

# ÉLÉMENTS DE THÉORIE DES MÉCANISMES

---

# Introduction

La **théorie des mécanismes** regroupe un ensemble de méthodes permettant l'étude des mécanismes et des structures, afin de :

- les comprendre
- les améliorer
- les concevoir

Cette théorie s'appuie sur deux domaines de la mécanique, la statique et la cinématique.



# Définitions

- Une **pièce** représente un sous ensemble rigide d'un mécanisme (à lier à la notion de classe d'équivalence ou d'ensemble cinématiquement lié)
- La notion de **liaison** s'appuie sur la notion de contact entre deux pièces.

Ces contacts sont supposés s'établir entre des surfaces fonctionnelles identifiées.

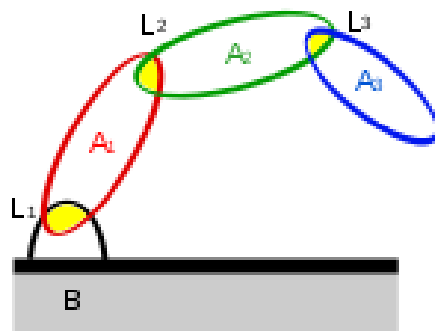
Ces liaisons sont aptes à transmettre certaines actions mécaniques ou à interdire certains mouvements.



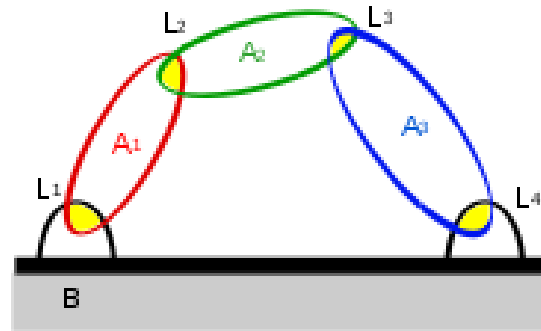
# Définitions

- Les **mécanismes** et les **structures** regroupent des pièces et des liaisons. Il n'y a *a priori* pas de corrélation directe entre le nombre de pièces et le nombre de liaisons.

Certains mécanismes sont voués à se mouvoir tandis que certaines structures ou certains montage sont par nature immobiles.



4 pièces et 3 liaisons

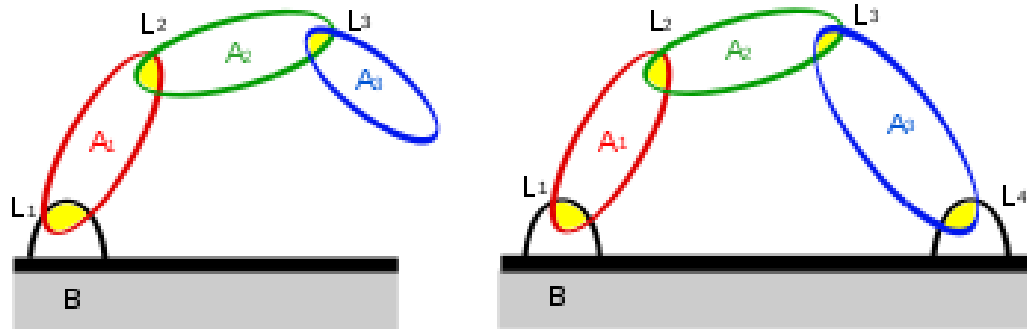


4 pièces et 4 liaisons



# Définitions

- Dans un mécanisme formé de  $n + 1$  pièces, on appelle généralement **socle** ou **bâti** celle qui sert de référence pour étudier, par la statique ou la cinématique, le comportement des  $n$  autres pièces.



Ces deux mécanismes comportent 3 pièces en plus du bâti



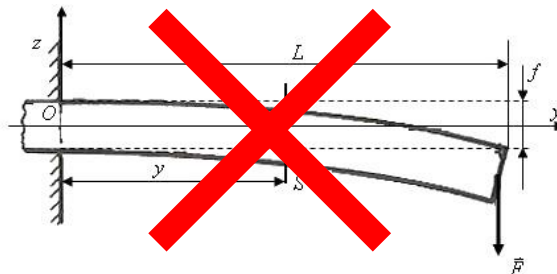
# Hypothèses sur les pièces

La théorie des mécanisme s'appuie sur les deux domaines que sont la statique et la cinématique du solide indéformable, ainsi :

- Les **pièces** sont parfaitement indéformables

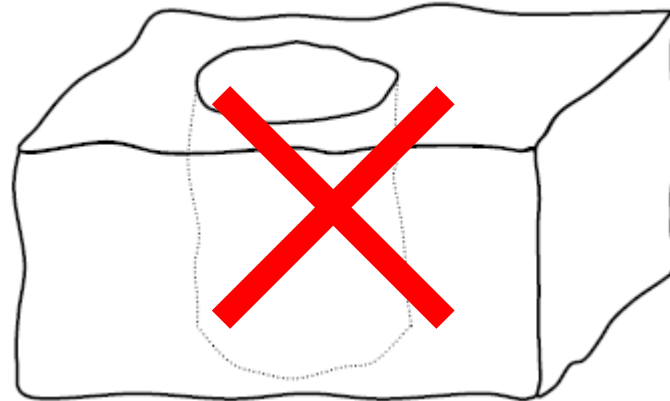
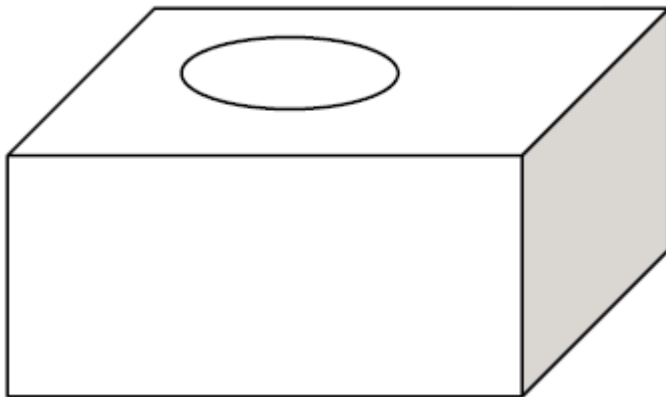
Les dimensions ou les distances prises sur une pièces sont supposées invariables.

Par extension, un ressort est un élément déformable qui ne peut pas être considéré comme une pièce au sens de la théorie des mécanismes.



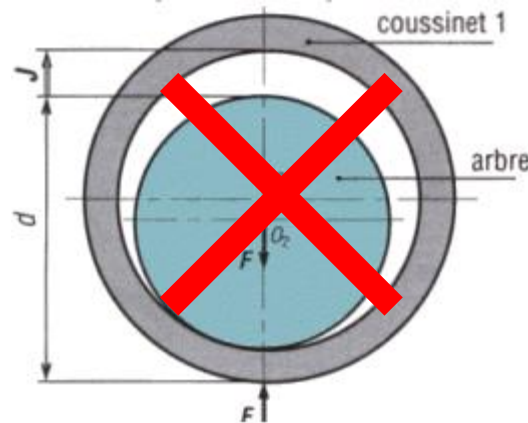
# Hypothèses sur les surfaces

- Les **surfaces fonctionnelles** dont le contact forme les liaisons sont supposées géométriquement parfaites, les défauts de forme micro et macro géométriques sont donc négligés.
- Les surfaces élémentaires simples à associer pour former les liaisons sont : les plans, les cylindres, les sphères



# Hypothèses sur les liaisons

- Les **liaisons** sont supposées parfaites, c'est-à-dire sans jeu, ni serrage, ni frottement.

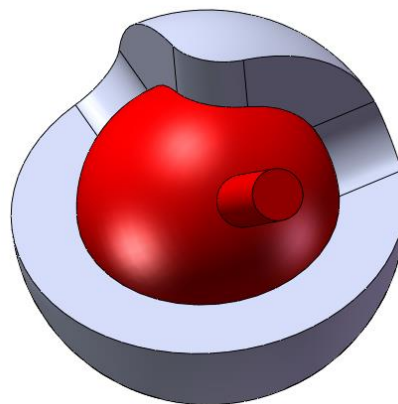
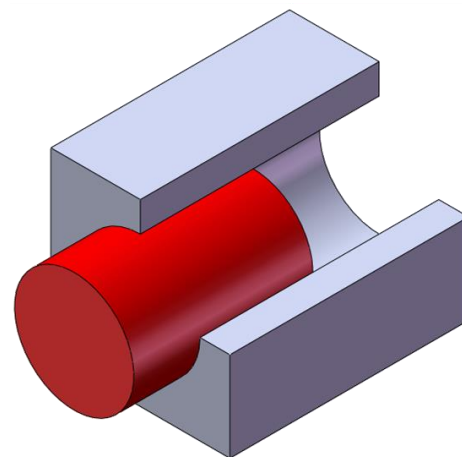
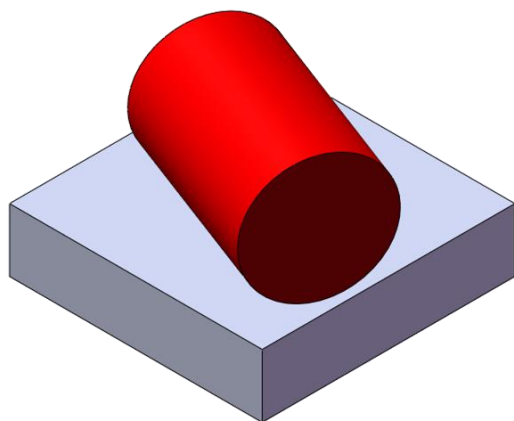
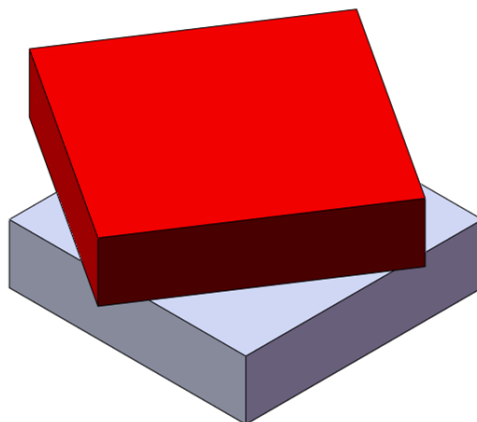
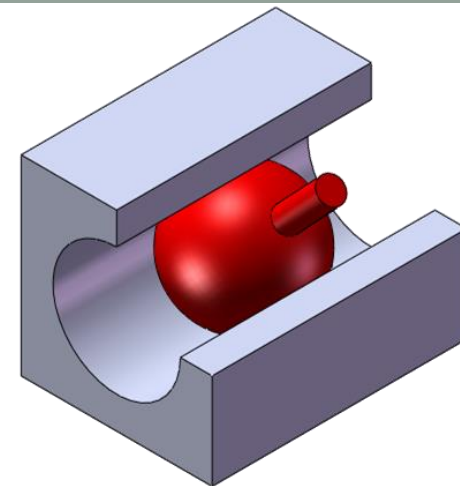
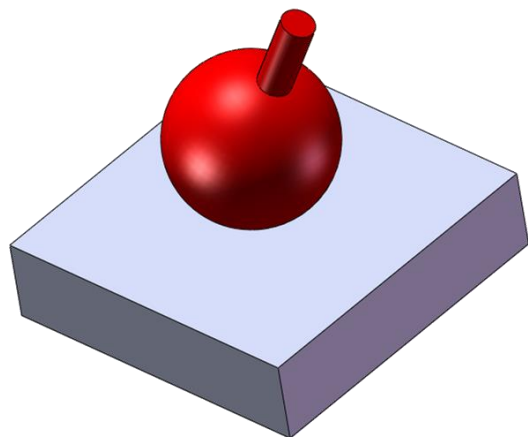




