 после входа нового участника, а затем обсудим поведение фирмы I на шаге 3, если вход не состоялся. Для простоты будем предполагать, что функции прибыли обеих фирм строго вогнуты по их собственным объемам производства; достаточным условием для этого будет вогнутость функции $p(\cdot)$. Вогнутость $p(\cdot)$ также означает, что функции наилучшего ответа фирм имеют отрицательный наклон.

Конкуренция на шаге 3 после входа. На рис.12.BB.1 изображена функция наилучшего ответа фирмы E на шаге 3, которую мы обозначаем $b(q \mid w + r)$, чтобы подчеркнуть, что это функция наилучшего ответа для фирмы с предельными издержками $w + r$. Прибыль фирмы E на шаге 3 снижается, если мы будем двигаться по этой кривой вправо (задействуя более высокие уровни q_I), и в некоторой точке, обозначенной Z на рисунке, она падает ниже издержек входа F.

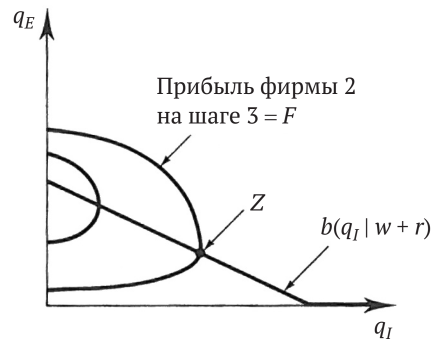


Рис. 12.BB.1. Функция наилучшего ответа фирмы E на шаге 3 после входа

Теперь рассмотрим оптимальное поведение фирмы I. Ключевое различие между фирмой I и фирмой E состоит в том, что фирма I уже построила свои производственные мощности. Поэтому расходы фирмы I на эти мощности являются безвозвратными (т. е. их нельзя вернуть, сократив мощности), уровень мощностей фиксирован, а предельные издержки составляют только w. Обозначим $b(q \mid w)$ функцию наилучшего ответа фирмы с предельными издержками w. Тогда функцией наилучшего ответа фирмы I на шаге 3 будет

$$b_I(q_E \mid k_I) = \text{Min}\{b(q_E \mid w), k_I\}.$$

То есть наилучший ответ фирмы I на выбор объема выпуска q_E фирмой E совпадает с наилучшим ответом для фирмы с уровнем предельных издержек w, пока этот объем выпуска не превышает ранее выбранного уровня производственных мощностей. Рис. 12.BB.2 иллюстрирует функцию наилучшего ответа фирмы I.

Теперь можно совместить функции наилучшего ответа, чтобы определить равновесие на шаге 3 после принятия фирмой E решения войти на рынок для любого заданного уровня k_t. Это равновесие показано на рис. 12.BB.3.

На рис. 12.BB.3 точка A представляет собой исход, возникающий в случае, если у фирмы I нет преимущества первого хода, т. е. если две фирмы

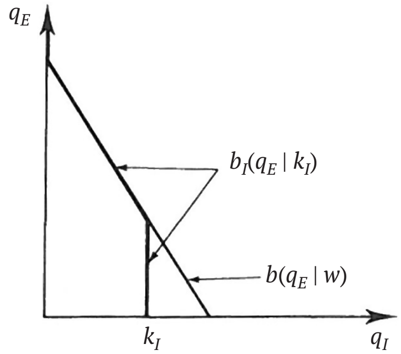


Рис. 12.BB.2. Функция наилучшего ответа фирмы I на шаге 3 после входа

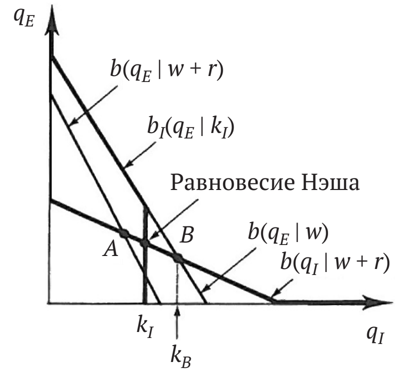


Рис. 12.BB.3. Равновесие по Нэшу на шаге 3 после входа

выбирают и уровень производственных мощностей, и уровень выпуска одновременно. Однако если фирма I первой может выбрать уровень производственных мощностей, определив соответствующее значение k_I, то она может получить равновесие после входа фирмы E, находящееся в любой точке функции наилучшего ответа последней вплоть до точки B. Фирма I может навязать в качестве равновесия точки справа от точки A, потому что возможность понести издержки на производственные мощности до конкуренции на шаге 3 позволяет ей иметь на шаге 3 предельные издержки в размере w, а не $w + r$. Заметим, однако, что фирма I не может навязать точки на функции наилучшего ответа фирмы 2 правее точки B, даже если захочет; если бы она построила производственные мощности уровня выше k_B, у нее не было бы стимула действительно использовать их полностью. Такая ситуация изображена на рис. 12.BB.4. Угроза довести объем производства до предела производственных мощностей после входа второго участника в данном случае не будет достоверной.

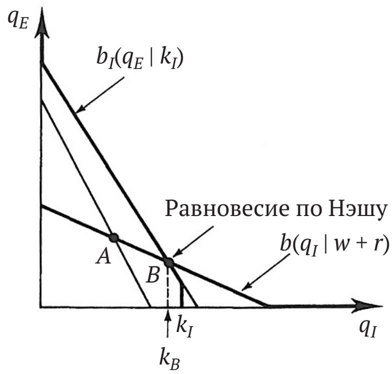


Рис. 12.BB.4. Равновесие на шаге 3, в котором фирма I не полностью использует свои производственные мощности

Исходы на шаге 3, если фирма E не входит. Если фирма E решает не входить на рынок, то фирма I будет монополистом на шаге 3. Тогда ее оптимальным монопольным выпуском будет точка, в которой функция наилучшего ответа пересекается с осью $q_E = 0$, $b_I(0 \mid k_I)$.

Шаг 2: решение фирмы E о входе

Решение фирмы E о входе очевидно: зная уровень производственных мощностей k_I, выбранный фирмой I на шаге 1, фирма E войдет на рынок, если ожидает неотрицательную прибыль за вычетом издержек входа F. Это означает, что фирма E войдет на рынок, если ожидает, что итоговое равновесие будет находиться слева от точки Z на графике функции наилучшего ответа на рис. 12.BB.1.

Шаг 1: инвестиции фирмы I в производственные мощности на шаге 1

Рассмотрим оптимальный выбор фирмой I производственных мощностей на шаге 1. Имеется три ситуации, в которых может оказаться фирма I: вход может быть заблокирован, вход может быть неизбежен, сдерживание входа может быть возможным, но не неизбежным. Рассмотрим все три варианта по очереди.

Вход заблокирован. Один из возможных вариантов состоит в том, что издержки входа F достаточно велики, так что фирма E не считает вход на рынок выгодным для себя, даже если фирма I игнорирует вероятность входа и просто строит тот же самый объем производственных мощностей, который она построила бы, будучи бесспорным монополистом, $b(0 \mid w + r)$. Ситуация, когда *вход заблокирован*, показана на рис. 12.BB.5. В этом случае фирма I добивается наилучшего возможного исхода: она строит производственные мощности $b(0 \mid w + r)$, входа на рынок не происходит, и затем она продает $b(0 \mid w + r)$ единиц продукции.

Сдерживание входа невозможно: стратегическое приспособление ко входу. Предположим, что точка Z находится справа от точки B. В этом случае сдерживание входа невозможно; фирма E будет считать вход на рынок прибыльным независимо от величины k_I. Каким будет оптимальный выбор k_I фирмой I в этом случае? На рис. 12.BB.6 изображены изопрофиты для фирмы I; заметим, что поскольку они включают издержки создания производственных мощностей, то являются изопрофитами, соответствующими изопрофитам фирмы с предельными издержками $(w + r)$. Вспомним, что путем выбора уровня производственных мощностей фирма I может навязать любую точку на функции наилучшего ответа фирмы E вплоть до точки B. Она выберет точку, которая максимизирует ее прибыль. На рис. 12.BB.6 это точка касания функции наилучшего ответа фирмы E и изопрофиты фирмы I, она обозначена S. Эта точка в точности соответствует тому исходу, который возникает в модели последовательного выбора объема выпуска, известной как *модель лидерства Штакельберга* (см. упражнение 12.C.18). Заметим, что преимущество первого хода у фирмы I позволяет ей получать более высокую прибыль, чем точно такой же во всех прочих отношениях фирме E.

Точка касания S также может находиться и справа от точки B. В этом случае оптимальный выбор производственных мощностей равен $k_I = k_B$ и исход не будет столь желательным для фирмы I, как точка Штакельберга. Здесь фирма I не может достоверно брать на себя обязательство произвести объем выпуска, соответствующий точке S, даже если она построит соответствующие мощности на шаге 1.

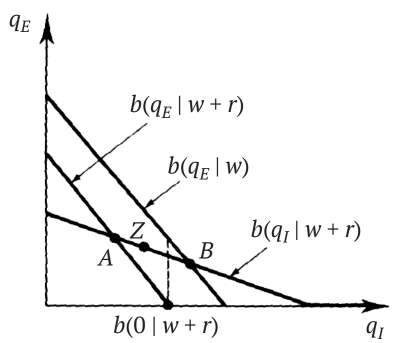


Рис. 12.BB.5. Заблокированный вход

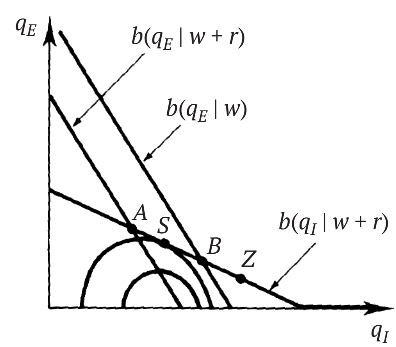


Рис. 12.BB.6. Стратегическое приспособление ко входу, если вход неизбежен

Сдерживание входа возможно, но не является неизбежным. Предположим теперь, что точка Z находится слева от точки B, но не настолько далеко, чтобы заблокировать вход, как показано на рис. 12.AA.7. Фирма I может предотвратить вход на рынок фирмы E, выбрав уровень производственных мощностей не меньше чем k_Z (см. рис.). Единственный вопрос — будет ли это оптимальным для фирмы I или для фирмы I будет выгоднее приспособиться ко входу фирмы E. Чтобы ответить на него, фирма I будет сравнивать свою прибыль в точке $(k_Z, 0)$ с прибылью в точке S (или в точке B, если S находится справа от B). Это можно сделать, сравнив уровень мощности k_π на рис. 12.BB.8, уровень выпуска при монополии, который дает ту же самую прибыль, что и точка оптимального приспособления S, с k_Z. Если $k_\pi > k_Z$, то фирма 1 предпочтет сдерживать вход, потому что ее прибыль в этом случае будет выше; но, если $k_\pi < k_Z$, она предпочтет приспособиться. Заметим, что если сдерживание является оптимальным, то, хотя входа не происходит, его *угроза* тем не менее влияет на рыночный исход, повышая уровень выпуска и благосостояния по сравнению с ситуацией, когда вход невозможен.

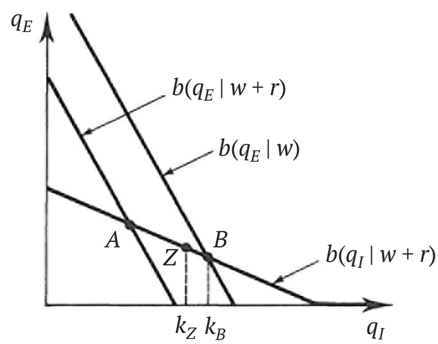


Рис. 12.BB.7. Сдерживание входа возможно, но не является неизбежным

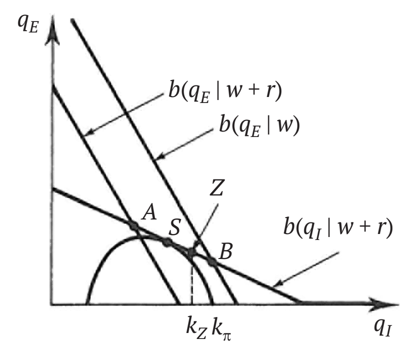


Рис. 12.BB.8. Сдерживание входа в сравнении с приспособлением ко входу

Упражнение 12.BB.1. Покажите, что если сдерживание входа возможно, но не является неизбежным, то в случае когда точка S лежит справа от точки Z, сдерживание входа лучше, чем приспособление ко входу.

Литература

Abreu, D. (1986). Extremal equilibria of oligopolistic supergames. *Journal of Economic Theory* **39**: 191–225.

Abreu, D. (1988). On the theory of infinitely repeated games with discounting. *Econometrica* **56**: 383–96.

Abreu, D., D. Pearce. and E. Stachetti. (1990). Toward a theory of discounted repeated games with imperfect monitoring. *Econometrica* **58**: 1041–64.

Baumol, W., J. Panzar. and R. Willig. (1982). *Contestable Markets and the Theory of Industry Structure.* San Diego: Harcourt, Brace, Jovanovich.

Bertrand, J. (1883). Théorie mathématique de la richesse sociale. *Journal des Savants* **67**: 499–508.

Bulow, J., J. Geanakoplos, and P. Klemperer. (1985). Multimarket oligopoly: strategic substitutes and complements. *Journal of Political Economy* **93**: 488–511.

Chamberlin. E. (1933). *The Theory of Monopolistic Competition.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Cournot, A. (1838). *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Theorie des Richesses.* [English edition: *Researches into Mathematical Principles of the Theory of Wealth,* edited by N. Bacon. London: Macmillan. 1897.]

Dixit, A. (1980). The role of investment in entry deterrence. *Economic Journal* **90**: 95–106.

Dixit, A., and J. E. Stiglitz. (1977). Monopolistic competition and optimal product diversity. *American Economic Review.* **67**: 297–308.

Edgeworth, F. (1897). Me teoria pura del monopolio. *Giornale degli Economisti* **40**: 13–31. [English translation: The pure theory of monopoly. In *Papers Relating to Political Economy,* Vol. I, edited by F. Edgeworth. London: Macmillan. 1925.]

Friedman, J. (1971). A non-cooperative equilibrium for supergames. *Review of Economic Studies* **28**: 1–12.

Fudenberg, D., and E. Maskin. (1986). The folk theorem in repeated games with discounting or with incomplete information. *Econometrica* **52**: 533–54.

Fudenberg, D., and E. Maskin. (1991). On the dispensibility of public randomizaton in discounted repeated games. *Journal of Economic Theory* **53**: 428–38.

Fudenberg, D., and J. Tirole. (1984). The fat cat effect, the puppy dog ploy, and the lean and hungry look. *American Economic Review, Papers and Proceedings* **74**: 361–68.

Fudenberg, D., and J. Tirole. (1992). *Game Theory.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Green, E., and R. Porter. (1984). Noncooperative collusion under imperfect price information. *Econometrica* **52**: 87–100.

Hart, O. D. (1985). Monopolistic competition in the spirit of Chamberlin: A general model *Review of Economic Studies* **52**: 529–46.

Kreps, D. M., and J. Scheinkman. (1983). Quantity precommitment and Bertrand competition yield Cournot outcomes. *Rand Journal of Economics* **14**: 326–37.

Mankiw, N. G., and M.D. Whinston. (1986). Free entry and social inefficiency. *Rand Journal of Economics* **17**: 48–58.

Osborne, M. J., and A. Rubinstein. (1994). *A Course in Game Theory.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Rotemberg, J., and G. Saloner. (1986). A supergame-theoretic model of business cycles and price wars during booms. *American Economic Review* **76**: 390–407.

Rubinstein, A. (1979). Equilibrium in supergames with the overtaking criterion. *Journal of Economic Theory* **21**: 1–9.

Salop, S. (1979). Monopolistic competition with outside goods. *Bell Journal of Economics* ***10***: 141–56.

Shapiro, C. (1989). Theories of oligopoly behavior. In *Handbook of Industrial Organization,* edited by R. Schmalensee and R. D. Willig. Amsterdam: North-Holland.

Spence, A. M. (1976). Product selection, fixed costs, and monopolistic competition. *Review of Economic Studies* **43**: 217–35.
Spence, A.M. (1977). Entry, capacity investment, and oligopolistic pricing. *Bell Journal of Economics* **8**: 534–44.
Stigler, G. (1960). A theory of oligopoly. *Journal of Political Economy* **72**: 44–61.
Tirole, J. (1988). *The Theory of Industrial Organization.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Упражнения

12.B.1^{A}. Выражение $[p^m - c'(q^m)]/p^m$, где p^m и q^m — монопольная цена и уровень выпуска, соответственно известно как *индекс монопольной власти Лернера.* Он измеряет степень превышения монопольной цены над предельными издержками по отношению к цене.

a) Покажите, что индекс Лернера всегда равен обратной величине ценовой эластичности спроса при цене p^m.

b) Также докажите, что если предельные издержки монополиста положительны при любом уровне выпуска, то спрос должен быть *эластичным* (т. е. ценовая эластичность спроса больше 1) при оптимальной цене монополиста.

12.B.2^{B}. Рассмотрим монополиста с функцией издержек $c(q) = cq$, $c > 0$, который сталкивается с функцией спроса $x(p) = \alpha p^{-\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$.

a) Покажите, что если $\varepsilon \leq 1$, то оптимальная цена монополиста не является хорошо определенной.

b) Предположим, что $\varepsilon > 1$. Найдите оптимальную цену монополиста, объем выпуска и индекс Лернера $(p^m - c)/p^m$. Рассчитайте чистые потери благосостояния.

c) (*Более сложное задание*). Рассмотрим последовательность функций спроса, которые различаются по уровню ε и α, но дают одинаковый конкурентный объем выпуска $x(c)$ (т. е. для каждого уровня ε соответствующим образом изменяется α, чтобы $x(c)$ оставалось постоянным. Как будут изменяться чистые потери в зависимости от ε? (Если не удается получить ответ аналитически, попробуйте рассчитать некоторые значения на компьютере.)

12.B.3^{B}. Предположим, что мы рассматриваем монополиста с функцией спроса $x(p, \theta)$ и функцией издержек $c(q, \varphi)$, где θ и φ — параметры. Воспользуйтесь теоремой о неявной функции, чтобы рассчитать изменения в цене и объеме выпуска монополиста как функцию дифференциального изменения θ или φ. В каком случае изменение первого или второго параметра приводит к повышению цены?

12.B.4^{B}. Рассмотрим монополиста с издержками c на единицу продукции. Воспользуйтесь доказательством на основе «выявленных предпочтений», чтобы показать, что монопольная цена не убывает по c. Затем распространите свои рассуждения на случай, когда функция издержек монополиста имеет вид $c(q, \varphi)$, причем $(c(q'', \varphi) - c(q', \varphi))$ возрастает по φ для всех $q'' > q'$, показав, что монопольная цена не убывает по φ. (Если вы выполнили упражнение 12.B.3, соотнесите данное условие с тем, которое было там получено.)

12.B.5$^{\text{B}}$. Предположим, что монополист сталкивается со многими потребителями. Покажите, что в каждом из следующих двух случаев монополист не может добиться лучшего результата по сравнению с ситуацией, когда он ограничивается взиманием некоторой цены за единицу товара, скажем p.

a) Предположим, что каждый потребитель i хочет получить либо одну единицу товара монополиста, либо ни одной и что монополист не может различать предпочтения конкретных потребителей.

b) Предположим, что потребители желают приобрести несколько единиц товара. Монополист не различает предпочтения конкретных потребителей. Кроме того, перепродажа товара не требует издержек, и после того как монополист продал товар потребителям, среди них развивается конкурентный рынок этого товара.

12.B.6$^{\text{B}}$. Предположим, что государство может обложить налогом или субсидировать монополиста, который сталкивается с обратной функцией спроса $p(q)$ и имеет функцию издержек $c(q)$ (предположим, что обе функции дифференцируемы и что $p(q)q - c(q)$ вогнуто по q). Какой налог или субсидия в расчете на единицу выпуска заставит монополиста действовать эффективно?

12.B.7$^{\text{B}}$. Рассмотрим рынок гаджетов. Суммарный спрос мужчин на гаджеты задается функцией $x_m(p) = a - \theta_m p$, а суммарный спрос женщин — функцией $x_w(p) = a - \theta_w p$, где $\theta_w < \theta_m$. Стоимость производства составляет c на один гаджет.

a) Предположим, что рынок гаджетов конкурентен. Найдите равновесную цену и объем продаж.

b) Предположим вместо этого, что фирма A является монополистом в области гаджетов (сделаем то же самое предположение в пунктах **(c)** и **(d)**). Если фирме A запрещена «дискриминация» (т. е. взимание разных цен с мужчин и женщин), то какой будет цена, максимизирующая прибыль фирмы? При каких условиях и мужчины и женщины потребляют положительное количество гаджетов в этом решении?

c) Если фирма A произвела некоторый общий объем выпуска X, каким образом распределить его между мужчинами и женщинами, чтобы обеспечить максимизацию благосостояния? (Здесь и ниже будем предполагать, что маршаллианский агрегированный излишек является адекватной мерой благосостояния.)

d) Предположим, что фирме A разрешено дискриминировать. Какие цены она установит? В случае когда в недискриминационном решении в **(b)** потребление гаджетов мужчинами и женщинами положительно, увеличивается или уменьшается совокупное благосостояние (измеренное как маршаллианский агрегированный излишек) по отношению к случаю, когда дискриминация разрешена? Соотнесите свой вывод с ответом **(c)**. Что если в недискриминационном решении в **(b)** обслуживается только один тип потребителей?

12.B.8[B]. Рассмотрим следующую двухпериодную модель: фирма является монополистом на рынке с обратной функцией спроса (в каждом периоде) вида: $p(q) = a - bq$. Издержки на единицу продукции в периоде 1 равны c_1. В периоде 2, однако, монополист «обучился на практике», поэтому его постоянные издержки на единицу выпуска равны $c_2 = c_1 - mq_1$, где q_1 — уровень выпуска монополиста в периоде 1. Предположим, что $a > c$ и $b > m$. Также предположим, что монополист не дисконтирует будущие доходы.

a) Каким будет уровень выпуска монополиста в каждом периоде?

b) Какой исход реализует благонамеренный социальный планировщик, полностью контролирующий монополиста? Есть ли смысл планировщику в периоде 1 выбирать уровень выпуска по принципу равенства цены предельным издержкам?

c) Учитывая, что монополист будет выбирать уровень выпуска в периоде 2, станет ли планировщик немного увеличивать выпуск монополиста в периоде 1 сверх уровня, найденного в **(a)**? Дайте этому интуитивное обоснование.

12.B.9[C]. Рассмотрим ситуацию, в которой на рынке имеется монополист с обратной функцией спроса $p(q)$. Монополист принимает два решения: об объеме инвестиций в снижение издержек I и об объеме предложения q. Если монополист инвестирует I в снижение издержек, то его (постоянные) издержки производства в расчете на единицу продукции равны $c(I)$. Предположим, что $c'(I) < 0$ и $c''(I) > 0$. Также будем предполагать, что целевая функция монополиста вогнута по q и I.

a) Выведите условия первого порядка для принимаемых монополистом решений.

b) Сравните решения монополиста с решениями благонамеренного социального планировщика, способного контролировать и q, и I (сравнение с «первым наилучшим»).

c) Сравните решения монополиста с решениями благонамеренного социального планировщика, который способен контролировать I, но не q (сравнение со «вторым наилучшим»). Предположите, что сначала планировщик выбирает I, а затем монополист выбирает q.

12.B.10[B]. Рассмотрим монополиста, который может выбирать цену продукта p и качество продукта q. Спрос на продукт задается функцией $x(p, q)$, которая возрастает по q и убывает по p. При выбран-ной монополистом цене будет ли уровень качества общественно эффективным?

12.C.1^{A}. В тексте.

12.C.2^{C}. Продолжите доказательство утверждения 12.C.1 и покажите, что при сделанных в тексте предположениях (в частности, о том, что существует такой уровень цены $\bar{p} < \infty$, что $x(p) = 0$ для всех $p \geq \bar{p}$) единственным равновесием по Нэшу в модели дуополии Бертрана будет гарантированное установление обеими фирмами цены, равной c, даже если допустить возможность использования смешанных стратегий.

12.C.3^{B}. Заметим, что в единственном равновесии по Нэшу в модели дуополии Бертрана каждая фирма реализует слабо доминируемую стратегию. Рассмотрите вариант модели, в котором цены необходимо объявлять в дискретных единицах измерения (например, копейках) размера Δ.

- **a)** Покажите, что в такой игре равновесие в чистых стратегиях будет заключаться в том, что обе фирмы будут объявлять цены, равные наименьшему кратному Δ значению, которое строго больше c. Докажите, что при этом ни одна из фирм не реализует слабо доминируемую стратегию.
- **b)** Докажите, что при $\Delta \to 0$ это равновесие стремится к равновесию, когда обе фирмы устанавливают цены, равные c.

12.C.4^{B}. Рассмотрите вариант модели дуополии Бертрана, в котором издержки j-й фирмы на единицу продукции равны c_j и $c_1 < c_2$.

- **a)** Каковы в этой игре равновесия по Нэшу в чистых стратегиях?
- **b)** Исследуйте модель, в которой цены объявляются в дискретных единицах, как в упражнении 12.C.3. Каковы в этой игре равновесия по Нэшу в чистых стратегиях? Какие из них не подразумевают реализации слабо доминируемых стратегий? Каков предел этих равновесий в недоминируемых стратегиях по мере повышения точности сетки?

12.C.5^{B}. Предположим, что имеется рынок с I покупателями, каждому из которых требуется не более одной единицы товара. Покупатель i хочет заплатить за свою единицу товара не более v_i, и $v_1 > v_2 > \ldots > v_I$. Всего имеется $q < I$ единиц товара. Предположим, что покупатели одновременно делают ставки на единицу товара и товар достается q покупателям, предложившим наивысшие ставки. Покажите, что в этой игре равновесием по Нэшу будет стратегия, при которой каждый покупатель делает ставку v_{q+1}, а товар достается покупателям $1, \ldots, q$. Докажите, что это будет конкурентная равновесная цена. Также покажите, что в этой игре в *любом* равновесии по Нэшу в чистых стратегиях покупатели от первого до q-го получают единицу товара, а покупатели от $q + 1$-го до I-го — нет.

12.C6^{A}. В тексте.

12.C.7^{B}. В тексте.

12.C.8$^{\mathbf{C}}$. Рассмотрите модель Курно с J фирмами и однородным товаром, в которой функция спроса $x(p)$ имеет отрицательный наклон, но в остальном произвольна. У всех фирм одинаковая функция издержек $c(q)$, которая выпукла и возрастает по q. Обозначим через Q совокупный выпуск J фирм, и пусть $Q_{-j} = \sum_{k \neq j} q_k$.

a) Покажите, что наилучший ответ j-й фирмы можно записать как $b(Q_{-j})$.

b) Покажите, что $b(Q_{-j})$ необязательно будет единственным (т. е. что это, вообще говоря, соответствие, а не функция).

c) Покажите, что если $\hat{Q}_{-j} > Q_{-j}$, $q_j \in b(Q_{-j})$ и $\hat{q}_j \in b(\hat{Q}_{-j})$, то $(\hat{q}_j + \hat{Q}_{-j}) \geq (q_j + Q_{-j})$. Получите отсюда, что у $b(\cdot)$ скачок может быть только вверх и что $b'(Q_{-j}) \geq -1$, когда эта производная определена.

d) Используйте результат **(c)** для доказательства того, что в этой модели существует симметричное равновесие по Нэшу в чистых стратегиях.

e) Покажите, что возможны множественные равновесия.

f) Сформулируйте достаточные условия (они очень слабые) того, что симметричное равновесие будет единственным равновесием в чистых стратегиях.

12.C.9$^{\mathbf{B}}$. Рассмотрите модель Курно с двумя фирмами и постоянной отдачей от масштаба, в которой издержки фирм могут различаться. Пусть c_j обозначает издержки j-й фирмы от производства единицы товара, и пусть $c_1 > c_2$. Предположим также, что обратная функция спроса имеет вид $p(q) = a - bq$, причем $a > c_1$.

a) Найдите равновесие по Нэшу в этой модели. При каких условиях в нем только одна фирма будет производить продукцию? Какая именно?

b) Если в равновесии обе фирмы производят продукцию, то как равновесный выпуск и прибыль изменяются при изменении издержек фирмы 1?

c) Рассмотрите общий случай с J фирмами. Покажите, что отношение прибыли в отрасли к выручке в отрасли в любом равновесии по Нэшу (в чистых стратегиях) равно в точности H/ε, где ε — эластичность кривой рыночного спроса при равновесной цене, а H, *индекс концентрации Герфиндаля,* равен сумме квадратов рыночных долей фирм $\sum_j \left(q_j^* / Q^*\right)^2$. (*Примечание:* этот результат зависит от предположения о постоянной отдаче от масштаба.)

12.C.10$^{\mathbf{B}}$. Рассмотрите модель Курно с J фирмами, в которой издержки фирм различаются. Пусть $c_j(q_j) = \alpha_j \tilde{c}(q_j)$ обозначает функцию издержек j-й фирмы, а $\tilde{c}(\cdot)$ строго возрастает и выпукла. Предположим, что $\alpha_1 > \ldots < \alpha_J$.

a) Покажите, что если более чем одна фирма имеет в равновесии по Нэшу в этой модели положительный уровень продаж, то производственная эффективность отсутствует, т. е. равновесный совокупный выпуск Q^* производится неэффективно.

b) Какова в этом случае корректная мера потерь в благосостоянии по отношению к полностью эффективному (конкурентному) исходу? (*Подсказка*: см. обсуждение в разделе 10.E).

c) Приведите пример, в котором благосостояние снижается, когда фирма становится более производительной (т. е. когда α_j падает для некоторого j). (*Подсказка:* рассмотрите сокращение издержек для фирмы 1 в модели из упражнения 12.C.9.) Почему возможна такая ситуация?

12.C.11^C. Рассмотрим игру ценообразования в дуополии с ограниченными мощностями. Производственная мощность j-й фирмы равна q_j при $j = 1, 2$, а издержки на единицу выпуска постоянны и составляют $c \geq 0$ вплоть до предела производственной мощности. Предположим, что функция рыночного спроса $x(p)$ непрерывна и строго убывает по всем p, так что $x(p) > 0$, и существует цена $\tilde{p}$, такая что $x(\tilde{p}) = q_1 + q_2$. Предположим также, что функция $x(p) > 0$ вогнута. Пусть $p(\cdot) = x^{-1}(\cdot)$ обозначает обратную функцию спроса.

При наличии пары известных цен продажи определяются следующим образом: потребители сначала пытаются купить товар у фирмы с низкой ценой. Если спрос превышает ее производственные мощности, то потребители обслуживаются по порядку своей оценки единицы товара, начиная с потребителей с высокой оценкой. Если цены одинаковы, спрос делится поровну до тех пор, пока не превысит производственные мощности одной из фирм, и тогда дополнительный спрос достается другой фирме. Формально продажи фирм задаются функциями $x_1(p_1, p_2)$ и $x_2(p_1, p_2)$, удовлетворяющими следующим соотношениям ($x_i(\cdot)$ дает объем продаваемой продукции i-й фирмы с учетом ограниченных производственных мощностей):

если $p_j > p_i$: $\quad x_i(p_1, p_2) = \text{Min}\{q_i, x(p_i)\}$,

$\quad\quad x_j(p_1, p_2) = \text{Min}\{q_j, \text{Max}\{x(p_j) - q_i, 0\}\}$;

если $p_2 = p_1 = p$: $\quad x_i(p_1, p_2) = \text{Min}\{q_i \text{Max}\{x(p)/2, x(p) - q_j\}\}$ для $i = 1, 2$.

a) Предположим, что $q_1 < b_c(q_2)$ и $q_2 < b_c(q_1)$, где $b(\cdot)$ является функцией наилучшего ответа для фирмы с постоянными предельными издержками c. Покажите, что $p_1^* = p_2^* = p(q_1 + q_2)$ является равновесием по Нэшу в этой игре.

b) Докажите, что если $q_1 > b_c(q_2)$ либо $q_2 > b_c(q_1)$, то не существует равновесия по Нэшу в чистых стратегиях.

12.C.12^B. Рассмотрим две строго вогнутые и дифференцируемые функции прибыли $\pi_j(q_j, q_k)$, $j = 1, 2$, определенные на $q_j \in [0, q]$.

a) Приведите достаточные условия того, что функции наилучшего ответа $b_j(q_j)$ будут возрастающими или убывающими.

b) Сосредоточьтесь на модели Курно. Докажите, что убывающая (имеющая отрицательный наклон) функция наилучшего ответа является «нормальным» случаем.

12.C.13$^{\mathbf{B}}$**.** Покажите, что, когда в модели линейного города, рассмотренной в примере 12.C.2, $v > c + 3t$, наилучший ответ j-й фирмы на любую цену конкурента p_{-j} всегда приводит к тому, что все потребители покупают продукцию одной из двух фирм.

12.C.14$^{\mathbf{C}}$**.** Рассмотрим модель линейного города, проанализированную в примере 12.C.2.

a) Выведите функции наилучшего ответа при $v \in (c + 2t, c + 3t)$. Покажите, что единственным равновесием по Нэшу в этом случае будет $p_1^* = p_2^* = c + t$.

b) Повторите **(a)** для случая, когда $v \in \left(c + \frac{3}{2}t,\ c + 2t\right)$.

c) Покажите, что когда $v < c + t$, то в единственном равновесии по Нэшу $p_1^* = p_2^* = (v + c)/2$, а некоторые покупатели не покупают ни у одной из фирм.

d) Покажите, что при $v \in \left(c + t,\ c + \frac{3}{2}t\right)$ единственным симметричным равновесием будет $p_1^* = p_2^* = v - t/2$. Существуют ли в этом случае асимметричные равновесия?

e) Сравните изменения равновесных цен и прибыли в результате снижения t в случае, рассмотренном в пункте **(d)**, и в равновесиях из пунктов **(a)** и **(b)**.

12.C.15$^{\mathbf{B}}$**.** Выведите цены для равновесия по Нэшу в модели линейного города, если транспортные издержки потребителя квадратичны по расстоянию, т. е. общие издержки покупки у j-й фирмы равны $p_j + td^2$, где d — расстояние от потребителя до j-й фирмы. Ограничьтесь случаем, когда v достаточно велико, чтобы можно было игнорировать вероятность отказа от покупки.

12.C.16$^{\mathbf{B}}$**.** Найдите цены и прибыль в равновесии по Нэшу в модели кругового города с J фирмами при квадратичных транспортных издержках, как в упражнении 12.C.15. Ограничьтесь случаем, когда v достаточно велико, чтобы можно было игнорировать вероятность отказа от покупки. Что произойдет, если J будет большим? Если t снизится?

12.C.17$^{\mathbf{B}}$**.** Рассмотрите модель линейного города, в которой у двух фирм могут быть разные постоянные издержки производства на единицу продукции $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$. Без потери общности возьмите $c_1 \le c_2$ и предположите, что v достаточно велико, чтобы можно было игнорировать возможность отказа от покупки. Определите цены и объемы продаж в равновесии по Нэшу для равновесий, в которых продажи обеих фирм строго положительны. Как локальные изменения c_1 влияют на равновесные цены и прибыль фирм 1 и 2? Для каких значений c_1 и c_2 у одной из фирм в равновесии не будет продаж?

12.C.18$^{\mathbf{B}}$. (*модель лидерства Штакельберга*) На рынке присутствуют две фирмы. Фирма 1 является «лидером» и первой выбирает объем выпуска. Фирма 2, «последователь», наблюдает за выбором фирмы 1 и затем выбирает свой объем производства. Прибыль i-й фирмы, учитывая выбор q_1 и q_2, равна $p(q_1 + q_2)q_i - cq_i$, где $p'(q) < 0$ и $p'(q) + p''(q)q < 0$ при всех $q \geq 0$.

a) Формально докажите, что фирма 1 выбирает уровень выпуска выше, чем в случае, если бы выбор объема выпуска обеими фирмами происходил одновременно, и что ее прибыль также выше. Покажите, что совокупный выпуск будет выше, а прибыль фирмы 2 — ниже.

b) Изобразите этот исход на рисунке, используя функции наилучшего ответа и изопрофиты.

12.C.19$^{\mathbf{C}}$. Выполните упражнение 8.B.5.

12.C.20$^{\mathbf{B}}$. Докажите утверждение 12.C.2 для случая общей выпуклой функции издержек $c(q)$.

12.D.1$^{\mathbf{B}}$. Рассмотрите бесконечно повторяющуюся игру дуополии Бертрана с фактором дисконтирования $\delta < 1$. Определите условия, при которых стратегии вида (12.D.1) обеспечивают сохранение монопольной цены в каждом из следующих случаев:

a) Рыночный спрос в t-м периоде равен $x_t(p) = \gamma^t x(p)$, где $\gamma > 0$.

b) В конце каждого периода с вероятностью γ рынок перестает существовать.

c) Реакция на отклонение занимает K периодов.

12.D.2$^{\mathbf{B}}$. В тексте.

12.D.3$^{\mathbf{B}}$. Рассмотрите бесконечно повторяющуюся игру дуополии Курно с фактором дисконтирования $\delta < 1$, издержками производства единицы продукции $c > 0$ и обратной функцией спроса $p(q) = a - bq$ при $a > c$ и $b > 0$.

a) При каких условиях симметричный совместный монопольный выпуск $(q_1, q_2) = (q^m/2, q^m/2)$ может быть поддержан стратегиями, которые подразумевают выпуск $(q^m/2, q^m/2)$ при отсутствии отклонений и однопериодное равновесие Курно (Нэша) в противном случае?

b) Найдите минимальный уровень δ, такой что уровень выпуска $(q_1, q_2) = (q, q)$ при $q \in [((a - c)/2b), ((a - c)/b)]$ поддерживается с помощью стратегий возвращения к равновесию по Нэшу. Покажите, что этот уровень δ, $\delta(q)$, является возрастающей дифференцируемой функцией q.

12.D.4$^{\mathbf{B}}$. Рассмотрите бесконечно повторяющуюся игру дуополии Бертрана с фактором дисконтирования $\delta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

a) Если издержки производства изменятся, что произойдет с наиболее прибыльной ценой, которая может поддерживаться в рамках данной игры?

b) Предположим, наоборот, что издержки производства перманентно изменятся в периоде 2 (т. е. начиная с периода 2 они будут выше, чем в периоде 1). Как это повлияет на максимальную цену, которая может поддерживаться в периоде 1?

12.D.5$^{\text{B}}$. [на основе работы (Rotemberg, Saloner, 1986)]. Рассмотрите модель бесконечно повторяющегося взаимодействия по Бертрану, где в каждом периоде существует вероятность $\lambda \in (0, 1)$ состояния «высокого спроса», в котором спрос равен $x(p)$, и вероятность $(1 - \lambda)$ состояния «низкого спроса», в котором спрос равен $\alpha x(p)$, где $\alpha \in \in (0, 1)$. Издержки производства равны $c > 0$ на единицу продукции. Рассмотрите стратегии возвращения к равновесию по Нэшу следующего вида: взимать цену p_H в состоянии высокого спроса при отсутствии отклонений в предшествующих периодах, взимать цену p_L в состоянии низкого спроса при отсутствии отклонений в предшествующих периодах и устанавливать цену на уровне c, если в предшествующих периодах были отклонения.

a) Покажите, что если δ достаточно велико, то существует SPNE, в котором фирмы устанавливают монопольную цену, $p_H = p_L = p^m$.

b) Покажите, что для некоторого $\underline{\delta}$, большего $\frac{1}{2}$, фирма в состоянии высокого спроса будет стремиться отклониться от цены p^m при $\delta < \underline{\delta}$. Найдите максимальную цену p_H, которую фирмы смогут поддерживать при $\delta \in \left[\frac{1}{2}, \underline{\delta}\right)$ (проверьте, что они по-прежнему смогут поддерживать цену $p_L = p^m$ в состоянии низкого спроса). Заметим, что это равновесие может подразумевать «контрциклическое» ценообразование, т. е. $p_L > p_H$. Чем обусловлен этот результат с интуитивной точки зрения?

c) Покажите, что при $\delta < \frac{1}{2}$ мы должны получить $p_H = p_L = c$.

12.E.1$^{\text{B}}$. Предположим, что имеется двухшаговая модель входа на рынок с однородным товаром, характеризующийся ценовой конкуренцией. Если фирмы — потенциальные участники — различаются по уровню эффективности, обязательно ли в равновесии наиболее эффективная фирма должна войти на рынок?

12.E.2$^{\text{B}}$. Докажите, что π_J убывает по J в предположениях (A1)–(A3) утверждения 12.E.1.

12.E.3$^{\text{B}}$. Рассчитайте потери благосостояния от равновесного количества фирм при свободном входе по отношению к общественно оптимальному количеству фирм в моделях, рассмотренных в примерах 12.E.1 и 12.E.2. Что произойдет с этими потерями при $K \to 0$?

12.E.4$^{\mathbf{B}}$. Рассмотрите двухшаговую модель входа, в которой все потенциальные участники имеют издержки производства на единицу продукции c (дополнительно к издержкам входа K) и в которой независимо от количества участников формируется идеальный картель. Каким будет общественно оптимальное количество фирм для планировщика, который не может контролировать картельное поведение? Если планировщик не может контролировать вход на рынок, то как это повлияет на благосостояние?

12.E.5$^{\mathbf{C}}$. Рассмотрите двухшаговую модель входа на рынок, который аналогичен рынку из упражнения 12.C.16. Издержки входа равны K. Сравните равновесное количество фирм с количеством, которое выбрал бы планировщик, способный контролировать (a) вход на рынок и ценообразование и (b) только вход.

12.E.6$^{\mathbf{B}}$. Сравните одношаговую и двухшаговую модели входа с конкуренцией по Курно (все потенциальные участники одинаковы, издержки производства равны $c(q) = cq$). Докажите, что любой равновесный исход (SPNE) двухшаговой игры одновременно является исходом одношаговой игры. Покажите на примере, что обратное неверно. Докажите, что, тем не менее, в одношаговой игре не может быть активным большее количество фирм, чем в двухшаговой игре.

12.E.7$^{\mathbf{B}}$. Рассмотрите одношаговую модель входа, в которой фирмы объявляют цены и все потенциальные участники имеют средние издержки $AC(q)$ (включая фиксированные первоначальные издержки), причем минимум средних издержек, равный $\bar{c}$, достигается при $\bar{q}$. Покажите, что если существует J^*, такое что $J^*\bar{q} = x(\bar{c})$, то любое равновесие в этой модели приводит к совершенно конкурентному исходу, и тем самым исход является эффективным (первым наилучшим).

12.F.1$^{\mathbf{B}}$. Покажите, что в модели Курно, рассмотренной в разделе 12.F, с функцией спроса $\alpha x(p)$ функция наилучшего ответа фирмы $b(Q_{-j})$ (слабо) убывает по Q_{-j}, при условии что α достаточно велико.

12.F.2$^{\mathbf{B}}$. Предположим, что у каждого из I потребителей в экономике квазилинейные предпочтения, а функция спроса на товар l имеет вид $x_{li}(p) = a - bp$.

a) Найдите рыночную обратную функцию спроса.

b) Рассмотрите модель входа Курно с найденной рыночной обратной функцией спроса, технологией $c(q) = cq$ и издержками входа K. Проанализируйте, что произойдет с равновесными ценами и уровнями выпуска, а также с благосостоянием потребителей (измеряемым величиной потребительского излишка) при $I \to \infty$ для одношаговой и для двухшаговой моделей входа.

12.F.3$^{\mathbf{B}}$. Проанализируйте двухшаговую модель входа Курно, рассмотренную в разделе 12.F, если α остается постоянным, но $K \to 0$. Покажите, в частности, что потери благосостояния стремятся к нулю.

12.F.4[B]. Рассмотрите следующую двухшаговую модель входа с дифференцированными продуктами и ценовой конкуренцией после входа: у всех потенциальных участников нулевые предельные издержки, а издержки входа составляют $K > 0$. На шаге 2 функция спроса для j-й фирмы как функция от вектора цен $p = (p_1, \ldots, p_J)$ J активных фирм имеет вид $x_j(p) = \alpha\left[\gamma - \beta\left(Jp_j/\sum_k p_k\right)\right]$. Проанализируйте свойства равновесия с точки зрения благосостояния при изменении параметров объема (α) и замещения (β).

12.G.1[B]. Рассмотрите модель дуополии Курно с линейной обратной функцией спроса и дуопольную модель линейного города с дифференциацией цен и разными издержками производства единицы продукции, которые были представлены в упражнениях 12.C.9 и 12.C.17. Найдите производные равновесного объема производства фирмы 2 в модели Курно и равновесной цены в модели линейного города по изменению издержек производства фирмы 1. В какой из моделей такое изменение поведения фирмы 2 выгодно для фирмы 1?

12.AA.1[A]. В тексте.

12.AA.2[C]. Докажите утверждение 12.AA.4. (*Подсказка:* рассмотрите профиль стратегий следующего вида: игроки реализуют исходы с некоторой парой (q_1, q_2) в периоде 1 и $\left(q_1^*, q_2^*\right)$ в каждом последующем периоде. Если один из игроков отклоняется, то траектория начинается снова.)

12.BB.1[A]. В тексте.

