

## Algorithmique - ROB3

### TD5 - Introduction aux graphes

#### - Exercice 1 (Le duc de Densmore)

**Question 1.1** Le duc et la duchesse de Densmore ont organisé une soirée avec quatre couples d'amis. Certaines personnes, issues de couples différents, se sont serrées la main. À la fin du repas, le duc de Densmore demande à chacun combien de mains il a serrées. Il reçoit neuf réponses différentes. Combien de mains la duchesse de Densmore a-t-elle serrées ?

**Question 1.2** Au cours d'une soirée, les convives se serrent la main les uns les autres et chacun se souvient du nombre de fois qu'il ou elle a serré des mains. À la fin de la soirée, le maître de cérémonie additionne le nombre de fois que chaque invité a serré une main. Montrer que le résultat est pair.

**Question 1.3** Déduire de la question précédente qu'il y a un nombre pair de convives ayant serré un nombre impair de mains.

#### - Exercice 2 (Nombre d'amis dans un groupe)

On considère un groupe de  $n \geq 2$  personnes. Pour tout couple  $(a, b)$  de personnes dans le groupe, soit  $a$  et  $b$  sont amies, soit  $a$  et  $b$  ne sont pas amies. Chaque personne a donc un certain nombre d'amis dans le groupe. On vise à montrer la propriété  $P$  suivante : il existe toujours au moins deux personnes ayant exactement le même nombre d'amis dans un groupe.

**Question 2.1** Reformuler la propriété  $P$  en terme de graphe.

$\exists$  au moins 2 sommets  $s_i$  et  $s_j$  tel que  $\deg(s_i) = \deg(s_j)$

**Question 2.2** Dans un graphe à  $n$  sommets, quel est l'ensemble des degrés possibles pour un sommet donné ?  $[0; n-1]$

**Question 2.3** Dans un graphe à  $n$  sommets, si on fait l'hypothèse que tous les sommets sont de degrés différents, quel est l'ensemble des degrés des sommets du graphe ?  $[0, n-2]$

**Question 2.4** Montrer qu'il n'est pas possible de construire un graphe dont l'ensemble des degrés est celui identifié dans la question précédente. En déduire que  $P$  est vérifiée.



### Exercice 3 (Deux prisonniers)

Deux prisonniers sont soumis à une épreuve. Dans une pièce se trouve une grande table et sur la table sont posées 50 boîtes fermées contenant des cartes numérotées de 1 à 50. Il y a une carte pour chaque numéro de 1 à 50 et chaque boîte contient une carte. La distribution des cartes dans les boîtes a été faite aléatoirement et elle est inconnue des prisonniers. Les deux prisonniers peuvent convenir d'une stratégie avant, mais ne peuvent plus se parler le moment venu de l'épreuve. Le premier prisonnier rentre dans la pièce, regarde le contenu de toutes les boîtes et, s'il le désire, il inverse le contenu de deux boîtes (mais seulement deux). Le deuxième prisonnier entre alors dans la pièce (le premier est sorti), les gardiens de la prison lui assignent un numéro (aléatoirement) entre 1 et 50, et il doit trouver ce numéro en ouvrant au maximum 25 boîtes. S'il trouve le numéro qui lui a été donné, les deux prisonniers sont libérés, sinon, ils sont exécutés. Le problème semble défier l'entendement, car on a du mal à comprendre la stratégie que pourrait adopter le premier prisonnier sans avoir connaissance du numéro qui va être attribué au second. Pourtant, s'ils sont malins, les deux prisonniers sont certains d'être libérés. Comment font-ils ?

