



Théorie des mécanismes

Mécanique - Mécanisme

Cours - Réf:26030 - MàJ:24-09-2010

Un chapitre où tout l'art consiste à compter les nombres d'inconnues et d'équations...

Acquis antérieurs

Approche cinématique

- Nombre de cycles.
- Détermination du nombre d'équations.
- Détermination du nombre d'inconnues.
- Indice de mobilité.
- Degré de mobilité d'un mécanisme.
- Mobilité utile et mobilité interne.
- Degré de statisme.
- Approche globale

Approche dynamique

- Détermination du nombre d'équations.
- Détermination du nombre d'inconnues.
- Indice de mobilité.
- Isostatisme - Hyperstatisme.
- Degré de mobilité d'un mécanisme.
- Statisme - Cinématisme.

Bilan : ce qu'il faut retenir

- Vocabulaire, notations et formulaire.
- Quelle approche privilégier?

La théorie des mécanismes s'appuie sur l'étude des chaînes fermées de solides et a pour buts :

- L'analyse de la structure d'un mécanisme, afin d'émettre un avis sur la pertinence des solutions adoptées pour remplir la fonction mécanique souhaitée.
- La détermination de la(les) loi(s) entrée-sortie.
- L'analyse de la transmission d'énergie en vue du dimensionnement des organes mécaniques.

Acquis antérieurs

- Solides indéformables
- Graphe des liaisons, ~des contacts
Chaîne ouverte, ~fermée
- Mobilité, degré de liberté
- Les liaisons usuelles :
 - point de vue cinématique :
 - torseur cinématique associé
 - notions de paramétrage géométrique et cinématique
 - point de vue dynamique :
 - torseur des actions mécaniques transmissibles dans le cas des liaisons parfaites
- Schéma cinématique
- Lois de composition des mouvements
- Principe fondamental de la statique.

Approche cinématique

Soit le graphe des liaisons connu pour un mécanisme donné, ou le graphe proposé pour un mécanisme à concevoir.

- Soit N_p le nombre de sommets du graphe (le nombre de pièces)

- Soit N_L le nombre d'arcs du graphe (le nombre de liaisons)

Nombre de cycles

La théorie des mécanismes s'applique à l'étude des chaînes fermées de solides. Le premier souci est donc de les dénombrer.

On appelle nombre de cycles le nombre de chaînes fermées indépendantes nécessaires pour décrire un graphe. Ce nombre est noté μ et est calculé par la formule

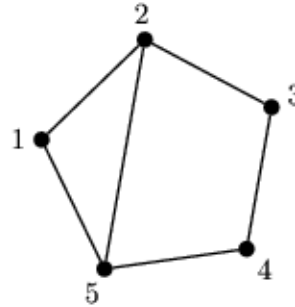
$$\mu = 1 + N_L - N_p$$

Soit un mécanisme dont le graphe des liaisons est donné ci-contre :

$$N_L = 6$$

$$N_p = 5$$

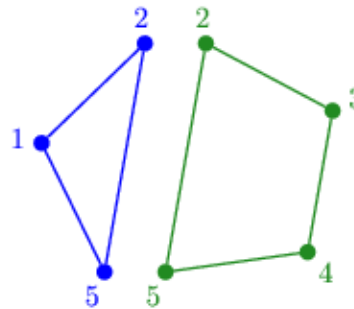
donc $\mu = 2$



Ces deux chaînes fermées indépendantes sont par exemple :

$$\begin{array}{l} 1-2-5-1 \\ 2-3-4-5-2 \end{array}$$

Il existe une troisième chaîne fermée, 1-2-3-4-5-1, mais qui se déduit des deux précédentes. (cf. § suivant)



Détermination du nombre d'équations

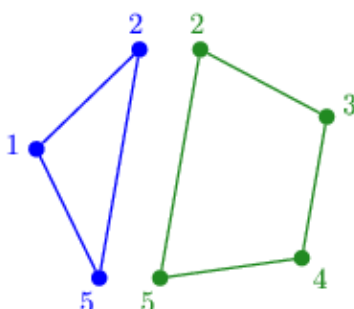
Une fois les chaînes fermées indépendantes dénombrées, la résolution du problème se poursuit en appliquant la loi de composition des mouvements sur chacune de ces chaînes, en partant de la constatation triviale que :

$$\forall i, \mathcal{V}(i/i) = \mathcal{O}$$

Il y a donc autant d'équations torsorielles indépendantes que de chaînes fermées indépendantes. Soit E_C le nombre d'équations scalaires issues de ces équations de fermeture cinématique :

$$E_C = 6 \mu$$

En reprenant l'exemple précédent, les deux équations torsorielles indépendantes à considérer sont, par exemple



$$\begin{array}{l} \mathcal{V}(1/2) + \mathcal{V}(2/5) + \mathcal{V}(5/1) = \mathcal{O} \\ \mathcal{V}(2/3) + \mathcal{V}(3/4) + \mathcal{V}(4/5) + \mathcal{V}(5/2) = \mathcal{O} \end{array}$$

Ce qui donne 12 équations scalaires...

