Задачи по курсу "Принятие коллективных решений"

1. Порядки

Обозначения: $I = \{(x,x)|x \in A\}$ — "диагональное" отношение, $P^{-1} = \{(x,y)|(y,x) \in P\}$ — обратное отношение, $\overline{P} = \{(x,y)|(x,y) \notin P\}$ — дополнительное отношение.

1. Докажите, что $\overline{P}^{-1} = \overline{P^{-1}}$.

2. Докажите, что операция взятия обратного отношения не меняет никаких свойств отношения (рефлексивность/антирефлексивность, симметричность/антисимметричность/асимметричность, связность/полнота, транзитивность).

3. **а**) Может ли симметричное антирефлексивное отношение быть транзитивным?

б) А если оно непустое?

4. Докажите, что отношение, дополнительное к

а) рефлексивному антирефлексивно (и наоборот);

б) симметричному симметрично;

в) асимметричному полно (и наоборот);

г) антисимметричному связно (и наоборот);

д) транзитивному удовлетворяет условию Чипмана (и наоборот).

Два подхода к порядкам.

"Нестрогий" подход. (Строгий и нестрогий в смысле "строгое и нестрогое неравенство").

Бинарное отношение называется

— линейным порядком (LO, linear order), если оно транзитивное, полное и антисимметричное.

— слабым порядком (WO, weak order), если оно транзитивное и полное.

— частичным порядком (PO, partial order), если оно транзитивное, рефлексивное и антисимметричное.

"Строгий" подход.

Бинарное отношение называется

— линейным порядком, если оно транзитивное, связное и антисимметричное.

— слабым порядком, если оно транзитивное, антисимметричное и удовлетворяет условию Чипмена: $\forall x,y,z \in A xPy \Rightarrow xPz$ или zPy.

— частичным порядком, если оно транзитивное, асимметричное.

5. Покажите, что

а) при строгом подходе LO — частный случай WO, а WO, в свою очередь, частный случай PO.

б) в нестрогом подходе LO — частный случай WO и PO, но WO — не частный случай PO.

6. Докажите, что

а) P — LO при строгом подходе если и только если $\overline{P}^{-1}$ — LO при нестрогом подходе.

б) P — WO при строгом подходе если и только если $\overline{P}^{-1}$ — WO при нестрогом подходе.

7. Докажите, что

а) P — LO при строгом подходе если и только если $P \cup I$ — LO при нестрогом подходе.

б) P — WO при строгом подходе если и только если $P \cup I$ — WO при нестрогом подходе.

8. Докажите, что пересечение слабых (линейных) порядков будет частичным порядком.

9. **а**) При каких условиях объединение линейных порядков будет частичным порядком?

б) Тот же вопрос про объединение слабых порядков.

10. **а**) Докажите, что любой частичный порядок можно представить в виде пересечения линейных (слабых).

Докажите, что для этого достаточно

б) $2\binom{n}{2}$;

в) $\binom{n}{2}$;

порядков.

г) Приведите пример частичного порядка, не представимого в виде пересечения двух линейных порядков.

11. Бинарное отношение, определенное на множестве из 7 элементов содержит 20 пар. Может ли оно быть линейным порядком? А частичным?

12. На множестве $\{a, b, c, d, e, f\}$ определен линейный порядок P, причем aPb, bPc, cPd, ePf, fPd. Приведите два примера линейных порядков, удовлетворяющих этим условиям. А сколько всего существует таких линейных порядков?

13. Альтернативы a, b, c и d упорядочены по трем критериям K_1, K_2 и K_3. Рассмотрим отношение P: xPy, если x предпочтительнее y хотя бы по одному критерию.

а) Пусть $K_1 = a > b > c > d$, $K_2 = K_3 = a > c > d > b$. Будет ли P частичным порядком?

б) Обший случай. При каких условиях на K_1—K_3 отношение P будет частичным порядком? Можно считать K_1—K_3 строгими линейными порядками.

14. Рассмотрим на множестве присутствующих два порядка — алфавитный и по будущим оценкам за экзамен. Про каждый из этих порядков выберите правильные ответы и обоснуйте их. Итак, рассматриваемый порядок

— обязательно линейный.

— может быть линейным, а может быть и нет.

— не может быть линейным порядком.

15. Докажите, что бинарное отношение записывается с помощью функции полезности, тогда и только тогда, когда оно является слабым порядком.

16. Предложите алгоритм проверки, будет ли бинарное отношение слабым порядком и оцените время работы Вашего алгоритма.

17. Предложите 2 (а лучше — 3) принципиально различных способа задавать функцию полезности на слабом порядке.

