# Modélisation pour la Robotique

Marie-Aude Vitrani et Guillaume Morel

Spécialité Robotique - Année 4

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Objectif du cours

L'objectif de ce cours est d'établir des méthodes de modélisation des robots et d'exploiter les modèles obtenus pour analyser les performances des systèmes étudiés.
Ce cours s'appuie sur la cinématique et la dynamique (équations du mouvement) des solides rigides. Il s'agit, sur la base du cours de mécanique, d'établir des méthodes systèmatiques de modélisation des robots.
Ce cours sert de pré-requis au cours d'identification paramètrique des modèles (au second semestre) puis au cours de commande en robotique (en année 5). Les modèles des systèmes servent en effet à la fois à l'analyse des systèmes, à la leur simulation et à leur commande.

# PARTIE II

## Modélisation Géométrique

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Objectif de la modélisation géométrique

L'objectif de la modélisation géométrique des robots est de trouver les relations entre la position et l'orientation du corps terminal (outil, objet manipulé) et les positions mesurées aux articulations.
On cherche donc à déterminer les relations géométriques entre la configuration (position et orientation) du corps terminal par rapport au corps de base (fixe) et les configurations relatives des corps du robot les uns par rapports aux autres. Pour cela, on définit deux ensembles de paramètres :

- le **vecteur des paramètres opérationnels**, noté $X$, qui décrit la position et l'orientation du corps terminal du robot par rapport à la base, constitué au maximum de trois positions (longueur) et trois orientations (angles) ;
- le **vecteur des paramètres articulaires**, noté $q$, qui regroupe les variables géométriques (angles ou longueurs) mesurées au niveaux des liaisons (articulations) et caractérisant la configuration relative d'un corps par rapport au corps précédent.

On peut alors établir une première relation géométrique entre ces deux vecteurs : le **modèle géométrique direct** qui permet de trouver la configuration opérationelle connaissant la configuration articulaire. On l'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$X = f(q)$$

Pour que le corps terminal décrive une trajectoire donnée, on doit déterminer la relation inverse : il faut trouver la configuration articulaire connaissant la configuration opérationnelle. Cette relation inverse est appelée **modèle géométrique inverse** et s'écrit sous la forme :

$$q = f^{-1}(X)$$

On voit qu'en pratique il est très important de savoir résoudre ce problème puisque c'est ce qui permettra de positionner l'effecteur dans une configuration opérationnelle donnée.
Dans cette partie on verra comment :

- définir le vecteur $X$ ;
- définir le vecteur $q$ ;
- établir les modèles géométrique direct et inverse.

Bien que les méthodes soient nouvelles, il s'agit de faire de la géométrie !

## 1.2 La preuve par un exercice

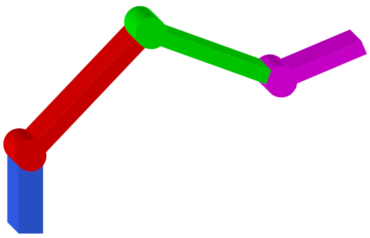


Figure 1.1 – Robot 3R

*On considère un robot communément appelé 3R (3 liaisons Rotoïdes, ancien nom des liaisons pivots), figure 1.1. C'est un robot série consitué de 4 corps liés entre eux par des liaisons pivots d'axes parallèles. Le robot évolue donc dans un plan.*

*Les corps sont modélisés par des tiges de longueur $l_i$, notées $S_i$ pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.*
*On donne $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_T$ des repères orthonormés directs attachés respectivement aux corps $S_0$ et $S_3$, voir figure 1.2.*

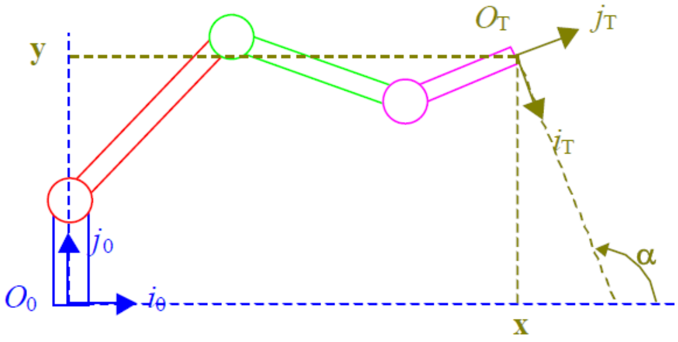



Figure 1.2 – Paramètrage opérationnel

1. *Définir des repères orthonormés directs $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_3$ attachés respectivement aux corps $S_1$, $S_2$ et $S_3$ de sorte qu'on puisse définir un vecteur $q$ de paramètres articulaires.*
2. *Choisir un vecteur $X$ de paramètres opérationel. Etablir alors le modèle géométrique direct.*
3. *Etablir le modèle géométrique inverse*

1. Les repères sont placés sur la figure 1.3. Le vecteur $q$ des paramètres articulaires est

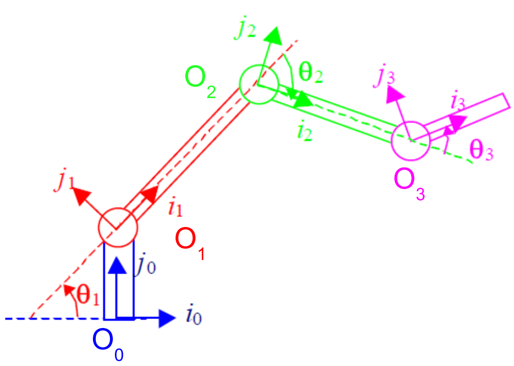



Figure 1.3 – Paramètrage articulaire

alors défini par

$$q = \begin{bmatrix}\theta_1 & \theta_2 & \theta_3\end{bmatrix}^T$$

On a un paramètre par articulation.

2. Le corps terminal se déplace dans le plan $(O_0; \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0})$ donc 3 paramètres suffisent pour décrire sa position et son orientation. On choisit

$$X = \begin{bmatrix}x & y & \alpha\end{bmatrix}^T \text{ avec } \begin{cases} x = \overrightarrow{O_0O_T}.\overrightarrow{i_0} \\ y = \overrightarrow{O_0O_T}.\overrightarrow{j_0} \\ \alpha = (\overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{i_T}) = (\overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{j_T}) \end{cases}$$

3. Le modèle géométrique direct est la relation $X = f(q)$. On peut calculer cette relation composante par composante :

$$\begin{aligned} x &= \overrightarrow{O_0O_T}.\overrightarrow{i_0} \\ &= (\overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O_3} + \overrightarrow{O_3O_T}).\overrightarrow{i_0} \\ &= l_1 \cos\theta_1 + l_2\cos(\theta_1+\theta_2) + l_3\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \end{aligned}$$

De même on trouve

$$y = l_0 + l_1 \sin\theta_1 + l_2\sin(\theta_1+\theta_2) + l_3\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$$

Enfin, de façon évidente on a $\alpha = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$.
Le modèle géométrique direct est donc :

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1\cos\theta_1 + l_2\cos(\theta_1+\theta_2) + l_3\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ l_0 + l_1\sin\theta_1 + l_2\sin(\theta_1+\theta_2) + l_3\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ \theta_1+\theta_2+\theta_3 \end{bmatrix} = f(q)$$

4. Le modèle géométrique inverse s'obtient en inversant les 3 relations précédentes. On pose $x' = x - l_3\cos\alpha$ et $y' = y - l_3 \sin\alpha$ alors :

$$x'^2 + y'2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2(\cos\theta_1\cos(\theta_1+\theta_2) + \sin\theta_1\sin(\theta_1+\theta_2))$$

d'où : $\theta_2 = \arccos\left(\dfrac{x'^2 + y'^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}\right)$
Par ailleurs on trouve : $\theta_1 = \arctan 2(y', x') - \arctan 2\,(l_2\sin\theta_2, l_1 + l_2\cos\theta_2)$.
De façon évidente on a : $\theta_3 = \alpha - \theta_1 - \theta 2$.
Remarque : il y a deux solutions au modèle inverse selon le signe de $\theta_2$. Ces solutions correspondent à différents modes d'assemblage : ici bras droit ou bras gauche, voir figure 1.4.

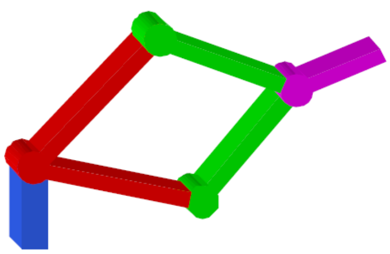


Figure 1.4 – Mode d'assemblage

# Chapitre 2

## Transformations entre deux repères

Dans la suite du cours, tous les repères seront supposés orthonormés directs.
Pour décrire une transformation quelconque d'un repère $\mathcal{R}_0 = (O_0, \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{k_0})$ vers un repère $\mathcal{R}_1 = (O_1, \overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1})$, il faut 6 paramètres indépendants regroupés en un vecteur $p$ :

- un vecteur $p_t$ de 3 composantes décrivant la translation entre les origines $O_0$ et $O_1$ des repères $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$ respectivement ;
- un vecteur $p_r$ de 3 composantes décrivant la rotation entre les bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$ des repères $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$ respectivement.

De nombreux choix sont possibles pour décrire la translation et la rotation.

## 2.1 Paramètrage de la translation

Pour décrire la translation entre deux repères, il suffit de connaitre le vecteur $\overrightarrow{p_t}$ de changement d'origines entre les repères. On notera :

$$\overrightarrow{p_t} = \overrightarrow{O_0O_1}$$

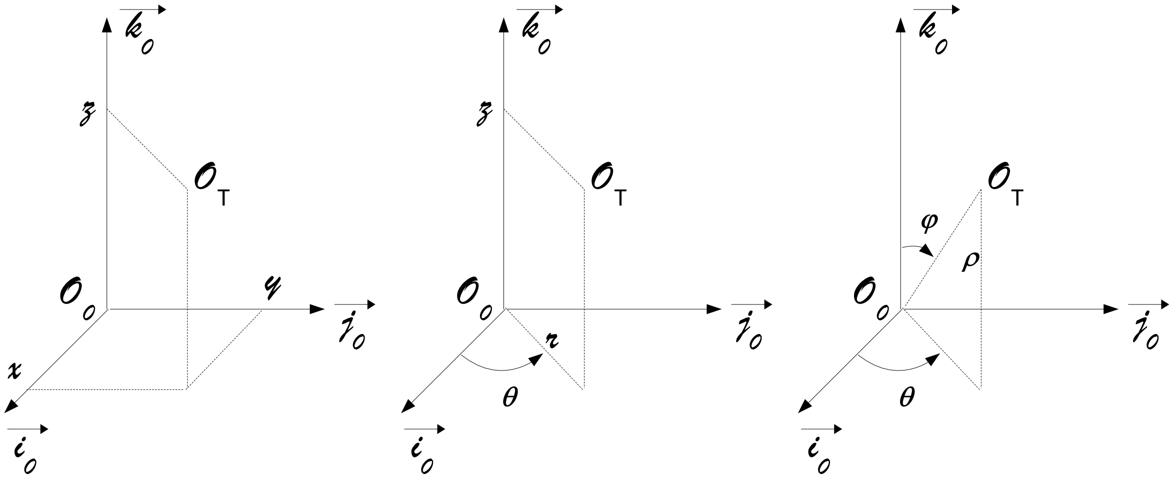
Les 3 paramètres permettant de décrire la translation sont donc les composantes de ce vecteur exprimé dans une base choisie. En général, on prendra les composantes cartésiennes, c'est-à-dire les coordonnées notées ${}^0p_t$ du vecteur $\overrightarrow{p_t}$ exprimé dans la base du repère $\mathcal{R}_0$ :

$$ {}^0p_t = \begin{bmatrix} p_{tx} \\ p_{ty} \\ p_{tz} \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{cases} p_{tx} = \overrightarrow{p_t} . \overrightarrow{i_0} \\ p_{ty} = \overrightarrow{p_t} . \overrightarrow{j_0} \\ p_{tz} = \overrightarrow{p_t} . \overrightarrow{k_0} \end{cases}$$

Cependant, il est parfois utile de considérer plutôt les composantes cylindriques $\begin{bmatrix} r & \theta & z \end{bmatrix}^T$ ou sphériques $\begin{bmatrix} \rho & \theta & z \end{bmatrix}^T$,figure 2.1.

## 2.2 Paramètrage de la rotation

La méthode la plus générale pour décrire la rotation d'une base vers une autre base consiste à la représenter par une rotation d'un angle $\theta$ autour d'un axe porté par un vecteur normé $\overrightarrow{u}$. Connaissant deux bases, il est très difficile de se représenter l'axe autour duquel il faut tourner pour passer d'une base à l'autre. Bien souvent, on préfèrera représenter cette rotation en la décomposant en 3 rotations élémentaires successives autour d'axes connus.




(a) Coordonnées cartésiennes (b) Coordonnées cylindriques (c) Coordonnées sphériques

FIGURE 2.1 – Paramètrage des positions

### 2.2.1 Paramètrage par une rotation unique

La rotation entre deux bases peut être décrite par une rotation unique d'angle $\theta$ autour d'un axe de vecteur directeur unitaire $\overrightarrow{u}$. On appelle cet axe « l'axe d'Euler ». On dispose alors de 4 paramètres pour décrire la rotation : l'angle $\theta$ et les 3 composantes du vecteur $\overrightarrow{u}$. Ces 4 paramètres ne sont pas indépendants puisque $||\overrightarrow{u}|| = 1$.

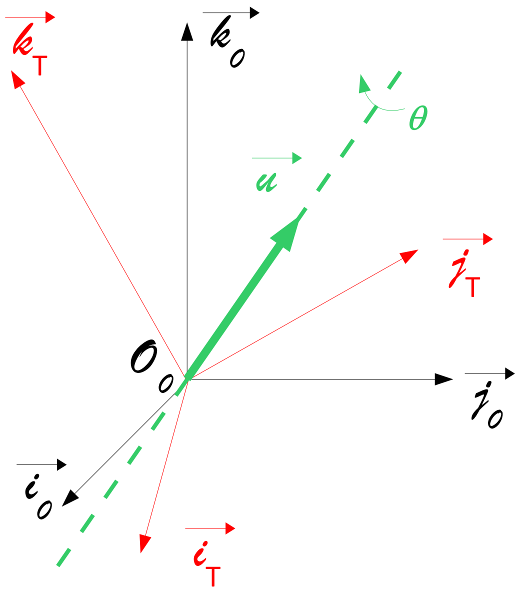



FIGURE 2.2 – Axe d'Euler

A partir de cette description on peut définir différents paramètrages $p_R$ pour la rotation entre deux bases :

– Les paramètres axio-angulaires

$$p_r = \theta\begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \end{bmatrix}^T$$

Si $\theta = 0[\pi]$ alors il y a une infinité de possibilité pour $\begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \end{bmatrix}^T$.

– Les paramètres d'Olinde-Rodrigues

$$p_r = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\begin{bmatrix}u_x & u_y & u_z\end{bmatrix}^T$$

Si $\theta = 0[2\pi]$ alors il y a une infinité de possibilité pour $\begin{bmatrix}u_x & u_y & u_z\end{bmatrix}^T$.
Si $\theta = \pi[2\pi]$ alors le vecteur $p$ n'est pas défini.

– Les quaternions d'attitude

$$p_r = \begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & u_x\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & u_y\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & u_z\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{bmatrix}^T$$

Si $\theta = \pi[2\pi]$ alors il y a une infinité de possibilité pour $\begin{bmatrix}u_x & u_y & u_z\end{bmatrix}^T$.
Les quaternions d'attitude forment un vecteur à 4 composantes telles que $||p_R|| = 1$. Ils sont particulièrement utilisés pour composer plusieurs rotations successives. Le resultat d'une composition de rotation étant alors obtenu simplement en multipliant les vecteurs des quaternions d'attitude.

### 2.2.2 Paramètrage par 3 rotations élémentaires successives

On préfère souvent décomposer la rotation $(\theta, \overrightarrow{u})$ en 3 rotations élémentaires successives plus facilement visualisables. Il s'agit de déterminer 3 rotations successives autour d'axes connus.
Les axes de rotation étant connus, on peut alors décrire la rotation directement à partir des 3 angles de rotation :

$$p_r = \begin{bmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{bmatrix}$$

$\alpha$ étant l'angle de rotation autour du premier axe, $\beta$ l'angle de rotation autour du deuxième axe et $\gamma$ l'angle de rotation autour du dernier axe.
On fera attention au fait que les rotations doivent être faites dans ordre donné. Elles ne sont pas commutatives.
Il est indispensable de spécifier aussi le système d'axes autour des quels tourner. On distingue deux types de paramètrage selon qu'on tourne autour d'axes fixes ou mobiles par rapport à la base $\mathcal{B}_0$.

#### 2.2.2.1 Rotations autour d'axes fixes

On parle du paramètrage par les angles de Roulis-Tangage-Lacet, figure 2.3.
Dans cette représentation, on tourne :
- d'un angle $\alpha$ autour de $\overrightarrow{i_0}$. C'est l'angle de roulis (autour de l'axe d'un avion par exemple)
- PUIS d'un angle $\beta$ autour de $\overrightarrow{j_0}$. C'est l'angle de tangage (autour de l'axe passant par les ailes d'un avion)
- PUIS d'un angle $\gamma$ autour de $\overrightarrow{k_0}$. C'est l'angle de lacet (autour d'un axe perpendiculaire à un avion)

#### 2.2.2.2 Rotations autour d'axes mobiles

C'est le type de représentation le plus utilisé. Il s'agit de tourner autour d'axes mobiles. On tourne autour de l'un des axes de la base $\mathcal{B}_0$, puis autour de l'un des axes de la base

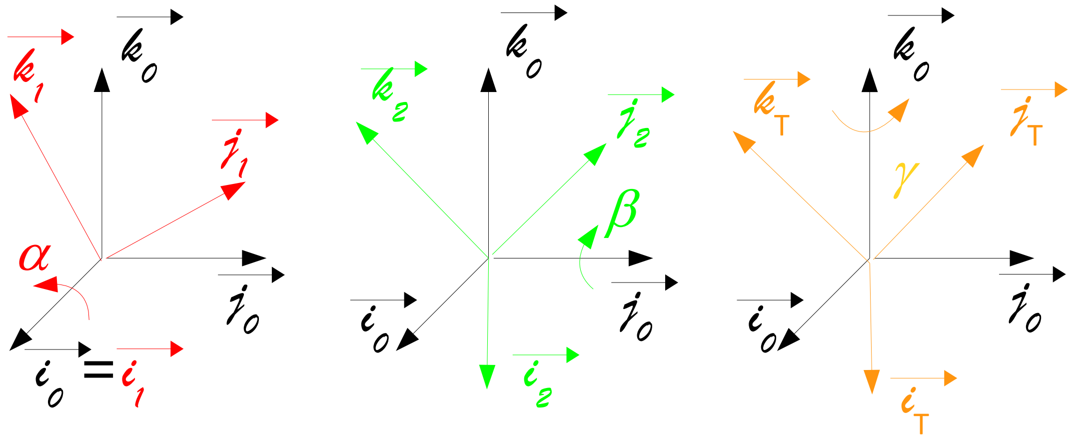



FIGURE 2.3 – Angles de Roulis-Tangage-Lacet

obtenue après la première rotation et enfin autour de l'un des axes de la base obtenue après la deuxième rotation. On peut remarquer que ce dernier axe de rotation sera invariant par la deuxième rotation, c'est donc l'un des axes de la base $\mathcal{B}_1$. Pour utiliser ces angles on doit donc préciser l'ensemble d'axes autour desquels on tourne.

Par exemple, on peut choisir de tourner autour de $\overrightarrow{i_0}$, puis du vecteur $\overrightarrow{j}$ obtenu par la première rotation, et pour finir autour du vecteur $\overrightarrow{k_1}$. On dit alors qu'on décrit la rotation par les angles de Cardan selon la convention XYZ, figure 2.4.

Il y a 12 paramètrages possibles :

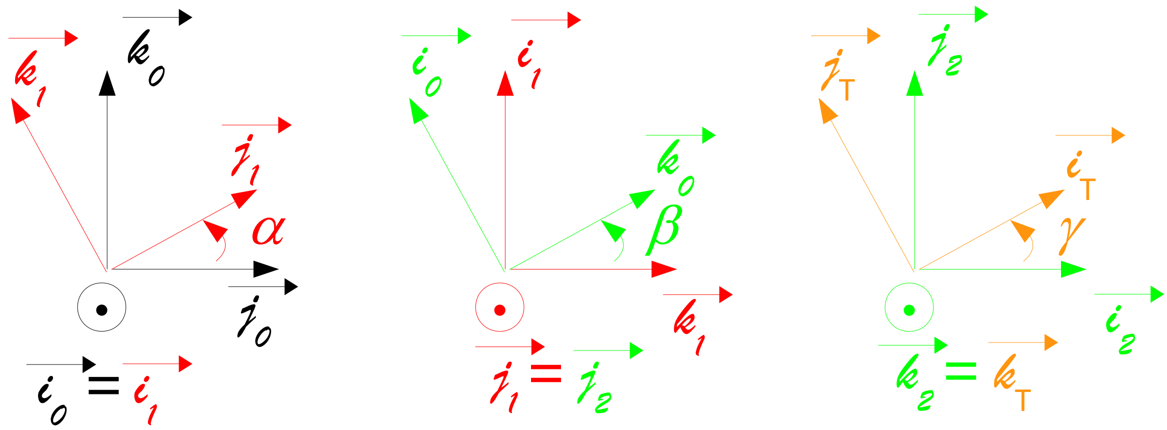



FIGURE 2.4 – Angles d'Euler selon la convention XYZ

- Les angles de Cardan selon les conventions XYZ, XZY, YXZ, YZX, ZXY, ZYX ;
- Les angles d'Euler selon les conventions XYX, ZYZ, YXY, ZXZ, XZX, YZY.

Le paramètrage le plus courant est le paramètrage par les angles d'Euler selon la convention ZXZ, figure 2.5. C'est-à-dire qu'on tourne :

- d'un angle $\alpha$ autour de $\overrightarrow{k_0}$ (axe des Z). C'est l'angle de précession.
- PUIS d'un angle $\beta$ autour de $\overrightarrow{i}$ tel que $\alpha = (\overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{i}) = (\overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{j})$ (axe des X). C'est l'angle de nutation.
- PUIS d'un angle $\gamma$ autour de $\overrightarrow{k_1}$ (axe des Z). C'est l'angle de rotation propre.

Par abus de langage, la plupart des gens parle d'angles d'Euler même pour les angles de Cardan.

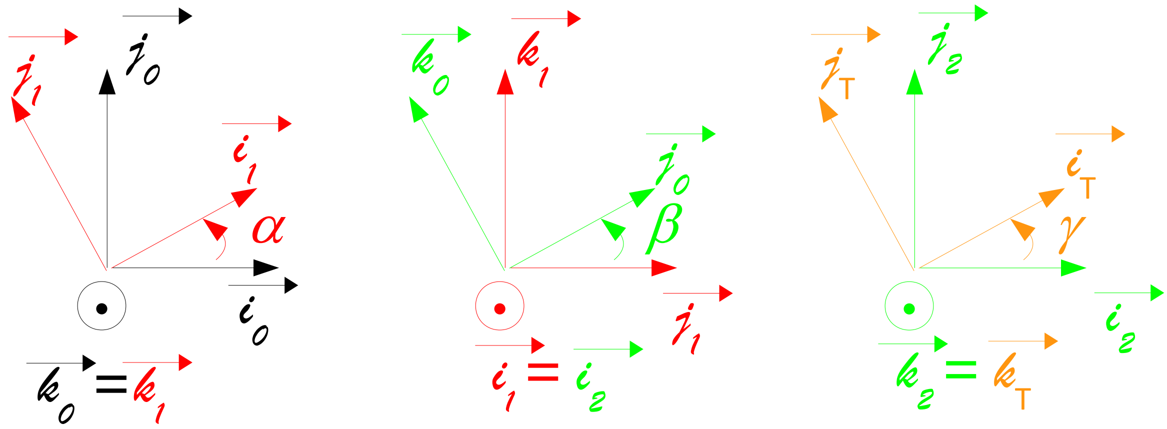



FIGURE 2.5 – Angles d'Euler selon la convention ZXZ

## 2.3 Matrice de transformation homogène

Le paramétrage de la transformation entre deux repères par 6 paramètres est la description la plus compacte qu'on puisse obtenir. Par contre, il est difficile de calculer le vecteur résultant de 2 transformations successives.
Pour combiner des transformation de façon linéaire, on utilisera les matrices de transformations homogènes.
Ces matrices s'écrivent sous la forme :

$$T_{0\to 1} = \begin{bmatrix} & R_{0\to 1} & & {}^0O_0O_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où :
- $R_{0\to 1}$ est la matrice de changement de base ou matrice de rotation qui permet de passer de la base $\mathcal{B}_/$ vers la base $\mathcal{B}_1$ (matrice 3x3) ;
- ${}^0O_0O_1$ est le vecteur de changement d'origine exprimé en coordonée cartésienne dans le repère $\mathcal{R}_0$ (matrice 3x1).

Les matrices de transformations homogènes servent à décrire n'importe qu'elle transformation géométrique permettant de transformer un repère $\mathcal{R}_0$ en un repère $\mathcal{R}_1$. On peut aussi les interpreter comme représentant le repère $\mathcal{R}_1$ exprimé dans le repère $\mathcal{R}_0$.