12.BB.2[B]. Покажите, что если фирме, уже присутствующей на рынке, в модели предотвращения входа, рассмотренной в приложении B, безразлично, предотвращать вход или приспосабливаться к нему, то общественное благосостояние будет строго выше, если она выберет стратегию предотвращения. Обсудите в общих чертах, почему нас не очень удивляет, если в некоторых случаях сдерживание входа повышает общественное благосостояние.

12.BB.3[C]. Рассмотрите модель линейного города из упражнения 12.C.2 при $v > c + 3t$. Предположим, что фирма 1 входит на рынок первой и может выбирать, строить ей один завод на одном конце города или два завода на каждом из концов. Каждый завод стоит F. Затем фирма E решает, входить ли ей на рынок (для простоты ограничим вход строительством одного завода) и на каком конце города размещать свой завод. Определите равновесие в этой модели. Как на него влияют значения его параметров? Сравните уровень благосостояния при этом исходе и уровень благосостояния в случае, когда вторая фирма отсутствует. Сравните с ситуацией, когда вторая фирма входит на рынок, но фирме 1 разрешается построить только один завод.

Глава 13. Неблагоприятный отбор, сигналинг и скрининг

13.A. Введение

Одной из неявных предпосылок фундаментальных теорем благосостояния является предположение о том, что характеристики всех товаров наблюдаемы для всех участников рынка. Без этого условия не могут существовать различные рынки благ, имеющих разные характеристики, и поэтому предположение о полноте рынков не выполняется. Однако в действительности подобная информация асимметрично распределена между участниками рынка. Рассмотрим три следующих примера подобных ситуаций:

1) Когда фирма нанимает работника, ей известно о его природных способностях меньше, чем самому работнику.
2) Когда страховая компания, занимающаяся автострахованием, продает страховой полис индивиду, ей меньше известно о его навыках вождения, а следовательно, о вероятности несчастного случая на дороге, чем самому индивиду.
3) На рынке подержанных машин продавец машины гораздо лучше осведомлен о ее качестве, чем потенциальный покупатель.

Тогда сразу возникает ряд вопросов, касающихся *асимметрии информации*. Как охарактеризовать рыночные равновесия при наличии асимметрии информации? Каковы свойства этих равновесий? Существует ли возможность государственного вмешательства в функционирование рынка, приводящего к Парето-улучшению? Эти вопросы были предметом наиболее активных исследований в микроэкономической теории на протяжении последних двадцати лет, и именно им и посвящена данная глава.

Раздел 13.B мы начнем с включения асимметрии информации в простую модель конкурентного рынка. Как мы увидим, при наличии асимметрии информации зачастую рыночные равновесия оказываются неоптимальными по Парето. Тенденция к неэффективности равновесного исхода в этом контексте поразительно обостряется в связи с явлением, известным как *неблагоприятный отбор*. Неблагоприятный отбор возникает в том случае, когда принятие рыночных решений информированными агентами зависит от имеющейся у них частной информации, причем таким образом, что это оказывает негативное влияние на неинформированную сторону. Например, на рынке подержанных автомобилей индивид скорее решит продавать свою машину, если знает, что она не очень хороша. При наличии неблагоприятного отбора неинформированные игроки настороженно относятся к любому информированному участнику, который желает вступить с ними в сделку, а их готовность платить за предлагаемый продукт будет невысока. Более того, это приводит к дальнейшему усугублению проблемы неблагоприятного отбора: если сумма, которую можно выручить от продажи подержанной машины, очень мала, то только продавцы *действительно* плохих машин будут предлагать их к продаже. В результате торговля на рынке с неблагоприятным отбором будет идти не очень активно, даже если значительная часть сделок будет осуществляться при симметричной информированности всех участников рынка.

В разделе 13.B мы вводим новую, важную для анализа вмешательства в функционирование рынка в условиях асимметричной информации концепцию *условного Парето-оптимального распределения*. Это такие распределения, которые не могут быть улучшены по Парето государственной властью, которая, как и остальные участники рынка, не может наблюдать частную информацию участников. Вмешательство в функционирование рынка, приводящее к Парето-улучшению, может быть достигнуто только в том случае, когда равновесное распределение не является условно Парето-оптимальным. Вообще говоря, невозможность наблюдения частной информации агентов государством требует более строгих условий для Парето-улучшающего вмешательства в работу рынка.

Разделы 13.C и 13.D будут посвящены изучению вопроса о том, как участники рынка могут адаптировать свое поведение к условиям асимметрии информации. В разделе 13.C мы рассмотрим случай, когда информированные индивиды с помощью наблюдаемых *сигналов* пытаются передать информацию о своих ненаблюдаемых характеристиках. Например, продавец подержанной машины может предложить потенциальному покупателю показать машину автомеханику. Поскольку продавцы хороших машин охотнее пойдут на подобный шаг, то такое предложение можно расценивать как сигнал о качестве машины. Далее, в разделе 13.D, мы проанализируем в некотором смысле обратную ситуацию, когда неинформированная сторона старается разработать механизм, позволяющий провести различие или осуществить *скрининг* информированных индивидов. Например, страховая компания может предложить два страховых полиса: один без франшизы, но с высокой премией, а второй со значительной франшизой, но гораздо меньшей премией. Тогда происходит *самоотбор* потенциальных страхователей: опытные водители выбирают страховой полис с франшизой, а неопытные — без франшизы. В обоих разделах мы будем анализировать результирующие рыночные равновесия с точки зрения благосостояния и потенциала для вмешательства в функционирование рынка, приводящего к Парето-улучшению.

Для наглядности изложения мы проведем весь анализ на примере рынка труда (см. пример (1)), но следует подчеркнуть, что подобные вопросы возникают в самых различных экономических ситуациях. Некоторые примеры мы приведем в упражнениях в конце главы.

13.B. Асимметрия информации и неблагоприятный отбор

Рассмотрим простой рынок труда по аналогии с основополагающей работой Дж. Акерлофа (Akerlof, 1970)[1]: пусть на рынке много одинаковых фирм, которые могут нанимать работников. Все фирмы производят одну и ту же продукцию в соответствии с одинаковой технологией с постоянной отдачей от масштаба, причем труд является единственным фактором производства. Фирмы нейтральны к риску, т. е. максимизируют свою ожидаемую прибыль и принимают цены заданными. Для простоты будем считать, что цена готовой продукции, производимой фирмами, равна 1 (в единицах блага-измерителя).

Работники различаются по производительности θ, т. е. количеству единиц выпуска, которые они могут произвести, будучи нанятыми на работу в фирму[2]. Обозначим через $[\underline{\theta}, \overline{\theta}] \subset \mathbb{R}$, где $0 \leq \underline{\theta} < \overline{\theta} < \infty$, множество возможных уровней производительности работников. Доля работников с производительностью θ или ниже описывается функцией распределения $F(\theta)$; будем считать, что функция $F(\cdot)$ не вырождена, т. е. существует по крайней мере два типа работников. Общее количество (или, точнее, мера) работников равно N.

Работники максимизируют свой заработок (в единицах блага-измерителя). Каждый работник имеет выбор: работать дома или быть занятым в фирме. Будем считать, что работник типа θ, работая дома, может получить $\mathrm{r}(\theta)$. Таким образом, $\mathrm{r}(\theta)$ — это альтернативные издержки занятости в фирме для работника типа θ, поэтому работник соглашается работать в фирме тогда и только тогда, когда он получает заработную плату не ниже $r(\theta)$ (для удобства будем считать, что если работникам все равно, работать в фирме или оставаться дома, то они будут работать)[3].

---

[1] В работе (Akerlof, 1970) рассматривается пример рынка подержанных машин, на котором только продавец подержанной машины знает, является ли машина «лимоном» (т. е. машиной низкого качества. — *Примеч. пер.*). По этой причине данную модель еще иногда называют моделью рынка *лимонов*.

[2] Производительность работника может быть случайной величиной, что не требует внесения каких-либо изменений в последующий анализ. Просто в этом случае θ — это *ожидаемый* (в статистическом смысле) уровень производительности.

[3] Можно рассматривать $\mathrm{r}(\theta)$ как отрицательную полезность труда. При таком подходе работник типа θ имеет квазилинейные предпочтения, описываемые функцией полезности вида $u(m, I) = m - r(\theta)I$, где m — уровень потребления работником блага-измерителя, а $I \in \{0, 1\}$ — бинарная переменная, которая принимает значение $I = 1$, если работник работает, и $I = 0$ в противном случае. При данных предпочтениях работник соглашается работать тогда и только тогда, когда он получает заработную плату не ниже $\mathrm{r}(\theta)$, и весь остальной анализ остается неизменным.

В качестве отправной точки рассмотрим случай конкурентного равновесия, когда уровень производительности работников *наблюдаем для всех участников рынка*. Поскольку труд работников разных типов представляет собой разные блага, то для каждого типа θ должна устанавливаться своя заработная плата $w^*(\theta)$. А поскольку фирмы конкурентны и отдача от масштаба постоянна, то в конкурентном равновесии должно быть выполнено: $w^*(\theta) = \theta$ (напомним, что по предположению цена готовой продукции равна 1) и множество работников, предпочитающих занятость в фирме, имеет вид: $\{\theta : \mathrm{r}(\theta) \le \theta\}$[4].

Согласно первой фундаментальной теореме благосостояния данный конкурентный исход Парето-оптимален. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся тем, что любое Парето-оптимальное распределение труда должно доставлять максимум агрегированного излишка (см. раздел 10.E). Пусть $I(\theta)$ — бинарная переменная, принимающая значение 1, если работник типа θ работает в фирме, и 0 — в противном случае. Тогда сумма агрегированных излишков на рассматриваемом рынке труда равна:

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} N\left[I(\theta)\theta + \left(1 - I(\theta)\right)r(\theta)\right]dF(\theta). \tag{13.B.1}$$

(Это просто совокупный доход, созданный трудом работников.)[5] Следовательно, агрегированный излишек достигает максимума при $I(\theta) = 1$ для тех θ, для которых $r(\theta) \le \theta$, и $I(\theta) = 0$ в противном случае (мы опять считаем, что если работнику все равно, то он выбирает занятость в фирме). Проще говоря, поскольку работник типа θ, работая в фирме, производит по крайней мере не меньше, чем дома, тогда и только тогда, когда $r(\theta) \le \theta$, то в любом Парето-оптимальном распределении множество работников, занятых в фирме, должно быть равно $\{\theta : r(\theta) \le \theta\}$.

Теперь проанализируем природу конкурентного равновесия, когда уровень производительности работников *не наблюдаем* фирмами. Начнем с описания концепции конкурентного равновесия в среде с асимметричной информацией.

---

[4] Точнее, существуют также конкурентные равновесия, в которых $w^*(\theta) = \theta$ для работников всех типов, занятых в равновесии (т. е. тех, для кого $r(\theta) \le \theta$) и $w^*(\theta) \ge \theta$ для тех типов работников, которые не заняты (т. е. тех, для кого $r(\theta) > \theta$). Однако для простоты и наглядности изложения, обсуждая конкурентные равновесия с отсутствием торговли, в этом разделе мы ограничимся рассмотрением только таких равновесных заработных плат, которые равны (ожидаемой) производительности работников.

[5] В разделе 10.E агрегированный излишек для распределения на рынке некоторого продукта (где фирмы производят выпуск) может быть записан как прямая выгода потребителей от потребления этого блага за вычетом совокупных издержек производства. Здесь, в контексте рынка труда, «издержки» найма работника для фирмы — это его заработная плата, а работник получает (прямую) полезность (без заработной платы), равную 0, если он работает в фирме, и $\mathrm{r}(\theta)$ — в противном случае. Следовательно, агрегированный излишек на этих рынках равен совокупному доходу фирм $\int NI(\theta)\theta dF(\theta)$ плюс совокупный доход потребителя от альтернативной занятости, $\int N\left(1 - I(\theta)\right)r(\theta)dF(\theta)$.

Во-первых, заметим, что если тип работника для фирм не наблюдаем, то заработная плата не должна зависеть от типа работника, т. е. работники всех типов должны иметь одинаковую ставку заработной платы w. Рассмотрим предложение труда как функцию от ставки заработной платы w. Работник типа θ согласится работать в фирме тогда и только тогда, когда $r(\theta) \le w$. Следовательно, множество работников, которые будут заняты при ставке заработной платы w, имеет вид

$$\Theta(w) = \{\theta : r(\theta) \le w\} \tag{13.B.2}$$

Рассмотрим теперь спрос на труд как функцию от w. Если фирма считает, что средняя производительность работников, соглашающихся работать в фирме, равна μ, то ее спрос на труд будет следующим:

$$z(w) = \begin{cases} 0, \text{ если } \mu < w, \\ [0, \infty], \text{ если } \mu = w, \\ \infty, \text{ если } \mu > w. \end{cases} \tag{13.B.3}$$

Тогда, если работники из множества Θ^* соглашаются на занятость в фирме в конкурентном равновесии и если ожидания фирм относительно производительности потенциальных работников корректно отражают фактическую среднюю производительность работников, которые будут заняты в этом равновесии, то должно быть выполнено: $\mu = E\left[\theta \middle| \theta \in \Theta^*\right]$. Таким образом, из (13.B.3) следует, что в равновесии спрос на труд может быть равен предложению при положительном уровне занятости тогда и только тогда, когда $w = E\left[\theta \middle| \theta \in \Theta^*\right]$. В результате приходим к следующей концепции конкурентного равновесия, представленной в определении 13.B.1.

Определение 13.B.1. В модели конкурентного рынка труда с ненаблюдаемыми уровнями производительности работников *конкурентное равновесие* представляет собой ставку заработной платы w^* и множество типов работников Θ^*, соглашающихся на занятость в фирме, такие что

$$\Theta^* = \left\{\theta : r(\theta) \le w^*\right\} \tag{13.B.4}$$

и

$$w^* = E\left[\theta \middle| \theta \in \Theta^*\right]. \tag{13.B.5}$$

Условие (13.B.5) отражает *рациональные ожидания* фирм, т. е. фирмы корректно предвидят среднюю производительность тех работников, которые действительно будут заняты в равновесии.

Однако следует отметить, что ожидания фирм в условии (13.B.5) хорошо определены только в том случае, когда уровень занятости в равновесии не равен нулю. Если же *ни один* работник не соглашается работать в равновесии (т. е. $\Theta^* = \varnothing$), то в дальнейшем будем для простоты считать, что в этом случае ожидания фирм относительно средней производительности потенциальных работников равны просто безусловному математическому ожиданию $E[\theta]$, и в любом таком равновесии $w^* = E[\theta]$. (Как мы уже отмечали в сноске 4, мы ограничиваемся рассмотрением только заработных плат, равных ожидаемой производительности работников в любом равновесии без торговли. Возможные последствия изменения предпосылки об ожидаемой производительности $E[\theta]$ при $\Theta^* = \varnothing$ будут рассмотрены в упражнении 13.B.5.)

Асимметричная информация и неэффективность по Парето

Как правило, конкурентное равновесие, описанное в определении 13.B.1, оказывается не Парето-оптимальным. Рассмотрим наиболее простой из возможных случаев, когда $r(\theta) = r$ для всех θ (т. е. все работники одинаково производительны дома), и будем считать, что $F(r) \in (0, 1)$, т. е. имеются работники, для которых $\theta > r$, и есть такие, у кого $\theta < r$. В такой модели в Парето-оптимуме работники с производительностью $\theta \geq r$ соглашаются работать в фирме, а те, у кого $\theta < r$, — не соглашаются.

Теперь рассмотрим конкурентное равновесие. При $r(\theta) = r$ для всех θ множество работников, согласных работать при данной заработной плате, $\Theta(w)$, равно либо $\left[\underline{\theta},\ \overline{\theta}\right]$ (если $w \geq r$), либо $\varnothing$ (если $w < r$). Таким образом, $E\left[\theta \middle| \theta \in \Theta(w)\right] = E[\theta]$ при любой заработной плате w, а следовательно, согласно (13.B.5) равновесная ставка заработной платы должна быть следующей: $w^* = E[\theta]$. Если $E[\theta] \geq r$, то будут заняты работники *всех* типов, если же $E[\theta] < r$, то никто не согласится работать. Какой именно тип равновесия реализуется, зависит от доли хороших и плохих работников. Например, если доля низкопроизводительных работников велика, то, поскольку фирмы не могут различить хороших и плохих работников, они вряд ли смогут кого-либо нанять при ставке заработной платы, достаточной, чтобы они согласились работать (т. е. при заработной плате не меньше r). С другой стороны, если низкопроизводительных работников мало, то средняя производительность рабочей силы будет выше r, а значит, фирмы будут готовы нанять работников при заработной плате, на которую те будут готовы согласиться. Таким образом, в одном случае в равновесии занято слишком много работников по сравнению с Парето-оптимумом, а в другом — слишком мало.

Причину такой неоптимальности конкурентного распределения довольно легко понять: поскольку фирмы неспособны различить работников с разной производительностью, то рынок неспособен эффективно распределить работников между фирмами и альтернативной занятостью[6].

[6] На эту ситуацию можно взглянуть и по-другому: асимметричность информации приводит к ситуации, когда некоторые рынки просто отсутствуют, т. е. порождает экстерналии (см. главу 11). Когда работник типа $\theta > E[\theta] = w$ немного сокращает предложение своего труда в фирме, положение фирмы ухудшается, в отличие от ситуации на конкурентном рынке с совершенной информацией, где заработная плата в точности равна предельной производительности работника.

Неблагоприятный отбор и разрушение рынка

Особенно сильный удар по эффективности наблюдается в том случае, когда $r(\theta)$ варьируются в зависимости от θ. В этом случае средняя производительность тех работников, которые готовы работать в фирме, зависит от заработной платы, и тогда может возникнуть феномен, называемый *неблагоприятным отбором*. Говорят, что имеет место неблагоприятный отбор, когда принятие решений информированным индивидом зависит от его ненаблюдаемых характеристик, причем так, что это оказывает неблагоприятное влияние на неинформированных агентов, действующих на рынке. В рассматриваемом контексте рынка труда неблагоприятный отбор возникает в том случае, когда только относительно менее способные работники готовы работать в фирме при любой данной заработной плате.

Неблагоприятный отбор может оказывать поразительное влияние на рыночное равновесие. Например, может показаться, что из приведенных выше рассуждений для случая $r(\theta) = r$ для всех θ следует, что проблема неэффективности конкурентного равновесия при асимметричной информации возникает, только если некоторые работники соглашаются работать в фирме, а некоторые — нет (поскольку, когда либо $\bar{\theta} < r$, либо $\underline{\theta} > r$, исход конкурентного равновесия Парето-оптимален). В действительности из-за наличия неблагоприятного отбора это не так: рынок может полностью исчезнуть, несмотря на то что работники *всех* типов будут заняты в фирме.

Для того чтобы наглядно продемонстрировать силу неблагоприятного отбора, предположим, что $r(\theta) \le \theta$ для всех $\theta \in \left[\underline{\theta},\ \bar{\theta}\right]$, и пусть $r(\cdot)$ — строго возрастающая функция. Из первого предположения следует, что в Парето-оптимальном распределении труда в фирме заняты работники всех типов. Второе предположение говорит о том, что работники, более производительные в фирме, также более производительны и дома. Именно эта предпосылка и порождает неблагоприятный отбор. Поскольку выигрыш от домашней занятости для более способных работников выше, то только менее способные работники будут соглашаться на любую данную заработную плату w (т. е. те, для кого $r(\theta) \le w$).

Ожидаемый уровень производительности работника в условии (13.B.5) теперь зависит от ставки заработной платы. Если ставка заработной платы растет, то более производительные работники более склонны выбрать занятость в фирме, и средняя производительность тех работников, кто соглашается работать в фирме, растет. Для простоты здесь и далее будем считать, что функция распределения $F(\cdot)$ имеет соответствующую функцию плотности $f(\cdot)$, причем $f(0) > 0$ для всех $\theta \in \left[\underline{\theta},\ \bar{\theta}\right]$. Это условие гарантирует, что средняя производительность тех работников, кто предпочтет занятость в фирме, $E\left[\theta \middle| r(\theta) \le w\right]$, непрерывно изменяется при изменении ставки заработной платы на множестве $w \in \left[r(\underline{\theta}),\ \infty\right]$.

Для определения равновесной заработной платы воспользуемся условиями (13.B.4) и (13.B.5). Из двух этих условий следует, что заработная плата w^* в конкурентном равновесии должна удовлетворять следующему условию:

$$w^* = E\left[\theta \middle| r(\theta) \le w^*\right]. \tag{13.B.6}$$

Рис. 13.B.1 иллюстрирует определение равновесной заработной платы w^*. На этом рисунке изображен график $E\left[\theta \middle| r(\theta) \le w\right]$ как функции от заработной платы w. Эта функция дает ожидаемое значение θ для работников, которые выбирают занятость в фирме при заработной плате w; она возрастает по w при заработных платах из диапазона между $r(\underline{\theta})$ и $r(\bar{\theta})$, достигает минимального значения $\underline{\theta}$ при $w = r(\underline{\theta})$ и максимального значения $E[\theta]$ — при $w \ge r(\bar{\theta})$ [7]. Конкурентная равновесная заработная плата w^* на рисунке характеризуется пересечением графика данной функции с биссектрисой начала координат, поскольку именно в этой точке выполняется условие (13.B.6). Тогда множество работников, соглашающихся работать в фирме, будет следующим: $\Theta^* = \left\{\theta : r(\theta) \le w^*\right\}$, и их средняя производительность в точности равна w^*[8].

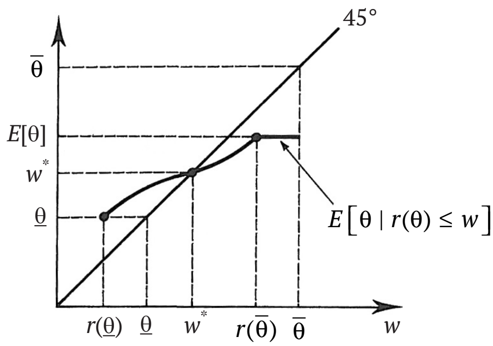


Рис. 13.B.1. Конкурентное равновесие с неблагоприятным отбором

Как видно из рис. 13.B.1, рыночное равновесие необязательно эффективно. Проблема в том, что, для того чтобы сделать занятость в фирме привлекательной для наилучших работников, нужно, чтобы заработная плата была не ниже $r(\bar{\theta})$. Однако в представленной на рисунке ситуации при такой заработной плате фирмы не могут получить нулевую прибыль, поскольку неспособность фирм различить работников разных типов приводит к тому, что они могут получить только ожидаемый выпуск $E[\theta] < r(\bar{\theta})$ от каждого нанятого работника. Поэтому присутствие довольно большого числа низкопроизводительных работников снижает заработную плату до уровня ниже $r(\bar{\theta})$, что, в свою очередь, заставляет наилучших работников уходить с рынка. Но если наилучшие работники вынуждены покинуть рынок, то средняя производительность рабочей силы падает, что влечет дальнейшее снижение заработной платы, которую фирмы готовы платить. В результате вслед за самыми хорошими работниками могут уйти с рынка и чуть менее производительные работники, и, таким образом, будет происходить вытеснение хороших работников посредственностями.

[7] На рисунке не изображен график данной функции при заработных платах ниже $r(\underline{\theta})$. Поскольку в данной модели $E[\theta] > r(\underline{\theta})$, то никакая заработная плата, меньшая $r(\underline{\theta})$, не может быть равновесной при введенной предпосылке, что $E\left[\theta \middle| \Theta(w) = \varnothing\right] = E[\theta]$.

[8] См. также графическое определение равновесия в упражнении 13.B.1.

Насколько далеко может зайти этот процесс? Потенциально *очень* далеко. Действительно, рассмотрим случай, проиллюстрированный на рис. 13.B.2, где $r(\underline{\theta}) = \underline{\theta}$ и $r(\theta) < \theta$ для всех остальных θ. Здесь равновесная ставка заработной платы равна $w^* = \underline{\theta}$, и только работники типа $\underline{\theta}$ в равновесии соглашаются работать. В силу неблагоприятного отбора фирмы вообще *не* нанимают работников (точнее, мера этого множества равна нулю) даже несмотря на то, что в оптимуме *все* работники должны быть наняты[9]!

Пример 13.B.1. Приведем численный пример полного разрушения рынка. Пусть $r(\theta) = \alpha\theta$, где $\alpha < 1$, и пусть производительность θ равномерно распределена на отрезке [0, 2]. Таким образом, $r(\underline{\theta}) = \underline{\theta}$ (поскольку $\underline{\theta} = 0$) и $r(\theta) < \theta$ для всех $\theta > 0$. В этом случае $E\left[\theta \middle| r(\theta) \le w\right] = (w / 2\alpha)$. При $\alpha > {}^1\!/_2$ $E\left[\theta \middle| r(\theta) \le 0\right] = 0$ и $E\left[\theta \middle| r(\theta) \le w\right] < w$ для всех $w > 0$, как показано на рис. 13.B.2[10]. ■

Конкурентное равновесие, описанное в определении 13.B.1, может быть не-единственным. Например, на рис. 13.B.3 изображена ситуация, когда имеется три равновесия с положительным уровнем занятости. Множественность равновесий может возникать вследствие того, что фактически отсутствуют ограничения на наклон графика функции $E\left[\theta \middle| r(\theta) \le w\right]$. При любой заработной плате w этот наклон зависит от плотности работников, для которых занятость в фирме и альтернативная занятость эквивалентны, и поэтому он может существенно варьироваться с изменением этой плотности.

Следует заметить, что равновесия на рис. 13.B.3 можно *проранжировать* с точки зрения Парето-оптимальности. Фирмы получают нулевую прибыль в любом равновесии, а работникам тем лучше, чем выше ставка заработной платы (тем работникам, которые предпочитают остаться дома, все равно, а всем остальным — строго лучше). Таким образом, рав-

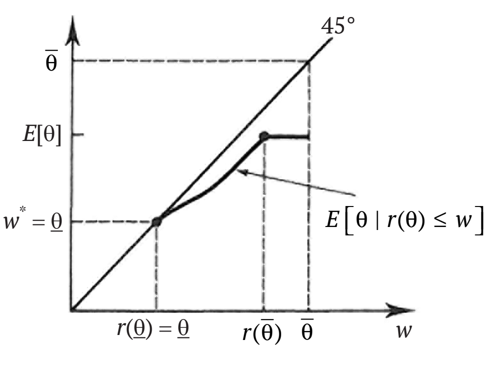


Рис. 13.B.2. Полное разрушение рынка

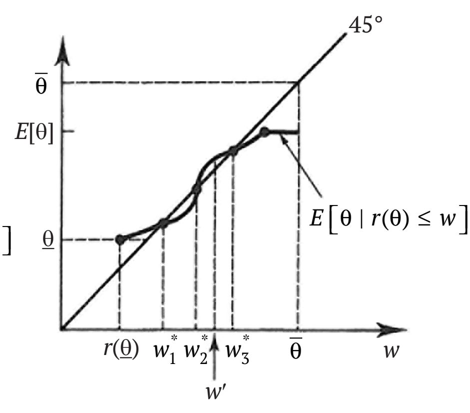


Рис. 13.B.3. Множественность конкурентных равновесий

[9] В этом равновесии каждый агент получает такой же выигрыш, как если бы рынок был полностью разрушен: фирмы имеют нулевую прибыль, а работник типа θ получает $r(\theta)$ для всех типов θ (включая $\theta = \underline{\theta}$).

[10] По существу, это один из примеров, предложенных в работе (Akerlof, 1970). В частности, он рассматривал случай $\alpha = {}^2\!/_3$.

новесие с наиболее высокой заработной платой доминирует по Парето все остальные равновесия. Доминируемые по Парето равновесия с низкой заработной платой возникают по причине *отсутствия (фиаско) координации*: заработная плата настолько низка, поскольку фирмы ожидают, что производительность согласных на занятость работников довольно низка, а с другой стороны, только плохие работники соглашаются работать именно из-за низкой заработной платы.

Теоретико-игровой подход

Рассмотренная выше концепция конкурентного равновесия — это именно та концепция, которая применялась Дж. Акерлофом в работе (Akerlof, 1970). Но возникает вопрос: можно ли это конкурентное равновесие рассматривать как исход более сложной модели, в которой фирмы *могут* менять уровень заработной платы, но предпочитают этого не делать в равновесии?

Случай, изображенный на рис. 13.B.3, может помочь нам найти ответ на этот вопрос. Например, рассмотрим равновесие со ставкой заработной платы w_2^*. В этом равновесии фирма, экспериментирующая с небольшими изменениями предлагаемой заработной платы, придет к выводу, что небольшое ее увеличение, скажем до уровня $w' > w_2^*$, отмеченного на рисунке, позволит ей получить бо́льшую прибыль, поскольку тогда она привлечет работников со средней производительностью $E\left[\theta \middle| r(\theta) \le w'\right] > w'$. Тогда может показаться маловероятным, что модель, в которой фирмы могут варьировать заработную плату, вообще когда либо будет иметь равновесный исход. Аналогично, в равновесии с заработной платой w_1^*, фирма, понимающая структуру рынка, обнаружит, что может получить строго положительную прибыль, повысив предлагаемую заработную плату до уровня w'.

Для формального описания этой идеи рассмотрим следующую теоретико-игровую модель. Пусть данная структура рынка (т. е. распределение производительности работников $F(\cdot)$ и функция резервной заработной платы $r(\cdot)$) предполагается общеизвестной. Рассмотрим следующую двухшаговую игру участников рынка: на шаге 1 две фирмы одновременно объявляют уровень заработной платы (предпосылка только о двух фирмах не ведет к потере общности). Затем на шаге 2 работники принимают решение, работать в фирме или нет, и если да, то в какой именно. (Будем считать, что если для работников некоторое множество фирм эквивалентно, то они рандомизируют между ними с одинаковыми вероятностями.)[11]

В утверждении 13.B.1 дается характеристика совершенного в подыграх равновесия по Нэшу (SPNE) в этой игре для модели с неблагоприятным отбором, в которой функция $r(\cdot)$ является строго возрастающей, причем $r(\theta) \le \theta$ для всех $\theta \in \left[\underline{\theta}, \bar{\theta}\right]$, а функция распределения $F(\cdot)$ имеет соответствующую функцию плотности $f(\cdot)$, такую что $f(\theta) > 0$ для всех $\theta \in \left[\underline{\theta}, \bar{\theta}\right]$.

[11] Заметим, что если в экономике имеются работники только одного типа с производительностью θ, то получаем просто вариант модели Бертрана на рынке труда (см. раздел 12.C), и в равновесии заработная плата равна θ, конкурентной заработной плате.

Утверждение 13.В.1. Обозначим через W^* множество заработных плат в конкурентном равновесии в модели неблагоприятного отбора на рынке труда, и пусть $w^* = \max\left\{w : w \in W^*\right\}$.

1) Если $w^* > r(\underline{\theta})$ и существует число $\varepsilon > 0$, такое что $E\left[\theta \middle| r(\theta) \le w'\right] > w'$ для всех $w' \in (w^* - \varepsilon, w^*)$, то существует единственное совершенное в подыграх равновесие по Нэшу в чистых стратегиях в данной двухшаговой теоретико-игровой модели. В этом равновесии нанятые работники получают заработную плату w^* и множество типов работников, занятых в фирме, имеет вид: $\Theta\left(w^*\right) = \left\{\theta : r(\theta) \le w^*\right\}$.

2) Если $w^* = r(\underline{\theta})$, то существует множество совершенных в подыграх равновесий по Нэшу в чистых стратегиях. В каждом таком равновесии выигрыш каждого агента в точности равен его выигрышу в конкурентном равновесии с наиболее высокой заработной платой.

Доказательство. В первую очередь следует заметить, что в любом совершенном в подыграх равновесии по Нэшу работник типа θ должен соглашаться на работу в той фирме, которая предлагает самую высокую заработную плату, причем тогда и только тогда, когда эта заработная плата по крайней мере не ниже $r(\theta)$[12]. Опираясь на этот факт, мы можем описать равновесное поведение фирм, последовательно рассмотрев два возможных случая:

(1) $w^* > r(\underline{\theta})$. В первую очередь следует отметить, что в любом совершенном в подыграх равновесии по Нэшу обе фирмы должны получать нулевую прибыль. Действительно, предположим, что существует совершенное в подыграх равновесие по Нэшу, в котором при заработной плате $\bar{w}$ в совокупности занято M работников, и при этом совокупная прибыль двух фирм положительна:

$$\Pi = M\left(E\left[\theta \middle| r(\theta) \le \bar{w}\right] - \bar{w}\right) > 0.$$

Из $\Pi > 0$ следует, что $M > 0$, что, в свою очередь, означает, что $\bar{w} \ge r(\underline{\theta})$. В этом случае (слабо) менее прибыльная фирма, скажем фирма j, должна получать прибыль не больше $\Pi/2$. Но фирма j может получить прибыль не ниже $\Pi = M\left(E\left[\theta \middle| r(\theta) \le \bar{w} + \alpha\right] - \bar{w} - \alpha\right)$, предложив заработную плату $\bar{w} + \alpha$, где $\alpha > 0$. Поскольку функция $E\left[\theta \middle| r(\theta) \le w\right]$ непрерывна по w, то эту прибыль можно сделать сколь угодно близкой к Π, выбрав достаточно малое значение α. Таким образом, фирма j могла бы улучшить свое положение, отклонившись, а значит, мы приходим к противоречию, т. е. предположение о том,

[12] Напомним, что мы считаем, что в случае, когда работнику безразлично, работать в фирме или дома, он выбирает занятость в фирме.

что $\Pi > 0$, неверно, следовательно, $\Pi \le 0$. Но поскольку ни одна из фирм не может иметь отрицательную прибыль в совершенном в подыграх равновесии по Нэшу (фирма всегда имеет возможность получить нулевую прибыль, предложив нулевую заработную плату), то отсюда следует, что каждая фирма в равновесии должна иметь прибыль, равную нулю.

Тогда, если $\bar{w}$ — наиболее высокая ставка заработной платы, предлагаемая какой-либо из двух фирм в совершенном в подыграх равновесии по Нэшу, то либо $\bar{w} \in W^*$ (т. е. это должна быть ставка заработной платы в конкурентном равновесии), либо $\bar{w} < r(\underline{\theta})$ (т. е. ставка заработной платы настолько мала, что никто не соглашается работать). Предположим, что $\bar{w} < w^* = \max\left\{w : w \in W^*\right\}$. Тогда любая из фирм может получить строго положительную ожидаемую прибыль, отклонившись и предложив ставку заработной платы $w' \in \left(w^* - \varepsilon,\ w^*\right)$. Таким образом, приходим к выводу, что наиболее высокая предлагаемая ставка заработной платы в любом совершенном в подыграх равновесии по Нэшу должна быть равна w^*.

Наконец, покажем, что предложение обеими фирмами ставки заработной платы w^* и стратегии работников, описанные выше, составляют совершенное в подыграх равновесие по Нэшу. При таких стратегиях обе фирмы получают нулевую прибыль. Ни одна из фирм не может получить положительную прибыль, в одностороннем порядке снизив заработную плату, поскольку в этом случае к ней не придут работники. Для завершения доказательства покажем, что $E\left[\theta \middle| r(\theta) \le w\right] < w$ для всех $w > w^*$, т. е. отклонение в сторону повышения заработной платы в одностороннем порядке также не принесет фирме положительной прибыли. По предположению w^* — наиболее высокая конкурентная заработная плата. Следовательно, не существует $w > w^*$, при которой $E\left[\theta \middle| r(\theta) \le w\right] = w$. Тогда, поскольку функция $E\left[\theta \middle| r(\theta) \le w\right]$ непрерывна по w, то функция $E\left[\theta \middle| r(\theta) \le w\right] - w$ должна иметь тот же знак для всех $w > w^*$. Однако условие $E\left[\theta \middle| r(\theta) \le w\right] > w$ для всех $w > w^*$ не может быть выполнено, поскольку при $w \to \infty$ имеем: $E\left[\theta \middle| r(\theta) \le w\right] \to E[\theta]$, а при введенных предположениях величина $E[\theta]$ конечна. Таким образом, должно быть выполнено: $E\left[\theta \middle| r(\theta) \le w\right] < w$ для всех $w > w^*$, что завершает доказательство первой части утверждения.

Предположение о существовании $\varepsilon > 0$, такого что $E\left[\theta \middle| r(\theta) \le w'\right] > w'$ для всех $w' \in \left(w^* - \varepsilon,\ w^*\right)$, исключает из рассмотрения патологические случаи, подобные продемонстрированному на рис. 13.B.4.

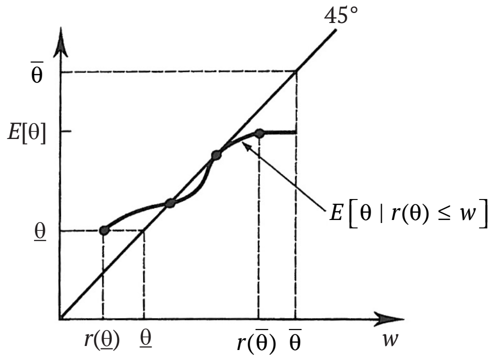


Рис. 13.В.4. Пример патологического случая

(2) $w^* = r(\underline{\theta})$. В этом случае $E\left[\theta \middle| r(\theta) \leq w\right] < w$ для всех $w > w^*$, поэтому любая фирма, привлекающая работников заработной платой, превышающей w^*, несет потери. Более того, установив заработную плату $w \leq w^*$, фирма получает нулевую прибыль. Следовательно, множество предложений заработной платы (w_1, w_2), которое может возникнуть в совершенном в подыграх равновесии по Нэшу, имеет вид: $\left\{(w_1,\ w_2) : w_j \leq w^* \text{ при } j = 1, 2\right\}$. В каждом из таких равновесий все агенты получают в точности те же выигрыши, что и в конкурентном равновесии со ставкой заработной платы w^*: прибыль обеих фирм равна нулю, и работник типа θ получает $r(\theta)$ для всех $\theta \in \left[\underline{\theta},\ \bar{\theta}\right]$.

Единственное отличие теоретико-игровой модели от концепции конкурентного равновесия, представленной в определении 13.В.1, заключается в уровне сложности описания поведения фирмы. В конкурентном равновесии (определение 13.В.1) модель фирмы довольно проста: фирме нужно знать только уровень средней производительности тех работников, которые соглашаются работать в фирме при данной равновесной цене, и ей не требуется иметь никакого представления о рыночных механизмах. Тогда как в теоретико-игровой модели фирмы осознают всю структуру рынка, включая взаимосвязь между ставкой заработной платы и теми работниками, кто будет при такой ставке нанят. Теоретико-игровая модель говорит нам о том, что если фирмы имеют возможность предлагать ту или иную заработную плату, то таким образом решается описанная выше проблема координации. Если заработная плата слишком низка, то в интересах фирмы предложить более высокую заработную плату и тем самым привлечь работников, поэтому мы и получаем конкурентный исход с наиболее высокой заработной платой[13].

[13] Однако в упражнении 13.В.6 приведен пример модели неблагоприятного отбора, в которой при некоторых значениях параметров конкурентное равновесие с наиболее высокой заработной платой не является совершенным в подыграх равновесием по Нэшу в нашей теоретико-игровой модели.

Условно Парето-оптимальные распределения и вмешательство в функционирование рынка

Как мы видели выше, асимметричность информации зачастую приводит к рыночным равновесиям, которые оказываются не Парето-оптимальными. Как следствие, центральная власть, владеющая частной информацией рыночных агентов (например, в описанных выше моделях ей известны типы работников), может ввести паушальные трансферты между агентами и достичь Парето-улучшения этих исходов.

Однако на практике может оказаться так, что центральная власть не имеет возможности получить частную информацию агентов, как и другие участники рынка. Без этой информации центральная власть, пытаясь достичь Парето-улучшения, сталкивается с дополнительными ограничениями. Например, организовать паушальные трансферты между работниками разных типов окажется невозможно, поскольку невозможно различить работников разных типов. Для того чтобы в этом случае Парето-улучшающее вмешательство в функционирование рынка стало возможным, требуется выполнение более строгих условий. Распределение, которое центральная власть, не имеющая возможности наблюдать частную информацию экономических агентов, не может улучшить по Парето, называется *условно Парето-оптимальным* (или *Парето-оптимальным в условиях второго наилучшего*). Поскольку построить Парето-улучшение, не имея возможности наблюдать типы агентов, сложнее, то условно Парето-оптимальное распределение необязательно является (безусловно) Парето-оптимальным (однако (безусловно) Парето-оптимальное распределение с необходимостью является и условно Парето-оптимальным).

В качестве примера обсудим следующий вопрос: возможно ли Парето-улучшающее государственное вмешательство в контексте нашей модели неблагоприятного отбора (в случае когда функция $r(\cdot)$ является строго возрастающей, причем $r(\theta) \le \theta$ для всех $\theta \in \left[\underline{\theta},\ \overline{\theta}\right]$, а функция распределения $F(\cdot)$ имеет соответствующую функцию плотности $f(\cdot)$, такую что $f(\theta) > 0$ для всех $\theta \in \left[\underline{\theta},\ \overline{\theta}\right]$), когда центральная власть не может наблюдать тип работника. Другими словами, мы попытаемся ответить на вопрос, будут ли конкурентные равновесия в модели неблагоприятного отбора условно Парето-оптимальными.

Вообще говоря, формальный анализ этой задачи требует использования инструментов, которые будут разработаны только в разделе 14.C при изучении моделей принципал-агент со скрытой информацией (см., в частности, обсуждение монополистического скрининга). Но поскольку эта техника пока еще не была нами описана, то здесь мы не будем проводить полный анализ, но постараемся тем не менее отразить его основные моменты (после изучения раздела 14.C стоит вернуться к этому разделу, особенно к материалу, приведенному в конце мелким шрифтом).

В первую очередь следует отметить, что, отвечая на вопрос, можно ли построить Парето-улучшение для рыночного равновесия, мы можем просто рассматривать такие схемы вмешательства, в которых государство само управляет фирмами и пытается достигнуть Парето-улучшения для работников (владельцы фирм тогда получат в точности ту же прибыль, что и в равновесии, т. е. нулевую). Во-вторых, поскольку власти не различают работников разных типов, то любые различия в паушальных трансфертах, которые получает или платит работник, могут определяться тем, работает индивид в фирме или нет (в противном случае работники воспринимаются как идентичные). Таким образом, интуитивно понятно, что без потери общности мы можем ограничиться рассмотрением такого вмешательства, когда государство само управляет фирмами и предлагает заработную плату w_e тем, кто соглашается работать в фирме, и платит пособие по безработице w_u тем, кто не соглашается (эти работники также получают $r(\theta)$). И, исходя из этого, работники сами решают, работать им или нет. (В тексте, набранном мелким шрифтом, в конце данного раздела мы формально опишем этот случай.)

В данном контексте могут ли конкурентные равновесия в модели с неблагоприятным отбором быть улучшены по Парето описанным выше способом? Рассмотрим сначала доминируемые конкурентные равновесия, т. е. конкурентные равновесия, которые доминируются по Парето некоторым другим конкурентным равновесием (см., например, равновесие со ставкой заработной платы w_1^* на рис. 13.B.3). Центральная власть, не имеющая возможности наблюдать тип работника, всегда может реализовать наилучший (т. е. с наибольшей заработной платой) конкурентный равновесный результат. Для этого ей требуется только положить заработную плату w_e равной наибольшей заработной плате в конкурентном равновесии, т. е. $w_e = w^*$, и выбрать $w_u = 0$. Тогда все работники из множества $\Theta(w^*)$ согласятся работать в фирме, и поскольку $w^* = E\left[\theta \middle| r(\theta) \le w^*\right]$, то бюджет центральной власти будет в точности сбалансирован[14]. Следовательно, исход такого равновесия *не* является условно Парето-оптимальным. В этом случае планировщик способен вмешаться и решить проблему координации, из-за которой в равновесии на рынке устанавливается низкая заработная плата.

Что можно сказать о конкурентном равновесии с наиболее высокой заработной платой (т. е. совершенном в подыграх равновесии по Нэшу в теоретико-игровой модели из утверждения 13.B.1)? Как гласит утверждение 13.B.2, любое такое равновесие *является* условно Парето-оптимальным в данной модели.

Утверждение 13.B.2. В модели неблагоприятного отбора на рынке труда (где функция $r(\cdot)$ является строго возрастающей, причем $r(\theta) \le \theta$ для всех $\theta \in \left[\underline{\theta}, \ \overline{\theta}\right]$, а функция распределения $F(\cdot)$ имеет соответствую-

[14] В эквивалентном, но менее тяжеловесном варианте вмешательства центральная власть просто требует от действующих фирм установления заработной платы, равной w^*. Фирмы согласятся работать при такой заработной плате, поскольку они при этом получают нулевую прибыль, что является также результатом Парето-улучшения.

щую функцию плотности $f(\cdot)$, такую что $f(\theta) > 0$ для всех $\theta \in \left[\underline{\theta},\ \overline{\theta}\right]$), конкурентное равновесие с наибольшей заработной платой является условно Парето-оптимальным.

Доказательство. Если в конкурентном равновесии с наиболее высокой заработной платой заняты все работники, то исход такого равновесия является (безусловно, а следовательно, и условно) Парето-оптимальным. Поэтому предположим, что заняты не все типы работников. Во-первых, заметим, что при любой заработной плате w_e и любом пособии по безработице w_u, предлагаемых государством, множество работников, соглашающихся работать в фирме, имеет вид $\left[\underline{\theta},\ \hat{\theta}\right]$ при некотором $\hat{\theta}$ (это множество $\left\{\theta : w_u + r(\theta) \le w_e\right\}$). Пусть государство хотело бы реализовать исход, в котором заняты работники типов $\theta \le \hat{\theta}$ для всех $\hat{\theta} \in \left[\underline{\theta},\ \overline{\theta}\right]$. Для этого нужно выбрать w_e и w_u такими, чтобы было выполнено

$$w_u + r(\hat{\theta}) = w_e. \qquad (13.B.7)$$

Кроме того, для того чтобы бюджет был сбалансирован, w_e и w_u должны также удовлетворять следующему условию[15]:

$$w_e F(\hat{\theta}) + w_u\left(1 - F(\hat{\theta})\right) = \int_{\underline{\theta}}^{\hat{\theta}} \theta f(\theta) d\theta. \qquad (13.B.8)$$

Найдем из (13.B.7) и (13.B.8) величины w_u и w_e при данном выборе $\hat{\theta}$:

$$w_u(\hat{\theta}) = \int_{\underline{\theta}}^{\hat{\theta}} \theta f(\theta) d\theta - r(\hat{\theta}) F(\hat{\theta}) \qquad (13.B.9)$$

и

$$w_e(\hat{\theta}) = \int_{\underline{\theta}}^{\hat{\theta}} \theta f(\theta) d\theta + r(\hat{\theta})\left(1 - F(\hat{\theta})\right), \qquad (13.B.10)$$

что эквивалентно

$$w_u(\hat{\theta}) = F(\hat{\theta})\left(E[\theta \mid \theta \le \hat{\theta}] - r(\hat{\theta})\right), \qquad (13.B.11)$$

$$w_e(\hat{\theta}) = F(\hat{\theta})\left(E\left[\theta \mid \theta \le \hat{\theta}\right] - r(\hat{\theta})\right) + r(\hat{\theta}). \qquad (13.B.12)$$

Далее, обозначим через θ^* тип наиболее производительных работников, соглашающихся работать в конкурентном равновесии с наибольшей заработной платой. Как мы знаем, $r(\theta^*) = E\left[\theta \mid r(\theta) \le \theta^*\right]$, следовательно, из условий (13.B.11) и (13.B.12) следует, что $w_u(\theta^*) = 0$

[15] Государство ни при каких обстоятельствах не захочет иметь излишек бюджета. Действительно, если w_e и w_u приводят к излишку бюджета, то, положив $\hat{w}_e = w_e + \varepsilon$ и $\hat{w}_u = w_u + \varepsilon$ при $\varepsilon > 0$, можно получить допустимый бюджет и построить Парето-улучшение (заметим, что множество занятых работников останется неизменным).

и $w_e(\theta^*) = r(\theta^*)$. Таким образом, в случае когда государство выбирает $\hat{\theta} = \theta^*$, мы получаем в точности тот же исход, что и в конкурентном равновесии с самой высокой заработной платой.

Теперь посмотрим, можно ли достичь Парето-улучшения, выбрав $\hat{\theta} \neq \theta^*$. Заметим, что для любого $\hat{\theta} \in \left[\underline{\theta},\ \overline{\theta}\right]$, где $\hat{\theta} \neq \theta^*$, положение работников типа $\underline{\theta}$ хуже, чем в равновесии, если $w_e(\hat{\theta}) < r(\theta^*)$ (поскольку в равновесии они получают $r(\theta^*)$), а положение работников типа $\overline{\theta}$ хуже, если $w_u(\hat{\theta}) < 0$.

Рассмотрим сначала случай $\hat{\theta} < \theta^*$. Поскольку $r(\theta^*) > r(\hat{\theta})$, то из условия (13.B.10) следует, что

$$w_e(\hat{\theta}) \le \int_{\underline{\theta}}^{\hat{\theta}} \theta f(\theta) d\theta + r(\theta^*)\left(1 - F(\hat{\theta})\right),$$

и тогда выполнено

$$\begin{aligned} w_e(\hat{\theta}) - r(\theta^*) &\le F(\hat{\theta})\left(E\left[\theta \middle|\ \theta \le \hat{\theta}\right] - r(\theta^*)\right) = \\ &= F(\hat{\theta})\left(E\left[\theta \middle|\ \theta \le \hat{\theta}\right] - E\left[\theta \middle|\ \theta \le \theta^*\right]\right) < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, любое такое вмешательство ухудшает положение работников типа $\underline{\theta}$.

Теперь проанализируем случай $\hat{\theta} > \theta^*$. Нам известно, что $E\left[\theta \middle|\ r(\theta) \le w\right] < w$ для всех $w > w^*$ (см. доказательство утверждения 13.B.1). Таким образом, $r(\theta^*) = w^*$ и поскольку $r(\cdot)$ строго возрастает, то $E\left[\theta \middle|\ r(\theta) \le r(\hat{\theta})\right] < r(\hat{\theta})$ для всех $\hat{\theta} > \theta^*$. Кроме того,

$$E\left[\theta \middle|\ r(\theta) \le r(\hat{\theta})\right] = E\left[\theta \middle|\ \theta \le \hat{\theta}\right],$$

а значит, $E\left[\theta \middle|\ \theta \le \hat{\theta}\right] - r(\hat{\theta}) < 0$ для всех $\hat{\theta} > \theta^*$. Но тогда из условия (13.B.11) следует, что $w_u(\hat{\theta}) < 0$ для всех $\hat{\theta} > \theta^*$, т. е. положение работников типа $\overline{\theta}$ в результате любого подобного вмешательства ухудшается. ■

Таким образом, в случае когда центральная власть не может наблюдать тип работника, доступные ей возможности жестко ограничены. Действительно, в только что рассмотренной модели неблагоприятного отбора власть неспособна построить Парето-улучшение до тех пор, пока рыночным исходом является конкурентное равновесие с наиболее высокой ставкой заработной платы (исход совершенного в подыграх равновесия по Нэшу в теоретико-игровой модели, см. утверждение 13.B.1)[16]. Вообще

[16] Утверждение 13.B.2 также можно обобщить на случай $r(\theta) > \theta$ для некоторого θ (см. упражнение 13.B.10).

говоря, возможность Парето-улучшающего государственного вмешательства в ситуациях с асимметричной информацией зависит от специфики изучаемого рынка (и, как мы видели, возможно, от того, какое именно равновесие реализуется). В упражнениях 13.B.8 и 13.B.9 приведены два примера моделей, в которых конкурентное равновесие с наибольшей заработной платой не является условно Парето-оптимальным.

Хотя и невозможно улучшить по Парето условно Парето-оптимальное распределение, государственное вмешательство по-прежнему может иметь смысл с точки зрения дистрибутивных целей. Например, если общественное благосостояние описывается взвешенной суммой полезностей работников,

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left[I(\theta)\theta + \left(1 - I(\theta)\right) r(\theta) \right] \lambda(\theta) dF(\theta), \tag{13.B.13}$$

где $\lambda(\theta) > 0$ для всех θ, то даже если положение работников некоторых типов ухудшится, общественное благосостояние может возрасти. Например, в прикладной литературе традиционно рассматривают агрегированный излишек как функцию общественного благосостояния, что эквивалентно выбору $\lambda(\theta) = N$ для всех θ[17].

Когда общество имеет такую функцию общественного благосостояния, общественное благосостояние по сравнению с конкурентным равновесием (см. рис. 13.B.1) можно повысить, просто постановив, что все работники должны работать в фирме, а все фирмы должны платить работникам заработную плату $E(\theta)$. Хотя положение работников типа $\overline{\theta}$ в результате такого вмешательства ухудшается, благосостояние в терминах агрегированного излишка возрастает[18].

Существует интересная интерпретация выбора агрегированного излишка в качестве функции общественного благосостояния в терминах ожидаемой полезности ex ante потенциальных работников. Итак, представим, что каждый работник изначально имеет вероятность $f(\theta)$ стать работником типа θ. Если потенциальный работник нейтрален к риску, то его ожидаемая полезность ex ante в точности равна выражению (13.C.3) при $\lambda(\theta) = 1$ для всех θ. Таким образом, максимизация агрегированного излишка эквивалентна максимизации ожидаемой полезности этого потенциального работника. Тогда можно сказать, что распределение является *условно Парето-оптимальным ex ante* в данной модели, если, не имея возможности наблюдать тип работника, невозможно охарактеризовать вмешательство в работу рынка, позволяющее повысить агрегированный излишек. Следовательно, ответ на вопрос о том, является ли некоторое распределение условно Парето-оптимальным (а значит, ведет ли планируемое вмешательство к Парето-улучшению), может зависеть от момента оценки благосостояния (до того как работники узнали свой тип или после)[19].

---

[17] Следует заметить, что когда типы работников не наблюдаемы, то агрегированный излишек более не является корректной мерой для *любой* функции общественного благосостояния, потому что, в отличие от случая совершенной информации, паушальные трансферты между работниками разного типа недоступны. (См. обсуждение в разделе 10.E необходимости паушальных трансфертов для обоснования агрегированного излишка как меры благосостояния для любой функции общественного благосостояния.)

[18] Более того, поскольку паушальные трансферты между работниками разных типов, когда власть не может наблюдать типы работников, невозможны, то достижение этих дистрибутивных целей в действительности требует *прямого* вмешательства в функционирование рынка труда, в отличие от случая совершенной информации.

[19] В работе (Holmstrom, Myerson, 1983) эта концепция ex ante условно Парето-оптимального распределения называется *эффективностью с учетом ограничений по стимулам ex ante*.

Теперь применим технику раздела 14.C, для того чтобы формально показать, что мы можем ограничиться поиском Парето-улучшения для вмешательств рассмотренного выше типа. Будем искать Парето-улучшение для работников при условии неотрицательности прибыли фирм. Для простоты обозначений мы будем трактовать фирмы как одну агрегированную фирму.

Согласно принципу выявления (см. раздел 14.C) мы можем ограничиться рассмотрением прямых механизмов выявления, когда работники каждого типа сообщают правдивую информацию. В данном случае механизм прямого выявления приписывает каждому типу $\theta \in \left[\underline{\theta},\ \overline{\theta}\right]$ платеж $w(\theta) \in \mathbb{R}$, выплачиваемый государством работнику, налог $t(\theta)$, который фирма платит государству, и уровень занятости $I(\theta) \in \{0, 1\}$. Множество допустимых механизмов здесь содержит все такие механизмы, которые удовлетворяют *ограничению индивидуальной рациональности* для фирм,

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left[I(\theta)\theta - t(\theta)\right] dF(\theta) \geq 0, \tag{13.B.14}$$

условию сбалансированности бюджета для государства,

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left[t(\theta) - w(\theta)\right] dF(\theta) \geq 0, \tag{13.B.15}$$

и *условию использования правдивых стратегий* (или *совместимости по стимулам*, или *самоотбора*), согласно которому для всех θ и $\hat{\theta}$ должно быть выполнено:

$$w(\theta) + \left(1 - I(\theta)\right) r(\theta) \geq w(\hat{\theta}) + \left(1 - I(\hat{\theta})\right) r(\theta). \tag{13.B.16}$$

Во-первых, заметим, что механизм $\left[w(\cdot),\ t(\cdot),\ I(\cdot)\right]$ допустим, только если $\left[w(\cdot),\ I(\cdot)\right]$ одновременно удовлетворяет условию (13.B.16) и следующему условию:

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left[I(\theta)\theta - w(\theta)\right] dF(\theta) \geq 0. \tag{13.B.17}$$

Более того, если $\left[w(\cdot),\ I(\cdot)\right]$ удовлетворяет (13.B.16) и (13.B.17), то существует налог $t(\cdot)$, такой что механизм $\left[w(\cdot),\ t(\cdot),\ I(\cdot)\right]$ удовлетворяет условиям (13.B.14)–(13.B.16). Но условие (13.B.17) — это в точности бюджетное ограничение, с которым сталкивается центральная власть, самостоятельно управляющая фирмами. Следовательно, мы можем сконцентрироваться на рассмотрении только таких схем, в которых государство само управляет фирмами и использует механизм прямого выявления $\left[w(\cdot),\ I(\cdot)\right]$, удовлетворяющий условиям (13.B.16) и (13.B.17).

Теперь рассмотрим любые два типа работников, θ' и θ'', для которых $I(\theta') = I(\theta'')$. Положив $\theta = \theta'$ и $\hat{\theta} = \theta''$ в условии (13.B.16), мы получим: $w(\theta') \geq w(\theta'')$. Аналогично, положив $\theta = \theta''$ и $\hat{\theta} = \theta'$, получим: $w(\theta'') \geq w(\theta')$. Таким образом, из этих двух условий

Такая терминология связана с тем, что мы оцениваем благосостояние ex ante (до реализации типов работников), и государство, не наблюдающее тип работника, сталкивается с *ограничениями по стимулам*, если хочет вынудить работников проявить свой тип. Введенная нами концепция условной Парето-эффективности в работе (Holmstrom, Myerson, 1983) называется *эффективностью с учетом ограничений по стимулам interim*, поскольку Парето-оптимальность оценивается с учетом тех работников, которые уже знают свой тип. Более подробное обсуждение этих концепций приведено в разделе 23.F.

следует, что $w(\theta') = w(\theta'')$. И поскольку $I(\theta) \in \{0, 1\}$, то мы приходим к тому, что любой допустимый механизм $\left[w(\cdot), I(\cdot)\right]$ можно рассматривать как схему, предлагающую каждому работнику выбор между двумя исходами, $(w_e, I = 1)$ и $(w_u, I = 0)$, удовлетворяющую при этом условию сбалансированности бюджета (13.B.17). А это именно тот класс механизмов, который мы обсуждали выше.

13.C. Сигналинг

Проблемы, описанные в разделе 13.B, наводят на мысль о необходимости разработки рыночных механизмов, помогающих фирме проводить различие между работниками. Это представляется вполне разумным, поскольку как фирмы, так и высококвалифицированные работники имеют стимул попытаться достичь этой цели. Механизм, который мы проанализируем в этом разделе, называется *сигналингом*, и впервые он был исследован в работах М. Спенса (Spence, 1973, 1974). Основная идея заключается в том, что высокопроизводительные работники могут предпринять некоторые действия, позволяющие отличить их от низкопроизводительных коллег.

Простейший пример такого сигнала возникает в ситуации, когда работники могут пройти некоторый (не связанный с издержками) тест, который достоверно выявит их тип. Довольно несложно показать, что в любом таком совершенном в подыграх равновесии по Нэшу все работники с производительностью выше $\underline{\theta}$ будут проходить тест, и тогда на рынке будет достигнут исход с полной информацией (см. упражнение 13.C.1). Любой работник, предпочитающий не проходить тест, будет корректно трактоваться как работник худшего типа.

Однако можно привести множество примеров ситуаций, когда не существует процедуры, позволяющей непосредственно выявить тип работника. Но, как покажет дальнейшее изложение, потенциал для использования сигналов может по-прежнему существовать.

Рассмотрим следующую модификацию модели, изложенной в разделе 13.B. Для простоты ограничимся рассмотрением случая двух типов работников с производительностями θ_H и θ_L, где $\theta_H > \theta_L > 0$ и $\lambda = \text{Prob}(\theta = \theta_H) \in (0, 1)$. Важным отличием данной модели от рассмотренной ранее является то, что, прежде чем войти на рынок труда, работник может получить образование и уровень образования работника наблюдаем. Будем считать, что образование никак не сказывается на производительности работника (см. упражнение 13.C.2, где анализируется случай продуктивного сигнала). Издержки получения уровня образования e для работника типа θ (эти издержки могут быть денежного или физического характера) описываются дважды непрерывно дифференцируемой функцией $c(e, \theta)$, причем $c(0, \theta) = 0$, $c_e(e, \theta) > 0$, $c_{ee}(e, \theta) > 0$, $c_\theta(e, \theta) < 0$ для всех $e > 0$ и $c_{e\theta}(e, \theta) < 0$ (нижним индексом обозначена соответствующая частная производная). Таким образом, предполагается, что и сами издержки, и предельные издержки получения образования для высокопроизводительных работников ниже. Например, высокопроизводительным работникам требуется приложить меньше усилий для получения научной степени. Обозначим через $u(w, e|\theta)$ функцию полезности работника типа θ, который выбирает уровень образования e и получает заработную плату w. Будем считать, что полезность $u(w, e|\theta)$ равна заработной плате за вычетом издержек образования, т. е. $u(w, e|\theta) = w - c(e, \theta)$. Как и в разделе 13.B, предполагается, что работник типа θ может получить $r(\theta)$, работая дома.

Далее, проводя анализ модели, мы увидим, что образование может служить сигналом о ненаблюдаемой производительности работника. В частности, возникают равновесия, в которых высокопроизводительные работники выбирают более высокий уровень образования, чем низкопроизводительные, а фирмы рассматривают разницу в уровнях образования как сигнал о способностях работников. Влияние использования сигналов на благосостояние, вообще говоря, неоднозначно. Выявляя информацию о типе работника, сигнализирование может привести к более эффективному распределению труда и в некоторых случаях к Парето-улучшению. Но в то же время, поскольку использование сигналов связано с издержками, благосостояние работников может снизиться, если они вынуждены использовать дорогостоящие сигналы, чтобы их могли опознать.

Для упрощения изложения на протяжении большей части этого раздела будем рассматривать специальный случай, когда $r(\theta_H) = r(\theta_L) = 0$. Следует заметить, что при такой предпосылке в единственном равновесии при отсутствии возможности подать сигнал (которое мы рассматривали в разделе 13.B) все работники оказываются нанятыми фирмами при заработной плате $w^* = E[\theta]$, и равновесное распределение Парето-оптимально. Таким образом, анализ этого случая позволяет подчеркнуть потенциальную неэффективность, порождаемую сигналингом. Детально изучив этот случай, мы кратко покажем (этот материал приведен мелким шрифтом), как при альтернативных предпосылках о функции $r(\cdot)$ использование сигналов, напротив, может привести к Парето-улучшению.

Часть дерева игры для данной модели продемонстрирована на рис. 13.C.1. Изначально случайный ход природы определяет тип работника: высокопроизводительный или низкопроизводительный. Затем в зависимости от типа работник принимает решение, какой уровень образования ему выбрать. Далее, получив выбранный уровень образования, работник выходит на рынок труда. Исходя из наблюдаемого уровня образования работника, две фирмы одновременно предлагают ему ставку заработной платы. Наконец, работник решает, работать ему в фирме или нет, и если да, то в какой именно.

Заметим, что в отличие от модели из раздела 13.B здесь мы явным образом моделируем поведение лишь одного работника неизвестного типа. Модель со многими работниками можно трактовать как ситуацию, когда мы имеем много игр с единственным работником, которые осуществляются одновременно, где доля высокопроизводительных работников на рынке равна λ. Обсуждая равновесия в этой игре, мы часто будем говорить о «высокопроизводительных» и «низкопроизводительных» работниках, имея в виду случай многих работников.

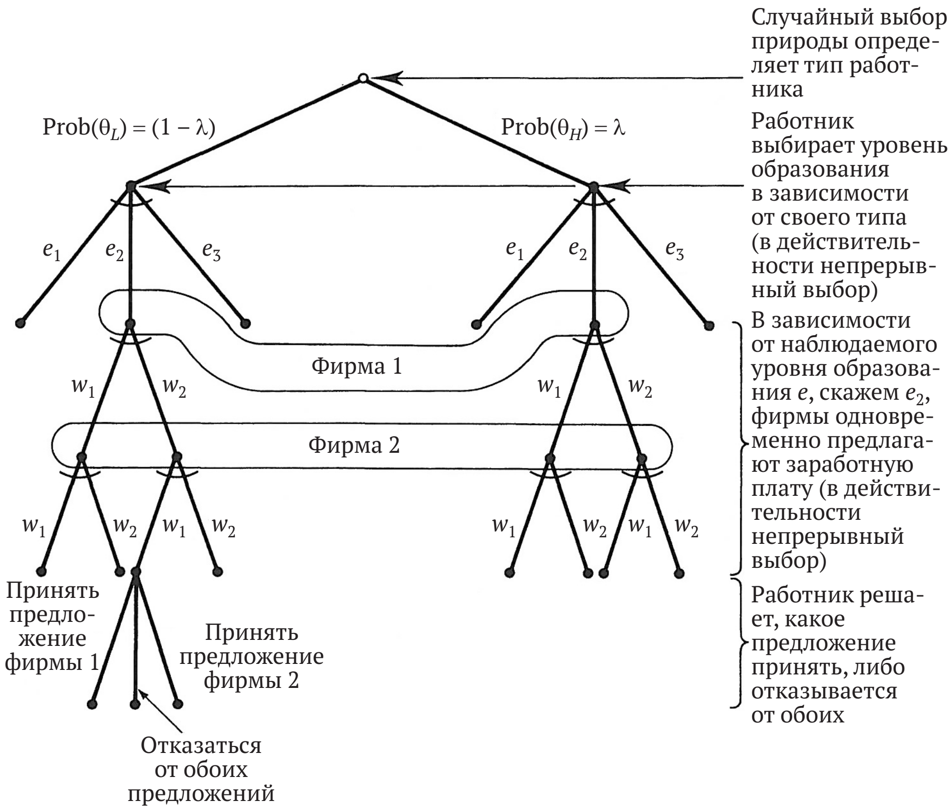


Рис. 13.С.1. Игра с сигналами в развернутой форме

Используемая здесь концепция равновесия — слабое совершенное байесовское равновесие (см. определение 9.С.3), но с дополнительными условиями. В игре, дерево которой изображено на рис. 13.С.1, ожидания фирмы должны обладать следующим свойством: для каждого возможного выбора уровня образования e существует число $\mu(e) \in [0, 1]$, такое что (1) фирма 1 ожидает, что работник имеет тип θ_H, наблюдая уровень образования e, с вероятностью $\mu(e)$; (2) после того как работник выбрал уровень образования e, фирма 2 ожидает, что работник имеет тип θ_H и что фирма 1 предложила ему заработную плату w с вероятностью $\mu(e)\sigma_1^*(w|e)$, где $\sigma_1^*(w|e)$ — равновесная вероятность предложения заработной платы w фирмой 1 при наблюдаемом уровне образования e. Это дополнительное условие добавляет элемент унифицированности ожиданий фирм о типе работника, выбравшего уровень образования e, и требует, чтобы ожидания фирм относительно заработной платы, предлагаемой конкурентом при уровне образования e, согласовывались бы с равновесными стратегиями как на равновесном пути, так и вне его.

Мы будем называть слабое совершенное байесовское равновесие, удовлетворяющее этому дополнительному условию на ожидания фирм, *совер-*

шенным байесовским равновесием. К счастью, концепцию совершенного байесовского равновесия можно более просто сформулировать так: множество стратегий и функция ожидания $\mu(e) \in [0, 1]$, характеризующая вероятности, приписываемые обеими фирмами при наблюдении уровня образования e тому, что работник является высокопроизводительным, являются совершенным байесовским равновесием, если:

1) стратегия работника оптимальна при данных стратегиях фирм;
2) функция ожиданий $\mu(e)$ выводится из стратегии работника с помощью правила Байеса там, где это возможно;
3) предлагаемые фирмами заработные платы при каждом уровне e составляют равновесие по Нэшу в игре предложения заработной платы с одновременными ходами, в которой вероятность того, что работник является высокопроизводительным, равна $\mu(e)$[20].

В контексте анализируемой здесь модели концепция совершенного байесовского равновесия эквивалентна концепции секвенциального равновесия, рассмотренной в разделе 9.С. Кроме того, на протяжении всего изложения мы ограничиваемся рассмотрением только равновесий в чистых стратегиях.

Начнем анализ игры с конца. Предположим, что, наблюдая некоторый уровень образования e, фирмы считают, что работник имеет тип θ_H с вероятностью $\mu(e)$. Если это так, то ожидаемая производительность работника равна $\mu(e)\theta_H + (1 - \mu(e))\theta_L$. В игре предложения заработной платы с одновременными ходами в равновесии по Нэшу (в чистых стратегиях) заработная плата, предлагаемая фирмами, должна быть равна ожидаемой производительности работника (эта игра очень похожа на игру ценообразования в модели Бертрана, рассмотренную в разделе 12.С). Таким образом, в любом совершенном байесовском равновесии (в чистых стратегиях) обе фирмы должны предлагать заработную плату, в точности равную ожидаемой производительности работника, $\mu(e)\theta_H + (1 - \mu(e))\theta_L$.

Запомнив этот факт, перейдем к обсуждению равновесной стратегии работника, т. е. выбора уровня образования в зависимости от типа. В качестве первого шага в этом направлении полезно проанализировать предпочтения работника на множестве пар (заработная плата, уровень образования). На рис. 13.С.2 изображено по одной кривой безразличия для каждого из двух типов работников (по оси ординат — заработная плата, по оси абсцисс — уровень образования). Обратите внимание, что данные кривые безразличия пересекаются только один раз и в точке пересечения кривая безразличия высокопроизводительного работника имеет меньший наклон. Такое свойство предпочтений, называемое *свойством единственности пересечения*, играет весьма важную роль при анализе моделей с сигналами и моделей с асимметричной информацией в целом. Здесь это свойство возникает, по-

[20] Таким образом, это дополнительное условие налагает требование «равновесной» игры, вне равновесного пути в том числе. См. обсуждение обоснования концепции слабого совершенного байесовского равновесия в разделе 9.С.

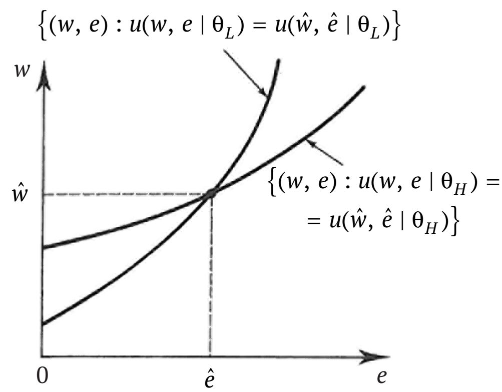


Рис. 13.С.2. Кривые безразличия высокопроизводительного и низкопроизводительного работников: свойство единственности пересечения

тому что для работника предельная норма замещения между заработной платой и образованием в любой точке (w, e) равна $(dw \,/\, de)_{\bar{u}} = c_e(e, \theta)$, а эта функция убывает по θ, поскольку по предположению $c_{e\theta}(e, \theta) < 0$.

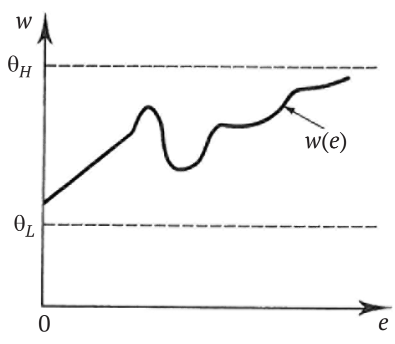


Рис. 13.С.3. Схема заработной платы

Мы также можем построить график функции, дающей равновесное предложение заработной платы для каждого уровня образования, которую мы обозначим через $w(e)$. Заметим, что, поскольку в любом совершенном байесовском равновесии $w(e) = \mu(e)\theta_H + (1 - \mu(e))\theta_L$ при равновесной функции ожиданий $\mu(e)$, равновесная заработная плата при любом выборе e должна принадлежать интервалу $[\theta_L, \theta_H]$. Возможный график функции предложения заработной платы $w(e)$ продемонстрирован на рис. 13.С.3.

Теперь, наконец, мы готовы определить равновесный выбор уровня образования работниками обоих типов. Удобно отдельно рассмотреть два различных типа равновесий, которые могут возникнуть: *разделяющие равновесия*, в которых работники разных типов выбирают разный уровень образования, и *объединяющие равновесия*, в которых работники обоих типов выбирают один и тот же уровень образования.

Разделяющие равновесия

Приступая к анализу разделяющих равновесий, сначала введем новые обозначения: пусть $e^*(\theta)$ — равновесный уровень образования работника как функция от его типа, а $w^*(e)$ — равновесное предложение заработной платы фирмами как функция от уровня образования работника, а затем сформулируем и докажем две полезные леммы.

Лемма 13.C.1. В любом разделяющем совершенном байесовском равновесии $w^*(e^*(\theta_H)) = \theta_H$ и $w^*(e^*(\theta_L)) = \theta_L$, т. е. работник каждого типа получает заработную плату, равную уровню его производительности.

Доказательство. В любом совершенном байесовском равновесии ожидания фирм на равновесном пути должны корректно выводиться из равновесных стратегий при помощи правила Байеса. В данном случае это означает, что, наблюдая уровень образования $e^*(\theta_L)$, фирмы должны считать с вероятностью, равной единице, что работник имеет тип θ_L. Аналогично, наблюдая уровень образования $e^*(\theta_H)$, фирмы должны с единичной вероятностью считать, что имеют дело с работником типа θ_H. Тогда результирующие заработные платы в точности равны θ_L и θ_H соответственно. ■

Лемма 13.C.2. В любом разделяющем совершенном байесовском равновесии $e^*(\theta_L) = 0$, т. е. низкопроизводительный работник решает вообще не получать образования.

Доказательство. Предположим, что это не так, т. е. работник типа θ_L выбирает строго положительный уровень образования $\hat{e} > 0$. Согласно лемме 13.C.1, выбирая такой уровень образования, работник получает заработную плату θ_L. Но он мог бы получить заработную плату не ниже θ_L, если бы выбрал $e = 0$. И поскольку выбор уровня образования $e = 0$ избавит работника от издержек образования, то при таком выборе его положение улучшится, что противоречит предпосылке о том, что $\hat{e} > 0$ — равновесный уровень образования. ■

Из леммы 13.C.2 следует, что в любом разделяющем равновесии кривая безразличия работника типа θ_L, проходящая через точку, соответствующую равновесному уровню образования и заработной платы, должна выглядеть так, как показано на рис. 13.C.4.

Воспользовавшись рис. 13.C.4, мы можем построить разделяющее равновесие следующим образом. Пусть $e^*(\theta_H) = \tilde{e}$, $e^*(\theta_L) = 0$, и пусть схема заработной платы $w^*(e)$ будет такой, как показано на рис. 13.C.5. Тогда ожидания фирмы при уровне образования e таковы: $\mu^*(e) = (w^*(e) - \theta_L)/(\theta_H - \theta_L)$. Заметим, что такие ожидания удовлетворяют условию $\mu^*(e) \in [0, 1]$ для всех $e \geq 0$, поскольку $w^*(e) \in [\theta_L, \theta_H]$.

Чтобы убедиться, что это действительно совершенное байесовское равновесие, следует обратить внимание на то, что мы абсолютно свободны в выборе любых ожиданий фирм, если уровень образования e не равен ни 0, ни $\tilde{e}$. Проиллюстрированная на рисунке схема заработной платы, согласно которой $w^*(0) = \theta_L$ и $w^*(\tilde{e}) = \theta_H$, в точности отражает эти ожидания.

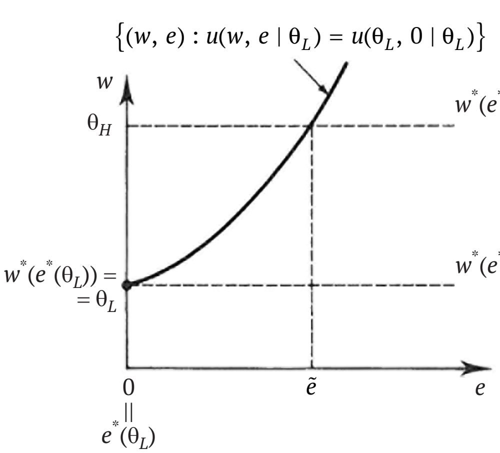


Рис. 13.С.4. Исход разделяющего равновесия для низкопроизводительного работника

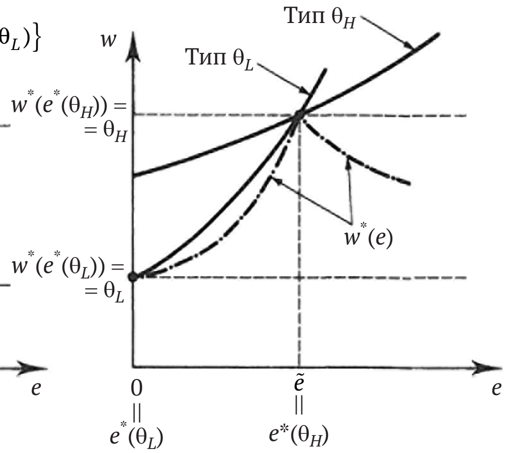


Рис. 13.С.5. Разделяющее равновесие: тип работника определяется по его уровню образования

Что можно сказать о стратегии работника? Как нетрудно заметить, при данной функции заработной платы $w^*(e)$ работник максимизирует свою полезность, выбирая уровень образования $e = 0$, если он имеет тип θ_L, и $e = \tilde{e}$, если он типа θ_H. Это хорошо видно на рис. 13.С.5: для работников обоих типов при схеме заработной платы $w^*(e)$ кривая безразличия соответствует наибольшему из возможных уровней полезности. Таким образом, стратегии $\left[e^*(\theta), w^*(e)\right]$ и соответствующие ожидания фирм $\mu(e)$ действительно образуют совершенное байесовское равновесие.

Следует заметить, что совершенное байесовское равновесие с таким выбором уровня образования работниками не единственно. Поскольку мы имеем большую свободу выбора ожиданий фирм вне равновесного пути, то можно предложить множество схем заработной платы, поддерживающих выбор таких уровней образования. На рис. 13.С.6 изображена еще одна схема: в данном случае в совершенном байесовском равновесии ожидания фирм таковы: работник гарантированно является высокопроизводительным, если $e \geq \tilde{e}$, и гарантированно низкопроизводителен, если $e < \tilde{e}$. Тогда схема заработной платы будет следующей: $w^*(e) = \theta_H$, если $e \geq \tilde{e}$, и $w^*(e) = \theta_L$, если $e < \tilde{e}$.

В разделяющем равновесии высокопроизводительные работники готовы получать (в некотором смысле бесполезное) образование, поскольку это позволяет им выделиться на фоне низкопроизводительных работников и иметь более высокую заработную плату. В данном случае образование может служить сигналом по той причине, что предельные издержки образования зависят от типа работника. Поскольку для низкопроизводительного работника предельные издержки образования выше (так как $c_{e\theta}(e, \theta) < 0$), то работнику типа θ_H имеет смысл получить некоторый положительный уровень образования $e' > 0$, чтобы тем самым повысить свою заработную плату на некоторую величину $\Delta w > 0$, тогда как работнику типа θ_L может быть невыгодно получать тот же самый уровень образования при том же самом повышении заработной платы. В результате фирмы разумно рассматривают уровень образования как сигнал качества рабочей силы.

Отмеченный выше уровень образования высокопроизводительного работника может быть неединственным в разделяющем равновесии в данной модели. В действительности возможна множественность уровней образования высокопроизводительного работника. Так, любой уровень образования из интервала от $\tilde{e}$ до e_1 на рис. 13.С.7 может быть равновесным для высокопроизводительных работников. На этом рисунке также проиллюстрирована схема заработной платы, поддерживающая уровень образования $e^*(\theta_H) = e_1$. Обратите внимание, что уровень образования высокопроизводительного работника в разделяющем равновесии не может быть ниже $\tilde{e}$, поскольку если бы это было так, то тогда низкопроизводительному работнику было бы выгодно отклониться и выдать себя за высокопроизводительного, выбрав уровень образования высокопроизводительного работника. С другой стороны, в разделяющем равновесии уровень образования высокопроизводительного работника не может быть выше e_1, поскольку в противном случае высокопроизводительный работник предпочел бы вообще не получать образования, даже если бы это привело к тому, что его бы приняли за низкопроизводительного.

Следует заметить, что множество разделяющих равновесий можно проранжировать по Парето. Во всех этих равновесиях фирмы получают нулевую прибыль, а низкопроизводительный работник — полезность, равную θ_L. Тогда как положение высокопроизводительного работника

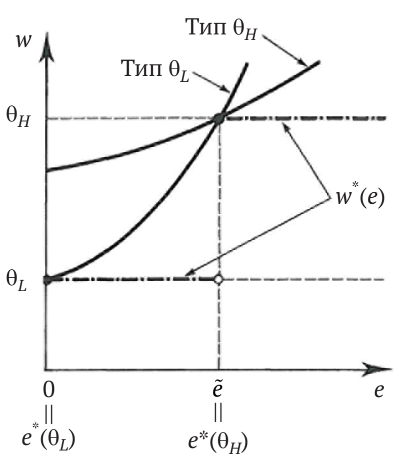


Рис. 13.С.6. Разделяющее равновесие с тем же выбором уровня образования, что и на рис. 13.С.5, но с другими ожиданиями вне равновесного пути

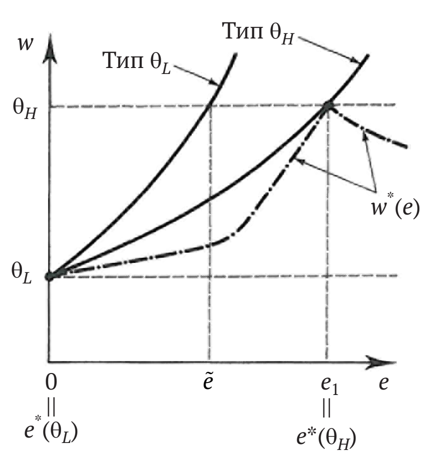


Рис. 13.С.7. Разделяющее равновесие, где высокопроизводительный работник выбирает уровень образования $e^*(\theta_H) > \tilde{e}$

строго лучше в тех равновесиях, в которых он получает более низкий уровень образования. Таким образом, разделяющие равновесия, в которых высокопроизводительный работник получает уровень образования $\tilde{e}$ (например, равновесия, проиллюстрированные на рис. 13.C.5 и 13.C.6), доминируют по Парето все остальные. А доминируемые по Парето равновесия также имеют место, поскольку высокопроизводительный работник опасается, что, если он выберет более низкий уровень образования, чем предписано в равновесии, фирмы не сочтут его высокопроизводительным. Эти ожидания могут поддерживаться, поскольку в равновесии они всегда оправдываются.

Представляется интересным сравнить уровень благосостояния в этих равновесиях с уровнем благосостояния в том случае, когда типы работников не наблюдаемы, но возможность подать сигнал недоступна. Когда уровень образования не может служить сигналом (а значит, работники также не несут издержек образования), мы опять оказываемся в ситуации, анализируемой в разделе 13.B. В обоих случаях ожидаемая прибыль фирм равна нулю. Однако положение низкопроизводительных работников при возможности использования сигналов хуже. В обоих случаях они не несут издержек образования, но при возможности подачи сигнала они получают заработную плату θ_L, а не $E\theta$.

А что можно сказать про высокопроизводительных работников? Возможно, это несколько неожиданно, но положение высокопроизводительных работников в модели с сигналами может быть как лучше, так и хуже. На рис. 13.C.8(a) положение высокопроизводительных работников лучше в силу увеличения их заработной платы за счет сигнализирования. Однако на рис. 13.C.8(b) изображена ситуация, когда, даже несмотря на то что высокопроизводительные работники стараются получить преимущество за счет механизма сигнализирования, позволяющего им выделиться на

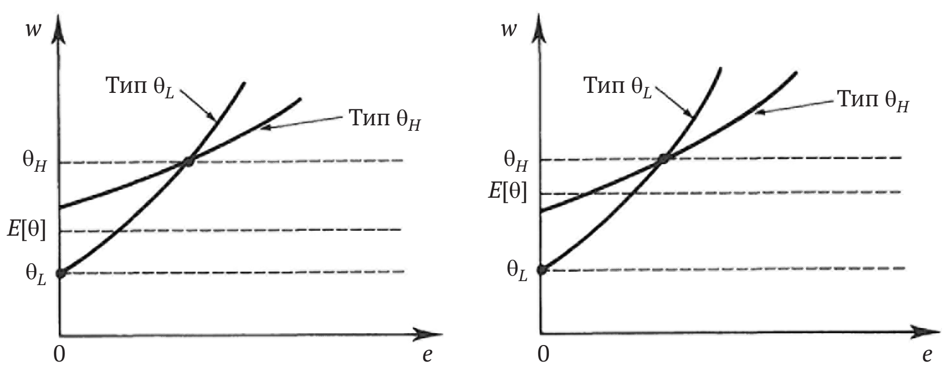


Рис. 13.C.8. Разделяющие равновесия могут доминироваться по Парето исходом без сигнала.
(a) Разделяющее равновесие, которое не доминируется по Парето исходом без сигнала.
(b) Разделяющее равновесие, которое доминируется по Парето исходом без сигнала

фоне низкопроизводительных работников, в результате их положение *хуже*, чем в случае, когда использование сигналов невозможно. Хотя это может показаться парадоксальным (если высокопроизводительные работники выбирают сигнал, как их положение может стать хуже?), но причина кроется в том, что в действительности в разделяющем равновесии с сигналами ожидания фирм таковы, что исход (заработная плата, уровень образования) в ситуации запрета на использование сигналов, $(w, e) = (E[\theta], 0)$, более недоступен высокопроизводительным работникам. А если высокопроизводительные работники не получают образования в разделяющем равновесии с сигналами, то их принимают за низкопроизводительных и предлагают заработную плату θ_L. Таким образом, ухудшение их положения в модели с сигналами возможно, даже несмотря на то что они выбирают положительный уровень образования в качестве сигнала.

Заметим, что поскольку множество разделяющих равновесий абсолютно не зависит от доли λ высокопроизводительных работников, то с ростом этой доли становится более вероятной ситуация, когда положение высокопроизводительных работников при возможности подачи сигнала ухудшается (сравните рис. 13.С.8(a) и 13.С.8(b)). Действительно, если эта доля становится близка к 1, то почти каждый работник получает требующее издержек образование только для того, чтобы его вдруг не приняли за одного из горстки плохих работников!

Объединяющие равновесия

Рассмотрим теперь объединяющие равновесия, в которых работники обоих типов выбирают один и тот же уровень образования $e^*(\theta_L) = e^*(\theta_H) = e^*$. Поскольку ожидания фирм должны корректно выводиться из равновесных стратегий и правила Байеса, когда это возможно, то, наблюдая уровень образования e^*, фирмы с вероятностью λ должны считать, что работник имеет тип θ_H. Таким образом, в любом объединяющем равновесии должно быть выполнено: $w^*(e^*) = \lambda\theta_H + (1 - \lambda)\theta_L = E[\theta]$.

Таким образом, осталось только определить, какие уровни образования возможны в объединяющем равновесии. Оказывается, может быть поддержан любой уровень образования от 0 до e', отмеченного на рис. 13.С.9.

На рис. 13.С.10 продемонстрировано объединяющее равновесие с уровнем образования e'. При данной изображенной на рисунке схеме заработной платы работники обоих типов максимизируют свой выигрыш, выбирая уровень образования e'. Данная схема заработной платы согласуется с правилом Байеса на равновесном пути, поскольку дает заработную плату $E[\theta]$ при уровне образования e'.

Уровни образования на интервале от 0 до e' могут быть поддержаны как равновесные аналогичным образом, а уровни образования больше e' не могут быть поддержаны, поскольку тогда низкопроизводительный работник скорее предпочтет вообще не получать образования, т. е. выберет $e = 0$, а не $e > e'$, даже если это приведет к получению заработной платы θ_L. Следует заметить, что объединяющее равновесие, в котором работники

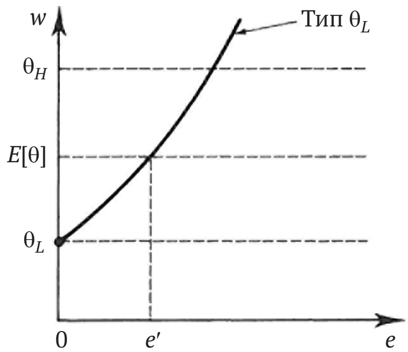


Рис. 13.С.9. Наибольший возможный уровень образования в объединяющем равновесии

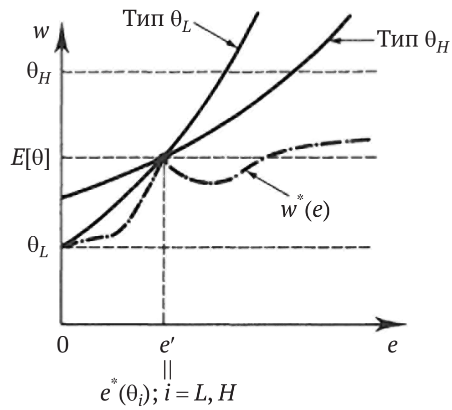


Рис. 13.С.10. Объединяющее равновесие

обоих типов не получают образования, доминирует по Парето любое объединяющее равновесие с положительным уровнем образования. И вновь доминируемые по Парето объединяющие равновесия поддерживаются опасениями работников, что отклонение приведет к тому, что фирма составит о них неблагоприятное представление. Заметим также, что объединяющее равновесие, в котором работники обоих типов не получают образования, имеет тот же исход, что и в случае, когда возможность подачи сигнала отсутствует. Таким образом, объединяющие равновесия (слабо) доминируются по Парето исходом равновесия без сигналов.

Множественные равновесия и усовершенствование равновесия

Наблюдаемая здесь множественность равновесий несколько сбивает с толку. Как мы видели, возможны разделяющие равновесия, в которых фирмы выявляют тип работника, но также имеются и объединяющие равновесия, где они этого не делают, и в равновесиях обоих типов равновесным может быть целый интервал уровней образования. В значительной степени эта множественность является результатом большой свободы выбора ожиданий вне равновесного пути. Недавно были проведены масштабные исследования последствий введения «разумных» ограничений на ожидания фирм, подобно тому обсуждению, которое приведено в разделе 9.D.

