1. Introduction

تابع: فرض کنید A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، تابع f از A به B :

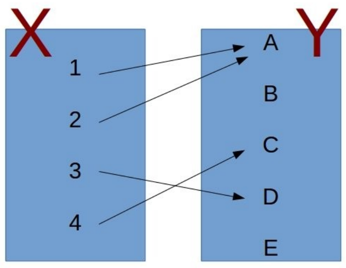
$$f: A \rightarrow B$$

رابطه ای است که به ازای هر $a \in Dom(f)$ ، مقدار $f(a)$ فقط شامل یک عنصر از B باشد:

$$\{(a, f(a)) \mid a \in dom(f)\}$$

توابع را **نگاشت** و یا **تبدیل** نیز می گویند. چون هر عضو $a \in A$ را فقط به یک عضو B منسوب می کنند. عضو a را **آرگومان** و $f(a)$ را **مقدار** تابع f برای آرگومان a می نامند. $f(a)$ را **تصویر** a تحت f نیز می گویند.

مثال:



از هر عضو X فقط یک فلش خارج شده است. پس رابطه f به صورت:

$$f = \{(1,a),(2,a),(3,d),(4,c)\}$$

یک تابع است.

مثال: برای $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{x,y,z\}$ رابطه:

$$s=\{(1,x),(2,x),(1,y)\}$$

تابع نیست زیرا:

$$S(1) = \{x,y\}$$

یعنی از عنصر ۱، دو تا (بیش از یکی) فلش خارج شده است.

مثال: توابع در کامپیوتر اگر بیش از یک مقدار return کنند، آن ها را به صورت یک لیست بر می گردانند.

```
function f(arg1, arg2) {
    // ...
    return [x,y]   →  لیست -- حاوی بیش از یک مقدار برگردانده
}
```

توابع را می توان به صورت فهرستی از **ورودی-خروجی** در نظر گرفت. بین آنها **روابطی** پیدا کرده و **مدل (فرمول)** بدست آوریم. این روند در **استقرای ریاضی** استفاده می شود.

مثال: تابع همانی در A ، به صورت I_A نمایش می دهند:

$$I_A(a) = a$$

I_A همان رابطه ی Δ که معرف عناصر قطر اصلی $A \times A$ است.

توابع ترکیبی: اگر f و g هرکدام تابع باشند. آن گاه gOf نیز تابع است:

$$gOf(a) = g(f(a))$$

مثال: فرض کنید:

$$f(a) = a+1$$
$$g(b) = 2b$$

تابع gOf را بدست آورید.

$$gOf(a) = g(f(a)) = g(a+1) = 2(a+1) = 2a+2$$

2. Functions' Attributes

فرض کنید f تابعی از A به B باشد.

تابع f ، **همه جا تعریف شده** است اگر: $Domain(f) = A$

تابع f **پوشا** است اگر: $Range(f) = B$

تابع f **یک به یک** است اگر: هرگاه $f(a) = f(b)$ آنگاه $a = b$

تابع f **وارون پذیر** است، هرگاه رابطه f^{-1} نیز یک تابع باشد.

مثال: فرض کنید:

$alingl\ A = \{a\ 1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\}$
$alingl\ A = \{a\ 1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\}$
$alingl\ A = \{a\ 1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\}$
$alingl\ A = \{a\ 1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\}$
$b\ 1,\ b\ 2, b$
¿
$c\ 1,\ c$
¿
$d\ 1,\ d\ 2,\ d\ 3,\ d\ 4$
¿
$alignlB\ =$ ¿

۳ ویژگی تابع (همه جا تعریف شده – پوشا – یک به یک) را در مورد روابط زیر بررسی کنید.

$f1=\{(a1,b2),\ (a2,b3),\ (a3,b1)\}$
$f2=\{(a1,d2),\ (a2,d1),\ (a3,d4)\}$
$f3=\{(b1,c2),\ (b2,c2),\ (b3,c1)\}$
$f4=\{(d1,b1),\ (d2,b2),\ (d3,b1)\}$

حل:

یک به یک	پوشا	همه جا تعریف شده	تابع
بله	بله	بله	$A=a1,a2,a3$
بله	خیر	بله	$B=\{b1,b2,b3\}$
خیر	بله	بله	$C=\{c1,c2\}$
خیر	خیر	خیر	$D=\{d1,d2,d3,d4\}$

مثال: فرض کنید

$A=\{1,2,3,4\}$
$B=\{a,b,c,d\}$
$f=\{(1,a),(2,a),(3,d),(4,c)\}$

وارون f را بنویسید. مشخص کنید آیا f وارون پذیر است؟

حل: چون

$f^{-1} = \{1,2\}$

یعنی ۲ تا (بیش از یکی) فلش از a خارج شده، پس f^{-1} تابع نیست. بنابراین f وارون پذیر هم نیست.

تناظر یک به یک: تابع $f: A \to B$ را یک تناظر ۱-۱ بین A و B خواهیم گفت، اگر f :

- همه جا تعریف شده
- پوشا
- یک به یک

باشد.

مثال: فرض کنید:

$A=\{a1,\ a2,\ a3\}$
$B=\{b1,\ b2,\ b3\}$

نشان دهید $f1$ خاصیت تناظر یک به یک دارد.

$f1 = \{(a1,a2),\ (a2,b3),\ (a3,b1)\}$

هر ۳ خاصیت را دارد. بنابراین، تناظر یک به یک دارد.

3. The Dove Nest Principle

قضیه: فرض کنید: $f: A \to B$ تابعی با دامنه و برد متناهی باشد و

$Dom(f) = |n|$
$Ran(f) = |n|$

در این صورت:

- اگر f یک به یک باشد، آن گاه: $m=n$
- اگر f یک به یک نباشد، آنگاه: $m<n$

طبق قسمت دوم قضیه بالا، اصل لانه کبوتر را بدین گونه بیان می کنیم.

اصل لانه کبوتر: اگر n کبوتر به m لانه منسوب شوند و $m<n$ ، آن گاه دست کم یک لانه شامل ۲ کبوتر و یا بیشتر است.

مثال: نشان دهید از ۸ نفر دست کم روز تولد ۲ نفر از آن ها در یک روز هفته است.

حل:

$7<8$ طبق اصل لانه کبوتر، دست کم روز تولد دو نفر از آن ها در یک روز هفته است.

تعمیم اصل لانه کبوتر: اگر n کبوتر به m لانه منسوب شد. یکی از لانه ها دست کم، باید شامل

$$\lceil\frac{n}{m}\rceil$$

کبوتر باشد.

مثال: از ۳۰ نفر

$$\lceil\frac{30}{7}\rceil = 5$$

۵ نفر رامی توان انتخاب نمود که روز تولد همه آن ها در یک روز هفته باشد.