Негосударственное образовательное учреждение
Российская экономическая школа

В.И. Данилов

Лекции о неподвижных точках

Москва
2006

Данилов В.И., Лекции о неподвижных точках. —Российская экономическая школа, Москва, 2006 г. — 32 с.

Эти четыре лекции, посвященные неподвижным точкам, входили в курс математики для студентов Российской Экономической Школы. В первой обсуждается принцип сжимающих отображений и его применения. Вторая посвящена формулировке и различным модификациям теоремы Брауэра. В третьей приводятся применения теоремы Брауэра к равновесиям в играх и экономиках, к ядрам кооперативных игр. В последней обсуждаются различные подходы к доказательству теоремы Брауэра.

Оглавление

Лекция 1

Неподвижные точки и сжимающие отображения

Понятие неподвижной точки

Несомненно, это одно из самых простых и фундаментальных понятий: оно требует лишь представления о множестве и отображении. Пусть дано отображение $f : X \to X$ множества X в себя. *Неподвижной точкой* f называется любой элемент $x \in X$, для которого $f(x) = x$.

Иначе говоря, неподвижная точка остается на месте при отображении f. Чуть допуская вольность, можно сказать, что неподвижные точки f — это точки пересечения графика f с диагональю в $X \times X$.

Понятие неподвижной точки встречается во многих, чуть ли не во всех задачах. Например, любое уравнение $F(x) = 0$ можно свести к неподвижной точке, переписав его в виде

$$F(x) + x = x.$$

Вот менее тавтологический пример. Пусть имеется дифференциальное уравнение

$$dy/dt = \varphi(y, t),$$

где φ — непрерывная функция, и $y(\cdot)$ — его решение, проходящее через точку (t_0, y_0) (это значит просто, что $y(t_0) = y_0$). Тогда для любого t из соответствующего интервала выполняется соотношение

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi(y(s), s)ds.$$

Иначе говоря, функция y является неподвижной точкой отображения A, заданного формулой $(Ay)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi(y(s), s)ds$.

Я тут замял одну вещь — то пространство или множество, на котором задан оператор A. Это не случайно. Обычно или ясно, что это за множество, или, напротив, есть много разных возможностей, которыми можно удачно распорядиться. В нашем случае естественнее всего взять в качестве множества пространство непрерывных функций (на соответствующем интервале); тогда надо еще убедиться, что оператор A преобразует непрерывные функции в непрерывные.

Часто в приложениях неподвижные точки возникают там, где имеется динамика вида $x_{t+1} = A(x_t)$. Например, считается, что цены поднимаются, если спрос превышает предложение, и поднимаются тем сильнее, чем больше этот эксцесс спроса. Наиболее простой способ формализовать это замечание (но не наиболее правильный, ибо никто не знает, как это сделать) — считать зависимость линейной. Так мы приходим к уравнению вида

$$p_{t+1} = p_t + DE(p_t),$$

где $E(p_t)$ — это эксцесс, или избыток спроса (т. е. разность между спросом и предложением), а D — диагональная матрица с неотрицательными коэффициентами. В этом случае неподвижная точка дает стационарные, неизменные по времени цены. На самом деле, никакой точной динамики цен неизвестно, поэтому трудно сказать, что происходит с ценами в общем случае, и имеет смысл говорить только о неподвижных точках отображения (или о нулях E). Такие цены называются *равновесными*.

Вопросы про неподвижные точки

В связи с введенным выше понятием обычно обсуждаются следующие вопросы:

1. Существуют ли неподвижные точки?

2. Сколько их? Одна, конечное число?

3. Устойчивость в каком-нибудь смысле. Верно ли, например, что для любой точки x последовательность $x_n = f^n(x)$ сходится к неподвижной точке x^*? В этом случае говорят о глобальной сходимости. Верно ли это для точек x, достаточно близких к x? Более подробно такие вопросы обсуждаются в курсе о дифференциальных уравнениях.

4. Как можно найти (вычислить) неподвижные точки, точно или приближенно?

Близкие понятия

1. В данном определении очень важно, что f отображает множество X в себя. Однако если имеются два отображения f и g множества X в другое множество Y, можно говорить о точках совпадения f и g, т. е. таких точках $x^* \in X$, что $f(x^*) = g(x^*)$.

2. Иногда наряду с неподвижными точками f, а особенно когда их нет, полезно рассмотреть циклические точки, т. е. неподвижные точки итерированного отображения f^n, где n — некоторое натуральное число. Это циклические точки n-го порядка. Часто и таких точек нет, и тогда приходится пользоваться чем-то вроде «предельных» циклов. Более точно, можно говорить об инвариантных множествах, т. е. о таких подмножествах $Y \subset X$, для которых $f(Y) = Y$. При этом интересны инвариантные подмножества, минимальные в том или ином смысле.

3. Часто приходится иметь дело с неподвижными точками соответствий, или многозначных отображений. Что такое соответствие? Напомним, что отображение между множествами X и Y — это подмножество $F = \text{график}(f)$ в $X \times Y$, обладающее свойством функциональности: для любого $x \in X$ существует и единственно $y \in Y$, такое что $(x, y) \in F$. Если отбросить это требование функциональности, мы получим общее понятие соответствия. Итак: *соответствие* между множествами X и Y — это произвольное подмножество F в декартовом произведении $X \times Y$.

   Обычно соответствие понимают как «многозначное отображение» из X в Y. *Образом* точки $x \in X$ при соответствии F называется множество

$$F(x) = \{y \in Y, (x, y) \in F\}.$$

Оно может состоять из нескольких точек, а может быть пустым. Придерживаясь такой точки зрения, мы будем изображать соответствие как $F : X \rightrightarrows Y$ (двойная стрелка указывает на «многозначность»). На соответствия переносятся многие понятия, известные для отображений; мы к этому еще вернемся в следующей лекции. В частности, неподвижной точкой соответствия $F : X \rightrightarrows X$ называется любая точка $x^* \in X$, такая что $x^* \in F(x^*)$.

4. Инфинитезимальным аналогом отображения служит векторное поле. Пусть v — векторное поле на X, т. е. для каждой точки $x \in X$ указан некоторый вектор $v(x)$ из касательного пространства $T_X(x)$. Конечно, это предполагает, что X — гладкое многообразие. Векторное поле нужно понимать как бесконечно малый сдвиг на многообразии X. При таком взгляде неподвижной точкой поля v нужно считать точку $x^* \in X$, для которой $v(x^*) = 0$. При анализе неподвижных точек векторных полей большую роль играет понятие индекса векторного поля.

Принцип сжимающих отображений

Главный вопрос, которым мы будет заниматься в этих лекциях — это вопрос о существовании неподвижных точек. Существование (и другие свойства) неподвижных точек отображения $f : X \to X$ зависят как от свойств отображения f, так и от свойств пространства X. Например, практически всегда отображение f предполагается непрерывным. Мы рассмотрим несколько реализаций этого общего замечания. Начнем с простейшего случая, когда требования к X минимальны, но зато многое требуется от f.

Пусть X — пространство с метрикой ρ. Напомню, что *метрикой* на множестве X называется функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ ($\rho(x, y)$ интерпретируется как «расстояние» между точками x, $y \in X$), которая удовлетворяет трем аксиомам:

1) симметричности: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

2) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

3) неравенству треугольника: $\rho(x, z) \geq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ для любых x, y и z.

Отображение f метрического пространства в себя называется *сжимающим*, если существует такая константа $K < 1$, что для любых двух точек x и y выполняется неравенство

$$\rho(f(x), f(y)) \leq K\rho(x, y).$$

Очевидно, что при сжимающем отображении расстояния между точками строго уменьшаются, но этого мало! Обратите внимание, что константа K меньше единицы и обслуживает сразу все пары точек. Более правильно сжимающее отображение называть строго сжимающим. Сжимающие отображения обладают рядом свойств, полезных для неподвижных точек.

Утверждение. *Пусть отображение f сжимающее. Тогда существует не более одной неподвижной точки.*

Доказательство. В самом деле, если x и y — неподвижные точки f, то

$$0 \leq \rho(x, y) = \rho(f(x), f(y)) \leq K\rho(x, y),$$

что при $K < 1$ может быть только при $\rho(x, y) = 0$. Но тогда $x = y$. □

Для существования неподвижных точек нужно наложить на пространство X условие полноты. Напомним, что метрическое пространство *полное*, если любая последовательность Коши имеет предел в X. Можно сказать, что X не имеет «микродыр» или проколов.

Теорема 1. *Пусть f — сжимающее отображение полного метрического пространства X в себя. Тогда для любой точки $x \in X$ последовательность*

$$x,\ f(x),\ f^2(x) = f(f(x)),\ f^3(x), \dots$$

сходится к неподвижной точке. В частности, f имеет (единственную) неподвижную точку.

Доказательство. Пусть $d = \rho(x, f(x))$. Тогда

$$\rho(f^n x, f^{n+1} x) \leq K^n d,$$

и вообще,

$$\rho(f^k x, f^{k+l} x) \leq (K^n + K^{n+1} + \dots + K^{n+l-1})d \leq \frac{K^n d}{1-K}.$$

Значит наша последовательность является последовательностью Коши и поэтому имеет предел, который мы обозначим x^* . Мы утверждаем, что точка x^* неподвижна. Для этого покажем, что $f(x^*)$ также является пределом последовательности $x_n = f^n(x)$. В самом деле,

$$\rho(f(x^*), x_{n+1}) = \rho(f(x^*), f(x_n)) < \rho(x^*, x_n) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

В силу единственности предела $f(x^*) = x^*$. □

Точки x, $f(x)$, $f^2(x)$, … называются *последовательными приближениями* к неподвижной точке. Мы видим, что в случае сжимающего отображения можно начинать с любого элемента x, и последовательные приближения сходятся к неподвижной точке. Легко оценить и точность приближения:

$$\rho(f^k x, x^*) \leq \frac{K^k d}{1-K}.$$

Это позволяет оценить число шагов, нужное для нахождения x^* с заданной точностью.

Применение к дифференциальным уравнениям

Принцип сжатых отображений имеет многочисленные применения к доказательствам существования решений обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, существования неявных функций, методам решения систем линейных уравнений. Продемонстрируем его на примере дифференциальных уравнений. Пусть имеется дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, t), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{1.1}$$

Здесь $x(t)$ числовая (или векторная) функция от t, где t меняется в некотором интервале $[a, b]$ вокруг t_0. Функция φ предполагается непрерывной.