# Liaisons et associations de surfaces

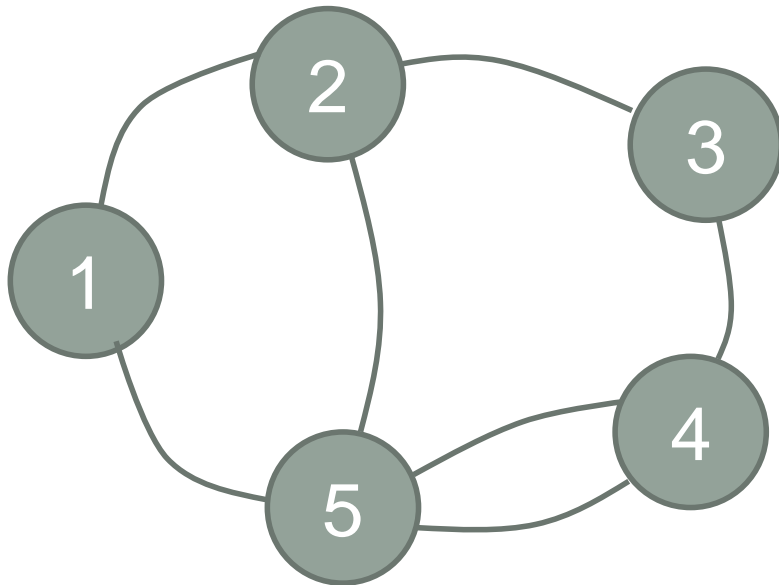
| association          | liaison                            |
|----------------------|------------------------------------|
| plan et sphère       | appui <b>ponctuel</b>              |
| plan et cylindre     | appui <b>linéaire rectiligne</b> , |
| plan et plan         | appui <b>plan</b>                  |
| cylindre et sphère   | appui <b>linéaire annulaire</b>    |
| cylindre et cylindre | pivot glissant                     |
| sphère et sphère     | Liaison rotule ou « sphérique »    |





# Graphe des contacts

- La notion de liaison étant étroitement liée à la notion de contact, chaque contact entre pièces correspond à une liaison.
- On peut répertorier l'ensemble des contacts sous la forme du graphe suivant



Si  $n$  désigne le nombre de pièces hors bâti et  $n_l$  le nombre de liaisons, on a ici :

$$n = 4$$

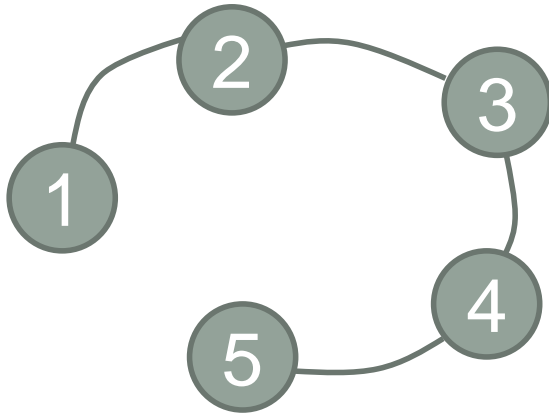
$$n_l = 7$$



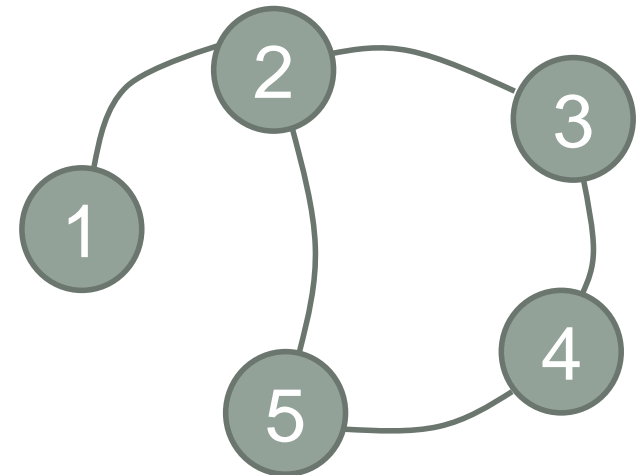
# Graphe des contacts

- On distingue généralement 3 types de graphes :

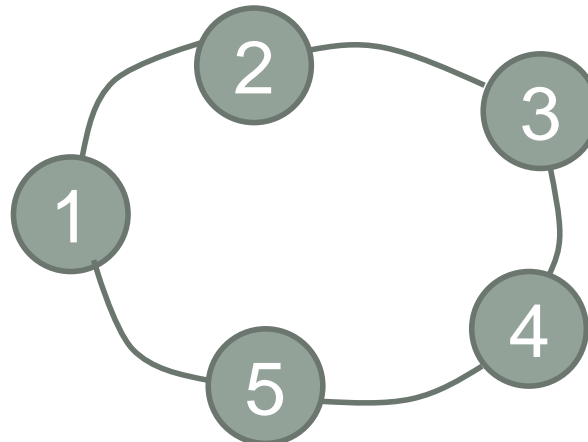
Les chaines ouvertes



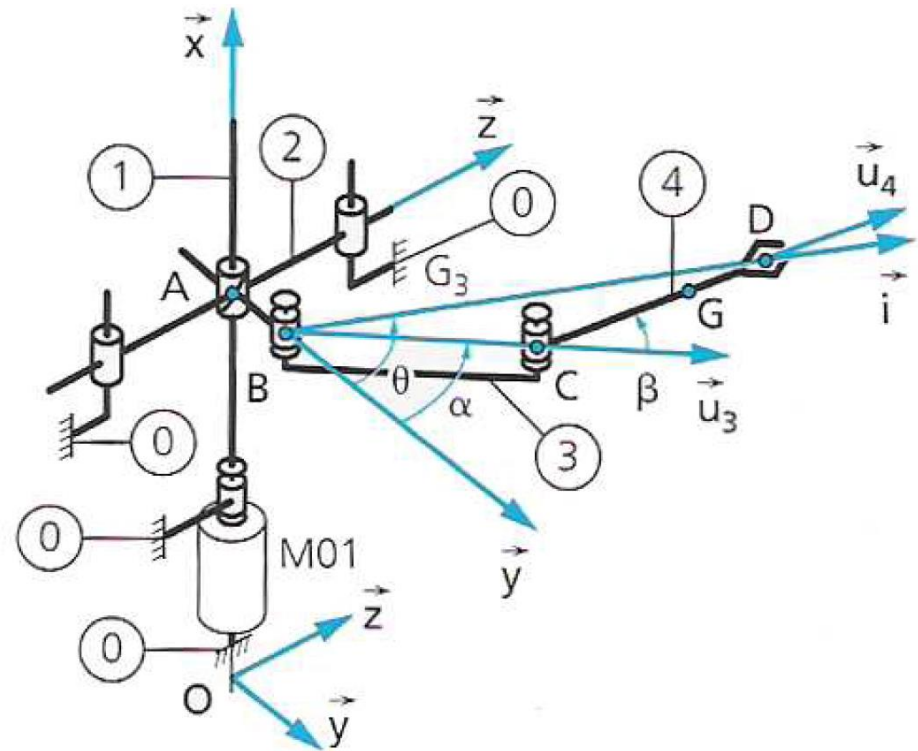
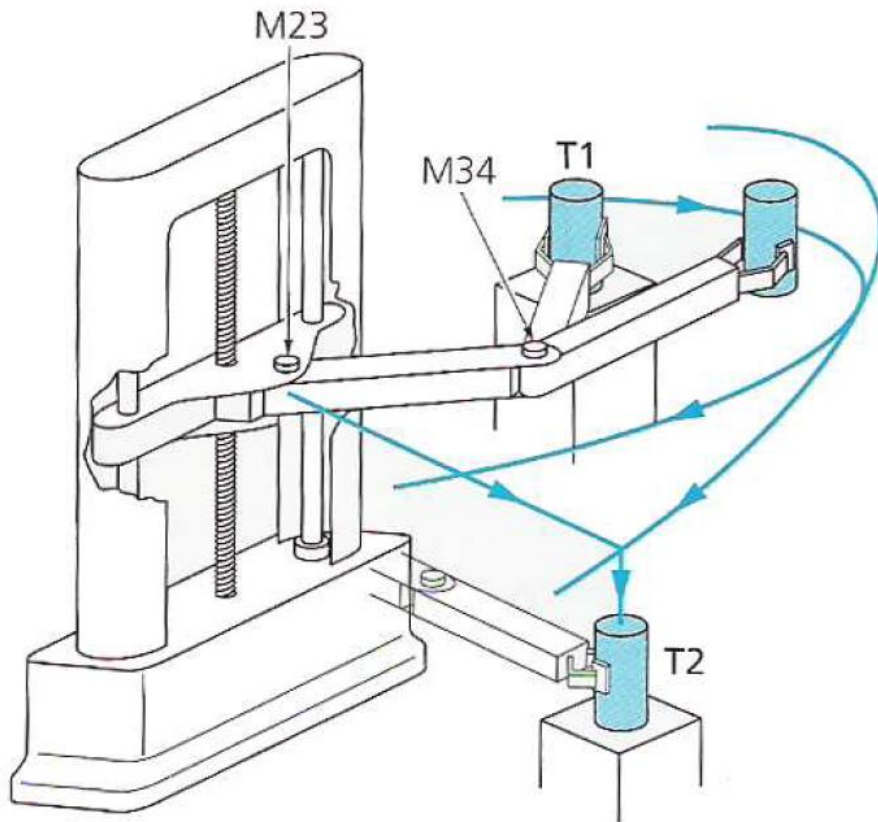
Les chaines complexes