18. Докажите, что если бинарное отношение записывается с помощью функций полезности, то можно подобрать такую функцию u, чтобы все значения $u(x)$ были натуральными числами.

19. Бинарное отношение P задано своей матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Будет ли это отношение записываться с помощью функций полезности?

2. Правила принятия решения

20. Постройте мажоритарный граф при следующих предпочтениях участников на множестве $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ относительно кандидатов из множества $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\}$:

$$\text{а)}\quad \begin{array}{l} P_1 : x_1 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_3; \\ P_2 : x_2 \succ x_4 \succ x_1 \succ x_3; \\ P_3 : x_1 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_4. \end{array}$$

$$\text{б)}\quad \begin{array}{l} P_1 : x_1 \succ x_2 \succ x_5 \succ x_4 \succ x_3; \\ P_2 : x_3 \succ x_5 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_4; \\ P_3 : x_2 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_5 \succ x_3. \end{array}$$

$$\text{в)}\quad \begin{array}{l} P_1 : x_5 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_2; \\ P_2 : x_1 \succ x_5 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_2; \\ P_3 : x_4 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_5 \succ x_3; \\ P_4 : x_5 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_2. \end{array}$$

Есть ли здесь победитель Кондорсе?

21. Покажите, что при нечетном числе участников:

а) бинарное отношение, соответствующее мажоритарному графу, связно;

б) если победитель Кондорсе существует, то он единственный;

в) если a — победитель Кондорсе, то $\forall x \in A\ aPx$.

22. **а**) Приведите пример существования двух победителей Кондорсе.

б) $\ldots k$ победителей Кондорсе.

Нам известны

1) Правило относительного большинства.
2) Двухступенчатое правило относительного большинства.
3) Система передачи голосов (австралийская система).
4) Правило Борда.
5) Диктаторское правило.

А также нормативные условия для произвольных правил голосования.

1) единогласие.
2) локальность (независимость от посторонних альтернатив).

23. Пусть кандидатов 7, избирателей 8 и предпочтения у последних такие (ну, или такие; или даже такие)

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
c	c	g	g	b	e	a	b
g	f	c	a	f	f	b	g
e	a	d	c	a	d	g	a
d	b	b	d	c	g	c	e
b	e	f	b	e	a	f	c
a	g	a	f	d	b	d	d
f	d	e	e	g	c	e	f

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
f	d	e	e	g	c	e	f
c	c	g	g	b	e	a	b
g	f	c	a	f	f	b	g
e	a	d	c	a	d	g	a
d	b	b	d	c	g	c	e
b	e	f	b	e	a	f	c
a	g	a	f	d	b	d	d

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
b	e	f	b	e	a	f	c
a	g	a	f	d	b	d	d
f	d	e	e	g	c	e	f
c	c	g	g	b	e	a	b
g	f	c	a	f	f	b	g
e	a	d	c	a	d	g	a
d	b	b	d	c	g	c	e

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
g	f	c	a	f	f	b	g
e	a	d	c	a	d	g	a
d	b	b	d	c	g	c	e
b	e	f	b	e	a	f	c
a	g	a	f	d	b	d	d
f	d	e	e	g	c	e	f
c	c	g	g	b	e	a	b

Найдите победителей, получающихся при применении правил 1-4; диктатуры четвертого избирателя; олигархии 1-го и 2-го избирателя.

24. Постройте примеры, в которых правила 1-6 дают разные результаты. Венцом творения был бы пример, в котором при использовании 6 правил выбирались бы 6 разных кандидатов.

25. В каких из правил голосования возможно манипулирование со стороны избирателей? Для манипулируемых правил постройте примеры.

26. Заполните табличку 6 на 2, в клетках которой должен стоять $+$, если нормативное условие выполнено для данного правила голосования и $-$, если не выполнено. Если это удалось, то в некоторых столбцах окажутся все плюсы. Как это согласуется с парадоксом Эрроу?

27. Пусть три друга выбирают место отдыха из следующих вариантов: $A = \{$Сочи (С), Туапсе (Т), Валдай (В), Подмосковье (П)$\}$. Их предпочтения на множестве A имеют вид:

P_1	P_2	P_3
С	С	Т
Т	Т	С
В	В	П
П	П	В.

Предпочтения их жен имеют вид:

P'_1	P'_2	P'_3
С	Т	Т
Т	С	С
В	В	В
П	П	П.

а) Предположим, что коллективное решение P содержит пару (Т,В). Если правило построения коллективного решения локально, то содержится ли пара (Т,В) в коллективном решении по профилю P'?

