1. Relations' Operations

متمم R : با $\bar{R}$ نشان داده می شود.

$$a\bar{R}b \;\Leftrightarrow\; a\not{R}b$$

معکوس R : با R^{-1} (ترانهاده R^{T}) نشان داده می شود.

$$aRb \;\Leftrightarrow\; bR^{-1}a$$

داریم:

$$Domain(R) \;=\; Range(R^{-1})$$
$$(R^{-1})^{-1} \;=\; R$$

مثال: فرض کنید $A=\{a,\ b,\ c,\ d\}$ مجموعه دانشجویان و $B \;=\; \{NC,\ DM,\ CG,\ DS,\ OR,\ OS\}$ مجموعه دروس ارائه شده توسط دانشکده کامپیوتر باشد.
ماتریس های روابط R و S به صورت زیر است:

$$\boldsymbol{M_S} \;=\; \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{cccccc} NC & DM & CG & DS & OR & OS \end{array}} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\boldsymbol{M_R} \;=\; \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{cccccc} NC & DM & CG & DS & OR & OS \end{array}} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

حاصل هر یک از روابط زیر را پیدا کنید.

- $R \cap S$
- $R \cup S$
- $R \circ S \;=\; (R-S) \cup (S-R)$
- $R-S$
- $\bar{R}$

حل:

$$R \cap S \;=\; \{(a,NC),\ (b,DM),\ (d,DS),\ (D,OS)\}$$
$$R \cup S \;=\; \{(a,NC),\ (b,DM),\ (c,DM),\ (b,CG),\ (a,DS),\ (d,DS),\ (b,OR),\ (c,OR),\ (c,OS),\ (d,OR)\}$$
$$R \circ S \;=\; (R-S) \cup (S-R) \;=\; \{(a,DS),\ (b,CG),\ (b,OR),\ (c,DM),\ (c,OR),\ (c,OS),\ (d,OR)\}$$
$$R-S \;=\; \{(b,CG),\ (c,DM),\ (c,OR),\ (c,OS),\ \}$$
$$\bar{R} \;=\; \{f\}$$

آموزش دادن بعضی از قضایا به ماشین با قرار دادن آن‌ها در پایگاه اطلاعات، می‌تواند منجر به کاهش هزینه محاسباتی شود.

دو قضیه زیر را در نظر بگیرید:

1. $R^{-1} \cap S^{-1} = (R \cap S)^{-1}$

در سمت چپ معادله، ترانهاده تک تک رابطه ها و سپس اشتراک آن ها محاسبه می شود.
در حالیکه در سمت راست معادله، ابتدا اشتراک روابط گرفته می شود که حاصل، ماتریس بولی کوچک‌تری خواهد شد. سپس ترانهاده روی کل ماتریس محاسبه می شود.
بنابراین استفاده از سمت راست قضیه، هزینه محاسبات را کاهش می دهد.

تمرین: کدام سمت از معادلات زیر بار محاسباتی کمتری دارد؟

- R
- $\bar{R} \cup \bar{S} = \overline{(R \cap S)}$
- $\overline{(R \cup S)} = \bar{R} \cap \bar{S}$

مثال: فرض کنید $A=\{1, 2, 3\}$ باشد. R و S دو رابطه در A هستند که ماتریس بولی آن‌ها به صورت زیر است:

$$M_R=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$M_S=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

حاصل روابط زیر را بدست آورید.

- $(M_R)^{-1}$
- $M_{R \cap S}$
- $M_{R \cup S}$

حل:

$$(M_R)^{-1}=(M_R)^T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$M_{R \cap S}=M_R \wedge M_S=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$M_{R \cap S}=M_R \wedge M_S=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

بستارها: اگر رابطه R فاقد یکی از خصوصیات بازتابی، تقارن و تعدی باشد. شاید بتوان با افزودن زوج مرتب به آن، R را به یک رابطه هم ارزی تبدیل کرد. البته تعداد این زوج مرتب ها باید حداقل باشد.

اگر چنین R_1 ای (مجموعه ای از حداقل زوج مرتب ها که R را هم ارزی کند.) وجود داشته باشد، R_1 را بستار R می گویند.