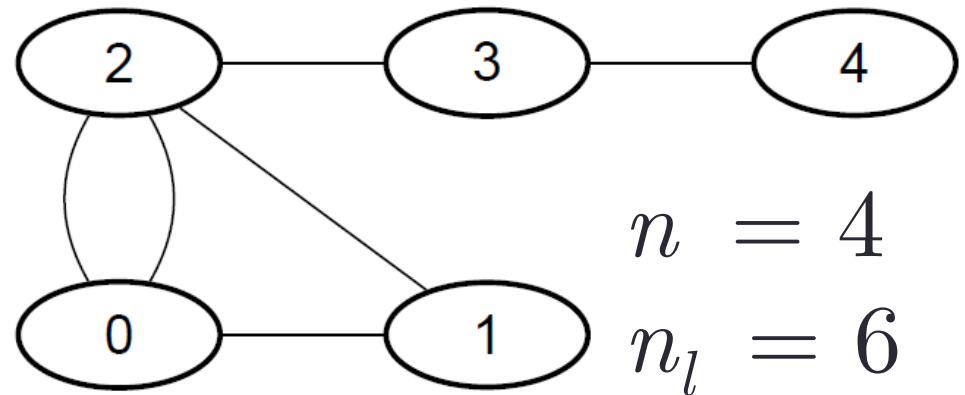
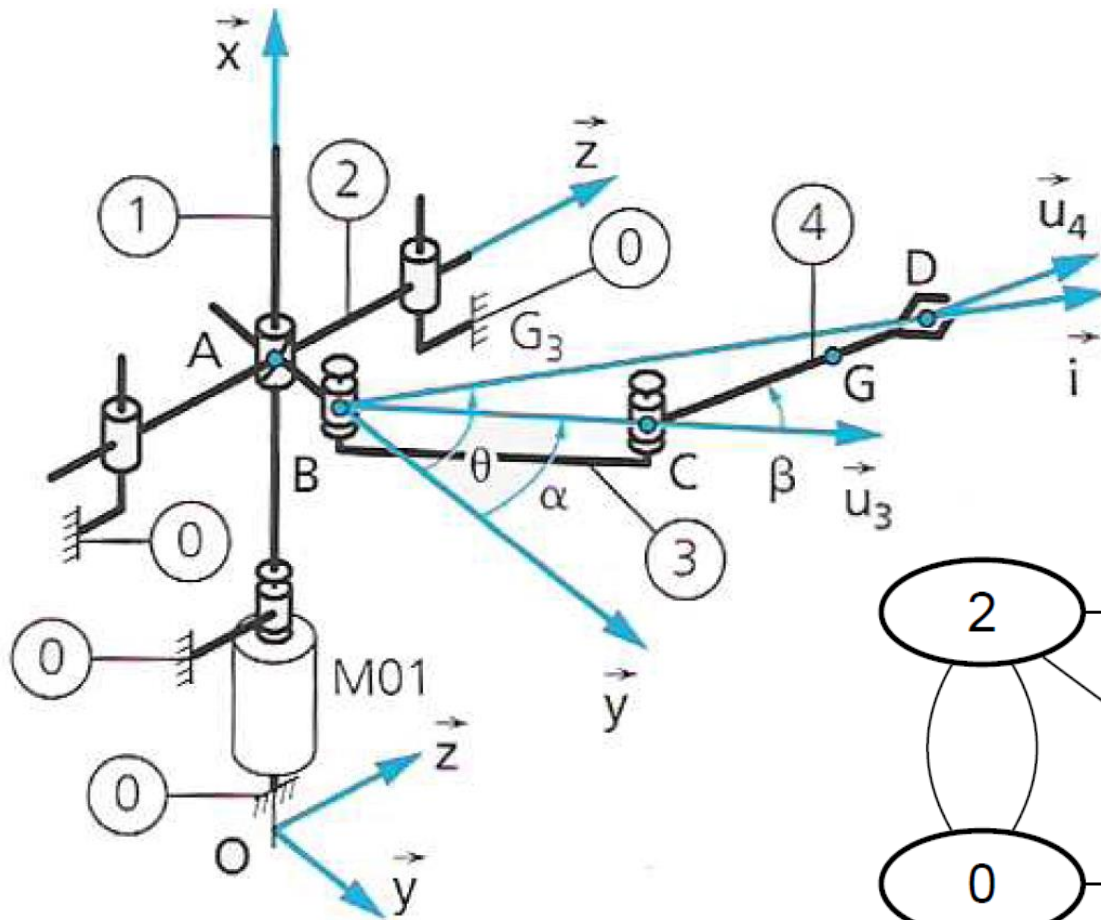
Les chaines fermées



# Exemple



# Example



# Nombre cyclomatique

- Le graphe des contacts peut faire apparaître plusieurs boucles utiles.
- On peut déterminer facilement le nombre de boucles appelé nombre cyclomatique par la formule :

$$\gamma = n_l - n$$

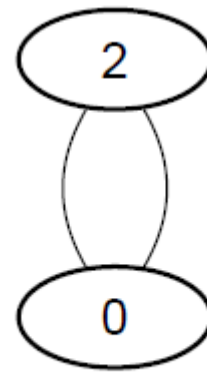
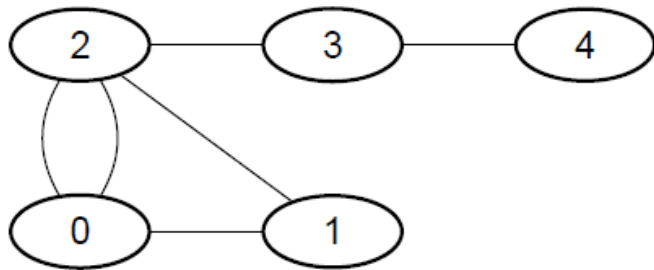


# Exemple

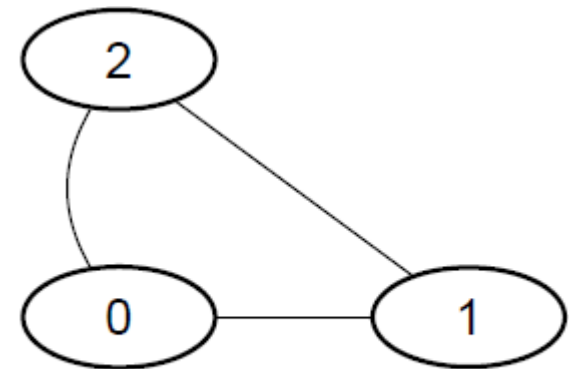
- Dans le cas du robot, le nombre cyclomatique vaut :

$$\gamma = n_l - n$$

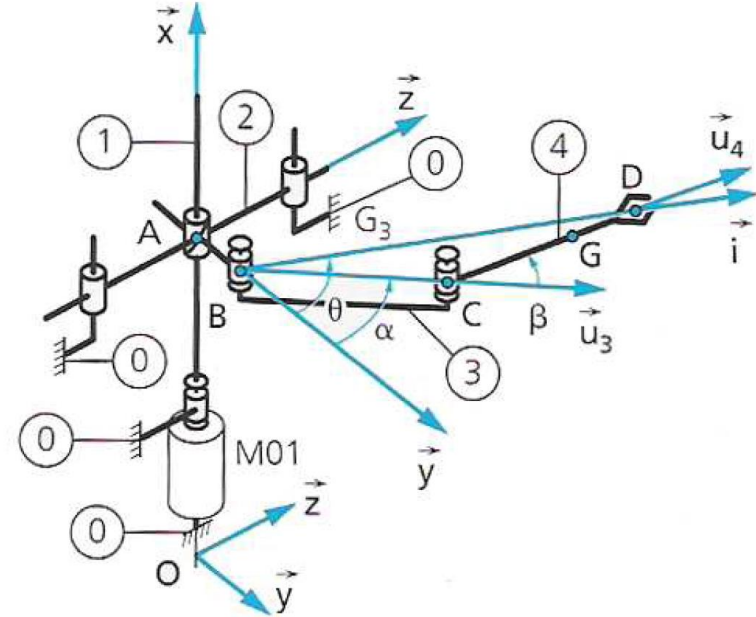
$$\gamma = 6 - 4 = 2$$



Boucle 1



Boucle 2





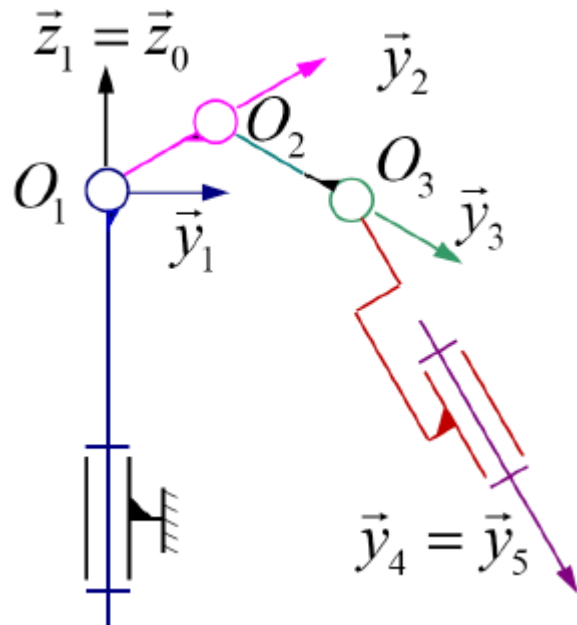
# Cas des chaines ouvertes

- Une chaine ouverte comporte par définition :
- $n = k$  solides (hors bâti)
- $n_l = k$  liaisons
- Le nombre cyclomatique vaut donc systématiquement :  
 $\gamma = k - k = 0$