Remarque : Si l'on somme les deux équations précédentes, on obtient

Approche globale

Sachant que

$$\begin{aligned} m &= I_c - r_c \\ h &= E_c - r_c \end{aligned}$$

On en déduit

$$m - h = I_c - E_c$$

L'indice de mobilité d'un mécanisme est égal à la différence entre les degrés de mobilité et de statisme.
L'utilisation de cette relation fait l'objet d'un chapitre particulier.

Approche dynamique

Soit le graphe des liaisons connu pour un mécanisme donné, ou le graphe proposé pour un mécanisme à concevoir.

- Soit N_p le nombre de sommets du graphe (le nombre de pièces)
- Soit N_L le nombre d'arcs du graphe (le nombre de liaisons)

Détermination du nombre d'équations

Une étude dynamique systématique est menée en étudiant le mouvement ou l'équilibre de chacune des pièces du mécanisme.

Le mouvement ou l'équilibre étant nécessairement relatif à une de ces pièces, prise comme référentiel, on dénombre alors $N_p - 1$ solides à étudier.

En général, le bâti est considéré comme un référentiel galiléen satisfaisant, et tous les mouvements à considérer pour cette recherche exhaustive sont relatifs à celui-ci.

Soit E_s le nombre d'équations scalaires obtenues après une étude exhaustive :

$$E_s = 6 (N_p - 1)$$

Détermination du nombre d'inconnues

Soit I_s le nombre d'inconnues d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons du problème.

Ce nombre se détermine en sommant les nombres de paramètres d'actions mécaniques transmissibles par chacune des N_L liaisons.

Le nombre d'inconnues dépend de la nature des modèles adoptés pour les liaisons.

Avec l'hypothèse de liaisons parfaites, il y a dualité entre le torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison et son torseur cinématique :

$$\forall t, \mathcal{V}(i/j) \otimes \mathcal{F}(j \rightarrow i) = \mathcal{O}$$

Pour une liaison donnée à k inconnues cinématiques, on a donc $6 - k$ inconnues d'actions mécaniques transmissibles.

Indice de mobilité

Soit à résoudre le système de E_s équations obtenues à I_s inconnues dénombrées. Ce système est un système linéaire avec second membre, qui peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{matrix} & \overbrace{\hspace{10em}}^{I_s \text{ colonnes}} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{E_s \text{ lignes}} \left[\begin{array}{c} \text{Matrice} \end{array} \right] \begin{matrix} \left[\begin{array}{c} I_s \end{array} \right] \end{matrix} = \begin{matrix} \left[\begin{array}{c} \text{Second} \\ \text{membre} \end{array} \right] \end{matrix}$$

Le second membre comporte :

- les composantes d'actions mécaniques extérieures autre que les inconnues de liaison ;
-> Poids - Couple ou effort, moteur ou résistant - actions externes ou internes dues à des éléments déformables - ...
- les composantes dynamiques.
-> cf. cours de dynamique

On constate les égalités suivantes :

$$I_c - E_c = (6N_L - I_c) - 6(N_L - N_p + 1) = 6(N_p - 1) - I_s = E_s - I_s$$

On définit ainsi l'indice de mobilité comme étant également le nombre $E_s - I_s$

Isostatisme - Hyperstatisme

La résolution du système d'équations précédent prend en compte son rang, noté r_s .

Dans le cas où $r_s = I_s$, la seule solution du système homogène associé est la nullité de toutes les inconnues, donc de tous les paramètres d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons. Cette constatation induit les deux définitions suivantes :

- Un mécanisme est dit isostatique si, en l'absence d'actions mécaniques extérieures, toutes les inconnues d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons sont nulles.
- Un mécanisme est dit hyperstatique si, en l'absence d'actions mécaniques extérieures, il existe des inconnues d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons non nulles, dans les faits indéterminées.

Dans le cas contraire, supposons connu le rang du système et les équations disposées ainsi :

$$\begin{matrix} & \overbrace{\hspace{10em}}^{I_s} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{E_s} \left[\begin{array}{c} \overbrace{\hspace{5em}}^{r_s} \\ \text{Matrice} \end{array} \right] \begin{matrix} \left[\begin{array}{c} I_s \end{array} \right] \end{matrix} = \begin{matrix} \left[\begin{array}{c} \text{Second} \\ \text{membre} \end{array} \right] \end{matrix}$$

On définit le degré de statisme h par

$$h = I_s - r_s$$

Le nombre définissant le degré de statisme est un entier naturel,
 $h \geq 0$, en effet $r_s \leq \min(I_s, E_s)$

Le degré de statisme h représente le nombre d'inconnues qu'il faut passer dans le second membre.
 Ce sont des inconnues d'actions mécaniques de liaison ne pouvant pas être déterminées par la seule théorie des mécanismes.