Для построения решения рассмотрим пространство C непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ с равномерной метрикой. Последнее значит, что расстояние между двумя функциями x и y (обе из $[a, b]$ в $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{R}^n$)) равно $\max|x(t) - y(t)|$, где $t \in [a, b]$. Из курса функционального анализа вы знаете, что пространство C с этой метрикой полное. Свяжем с функцией φ (нелинейный) оператор $A : C \to C$, заданный формулой

$$(Ax)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi(x(s), t) ds.$$

Он называется *оператором Пикара.*

Мы уже видели раньше, что неподвижная точка оператора A дает решение дифференциального уравнения (1.1). Естественно искать неподвижную точку как предел последовательных приближений z, Az, A^2z, $\dots$, выбрав в качестве нулевого приближения постоянную функцию $z \equiv x_0$ (можно, впрочем, начинать и с тождественного нуля).

Пример. Рассмотрим уравнение $dx/dt = x$, $x(0) = 1$. Начиная с функции $x \equiv 1$, будем строить последовательные приближения:

$$\begin{aligned}
&Ax = 1 + \textstyle\int dt = 1 + t, \\
&A^2x = 1 + \textstyle\int (1+s)ds = 1 + t + t^2/2, \\
&\dots \\
&A^n x = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

В пределе получаем функцию

$$x^* = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots = e^t.$$

Остается выяснить, когда оператор Пикара сжимающий. Для этого на правую часть $\varphi(\cdot,\cdot)$ нужно наложить так называемое условие Липшица, более сильное, чем просто непрерывность.

Определение. Отображение $f : X \to Y$ двух метрических пространств удовлетворяет *условию Липшица* с постоянной L, если

$$\rho_X(fx, fz) \le L\rho_Y(x,z)$$

для любых $x, z \in X$.

Например, сжимающее отображение — липшицево с константой, меньшей 1.

Так вот, потребуем, чтобы функция $\varphi(\cdot,\cdot)$ была липшицевой по первой переменной, т. е.

$$|\varphi(v,t) - \varphi(w,t)| \le L|v - w|$$

для любых $v, w \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{R}^n$) и любого $t \in [a,b]$. В этом случае, если интервал $[a,b]$ достаточно мал, оператор Пикара будет сжимающим. В самом деле, возьмем две функции x и y из пространства C. Тогда

$$\rho(Ax, Ay) = \max_{a \le t \le b} |Ax(t) - Ay(t)| =$$
$$= \max_{a \le t \le b} \left| \int [\varphi(x(s),s)) - \varphi(y(s),s))]ds \right| \le \max_{a \le t \le b} \int L|x(s) - y(s)|ds.$$

Так как $|x(s) - y(s)|$ по определению не больше, чем $\rho(x,y)$, последнее выражение можно оценить сверху числом

$$L \max_{a \le t \le b} \int \rho(x,y)ds \le L\rho(x,y)|b - a|.$$

Таким образом мы доказали следующую лемму:

Лемма. *Если функция $\varphi(\cdot,\cdot)$ липшицева по первому аргументу с постоянной L, то отображение Пикара A тоже липшицево с показателем $L|b-a|$. В частности, если $L|b-a| < 1$, то оператор A сжимающий.*

Следствие. *Если функция $\varphi(\cdot,\cdot)$ липшицева по первому аргументу, то существует и единственно решение дифференциального уравнения (1.1).*

Замечание. Если условие Липшица нарушается, то решение дифференциального уравнения может не быть единственным. Так у дифференциального уравнения $dx/dt = 2\sqrt{x}$ через точку $(0,0)$ проходят решения $x \equiv 0$ и $x = t^2$.

Аналогичным способом можно установить непрерывную зависимость решения дифференциального уравнения от начальных данных и от правой части (см. упр. 1.7).

Упражнения

1.1. Пусть X — конечное множество с n элементами. Какова вероятность того, что взятое наугад отображение X в себя имеет неподвижную точку. К чему стремится эта вероятность при большом n?

1.2. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция. При каком условии на производную оно будет сжимающим?

1.3. Будут ли сжимающими функции $\sin x$, $\operatorname{arctg} x$, x^2, $\sqrt{|x|}$ на прямой $\mathbb{R}$, $x + 1/x$ на полупрямой $1 \leq x$?

1.4. Пусть A — линейный оператор из $\mathbb{R}^n$ в себя с матрицей a_{ij}.

а) Пусть метрика в $\mathbb{R}^n$ задается формулой

$$\rho(x,y) = \max_i |x_i - y_i|$$

(т. е. это l_1-метрика). Покажите, что если

$$\max_{i,j} |a_{ij}| < 1,$$

то отображение A сжимающее.

б) Пусть метрика в $\mathbb{R}^n$ задается формулой

$$\rho(x,y) = \Big(\sum_i (x_i - y_i)^2\Big)^{1/2}$$

(т. е. это l_2-метрика). Покажите, что если

$$\sum_{i,j} a_{ij}^2 \leq 1,$$

то отображение A сжимающее.

в)* Предположим, что все собственные числа оператора A по модулю строго меньше 1. Показать, что в $\mathbb{R}^n$ существует такая метрика (и даже евклидова), что отображение A сжимающее.

1.5. Удовлетворяют ли условию Липшица следующие функции на $\mathbb{R}$ (метрика всюду евклидова): 1) x^2; 2) $\sqrt{|x|}$; 3) $\sin x$?

1.6. Дифференцируемая функция f липшицева тогда и только тогда, когда ее производная ограничена. Что взять в качестве постоянной L?

1.7. Скажем, что два оператора f и g на метрическом пространстве (X, ρ) являются *ε-близкими*, если $\rho(f(x), g(x)) \leq \varepsilon$ для любого $x \in X$. Показать, что если f и g — сжимающие отображения (с показателем K), то их неподвижные точки находятся друг от друга на расстоянии не большем $\varepsilon/(1-K)$.

1.8. Показать, что если некоторая степень f^n отображения f сжимающая, то f имеет ровно одну неподвижную точку.

1.9.* Отображение f метрического пространства X в себя *слабо сжимающее*, если для любых различных точек $x, y \in X$ выполнено неравенство $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$. Показать, что любое слабо сжимающее отображение компакта в себя имеет единственную неподвижную точку.

1.10. Проверить, что для непрерывной функции x функция Ax (где A — оператор Пикара) тоже непрерывна.

Рекомендуемая литература: [1, 3, 9].

Лекция 2

Теорема Брауэра: формулировка и обсуждение

Продолжим исследование задачи существования неподвижных точек отображения $f : X \to X$. По сравнению с предыдущей лекцией мы ослабим требования к отображению f за счет усиления требований на пространство X. Если раньше X было почти произвольной природы, то теперь мы будем предполагать, что X — выпуклый компакт.

Теорема Брауэра

Пусть V — векторное пространство (над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$). Напомним, что подмножество $X \subset V$ называется *выпуклым*, если для любых точек $x, y \in X$ и числа α, $0 \leq \alpha \leq 1$, точка $\alpha x + (1 - \alpha)y$ также принадлежит X. Иначе говоря, с любыми двумя точками X содержит и соединяющий их отрезок. Свойство выпуклости влечет, что X не имеет «дырок», а это дает надежду на существование неподвижных точек для широкого класса отображений.

Более точно, мы будем рассматривать непрерывные отображения. Это предполагает, что X снабжено топологией. Чтобы не усложнять изложение, мы будем считать всюду, что пространство V конечномерное (изоморфно $\mathbb{R}^n$) и снабжено обычной евклидовой метрикой, и что X — компактное (т. е. замкнутое и ограниченное) подмножество V. Для краткости мы будем говорить, что X — выпуклый компакт.

Знаменитая теорема Брауэра утверждает, что любое непрерывное отображение выпуклого компакта в себя имеет неподвижную точку.

Теорема (Брауэр, 1910). *Пусть X — выпуклое компактное подмножество конечномерного пространства, а отображение $f : X \to X$ непрерывно. Тогда существует неподвижная точка f.*

Эта теорема будет фокусом всего дальнейшего. В этой лекции мы обсудим ее частные случаи и различные переформулировки, варианты и обобщения. В следующей — поговорим о применениях этих результатов к экономическим задачам. И наконец в лекции 4 расскажем о ее доказательстве(ах) и алгоритме приближенного нахождения неподвижных точек.

Попробуем лучше понять смысл теоремы. Пусть X одномерно (т. е. попросту замкнутый отрезок $[a, b]$), и пусть f — непрерывное отображение этого отрезка в себя. Если мы рассмотрим функцию $f(x) - x$, то она меняет знак на $[a, b]$. А из анализа хорошо известно, что где-то внутри она обращается в нуль, что эквивалентно тому, что $f(x) = x$.

Теорема Брауэра представляет многомерное обобщение этого почти очевидного утверждения. Однако уже в двумерном случае утверждение Брауэра выглядит совсем неочевидным и даже малоправдоподобным. Почему это любое непрерывное отображение, скажем, круга в себя должно иметь неподвижную точку? Может быть, утверждение станет интуитивно более правдоподобным после следующей полезной геометрической конструкции. Допустим (вопреки утверждению), что отображение $f : D \to D$ не имеет неподвижных точек (здесь D — диск (шар) любой размерности). Тогда выпустим из точки $f(x)$ луч в точку x, и продолжим его до пересечения с границей D, т. е. со сферой $\partial D = S$. Полученную точку пересечения обозначим $g(x)$.

Так мы получаем отображение $g : D \to \partial D$ диска D на его границу. Как легко понять, отображение g будет непрерывным и оставлять точки границы на месте. Такие отображения называются ретракциями. Более точно, пусть X — множество, и $Y \subset X$ — его подмножество; отображение $g : X \to Y$ называется *ретракцией* на Y, если $f(y) = y$ для любой точки $y \in Y$.