Une chaine ouverte ne comporte jamais de cycle



# Example



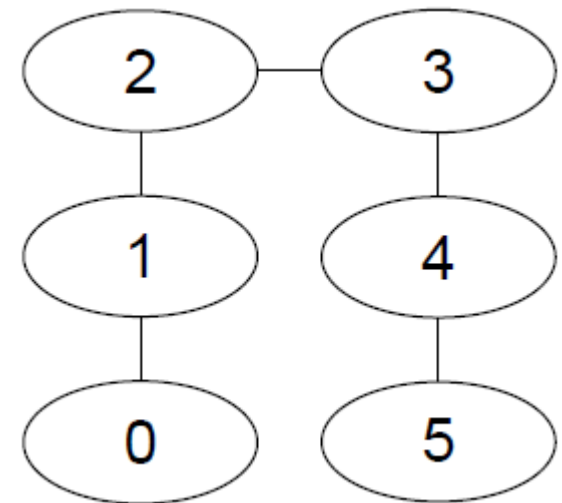
$\mathcal{L}_{10}$  : Pivot ( $O_1, \vec{Z}_0$ )

$\mathcal{L}_{21}$  : Pivot ( $O_1, \vec{Z}_0$ )

$\mathcal{L}_{32}$  : Pivot ( $O_2, \vec{Z}_0$ )

$\mathcal{L}_{43}$  : Pivot ( $O_3, \vec{Z}_0$ )

$\mathcal{L}_{54}$  : Pivot ( $O_3, \vec{Z}_0$ )



$\gamma = ?$



# Cas des chaines fermées

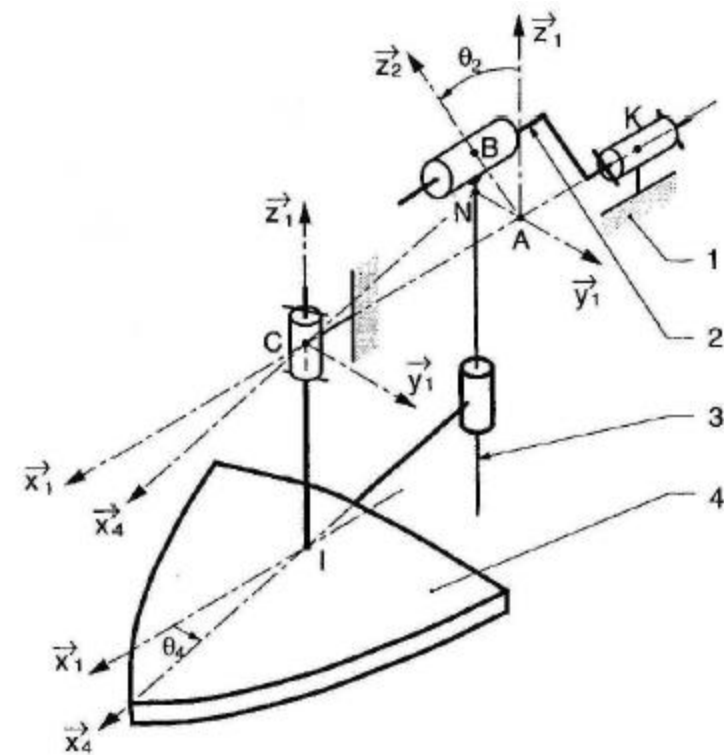
- Une chaine fermée comporte par définition :
- $n = k$  solides
- $n_l = k+1$  liaisons
- Le nombre cyclomatique vaut donc systématiquement :

$$\gamma = k + 1 - k = 1$$

Une chaine fermée comporte un cycle.



# Example



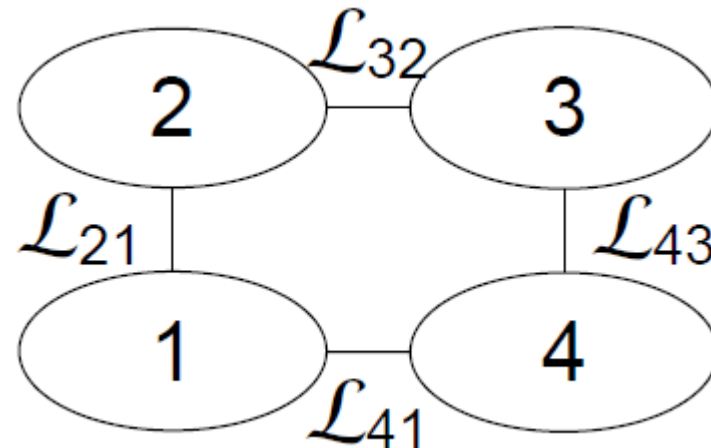
$\gamma = ?$

$\mathcal{L}_{21}$  : Pivot  $(K, \vec{X}_1)$

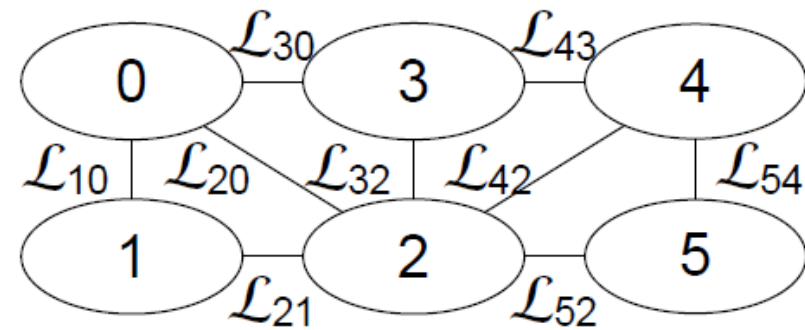
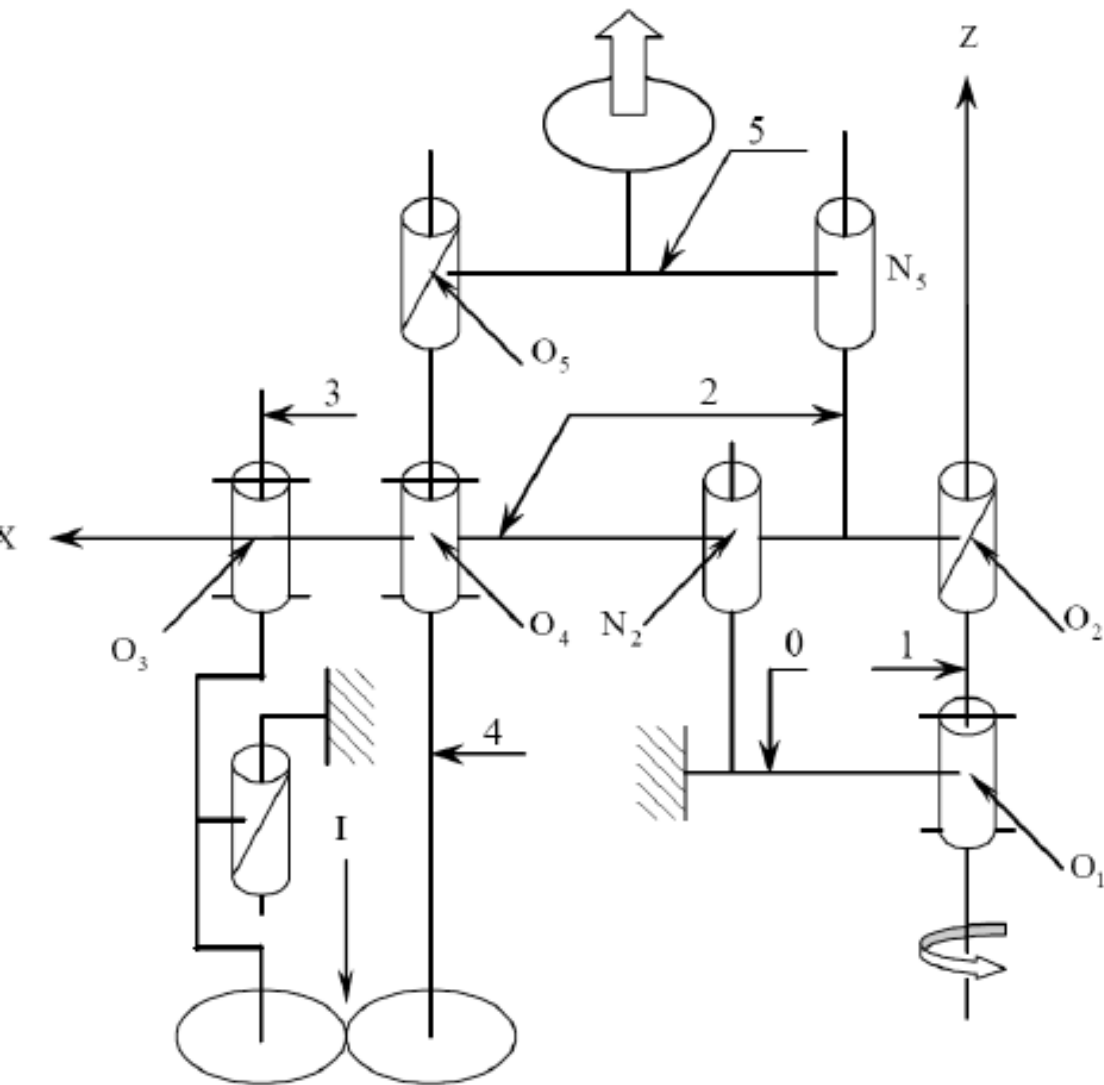
$\mathcal{L}_{32}$  : Pivot glissant  $(B, \vec{X}_1)$

$\mathcal{L}_{43}$  : Pivot glissant  $(B, \vec{X}_1)$

$\mathcal{L}_{41}$  : Pivot  $(C, \vec{Z}_1)$



# Exemple : cas d'une chaîne fermée complexe



$$\gamma = ?$$



# APPROCHE CINÉMATIQUE

---

# Approche cinématique des mécanismes

Pour chaque boucle du graphe, il est possible d'écrire une loi de composition des mouvements (ou loi de fermeture cinématique) sous la forme :

$$\vartheta_{0/p-1} + \vartheta_{p-1/p-2} + \dots + \vartheta_{2/1} + \vartheta_{1/0} = 0$$

Cette équation sur les torseurs fournit 6 équations.

