Formulaire de mécanique générale

par spécialité génie mécanique

Introduction

Ces quelques pages de formulaire n'ont bien évidemment pas la prétention de l'exhaustivité. Elles ne font qu'invotorier quelques formules (sans les démontrer) de mécanique générale qui devriaent sont des prérequis à la formation d'ingénieur en Génie Mécanique à Polytech Sorbonne.

1 Rappels mathématiques

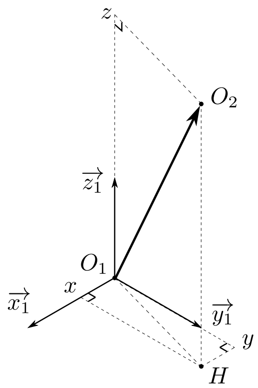
1.1 Repérage, paramétrage

Positionner un repère $\mathcal{R}_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ par rapport à un repère $\mathcal{R}_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ revient :

- à déterminer la position de O_2 dans $\mathcal{R}_1$

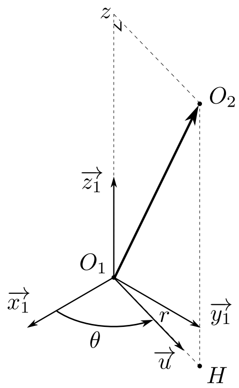
- à déterminer l'orientation de la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ par rapport à la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

Les coordonnées cartésiennes de O_2 dans $\mathcal{R}_1$ sont les composantes x, y, z du vecteur $\overrightarrow{O_1O_2}$ exprimées dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: $\overrightarrow{O_1O_2} = x\vec{x}_1 + y\vec{y}_1 + z\vec{z}_1$



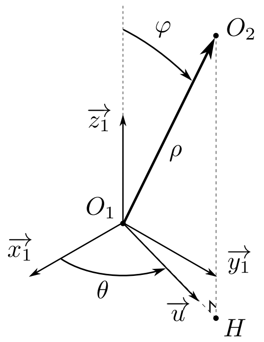
Les coordonnées cylindriques r, θ, z sont construites par la projection orthogonale H de O_2 sur $(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$.

On définit alors $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{O_1H}}{||\overrightarrow{O_1H}||}$ $r = \overline{O_1H}$ et $\theta = (\vec{x}_1, \vec{u})$. On peut donc établir le lien entre coordonnées cartésiennes et cylindriques : $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ même repérage en z.



Les coordonnées sphériques ρ, θ, φ sont contruites telles que : $\rho = \overline{O_1O_2}$, $\theta = (\vec{x}_1, \vec{u})$ et $\varphi = (\vec{z}_1, \overrightarrow{O_1O_2})$.

Le lien entre coordonnées sphériques et coordonnées cartésiennes est défini par les relations suivantes : $x = \rho \sin\varphi \cos\theta$, $y = \rho \sin\varphi \sin\theta$ et $z = \rho \cos\varphi$



1.2 Calcul vectoriel

Produit scalaire : le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$

Le produit scalaire est symétrique : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, distributif : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, et vérifie : $a\vec{u} \cdot b\vec{v} = ab\, \vec{v} \cdot \vec{u}$ où a et b sont des réels.

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

Produit vectoriel : le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que $\vec{w}$ est perpendiculaire à la fois à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tel que le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est direct et tel que

$\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.|\sin(\vec{u}, \vec{v})|$

Le produit vectoriel est anti-symétrique $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$, ditributif par rapport à l'addition

$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

$a\vec{u} \wedge b\vec{v} = ab\, \vec{v} \wedge \vec{u}$ où a et b sont des réels

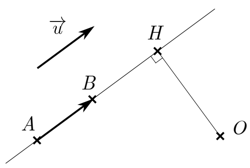
Le double produit vectoriel peut se simplifier : $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} + (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$

Le produit mixte des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ est $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$ alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$

Champs de vecteurs

Un glisseur est défini par un point A et un vecteur $\vec{u}$. Sur le dessin suivant, on dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un représentant du vecteur $\vec{u}$.



On appelle moment en O du glisseur $(A, \vec{u})$ le vecteur $\vec{M}_O(\vec{u}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{u}$

La position de A sur la droite (AB) n'a pas d'influence sur le moment $\vec{M}_O(\vec{u})$. On peut donc faire « glisser » le vecteur sur sa droite support, d'où l'emploi du terme « glisseur ».