Интуитивно достаточно ясно, что нельзя непрерывно перетянуть диск на его границу. Чтобы сделать утверждение Брауэра еще более правдоподобным, мы обсудим его еще в одном частном случае, когда отображение f не только непрерывно, но и аффинно. Отображение f одного выпуклого множества в другое аффинно, если для любых точек x, y и числа α, $0 \le \alpha \le 1$,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

Идея доказательства в аффинном случае проста. Возьмем произвольную точку x_0 и образуем последовательные приближения $x_n = f^n x_0$. Однако в отличии от сжимающего отображения, сейчас нет никаких оснований считать, что последовательность x_n сходится. Например, f может быть поворотом двумерного диска, и если x_0 была на границе, она так и будет крутиться по граничной окружности. Однако если брать центры тяжести точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$, т. е. точки

$$z_n = (x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1})/n,$$

то имеются все основания рассчитывать, что они будут все более и более «неподвижными». В самом деле,

$$\begin{aligned} f(z_n) - z_n &= (f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) - x_0 - x_1 - \cdots - x_{n-1})/n = \\ &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n - x_0 - x_1 - \cdots - x_{n-1})/n = (x_n - x_0)/n, \end{aligned}$$

а последнее становится все меньше и меньше с ростом n.

Теорема Какутани

Теорема Брауэра имеет массу эквивалентных переформулировок, полезных в тех или иных ситуациях. Некоторые переформулировки приведены в упражнениях. Здесь же мы более подробно остановимся на важном для экономических приложений обобщении теоремы Брауэра, принадлежащем Какутани. Обобщение состоит в том, что вместо однозначных непрерывных отображений допускаются и многозначные. Дело в том, что многие естественные объекты в матэкономике появляются как решения задачи максимизации функций (или предпочтений), а решение таких задач в общем случае многозначное.

Мы уже говорили в лекции 1, что *соответствием* (или многозначным отображением) из X в Y называется подмножество F в декартовом произведении $X \times Y$. Иногда F называют также графиком соответствия. *Образом* точки $x \in X$ при соответствии F считается множество $F(x) = \{y \in Y, (x, y) \in F\}$. Неподвижной точкой соответствия $F : X \Rightarrow X$ называется такой элемент $x^* \in X$, что $x^* \in F(x^*)$.

На соответствия в теореме Какутани накладываются два условия. Первое: все его образы $F(x)$ должны быть непустыми выпуклыми подмножествами X. В некотором смысле выпуклые множества похожи на точку: в них тоже нет «дыр». Второе условие имеет топологический характер и призвано заменить непрерывность. Скажем о нем подробнее.

Имеется много способов перенести понятие непрерывности отображения на соответствия. Это понятие непрерывности, полунепрерывности снизу и сверху, а также понятие замкнутого соответствия. Последнее для нас особенно важно.

Определение. Пусть X и Y — топологические пространства. Соответствие F из X в Y называется *замкнутым*, если F замкнуто как подмножество в произведении пространств $X \times Y$.

Иначе говоря, если последовательность точек (x_n, y_n) из F сходится к некоторой точке $(x, y) \in X \times Y$, то предельная точка (x, y) также принадлежит F.

Понятие замкнутого соответствия очень близко к понятию полунепрерывного сверху соответствия, хотя и не совпадает с ним. Приведем определение последнего в случае, когда пространства X и Y метрические. Напомним, что ε-окрестностью подмножества $A \subset Y$ называется множество

$$U_\varepsilon(A) = \{y \in Y, \rho(y, A) < \varepsilon\}$$

точек, удаленных от A менее чем на ε. Так вот, соответствие F между X и Y называется *полунепрерывным сверху* в точке $x \in X$, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$, такие что $F(x') \subset U_\varepsilon(F(x))$, как только $\rho(x, x') < \rho$.

Интуитивно это такие соответствия, что образы могут только увеличиваться.

Теорема (Какутани, 1941). *Пусть X — выпуклый компакт, а F — замкнутое соответствие X в себя с непустыми выпуклыми образами. Тогда существует такая точка $x^* \in X$, что $x^* \in F(x^*)$.*

Кстати, из теоремы Какутани легко получить и такое обобщение теоремы Брауэра на случай произвольных (разрывных) отображений f выпуклого компакта в себя. А именно, существует такая точка x^*, что $f(x^*)$ отстоит от x^* на расстояние, не превышающее «величину разрывности» f в точке x^*.

Доказательство. Доказательство теоремы Какутани состоит в сведении ее к теореме Брауэра. Идея сведения заключается в том, чтобы аппроксимировать (приближать) соответствие F непрерывными однозначными отображениями. Однако реализация этой идеи требует некоторой возни.

Для каждого числа $\varepsilon > 0$ мы построим некоторое вспомогательное однозначное отображение $f^\varepsilon : X \to X$. Чтобы определить f^ε, мы временно зафиксируем ε, и обозначим через $U(x)$ ε-окрестность произвольной точки $x \in X$. Множества $U(x)$, $x \in X$, образуют открытое покрытие X, и в силу компактности последнего существует конечное число точек $x_1, \ldots, x_m \in X$, таких что шары $U_i = U(x_i)$ покрывают X. Для каждого i от 1 до m рассмотрим функцию $u_i : X \to \mathbb{R}$, заданную формулой

$$u_i(x) = \max(0, \varepsilon - r(x, x_i)).$$

Очевидно, что u_i непрерывна, равна нулю вне шара U_i и отлична от нуля внутри U_i. Выберем по точке $y_i \in F(x_i)$, $i = 1, \ldots, m$. Наконец, образуем отображение $f^\varepsilon : X \to X$ по формуле

$$f^\varepsilon(x) = \frac{\sum_i u_i(x) y_i}{\sum_i u_i(x)}.$$

Здесь важно отметить, что знаменатель $\sum_i u_i(x) > 0$ при любом x, так как каждая точка x попадает в некоторый шар U_i.

Смысл этой формулы в том, что точка $f^\varepsilon(x)$ есть выпуклая комбинация точек y_i из $F(x_i)$ весами $\alpha_i(x) = u_i(x)/(\sum_j u_j(x))$. На самом деле, точка $f^\varepsilon(x)$ есть выпуклая комбинация таких точек y_i, для которых $\rho(x, x_i) < \varepsilon$, так как для других точек весовые коэффициенты $\alpha_i(x)$ обращаются в нуль.

Функция f^ε непрерывна и по теорема Брауэра имеет неподвижную точку $x^\varepsilon = f^\varepsilon(x^\varepsilon)$. И это при каждом ε. В силу компактности X можно найти последовательность $\varepsilon \to 0$, такую что точки x^ε сходятся к некоторой точке $x^* \in X$. Мы утверждаем, что точка x^* будет неподвижной для F, т. е. $x^* \in F(x^*)$.

Предположим противное, т. е. что x^* не принадлежит $F(x^*)$. В силу замкнутости $F(x^*)$ это означает, что расстояние от x^* до $F(x^*)$ больше нуля. Положим $\delta = \rho(x^*, F(x^*))/2$ и рассмотрим δ-расширение множества $F(x^*)$, т. е. множество $F(x^*)_\delta = \{y \in X, \rho(y, F(x^*)) < \delta\}$. В силу полунепрерывности F существует такое число $\varepsilon > 0$ (которое можно считать не превышающим δ), что $F(x') \subset F(x^*)_\delta$ для любой точки x', удаленной от x^* менее чем на ε. Обратимся теперь к построенной ранее точке $x^{\varepsilon/2}$, неподвижной точке отображения $f^{\varepsilon/2}$, которая удалена от x^* менее чем на $\varepsilon/2$. Мы уже говорили, что $x^{\varepsilon/2}$ есть выпуклая комбинация точек $y_i \in F(x_i)$, причем точки x_i удалены от $x^{\varepsilon/2}$ менее чем на $\varepsilon/2$. В силу неравенства треугольника точки x_i удалены от x^* менее чем на ε, поэтому соответствующие точки y_i принадлежат множеству $F(x^*)_\delta$. Как легко понять, любая выпуклая комбинация точек y_i также принадлежит множеству $F(x^*)_\delta$ (ибо множество $F(x^*)_\delta$ выпукло, как и $F(x^*)$); поэтому $x^{\varepsilon/2} \in F(x^*)_\delta$. Значит

$$\rho(x^*, F(x^*)) \leq \rho(x^*, x^{\varepsilon/2}) + (x^{\varepsilon/2}, F(x^*)) < \varepsilon/2 + \delta \leq 2\delta = \rho(x^*, F(x^*)),$$

что является противоречием. □

Теорема Тарского

Приведем еще один результат о неподвижных точках, который на первый взгляд относится к совершенно другой ситуации, чем мы рассматривали выше. В нем речь пойдет не о непрерывных отображениях топологических пространств, а о монотонных отображениях упорядоченных множеств. Сначала несколько определений.

Определение. *Упорядоченное множество* — это множество X, снабженное отношением (частичного) порядка $\geq$.

Иначе говоря, для некоторых (не обязательно всех) пар элементов (x, y) выполняется соотношение $x \geq y$. При этом предполагается, что отношение $\geq$ рефлексивно (т. е. $x \geq x$ $\forall x$), транзитивно (т. е. из $x \geq y$ и $y \geq z$ следует, что $x \geq z$), и антисимметрично (т. е. из $x \geq y$ и $y \geq x$ следует $x = y$).

Примеры упорядоченных множеств: множество $\mathbb{Z}$ целых чисел, множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел с обычными порядками; множество подмножеств некоторого множества с отношением включения $\subset$.

Отображение $f : X \to Y$ упорядоченного множества X в упорядоченное множество Y *монотонно* (возрастающее), если из $x \geq x'$ следует, что $f(x) \geq f(x')$.

Пусть A — подмножество упорядоченного множества X. Точка $x \in X$ называется *точной верхней гранью* A и обозначается $\sup(A)$, если выполнены два условия:

1) $x \geq a \; \forall \, a \in A$, и

2) если $y \geq a \; \forall \, a \in A$, то $y \geq x$.

Аналогично определяется точная нижняя грань inf.

Определение. Упорядоченное множество $(X, \geq)$ называется *полной решеткой*, если для любого подмножества $A \subset X$ существует как $\sup(A)$, так и $\inf(A)$.

Например, любой отрезок $[a, b]$ в $\mathbb{R}$ является полной решеткой, или множество $2^{\mathbb{Z}}$ всех подмножеств произвольного множества $\mathbb{Z}$. Множество $\mathbb{R}$ всех чисел полной решеткой не является.