Un mécanisme hyperstatique est plus rigide au sens de la résistance des matériaux.
 Quand cela est souhaité, les contraintes induites ont un coût, au sens financier du terme.

L'hyperstatisme s'achète, et les critères d'évaluation de la pertinence de ce choix dépassent très largement le cadre de ce cours.

Degré de mobilité d'un mécanisme

Soit le nombre m défini par

$$m = E_s - r_s$$

Ce nombre est appelé **degré de mobilité du mécanisme**.

Le nombre définissant le degré de mobilité est un entier naturel, donc positif ou nul.
 $m \geq 0$, en effet $r_s \leq \min(I_s, E_s)$

Il exprime le nombre d'équations ne servant pas à la détermination des actions mécaniques de liaison, de la forme $0 = 0$ pour l'équation homogène associée.

De par la dualité entre les deux approches, on peut formuler la proposition suivante : Là où n'existe aucune composante d'action mécanique transmissible apparaît une possibilité de mouvement.

Finalement, la forme du système d'équation peut être présentée de la manière suivante :

$$\begin{array}{c} \text{\textit{E}_s \text{ lignes}} \end{array} \left[\begin{array}{c} \overbrace{\hspace{1.5cm}}^{\text{\textit{I}_s \text{ colonnes}}} \\ \begin{array}{|c|} \hline \overbrace{\hspace{1.5cm}}^{\text{\textit{r}_s}} \quad \overbrace{\hspace{1.5cm}}^{\text{\textit{h}}} \\ \hline \end{array} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{\textit{m}}} \end{array} \right] \begin{array}{|c|} \hline \text{\textit{I}_s} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{Second} \\ \hline \text{membre} \\ \hline \end{array}$$

Statisme - Cinématisme

Il faut reprendre l'histoire de la mécanique pour comprendre l'origine des termes utilisés.

C'est bien évidemment la modélisation des actions mécaniques qui a longtemps causé souci. Le vocabulaire associé aux torseurs est un exemple de cet héritage. (Résultante - Moment - Glisseur - Couple - ...). Cette préoccupation se retrouve dans la théorie des mécanismes, où parmi les notions fortes sont l'isostatisme et l'hyperstatisme.

Aujourd'hui, on pourrait parler sans difficulté d'isocinématisme ou d'hypercinématisme lors de l'approche cinématique : pour en savoir plus, consulter par exemple l'excellent ouvrage de Michel Lajoie et Bernard Lodier (cf bibliographie)

Bilan - Ce qu'il faut retenir

Vocabulaire, notation et formulaire

| | Approche cinématique | Approche dynamique |
|-----------------------------------|-----------------------|---------------------|
| Nombre de pièces d'un mécanisme | N_p | |
| Nombre de liaisons d'un mécanisme | N_L | |
| Nombre de cycles | $\mu = N_L - N_p + 1$ | |
| Nombre d'équations | $E_c = 6 \mu$ | $E_s = 6 (N_p - 1)$ |
| Nombre d'inconnues | I_c | I_s |
| Indice de mobilité | $I_c - E_c$ | $E_s - I_s$ |
| Degré de mobilité | $m = I_c - r_c$ | $m = E_s - r_s$ |
| Degré de statisme | $h = E_c - r_c$ | $h = I_s - r_s$ |
| Approche globale | $I_c - E_c = m - h$ | $E_s - I_s = m - h$ |

Quelle approche privilégier ?

Toute étude commence par une approche globale. En effet, il est inutile de se lancer dans des calculs qui deviennent très rapidement complexes pour déboucher sur des conclusions triviales. Par ailleurs, il n'est pas inutile d'avoir une idée préliminaire de ce vers quoi on tend.

Pour une recherche des degrés de mobilité et de statisme, l'approche cinématique est à privilégier, et ce pour deux raisons :

- Les grandeurs manipulées sont observables et mesurables.
- Le nombre d'équations à manipuler est en général bien inférieur à celui obtenu par l'approche dynamique.

Pour une recherche de la loi entrée-sortie d'un point de vue dynamique, l'approche énergétique (cf. cours de dynamique) est à privilégier. Le théorème de l'énergie cinétique donne un résultat immédiat.

L'approche dynamique enfin est à mener lorsque l'on cherche à dimensionner les composants d'un mécanisme. Il est alors seulement nécessaire de connaître les torseurs d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons.