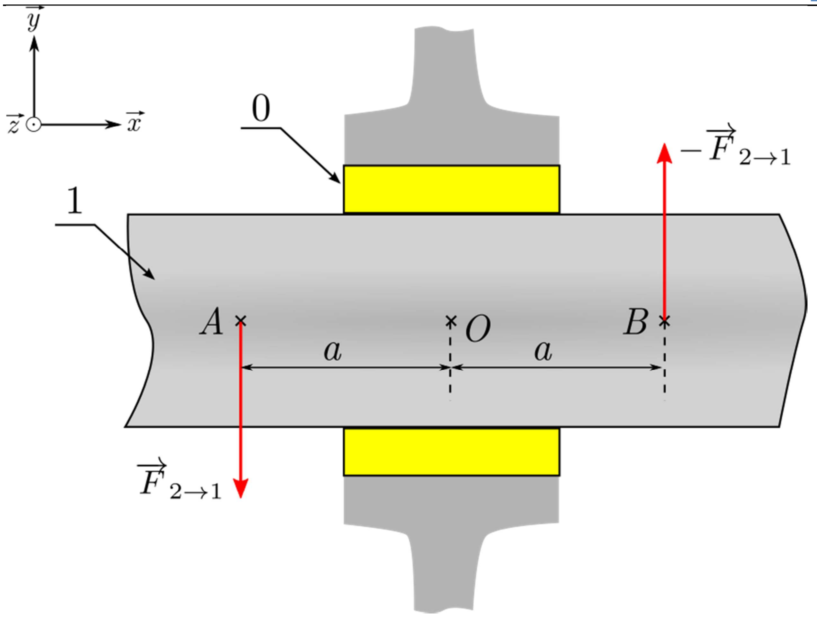
NOM : CORRIGÉ Prénom :

Palier lisse soumis à un moment pur



Ce palier lisse 0 de centre O est soumis à deux forces $\vec{F}_{2\to1}$ et $-\vec{F}_{2\to1}$ $\left(\vec{F}_{2\to1} = -F\vec{y}\right)$ appliquées en A et en B, s'appliquant d'un solide 2 (non représenté) sur l'arbre 1.

L'objectif du travail demandé est de déterminer la pression maximale de contact en vue de dimensionner ce palier.

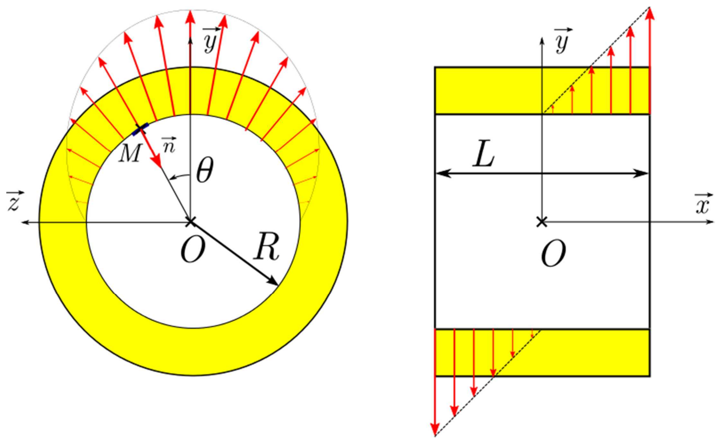
Q1. Exprimer le torseur des actions mécaniques $\left\{\Im_{2\to1}\right\}$ relatif à la force $\vec{F}_{2\to1} = -F\vec{y}$ au point A puis au point O. En déduire Les actions mécaniques exercées par l'arbre 1 sur le palier 0 sous la forme du torseur $\left\{\Im_{1\to0}\right\}$ exprimé au point O.

