

Простые упражнения на темы спроса, предложения и эластичности.

Основы микроэкономики. НИУ ВШЭ

Этот листок содержит примеры простых упражнений, связанных с математическим аппаратом лекций второй недели. Если перед словом «задача» стоит крестик, то для решения данной задачи нужна чуть более продвинутая математика (скорее всего, умение брать производную). В задачах для самопроверки, где необходимо, приведены численные ответы. В ответах и решениях могут попасться опечатки и вычислительные ошибки. Сообщайте о них, пожалуйста!

1. Задания с решением.

Задача 1.

Рассмотрим линейные кривые рыночного спроса и предложения. Спрос задан уравнением: $Q_d = 100 - P$. Предложение задано уравнением $Q_s = 10 + 2P$.

1. Пусть рыночный спрос создают 100 потребителей с одинаковой функцией спроса. Найдите тогда индивидуальный спрос каждого из них.
2. Пусть рыночное предложение создается 10 фирмами с одинаковой функцией предложения. Найдите тогда индивидуальное предложение каждой из них.
3. Найдите равновесные цену и количество продукции на рынке.
4. При какой цене на рынке будет излишек, равный 30 (то есть величина предложения будет превышать величину спроса на 30)? Сначала, не считая, ответьте, будет эта цена выше равновесной или ниже, затем посчитайте ее.
5. При какой цене на рынке будет дефицит, равный 60 (то есть величина спроса будет превышать величину предложения на 60)? Сначала, не считая, ответьте, будет эта цена выше равновесной или ниже, затем посчитайте ее.
6. Пусть на рынок пришло еще 50 потребителей с такой же функцией спроса, как у находящихся на рынке. Как изменятся равновесные цена и количество? Сначала, не считая, ответьте, а затем посчитайте эти изменения.
7. На рынке опять 100 потребителей, но на него пришло еще 5 фирм с функцией предложения такой же, как у нынешних. Как изменятся равновесные цена и количество? Сначала, не считая, ответьте, а затем посчитайте эти изменения.
8. Пусть введен потоварный налог, равный 15. Найдите равновесные цены (теперь цена потребителя на 10 больше, чем цена производителя) и равновесное количество. Насколько отличаются цены потребителя и продавца от бывшей цены?

9. Посчитайте эластичности спроса и предложения по формуле из лекции: $E = \frac{(Q_2 - Q_1) / [(Q_2 + Q_1) / 2]}{(P_2 - P_1) / [(P_2 + P_1) / 2]}$. При этом за Q_1 возьмите равновесное количество -1 , за Q_2 – равновесное количество $+1$, то есть посчитайте эластичность вблизи равновесия (изначального, до налога). Убедитесь, что та группа, чья эластичность ниже по модулю, больше пострадает от налога (ее цена изменится сильнее при его введении).

Решение.

1. Пусть $q_d(P)$ - индивидуальный спрос. Тогда при суммировании 100 одинаковых функций при каждом уровне цены получаем $100q_d(P)$. Приравняем сумму индивидуальных спросов к рыночному и получим искомое выражение: $100q_d(P) = Q_d(P) \Rightarrow q_d(P) = (100 - P)/100 = 1 - 0,01P$.
2. Аналогично получаем: $10q_s(P) = Q_s(P)$, где $q_s(P)$ - индивидуальное предложение. Отсюда: $q_s(P) = (10 + 2P)/10 = 1 + 0,2P$.
3. Приравняем спрос и предложение и найдем равновесные значения (P_e, Q_e) .
 $10 + 2P_e = 100 - P_e \Rightarrow P_e = 30, Q_e = 70$
4. Цена должна быть выше равновесной, так как при этой цене величина предложения должна быть выше величины спроса: в равновесии они равны, при этом первое растет по цене второе убывает. Чтобы достичь искомого «преимущества» предложения над спросом, нужно увеличить цену.
 По условию у нас: $Q_s - Q_d = 30 \Rightarrow 3P - 90 = 30 \Rightarrow P = 40$. Действительно, цена оказалась выше равновесной.
5. Здесь такое же рассуждение, как в прошлом пункте, только цену нужно снизить, чтобы спрос превысил предложение.
 По условию у нас: $Q_d - Q_s = 60 \Rightarrow 90 - 3P = 60 \Rightarrow P = 10$. Цена ниже равновесной.
6. Вырастет спрос, следовательно, увеличатся и равновесная цена, и равновесное количество. При старой цене теперь купить готовы больше, чем продать (а продать готовы столько же, сколько раньше), значит, производители поднимут цены и продадут больше, чем раньше.
 Новое $Q_d(P)$ равно: $Q_d = 150q_d(P) = 150 - 1,5P$. Равновесие теперь задается парой (P'_e, Q'_e) :
 $10 + 2P'_e = 150 - 1,5P'_e \Rightarrow P'_e = 40, Q'_e = 90$ - цена и количество выросли.
7. Вырастет предложение, следовательно, увеличится равновесное количество, а цена упадет. При старой цене теперь продать готовы больше, чем купить (а купить готовы столько же, сколько раньше), значит, производители снизят цены и продадут больше, чем раньше.
 Новое $Q_s(P)$ равно: $Q_s = 15q_s(P) = 15 + 3P$. Равновесие теперь задается парой (P''_e, Q''_e) :
 $15 + 3P''_e = 100 - P''_e \Rightarrow P''_e = 21.25, Q''_e = 78.75$ - цена упала, количество выросло.
8. Введен потоварный налог, равный 15. Тогда цена потребителя (P_b) должна превышать цену производителя (P_s) на 15. Тогда: $P_b = P_s + 15$. Подставим P_s в предложение, P_b в спрос и найдем равновесное количество и цены. $Q_s(P_s) = Q_d(P_b) \Rightarrow 10 + 2P_s = 100 - P_b \Rightarrow 10 + 2P_s = 100 - (P_s + 15) \Rightarrow P_s = 25, P_b = 40, Q = 60$. Цена потребителя отличается на 10 от прошлой, продавца – на 5.