بستار بازتابی: رابطه $R_1=R\cup\Delta$ ، بستار بازتابی R است.
بستار متقارن: رابطه $R_1=R\cup R^{-1}$ ، بستار متقارن R است.
بستار تعدی: رابطه $R_1=R^{\infty}$ ، بستار تعدی R است.
به R^{∞} رابطه ارتباطی (مسیری) نیز گفته می شود.

2. Warshall's Algorithm

پیدا کردن R^{∞} (همه مسیر های ممکن بین دو گره)، هزینه بر است و روش های مختلف همچون:

- گراف سودار
- ماتریس رابطه

ناکارآمد خواهد بود. بنابراین به معرفی الگوریتمی می پردازیم که اعمال آن حتی روی شبکه های بزرگ نیز امکان‌پذیر است.

در مثال بعدی، روش اول (گراف سودار) را بررسی می کنیم.
مثال: رابطه R به صورت زیر است:

$$R = \{(1,2),\ (2,1),\ (2,3),\ (3,4)\}$$

گراف مربوطه را رسم کنید و از روی آن R^{∞} را بدست آورید.
حل:
R
از طریق بررسی هندسی گراف، R را به دست آوردیم:

$$R^{\infty} = \{(),\ (),\ (),\ (),\ (),\ (),\ (),\ (),\ \}$$

این در حالی است که برای شبکه های بزرگ، گراف حاصله، بسیار پیچیده و این روش غیر ممکن خواهد بود.

در مثال بعدی، روش دوم (ماتریس رابطه) را بررسی می کنیم.
مثال: ماتریس بولی رابطه R به صورت زیر است:

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تمامی مسیر های ممکن R^{∞} را بدست آورید.
حل: باید تمام توان های R^n را پیدا کرد و با هم اجتماع گرفت. البته دانستن قضیه زیر می‌تواند بار محاسباتی را کاهش دهد.
قضیه: با فرض $A=|n|$ داریم:

$$R^{\infty} = R^1 \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$$

برای محاسبه R ، نیازی به پیدا کردن همه توان های R نیست. با عنایت به قضیه بالا و در نظر گرفتن توان های مخلتف، شاید بتوان ارتباطی (فرمولی) بین آن توان ها پیدا کرد.

در این مثال با پیدا کردن توان های زیر:

$$(M_R)^2_\odot = \begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} \quad (M_R)^3_\odot = \begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} \quad (M_R)^4_\odot = \begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

متوجه می شویم که تمام توان های زوج، معادل توان ۲، و تمام توان های فرد، معادل توان ۳، خواهد بود:

$$for \quad n=even \rightarrow (M_R)^n_\odot = (M_R)^2_\odot$$
$$for \quad n=odd \rightarrow (M_R)^n_\odot = (M_R)^3_\odot$$

بنابراین R^∞ ، به صورت زیر محاسبه می شود:

$$R^n = R^2 \vee R^3 = \begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

نتیجه حاصل، همان جواب مثال قبل (مثال گراف سودار) است.

ترکیب روابط: رابطه $S\,O\,R$ ترکیب دو رابطه S و R است. دو مثال بعدی به معرفی دقیق‌تر رابطه ترکیبی $S\,O\,R$ می پردازد.

مثال: مجموعه های زیر را در نظر بگیرید.

$$A = B = C = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \}$$

رابطه‌های زیر را روی مجموعه های بالا فرض کنید:

$$S = \{(1,4),\ (1,3),\ (2,3),\ (3,1),\ (4,1)\}$$
$$R = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,4),\ (3,2)\}$$

ترکیب رابطه $S\,O\,R$ را بیابید.

حل:

$$S\,O\,R = \{(1,4),\ (1,3),\ (1,1),\ (2,1),\ (3,3)\}$$

مثال: فرض کنید:

$$A = B = \{a,\ b,\ c\}$$

$$M_S = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix} \quad M_R = \begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

رابطه ترکیبی $S\,O\,R$ را بیابید.

حل:

$$M_{S\,O\,R} = M_S \odot M_R = \begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

تمرین: هزینه محاسباتی کدام قسمت معادله، کمتر است؟

$$(S\,O\,R)^{-1} = R^{-1}\,O\,S^{-1}$$