### 2.3.1 Matrice de rotation

Par définition, la matrice de rotation est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ vers la base $\mathcal{B}_1$.
Elle s'écrit donc :

$$R_{0\to 1} = \begin{bmatrix} {}^0i_1 & {}^0j_1 & {}^0k_1 \end{bmatrix}$$

On notera $r_{ij}$ l'élément de la ligne i et de la colonne j.
La matrice de rotation permet de décrire l'orientation de la base $\mathcal{B}_1$ par rapport à la base $\mathcal{B}_0$. Or pour cela, on a vu que 3 paramètres suffisent. Il y a donc 6 relations entre les 9 éléments de la matrice :
- les vecteurs $\overrightarrow{i_1}$, $\overrightarrow{j_1}$ et $\overrightarrow{k_1}$ sont normés donc :

$$\begin{cases} ||\overrightarrow{i_1}||^2 = r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 = 1 \\ ||\overrightarrow{j_1}||^2 = r_{12}^2 + r_{22}^2 + r_{32}^2 = 1 \\ ||\overrightarrow{k_1}||^2 = r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 = 1 \end{cases}$$

– les vecteurs $\overrightarrow{i_1}$, $\overrightarrow{j_1}$ et $\overrightarrow{k_1}$ sont orthogonaux deux à deux donc :

$$\begin{cases} \overrightarrow{i_1}.\overrightarrow{j_1} = r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} + r_{31}r_{32} = 0 \\ \overrightarrow{i_1}.\overrightarrow{k_1} = r_{11}r_{13} + r_{21}r_{23} + r_{31}r_{33} = 0 \\ \overrightarrow{k_1}.\overrightarrow{j_1} = r_{23}r_{13} + r_{23}r_{22} + r_{33}r_{32} = 0 \end{cases}$$

**Déplacement en rotation** Si on applique la rotation $\mathcal{R}_{0\to1}$ à un vecteur $\overrightarrow{u}$, on obtient un vecteur $\overrightarrow{v}$ tel que :

$$^0v = R_{0\to1}\ ^0u$$

**Changement de base** Si on connait les composantes $^1u$ d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ dans une base $\mathcal{B}_1$, alors ses composantes dans la base $\mathcal{B}_0$ sont :

$$^0u = R_{0\to1}\ ^1u$$

**Rotation inverse**

$$R_{1\to0} = R_{0\to1}^{-1} = R_{0\to1}^{T}$$

**Composition de deux rotations**

$$R_{0\to1} = R_{0\to2}R_{2\to1} \quad \forall \mathcal{B}_2$$

### 2.3.2 Exercice

*Soient 2 bases orthonormées* $\mathcal{B}_0 = \left(\overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{k_0}\right)$ *et* $\mathcal{B}_1 = \left(\overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1}\right)$.
*Calculer les matrices de rotation lorsque la transformation entre les bases est :*

1. *une rotation d'angle* $\alpha$ *autour de* $\overrightarrow{i_0}$.
2. *une rotation d'angle* $\beta$ *autour de* $\overrightarrow{j_0}$.
3. *une rotation d'angle* $\gamma$ *autour de* $\overrightarrow{k_0}$.
4. *une rotation paramétrée par les anlges d'euler* $(\alpha, \beta, \gamma)$ *selon la convention ZYZ.*
5. *une rotation d'angle* $\theta$ *autour d'un vecteur normé* $\overrightarrow{u}$ *quelconque.*

### 2.3.3 Calculs avec les matrices de transformations homogènes

Les matrices de rotation permettent de faire des changement de base et/ou des combinaisons de rotation facilement. Les MTH permettent quant à elle de réaliser les changements de repères.
Les matrices de transformations homogènes étant des matrices 4x4, on doit ajouter une composante aux vecteurs qu'on utilise habituellement :

– on ajoute un 1 s'il s'agit d'un vecteur lié (vecteur position) : $^0O_0A \to \begin{bmatrix} ^0O_0A \\ 1 \end{bmatrix}$ ;

– on ajoute un 0 s'il s'agit d'un vecteur libre : $^0u \to \begin{bmatrix} ^0u \\ 0 \end{bmatrix}$.

**Changement de coordonnées** De même qu'avec les matrices de rotation, on peut écrire :

$$^0U = T_{0\to1}\ ^1U$$

Si le vecteur $U$ représente un vecteur libre $\overrightarrow{u}$ alors on retrouve bien la formule de changement de base :

$$\begin{bmatrix} ^0u \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & R_{0\to1} & & ^0O_0O_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ^1u \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si le vecteur $U$ représente un vecteur position du point $A$ alors on retrouve bien la formule de changement de repère :

$$\begin{bmatrix} ^0O_0A \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & R_{0\to1} & & ^0O_0O_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ^1O_1A \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\ ^0O_0A = \underbrace{R^1_{0\to1}O_1A}_{\text{changement de base}=^0O_1A} + \underbrace{^1O_0O_1}_{\text{changement d'origine}}$$

**Transformation inverse**

$$T_{1\to0} = T_{0\to1}^{-1} = \begin{bmatrix} & R^T_{0\to1} & & -R^T_{0\to1}\ ^0O_0O_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Composer des changements de repères** La composition se fait comme pour les rotations : via une relation de Chasles :

$$T_{0\to1} = T_{0\to2}T_{2\to1} \quad \forall \mathcal{R}_2$$

### 2.3.4 Correspondance entre paramètres opérationels et matrices de transformations homogènes

On vient de voir plusieurs façons de décrire une même transformation (translation et/ou rotation) entre deux repères. Il y a donc des relations permettant d'exprimer un paramétrage en fonction d'un autre.
Les relations entre le paramétrage cartésien des translations et les matrices de transformations homogènes sont triviales puisque :

$$p_t =\ ^0O_0O_1 \qquad \text{et} \qquad T_{0\to t} = \begin{bmatrix} & R_{0\to1} & & ^0O_0O_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On a donc par identification :

$$\begin{cases} p_1 = T_{14} \\ p_2 = T_{24} \\ p_3 = T_{34} \end{cases}$$

Les relations entre les différents paramétrage de l'orientation sont moins évidentes. On se limitera à montrer les relations entre chaque paramétrage et les matrices de rotation.

#### 2.3.4.1 Paramètres de décomposition en rotation unique

On a montré en exercice comment obtenir la matrice de rotation d'un angle $\theta$ autour d'un vecteur quelconque normé $\overrightarrow{u}$. Or, si on connait les paramètres axio-angulaires, les paramètres d'Euler Rodrigues ou les quaternions, on sait calculer que l'angle $\theta$ et le vecteur $\overrightarrow{u}$ associé. La matrice de rotation s'écrit donc en fonction de $\theta$ et $\overrightarrow{u}$ :

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta + (1-\cos\theta)u_x^2 & (1-\cos\theta)u_xu_y - \sin\theta u_z & (1-\cos\theta)u_xu_z + \sin\theta u_y \\ (1-\cos\theta)u_xu_y - \sin\theta u_z & \cos\theta + (1-\cos\theta)u_x^2 & (1-\cos\theta)u_zu_y - \sin\theta u_x \\ (1-\cos\theta)u_xu_z - \sin\theta u_y & (1-\cos\theta)u_zu_y + \sin\theta u_x & \cos\theta + (1-\cos\theta)u_x^2 \end{bmatrix}$$

Les relations inverses sont :

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}(\mathrm{tr}R - 1)\right) \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} u_1 = (r_{32} - r_{23})/(2\sin\theta) \\ u_2 = (r_{13} - r_{31})/(2\sin\theta) \\ u_3 = (r_{21} - r_{12})/(2\sin\theta) \end{cases}$$

Remarque 1 : Le signe de $\theta$ entraine celui de $\overrightarrow{u}$. Par convention, on prend toujours $\theta \in [0..\pi]$.
Remarque 2 : On pourrait montrer que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur propre de la matrice de rotation et que les 3 valeurs propres sont $(1, \ \exp i\theta, \ \exp -i\theta)$ ; $\overrightarrow{u}$ étant associé à la valeur propre 1.
Une fois qu'on a déterminé $\theta$ et $\overrightarrow{u}$ à partir de la matrice de rotation, il est facile de trouver le vecteur des paramètres opérationnels (Euler-Rodrigues, quaternion ou axio-angulaire).
En résumé :

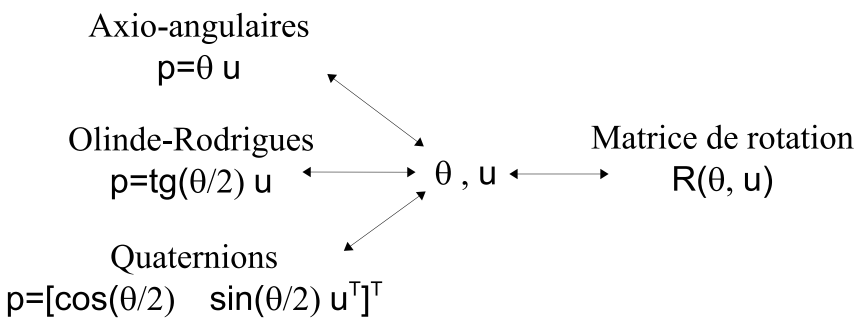



FIGURE 2.6 – Figure 1.10 : Lien entre les paramètres de rotation unique

#### 2.3.4.2 Paramètres de décomposition en rotations élémentaires

On a vu qu'on pouvait décrire la rotation entre 2 bases par 3 rotations élémentaires successives (dans un ordre précis). La matrice de rotation résultante est alors le produit des trois matrices de rotation élémentaires :

$$R_{0\to t} = R_{0\to 1}.R_{1\to 2}.R_{2\to t}$$

où :
- $R_{0\to 1}$ est la matrice de rotation de la base $\mathcal{B}_0$ initiale vers la base $\mathcal{B}_1$ résultant de la première rotation
- $R_{1\to 2}$ est la matrice de rotation de la base $\mathcal{B}_1$ vers la base $\mathcal{B}_2$ résultant de la deuxième rotation
- $R_{2\to t}$ est la matrice de rotation de la base $\mathcal{B}_2$ vers la base $\mathcal{B}_T$ terminale, résultant de la troisième rotation

**Angles d'Euler** Si on considère les angles d'Euler ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$) selon la convention ZYX alors :

$$R_{0\to t} = R_{0\to 1}.R_{1\to 2}.R_{2\to t}$$

avec :

$$\begin{cases} R_{0\to 1} = R(\alpha,\ {}^0\overrightarrow{k_0}) \\ R_{1\to 2} = R(\beta,\ {}^0\overrightarrow{j_1}) \\ R_{2\to t} = R(\gamma,\ {}^0\overrightarrow{i_T}) \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} R_{0\to t} &= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pour toutes les conventions d'euler, on retrouve une matrice dont pour une ligne et une colone, les éléments sont constitués au plus d'un simple produit de deux termes. Les relations inverses s'obtiennent en analysant cette ligne et cette colonne. Dans le cas présenté ici, il s'agit de la 3ème ligne et de la première colone.
L'élément $r_{31}$ s'exprime uniquement en fonction du sinus de l'angle $\beta$, donc on cherche une combinaison des autres éléments qui soit égales à $\cos\beta$ :

$$\sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2} = \sqrt{c^2\alpha c^2\beta + s^2\alpha c^2\beta} = \cos\beta$$

On peut donc exprimer $\beta$ à partir des termes de la matrice de rotation :

$$\beta = \text{atan2}\left(r_{31};\sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right)$$

Puisque $\beta$ est maintenant connu, il est très simple d'exprimer $\alpha$ et $\gamma$ :

$$\begin{cases} \alpha = \text{atan2}\left(\dfrac{r_{21}}{c\beta};\dfrac{r_{11}}{c\beta}\right) & \text{si } \beta \neq 0 \\ \gamma = \text{atan2}\left(\dfrac{r_{23}}{c\beta};\dfrac{r_{33}}{c\beta}\right) & \text{si } \beta \neq 0 \end{cases}$$

Dans le cas où $\cos\beta = 0$, on se trouve dans une singularité de la représentation des orientations.
Il y a alors une infinité de solution pour le couple $(\alpha, \gamma)$ puisque pour tout couple tel que $\alpha = -\gamma$, l'orientation finale ne sera pas modifiée. On choisit alors arbitrairement :

$$\begin{cases} \text{si } \beta = \pi/2 \quad \alpha = 0 \quad \gamma = \text{atan2}(r_{12}, r_{22}) \\ \{\ \text{si } \beta = -\pi/2 \quad \alpha = 0 \quad \gamma = -\text{atan2}(r_{12}, r_{22}) \end{cases}$$

Le principe de calcul est le même quellequesoit la convention d'Euler choisie.

**Angles de roulis tangage lacet** De même qu'avec la représentation par les angles d'euler, on peut calculer la matrice de rotation en faisant le produit des 3 matrices de rotation intérmédiaires :

$$R_{0\to t} = R_{0\to 1}.R_{1\to 2}.R_{2\to t}$$

avec :

$$\begin{cases} R_{0\to 1} = R(\alpha,\ {}^{0}\overrightarrow{i_0}) \\ R_{1\to 2} = R(\beta,\ {}^{1}\overrightarrow{j_0}) \\ R_{2\to t} = R(\gamma,\ {}^{0}\overrightarrow{k_0}) \end{cases}$$

Il faut faire attention aux bases dans lesquelles sont exprimées les vecteurs autour desquels il faut tourner : ${}^{1}\overrightarrow{j_0} = R^T_{0\to 1}\ {}^{0}\overrightarrow{j_0}$ et ${}^{2}\overrightarrow{k_0} = R^T_{0\to 2}\ {}^{0}\overrightarrow{k_0}$.
De façon évidente on a :

$$R_{0\to 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix}$$

On peut alors calculer : ${}^{1}\overrightarrow{j_0} = R^T_{0\to 1}\ {}^{0}\overrightarrow{j_0} = \begin{bmatrix} 0 & c\alpha & -s\alpha \end{bmatrix}^T$ D'où :

$$R_{0\to 1} = \begin{bmatrix} c\beta & -s\beta s\alpha & s\beta c\alpha \\ -s\beta s\alpha & c\beta + (1-c\beta)c^2\alpha & (c\beta-1)s\alpha c\alpha \\ -s\beta c\alpha & (c\beta-1)s\alpha c\alpha & c\beta + (1-c\beta)s^2\alpha \end{bmatrix}$$

et :

$$R_{0\to 2} = \begin{bmatrix} c\beta & s\beta s\alpha & s\beta c\alpha \\ 0 & c\alpha c\beta + (1-c\beta)c\alpha & (c\beta-1)s\alpha - c\beta s\alpha \\ -s\beta & c\beta s\alpha & c\beta c\alpha \end{bmatrix}$$

On a alors : ${}^{2}\overrightarrow{k_0} = R^T_{0\to 2}\ {}^{0}\overrightarrow{k_0} = \begin{bmatrix} -s\beta & c\beta s\alpha & c\beta c\alpha \end{bmatrix}^T$. et :

$$R_{2\to t} = \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}$$

Finalement :

$$R_{0\to t} = \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}$$

Les relations entre les angles de roulis tangage lacet et les élémenents de la matrice de rotation sont donc :

$$\begin{cases} \beta = \operatorname{atan2}(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}) \\ \gamma = \operatorname{atan2}(r_{21}/c\beta, r_{11}/c\beta) \quad \text{si } c\beta \neq 0 \\ \alpha = \operatorname{atan2}(r_{32}/c\beta, r_{33}/c\beta) \quad \text{si } c\beta \neq 0 \end{cases}$$

### 2.3.5 Exercice

*Soit deux repères orthonormés $\mathcal{R}_0(O_0; \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{k_0})$ et $\mathcal{R}_1(O_1; \overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1})$. La matrice de transformation homogène décrivant la transformation entre les deux repère est la suivante :*

$$T_{0\to 1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 & 2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. *Representer sur un même schéma les repères $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$.*
2. *Que vaut $T_{1\to 0}$ ?*
3. *Calculer les angles d'euler selon la convention ZYX paramettrant l'orientation de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}_0$.*

### 2.3.6 Exercice

*Calculez les coordonnées du point $P$ dans un référentiel $\mathcal{R}_1 = (O_1; \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ sachant que :*

- *Les coordonnées de $P$ dans le référentiel $\mathcal{R}_3 = (O_3; \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$ sont : $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$ ;*
- *Le passage du référentiel $\mathcal{R}_1$ vers le référentiel $\mathcal{R}_2$ est obtenu par une translation de $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$ exprimée dans le reférentiel $\mathcal{R}_1$ et d'une rotation de $\pi/3$ autour de l'axe $(O_1, \overrightarrow{z_1})$ ;*
- *Le passage du référentiel $\mathcal{R}_2$ vers le référentiel $\mathcal{R}_3$ est obtenu par une rotation de $\pi/2$ autour de l'axe $(O_3, \overrightarrow{x_2})$ ;*

## 2.4 Paramétrage opérationnel

Le paramétrage opérationnel est un vecteur regroupant l'ensemble des paramètres qui permettent de décrire la configuration du corps terminal par rapport au corps de base d'un robot, et cela, indépendamment de la structure du robot.
Ce paramétrage est constitué au maximum de 6 paramètres indépendants (on peut avoir plus de 6 paramètres, mais ils ne seront pas indépendants).
Toutes les combinaisons d'un paramétrage de la position avec un paramétrage de l'orientation sont possibles :

| Position | Orientation |
|---|---|
| Coordonnées cartésiennes<br>$p_t = \begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}^T$ | Paramètres axio-angulaire<br>$p_r = \theta\begin{bmatrix}u_x & u_y & u_z\end{bmatrix}^T$ |
| Coordonnées cylindriques<br>$p_t = \begin{bmatrix}r & \theta & z\end{bmatrix}^T$ | Paramètres d'Olinde-Rodrigues<br>$p_r = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\begin{bmatrix}u_x & u_y & u_z\end{bmatrix}^T$ |
| Coordonnées sphériques<br>$p_t = \begin{bmatrix}\rho & \theta & z\end{bmatrix}^T$ | Quaternions d'attitude<br>$p_r = \begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & u_x \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & u_y \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & u_z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{bmatrix}^T$ |
| | Angles d'euler selon une convention précisée (XYX, XYZ, ...)<br>$p_r = \begin{bmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{bmatrix}^T$ |
| | Angles de roulis tangage lacet<br>$p_r = \begin{bmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{bmatrix}^T$ |

# Chapitre 3

## Paramétrage articulaire

On a vu que le paramétrage opérationel est l'ensemble des paramètres qui permettent de décrire la configuration (position et orientation) de l'effecteur par rapport à la base indépendamment de la structure du robot.
Le paramétrage articulaire quand à lui dépend du robot étudié et permet de décrire la configuration relative entre deux corps liés l'un à l'autre.
Si le nombre de paramètres opérationnels indépendants est forcément inférieur ou égal à 6, le nombre de paramètres articulaires indépendants n'a pas de limite : il y en a autant que le robot a de degrés de liberté.

## 3.1 Mécanismes considérés

On peut définir différents types de mécanisme, figure 3.1 :

**les chaines ouvertes simples** chaque corps possède deux liaisons, sauf deux corps qui ne possèdent chacun qu'une liaison. On parle aussi de système série car les corps sont attachés les uns aux autres en série.

**les chaines arborescentes** plusieurs chaines ouvertes simples sont reliées à un même solide.

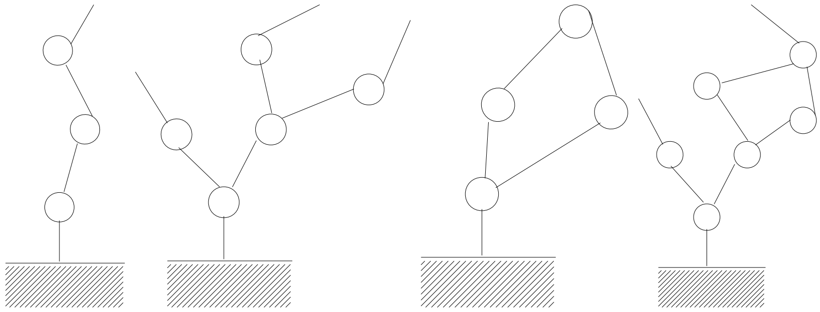
**les chaines fermées simples** chaque corps possède deux liaisons.

**les chaines complexes** tout ensemble qui peut se décomposer en plusieurs des chaines citées précédemment.

Dans ce cours, on se limite à l'étude des systèmes séries pour lesquels les liaisons sont soit des liaisons pivots soit des liaisons glissères.
Soit un système à $n$ liaisons, on notera toujours $S_0$ le corps de base, $S_n$ l'effecteur, $S_i$ pour $i \in \{1, ...n-1\}$ le corps lié au corps $S_{i-1}$ par la liaison $i$ et au corps $S_{i+1}$ par la liaison $i+1$.

## 3.2 Degré de liberté

Les mouvements relatifs entre deux solides sont limités à 3 translations et 3 rotations. Parmi c'est 6 mouvements élémentaires, le nombre de mouvements indépendants laissés libres par



(a) Chaine ouverte (b) Chaine arborescente (c) Chaine fermée (d) Chaine complexe

FIGURE 3.1 – Types de mécanisme

la liaison entre les deux solides définit le nombre de degré de liberté de la liaison.
Ainsi, une liaison glissière ou une liaison pivot ont chacune 1 degré de liberté, de même que la liaison hélicoïdale. Par contre la liaison rotule possède 3 degrés de liberté.
Il existe de très nombreuses façons de définir le nombre de degrés de liberté d'un système. La formule la plus utilisée est :

$$m = -d(n - b + 1) + \sum_{i=1}^{n} k_i$$

avec $\begin{cases} d \text{ la dimension de l'espace dans lequel évolue l'effecteur (6 ou 3)} \\ n \text{ nombre de liaisons} \\ b \text{ nombre de solides y compris la base} \\ k_i \text{ degré de liberté de la liaison i} \end{cases}$.

Le nombre $m$ s'appelle aussi indice de mobilité. Il représente le nombre de paramètres indépendants nécessaires et suffisants pour décrire la configuration des corps les uns par rapport aux autres dans une configuration quelconque du robot.
Cette formule ne tient pas compte de certaines particularités géométriques dans la structure du robot et parfois, le nombre de degré de liberté réel du système est inférieur à l'indice de mobilité.

## 3.3 Paramétrage

La modélisation géométrique d'un robot se fait en trois étapes :

1. Attacher un repère à chaque corps constituant le robot.
2. Calculer les matrices de transformation entre chaque paire de corps successifs.
3. Calculer le produit de l'ensemble des matrices.

C'est à la première étape que l'on s'intéresse ici. En principe, on peut attacher un repère à chaque solide de façon arbitraire. Mais il existe des conventions qui permettent d'attacher les repères pour faire intervenir un nombre de paramètres minimal décrivant la transformation entre deux corps successifs. En même temps que de définir ces repères, nous verrons que ces conventions permettent de définir quels sont les paramètres qui décrivent :
– la géométrie des corps (longueurs,...) ;
– la variable articulaires (angle de rotation pour un pivot, longueur pour une glissière).

### 3.3.1 La convention de Denavit et Hartenberg

On considère ici, pour être tout à fait précis, la convention de Denavit et Hartenberg modifiée, c'est-à-dire adaptée de la version originale pour être applicable à des robots en chaîne fermée, que l'on ne considère pas au demeurant dans ce cours.

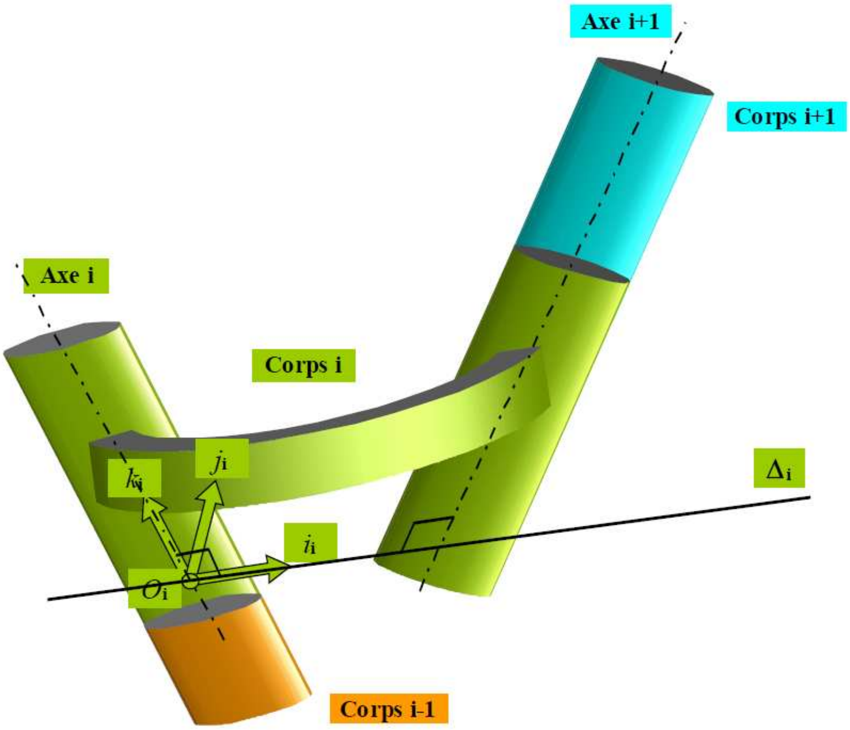



FIGURE 3.2 – Positionnement du repère sur le corps d'un robot

Les robots considérés sont des manipulateurs série constitués d'articulations à un seul degré de liberté : soit des liaisons autorisant une rotation autour d'un axe fixe (liaisons pivots) soit des liaisons autorisant une translation le long d'un axe fixe (liaisons glissières).
Les $n$ liaisons du robot sont d'abord numérotées en partant de la base, de 1 à n. Les corps, qui sont au nombre de $n+1$, sont numérotés de $S_0$ à $S_n$, le corps $S_0$ étant la base immobile du robot.