Теорема (Тарский). *Пусть $f : X \to X$ монотонное отображение полной решетки X в себя. Тогда оно имеет неподвижную точку.*

Доказательство. Снова идея проста: воспользоваться последовательными приближениями, начиная с минимального элемента $0 = \inf(X)$. Так как очевидно, что $x_0 = 0 \leq f(0) = x_1$, то в силу монотонности $x_2 = f(x_1) \geq f(x_0) = x_1$, и т. д. Получается возрастающая последовательность точек

$$x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq \ldots$$

Положим $x_\infty = \sup(x_i, i = 1, \ldots, n, \ldots)$. Снова из монотонности $f(x_\infty) \geq x_\infty$.

К сожалению, тут может быть строгое неравенство, и процесс нужно продолжить, начиная с x_∞. Чтобы не привлекать трансфинитную индукцию, нужно по-другому реализовать эту идею.

Рассмотрим множество A таких элементов $x \in X$, что $x \leq f(x)$. Довольно ясно, что если $x \in A$, то $f(x) \in A$. Пусть $a = \sup(A)$. Так как $a \geq x$ $\forall x \in A$, то по монотонности $f(a) \geq f(x) \geq x$, поэтому $f(a)$ является верхней гранью для A, и значит $f(a) \geq a$ по определению точной верхней грани. Значит a тоже принадлежит A, как и $f(a)$. Но тогда $a \geq f(a)$, и в силу антисимметричности $a = f(a)$. $\square$

Как уже говорилось, на первый взгляд теорема Тарского имеет мало общего с теоремой Брауэра. Но это только на первый взгляд. Имеется более общее понятие выпуклого пространства, включающее в себя как частные случаи выпуклые подмножества и решетки. При таком взгляде монотонность превращается в непрерывность, а требование полноты решетки становится аналогом компактности. Так что обе эти знаменитые теоремы становятся частными случаями более общего утверждения.

Упражнения

2.1. Покажите существенность всех условий теоремы Брауэра: выпуклость, замкнутость и ограниченность X, непрерывность f.

2.2. Показать, что теорема Брауэра эквивалентна следующей теореме о неретрагируемости: не существует непрерывной ретракции n-мерного диска D на его границу $\partial D = S$.

2.3. Покажите, что теорема Брауэра эквивалентна следующей теореме о сюръективности: если $f : D \to D$ непрерывное отображение диска в себя, оставляющее на месте границу ∂D, то f сюръективно (т. е. отображение «на»).

2.4. Пусть D — n-мерный шар в $\mathbb{R}^n$, и пусть f — непрерывное отображение D в $\mathbb{R}^n$, которое отображает граничную сферу ∂D в D. Показать существование неподвижной точки. (Указание: использовать ретракцию $\mathbb{R}^n$ на D.)

2.5. Завершите намеченное выше доказательство о неподвижной точке в случае аффинного отображения выпуклого компакта в себя

2.6. Привести примеры замкнутых, но не полунепрерывных сверху соответствий, а также полунепрерывных сверху, но не замкнутых соответствий.

2.7. Покажите, что если Y — компакт, то любое замкнутое соответствие из X в Y полунепрерывно сверху.

2.8. Обратно, если все значения полунепрерывного сверху соответствия F замкнуты, то F полунепрерывно сверху.

2.9. Пусть $u : X \times T \to \mathbb{R}$ непрерывная функция. Рассмотрим соответствие $F : T \Rightarrow X$, которое точке $t \in T$ сопоставляет множество максимумов функции $u(\cdot, t)$ на X, т. е.

$$F(t) = \{x \in X, u(x,t) \geq u(x',t) \ \forall \ x' \in X\}.$$

Показать, что соответствие F замкнуто.

2.10. Докажите следующее утверждение: пусть X — выпуклый компакт, а $F : X \Rightarrow X$ — замкнутое соответствие с непустыми образами. Тогда существует такая точка x^*, которая принадлежит $\operatorname{conv}(F(x^*))$ — выпуклой оболочке $F(x^*)$.

2.11. Пусть f — отображение отрезка в себя, обладающее следующим свойством, ослабляющим как непрерывность, так и монотонность: для любой точки x отрезка

$$\lim_{x \to x_-} f(x) \leq f(x) \leq \lim_{x \to x_+} f(x).$$

Покажите, что f обладает неподвижной точкой.

2.12. Покажите существенность условий теоремы Какутани.

Рекомендуемая литература: [6, 8, 11].

Лекция 3

Теорема Брауэра: применения

Здесь мы рассмотрим четыре применения теоремы Брауэра (или ее вариантов): к существованию максимальных элементов, к равновесию Нэша в играх, к экономическому равновесию, и к ядру.

Максимальные элементы

Пусть $<$ — некоторое бинарное отношение на множестве X, т. е. подмножество в $X \times X$. Соотношение $x < y$ интерпретируется как утверждение, что y «лучше», или «предпочтительнее» x. По этой причине $<$ обозначается также как P. Обычно отношение $<$ обладает рядом дополнительных свойств, таких как транзитивность, иррефлексивность, открытость и т. п. Мы будем предполагать далее, что $<$ — иррефлексивно: любой элемент x не лучше самого себя, т. е. неверно, что $x < x$.

Вот самый простой пример возникновения такого отношения предпочтения $<$. Предположим, что на множестве X задана функция «полезности» $u : X \to \mathbb{R}$. Тогда определим отношение $<_u$, полагая $x <_u y \Leftrightarrow u(x) < u(y)$.

Такое отношение $<_u$ обладает свойством транзитивности и еще рядом свойств. Классической является обратная задача — при каких условиях на $<$ оно происходит из некоторой функции u, когда u можно считать непрерывной и т. п.

Возможен и более сложный механизм образования отношения. Пусть имеется функция $I : X \times X \to \mathbb{R}$; число $I(x, y)$ интерпретируется обычно как мера предпочтения x по сравнению с y. Тогда можно образовать отношение $>$, полагая $x > y \Leftrightarrow I(x, y) > 0$.

Определение. Элемент x множества X называется *максимальным* (относительно $<$), если не существует более лучших элементов, т. е. если множество $\{y \in X,\ x < y\}$ пусто.

Стоит предостеречь, что максимальный элемент может не быть наибольшим (элемент a наибольший, если $a > x \ \forall \ x \in X \setminus \{a\}$). Максимальных элементов может быть много, а может не быть ни одного. Ниже мы займемся условиями существования максимальных элементов. Из теоремы Вейерштрасса известно, что непрерывная функция на компакте достигает максимума. Обобщение этого утверждения на транзитивные предпочтения приведено в упражнении 3.1.

Оказывается, что свойство транзитивности (и тем более наличие функции «полезности») можно заменить некоторым свойством выпуклости. Здесь нам удобнее будет обозначать отношение $<$ символом P, а также пользоваться следующими двумя обозначениями:

$$P(x) = \{y \in X, x < y\} \qquad \text{и} \qquad P^{-1}(x) = \{y \in X, y < x\}.$$

Первое множество состоит из элементов, которые лучше x, а второе — которые хуже x.

Отношение предпочтения P на выпуклом множестве X называется *выпуклым*, если множества $P(x)$ выпуклы при любом $x \in X$. Отношение P на топологическом пространстве X называется *открытым*, если P открыто как подмножество декартова квадрата $X \times X$.

Теорема. *Пусть X — выпуклый компакт, а P — открытое выпуклое иррефлексивное отношение. Тогда существует максимальный элемент.*

На самом деле, требования к отношению P можно слегка ослабить, не усложняя доказательства. А именно, верна следующая

Теорема (Ки Фан, Зонненшайн, Бергстрем). *Пусть X — выпуклый компакт, а P — бинарное отношение на X, которое обладает следующими двумя свойствами:*

1) для каждого $x \in X$ множество $P^{-1}(x)$ открыто;

2) для каждого $x \in X$ выпуклая оболочка $P(x)$ не содержит x.

Тогда P обладает максимальными элементами.

Видно, что условие 1) обобщает открытость, а условие 2) — одновременно выпуклость и иррефлексивность.

Доказательство. Доказательство снова состоит в сведении к теореме Брауэра (которую, в свою очередь, легко вывести из этой теоремы), и частично повторяет доказательство теоремы Какутани. Предположим противное, т. е. что для каждого $y \in X$ существует x, такой что yPx, или $y \in P^{-1}(x)$. Иначе говоря, семейство множеств $(P^{-1}(x), x \in X)$ образует покрытие X. А так как по условию 1) это открытое покрытие, то в силу компактности X существует конечное число элементов $x_1, \ldots, x_n$ из X, таких что множества $U_i = P^{-1}(x_i)$ покрывают X.

Возьмем теперь непрерывные функции u_i на X, которые равны 0 вне U_i и строго положительны на U_i (в качестве u_i можно взять расстояние от точки до дополнения к U_i в X). После этого образуем непрерывное отображение $f : X \to X$ по формуле:

$$f(x) = \frac{\sum_i u_i(x) x_i}{\sum_i u_i(x)}.$$

Иначе говоря, $f(x)$ есть выпуклая комбинация точек x_i с весами $u_i(x)/(\sum_j u_j(x))$. По теореме Брауэра существует неподвижная точка x^* для f. Это значит, что x^* есть выпуклая комбинация тех точек x_i, для которых $u_i(x^*) > 0$, т. е. для которых $x^* \in P^{-1}(x_i)$, т. е. для которых $x_i \in P(x^*)$. Получаем окончательно, что x^* принадлежит выпуклой оболочке $P(x^*)$, что противоречит условию 2). □

Равновесия Нэша

Игрой n лиц (в стратегической форме) называется набор множеств $S_1, \ldots, S_n$ и набор функций $u_1, \ldots, u_n$ на произведении $X = S_1 \times \cdots \times S_n$. Множество S_i называется множеством *стратегий* игрока i, а u_i называется *функцией выигрыша* игрока i. Каждый игрок стремится выбрать такую стратегию $s_i \in S_i$, которая давала бы ему наибольший выигрыш. Однако этот выигрыш зависит также от выбора стратегий остальными игроками, поэтому в общем случае нет естественного и бесспорного правила для выбора каждым участником наиболее оптимальной стратегии.

Нэш (1950) предложил понятие равновесия в такой игре, которое с тех пор носит его имя. А именно, *равновесием Нэша* называется такой набор стратегий $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*) \in S_1 \times \dots \times S_n$, что для любого игрока i его стратегия s_i^* доставляет максимум функции $u_i(\cdot, s_{-i}^*)$. То есть стратегии s_{-i}^* остальных игроков считаются фиксированными, а меняется только i-ая переменная, которая находится в распоряжении игрока i. Иначе говоря, стратегия s_i^* игрока i оптимальна при условии, что остальные сохраняют свои стратегии s_j^* , $j \neq i$.