б) Пусть правило построения коллективного решения удовлетворяет условию единогласия. Какие пары обязано содержать коллективное решение по профилю $\vec{P} = (P_1, P_2, P_3)$?

в) По профилю $\vec{P}' = (P'_1, P'_2, P'_3)$?

28. Рассмотрим следующее правило построения коллективного решения по индивидуальным предпочтениям n участников: пара (x, y) входит в коллективное решение, если она принадлежит:

а) ровно $n/3$;

б) ровно $n/2 + 1$;

в) более $n/2$;

г) не менее $n/2$;

д) не менее $n-1$;

е) n индивидуальных предпочтений.

Каким аксиомам удовлетворяет это правило? Приведите (если это возможно) примеры, когда оно приводит к циклам в коллективном решении.

29. Пусть $|N| = 5$ и коллективное решение строится следующим образом:

$$\forall\, x, y \ xPy \Leftrightarrow xP_1y \text{ и } xP_2^c y \text{ и } xP_3y \text{ и } xP_4^c y \text{ и } xP_5y.$$

Является ли это правило локальным? Каким еще аксиомам оно удовлетворяет? Являются ли участники 1, 3 и 5 диктаторами?

30. Пусть $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $N = \{1, 2, 3\}$ и коллективное решение строится следующим образом:

$$\forall\, i \ a_iPx \Leftrightarrow a_iP_ix,$$

для всех $x \in A$. Является ли это правило локальным? Каким аксиомам оно удовлетворяет? Какими свойствами обладает коллективное предпочтение?

31. Верно ли следующее утверждение: вариант, считающийся наилучшим по Борда, является недоминируемым (в терминах мажоритарного графа) исходом хотя бы для одного из участников. Тот же вопрос для остальных правил.

32. Приведите пример ненейтрального правила голосования.

33. Правило голосования называется анонимным, если оно учитывает мнения участников равным образом. Какие из известных Вам правил голосования будут анонимными, а какие — нет? Как изменится результат парадокса Эрроу, если потребовать, чтобы правило принятия решения было анонимным?

34. Решите упражнения из доказательства теоремы Эрроу.

35. **Однопиковые предпочтения.** Пусть позиции кандидатов и избирателей характеризуются только одной шкалой (левые-правые, например) и каждый из избирателей считает, кандидат тем лучше, чем ближе позиция кандидата к его собственной. Докажите, что в этом случае всегда существует победитель Кондорсе.

36. **Теорема МакГарви.** Докажите, что при применении правила простого большинства (aPb в коллективном решении, если так считает большинство избирателей), может получиться не только линейный порядок (как хотелось бы) или цикл (как в Парадоксе Кондорсе), а произвольное асимметричное бинарное отношение. Подсказка. Нужно по два избирателя на каждую дугу в отношении.

37. А если применять правило единогласия (aPb в коллективном решении, если так считают все), может получиться не только линейный, но и произвольный частичный порядок.

38. Докажите парадокс Эрроу и в случае, когда коллективное решение может быть слабым порядком.

39. Пусть коллективное решение может быть частичным порядком (а предпочтения избирателей — линейными). Тогда к диктаторскому правилу добавляется олигархическое — решение (aPb) принимается, если так считают все олигархи, и не принимается никакого решения, если они не пришли к согласию. Мнение остальных избирателей не учитывается.

40. Представим теперь, что и предпочтения избирателей и коллективные решения могут быть слабыми порядками. Тогда кроме диктатуры возможно правило "лексикографические диктаторы" — сначала решает первый диктатор, если ему все равно, решение принимает второй, если и ему все равно, третий и так далее...

41. Докажите, что любое ненавязанное правило, строящее линейные порядки в коллективном решении — либо диктатура либо манипулируемо. Почти это утверждение называется теоремой Гиббарда—Сатертуэйта.

Случай двух альтернатив

42. **а**) Опишите все монотонные и нейтральные правила принятия решения в случае двух альтернатив.

б) Что изменится, если добавить условие единогласия?

в) Почему в этой задаче не упоминанется локальность?

43. **а**) Докажите, что всевозможные правила принятия решения можно описать, присвоив каждой коалиции (подмножеству) избирателей значение 1, если сил этой коалиции достаточно для принятия решения и 0 иначе.

б) Сколько существует всевозможных правил принятия решений для n избирателей?

в) Что изменится, если добавить условие монотонности? Для пункта а) это простой вопрос, для б) — с **.

44. Будет ли следующее правило принятия решения голосованием с квотой? Имеются четыре участника a, b, c и d, и коалиция выигрывает тогда и только тогда, когда в нее

а) входят участники a, b;

б) не входят участники a и b вместе;

в) входят или a и b или c и d;

г) входят или a и b или b и c?

