Examen d'apprentissage artificiel
Année universitaire 2021-2022

Nom:	
Prénom:	

Exercice 1 – 5pts

On considère les données ci-dessous dont on souhaite réduire la dimension.

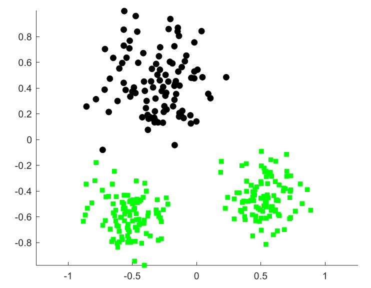


Figure 1

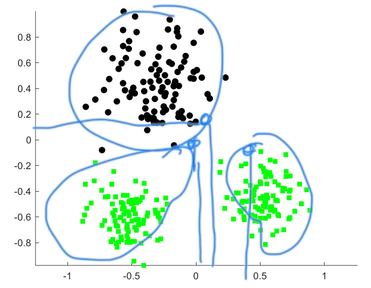


Figure 2

1. Dans un premier temps, on applique l'ACP. Les vecteurs propres et valeurs propres de la matrice de covariance des points sont donnés par :

$$v_1 = \begin{bmatrix} -0.72 \\ -0.68 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -0.68 \\ 0.72 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 0.19 \;\; \lambda_2 = 0.28$$

   a. (0.5 pts) Tracer Figure 1 l'axe sur lequel seront projetées les données.

   b. Donner la coordonnée du point $\begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$ sur ce nouvel axe.

[-0.5, -0.5]*[-0.68 0.72]' = -0.0208

2. Dans un second temps, on applique la LDA. U = noir = Cn

   a. (1.5 pts) On donne ci-dessous les matrices de covariance de la classe verte Cv, de la classe noire Cn et de tout le nuage de point C. Réaffecter la matrice à chaque ensemble de points.

$$U = \begin{bmatrix} 0.05 & -0 \\ 0 & 0.06 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.04 \\ 0.04 & 0.03 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.04 \\ -0.04 & 0.2 \end{bmatrix}$$

W=C U=Cn V= Cv

Μπορεί να το εξηγήσει κάποιος επιτέλους? κλαίω πολύ

   b. (2 pts) Sachant que la classe verte a une probabilité de 2/3, et que le centre de chaque classe est donné par : $\begin{bmatrix} -0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 \\ -0.5 \end{bmatrix}$, retrouvez les matrices de covariance inter-classe et intra-classe.

m = P1*m1+P2*m2 = [-0.1 -0.2]

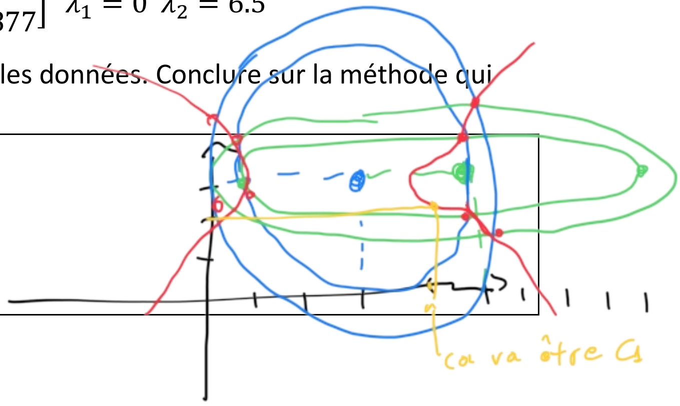
Cintra = P1*C1+P2*C2 = $\begin{bmatrix} 0.2165 & 0.0239 \\ 0.0239 & 0.0366 \end{bmatrix}$

Cinter = P1*(m1-m)'*(m1-m) + P2*(m2-m)'*(m2-m) = $\begin{bmatrix} 0.0207 & -0.0651 \\ -0.0651 & 0.2046 \end{bmatrix}$

c. (1 pts) Les vecteurs propres et valeurs propres de Cintra^{-1}Cinter sont donnés par :

$$v_1 = \begin{bmatrix} -0.9530 \\ -0.3031 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0.1566 \\ -0.9877 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 6.5$$