On considère d'abord un corps constituant un robot dans toute sa généralité. On traitera par la suite les cas particuliers.

Sur la figure figure 3.2, on a représenté un corps intermédiaire du robot (compris entre deux liaisons, c'est-à-dire $S_i$ entre les liaisons $i$ et $i+1$ pour $1 \leq i \leq n-1$). On a également représenté l'axe $i$, qui est celui de la liaison avec le corps précédent (corps $S_{i-1}$), et l'axe $i+1$, qui est celui de la liaison avec le corps suivant (corps $S_{i+1}$).
Soit $\Delta_i$, la perpendiculaire commune aux deux axes (nous supposons ici qu'elle est définie et unique). Le repère $\mathcal{R}_i$, est alors attaché au corps $S_i$ de la façon suivante :
- l'origine $O_i$ est l'intersection de l'axe $i$ et de $\Delta_i$ ;
- le vecteur $\overrightarrow{k_i}$ est porté par l'axe $i$ (le sens n'est pas imposé par la convention) ;
- le vecteur $\overrightarrow{i_i}$ est porté par la droite $\Delta_i$ et est orienté vers l'axe $i+1$ ;
- le vecteur $\overrightarrow{j_i}$ est alors donné par : $\overrightarrow{j_i} = \overrightarrow{k_i} \wedge \overrightarrow{i_i}$.

Les deux premiers paramètres de DH sont (figure 3.3) :

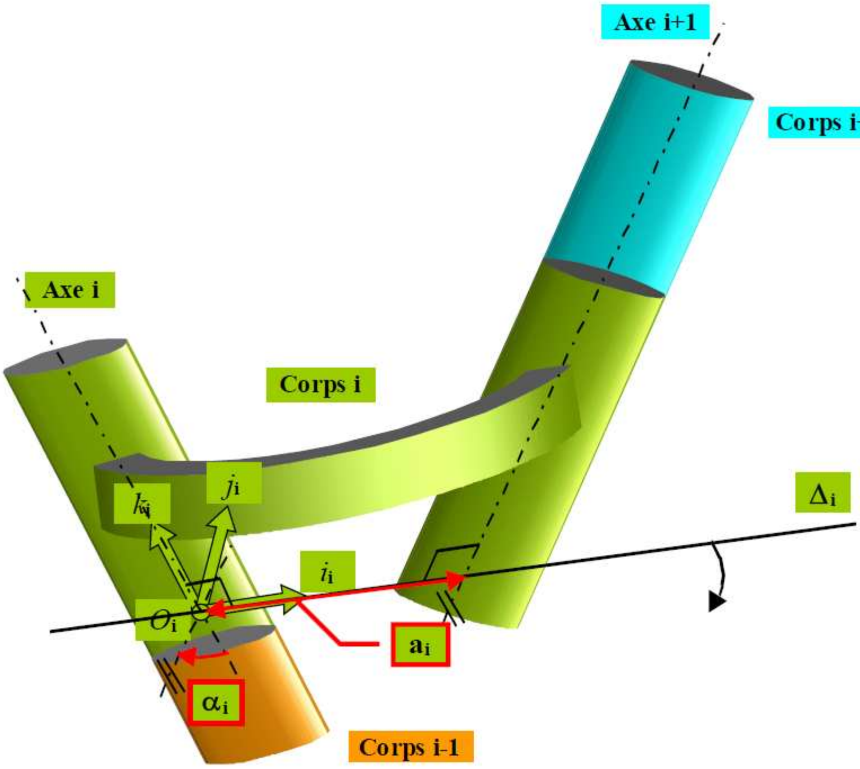



FIGURE 3.3 – Les deux premiers paramètres de Denavit et Hartenberg

– La distance $a_i$ entre les deux axes $i$ et $i+1$ mesurée le long de $\overrightarrow{i_i}$ ;
– L'angle $\alpha_i$ entre les deux vecteur $\overrightarrow{k_i}$ et $\overrightarrow{k_{i+1}}$ mesuré autour de $\overrightarrow{i_i}$. A noter que l'angle $\alpha_i$ est signé, c'est à dire compté positivement lorsqu'on tourne de $\overrightarrow{j_i}$ vers $\overrightarrow{k_i}$ (sens direct).

Ces deux paramètres sont constants et ne dépendent que de la géométrie du corps $S_i$.
Les deux paramètres suivants sont indiqués sur la figure 3.3. Ils correspondent aux décalages (en longueur et en angle) selon le vecteur $\overrightarrow{k_{i+1}}$. On positionne d'abord le repère $\mathcal{R}_{i+1}$ comme on l'a fait pour le repère $\mathcal{R}_i$, et on définit les deux paramètres de la façon suivante :

– La distance $d_{i+1}$ mesurée le long du vecteur $\overrightarrow{k_{i+1}}$, entre les droites $\Delta_i$ et $\Delta_{i+1}$.
– L'angle $\theta_{i+1}$ entre les deux vecteurs $\overrightarrow{i_i}$ et $\overrightarrow{i_{i+1}}$ mesuré autour de $\overrightarrow{k_{i+1}}$. Cet angle est orienté de $\overrightarrow{i_i}$ vers $\overrightarrow{i_{i+1}}$ et compté positivement dans le sens direct.

On voit qu'un seul de ces deux paramètres varie :

– Si l'axe $i+1$ est une liaison pivot, alors $\theta_{i+1}$ est variable et $d_{i+1}$ est fixe.
– Si l'axe $i+1$ est une liaison glissière, alors $\theta_{i+1}$ est fixe et $d_{i+1}$ est variable.

L'ensemble des règles énoncées s'applique pour tous les corps intermédiaires du robot, dès lors que les axes successifs ne sont ni concourants ni parallèles (ni, bien sûr confondus). Nous traitons maintenant l'ensemble des cas pour lesquels il faut appliquer des conventions particulières.

#### 3.3.1.1 Positionnement du repère $\mathcal{R}_0$

Le positionnement de $\mathcal{R}_0$ se fait après avoir attaché $\mathcal{R}_1$ au premier corps mobile. On choisira toujours $\overrightarrow{k_0}$ et $O_0$ appartenant à l'axe 1 (ce qui signifie que les paramètres $a_0$ et $\alpha_0$ sont toujours nuls). Il reste donc à déterminer la position de $O_0$ sur l'axe 1 et la direction de $\overrightarrow{i_0}$. Ce choix est laissé libre par la convention.
En pratique, pour effectuer ce choix, on décide d'abord quelle position du premier corps

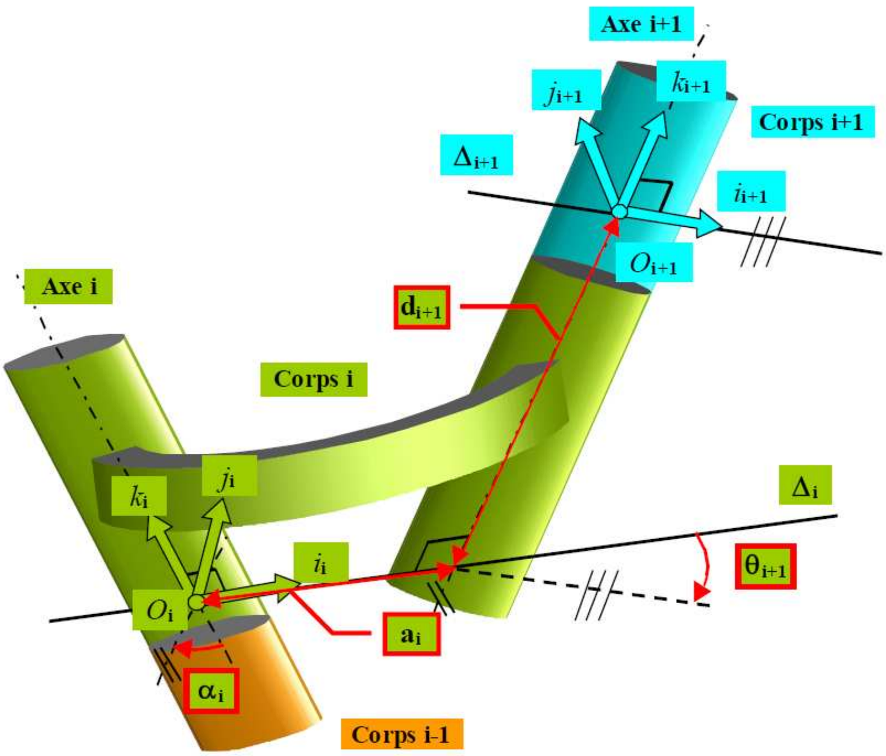



FIGURE 3.4 – Figure 1.10 : Les deux derniers paramètres de Denavit et Hartenberg

correspondra à $\theta_1 = 0$ si la liaison est un pivot ou $d_1 = 0$ dans le cas d'une liaison glissière. On place alors le repère $\mathcal{R}_0$ de sorte qu'il coïncide avec le repère $\mathcal{R}_1$ lorsque le corps $S_1$ est placé dans cette configuration particulière. On alors :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \ , \ \alpha_0 = 0 \ , \ d_1 = 0 \text{ et } \theta_1 \text{ variable si l'axe 1 est un pivot} \\ a_0 = 0 \ , \ \alpha_0 = 0 \ , \ \theta_1 = 0 \text{ et } d_1 \text{ variable si l'axe 1 est une glissière} \end{cases}$$

#### 3.3.1.2 Positionnement du repère $\mathcal{R}_n$

Pour le dernier repère, $\mathcal{R}_n$, on place bien sûr $\overrightarrow{k_n}$ le long de l'axe $n$ et $O_n$ appartenant à l'axe $n$. Ceci fixe les paramètres $a_{n-1}$ et $\alpha_{n-1}$, qui ne dépendent d'ailleurs que de la géométrie du corps $S_{n-1}$. Il reste donc à déterminer la position de $O_n$ sur l'axe $n$ et la direction de $\overrightarrow{i_n}$. Ce choix est laissé libre par la convention.
En pratique, on place le repère $\mathcal{R}_n$ de sorte que :

$$\begin{cases} d_n = 0 \text{ et } \overrightarrow{i_n} = \overrightarrow{i_{n-1}} \text{ lorsque } \theta_n = 0 \text{ si l'axe n est un pivot} \\ \theta_n = 0 \text{ et } O_n = O_{n-1} \text{ lorsque } d_n = 0 \text{ si l'axe n est une glissière} \end{cases}$$

#### 3.3.1.3 Cas d'axes successifs parallèles non confondus

Dans le cas où les axes $i$ et $i+1$ sont parallèles, la droite $\Delta_i$ n'est plus définie de façon unique, et peut glisser dans le plan constitué par les deux axes. On peut donc de même faire glisser de façon indéfinie l'origine $O_i$ de $\mathcal{R}_i$ le long de l'axe $i$. En fait, tous les choix arbitraires respectent la convention. On donne cependant dans ce qui suit des règles pratiques permettant de faciliter le choix du placement du repère $\mathcal{R}_i$. On considère alors deux cas :
– Si le repère $\mathcal{R}_{i-1}$ a déjà été positionné :

  – Si l'axe $i$ est un pivot, alors on choisit de placer $O_i$ de sorte que $d_i = 0$ (c'est-à-dire $O_i \in \Delta_{i-1}$) ;
  – Si l'axe $i$ est une glissière, alors l'indétermination sur le positionnement de $\Delta_i$ revient à dire que l'on peut choisir arbitrairement la configuration de l'axe $i$ correspondant à $d_i = 0$. On choisit donc cette configuration et on place $O_i$ tel que dans cette configuration $O_i \in \Delta_{i-1}$ .
– Si le repère $\mathcal{R}_{i-1}$ n'a pas encore été positionné (par exemple $i = 1$), on ne peut bien sûr pas s'appuyer sur ce dernier pour construire $\mathcal{R}_i$. On suggère alors de placer d'abord $\mathcal{R}_{i+1}$ puis de revenir à $\mathcal{R}_i$. On applique ensuite les règles suivantes :
  – Si l'axe $i+1$ est un pivot, alors on choisit de placer $O_i$ de sorte que $d_{i+1} = 0$ (c'est-à-dire $O_{i+1} \in \Delta_i$) ;
  – Si l'axe $i + 1$ est une glissière, alors l'indétermination sur le positionnement de $\Delta_i$ revient à dire que l'on peut choisir arbitrairement quelle sera la configuration de l'axe $i + 1$ correspondant à $d_{i+1} = 0$. On choisit donc cette configuration et on place $O_i$ tel que dans cette configuration $O_{i+1} \in \Delta_i$.

#### 3.3.1.4 Cas d'axes successifs concourants non confondus

Dans le cas où les axes $i$ et $i + 1$ sont concourants mais non confondus, la droite $\Delta_i$ est bien définie de façon unique (perpendiculaire au plan formé par les axes $i$ et $i + 1$), mais le sens du vecteur $\overrightarrow{i_i}$ n'est pas déterminé. On le choisira alors de façon arbitraire. On pourra par exemple le choisir de sorte que $\alpha_i$ soit positif. A noter que le point $O_i$ est bien sûr l'intersection des deux axes, conformément aux règles générales définissant la convention.

#### 3.3.1.5 Cas d'axes successifs confondus

Dans le cas où les axes $i$ et $i + 1$ sont confondus, alors $\Delta_i$ peut non seulement glisser le long de l'axe $i$, mais encore sa direction n'est pas définie : $\Delta_i$ est simplement limitée au plan perpendiculaire à l'axe $i$. Cela signifie que la direction du vecteur $\overrightarrow{i_i}$ peut être choisie arbitrairement dans ce plan et que la position de $O_i$ peut varier arbitrairement sur l'axe $i$. On considère alors deux cas :
– Si le repère $\mathcal{R}_{i-1}$ a déjà été positionné :
  – Si l'axe $i$ est une liaison pivot, alors on choisit de placer $O_i$ de telle façon que $d_i = 0$ (c'est-à-dire $O_i \in \Delta_{i-1}$) ; en outre, on choisit arbitrairement la configuration du corps $S_i$ correspondant à $\theta_i = 0$, et alors on place $\overrightarrow{i_i}$ tel que $\overrightarrow{i_i} = \overrightarrow{i_{i-1}}$ dans cette position.
  – Si l'axe i est une liaison glissière, alors $\overrightarrow{i_i}$ a une direction fixe par rapport au corps $S_{i-1}$. On choisit simplement $\overrightarrow{i_i}$ parallèle à $\overrightarrow{i_{i-1}}$. De plus, l'indétermination sur le positionnement de $O_i$ le long de l'axe $i$ revient à dire que l'on peut choisir arbitrairement quelle sera la configuration de l'axe $i$ correspondant à $d_i = 0$. On choisit donc cette configuration et on place $O_i$ tel que dans cette configuration $O_i \in \Delta_{i-1}$.
– Si le repère $\mathcal{R}_{i-1}$ n'a pas encore été positionné (par exemple $i = 1$), on ne peut bien sûr pas s'appuyer sur ce dernier pour construire $\mathcal{R}_i$. On suggère alors de placer d'abord $\mathcal{R}_{i+1}$ puis de revenir à $\mathcal{R}_i$. On applique ensuite les règles suivantes :
  – Si l'axe $i + 1$ est une liaison pivot, alors on choisit de placer $O_i$ de sorte que $d_{i+1} = 0$ (c'est-à-dire $O_{i+1} \in \Delta_i$) ; de plus, on choisit arbitrairement la position du corps $S_{i+1}$ correspondant à $\theta_{i+1} = 0$, et alors on place $\overrightarrow{i_i}$ tel que $\overrightarrow{i_i} = \overrightarrow{i_{i+1}}$ dans cette position.
  – Si l'axe $i + 1$ est une liaison glissière, alors $\overrightarrow{i_{i+1}}$ a une direction fixe par rapport au

corps $S_i$. On choisit simplement $\overrightarrow{i_i}$ parallèle à $\overrightarrow{i_{i+1}}$. De plus, l'indétermination sur le positionnement de $\Delta_i$ revient à dire que l'on peut choisir arbitrairement la configuration de l'axe $i+1$ correspondant à $d_{i+1} = 0$. On choisit donc cette configuration et on place $O_i$ tel que dans cette configuration $O_{i+1} \in \Delta_i$.

### 3.3.2 Résumé et paramètres Denavit-Hartenberg

Pour placer les repères liés aux différents corps selon la convention Denavit-Hartenberg :

1. commencer toujours par tracer les axes des liaisons ;
2. ensuite, placer les repères ne comportant pas de difficulté, c'est à dire pour lesquels deux axes successifs ne sont ni parallèles, ni concourants ;
3. placer ensuite les repères n'entrant pas dans la catégorie précédente, pour ;
4. placer en dernier les repères $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_n$ ;
5. enfin, vérifier que le positionnement des repères vérifie bien la convention de Denavit et Hartenberg, c'est-à-dire que pour passer de chaque repère $\mathcal{R}_i$ à $\mathcal{R}_{i+1}$, on fait bien à chaque fois, successivement :
   (a) une translation d'une longueur $a_i$ le long de $\overrightarrow{i_i}$ ;
   (b) une rotation d'un angle $\alpha_i$ autour de $(O_i, \overrightarrow{i_i})$ ;
   (c) une translation d'une longueur $d_{i+1}$ le long de $\overrightarrow{k_{i+1}}$ ;
   (d) une rotation d'un angle $\theta_{i+1}$ autour de $\overrightarrow{k_{i+1}}$ ;

Les résultats de la paramétrisation sont finalement regroupés sous forme d'un tableau de paramètre ayant l'allure suivante :

| $S_i \to S_{i+1}$ | $\alpha_i$ | $a_i$ | $\theta_{i+1}$ | $d_{i+1}$ |
|---|---|---|---|---|
| $S_0 \to S_1$ | | | | |
| $S_i \to S_{i+1}$ | | | | |
| $S_{n-1} \to S_n$ | | | | |

On voit que finalement le nombre de paramètres permettant de définir la géométrie d'un manipulateur série quelconque à $n$ articulations (à la condition qu'il soit constitué uniquement par des liaisons pivot ou glissière) est réduit à $4n$.
Il est à noter que dans les deux dernières colonnes de ce tableau, seul un des deux paramètres par ligne est une constante, l'autre, restant sous forme littérale : $\theta_{i+1}$ pour une liaison pivot ou $d_{i+1}$ pour une liaison glissière. Ces paramètres sont les variables généralisées définissant la position articulaire du robot. Groupés en colonne, il forment le vecteur des coordonnées articulaires $q$.

### 3.3.3 Transformation entre deux repères successifs

On passe du repère $\mathcal{R}_i$ au repère $\mathcal{R}_{i+1}$ en faisant 4 transformations élémentaires :

1. une translation d'une longueur $a_i$ le long de $\overrightarrow{i_i}$ ;
2. une rotation d'un angle $\alpha_i$ autour de $(O_i, \overrightarrow{i_i})$ ;
3. une translation d'une longueur $d_{i+1}$ le long de $\overrightarrow{k_{i+1}}$ ;

4. une rotation d'un angle $\theta_{i+1}$ autour de $\overrightarrow{k_{i+1}}$ ;

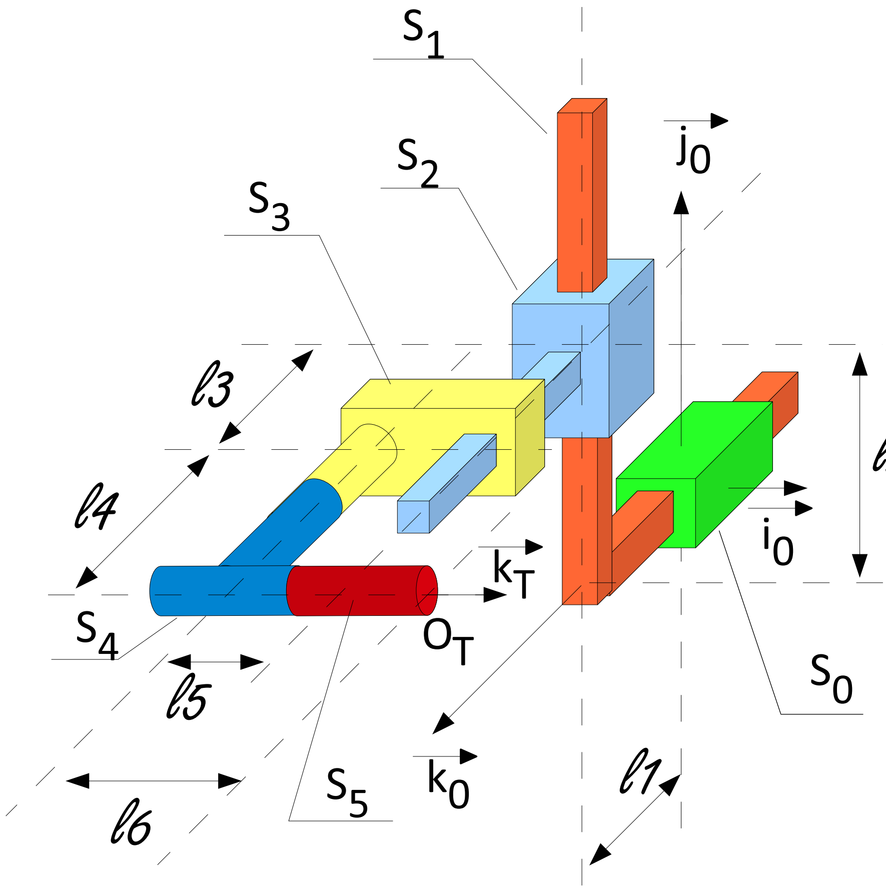
La matrice de transformation entre les deux repères est alors :

$$
\begin{aligned}
T_{i\to i+1} &= T(a_i, \overrightarrow{i_i}).T(\alpha_i, \overrightarrow{i_i}).T(d_{i+1}, \overrightarrow{k_{i+1}})..T(\theta_{i+1}, \overrightarrow{k_{i+1}}) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_{i+1} & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c\theta_{i+1} & -s\theta_{i+1} & 0 & 0 \\ s\theta_{i+1} & c\theta_{i+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c\theta_{i+1} & -s\theta_{i+1} & 0 & a_i \\ s\theta_{i+1}c\alpha_i & c\theta_{i+1}c\alpha_i & -s\alpha_i & -s\alpha_i d_{i+1} \\ s\theta_{i+1}s\alpha_i & c\theta_{i+1}s\alpha_i & c\alpha_i & c\alpha_i d_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

### 3.3.4 Exercice

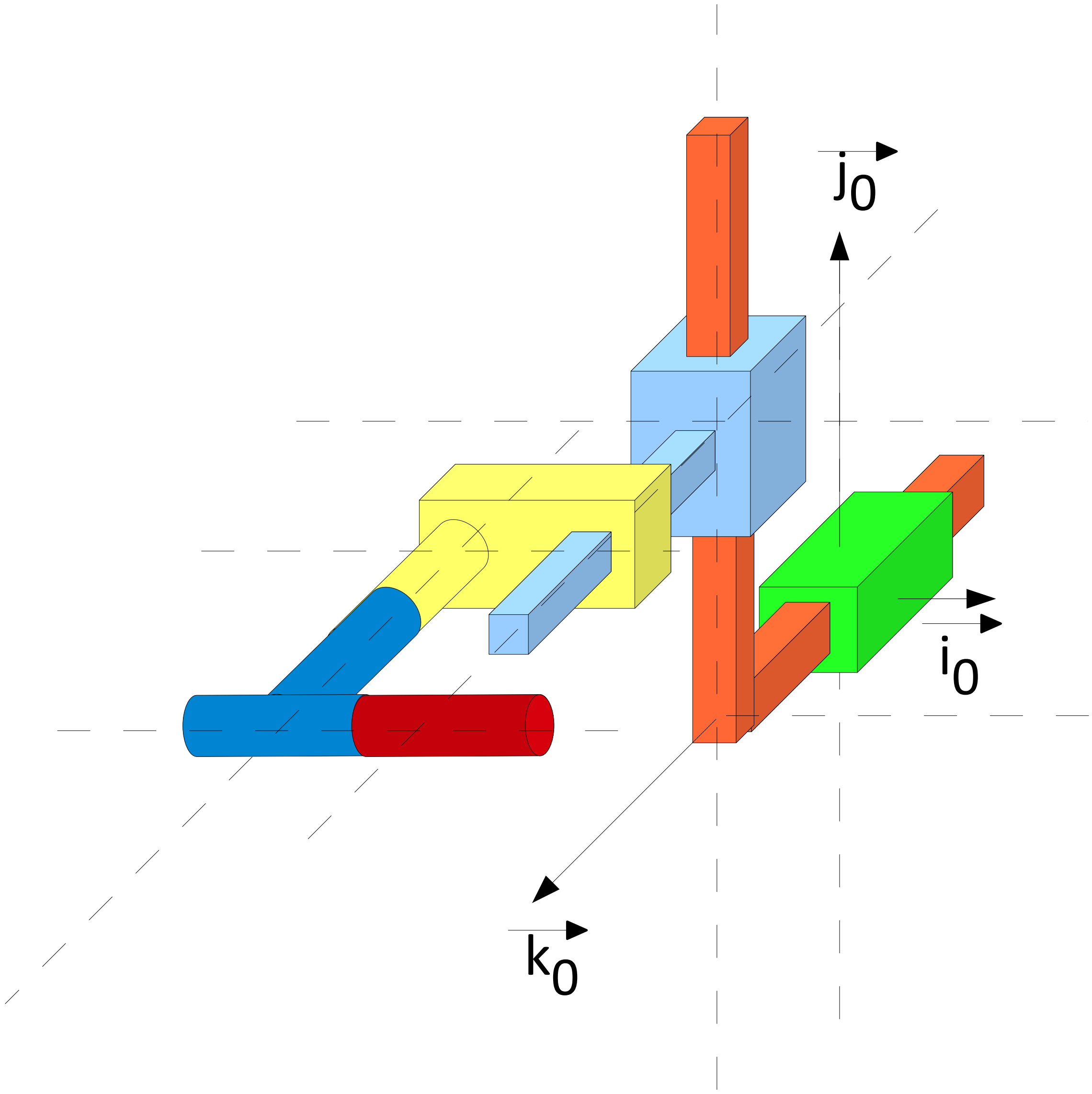
**Robot de chaine de tri**

*Soit un repère orthonormé direct $\mathcal{R}_0 = (O_0, \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{k_0})$, $\overrightarrow{j_0}$ vertical ascendant.*
*On considère un robot à 5 dégrés de liberté représenté sur la figure ci-après.*




*Les trois premières liaisons sont des liaisons glissières.*
*La première liaison est d'axe horizontal, la seconde d'axe vertical et la troisième d'axe parallèle à la première.*
*Les deux dernières liaisons sont des pivots. La première d'axe horizontal parallèle à celui de la première glissière et la seconde est d'axe perpendiculaire à celui de la précédente.*

1. *Sur la figure donnée ci-après, placer les repères selon la convention Denavit-Hartenberg. Expliquer comment vous procédez (il ne s'agit pas de recopier le cours mais d'expliquer vos choix lorsque vous devez en faire...).*
2. *Donner le tableau de paramètres de Denavit et Hartenberg.*
3. *On choisit comme paramétrage opérationnel le vecteur* $p = \begin{bmatrix} x & y & z & r_x & r_y & r_z \end{bmatrix}^T$ *où* $x$, $y$ *et* $z$ *sont les coordonnées du point* $O_T$ *dans le repère* $\mathcal{R}_0$ *et* $(r_x, r_y, r_z)$ *sont les angles d'Euler selon la convention XYZ. Calculer la matrice de transformation homogène entre la base et l'effecteur en fonction des paramètres opérationnels.*
4. *Calculer la matrice de transformation homogène entre la base et l'effecteur en fonction des paramètres articulaires.*



# Chapitre 4

## Modélisation Géométrique

Etablir le modèle géométrique d'un robot revient à déterminer les relations entre la configuration opérationnelle et la configuration articulaire.
Lorsque les relations permettent d'exprimer les paramètres opérationnels comme des fonctions des paramètres articulaires, on parle de modèle géométrique direct. Les relations contraires forment le modèle géométrique inverse.