Cette propriété peut se démontrer en écrivant $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA}$ et donc $\vec{M}_O(\vec{u}) = (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA}) \wedge \vec{u}$

$\overrightarrow{HA}$ et $\vec{u}$ étant colinéaires, il reste $\vec{M}_O(\vec{u}) = \overrightarrow{OH} \wedge \vec{u}$

On fait ainsi apparaitre la notion de bras de levier puisque $\|\vec{M}_O(\vec{u})\| = \|\overrightarrow{OH}\| \, \|\vec{u}\|$, la distance OH est le bras de levier dans le calcul du moment en O du glisseur $(A, \vec{u})$. On notera que OH est la distance la plus courte du point de calcul du moment à la droite support du glisseur.

On montre par ailleurs que l'égalité suivante est vérifiée et on parle alors d'un champ de moment :

$$\vec{M}_P(\vec{u}) = \vec{M}_O(\vec{u}) + \overrightarrow{PO} \wedge \vec{u}$$

1.3 Torseurs

C'est un outil mathématique omniprésent en mécanique. Un torseur est défini par ses deux éléments de réduction : un vecteur $\vec{R}$ appelé résultante du torseur et un champ de vecteur $\vec{M}$ appelé moment.

Le torseur se note ainsi et vérifie la relation du champ de moment :

$$\{\mathfrak{I}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_O \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_P = \vec{M}_O + \overrightarrow{PO} \wedge \vec{R} \end{array} \right\}_P$$

Pour additionner deux torseurs, il faut préalablement les écrire au même point :

$$\{\mathfrak{I}_1\} + \{\mathfrak{I}_2\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_{1O} \end{array} \right\}_O + \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_{2O} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{M}_{1O} + \vec{M}_{2O} \end{array} \right\}_O$$

Torseurs particuliers :

On parle de torseur couple lorsque la résultante est nulle : $\{\mathfrak{I}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{M}_O \end{array} \right\}_O$ ce qui rend ce torseur invariant par changement de point.

1.4 Dérivation vectorielle

La dérivée d'un vecteur $\vec{u}$ par rapport à t dans un espace vectoriel E est le vecteur défini par :

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)_E = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\vec{u}(t+\varepsilon) - \vec{u}(t)}{\varepsilon}$$

2 Cinématique

Pour un point P donné, la position dans un repère $\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est définie par le vecteur $\overrightarrow{OP}(t)$. La courbe formée des positions successives de P s'appelle trajectoire.

La vitesse de P par rapport à $\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ à l'instant t est le vecteur :

$$\vec{V}(P/\mathcal{R}) = \left(\frac{d}{dt} \overrightarrow{OP}(t) \right)_{\mathcal{R}}$$

ce vecteur est toujours tangent à la trajectoire de P.

L'accélération de P par rapport à $\mathcal{R}(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ à l'instant t est le vecteur :

$$\vec{a}(P/\mathcal{R}) = \left(\frac{d}{dt}\vec{V}(P/\mathcal{R})\right)_{\mathcal{R}}$$

Dans l'études des systèmes mécaniques qui nous entourent, il est souvent plus approprié d'étudier des mouvements de corps solides les uns par rapport aux autres. Dans ce cas, on suppose qu'il y a cinématiquement équivalence entre le solide lui-même et le repère qui lui est attaché. On assimile donc aisément le solide S_i au repère $\mathcal{R}_i$ associé.

La cinématique se ramène bien souvent à l'étude du mouvement relatif de deux solides qui peut donc être rapporté au mouvement relatif de deux repères.

2.1 Dérivation avec changement de base

Lorsqu'on travaille avec des mécanisme complexes, il est souvent aisé d'exprimer les différents vecteurs en utilisant les vecteurs de bases différentes (ie de bases attachées à des solides différents).

Dans ce cas, la formule de dérivation avec changement de base est particulièrement adaptée :

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{\mathcal{B}_1} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{\mathcal{B}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1} \wedge \vec{u}$$

$\vec{\Omega}_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1}$ est le vecteur taux de rotation de la base $\mathcal{B}_2$ par rapport à la base $\mathcal{B}_1$. Les composantes de ce vecteur sont des vitesses angulaires en radians par seconde (rad.s^{-1}). Les vecteurs taux de rotations se composent, on peut par exemple écrire : $\vec{\Omega}_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1} = \vec{\Omega}_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_3} + \vec{\Omega}_{\mathcal{B}_3/\mathcal{B}_1}$.

2.2 Torseur cinématique

En cinématique du solide, on étudie généralement la vitesse d'un point dans le mouvement d'une solide par rapport à un autre solide. Par la suite, la vitesse du point P dans le mouvement du solide S_2 par rapport au solide S_0 (par exemple) sera notée : $\vec{V}_{P,S_2/S_0}$

On montre que la vitesse d'un solide dans son mouvement par rapport à un autre solide vérifie la relation d'un champ de moment de torseur :

$$\vec{V}_{P,S_2/S_0} = \vec{V}_{O,S_2/S_0} + \overrightarrow{\mathrm{PO}} \wedge \vec{\Omega}_{S_2/S_0}$$

On définit alors plus largement le torseur cinématique d'un solide S_2 par rapport à une solide S_0 :

$$\{\mathcal{V}_{S_2/S_0}\} = \left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}_{S_2/S_0}\\ \vec{V}_{O,S_2/S_0}\end{matrix}\right\}_O = \left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}_{S_2/S_0}\\ \vec{V}_{P,S_2/S_0} = \vec{V}_{O,S_2/S_0} + \overrightarrow{\mathrm{PO}} \wedge \vec{\Omega}_{S_2/S_0}\end{matrix}\right\}_P$$

Equiprojectivité

Le champ des vitesses est équiprojectif, ainsi :

$$\forall A, \forall B \qquad \overrightarrow{AB} \cdot \vec{V}_{A,S_2/S_0} = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{V}_{B,S_2/S_0}$$

Mouvement de translation

Dans le cas d'un mouvement de translation, le torseur est un torseur couple :

$$\{\mathcal{V}_{S_2/S_0}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V}_{O,S_2/S_0} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V}_{P,S_2/S_0} = \vec{V}_{O,S_2/S_0} \end{Bmatrix}_P$$

Mouvement de rotation instantanée

Si $\exists A$, $\{\mathcal{V}_{S_2/S_0}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{S_2/S_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$ alors $\forall B$: $\{\mathcal{V}_{S_2/S_0}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{S_2/S_0} \\ \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}_{S_2/S_0} \end{Bmatrix}_B$

Le solide S_2 est animé d'un mouvement de rotation par rapport au solide S_0 autour de l'axe central (Δ) du torseur cinématique. La direction de (Δ) est identique à celle de $\vec{\Omega}_{S_2/S_0}$ et (Δ) passe par le point A.

Composition des vecteurs vitesses

La vitesse absolue d'un point P par rapport à un repère R_0 (associé au solide S_0) est par définition :

$\vec{V}_{P/R_0} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_{R_0}$

De même, la vitesse du même point P par rapport à un repère R_1 (attaché à un solide S_1) s'écrit :

$\vec{V}_{P/R_1} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{O_1P}}{dt}\right)_{R_1}$ c'est la vitesse relative

La relation de Chasles donne alors : $\vec{V}_{P/R_0} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right)_{R_0} + \left(\frac{d\,\overrightarrow{O_1P}}{dt}\right)_{R_0}$

$\left(\frac{d\,\overrightarrow{O_1P}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{O_1P}}{dt}\right)_{R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \overrightarrow{O_1P}$ (dérivation avec changement de base)

Ainsi : $\vec{V}_{P/R_0} = \vec{V}_{P/R_1} + \vec{V}_{O_1/R_0} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \overrightarrow{O_1P}$

Or, $\vec{V}_{P,R_1/R_0} = \vec{V}_{O_1,R_1/R_0} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \overrightarrow{O_1P}$ est la vitesse du point coïncidant avec P à l'instant t dans le mouvement de R_1 par rapport à R_0 (ie de S_1 par rapport à S_0). C'est la vitesse d'entrainement.

En synthèse : $\vec{V}_{P/R_0} = \vec{V}_{P/R_1} + \vec{V}_{P,R_1/R_0}$

Loi de composition des torseurs

On peut composer un torseur cinématique d'autant de torseurs cinématiques que nécessaire :

$$\{\mathcal{V}_{S_n/S_0}\} = \{\mathcal{V}_{S_n/S_{n-1}}\} + \cdots + \{\mathcal{V}_{S_2/S_1}\} + \{\mathcal{V}_{S_1/S_0}\} = \sum_{i=1}^{n} \{\mathcal{V}_{S_i/S_{i-1}}\}$$

2.3 Accélérations

Champ des accélérations

Le champ des accélérations peut être déduit du champ des vitesses :