45. Предположим, что в Совет Безопасности ООН приняли нового постоянного члена — Японию. Тогда постоянных членов становится шесть, а временных по-прежнему остается 10. Правило принятия решений — все постоянные члены голосуют «за» и нужны голоса «за» еще четырех временных членов. Запишите это правило принятия решения как голосование с квотой.

46. Участник называется «болваном», если он не является ключевым ни в одной коалиции. Докажите, что если участник i — не «болван» в игре v, то он будет входить хотя бы в одну из минимальных выигрывающих коалиций.

47. Пусть S — произвольная коалиция. Обозначим через u^S правило принятия решения, при котором S будет единственной минимальной выигрывающей коалицией: если $i \in S$, то i ключевой участник во всех коалициях, содержащих S, если $i \notin S$, то i — «болван». Это правило иногда называется олигархическим. Покажите, что любое олигархическое правило записывается, как голосование с квотой.

48. **Почти олигархия.** При этом правиле принятия решения выигрывающими будут все те же коалиции, что и в u^S, кроме коалиции S $(S \neq N)$. Можно ли это правило принятия решения записать, как голосование с квотой?

49. **Почти диктатура.** Пусть имеется n участников. Коалиция выигрывающая, если или в нее входит первый участник, или все остальные, кроме первого. Всегда ли это правило принятия решения записывается как голосование с квотой?

50. Обобщим предыдущую задачу. Пусть в игре всего две минимальные выигрывающие коалиции (S и T).

а) Всегда ли она записыватся, как голосование с квотой?

б)*. Если нет, то какими свойствами должны обладать S и T, чтобы это правило принятия решения можно было записать, как голосование с квотой?

51. **Руководитель и участники.** Среди n участников голосования первые $n-1$ равноправны, т.е. для любых двух участников i и j и любой коалиции S, в которую они не входят, коалиция $S+i$ будет выигрывающей, только вместе с $S+j$. Возможности последнего игрока (руководителя) могут быть какими угодно. Докажите, что любое такое правило принятия решения записывается, как голосование с квотой.

а) А если руководителей двое и они также равноправны?

б) Тот же вопрос, если считать, что руководитель не менее влиятелен, чем любой из участников (т.е. если $i, R \notin S$ и коалиция $S+i$ выигрывающая, то и коалиция $S+R$ — выигрывающая. Обратное может быть неверно).

3. Задача о марьяжах

52. Пусть предпочтения участников из множеств $M = \{m_1, m_2, m_3\}$ и $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ выглядят следующим образом:

$$\begin{array}{ll} P(m_1) = w_2, w_1, w_3; & P(w_1) = m_1, m_3, m_2; \\ P(m_2) = w_1, w_3, w_2; & P(w_2) = m_3, m_1, m_2; \\ P(m_3) = w_1, w_2, w_3; & P(w_3) = m_1, m_3, m_2. \end{array}$$

Рассмотрим паросочетания

$$\mu = \begin{array}{ccc} w_2 & w_1 & w_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{array} \text{ и } \mu' = \begin{array}{ccc} w_3 & w_2 & w_1 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{array}.$$

Какие пары блокируют эти паросочетания?

53. Пусть $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ и предпочтения участников имеют вид:

$$\begin{array}{ll} P(m_1) = w_3, w_2, w_1, w_4; & P(w_1) = m_4, m_3, m_2, m_1; \\ P(m_2) = w_4, w_2, w_3, w_1; & P(w_2) = m_3, m_2, m_4, m_1; \\ P(m_3) = w_4, w_3, w_1, w_2; & P(w_3) = m_3, m_4, m_1, (w_3), m_2; \\ P(m_4) = w_2, w_4, w_1, (m_4), w_3; & P(w_4) = m_2, m_1, m_4, m_3. \end{array}$$

Является ли устойчивым паросочетание

$$\mu = \begin{array}{cccc} w_2 & w_4 & w_3 & w_1 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{array} ?$$

Ответ обоснуйте.

54. Пусть $M = \{m_1, m_2, m_3\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ и предпочтения участников имеют вид:

$$\begin{array}{l} P(m_1) = w_1, w_2, w_3; \\ P(m_2) = w_1, w_3, w_2; \\ P(m_3) = w_2, w_3, w_1; \\ P(w_1) = P(w_2) = P(w_3) = m_1, m_2, m_3. \end{array}$$

Найдите все устойчивые паросочетания.

55*. Пусть предпочтения всех мужчин одинаковы и все пары индивидуально рациональны. Верно ли, что в этом случае существует ровно одно устойчивое паросочетание ($\mu_M = \mu_W$)?