## 4.1 Modèle géométrique direct

Le modèle géométrique direct s'obtient de façon évidente dès lors que les paramètres DH sont connus et qu'un choix a été fait pour le paramètrage opérationnel.
En effet, on sait exprimer la matrice de transformation homogène entre le corps de base et le corps terminal du robot en fonction des paramètres DH (qui sont soit des constantes, soit les paramètres articulaires $q_i$ :

$$T_{0\to n}(q) = \prod_{i=0}^{n-1} T_{i\to i+1}(q_{i+1})$$

où $T_{i\to i+1}(q_{i+1})$ est la matrice définie au chapitre précédent. Elle dépend des constantes $\alpha_i$, $a_i$, $\theta_{i+1}$ si la liaison est une glissière, $d_{i+1}$ si la liaison est un pivot et de la variable articulaire $q_{i+1}$ ($q_{i+1} = \theta_{i+1}$ si la liaison est un pivot, $q_{i+1} = d_{i+1}$ si la liaison est une glissière).
Par ailleurs, on a vu comment retrouver les paramètres opérationnels à partir d'une matrice de transformation homogène entre le corps de base et le corps terminal du robot.
Pour établir le modèle géométrique direct il faut donc :

1. Placer les repères DH ;
2. Déterminer le tableau des paramètres DH ;
3. Calculer les matrices de transformations homogènes entre deux corps successifs $T_{i\to i+1}(q_i)$ ;
4. Calculer la matrice de transformation homogène entre la base et l'effecteur en fonction des paramètres articulaires $T_{0\to n}(q)$ ;
5. Calculer la matrice de transformation homogène entre la base et l'effecteur en fonction des paramètres opérationnels $T_{0\to n}(X)$ ;
6. Identifier $T_{0\to n}(q) = T_{0\to n}(X)$, en déduire les relations $X = f(q)$.

### 4.1.1 Exercice

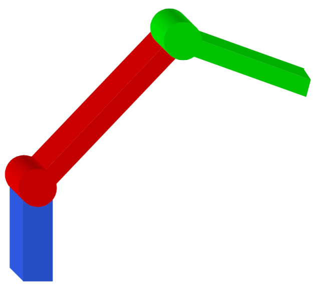


Figure 4.1 – Robot 2R

*On considère un robot 2R plan. Il est donc composé de 3 corps $S_i$, $i \in \{0, 1, 2\}$ reliés deux à deux par des liaisons pivot d'axes parallèles et horizontaux.*
*Soient les repères $\mathcal{R}_i = (O_i, \overrightarrow{i_i}, \overrightarrow{j_i}, \overrightarrow{k_i})$, $i \in \{0, 1, 2\}$, orthonormés directs attachés aux corps $S_i$ selon la convention de Denavit et Hartenberg.*
*On définit le repère orthonormé direct $\mathcal{R}_T = (O_T, \overrightarrow{i_T}, \overrightarrow{j_T}, \overrightarrow{k_T})$ lié au corps terminal tel que :*

$$\begin{cases} \overrightarrow{O_2 O_T} = l_2 \overrightarrow{i_2} \\ (\overrightarrow{i_T}, \overrightarrow{j_T}, \overrightarrow{k_T}) = (\overrightarrow{i_2}, \overrightarrow{j_2}, \overrightarrow{k_2}) \end{cases}$$

*Le tableau des paramètres DH s'écrit :*

| $S_i \to S_{i+1}$ | $\alpha_i$ | $a_i$ | $\theta_{i+1}$ | $d_{i+1}$ |
|---|---|---|---|---|
| $S_0 \to S_1$ | 0 | 0 | $q_1$ | 0 |
| $S_1 \to S_2$ | 0 | $l_1$ | $q_2$ | 0 |

*Le système est plan donc 3 paramètres suffisent à décrire sa configuraiton opérationnelle. On choisit : $X = \left[x, y, \beta\right]^T$ tel que*

$$\begin{cases} x = \overrightarrow{O_0 O_T}.\overrightarrow{i_0} \\ y = \overrightarrow{O_0 O_T}.\overrightarrow{j_0} \\ \beta = (\overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{i_T}) = (\overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{j_T}) \end{cases}$$

*Calculer le modèle géométrique direct de ce robot.*

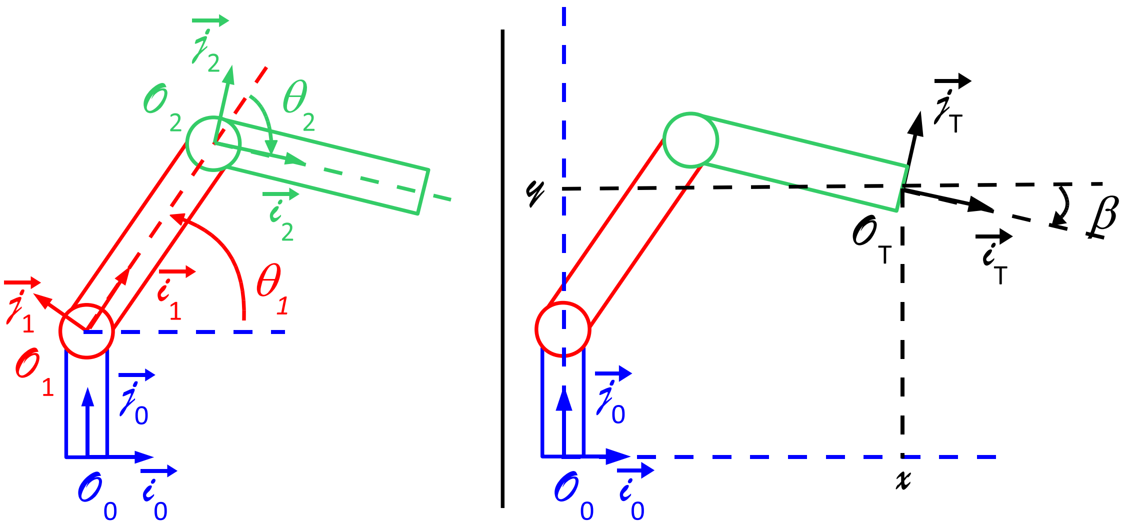



Figure 4.2 – Robot 2R - Paramètrages articulaire et opérationnel

D'après le tableau des paramètres DH on peut calculer :

$$T_{0\to1}(q_1) = \begin{bmatrix} c1 & -s1 & 0 & 0 \\ s1 & c1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_{1\to2}(q_2) = \begin{bmatrix} c2 & -s2 & 0 & l_1 \\ s2 & c2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$T_{0\to2}(q) = \begin{bmatrix} c12 & -s12 & 0 & l_1c1 \\ s12 & c12 & 0 & l_1s1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Etant donnée la définition du repère $\mathcal{R}_T$ par rapport au repère $R_2$ on peut établir la matrice de transformation homogène constante entre les deux repères :

$$T_{2\to T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc :

$$T_{0\to T}(q) = \begin{bmatrix} c12 & -s12 & 0 & l_1c1 + l_2c12 \\ s12 & c12 & 0 & l_1s1 + l_2s12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Par ailleurs, en fonction des paramètres opérationnels on a :

$$T_{0\to T}(X) = \begin{bmatrix} R(\beta, \overrightarrow{k_0}) & {}^0O_0O_T \\ 0\ \ 0\ \ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\beta & -s\beta & 0 & x \\ s\beta & c\beta & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Par identification de $T_{0\to T}(X) = T_{0\to T}(q)$ on a directement :

$$\begin{cases} x = l_1c1 + l_2c12 \\ y = l_1s1 + l_2s12 \\ \beta = q_1 + q_2 \end{cases}$$

C'est le modèle géométrique direct.

## 4.2 Modèle géométrique inverse

Le modèle géométrique inverse est constitué de l'ensemble des solutions résultant de l'inversion du modèle géométrique direct. Il y a rarement unicité de la solution. Par ailleurs, il n'y a pas toujours de solution analytique. Lorsqu'il n'est pas possible de trouver une forme explicite du modèle géométrique inverse, on peut calculer une solution particulière par des procédures numériques (méthodes de type Newton-Raphson (linéarisation), méthodes exploitant le modèle cinématique, etc...)
On se limitera ici à présenter quelques méthodes de calcul du modèle géométrique inverse analytique pour les robots séries.

### 4.2.1 Inversion du système d'équation

C'est la méthode qu'on a utilisée pour l'exercice du chapitre d'introduction à la modélisation géométrique. Il s'agit d'inverser les équations du modèle géométrique direct pour exprimer les paramètres articulaire en fonction des paramètres opérationnels. Cette méthode demande de l'intuition pour faire des combinaisons pertinentes à partir des équations du modèle géométrique direct ou pour faire des changements de variables judicieux.
La difficulté augmente rapidement avec le nombre d'équation à inverser.

**Exercice** *Etablir le modèle géométrique inverse du robot 2R plan.*
*On a montré précédemment que le modèle géométrique direct du robot 2R plan s'écrit :*

$$\begin{cases} x = l_1 c1 + l_2 c12 \\ y = l_1 s1 + l_2 s12 \\ \beta = q_1 + q_2 \end{cases}$$

L'objectif est d'exprimer $q_1$ et $q_2$ en fonction de $x$, $y$ et $\beta$.
On a directement :

$$\begin{cases} c1 = \dfrac{x - l_2 c\beta}{l_1} \\ s1 = \dfrac{y - l_2 s\beta}{l_1} \\ q_2 = \beta - q_1 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} q_1 = \text{atan2}(y - l_2 s\beta, x - l_2 c\beta) \\ q_2 = \beta - q_1 \end{cases}$$

On a donc trouvé un modèle géométrique inverse analytique et avec une solution unique.

### 4.2.2 Méthode de Paul

Le principe de cette méthode est de résoudre les variables les unes après les autres.
On part de l'équation :

$$T_{0\to n}(X) = T_{0\to n}(q_1, ...q_n)$$

On multiplie à gauche par $T_{1\to 0}(q_1)$ :

$$T_{1\to 0}(q_1).T_{0\to n}(X) = T_{1\to n}(q_2, ...q_n)$$

Le produit de gauche dépend alors d'une seule inconnue : $q_1$. Parmi les 12 equations, on cherche celles qui permettent d'exprimer $q_1$ en fonction de $X$ sans faire intervenir $q_2, ...q_n$ et . On réitère ce processus en multpliant à gauche par $T_{i\to i-1}(q_i)$, $i \in \{2 \ldots n\}$ :

$$T_{i\to i-1}(q_i).T_{i-1\to n}(X, q_1, ....q_{i-1}) = T_{i\to n}(q_{i+1}, ...q_n)$$

Dans cette équation les $q_1, ...q_{i-1}$ ont été résolus aux étapes précédentes, il n'y a donc qu'une inconnue dans le membre de gauche : $q_i$. On peut la résoudre par identification. Et ainsi de suite jusqu'à $q_n$. En pratique, pour résoudre la variable $q_i$, les équations issues de l'identification sont toujours les mêmes.

### 4.2.3 Algorithme de Pieper

L'algorithme de Pieper permet d'inverser le modèle géométrique de robot dont la structure possède : 3 pivots formant une rotule et/ou 3 glissières.
Pour ces robots, le système d'équation à inverser se découple en deux systèmes :
- un système qui ne dépend que des paramètres opérationnels de position et des paramètres articulaires permettant de positionner l'origine du repère $\mathcal{R}_n$. Cela correspond à étudier la partie du robot appelée « porteur ».
- un système qui ne dépend que des paramètres opérationnels d'orientation et et des paramètres articulaires permettant d'orienter la base du repère $\mathcal{R}_n$. Cela correspond à étudier la partie du robot appelée « poignet ».

# PARTIE II

## Modélisation Cinématique

# Chapitre 1

## Introduction

## 1.1 Objectif de la modélisation cinématique

L'objectif de la modélisation cinématique des robots est de trouver les relations entre la vitesse du corps terminal (vitesse de rotation et vitesse d'un point du solide) et les vitesses mesurées aux articulations.
On peut établir une première relation cinématique : le **modèle cinématique direct** qui permet de trouver la vitesse opérationelle connaissant la vitesse articulaire. On l'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$V_A = J_A \dot{q}$$

où $V_A = \left[{}^0\Omega^T(S_n/S_0) \quad {}^0V^T(A \in S_n/S_0)\right]^T$ et où les composantes de $\dot{q}$ sont les dérivées temporelles des composantes de $q$.
Pour que le corps terminal se déplace à une vitesse donnée, on doit déterminer la relation inverse : il faut trouver la vitesse articulaire connaissant la vitesse opérationnelle. Cette relation inverse est appelée **modèle cinématique inverse** et s'écrit, lorsqu'elle existe, sous la forme :

$$\dot{q} = J^{-1} V_A$$

La matrice $J_A$ dépend du point auquel on exprime le modèle, on l'appelle matrice jacobienne en $A$.
A noter que la matrice $J$ n'est pas toujours inversible. Lorsque la matrice n'est inversible on dit qu'on est dans une configuration singulière.
Dans cette partie du cours on verra comment :
- établir le modèle cinématique direct ;
- établir le modèle cinématique inverse ;
- comment faire le lien avec le modèle géométrique.
- les vitesses et les efforts sont transmis à travers la structure géométrique du robot (dualité cinémato-statique) ;

Vous savez déjà établir un modèle cinématique direct : il s'agit de faire de la composition de mouvement. Dans ce cours on verra comment établir le modèle cinématique direct à partir des matrices de transformation homogène (sans calculer les différents torseurs cinématiques).

## 1.2 Exercice de cinématique

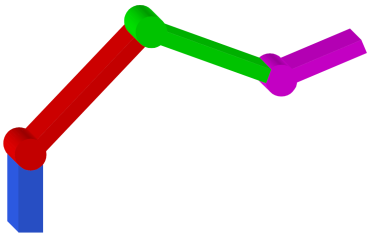


Figure 1.1 – Robot 3R

*On considère un robot communément appelé 3R (3 liaisons Rotoïdes, ancien nom des liaisons pivots), figure 1.1. C'est un robot série consitué de 4 corps liés entre eux par des liaisons pivots d'axes parallèles. Le robot évolue donc dans un plan.*

*Les corps sont modélisés par des tiges de longueur $l_i$, notées $S_i$ pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.*
*On donne $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_T$ des repères orthonormés directs attachés respectivement aux corps $S_0$ et $S_3$, voir figure 1.2. Le*

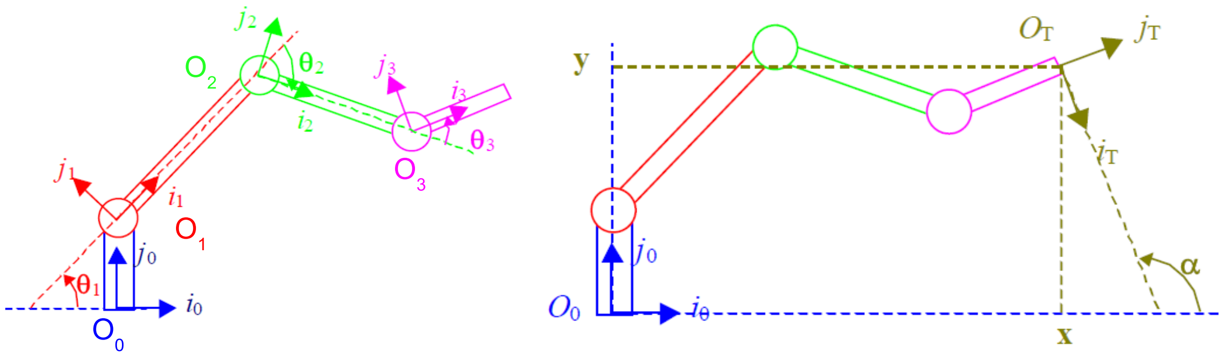



Figure 1.2 – Paramétrages articulaire et opérationnel

*vecteur $q$ des paramètres articulaires est défini par*

$$q = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{bmatrix}^T$$

*. Le corps terminal se déplace dans le plan $(O_0; \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0})$ donc 3 paramètres suffisent pour décrire sa position et son orientation. On choisit*

$$X = \begin{bmatrix} x & y & \alpha \end{bmatrix}^T \text{ avec } \begin{cases} x = \overrightarrow{O_0 O_T}.\overrightarrow{i_0} \\ y = \overrightarrow{O_0 O_T}.\overrightarrow{j_0} \\ \alpha = (\overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{i_T}) = (\overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{j_T}) \end{cases}$$

1. *Calculer le vecteur vitesse de rotation des corps $S_1/S_0$, $S_2/S_0$, $S_3/S_0$ en fonction des paramètres articulaires.*
2. *Calculer la vitesse de translation des corps $S_1/S_0$ en $O_1$, $S_2/S_0$ en $O_2$, $S_3/S_0$ en $O_3$ puis en $O_T$ en fonction des paramètres articulaires.*
3. *Déduire des questions précédentes la relation entre $\begin{bmatrix} \omega_z & V_{O_T x} & V_{O_T y} \end{bmatrix}^T = J_{O_T} \dot{q}$ où $\omega_z = \overrightarrow{\Omega}(S_3/S_0).\overrightarrow{k_0}$ et $\begin{bmatrix} V_{O_T x} & V_{O_T y} & V_{O_T z} \end{bmatrix}^T = {}^0\overrightarrow{V}(O_T \in S_3/S_0)$.*
4. *En supposant $q_1 = 0$ calculer le déterminant de la matrice $J_{O_T}$. A quels conditions la matrice est-elle inversible ? Dans quelles configurations se trouve le robot lorsque le déterminant est nul ?*

5. *Déterminer $J_p$ tel que $\begin{bmatrix}\dot{x} & \dot{y} & \dot{z} & \dot{\alpha}\end{bmatrix}^T = J_p\begin{bmatrix}\omega_z & V_{O_Tx} & V_{O_Ty} & V_{O_Tz}\end{bmatrix}^T$. En déduire $J_N$ tel que $\begin{bmatrix}\dot{x} & \dot{y} & \dot{z} & \dot{\alpha}\end{bmatrix}^T = J_n\dot{q}$.*

1. Le corps $S_1$ est en liaison pivot avec le corps $S_0$ d'angle $\theta_1$ autour de l'axe $(O_1, \overrightarrow{k_0})$ donc :

$$\overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0) = \dot{\theta}_1\overrightarrow{k_0}$$

Le corps $S_2$ est en liaison pivot avec le corps $S_1$ d'angle $\theta_2$ autour de l'axe $(O_2, \overrightarrow{k_0})$. Avec la composition de mouvement on a donc :

$$\overrightarrow{\Omega}(S_2/S_0) = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\overrightarrow{k_0}$$

Le corps $S_3$ est en liaison pivot avec le corps $S_2$ d'angle $\theta_3$ autour de l'axe $(O_3, \overrightarrow{k_3})$. Avec la composition de mouvement on a donc :

$$\overrightarrow{\Omega}(S_3/S_0) = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\overrightarrow{k_0}$$

2. Le corps $S_1$ est en liaison pivot avec le corps $S_0$ d'angle $\theta_1$ autour de l'axe $(O_1, \overrightarrow{k_0})$ donc :

$$\overrightarrow{V}(O_1 \in S_1/S_0) = \overrightarrow{0}$$

Le point $O_2$ appartient aux corps $S_1$ et $S_2$ donc avec la formule de Varignon (changement de point des torseurs) on a :

$$\overrightarrow{V}(O_2 \in S_1/S_0) = l_1\dot{\theta}_1\overrightarrow{j_1}$$

Le point $O_3$ appartient aux corps $S_3$ et $S_2$ donc avec la formule de Varignon on a :

$$\overrightarrow{V}(O_3 \in S_1/S_0) = l_1\dot{\theta}_1\overrightarrow{j_1} + l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\overrightarrow{j_2}$$

et en appliquant encore une fois la formule de Varignon on trouve :

$$\overrightarrow{V}(O_T \in S_3/S_0) = l_1\dot{\theta}_1\overrightarrow{j_1} + l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\overrightarrow{j_2} + l_3(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\overrightarrow{j_3}$$

3. En écrivant sous forme matricielle le résultat de la question précédente on a :

$$\begin{bmatrix}\omega_z \\ V_{O_Tx} \\ V_{O_Ty}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -l_1s1 - l_2s12 - l_3s123 & -l_2s12 - l_3s123 & -l_3s123 \\ l_1c1 + l_2c12 + l_3c123 & l_2c12 + l_3c123 & l_3c123 \end{bmatrix}\dot{q}$$

4. Si $q_1 = 0$ alors

$$J_{O_T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -l_2s2 - l_3s23 & -l_2s2 - l_3s23 & -l_3s23 \\ l_1 + l_2c2 + l_3c23 & l_2c2 + l_3c23 & l_3c23 \end{bmatrix}$$

Donc le déterminant est tel que

$$\det J_{O_T} = l_1l_2s2$$

La matrice est inversible si son déterminant est non nul donc si $\theta_2 \neq 0[\pi]$. Lorsque $\theta_2 = 0[\pi]$ le bras robotique est complètement tendu ou replié.

5. La vitesse du point $O_T$ par rapport à $S_0$ étant égale à la dérivée du vecteur position $O_0O_T$, on a de façon évidente :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{O_T x} \\ V_{O_T y} \\ V_{O_T z} \end{bmatrix}$$

Par ailleurs,

$$\overrightarrow{\Omega}(S_3/S_0) = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\overrightarrow{k_0} = \dot{\alpha}\overrightarrow{k_0}$$

d'où

$$\dot{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \dot{q}$$

On a donc :

$$J_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il reste à calculer $J_N = J_p J_{O_T}$

# Chapitre 2

## Modélisation cinématique directe

Le modèle cinématique est constitué des relations entre les vitesses de l'effecteur dans son mouvement par rapport à la base et les vitesse articulaires.
Comme pour les modèles géométriques, on parle de modèle cinématique direct lorsqu'on exprime les vitesses de l'effecteur en fonction des vitesses articulaires et de modèle cinématique inverse si les vitesses articulaires sont exprimées en fonction des vitesses de l'effecteur.

## 2.1 Rappels de mécanique générale

Tous les repères et toutes les bases sont supposés être orthonormés directs.

