مقدمه

فرض کنید A و B دو مجموعه غیر تهی[1] باشند، تابع[2] f از A به B :

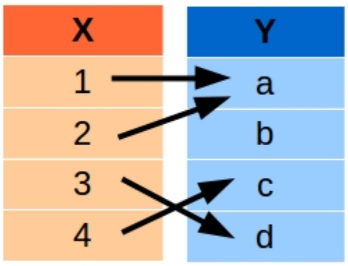
$$f: A \to B$$

رابطه[3] ای است که به ازای هر $a \in Dom(f)$ مقدار $f(a)$ فقط شامل یک عنصر[4] از B باشد:

$$\{(a, f(a)) \mid a \in dom(f)\}$$

توابع را نگاشت[5] و یا تبدیل نیز می گویند. چون هر عضو $a \in A$ را فقط به یک عضو B منسوب[6] می کنند. عضو a را آرگومان[7] و $f(a)$ را مقدار[8] تابع f برای آرگومان a می نامند. $f(a)$ را تصویر a تحت f نیز می گویند.

مثال: در شکل زیر از هر عضو X فقط یک فلش خارج شده است.



پس رابطه f به صورت:

$$f = \{(1,a), (2,a), (3,d), (4,c)\}$$

یک تابع است.

1 non-null
2 function
3 relation
4 element
5 mapping
6 assign
7 argument
8 returned value

مثال: برای $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{x, y, z\}$ رابطه:

$$s = \{(1, x), (2, x), (1, y)\}$$

تابع نیست زیرا:

$$s(1) = \{x, y\}$$

یعنی از عنصر 1 دو تا (بیش از یکی) فلش خارج شده است.

مثال: توابع در کامپیوتر اگر بیش از یک مقدار $return$ کنند، آن ها را به صورت یک لیست بر می گردانند.

```
function f(arg1, arg2) {
   // ...
   return [x,y]  ➔  لیست -- حاوی بیش از یک مقدار برگردانده
}
```

توابع را می توان به صورت فهرستی از ورودی-خروجی[9] در نظر گرفت. بین آن هاروابطی پیدا کرده و مدل(فرمول)[10] بدست آوریم. این روند به استقرا[11]ی ریاضیموسوم است.

مثال: تابع همانی[12] در A به صورت I_A نمایش می دهند:

$$I_A(a) = a$$

I_A همان رابطه ی Δ که معرف عناصر قطر اصلی[13] $A \times A$ است.

اگر f و g هرکدام تابع باشند. آنگاه تابع ترکیبی[14] gOf نیز تابع محسوب می شود:

$$gOf(a) = g(f(a))$$

مثال: فرض کنید:

$$f(a) = a + 1$$
$$g(b) = 2b$$

تابع gOf را بدست آورید.

حل:

$$gOf(a) = g(f(a)) = g(a+1) = 2(a+1) = 2a + 2$$

9 (key-value) pairs
10 model (formula)
11 induction
12 identity function
13 main diagonal
14 function compositional

ویژگی های تابع[15]

فرض کنید f تابعی از A به B باشد.

تابع f همه جا تعریف شده[16] است اگر:

$$Domain(f) = A$$

تابع f پوشا[17] است اگر:

$$Range(f) = B$$

تابع f یک به یک[18] است اگر:

هرگاه $f(a) = f(b)$ آنگاه $a = b$

تابع f وارون پذیر[19] است، هرگاه:

رابطه f^{-1} نیز یک تابع باشد.

مثال: فرض کنید:

$$A = \{a_1, \ a_2, \ a_3\}$$
$$B = \{b_1, \ b_2, \ b_3\}$$
$$C = \{c_1, \ c_2\}$$
$$D = \{d_1, \ d_2, \ d_3, \ d_4\}$$

سه ویژگی تابع (همه جا تعریف شده – پوشا – یک به یک) را در مورد روابط زیر بررسی کنید.

$$f1 = \{(a_1,b_2), \ (a_2,b_3), \ (a_3,b_1)\}$$
$$f2 = \{(a_1,d_2), \ (a_2,d_1), \ (a_3,d_4)\}$$
$$f3 = \{(b_1,c_2), \ (b_2,c_2), \ (b_3,c_1)\}$$
$$f4 = \{(d_1,b_1), \ (d_2,b_2), \ (d_3,b_1)\}$$

15 function’s properties
16 everywhere-defined function
17 onto function
18 one-to-one function
19 invertible function

حل:

یک به یک	پوشا	همه جا تعریف شده	تابع
بله	بله	بله	$A = \{a_1, a_2, a_3\}$
بله	خیر	بله	$B = \{b_1, b_2, b_3\}$
خیر	بله	بله	$C = \{c_1, c_2\}$
خیر	خیر	خیر	$D = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$

مثال: فرض کنید:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$B = \{a, b, c, d\}$$
$$f = \{(1,a), (2,a), (3,d), (4,c)\}$$

مشخص کنید آیا f وارون پذیر است. در این صورت، وارون آن را بنویسید.

حل: چون

$$f^{-1}(a) = \{1, 2\}$$

یعنی 2 تا (بیش از یکی) فلش از a خارج شده، پس f^{-1} تابع نیست. بنابراین f وارون پذیر هم نیست.

تابع $f: A \to B$ را یک تناظر یک به یک[20] $(1-1)$ بین A و B خواهیم گفت، اگر f:

- همه جا تعریف شده
- پوشا
- یک به یک

باشد.

20 one-to-one correspondence

مثال: فرض کنید:

$$A=\{a1,\ a2,\ a3\}$$
$$B=\{b1,\ b2,\ b3\}$$

نشان دهید f خاصیت تناظر یک به یک دارد.

حل:

$$f\ =\ \{(a_1,a_2),\ (a_2,b_3),\ (a_3,b_1)\}$$

هر سه خاصیت را دارد. بنابراین، تناظر یک به یک دارد.

اصل لانه کبوتری[21]

فرض کنید $f\colon A \to B$ تابعی با دامنه و برد متناهی باشد و

$$Dom(f)\ =\ |n|$$
$$Ran(f)\ =\ |n|$$

در این صورت:

- اگر f یک به یک باشد، آنگاه: $m = n$
- اگر f یک به یک نباشد، آنگاه: $m < n$

طبق قسمت دوم قضیه بالا، اصل لانه کبوتر را بدین گونه بیان می کنیم:

اگر n کبوتر به m لانه منسوب شوند و $m < n$ آنگاه دست کم یک لانه شامل 2 کبوتر و یا بیشتر است.

مثال: نشان دهید از 8 نفر دست کم روز تولد 2 نفر از آن ها در یک روز هفته است.

حل: هر هفته 7 روز است. همچنین: 8>7 . طبق اصل لانه کبوتر، دست کم روز تولد 2 نفر از آن ها در یک روز هفته است.

تعمیم اصل لانه کبوتر: اگر n کبوتر به m لانه منسوب شد. یکی از لانه ها دست کم، باید شامل $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ کبوتر باشد.

مثال: از 30 نفر $5\ =\ \lceil \frac{30}{7} \rceil$ نفر را می توان انتخاب نمود که روز تولد همه ی آن ها در یک روز هفته باشد.

---

21 pigeonhole principle