56. Постройте устойчивые паросочетания μ_M и μ_W, если предпочтения игроков имеют вид:

$$
\text{а)}\quad \begin{array}{ll}
P(m_1) = w_1, w_2, w_3, w_4; & P(w_1) = m_1, m_2, m_3;\\
P(m_2) = w_2, w_1, w_3, w_4; & P(w_2) = m_2, m_1, m_3;\\
P(m_3) = w_1, w_3, w_4, w_2; & P(w_3) = m_1, m_3, m_2;\\
 & P(w_4) = m_3, m_2, m_1.
\end{array}
$$

$$
\text{б)}\quad \begin{array}{ll}
P(m_1) = w_2, w_3, w_1; & P(w_1) = m_2, m_1, m_3;\\
P(m_2) = w_2, w_3, w_1; & P(w_2) = m_3, m_2, m_1;\\
P(m_3) = w_1, w_3, w_2; & P(w_3) = m_3, m_1, m_2.
\end{array}
$$

$$
\text{в)}\quad \begin{array}{ll}
P(m_1) = w_3, w_1, w_2, w_4; & P(w_1) = m_1, m_3, m_2, m_4, m_5;\\
P(m_2) = w_4, w_3, w_1, w_2; & P(w_2) = m_3, m_1, m_2, m_5, m_4;\\
P(m_3) = w_4, w_3, w_1, w_2; & P(w_3) = m_5, m_4, m_1, m_2, m_3;\\
P(m_4) = w_1, w_4, w_2, w_3; & P(w_4) = m_1, m_5, m_4, m_3, m_2.\\
P(m_5) = w_1, w_2, w_4, (m_5), w_3; &
\end{array}
$$

г) Пусть в условиях задачи 3 предпочтения $P(m_5)$ и $P(w_4)$ изменились:

$$
\begin{array}{l}
P(m_5) = w_1, w_2, w_3, w_4;\\
P(w_4) = m_1, m_2, m_3, m_4, m_5.
\end{array}
$$

д) Пусть в условиях задачи 3 предпочтения $P(m_1)$ и $P(w_2)$ изменились:

$$
\begin{array}{l}
P(m_1) = w_1, w_2, w_3, w_4;\\
P(w_2) = m_1, m_2, m_3, m_4, m_5.
\end{array}
$$

$$
\text{е)}\quad \begin{array}{ll}
P(m_1) = w_4, w_3, w_1, (m_1), w_2; & P(w_1) = m_2, m_1, m_4, m_3;\\
P(m_2) = w_4, w_2, w_3, w_1; & P(w_2) = m_1, m_2, m_3, (w_2), m_4;\\
P(m_3) = w_1, w_2, w_3, w_4; & P(w_3) = m_2, m_3, m_4, m_1;\\
P(m_3) = w_2, w_4, w_1, w_3; & P(w_4) = m_3, m_2, m_4, m_1.
\end{array}
$$

57. Пусть в задаче распределения студентов $\{a, b, c, d\}$ по комнатам общежития предпочтения выглядят следующим образом:

$$
\begin{array}{l}
P(a) : b \succ d \succ c;\\
P(b) : d \succ c \succ a;\\
P(c) : a \succ b \succ d;\\
P(d) : b \succ a \succ c.
\end{array}
$$

Существует ли при данных условиях устойчивое паросочетание?

58. Пусть предпочтения участников могут быть не только линейными, но и

а) слабыми;

б) частичными порядками.

Будет ли в этом случае верна теорема о существовании устойчивых паросочетаний?

59. Докажите, что в любом устойчивом паросочетании без пары остаются одни и те же мужчины и женщины.

60. Пусть (M, W, P) и (M, V, P') — два профиля предпочтений с одними и теми же устойчивыми паросочетаниями. Докажите, что будут совпадать и μ_M (μ_W).

61*. $(n, 1)$**-сочетания.** Два профессора собираются прочесть по спецкурсу студентам, каждый из которых должен посетить ровно один из спецкурсов. При всех ли предпочтениях студентов существуют устойчивое паросочетание, если предпочтения профессоров

а) чем больше студентов, тем лучше;
б) чем меньше студентов, тем лучше;
62. Постройте пример предпочтений, в котором ровно
а) 3;
б) 4;
в) 5;
г) n
устойчивых паросочетаний.
63. Вычеркнем из предпочтений мужчины m все альтернативы,
а) худшие, чем $\mu_W(m)$;
б) лучшие, чем $\mu_M(m)$.
Докажите, что множество устойчивых паросочетаний при этом не изменится.