$\vec{V}_{P,S_1/R_0} = \vec{V}_{O,S_1/R_0} + \overrightarrow{\mathrm{PO}} \wedge \vec{\Omega}_{S_1/R_0}$

$$\left(\frac{d\vec{V}_{P,S_1/R_0}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{V}_{O,S_1/R_0}}{dt}\right)_{R_0} + \left(\frac{d(\overrightarrow{PO} \wedge \vec{\Omega}_{S_1/R_0})}{dt}\right)_{R_0}$$

$$\vec{\Gamma}_{P,S_1/R_0} = \vec{\Gamma}_{O,S_1/R_0} + \left(\frac{d(\overrightarrow{PO} \wedge \vec{\Omega}_{S_1/R_0})}{dt}\right)_{R_0}$$

Relation qui conduit à : $\vec{\Gamma}_{P,S_1/R_0} = \vec{\Gamma}_{O,S_1/R_0} + \left(\frac{d\vec{\Omega}_{S_1/R_0}}{dt}\right)_{R_0} \wedge \overrightarrow{OP} + \vec{\Omega}_{S_1/R_0} \wedge (\vec{\Omega}_{S_1/R_0} \wedge \overrightarrow{OP})_{R_0}$

Ce qui démontre que le champ des accélérations **n'est pas** un champ de moment de torseur.

Composition des accélérations

On peut tirer de la composition des vitesses :

$$\left(\frac{d\vec{V}_{P/R_0}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{V}_{P/R_1}}{dt}\right)_{R_0} + \left(\frac{d\vec{V}_{O_1,R_1/R_0}}{dt}\right)_{R_0} + \frac{d}{dt}(\vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \overrightarrow{O_1P})_{R_0}$$

$$\left(\frac{d\vec{V}_{P/R_1}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{V}_{P/R_1}}{dt}\right)_{R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{V}_{P/R_1} = \vec{\Gamma}_{P/R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{V}_{P/R_1}$$

$$\left(\frac{d\vec{V}_{O_1,R_1/R_0}}{dt}\right)_{R_0} = \vec{\Gamma}_{O_1,R_1/R_0}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \overrightarrow{O_1P})_{R_0} = \frac{d}{dt}(\vec{\Omega}_{R_1/R_0})_{R_0} \wedge \overrightarrow{O_1P} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \frac{d}{dt}(\overrightarrow{O_1P})_{R_0}$$

$$\vec{\Gamma}_{P/R_0} = \vec{\Gamma}_{P/R_1} + \vec{\Gamma}_{P,R_1/R_0} + 2 \cdot \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{V}_{P/R_1}$$

3 Cinétique

Torseur cinétique

On considère un système matériel (ayant une masse m) $\mathcal{E}$, constitué d'un ensemble de solides, en mouvement par rapport à un repère R_0.

Le torseur cinétique s'écrit alors :

$$\{\mathcal{C}_{\mathcal{E}/R_0}\} = \left\{\begin{array}{c} \displaystyle\int_{P\in\mathcal{E}} \vec{V}_{P/R_0}\, dm(P) \\ \vec{\sigma}_{A,\mathcal{E}/R_0} = \displaystyle\int_{P\in\mathcal{E}} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}_{P/R_0}\, dm(P) \end{array}\right\}_A$$

$\vec{\sigma}_{A,\mathcal{E}/R_0}$ est le moment cinétique au point A dans le mouvement du système matériel $\mathcal{E}$ par rapport à R_0.

Si l'on considère le centre de gravité G du système matériel : $m(\Sigma)\overrightarrow{OG} = \int_{P\in\mathcal{E}} \overrightarrow{OP}\, dm(P)$

Si l'on considère égamement la matrice de l'opérateur d'inertie de $\mathcal{E}$ au point G :

$$I_G(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} \int_{\mathcal{E}}(y^2+z^2)dm & -\int_{\mathcal{E}}(xy)dm & -\int_{\mathcal{E}}(zx)dm \\ -\int_{\mathcal{E}}(xy)dm & \int_{\mathcal{E}}(x^2+z^2)dm & -\int_{\mathcal{E}}(yz)dm \\ -\int_{\mathcal{E}}(zx)dm & -\int_{\mathcal{E}}(yz)dm & \int_{\mathcal{E}}(x^2+y^2)dm \end{pmatrix}_{G,\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{G,\mathcal{B}_0}$$

Où $\mathcal{B}_0$ est une base orthonormée directe attachée à $\mathcal{E}$.