В качестве примера рассмотрим разделяющее равновесие, изображенное на рис. 13.С.7. Для того чтобы поддержать уровень образования e_1 как равновесный для высокопроизводительных работников, фирмы должны ожидать, что любой работник с уровнем образования ниже e_1 с положительной вероятностью имеет тип θ_L. Рассмотрим любой уровень образования $\hat{e} \in (\tilde{e}, e_1)$. Работник типа θ_L не может улучшить свое положение, выбрав такой уровень образования, по сравнению с тем, что он имеет при уровне образования $e = 0$, *независимо от того, каковы будут ожидания фирм*. Следовательно, любые ожидания фирм при наблюдении уровня образования $\hat{e} > \tilde{e}$, отличные от $\mu(\hat{e}) = 1$, представляются неразумными. Но если это так, то должно быть выполнено: $w(\hat{e}) = \theta_H$, а значит, высокопроизводительные работники будут отклоняться, выбирая уровень образования $\hat{e}$. Тогда, следуя этой логике, приходим к тому, что $\tilde{e}$ — единственный уровень образования, который может быть выбран работниками типа θ_H в разделяющем равновесии при обоснованных ожиданиях.

В приложении А мы более подробно обсудим усовершенствования равновесия на основе обоснованных ожиданий. Одно из таких усовершенствований, предложенное в работе (Cho, Kreps, 1987) и известное как *интуитивный критерий*, основано на развитии рассмотренной выше идеи исключения, но не только доминируемых разделяющих равновесий, но и объединяющих равновесий. Таким образом, если мы примем идею Хо — Крепса (Cho, Kreps, 1987), то получим *единственный* исход в модели сигналинга с двумя типами работников: наилучший исход разделяющего равновесия, продемонстрированный на рис. 13.C.5 и 13.C.6.

Вмешательство в функционирование рынка в условиях второго наилучшего

В отличие от рыночного исхода, предсказываемого теоретико-игровой моделью, рассмотренной в разделе 13.B (конкурентное равновесие с наибольшей заработной платой), при наличии сигналов государство, не имеющее возможности наблюдать тип работника, может тем не менее достичь Парето-улучшения по сравнению с рыночным исходом. Для того чтобы продемонстрировать это в наиболее простом случае, предположим, что выполнены условия Хо — Крепса (Cho, Kreps, 1987), предсказывающие наилучший исход разделяющего равновесия. Как мы уже видели, наилучшее разделяющее равновесие может доминироваться по Парето исходом при невозможности подачи сигнала. В этом случае Парето-улучшения можно добиться, просто запретив использование сигналов.

Более того, оказывается, что Парето-улучшение возможно даже в том случае, когда исход при отсутствии сигналов не доминирует по Парето наилучшее разделяющее равновесие. Действительно, рассмотрим рис. 13.C.11. На этом рисунке изображено наилучшее разделяющее равновесие, где низкопроизводительные работники оказываются в точке $(\theta_L, 0)$, а высокопроизводительные — в точке $(\theta_H, \tilde{e})$. Заметим, что положение высокопроизводитель-

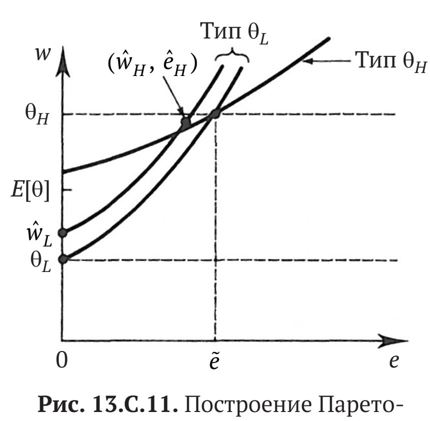


Рис. 13.C.11. Построение Парето-улучшения с помощью перекрестного субсидирования

ных работников в случае запрета на сигналы ухудшится, поскольку точка ($E[\theta]$, 0) дает им меньший уровень полезности, чем в равновесии. Тем не менее если мы дадим низкопроизводительным и высокопроизводительным работникам исходы $(\hat{w}_L, 0)$ и $(\hat{w}_H, \hat{e}_H)$ соответственно, то положение работников обоих типов улучшится. Государство может достичь этого исхода, постановив, что все работники с уровнем образования ниже $\hat{e}_H$ получают заработную плату $\hat{w}_L$, а работники с уровнем образования $\hat{e}_H$ и выше — заработную плату $\hat{w}_H$. В этом случае низкопроизводительные работники выберут уровень образования $e = 0$, а высокопроизводительные — $e = \hat{e}_H$. При таком исходе фирмы несут потери на низкопроизводительных работниках и получают прибыль на высокопроизводительных, и до тех пор, пока фирмы *в среднем* могут получать от работников обоих типов нулевую прибыль, их положение будет не хуже, чем ранее, а значит, будет достигнуто Парето-улучшение. Ключевой момент в построении такого Парето-улучшения — необходимость *перекрестного субсидирования*, когда высокопроизводительные работники получают ниже своего уровня производительности, тогда как низкопроизводительные — выше. Такой исход в разделяющем равновесии с сигналами невозможен. (Обратите внимание, что исход при запрете использования сигналов — это крайний случай такого перекрестного субсидирования.)

Упражнение 13.C.3. В модели с сигналами, рассмотренной в разделе 13.C, при $r(\theta_H) = r(\theta_L) = 0$ постройте пример, когда государство, не наблюдающее тип работника, может достичь Парето-улучшения по сравнению с наилучшим разделяющим равновесием с помощью политики перекрестного субсидирования, но при этом Парето-улучшение простым запретом использования сигналов невозможно. (*Подсказка*: рассмотрите сначала случай линейных кривых безразличия.)

Рассмотренный выше случай, когда $r(\theta_H) = r(\theta_L) = 0$ и рыночный исход при отсутствии сигналов Парето-оптимален, наглядно иллюстрирует, как использование связанного с издержками сигнализирования может привести к снижению благосостояния. Однако в случае, когда рыночный исход при невозможности использования сигналов не является эффективным, способность сигнала выявить информацию о типе работника может, наоборот, создать Парето-улучшение, привести к более эффективному распределению труда. Для того чтобы убедиться в этом, предположим, что $r = r(\theta_H) = \mathrm{r}(\theta_L)$, где $\theta_L < r < \theta_H$ и $E[\theta] < r$. В этом случае в равновесном исходе без сигналов ни один работник не будет занят в фирме, тогда как в любом Парето-эффективном исходе высокопроизводительные работники должны быть наняты фирмами.

Теперь исследуем равновесный исход, когда использование сигналов возможно. Рассмотрим сначала заработную плату и уровень занятости, после того как работник выбрал уровень образования e. Тогда при выборе такого уровня образования в равновесии заработная плата должна быть равна $w^*(e) = \mu(e)\theta_H + (1 - \mu(e))\theta_L$. Если $w^*(e) \geq r$, то работники обоих типов будут заняты в фирме, если же $w^*(e) < r$, то никто не будет занят.

Теперь выясним, каков будет выбор уровня образования работниками обоих типов в равновесии. В первую очередь следует заметить, что в любом объединяющем равновесии работники обоих типов должны выбирать $e = 0$, и в таком равновесии никто из работников не согласится работать. Действительно, предположим, что работники обоих типов выбирают уровень образования $\hat{e}$. Тогда $\mu(\hat{e}) = \lambda$ и $w^*(e) = E[\theta] < r$, значит, уровень занятости будет равен нулю. Следовательно, если $\hat{e} > 0$, то положение работников обоих типов улучшилось бы, если бы они предпочли вообще не получать образования, т. е. выбрали $e = 0$. Таким образом, только нулевой уровень образования может иметь место в объединяющем равновесии. В таком объединяющем равновесии исход идентичен равновесному исходу при отсутствии возможности подать сигнал.

Множество разделяющих равновесий проиллюстрировано на рис. 13.C.12. В любом разделяющем равновесии низкопроизводительные работники выбирают $e = 0$, им предлагается заработная плата θ_L, и поэтому они предпочитают оставаться дома, получая r. Тогда как высокопроизводительные работники выбирают уровень образования из интервала $[\hat{e}, e_2]$, отмеченного на рисунке; им предлагается заработная плата θ_H, и они соглашаются работать в фирме. Заметим, что ни в одном разделяющем равновесии не может быть выполнено условие $e^*(\theta_H) < \hat{e}$, поскольку тогда низкопроизводительные работники предпочли бы отклониться, выбрав уровень образования $e = e^*(\theta_H)$. Кроме того, в разделяющем равновесии не может быть выполнено условие $e^*(\theta_H) > e_2$, поскольку тогда положение высокопроизводительных работников было бы лучше, если бы они выбрали уровень образования $e = 0$ и работали дома.

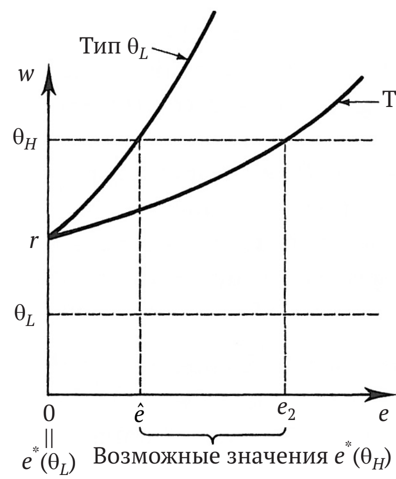


Рис. 13.C.12. Разделяющие равновесия при $r(\theta_H) = r(\theta_L) = r \in (\theta_L, \theta_H)$

Следует заметить, что во всех этих равновесиях, и объединяющих, и разделяющих, положение высокопроизводительных работников по крайней мере не хуже, чем в равновесии при отсутствии сигналов, и строго лучше в разделяющем равновесии, где $e^*(\theta_H) < e_2$. Таким образом, в случае $\theta_L < r < \theta_H$ и $E[\theta] < r$ любое объединяющее и разделяющее равновесие с сигналами слабо *доминирует по Парето* исход, имеющий место при отсутствии сигналов, и, более того, Парето-доминирование будет *строгим* (по существу) для всех разделяющих равновесий.

13.D. Скрининг

В разделе 13.C мы обсуждали использование рыночных сигналов как ответ на проблему асимметрии информации относительно предлагаемого на рынке блага. В этой модели индивиды (работники), как *более информированная* сторона рынка, пытались выбором уровня образования подать сигнал о своих способностях неинформированной стороне (фирмам). В этом разделе мы обсудим альтернативный рыночный ответ на проблему ненаблюдаемости производительности работника, рассмотрев модель, в которой *неинформированные* стороны предпринимают шаги для того, чтобы распознать тип (провести *скрининг*) индивидов, находящихся по другую сторону рынка[21]. Эта модель впервые была проанализирована в работах (Rotschild, Stiglitz, 1976; Wilson, 1977) в контексте рынка страховых услуг (см. упражнение 13.D.2).

Как и в разделе 13.C, будем рассматривать случай двух типов работников с производительностью θ_L и θ_H, причем $\theta_H > \theta_L > 0$, где доля работников типа θ_H равна $\lambda \in (0, 1)$. Будем считать, что работники получают доход, только работая в фирме (т. е. в обозначениях раздела 13.B $r(\theta_L) = r(\theta_H) = 0$). Предположим также, что работа может различаться по «уровню задания», выполнение которого требуется от работника. Например, занятость может различаться по количеству часов работы в неделю, которые будет занят работник, или же уровень задания может отражать скорость работы сборочной линии на фабрике.

В целях упрощения анализа, а также для того чтобы аналогия с моделью из раздела 13.C была наиболее понятна, предположим, что более высокий уровень задания *никак* не сказывается на выпуске, производимом работником, а *только* влияет на его полезность (чем выше уровень задания, тем ниже полезность при прочих равных)[22]. Таким образом, выпуск, производимый работником типа θ, равен θ независимо от уровня задания для работника.

Пусть функция полезности работника типа θ, получающего заработную плату w и сталкивающегося с уровнем задания $t \geq 0$, имеет вид:

$$u(w, t|\theta) = w - c(t, \theta),$$

где функция $c(t, \theta)$ обладает теми же свойствами, что и функция $c(e, \theta)$ в разделе 13.C. В частности, $c(0, \theta) = 0$, $c_t(t, \theta) > 0$, $c_{tt}(t, \theta) > 0$, $c_\theta(t, \theta) < 0$ для всех $t > 0$ и $c_{t\theta}(t, \theta) < 0$. Другими словами, мы считаем, что уровень задания t служит для того, чтобы проводить различие между работниками разного типа, т. е. играет ту же роль, что и уровень образования в модели с сигналами из раздела 13.C.

Здесь мы будем рассматривать совершенное в подыграх равновесие по Нэшу в чистых стратегиях для следующей двухшаговой игры[23]:

Шаг 1. Две фирмы одновременно объявляют наборы предлагаемых контрактов, которые представляют собой пару (w, t). Каждая фирма может предлагать любое конечное число контрактов.

[21] Здесь мы рассматриваем модель *конкурентного скрининга* на рынке труда, поскольку предполагаем наличие нескольких конкурирующих фирм. В разделе 14.C мы обсудим случай *монополистического скрининга*, когда на рынке действует только одна фирма, нанимающая работников.

[22] Как и в случае с образовательным сигналингом, предположение о том, что более высокий уровень заданий не увеличивает производительности, вводится исключительно для наглядности изложения. В упражнении 13.D.1 вам предлагается рассмотреть случай, когда прибыль фирм возрастает по уровню задания.

[23] В этой игре множество совершенных в подыграх равновесий по Нэшу идентично множеству профилей стратегий в слабых совершенных байесовских равновесиях или секвенциальных равновесиях.

Шаг 2. При данных контрактах, предлагаемых фирмами, работники каждого типа принимают решение, соглашаться работать или нет, и если да, то какой именно контракт выбрать. Для простоты будем считать, что если два контракта для работника эквиваленты, то он всегда выбирает тот, в котором ниже уровень задания, а также будем считать, что если работнику все равно, работать или нет, то он работает. Если наиболее привлекательный для работника контракт предлагается обеими фирмами, то он принимает предложение каждой фирмы с вероятностью $^1/_2$.

Таким образом, фирма может предложить много разных контрактов. Например, у фирмы может быть несколько сборочных линий, скорости которых различны. Работники разных типов могут в итоге выбрать разные контракты[24].

В качестве отправной точки рассмотрим вопрос о том, каким бы был исход данной игры, если бы типы работников были *наблюдаемы*. В этом случае фирмы будут предлагать заработную плату, исходя из типа работника (т. е. фирма может предлагать контракт (w_L, t_L) только работникам типа θ_L, а контракт (w_H, t_H) — только работникам типа θ_H).

Утверждение 13.D.1. В любом совершенном в подыграх равновесии по Нэшу в игре скрининга с наблюдаемыми типами работников работник типа θ_i выбирает контракт $(w_i^*, t_i^*) = (\theta_i, 0)$, а фирмы получают нулевую прибыль.

Доказательство. Сначала покажем, что любой контракт (w_i^*, t_i^*), выбираемый работником типа θ_i в равновесии, должен приносить нулевую прибыль, т. е. в таком контракте заработная плата должна быть равна производительности, $w_i^* = \theta_i$. Действительно, если $w_i^* > \theta_i$, то фирма, предлагающая такой контракт, несет потери, а значит, ее положение улучшится, если она вообще не будет предлагать контракт работнику типа θ_i. С другой стороны, пусть $w_i^* < \theta_i$. Предположим также, что $\Pi > 0$ — совокупная прибыль, получаемая обеими фирмами от работников типа θ_i, причем прибыль каждой отдельной фирмы от этих работников должна быть не более $\Pi/2$. Тогда, если какая-либо фирма отклонится, предложив контракт $(w_i^* + \varepsilon, t_i^*)$ для любого $\varepsilon > 0$, то она привлечет всех работников типа θ_i. И поскольку ε может быть сколь угодно мало, то прибыль от работников типа θ_i будет сколь угодно близка к Π, а значит, такое отклонение будет прибыльным. Таким образом, должно быть выполнено: $w_i^* = \theta_i$.

[24] Оригинальные модели, описанные в работах (Rothschild, Stiglitz, 1976; Wilson, 1977), отличаются от рассмотренной здесь по двум аспектам. Во-первых, в этих работах предполагается, что фирмы могут предложить только один контракт. Это имеет смысл, если интерпретировать ситуацию в терминах сборочной линии: тогда это означает, что каждая фирма имеет только одну сборочную линию. Во-вторых, авторы оригинальных статей исходят из предпосылки о «свободе входа», т. е. предполагается, что на рынок будут входить новые фирмы, до тех пор пока существует возможность получения прибыли. В действительности эти нюансы почти не влияют на полученные результаты. Единственное отличие состоит в конкретных условиях существования равновесия (более подробно об этом см. в упражнении 13.D.4).

Предположим теперь, что $(w_i^*, t_i^*) = (\theta_i, t')$, где $t' > 0$. Тогда, как показано на рис. 13.D.1 (где по вертикальной оси откладывается заработная плата, а по горизонтальной — уровень задания), любая из фирм может отклониться, предложив контракт из затемненной области рисунка, например $(\tilde{w}, \tilde{t})$, и получить от такого отклонения положительную прибыль. Единственный контракт, для которого построение прибыльного отклонения невозможно, — это контракт $(w_i^*, t_i^*) = (\theta_i, 0)$, поскольку такой контракт доставляет максимум полезности работника типа θ_i, при условии что фирмы, предлагающие такой контракт, получают нулевую прибыль. ■

Теперь перейдем к рассмотрению ситуации, когда типы работников *ненаблюдаемы*. В этом случае каждый контракт, предлагаемый фирмой, в принципе может быть выбран работником любого типа. Следует отметить, что исход при полной информации, описанный в утверждении 13.D.1, в случае когда типы работников ненаблюдаемы, возникнуть не может, поскольку каждый низкопроизводительный работник предпочел бы контракт высокопроизводительного работника $(\theta_H, 0)$ контракту $(\theta_L, 0)$. Если бы эти контракты предлагались фирмами, то все работники предпочли бы контракт $(\theta_H, 0)$, а фирмы понесли бы убытки.

Поиск равновесного исхода при ненаблюдаемых типах работников полезно начать с графического анализа, изобразив три линии нулевой прибыли: линии нулевой прибыли при уровнях производительности θ_L, $E[\theta]$ и θ_H соответственно. Эти линии нулевой прибыли отмечены пунктиром на рис. 13.D.2. Средняя линия соответствует нулевой прибыли от контракта, привлекающего работников обоих типов.

Как и в разделе 13.C, здесь в принципе возможны два типа равновесий (в чистых стратегиях): *разделяющие* равновесия, в которых работники разных типов выбирают разные контракты, и *объединяющие* равновесия, ког-

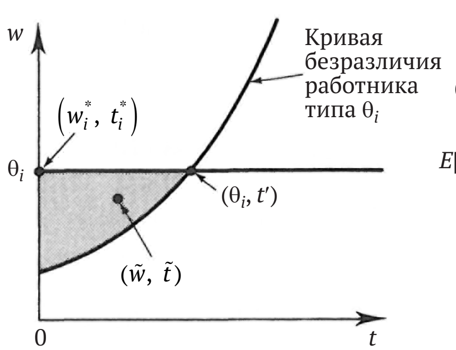


Рис. 13.D.1. Равновесный контракт (w_i^*, t_i^*) для работника типа θ_i, когда тип работника наблюдаем

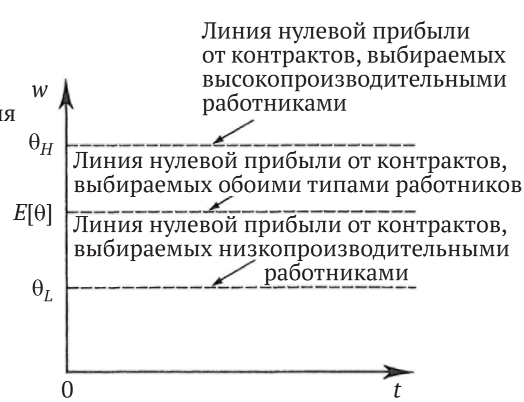


Рис. 13.D.2. Линии нулевой прибыли

да работники обоих типов подписывают один и тот же контракт. (Можно показать, что в любом равновесии работники обоих типов готовы согласиться на некоторый контракт, и при дальнейшем обсуждении мы исходим из того, что это условие выполнено.) Далее мы приведем ряд лемм, характеризующих равновесия в модели скрининга, первая из которых, лемма 13.D.1, касается как объединяющих, так и разделяющих равновесий.

Лемма 13.D.1. В любом равновесии (и объединяющем, и разделяющем) обе фирмы получают нулевую прибыль.

Доказательство. Пусть (w_L, t_L) и (w_H, t_H) — контракты, выбираемые низкопроизводительными и высокопроизводительными работниками соответственно (причем эти контракты могут быть одинаковыми), и совокупная прибыль фирм положительна, т. е. $\Pi > 0$. Тогда одна фирма должна получать прибыль не более $\Pi/2$. Рассмотрим такое отклонение этой фирмы, когда она предлагает контракты $(w_L + \varepsilon, t_L)$ и $(w_H + \varepsilon, t_H)$, где $\varepsilon > 0$. Контракт $(w_L + \varepsilon, t_L)$ привлечет всех работников типа θ_L, а контракт $(w_H + \varepsilon, t_H)$ — всех работников типа θ_H. (Заметим, что поскольку работник типа θ_i изначально должен предпочитать контракт (w_i, t_i) контракту (w_j, t_j), то $w_i - c(t_i, \theta_i) \geq w_j - c(t_j, \theta_i)$, а следовательно, $(w_i + \varepsilon) - c(t_i, \theta_i) \geq (w_j + \varepsilon) - c(t_j, \theta_i)$.) Поскольку величина ε может быть выбрана сколь угодно малой, то такое отклонение позволяет фирме получить прибыль, сколь угодно близкую к Π, т. е. такое отклонение оказывается прибыльным. Следовательно, в равновесии должно быть выполнено $\Pi \leq 0$. Но поскольку ни одна фирма в равновесии не может нести убытки (так как она всегда может получить нулевую прибыль, просто не предлагая контракты), то это означает, что в действительности обе фирмы должны получать нулевую прибыль. ■

Важным следствием леммы 13.D.1 является тот факт, что в любом равновесии ни одна из фирм не может отклониться так, чтобы получить строго положительную прибыль. Мы не раз воспользуемся этим в дальнейшем. В частности, основываясь на нем, мы немедленно получаем результат леммы 13.D.2, касающийся объединяющего равновесия.

Лемма 13.D.2. Объединяющего равновесия не существует.

Доказательство. Пусть объединяющее равновесие существует. Обозначим равновесный контракт через (w^p, t^p). По лемме 13.D.1 этот контракт должен лежать на линии нулевой прибыли от контрактов, выбираемых работниками обоих типов, как показано на рис. 13.D.3. Предположим, что фирма j предлагает контракт (w^p, t^p), тогда у фирмы $k \neq j$ есть возможность прибыльного отклонения. Действительно, если она предложит контракт $(\tilde{w}, \tilde{t})$, лежащий в заштрихованной области на рис. 13.D.3, где $\tilde{w} < \theta_H$, то этот контракт привлечет всех работников типа θ_H и ни одного работника типа θ_L, поскольку работники этого типа предпочтут контракт (w^p, t^p) конт-

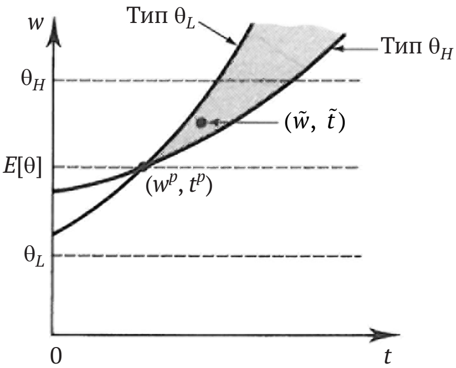


Рис. 13.D.3. Объединяющего равновесия не существует

ракту $(\tilde{w},\ \tilde{t})$. И поскольку $\tilde{w} < \theta_H$, то фирма k получит положительную прибыль от этого контракта, когда высокопроизводительные работники согласятся его подписать. ■

Теперь рассмотрим разделяющие равновесия. Как показывает лемма 13.D.3, все контракты разделяющего равновесия должны приносить нулевую прибыль.

Лемма 13.D.3. Пусть (w_L, t_L) и (w_H, t_H) — контракты, выбираемые низкопроизводительными и высокопроизводительными работниками в разделяющем равновесии. Тогда оба данных контракта должны приносить нулевую прибыль, т. е. $w_L = \theta_L$ и $w_H = \theta_H$.

Доказательство. Предположим сначала, что $w_L < \theta_L$. Тогда любая из фирм может получить строго положительную прибыль, предложив контракт $(\tilde{w}_L,\ t_L)$, где $\theta_L > \tilde{w}_L > w_L$. Все низкопроизводительные работники согласятся на такой контракт, и отклоняющаяся фирма получит строго положительную прибыль от такого контракта, какой бы работник (низко- или высокопроизводительный) его ни подписал. Поскольку из леммы 13.D.1 следует, что такого отклонения не существует, то в любом разделяющем равновесии должно быть выполнено: $w_L \geq \theta_L$.

Предположим теперь, что $w_H < \theta_H$ (см. рис. 13.D.4). В разделяющем равновесии контракт для работников типа θ_L, (w_L, t_L), должен лежать в затемненной области рисунка (по лемме 13.D.1 также должно быть выполнено: $w_L > \theta_L$). Действительно, поскольку работники типа θ_H выбирают контракт (w_H, t_H), то контракт (w_L, t_L) должен лежать либо на кривой безразличия работника типа θ_H, проходящей через точку (w_H, t_H), либо ниже ее. А поскольку работники типа θ_L предпочитают контракт (w_L, t_L) контракту (w_H, t_H), то контракт (w_L, t_L) должен лежать либо на кривой безразличия работника типа θ_L, проходящей через точку (w_H, t_H), либо выше ее. Предположим, фирма j предлагает низкопроизводительным работникам конт-

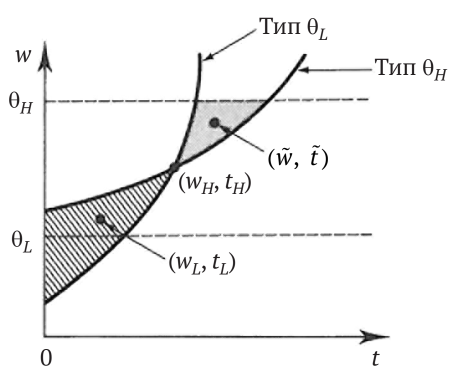


Рис. 13.D.4. В контракте для высокопроизводительного работника в разделяющем равновесии не может быть выполнено $w_H < \theta_H$

ракт (w_L, t_L). Тогда фирма $k \neq j$ может отклониться, предложив только контракт, лежащий в затемненной области рисунка, где заработная плата строго меньше θ_H, такой как $(\tilde{w},\ \tilde{t})$, и получить строго положительную прибыль. Этот контракт, в котором $w_H < \theta_H$, будет принят всеми работниками типа θ_H, и ни один работник типа θ_L на него не согласится (поскольку фирма j по-прежнему предлагает контракт (w_L, t_L)). Таким образом, в любом разделяющем равновесии должно быть выполнено: $w_H \geq \theta_H$.

Таким образом, по лемме 13.D.1 в любом равновесии фирмы получают нулевую прибыль, а значит, $w_L = \theta_L$ и $w_H = \theta_H$. ■

Лемма 13.D.4. В любом разделяющем равновесии низкопроизводительные работники выбирают контракт (θ_L, 0), т. е. получают тот же самый контракт, что и в условиях отсутствия асимметрии информации на рынке.

Доказательство. По лемме 13.D.3 в любом разделяющем равновесии $w_L = \theta_L$. Предположим, от противного, что низкопроизводительные работники выбирают контракт (θ_L, t_L'), где $t_L' > 0$ (см. рис. 13.D.5). (Заметим, хотя это и неважно для доказательства, что контракт для высокопроизводительных работников должен лежать на участке линии нулевой прибыли от контрактов для высокопроизводительных работников, расположенной в заштрихованной области рисунка.) Но тогда фирма может получить строго положительную прибыль, предложив только контракт, лежащий в затемненной области рисунка, такой как $(\tilde{w},\ \tilde{t})$. Все низкопроизводительные работники согласятся на этот контракт, и он принесет фирме строго положительную прибыль, кто бы на него ни согласился (высоко- или низкопроизводительные работники).

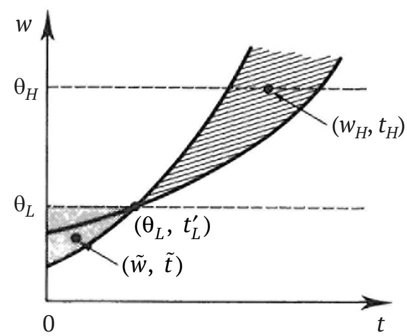


Рис. 13.D.5. В любом разделяющем равновесии низкопроизводительные работники должны получать контракт (θ_L, 0)

Опишем теперь контракт для высокопроизводительных работников.

Лемма 13.D.5. В любом разделяющем равновесии высокопроизводительные работники получают контракт $(\theta_H,\ \hat{t}_H)$, где $\hat{t}_H$ удовлетворяет следующему условию: $\theta_H - c(\hat{t}_H,\ \theta_L) = \theta_L - c(0,\ \theta_L)$.

Доказательство. Рассмотрим рис. 13.D.6. Из лемм 13.D.3 и 13.D.4 нам известно, что $(w_L, t_L) = (\theta_L, 0)$ и $w_H = \theta_H$. Кроме того, если работник типа θ_L предпочитает контракт (θ_L, 0), то величина t_H должна по крайней мере быть не меньше $\hat{t}_H$, отмеченной на рисунке. Заметим,

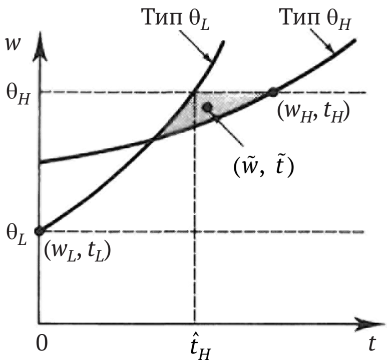


Рис. 13.D.6. В любом разделяющем равновесии высокопроизводительные работники должны получать контракт $(\theta_H, \hat{t}_H)$

что для низкопроизводительных работников контракты $(\theta_L, 0)$ и $(\theta_H, \hat{t}_H)$ эквивалентны, т.е. $\theta_H - c(\hat{t}_H, \theta_L) = \theta_L - c(0, \theta_L)$. Предположим теперь, что в контракте, выбираемом высокопроизводительными работниками, (θ_H, t_H), уровень задания выше $\hat{t}_H$, т.е. $t_H > \hat{t}_H$, как показано на рисунке. Тогда любая фирма может получить строго положительную прибыль, включив в меню контрактов контракт, лежащий в затемненной области рисунка, где $w_H < \theta_H$, такой как $(\tilde{w}, \tilde{t})$. Этот контракт привлечет всех высокопроизводительных работников и никак не повлияет на выбор низкопроизводительных. Таким образом, в любом разделяющем равновесии $(\theta_H, \hat{t}_H)$ — контракт, предпочитаемый высокопроизводительными работниками. ■

Утверждение 13.D.2 подводит итог вышесказанному.

Утверждение 13.D.2. В любом совершенном в подыграх равновесии по Нэшу в игре скрининга низкопроизводительные работники получают контракт $(\theta_L, 0)$, а высокопроизводительные — контракт $(\theta_H, \hat{t}_H)$, где $\hat{t}_H$ удовлетворяет следующему условию: $\theta_H - c(\hat{t}_H, \theta_L) = \theta_L - c(0, \theta_L)$.

Однако на этом утверждении мы не заканчиваем анализ. Пока мы только показали, как может выглядеть равновесие в данной модели, но не ответили на вопрос, всегда ли оно существует. В действительности может оказаться так, что *равновесия не существует,* и мы сейчас это покажем.

Пусть обе фирмы предлагают два контракта, указанные в утверждении 13.D.2 и отмеченные на рис. 13.D.7(a). Есть ли у какой-либо фирмы стимул отклониться? Ни одна из фирм не может получить строго положительную прибыль, выбрав отклонение, привлекающее либо только высокопроизводительных, либо только низкопроизводительных работников (попытайтесь найти такое отклонение). Но что можно сказать об отклонении, которое привлекло бы *всех* работников? Итак, рассмотрим такое отклонение, когда отклоняющаяся фирма предлагает один контракт, привлекательный для работников обоих типов. Как видно из рис. 13.D.7(a), контракт может привлечь работников обоих типов тогда и только тогда, когда он лежит в затемненной области. Прибыльного отклонения такого вида не существует, если, как показано на рисунке, затемненная область полностью расположена выше линии нулевой прибыли от контрактов, выбираемых работниками обоих типов. Однако если данная область лежит под этой линией, как

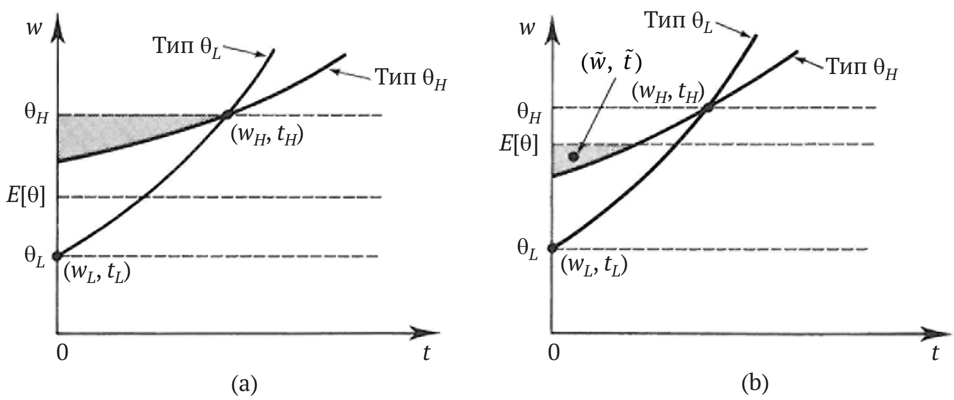


Рис. 13.D.7. Равновесия может не существовать.
(a) Отсутствие объединяющего контракта, разрушающего разделяющее равновесие.
(b) Объединяющий контракт $(\tilde{w},\ \tilde{t})$, разрушающий разделяющее равновесие

на рис. 13.D.7(b), то существует прибыльное отклонение, которое можно получить, предложив работникам обоих типов контракт, подобный $(\tilde{w},\ \tilde{t})$. В этом случае *равновесия не существует*.

Но даже в том случае, когда не существует объединяющего контракта, разрушающего разделяющее равновесие, его можно разрушить прибыльным отклонением с помощью двух контрактов. Например, фирма может предложить пару контрактов, $(\tilde{w}_L,\ \tilde{t}_L)$ и $(\tilde{w}_H,\ \tilde{t}_H)$, отмеченных на рис. 13.D.8. Тогда работники типа θ_L переключатся на контракт $(\tilde{w}_L,\ \tilde{t}_L)$, а работники типа θ_H — на контракт $(\tilde{w}_H,\ \tilde{t}_H)$. И если эта пара контрактов приносит фирме положительную прибыль, то такое отклонение разрушает разделяющее равновесие, описанное в утверждении 13.D.2, а значит, равновесия не существует. Другими словами, равновесие существует только в том случае, когда такое прибыльное отклонение невозможно.

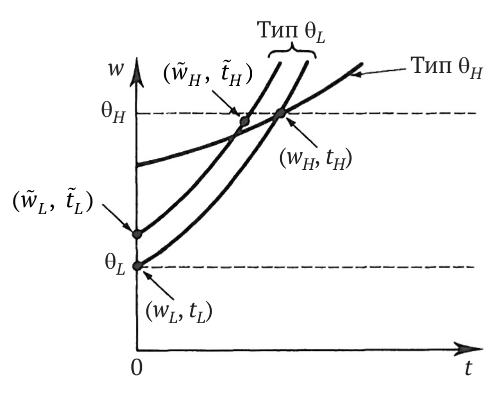


Рис. 13.D.8. Пример построения прибыльного отклонения, разрушающего разделяющее равновесие, с помощью пары контрактов

Равновесия в модели скрининга и благосостояние

Если ограничиться рассмотрением случаев, когда равновесие в модели скрининга существует, то, оказывается, с точки зрения благосостояния это равновесие подобно наилучшему разделяющему равновесию в модели сигналинга (при $r(\theta_L) = r(\theta_H) = 0$). Во-первых, как и в предыдущей модели, асимметрия информации ведет к неэффективному по Парето исходу. Здесь высокопроизводительные работники в итоге подписывают контракты, требующие от них выполнения совершенно непродуктивных заданий, снижающих их полезность, только для того, чтобы выделиться на фоне менее способных конкурентов. Как и в модели сигналинга, положение низкопроизводительных работников всегда хуже, когда есть возможность скрининга, по сравнению с тем, когда ее нет. Единственное отличие модели скрининга от модели сигналинга заключается в том, что в случаях, когда равновесие существует, скрининг улучшает положение высокопроизводительных работников (особенно в тех случаях, когда невозможно разбиение разделяющего равновесия единым контрактом, привлекательным для работников обоих типов (см. рис. 13.D.7(b)). Действительно, когда равновесие существует, равновесный исход условно Парето-оптимален. Если ни одна фирма не может отклониться, предложив контракт, привлекательный для работников обоих типов, и получить при этом положительную прибыль, то центральная власть, неспособная наблюдать типы работников, также не сможет достичь Парето-улучшения[25].

Что можно сказать о причине этого явления? В экономической литературе есть два варианта ответа на этот вопрос. Первый заключается в том, чтобы доказать, что равновесие в действительности существует, но на более широком пространстве стратегий, включающем смешанные стратегии (см. работу (Dasgupta, Maskin, 1986)). Второй вариант ответа базируется на идее о том, что отсутствие равновесий указывает на неполную специфицированность модели. В частности, подчеркивается нехватка какой-либо динамической реакции на новые меню контрактов (см. (Wilson, 1977; Riley, 1979; Hellwig, 1986)). Например, в работе (Wilson, 1977) используется определение равновесия, в котором предполагается, что фирмы могут исключать из меню неприбыльные контракты. Множество контрактов называется *равновесием Уилсона*, если ни одна фирма не может построить прибыльного отклонения, которое остается прибыльным, после того как из меню исключаются «старые» контракты, которые после отклонения приносят потери. Это дополнительное условие может привести к тому, что отклонения станут менее привлекательными. Так, например, если вернуться к отклонению, проиллюстрированному на рис. 13.D.3, то как только контракт $(\tilde{w}, \tilde{t})$ будет включен в меню контрактов, то исходный контракт (w^p, t^p) станет убыточным. Но если (w^p, t^p) исключить из меню предлагаемых контрактов, то низкопроизводительные работники подпишут контракт $(\tilde{w}, \tilde{t})$, и тогда такое отклонение станет неприбыльным. В работе (Hellwig, 1986) исследуются секвенциаль-

[25] Здесь нужно оговориться: в действительности равновесие может существовать, если найдется другая пара контрактов, которая позволит работникам обоих типов достичь более высокого уровня полезности, а предложившая эти контракты отклоняющаяся фирма получит прибыль, в точности равную нулю. В этом случае равновесный исход не является условным Парето-оптимумом.

ные равновесия и их усовершенствования в игре, где явным образом отмечена возможность такого отзыва контрактов.

В этих работах с учетом введенных модификаций устанавливается существование равновесия в чистых стратегиях. Однако указанные изменения не только решают проблему отсутствия равновесия, но также меняют и характеристики рыночных равновесий и их свойства с точки зрения благосостояния. Например, когда фирмы могут предлагать целое меню контрактов, как мы здесь предполагали, в равновесиях Уилсона может иметь место перекрестное субсидирование, и, как показано в работе (Miyazaki, 1977), в этом случае равновесие Уилсона всегда существует, а равновесный исход с необходимостью условно Парето-оптимален.

В рассмотренной выше модели скрининга мы исходили из предпосылки о том, что неинформированные фирмы предлагают контракты информированным работникам. Можно также представить себе ситуацию, когда, наоборот, информированные работники предлагают меню контрактов фирмам. Например, каждый работник может указать уровень задания, при котором он хочет работать, а фирмы, исходя из этого, могут формировать предложения о заработной плате. Однако следует отметить, что такая альтернативная модель аналогична модели сигналинга из раздела 13.C и, как мы видели, имеет во многом отличные от модели скрининга результаты. Например, в модели сигналинга имеет место множественность равновесий, тогда как здесь существует не более одного равновесия. Это вызывает беспокойство. Безусловно, модели неизбежно упрощают реальный рыночный процесс, но если рыночные исходы действительно крайне чувствительны к подобным факторам, то наши модели обладают очень слабыми прогнозными свойствами.

Один из подходов к решению этой проблемы предлагается в работе (Maskin, Tirole, 1992). Авторы этой работы отмечают, что контракты, подобные тем, которые предлагают фирмы в модели скрининга, рассмотренной в этом разделе, в некотором смысле не являются полными. В частности, мы могли бы считать, что фирма предлагает работнику контракт, включающий ex post (после подписания) выбор из множества пар заработная плата — уровень задания (подробнее о контрактах такого типа мы поговорим в разделе 14.C). Аналогично, рассматривая в некотором смысле обратную модель, когда предложения формируются работниками, мы могли бы позволить работнику предлагать подобный контракт. В работе (Maskin, Tirole, 1992) показано, что при такой модификации меню контрактов (и ряде незначительных дополнительных предпосылок) множества секвенциальных равновесий в двух рассматриваемых моделях совпадают (в обоих случаях возможна множественность равновесий).

Приложение А. Усовершенствование равновесия на основе обоснованных ожиданий в играх с сигналами

В этом приложении мы опишем несколько широко используемых усовершенствований концепций совершенного байесовского и секвенциального равновесий в играх с сигналами, а затем применим их для модели с сигналами на рынке труда, рассмотренной в разделе 13.C. Превосходными источниками дополнительной информации по рассматриваемым здесь вопросам являются работы (Cho, Kreps, 1987) и (Fudenberg, Tirole, 1992).

Рассмотрим следующий класс игр с сигналами, в которых принимают участие I игроков и природа. Первый ход в игре делает природа, выбирающая «тип» игрока 1, $\theta \in \Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_N\}$. Вероятность того, что игрок имеет тип θ, равна $f(\theta)$, и это общеизвестно. Второй ход делает игрок 1, выбирающий некоторое действие a из множества A, после того как ему стал известен его тип θ. Затем, наблюдая выбор действия игроком 1 (но не его тип), все игроки $i = 2, \ldots, I$ одновременно выбирают действие s_i из множества S_i. Введем обозначение $S = S_2 \times \ldots \times S_I$. Полезность игрока 1, имеющего тип θ, от выбора действия a при выборе игроками $2, \ldots, I$ действий $s = (s_2, \ldots, s_I)$ равна $u_1(a, s, \theta)$, а выигрыш игрока $i \neq 1$ составляет $u_i(a, s, \theta)$. Тогда совершенное байесовское равновесие в соответствии с определением, приведенным в разделе 13.С, образует профиль стратегий $(a(\theta), s_2(a), \ldots, s_I(a))$ и функция ожиданий $\mu(\theta|a)$ игроков $2, \ldots, I$, приписывающая вероятность $\mu(\theta|a)$ тому, что игрок 1 имеет тип θ при условии, что он выбрал действие $a \in A$ (и этот выбор наблюдаем остальными игроками), такие что:

1) При данных стратегиях игроков $2, \ldots, I$ стратегия игрока 1 оптимальна.
2) Функция ожиданий $\mu(\theta|a)$ выводится из стратегии игрока 1 с помощью правила Байеса, где это возможно.
3) Стратегии игроков $2, \ldots, I$, специфицирующие действия, следующие за выбором действия $a \in A$ игроком 1, образуют равновесие по Нэшу в игре с одновременными ходами, в которой вероятность того, что игрок 1 имеет тип θ, равна $\mu(\theta|a)$ для всех $\theta \in \Theta$.

В контексте рассматриваемой здесь модели концепция совершенного байесовского равновесия эквивалентна концепции секвенциального равновесия.

Модель с образовательными сигналами из раздела 13.С попадает под категорию игр с сигналами, если мы явным образом не моделируем выбор работника между предложениями фирм, а просто включаем в функции выигрыша последствия оптимального выбора (работник выбирает из предложений фирм то, в котором наиболее высока заработная плата, если эта заработная плата положительна, и отказывается от предложений обеих фирм в противном случае). В этой модели $I = 3$, $\Theta = \{\theta_L, \theta_H\}$, множество $A = \{e : e \geq 0\}$ содержит все возможные уровни образования, которые могут быть выбраны работником, а множество $S_i = \{w : w \in \mathbb{R}\}$ содержит возможные уровни заработной платы, предлагаемые фирмой i.