$$9. E_D^P = \frac{2/70}{(-2)/30} = -3/7$$

$$E_s^P = \frac{2/70}{(1)/30} = 6/7$$

Как видно, эластичность предложения по модулю больше. При этом цена продавцов при введении налога изменилась меньше.

Комментарий по поводу формулы эластичности.

На лекции давалось две формулы для вычисления эластичности: формула в процентах $(\frac{\Delta Q\%}{\Delta P\%})$ и формула дуговой эластичности, задающая эластичность на отрезке $(\frac{(Q_2-Q_1)/[(Q_2+Q_1)/2]}{(P_2-P_1)/[(P_2+P_1)/2]})$.

Однако в экономических моделях и задачах чаще используется формула точечной эластичности $E_P^D(P) = Q'_d(P) \frac{P}{Q}$. Несложно заметить, что она является приближением первых двух формул при малых отклонениях цен. Например, $\frac{\Delta Q\%}{\Delta P\%} = \frac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \frac{P}{Q} \approx Q'_d(P) \frac{P}{Q}$.

† Задача 2.

Используйте точечную формулу эластичности и рассчитайте ее значения при любом P (где определен спрос), то есть, запишите эластичность, как функцию от цены $E(P)$. Чему будут равны $E(1)$, $E(2)$, $E(6)$? Возрастает или убывает модуль $E(P)$ по цене?

$$1. Q_d = 12 - P$$

$$2. Q_d = a - bP, \text{ где } a \text{ и } b - \text{ произвольные положительные константы (здесь не считайте } E(1), E(2), E(6)).$$

$$3. Q_d = 12/P$$

$$4. Q_d = \frac{12}{P} + 1$$

Решение.

$$1. E(P) = -\frac{P}{12-P}$$

$E(1) = -1/11, E(2) = -1/5, E(6) = -1$. Модуль эластичности по цене растет.

$$2. E(P) = -b \frac{P}{a-bP} = \frac{-bP}{a-bP}$$

Модуль эластичности по цене растет $(|E(P)|' = \frac{b(a-bP)-b(-bp)}{(a-bP)^2} = \frac{ab}{(a-bP)^2} > 0)$.

$$3. E(P) = -\frac{12}{P^2} \frac{P}{12/P} = -1$$

$E(1) = E(2) = E(6) = -1$. Модуль эластичности по цене не меняется.

$$4. E(P) = -\frac{12}{P^2} \frac{P}{12/P+1} = -\frac{P+1}{P} = -1 - \frac{1}{P}$$

$E(1) = -2, E(2) = -3/2, E(6) = -7/6$. Модуль эластичности по цене падает.

Комментарий: Несмотря на то, что модуль эластичности $|E(P)|$ имеет вид P умножить на что-то положительное, он не всегда растет по P это зависит от поведения производной спроса.

† Задача 3.

Рассмотрим функцию спроса $Q_d = 10 - P$.