Alors

$$\{\mathcal{C}_{\mathcal{E}/R_0}\} = \left\{\begin{array}{c} m\vec{V}_{G/R_0} \\ \vec{\sigma}_{G,\mathcal{E}/R_0} = I_G(\mathcal{E})\vec{\Omega}_{\mathcal{E}/R_0} \end{array}\right\}_G = \left\{\begin{array}{c} m\vec{V}_{G/R_0} \\ \vec{\sigma}_{A,\mathcal{E}/R_0} = \vec{\sigma}_{G,\mathcal{E}/R_0} + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{V}_{G/R_0} \end{array}\right\}_A$$

Torseur dynamique

Le torseur dynamique d'un système matériel $\mathcal{E}$ en mouvement par rapport à un repère R_0 s'écrit en un point A quelconque s'écrit :

$$\{\mathcal{D}_{\mathcal{E}/R_0}\} = \left\{\begin{array}{c} \displaystyle\int_{P\in\mathcal{E}} \vec{\Gamma}_{P/R_0}\, dm(P) \\ \vec{\delta}_{A,\mathcal{E}/R_0} = \displaystyle\int_{P\in\mathcal{E}} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}_{P/R_0}\, dm(P) \end{array}\right\}_A$$

En s'appuyant sur les définition précédentes du centre de gravité et de la matrice de l'opérateur d'inertie.

$$\{\mathcal{D}_{\mathcal{E}/R_0}\} = \begin{Bmatrix} m\vec{\Gamma}_{G/R_0} \\ \vec{\delta}_{G,\mathcal{E}/R_0} = \dfrac{d}{dt}(I_G(\mathcal{E})\vec{\Omega}_{\mathcal{E}/R_0})_{R_0} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} m\vec{\Gamma}_{G/R_0} \\ \vec{\delta}_{A,\mathcal{E}/R_0} = \vec{\delta}_{G,\mathcal{E}/R_0} + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{\Gamma}_{G/R_0} \end{Bmatrix}_A$$

Energie cinétique

L'énergie cinétique E_C du système $\mathcal{E}$ dans son mouvement par rapport à R_0 s'écrit :

$2E_{C_{\mathcal{E}/R_0}} = \{\mathcal{V}_{\mathcal{E}/R_0}\} \otimes \{\mathcal{C}_{\mathcal{E}/R_0}\} = m V^2_{G/R_0} + \vec{\Omega}_{\mathcal{E}/R_0} \cdot I_G(\mathcal{E})\vec{\Omega}_{\mathcal{E}/R_0}$

où $\otimes$ désigne le comoment c'est à dire le produit scalaire croisé des résultantes et des moments.

4 Actions mécaniques

On distingue généralement deux catégories d'actions mécaniques :

- les actions de contact qui sont des forces surfaciques qui résultent d'appuis sur le système isolé

- les actions à distance qui sont des forces volumiques et sont généralement la conséquence d'attractions (pesanteur, forces magnétiques ou électromagnétiques)

Quelque soit la nature d'une action mécanique, elle peut être représentée par un torseur qui comporte deux composantes :

- la résultante des forces qui s'exprime en Newtons (N), c'est la part de l'action mécanique qui tend à créer une translation

- le moment des forces qui s'exprime en Newtons-mètre (N.m), c'est la part de l'action mécanique qui tend à créer une rotation

Ainsi, le torseur de toutes les actions mécaniques s'exerçant sur un système matériel $\mathcal{E}$ s'écrit :

$$\{\mathfrak{I}_{\bar{\mathcal{E}}\to\mathcal{E}}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{\bar{\mathcal{E}}\to\mathcal{E}} \\ \vec{M}_{A,\bar{\mathcal{E}}\to\mathcal{E}} \end{Bmatrix}_A$$

Les propriétés habituelles des torseurs s'appliquent : $\vec{M}_{B,\bar{\mathcal{E}}\to\mathcal{E}} = \vec{M}_{A,\bar{\mathcal{E}}\to\mathcal{E}} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_{\bar{\mathcal{E}}\to\mathcal{E}}$

Le torseur des actions de contact d'un solide S_2 sur un solide S_1 s'écrit :

$$\{\mathfrak{I}_{S_2\to S_1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{S_2\to S_1} \\ \vec{M}_{A,S_2\to S_1} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{S_2\to S_1} \\ \vec{M}_{B,S_2\to S_1} = \vec{M}_{A,S_2\to S_1} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_{S_2\to S_1} \end{Bmatrix}_B$$