Nous avons donc à notre disposition 6 équations par boucle.



# Inconnues cinématiques

- Si le mécanisme comporte  $n$  pièces et  $n_l$  liaisons
- Si la liaison  $i$  comporte  $n_{Ci}$  inconnues cinématiques
- Alors le nombre total d'inconnues cinématiques  $N_C$  est :

$$N_C = \sum_{i=1}^{n_l} n_{Ci}$$

On dispose donc de  $6\gamma$  équations pour déterminer les  $N_C$  inconnues cinématiques.





# Torseurs et inconnues cinématiques

| Liaison                | Torseur   | $n_{c_i}$     |
|------------------------|---|---------------|
| liaison pivot          | $\begin{Bmatrix} \omega_{xi} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{P_i}^{(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)}$                     | $n_{c_i} = 1$ |
| liaison pivot glissant | $\begin{Bmatrix} \omega_{xi} & V_{xi} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{P_i}^{(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)}$                | $n_{c_i} = 2$ |
| liaison sphérique      | $\begin{Bmatrix} \omega_{xi} & 0 \\ \omega_{yi} & 0 \\ \omega_{zi} & 0 \end{Bmatrix}_{P_i}^{(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)}$ | $n_{c_i} = 3$ |



# Mobilité cinématique

- On appelle mobilité cinématique d'un système le nombre de paramètres cinématiques à imposer pour obtenir une solution au système à  $6\gamma$  équations pour  $N_C$  inconnues.
- On définit la mobilité cinématique par la relation :

$$m_C = N_C - r_C$$

- Où  $r_C$  désigne le rang du système d'équations



# Rang du système d'équations

- Le rang du système d'équations  $r_C$  est le nombre d'équations indépendantes permettant de déterminer les inconnues de liaison

$$\begin{array}{c}
 r_C \\
 \text{équations}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{c}
 \overbrace{\begin{bmatrix} \text{\textit{r}_C \text{ inconnues}} & \text{\textit{m}_C} \end{bmatrix}}^{l_C} \\
 \begin{bmatrix} \phantom{\text{\textit{r}_C \text{ inconnues}}} \\ \phantom{\text{\textit{r}_C \text{ inconnues}}} \end{bmatrix}
 \end{array}
 \right\}
 = 0$$



# Mobilité cinématique

- Parmi les mobilité  $m_C$ , on distinguera :
  - La mobilité cinématique utile  $m_u$

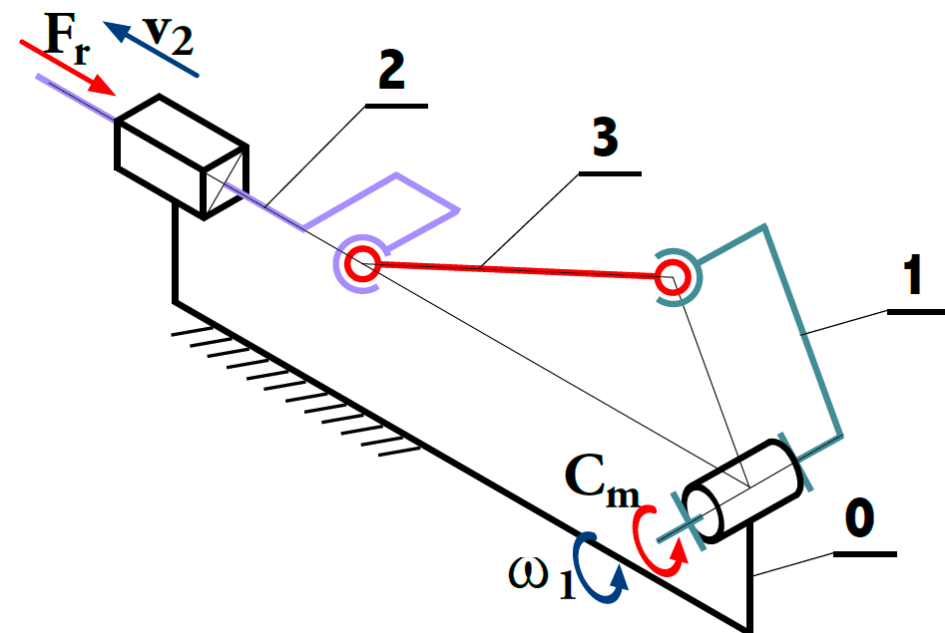
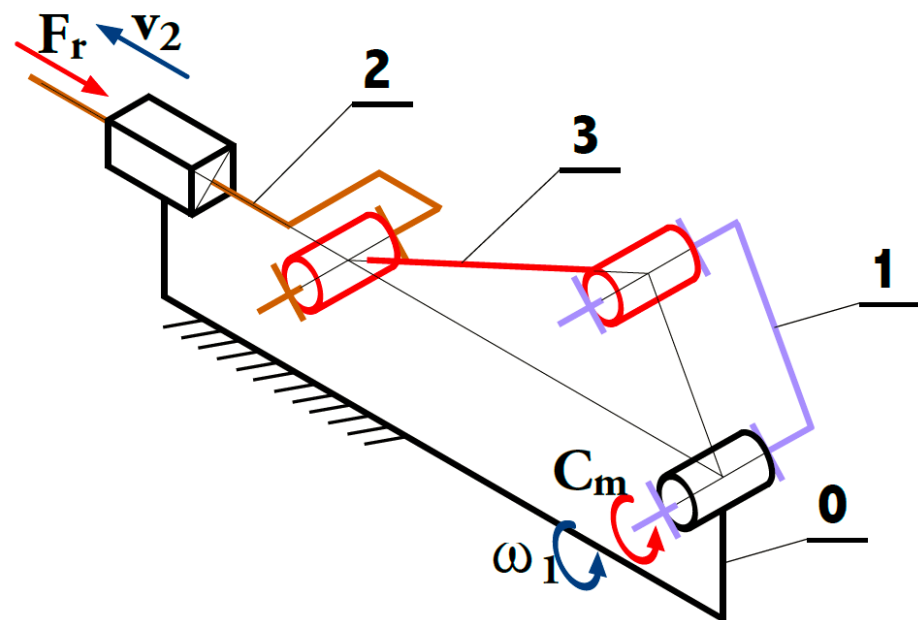
Qui correspond au nombre de paramètres d'entrée nécessaire pour changer la position du mécanisme

- La mobilité cinématique interne  $m_i$

Qui correspond au nombre de mouvements pouvant se faire sans que le mécanisme ne change de position.

$$m_C = m_u + m_i$$





# APPROCHE STATIQUE

---

# Approche statique

On se place maintenant dans le cadre d'une étude statique.

- Si le mécanisme comporte  $n$  pièces et  $n_l$  liaisons
- Si la liaison  $i$  comporte  $n_{Si}$  inconnues statiques
- Alors le nombre total d'inconnues statiques  $N_S$  est :

$$N_S = \sum_{i=1}^{n_l} n_{Si}$$

Ajoutons que dans le cas d'une liaison parfaite :

$$n_{Ci} + n_{Si} = 6$$



# Torseurs et inconnues statiques

| Liaison                | Torseur   | $n_{s_i}$     |
|------------------------|---|---------------|
| liaison pivot          | $\begin{Bmatrix} X_i & 0 \\ Y_i & M_i \\ Z_i & N_i \end{Bmatrix}_{P_i}^{(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)}$ | $n_{s_i} = 5$ |
| liaison pivot glissant | $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_i & M_i \\ Z_i & N_i \end{Bmatrix}_{P_i}^{(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)}$   | $n_{s_i} = 4$ |
| liaison sphérique      | $\begin{Bmatrix} X_i & 0 \\ Y_i & 0 \\ Z_i & 0 \end{Bmatrix}_{P_i}^{(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)}$     | $n_{s_i} = 3$ |





# Approche statique

Il est possible d'effectuer  $n$  isolements qui fournissent au plus  $6n$  équations.

On définit alors le degré d'hyperstatisme du système comme le nombre d'inconnues statiques à imposer pour résoudre le système d'équations :

$$h = N_s - r_s$$



# Degré d'hyperstatisme

- Lorsque  $h = 0$ , le système est dit isostatique. Les inconnues de liaisons peuvent être déterminées à partir des efforts extérieurs.
- Lorsque  $h > 0$ , le système est hyperstatique. Certaines actions de liaison ne pourront pas être déterminées.

$$\begin{array}{c}
 r_s \text{ équations} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\left[ \begin{array}{cc} r_s \text{ inconnues} & h \end{array} \right]}^{l_s} \\ \left[ \begin{array}{c} \phantom{r_s \text{ inconnues}} \end{array} \right] \end{array} \right. = \left[ \begin{array}{c} \phantom{r_s \text{ inconnues}} \end{array} \right]
 \end{array}$$

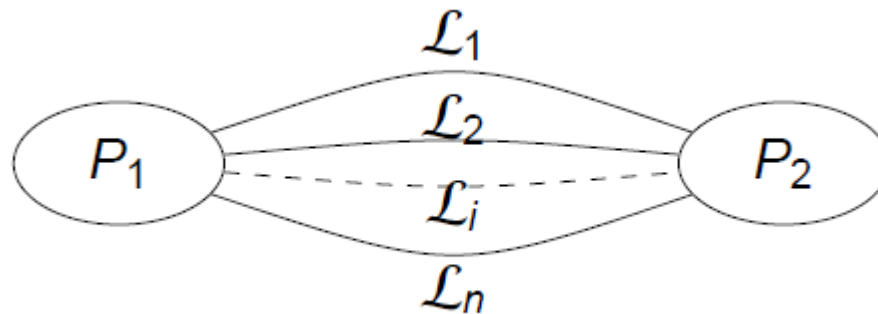


# LIAISONS EN SÉRIE ET EN PARALLÈLE

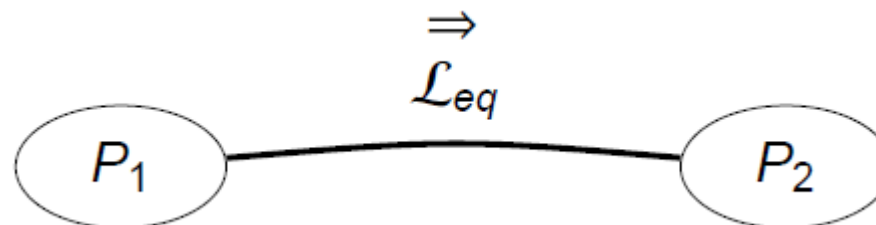
---

# Liaisons en parallèle

- On parle de liaisons en parallèles lorsque plusieurs liaisons s'établissent entre deux pièces



- On peut alors rechercher une liaison équivalente



# Liaisons en parallèle

- Pour que la liaison équivalente corresponde cinématiquement aux liaisons élémentaires, les torseurs cinématiques respectifs doivent respecter :

$$\mathcal{V}_{2/1}^{eq} = \mathcal{V}_{2/1}^1 = \mathcal{V}_{2/1}^2 = \mathcal{V}_{2/1}^i = \mathcal{V}_{2/1}^n$$



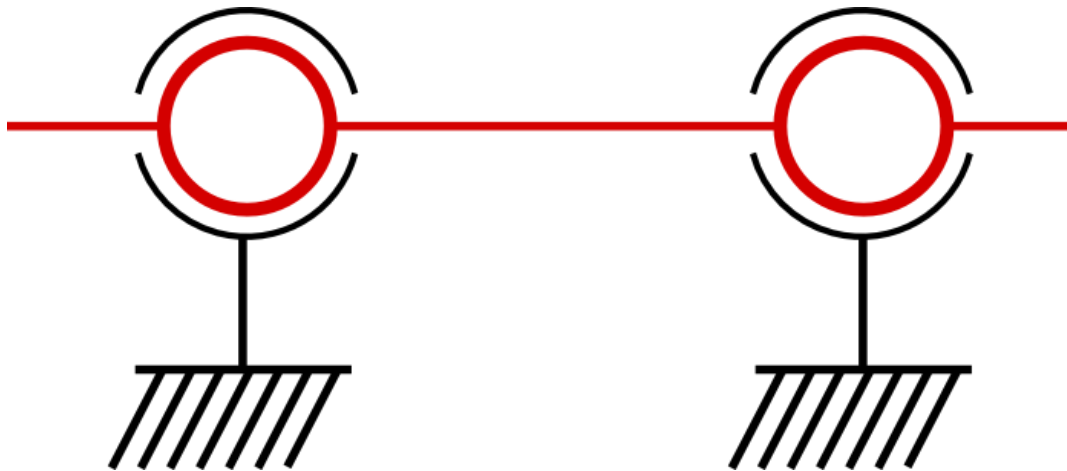
# Liaisons en parallèle

- Pour que la liaison équivalente corresponde statiquement aux liaisons élémentaires, les torseurs d'actions mécaniques transmissibles respectifs doivent respecter :

$$\mathfrak{S}_{2 \rightarrow 1}^{eq} = \mathfrak{S}_{2 \rightarrow 1}^1 + \mathfrak{S}_{2 \rightarrow 1}^2 + \dots + \mathfrak{S}_{2 \rightarrow 1}^i + \dots + \mathfrak{S}_{2 \rightarrow 1}^n$$



# Exemple



$$\left\{ \boldsymbol{\nu}_{1/0}^A \right\} = \left\{ \begin{matrix} \omega_{Ax} & 0 \\ \omega_{Ay} & 0 \\ \omega_{Az} & 0 \end{matrix} \right\}_{A,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \left\{ \boldsymbol{\nu}_{1/0}^C \right\} = \left\{ \begin{matrix} \omega_{Cx} & \nu_{Cx} \\ \omega_{Cy} & \nu_{Cy} \\ \omega_{Cz} & \nu_{Cz} \end{matrix} \right\}_{C,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \left\{ \begin{matrix} \omega_{Cx} & ? \\ \omega_{Cy} & ? \\ \omega_{Cz} & ? \end{matrix} \right\}_{A,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\overrightarrow{AC} = a\vec{x} \quad \overrightarrow{AC} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}^C = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega_{Cx} \\ \omega_{Cy} \\ \omega_{Cz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a\omega_{Cz} \\ a\omega_{Cy} \end{pmatrix}$$





$$\left\{ \nu_{1/0}^B \right\} = \begin{Bmatrix} \omega_{Bx} & 0 \\ \omega_{By} & 0 \\ \omega_{Bz} & 0 \end{Bmatrix}_{B,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \left\{ \nu_{1/0}^C \right\} = \begin{Bmatrix} \omega_{Cx} & v_{Cx} \\ \omega_{Cy} & v_{Cy} \\ \omega_{Cz} & v_{Cz} \end{Bmatrix}_{C,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{Bmatrix} \omega_{Cx} & ? \\ \omega_{Cy} & ? \\ \omega_{Cz} & ? \end{Bmatrix}_{B,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\overrightarrow{BC} = b\vec{x} \quad \overrightarrow{BC} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}^C = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega_{Cx} \\ \omega_{Cy} \\ \omega_{Cz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -b\omega_{Cz} \\ b\omega_{Cy} \end{pmatrix}$$



$$\left\{ \mathbf{v}_{1/0}^C \right\} = \begin{Bmatrix} \omega_{Cx} & v_{cx} \\ \omega_{Cy} & v_{cy} - a\omega_{Cz} \\ \omega_{Cz} & v_{cz} + a\omega_{Cy} \end{Bmatrix}_{A,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{Bmatrix} \omega_{Ax} & 0 \\ \omega_{Ay} & 0 \\ \omega_{Az} & 0 \end{Bmatrix}_{A,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$v_{cx} = 0$$

$$\omega_{Cx} = \omega_{Ax}$$


$$v_{cy} = a\omega_{Cz}$$

$$\omega_{Cy} = \omega_{Ay}$$

$$v_{cz} = -a\omega_{Cy}$$

$$\omega_{Cz} = \omega_{Az}$$



$$\left\{ \mathbf{v}_{1/0}^C \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \omega_{Cx} \\ \omega_{Cy} \\ \omega_{Cz} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ -b\omega_{Cz} - a\omega_{Cz} \\ b\omega_{Cy} + a\omega_{Cy} \end{array} \right\}_{B,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \left\{ \begin{array}{c} \omega_{Bx} \\ \omega_{By} \\ \omega_{Bz} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}_{B,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$


$$-(a+b)\omega_{Cz} = 0 \Rightarrow \omega_{Cz} = 0$$

$$(a+b)\omega_{Cy} = 0 \Rightarrow \omega_{Cy} = 0$$



On obtient le torseur cinématique d'une liaison pivot

$$\left\{ \boldsymbol{\nu}_{1/0}^C \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} \omega_{Cx} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{C, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

# Exemple : analyse statique

$$\left\{ \mathfrak{S}_{0 \rightarrow 1}^A \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{array} \right\}_{A, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

La liaison équivalente doit être telle que :

$$\left\{ \mathfrak{S}_{0 \rightarrow 1}^B \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_B & 0 \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{array} \right\}_{B, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$\mathfrak{S}_{0 \rightarrow 1}^{eq} = \mathfrak{S}_{0 \rightarrow 1}^A + \mathfrak{S}_{0 \rightarrow 1}^B$$



# Exemple : analyse statique

$$\left\{ \mathfrak{I}_{0 \rightarrow 1}^A \right\} = \begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & -aZ_A \\ Z_A & aY_A \end{Bmatrix}_{C, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$\left\{ \mathfrak{I}_{0 \rightarrow 1}^B \right\} = \begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ Y_B & -bZ_B \\ Z_B & bY_B \end{Bmatrix}_{C, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$\left\{ \mathfrak{I}_{0 \rightarrow 1}^{eq} \right\} = \begin{Bmatrix} X_C & L_C \\ Y_C & M_C \\ Z_C & N_C \end{Bmatrix}_{C, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$



# Exemple : analyse statique

$$\left\{ \begin{array}{l} X_C = X_A + X_B \\ Y_C = Y_A + Y_B \\ Z_C = Z_A + Z_B \\ \boxed{L_C = 0} \\ M_C = -aZ_A - bZ_B \\ N_C = aY_A + bY_B \end{array} \right.$$

$$\left\{ \mathfrak{T}_{0 \rightarrow 1}^{eq} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_C & 0 \\ Y_C & M_C \\ Z_C & N_C \end{array} \right\}_{C, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

C'est le torseur des actions mécaniques transmissible d'une liaison pivot



# Analyse du mécanisme

- Le nombre d'inconnues statiques est :

$$N_S = 3 + 3 = 6$$

Le nombre de relations indépendantes qu'il est possible d'écrire correspond au nombre de composantes non nulles du torseur de la liaison équivalente :  $r_S = 5$

Le degré d'hyperstatisme de la liaison équivalente est :

$$h = N_S - r_S = 6 - 5 = 1$$

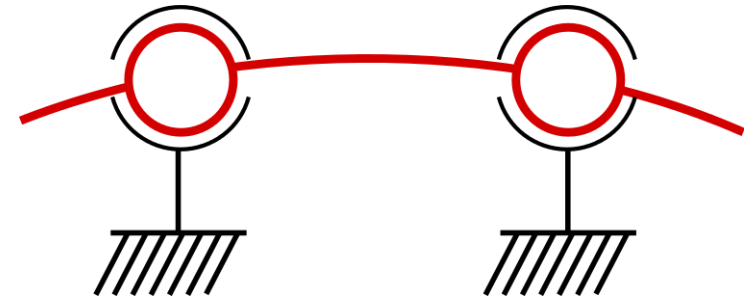
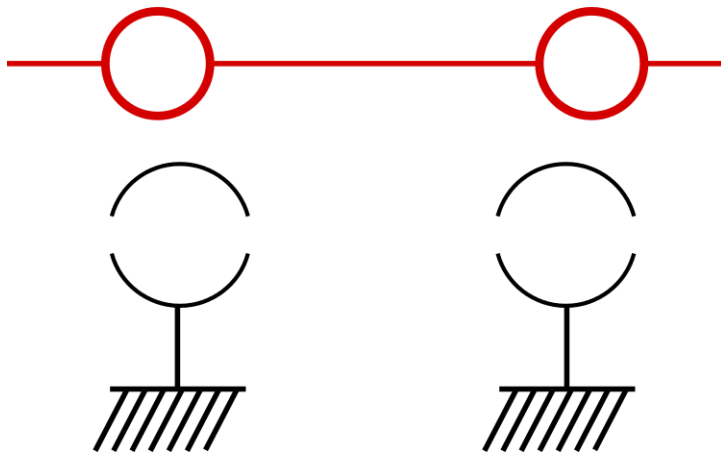
Le degré de mobilité est :  $m_C = 1$





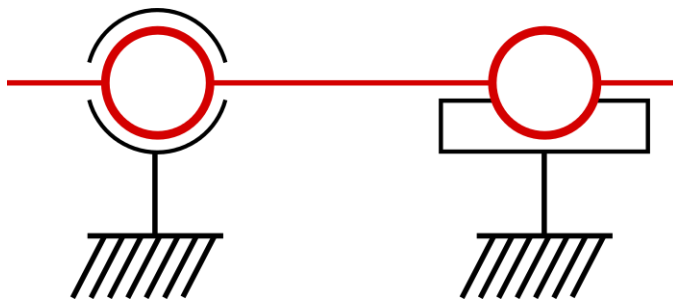
# Conclusion : approche sensorielle

Une conséquence de l'hyperstaticité est que si les dimensions des composants ne correspondent pas rigoureusement. Alors le montage devient impossible sans déformation.



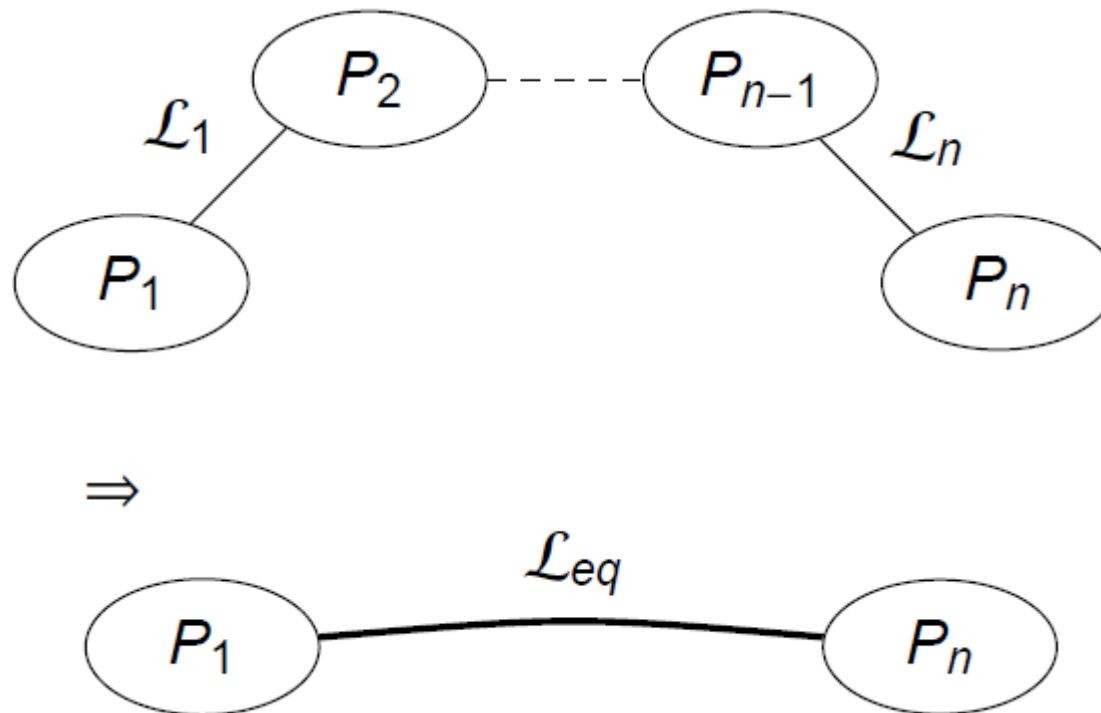
Le choix d'un mécanisme isostatique cinématiquement équivalent élimine ce problème de montabilité.

On devine cependant que ce changement se fait au détriment de la surface totale de contact et donc de la résistance aux efforts.



# Liaisons en série

- On peut également rechercher une liaison équivalente entre pièces formant une chaîne ouverte :



- On parle de liaisons en série



# Liaisons en série

- Pour que la liaison équivalente corresponde cinématiquement aux liaisons élémentaires, les torseurs cinématiques respectifs doivent respecter :

$$\mathcal{V}_{n/1}^{eq} = \mathcal{V}_{n/n-1}^1 + \mathcal{V}_{n-1/n-2}^2 + \cdots + \mathcal{V}_{2/1}^n$$



# Liaisons en série

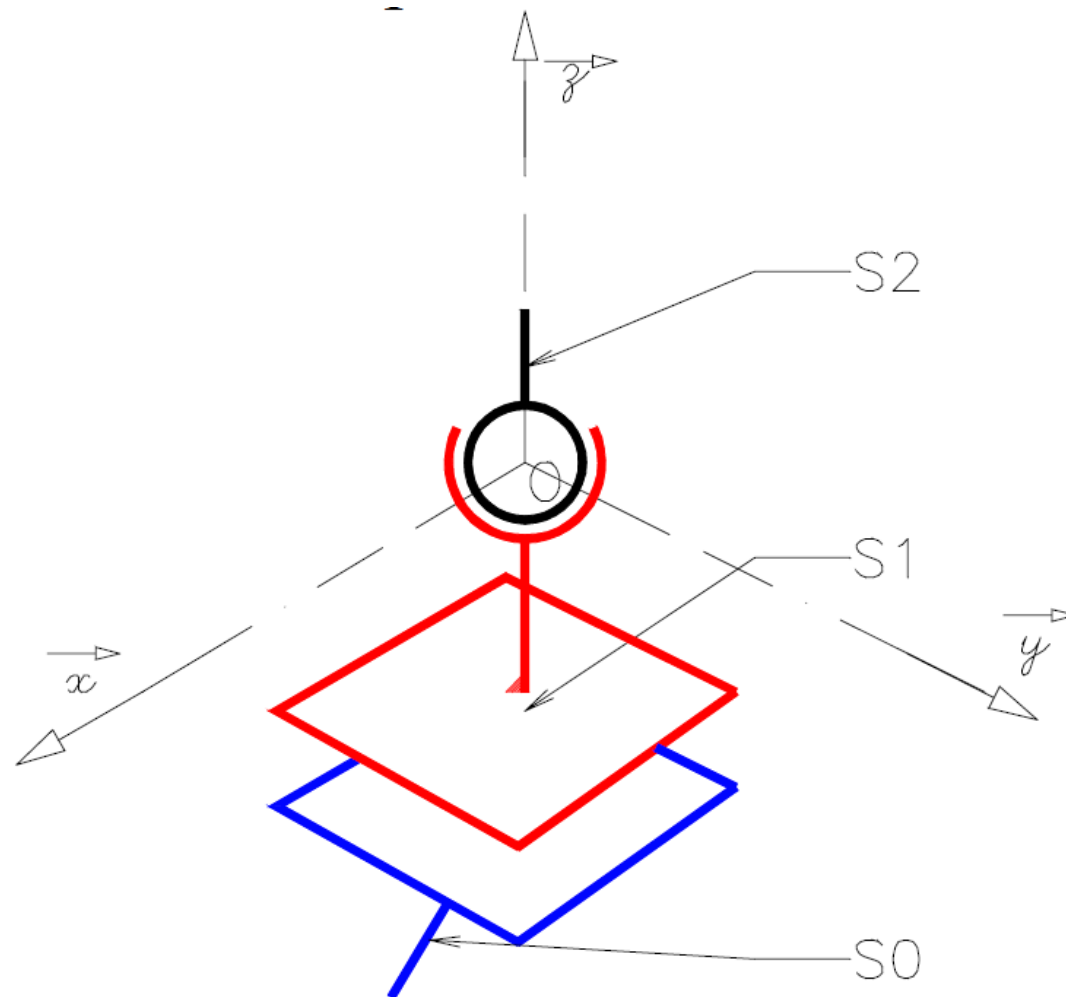
- Pour que la liaison équivalente corresponde statiquement aux liaisons élémentaires, les torseurs d'actions mécaniques transmissibles respectifs doivent respecter :

$$\mathfrak{S}_{n \rightarrow 1}^{eq} = \mathfrak{S}_{n \rightarrow n-1}^1 = \mathfrak{S}_{n-1/n-2}^i = \dots = \mathfrak{S}_{2 \rightarrow 1}^n$$



# Liaison en série

- Exemple :



# SYNTHÈSE

---

# Liens entre cinématique et hyperstatisme

- On admettra la formule suivante qui traduit la dégradation du rang statique par la mobilité cinématique :

$$m_C = m_u + m_i = E_S - r_S = 6n - r_S$$

- Et la formule suivante qui traduit la dégradation du rang cinématique par le degré d'hyperstatisme :

$$h = E_C - r_C = 6.\gamma - r_C$$



$$\begin{array}{c} E_C \end{array} \left[ \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{1.5cm}}^{N_C} \\ \overbrace{\hspace{1.5cm}}^{r_C} \hspace{0.5cm} \overbrace{\hspace{1.5cm}}^{m_C} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_h \end{array} \right] \begin{array}{c} I_C \end{array} = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] \end{array}$$





# Liens entre cinématique et hyperstatisme

- Ces formules conduisent aux égalités suivantes :

$$h = 6.\gamma - r_c = 6\gamma + m_c - N_c$$

$$h = N_s - r_s = N_s - 6n - m_c = m_c - 6n + N_s$$



Diagram illustrating the structure of the matrix  $E_S$ . The matrix is partitioned into blocks. The top-left block is a square of size  $r_S$  by  $r_S$ , highlighted with a teal border. The top-right block is of size  $r_S$  by  $h$ , highlighted with a red border. The bottom-left block is of size  $m_C$  by  $r_S$ , highlighted with a red border. The bottom-right block is of size  $m_C$  by  $h$ , highlighted with a red border. The total size of the matrix is  $N_S$  by  $N_S$ . The matrix is shown as a product of a block matrix and a vector of size  $N_S$ .