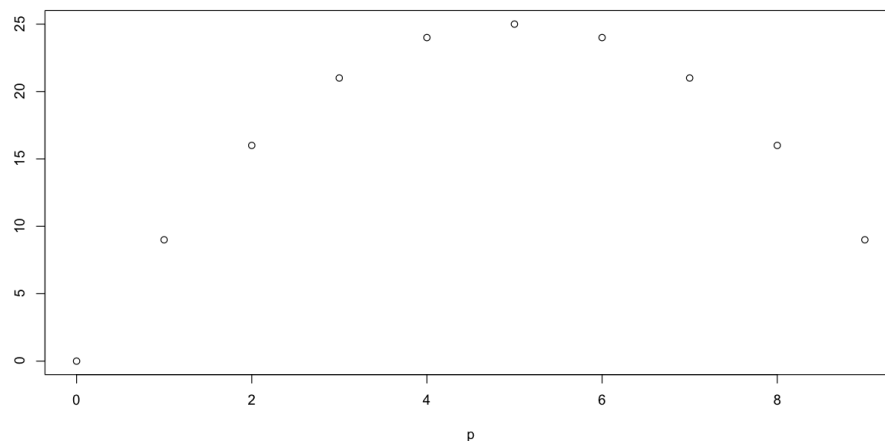
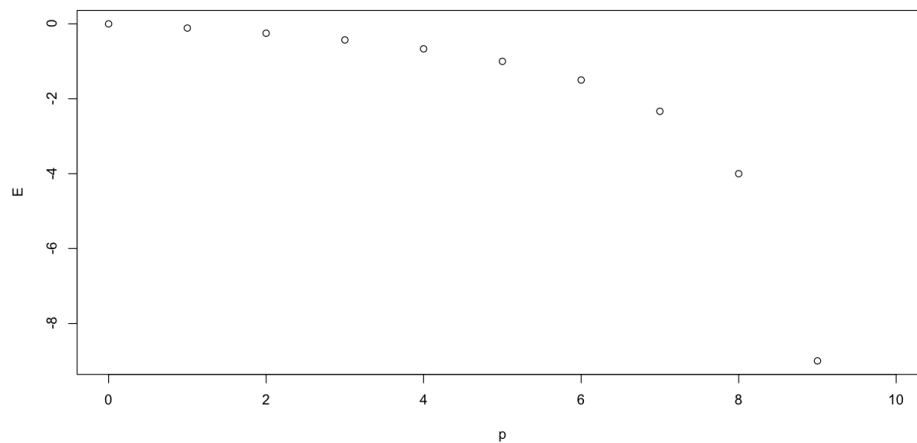
1. Посчитайте эластичность вблизи точек $Q = 1, 2, \dots, 10$ по формуле $E = \frac{(Q_2 - Q_1) / [(Q_2 + Q_1) / 2]}{(P_2 - P_1) / [(P_2 + P_1) / 2]}$. При этом за Q_1 возьмите данную точку -1 , за Q_2 – данную точку $+1$. Посчитайте также общий доход в каждой из точек $(P * Q)$. Сделайте таблицу с соответствующими значениями. Где достигается максимум общего дохода и чему при этом равно значение эластичности? При каких значениях эластичности доход возрастает, а при каких убывает? Постройте друг под другом графики эластичности от цены и выручки от цены.
2. Посчитайте эластичность как функцию от P , используя формулу точечной эластичности. Посчитайте общий доход также как функцию от цены. Ответьте на вопросы из предыдущего пункта и постройте соответствующие графики.

Решение.

1. Посчитаем, используя формулы. Вот результат:

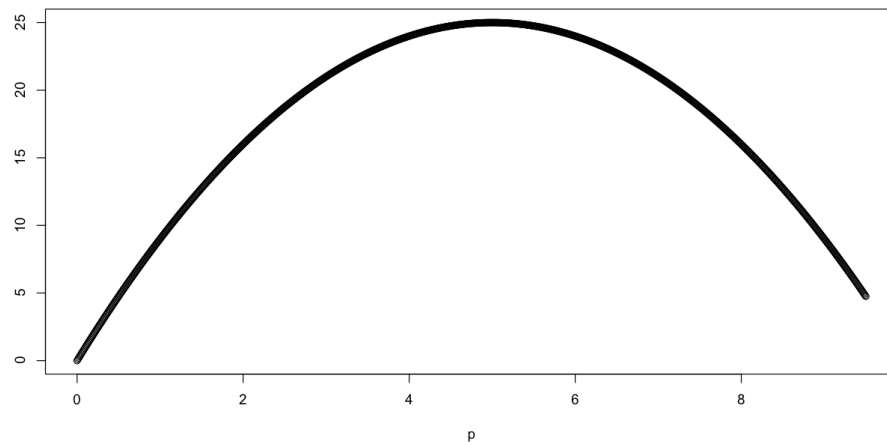
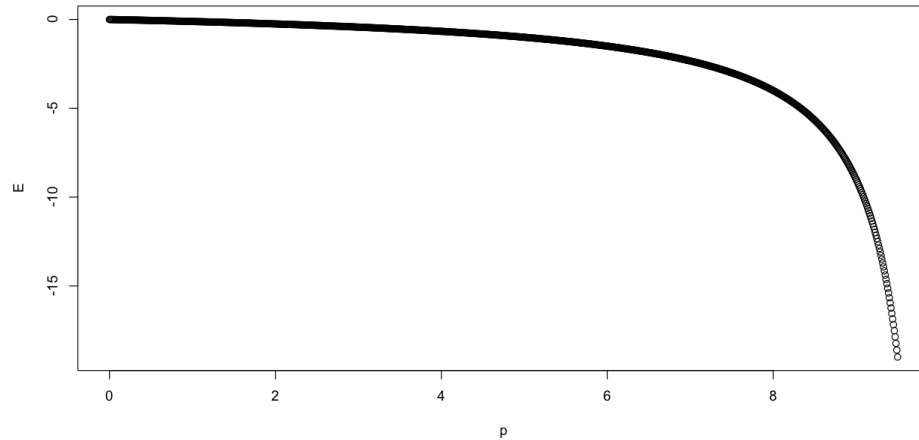
Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
E	-9	-4	-7/3	-3/2	-1	-2/3	-3/7	-1/4	-1/9	0
PQ	9	16	21	24	25	24	21	16	9	0

Максимум при $Q = P = 5$. Доход растет (от данного значения к следующему) при $|E| > 1$ ($P < 5$), падает при $|E| \leq 1$ ($P \geq 5$).



2. Эластичность: $E(P) = -\frac{P}{10-P}$ Доход: $PQ(P) = 10P - P^2$.

Так же как в предыдущем пункте. Максимум при $Q = P = 5$. Доход растет при $|E| > 1$ ($P < 5$), падает при $|E| < 1$ ($P > 5$).



2. Задания для самопроверки.

Задача 4.

Решите задачу 1 при следующих условиях: $Q_d = 200 - 2P$, $Q_s = -10 + P$.

Задача 5.

Решите задачу 3 при условии $Q_d = 8 - 2P$.

† Задача 6.

Покажите, что если спрос и предложение заданы линейными функциями и введен потоварный налог t , то отличие цены потребителя (P_b) и цены производителя (P_s) от изначальной (P_e) пропорционально отношениям модулей точечных эластичностей спроса и предложения в точке равновесия: $\frac{P_s - P_e}{P_e - P_b} = |E_D^P| / |E_S^P|$.

† **Задача 7.**

Рассмотрите суммарный доход $(P * Q(P))$ и точечную эластичность спроса $(E_D^P(P))$ как функции от цены.

1. Приравняйте производную суммарного дохода по цене к нулю. Убедитесь, что это равенство совпадает с равенством $E_D^P(P) = -1$. Какой знак у производной суммарного дохода при $0 > E_D^P(P) > -1$ (неэластичный спрос) и при $-1 > E_D^P(P)$ (эластичный спрос)?
2. Значит ли это, что при единичной по модулю эластичности спроса функция суммарного дохода достигает максимума?

Ответы.

Задача 4.

1. $q_d(P) = 2 - 0,02P$
2. $q_s(P) = -1 + 0,1P$
3. $P_e = 70, Q_e = 60$
4. $P = 80$
5. $P = 50$
6. $P = 155/2 = 77,5, Q = 135/2 = 67,5$
7. $P = 430/7 = 61\frac{3}{7}, Q = 540/7 = 77\frac{1}{7}$
8. $P_s = 60, P_b = 75, Q = 50$
9. $E_D^P = -7/3, E_S^P = 7/6, P_e - P_s > P_b - P_e$

Задача 5.

	Q	1	2	3	4	5	6	7	8
1.	P	3,5	3	2,5	2	1,5	1	0,5	0
	E	-7	-3	-5/3	-1	-3/5	-1/3	-1/7	0
	PQ	3,5	6	7,5	8	7,5	6	3,5	0

Максимум при $Q = 4, P = 2, E = -1$.

2. $E(P) = -2\frac{P}{8-2P}$

Максимум при $Q = 4, P = 2, E = -1$.

Задача 7.

2. Нет.