Основанные на доминировании ограничения на ожидания

Наиболее простое усовершенствование концепции совершенного байесовского равновесия, базирующееся на обоснованных ожиданиях, исходит из идеи (которую мы обсуждали в разделе 9.D) о том, что обоснованные ожидания не могут приписывать положительную вероятность тому, что игрок предпримет действие, которое строго доминируется. В модели сигналинга эта проблема может возникнуть в том случае, когда игроки $2, \ldots, I$ (в модели сигналинга на рынке труда — это фирмы) приписывают вероятность $\mu(\theta|a) > 0$ тому, что игрок 1 (работник) имеет тип θ, если он выбрал действие a, даже если действие a — строго доминируемый выбор игрока 1, когда он имеет тип θ.

Формально будем говорить, что действие $a \in A$ является строго доминируемым выбором для игрока типа θ, если существует действие $a' \in A$, такое что:

$$\min_{s' \in S} u_1(a',\ s',\ \theta) > \max_{s \in S} u_1(a,\ s,\ \theta)\ ^{26}. \tag{13.AA.1}$$

Для каждого действия $a \in A$ определим следующее множество:

$$\Theta(a) = \{\theta : \text{не существует } a' \in A, \text{ удовлетворяющего (13.AA.1)}\}.$$

Это множество типов игрока 1, для которых выбор действия a не является строго доминируемым. Тогда мы можем сказать, что в совершенном байесовском равновесии ожидания обоснованны, если для всех $a \in A$ при $\Theta(a) \neq \varnothing$ выполнено:

$$\mu(\theta|a) > 0, \text{ только если } \theta \in \Theta(a),$$

и будем считать, что совершенное байесовское равновесие дает «разумный» результат только в том случае, когда ожидания игроков обоснованы[27].

К сожалению, в модели с образовательными сигналами на рынке труда, рассмотренной в разделе 13.С, такое усовершенствование не дает результата. Множество $\Theta(e)$ равно $\{\theta_L, \theta_H\}$ для всех уровней образования e, поскольку работник любого типа сочтет уровень образования e оптимальным, если предлагаемая в ответ на такой уровень образования заработная плата будет в достаточной степени превышать заработную плату при другом образовании. Следовательно, никакие ожидания не могут быть исключены, и все совершенные байесовские равновесия в модели с сигналами удовлетворяют данному критерию. Если же мы хотим сузить множество возможных ожиданий в данной модели, то нам нужно выйти за рамки усовершенствований, основанных только на концепции строгого доминирования[28].

Вспомните, как мы обосновывали в разделе 13.С исключение всех разделяющих равновесий кроме одного наилучшего. Мы говорили, что работник типа θ_L мог бы улучшить свое положение, если бы выбрал $e = 0$, а не уровень образования свыше $\tilde{e}$ (см. рис. 13.С.7) *при любых ожиданиях и результирующей равновесной заработной плате, которая может быть предложена при данных уровнях образования*. Никакие обоснованные ожидания не могут приписывать положительную вероятность тому, что работник типа θ_L выберет уровень образования $e > \tilde{e}$. Другими словами, можно

[26] Заметим, что стратегия $a(\theta)$ является строго доминируемой для игрока 1 тогда и только тогда, когда она подразумевает выбор строго доминируемого действия для некоторого типа θ.

[27] Такой подход эквивалентен тому, чтобы сначала исключить из игры для каждого типа θ доминируемые действия, а затем найти совершенное байесовское равновесие в полученной упрощенной игре.

[28] В принципе мы могли бы пойти и дальше в описании строго доминируемых стратегий для игрока 1, исключив также все строго доминируемые стратегии для игроков 2, ..., I, а затем проверив, не осталось ли еще каких-либо строго доминируемых действий для любого типа игрока 1, и т. д. Однако в модели с образовательными сигналами на рынке труда такой подход не поможет, поскольку фирмы не имеют строго доминируемых стратегий.

было бы сказать так: уровни образования $e > \tilde{e}$ являются доминируемым выбором для работника типа θ_L, но к выделенной курсивом фразе требуется добавить одну оговорку: рассматривается только *равновесная* реакция фирм, а не все возможные отклики. Таким образом, используя подход, подобный обратной индукции, мы можем сказать, что работник должен заботиться только о возможной равновесной реакции на выбранный им уровень образования.

Формализуем эту идею. Для любого непустого множества $\hat{\Theta} \subset \Theta$ обозначим через $S^*(\hat{\Theta},\ a) \subset S_2 \times \ldots \times S_I$ множество возможных равновесных откликов, которые могут возникнуть после наблюдения действия a при *некоторых* ожиданиях, удовлетворяющих свойству: $\mu(\theta|a) > 0$, только если $\theta \in \hat{\Theta}$. Множество $S^*(\hat{\Theta},\ a)$ содержит множество равновесных откликов игроков $2, \ldots, I$, которые могут быть ответом на выбор действия a при некоторых ожиданиях, приписывающих положительную вероятность только типам из множества $\hat{\Theta}$. При $\hat{\Theta} = \Theta$ (где Θ — множество всех потенциально возможных типов игрока 1) мы имеем все возможные ожидания[29]. Теперь мы можем сказать, что действие $a \in A$ строго доминируется для типа θ в сильном смысле, если существует действие a', такое что:

$$\min_{s' \in S^*(\Theta, a')} u_1(a',\ s',\ \theta) > \max_{s \in S^*(\Theta, a)} u_1(a,\ s,\ \theta). \qquad (13.AA.2)$$

Используя это более строгое понятие доминирования, мы можем определить множество, содержащее те типы игрока 1, для которых действие a не является строго доминируемым в соответствии с (13.АА.2):

$$\Theta^*(a) = \{\theta : \text{не существует } a' \in A, \text{ удовлетворяющего (13.AA.2)}\}.$$

Теперь мы можем сказать, что в совершенном байесовском равновесии ожидания обоснованы, если для всех $a \in A$, при $\Theta^*(a) \neq \varnothing$, $\mu(a, \theta) > 0$, только если $\theta \in \Theta^*(a)$.

Применение такого усовершенствования равновесия на основе обоснованных ожиданий уменьшает множество возможных исходов в модели с образовательными сигналами на рынке труда, иногда даже приводит к единственности исхода. В этой модели $S^*(\Theta, e) = [\theta_L, \theta_H]$ для всех уровней образования e, которые могут быть выбраны, поскольку при любых ожиданиях $\mu \in [0, 1]$ результирующая заработная плата в равновесии по Нэшу должна лежать в интервале от θ_L до θ_H. Как следствие, выбор уровня образования, превышающего $\tilde{e}$ на рис. 13.С.7, для игрока типа θ_L в соответствии с условием (13.АА.2) доминируется выбором уровня образования $e = 0$. Таким образом, в любом совершенном байесовском равновесии с обоснованными ожиданиями $\mu(\theta_H|e) = 1$ для всех $e > \tilde{e}$. Но если это так, то не останется ни одного

[29] Заметим, что когда реагировать должен только один игрок (т. е. когда $I = 2$), то множество $S^*(\Theta, a)$ в точности совпадает с множеством откликов, которые не являются строго доминируемыми для игрока 2 при условии, что он реагирует на действие a. Следует также отметить, что в этом случае стратегия $s_2(a)$ для игрока 2 является слабо доминируемой, если для любого $a \in A$ она включает некоторую стратегию $s \notin S^*(\Theta,\ a)$.

разделяющего равновесия, в котором $e^*(\theta_H) > \tilde{e}$, потому что, как мы отмечали в разделе 13.С, тогда высокопроизводительный работник может улучшить свое положение, отклонившись и выбрав уровень образования, чуть превышающий $\tilde{e}$. Более того, мы также можем исключить все объединяющие равновесия, в которых равновесный исход для высокопроизводительного работника хуже исхода $(\theta_H, \tilde{e})$, как в равновесии, представленном на рис. 13.АА.1, поскольку любое такое равновесие характеризуется необоснованными ожиданиями: если $\mu(\theta_H|e) = 1$ для всех $e > \tilde{e}$, то, отклонившись, работник типа θ_H может улучшить свое положение, выбрав уровень образования, чуть превышающий $\tilde{e}$, что позволит ему получить заработную плату θ_H. В действительности, когда высокопроизводительный работник предпочитает исход $(\theta_H, \tilde{e})$ исходу $(E[\theta], 0)$, применение такого подхода позволяет исключить все объединяющие равновесия, а наилучшее разделяющее равновесие будет единственным равновесием в этой модели.

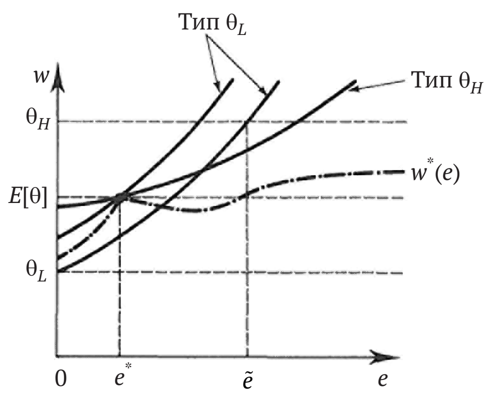


Рис. 13.АА.1. Исключение объединяющего равновесия при использовании теста на доминирование (13.АА.2)

Доминирование равновесием и интуитивный критерий

Теперь рассмотрим дальнейшее усиление концепции доминирования, называемое *доминированием равновесием*. Это приводит нас к ограничению на ожидания, известному как *интуитивный критерий* (Cho, Kreps, 1987), позволяющему всегда получать наилучшее разделяющее равновесие как единственное равновесие в модели сигналинга с образовательными сигналами на рынке труда, рассмотренной в разделе 13.С.

Идею, лежащую в основе такого усовершенствования, легко понять, рассмотрев объединяющее равновесие в модели с сигналами на рынке труда, продемонстрированное на рис. 13.АА.2, равновесие, которое мы не могли исключить, используя рассмотренное ранее ограничение на ожидания. Как видно из рисунка, чтобы поддержать уровень образования e^* в качестве исхода объединяющего равновесия, ожидания фирм должны удовлетворять условию $\mu(\theta_H|e) < 1$ для всех $e \in (e', e'')$. Действительно, если

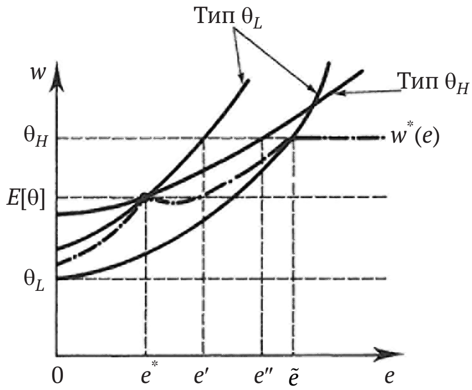


Рис. 13.AA.2. Исключение объединяющего равновесия при использовании теста на доминирование (13.AA.3)

$\mu(\theta_H|e) = 1$ при любом таком уровне образования, то предлагаемая заработная плата равна θ_H, и тогда работник типа θ_H предпочтет отклониться.

Предположим теперь, что фирма сталкивается с отклонением в сторону выбора уровня образования $\hat{e} \in (e', e'')$, когда ожидает, что будет выбран равновесный уровень образования e^*. Это можно обосновать следующим образом: «работник любого типа должен быть уверен в получении исхода $(w, e) = (E[\theta], e^*)$, выбирая уровень образования e^*. Но положение низкопроизводительного работника ухудшится при отклонении в сторону уровня образования e' *независимо* от того, каковы будут ожидания фирмы, после того как она увидит выбранный им уровень образования. В то же время, поступая подобным образом, высокопроизводительный работник может улучшить свое положение. Следовательно, если работник выбрал такой уровень образования, то он не должен быть низкопроизводительным». В данном случае выбор уровня образования e' низкопроизводительным работником доминируется любым *равновесным* выигрышем.

Формализуем эту идею в общем случае. Обозначим равновесный выигрыш игрока типа θ в совершенном байесовском равновесии $(a^*(\theta), s^*(a), \mu)$ через $u_1^*(\theta) = u_1(a^*(\theta), s^*(a^*(\theta)), \theta)$. Будем говорить, что действие *a доминируется равновесием* для игрока типа θ в совершенном байесовском равновесии $(a^*(\theta), s^*(a), \mu)$, если

$$u_1^*(\theta) > \max_{s \in S^*(\Theta, a)} u_1(a, s, \theta). \qquad (13.\text{AA}.3)$$

Используя данную концепцию доминирования, определим для каждого $a \in A$ следующее множество: $\Theta^{**}(a) = \{\theta : \text{условие (13.AA.3) не выполняется}\}$. Тогда мы можем сказать, что в совершенном байесовском равновесии ожидания обоснованы, если для всех действий a при $\Theta^{**}(a) \neq \varnothing$ $\mu(\theta|a) > 0$, только если $\theta \in \Theta^{**}(a)$, и мы можем ограничиться рассмотрением совершенного байесовского равновесия только с обоснованными ожиданиями.

Следует заметить, что любое действие a, доминируемое для типа θ в соответствии с (13.АА.2), для этого типа также должно доминироваться равновесием, поскольку $u_1^*(\theta) = u_1^*(a^*(\theta),\ s^*(a^*(\theta)),\ \theta) > \min_{s' \in S^*(\Theta, a')} u_1(a',\ s',\ \theta)$ по определению совершенного байесовского равновесия. Таким образом, применение концепции доминирования равновесием должно исключать все совершенные байесовские равновесия, которые исключались рассмотренными выше процедурами, и даже, возможно, сверх того.

Рассмотрим использование этого усовершенствования на примере модели с образовательными сигналами на рынке труда из раздела 13.C. Поскольку данное ограничение на ожидания является более сильным, чем (13.АА.2), то исключаются все равновесия, кроме наилучшего разделяющего равновесия. Однако, в отличие от предыдущих усовершенствований на основе доминирования, ограничение на ожидания, основанные на равновесии, также приводит к исключению и *всех* объединяющих равновесий. Например, в объединяющем равновесии, изображенном на рис. 13.АА.2, любой уровень образования $\hat{e} \in (e',\ e'')$ для низкопроизводительных работников доминируется равновесием. Более того, поскольку ожидания фирм при этом выборе уровня образования должны быть таковы, что работник с вероятностью 1 должен иметь тип θ_H, то высокопроизводительные работники предпочтут отклониться и выбрать этот уровень образования. Таким образом, мы получаем единственный возможный равновесный исход в этой игре: наилучшее разделяющее равновесие.

В моделях с сигналами с двумя типами игроков такие основанные на доминировании ограничения на ожидания эквивалентны *интуитивному критерию* Хо — Крепса (Cho, Kreps, 1987). Формально говорят, что совершенное байесовское равновесие не удовлетворяет интуитивному критерию, если существует тип θ и действие $a \in A$, такие что

$$\min_{s \in S^*(\Theta^{**}(a), a)} u_1(a,\ s,\ \theta) > u_1^*(\theta). \tag{13.АА.4}$$

Таким образом, используя интуитивный критерий, мы исключаем совершенные байесовские равновесия, если существует некоторый тип θ, который может отклониться так, чтобы *гарантировать* себе получение выигрыша, превышающего его равновесный выигрыш, при условии что игроки 2, ..., I не приписывают положительную вероятность отклонению, выбираемому любым типом θ, для которого это действие доминируется равновесием. Мы можем трактовать интуитивный критерий так: для того чтобы исключить совершенные байесовские равновесия, нам нужно найти такой тип игрока 1, который хотел бы отклониться, даже если он не знает точно, каковы будут в результате ожидания игроков 2, ..., I, а уверен только в том, что он не принадлежит к тому типу, для которого такое отклонение является действием, доминируемым равновесием. Вообще говоря, интуитивный критерий представляет собой более консервативную процедуру, чем просто требование обоснованности ожиданий в совершенном байесовском равновесии с использованием множества $\Theta^{**}(a)$, поскольку любое совершенное байесовское равновесие с обоснованными ожиданиями с использованием множества $\Theta^{**}(a)$ удовлетворяет интуитивному критерию, но, как показывает пример 13.AA.1, некоторое совершенное байесовское равновесие может удовлетворять интуитивному критерию, но не иметь обоснованных ожиданий. Однако в случае, когда игрок 1 может быть только двух типов, эти две концепции эквивалентны.

Пример 13.AA.1. Пусть игрок 1 может быть трех типов, $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$, и в некотором совершенном байесовском равновесии неравновесное действие $\hat{a}$ доминируется равновесием только для типа θ_1, т. е. $\Theta^{**}(\hat{a}) = \{\theta_2, \theta_3\}$. Предположим также, что тип θ_2 строго предпочитает отклониться, выбрав действие $\hat{a}$, тогда и только тогда, когда ожидания относительно типов θ_2 и θ_3 таковы, что $\mu(\theta_2 | \hat{a}) \geq 1/4$, тогда как тип θ_3 строго предпочитает действие $\hat{a}$ тогда и только тогда, когда $\mu(\theta_2 | \hat{a}) \leq 3/4$. Такая ситуация не противоречит интуитивному критерию, поскольку условие (13.AA.4) не выполнено ни для типа θ_2, ни для типа θ_3. Однако в любом совершенном байесовском равновесии с обоснованными ожиданиями с использованием множества $\Theta^{**}(a)$ один из этих двух типов будет отклоняться и выбирать $\hat{a}$. Следовательно, такое совершенное байесовское равновесие не может характеризоваться обоснованными ожиданиями в указанном смысле. В случае когда существует только два типа игрока 1, скажем θ_1 и θ_2, это различие пропадает, потому что какой бы тип ни был исключен из рассмотрения равновесным доминированием, т. е. $\Theta^{*}(a) = \{\theta_i\}$, где $i = 1$ или 2, игроки 2, …, I могут иметь единственное возможное ожидание. ■

Несмотря на то что применение как доминирования равновесием, так и интуитивного критерия приводит к единственности равновесия в модели с образовательными сигналами на рынке труда в случае двух типов работников, в случае трех и более типов работников эти концепции не позволяют получить подобного результата (см. упражнение 13.AA.1). Однако более сильные ограничения на ожидания, такие как концепции *предугаданности* и *универсальной предугаданности* (Banks, Sobel, 1987), похожая концепция Хо — Крепса D1 (Cho, Kreps, 1987) и концепция *стабильности* (Merten, 1986), действительно позволяют в таких играх со многими типами работников получить в качестве единственного равновесия наилучшее разделяющее равновесие. Подробнее об этом можно узнать из работ (Cho, Kreps, 1987; Fudenberg, Tirole, 1992).

Литература

Akerlof, G. (1970). The market for lemons: Quality uncertainty and the market mechanism. *Quarterly Journal of Economics* **89**: 488–500.

Banks, J., and J. Sobel (1987). Equilibrium selection in signaling games. *Econometrica* **55**: 647–662.

Cho, I-K., and D.M. Kreps (1987). Signaling games and stable equilibria. *Quarterly Journal of Economics* **102**: 179–221.

Dasgupta, P., and E. Maskin (1986). The existence of equilibrium in discontinuous economic games. *Review of Economic Studies* **46**: 1–41.

Fudenberg, D., and J. Tirole (1992). *Game Theory*. Cambridge, Mass.: MIT Press.
Hellwig, M. (1986). Some recent developments in the theory of competition in markets with adverse selection. (University of Bonn, mimeographed).
Holmstrom, B., and R.B. Myerson (1983). Efficient and durable decision rules with incomplete information. *Econometrica* **51**: 1799–1819.
Kohlberg, E., and J.-F. Mertens. (1986). On the strategic stability of equilibria. *Econometrica* **54**: 1003–1038.
Maskin, E., and J. Tirole (1992). The principal-agent relationship with informed principal, II: Common values. *Econometrica* **60**: 1–42.
Miyazaki, H. (1977). The rat race and internal labor markets. *Bell Journal of Economics* **8**: 394–418.
Riley, J. (1979). Informational equilibrium. *Econometrica* **47**: 331–359.
Rothschild, M., and J.E. Stiglitz. (1976). Equilibrium in competitive insurance markets: An essay in the economics of imperfect information. *Quarterly Journal of Economics* **80**: 629–649.
Spence, A. M. (1973). Job market signaling. *Quarterly Journal of Economics* **87**: 355–374.
Spence, A. M. (1974). *Market Signaling*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.
Wilson, C. (1977). A model of insurance markets with incomplete information. *Journal of Economic Theory* **16**: 167–207.
Wilson, C. (1980). The nature of equilibrium in markets with adverse selection. *Bell Journal of Economics* **11**: 108–130.

Упражнения

13.B.1^{A}. Рассмотрите три функции, зависящие от $\hat{\theta}$: $r(\hat{\theta})$, $E[\theta \mid \theta \le \hat{\theta}]$ и $\hat{\theta}$. Изобразите графики этих трех функций на интервале $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$, предполагая, что первые две функции непрерывны по $\hat{\theta}$, но во всем остальном довольно произвольны. Укажите на рисунке конкурентные равновесия в модели неблагоприятного отбора, рассмотренной в разделе 13.B. Будет ли распределение труда Парето-оптимальным? Изобразите каждую из ситуаций, проиллюстрированных на рис. 13.B.1–13.B.3.

13.B.2^{B}. Пусть функция $r(\cdot)$ является непрерывной и строго возрастающей. Предположим также, что существует такое $\hat{\theta} \in (\underline{\theta}, \bar{\theta})$, что $r(\theta) > \theta$ для всех $\theta > \hat{\theta}$ и $r(\theta) < \theta$ для всех $\theta < \hat{\theta}$. Пусть $f(\theta)$ — функция плотности распределения работников типа θ, причем $f(\theta) > 0$ для всех $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$. Покажите, что конкурентное равновесие при ненаблюдаемых типах работников дает неэффективный по Парето исход.

13.B.3^{B}. Рассмотрите модель *благоприятного отбора* — вариант модели, рассмотренной в разделе 13.B. Пусть $r(\cdot)$ — непрерывная строго *убывающая* функция от θ. Пусть $f(\theta)$ — функция плотности распределения работников типа θ, причем $f(\theta) > 0$ для всех $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$.

а) Покажите, что при любой данной заработной плате будут соглашаться работать *более способные* работники.

b) Покажите, что если $r(\theta) > \theta$ для всех θ, то результирующее конкурентное равновесие Парето-эффективно.

c) Предположим теперь, что существует такое $\hat{\theta}$, что $r(\theta) < \theta$ для всех $\theta > \hat{\theta}$ и $r(\theta) > \theta$ для всех $\theta < \hat{\theta}$. Покажите, что любое конкурентное равновесие с положительным уровнем занятости будет с необходимостью характеризоваться *слишком высоким* уровнем занятости по сравнению с Парето-оптимумом.

13.B.4$^{\text{B}}$. Пусть два индивида, 1 и 2, рассматривают вопрос о покупке/продаже по цене p некоторого актива, который они оба используют только как средство сохранения богатства. Г-н 1 в настоящий момент является собственником данного актива. Каждый индивид i имеет (частную) оценку стоимости актива y_i. Будем считать, что индивиды заботятся только о том, какова будет стоимость актива через год. Предположим также, что торговля активом по цене p имеет место только в том случае, если обе стороны считают, что в результате торговли их положение (строго) улучшится. Докажите, что вероятность того, что сделка состоится, равна нулю. (*Подсказка*: рассмотрите следующую игру: два индивида одновременно говорят «торговать» или «не торговать» и торговля по цене p имеет место только в том случае, если оба индивида скажут «торговать».)

13.B.5$^{\text{B}}$. Вернемся к рассмотрению случая $r(\theta) = r$ для всех θ, но теперь предположим, что, когда заработная плата такова, что ни один из работников не соглашается работать в фирме, фирмы считают, что любой работник, который мог бы согласиться на работу, имеет самый низкий уровень производительности, т. е. $E[\theta|\Theta = \varnothing] = \underline{\theta}$. И по-прежнему будем считать, что если работнику безразлично, работать в фирме или оставаться дома, то он выбирает занятость в фирме.

a) Покажите, что при $E[\theta] \geq r > \underline{\theta}$ существует два конкурентных равновесия: одно с заработной платой $w^* = E[\theta]$ и уровнем занятости $\Theta^* = [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ и второе с $w^* = \underline{\theta}$ и $\Theta^* = \varnothing$. Покажите также, что при $\underline{\theta} \geq r$ существует единственное конкурентное равновесие с заработной платой $w^* = E[\theta]$ и уровнем занятости $\Theta^* = [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$, а при $r > E[\theta]$ — единственное конкурентное равновесие с $w^* = \underline{\theta}$ и $\Theta^* = \varnothing$.

b) Покажите, что при $E[\theta] > r$ существует два равновесия, и равновесие с полной занятостью доминирует по Парето равновесие, в котором уровень занятости равен нулю.

c) Покажите, что при $E[\theta] \geq r$ единственное совершенное в подыграх равновесие по Нэшу в теоретико-игровой модели, где две фирмы одновременно формируют предложения о заработной плате, является конкурентным равновесием, когда это равновесие единственно, и конкурентным равновесием с наибольшей заработной платой и полной занятостью, когда конкурентное равновесие не единственно и $E[\theta] > r$. Что будет в случае $E[\theta] = r$? А в случае $E[\theta] < r$?

d) Покажите, что конкурентное равновесие с наибольшей заработной платой является условно Парето-оптимальным.

13.B.6$^{\mathbf{C}}$**.** (Основано на работе (Wilson, 1980)). Рассмотрим следующую модификацию модели неблагоприятного отбора из раздела 13.B. Пусть имеется N фирм, каждая из которых хотела бы нанять не более одного работника. Все N фирм различаются по своей производительности: в фирме типа γ работник типа θ производит $\gamma\theta$ единиц выпуска, а распределение параметра γ на интервале $[0, \infty]$ описывается функцией плотности распределения $g(\cdot)$, причем $g(\gamma) > 0$ для всех $\gamma \in [0, \infty]$.

a) Обозначим через $z(w, \mu)$ агрегированный спрос на труд при заработной плате w и средней производительности работников, соглашающихся на работу в фирме, равной μ. Выпишите вид этой функции в зависимости от функции плотности распределения $g(\cdot)$.

b) Пусть $\mu(w) = E[\theta | r(\theta) \le w]$, и обозначим через $z^*(w) = z(w, \mu(w))$ *функцию агрегированного спроса на труд*. Покажите, что функция $z^*(w)$ строго возрастает по w при заработной плате $\bar{w}$ тогда и только тогда, когда эластичность μ по w больше 1 при заработной плате $\bar{w}$ (считайте, что все функции дифференцируемы).

c) Обозначим через $s(w) = \int_{\underline{\theta}}^{r^{-1}(w)} f(\theta)d\theta$ *функцию агрегированного предложения труда* и определим заработную плату в конкурентном равновесии, w^*, как такую заработную плату, что $z^*(w^*) = s(w^*)$. Покажите, что если имеет место множественность конкурентных равновесий, то одно из них, с наибольшей заработной платой, доминирует по Парето над всеми остальными.

d) Рассмотрите теоретико-игровую модель, в которой две фирмы одновременно формируют предложения о заработной плате. Обозначим через w^* наибольшую заработную плату в конкурентном равновесии. Покажите, что (1) только равновесие с наибольшей заработной платой может являться совершенным в подыграх равновесием по Нэшу, и (2) конкурентное равновесие с наибольшей заработной платой является совершенным в подыграх равновесием по Нэшу тогда и только тогда, когда $z^*(w) \le z^*(w^*)$ для всех $w > w^*$.

13.B.7$^{\mathbf{B}}$**.** Рассмотрите конкурентное равновесие со ставкой заработной платы w^*. Считайте, что фирмы не могут наблюдать тип работника. Покажите, что государственное вмешательство в функционирование рынка с целью Парето-улучшения $(\tilde{w}_e, \tilde{w}_u)$, снижающее уровень занятости, существует тогда и только тогда, когда $(w_e, w_u) = (w^*, \hat{w}_u)$, где $\hat{w}_u > 0$. Аналогично покажите, что вмешательство в функционирование рынка с целью Парето-улучшения приводит к росту занятости тогда и только тогда, когда $(w_e,\ w_u) = (\hat{w}_e,\ 0)$, где $\hat{w}_e > w^*$. Можно ли, используя эти факты, привести простое доказательство утверждения 13.B.2?

13.B.8$^{\mathbf{B}}$**.** Рассмотрите следующую модификацию модели неблагоприятного отбора, изложенной в разделе 13.B. Предположим, что, когда работник занят дома, он использует продукт x. Пусть объем потребления этого продукта работником зависит от его типа и эта зависимость описывается возрастающей функцией $x(\theta)$. Покажите, что если центральная власть может наблюдать объемы покупок блага x, но не может наблюдать типы работников, то существует такое вмешательство в работу рынка, которое приводит к Парето-улучшению, даже если рынок находится в состоянии конкурентного равновесия с наибольшей заработной платой.

13.B.9$^{\mathbf{B}}$**.** Рассмотрите модель *благоприятного отбора* с двумя типами работников, θ_H и θ_L, где $\infty > \theta_H > \theta_L > 0$, считая, что функция $r(\cdot)$ строго убывает. Пусть $\lambda = \text{Prob}(\theta = \theta_H) \in (0, 1)$. Предположим также, что $r(\theta_H) < \theta_H$ и $r(\theta_L) > \theta_L$. Покажите, что конкурентное равновесие с наибольшей заработной платой может не быть условно Парето-оптимальным. (*Подсказка*: рассмотрите введение небольшого пособия по безработице в случае $E[\theta] = r(\theta_L)$. Можно ли воспользоваться результатом упражнения 13.B.7, для того чтобы получить критерий условной Парето-оптимальности конкурентного равновесия с полной занятостью?)

13.B.10$^{\mathbf{B}}$**.** Покажите, что утверждение 13.B.2 также выполнено при $r(\theta) > \theta$ для некоторого θ.

13.C.1$^{\mathbf{B}}$**.** Рассмотрите игру, в которой сначала природа выбирает тип работника из непрерывного распределения типов на интервале $[\underline{\theta},\ \bar{\theta}]$, а затем работник, зная свой тип, принимает решение проходить или не проходить тест, однозначно выявляющий уровень его способностей (прохождение теста не связано с издержками). Наконец, наблюдая решение работника относительно тестирования и его результат, если работник решил его пройти, две фирмы решают, какую заработную плату предложить работнику. Докажите, что в любом совершенном в подыграх равновесии по Нэшу в данной игре все типы работников проходят тест, а фирмы предлагают заработную плату не выше $\underline{\theta}$ любому работнику, решившему не проходить тестирование.

13.C.2$^{\mathbf{C}}$**.** Рассмотрим модель с сигналами с двумя типами работников и $r(\theta_L) = r(\theta_H) = 0$. Пусть производительность работника типа θ равна $\theta(1 + \mu e)$, где $\mu > 0$. Укажите разделяющие и объединяющие совершенные байесовские равновесия и сравните их с конкурентным исходом при совершенной информации.

13.C.3$^{\mathbf{B}}$**.** В тексте.

13.C.4$^{\mathbf{B}}$**.** Рассмотрите модель с сигналами, изложенную в разделе 13.C. Предположим теперь, что типы работников распределены на интервале

$[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ в соответствии с функцией плотности распределения $f(\theta)$, строго положительной в любой точке данного интервала. Пусть функция издержек работника типа θ имеет вид $c(e, \theta) = (e^2/\theta)$. Найдите (единственное) совершенное байесовское равновесие.

13.C.5[B]. Рассмотрите экономику с одной фирмой и одним потребителем. Пусть продукция фирмы может быть низкого или высокого качества, причем вероятность того, что продукция высокого качества, равна λ. Нейтральный к риску потребитель не может наблюдать качество продукта, до того как его купит. Потребитель оценивает продукт высокого качества в v_H, а низкого качества — в v_L. Издержки производства продукции высокого качества (H) и низкого качества (L) составляют c_H и c_L соответственно. Потребитель готов приобрести не более одной единицы продукта. Цена продукции фирмы регулируется и установлена на уровне p. Будем считать также, что $v_H > p > v_L > c_H > c_L$.

a) При данном уровне цены p при каких условиях потребитель будет покупать продукцию фирмы?

b) Предположим, что, прежде чем потребитель примет решение покупать или не покупать продукцию фирмы, фирма (которой известно качество продукции) может провести рекламную кампанию. Реклама непосредственно не раскрывает информацию о качестве продукции, но потребители могут наблюдать совокупные расходы фирмы на рекламу, которые мы обозначим через A. Существует ли в этой модели разделяющее совершенное байесовское равновесие, т. е. равновесие, в котором потребитель рационально ожидает, что расходы фирмы на рекламу товаров разного качества будут различны?

13.C.6[C]. Рассмотрите рынок займов для финансирования инвестиционных проектов. Все инвестиционные проекты требуют вложений в размере 1 долл. Проекты бывают двух типов: хорошие и плохие. Хороший проект с вероятностью p_G приносит прибыль $\Pi > 0$, а с вероятностью $(1 - p_G)$ — прибыль, равную нулю. Для плохого проекта соответствующие вероятности составляют p_B и $(1 - p_B)$ соответственно, причем $p_G > p_B$. Пусть доля хороших проектов равна $\lambda \in (0, 1)$. Предприниматели занимают в банке сумму для первоначального взноса (будем считать, что они занимают всю сумму, которую требуется вложить в проект). В банковском контракте на заем специфицируется величина R, которая должна быть возвращена банку. Предприниматели знают тип инвестиционного проекта, под который они занимают средства, но банки этой информации не имеют. В случае если проект принес нулевую прибыль, предприниматель отказывается возвращать деньги и банк ничего не получает. Банки совершенно конкурентны и нейтральны к риску. Обозначим безрисковую ставку процента (ставку процента, по которой сами банки занимают средства) через r и будем считать, что выполнено следующее условие:

$$p_G\Pi - (1 + r) > 0 > p_B\Pi - (1 + r).$$

a) Найдите равновесный уровень R и множество проектов, которые будут профинансированы. Как эти величины зависят от p_G, p_B, λ, Π и r?

b) Предположим теперь, что предприниматель может предложить вложить часть своих средств в финансирование инвестиционного проекта, и обозначим долю его вложений через $x \in [0, 1]$. В силу ограничения ликвидности издержки, связанные с этими вложениями, для предпринимателя выше, чем для банка: для предпринимателя они стоят $(1 + \rho)x$, где $\rho > r$.

1) Каков ожидаемый чистый выигрыш от проекта для предпринимателя, как функция от типа его проекта, величины выплаты по кредиту R и величины собственного вклада x?

2) Опишите наилучшее (с точки зрения благосостояния) разделяющее совершенное байесовское равновесие для игры, в которой сначала предприниматель предлагает величину собственного вклада x, затем банки реагируют, предлагая кредитный контракт, специфицирующий R, и, наконец, предприниматель либо соглашается на предложенный контракт, либо отказывается от реализации своего инвестиционного проекта. Как величина собственного вклада x для предпринимателей с хорошими проектами изменяется при малых изменениях p_G, p_B, λ, Π и r?

3) Сравните равновесие пункта b(2) с равновесием без рыночных сигналов из пункта (a).

13.D.1$^{\text{B}}$. Рассмотрите вариант модели скрининга с продуктивными заданиями. Считайте, что работник типа θ производит $\theta(1 + \mu t)$ единиц выпуска при уровне задания t, где $\mu > 0$. Опишите совершенное в подыграх равновесие по Нэшу в этой модели.

13.D.2$^{\text{B}}$. Рассмотрите следующую модель рынка страховых услуг. Индивиды бывают двух типов: с высоким и низким риском (наступления страхового случая). Каждый индивид имеет первоначальное богатство W, но в результате несчастного случая (например, пожара) может потерять часть своего богатства, равную L. Вероятность наступления несчастного случая для индивидов с низким риском равна p_L, а для индивидов с высоким риском — p_H, причем $p_H > p_L$. Предпочтения индивидов обоих типов описываются функцией ожидаемой полезности с бернуллевской функцией $u(w)$, где $u'(w) > 0$ и $u''(w) < 0$ для всех уровней богатства w. Пусть в экономике имеются две нейтральные к риску страховые компании. Страховой полис состоит из страхового взноса M (суммы, которую страхователь платит страховой компании) и страховой выплаты R (суммы, которую страховая компания выплачивает застрахованному индивиду при наступлении несчастного случая).

a) Предположим, что индивидам запрещено покупать более одного страхового полиса. Покажите, что полис можно рассматривать как набор, специфицирующий уровни богатства застрахованного индивида в двух состояниях мира: «нет потерь» и «есть потери».

b) Пусть страховые компании одновременно предлагают меню страховых полисов, как в модели из раздела 13.D. Каждая страховая компания может предложить лишь конечное число полисов. Каково совершенное в подыграх равновесие по Нэшу в этой модели? Всегда ли равновесие существует?

13.D.3$^{\mathbf{C}}$**.** Рассмотрите следующую модификацию модели, описанной в упражнении 13.D.1. Пусть все работники сталкиваются с некоторым фиксированным уровнем задания T. Денежный эквивалент издержек работы в фирме при таком уровне задания равен $c > 0$ и не зависит от типа работника. Предположим, что теперь фирма может наблюдать и проверять, какой фактический выпуск произведен работником, и поэтому по контракту заработная плата зависит от наблюдаемого *ex post* уровня выпуска.

a) Каков исход совершенного в подыграх равновесия по Нэшу в этой модели?

b) Предположим теперь, что выпуск является случайной величиной: он может быть либо «хорошим» (q_G), либо «плохим» (q_B). Вероятность производства хорошего выпуска высокопроизводительными работниками равна p_H, а низкопроизводительными — p_L ($p_H > p_L$). Предположим также, что работники нейтральны к риску (т. е. имеют бернуллевскую функцию полезности, определенную на уровнях богатства, вида $u(w) = w$). Каков будет исход совершенного в подыграх равновесия по Нэшу?

c) Как изменится ответ на пункт (b), если работники строго не склонны к риску, т. е. $u''(w) < 0$ для всех w?

13.D.4$^{\mathbf{B}}$**.** Рассмотрите модель скрининга, изложенную в разделе 13.D, но при следующих предположениях: (1) имеется бесконечно много фирм, которые потенциально могут войти на рынок; (2) каждая фирма может предложить не более одного контракта. (Следствием предположения (1) является то, что в любом совершенном в подыграх равновесии по Нэшу ни одна из фирм не имеет возможности прибыльного входа на рынок.) Охарактеризуйте равновесия в этом случае.

13.AA.1$^{\mathbf{C}}$**.** Рассмотрите развитие модели с сигналами, изложенной в разделе 13.C, на случай трех типов работников. Предположим, что для работников всех трех типов $r(\theta) = 0$. Приведите пример ситуации, когда более одного совершенного байесовского равновесия удовлетворяет интуитивному критерию.

Глава 14. Модель принципал — агент

14.A. Введение

В главе 13 мы рассмотрели ситуации, в которых индивиды при подписании контракта обладают разной информацией. В этой главе мы обратимся к рассмотрению вопроса о том, какие проблемы создает асимметрия информации *после* того, как контракт подписан.

Даже при отсутствии асимметрии информации в момент подписания контракта стороны, участвующие в его подписании, зачастую предвидят возможность ее появления после того, как контракт будет подписан. Например, после того как владелец фирмы наймет менеджера для управления бизнесом, он может не иметь возможности наблюдать, насколько добросовестно менеджер выполняет свою работу. С другой стороны, менеджер, как правило, более информирован, чем владелец фирмы, об имеющихся у фирмы возможностях.

Предвидя подобную ситуацию, стороны, заключающие между собой контракт, стараются оформить его таким образом, чтобы смягчить возможные последствия асимметрии информации. Такие проблемы особенно характерны для ситуаций, в которых один индивид нанимает другого для выполнения некоторого задания в качестве своего «агента». По этой причине задача построения таких контрактов известна как *задача принципал — агент*.

Традиционно в экономической литературе проводится различие между двумя типами проблем, возникающих в этом случае: *скрытые действия* и *скрытая информация*. Случай со скрытыми действиями, также известный как *проблема морального риска*, характеризуется неспособностью владельца фирмы наблюдать, насколько упорно работает менеджер. Примером скрытой информации является ситуация, когда менеджер обладает более полной информацией о возможностях фирмы[1].

[1] Трактовку термина «*моральный риск*» в экономической литературе нельзя считать полностью устоявшейся. Сам термин берет начало в работах по страховой тематике, в которых основное внимание уделено двум типам несовершенства информации: «моральному риску», возникающему в том случае, когда страховая компания не может наблюдать, прилагает ли застрахованный агент какие-либо усилия, чтобы избежать наступления страхового случая, и «неблагоприятному отбору» (см. раздел 13.B), возникающему в том случае, когда застрахованный индивид в момент покупки страхового полиса располагает большей информацией, чем страховая компания, о вероятности наступления несчастного случая. В экономической

Хотя многие экономические ситуации (и некоторые из рассмотренных в литературе) содержат элементы обеих задач, мы все же считаем, что сначала каждую из них нужно изучить в отдельности. В разделе 14.B описывается и исследуется модель со скрытыми действиями, в разделе 14.C — со скрытой информацией. Затем в разделе 14.D мы кратко обсуждаем гибридные модели, содержащие черты обеих задач. Как мы увидим, наличие постконтрактной асимметрии информации зачастую приводит к потерям благосостояния участвующих сторон по сравнению с тем, что они могли бы получить при отсутствии несовершенства информации.

Важно подчеркнуть, что в контексте задачи принципал — агент может быть описан целый ряд экономических взаимодействий. Взаимоотношения начальник — подчиненный — лишь один из таких примеров; с помощью данной модели можно описать взаимодействие страховой компании и застрахованного в ней индивида (когда страховая компания не может наблюдать, насколько застрахованный индивид заботится о том, чтобы предотвратить наступление страхового случая), или производителя и дистрибьютора (когда производитель не имеет информации о рыночных условиях, с которыми сталкивается дистрибьютор), или фирмы и ее работника (когда фирма обладает большей информацией, чем работник, о реальном спросе на продукцию фирмы и, следовательно, о цене продукта, создаваемого работником), или банка и заемщиков (когда банку довольно сложно наблюдать целевое использование полученных заемщиком средств). Как можно ожидать исходя из разнообразия приведенных примеров, модель принципал — агент находит широкое применение в прикладных экономических задачах. Но при изучении модели мы сосредоточимся на взаимодействии владельца фирмы и менеджера.

Анализ, изложенный в данной главе, особенно в разделе 14.C, тесно связан с материалом глав 13 и 23. Во-первых, техника анализа, разработанная в разделе 14.C, может быть применена для анализа моделей скрининга, в которых, в отличие от случая, рассмотренного в разделе 13.D, скрининг информированных индивидов осуществляет только одна неинформированная сторона, т. е. в случае *монополистического скрининга* (анализ *модели монополистического скрининга* приведен мелким шрифтом в конце раздела 14.C). Во-вторых, в действительности модель принципал — агент представляет собой специальный случай «дизайна механизмов» — темы, которой посвящена глава 23. Таким образом, материал этой главы можно рассматривать как отправную точку для изучения вопросов более общего характера, и поэтому понимание фундаментальных принципов анализа задачи принципал — агент, в частности материала раздела 14.C, будет крайне полезно при изучении главы 23.

Дополнительную информацию по рассматриваемой проблематике можно найти в работе (Hart, Holmstrom, 1987).

литературе можно встретить случаи, когда моральным риском называют разные варианты задачи принципал — агент: и со скрытыми действиями, и со скрытой информацией (см. например, (Hart, Holmstrom, 1987)). Однако в нашем изложении мы используем этот термин в его изначальном смысле.

14.B. Скрытые действия (моральный риск)

Предположим, что владелец фирмы (*принципал*) хотел бы нанять менеджера (*агента*) на некоторый разовый проект. Прибыль от проекта, по крайней мере отчасти, зависит от действий менеджера. Если бы эти действия были наблюдаемы, то проблема контрактных взаимоотношений между владельцем фирмы и менеджером решалась бы довольно просто: в контракте следовало бы просто специфицировать, какие именно действия должен предпринять менеджер и какова должна быть компенсация (заработная плата) со стороны владельца фирмы[2]. Однако в случае, когда действия менеджера ненаблюдаемы, подобный контракт более не может считаться эффективным, поскольку просто не существует способа проверки выполнения менеджером контрактных обязательств. В этой ситуации владелец фирмы должен предложить менеджеру такую схему компенсации, чтобы *неявно* простимулировать его предпринимать «правильные» шаги (т. е. такие, которые были бы прописаны в контракте, если бы действия менеджера были наблюдаемы). И в этом разделе мы рассмотрим задачу построения такого контракта.

Итак, обозначим через π (наблюдаемую) величину прибыли от проекта, а через e — действие, выбранное менеджером. Множество всех возможных действий обозначим через E. Мы будем интерпретировать e как меру уровня усилий, прилагаемых менеджером. В простейшем случае, широко изученном в экономической литературе, e представляет собой одномерный показатель того, насколько «упорно» работает менеджер, и поэтому $E \subset \mathbb{R}$. В более общем случае, однако, усилия менеджера могут описываться многомерной величиной, включающей, например, такие показатели, как то, насколько он старается снизить издержки, сколько времени он тратит на привлечение покупателей и т. д. И тогда e представляет собой вектор, каждый элемент которого характеризует усилия менеджера в некотором конкретном направлении. В этом случае $E \subset \mathbb{R}^M$ для некоторого M[3]. В дальнейшем в этой главе мы будем трактовать e как *выбор уровня усилий*.