### 2.1.1 Vitesse instantanée d'un point géométrique

#### 2.1.1.1 Définition

La vitesse instantanée d'un point géométrique est directement la dérivée temporelle du vecteur position. La vitesse instantanée d'un point $P$ par rapport à un repère $\mathcal{R}_0 = (O_0; \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{k_0})$ s'écrit :

$$\overrightarrow{V}(P/\mathcal{R}_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \left( \frac{\overrightarrow{O_0P}(t+\Delta t) - \overrightarrow{O_0P}(t)}{\Delta t} \right) = \left. \frac{d}{dt}\overrightarrow{O_0P} \right]_{\mathcal{R}_0}$$

#### 2.1.1.2 Dérivation vectorielle

Soient un repère $\mathcal{R}_0 = (O_0; \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{k_0})$ et un vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i_0} + y\overrightarrow{j_0} + z\overrightarrow{k_0}$.
La dérivée du vecteur $\overrightarrow{u}$ par rapport au repère $\mathcal{R}_0$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{dt}\overrightarrow{u} \right]_{\mathcal{R}_0} &= \left. \frac{d}{dt} x\overrightarrow{i_0} + y\overrightarrow{j_0} + z\overrightarrow{k_0}) \right]_{\mathcal{R}_0} \\
&= \frac{dx}{dt}\overrightarrow{i_0} + x \left. \frac{d}{dt}\overrightarrow{i_0} \right]_{\mathcal{R}_0} + \frac{dy}{dt}\overrightarrow{j_0} + y \left. \frac{d}{dt}\overrightarrow{j_0} \right]_{\mathcal{R}_0} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{k_0} + z \left. \frac{d}{dt}\overrightarrow{k_0} \right]_{\mathcal{R}_0} \\
&= \dot{x}\overrightarrow{i_0} + x \left. \frac{d}{dt}\overrightarrow{i_0} \right]_{\mathcal{R}_0} + \dot{y}\overrightarrow{j_0} + y \left. \frac{d}{dt}\overrightarrow{j_0} \right]_{\mathcal{R}_0} + \dot{z}\overrightarrow{k_0} + z \left. \frac{d}{dt}\overrightarrow{k_0} \right]_{\mathcal{R}_0}
\end{aligned}$$

Or, on dérive en considérant le repère $\mathcal{R}_0$ fixe, les vecteurs $\overrightarrow{i_0}$, $\overrightarrow{j_0}$ et $\overrightarrow{k_0}$ sont donc constants au cours du temps. On obtient donc :

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{u}\bigg]_{\mathcal{R}_0} = \dot{x}\overrightarrow{i_0} + \dot{y}\overrightarrow{j_0} + \dot{z}\overrightarrow{k_0}$$

Supposons à présent qu'on ne connaisse pas les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans le repère $\mathcal{R}_0$ mais qu'on les connaisse dans le repère $\mathcal{R}_1 = (O_1; \overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1})$. On note $\overrightarrow{u} = x'\overrightarrow{i_1} + y'\overrightarrow{j_1} + z'\overrightarrow{k_1}$.

**Propriété 1** *Formule de Poisson :*
*Quelquesoient le vecteur $\overrightarrow{u}$ et les repères $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$, on peut écrire :*

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{u}\bigg]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{u}\bigg]_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{u}$$

*où $\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$ est appelé vecteur vitesse instantanée de rotation du repère $\mathcal{R}_1$ par rapport au repère $\mathcal{R}_0$.*

**Preuve 1** *On a alors :*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\overrightarrow{u}\bigg]_{\mathcal{R}_0} &= \dot{x'}\overrightarrow{i_1} + x'\,\frac{d}{dt}\overrightarrow{i_1}\bigg]_{\mathcal{R}_0} + \dot{y'}\overrightarrow{j_1} + y'\,\frac{d}{dt}\overrightarrow{j_1}\bigg]_{\mathcal{R}_0} + \dot{z'}\overrightarrow{k_1} + z'\,\frac{d}{dt}\overrightarrow{k_1}\bigg]_{\mathcal{R}_0} \\ &= \frac{d}{dt}\overrightarrow{u}\bigg]_{\mathcal{R}_1} + x'\,\frac{d}{dt}\overrightarrow{i_1}\bigg]_{\mathcal{R}_0} + +y'\,\frac{d}{dt}\overrightarrow{j_1}\bigg]_{\mathcal{R}_0} + z'\,\frac{d}{dt}\overrightarrow{k_1}\bigg]_{\mathcal{R}_0}\end{aligned}$$

*On dérive là encore en supposant que le repère fixe est $\mathcal{R}_0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{i_1}$, $\overrightarrow{j_1}$ et $\overrightarrow{k_1}$ ne sont pas constants au cours du temps. Il faut donc calculer leur dérivée. Ce qu'on va faire en écrivant le changement de base.*
*Supposons que la rotation pour passer du repère $\mathcal{R}_0$ au repère $\mathcal{R}_1$ soit décrite avec les angles d'Euler $\psi$, $\theta$ et $\phi$ selon la convention ZXZ. Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{i_1}$ est une fonction de ces trois angles qui dépendent eux-même du temps. On peut donc écrire :*

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{i_1}\bigg]_{\mathcal{R}_0} = \frac{\partial}{\partial\psi}\overrightarrow{i_1}\bigg]_{\mathcal{R}_0}.\dot{\psi} + \frac{d}{dt}\overrightarrow{i_1}\bigg]_{d\theta}\mathcal{R}_0.\dot{\theta} + \frac{d}{dt}\overrightarrow{i_1}\bigg]_{d\phi}\mathcal{R}_0.\dot{\phi}$$

*Or grâce aux angles d'Euler, on sait exprimer :*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{i_1} &= \cos\phi\,\overrightarrow{i} + \sin\phi\,\overrightarrow{j'} \\ &= \cos\phi\,\overrightarrow{i} + \sin\phi\cos\theta\,\overrightarrow{j} + \sin\phi\sin\theta\overrightarrow{k_0} \\ &= \cos\phi(\cos\psi\,\overrightarrow{i_0} + \sin\psi\,\overrightarrow{j_0}) + \sin\phi\cos\theta(\cos\phi\,\overrightarrow{j_0} - \sin\psi\,\overrightarrow{i_0}) + \sin\phi\sin\theta\overrightarrow{k_0}\end{aligned}$$

*En dérivant cette expression par rapport à $\psi$, on obtient :*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\psi}\overrightarrow{i_1}\bigg]_{\mathcal{R}_0} &= \cos\phi(-\sin\psi\,\overrightarrow{i_0} + \cos\psi\,\overrightarrow{j_0}) + \sin\phi\cos\theta(-\sin\phi\,\overrightarrow{j_0} - \cos\psi\,\overrightarrow{i_0}) \\ &= \cos\phi\,\overrightarrow{j} - \sin\phi\cos\theta\,\overrightarrow{u})\end{aligned}$$

*Or :*

$$\overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{i_1} = \overrightarrow{k_0} \wedge (\cos\phi\,\overrightarrow{i} + \sin\phi\,\overrightarrow{j'}) = \cos\phi\,\overrightarrow{j} - \sin\phi\cos\theta\,\overrightarrow{u}$$

*D'où :*

$$\left.\frac{\partial}{\partial\psi}\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{k_0}\wedge\overrightarrow{i_1}$$

*De même, on peut montrer que*

$$\left.\frac{\partial}{\partial\theta}\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{i_1}$$

*et*

$$\left.\frac{\partial}{\partial\phi}\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{k_1}\wedge\overrightarrow{i_1}$$

*On a donc montré que :*

$$\left.\frac{d}{dt}\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathcal{R}_0} = (\dot\psi\overrightarrow{k_0}+\dot\theta\overrightarrow{i}+\dot\phi\overrightarrow{k_1})\wedge\overrightarrow{i_1}$$

*On pourrait montrer aussi que :*

$$\left.\frac{d}{dt}\overrightarrow{j_1}\right]_{\mathcal{R}_0} = (\dot\psi\overrightarrow{k_0}+\dot\theta\overrightarrow{i}+\dot\phi\overrightarrow{k_1})\wedge\overrightarrow{j_1}$$

$$\left.\frac{d}{dt}\overrightarrow{k_1}\right]_{\mathcal{R}_0} = (\dot\psi\overrightarrow{k_0}+\dot\theta\overrightarrow{i}+\dot\phi\overrightarrow{k_1})\wedge\overrightarrow{k_1}$$

*Enfin, on trouve :*

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\overrightarrow{u}\right]_{\mathcal{R}_0} &= \left.\frac{d}{dt}\overrightarrow{u}\right]_{\mathcal{R}_1} + x'\left.\frac{d}{dt}\overrightarrow{i_1}\right]_{\mathcal{R}_0} + +y'\left.\frac{d}{dt}\overrightarrow{j_1}\right]_{\mathcal{R}_0} + z'\left.\frac{d}{dt}\overrightarrow{k_1}\right]_{\mathcal{R}_0}\\
&= \left.\frac{d}{dt}\overrightarrow{u}\right]_{\mathcal{R}_1} + (\dot\psi\overrightarrow{k_0}+\dot\theta\overrightarrow{i}+\dot\phi\overrightarrow{k_1})\wedge(x'\overrightarrow{i_1}+y'\overrightarrow{j_1}+z'\overrightarrow{k_1})\\
&= \left.\frac{d}{dt}\overrightarrow{u}\right]_{\mathcal{R}_1} + (\dot\psi\overrightarrow{k_0}+\dot\theta\overrightarrow{i}+\dot\phi\overrightarrow{k_1})\wedge\overrightarrow{u}\\
&= \left.\frac{d}{dt}\overrightarrow{u}\right]_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)\wedge\overrightarrow{u}
\end{aligned}$$

### 2.1.2 Vecteur vitesse instantanée de rotation

On vient d'introduire le vecteur vitesse instantanée de rotation. On a vu son expression lorsqu'on paramètre l'orientation par les angles d'Euler avec la convention ZXZ.

$$\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = (\dot\psi\overrightarrow{k_0}+\dot\theta\overrightarrow{i}+\dot\phi\overrightarrow{k_1})$$

On voit que le vecteur $\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$ dépend des dérivées temporelles des angles permettant de changer de repère, d'où son nom de vitesse instantanée de rotation du repère $\mathcal{R}_1$ par rapport au repère $\mathcal{R}_0$.
De façon générale, ce vecteur est :
– porté par l'axe autour duquel le solide tourne. C'est l'axe de rotation.
– de norme égale à la dérivée temporelle de l'angle de rotation.
Attention, l'axe de rotation n'est pas constant en général. Il est défini instantanément.
Par ailleurs, on peut montrer facilement la relation de Chasle :

$$\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2) + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0) \qquad \forall\mathcal{R}_2$$

### 2.1.3 Vitesse instantannée d'un point matériel

On parle de vitesse d'un point matériel $A$ par rapport à un repère $\mathcal{R}_0$ lorsqu'on s'interesse à la vitesse du point qui appartient au solide $S_1$ et qui a l'instant considéré coïncide avec le point géométrique $A$.
Lorsqu'on s'interesse à la vitesse d'un point matériel $A$, on considère que le point $A$ est entrainé par le mouvement du solide. Sa vitesse est donc celle que vous connaissez sous le nom de vitesse d'entrainement. Elle s'écrit comme la différence de la vitesse du point géométrique par rapport au repère fixe et la vitesse du point géométrique par rapport au solide :

$$\underbrace{\overrightarrow{V}(A \in S_1/\mathcal{R}_0)}_{\text{vitesse d'entrainement}} = \underbrace{\overrightarrow{V}(A/\mathcal{R}_0)}_{\text{vitesse absolue}} - \underbrace{\overrightarrow{V}(A/S_1)}_{\text{vitesse relative}}$$

$\overrightarrow{V}(A \in S_1/\mathcal{R}_0)$ se lit « vitesse exprimée en $A$ du solide $S_1$ en mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}_0$ », ou « vitesse du point $A$ appartenant au solide $S_1$ en mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}_0$ ».
On peut noter que si le point $A$ est un point qui appartient physiquement au solide $S_1$ alors sa vitesse par rapport au solide est nulle. En effet, la distance entre deux points d'un même solide est constante. On trouve alors :

$$\overrightarrow{V}(A \in S_1/\mathcal{R}_0) = \overrightarrow{V}(A/\mathcal{R}_0)$$

#### 2.1.3.1 Formule de changement de point

Si on connait la vitesse de rotation et la vitesse d'un point $A$ d'un solide $S_1$ dans son mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}_0$ alors on connait la vitesse du solide en n'importe quel point grâce à la formule de changement de point (ou formule de Varignon) :

$$\overrightarrow{V}(B \in S_1/\mathcal{R}_0) = \overrightarrow{V}(A \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$$

**Preuve 2** *Soient 2 points $A$ et $B$, un solide $S_0$ en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}_0$. On attache un repère $\mathcal{R}_1$ au solide $S_1$. On peut alors écrire la vitesse exprimée en $A$ du solide $S_1$ en mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}_0$ :*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V}(B \in S_1/\mathcal{R}_0) = \overrightarrow{V}(B/\mathcal{R}_0) - \overrightarrow{V}(B/S_1) &= \overrightarrow{V}(B/\mathcal{R}_0) - \overrightarrow{V}(B/\mathcal{R}_1) \\
&= \frac{d}{dt}\overrightarrow{O_0B}\bigg]_{\mathcal{R}_0} - \frac{d}{dt}\overrightarrow{O_1B}\bigg]_{\mathcal{R}_1} \\
&= \frac{d}{dt}\overrightarrow{O_0A}\bigg]_{\mathcal{R}_0} + \frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\bigg]_{\mathcal{R}_0} - \frac{d}{dt}\overrightarrow{O_1A}\bigg]_{\mathcal{R}_1} - \frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\bigg]_{\mathcal{R}_1} \\
&= \overrightarrow{V}(A/\mathcal{R}_0) + \frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\bigg]_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{V}(A/S_1) - \frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\bigg]_{\mathcal{R}_1} \\
&= \overrightarrow{V}(A/\mathcal{R}_0) + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{V}(A/S_1) \\
&= \overrightarrow{V}(A \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{AB} \\
&= \overrightarrow{V}(A \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)
\end{aligned}$$

### 2.1.4 Torseur cinématique

On a donc montré que pour caractériser la vitesse d'un solide $S_1$ par rapport à un repère $\mathcal{R}_0$, il suffit de connaitre deux vecteurs : la vitesse d'un de ses points et sa vitesse de rotation.

Ces deux vecteurs sont regroupés dans un bi-vecteur appelé torseur cinématique et noté :

$$\mathcal{V}(S_1/\mathcal{R}_0) = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega}(S_1/\mathcal{R}_0) \\ \overrightarrow{V}(A \in S_1/\mathcal{R}_0) \end{array} \right\}_A$$

Les torseurs sont des objets mathématiques permettant de représenter sous la forme de deux vecteurs les champs de vecteurs équiprojectifs. La théorie des torseurs est un champ mathématique très important. Pour ce qui nous concerne on se contentera de savoir qu'un torseur exprimé en un point $A$ est un bi-vecteur :

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\mathcal{R}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(A) \end{array} \right\}_A$$

tel que :

- $\overrightarrow{\mathcal{R}}$ est appelé résultante. C'est un vecteur constant et indépendant du point auquel est exprimé le torseur.
- $\overrightarrow{\mathcal{M}}(A)$ est appelé moment en $A$. C'est un vecteur qui dépend du point.
- La formule de changement de point s'écrit : $\overrightarrow{\mathcal{M}}(B) = \overrightarrow{\mathcal{M}}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R}}$ (formule de BABAR)

### 2.1.5 Composition de mouvement

La composition de mouvement est une relation de Chasle, elle donne :

$$\forall\ \mathcal{R}_0,\ \mathcal{R}_1,\ \mathcal{R}_2 \qquad\qquad \mathcal{V}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0) = \mathcal{V}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) + \mathcal{V}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0) = \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \\ \overrightarrow{V}(A \in \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0) \ = \ \overrightarrow{V}(A \in \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) \ + \ \overrightarrow{V}(A \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \end{array} \right.$$

## 2.2 Modèle cinématique d'un robot série

### 2.2.1 Torseur géométrique

#### 2.2.1.1 Torseur à résultante non nulle

Soit un torseur de résultante non nulle :

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\mathcal{R}} = R\overrightarrow{r} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(P) \end{array} \right\}_P$$

L'axe central d'un torseur est l'ensemble des points $A$ tel que le moment en $A$ soit colinéaire avec la résultante du torseur :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(A) = \lambda\overrightarrow{\mathcal{R}}$$

On peut donc écrire tout torseur dont la résultante est non nulle sous la forme :

$$\mathcal{T} = R\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{r} \\ \lambda\overrightarrow{r} + \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{r} \end{array} \right\}_P$$

On appelle torseur géométrique le torseur noté \$ tel que :

$$\mathcal{T} = R\$$$

Soit :

$$\$ = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{r} \\ \lambda \overrightarrow{r} + \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{r} \end{array} \right\}_P$$

On appelle ce torseur « torseur géométrique » car il définit une droite : la résultante correspond à la direction et le moment aux coordonnées d'un point de la droite.

#### 2.2.1.2 Torseur à résultante nulle

De façon évidente, il n'y a pas d'axe central pour un torseur à résultante nulle.
Cependant, on peut étendre la notion de torseur géométrique aux torseurs à résultante nulle.
Soit un torseur de résultante nulle :

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{M}(P) \end{array} \right\}_P = R \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{r} \end{array} \right\}_P$$

Par définition, le torseur géométrique est tel que $\mathcal{T} = R\$$.
Le torseur géométrique d'un torseur de résultante nulle s'écrit donc :

$$\$ = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{r} \end{array} \right\}_P$$

#### 2.2.1.3 Ecriture générale

On introduit $\delta$ tel que :
– si le torseur est un couple alors $\delta = 0$
– sinon $\delta = 1$
Soit un torseur :

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\mathcal{R}} = \delta R \overrightarrow{r} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(P) \end{array} \right\}_P$$

Le torseur géométrique qui lui est associé s'écrit :

$$\$ = \left\{ \begin{array}{c} \delta \overrightarrow{r} \\ \lambda \overrightarrow{r} + \delta \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{r} \end{array} \right\}_P$$

#### 2.2.1.4 Interprétation géométrique

Pour interpréter le torseur géométrique, on regarde les lignes de champs du champ de moment. Les lignes de champ sont en première approximation, le chemin que l'on suivrait en partant d'un point et en suivant les vecteurs du champ de moment.

**si le torseur est un glisseur** alors le moment est nul sur son axe central ($\lambda = 0$) et le torseur géométrique s'écrit :

$$\$ = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{r} \\ \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{r} \end{array} \right\}_P$$

Les lignes de champ sont donc des cercles de rayon $||\overrightarrow{PA}||$ et d'axe $(A, \overrightarrow{r})$.

**si le torseur est un couple** alors sa résultante est nulle et le torseur géométrique s'écrit :

$$\$ = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{r} \end{array} \right\}_P$$

avec $\overrightarrow{M}(P) = \lambda \overrightarrow{r} + \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{M}(P) = \overrightarrow{\text{cte}}\ \forall\ P$.

Les lignes de champs sont des droites parallèles à $\overrightarrow{M}(P)$.

**si le torseur est quelconque** le torseur géométrique s'écrit :

$$\$ = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{r} \\ \lambda \overrightarrow{r} + \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{r} \end{array} \right\}_P$$

Les lignes de champ sont donc des hélices circulaires de rayon $||\overrightarrow{PA}||$, d'axe $(A, \overrightarrow{r})$, de pas $\lambda$.

### 2.2.2 Vitesse entre deux corps successifs

Dans les systèmes étudiés, les liaisons entre deux corps sont des pivots ou des glissières. De plus, avec la convention Denavit Hartenberg, l'axe de la liaison entre le corps $S_{i-1}$ et $S_i$ est toujours $(O_i, \overrightarrow{k_i})$.

La liaison glissière permet un mouvement de translation le long de son axe. La variable articulaire est donc une longueur $q_i = d_i$ selon la convention Denavit-Hartenberg. Le torseur cinématique s'écrit alors :

$$\mathcal{V}(S_i/S_{i-1}) = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \dot{q}_i \overrightarrow{k_i} \end{array} \right\}_{O_i}$$

La liaison pivot permet un mouvement de rotation autour de son axe. La variable articulaire est donc un angle $q_i = \theta_i$ selon la convention Denavit-Hartenberg. Le torseur cinématique s'écrit alors :

$$\mathcal{V}(S_i/S_{i-1}) = \left\{ \begin{array}{c} \dot{q}_i \overrightarrow{k_i} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{O_i}$$

On introduit $\delta_i$ tel que :

- si la liaison $i$ est une liaison pivot alors $\delta_i = 1$
- si la liaison $i$ est une liaison glissière alors $\delta_i = 0$

Le torseur cinématique entre deux corps successifs s'écrit alors :

$$\mathcal{V}(S_i/S_{i-1}) = \left\{ \begin{array}{c} \delta_i \dot{q}_i \overrightarrow{k_i} \\ (1-\delta_i)\, \dot{q}_i \overrightarrow{k_i} \end{array} \right\}_{O_i} = \left\{ \begin{array}{c} \delta_i \dot{q}_i \overrightarrow{k_i} \\ (1-\delta_i)\, \dot{q}_i \overrightarrow{k_i} + \delta_i \dot{q}_i \overrightarrow{k_i} \wedge \overrightarrow{O_i P} \end{array} \right\}_P$$

On peut aussi l'écrire en fonction des torseur géométrique :

$$\mathcal{V}(S_i/S_{i-1}) = \dot{q}_i \$(S_i/S_{i-1})$$

avec :

$$\$(S_i/S_{i-1}) = \left\{ \begin{array}{c} \delta_i \overrightarrow{k_i} \\ (1-\delta_i)\,\overrightarrow{k_i} + \delta_i \overrightarrow{k_i} \wedge \overrightarrow{O_i P} \end{array} \right\}_P$$

Le torseur cinématique entre deux corps successifs s'écrit donc directement à partir de la description géométrique de l'axe de la liaison : la résultante est le vecteur directeur de l'axe de la liaison et le moment se calcule à partir des coordonnées d'un point de cet axe.

#### 2.2.2.1 Interprétation géométrique

Le torseur géométrique représente la direction du mouvement instantannée :
- Si la liaison entre les corps est une liaison pivot, le torseur géométrique est un glisseur et les lignes de champ sont des cercles d'axes $(O_i, \overrightarrow{k_i})$. On retrouve bien un mouvement de rotation autour de l'axe de la liaison.
- Si la liaison entre les corps est une liaison glissière, le torseur géométrique est un couple et les lignes de champ sont des droites colinéaire à l'axe $(O_i, \overrightarrow{k_i})$. On retrouve bien un mouvement de translation le long de l'axe.

### 2.2.3 Composition des vitesses

D'après les lois de composition des vitesses on a :

$$\mathcal{V}(S_n/S_0) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{V}(S_i/S_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \$(S_i/S_{i-1})$$

### 2.2.4 Jacobien naturel et modèle cinématique direct

En écrivant la relation précédente au point $P$ sous une forme matricielle dans la base $\mathcal{B}_j$ on a :

$$\underbrace{{}^j\mathcal{V}(S_n/S_0)}_{{}^jV_P} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^j\$(S_1/S_0) & \cdots & {}^j\$(S_i/S_{i-1}) & \cdots & {}^j\$(S_n/S_{n-1}) \end{bmatrix}}_{{}^jJ_P(q)} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_i \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}}_{\dot{q}}$$

où $P$ est le point auquel est exprimé le torseur cinématique du corps $S_n$ par rapport au corps $S_0$ ; $J_P(q)$ est appelé jacobien naturel.
La relation matricielle :

$${}^0V_P =^0 J_P(q)\dot{q}$$

est appelé modèle cinématique direct.
La i$^{\text{ème}}$ colonne du jacobien naturel s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \delta_i\ {}^0k_i \\ (1-\delta_i)^0\,k_i + \delta_i^0 k_i \wedge^0 O_i P \end{bmatrix}$$

Pour simplifier la notation, on pourra ommettre l'indication de base lorsqu'on parle de modèle cinématique direct car il est toujours exprimé dans le base $\mathcal{B}_0$ :

$$V_P = J_P(q)\dot{q}$$

On peut noter que le jacobien naturel dépend du point auquel on écrit le modèle cinématique.
Lorsqu'on connait les matrices de transformation homogène, l'écriture du jacobien est immédiate :
- le terme ${}^0k_i$ correspond aux 3 premières lignes de la troisième colonne de la matrice $T_{0\to i}$ ;
- le terme ${}^0O_iP = -{}^0O_0O_i +^0 O_0P$ avec ${}^0O_0O_i$ et ${}^0O_0P$ correspondant respectivement aux 3 premières lignes de la dernière colonne des matrices $T_{0\to i}$ et $T_{0\to P}$.

# Chapitre 3

## Modélisation cinématique inverse

Le modèle cinématique inverse est constitué, lorsqu'il existe, des relations permettant d'exprimer les vitesses articulaires en fonction des vitesses de l'effecteur dans son mouvement par rapport à la base.

## 3.1 Cas général

Le modèle cinématique inverse s'obtient par inversion du jacobien naturel (lorsqu'il est inversible) :

$$\text{s'}\exists \;\; J_P^{-1} \qquad \dot{q} = J_P^{-1}(q)V_P$$

Le jacobien naturel n'est pas inversible si :

- le jacobien naturel est carré mais son déterminant est nul. On dit que le robot est en configuration singulière. On peut noter que si l'espace opérationnel (celui dans lequel évoule l'effecteur) est l'espace 3D alors le nombre de degré de liberté du robot est $n = 6$, si c'est le plan alors $n = 3$ et on ne considère pas le torseur cinématique complet mais seulement les 2 vitesses de translation dans le plan et la vitesse de rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan.
- le jacobien naturel n'est pas carré. Si $n$ est supérieur à la dimension de l'espace opérationnel alors le robot est redondant : on peut bouger les corps intermédiaires du robot sans modifier la position et l'orientation du corps terminal par rapport à la base. Si $n$ est inférieur à la dimension de l'espace opérationnel alors le robot est contraint : on ne peut pas produire tous les mouvements de l'espace opérationnel.

Si le jacobien naturel n'est pas inversible, alors on ne peut pas trouver une combinaison des vitesses articulaires permettant de produire la vitesse désirée de l'effecteur.