### Exercice 4 (Représentation de graphes et primitives élémentaires)

Les deux représentations principalement utilisées pour un graphe sont les suivantes :

- la représentation par matrice d'adjacence consiste en une matrice carrée  $M$  d'ordre  $n$  telle que  $M_{ij} = 1$  si  $(i, j)$  est un arc (ou une arête) de  $G$ , et  $M_{ij} = 0$  sinon.
- la représentation par liste d'adjacence consiste en un tableau  $Adj$  de  $n$  listes. Pour tout sommet  $i$  de  $S$ , la liste  $Adj[i]$  contient la liste des sommets  $j$  de  $S$  tels que  $(i, j)$  est un arc (ou une arête) de  $G$ .

**Question 4.1** Quelle est la taille en mémoire requise pour représenter un graphe de  $n$  sommets et  $m$  arcs (respectivement arêtes) selon les deux représentations ?

**Question 4.2** Si  $G$  est non orienté, déterminer pour chacune de ces représentations, la complexité des primitives suivantes :

1. fonction  $Adjacent(i, j : \text{sommets})$  : booléen, qui rend "vrai" si  $i$  et  $j$  sont adjacents ;
2. fonction  $Degré(G : \text{graphe}, i : \text{sommets})$  : entier, qui calcule le degré du sommet  $i$  dans le graphe  $G$ .

**Question 4.3** Si  $G$  est orienté, déterminer pour chacune des représentations, la complexité des primitives suivantes :

1. fonction  $Succ(i, j : \text{sommets})$  : booléen, qui rend "vrai" si  $j$  est un successeur de  $i$  ;
2. fonction  $Pred(i, j : \text{sommets})$  : booléen, qui rend "vrai" si  $j$  est un prédécesseur de  $i$  ;
3. fonction  $Degré Extérieur(G : \text{graphe}, i : \text{sommets})$  : entier, qui calcule le degré extérieur du sommet  $i$  de  $G$  ;
4. fonction  $Degré Intérieur(G : \text{graphe}, i : \text{sommets})$  : entier, qui calcule le degré intérieur du sommet  $i$  de  $G$ .

### - Exercice 5 (Dominos)

On considère un jeu constitué de tous les dominos possibles pour des faces numérotées 1, 2, 3, 4 ou 5, à l'exclusion des dominos doubles (deux fois le même numéro). Le jeu comporte un exemplaire unique de chaque domino, et il n'y a qu'un domino par couple de numéros : ainsi, par exemple, le domino 1-2 est le même que le domino 2-1.

**Question 5.1** Quel graphe doit-on considérer si l'on veut montrer que l'on peut arranger ces dominos de façon à former une boucle fermée (en utilisant la règle habituelle de contact entre les dominos) ? Quelle propriété doit vérifier ce graphe ? Est-ce le cas ici ?

Indication : les sommets du graphe à considérer ne représentent pas les dominos.

**Question 5.2** Plus généralement, si l'on considère des dominos dont les faces sont numérotées de 1 à  $n$ , donner une condition sur  $n$  pour qu'il soit possible de les arranger en une boucle fermée. Justifier la réponse.

**Question 5.3** Que devient le résultat précédent si on suppose maintenant que les dominos doubles sont présents ?

### - Exercice 6 (Tri topologique)

Le duc de Densmore réalise les tâches suivantes pour s'habiller chaque matin : enfiler sa chemise, son caleçon, ses chaussettes, son pantalon, sa cravate, ses chaussures, sa veste, et serrer sa ceinture. Il s'agit dans cet exercice de proposer un algorithme permettant au duc de Densmore d'enfiler sans mal ses vêtements.

**Question 6.1** Identifier les contraintes de précédence entre ces différentes tâches puis représenter ce problème par un graphe dont les sommets sont les tâches et les arcs les contraintes de précédence entre celles-ci.

**Question 6.2** Un tri topologique d'un graphe orienté orienté sans circuit  $G = (S, A)$  est une liste  $L$  des sommets de  $G$  tel que si  $G$  contient l'arc  $(x, y)$ ,  $x$  apparaît avant  $y$  dans  $L$ . Proposer un algorithme de tri topologique d'un graphe basé sur le fait qu'un sommet de degré entrant nul peut être placé en tête d'un tri topologique. Quelle est la complexité de cet algorithme ?