Для того чтобы ненаблюдаемость усилий менеджера могла иметь какие-либо последствия, ситуация должна быть такова, чтобы, наблюдая уровень прибыли π, нельзя было сделать однозначного вывода об уровне усилий менеджера. Поэтому для того чтобы задача была интереснее (и реалистичнее), мы будем считать, что хотя уровень усилий e и оказывает влияние на прибыль от проекта, но тем не менее имеются и другие факторы,

[2] Заметим, что такой контракт подразумевает, что действия менеджера наблюдаемы не только для собственника фирмы, но также и для любого суда, к помощи которого в случае необходимости могли бы прибегнуть стороны, требуя выполнения условий контракта.

[3] В действительности возможны интерпретации и более общего характера. Например, e может включать и решения менеджера, не связанные с приложением усилий, например, такие, как принятие решения о том, какой именно фактор производства покупать или какие именно стратегии привлечения покупателей использовать. Мы придерживаемся интерпретации величины e как уровня усилий, главным образом, поскольку это очень удобно в плане интуитивного понимания ситуации.

ее определяющие. Пусть прибыль фирмы может принимать значения из интервала $\left[\underline{\pi}, \overline{\pi}\right]$, причем она случайным образом связана с уровнем усилий e в соответствии с функцией условной плотности $f(\pi \mid e)$, где $f(\pi \mid e) > 0$ для всех $e \in E$ и всех $\pi \in \left[\underline{\pi}, \overline{\pi}\right]$. Таким образом, любая допустимая реализация π возможна при любом данном уровне усилий менеджера.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением случая, когда менеджер может прилагать только два уровня усилий: e_H и e_L (см. обсуждение случая множественности возможных действий менеджера в приложении А), где e_H — «высокий» уровень усилий, приводящий к более высокому уровню прибыли, чем e_L. Это означает, что существует конфликт между интересами собственника фирмы и менеджера.

Формально будем считать, что имеет место стохастическое доминирование первого порядка распределения прибыли π в зависимости от уровня усилий e_H над распределением π в зависимости от e_L, т. е. функции распределения $F(\pi \mid e_L)$ и $F(\pi \mid e_H)$ удовлетворяют условию $F(\pi \mid e_H) \leq F(\pi \mid e_L)$ для всех $\pi \in [\underline{\pi}, \overline{\pi}]$, причем неравенство будет строгим на некотором открытом множестве $\Pi \subset [\underline{\pi}, \overline{\pi}]$ (см. раздел 6.D). Из этого следует, что ожидаемая прибыль фирмы, когда менеджер выбирает уровень усилий e_H, выше, чем при e_L: $\int \pi f(\pi \mid e_H)\, d\pi > \int \pi f(\pi \mid e_L)\, d\pi$.

Предпочтения менеджера описываются функцией ожидаемой полезности с бернуллевской функцией полезности $u(w, e)$, зависящей от заработной платы w и уровня усилий e, и менеджер руководствуется максимизацией ожидаемой полезности. Пусть бернуллевская функция полезности менеджера удовлетворяет следующим условиям: $u_w(w, e) > 0$, $u_{ww}(w, e) \leq 0$ для всех (w, e) (здесь нижним индексом обозначены частные производные) и $u(w, e_H) < u(w, e_L)$ для всех w. Другими словами, менеджер предпочитает больший уровень дохода меньшему, не склонен к риску и не любит высокого уровня усилий[4]. В дальнейшем мы будем считать, что функция полезности имеет следующий вид (этот случай наиболее широко рассмотрен в экономической литературе): $u(w, e) = v(w) - g(e)$[5]. В этом случае из наших предпосылок относительно $u(w, e)$ следует, что $v'(w) > 0$, $v''(w) \leq 0$ и $g(e_H) > g(e_L)$.

Владелец фирмы получает прибыль от проекта за вычетом оплаты труда менеджера. Будем считать, что владелец фирмы нейтрален к риску, а следовательно, его цель состоит в максимизации ожидаемого дохода. Идея, лежащая в основе такого упрощающего предположения, заключается в том, что владелец фирмы может обладать хорошо диверсифицированным портфелем, который позволяет ему диверсифицировать риск, связанный с данным проектом. (В упражнении 14.B.2 вам предлагается рассмотреть случай не склонного к риску владельца фирмы.)

---

[4] Заметим, что в случае многомерного вектора усилий e_H необязательно соответствует большему уровню усилий во всех направлениях, но для нашего анализа важно, что этот уровень усилий приводит к более высокой прибыли и сопровождается большими издержками для менеджера, чем e_L.

[5] В упражнении 14.B.1 рассматривается одно из следствий отказа от этой предпосылки.

Оптимальный контракт при наблюдаемом уровне усилий

Удобно начать анализ с рассмотрения оптимального контракта, в случае когда усилия менеджера наблюдаемы.

Предположим, что владелец фирмы предлагает менеджеру контракт, который тот может принять или отвергнуть. В контракте специфицируется уровень усилий менеджера $e \in \{e_L, e_H\}$ и его заработная плата как функция от наблюдаемой прибыли фирмы $w(\pi)$. Будем считать, что конкурентный рынок менеджеров диктует необходимость владельцу фирмы обеспечивать менеджеру ожидаемый уровень полезности не ниже $\bar{u}$, если он соглашается на предлагаемый ему контракт ($\bar{u}$ — *резервный уровень полезности* менеджера), если же менеджер не соглашается на предложенный контракт, то выигрыш владельца фирмы равен нулю.

На протяжении всего изложения мы будем исходить из предпосылки о том, что, с точки зрения владельца фирмы, имеет смысл предлагать менеджеру такой контракт, который тот готов подписать. Тогда оптимальный контракт для владельца фирмы является решением следующей задачи (для удобства записи мы опускаем нижний и верхний пределы интегрирования, $\underline{\pi}$ и $\bar{\pi}$ соответственно):

$$\max_{e \in \{e_L, e_H\}, w(\pi)} \int (\pi - w(\pi)) f(\pi \,|\, e) d\pi \tag{14.B.1}$$

$$\text{при } \int v(w(\pi)) f(\pi \,|\, e) d\pi - g(e) \geq \bar{u}.$$

Эту задачу удобно решать в два этапа. Сначала для каждого уровня усилий e, который может быть прописан в контракте, определим наилучшую схему компенсации $w(\pi)$ для менеджера. А затем найдем оптимальный уровень усилий e.

При некотором уровне усилий e, специфицированном в контракте, задача выбора схемы компенсации $w(\pi)$, доставляющей максимум $\int (\pi - w(\pi)) f(\pi|e) d\pi = \left(\int \pi f(\pi|e) d\pi\right) - \left(\int w(\pi) f(\pi|e) d\pi\right)$, эквивалентна задаче минимизации ожидаемой величины компенсационных издержек владельца фирмы, $\int w(\pi) f(\pi|e) d\pi$, поэтому из (14.B.1) следует, что оптимальная схема компенсации в этом случае должна являться решением следующей задачи:

$$\min_{w(\pi)} \int w(\pi) f(\pi \,|\, e) d\pi \tag{14.B.2}$$

$$\text{при } \int v(w(\pi)) f(\pi \,|\, e) d\pi - g(e) \geq \bar{u}.$$

Ограничение задачи (14.B.2) в ее решении всегда является связывающим. Действительно, если бы это было не так, то контракт был бы попрежнему привлекателен для менеджера, даже если бы владелец фирмы снизил его заработную плату. Обозначим через γ множитель при данном ограничении. Тогда в решении задачи (14.B.2) заработная плата менеджера $w(\pi)$ при каждом уровне $\pi \in [\underline{\pi}, \overline{\pi}]$ должна удовлетворять следующему условию первого порядка[6]:

$$-f(\pi \mid e) + \gamma v'(w(\pi)) f(\pi \mid e) = 0,$$

или

$$\frac{1}{v'(w(\pi))} = \gamma. \tag{14.B.3}$$

Если менеджер строго не склонен к риску (т. е. $v'(w)$ строго убывает по w), то из условия (14.B.3) следует, что оптимальная схема компенсации $w(\pi)$ постоянна, т. е. владелец фирмы должен обеспечить менеджеру фиксированную заработную плату. Это всего лишь результат разделения риска: поскольку в контракте явным образом прописывается требуемый уровень усилий менеджера и нет проблемы создания стимулов для его реализации, то нейтральный к риску владелец фирмы должен полностью застраховать не склонного к риску менеджера от любого риска, связанного с потоком дохода (аналогично тому, что мы видели в примере 6.C.1). Следовательно, для данного уровня усилий e, прописанного в контракте, владелец фирмы предлагает заработную плату w_e^*, такую что менеджер получает в точности резервный уровень полезности:

$$v(w_e^*) - g(e) = \overline{u}. \tag{14.B.4}$$

Заметим, что поскольку $g(e_H) > g(e_L)$, то, если по контракту от менеджера требуется уровень усилий e_H, его заработная плата будет выше, чем при e_L.

С другой стороны, если менеджер нейтрален к риску, т. е. $v(w) = w$, то условие (14.B.3) выполнено при *любой* функции компенсации его усилий. В этом случае, поскольку необходимость в страховке отсутствует, фиксированная заработная плата — это всего лишь одна из множества оптимальных схем компенсации. Любая функция компенсации $w(\pi)$, которая дает менеджеру ожидаемый уровень оплаты труда, равный $\overline{u} + g(e)$ (это условие получено из (14.B.4) при $v(w) = w$), также оптимальна.

Теперь рассмотрим выбор оптимального уровня усилий e. Владелец фирмы в оптимуме специфицирует уровень усилий $e \in \{e_L, e_H\}$ так, чтобы получить максимум ожидаемой прибыли за вычетом издержек оплаты труда:

$$\int \pi f(\pi \mid e) d\pi - v^{-1}(\overline{u} + g(e)). \tag{14.B.5}$$

[6] Условие первого порядка по $w(\pi)$ получено путем взятия производной по заработной плате менеджера отдельно при каждом уровне π. Для того чтобы этот момент был понятнее, рассмотрим дискретную версию данной модели с конечным числом возможных уровней прибыли $(\pi_1, \ldots, \pi_N)$ и соответствующих уровней заработной платы $(w_1, \ldots, w_N)$. Тогда условие первого порядка (14.B.3) аналогично условиям первого порядка для дискретной модели по всем w_n, $n = 1, \ldots, N$ (обратите внимание, что здесь допускаются отрицательные значения заработной платы). Строго говоря, следует добавить, что при континууме возможных уровней π оптимальная схема компенсации должна удовлетворять условию (14.B.3) только на множестве уровней прибыли с полной мерой.

Первый член в условии (14.B.5) представляет собой валовую прибыль, когда менеджер прилагает уровень усилий e; а второй член — это заработная плата, которая должна быть выплачена менеджеру, чтобы компенсировать его усилия (полученная из условия (14.B.4)). Какой уровень усилий, e_H или e_L, будет оптимальным, зависит от того, в каком случае ожидаемая валовая прибыль будет выше, т. е. будет ли прирост ожидаемой прибыли при уровне усилий e_H по сравнению с e_L компенсировать денежные издержки менеджера, связанные с более высоким уровнем усилий.

Итог вышесказанному подводит утверждение 14.B.1.

Утверждение 14.B.1. В модели принципал — агент при наблюдаемых усилиях менеджера в оптимальном контракте специфицируется уровень усилий менеджера e^*, доставляющий максимум ожидаемой прибыли $\int \pi f(\pi \mid e) d\pi - v^{-1}(\bar{u} + g(e))$, и фиксированная заработная плата $w^* = v^{-1}(\bar{u} + g(e^*))$. И это единственный оптимальный контракт при $v''(w) < 0$ для всех w.

Оптимальный контракт при ненаблюдаемом уровне усилий

Оптимальный контракт, описанный в утверждении 14.B.1, достигает двух целей: он характеризуется эффективным уровнем усилий менеджера и позволяет ему полностью застраховаться от риска. Однако если уровень усилий ненаблюдаем, эти две цели зачастую противоречат друг другу, поскольку единственный способ заставить менеджера хорошо работать — обусловить оплату его труда результирующим уровнем прибыли, т. е. случайной величиной. А когда эти цели вступают в конфликт, ненаблюдаемость усилий приводит к неэффективному исходу.

Мы начнем анализ с рассмотрения нейтрального к риску менеджера и покажем, что в этом случае, когда не стоит вопрос о том, кто именно несет бремя риска, владелец фирмы по-прежнему может достичь того же исхода, что и при наблюдаемом уровне усилий менеджера. Затем рассмотрим оптимальный контракт, в случае когда менеджер не склонен к риску. В этой ситуации, если первый наилучший контракт (при наблюдаемых усилиях) включает высокий уровень усилий менеджера, то эффективное распределение риска и эффективное стимулирование вступают в конфликт, и тогда ненаблюдаемость действий приводит к потерям в благосостоянии.

Нейтральный к риску менеджер

Пусть $v(w) = w$. Согласно утверждению 14.B.1 оптимальный уровень усилий e^*, когда усилия менеджера наблюдаемы, является решением следующей задачи:

$$\max_{e \in \{e_L, e_H\}} \int \pi f(\pi \mid e) d\pi - g(e) - \bar{u}. \tag{14.B.6}$$

Прибыль владельца фирмы в этом случае равна значению целевой функции (14.B.6), а менеджер получает ожидаемую полезность, в точности равную $\bar{u}$.

Теперь рассмотрим выигрыш владельца фирмы, когда усилия менеджера ненаблюдаемы. Как гласит утверждение 14.B.2, владелец фирмы по-прежнему может получить тот же выигрыш, что и в случае полной информации.

Утверждение 14.B.2. В модели принципал — агент с ненаблюдаемыми усилиями и нейтральным к риску менеджером в оптимальном контракте специфицируется тот же уровень усилий, а менеджер и владелец фирмы получают ту же ожидаемую полезность, что и при наблюдаемых усилиях.

Доказательство. Покажем, что существует такой контракт, что если владелец фирмы предложит его менеджеру, то получит тот же выигрыш, что и в случае полной информации. Следовательно, этот контракт должен быть оптимальным для владельца фирмы, поскольку ни при каких обстоятельствах его положение при ненаблюдаемых усилиях менеджера не может быть лучше, чем при наблюдаемых (когда уровень усилий наблюдаем, владелец фирмы всегда имеет возможность предложить менеджеру оптимальный при ненаблюдаемых усилиях контракт и просто оставить выбор уровня усилий на усмотрение менеджера).

Предположим, что владелец фирмы предлагает менеджеру схему компенсации усилий вида $w(\pi) = \pi - \alpha$, где α — это некоторая константа. Такую компенсационную схему можно трактовать как «продажу проекта менеджеру», поскольку менеджер в такой ситуации получает весь доход π за вычетом фиксированного платежа α («цены продажи»). Если менеджер соглашается на такой контракт, то он выбирает уровень усилий e, максимизирующий его ожидаемую полезность

$$\int w(\pi) f(\pi \mid e) d\pi - g(e) = \int \pi f(\pi \mid e) d\pi - \alpha - g(e). \qquad (14.B.7)$$

Сравнивая (14.B.7) и (14.B.6), нетрудно заметить, что e^* также доставляет максимум ожидаемой полезности (14.B.7). Таким образом, данный контракт порождает первый наилучший уровень усилий e^* (т. е. такой уровень, который оптимален в случае полной информации).

Менеджер согласится на данный контракт только в том случае, если он принесет ему ожидаемую полезность не ниже $\bar{u}$, т. е. если выполнено условие

$$\int \pi f(\pi \mid e^*) d\pi - \alpha - g(e^*) \geq \bar{u}. \qquad (14.B.8)$$

Обозначим через α^* значение параметра α, при котором соотношение (14.B.8) выполняется как равенство. Заметим, что выигрыш владельца фирмы при компенсационной схеме $w(\pi) = \pi - \alpha^*$ в точности равен α^* (а менеджер получает всю прибыль π за вычетом фиксированной суммы α^*). Преобразуя (14.B.8), получаем $\alpha^* = \int \pi f(\pi | e^*) d\pi - g(e^*) - \bar{u}$. Следовательно, при компенсационной схеме $w(\pi) = \pi - \alpha^*$ как владелец фирмы, так и менеджер получают в точности тот же выигрыш, что при наблюдаемом уровне усилий. ■

Основная идея утверждения 14.B.2 довольно очевидна. Если менеджер нейтрален к риску, то проблема разделения риска исчезает. Эффективные стимулы могут быть созданы без потерь, связанных с перекладыванием риска, когда менеджер получает весь предельный доход от своих усилий.

Не склонный к риску менеджер

В случае когда менеджер строго не склонен к риску на множестве денежных лотерей, задача усложняется. Теперь стимулы к приложению высокого уровня усилий могут быть обеспечены только за счет того, что менеджер сталкивается с риском. Для характеристики оптимального контракта в этом случае мы снова рассмотрим задачу в два этапа: сначала охарактеризуем оптимальную схему стимулирования для каждого уровня усилий, который владелец фирмы может потребовать от менеджера, а затем обсудим, какой именно уровень усилий менеджера предпочтителен для владельца фирмы.

Оптимальная схема стимулирования реализации некоторого уровня усилий e должна минимизировать издержки оплаты труда для владельца фирмы при двух ограничениях. Как и ранее, менеджер, соглашаясь на контракт, должен получать ожидаемую полезность не ниже $\bar{u}$. Кроме того, в случае когда усилия менеджера ненаблюдаемы, владелец фирмы сталкивается с еще одним ограничением: менеджер должен фактически *захотеть* выбрать уровень усилий e, сталкиваясь с данной схемой стимулирования. Таким образом, формально оптимальная схема стимулирования реализации уровня усилий e должна являться решением следующей задачи:

$$\min_{w(\pi)} \int w(\pi) f(\pi | e) d\pi \tag{14.B.9}$$

при (1) $\int v(w(\pi)) f(\pi | e) d\pi - g(e) \geq \bar{u}$;

(2) e является решением задачи $\max_{\tilde{e}} \int v(w(\pi)) f(\pi | \tilde{e}) d\pi - g(\tilde{e})$.

Условие (2) называется *ограничением по стимулам*: оно гарантирует, что при схеме компенсации $w(\pi)$ оптимальным для менеджера является выбор уровня усилий e.

Как владельцу фирмы оптимально реализовать каждый из возможных уровней e? Рассмотрим по очереди все возможные случаи.

Реализация уровня усилий e_L. Предположим сначала, что владелец фирмы хотел бы, чтобы реализовался уровень усилий e_L. В этом случае в оптимуме владелец фирмы должен предложить менеджеру схему оплаты $w_e^* = v^{-1}(\bar{u} + g(e_L))$, т. е. ту же заработную плату, которую он бы предложил, если при наблюдаемых усилиях в контракте специфицировался уровень усилий e_L. Действительно, при такой схеме компенсации менеджер выберет уровень усилий e_L: его заработная плата не зависит от уровня усилий, и поэтому он выберет такой уровень усилий, который сопровождается наименьшими издержками, а именно e_L. Выбирая такой уровень усилий, он получит уровень ожидаемой полезности, в точности равный $\bar{u}$. Следовательно, уровень усилий e_L реализуется в точности при тех же издержках, что и в наблюдаемом случае. При этом, как мы отмечали в доказательстве утверждения 14.В.2, положение владельца фирмы при ненаблюдаемых усилиях менеджера ни при каких условиях не может быть лучше, чем при наблюдаемых усилиях (формально в задаче (14.В.9) владелец фирмы сталкивается с дополнительным ограничением (2) по сравнению с задачей (14.В.2)). Следовательно, такой уровень усилий должен быть решением задачи (14.В.9).

Реализация уровня усилий e_H. Более интересным представляется случай, когда владелец фирмы хотел бы побудить менеджера прилагать высокий уровень усилий e_H. В этом случае ограничение (2) задачи (14.В.9) можно представить в виде:

$$(2_H)\ \int v(w(\pi))f(\pi \mid e_H)d\pi - g(e_H) \geq \int v(w(\pi))f(\pi \mid e_L)d\pi - g(e_L).$$

Обозначим через $\gamma \geq 0$ и $\mu \geq 0$ множители при ограничениях (1) и (2_H) соответственно, тогда схема оплаты $w(\pi)$ должна удовлетворять следующим условиям (Куна — Таккера) первого порядка при каждом $\pi \in [\underline{\pi}, \bar{\pi}]$[7]:

$$-f(\pi \mid e_H) + \gamma v'(w(\pi))f(\pi \mid e_H) + \mu[f(\pi \mid e_H) - f(\pi \mid e_L)]v'(w(\pi)) = 0$$

или

$$\frac{1}{v'(w(\pi))} = \gamma + \mu\left[1 - \frac{f(\pi \mid e_L)}{f(\pi \mid e_H)}\right]. \qquad (14.В.10)$$

Покажем сначала, что в любом решении задачи (14.В.9), где $e = e_H$, множители γ и μ строго положительны.

---

[7] Хотя задача (14.В.9) может и не быть задачей выпуклого программирования, но с помощью простого преобразования можно показать, что условие (14.В.10) является необходимой и достаточной характеристикой решения. Действительно, перепишем задачу (14.В.9) как задачу выбора уровня полезности менеджера при каждом возможном уровне прибыли π, скажем $\bar{v}(\pi)$. Пусть $\varphi(\cdot) = v^{-1}(\cdot)$, тогда целевая функция задачи будет иметь вид: $\int \varphi(\bar{v}(\pi))f(\pi \mid e_H)d\pi$, и эта функция выпукла по $\bar{v}(\pi)$, а ограничения задачи становятся линейными по $\bar{v}(\pi)$. Таким образом, условия первого порядка (Куна — Таккера) являются необходимыми и достаточными условиями максимума данной переформулированной задачи (см. раздел М.К математического приложения). Условие первого порядка этой задачи имеет вид:

$$-\varphi'(\bar{v}(\pi))f(\pi \mid e_H) + \gamma f(\pi \mid e_H) + \mu\left[f(\pi \mid e_H) - f(\pi \mid e_L)\right] = 0 \ \text{ для всех } \pi \in [\underline{\pi}, \bar{\pi}].$$

Отсюда, с учетом того что $w(\pi)$ определяется соотношением $v(w(\pi)) = \bar{v}(\pi)$ и $\varphi'(v(w(\pi))) = 1/v'(w(\pi))$, получаем условие (14.В.10).

Лемма 14.В.1. В любом решении задачи (14.В.9), где $e = e_H$, выполнено: $\gamma > 0$ и $\mu > 0$.

Доказательство. Предположим, от противного, что $\gamma = 0$. Поскольку имеет место стохастическое доминирование первого порядка распределения $F(\pi \mid e_H)$ над распределением $F(\pi \mid e_L)$, то должно существовать открытое множество уровней прибыли $\tilde{\Pi} \subset [\underline{\pi}, \overline{\pi}]$, такое что $[f(\pi \mid e_L)/f(\pi \mid e_H)] > 1$ для всех $\pi \in \tilde{\Pi}$. Но если $\gamma = 0$, то из условия (14.В.10) следует, что $v'(w(\pi)) \le 0$ при любом таком π (напомним, что $\mu \ge 0$), что невозможно, следовательно, $\gamma > 0$.

Предположим теперь, что в решении задачи (14.В.9) $\mu = 0$. Тогда по условию (14.В.10) оптимальная схема компенсации предполагает фиксированный платеж при любой реализации уровня прибыли. Но, как нам известно, в таких условиях менеджер выберет уровень усилий e_L, а не e_H, что противоречит условию (2_H) задачи (14.В.9). Таким образом, $\mu > 0$. ■

Согласно лемме 14.В.1 оба ограничения задачи (14.В.9) при $e = e_H$ являются связывающими[8]. Кроме того, в свете леммы 14.В.1 из условия (14.В.10) можно сделать некоторые полезные выводы относительно вида оптимальной схемы компенсации. Рассмотрим, например, фиксированную заработную плату $\hat{w}$, такую что $(1/v'(\hat{w})) = \gamma$. Согласно условию (14.В.10)

$$w(\pi) > \hat{w}, \text{ если } \frac{f(\pi \mid e_L)}{f(\pi \mid e_H)} < 1$$

и

$$w(\pi) < \hat{w}, \text{ если } \frac{f(\pi \mid e_L)}{f(\pi \mid e_H)} > 1.$$

Такая взаимосвязь интуитивно довольно понятна. Оптимальная схема компенсации предполагает выплаты, превышающие $\hat{w}$, для тех исходов, наступление которых статистически относительно более вероятно при уровне усилий e_H, чем при e_L, в том смысле, что в этом случае отношение правдоподобия $[f(\pi \mid e_L)/f(\pi \mid e_H)]$ меньше 1. Аналогично оптимальная схема предполагает меньшую компенсацию для исходов, которые относительно более вероятны, когда выбирается уровень усилий e_L. Следует, однако,

[8] Тот факт, что ограничение (1) является связывающим, можно обосновать и по-другому. Пусть $w(\pi)$ является решением задачи (14.В.9) и при этом ограничение (1) не является связывающим. Рассмотрим такое изменение функции компенсации, что при каждом уровне π заработная плата менеджера уменьшается таким образом, что результирующее снижение полезности при всех π оказывается одинаковым, другими словами, рассмотрим новую функцию $\hat{w}(\pi)$, такую что $[v(w(\pi)) - v(\hat{w}(\pi))] = \Delta v > 0$ для всех $\pi \in [\underline{\pi}, \overline{\pi}]$. Такое изменение не нарушает ограничения по стимулам (2_H), поскольку если менеджер выбирал уровень усилий e_H, сталкиваясь со схемой оплаты $w(\pi)$, то он не изменит свое решение при схеме $\hat{w}(\pi)$. Более того, поскольку ограничение (1) не является связывающим, то менеджер согласится на этот новый контракт, если величина Δv достаточно мала. Но при этом ожидаемые выплаты по заработной плате при $\hat{w}(\pi)$ для собственника фирмы будут меньше, чем при $w(\pi)$, а значит, мы пришли к противоречию.

подчеркнуть, что, хотя в приведенной интерпретации используются статистические характеристики, в действительности из этого не следует никаких непосредственно статистических выводов: владелец фирмы *знает*, какой именно уровень усилий будет выбран при данной предложенной им схеме компенсации. Скорее схема компенсации имеет такой вид из-за *эффектов, связанных со стимулами*, т. е., строя схему компенсации таким образом, владелец фирмы побуждает менеджера выбрать уровень усилий e_H, а не e_L.

Отсюда следует на первый взгляд удивительный результат: в оптимальной схеме стимулирования компенсация необязательно должна монотонно возрастать с ростом прибыли. Как нетрудно заметить, изучая условие (14.B.10), для того чтобы оптимальная схема компенсации была монотонно возрастающей, должно быть выполнено условие убывания отношения правдоподобия $[f(\pi|e_L)/f(\pi|e_H)]$ по π, т. е. с ростом π вероятность получения уровня прибыли π при уровне усилий e_H относительно вероятности получения этого уровня прибыли при уровне усилий e_L должна уменьшаться. Это свойство называется *свойством монотонности отношения правдоподобия* (см. (Milgrom, 1981)), и оно не следует из стохастического доминирования первого порядка. На рис. 14.B.1(a) и (b) проиллюстрирован случай, когда имеет место стохастическое доминирование первого порядка распределения π, условного по e_H, над распределением π, условным по e_L, но свойство монотонности отношения правдоподобия не выполнено. В этом примере увеличение уровня усилий приводит к трансформации реализаций низкого уровня прибыли в средние, но не оказывает влияния на вероятность реализации очень высоких уровней прибыли. Согласно условию (14.B.10) в этом случае при средних уровнях прибыли заработная плата должна быть выше, чем при высоких, поскольку именно вероятность получения средних уровней прибыли чувствительна к увеличению уровня усилий. Оптимальная схема компенсации для этого примера представлена на рис. 14.B.1(c).

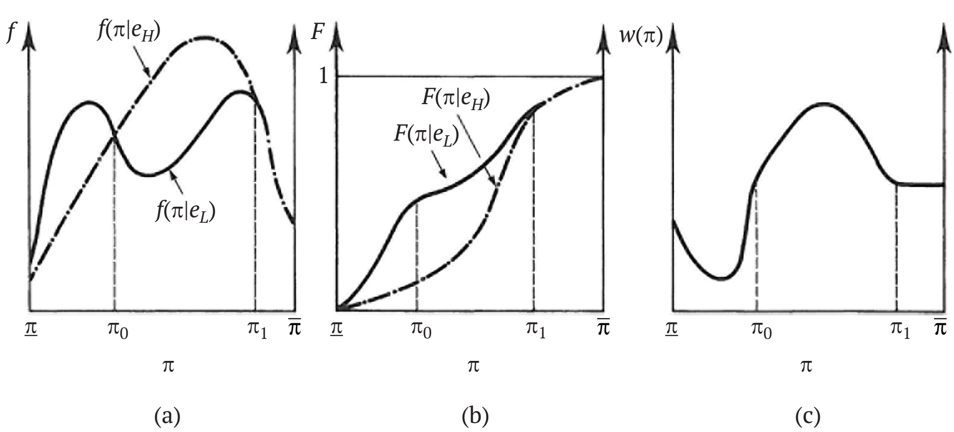


Рис. 14.B.1. Свойство монотонности отношения правдоподобия не выполняется. (a) Плотности распределения. (b) Функции распределения. (c) Оптимальная схема заработной платы

Из условия (14.B.10) также следует, что оптимальный контракт вряд ли будет иметь простую (например, линейную) форму. Оптимальный вид функции $w(\pi)$ — это функция, содержащая информацию о различных уровнях прибыли (посредством отношения правдоподобия), и маловероятно, что в большинстве задач она будет меняться по π в соответствии с некоторым простым правилом.

Наконец, заметим, что при такой вариабельности оптимальной схемы компенсации усилий менеджера ожидаемая величина заработной платы менеджера должна быть строго больше, чем фиксированная заработная плата при наблюдаемых усилиях, $w^*_{e_H} = v^{-1}(\bar{u} + g(e_H))$. Интуитивно это можно объяснить так: поскольку менеджеру должен быть гарантирован уровень ожидаемой полезности $\bar{u}$, то владелец фирмы должен предложить ему в качестве компенсации более высокую среднюю заработную плату за любой риск, с которым он сталкивается. Покажем это формально. Поскольку $E[v(w(\pi))\,|\,e_H] = \bar{u} + g(e_H)$ и $v''(\cdot) < 0$, то согласно неравенству Йенсена (см. раздел M.C математического приложения) $v\left(E[w(\pi)\,|\,e_H]\right) >$ $> \bar{u} + g(e_H)$. Но, как нам известно, $v(w^*_{e_H}) = \bar{u} + g(e_H)$, а следовательно, $E[w(\pi)\,|\,e_H] > w^*_{e_H}$. Таким образом, при реализации уровня усилий e_H ненаблюдаемость усилий приводит к росту ожидаемых издержек владельца фирмы, связанных с выплатой заработной платы.

Какой уровень усилий, с учетом вышесказанного, более предпочтителен для владельца фирмы? Как и ранее, владелец фирмы сравнивает приращение ожидаемой прибыли при двух уровнях усилий, т. е. $\left[\int \pi f(\pi\,|\,e_H)d\pi - \int \pi f(\pi\,|\,e_L)d\pi\right]$, с разностью ожидаемых выплат по двум оптимальным в каждом случае контрактам, т. е. с разностью значений задачи (14.B.9) при $e = e_H$ и $e = e_L$.

Как известно из проведенного анализа, заработная плата при реализации уровня усилий e_L будет в точности такой же, как и при наблюдаемых усилиях, тогда как ожидаемые выплаты при реализации уровня усилий e_H, когда усилия менеджера ненаблюдаемы, строго больше выплат в наблюдаемом случае. Таким образом, в данной модели ненаблюдаемость действий агента приводит к росту издержек реализации уровня усилий e_H и никак не влияет на издержки реализации уровня усилий e_L. Из этого следует, что ненаблюдаемость усилий может повлечь реализацию неэффективно низкого уровня усилий. Если e_L — оптимальный уровень усилий, когда усилия наблюдаемы, то этот же уровень усилий будет оптимальным и при ненаблюдаемых усилиях. В этом случае ненаблюдаемость усилий не приводит к потерям. Однако если при наблюдаемых усилиях оптимален уровень усилий e_H, то может реализоваться один из следующих сценариев: возможно, оптимальным для владельца фирмы будет использование такой схемы стимулирования менеджера, сталкивающегося с риском, чтобы реализовывался уровень усилий e_H, или же издержки, связанные с риском, могут оказаться настолько высоки, что владелец фирмы сочтет, что ему будет выгоднее, если реализуется уровень усилий e_L. В любом случае ненаблюдаемость действий менеджера приводит к потерям в благосостоянии владельца фирмы (а менеджер, независимо от ситуации, получает ожидаемую полезность, равную $\bar{u}$)[9].

Итог вышесказанному подводит утверждение 14.B.3.

Утверждение 14.B.3. В модели принципал — агент с ненаблюдаемыми усилиями не склонного к риску менеджера и двумя возможными уровнями усилий оптимальная схема компенсации для реализации уровня усилий e_H удовлетворяет условию (14.B.10). Данная схема компенсации позволяет менеджеру получить уровень ожидаемой полезности $\bar{u}$ и предполагает бо́льшие ожидаемые выплаты по заработной плате, чем в случае наблюдаемых усилий. Оптимальная схема компенсации для реализации уровня усилий e_L предполагает ту же фиксированную заработную плату, что и при наблюдаемых усилиях. Если e_H — оптимальный уровень усилий при наблюдаемых усилиях менеджера, то ненаблюдаемость усилий приводит к потерям благосостояния.

Тот факт, что ненаблюдаемость усилий менеджера в данной модели приводит только к *понижающему* искажению уровня усилий менеджера, является особенностью данной спецификации с двумя уровнями усилий. В случае когда возможен выбор из множества уровней усилий, ненаблюдаемость может по-прежнему приводить к изменению уровня усилий менеджера в оптимальном контракте по сравнению со случаем наблюдаемых усилий, однако направление такого изменения может быть как в сторону повышения, так и в сторону понижения уровня усилий (см. упражнение 14.B.4).

Представьте, что владельцу фирмы в дополнение к реализациям прибыли доступен другой статистический сигнал об уровне усилий менеджера, скажем y, и совместная плотность распределения π и y при данном уровне усилий e описывается функцией $f(\pi, y \mid e)$. Тогда в принципе оплата труда менеджера может зависеть как от π, так и от y. В каком случае компенсация может быть функцией и от y? Другими словами, в каком случае функция оптимальной компенсации $w(\pi, y)$ фактически зависит от y?

Для ответа на этот вопрос предположим, что владелец фирмы хотел бы реализовать уровень усилий e_H. Рассуждая подобно тому, как мы делали выше, получим условие, аналогичное условию (14.B.10):

$$\frac{1}{v'(w(\pi, y))} = \gamma + \mu\left[1 - \frac{f(\pi, y \mid e_L)}{f(\pi, y \mid e_H)}\right]. \qquad (14.B.11)$$

[9] Однако следует отметить, что, хотя ненаблюдаемость усилий приводит к потерям благосостояния, полученный исход является условно Парето-оптимальным в том смысле, какой вкладывался в это понятие в разделе 13.B. Действительно, владелец фирмы максимизирует свою прибыль при условии, что менеджер получает уровень ожидаемой полезности не ниже $\bar{u}$, и условиях, связанных с тем, что он не может наблюдать, какой уровень усилий выбрал менеджер. В результате ни одно распределение, которое доминирует по Парето этот исход, не может быть достигнуто центральной властью, которая также не может наблюдать выбор уровня усилий менеджером. Поэтому для того чтобы вмешательство в функционирование рынка приводило к Парето-улучшению, должны существовать экстерналии между контрактами, подписываемыми различными парами индивидов.

Рассмотрим сначала случай, когда y — просто случайный шум, не связанный с e. Тогда мы можем записать функцию плотности $f(\pi, y \mid e)$ как произведение двух плотностей, $f_1(\pi \mid e)$ и $f_2(y)$, т. е. $f(\pi, y \mid e) = f_1(\pi \mid e)f_2(y)$. При подстановке этого выражения в (14.B.11) $f_2(\cdot)$ сократится, и тем самым получим, что оптимальная схема компенсации не зависит от y.

Интуитивно полученный результат довольно понятен. Предположим, что владелец фирмы первоначально предлагает контракт, в котором заработная плата зависит от y, но это означает, что заработная плата менеджера не детерминирована и эта недетерминированность никак не связана с уровнем усилий e, а следовательно, менеджер сталкивается с риском, не связанным с каким-либо положительным стимулирующим эффектом. Если же вместо этого владелец фирмы предложит при каждой реализации π гарантированный платеж $\bar{w}(\pi)$, такой что

$$v(\bar{w}(\pi)) = E[v(w(\pi,\ y)) \,|\, \pi] = \int v(w(\pi,\ y))f_2(y)dy,$$

то при $\bar{w}(\pi)$ менеджер получит в точности тот же уровень ожидаемой полезности, что и при $w(\pi, y)$ при любом выбранном уровне усилий. Таким образом, выбор уровня усилий менеджером останется неизменным, и он по-прежнему будет готов подписать такой контракт. Однако поскольку менеджер при этом сталкивается с меньшим риском, то ожидаемая заработная плата будет ниже, а значит, положение владельца фирмы улучшится (это опять следует из неравенства Йенсена: для всех π $v\left(E[w(\pi,\ y) \,|\, \pi]\right) > E\left[v(w(\pi,\ y)) \,|\, \pi\right]$, а значит, $\bar{w}(\pi) < E\left[w(\pi,\ y) \,|\, \pi\right]$).

Более того, обратите внимание, что функцию плотности всегда можно записать в виде:

$$f(\pi,\ y \,|\, e) = f_1(\pi \,|\, e)f_2(y \,|\, \pi,\ e).$$

И если $f_2(y \mid \pi, e)$ не зависит от e, то член $f_2(\cdot)$ в условии (14.B.11) опять сокращается, и поэтому оптимальный пакет компенсаций не зависит от y. Это условие на $f_2(y \mid \pi, e)$ в статистических терминах можно сформулировать так: π — *достаточная статистика* для y по e. Верно и обратное: если π *не* является достаточной статистикой для y, то заработная плата *должна* зависеть от y, по крайней мере в какой-то степени (см. подробнее об этом в работе (Holmstrom, 1979)).

В экономической литературе рассмотрен ряд примеров развития базовой модели, представленной в данном разделе. Например, в работах (Holmstrom, 1982; Nalebuff, Stiglitz, 1983; Green, Stokey, 1983) анализируются случаи, когда владелец фирмы нанимает нескольких менеджеров, и рассматривается оценка относительной эффективности в такой постановке. В работе (Bernheim, Whinston, 1986) предлагается развитие модели в другом направлении: в ней анализируется случай, когда один агент одновременно нанимается несколькими принципалами. Случай, когда уровень усилий может стать наблюдаемым при использовании дорогостоящего мониторинга, рассматривается в работе (Dye, 1986). В работах (Rogerson, 1985a; Allen, 1985; Fudenberg, Holmstrom, Milgrom, 1990) исследуются ситуации, когда агентские взаимоотношения осуществляются в течение нескольких периодов, причем особое внимание уделяется вопросу о том, насколько долгосрочные контракты более эффективны для решения агентских задач, чем последовательность краткосрочных контрактов, подобных тем, которые мы рассмотрели в этой главе. (Здесь перечислены далеко не все возможные модификации рассмотренной задачи.) В большинстве вышеупомянутых работ рассматриваются ситуации, когда усилия моделируются одномерной переменной, тогда как в работе (Holmstrom, Milgrom, 1991) обсуждаются некоторые интересные аспекты более реалистичного случая многомерных усилий.

В работе (Holmstrom, Milgrom, 1987) анализируется еще одно возможное направление развития данной модели. Чтобы найти ответ на вопрос, почему в реальном мире схемы компенсации имеют гораздо более простую структуру, чем оптимальные контракты, получаемые в теоретических моделях, подобных той, которую мы здесь рассмотрели, авторы строят и анализируют модель, в которой со временем прибыль постепенно прирастает и менеджер, реагируя на реализации прибыли на ранних стадиях проекта, имеет возможность адаптировать уровень прилагаемых усилий. В работе получены условия, при которых владелец фирмы может без потерь ограничиться простой схемой компенсации, являющейся *линейной* функцией от совокупной прибыли проекта. Линейная схема оказывается оптимальной, поскольку возникает необходимость в создании таких стимулов, которые «устойчивы» в том смысле, что они продолжают играть стимулирующую роль независимо от того, на каком этапе скажутся реализации прибыли. Представленный этими авторами анализ иллюстрирует и более общую идею о том, что более сложная природа задачи стимулирования в действительности может приводить к более простым формам оптимальных контрактов (см. упражнения 14.B.5 и 14.B.6 в качестве иллюстрации).

В упражнениях в конце данной главы анализируются некоторые из упомянутых модификаций модели.

14.C. Скрытая информация (и монополистический скрининг)

В этом разделе мы переключимся на рассмотрение ситуаций, когда постконтрактная асимметрия информации принимает форму скрытой информации.

Итак, предположим опять, что владелец фирмы хотел бы нанять менеджера для управления некоторым краткосрочным проектом. Однако теперь будем считать, что уровень усилий менеджера, обозначим его через e, полностью наблюдаем. Но после подписания контракта оказывается ненаблюдаемой реализация случайной величины издержек (в терминах полезности) менеджера, связанных с выбранным уровнем усилий. Например, менеджер может чувствовать себя вполне комфортно, выполняя требуемые задачи, и тогда высокий уровень усилий относительно мало снижает его полезность, но возможна и обратная ситуация. Но при этом только менеджеру известно, какой именно случай имеет место[10].

Прежде чем идти далее, следует заметить, что используемая здесь техника анализа также применима к моделям *монополистического скрининга*, где в ситуации так называемой *предконтрактной* асимметрии информации единственный неинформированный индивид предлагает меню контрактов, стараясь провести различие или *скрининг* информированных агентов, владеющих частной информацией в момент подписания контракта (см. анализ модели конкурентного скрининга в разделе 13.D). Мы обсудим эту взаимосвязь далее, в конце данного раздела, в тексте, выделенном мелким шрифтом.

Итак, опишем модель принципал — агент со скрытой информацией. Пусть уровень усилий описывается одномерной переменной $e \in [0, \infty)$. Валовая прибыль фирмы (не учитывающая выплаты заработной платы менеджеру) представляет собой простую детерминированную функцию от усилий, $\pi(e)$, такую что $\pi(0) = 0$, $\pi'(e) > 0$ и $\pi''(e) < 0$ для всех e.

Менеджер максимизирует ожидаемую полезность, а его бернуллевская функция полезности, $u(w, e, \theta)$, зависит от заработной платы, уровня усилий, а также от состояния природы θ, которое реализуется после подписания контракта, причем то, какое именно состояние природы реализовалось, знает только менеджер. Будем считать, что $\theta \in \mathbb{R}$, и рассмотрим бернуллевскую функцию полезности $u(w, e, \theta)$ специального вида, к которому очень часто прибегают в экономической литературе[11]:

$$u(w, e, \theta) = v(w - g(e, \theta)).$$

Функция $g(e, \theta)$ описывает издержки для менеджера, связанные с приложением усилий, в денежных единицах. Будем считать, что $g(0, \theta) = 0$ для всех θ, и предположим также, что (нижним индексом обозначены соответствующие частные производные)

$$g_e(e,\ \theta)\begin{cases} > 0, \text{ при } \ e > 0, \\ = 0, \text{ при } \ e = 0, \end{cases}$$

$$g_{ee}(e, \theta) > 0 \text{ для всех } e,$$

$$g_\theta(e, \theta) < 0 \text{ для всех } e,$$

$$g_{e\theta}(e,\ \theta)\begin{cases} < 0, \text{ при } \ e > 0, \\ = 0, \text{ при } \ e = 0. \end{cases}$$

[10] По-видимому, более значимым источником скрытой информации, возникающей во взаимоотношениях менеджера и владельца фирмы, является то обстоятельство, что менеджер фирмы зачастую знает больше о потенциальной прибыльности различных действий, чем владелец фирмы. В разделе 14.D мы рассматриваем гибридную модель «скрытые действия – скрытая информация», описывающую эту альтернативную форму асимметрии информации, но ее формальный анализ сводится к анализу модели, описываемой в данном разделе.

[11] В упражнении 14.C.3 вас просят рассмотреть функцию полезности менеджера альтернативного вида.

Таким образом, менеджер не склонен к увеличению усилий, и эта несклонность тем больше, чем выше текущий уровень усилий. Кроме того, бóльшие значения θ соответствуют более производительным состояниям мира в том смысле, что как совокупные издержки приложения усилий для менеджера, $g(e, \theta)$, так и его предельные издержки при любом текущем уровне усилий, $g_e(e, \theta)$, тем ниже, чем больше θ. Предположим также, что менеджер строго не склонен к риску, т. е. $v''(\cdot) < 0$[12]. Как и в разделе 14.B, обозначим резервный уровень полезности менеджера, т. е. тот уровень ожидаемой полезности, который он точно должен получить, если согласится подписать контракт с владельцем фирмы, через $\bar{u}$. Следует отметить, что из сделанных предположений относительно $g(e, \theta)$ следует, что кривые безразличия менеджера обладают свойством единственности пересечения (см. раздел 13.C).

Наконец, для наглядности изложения рассмотрим простой случай, когда θ может принимать только два значения, θ_H и θ_L, где $\theta_H > \theta_L$, и $\text{Prob}(\theta_H) = \lambda \in (0, 1)$. (В упражнении 14.C.1 вас просят рассмотреть случай произвольного конечного числа состояний мира.)