Равновесия Нэша существуют далеко не всегда. Однако шансы на существование сильно увеличиваются, если от исходных (чистых) стратегий перейти к смешанным (рандомизированным) стратегиям. Не вдаваясь в подробные объяснения (за которыми мы отсылаем к теории игр), скажем только, что это приводит к тому, что стратегические множества S_i становятся выпуклыми множествами, а функции выигрыша — аффинными по переменной s_i. На самом деле, вместо аффинности достаточно требовать вогнутость. Функция $u : X \to \mathbb{R}$ на выпуклом множестве X называется *вогнутой* (или выпуклой вверх), если

$$u(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha u(x) + (1-\alpha)u(y)$$

для любых $x, y \in X$ и $0 \leq \alpha \leq 1$.

Теорема (Нэш, 1950). *Предположим, что каждое множество S_i — выпуклый компакт, а функции выигрыша u_i непрерывны по всем переменным и вогнуты по s_i. Тогда существует равновесие Нэша.*

Доказательство. Для каждого игрока i и набора $s_{-i} = (s_j, j \neq i)$ стратегий остальных обозначим через $H_i(s_{-i})$ множество наилучших ответов i, т. е.

$$H_i(s_{-i}) = \mathrm{Argmax}(u_i(\cdot, s_{-i})).$$

При переменном s_{-i} мы получаем соответствие $H_i : \times_{j \neq i} S_j \Rightarrow S_i$, т. е. подмножество в X. В силу непрерывности функции u_i по всем переменным это замкнутое подмножество в X (см. упр. 2.9); в силу вогнутости u_i по переменной s_i образы $H_i(s_{-i})$ — непустые выпуклые подмножества S_i.

Набор стратегий $s = (s_i) \in X$ является равновесием Нэша тогда и только тогда, когда s_i принадлежит $H_i(s_{-i})$ для любого i. Образуем следующее соответствие $F : X \Rightarrow X$, которое точке $s \in X$ сопоставляет множество $F(s) = \times_i H_i(s_{-i})$. Как легко понять, соответствие F замкнуто, а его образы непустые выпуклые как произведения непустых выпуклых множеств $H_i(s_{-i})$. Поэтому к соответствию F применима теорема Какутани, которая дает существование точки $s^* \in F(s^*)$. Последнее как раз и означает, что $s_i^* \in H_i(s_{-i}^*)$ для любого i, т. е. что s^* — равновесие Нэша. □

Конкурентные равновесия

Так как в нашу задачу не входит детальное изложение теории экономического равновесия, но только демонстрация применения теорем о неподвижных точках, мы лишь бегло обрисуем экономическую часть, не гонясь за общностью. Пусть $\mathbb{R}^l$ — пространство товаров. Имеется n потребителей, каждый потребитель задается функций полезности u_i на своем потребительском множестве X_i, которое мы для простоты считаем равным положительному ортанту $\mathbb{R}^l_+$. Далее, имеется технологическое множество $Y \subset \mathbb{R}^l$. Предположим, что в экономике действуют цены p, которые позволяет с каждым товарным вектором $x \in \mathbb{R}^l$ связать его стоимость px. Функционирование экономики происходит так. Производитель при действующих ценах p выбирает тот технологический способ, который дает ему максимальную прибыль $\max_{y \in Y} py$. Полученная прибыль как-то распределяется между потребителями, в результате чего каждый потребитель i получает доход $\beta_i(p)$. Этот доход он тратит на приобретение потребительского набора x_i, так что $px_i \leq \beta_i(p)$. Конечно, если не выполнен натуральный баланс в форме $\sum_i x_i = y$ (или хотя бы как неравенство $\sum_i x_i \leq y$), цена p имеет мало смысла. Напротив, если натуральный баланс выполнен, говорят, что набор (p, y, (x_i)) является *конкурентным равновесием*.

Мы будем предполагать далее, что выполняется *закон Вальраса*, т. е. что при любой цене выполняется соотношение

$$\sum_i \beta_i(p) = \max_{y \in Y} py.$$

Кроме того, мы будем считать, что выполнены следующие предположения:

1) функции полезности u_i непрерывны и квазивогнуты;

2) технологическое множество Y — выпуклый компакт;

3) функции дохода β_i непрерывны и положительны при $p > 0$.

При этих предположениях существует равновесие. Более того, можно считать, что равновесная цена p принадлежит единичному симплексу Δ_l, т. е. $p\mathbf{1}_l = \mathbf{1}_l$.

Для доказательства введем несколько соответствий. Первое — производственное. Для каждой цены p из симплекса Δ_l через $Y(p)$ обозначим множество $y \in Y$, дающих максимальную прибыль при цене p. Аналогично, для каждого потребителя i введем множество $X_i(p)$ его оптимальных потреблений, т. е. $X_i(p)$ состоит из решений задачи $u_i(x) \to \max$ при ограничении $x \in X_i$ и $px \leq \beta_i(p)$. Точнее, в этом месте положительный ортант X_i нужно заменить достаточно большим кубом K, но это уже техническое место, на котором мы не хотели бы сейчас останавливаться. Точно так же мы оставляем читателю проверку того, что соответствия Y и X_i из Δ_l в $\mathbb{R}^l$ замкнуты (см. упр. 2.9). Отметим только, что именно здесь нужно предположение о строгой положительности доходов β_i (т. н. *условие Слейтера*); при его нарушении равновесия может и не быть. Кроме того, множества $Y(p)$ и $X_i(p)$ непусты и выпуклы. Поэтому если мы образуем соответствие избыточного спроса $E : \Delta_l \rightrightarrows \mathbb{R}^l$ по формуле:

$$E(p) = \sum_i X_i(p) - Y(p) = \Big\{\sum_i x_i - y,\ x_i \in X_i(p),\ y \in Y(p)\Big\},$$

то это также замкнутое соответствие с непустыми выпуклыми образами. Отметим еще одно важное свойство соответствия E. Так как $px_i \leq \beta_i(p)$ для любого i, то

$$p\Big(\sum_i x_i - y\Big) < \sum_i \beta_i(p) - py = 0$$

по закону Вальраса. Поэтому для любого $p \in \Delta_l$ и любого $z \in E(p)$ выполнено соотношение $pz \leq 0$. Оказывается, что этих свойств уже достаточно для существования вектора цен p^* и вектора $z^* \in E(p^*)$, таких что $z^* \leq 0$, что и дает равновесие. В самом деле, верна следующая теорема (тоже эквивалентная теореме Брауэра):

Лемма (Гейл, 1955; Никайдо, 1956). *Пусть Δ_l — единичный симплекс, и E — замкнутое соответствие из Δ_l в компактное выпуклое подмножество $K \subset \mathbb{R}^l$ с выпуклыми непустыми образами. Предположим, что $pz \leq 0$ для любых $p \in \Delta_l$ и $z \in E(p)$. Тогда существуют $p^* \in \Delta_l$ и $z^* \in E(p^*)$, такие что $z^* \leq 0$.*

Доказательство. Для каждого вектора $z \in K$ определим следующее подмножество в Δ_l:

$$G(z) = \mathrm{Argmax}(z) = \{p \in \Delta_l, pz = \max_{q \in \Delta_l}(qz)\}.$$

Очевидно (или легко проверить в духе упр. 2.9), что это замкнутое соответствие; образы его — некоторые грани симплекса (точки максимума линейной функции z), так что они непустые и выпуклые.

Поэтому если мы образуем соответствие F из $\Delta_l \times K$ в себя по формуле:

$$F(p, z) = G(z) \times E(p),$$

то к нему применима теорема Какутани и существует такая пара $(p^*, z^*) \in \Delta_l \times K$, что

$$p^* \in G(z^*) \quad \text{и} \quad z^* \in E(p^*).$$

Мы утверждаем, что $z^* \leq 0$. Действительно, допустим, что некоторая координата z_j^* вектора z^* строго положительна. Тогда $\max(z^*|\Delta_l) > 0$ (взять значение z^* на j-м базисном векторе $e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \in \Delta_l$), значит и $p^*z^* = \max(z^*|\Delta_l) > 0$ (см. определение G), что противоречит условию $p^*z^* < 0$. □

Замечание 1. Конечно, модель равновесия и условия могут меняться, но общий метод доказательства остается. Например, предположение, что Y — выпуклый компакт, часто заменяется предположением, что Y — выпуклый конус; но в этом случае приходится дополнительно позаботиться об ограниченности множества допустимых распределений.

Замечание 2. Использованный в доказательстве леммы Гейла-Никайдо способ назначения новых цен наводит на мысль ввести еще одного участника, который отвечает за цены. Точнее, он смотрит на эксцесс спроса z и назначает цену p так, чтобы максимизировать pz на симплексе. При таком взгляде конкурентное равновесие превращается в равновесие Нэша в построенной игре. И для существования можно привлекать довольно мощные теоремы существования. В частности, вместо функций полезности потребителей можно рассматривать отношения предпочтения P типа рассмотренных выше.

Ядро

Конкурентные равновесия обладают одним замечательным свойством, которое мы только отметим, но не будем подробно обсуждать. Свойство это состоит в том, что никакая коалиция (т. е. подмножество) потребителей не может улучшить благосостояние своих членов по сравнению с равновесным распределением, пользуясь только своими ресурсами. В частности, равновесное распределение оптимально по Парето и индивидуально рационально.