## 3.2 Configuration singulière

On parle de singularité lorsque le déterminant du jacobien naturel est nul. Si le déterminant du jacobien est nul alors soit ses lignes soit ses colonnes ne sont pas linéairement indépendantes.
Si les lignes du jacobien ne sont pas linéairement indépendantes, alors les composantes du

vecteur de vitesses opérationnelles ne sont pas indépendantes.
Si les colonnes du jacobien ne sont pas linéairement indépendantes, alors les composantes du vecteur de vitesses articulaires ne sont pas indépendantes. Il y a alors des vitesses opérationnelles que le robot ne peut plus produire : il n'y a pas de combinaison des vitesses articulaires permettant de produire ces vitesses opérationnelles. Les configurations singulières entrainent donc une perte de mobilité.

### 3.2.1 Exercice

**Poignet d'un robot industriel** *Très souvent les robots industriels sont constitués de 6 liaisons pivots motorisées disposée de façon à ce que les 3 premiers axes permettent de positionner un point du corps terminal et que les 3 derniers axes permettent d'orienter le corps terminal. Les 3 premiers axes forment ce qu'on appelle le porteur, tandis que les 3 derniers axes forment le poignet.*
*Le système à étudier comporte quatre solides :*

- *un solide $S_3$ auquel est attaché un repère orthonormé direct $\mathcal{R}_3 = (O_3; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ ;*
- *un solide $S_4$ auquel est attaché un repère orthonormé direct $\mathcal{R}_4 = (O_3; \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4 = \vec{z}_3)$, en liaison pivot d'axe $(O_3, \vec{z}_4)$ avec $S_3$, paramétrée par l'angle $\theta_4 = \widehat{(\vec{x}_3, \vec{x}_4)} = \widehat{(\vec{y}_3, \vec{y}_4)}$ mesuré autour de $\vec{z}_4$ ;*
- *un solide $S_5$ auquel est attaché un repère orthonormé direct $\mathcal{R}_5 = (O_3; \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5 = \vec{x}_4)$, en liaison pivot d'axe $(O_3, \vec{z}_5)$ avec $S_4$, paramétrée par l'angle $\theta_5 = \widehat{(\vec{y}_4, \vec{x}_5)} = \widehat{(\vec{z}_4, \vec{y}_5)}$ mesuré autour de $\vec{z}_5$ ;*
- *un solide $S_6$ auquel est attaché un repère orthonormé direct $\mathcal{R}_6 = (O_3; \vec{x}_6, \vec{y}_6, \vec{z}_6 = \vec{y}_5)$, en liaison pivot d'axe $(O_3, \vec{z}_6)$ avec $S_5$, paramétrée par l'angle $\theta_6 = \widehat{(\vec{x}_5, \vec{y}_6)} = \widehat{(\vec{z}_5, \vec{x}_6)}$ mesuré autour de $\vec{z}_6$.*

1. *Donner $\vec{\Omega}(S_6/S_3)$, vitesse de rotation de $S_6$ par rapport à $S_3$, en fonction de $\dot{\theta}_4$, $\dot{\theta}_5$ et $\dot{\theta}_6$, sans projeter ses composantes dans une base particulière.*
2. *Lorsque l'on commande la vitesse de rotation de $S_6$ par rapport à $S_3$, on cherche à trouver les vitesses articulaires $\dot{\theta}_4$, $\dot{\theta}_5$ et $\dot{\theta}_6$ pour obtenir un $\vec{\Omega}(S_6/S_3)$ désiré. A partir de l'équation précédente, dire quelle est la condition sur $\vec{z}_4$, $\vec{z}_5$ et $\vec{z}_6$ pour qu'il existe toujours (c'est-à-dire $\forall \vec{\Omega}(S_6/S_3)$) une solution à ce problème.*
   *Qu'en est-il lorsque $\theta_5 = 0$ ?*
3. *Donner les composantes $\Omega_x$, $\Omega_y$ et $\Omega_z$ de $\vec{\Omega}(S_6/S_3)$ dans la base $(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$. Ecrire l'équation précédente sous la forme matricielle ci-dessous :*

$$\begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_6 \end{bmatrix}$$

   *Que sont les colonnes de la matrice **J** ? A quelle condition la matrice **J** est inversible ?*

## 3.3 Robot redondant

Un robot redondant est un robot qui a un nombre de degré de liberté supérieur à la dimension de l'espace opérationnel. Il a alors plus de mouvements articulaires que l'effecteur n'a de

mouvement par rapport à sa base : il est possible de modifier la configuration articulaire sans produire de mouvement de l'effecteur. On parle de mouvements internes.
Pour ces dispositifs, le jacobien naturel n'est pas carré :

$$\underbrace{V_P}_{(m,1)} = \underbrace{J_P(q)}_{(m,n)} \underbrace{\dot{q}}_{(n,1)}$$

avec $n > 6$ le nombre de paramètres articulaires ; $m$ la dimension de l'espace opérationnel ($m = 6$ dans l'espace 3D et $m = 3$ dans le plan).
On ne peut pas obtenir le modèle cinématique inverse par inversion du jacobien naturel : du fait des mouvements internes, il y a une infinité de solutions.
Pour résoudre le problème inverse, on utilise la notion de matrice pseudo-inverse à droite définie par :

$$J^+ = J^T(JJ^T)^{-1}$$

On vérifie facilement que $JJ^+ = I_d$.
Attention : $J^+J \neq I_d$.
On peut aussi remarquer que si $m = n$ alors $J^+ = J^{-1}$.
Le modèle cinématique inverse s'écrit alors :

$$\dot{q} = J_P^+(q)V_P + \left(I_d - J_P^+(q)J_P\right)\xi \qquad \xi \text{ vecteur arbitraire.}$$

On peut vérifier que c'est bien une solution du problème inverse :

$$\begin{aligned} V_P = J_P(q)\dot{q} &= J_P(q)\left(J_P^+(q)V_P + \left(I_d - J_P^+(q)J_P(q)\right)\xi\right) \\ &= J_P(q)J_P^+(q)V_P + J_P(q)\left(I_d - J_P^+(q)J_P(q)\right)\xi \\ &= V_P + \left(J_P(q) - J_P(q)J_P^+(q)J_P(q)\right)\xi \\ &= V_P + \left(J_P(q) - J_P(q)\right)\xi \\ &= V_P \end{aligned}$$

Le terme $\left(I_d - J_P^+(q)J_P(q)\right)\xi$ est appelé terme d'optimisation.
C'est la solution au problème homogène $J_P(q)\dot{q} = 0$. C'est donc un terme qui ne perturbe pas la vitesse de l'effecteur. On peut alors choisir $\xi$ de façon à optimiser certains critères comme l'éloigement des butées, la maximisation de la manipulabilité...
Bien souvent, on prend $\xi = 0$. Cette solution est la solution au sens des moindres carrés (c'est-à-dire celle qui minimise $||V_P - J_P(q)\dot{q}||$, ici la valeur minimale est 0 car la solution existe) qui minimise la norme de $\dot{q}$.
Remarque : Pour calculer la pseudo-inverse, il faut vérifier que $J_P(q)J_P^T(q)$ est inversible, donc que son déterminant est non nul. Là encore, si le système est en configuration singulière, il est impossible de trouver une solution au problème inverse.

## 3.4 Robot contraint

Lorsque le nombre de degré de liberté du robot est inférieur à la dimension de l'espace opérationnel (donc $n < 3$ dans le plan ou $n < 6$ dans l'espace) on parle de robot contraint.
On ne peut jamais commander complètement le torseur cinématique $V_P$. Si on forme un vecteur $V_{Pr}$ réduit à partir de $n$ composantes indépendantes du torseur cinématique, on peut écrire un modèle cinématique direct faisant intervenir un jacobien $J_{Pr}$ réduit constitué des $n$ lignes du jacobien complet $J_P$ correspondants aux composantes sélectionnées du torseur cinématique. On a alors :

$$V_{Pr} = J_{Pr}\dot{q}$$

Comme $J_{Pr}$ est carrée, l'inversion s'écrit :

$$\dot{q} = J_{Pr}^{-1} V_{Pr}$$

Même si en général $\det J_{Pr} \neq 0$, il peut y avoir des configurations singulières qui empêchent donc d'inverser le jacobien.
Une autre solution (beaucoup moins utilisée) consiste à utiliser une pseudo-inverse à gauche :

$$J^{+} = (J^{T} J)^{-1} J^{T}$$

On vérifie facilement que $J^{+}J = I_d$.
Attention : $JJ^{+} \neq I_d$.
On peut aussi remarquer que si $m = n$ alors $J^{+} = J^{-1}$.
Le modèle cinématique inverse s'écrit alors :

$$\dot{q} = J_P^{+}(q) V_P + \left(I_d - J_P^{+}(q) J_P\right) \xi \qquad \xi \text{ vecteur arbitraire.}$$

De même que pour les robots redondants, le terme $J_P^{+}(q)V_P$ est la solution au sens des moindres carrés, c'est-à-dire que c'est la solution qui minimise $||V_P - J_P(q)\dot{q}||$. Contrairement aux robots redondants, la valeur minimale de $||V_P - J_P(q)\dot{q}||$ n'est pas nulle car il n'y a pas de solution au problème, (sauf cas particulier).

# Chapitre 4

## Lien avec le paramètrage opérationnel

Lorsqu'on planifie une trajectoire, on définit une succession de positions et orientations du corps terminal, donc $X(t)$.
Il peut être intéressant pour réaliser cette trajectoire de connaitre la relation entre $\dot{X}$ et $\dot{q}$ plutôt qu'entre $V_P$ et $\dot{q}$. On peut établir la relation entre $\dot{X}$ et $\dot{q}$ de deux façons :
- à partir du modèle géométrique direct $X = f(q)$.
- à partir du modèle cinématique $V_P = J_P\dot{q}$, en calculant la relation entre $\dot{X}$ et $V_P$.

## 4.1 A partir du modèle géométrique direct

En dérivant le modèle géométrique direct on a directement :

$$\dot{X} = J_X\dot{q}$$

avec $J_X$ la matrice jacobienne de la fonction $X = f(q)$ :

$$J_{X_{ij}} = \frac{\partial f_i(q)}{\partial q_j}$$

C'est un calcul relativement simple pour les systèmes à 2 ou 3 degrés de liberté mais qui devient fastidieux pour les systèmes à plus de mobilité. Il est à noté que $J_X$ dépend bien évidemment du paramètrage opérationnel choisi.

## 4.2 A partir du modèle cinématique direct

Si on connait la relation $V_P = J_P\dot{q}$, il suffit d'établir la relation entre $\dot{X}$ et $V_P$ pour connaitre la relation entre $\dot{X}$ et $\dot{q}$.
Il est évident que la relation entre $\dot{X}$ et $V_P$ dépend du paramètrage opérationnel choisit. Il faudra donc établir cette relation pour chaque type de vecteur $X$. Pour cela, on distingue les paramètres d'orientations et de positions.

### 4.2.1 Paramètres d'orientation

De façon évidente, les paramètres d'orientations sont indépendants de la vitesse de translation. Il suffit donc de relier les dérivées des paramètres d'orientations $\dot{p}_R$ au vecteur vitesse de rotation $\overrightarrow{\Omega}(S_n/S_0)$. On procède par identification entre les composantes de ${}^0\Omega(S_n/S_0)$ et les paramètres $\dot{p}_R$.

#### 4.2.1.1 Exemple : Euler convention XYZ

Soit $p_R = \begin{bmatrix} r_x & r_y & r_z \end{bmatrix}^T$ le paramètrage d'orientation par les angles $(r_x, r_y, r_z)$ selon la convention XYZ. Le vecteurs vitesse de rotation s'écrit alors :

$$\overrightarrow{\Omega}(Sn/S_0) = \dot{r_x}\overrightarrow{x_0} + \dot{r_y}\overrightarrow{y} + \dot{r_z}\overrightarrow{z_n}$$

En projetant dans la base $\mathcal{B}_0$ on trouve :

$$\overrightarrow{\Omega}(S_n/S_0) = (\dot{r_x} + \dot{r_z}\sin r_y)\,\overrightarrow{x_0} + (\dot{r_y}\cos r_x - \dot{r_z}\sin r_x\cos r_y)\,\overrightarrow{y_0} + (\dot{r_y}\sin r_x + \dot{r_z}\cos r_x\cos r_y)\,\overrightarrow{z_0}$$

Or dans le base $\mathcal{B}_0$ il s'écrit :

$$\overrightarrow{\Omega}(S_n/S_0) = \omega_x\overrightarrow{x_0} + \omega_y\overrightarrow{y_0} + \omega_z\overrightarrow{z_0}$$

D'où les relations suivantes (si $c_y \neq 0$) :

$$\left\{\begin{array}{l} \omega_x = \dot{r}_x + \dot{r}_z s_y \\ \omega_y = \dot{r}_y c_x - \dot{r}_z c_y s_x \\ \omega_z = \dot{r}_y s_x + \dot{r}_z c_y c_x \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \dot{r}_x = \omega_x - \omega_z\dfrac{c_x s_x}{c_y} + \omega_y\dfrac{s_x s_y}{c_y} \\ \dot{r}_y = \omega_y c_x + \omega_z s_x \\ \dot{r}_z = \omega_z\dfrac{c_x}{c_y} - \omega_y\dfrac{s_x}{c_y} \end{array}\right.$$

Soit sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \\ \dot{r}_z \end{bmatrix}}_{\dot{p}_r} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{s_x s_y}{c_y} & -\dfrac{c_x s_y}{c_y} \\ 0 & c_x & s_x \\ 0 & -\dfrac{s_x}{c_y} & \dfrac{c_x}{c_y} \end{bmatrix}}_{J_r} \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}}_{\Omega}$$

La matrice $J_r$ est appelée jacobien du paramétrage de l'orientation. Cette matrice est à recalculer pour chaque paramétrage de l'orientation. Pour tout paramètrage de l'orientation, on peut écrire :

$$\dot{p}_r = \begin{bmatrix} J_r & 0_{3x3} \end{bmatrix} V_M$$

### 4.2.2 Paramètres de position

Les paramètres de position sont les coordonnées cartésiennes d'un point $P$ du solide $S_n$ exprimée dans le repère $\mathcal{R}_0$. Or on a :

$$\overrightarrow{V}(P \in S_n/\mathcal{R}_0) = \left.\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_0P}\right]_{\mathcal{R}_0}$$

$$\Rightarrow^0 V(P \in S_n/\mathcal{R}_0) = \frac{d}{dt}{}^0 O_0P\Big| = \dot{p}_T$$

Le modèle cinématique est calculé au point $M$, on doit donc utiliser la formule de varignon :

$$\overrightarrow{V}(P \in S_n/\mathcal{R}_0) = \overrightarrow{V}(M \in S_n/\mathcal{R}_0) + \overrightarrow{\Omega}(S_n/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{MP}$$

Soit sous forme matricielle :

$$\dot{p}_T = \begin{bmatrix} \left[{}^0PM\right]_X & I_{3x3} \end{bmatrix} V_M = J_T V_M$$

où $J_T$ est appelé jacobien du paramétrage de la position.

### 4.2.3 Relation entre $\dot{X}$ et $\dot{q}$

On vient d"'établir que

$$\dot{p}_r = \begin{bmatrix} J_r & 0_{3x3} \end{bmatrix} V_M$$

et que :

$$\dot{p}_T = \begin{bmatrix} \left[{}^0PM\right]_X & I_{3x3} \end{bmatrix} V_M = J_T V_M$$

D'où :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{p}_r \\ \dot{p}_T \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} J_r & 0_{3x3} \\ \left[{}^0PM\right]_X & I_{3x3} \end{bmatrix}}_{J_p} V_M = \underbrace{J_p J_M}_{J_X} \dot{q} = J_X \dot{q}$$

On retrouve la même expression que par dérivation du modèle géométrique.

# Chapitre 5

## Analyse de la transmission des vitesses et des efforts

### 5.1 Analyse de la transmission des vitesses

#### 5.1.1 Décomposition en valeurs singulières

**Définition 1** *Toute matrice $J(m,n)$ de rang $r$ peut se décomposer en un produit de 3 matrices telles que :*

$$J = G\Sigma D^T$$

*où* $\left\{\begin{array}{l} D(m,m) \text{ et } G(n,n) \text{ sont des matrices orthogonales : } DD^T = I_d \quad GG^T = I_d \\ \Sigma(m,n) \text{ est une matrice diagonale d'éléments positifs ou nuls} \end{array}\right.$ .

*Les éléments diagonaux de $\Sigma$ sont appelés valeurs singulières de $J$.*

Par convention, les éléments diagonaux de $\Sigma$ sont rangés dans la matrice par ordre décroissant. La matrice $\Sigma$ a alors la forme suivante :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} S(r,r) & 0(n-r,n-r) \\ 0(m-r,r) & 0(m-r,n-r) \end{bmatrix}$$

où $S$ regroupe les éléments diagonaux non-nuls de $\Sigma$.

**Propriété 2** *Les valeurs singulières d'une matrice $J$ sont les racines carrées des valeurs propres de $JJ^T$ qui sont les même que celles de $J^TJ$.*
*Les vecteurs colonnes des matrices $G$ et $D$ sont les vecteurs propres de $JJ^T$ et $J^TJ$ respectivement.*

**Preuve 3** *Soit $J = G\Sigma D^T$ alors*

$$\begin{aligned} J^TJ &= \left(G\Sigma D^T\right)^T \left(G\Sigma D^T\right) \\ &= D\Sigma G^T G\Sigma D^T \\ &= D\Sigma\Sigma D^T \\ &= D\Lambda D^T \end{aligned}$$

*On retrouve la décomposition en valeurs propres de $J^TJ$ avec $\Lambda = \Sigma^2$.*
*On peut montrer de même que $JJ^T = G\Lambda G^T$.*

### 5.1.2 Bases des vitesses

Le modèle cinématique direct s'écrit :

$$V_P = J_P(q)\dot{q}$$

En faisant une décomposition en valeurs singulières de $J_P(q) = G\Sigma D^T$ on trouve :

$$V_P = G\Sigma D^T \dot{q}$$

En se rappelant que la matrice $D$ est orthogonale, il est évident qu'elle est de rang plein (égal à $n$) et que les vecteurs colonnes sont linéairement indépendant (orthogonaux deux à deux et de norme égale à 1).
Les vecteurs colonnes de la matrice $D$ forment donc une base de l'espace des vitesses articulaires.
Si on se limite aux $r$ premiers vecteurs colonnes (correspondant à une valeur singulière non nulle) alors on obtient une base de l'espace des vitesses articulaires qui engendrent une vitesse opérationnelle non nulle.
Au contraire, les $n - r$ derniers vecteurs colonne forment une base de l'espace des vitesses articulaires qui n'engendrent pas de vitesse opérationnelle. Ils constituent le noyau de la matrice $J_P$.
En multipliant l'équation précédente par $G^T$ on trouve :

$$G^T V_P = \Sigma D^T \dot{q}$$

En se rappelant que la matrice $G$ est orthogonale, il est évident qu'elle est de rang plein (égal à $m$) et que les vecteurs colonnes sont linéairement indépendant (orthogonaux deux à deux et de norme égale à 1).
Les vecteurs colonnes de la matrice $G$ forment donc une base de l'espace des vitesses opérationnelles.
Si on se limite aux $r$ premiers vecteurs colonnes (correspondant à une valeur singulière non nulle) alors on obtient une base de l'espace des vitesses opérationnelles qui peuvent être engendrées par une vitesse articulaire.
Au contraire, les $m - r$ derniers vecteurs colonne forment une base de l'espace des vitesses opérationnelles qui ne peuvent pas être produire par le système.
Enfin, les valeurs singulières représentent le facteur entre les vitesses opérationnelles et les vitesses articulaires :

$$G^T V_P = \Sigma D^T \dot{q} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{G_i^T V_P}_{\substack{\text{compostante} \\ \text{de la vitesse} \\ \text{opérationnelle} \\ \text{le long de } G_i}} = \sigma_i \underbrace{D_i^T \dot{q}}_{\substack{\text{compostante} \\ \text{de la vitesse} \\ \text{articulaire le} \\ \text{long de } D_i}} \quad \Rightarrow \quad \sigma_i = \frac{G_i^T V_P}{D_i^T \dot{q}}$$

### 5.1.3 Ellipsoïde de manipulabilité en vitesse

Il est important de pouvoir étudié la transmission de vitesse d'un système. On dira que la transmission de vitesse est mauvaise lorsque :
– un important mouvement articulaire ne produit qu'une faible vitesse de l'effecteur ;

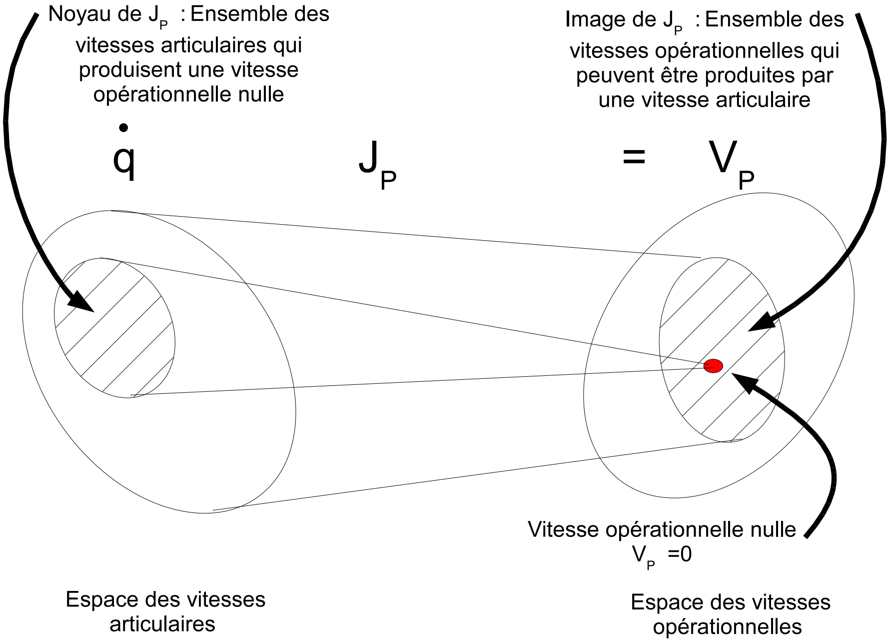



FIGURE 5.1 – Noyau et image du jacobien naturel

– un petit mouvement articulaire produit une grande vitesse de l'effecteur.

Au contraire, une bonne transmission des vitesses est observée lorsque la norme de la vitesse articulaire est du même ordre que la vitesse opérationnelle produite.

Soit un vecteur de vitesses articulaires $\dot{q}$ de norme inférieure ou égale à 1 (vecteur à l'intérieur d'une hypersphère de dimension $n$ de rayon 1). La vitesse opérationnelle produite est alors telle que :

$$\begin{aligned}
\text{si } \dot{q}^T\dot{q} \leq 1 \Rightarrow & \left(J_p^{-1}V_P\right)^T\left(J_p^{-1}V_P\right) && \leq 1 \\
\Rightarrow & V_P^T\left(J_p^{-1}J_P^T\right)^{-1}V_P && \leq 1 \\
\Rightarrow & V_P^T G\left(\Sigma^{-1}\right)^2 G^T V_P && \leq 1 \\
\Rightarrow & \left(G^T V_P\right)^T\left(\Sigma^{-1}\right)^2 G^T V_P && \leq 1
\end{aligned}$$

C'est l'équation d'un ellipsoïde dont les axes principaux sont donnés par les vecteurs colonnes de $G$ et dont les longueurs des demis-axes sont les valeurs singulières de $J_P$.

Cet ellipsoïde est appelé ellipsoïde de manipulabilité en vitesse.

La composante de vitesse opérationnelle le long de $G_i$ est alors telle que :

$$\begin{aligned}
\text{si } \dot{q}^T\dot{q} \leq 1 \Rightarrow & \left(G_i^T V_P\right)^T\frac{1}{\sigma_i^2}\left(G_i^T V_P\right) && \leq 1 \\
\Rightarrow & \left(G_i^T V_P\right)^T\left(G_i^T V_P\right) && \leq \sigma_i^2 \\
\Rightarrow & G_i^T V_P && \leq \sigma_i
\end{aligned}$$

L'ellipsoïde permet donc de qualifier la transmission des vitesses articulaires en vitesses opérationnelles dans le système. En effet, il permet de trouver les directions privilégiées du mouvement : pour une même quantité de vitesse articulaire, la vitesse opérationnelle produite sera plus grande dans la direction $G_i$ correspondant à $\sigma_i = \sigma_{\max}$ que dans la direction $G_i$ correspondant à $\sigma_i = \sigma_{\min}$.

On définit alors un indice de manipulabilité : $\dfrac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_r}$.

Une bonne transmission sera alors observée si cet indice de manipulabilité est proche de 1.

On peut noter que cet indice est aussi le nombre de conditionnement de la matrice $J_P$.

## 5.2 Analyse de la transmission des efforts

On a vu comment établir les relations entre vitesses articulaires et vitesse opérationnelle. En statique, on peut de façon dite duale les relations entre les efforts aux articulations et l'effort appliqué par l'effecteur sur l'environnement. On utilise pour cela le principe des puissances virtuelles.