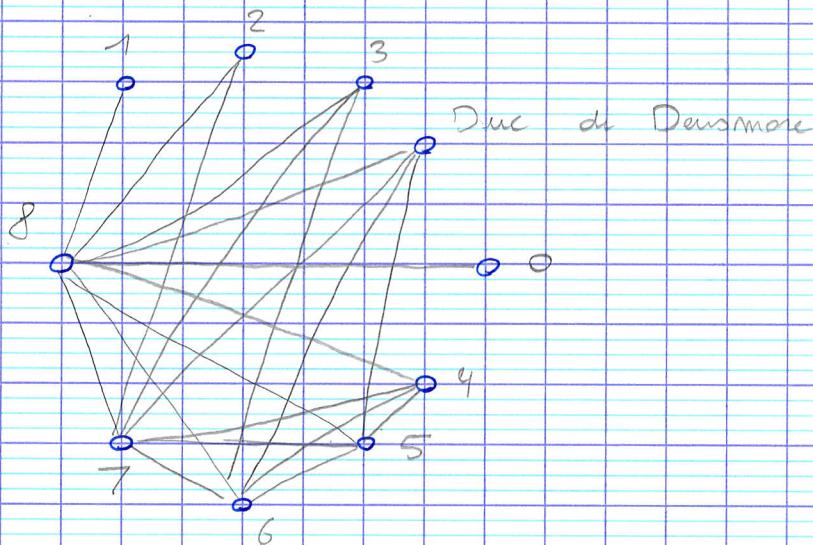
**Question 6.3** Appliquer l'algorithme au graphe construit dans la première question, et interpréter le résultat.

## TD 5

### Exercice 1

1-

Sommets : { personnes }      Arêtes = { poignées de mains }  
 9 réponses différentes.  $\Rightarrow$  1 sommet du degré 0...8



$(8, 0) \quad (7, 1) \quad (6, 2) \quad (5, 3) \quad (4, 4)$

2-

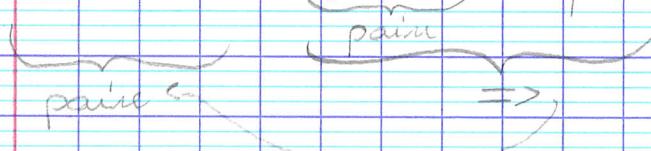
Montrons que la somme des degrés est paire.

$$\sum_{\text{des}} \deg(v) = 2|E|m$$

où  $S$  est l'ensemble des sommets et  $m$  le nombre d'arêtes du graphe.

3-

$$\sum_{\substack{\text{des} \\ \deg(v) \text{ impair}}} \deg(v) + \sum_{\substack{\text{des} \\ \deg(v) \text{ pair}}} \deg(v) = 2m.$$



Donc nb pair de termes dans la 1<sup>re</sup> somme.

## Exercice 2

1-

Dans un graphe non orienté, il y a toujours 2 sommets qui ont la même degré.

2-

$$\deg \in [0, n-1]$$

3-

Si tous les sommets sont de degrés différents, alors les degrés sont  $0, 1, \dots, n-1$

4-

Contradiction: la présence du degré 0 est incompatible avec celle du degré  $n-1$

## Exercice 3

Sommets = { boîtes }

Arcs = {  $(i, j)$  : la boîte contient la carte  $j$  }

Un graphe représentant une permutation est composé exclusivement de boucles et de circuits.

Un tel graphe comporte au plus un circuit de longueur  $> \frac{m}{2}$ . On peut "casser" ce circuit en 2 circuits de longueur  $n \leq 2$ .

Le 2<sup>e</sup> circuit prisonnier, s'il suit la stratégie consistant à ouvrir la boîte comportant à son numéro, puis à ouvrir les boîtes correspondantes aux cartes tirées, il retrouvera son numéro en  $\leq \frac{m}{2}$  ouvertures de boîte.