Это свойство коалиционной неулучшаемости можно сформулировать абстрактно. Пусть имеются некоторое множество альтернатив X и некоторая конечная группа участников I. *Коалицией* называется произвольное непустое подмножество в I. Для каждой альтернативы $x \in X$ обозначим через $H(x)$ множество тех коалиций, которые могут *улучшить* исход x. При нашем подходе «улучшить» — это первичное, неопределяемое понятие, которое должно уточняться в более конкретных ситуациях. Говорят, что состояние x^* принадлежит ядру, если $H(x^*)$ пусто. Приведем основную модель (или структуру), где появляется ядро, и условия, гарантирующие непустоту ядра. Эта модель называется *коалиционной игрой без побочных платежей.*

Пусть I — множество игроков (участников). Исход игры описывается вектором $u = (u_i, i \in I) \in \mathbb{R}^I$, конкретизирующим, какую полезность получает тот или иной игрок. Возможности каждой коалиции $K \subset I$ задаются множеством $V(K) \subset \mathbb{R}^K$; если вектор $x_K = (x_i, i \in K)$ принадлежит $V(K)$, коалиция K может обеспечить каждому своему участнику $i \in K$ полезность не меньше, чем x_i. Таким образом, игра без побочных платежей задается семейством множеств $V = (V(K),\ K \subset I)$. Коалиция K может *улучшить* исход $u \in \mathbb{R}^I$, если существует такой вектор $x_K = (x_i,\, i \in K)$ из $V(K)$, что $x_i > u_i$ для всех $i \in K$. В этих терминах ядро состоит из таких наборов $u \in \mathbb{R}^I$, которые с одной стороны *достижимы*, т. е. принадлежат $V(I)$, а с другой — неулучшаемы никакой коалицией.

Обычно предполагается, что множества $V(K)$ замкнуты, ограничены сверху и нормальны (т. е. с каждым элементом содержат и меньшие). Поэтому условие неулучшаемости можно переформулировать так: проекция u_K вектора u на любое подпространство $\mathbb{R}^K$ не попадает строго внутрь $V(K)$.

Интуитивно ясно, что если «запросы» коалиций (т. е. множества $V(K)$) велики по сравнению с возможностями всего общества (т. е. с $V(I)$), то ядро пусто. В противном случае можно рассчитывать на существование ядерных исходов. Но как это точно сформулировать? Одна из возможностей состоит в привлечении понятия сбалансированности.

Предположим, что каждой коалиции K предписано некоторое неотрицательное число λ_K. Набор $\lambda = (\lambda_K,\, K \subset I)$ таких чисел называется *сбалансированным*, если

$$\sum_{i \in K} \lambda_K = 1 \ \text{ для любого } \ i \in I. \tag{3.1}$$

Так вот, игра V называется *сбалансированной*, если множество $V(I)$ «достаточно велико» в следующем смысле. Предположим, что вектор полезностей $u \in \mathbb{R}^I$ таков, что найдется сбалансированный набор коэффициентов $\lambda = (\lambda_K)$, такой что если $\lambda_K \neq 0$, то проекция $u_K \in V(K)$; тогда вектор $u \in V(I)$.

Теорема (Скарф, 1967). *Если игра V сбалансирована, то ее ядро непусто.*

Стандартные доказательства теоремы Скарфа апеллируют обычно к тому или иному варианту леммы Куратовского–Кнастера–Мазуркевича–Шепли (см. например, книгу Экланда [10]). Я приведу здесь другое, более прямое и короткое доказательство. Оно основано на интерпретации игры без побочных платежей как некоторой экономики, в которой коалиции играют роль фирм, а выплаты участникам понимаются как зарплаты. Ядерное распределение тогда становится просто равновесным распределением в соответствующей экономике.

Одно наводящее соображение. Результатом коалиционного взаимодействия естественно считать пару (u, λ), где $u = (u_i, i \in I)$ — распределение выигрыша, а $\lambda = (\lambda_K, K \subset I)$ отражает интенсивности функционирования коалиций. Проще всего считать, что λ_K принимают значения 1 или 0 в зависимости от того, реально ли образовалась коалиция K или нет. Однако более гибкий подход состоит в том, чтобы допустить и промежуточные значения для λ_K. Однако нужно в любом случае потребовать, чтобы имеющихся участников в точности хватило для такого формирования, т. е. выполнение условия сбалансированности (3.1). В некотором смысле это просто баланс по труду.

Второе естественное требование на результирующую пару (u, λ) состоит в том, что вектор u должен быть достижим усилиями сформированных согласно λ коалиций. Под этим я понимаю, что если $\lambda_K > 0$ для некоторой коалиции K, то $u_K \in V(K)$. Если обозначить через $V(\lambda)$ такой набор векторов u, то это второе условие можно переписать как $u \in V(\lambda)$.

Наконец, если дележ u может быть улучшен некоторой коалицией K (т. е. если $u_K \in \mathrm{Int}(V(K))$), то сложившаяся структура коалиций будет разрушена. Чтобы это исключить, потребуем, чтобы для любой коалиции K вектор u_K не попадал во внутренность $V(K)$.

Пару (u, λ), удовлетворяющую этим трем требованиям (сбалансированности, достижимости и недоминируемости), назовем *B-ядерной*.

Теорема. *В любой игре V существуют B-ядерные исходы.*

Так как сбалансированность игры означает, что $V(\lambda) \subset V(I)$ для любого сбалансированного набора λ, то любой B-ядерный исход принадлежит ядру. Поэтому очевидным следствием нашей теоремы является уже упомянутая теорема Скарфа.

Доказательство. Как уже говорилось, мы смотрим на коалиционную игру как на экономику, в которой фирмы для своей работы приглашают участников этой коалиции. Роль цен (зарплат) выполняет вектор u. В зависимости от величины u фирма-коалиция K либо бездействует (если запросы участников велики и u_K не попадает в $V(K)$), либо развивает бешеную активность (если запросы участников малы и u_K попадает во внутренность $V(K)$), либо (в промежуточном случае, когда u_K лежит на границе множества $V(K)$) безразличны к уровню интенсивности. В конечном итоге фирмы-коалиции предъявляют спрос на участников. Если спрос на некоторого участника i превышает 1, то u_i увеличивается, если нет — уменьшается. Неподвижная точка дает ядерный исход.

Более точно, обозначим через Λ множество $\{\lambda = (\lambda_K),\ 0 \le \lambda_K \le 2\ \forall\ K\}$, X — шар большого радиуса вокруг 0 в пространстве $\mathbb{R}^I$. Мы определим сейчас (многозначное) отображение F множества $X \times \Lambda$ в себя, т. е. по паре (u, λ) определим новую пару (u', λ').

Определение u'. Зададим u' как Argmax на X линейной функции $\sum_K \lambda_K \mathbf{1}_K - \mathbf{1}_I$. Это единственная точка на границе шара X кроме того случая, когда λ сбалансировано. В этом случае в качестве u' можно брать любую точку из шара X.

Определение λ'. Зададим λ' следующим образом. Для коалиции K положим
$\lambda'_K = 0$, если u_K не принадлежит $V(K)$;
λ'_K — любое число между 0 и 2, если u_K лежит на границе $V(K)$;
$\lambda'_K = 2$, если u_K попадает во внутренность $V(K)$.

Ясно, что построенное отображение (соответствие) F замкнуто и имеет непустые выпуклые образы. Поэтому по теореме Какутани существует неподвижная пара (u^*, λ^*). Я утверждаю, что она B-ядерная.

Действительно, если u^* лежит на границе шара X, то некоторая координата u_i^* «большая». Но тогда никакая коалиция K, содержащая i, не может обеспечить i такой большой доход, и значит $\lambda_K^* = 0$, спрос на этого участника i равен 0, и u_i^* должно упасть. Аналогично если u_i^* «сильно отрицательно».

Таким образом, точка u^* лежит строго внутри X, откуда λ сбалансировано.

Если $\lambda_K^* > 0$, то из определения λ' видно, что $u_K^* \in V(K)$, т. е. выполняется свойство достижимости. Наконец, в силу той же сбалансированности $\lambda_K^* \le 1$, т. е. u_K не попадает строго внутрь $V(K)$ ни для какой коалиции K, и мы имеем недоминируемость. □

Упражнения

3.1. Докажите следующее утверждение: пусть X — компактное топологическое пространство, а $<$ — иррефлексивное бинарное отношение на нем, которое обладает следующими двумя свойствами: 1) оно открыто (как подмножество $X \times X$), и 2) оно транзитивно (т. е. $x < y < z$ влечет $x < z$). Тогда существует максимальный элемент.

3.2. Функция u называется *квазивогнутой*, если для любого числа r выпукло множество $\{x \in X, u(x) \ge r\}$. Покажите, что любая вогнутая функция квазивогнута. Покажите, что теорема Нэша остается верной, если вогнутость функций u_i заменяется квазивогнутостью.

3.3. Пусть в игре участвуют 3 игрока. Игрок в одиночку не может выиграть ничего (т. е. ≤ 0), любые другие коалиции (содержащие двух или трех членов) могут получить 1 руб. и как угодно перераспределить между своими членами. Показать, что ядро пусто. Насколько нужно увеличить ценность коалиции всех игроков, чтобы появилось ядро?

Рекомендуемая литература: [2, 4, 6, 7, 8, 10, 11].

Лекция 4

Теорема Брауэра: доказательства и алгоритмы

Эта лекция посвящена доказательству теоремы Брауэра. Напомним ее формулировку: если $f : X \to X$ непрерывное отображение выпуклого компакта X в себя, то существует неподвижная точка. Мы приведем (с небольшими пропусками) комбинаторное доказательство, а затем бегло обсудим некоторые альтернативные доказательства.

Редукция к симплексам

Прежде всего заметим, что эта теорема имеет топологическую природу: если она верна для X, то верна и для любого топологического пространства, гомеоморфного X.

Мы утверждаем, что любой выпуклый компакт размерности n гомеоморфен единичному шару D_n в $\mathbb{R}^n$, где

$$D_n = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1\},$$

а $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$, т. е. $|(x_1, \ldots, x_n)| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$. В самом деле, пусть X — n-мерный выпуклый компакт. Тогда у него имеются внутренние точки; без ограничения общности можно считать эту внутреннюю точку равной 0. Для каждого единичного вектора v положим $k(v) = \max(r \in R, rv \in X)$. Довольно ясно, что $0 < k(v)$ и $k(v)$ непрерывно зависит от вектора v.

Теперь искомый гомеоморфизм $g : D_n \to X$ строится без труда. Он переводит 0 в 0, а для ненулевого вектора $y \in D_n$ мы полагаем $g(y) = k(y/|y|)y$. Иначе говоря, вектор y удлиняется в $k(y/|y|)$ раз. Ясно, что g обратим: обратное отображение g^{-1} задается также явно: для $x \in X \quad g^{-1}(x) = x/k(x/|x|)$. Мы оставляем читателю проверку непрерывности g и g^{-1}.

Таким образом, достаточно доказать теорему Брауэра для любого шара D_n или любого (стандартного) симплекса Δ_n. Стоит, однако, напомнить, что такое симплекс.