Tracer Figure 2 l’axe sur lequel seront projetées les données. Conclure sur la méthode qui parait la plus adaptée à ce problème



Exercice 2 – 5 pts

On considère un problème de classification à deux classes où chaque classe est représentée par sa moyenne et sa matrice de covariance :

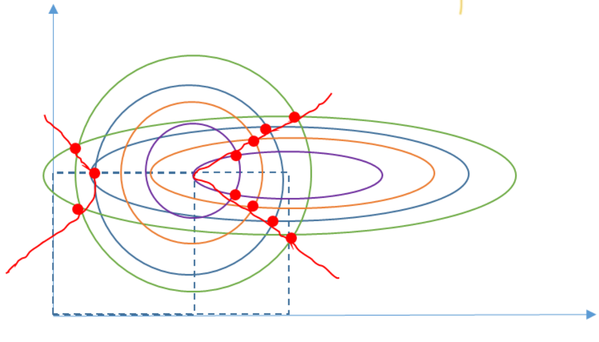
$$\mu_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad C_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \mu_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(1 \; -1) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

1. (2 pts) Tracer la frontière interclasse en utilisant l’approche nearest mean et la distance de Mahalanobis

$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$(1 \; -1) \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 4 + 4 = 8$



$(-1 \; -1) \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} =$

$(-1 \; -1) \begin{pmatrix} -16 \\ -1 \end{pmatrix} =$

$16 + 1 = 17$

2. (3 pts) Comment sera classé le point $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$? Retrouver ce résultat par le calcul

Visuellement, C1
Par le calcul
[3-4;3-2]'*inv([4 0; 0 4])*[3-4;3-2] = 0.5

[5-4;3-2]'*inv([16 0; 0 1])*[5-4;3-2] =1.06

⇨ C1

$(m_1 - x)^T \cdot Inv(C_1)(m_1 - x)$

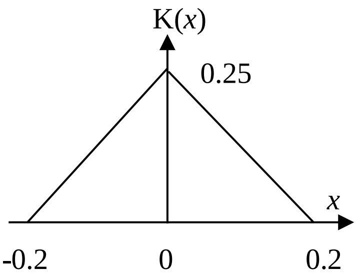
$(m_2 - X)^T \cdot Inv(C_2)(m_2 - X)$

Exercice 3 – 6 pts

On considère les points suivants dont on souhaite estimer la densité de probabilité.

0.7	1.5	0.1	0.7	0.6	1.5	2.3	2.8	0.2	0.3

1. (3 pts) Dans un premier temps, on utilise une méthode d'estimation par noyau en utilisant le noyau suivant :



Estimer la densité de probabilité en 0 0.5 1.0 1.5.

P(0)=1/10(0.25/2)=0.0125

P(0.5)=1/10(0.25/2)=0.0125
P(1)=1/10(0)=0
P(1.5)=1/10(0.25)=0.025

2. (3 pts) Dans un second temps, on décide d'utiliser une estimation paramétrique en utilisant une modélisation par $p(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$
Retrouver l'expression analytique de λ en utilisant la règle du maximum de vraisemblance.

$$L = \prod_i \lambda e^{-\lambda x_i}$$
$$l = \sum_i \ln(\lambda) - \lambda x_i$$
$$\frac{dl}{d\lambda} = \sum_i \frac{1}{\lambda} - x_i = 0$$
$$\lambda = N / \sum_i x_i$$

Exercice 4 – 4 pts

On souhaite détecter des visages dans les images. Pour cela, nous utilisons un détecteur de l'état de l'art dont la sensibilité et la spécificité sont données pour différents points de fonctionnement :

	S1	S2	S3	S4	S5
sensibilité	0	0.75	0.9	0.95	1
spécificité	1	0.94	0.87	0.75	0

Sachant que ces résultats ont été obtenus sur une base de données comportant 200 visages et 800 non visages, Déterminer l'expression analytique du taux de reconnaissance en fonction des éléments connus et déterminer le taux obtenu pour les points de fonctionnement S1 et S5.

TP=sens*200
TN=spe*800
Taux=(TP+TN)/1000
0.8000 0.9000 0.8800 0.7900 0.2000