Контракт, предлагаемый владельцем фирмы, должен отвечать двум целям: во-первых, как и в разделе 14.B, нейтральный к риску владелец фирмы должен страховать менеджера от колебаний его дохода; во-вторых, хотя здесь и нет проблемы заставить менеджера прилагать желаемый собственником фирмы уровень усилий (поскольку в контракте явно прописывается требуемый уровень усилий), однако контракт, максимизирующий излишек, доступный в рамках рассматриваемых взаимоотношений (а следовательно, выигрыш владельца фирмы), должен быть таким, чтобы уровень усилий менеджера реагировал на издержки, связанные с уровнем усилий, т. е. на состояние мира θ. Для того чтобы эти идеи стали более понятны, сначала покажем, как эти цели достигаются при наблюдаемом θ, а затем проанализируем задачи, которые возникают в случаях, когда величина θ наблюдаема только для менеджера.

Состояние мира θ *наблюдаемо*

Если состояние мира θ наблюдаемо, то в контракте может непосредственно указываться уровень усилий и вознаграждение менеджера, обусловленное каждой возможной реализацией θ (обратите внимание, что эти переменные полностью определяют экономический исход для двух вовлеченных сторон). Таким образом, контракт при полной информации содержит две пары «заработная плата — уровень усилий»: $(w_H, e_H) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ в состоянии мира θ_H и $(w_L, e_L) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ в состоянии мира θ_L. В оптимуме

[12] Как и в случае скрытых действий, рассмотренном в разделе 14.B, ненаблюдаемость усилий не приводит к потерям благосостояния, когда менеджер нейтрален к риску. Так же как и ранее, контракт «на продажу проекта», позволяющий менеджеру получить полную предельную отдачу от своих действий, может порождать первый наилучший исход (см. упражнение 14.C.2).

владелец фирмы выбирает эти пары так, чтобы они были решением следующей задачи:

$$\max_{\substack{w_L, e_L \geq 0 \\ w_H, e_H \geq 0}} \lambda[\pi(e_H) - w_H] + (1-\lambda)[\pi(e_L) - w_L] \tag{14.C.1}$$

$$\text{при } \lambda v\left(w_H - g(e_H,\ \theta_H)\right) + (1-\lambda) v\left(w_L - g(e_L,\ \theta_L)\right) \geq \bar{u}.$$

В любом решении $\left[\left(w_L^*,\ e_L^*\right),\ \left(w_H^*,\ e_H^*\right)\right]$ задачи (14.C.1) ограничение задачи — ограничение участия — должно быть связывающим: если это не так, то владелец фирмы мог бы снизить предлагаемый уровень заработной платы и нанять менеджера на таких условиях. Если обозначить через $\gamma \geq 0$ множитель при данном ограничении, то решение задачи должно удовлетворять следующим условиям первого порядка:

$$-\lambda + \gamma\lambda v'\left(w_H^* - g\left(e_H^*,\ \theta_H\right)\right) = 0, \tag{14.C.2}$$

$$-(1-\lambda) + \gamma(1-\lambda) v'\left(w_L^* - g\left(e_L^*,\ \theta_L\right)\right) = 0, \tag{14.C.3}$$

$$\lambda\pi'\left(e_H^*\right) - \gamma\lambda v'\left(w_H^* - g\left(e_H^*,\ \theta_H\right)\right) g_e\left(e_H^*,\ \theta_H\right) \begin{cases} \leq 0, \\ = 0, \text{ если } e_H^* > 0, \end{cases} \tag{14.C.4}$$

$$(1-\lambda)\pi'\left(e_L^*\right) - \gamma(1-\lambda) v'\left(w_L^* - g\left(e_L^*,\ \theta_L\right)\right) g_e\left(e_L^*,\ \theta_L\right) \begin{cases} \leq 0, \\ = 0, \text{ если } e_L^* > 0. \end{cases} \tag{14.C.5}$$

Эти условия демонстрируют, как достигается выполнение двух вышеуказанных целей: полная страховка менеджера и чувствительность усилий к состоянию мира. Во-первых, преобразовав условия (14.C.2) и (14.C.3), получим

$$v'\left(w_H^* - g\left(e_H^*,\ \theta_H\right)\right) = v'\left(w_L^* - g\left(e_L^*,\ \theta_L\right)\right), \tag{14.C.6}$$

т. е. предельная полезность дохода для менеджера в обоих состояниях мира должна быть одинакова. Это обычное условие, когда нейтральная к риску сторона страхует не склонного к риску индивида. Из условия (14.C.6) следует, что $w_H^* - g\left(e_H^*,\ \theta_H\right) = w_L^* - g\left(e_L^*,\ \theta_L\right)$, откуда, в свою очередь, получаем $v\left(w_H^* - g\left(e_H^*,\ \theta_H\right)\right) = v\left(w_L^* - g\left(e_L^*,\ \theta_L\right)\right)$, т. е. полезность менеджера в обоих состояниях мира должна быть одинаковой. Таким образом, с учетом условия участия (14.C.1) это означает, что в каждом состоянии мира менеджер получает свой резервный уровень полезности $\bar{u}$.

Теперь рассмотрим оптимальный уровень усилий в каждом состоянии. Поскольку $g_e(0, \theta) = 0$ и $\pi'(0) > 0$, то условия (14.C.4) и (14.C.5) должны выполняться как равенство и $e_i^* > 0$ при $i = 1, 2$. Объединяя условия (14.C.2) и (14.C.4), а также условия (14.C.3) и (14.C.5), получим, что оптимальный уровень усилий в состоянии мира θ_i, e_i^*, удовлетворяет следующему условию:

$$\pi'\left(e_i^*\right) = g_e\left(e_i^*,\ \theta_i\right),\ \text{где } i = L, H. \tag{14.C.7}$$

Это условие говорит о том, что оптимальный уровень усилий в состоянии мира θ_i должен быть таким, чтобы предельная выгода от усилий в терминах возросшей прибыли была равна предельным издержкам приложения такого уровня усилий.

Пара $\left(w_i^*,\ e_i^*\right)$ представлена на рис. 14.C.1 (обратите внимание, что заработная плата откладывается по вертикальной оси, а уровень усилий — по горизонтальной). Как показано на рисунке, положение менеджера при движении в северо-западном направлении (т. е. с ростом заработной платы и уменьшением усилий) улучшается, а положение владельца фирмы улучшается при движении в юго-восточном направлении. Поскольку менеджер получает уровень полезности $\bar{u}$ в состоянии мира θ_i, то владелец фирмы старается найти наиболее прибыльную точку на кривой безразличия менеджера, соответствующей уровню полезности $\bar{u}$, в состоянии мира θ_i. Это точка касания кривой безразличия менеджера и одной из изопрофит владельца фирмы. В этой точке предельная выгода от дополнительных усилий в терминах увеличения прибыли в точности равна предельным издержкам, которые несет менеджер.

Уровень прибыли владельца фирмы в состоянии мира θ_i равен $\Pi_i^* = \pi\left(e_i^*\right) - v^{-1}(\bar{u}) - g\left(e_i^*,\ \theta_i\right)$. Как показано на рис. 14.C.1, эта прибыль в точ-

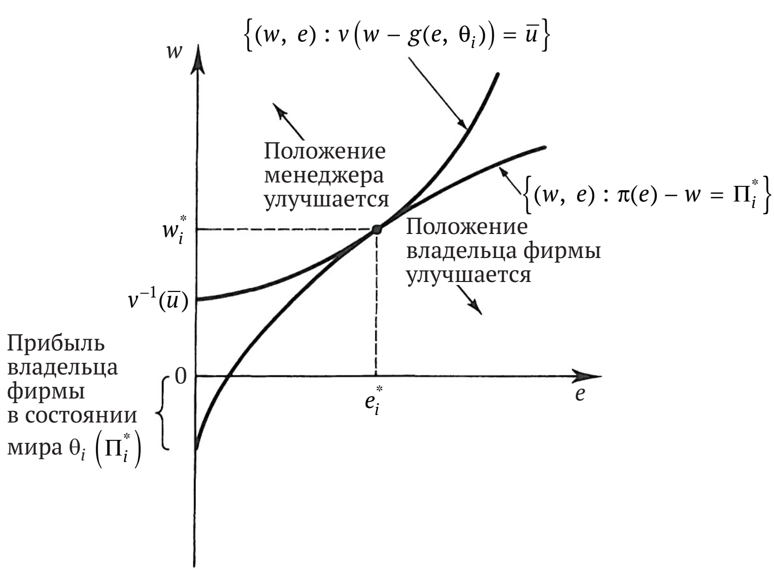


Рис. 14.C.1. Оптимальная пара «заработная плата — уровень усилий» в состоянии мира θ_i, когда состояния мира наблюдаемы

ности равна расстоянию между началом координат и точкой, в которой изопрофита, проходящая через точку $\left(w_i^*,\ e_i^*\right)$, пересекает вертикальную ось (поскольку $\pi(0) = 0$, то, если заработная плата в этой точке на вертикальной оси равна $\hat{w} < 0$, прибыль владельца фирмы в точке $\left(w_i^*,\ e_i^*\right)$ составляет в точности $-\hat{w}$).

Из условия (14.C.7) следует, что при $g_{e\theta}(e, \theta) < 0$, $\pi''(e) < 0$ и $g_{ee}(e, \theta) > 0$ выполнено следующее соотношение: $e_H^* > e_L^*$. Оптимальный контракт $\left[\left(w_H^*,\ e_H^*\right),\ \left(w_L^*,\ e_L^*\right)\right]$ представлен на рис. 14.C.2.

Полученные выводы сведены в утверждение 14.C.1.

Утверждение 14.C.1. В модели принципал — агент с наблюдаемой переменной состояния мира θ оптимальный контракт включает уровень усилий e_i^* в состоянии мира θ_i, такой что $\pi'\left(e_i^*\right) = g_e\left(e_i^*,\ \theta_i\right)$, а менеджер полностью застрахован от риска, получая в каждом состоянии θ_i заработную плату w_i^*, такую что $v\left(w_i^* - g\left(e_i^*,\ \theta_i\right)\right) = \bar{u}$.

Таким образом, если менеджер строго не склонен к риску, то первый наилучший контракт характеризуется двумя основными особенностями: во-первых, владелец фирмы полностью страхует менеджера от риска; во-вторых, он заставляет менеджера работать так, чтобы предельная выгода от прилагаемых усилий в точности равнялась их предельным издержкам. Поскольку предельные издержки от прилагаемых усилий в состоянии мира θ_H ниже, чем в состоянии мира θ_L, то в состоянии мира θ_H от менеджера требуется более высокий уровень усилий.

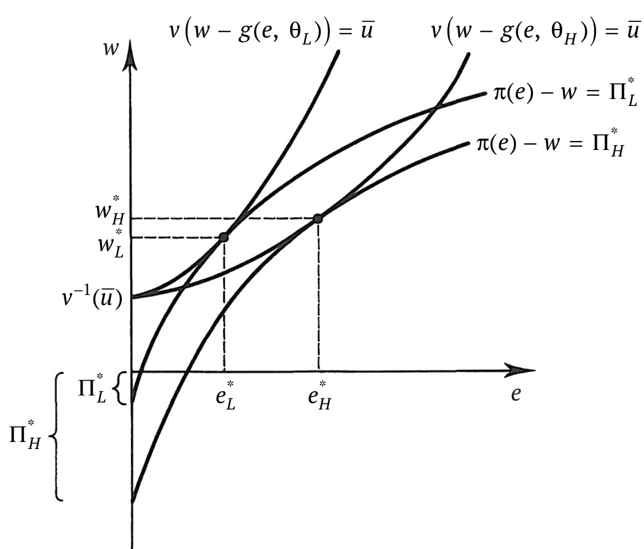


Рис. 14.C.2. Оптимальный контракт, когда состояние мира θ наблюдаемо и для менеджера, и для владельца фирмы

Состояние мира θ наблюдаемо только менеджером

Как и в разделе 14.B, при асимметрии информации желание застраховать не склонного к риску менеджера, с одной стороны, и при этом добиться определенного уровня усилий — с другой, вступают в противоречие.

Предположим, например, что владелец фирмы предлагает не склонному к риску менеджеру контракт, изображенный на рис. 14.C.2, и позволяет менеджеру добровольно сообщить, какое состояние мира реализовалось. Но тогда у владельца фирмы возникают проблемы. Как видно из рисунка, в состоянии мира θ_H менеджер предпочтет точку $\left(w_L^*,\ e_L^*\right)$ контракту $\left(w_H^*,\ e_H^*\right)$. Как следствие, в состоянии мира θ_H он будет *лгать* владельцу фирмы, утверждая, что в действительности имеет место состояние мира θ_L. И очевидно, такой подлог снижает прибыль владельца фирмы.

Но каков тогда должен быть оптимальный контракт, предлагаемый владельцем фирмы? Для ответа на этот вопрос необходимо сначала идентифицировать множество возможных контрактов, которые собственник может предложить. Можно представить себе контракты самых разных форм. Например, владелец фирмы может предложить функцию компенсации $w(\pi)$, так что оплата менеджера будет зависеть от реализации прибыли, а выбор уровня усилий в каждом состоянии мира останется на усмотрение менеджера. С другой стороны, владелец фирмы мог бы предложить схему компенсации $w(\pi)$, но в некоторой степени ограничить возможность выбора уровня усилий менеджером. Другая возможность: владелец фирмы мог бы предложить схему компенсации, зависящую от наблюдаемого уровня усилий, выбираемого менеджером, возможно, опять-таки при некоторых ограничениях на допустимый выбор. Наконец, можно представить и более сложные схемы. Например, от менеджера можно потребовать сообщать, какое именно состояние реализовалось, а затем позволить ему самому выбрать уровень усилий, исходя из функции компенсации $w(\pi \mid \hat{\theta})$, зависящей от анонсированного состояния мира $\hat{\theta}$.

Однако поиск оптимального контракта среди всех возможных форм может оказаться весьма трудной задачей, поэтому приведенный далее важный результат, известный как *принцип выявления*, существенно упрощает анализ задачи выбора оптимального контракта[13].

Утверждение 14.C.2 (*принцип выявления*). Обозначим множество возможных состояний через Θ. Тогда, выбирая оптимальный контракт, владелец фирмы без потерь может ограничиться рассмотрением контрактов следующего вида:

1) После того как состояние θ реализовалось, менеджер должен объявить, какое именно состояние наступило.

[13] Работы (Myerson, 1979; Dasgupta, Hammond, Maskin, 1979) — одни из первых, где обсуждался принцип выявления.

2) В контракте специфицируется исход $\left[w(\hat{\theta}),\ e(\hat{\theta})\right]$ для каждого состояния $\hat{\theta} \in \Theta$, которое может быть объявлено.
3) В каждом состоянии $\theta \in \Theta$ в оптимуме менеджер *правдиво* сообщает о том, какое именно состояние реализовалось.

Контракт, который требует от менеджера объявлять состояние θ и в котором специфицируются соответствующие исходы при различных объявленных состояниях, называется *механизмом выявления*. Принцип выявления гласит, что владелец фирмы может ограничиться использованием механизма выявления, на который менеджер всегда реагирует правдивым описанием состояния мира. Механизм выявления, обладающий таким свойством «правдивости», называется *совместимым по стимулам* (или *правдивым*) механизмом выявления. Принцип выявления справедлив в очень широком диапазоне задач со стимулами. Мы приведем его формальное доказательство (в наиболее общем виде) в главе 23 (см. разделы 23.C и 23.D), но основная его идея довольно очевидна.

Например, предположим, что владелец фирмы предлагает контракт со схемой компенсации $w(\pi)$, оставив выбор уровня усилий на усмотрение менеджера. Обозначим результирующие уровни усилий в состояниях θ_L и θ_H через e_L и e_H соответственно. Покажем, что тогда существует механизм выявления правдивой информации, порождающий в точности такой же исход, что и данный контракт. Итак, пусть владелец фирмы использует механизм выявления с исходом $\left[w(\pi(e_L)),\ e_L\right]$, если менеджер объявляет состояние мира θ_L, и с исходом $\left[w(\pi(e_H)),\ e_H\right]$, если менеджер сообщает, что реализовалось состояние θ_H. Рассмотрим, каковы стимулы менеджера предоставлять правдивую информацию о том, какое состояние реализовалось при таком механизме выявления. Предположим сначала, что реализовалось состояние мира θ_L. При первоначальном контракте со схемой компенсации $w(\pi)$ менеджер может получить исход $\left[w(\pi(e_H)),\ e_H\right]$ в состоянии θ_L, выбрав уровень усилий e_H. Поскольку он вместо этого выбирает уровень усилий e_L, то в состоянии мира θ_L для менеджера исход $\left[w(\pi(e_L)),\ e_L\right]$ должен быть, по крайней мере, не хуже, чем исход $\left[w(\pi(e_H)),\ e_H\right]$. Таким образом, при предложенном механизме выявления, если реализовалось состояние мира θ_L, то оптимальная реакция менеджера — говорить правду. Аналогично можно рассмотреть и случай реализации состояния мира θ_H. Мы видим, что данный механизм выявления приводит к правдивому сообщению информации менеджером и дает тот же самый исход, что и первоначальный контракт. На самом деле, аналогичные рассуждения можно провести для *любого* первоначального контракта (см. главу 23), и поэтому владелец фирмы действительно может ограничиться, без каких-либо потерь, рассмотрением только механизмов выявления правдивой информации[14].

[14] Здесь для наглядности изложения мы ограничиваемся рассмотрением таких исходов, когда менеджер однозначно сообщает, какое состояние мира реализовалось, т. е. это сообщение носит не стохастический характер (в действительности эта предпосылка используется

Для того чтобы упростить описание оптимального контракта, мы, начиная с этого момента, ограничимся рассмотрением специального случая несклонности к риску со стороны менеджера, называемого *бесконечной* несклонностью к риску. В частности, будем считать, что ожидаемая полезность менеджера равна наименьшему уровню полезности менеджера в двух возможных состояниях мира. Таким образом, для того чтобы менеджер согласился подписать контракт, он должен быть таким, чтобы менеджер получал полезность не ниже $\bar{u}$ в каждом состоянии мира[15]. Как и ранее, эффективное распределение риска требует, чтобы бесконечно не склонный к риску менеджер получал полезность, равную $\bar{u}$, в каждом состоянии мира. Если, например, его полезность равна $\bar{u}$ в одном состоянии и $u' > \bar{u}$ в другом, то ожидаемые выплаты заработной платы для владельца фирмы выше, чем те, которые необходимы, чтобы обеспечить менеджеру ожидаемую полезность, равную $\bar{u}$.

Тогда при сделанных предположениях о предпочтениях менеджера в отношении риска принцип выявления позволяет нам записать задачу владельца фирмы следующим образом:

$$\max_{w_H, e_H \geq 0, w_L, e_L \geq 0} \lambda[\pi(e_H) - w_H] + (1-\lambda)[\pi(e_L) - w_L] \qquad (14.C.8)$$

при

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ w_L - g(e_L, \theta_L) \geq v^{-1}(\bar{u}) \\ (2)\ w_H - g(e_H, \theta_H) \geq v^{-1}(\bar{u}) \end{array}\right\}$$ *условие участия* (или *индивидуальной рациональности*),

$$\left.\begin{array}{l} (3)\ w_H - g(e_H, \theta_H) \geq w_L - g(e_L, \theta_H) \\ (4)\ w_L - g(e_L, \theta_L) \geq w_H - g(e_H, \theta_L) \end{array}\right\}$$ *условие совместимости по стимулам* (или *условие использования правдивых стратегий*, или *условие самоотбора*).

Пары (w_H, e_H) и (w_L, e_L), специфицируемые в контракте, — это заработная плата и уровень усилий при различных *объявлениях* менеджера о реализовавшемся состоянии мира, т. е. если менеджер сообщает, что реализовалось состояние мира θ_i, то получает исход (w_i, e_i). Ограничения (1) и (2) —

и в большинстве работ по данной теме). Но иногда имеет смысл рассматривать рандомизацию, поскольку в этом случае больше шансов, что условие совместимости по стимулам задачи (14.C.8) будет выполнено (например, см. работу (Maskin, Riley, 1984a)).

[15] Это можно трактовать как предельный случай, когда мы в качестве бернуллевской функции полезности менеджера используем вогнутое преобразование вогнутой функции полезности $v(x)$: $v_p(v) = -v(x)^\rho$, где $\rho < 0$, и устремляем ρ к $-\infty$. Действительно, следует заметить, что ожидаемая полезность менеджера на случайных исходах, когда он получает $(w_H - g(e_H, \theta_H))$ с вероятностью λ и $(w_L - g(e_L, \theta_L))$ — с вероятностью $(1-\lambda)$, составляет тогда $EU = -\left[\lambda v_H^\rho + (1-\lambda)v_L^\rho\right]$, где $v_i = v(w_i - g(e_i, \theta_i))$ при $i = L, H$. При преобразовании $(-EU)^{1/\rho} = \left[\lambda v_H^\rho + (1-\lambda)v_L^\rho\right]^{1/\rho}$ упорядочение исходов не изменится. Теперь возьмем $\rho \to -\infty$, тогда $\left[\lambda v_H^\rho + (1-\lambda)v_L^\rho\right]^{1/\rho} \to \min\{v_H, v_L\}$ (см. упражнение 3.C.6). Таким образом, контракт приносит менеджеру ожидаемую полезность выше, чем (гарантированная) резервная полезность, тогда и только тогда, когда $\min\left\{v(w_H - g(e_H, \theta_H)), v(w_L - g(e_L, \theta_L))\right\} \geq \bar{u}$.

это *условия участия* (или *индивидуальной рациональности*) для бесконечно не склонного к риску менеджера. Если он соглашается на контракт, то должен гарантированно в каждом состоянии мира получить полезность не ниже $\overline{u}$. Следовательно, должно быть выполнено условие $v(w_i - g(e_i, \theta_i)) \geq \overline{u}$ при $i = L, H$, что эквивалентно условию $w_i - g(e_i, \theta_i) \geq v^{-1}(\overline{u})$ при $i = L, H$. Условия (3) и (4) — это *условия совместимости по стимулам* (или *условия использования правдивых стратегий*, или *условия самоотбора*) для менеджера в состояниях мира θ_L и θ_H соответственно. Рассмотрим, например, ограничение (3). Полезность менеджера в состоянии θ_H равна $v(w_H - g(e_H, \theta_H))$, если он дает правдивую информацию, и $v(w_L - g(e_L, \theta_H))$, если он, напротив, утверждает, что реализовалось состояние мира θ_L. Таким образом, он будет говорить правду, если $w_H - g(e_H, \theta_H) \geq w_L - g(e_L, \theta_H)$. Условие (4) получается аналогично.

Заметим, что первый наилучший контракт (при полной наблюдаемости состояний мира), изображенный на рис. 14.C.2, не удовлетворяет ограничениям задачи (14.C.8), поскольку нарушается ограничение (3).

Мы проанализируем задачу (14.C.8), последовательно доказав ряд лемм, сопровождая при этом доказательства графическим анализом, позволяющим интуитивно понять полученные результаты. Анализ данной задачи с помощью условий Куна — Таккера приведен в приложении B.

Лемма 14.C.1. Условие (2) мы можем не учитывать. Другими словами, контракт является решением задачи (14.C.8) тогда и только тогда, когда он является решением задачи, полученной из задачи (14.C.8) с помощью исключения ограничения (2).

Доказательство. Если оба условия, (1) и (3), выполнены, то $w_H - g(e_H, \theta_H) \geq w_L - g(e_L, \theta_H) \geq w_L - g(e_L, \theta_L) \geq v^{-1}(\overline{u})$, а значит, условие (2) также выполнено. Из этого следует, что множество допустимых контрактов в задаче, полученной из задачи (14.C.8) исключением ограничения (2), будет в точности таким же, как и множество допустимых контрактов для задачи (14.C.8). ■

Лемма 14.C.1 проиллюстрирована на рис. 14.C.3. Согласно условию (1) точка (w_L, e_L) должна лежать в затемненной области рисунка. По ограничению (3) точка (w_H, e_H) должна лежать на кривой безразличия в состоянии θ_H, проходящей через точку (w_L, e_L), или выше нее. Как нетрудно заметить, это означает, что полезность менеджера в состоянии θ_H должна быть не ниже $\overline{u}$, полезности, которую он получает в точке $(w, e) = \left(v^{-1}(\overline{u}), 0\right)$.

Следовательно, с этого момента мы можем более не учитывать условие (2).

Лемма 14.C.2. Для оптимального контракта в задаче (14.C.8) должно быть выполнено: $w_L - g(e_L, \theta_L) = v^{-1}(\overline{u})$.

Доказательство. Предположим, что это не так, т. е. существует решение задачи $[(w_L, e_L), (w_H, e_H)]$, которое удовлетворяет условию $w_L - g(e_L, \theta_L) > v^{-1}(\overline{u})$. Теперь предположим, что владелец фирмы

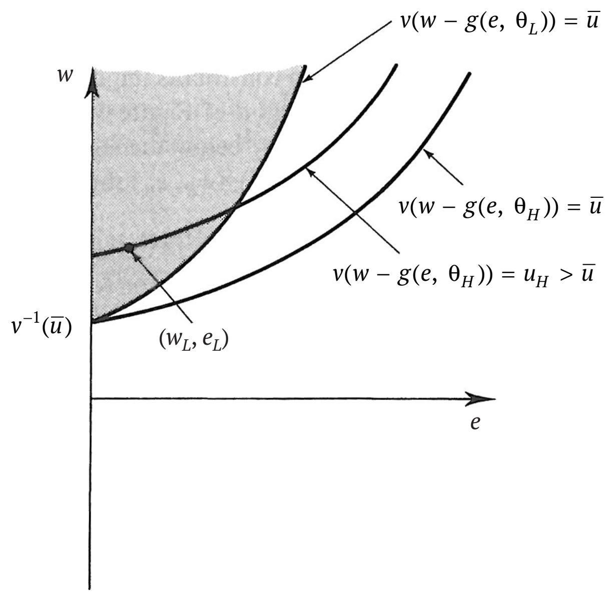


Рис. 14.C.3. Условие (2) задачи (14.C.8) выполнено для любых контрактов, удовлетворяющих условиям (1) и (3)

предлагает другой контракт, в котором $\hat{w}_L = w_L - \varepsilon$ и $\hat{w}_H = w_H - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ (т. е. владелец фирмы в обоих состояниях мира снижает заработную плату на ε). Этот новый контракт по-прежнему удовлетворяет условию (1) при достаточно малом ε, и, кроме того, по-прежнему выполнено условие совместимости по стимулам, поскольку при таком изменении мы просто вычитаем константу ε из обеих частей неравенства. Но если этот новый контракт удовлетворяет всем ограничениям, то исходный контракт не может быть оптимальным, поскольку новый контракт приносит владельцу фирмы бóльшую прибыль. Таким образом, мы пришли к противоречию. ■

Лемма 14.C.3. В любом оптимальном контракте выполнено:

1) $e_L \le e_L^*$, т. е. уровень усилий менеджера в состоянии мира θ_L не выше, чем уровень усилий при наблюдаемом θ.
2) $e_H = e_H^*$, т. е. уровень усилий менеджера в состоянии θ_H будет точно таким же, как и при наблюдаемом θ.

Доказательство. Лемму 14.C.3 гораздо легче понять с помощью рисунка. По лемме 14.C.2 в любом оптимальном контракте пара (w_L, e_L) принадлежит множеству $\{(w,\ e) : v(w - g(e,\ \theta_L)) = \bar{u}\}$. На рис. 14.C.4 изображена одна такая возможная пара $(\hat{w}_L,\ \hat{e}_L)$. Кроме того, из условия использования правдивых стратегий следует, что исход в состоянии θ_H, (w_H, e_H), должен лежать в затемненной области рис. 14.C.4. Действительно, по условию (4) точка (w_H, e_H) должна лежать на кри-

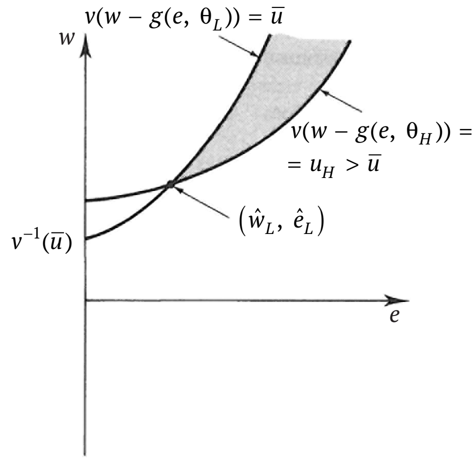


Рис. 14.С.4. В допустимом контракте, в котором пара $(\hat{w}_L, \hat{e}_L)$ предлагается в состоянии мира θ_L, точка (w_H, e_H) должна лежать в затемненной области

вой безразличия в состоянии θ_L, проходящей через точку $(\hat{w}_L, \hat{e}_L)$, или под ней. А по условию (3) точка (w_H, e_H) должна лежать на кривой безразличия в состоянии θ_H, проходящей через точку $(\hat{w}_L, \hat{e}_L)$, или над ней.

Докажем часть (1). Рассмотрим контракт, в котором $\hat{e}_L > e_L^*$. Подобный контракт проиллюстрирован на рис. 14.С.5: точка $(\hat{w}_L, \hat{e}_L)$ лежит на кривой безразличия менеджера в состоянии θ_L, соответствующей уровню полезности $\overline{u}$, а точка (w_H, e_H) — в затемненной

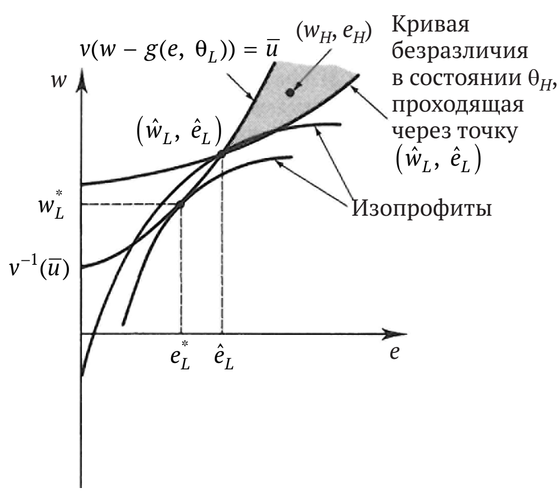


Рис. 14.С.5. В оптимальном контракте $e_L \leq e_L^*$

области, описываемой ограничениями использования правдивых стратегий. Кривая безразличия менеджера в состоянии θ_L и изопрофита владельца фирмы, проходящая через точку $(\hat{w}_L, \hat{e}_L)$, пересекаются в точке $(\hat{w}_L, \hat{e}_L)$, поскольку $\hat{e}_L > e_L^*$.

Как видно из рисунка, владелец фирмы может повысить свою прибыль в состоянии мира θ_L, сместив пару «заработная плата — уровень усилий» для состоянии мира θ_L вниз, вдоль кривой безразличия менеджера, проходящей через точку $(\hat{w}_L, \hat{e}_L)$, в первую наилучшую точку (w_L^*, e_L^*). Контракт, полученный в результате такого изменения, по-прежнему будет удовлетворять всем ограничениям задачи (14.С.8): полезность менеджера в каждом состоянии мира остается неизменной и, как видно из рис. 14.С.5, ограничения по использованию правдивых стратегий также выполнены. Таким образом, контракт, в котором $\hat{e}_L > e_L^*$, не может быть оптимальным.

Теперь рассмотрим часть (2). При любой данной паре «заработная плата — уровень усилий» $(\hat{w}_L, \hat{e}_L)$, где $\hat{e}_L \leq e_L^*$, такой, как показано на рис. 14.С.6, задача владельца фирмы заключается в том, чтобы найти такую точку (w_H, e_H) в затемненной области, в которой достигалась бы наибольшая прибыль в состоянии мира θ_H. Таким решением будет точка касания кривой безразличия менеджера в состоянии мира θ_H, проходящей через точку $(\hat{w}_L, \hat{e}_H)$, и изопрофиты владельца фирмы. На рисунке эта точка касания обозначена через $(\tilde{w}_H, e_H^*)$, и уровень усилий в этой точке с необходимостью равен e_H^*, поскольку все точки касания кривой безразличия менеджера в состоянии θ_H и изопрофит владельца фирмы характеризуются уровнем усилий e_H^* (что следует из условия (14.С.7) при $i = H$). Обратите внимание, что эта точка касания должна лежать правее точки с уровнем усилий $\hat{e}_L$, поскольку $\hat{e}_L \leq e_L^* < e_H^*$. ■

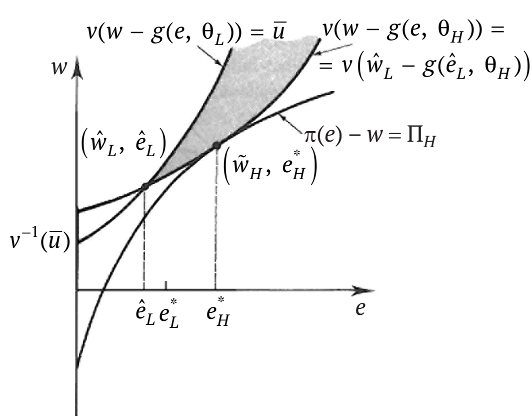


Рис. 14.С.6. В оптимальном контракте $e_H = e_H^*$

Из доказательства леммы 14.C.3 следует, что в оптимальном контракте связывающим будет только ограничение по использованию правдивых стратегий в состоянии мира θ_H. Это свойство выполнено и во многих других приложениях данной модели, рассматриваемых в экономической литературе[16].

Лемма 14.C.4. В любом оптимальном контракте $e_L < e_L^*$, т. е. уровень усилий в состоянии θ_L с необходимостью *строго* ниже уровня усилий, который был бы в состоянии θ_L при наблюдаемом θ.

Доказательство. Для доказательства снова воспользуемся графической иллюстрацией. Предположим, что мы находимся в точке $(w_L, e_L) = (w_L^*, e_L^*)$, отмеченной на рис. 14.C.7. Тогда по лемме 14.C.3 исходом состояния θ_H будет пара $(\tilde{w}_H, e_H^*)$. Заметим, что по определению (w_L^*, e_L^*) изопрофита, проходящая через эту точку, касается кривой безразличия менеджера в состоянии θ_L.

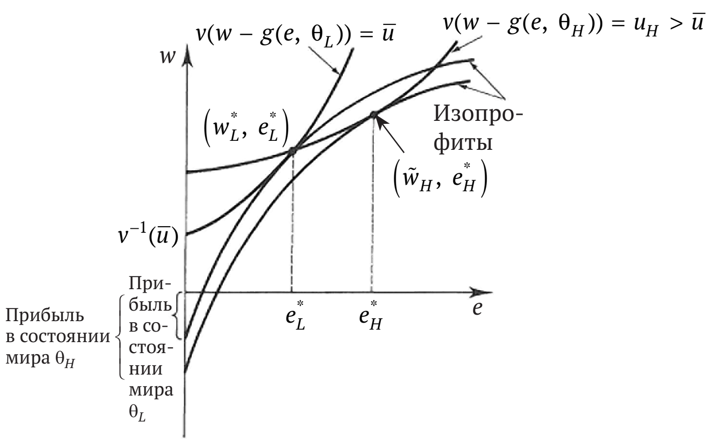


Рис. 14.C.7. Наилучший контракт, в котором $e_L = e_L^*$

Как вы помните, по абсолютной величине расстояние от начала координат до точки, где изопрофиты пересекают вертикальную ось, равно прибыли, получаемой владельцем фирмы в соответствующем состоянии мира. Таким образом, совокупная ожидаемая прибыль владельца фирмы от данного контракта равна среднему из двух данных уровней прибыли (где в качестве весов усреднения взяты вероятности наступления состояний мира).

Теперь покажем, что изменение исхода в состоянии мира θ_L, связанное со снижением уровня усилий в этом состоянии до уровня

[16] В моделях с более чем двумя типами состояний это означает, что только условие совместимости по стимулам для соседних типов будет связывающим (см. упражнение 14.C.1).

чуть ниже e_L^*, с необходимостью приводит к росту ожидаемой прибыли владельца фирмы. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим переход из точки, соответствующей исходу в состоянии θ_L, в точку $(\hat{w}_L, \hat{e}_L)$, лежащую чуть ниже на кривой безразличия менеджера в состоянии θ_L. Это изменение показано на рис. 14.C.8, где также представлена изопрофита, проходящая через эту новую точку. Как видно из рис. 14.C.8(a), данное изменение приводит к снижению прибыли владельца фирмы в состоянии θ_L. Однако это также ослабляет ограничение совместимости по стимулам на исход в состоянии θ_H, что позволяет владельцу фирмы предлагать более низкую заработную плату в этом состоянии. На рис. 14.C.8(b) показаны новый исход в состоянии θ_H, $(\hat{w}_H, e_H^*)$, и новая изопрофита (соответствующая более высокому уровню прибыли), проходящая через эту точку.

В совокупности такое изменение приводит к снижению прибыли владельца фирмы в состоянии θ_L и увеличению прибыли в состоянии θ_H. Однако следует заметить, что поскольку мы начинали движение из точки касания (w_L^*, e_L^*), то потери в прибыли в состоянии θ_L относительно невелики по сравнению с ее увеличением в состоянии θ_H. Действительно, если мы посмотрим на производную при-

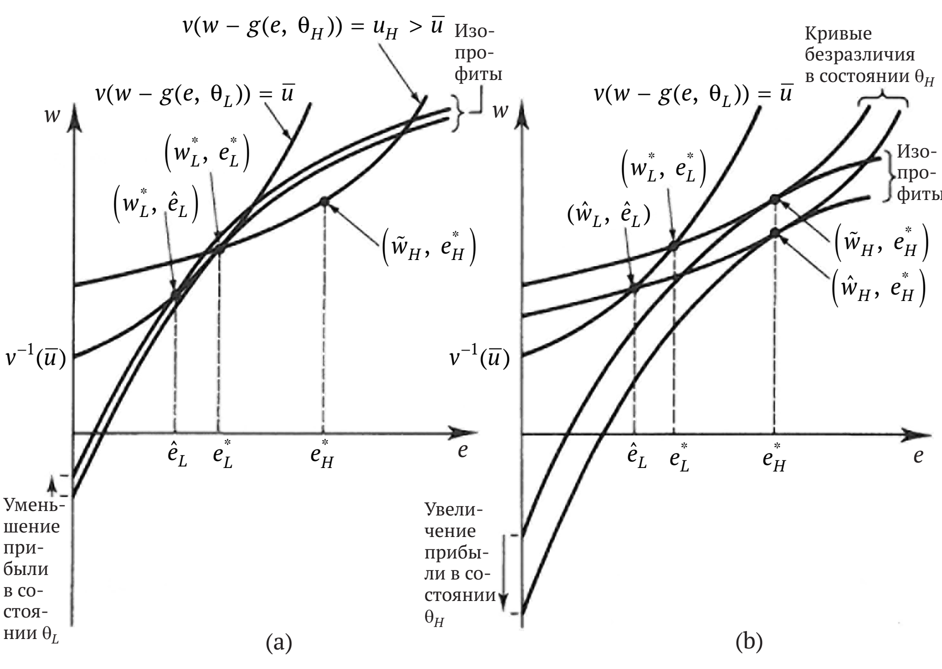


Рис. 14.C.8. (a) Изменение прибыли в состоянии θ_L в результате уменьшения e_L до величины, чуть меньшей e_L^*. (b) Изменение прибыли в состоянии θ_H в результате уменьшения e_L до величины, чуть меньшей e_L^*, и оптимальной корректировки w_H

были владельца фирмы в состоянии θ_L по *инфинитезимальному* изменению исхода в этом состоянии, то увидим, что она равна *нулю*. Тогда как производная прибыли в состоянии θ_H по такому инфинитезимальному изменению будет строго положительна. Нулевая производная в состоянии θ_L — это результат теоремы об огибающей: поскольку мы начали движение из точки с первым наилучшим уровнем усилий в состоянии θ_L, то небольшое изменение (w_L, e_L), такое что менеджер по-прежнему в состоянии θ_L получает уровень полезности $\bar{u}$, не оказывает влияния первого порядка на прибыль владельца фирмы в этом состоянии, но поскольку это приводит к ослаблению условия совместимости по стимулам в состоянии θ_H, то при достаточно небольшом изменении ожидаемая прибыль владельца фирмы возрастает. ■

Насколько сильно можно снижать уровень усилий e? Для ответа на этот вопрос владелец фирмы должен сопоставить предельное снижение прибыли в состоянии θ_L с предельным увеличением прибыли в состоянии θ_H (заметим, что поскольку мы сдвинулись из точки $(w_L^*,\ e_L^*)$, то теорема об огибающей более неприменима, а предельное уменьшение прибыли в состоянии θ_L строго положительно). Неудивительно, что результат зависит от относительных вероятностей наступления состояний мира. В частности, чем больше вероятность наступления состояния θ_H, тем в большей степени будет выражено желание владельца фирмы изменить исход в состоянии θ_L, с тем чтобы увеличить прибыль в состоянии θ_H. В крайнем случае, когда вероятность состояния θ_L близка к нулю, владелец фирмы может положить $e_L = 0$ и привлекать менеджера к работе только в состоянии θ_H[17].

Анализ, представленный в приложении B, подтверждает такой интуитивный вывод. В этом приложении мы показываем, что оптимальный уровень e_L удовлетворяет следующему условию первого порядка:

$$\left[\pi'(e_L) - g_e(e_L,\ \theta_L)\right] + \frac{\lambda}{1-\lambda}\left[g_e(e_L, \theta_H) - g_e(e_L,\ \theta_L)\right] = 0. \quad (14.C.9)$$

Первый член этого выражения при $e_L = e_L^*$ равен нулю и строго положителен при $e_L < e_L^*$. Второй член всегда строго отрицателен. Таким образом, это условие выполняется только при $e_L < e_L^*$, что подтверждает справедливость леммы 14.C.4. Дифференцирование данного выражения позволяет заключить, что оптимальный уровень усилий e_L снижается с ростом $\lambda/(1-\lambda)$.

Подытожим вышесказанное утверждением 14.C.3.

Утверждение 14.C.3. В модели со скрытой информацией принципал — агент с бесконечно не склонным к риску менеджером в оптимальном контракте уровень усилий в состоянии θ_H равен первому наилучшему (т. е. как в случае полной наблюдаемости усилий) уровню

[17] В действительности этот случай может иметь место, только если $g_e(0, \theta_L) > 0$.

усилий e_H^*. Уровень усилий в состоянии θ_L ниже первого наилучшего уровня e_L^*. Кроме того, менеджер оказывается неэффективно застрахованным: он получает уровень полезности выше $\bar{u}$ в состоянии θ_H и полезность, равную $\bar{u}$, в состоянии θ_L. Ожидаемая прибыль владельца фирмы строго меньше ожидаемой прибыли, получаемой им при наблюдаемом θ, тогда как ожидаемая полезность бесконечно не склонного к риску менеджера будет такой же, как и при наблюдаемом состоянии мира θ (равной $\bar{u}$)[18,19].

Важным моментом общего характера, вытекающим из нашего анализа, является то, что в оптимальном контракте владелец фирмы в условиях скрытой информации с необходимостью *искажает* выбор уровня усилий менеджера по сравнению со случаем полной информации, с тем чтобы компенсировать издержки, связанные с асимметрией информации, что в данном случае выражается в более высокой ожидаемой заработной плате, поскольку в состоянии θ_H менеджер получает полезность выше $\bar{u}$.

Следует заметить, что ничего не изменится, если уровень прибыли π не будет наблюдаемым (а значит, не может быть прописан в контракте), поскольку наш анализ базируется только на факте наблюдаемости уровня усилий e. Более того, в случае когда уровень прибыли π ненаблюдаем, мы можем развить модель, предположив, что взаимосвязь между прибылью и уровнем усилий e зависит от состояния мира, т. е. считая, что прибыль владельца фирмы в состояниях θ_L и θ_H при данном уровне усилий e описывается функциями $\pi_L(e)$ и $\pi_H(e)$[20]. Если $\pi'_H(e) \geq \pi'_L(e) > 0$ для всех $e \geq 0$, то анализ такой модели подобен описанному выше (см. упражнение 14.C.5).

Как и в случае моделей со скрытыми действиями, в экономической литературе описан ряд основных направлений развития рассмотренной модели. Большая часть исследований проводится в контексте «дизайна механизмов» в теории общественного выбора. Обсуждению этих моделей будет посвящена глава 23.

Модель монополистического скрининга

В разделе 13.D мы рассмотрели модель *конкурентного скрининга*, в которой фирмы пытаются так составить контракты для нанимаемых работников, чтобы можно было провести различие между работниками, которые в момент подписания контракта

[18] Напомним, что ожидаемая полезность бесконечно не склонного к риску менеджера равна наименьшему уровню полезности в двух возможных состояниях мира.

[19] Однако следует отметить, что, хотя исход неэффективен по Парето, он тем не менее условно Парето-оптимален (см. раздел 13.B). Обосновать это можно подобно тому, как мы это делали в сноске 9 раздела 14.B для модели со скрытыми действиями (но следует учесть, что в данном случае ненаблюдаемо состояние мира θ, а не уровень усилий e).

[20] Ненаблюдаемость прибыли при такой модификации модели играет важную роль, поскольку если бы уровень прибыли π мог бы быть прописан в контракте, то менеджера можно было бы наказывать за то, что он неверно сообщает, какое состояние мира наступило, просто сравнив реализовавшийся уровень прибыли с уровнем прибыли, который должен был бы реализоваться в объявленном состоянии мира при специфицированном уровне усилий.