Пусть S — конечное множество. *Стандартным симплексом* с вершинами в S называется множество таких точек $x = (x_s)$ в $\mathbb{R}^S$, что все координаты $x_s \geq 0$ и их сумма $\sum_s x_s = 1$. Такой симплекс обозначается как Δ_S (обычно $S = \{1, \ldots, n\}$, и тогда мы обозначаем его как Δ_n). Например, Δ_1 состоит из одной точки, Δ_2 — отрезок, Δ_3 — треугольник, Δ_4 — тетраэдр, и т. д.

Каждый элемент $s \in S$ реализуется как вершина симплекса Δ_S, а именно как такая точка, что его s-я координата равна 1, а остальные равны 0. И вообще, если T — подмножество S, то симплекс Δ_T естественно реализуется как грань симплекса Δ_S. При этом

$\Delta_T \bigcap \Delta_U = \Delta_{T \bigcap U}$ для $T, U \subset S$. Грани вида $\Delta_{S-\{s\}}$, где $s \in S$, называются стенками Δ_S, противоположными вершине s; они задаются уравнением $x_s = 0$.

Очевидно, что симплекс Δ_S является выпуклым множеством (размерности $n-1$), и более того, выпуклой оболочкой своих вершин $s \in S$. Эти вершины аффинно независимы в том смысле, что для любого выпуклого множества Y и любого отображения $f : S \to Y$ существует единственное аффинное отображение $\hat{f} : \Delta_S \to Y$, продолжающее f (интеграл, или среднее). Часто поэтому симплексом называют любое подмножество в векторном пространстве V, являющееся выпуклой оболочкой аффинно независимого набора точек. Такие симплексы аффинно изоморфны стандартным.

Лемма Шпернера

Центральную роль в приводимом ниже доказательстве теоремы Брауэра будет играть вспомогательная комбинаторная лемма, полученная Шпернером в 1928 г. Чтобы она не выскакивала, как черт из табакерки, сделаем некоторые пояснения. Пусть $f : \Delta_S \to \Delta_S$ — непрерывное отображение стандартного симплекса в себя. Для каждого $s \in S$ рассмотрим множество

$$F_s = \{x = (x_t) \in \Delta_S,\ f(x)_s \leq x_s\}.$$

То есть это множество таких точек, образ которых не приближается к вершине s. Наша задача — показать, что все эти множества F_s имеют общую точку. В самом деле, если точка симплекса x^* принадлежит всем F_s, она (под действием f) не приближается ни к какой вершине, а значит, остается на месте.

А что мы знаем о множествах F_s? Ясно, что все они замкнуты. Далее, в совокупности они покрывают симплекс Δ_S; действительно, не может же точка симплекса приближаться ко всем своим вершинам! На самом деле, это соображение годится для любой грани, и мы имеем следующее свойство: для любого $T \subset S$ грань Δ_T покрывается множествами F_t, где $t \in T$.

Замечательно, что только этих двух свойств семейства множеств $(F_s,\ s \in S)$ (замкнутости и того, что $\Delta_T \subset \bigcup_{t \in T} F_t$ для любого $T \subset S$) достаточно, чтобы гарантировать наличие общей точки у F_s. Это составляет содержание *теоремы Кнастера–Куратовского–Мазуркевича (1929)*, также эквивалентной теореме Брауэра. Мы, однако, не будем останавливаться на ККМ, а двинемся к Шпернеру. Тут полезно чуть изменить терминологию. Вместо того, чтобы говорить, что точка симплекса x принадлежит F_s, скажем, что точка x имеет *метку* s. ККМ утверждает, что существует точка x^*, имеющая все метки.

Так вот, лемма Шпернера представляет конечную аппроксимацию ККМ. Пусть V — конечное, но достаточно плотное подмножество в симплексе Δ_S, и каждой точке $v \in V$ приписана некоторая метка из S. Тогда (при дополнительном граничном условии) существует группа близкорасположенных точек, имеющих в совокупности все метки.

Более точно, в лемме Шпернера предполагается заданной некоторая триангуляция Σ симплекса Δ_S; вершины этой триангуляции и образуют множество V. Вершины считаются близкими, если они принадлежат некоторому симплексу из триангуляции Σ. Мы не приводим формального определения триангуляции; это некоторое конечное покрытие Δ_S более мелкими симплексами (они обозначаются σ, τ и т. п.), которое удовлетворяет следующему главному требованию: для любых симплексов σ и τ их пересечение $\sigma \cap \tau$ является гранью как в σ, так и в τ (быть может, пустой). Каждая вершина v нашей триангуляции имеет метку $l(v) \in S$. Граничное условие ККМ приобретает такой вид: если вершина $v \in V$ лежит на грани Δ_T, $T \subset S$, то ее метка также принадлежит T. После этих предварительных пояснений можно дать окончательную формулировку леммы.

Лемма (Шпернер, 1928). *Пусть дана триангуляция Σ симплекса Δ_S с множеством вершин V. Пусть каждая вершина $v \in V$ помечена некоторым элементом из S, т. е. дано отображение $l : V \to S$, причем вершины, лежащие на грани Δ_T, $T \subset S$, имеют метки из T. Тогда существует симплекс σ нашей триангуляции, вершины которого несут все метки из S.*

Такой симплекс называется далее *пестрым*. Выбирая предельную точку все более мелких пестрых симплексов, мы видим, что теорема Брауэра (или ККМ) является следствием леммы Шпернера и существования сколь угодно мелкой триангуляции.

Триангуляции

Скажем кратко о существовании мелких триангуляций симплекса Δ_S. Один из способов построения использует барицентрические разбиения. Однако более полезным часто бывает другой регулярный способ построения сколь угодно мелкой триангуляции. Путь m — (большое) целое число. Мы построим сейчас триангуляцию симплекса Δ_n, вершинами которой будут точки из Δ_n, координаты которых принадлежат $(1/m)\mathbb{Z}$. Для этого удобнее триангулировать другой симплекс, заданный уравнениями

$$\Delta = \{x = (x_i) \in \mathbb{R}^n,\ m \geq x_1 \geq \cdots \geq x_n \geq 0\},$$

так что вершины триангуляции будут находиться в целочисленных точках. Симплексы этой триангуляции устроены так. Зафиксируем некоторую перестановку π множества $\{1, \ldots, n\}$ и целочисленную точку $y \in \mathbb{Z}^n$.

Тогда симплекс $\sigma_{y,\pi}$ натягивается на точки

$$x^0 = y, \quad x^1 = x^0 + e^{\pi(1)}, \quad \ldots, \quad x^n = x^{n-1} + e^{\pi(n)}.$$

Здесь e^i — i-й базисный вектор.

Нужно проверить, что любая точка симплекса $\Delta = \{x = (x_i) \in \mathbb{R}^n,\ m \geq x_1 \geq \cdots \geq x_n \geq 0\}$, попадает в некоторый симплекс триангуляции. Обозначим через $[a]$ целую часть числа a. Тогда в качестве y для точки x возьмем точку $[x]$ с координатами $[x_i]$, а перестановку π возьмем в соответствии с убыванием чисел $x_i - [x_i]$. Конечно, при этом нужно убедиться, что вершины симплекса $\sigma_{y,\pi}$ также принадлежат Δ, если точка x была из Δ. Оставим это в качестве упражнения.

Доказательство леммы Шпернера

Симплекс триангуляции, вершины которого имеют все метки, называется пестрым. Таким образом, лемма Шпернера утверждает существование пестрого симплекса. Как это иногда бывает, легче доказать более сильное утверждение. А именно, мы покажем, что пестрых симплексов *нечетное* число. Почему же легче доказывать более сильное утверждение? Дело в том, что при индуктивном рассуждении мы опираемся на более сильную посылку, и это облегчает и помогает получить и более сильное заключение. Мы убедимся в этом при доказательстве леммы Шпернера.

Доказательство. Оно проводится по индукции и очевидно верно для 0-мерного симплекса Δ_1. В общем случае отождествим S с множеством $\{1, \ldots, n\}$. Кроме пестрых симплексов, которые имеют все метки от 1 до n, в рассуждении важную роль будут играть т. н. *полупестрые* симплексы, помеченные метками от 1 до $n-1$. Ясно, что полупестрым может быть только симплекс размерности $n-1$ или $n-2$. Рассмотрим три множества:

1) A — множество пестрых симплексов,

2) B — множество полупестрых симплексов триангуляции, лежащих на грани $\Delta_{\{1,\dots,n-1\}}$,

3) I — множество пар (σ, τ), где σ — $(n-1)$-мерный симплекс, а τ — его полупестрая грань.

Посчитаем число элементов $|I|$ множества I двумя способами.

Первый способ. Если (σ, τ) — пара из I, то симплекс σ либо пестрый (т. е. принадлежит A), либо полупестрый. В первом случае для такого σ имеется ровно одна пара $(\sigma, \cdot)$ из I (а именно, (σ, τ)), во втором — ровно две таких пары. Поэтому $|I| = |A| +$ четное число.

Второй способ. Если (σ, τ) — пара из I, то либо σ лежит «внутри» Δ_n, либо лежит на границе. Если τ лежит внутри Δ_n, то он является гранью двух $(n-1)$-мерных симплексов триангуляции Σ, и имеется ровно две пары $(\cdot, \tau) \in I$. Если τ лежит на границе, то ровно одна такая пара. При этом в силу условия леммы τ лежит на грани $\Delta_{\{1,\dots,n-1\}}$, т. е. принадлежит множеству B. Поэтому $|I| =$ четное число $+ |B|$.

Заключаем, что интересующее нас число $|A|$ отличается от числа $|B|$ на четное число. Но $|B|$ — это в точности число пестрых симплексов триангуляции грани $\Delta_{\{1,\dots,n-1\}}$, и по индукции это число нечетное. Поэтому нечетно и $|A|$. □

Обсуждение доказательства

На рис. **??** изображена триангуляция Δ_3. Если мы пометим пестрые и полупестрые симплексы, то увидим, что они образуют пути. И эти пути бывают четырех типов:

Рис. 1

1) начинаются на грани и заканчиваются на грани;

2) циклы;

3) начинаются на грани и заканчиваются в пестром симплексе;

4) начинаются и заканчиваются в пестром симплексе.