Le torseur des actions de pesanteur sur le solide S_1 de masse m est un glisseur, ainsi (si $\vec{z}$ est vertical descendant):

$$\{\mathfrak{I}_{\text{pes}\to S_1}\} = \begin{Bmatrix} m\,g\,\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} m\,g\,\vec{z} \\ \vec{M}_{B,\text{pes}\to S_1} = \overrightarrow{BG} \wedge m\,g\,\vec{z} \end{Bmatrix}_B$$

5 Principe fondamental de la dynamique

Il existe au moins un repère R_g appelé repère Galiléen tel que, pour tout système matériel $\mathcal{E}$ en mouvement par rapport à R_g, le torseur dynamique de $\mathcal{E}$ dans son mouvement par rapport à R_g soit égal au torseur des actions mécaniques extérieures à $\mathcal{E}$:

$$\{\mathcal{D}_{\mathcal{E}/R_g}\} = \{\mathfrak{I}_{\bar{\mathcal{E}}\to\mathcal{E}}\}$$

Cette équation torsorielle inclut deux équations vectorielles :

- le théorème de la résultante dynamique : $m\vec{\Gamma}_{G/R_g} = \vec{R}_{\bar{\mathcal{E}}\to\mathcal{E}}$

- le théorème du moment dynamique : $\forall A\colon \vec{\delta}_{A,\mathcal{E}/R_0} = \vec{M}_{A,\bar{\mathcal{E}}\to\mathcal{E}}$

6 Energétique

6.1 Puissances

La puissance développée par les actions mécaniques exercées par un système matériel $\mathcal{S}$ sur un système matériel $\mathcal{E}$ ($\mathcal{S} \in \bar{\mathcal{E}}$) peut être qualifiée de puissance extérieure.

Elle s'écrit : $\mathcal{P}_{\mathcal{S}\to\mathcal{E}/R_0} = \{\mathfrak{I}_{\mathcal{S}\to\mathcal{E}}\} \otimes \{\mathcal{V}_{\mathcal{E}/R_0}\}$ où $\otimes$ désigne le comoment c'est à dire le produit scalaire croisé des résultantes et des moments :

$$\forall A\colon \mathcal{P}_{\mathcal{S}\to\mathcal{E}/R_0} = \left\{\begin{matrix} \vec{R}_{\mathcal{S}\to\mathcal{E}} \\ \vec{M}_{A,\mathcal{S}\to\mathcal{E}} \end{matrix}\right\}_A \otimes \left\{\begin{matrix} \vec{\Omega}_{\mathcal{E}/R_0} \\ \vec{V}_{A,\mathcal{E}/R_0} \end{matrix}\right\}_A = \vec{R}_{\mathcal{S}\to\mathcal{E}} \cdot \vec{V}_{A,\mathcal{E}/R_0} + \vec{M}_{A,\mathcal{S}\to\mathcal{E}} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{E}/R_0}$$

Puissance des inter-efforts

On qualifie de puissance des inter-efforts une puissance associée à des actions mécaniques réciproques. Ainsi, si deux systèmes $\mathcal{S}$ et $\mathcal{E}$ par rapport à un repère R_0 la puissance :

$\mathcal{P}_{S\leftrightarrow\mathcal{E}/R_0} = \mathcal{P}_{S\to\mathcal{E}/R_0} + \mathcal{P}_{\mathcal{E}\to S/R_0}$ on montre que cette puissance est invariante par changement de repère, on note donc plus simplement : $\mathcal{P}_{S\leftrightarrow\mathcal{E}}$

Théorème de l'énergie cinétique

Pour un système matériel $\mathcal{E}$ constitué de n solides $\mathcal{S}_i$, la puissance développée par les efforts intérieurs et extérieurs au système est égale à la variation par rapport au temps de l'énergie cinétique.

Ainsi :

$$\frac{dE_{C_{\mathcal{E}/R_g}}}{dt} = \mathcal{P}_{\bar{\mathcal{E}}\to\mathcal{E}/R_g} + P_{S_i\to S_j}$$

où $2E_{C_{\mathcal{E}/R_0}} = mV^2_{G/R_0} + \vec{\Omega}_{\mathcal{E}/R_0} \cdot I_G(\mathcal{E})\vec{\Omega}_{\mathcal{E}/R_0}$

to be followed ....