имеют различный ненаблюдаемый для фирмы уровень производительности (т. е. имеет место *предконтрактная* асимметрия информации). Техника, разработанная при исследовании модели принципал — агент со скрытой информацией, позволяет нам сформулировать и исследовать модель *монополистического скрининга*, когда, в отличие от модели из раздела 13.D, только одна фирма предлагает работникам контракты (возможно, правильнее было бы назвать эту модель моделью *монопсонистического скрининга*, поскольку спрос на труд на рассматриваемом рынке предъявляет только одна фирма).

Итак, предположим, как и в модели из раздела 13.D, что работники бывают двух типов, различаясь по уровню производительности. Работник типа θ имеет функцию полезности $u(w, t \mid \theta) = w - g(t, \theta)$, где w — заработная плата, а t — уровень задания для данного работника. Обозначим резервную полезность работника через $\bar{u}$. Производительности работников двух рассматриваемых типов равны θ_H и θ_L, причем $\theta_H > \theta_L > 0$. Доля работников типа θ_H равна $\lambda \in (0, 1)$. Будем считать, что прибыль фирмы (ненаблюдаемая характеристика) описывается функцией $\pi_H(t)$ для работников типа θ_H и $\pi_L(t)$ — для работников типа θ_L, причем $\pi'_H(t) \geq \pi'_L(t) > 0$ для всех $t \geq 0$ (например, как показано в упражнении 13.D.1, $\pi_i(t) = \theta_i(1 - \mu t)$ при $\mu > 0$)[21].

Задача фирмы заключается в том, чтобы предложить такое множество контрактов, которое доставляет максимум ее прибыли, при условии что работники выбирают наиболее предпочтительные контракты и действуют в рамках условий, описанных в контрактах. И снова принцип выявления существенно упрощает задачу фирмы. Здесь фирма может ограничиться предложением такого меню пар «заработная плата — уровень задания» $[(w_H, t_H), (w_L, t_L)]$, которое является решением следующей задачи:

$$\max_{w_H, t_H \geq 0, w_L, t_L \geq 0} \lambda[\pi_H(t_H) - w_H] + (1 - \lambda)[\pi_L(t_L) - w_L] \tag{14.C.10}$$

при

(1) $w_L - g(t_L, \theta_L) \geq \bar{u}$,

(2) $w_H - g(t_H, \theta_H) \geq \bar{u}$,

(3) $w_H - g(t_H, \theta_H) \geq w_L - g(t_L, \theta_H)$,

(4) $w_L - g(t_L, \theta_L) \geq w_H - g(t_H, \theta_L)$.

Эта задача имеет в точности такую же структуру, как и задача (14.C.8), с тем лишь отличием, что прибыль принципала (в данном случае фирмы) теперь зависит от состояния мира. Как отмечалось выше, исследование этой задачи проводится аналогично тому, как был проведен анализ задачи (14.C.8).

Этот класс моделей широко применяется в различных приложениях, рассматриваемых в экономической литературе (хотя зачастую в них предполагается континуум типов). Например, в работе (Maskin, Riley, 1984(b)) рассматривается приложение этой модели для исследования ценовой дискриминации, проводимой монополистом. В этой модели потребитель типа θ имеет функцию полезности $v(x, \theta) - T$, где x — объем потребления блага, производимого монополистом, а T — это совокупные расходы на это потребление, причем предполагается, что если потребитель не приобретает товар у монополиста, то он имеет резервный уровень полезности, равный $v(0, \theta) = 0$. Издержки производства единицы выпуска для монополиста постоянны и равны $c > 0$. Монополист предлагает меню, состоящее из пар (x_i, T_i), так, чтобы максимизировать свою прибыль. Тогда задача монополиста имеет тот же вид, что и задача (14.C.10), где $t_i = x_i$, $w_i = -T_i$, $\bar{u} = 0$, $g(t_i, \theta_i) = -v(x_i, \theta_i)$ и $\pi_i(t_i) = -cx_i$.

---

[21] Модель, рассмотренная в разделе 13.D, при $\pi_i(t) = \theta_i$ соответствует предельному случаю, когда $\mu \to 0$.

В работе (Baron, Myerson, 1982) анализируется оптимальное регулирование монополиста с неизвестными издержками — это еще один пример приложения данной модели. В работе предполагается, что регулируемая фирма сталкивается с рыночным спросом $x(p)$ и ненаблюдаемыми единичными издержками θ. Планировщик, стремящийся так выстроить политику регулирования, чтобы достичь максимума потребительского излишка, вынуждает монополиста выбирать из некоторого множества пар (p_i, T_i), где p_i — это разрешенная розничная цена, а T_i — трансферт, который планировщик выплачивает фирме. Предполагается также, что регулируемая фирма может прекратить производство, если она не может получить прибыль, по крайней мере равную нулю, соглашаясь на любое из предложений планировщика. Тогда задача планировщика аналогична задаче (14.C.10) при $t_i = p_i$, $w_i = T_i$, $u = 0$, $g(t_i,\ \theta_i) = -(p_i - \theta_i)x(p_i)$ и $\pi_i(t_i) = \int\limits_{p_i}^{\infty} x(s)ds$ [22].

В упражнениях 14.C.7– 14.C.9 вас просят проанализировать некоторые примеры моделей монополистического скрининга.

14.D. Скрытые действия и скрытая информация: гибридные модели

Модели скрытых действий и скрытой информации можно рассматривать как удобную отправную точку для понимания моделей принципал — агент, однако во многих реальных ситуациях (а также в некоторых моделях, рассмотренных в экономической литературе) встречаются элементы, присущие обеим ситуациям.

Рассмотрим пример такой модели. Модифицируем простую модель со скрытой информацией, рассмотренную в разделе 14.C, следующим образом: предположим, что теперь уровень усилий e ненаблюдаем, а прибыль является случайной функцией от уровня усилий, описываемой функцией условной плотности распределения $f(\pi \mid e)$. Тогда по существу мы получаем модель со скрытыми действиями, но такую, что владельцу фирмы также неизвестны и издержки менеджера (характеризуемые переменной состояния θ).

Формальный анализ этой модели выходит за рамки данной главы, но основная идея принципа выявления применима и для анализа гибридных задач такого типа. В частности, как показано в работе (Myerson, 1982), владелец фирмы может ограничиться рассмотрением контрактов следующего вида:

1) После того как состояние θ реализовалось, менеджер сообщает, какое именно состояние мира наступило.
2) В контракте для каждого возможного объявленного менеджером состояния мира $\hat{\theta} \in \Theta$ специфицируется уровень усилий, который должен прилагать менеджер, $e(\hat{\theta})$, и схема оплаты $w(\pi \mid \hat{\theta})$.

[22] Целевая функция планировщика может быть обобщена так, чтобы представлять собой взвешенное среднее излишков потребителя и производителя, где больший вес имеют потребители. В этом случае функция $\pi_i(\cdot)$ будет зависеть от θ_i.

3) В каждом состоянии θ менеджеру выгодно не только *правдиво* сообщать о наступлении состоянии мира на шаге (1), но и *послушно* выполнять задание на шаге (2) (т. е. оптимальным для менеджера является выбор уровня усилий $e(\theta)$ в состоянии мира θ).

Такой контракт можно рассматривать как игру на выявление, но такую, в которой исход сообщения менеджером о реализовавшемся состоянии мира представляет собой контракт, подобный контракту со скрытыми действиями, т. е. схему компенсации и «рекомендованное действие». «Послушность» менеджера обеспечивается условием совместимости по стимулам, подобным тому, с которым мы сталкивались в модели со скрытыми действиями в разделе 14.B; а ограничение на «правдивость» — это обобщение тех ограничений, которые мы видели в модели со скрытой информацией. Более подробно с этой моделью можно ознакомиться в работе (Myerson, 1982).

Особо следует отметить один специальный случай гибридной модели, поскольку его анализ сводится к анализу модели со скрытой информацией, рассмотренной в разделе 14.C. Итак, предположим, что уровень усилий ненаблюдаем, но взаимосвязь между уровнем усилий и прибылью *детерминирована* и описывается функцией $\pi(e)$. В этом случае при любом объявленном менеджером состоянии мира $\hat{\theta}$ можно реализовать любую желаемую пару «заработная плата — уровень усилий», скажем $(\hat{w}, \hat{e})$, с помощью «вынуждающей» схемы компенсации, т. е. такой, когда менеджер получает заработную плату $\hat{w}$, если прибыль равна $\pi(\hat{e})$, а в противном случае его заработная плата составляет $-\infty$. Таким образом, сочетание наблюдаемости уровня прибыли π и взаимооднозначного соответствия между π и e позволяет эффективно специфицировать в контракте уровень усилий e. А значит, данная модель исследуется аналогично модели со скрытой информацией, рассмотренной в разделе 14.C, в которой пары «заработная плата — уровень усилий» могут непосредственно специфицироваться как функции от объявленного менеджером состояния мира.

На ситуацию можно посмотреть и немного с другой стороны. Заметим, во-первых, что в силу наличия возможности заключения «вынуждающих» контрактов оптимальный контракт в этой модели можно рассматривать как такой, в котором для каждого объявленного состояния мира $\hat{\theta}$ специфицируется пара «заработная плата — уровень прибыли», $\left(w(\hat{\theta}), \pi(\hat{\theta})\right)$. Тогда для любого требуемого уровня прибыли π уровень усилий $\tilde{e}$ с необходимостью будет таким, чтобы уровень прибыли π достигался, т. е. $\pi(\tilde{e}) = \pi$. Пусть такой уровень усилий описывает функция $\tilde{e}(\pi)$. Теперь мы можем считать, что функция издержек от прилагаемых менеджером усилий непосредственно зависит от уровня прибыли, т. е. $\tilde{g}(\pi, \theta) = g(\tilde{e}(\pi), \theta)$. Но такая модель подобна модели с наблюдаемым уровнем усилий, где переменной, описывающей уровень усилий, является π, функция издержек от усилий имеет вид $\tilde{g}(\pi, \theta)$, а функция прибыли равна $\tilde{\pi}(\pi) = \pi$. Таким образом, анализ данной модели сводится к анализу модели со скрытой информацией.

Аналогичные рассуждения применимы и к гибридным моделям, в которых вместо издержек приложения усилий менеджером рассматривается взаимосвязь между прибылью и усилиями, зависящими от состояния мира. Итак, предположим, что издержки приложения усилий описываются функцией $g(e)$, а прибыль — функцией $\pi(e, \theta)$, где $\pi_e(\cdot) > 0$, $\pi_{ee}(\cdot) < 0$, $\pi_\theta(\cdot) > 0$ и $\pi_{e\theta}(\cdot) > 0$. Уровень усилий ненаблюдаем, тогда как прибыль — наблюдаемая величина. Идея заключается в том, что менеджеру известно больше, чем владельцу фирмы, о реальных возможностях получения прибыли для данной фирмы (например, предельная производительность усилий). И снова мы можем считать, что в контракте для каждого объявленного менеджером состояния мира специфицируются пары «заработная плата — прибыль» (т. е. неявно предполагается, что контракты носят «вынуждающий» характер). В этом контексте уровень усилий, при котором должен достигаться любой заданный уровень прибыли π в состоянии θ, задается функцией $\hat{e}(\pi, \theta)$, а соответствующие издержки для менеджера описываются функцией $\hat{g}(\pi, \theta) = g(\hat{e}(\pi, \theta))$. Но эта модель также эквивалентна базовой модели со скрытой информацией и наблюдаемым уровнем усилий: для того чтобы убедиться в этом, просто возьмем в качестве переменной усилий π, функции издержек от усилий — $\hat{g}(\pi, \theta)$, а функции прибыли — $\hat{\pi}(\pi) = \pi$. И тогда вновь окажутся применимыми результаты, полученные в разделе 14.С.

Приложение А. Множественность уровней усилий в модели со скрытыми действиями

В этом приложении мы рассмотрим вопросы, возникающие в том случае, когда выбор уровня усилий в модели со скрытыми действиями (модели морального риска), описанной в разделе 14.В, осуществляется несколько более сложным образом, чем в простом случае двух уровней усилий $e \in \{e_L, e_H\}$, изученном ранее. Здесь мы вернемся к рассмотрению задачи в более общей постановке, изначально представленной в разделе 14.В, обозначив через E допустимое множество уровней усилий.

Как и в разделе 14.В, мы можем разбить задачу принципала (владельца фирмы) на несколько частей, отвечающих на следующие вопросы:

a) Какие уровни усилий e можно реализовать?
b) Каков оптимальный контракт, порождающий каждый возможный уровень усилий $e \in E$?
c) Каков оптимальный уровень усилий $e \in E$?

При множественности действий менеджера ответить на каждый из трех данных вопросов становится несколько сложнее. Например, в случае всего двух действий ответ на пункт (а) тривиален: уровня усилий e_L можно добиться с помощью контракта с фиксированной заработной платой, а уровень усилий e_H может быть реализован с помощью стимулов, которые достаточно сильны при исходах, которые с наибольшей вероятностью наступят при выборе уровня усилий e_H. Однако в случае более двух уровней усилий картина может измениться. Например, рассмотрим случай с тремя действиями, когда $E = \{e_L, e_M, e_H\}$, а функции условной плотности имеют графики, представленные на рис. 14.AA.1. Как видно из рисунка, может оказаться, что невозможно создать такие стимулы, чтобы менеджер выбрал уровень усилий e_M, поскольку при любой оплате $w(\pi)$ агент предпочтет либо e_L, либо e_H уровню усилий e_M. (Аналогичный пример приведен в упражнении 14.B.4.)

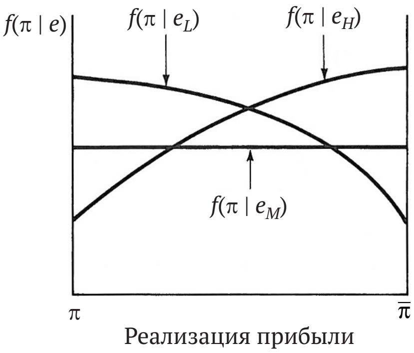


Рис. 14.AA.1. Функции плотности при $E = \{e_L, e_M, e_H\}$: уровень усилий e_M может оказаться нереализуемым

Ответ на вопрос пункта (b) также усложняется. Оптимальный контракт для реализации уровня усилий e теперь является решением следующей задачи:

$$\min_{w(\pi)} \int w(\pi) f(\pi \mid e) d\pi \tag{14.AA.1}$$

при

(1) $\int v(w(\pi)) f(\pi \mid e) d\pi - g(e) \geq \bar{u}$

(2) e является решением задачи $\max\limits_{\tilde{e} \in E} \int v(w(\pi)) f(\pi \mid \tilde{e}) d\pi - g(\tilde{e})$.

Если множество E содержит K возможных действий, то условия совместимости по стимулам в задаче (14.AA.1) (ограничения (2)) состоят из $(K - 1)$ ограничений, которые должны быть выполнены. В этом случае при изменении переменной, по которой мы максимизируем уровень полезности менеджера при условии получения прибыли π, скажем $\bar{v}(\pi)$, мы получаем задачу с K линейными ограничениями и выпуклой целевой функцией (см. более подробно в работе (Grossman, Hart, 1983) и сноску 7).

Однако если E — непрерывное множество возможных действий, например $E = [0, \bar{e}] \subset \mathbb{R}$, то мы можем получить *бесконечно* много условий совместимости по стимулам. В этом случае иногда используют такой прием: для упрощения задачи (14.AA.1) ограничение (2) заменяют на *условие первого порядка* (такой подход иногда называется *подходом первого порядка*). Например, если e — одномерная характеристика уровня усилий, то условия первого порядка задачи менеджера имеют вид

$$\int v(w(\pi)) f_e(\pi \mid e) d\pi - g'(e) = 0, \tag{14.AA.2}$$

где $f_e(\pi \mid e) = \partial f(\pi \mid e) / \partial e$. Если мы заменим ограничение (2) на условие (14.AA.2) и решим полученную задачу, то придем к условию на $w(\pi)$, подобному (14.B.10):

$$\frac{1}{v'(w(\pi))} = \lambda + \mu\left[\frac{f_e(\pi \mid e)}{f(\pi \mid e)}\right]. \qquad (14.AA.3)$$

Условие возрастания отношения $[f_e(\pi \mid e)/f(\pi \mid e)]$ по π представляет собой дифференциальную версию свойства монотонности отношения правдоподобия (см. упражнение 14.AA.1).

Однако, вообще говоря, решение задачи, полученное при такой замене, необязательно будет решением задачи (14.AA.1). Дело в том, что условия первого порядка для агента (14.AA.2) могут выполняться даже в том случае, когда уровень усилий e не является для него оптимальным. Во-первых, уровень усилий e может доставлять *минимум*, а не максимум, а следовательно, нам по крайней мере нужно, чтобы локальное условие второго порядка выполнялось хотя бы локально. Но и этого недостаточно. В общем случае мы должны быть уверены, что целевая функция агента вогнута по e. Заметим, что это не так просто, поскольку вогнутость целевой функции по e зависит как от вида $f(\pi \mid e)$, *так и* от вида предлагаемого контракта $w(\pi)$. Известные предпосылки, гарантирующие выполнение этого условия, носят довольно ограничительный характер (подробнее см. в работах (Grossman, Hart, 1983; Rogerson, 1985b)). Очень простой пример подобной ситуации приведен в упражнении 14.AA.2.

Наконец, для ответа на вопрос (c) нам нужно найти оптимальный контракт из пункта (b) для каждого действия, которое в пункте (a) определено как реализуемое, а затем сравнить приносимую ими прибыль. В случае когда возможно более двух уровней усилий, не удается обобщить два свойства, присущие модели с двумя уровнями усилий. Во-первых, ненаблюдаемость может привести к искажению уровня усилий в сторону повышения (пример такой ситуации приведен в упражнении 14.B.4). Во-вторых, в оптимальном контракте в ненаблюдаемом случае мы можем получить *как* неэффективный уровень усилий, *так* и неэффективность, связанную с распределением риска между агентами.

Приложение B. Формальное решение задачи принципал — агент в случае скрытой информации

Рассмотрим задачу (14.C.8):

$$\max_{w_H, e_H \geq 0, w_L, e_L \geq 0} \lambda[\pi(e_H) - w_H] + (1-\lambda)[\pi(e_L) - w_L]$$

при

$$(1)\ w_L - g(e_L,\ \theta_L) \geq v^{-1}(\bar{u}),$$

$$(2)\ w_H - g(e_H,\ \theta_H) \geq v^{-1}(\bar{u}),$$

$$(3)\ w_H - g(e_H,\ \theta_H) \geq w_L - g(e_L,\ \theta_H),$$

$$(4)\ w_L - g(e_L,\ \theta_L) \geq w_H - g(e_H,\ \theta_L).$$

С учетом леммы 14.C.1 мы можем переписать задачу (14.C.8) в виде

$$\max_{w_H, e_H \geq 0, w_L, e_L \geq 0} \lambda[\pi(e_H) - w_H] + (1-\lambda)[\pi(e_L) - w_L] \qquad (14.\text{BB}.1)$$

при

$$(1)\ w_L - g(e_L,\ \theta_L) \geq v^{-1}(\bar{u}),$$

$$(3)\ w_H - g(e_H,\ \theta_H) \geq w_L - g(e_L,\ \theta_H),$$

$$(4)\ w_L - g(e_L,\ \theta_L) \geq w_H - g(e_H,\ \theta_L).$$

Обозначим через $(\gamma,\ \varphi_H,\ \varphi_L) \geq 0$ множители при ограничениях (1), (3) и (4) соответственно, тогда условия Куна — Таккера (см. раздел М.К математического приложения) для данной задачи примут вид

$$-\lambda + \varphi_H - \varphi_L = 0, \qquad (14.\text{BB}.2)$$

$$-(1-\lambda) + \gamma - \varphi_H + \varphi_L = 0, \qquad (14.\text{BB}.3)$$

$$\lambda\pi'(e_H) - \varphi_H g_e(e_H,\ \theta_H) + \varphi_L g_e(e_H,\ \theta_L) \begin{cases} \leq 0, \\ = 0, \text{ если } e_H > 0. \end{cases} \qquad (14.\text{BB}.4)$$

$$(1-\lambda)\pi'(e_L) - (\gamma + \varphi_L) g_e(e_L,\ \theta_L) + \varphi_H g_e(e_L,\ \theta_H) \begin{cases} \leq 0, \\ = 0, \text{ если } e_L > 0. \end{cases} \qquad (14.\text{BB}.5)$$

И, кроме того, должны быть выполнены условия дополняющей нежесткости для ограничений (1), (3) и (4) (условия (М.К.7)).

Разобьем анализ этих условий на несколько шагов.

Шаг 1. Из условия (14.BB.2) следует, что $\varphi_H > 0$. Таким образом, ограничение (3) должно быть связывающим (выполняться как равенство) в точке оптимума.

Шаг 2. Суммируя условия (14.BB.2) и (14.BB.3), получаем $\gamma = 1$. Следовательно, ограничение (1) должно быть связывающим в оптимальной точке.

Шаг 3. Переменные e_L и e_H строго положительны. Действительно, заметим, что условие (14. BB.4) при $e_H = 0$ не выполнено, поскольку $\pi'(0) > 0$ и $g_e(0,\ \theta_i) = 0$ при $i = L, H$. Аналогично условие (14.BB.5) не выполнено при $e_L = 0$.

Шаг 4. Из результатов шагов 1–3 следует, что $\varphi_L = 0$. Действительно, предположим, что это не так, т. е. $\varphi_L > 0$. Тогда ограничение (4) должно быть связывающим. Но тогда мы придем к противоречию. Сначала заменим φ_H в условиях (14.BB.4) и (14.BB.5) на $\varphi_H = \varphi_L + \lambda$ (что следует из условия (14.BB.2). Тогда, учитывая, что $(e_L,\ e_H) \gg 0$, мы можем представить условия (14.BB.4) и (14.BB.5) в следующем виде:

$$\lambda\left[\pi'(e_H) - g_e(e_H,\ \theta_H)\right] + \varphi_L\left[g_e(e_H,\ \theta_L) - g_e(e_H,\ \theta_H)\right] = 0$$

и

$$(1-\lambda)\left[\pi'(e_L) - g_e(e_L,\ \theta_H)\right] + (1+\varphi_L)\left[g_e(e_L,\ \theta_H) - g_e(e_L,\ \theta_L)\right] = 0.$$

Но поскольку по предположению $\varphi_L > 0$, то отсюда следует, что

$$\pi'(e_L) - g_e(e_L,\ \theta_H) > 0 > \pi'(e_H) - g_e(e_H,\ \theta_H).$$

А это означает, что $e_H > e_L$, поскольку $\pi(e) - g(e, \theta_H)$ вогнута по e. Но если $e_H > e_L$ и ограничение (3) является связывающим (а это следует из шага 1), то ограничение (4) должно выполняться как строгое неравенство, поскольку тогда выполнено:

$$(w_H - w_L) = g(e_H,\ \theta_H) - g(e_L,\ \theta_H) =$$

$$= \int_{e_L}^{e_H} g_e(e,\ \theta_H)de < \int_{e_L}^{e_H} g_e(e,\ \theta_L)de = g(e_H,\ \theta_L) - g(e_L,\ \theta_L).$$

Таким образом, мы пришли к противоречию.

Шаг 5. Поскольку $\varphi_L = 0$, то из условия (14.BB.2) следует, что $\varphi_H = \lambda$. Подставляя эти значения в условия (14.BB.4) и (14.BB.5), получим:

$$\pi'(e_H) - g_e(e_H,\ \theta_H) = 0 \tag{14.BB.6}$$

и

$$\left[\pi'(e_L) - g_e(e_L,\ \theta_L)\right] + \frac{\lambda}{1-\lambda}\left[g_e(e_L,\ \theta_H) - g_e(e_L,\ \theta_L)\right] = 0. \tag{14.BB.7}$$

Условия (14.BB.6) и (14.BB.7) характеризуют оптимальные значения e_H и e_L соответственно. Тогда оптимальные значения w_L и w_H определяются из ограничений (1) и (3), которые, как мы видели, на решении задачи выполняются как равенство.

Альтернативный подход к решению задачи (14.BB.1), не требующий громоздких рассуждений, основан на следующем приеме: решим задачу (14.BB.1), игнорируя ограничение (4). Затем покажем, что полученное решение также удовлетворяет ограничению (4). Но если это так, то мы нашли решение задачи (14.BB.1). (В упражнении 14.BB.1 вам предлагается воспользоваться этим подходом.)

Литература

Allen, F. (1985). Repeated principal-agent relationships with lending and borrowing. *Economic Letters* **17**: 27–31.

Baron, D., and R. Myerson (1982). Regulating a monopolist with unknown costs. *Econometrica* **50**: 911–930.

Bernheim, B.D., and M.D. Whinston (1986). Common agency. *Econometrica* **54**: 923–942.

Dasgupta, P., P. Hammond, and E.Maskin (1979). The implementation of social choice rules: Some results on incentive compatibility. *Review of Economic Studies* **46**: 185–216.

Dye, R. (1986). Optimal monitoring policies in agencies. *Rand Journal of Economics* **17**: 339–350.

Fudenberg, D., B. Holmstrom, and P. Milgrom (1990). Short-term contracts and long-term agency relationships. *Journal of Economic Theory* **52**: 194–206.

Green, J., and N. Stokey (1983). A comparison of tournaments and contests. *Journal of Political Economy* **91**: 349–364.

Grossman, S.J., and O.D. Hart (1983). An analysis of the principal-agent problem. *Econometrica* **51**: 7–45.

Hart, O.D., and B. Holmstrom (1987). The theory of contracts. In *Advances in Economic Theory. Firth World Congress*, edited by T. Bewley. New York: Cambridge University Press.

Holmstrom, B. (1979). Moral hazard and observability. *Bell Journal of Economics* **10**: 74–91.

Holmstrom, B. (1982). Moral hazard in teams. *Bell Journal of Economics* **13**: 324–340.

Holmstrom, B., and P. Milgrom (1987). Aggregation and linearity in the provision of intertemporal incentives. *Econometrica* **55**: 303–328.

Holmstrom, B., and P. Milgrom (1991). Multitask principal-agent analyses: Incentive contracts, asset ownership, and job design. *Journal of Law, Economics, and Organizations* **7**: 24–52.

Maskin, E., and J. Riley (1984a). Optimal auctions with risk averse buyers. *Econometrica* **52**: 1473–1518.

Maskin, E., and J. Riley (1984b). Monopoly with incomplete information. *Rand Journal of Economics* **15**: 171–196.

Milgrom, P. (1981). Good news and bad news: Representation theorems and applications. *Bell Journal of Economics* **12**: 380–391.

Myerson, R. (1979). Incentive compatibility and the bargaining problem. *Econometrica* **47**: 61–74.

Myerson, R. (1982). Optimal coordination mechanisms in generalized principal-agent problems. *Journal of Mathematical Economics* **10**: 67–81.

Nalebuff, B., and J.E. Stiglitz (1983).Prizes and incentives: Towards a general theory of compensation and competition. *Bell Journal of Economics* **13**: 21–43.

Rogerson, W. (1985a). Repeated moral hazard. *Econometrica* **53**: 69–76.

Rogerson, W. (1985b). The first-order approach to principal-agent problems. *Econometrica* **53**: 1357–1368.

Упражнения

14.B.1$^{\text{B}}$. Рассмотрите модель со скрытыми действиями с двумя уровнями усилий, изложенную в разделе 14.B, для общего вида функции полезности агента, $u(w, e)$. Будет ли условие участия в оптимальном контракте связывающим в этом случае?

14.B.2$^{\text{B}}$. Выведите условие первого порядка, характеризующее оптимальную схему компенсации для модели со скрытыми действиями с двумя уровнями усилий из раздела 14.B, в случае когда принципал строго не склонен к риску.

14.B.3$^{\text{B}}$. Рассмотрите модель со скрытыми действиями для случая, когда владелец фирмы нейтрален к риску, а предпочтения менеджера определены относительно математического ожидания и дисперсии его дохода w и уровня усилий e следующим образом: ожидаемая полезность равна $E[w] - \varphi\text{Var}(w) - g(e)$, где $g'(0) = 0$, $(g'(e), g''(e),$

$g'''(e)) >> 0$ для всех $e > 0$, причем $\lim\limits_{e\to\infty} g'(e) = \infty$. Возможные уровни усилий таковы: $e \in \mathbb{R}_+$. Зависящие от уровня усилий реализации прибыли нормально распределены с математическим ожиданием e и дисперсией σ^2.

a) Рассмотрите линейные схемы компенсации вида $w(\pi) = \alpha + \beta\pi$. Покажите, что ожидаемая полезность менеджера при данных $w(\pi)$, e и σ^2 имеет вид: $\alpha + \beta e - \varphi\beta^2\sigma^2 - g(e)$.

b) Найдите оптимальный контракт при наблюдаемом e.

c) Найдите оптимальную линейную схему компенсации при ненаблюдаемом e. Какое влияние на нее оказывает изменение параметров β и σ^2?

14.B.4$^{\text{B}}$. Рассмотрите модель со скрытыми действиями с тремя уровнями усилий, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$. Пусть возможны два уровня прибыли: $\pi_H = 10$ и $\pi_L = 0$. Вероятности получения прибыли π_H при трех возможных уровнях усилий таковы: $f(\pi_H \mid e_1) = 2/3$, $f(\pi_H \mid e_2) = 1/2$ и $f(\pi_H \mid e_3) = 1/3$. Для агента издержки приложения усилий составляют: $g(e_1) = 5/3$, $g(e_2) = 8/5$, $g(e_3) = 4/3$. Наконец, $u(w) = \sqrt{w}$, и резервная полезность менеджера равна нулю, т. е. $\bar{u} = 0$.

a) Вычислите оптимальный контракт при наблюдаемых усилиях.

b) Покажите, что если усилия ненаблюдаемы, то уровень усилий e_2 нереализуем. При каких значениях $g(e_2)$ уровень усилий e_2 можно было бы реализовать? (*Подсказка*: рассмотрите уровни полезности менеджера при двух исходах, v_L и v_H[23], а не саму заработную плату.)

c) Найдите оптимальный контракт при ненаблюдаемых усилиях.

d) Предположим теперь, что $g(e_1) = \sqrt{8}$, и пусть $f(\pi_H \mid e_1) = x \in (0, 1)$. Каков будет оптимальный контракт в этом случае, если усилия наблюдаемы, при x, стремящемся к 1? Найдите оптимальный контракт при x, стремящемся к 1, если усилия ненаблюдаемы. Что можно сказать о том, как соотносится уровень реализуемых усилий (выше/ниже) при ненаблюдаемых усилиях по сравнению с наблюдаемыми при x, стремящемся к 1?

14.B.5$^{\text{B}}$. Пусть в модели со скрытыми действиями, изложенной в разделе 14.B, менеджер может не только выбирать уровень усилий, но и, после того как становится известно, какая прибыль фирмы π реализовалась, снижать ненаблюдаемо для владельца фирмы уровень усилий, но так, что это не приносит ему прямой выгоды (например, он может добровольно предложить заплатить больше за факторы производства). Покажите, что в этом случае всегда существует оптимальная схема стимулирования, не убывающая по наблюдаемой прибыли.

---

[23] В соответствии с опечатками, указанными в решебнике, v_1 и v_2 заменены на v_L и v_H соответственно. — *Примеч. пер.*

14.B.6[B]. Модифицируем модель с двумя уровнями усилий, изложенную в разделе 14.B, следующим образом. Предположим, что теперь усилия оказывают непосредственное влияние на выручку фирмы R и издержки C, где $\pi = R - C$. Обозначим через $f_R(R \mid e)$ и $f_C(C \mid e)$ функции плотности распределения R и C в зависимости от e и будем считать, что R и C (обусловленные e) распределены независимо. Пусть $R \in [\underline{R}, \bar{R}]$, $C \in [\underline{C}, \bar{C}]$ и для всех e выполнено: $f_R(R \mid e) > 0$ для всех $R \in [\underline{R}, \bar{R}]$ и $f_C(C \mid e) > 0$ для всех $C \in [\underline{C}, \bar{C}]$.

В данном случае менеджер делает выбор из двух уровней усилий $\{e_R, e_C\}$, где e_R — уровень усилий, требующий больше времени для увеличения дохода фирмы и меньше времени для снижения издержек, а для e_C — наоборот, т. е. предполагается, что $F_R(R \mid e_R) < F_R(R \mid e_C)$ для всех $R \in (\underline{R}, \bar{R})$ и $F_C(C \mid e_C) > F_C(C \mid e_R)$ для всех $C \in (\underline{C}, \bar{C})$. Кроме того, будем считать, что выполнено условие монотонности отношения правдоподобия для каждой из данных переменных, т. е. $[f_R(R \mid e_R)/f_R(R \mid e_C)]$ возрастает по R и $[f_C(C \mid e_R)/f_C(C \mid e_C)]$ возрастает по C. Наконец, будем считать, что менеджер предпочитает увеличение дохода фирмы снижению издержек, т. е. $g(e_C) > g(e_R)$.

a) Пусть владелец фирмы хотел бы реализовать уровень усилий e_C, когда R и C наблюдаемы. Выведите условия первого порядка, характеризующие оптимальную схему компенсации $w(R, C)$. Как она зависит от R и C?

b) Как изменится ответ на пункт (a), если менеджер всегда может ненаблюдаемо для владельца фирмы снизить доход фирмы (не имея при этом прямой выгоды для себя)?

c) Что изменится, если, кроме того, издержки фирмы ненаблюдаемы, так что оплата труда может быть обусловлена только доходом фирмы?

14.B.7[C]. Рассмотрите двухпериодную модель, представляющую собой двукратное повторение модели со скрытыми действиями и двумя уровнями усилий, описанной в разделе 14.B. Будем считать, что прибыль фирмы и выплаты менеджеру не дисконтируются. Ожидаемая полезность менеджера, описывающая его предпочтения в двух периодах, представляет собой сумму его ожидаемых полезностей в однопериодной игре, т. е. $E[v(w) - g(e)]$, где $v'(\cdot) > 0$ и $v''(\cdot) < 0$.

Будем считать, что контракт может быть подписан ex ante, так что выигрыш в каждом периоде представляет собой функцию от выполнения контракта к данному моменту. Будет ли в оптимальном контракте заработная плата второго периода зависеть от прибыли первого периода?

14.B.8[C]. Модифицируем модель со скрытыми действиями и двумя уровнями усилий, рассмотренную в разделе 14.B, следующим образом. Предположим, что принципал может с издержками c получить дополнительный сигнал $\tilde{y}$ об уровне усилий, прилагаемых агентом. Совместное распределение прибыли π и сигнала y, условное по e, описывается функцией $f(\pi, y \mid e)$. Решение о получении сигнала y может быть принято после наблюдения прибыли π. Таким образом, в контракте теперь специфицируется схема заработной платы $w(\pi)$, в случае когда принимается решение не выяснять значение y, и схема заработной платы $w(\pi, y)$ в противном случае, а также вероятность $p(\pi)$ определения сигнала y в зависимости от прибыли π. Охарактеризуйте оптимальный контракт при реализации уровня усилий e_H.

14.C.1$^{\mathbf{C}}$. Проанализируйте развитие модели со скрытой информацией, изложенной в разделе 14.C, на случай произвольного конечного числа состояний $(\theta_1, \ldots, \theta_N)$, где $\theta_{i+1} > \theta_i$ для всех i.

14.C.2$^{\mathbf{B}}$. Рассмотрим модель со скрытой информацией, изложенную в разделе 14.C, но предположим теперь, что менеджер нейтрален к риску, т. е. его функция полезности имеет вид: $v(w) = w$. Покажите, что владелец фирмы в этом случае, когда состояние θ ненаблюдаемо, может вести себя так же, как если бы оно было наблюдаемо. В частности, покажите, что он может добиться этого, предложив менеджеру контракт со схемой компенсации вида $w(\pi) = \pi - \alpha$ и позволив менеджеру самому выбирать любой уровень усилий, какой он пожелает. Приведите график данной функции и проиллюстрируйте выбор менеджера в пространстве (w, e). Какой механизм выявления позволил бы получить такой же исход?

14.C.3$^{\mathbf{B}}$. Пусть в модели со скрытой информацией и двумя состояниями, изложенной в разделе 14.C, $u(w, e, \theta) = v(w) - g(e, \theta)$.

a) Охарактеризуйте оптимальный контракт, когда состояния природы наблюдаемы.

b) Будет ли этот контракт допустимым, когда состояние θ ненаблюдаемо?

14.C.4$^{\mathbf{C}}$. Охарактеризуйте решение двухшаговой модели принципал — агент со скрытой информацией, когда менеджер не склонен к риску, но не бесконечно не склонен к риску.

14.C.5$^{\mathbf{B}}$. Докажите, что анализ, проведенный в разделе 14.C, не изменился бы, если бы ненаблюдаемая прибыль владельца фирмы зависела от состояния мира и если через $\pi_i(e)$ обозначить прибыль в состоянии θ_i, где $i = L, H$, то $\pi'_H(e) \geq \pi'_L(e) > 0$ для всех $e \geq 0$. Что произойдет, если это условие не будет выполнено?

14.C.6$^{\mathbf{C}}$. Вернемся к рассмотрению модели скрининга на рынке труда из упражнения 13.D.1, но предположим теперь, что существует единственная фирма-работодатель. Охарактеризуйте решение задачи фирмы в модели скрининга (считайте, что резервная полезность работников обоих типов равна 0). Сравните уровни задания в полученном решении с равновесными уровнями задания в модели конкурентного скрининга (предполагая, что равновесие существует), найденными в упражнении 13.D.1.

14.C.7$^{\mathrm{B}}$. (J. Tirole). Пусть продукцию фирмы приобретают потребители двух типов: θ_H и θ_L. Доля потребителей типа θ_L равна λ. Функция полезности потребителя типа θ, приобретающего x единиц блага, с совокупными расходами на покупку T имеет вид: $u(x, T) = \theta v(x) - T$, где

$$v(x) = \frac{1 - (1 - x)^2}{2}.$$

Фирма является единственным производителем данного блага, и ее издержки производства единицы выпуска составляют $c > 0$.

a) Пусть фирма ведет себя как недискриминирующий монополист. Какова должна быть ее оптимальная политика ценообразования? Покажите, что она будет обслуживать потребителей обоих типов, если либо θ_L, либо λ достаточно велики.

b) Предположим теперь, что фирма-монополист может различать потребителей разных типов (по некоторой характеристике), но может взимать только простую цену p_i с потребителя типа θ_i. Охарактеризуйте оптимальные цены.

c) Предположим теперь, что фирма-монополист не в состоянии различать потребителей разных типов. Найдите оптимальный двухставочный тариф (ценообразование, состоящее из паушальной платы F и линейной цены p за приобретаемую единицу продукции), считая, что монополист обслуживает потребителей обоих типов. Проинтерпретируйте полученный результат. В каком случае монополист будет обслуживать потребителей обоих типов?

d) Вычислите оптимальный нелинейный тариф. Как объемы потребления для потребителей обоих типов будут отличаться от уровней потребления в пунктах (a)–(c)?

14.C.8$^{\mathrm{B}}$. «Эйр Шангри-ла» — единственная авиакомпания, совершающая рейсы между островами Шангри-ла и Нирваной. Пассажиры авиакомпании делятся на два типа: туристы и бизнесмены. Бизнесмены готовы заплатить за перелет больше, чем туристы. Однако авиакомпания не может знать наверняка, является пассажир, приобретающий билет, туристом или поездка носит деловой характер. Однако пассажиры различаются по тому, сколько они готовы платить, чтобы не покупать билеты заранее. (Пассажирам в целом не нравится покупать билеты задолго до поездки на фиксированную дату.)

Итак, будем считать, что уровень полезности пассажиров обоих типов за вычетом цены билета P для любого заданного временного интервала W до поездки, когда приобретается билет, имеет вид:

$$\text{\textit{бизнесмены}}: v - \theta_B P - W,$$

$$\text{\textit{туристы}}: v - \theta_T P - W,$$

где $0 < \theta_B < \theta_T$. (Обратите внимание, что для любого заданного W бизнесмены готовы заплатить больше за любое данное сокращение времени W.)

Доля туристов составляет λ. Будем считать, что издержки перевозки пассажира составляют c.

В пунктах (a)–(d) считайте, что авиакомпания «Эйр Шангри-ла» предпочитает обслуживать пассажиров обоих типов.

a) Изобразите кривые безразличия пассажиров обоих типов в пространстве (P, W). Изобразите на том же рисунке изопрофиты авиакомпании. Выпишите формальную математическую задачу (максимизации прибыли) авиакомпании «Эйр Шангри-ла». (*Подсказка*: включите как ограничение задачи условие неотрицательности цен, поскольку если авиакомпания установит отрицательную цену, то она сможет продать бесконечно большое число билетов по данной цене.)

b) Покажите, что в оптимальном решении туристам безразлично, покупать билет или вообще не лететь.

c) Покажите, что в оптимальном решении бизнесмены никогда не будут покупать билет заранее, и в этом случае они получают такую же полезность, как если бы покупали билеты в то же время, что и туристы (по той же цене).

d) Опишите оптимальную схему ценовой дискриминации, считая, что авиакомпания продает билеты пассажирам обоих типов. Как она зависит от параметров λ, θ_B, θ_T и c?

e) В каком случае авиакомпания «Эйр Шангри-ла» предпочтет обслуживать только бизнесменов?

14.C.9$^{\text{C}}$. Рассмотрите не склонного к риску индивида, предпочтения которого описываются функцией ожидаемой полезности с бернуллевской функцией полезности $u(\cdot)$. Пусть первоначальное богатство индивида равно W, но с вероятностью θ он может понести потери L, где $W > L > 0$.

Страховой контракт может быть описан парой (c_1, c_2), где c_1 — богатство индивида в случае отсутствия потерь, а c_2 — богатство индивида в случае потерь. В случае отсутствия потерь индивид платит страховой компании сумму $(W - c_1)$, а в случае потерь получает от страховой компании выплату $[c_2 - (W - L)]$.

a) Предположим, индивид может приобрести страховку только у нейтрального к риску монополиста (т. е. монополист руководствуется максимизацией ожидаемой прибыли). Опишите контракт, который монополист предложит индивиду, в случае когда вероятность потерь θ наблюдаема.

b) Предположим теперь, что страховая компания не может наблюдать величину θ (тогда как индивиду она известна). Пусть параметр θ может принимать только два значения: $\{\theta_L, \theta_H\}$, где $\theta_H > \theta_L > 0$, и $\text{Prob}(\theta_L) = \lambda$. Опишите оптимальный контракт, предлагаемый монополистом. Можно ли сказать, что индивид одного из типов подвергается «рационированию» при покупке полиса (т. е. при справедливой страховке он хотел бы застраховаться на бóльшую сумму, если бы у него была такая возможность)? Объясните интуитивно, в чем различие такого рационирования? (*Подсказка*: для лучшего понимания задачи имеет смысл привести графическую иллюстрацию в пространстве (c_1, c_2), отметив точку первоначального запаса индивида, т. е. такие уровни богатства, когда он вообще не покупает страховку.)

c) Сравните свое решение задачи **(b)** с ответом из упражнения 13.D.2.

14.AA.1$^{\text{B}}$. Покажите, что $[f_e(\pi \mid e)/f(\pi \mid e)]$ возрастает по π для всех $e \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда для любых $e', e'' \in [a, b]$, где $e'' > e'$, $[f(\pi \mid e'')/f(\pi \mid e')]$ возрастает по π.

14.AA.2$^{\text{B}}$. Рассмотрите модель со скрытыми действиями, где $e \in [0, \bar{e}]$ и возможны два исхода, π_L и π_H, $\pi_H > \pi_L$. Вероятность исхода π_H при данном уровне усилий e равна $f(\pi_H \mid e)$. Приведите достаточные условия применимости подхода, основанного на условиях первого порядка. Охарактеризуйте оптимальный контракт при выполнении этих условий.

14.BB.1$^{\text{B}}$. Попытайтесь решить задачу (14.BB.1), сначала найдя решение задачи без ограничения (4), а затем показав, что полученное решение действительно является решением задачи (14.BB.1).

Предметный указатель

Б

В

Г

Д

Е

З

И

К

Л

Н

O

П

Р

С

Т

У

Ф

Х

Ц

Ч

Э

Я

Учебное издание

Серия «Академический учебник»

Андреу Мас-Колелл, Майкл Д. Уинстон, Джерри Р. Грин

Микроэкономическая теория

Книга 1

Главный редактор *В. В. Анашвили*
Заведующая редакцией *Ю. В. Бандурина*
Выпускающий редактор *Е. В. Попова*
Литературный редактор *Н. Б. Бартошевич-Жагель*
Корректоры *Л. Ф. Королёва*, *Т. В. Редькина*
Художник *Е. Н. Спасская*
Оригинал-макет *О. З. Элоев*
Верстка *А. И. Попов*

Подписано в печать 27.05.2016. Формат $70\times108^{1}/_{16}$
Гарнитура PT Serif Pro. Усл. печ. л. 64,4.
Тираж 2000 (1:1000) экз. Изд № 1151. Заказ №

Издательский дом «Дело» РАНХиГС
119571, Москва, пр-т Вернадского, 82

Коммерческий центр — тел. (495) 433-2510, (495) 433-2502
www.ranepa.ru
delo@ranepa.ru