Это наводит на мысль об алгоритме поиска пестрого симплекса. Надо начать с полупестрого симплекса на грани, и двигаться по полупестрым симплексам, пока не придем в пестрый симплекс. Более точно, мы начинаем с полупестрого симплекса размерности $n-2$, лежащего на грани-основании. Он является гранью единственного симплекса размерности $n-1$. Если он не пестрый, то полупестрый, и у него есть вторая полупестрая грань, причем единственная. К этой грани опять примыкает единственный новый симплекс размерности $n-1$, и т. д.

Некоторое явное неудобство состоит в том, что мы можем прийти не в пестрый симплекс, а вернуться на ту же грань. Заметим, однако, что последнего не случится, если на основании имеется только один полупестрый симплекс. Поэтому предварительно добавляется еще один слой симплексов (под основанием), который размечается так, чтобы на нем имелся ровно один полупестрый симплекс. Стартуя с него, путь уже обязательно приведет к пестрому симплексу (см. рис. **??**).

Рис. 2

Эта идея может оформляться многими разными способами и приводит к различным алгоритмам приближенного нахождения неподвижной точки. Здесь нет возможности входить в детали и различные ухищрения; подробнее см. книгу Тодда [8].

Другие доказательства

Теорема Брауэра, будучи весьма нетривиальной, имеет много различных доказательств, использующих разные методы и подходы. Без преувеличения можно сказать, что эти доказательства служат хорошим введением во многие области математики. Оригинальное доказательство Брауэра использовало теорию индексов векторных полей. Приведенное выше доказательство опиралось на комбинаторную лемму Шпернера. Ниже мы наметим три других доказательства. Более точно, мы будем обсуждать доказательства теоремы о неретрагируемости диска D_n на его границу $\partial D_n = S_{n-1}$, эквивалентной (см. лекцию 2) теореме Брауэра.

Алгебраическая топология. Метод алгебраической топологии состоит в построении подходящего функтора из топологии в алгебру. С каждым топологическим пространством X связывается алгебраический объект $H(X)$ (в нашем случае это будет векторное пространство), а с каждым (непрерывным) отображением $f : X \to Y$ — линейное отображение $H(f) : H(X) \to H(Y)$ этих векторных пространств. При этом композиция отображений дает композицию, а тождественное отображение — тождественное. Детали этих конструкций выходят за рамки настоящего изложения. Применим это к нашей ситуации, точнее, к предположению о существовании ретракции $f : D \to S$ шара на его границу. В качестве H возьмем теорию гомологий (размерности $n-1$ с коэффициентами в $\mathbb{R}$). Вычисления дают, что $H(D) = \{0\}$, тогда как $H(S) = \mathbb{R}$. Существование ретракции дает гомоморфизмы $\mathbb{R} = H(S) \to H(D) \to H(S) = \mathbb{R}$, композиция которых тождественна, ибо такова композиция отображений $S \to D \to S$ (см. определение ретракции из лекции 2). Но с другой стороны, этот гомоморфизм нулевой, ибо он пропускается через нулевое пространство $H(D)$. Это противоречие и доказывает невозможность ретракции D на границу.

Недостаток этого подхода — в необходимости развития гомологического формализма, несомненно, полезного для многих других задач, но явно чрезмерного применительно к теореме Брауэра. Отметим, что построение групп гомологий использует триангуляции, появляющиеся в лемме Шпернера.

Дифференциальная топология. Снова пусть $f : D \to S$ — ретракция шара на его границу. Для точки $y \in S$ рассмотрим ее прообраз $f^{-1}(y)$. Интуитивно следует ожидать, что $f^{-1}(y)$ является одномерной кривой, которая начинается в точке y. По идее, у нее должен быть и другой конец (почему?). На границе ∂D он не может лежать, все точки границы заняты другими кривыми. Внутри эта кривая тоже не может остановиться (почему?). Вот и противоречие.

Конечно, это только грубая идея, но она оказывается правильной, хотя ее реализация также требует значительной возни. Во первых, без особых трудностей можно предполагать, что ретракция f является гладким отображением. Во вторых, теорема Сарда (и это самое трудное и техническое место) гарантирует существование такой точки $y \in S$, что дифференциал df невырожден во всех точках «кривой» $f^{-1}(y)$. А тогда $f^{-1}(y)$ действительно «хорошая кривая» и не может кончаться внутри D. Получается, что у нее только один конец — точка y, чего тоже быть не может.

Отметим, что это же рассуждение показывает, что не существует ретракции многообразия с краем X на его край ∂X. Кстати, путь по полупестрым симплексам — это и есть грубый аналог движения по кривой $f^{-1}(y)$ из точки y в поисках «другого конца».

Формула Стокса. Приведем еще одно «почти элементарное» и несомненно самое изящное доказательство, придуманное сравнительно недавно (в 1981 г.) Каннаи. Снова мы будем устанавливать несуществование *гладкой* ретракции $f : D_n \to S$ шара D на его границу. Чтобы лучше понять идею, рассмотрим сначала «очевидный» случай $n = 1$.

Итак, пусть f — гладкая функция, отображающая отрезок $[0, 1]$ в множество $\{0, 1\}$, причем $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$. По формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0) = 1 - 0 = 1.$$

С другой стороны, $f'(x) = 0$ для всех x, так как образ f дискретен. Поэтому левая сторона равна 0. Противоречие!

Как это прозрачное рассуждение перенести на случай произвольного числа n? Роль формулы Ньютона–Лейбница будет играть формула Стокса, которая утверждает, что для многообразия с краем X и дифференциальной формы ω на нем

$$\int_X d\omega = \int_{\partial X} \omega.$$

Пусть теперь f — гладкое отображение диска D в себя, оставляющее на месте точки границы ∂D (пока нам неважно, что f ретрагирует D на границу). Пусть $x_1, \dots, x_n$ — координаты в $\mathbb{R}^n$; в этих координатах f задается n функциями $f_1(x), \dots, f_n(x)$. Рассмотрим две дифференциальные $(n-1)$-формы на D:

$$\omega = x_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \quad \text{и} \quad \tilde{\omega} = f_1 df_2 \wedge \dots \wedge df_n.$$

Так как $f_i = x_i$ на границе ∂D, то ограничения ω и $\tilde{\omega}$ на ∂D совпадают. Поэтому из формулы Стокса мы имеем:

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega = \int_{\partial D} \tilde{\omega} = \int_D d\tilde{\omega}.$$

Слева стоит интеграл формы объема $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$, т. е. объем шара D_n — число явно ненулевое. Справа стоит интеграл формы $d\tilde{\omega} = df_1 \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_n$. Если теперь мы подключим предположение о том, что f — ретракция на край, то в силу того, что образ f имеет размерность меньше n, дифференциалы $df_1, \ldots, df_n$ линейно зависимы. Поэтому $d\tilde{\omega} \equiv 0$ и правый интеграл равен 0. Противоречие!

Это же рассуждение доказывает отсутствие гладкой ретракции ограниченной области $B \subset \mathbb{R}^n$ на ее границу ∂B.

Итак, мы ознакомились почти со всеми известными доказательствами теоремы Брауэра и видим, что среди них нет вполне удовлетворительного. Комбинаторное доказательство элементарно (если оставить в стороне триангуляции), однако явно какое-то «угловатое» и привлекает вспомогательную постороннюю структуру — триангуляцию. Остальные требуют использования того или иного достаточно развитого формализма.

Упражнения

4.1. Докажите непрерывность отображений k, g и g^{-1} из начала лекции.

4.2.* Вывести лемму ККМ из теоремы Брауэра. (Указание. Пусть $U_s = \Delta \backslash F_s$ — дополнения к F_s. Если пересечение F_s пусто, то U_s образуют открытое покрытие Δ_S. Пусть $(u_s,\, s \in S)$ — непрерывное разбиение единицы, подчиненное открытому покрытию (U_s). Это семейство функций (u_s) задает непрерывное отображение $u : \Delta_S \to \Delta_S$ по формуле: $u(x) = (u_s(x))$. Применить теорему Брауэра к u.)

4.3. Докажите с помощью леммы ККМ следующий результат (Ки Фан). Пусть V — топологическое векторное пространство, $S \subset V$. Предположим, что для каждого $s \in S$ задано компактное подмножество $F(s)$ в V, удовлетворяющее следующему условию: для любого конечного набора точек $s_1, \ldots, s_n \in S$ выпуклая оболочка $\operatorname{conv}(s_1, \ldots, s_n)$ лежит в объединении $F(s_1), \ldots, F(s_n)$. Показать, что существует точка x, общая всем $F(s)$, $s \in S$. (Указание: проверить, что для любого конечного подмножества $T \subset S$ пересечение $\bigcap_{t \in T} F(t)$ непусто.)

4.4. Пусть Y — топологическое пространство, похожее на букву «Y». Покажите, что любое непрерывное отображение Y в себя имеет неподвижную точку.

4.5.* Подмножество X в $\mathbb{R}^n$ называется *звездным*, если существует такая точка $x^* \in X$, что для любого $x \in X$ отрезок $[x, x^*]$ целиком лежит в X. Для звездных компактов верен аналог теоремы Брауэра. Какую идею вы могли бы предложить для доказательства?

Рекомендуемая литература: [5, 6, 8, 12].

Литература

[1] Арнольд В.И., Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М., 1974

[2] Кирута А.Я., Рубинов А.М., Яновская Е.Б., Оптимальный выбор распределений в сложных социально-экономических задачах, — Л., 1980

[3] Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. — М. 1965

[4] Макаров В.Л., Рубинов А.М., Математическая теория экономической динамики и равновесия, М., 1973

[5] Милнор Дж., Уоллес А., Дифференциальная топология, — М., 1972

[6] Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. — М. 1972

[7] Полтерович В.М., Экономическое равновесие и хозяйственный механизм, — М., 1990

[8] Тодд М.Дж. Вычисление неподвижных точек и приложения к экономике. — М. 1983

[9] Шилов Г.Е., Математический анализ. Специальный курс. — М., 1961

[10] Экланд И., Элементы математической экономики, — М., 1983

[11] Border K.C., Fixed point theorems with applications to economics and game theory. — Cambridge, 1985

[12] Kannai Y., An elementary proof of the no-retraction theorem. Amer. Math. Monthly, 88 (1981) 264-268

Сведения об авторе: Данилов Владимир Иванович, д. ф.-м. н., главный научный сотрудник ЦЭМИ РАН, профессор Российской экономической школы.