1-

Matrice d'adjacence :  $O(n^2)$

Liste d'adjacence :  $O(m + mn)$

$\hookrightarrow m$  cellules dans la tableaux,  $2m$  cellules en tant dans les listes chainées. ( $m$  si le graphe est orienté).

2-

$G$  non-orienté

	Matrice d'adjacence	Liste d'adjacence
Adjacent $(i, j)$	$O(1)$	$O(\deg(i))$
Degré $(i, j)$	$O(m)$	$O(\deg(i))$

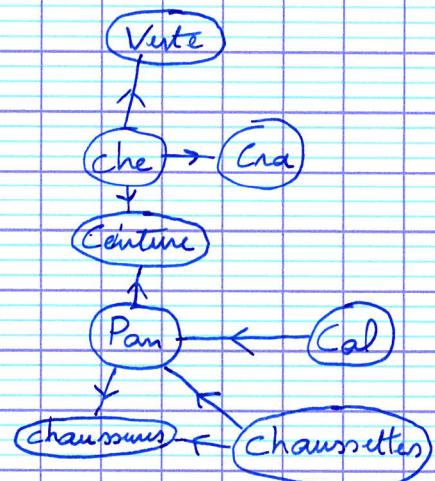
3-

	Matrice d'adjacence	Liste d'adj. de successeur
Succ $(i, j)$	$O(1)$	$O(\deg^+[i])$
Pred $(i, j)$	$O(1)$	$O(\deg^+[j])$ car $\text{succ}(i, j) \equiv \text{pred}(j, i)$
Degré Extérieur $(G, i)$	$O(m)$	$O(\deg^+[i])$
Degré Intérieur $(G, i)$	$O(m)$	$O(m + m)$

### Exercice 6.

Précédent

Chemise	-
Caleçon	-
Chaussettes	-
Pantalon	Chemise, chaussette
Cravate	Chemise
Veste	Chemise
Centure	Pantalon, Chemise
Chaussure	Chaussette, pantalon



2-

On recherche une liste topologique du graphe sans circuit.

Che, Cal, Ch'tes, Veste, Pam, Chnes, Caim.

Tri-topologique ( $G$ ): file  $\rightarrow$  FIFO (Queue)

$F, L$ : File FIFO: sommet candidat à être le suivant dans la liste topologique

$L$ : liste topologique en cours de construction

$F \leftarrow$  File Vide.

Pour tant sommet  $u$  de  $G$  faire {

$d[u] \leftarrow \text{deg\_int}(G, u)$   $O(\deg(u))$

si  $d[u] = 0$  alors insertion( $F, u$ )  $O(1)$

Tant que non File Vide ( $F$ ) faire { Mise à jour  
1 par sommet

$u \leftarrow \text{suppression}(F)$   $O(1)$

insertion( $L, u$ )  $O(1)$

Pour tant successeur  $v$  de  $u$  faire {  $O(\deg(u))$

$d[v] \leftarrow d[v] - 1$   $O(1)$

si  $d[v] = 0$  alors insertion( $F, v$ )  $O(1)$

$\hookrightarrow O(m+m)$  Complexité en  $O(m+m)$  si le graphe est représenté à la fois par des listes de prédecesseurs et successeurs.

### Exercice 5

1-



$G(S, A)$  où  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$A = \{(i, j) : 1 \leq i < j \leq 5\}$$

Les arêtes du  $G$  représentent un domino.

Il existe une boucle fermée comportant tous les dominos

si et seulement si le graphe  $G$  est Eulerien.

C'est bien le cas car tous les sommets sont de degré 4 donc pairs et le graphe est connexe.

2 -

Il est possible de réaliser une boucle si  $n$  est impair car chaque sommet est du degré  $n-1$ .

3 -

la présence de dominos double ne change rien car ils correspondent à des boucles dans le graphe, ce qui ne change rien à la parité des sommets.