$$\left\{\Im_{2\to1}\right\} = \begin{Bmatrix} \left(F-F\right)\vec{y} \\ 2aF\vec{z} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ 2aF\vec{z} \end{Bmatrix}_O$$

$$\left\{\Im_{2\to1}\right\} + \left\{\Im_{0\to1}\right\} = \left\{0\right\} \Rightarrow \left\{\Im_{1\to0}\right\} = \left\{\Im_{2\to1}\right\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ 2aF\vec{z} \end{Bmatrix}_O$$

Q2. Calculer les éléments de réduction du torseur $\left\{\Im_{1\to0}\right\}$ au point O pour $F = 200$ N ; $a = 50$ mm

Résultat : $\left\{\Im_{1\to0}\right\} = \begin{Bmatrix} \vec{0}\,(N) \\ 20\vec{z}\,(N.m) \end{Bmatrix}_O$



Les actions mécaniques déterminées précédemment résultent d'une répartition de pression modélisée sur les figures ci-contre.

Le modèle retenu est tel que :

$$d\vec{N}\left(M\right) = -p\left(M\right)\vec{n}dS \quad \text{où}$$

$$p\left(M\right) = p\left(\theta, x\right) = p_0 . \frac{2x}{L}\cos\theta$$

On note : $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r + x\vec{x}$; $-\vec{n} = \vec{e}_r = \cos\theta\vec{y} + \sin\theta\vec{z}$; $\vec{e}_\theta = -\sin\theta\vec{y} + \cos\theta\vec{z}$

Q3. Écrire les équations qui relient le modèle de répartition de pression défini précédemment et les éléments de réduction du torseur $\left\{\Im_{1\to 0}\right\}$ au point O.

La relation entre les composantes du torseur et la pression est :

$$\vec{F}_{2\to 1} = \vec{0} = \int_S -p(\theta)\vec{n}dS \text{ et } 2aF\vec{z} = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \left(-p(\theta)\vec{n}\right)dS$$

Q4. En déduire le coefficient p_0 caractérisant la répartition de pression en fonction de F. La clarté du raisonnement est un critère d'évaluation.

$$\begin{aligned}(F-F)\vec{y} &= \int_S p_0 \frac{2x}{L}\cos\theta\left(\cos\theta\vec{y} + \sin\theta\vec{z}\right)Rdxd\theta \\ &= \frac{2p_0R}{L}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\theta\vec{y} + \sin\theta\cos\theta\vec{y}\right)d\theta \underbrace{\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} xdx}_{=0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2aF\vec{z} &= \int_S \overrightarrow{OM} \wedge p_0\frac{2x}{L}\cos\theta\vec{e}_r Rdxd\theta \\ &= \frac{2p_0R}{L}\int_S\left(\left(R\vec{e}_r + x\vec{x}\right)\wedge\vec{e}_r\right)x\cos\theta dxd\theta \\ &= \frac{2p_0R}{L}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\left(-\sin\theta\vec{y} + \cos\theta\vec{z}\right)d\theta\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}x^2dx \\ &= \frac{2p_0R}{L}\left[\frac{X^3}{3}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\left(\left[\frac{1}{2}\cos^2\Theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\vec{y} + \left[\frac{\Theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\Theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\vec{z}\right) \\ &= \frac{2p_0R}{L}\frac{L^3}{12}\frac{\pi}{2}\vec{z}\end{aligned}$$

On en déduit donc : $p_0 = \dfrac{24aF}{\pi RL^2}$

Q5. Calculer p_0 et p_{max} pour les valeurs précédentes de F et de a et pour $R = 10$ mm et $L = 20$ mm

$p_0 = p_{max} \simeq 19{,}1\, MPa$

Q6. L'arbre tourne à 1000 tr·min^{-1} pendant 1 heure. Exprimer puis calculer l'énergie dissipée en Joules (J) si le coefficient de frottement vaut $f = 0{,}1$.

On montre que $C_f = 2fp_0LR^2$. L'énergie dissipée correspond au travail de ce couple de frottement qui peut s'exprimer sous la forme : $W\left(C_f\right) = C_f.\alpha = C_f.\omega.\Delta t$ A.N. : $C_f = 2{,}88.10^6 J$