# Indice de mobilité

- On définit l'indice de mobilité :

$$i_m = N_C - E_C$$

Or on sait que

$$E_C = 6\gamma = 6(n_l - n) = 6n_l - 6n = 6n_l - E_S$$

Par ailleurs,

$$N_C = 6n_l - N_S$$

Par soustraction :  $N_C - E_C = E_S - N_S = i_m$

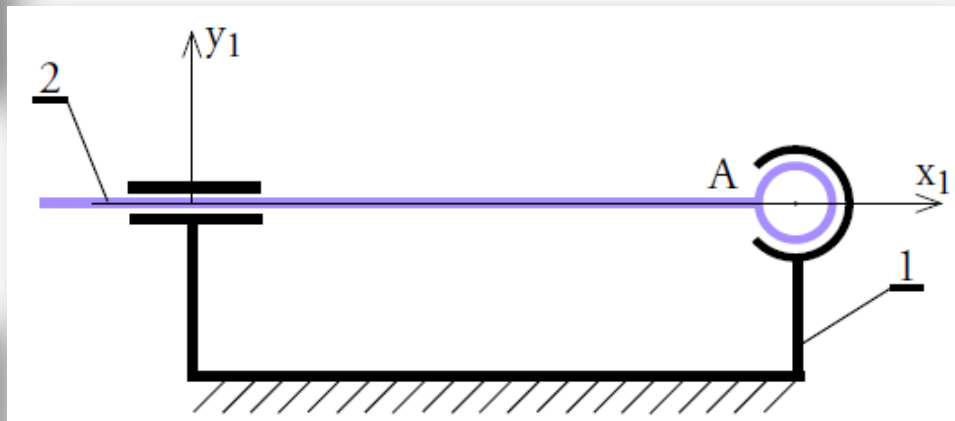
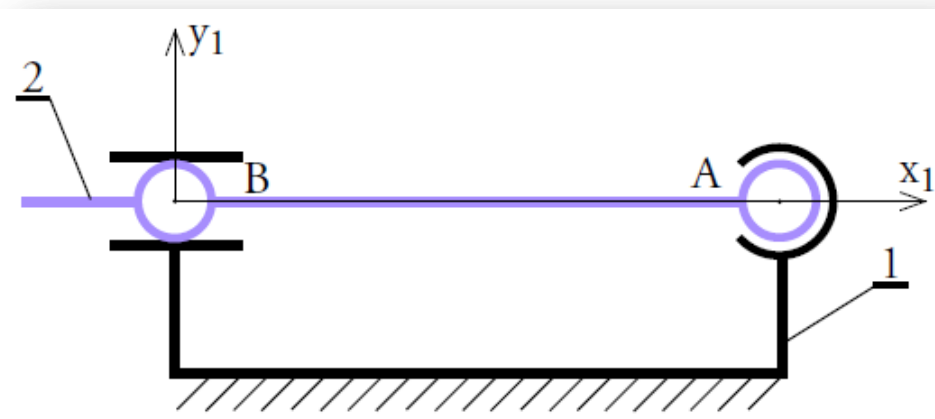
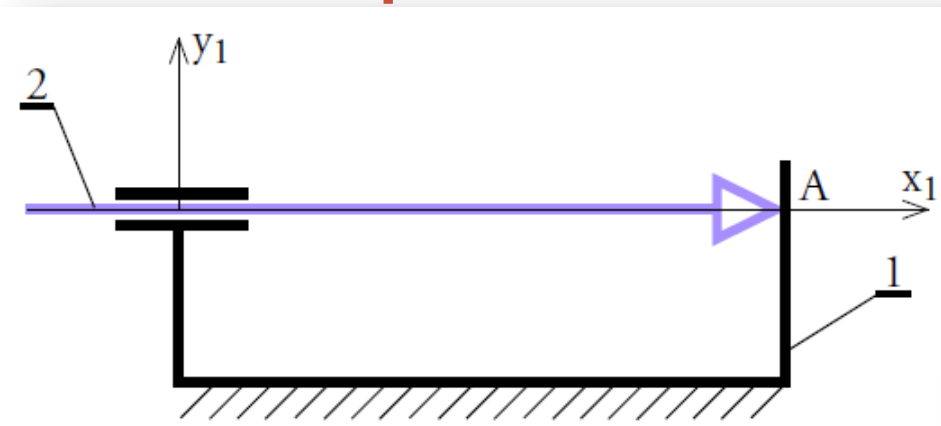
D'où les relations :  $h = m_C - m$  **et**  $m = m_C - h$



# Tableau de synthèse

| Point de vue                        | Cinématique                                    | Statique                        |
|-------------------------------------|--|---------------------------------|
| Inconnues                           | $N_C = \sum_{i=1}^{n_l} n_{Ci}$                | $N_S = \sum_{i=1}^{n_l} n_{Si}$ |
| Nbre d'équations                    | $E_C = 6.\gamma$                               | $E_S = 6.n$                     |
| Rang                                | $r_C \leq 6.\gamma$                            | $r_S \leq 6.n$                  |
| Degré de mobilité / d'hyperstatisme | $m_C = N_C - r_C$                              | $h = N_S - r_S$                 |
| Indice de mobilité                  | $N_C - E_C = i_m = m_C - h = E_S - N_S$        |                                 |
|                                     | $h = E_C - r_C = 6\gamma - r_C$                | $m_C = E_S - r_S = 6n - r_S$    |
| Calcul de h, formules globales      | $h = 6\gamma + m_C - N_C$ $h = m_C - 6n + N_S$ |                                 |

# Examples

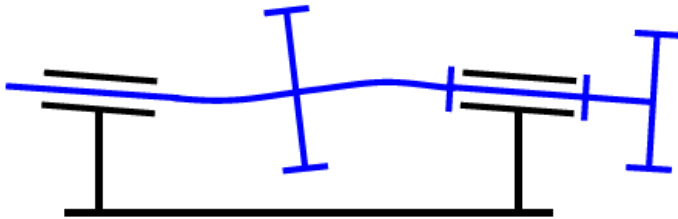


# REMARQUES SUR L'HYPERTATISME

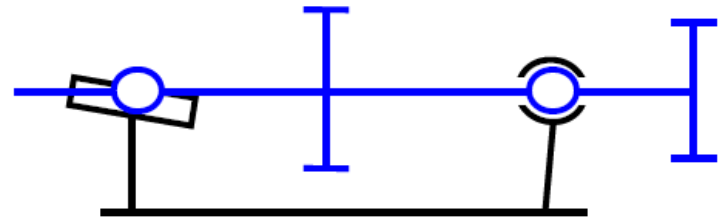
---

# Remarques

## Au montage



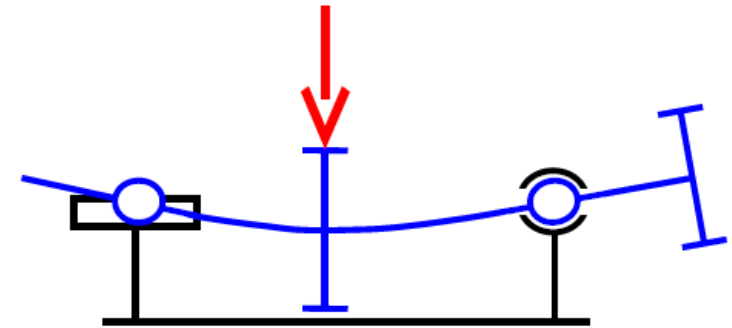
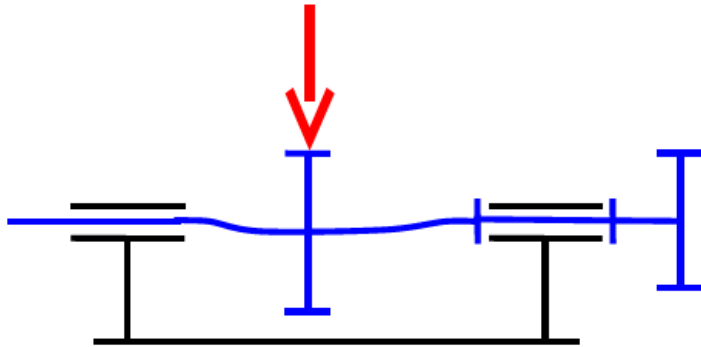
Pour pouvoir monter l'arbre, et pour qu'il ne subisse pas (trop) de déformations, les deux portées doivent respecter une condition rigoureuse de coaxialité. La fabrication sera délicate donc coûteuse.



Montage facile, inutile de respecter d'exigentes conditions géométriques



En fonctionnement, soumis à un effort identique



L'arbre subit des déformations, donc des contraintes, pour pouvoir être monté. Par suite, les liaisons s'usent plus vite, et de l'énergie est dissipée au sein de celles-ci.

Les efforts au sein des liaisons sont théoriquement incalculables, les liaisons seront dimensionnées avec moins de précision

### MAIS

A condition que les deux portées soient bien coaxiales, l'arbre est plus rigide, il se déforme peu.  
Pour une même fonction, un système hyperstatique est généralement plus compact qu'un système isostatique

Les efforts dans les liaisons sont calculables, donc les liaisons plus facilement dimensionnées.

### MAIS

L'arbre fléchit plus facilement, la déformation est plus grande pour un même effort :  
Le système isostatique est moins rigide à encombrement égal