### 5.2.1 Dualité cinémato-statique

#### 5.2.1.1 Principes des puissances virtuelles

Soit un système $\Sigma = \{S_0 \cup S_1 \cup ...S_i \cup ...S_n\}$, $S_0$ lié à un référentiel galiléen.
Le principe des puissances virtuelles appliqué à un corps $S_i$ dans son mouvement par rapport à un corps $S_0$ s'écrit :

$$\mathcal{D}(S_i/S_0)\mathcal{V}^*(S_i/S_0) = \mathcal{E}_{\bar{\Sigma}\to S_i}\mathcal{V}^*(S_i/S_0) + \mathcal{E}_{\Sigma\to S_i}\mathcal{V}^*(S_i/S_0)$$

Dans la pratique, on considère comme torseur cinématique virtuel un torseur compatible avec les liaisons du systèmes :

$$\mathcal{V}^*(S_i/S_0) = \sum_{j=1}^{i} \dot{q}_j^* \$(S_j/S_{j-1})$$

En écrivant le principe des puissances virtuelles pour chaque corps $S_1...S_n$ et en faisant la somme des relations obtenues on a :

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}(S_i/S_0)\mathcal{V}^*(S_i/S_0)}_{\mathcal{P}^*_{\text{acc}}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\mathcal{E}_{S_0\to S_i} + \mathcal{E}_{\bar{\Sigma}\to S_i}\right) \mathcal{V}^*(S_i/S_0)}_{\mathcal{P}^*_{\text{ext}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\mathcal{E}_{\Sigma\to S_i} - \mathcal{E}_{S_0\to S_i}\right) \mathcal{V}^*(S_i/S_0)}_{\mathcal{P}^*_{\text{int}}}$$

D'après le principe de l'action et de la réaction, cette relation est équivalente à :

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}(S_i/S_0)\mathcal{V}^*(S_i/S_0) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_{\bar{\Sigma}\to S_i}\mathcal{V}^*(S_i/S_0) + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_{S_{i-1}\to S_i}\mathcal{V}^*(S_i/S_{i-1})$$

#### 5.2.1.2 Puissance virtuelle développée par les liaisons et les actionneurs

En admettant que les liaisons entre les corps sont toutes des liaisons parfaites, la puissance développée par les liaisons est nulle. Il faut par contre tenir compte de la puissance développée par les actionneurs :

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_{S_{i-1}\to S_i}\mathcal{V}^*(S_i/S_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_{S_{i-1}\to S_i}\$(S_i/S_{i-1})\dot{q}_i^* = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_{\text{actionneur}_i\to S_i}\$(S_i/S_{i-1})\dot{q}_i^*$$

Or, dans les systèmes étudiés, les liaisons sont des pivots ou des glissières, les actionneurs sont donc tels que :

$$\mathcal{E}_{\text{actionneur}_i\to S_i} = \tau_i \left\{ \begin{array}{c} (1-\delta_i)\overrightarrow{k_i} \\ \delta_i \overrightarrow{k_i} \end{array} \right\}_{O_i}$$

avec $\delta_i = 1$ si la liaison est un pivot et $\delta_i = 0$ si la liaison est une glissière.
En effet :

– Si la liaison $i$ est un pivot, l'actionneur produit un couple autour de l'axe $(O_i, \overrightarrow{k_i})$ de la liaison pivot :

$$\mathcal{E}_{\text{actionneur}_i \to S_i} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \tau_i \overrightarrow{k_i} \end{array} \right\}_{O_i}$$

– Si la liaison $i$ est une glissière, l'actionneur produit une force ponctuelle selon l'axe $(O_i, \overrightarrow{k_i})$ de la liaison glissière :

$$\mathcal{E}_{\text{actionneur}_i \to S_i} = \left\{ \begin{array}{c} \tau_i \overrightarrow{k_i} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{O_i}$$

Par ailleurs, dans ces mêmes systèmes, le torseur géométrique s'écrit :

$$\$(S_i/S_0) = \left\{ \begin{array}{c} \delta_i \overrightarrow{k_i} \\ (1-\delta_i)\overrightarrow{k_i} \end{array} \right\}_{O_i}$$

On a alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_{S_{i-1} \to S_i} \mathcal{V}^*(S_i/S_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i^* E_i \left\{ \begin{array}{c} (1-\delta_i)\overrightarrow{k_i} \\ \delta_i \overrightarrow{k_i} \end{array} \right\}_{O_i} \left\{ \begin{array}{c} \delta_i \overrightarrow{k_i} \\ (1-\delta_i)\overrightarrow{k_i} \end{array} \right\}_{O_i} = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i^* \tau_i$$

#### 5.2.1.3 Puissance virtuelle développée par l'environnement

On suppose que les seuls efforts appliqués par l'environnement sur le système sont des efforts appliqués sur l'effecteur :

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_{\bar{\Sigma} \to S_i} \mathcal{V}^*(S_i/S_0) = \mathcal{E}_{\bar{\Sigma} \to S_n} \mathcal{V}^*(S_n/S_0)$$

#### 5.2.1.4 Cas particulier de la statique

Supposons que le système est à l"'équilibre alors :

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_{\bar{\Sigma} \to S_i} \mathcal{V}^*(S_i/S_0) + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_{S_{i-1} \to S_i} \mathcal{V}^*(S_i/S_{i-1})$$

soit :

$$\mathcal{E}_{S_n \to \bar{\Sigma}} \mathcal{V}^*(S_n/S_0) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i^* \tau_i$$

Sous forme matricielle on peut écrire :

$$E_P^T . V_P^* = \tau^T . \dot{q}^*$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} E_P = \begin{bmatrix} m_x & m_y & m_z & f_x & f_y & f_z \end{bmatrix}^T \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{F}_{S_n \to \bar{\Sigma}} = f_x \overrightarrow{i_0} + f_y \overrightarrow{j_0} + f_z \overrightarrow{k_0} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_{S_n \to \bar{\Sigma}}(P) = m_x \overrightarrow{i_0} + m_y \overrightarrow{j_0} + m_z \overrightarrow{k_0} \end{array} \right. \\ V_P^* = \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z & V_x & V_y & V_z \end{bmatrix}^T \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega}_{S_n/S_0} = \omega_x \overrightarrow{i_0} + \omega_y \overrightarrow{j_0} + \omega_z \overrightarrow{k_0} \\ \overrightarrow{V}_{S_n S_0}(P) = V_x \overrightarrow{i_0} + V_y \overrightarrow{j_0} + V_z \overrightarrow{k_0} \end{array} \right. \\ \tau = \begin{bmatrix} \tau_1 & \cdots & \tau_n \end{bmatrix}^T \\ \dot{q}^* = \begin{bmatrix} \dot{q}_1^* & \cdots & \dot{q}_n^* \end{bmatrix}^T \end{array} \right.$$

Comme $V_P^*$ est compatible avec les liaisons, on peut l'exprimer en fonction des vitesses articulaires virtuelles grâce au modèle cinématique du système :

$$V_P^* = J_P(q)\dot{q}^*$$

Alors :

$$E_P^T.J_P(q)\dot{q}^* = \tau^T.\dot{q}^*$$

D'où :

$$E_P^T.J_P(q) = \tau^T$$

On a donc établi un modèle statique permettant d'exprimer les efforts articulaires en fonction des efforts opérationnels (efforts .

$$\underbrace{\tau}_{\text{efforts articulaires}} = J_P^T(q) \underbrace{E_P}_{\text{efforts opérationnels}}$$

Le modèle statique est l'expression duale du modèle cinématique :

$$\underbrace{\tau}_{\text{efforts articulaires}} = J_P^T(q) \underbrace{E_P}_{\text{efforts opérationnels}} \Leftrightarrow \underbrace{V_P}_{\text{vitesse opérationnelle}} = J_P(q) \underbrace{\dot{q}}_{\text{vitesses articulaires}}$$

Tout problème de cinématique est équivalent à un problème de statique et inversement : on parle de dualité cinémato-statique.

### 5.2.2 Ellipsoïde de manipulabilité en effort

De même qu'on a définit un ellipsoïde de manipulabilité en vitesse pour analyser la transmission de vitesse, on peut définir un ellipsoïde de manipulabilité en effort pour analyser la transmission des efforts statiques :

$$\begin{aligned}
\text{si } \tau^T\tau \leq 1 \Rightarrow \left(J_p^T E_P\right)^T \left(J_p^T E\right) &\leq 1 \\
\Rightarrow E_P^T \left(J_p^T J_P\right) E_P &\leq 1 \\
\Rightarrow E_P^T G \Sigma^2 G^T E_P &\leq 1 \\
\Rightarrow \left(G^T E_P\right)^T \Sigma^2 \left(G^T E_P\right) &\leq 1
\end{aligned}$$

C'est l'équation d'un ellipsoïde dont les axes principaux sont donnés par les vecteurs colonnes de $G$ et dont les longueurs des demis-axes sont $1/\sigma_i$, les inverses des valeurs singulières de $J_P$.

Cet ellipsoïde est appelé ellipsoïde de manipulabilité en effort.

# PARTIE III

## Modélisation Dynamique

# Chapitre 1

## Introduction

## 1.1 Objectif de la modélisation dynamique

La modélisation dynamique consiste à déterminer les relations entre les accélération articulaires et les efforts articulaires.
On convient d'appeler modèle dynamique direct la relation qui permet d'exprimer les accélérations en fonction des efforts. Au contraire, si les efforts sont exprimés en fonction des accélérations, on parle de modèle dynamique inverse.
Les principales utilisations des modèles dynamiques sont :
– la simulation pour laquelle on utilise le modèle direct,
– le dimensionnement des actionneurs,
– l'identifiaction des termes d'inertie et de frottement,
– la commande pour laquelle on utilise le modèle inverse.
Il faut noter que le modèle dynamique inverse est le modèle qu'on établit lorsqu'on écrit sous forme matricielle les équations du mouvements.

## 1.2 La preuve par un exercice

*On considère un robot communément appelé 3R (3 liaisons Rotoïdes, ancien nom des liaisons pivots). C'est un robot série consitué de 4 corps liés entre eux par des liaisons pivots d'axes parallèles. Le robot évolue donc dans un plan.*

*Les corps sont modélisés par des tiges homogènes, notées $S_i$, de longueur $l_i$, de masse $m_i$ de centre d'inertie $G_i$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.*
*Les repères sont placés sur la figure. Le vecteur $q$ des paramètres articulaires est alors défini par*

$$q = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{bmatrix}^T$$

*On note $\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \end{bmatrix}^3$ le vecteur des efforts articulaires.*

1. *En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique, calculer les équations du mouvement de ce système.*

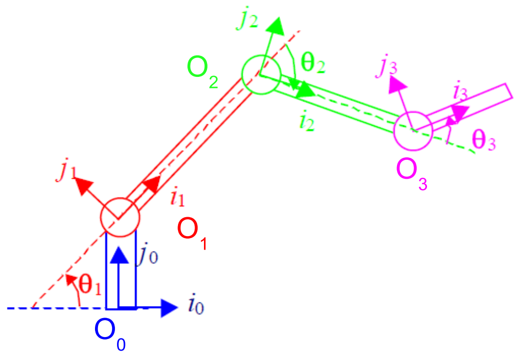



FIGURE 1.1 – Paramètrage articulaire

2. *Ecrire les équations précédentes sous la forme matricielle :*

$$\tau = A\ddot{q} + B\dot{q}\dot{q} + C\dot{q}^2 + g$$

*avec*

$$\begin{cases} \ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & \cdots & \ddot{q}_n \end{bmatrix}^T \\ \dot{q}\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1\dot{q}_2 & \dot{q}_1\dot{q}_3 & \dot{q}_2\dot{q}_3 \end{bmatrix}^T \\ \dot{q}^2 = \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 & \dot{q}_2^2 & \dot{q}_3^2 \end{bmatrix}^T \end{cases}$$

# Chapitre 2

## Equations du mouvement

En mécanique générale, on a vu de nombreuses façon d'établir les équations du mouvement : Théorème de l'énergie cinétique, Principe Fondamental de la Dynamique, équations de Lagrange avec ou sans multiplicateurs de Lagrange.
On se rappelle que le Théorème de l'énergie ne permet d'établir qu'une seule équation du mouvement. On ne retiendra donc pas cette méthode pour les systèmes qui nous intéresse.

## 2.1 Equation du mouvement

Supposons que la position d'un système de solide soient déterminées à partir de paramètres géométriques $q, \ i = 1..n$.
Une équation du mouvement est une équation différentielle du second ordre au plus, en général non linéaire de la forme :

$$f(q, \dot{q}, \ddot{q}) = 0$$

Dans ces "équations peuvent figurer :
- des données géométriques et des caractéristiques de géométrie matérielle des différents corps.
- des composantes des actions mécaniques connues, autrement appellées inconnues de liaison, qui viennent des actions mécaniques transmises par les liaisons.

Pour décrire complètement les mouvements d'un système, il faut écrire autant d'équations du mouvement que le système a de degré de liberté.

## 2.2 Equations de Lagrange

### 2.2.1 Objectif

On utilisera les équations de Lagrange pour démontrer (de façon assez indigeste) que les équations du mouvements peuvent se regouper sous la forme matricielle :

$$\tau = A\ddot{q} + B\dot{q}\dot{q} + C\dot{q}^2 + g$$

avec

$$\begin{cases} \tau = \begin{bmatrix}\tau_1 & \cdots & \tau_n\end{bmatrix}^T \text{ les efforts articulaires de dimension}(n,1) \\ \ddot{q} = \begin{bmatrix}\ddot{q}_1 & \cdots & \ddot{q}_n\end{bmatrix}^T \text{ les accélérations articulaires de dimension } (n,1) \\ \dot{q}\dot{q} = \begin{bmatrix}\dot{q}_1\dot{q}_2 & \cdots & \dot{q}_1\dot{q}_n & \dot{q}_2\dot{q}_3 & \cdots & \dot{q}_{n-1}\dot{q}_n\end{bmatrix}^T \text{de dimension } (n(n-1)/2,1) \\ \dot{q}^2 = \begin{bmatrix}\dot{q}_1^2 & \cdots & \dot{q}_n^2\end{bmatrix}^T \text{de dimension}(n,1) \\ A \text{ la matrice d'inertie du système ou matrice des masses de dimension } (n,n) \\ B \text{ la matrice des termes de Coriolis du système de dimension } (n,n(n-1)/2) \\ C \text{ la matrice des termes Centrifuges du système de dimension } (n,n) \\ g \text{ le vecteur colonne des efforts de gravité de dimension } (n,1). \end{cases}$$

### 2.2.2 Rappel

Soit un système $\Sigma$ constitué de $n$ solides $S_i$ tels que $S_1$ soit en liaison avec un bâti $S_0$, $S_i$ en laison avec $S_{i-1}$ et avec $S_{i+1}$. Les liaisons sont supposées parfaites mais actionnées. Les efforts extérieurs sont ceux du bâti sur le corps $S_1$ et la gravité sur chacun des corps.
L'équation de lagrange relative au paramètre $q_i$ s'écrit :

$$\mathcal{L}_{q_i} : \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} E_c(\Sigma/S_0)\Big]\Big] - \frac{\partial}{\partial q_i} E_c(\Sigma/S_0\Big] = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i^*}\mathcal{P}^*_{\text{totale}}\Big]$$

### 2.2.3 Energie cinétique

Par définition l'énergie cinétique du système $\Sigma$ en mouvement par rapport à $S_0$ est la somme des énergie cinétique de chaque solide $S_i$ en mouvement par rapport à $S_0$ :

$$\begin{aligned} E_c(\Sigma/S_0) &= \sum_{i=1}^{n} E_c(S_i/S_0) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{C}(S_i/S_0)\mathcal{V}(S_i/S_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}m_i \overrightarrow{V}(G_i/S_0).\overrightarrow{V}(G_i/S_0) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega}(S_i/S_0)\left[I_{G_i}(S_i)\right]\overrightarrow{\Omega}(S_i/S_0)\right) \end{aligned}$$

Or $V_{G_i} = J_{G_i}\dot{q}$. On notera : $V_{V_i} = {}^0\overrightarrow{V}(G_i/S_0) = J_{v_i}\dot{q}$ et $V_{\omega_i} = {}^0\overrightarrow{\Omega}(S_i/S_0) = J_{\omega_i}\dot{q}$.
L'énergie cinétique s'écrit alors matriciellement :

$$\begin{aligned} E_c(\Sigma/S_0) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}m_i\dot{q}^T J_{v_i}^T J_{v_i}\dot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T J_{\omega_i}^T\left[I_{G_i}(S_i)\right]J_{v_i}\dot{q}\right) \\ &= \frac{1}{2}\dot{q}^T\left(\sum_{i=1}^{n}\left(m_i J_{v_i}^T J_{v_i} + J_{\omega_i}^T\left[I_{G_i}(S_i)\right]J_{v_i}\right)\right)\dot{q} \\ &= \frac{1}{2}\dot{q}^T A\dot{q} \end{aligned}$$

On peut alors calculer les dériviées partielles des équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} E_c(\Sigma/S_0)\Big|\Big| = \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\dot{q}_j\Big|$$
$$= \sum\ {}_{j=1}^{n} \left( A_{ij}\ddot{q}_j + \frac{d}{dt} A_i j\Big|\ \dot{q}_j \right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \left( A_{ij}\ddot{q}_j + \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_k} A_{ij}\Big|\ \frac{\partial}{\partial t} q_k \Big| \right) \dot{q}_j \right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \left( A_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_k} A_{ij}\Big|\ \dot{q}_k\dot{q}_j \right)$$

de même,

$$\frac{\partial}{\partial q_i} E_c(S_i/S_0\Big| = \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n} \left( \frac{\partial}{\partial q_i} A_{kj}\Big|\ \dot{q}_k\dot{q}_j \right)$$

Le premier membre de l'équation $\mathcal{L}_{q_i}$ de Lagrange s'écrit donc :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} E_c(\Sigma/S_0)\Big|\Big| - \frac{\partial}{\partial q_i} E_c(\Sigma/S_0\Big| = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{k,j=1}^{n} \left( \frac{\partial}{\partial q_k} A_{ij}\Big|\ \dot{q}_k\dot{q}_j - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_i} A_{kj}\Big|\ \dot{q}_k\dot{q}_j \right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{k,j=1}^{n} \left( \frac{\partial}{\partial q_k} A_{ij}\Big| - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_i} A_{kj}\Big| \right) \dot{q}_k\dot{q}_j$$

Or : $\displaystyle\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_k} A_{ij}\Big|\ \dot{q}_k\dot{q}_j = \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_j} A_{ik}\Big|\ \dot{q}_k\dot{q}_j$.

Donc :

$$\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_k} A_{ij}\Big|\ \dot{q}_k\dot{q}_j = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{1}{2}\left( \frac{\partial}{\partial q_k} A_{ij}\Big| + \frac{\partial}{\partial q_j} A_{ik}\Big| \right) \dot{q}_k\dot{q}_j$$

D'où :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} E_c(\Sigma/S_0)\Big|\Big| - \frac{\partial}{\partial q_i} E_c(\Sigma/S_0\Big| = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{k,j=1}^{n} \frac{1}{2}\left( \frac{\partial}{\partial q_k} A_{ij}\Big| + \frac{\partial}{\partial q_j} A_{ik}\Big| - \frac{\partial}{\partial q_i} A_{kj}\Big| \right) \dot{q}_k\dot{q}_j$$
$$= \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{\partial}{\partial q_k} A_{ik}\Big| - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_i} A_{kk}\Big| \right) \dot{q}_k^2 + \sum_{k,j=1\ k\neq j}^{n} \frac{1}{2}\left( \frac{\partial}{\partial q_k} A_{ij}\Big| + \frac{\partial}{\partial q_j} A_{ik}\Big| - \frac{\partial}{\partial q_i} A_{kj}\Big| \right) \dot{q}_k\dot{q}_j$$

### 2.2.4 Puissance virtuelle totale

Les liaisons sont supposées parfaites mais actionnées. Les efforts extérieurs sont ceux du bâti sur le corps $S_1$ et la gravité sur chacun des corps. Donc

$$\mathcal{P}^*_{\text{totale}} = \tau^T \dot{q}^* + \frac{d}{dt} - E_p(\Sigma/S_0)\Big|$$
$$= \tau^T \dot{q}^* + \sum_{i=1}^{n} - \frac{\partial}{\partial q_i} E_p(\Sigma/S_0)\Big|\ \dot{q}_i^*$$

D'où :

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i^*} \mathcal{P}^*_{\text{totale}}\Big| = \tau_i + \sum_{i=1}^{n} - \frac{\partial}{\partial q_i} E_p(\Sigma/S_0)\Big|\ \dot{q}_i^*$$

### 2.2.5 Modèle dynamique

En conclusion, l'équation de Lagrange $\mathcal{L}_{q_i}$ s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial q_k}A_{ik}\Big] - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_i}A_{kk}\Big]\right)\dot{q}_k^2 + \sum_{k,j=1\ k\neq j}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q_k}A_{ij}\Big] + \frac{\partial}{\partial q_j}A_{ik}\Big] - \frac{\partial}{\partial q_i}A_{kj}\Big]\right)\dot{q}_k\dot{q}_j$$
$$= \tau_i + \sum_{i=1}^{n} - \frac{\partial}{\partial q_i}E_p(\Sigma/S_0)\Big]\, q_i^*$$

On peut alors écrire l'ensemble des équations de Lagrange sous la forme matricielle suivante :

$$\tau = A\ddot{q} + B\dot{q}\dot{q} + C\dot{q}^2 + g$$

avec

$$\begin{cases} \tau = \begin{bmatrix}\tau_1 & \cdots & \tau_n\end{bmatrix}^T \text{ les efforts articulaires de dimension}(n,1) \\ \ddot{q} = \begin{bmatrix}\ddot{q}_1 & \cdots & \ddot{q}_n\end{bmatrix}^T \text{ les accélérations articulaires de dimension } (n,1) \\ \dot{q}\dot{q} = \begin{bmatrix}\dot{q}_1\dot{q}_2 & \cdots & \dot{q}_1\dot{q}_n & \dot{q}_2\dot{q}_3 & \cdots & \dot{q}_{n-1}\dot{q}_n\end{bmatrix}^T \text{de dimension } (n(n-1)/2,1) \\ \dot{q}^2 = \begin{bmatrix}\dot{q}_1^2 & \cdots & \dot{q}_n^2\end{bmatrix}^T \text{de dimension}(n,1) \\ A \text{ la matrice d'inertie du système ou matrice des masses de dimension } (n,n) \\ B \text{ la matrice des termes de Coriolis du système de dimension } (n,n(n-1)/2) \\ C \text{ la matrice des termes Centrifuges du système de dimension } (n,n) \\ g \text{ le vecteur colonne des efforts de gravité de dimension } (n,1). \end{cases}$$

La matrice d'inertie est telle que :

$$A = \sum_{i=1}^{n}\left(m_i J_{v_i}^T J_{v_i} + J_{\omega_i}^T\left[I_{G_i}(S_i)\right]J_{v_i}\right)$$

La matrice des termes de Coriollis est telle que l'élément de la ligne $i$ et de la colonne correspondant au terme $\dot{q}_j\dot{q}_k$ est :

$$B_{i,jk} = \frac{\partial}{\partial q_k}A_{ij}\Big] + \frac{\partial}{\partial q_j}A_{ik}\Big] - \frac{\partial}{\partial q_i}A_{jk}\Big]$$

La matrice des termes Centrifuge est telle que l'élément de la ligne $i$ et de la colonne $j$ est :

$$C_{i,j} = \frac{\partial}{\partial q_j}A_{ij}\Big] - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_i}A_{jj}\Big]$$

Le vecteur des efforts de gravité est :

$$g = \frac{\partial}{\partial q_i}E_p(\Sigma/S_0)\Big]$$

Cette équation matricielle constitue le modèle dynamique inverse.
Il est très rare de l'établir directement. On préfère établir les équations du mouvement comme on le fait en mécanique générale puis rassembler les équations sous forme matricielle. Certains choisissent aussi de ne pas distinguer les effets de Coriollis et les effets Centrifuge.

### 2.2.6 Exercice

*On considère un robot communément appelé 3R (3 liaisons Rotoïdes, ancien nom des liaisons pivots). C'est un robot série consitué de 4 corps liés entre eux par des liaisons pivots d'axes parallèles. Le robot évolue donc dans un plan.*

*Les corps sont modélisés par des tiges homogènes, notées $S_i$, de longueur $l_i$, de masse $m_i$ de centre d'inertie $G_i$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.*
*Les repères sont placés sur la figure. Le vecteur $q$ des paramètres articulaires est alors défini*

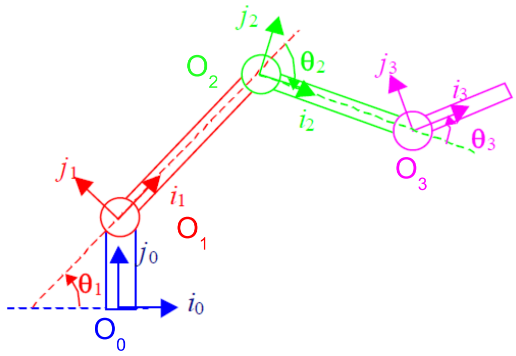



FIGURE 2.1 – Paramètrage articulaire

*par*

$$q = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{bmatrix}^T$$

*On note $\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \end{bmatrix}^3$ le vecteur des efforts articulaires.*

1. *Donner les équations de Lagrange pour ce système.*
2. *Ecrire les équations précédentes sous la forme matricielle :*

$$\tau = A\ddot{q} + B\dot{q}\dot{q} + C\dot{q}^2 + g$$

*avec*

$$\begin{cases} \ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & \cdots & \ddot{q}_n \end{bmatrix}^T \\ \dot{q}\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1\dot{q}_2 & \dot{q}_1\dot{q}_3 & \dot{q}_2\dot{q}_3 \end{bmatrix}^T \\ \dot{q}^2 = \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 & \dot{q}_2^2 & \dot{q}_3^2 \end{bmatrix}^T \end{cases}$$

## 2.3 Algorithme de Newton-Euler

L'algorithme de Newton-Euler est une méthode d'application du Principe Fondamental de la Dynamique pour trouver directement les équations du mouvement d'un robot série.

### 2.3.1 Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

**Théorème 1** *Principe Fondamental de la Dynamique*
*Le torseur dynamique d'un système de solides $\Sigma$ dans son mouvement par rapport à un*

*référentiel galiléen $\mathcal{R}_i$ est égal au torseur des efforts extérieurs appliqués à ce système de solide.*

$$\mathcal{D}(\Sigma/\mathcal{R}_i) = \mathcal{E}_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}$$

*où $\bar{\Sigma}$ représente l'environnement moins le système $\Sigma$, on dit aussi l'extérieur à $\Sigma$.*

Les efforts extérieurs sont donc les efforts appliqués par des éléments qui n'appartiennent pas au système. Les efforts interieurs sont au contraires ceux appliqués par un élément du système sur un autre élément du système.

### 2.3.2 Algorithme de Newton-Euler

L'équation de la résultante du PFD pour l'équation de Newton, et l'équation des moments du PFD pour l'équation d'Euler.
L'algorithme de Newton-Euler est une façon systèmatique d'écrire le PFD à un système en chaine ouverte pour trouver les équations du mouvements.
Soit un système $\Sigma$ constitué de $n$ solides $S_i$ tels que $S_1$ soit en liaison avec un bâti $S_0$, $S_i$ en laison avec $S_{i-1}$ et avec $S_{i+1}$.
Pour obtenir les équations du mouvements, il faut :

- appliquer le PFD au corps $S_n$ en $O_n$ en mouvement par rapport à $S_0$. Si la liaison entre les corps $S_n$ et $S_{n-1}$ est une liaison glissière alors la projection de la résultante sur $\overrightarrow{k_n}$ donnera une équation du mouvement. Si la liaison entre les corps $S_n$ et $S_{n-1}$ est une liaison pivot alors la projection du moment en $O_n$ sur $\overrightarrow{k_n}$ donnera une équation du mouvement.
- appliquer le PFD au système $S_n \cup S_{n-1}$ en $O_{n-1}$ en mouvement par rapport à $S_0$. Si la liaison entre les corps $S_{n-1}$ et $S_{n-2}$ est une liaison glissière alors la projection de la résultante sur $\overrightarrow{k_{n-1}}$ donnera une équation du mouvement. Si la liaison entre les corps $S_{n-1}$ et $S_{n-2}$ est une liaison pivot alors la projection du moment en $O_{n-1}$ sur $\overrightarrow{k_{n-1}}$ donnera une équation du mouvement.
- ainsi de suite jusqu'à appliquer le PFD au système $\Sigma$ en $O_1$ en mouvement par rapport à $S_0$. Si la liaison entre les corps $S_1$ et $S_0$ est une liaison glissière alors la projection de la résultante sur $\overrightarrow{k_1}$ donnera une équation du mouvement. Si la liaison entre les corps $S_1$ et $S_0$ est une liaison pivot alors la projection du moment en $O_1$ sur $\overrightarrow{k_0}$ donnera une équation du mouvement.

### 2.3.3 Méthode de calcul matriciel

Lorsqu'on applique l'algorithme précédent, on commence par étudier le corps terminal. Mais pour cela, on doit calculer la vitesse de ce corps par composition de mouvement en partant du corps $S_1$. Dans la pratique, on applique cet algorithme de la façon suivante :

- étape 1 : propagation des vitesses du corps $S_1$ vers le corps $S_n$
- étape 2 : rétro-propagation des efforts du corps $S_n$ vers le système $\Sigma = \cup_{i=1}^{n} S_i$.

Il faut noter que l'écriture générale de cette méthode est assez lourde, lorsqu'on l'applique à un système particulier, c'est beaucoup plus simple.

#### 2.3.3.1 Propagation des vitesses

On calcule par récurrence de $i = 1$ à $n$ :

$$\left\{\begin{array}{l} {}^0\Omega(S_i/S_0) =^0 \Omega(S_{i-1}/S_0) + \delta_i\dot{q}_i\ {}^0k_i \\ {}^0V(O_i \in S_i/S_0) =^0 V(O_{i-1} \in S_{i-1}/S_0) + \left[{}^0\Omega(S_{i-1}/S_0)\right]^0_\times O_{i-1}O_i + (1-\delta_i)\dot{q}_i\ {}^0k_i \\ {}^0V(G_i \in S_i/S_0) =^0 V(O_i \in S_i/S_0) + \left[{}^0\Omega(S_i/S_0)\right]^0_\times O_iG_i \end{array}\right.$$

On rappelle que ${}^0k_i$ est donnée dans $T_{0\to i}$.
On calcule ensuite les dérivées par récurrence de $i = 1$ à $n$ :

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\dfrac{d}{dt}{}^0\Omega(S_i/S_0)\right| = \left.\dfrac{d}{dt}{}^0\Omega(S_{i-1}/S_0)\right| + \delta_i\ddot{q}_i\ {}^0k_i + \delta_i\dot{q}_i \left.\dfrac{d}{dt}{}^0k_i\right| \\ \left.\dfrac{d}{dt}{}^0V(G_i \in S_i/S_0)\right| = \left.\dfrac{d}{dt}{}^0V(O_i \in S_i/S_0)\right| \\ \qquad\qquad + \left[\left.\dfrac{d}{dt}{}^0\Omega(S_i/S_0)\right|\right]_\times {}^0O_iG_i + \left[{}^0\Omega(S_i/S_0)\right]_\times \left[{}^0\Omega(S_i/S_0)\right]_\times {}^0O_iG_i \end{array}\right.$$

Il reste alors à calculer les composantes du torseur dynamique de $i = 1$ à $n$ :

$$\left\{\begin{array}{l} m_i\ {}^0\gamma(G_i \in S_i/S_0) = m_i \left.\dfrac{d}{dt}{}^0V(G_i \in S_i/S_0)\right| \\ {}^0\delta(G_i \in S_i/S_0) = \left.\dfrac{d}{dt}R_{0\to i}\left[{}^iI_{G_i}(S_i)\right]{}^0\Omega(S_i/S_0)\right| \\ \qquad = \left[{}^0\Omega(S_i/S_0)\right]_\times R_{0\to i}\left[{}^iI_{G_i}(S_i)\right] + R_{0\to i}\left[{}^iI_{G_i}(S_i)\right] \left.\dfrac{d}{dt}{}^0\Omega(S_i/S_0)\right| \\ {}^0\delta(O_i \in S_i/S_0) =^0 \delta(G_i \in S_i/S_0) + m_i\ \left[{}^0\gamma(G_i \in S_i/S_0)\right]_\times {}^0G_iO_i \end{array}\right.$$

#### 2.3.3.2 Rétro-propagation des efforts

On suppose que les efforts en jeu sont les efforts transmis par les liaisons parfaites, les efforts transmis par les actionneurs, les efforts de gravités.
On rappelle que

$$\mathcal{E}_{\text{actionneur}_i\to S_i} = \left\{\begin{array}{c} (1-\delta_i)\tau_i\overrightarrow{k_i} \\ \delta_i\tau_i\overrightarrow{k_i} \end{array}\right\}_{O_i}$$

On calcule alors pour le corps $S_n$ :

$$\left\{\begin{array}{l} {}^0F_{n-1\to n} = -m_n\ {}^0g + m_n\ {}^0\gamma(G_n \in S_n/S_0) \\ {}^0\mathcal{M}_{n-1\to n}(O_n) = -m_n\ \left[{}^0g\right]_\times {}^0G_nO_n +^0 \delta(O_n \in S_n/S_0) \end{array}\right.$$

Puis par récurrence de $i = n-1$ à $1$ :

$$\left\{\begin{array}{l} {}^0F_{i-1\to i} = -{}^0F_{i+1\to i} - m_i\ {}^0g + m_i\ {}^0\gamma(G_i \in S_i/S_0) \\ {}^0\mathcal{M}_{i-1\to n}(O_i) = -{}^0\mathcal{M}_{i+1\to i}(O_i) - m_i\ \left[{}^0g\right]_\times {}^0G_iO_i +^0 \delta(O_i \in S_n/S_0) \end{array}\right.$$

#### 2.3.3.3 Equations du mouvement

La rétro-propagation des efforts nous donne $n$ systèmes de deux équations vectorielles. En projetant les équations du système $i$ sur ${}^0k_i$ pour $i \in \{1, ...n\}$ on a :

$$\left\{\begin{array}{l} (1-\delta_i)\tau_i = -\ {}^0k_i^T.{}^0F_{i+1\to i} - m_i\ \ {}^0k_i^T.{}^0g + m_i\ \ {}^0k_i^T.{}^0\gamma(G_i \in S_i/S_0) \\ \delta_i\tau_i = -\ {}^0k_i^T.{}^0\mathcal{M}_{i+1\to i}(O_i) - m_i\ \ {}^0k_i^T.\left[{}^0g\right]_\times {}^0G_iO_i +\ {}^0k_i^T.{}^0\delta(O_i \in S_n/S_0) \end{array}\right.$$

Donc l'équation $i$ du mouvement s'écrit :

$$\begin{aligned}\tau_i = &(1-\delta_i)\left(-\ {}^0k_i^T.{}^0F_{i+1\to i} - m_i\ \ {}^0k_i^T.{}^0g + m_i\ \ {}^0k_i^T.{}^0\gamma(G_i \in S_i/S_0)\right)\\ &+\delta_i\left(-\ {}^0k_i^T.{}^0\mathcal{M}_{i+1\to i}(O_i) - m_i\ \ {}^0k_i^T.\left[{}^0g\right]_\times\ {}^0G_iO_i + \ {}^0k_i^T.{}^0\delta(O_i \in S_n/S_0)\right)\end{aligned}$$

Il ne reste alors plus qu'à écrire le modèle dynamique inverse sous forme matricielle :

$$\tau = A\ddot{q} + B\dot{q}\dot{q} + C\dot{q}^2 + g$$

### 2.3.4 Exercice

*On considère un robot communément appelé 3R (3 liaisons Rotoïdes, ancien nom des liaisons pivots). C'est un robot série consitué de 4 corps liés entre eux par des liaisons pivots d'axes parallèles. Le robot évolue donc dans un plan.*

*Les corps sont modélisés par des tiges homogènes, notées $S_i$, de longueur $l_i$, de masse $m_i$ de centre d'inertie $G_i$ pour $i \in \{1,2,3\}$.*
*Les repères sont placés sur la figure. Le vecteur $q$ des paramètres articulaires est alors défini*

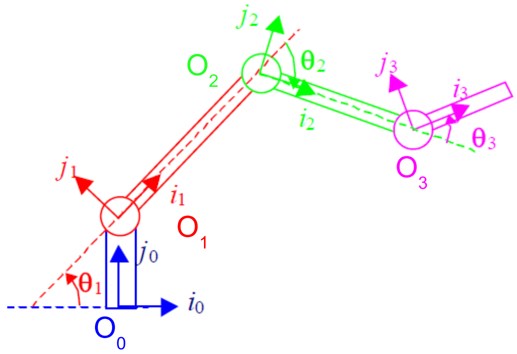



FIGURE 2.2 – Paramètrage articulaire

*par*

$$q = \begin{bmatrix}\theta_1 & \theta_2 & \theta_3\end{bmatrix}^T$$

*On note $\tau = \begin{bmatrix}\tau_1 & \tau_2 & \tau_3\end{bmatrix}^3$ le vecteur des efforts articulaires.*

1. *Faire la propagation des vitesses.*
2. *Faire la rétro-propagation des efforts.*
3. *Ecrire les équations du mouvement.*
4. *Ecrire les équations précédentes sous la forme matricielle :*

$$\tau = A\ddot{q} + B\dot{q}\dot{q} + C\dot{q}^2 + g$$

*avec*

$$\begin{cases}\ddot{q} = \begin{bmatrix}\ddot{q}_1 & \cdots & \ddot{q}_n\end{bmatrix}^T\\ \dot{q}\dot{q} = \begin{bmatrix}\dot{q}_1\dot{q}_2 & \dot{q}_1\dot{q}_3 & \dot{q}_2\dot{q}_3\end{bmatrix}^T\\ \dot{q}^2 = \begin{bmatrix}\dot{q}_1^2 & \dot{q}_2^2 & \dot{q}_3^2\end{bmatrix}^T\end{cases}$$

# Chapitre 3

## Modèle dynamique

Les modèles indiqués ci-après ne sont valables que pour des systèmes séries qui ne subissent comme efforts extérieurs que l'action du bâti et de la gravité.

## 3.1 Modèle dynamique inverse

Le modèle dynamique inverse est celui qu'on trouve en écrivant les équations du mouvement sous la forme :

$$\tau = A\ddot{q} + B\dot{q}\dot{q} + C\dot{q}^2 + g$$

avec

$$\begin{cases} \tau = \begin{bmatrix}\tau_1 & \cdots & \tau_n\end{bmatrix}^T \text{ les efforts articulaires de dimension}(n,1) \\ \ddot{q} = \begin{bmatrix}\ddot{q}_1 & \cdots & \ddot{q}_n\end{bmatrix}^T \text{ les accélérations articulaires de dimension } (n,1) \\ \dot{q}\dot{q} = \begin{bmatrix}\dot{q}_1\dot{q}_2 & \cdots & \dot{q}_1\dot{q}_n & \dot{q}_2\dot{q}_3 & \cdots & \dot{q}_{n-1}\dot{q}_n\end{bmatrix}^T \text{de dimension } (n(n-1)/2,1) \\ \dot{q}^2 = \begin{bmatrix}\dot{q}_1^2 & \cdots & \dot{q}_n^2\end{bmatrix}^T \text{de dimension}(n,1) \\ A \text{ la matrice d'inertie du système ou matrice des masses de dimension } (n,n) \\ B \text{ la matrice des termes de Coriolis du système de dimension } (n, n(n-1)/2) \\ C \text{ la matrice des termes Centrifuges du système de dimension } (n,n) \\ g \text{ le vecteur colonne des efforts de gravité de dimension } (n,1). \end{cases}$$

## 3.2 Modèle dynamique direct

Pour obtenir le modèle dynamique inverse, il faut écrire les accélérations articulaires en fonction des efforts articulaires. Il suffit pour cela d'inverser la matric $A$. Celle-ci est toujours inversible car symétrique définie positive par construction :

$$\ddot{q} = A^{-1}\left(\tau + B\dot{q}\dot{q} + C\dot{q}^2 + g\right)$$

## 3.3 Modèle dynamique opérationnel

Lorsque l'effecteur du robot évolue en contact avec un environnement, il peut être intéressant de connaitre les efforts qui peuvent être appliqués par l'effecteur sur cet environnement.
On appelle torseur des efforts opérationnels, le torseur des efforts transmis au corps terminal par la chaine articulaire. Pour les calculer, il faut supposer que le système est à l'équilibre. On a alors :

$$\tau = J_P E_P$$

avec $\Gamma_P$ le vecteur des efforts opérationnels.
En dehors des singularités, on a alors :

$$E_P = J_P^{-1} \tau$$

Par ailleurs, le modèle cinématique s'écrit $V_P = J_P \dot{q}$. En le dérivant on a donc :

$$\dot{V}_P = J_P \ddot{q} + \dot{J}_P \dot{q}$$

En dehors des singularités on peut alors écrire :

$$\ddot{q} = J_P^{-1} \left( \dot{V}_P - \dot{J}_P \dot{q} \right)$$

Le modèle dynamique s'écrit alors :

$$\begin{aligned} E_P &= J_P^{-1} \tau = J_P^{-1} \left( A\ddot{q} + B\dot{q}\dot{q} + C\dot{q}^2 + g \right) \\ &= J_P^{-1} \left( A J_P^{-1} \dot{V}_P - A J_P^{-1} \dot{J}_P \dot{q} + B\dot{q}\dot{q} + C\dot{q}^2 + g \right) \end{aligned}$$

Soit :

$$E_P = A_x \dot{V}_P + \mu_x + g_x$$

avec :

$$\begin{cases} A_x = J_P^{-1} \ A \ J_P^{-1} \\ \mu_x = J_P^{-1} \left( -A J_P^{-1} \dot{J}_P \dot{q} + B\dot{q}\dot{q} + C\dot{q}^2 \right) \\ g_x = J_P^{-1} g \end{cases}$$

On appelle cette relation : modèle dynamique opérationnel inverse.

# Chapitre 4

## Analyse du modèle dynamique

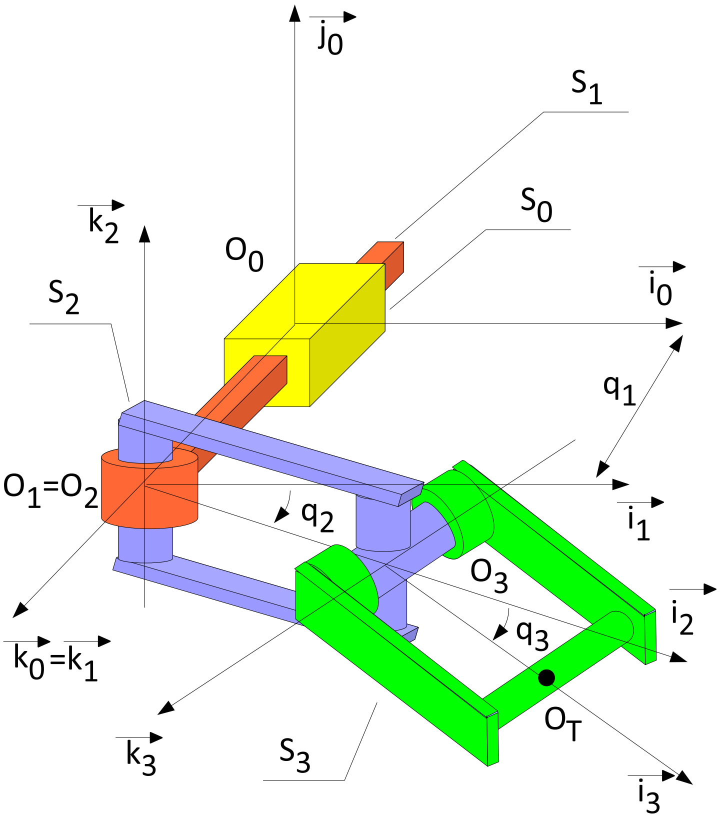
## 4.1 Objectif

L'analyse de la dynamique est en fait une analyse des efforts transmis le long de la chaine des corps.
Le modèle dynamique consiste à égaliser les efforts et les effets inertiels, centrifuges et coriolis. Par identifications, on peut donc parler d'efforts inertiel, centrifuge ou de coriolis équivalents.
L'objet de l'analyse est de déterminer les configurations dans lesquels ces efforts sont extrémaux, pourquoi certains termes sont constants, nuls, ne dépendent que de certaines variables... On doit par l'analyse du système retrouver les informations analytiques du modèle dynamique.

## 4.2 Exemple

### 4.2.1 Description

On considère un robot de type PRR. Il est constitué de 4 corps :
- $S_0$ le bâti lié à un repère orthonormé direct galiléen $\mathcal{R}_0 = (O_0, \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{k_0})$, $\overrightarrow{k_0}$ vertical ascendant.
- $S_1$ en liaison glissière d'axe $(O_0, \overrightarrow{k_0})$ avec le bâti. On lui attache le repère orthonormé direct $\mathcal{R}_1 = (O_1, \overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1})$ tel que $\overrightarrow{O_0O_1} = q_1\overrightarrow{k_1}$, $\overrightarrow{k_1} = \overrightarrow{k_0}$, $\overrightarrow{i_1} = \overrightarrow{i_0}$ et $\overrightarrow{j_1} = \overrightarrow{j_0}$.
- $S_2$ en liaison pivot d'axe $(O_1, \overrightarrow{j_0})$ avec le corps $S_1$. On lui attache le repère orthonormé direct $\mathcal{R}_2 = (O_2, \overrightarrow{i_2}, \overrightarrow{j_2}, \overrightarrow{k_2})$ tel que $O_2 = O_1$, $\overrightarrow{k_2} = \overrightarrow{j_0}$, $q_2 = (\overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{i_2})$ mésuré autour de $\overrightarrow{k_2}$.
- $S_3$ en liaison pivot d'axe $(O_3, \overrightarrow{k_3})$ avec le corps $S_2$. On lui attache le repère orthonormé direct $\mathcal{R}_3 = (O_3, \overrightarrow{i_3}, \overrightarrow{j_3}, \overrightarrow{k_3})$ tel que $\overrightarrow{O_2O_3} = a_2\overrightarrow{i_2}$, $(\overrightarrow{k_2}, \overrightarrow{k_3}) = \pi/2$ mesuré autour de $\overrightarrow{i_2}$, $q_3 = (\overrightarrow{i_2}, \overrightarrow{i_3})$ mésuré autour de $\overrightarrow{k_3}$.

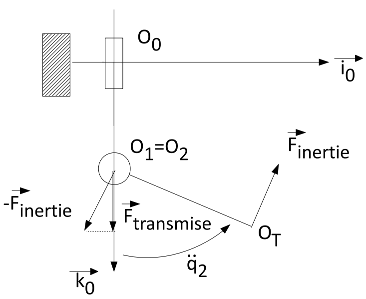


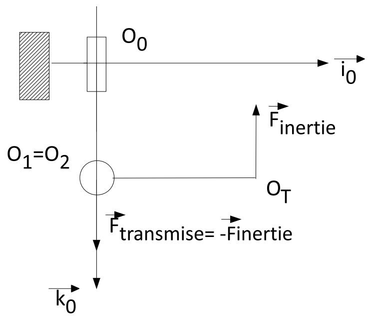

### 4.2.2 Modélisation dynamique

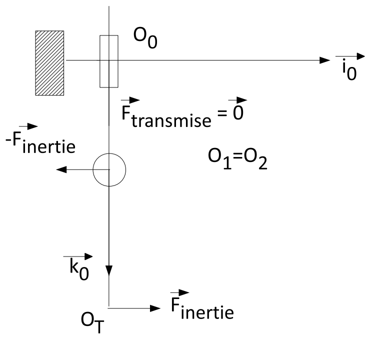
Pour répondre aux questions suivantes, inspirez-vous de la façon de répondre à : Dans quelle direction sont les forces d'inertie produites par une accélération de l'axe 2 lorsque l'axe 3 est bloqué de sorte que $q_3 = 0$. Comment sont-elles transmises à l'axe 1 ? Dans quelles configurations articulaires la force transmise est maximale, minimale ?

Réponse :

Lorsqu'on fait une accélération $\ddot{q}_2$ du corps 2 par rapport au corps 1, le corps $S_2$ subit une force équivalente $\overrightarrow{F}_{inertie}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{O_2O_T}$. et d'un moment $\overrightarrow{M}_{inertie}(O_2)$ porté par $\overrightarrow{j_0}$ car la liaison 2 est un pivot d'axe $(O_2, \overrightarrow{j_0})$. Ce moment est nul s'il n'y a pas d'actionneur, et vaut $\tau_2$ si elle est actionnée en série. Donc le corps $S_1$ subit $-\overrightarrow{F}_{inertie}$ et$-\overrightarrow{M}_{inertie}(O_2)$. Comme la liaison 1 est une glissière d'axe $(O_2, \overrightarrow{k_0})$, le seul effort d'inertie qui aura un effet sur le corps $S_1$ est la composante de la force suivant $\overrightarrow{k_0}$. Donc la norme de la force transmise à l'axe 1 est maximale lorsque la force inertielle est parallèle à $\overrightarrow{k_0}$, c'est-à-dire lorsque $q_2 = pi/2$ et minimale lorsqu'elle est perpendiculaire à $\overrightarrow{k_0}$ soit pour $q_2 = 0$.



1. On suppose que l'axe 3 est bloqué avec $q_3 = 0$.
   (a) Dans quelle direction sont les forces centrifuges produites par une vitesse de l'axe 2. Comment sont-elles transmises à l'axe 1 ? Dans quelles configurations articulaires la force transmise est maximale, minimale ?
   (b) Dans quelle direction sont les forces de gravité sur le corps 2 . Comment sont-elles transmises à l'axe 1 ? Dans quelles configurations articulaires la force transmise est maximale, minimale ?
2. On suppose que l'axe 3 n'est plus bloqué, que l'axe 2 est bloqué avec $q_2 = 0$.
   (a) Dans quelle direction sont les forces d'inertie produites par une accélération de l'axe 3. Comment sont-elles transmises à l'axe 2 ? Dans quelles configurations articulaires la force transmise est maximale, minimale ? Comment sont-elles transmises à l'axe 2 ? Dans quelles configurations articulaires la force transmise est maximale, minimale ?
   (b) Dans quelle direction sont les forces centrifuges produites par une vitesse de l'axe 2. Comment sont-elles transmises à l'axe 2 ? Dans quelles configurations articulaires la force transmise est maximale, minimale ?
   (c) Dans quelle direction sont les forces de gravité sur le corps 3 . Comment sont-elles transmises à l'axe 2 ? Dans quelles configurations articulaires la force transmise est maximale, minimale ?
3. On suppose que l'axe 3 n'est plus bloqué, que l'axe 2 est bloqué avec $q_2 = \pi/2$.
   (a) Dans quelle direction sont les forces d'inertie produites par une accélération de l'axe 3. Comment sont-elles transmises à l'axe 2 ? Dans quelles configurations articulaires la force transmise est maximale, minimale ? Comment sont-elles transmises à l'axe 2 ? Dans quelles configurations articulaires la force transmise est maximale, minimale ?
   (b) Dans quelle direction sont les forces centrifuges produites par une vitesse de l'axe 2. Comment sont-elles transmises à l'axe 2 ? Dans quelles configurations articulaires la force transmise est maximale, minimale ?
   (c) Dans quelle direction sont les forces de gravité sur le corps 3 . Comment sont-elles transmises à l'axe 2 ? Dans quelles configurations articulaires la force transmise est maximale, minimale ?