



# **КВАНТОВЫЕ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ СОСТОЯНИЯ ФОТОНОВ**

Учебно-методическое пособие

МОСКВА  
МФИ  
2017



Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(государственный университет)»

*Кафедра теоретической физики*

# **КВАНТОВЫЕ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ СОСТОЯНИЯ ФОТОНОВ**

Учебно-методическое пособие

Составитель *С. Н. Филиппов*

МОСКВА  
МФТИ  
2017

УДК 530.145

Рецензент

Доктор физико-математических наук, профессор *В.И. Манько*

**Квантовые поляризационные состояния фотонов** : уч.-метод. пособие / сост.: С. Н. Филиппов. – М. : МФТИ, 2017. – 36 с.

Рассматриваются вопросы квантового описания поляризационных состояний одиночных и перепутанных фотонов. Вводятся параметры Стокса, сфера Пуанкаре, чистые и смешанные состояния, матрица плотности ансамбля и подсистемы, перепутанные состояния. Излагаются принципы использования поляризационных состояний света в квантово-информационных приложениях: квантовой криптографии, сверхплотном кодировании, квантовой телепортации. Рассматриваются общие принципы динамики открытых квантовых систем. Вводится понятие квантового канала, приводятся примеры дефазирующего и деполаризационного каналов для поляризационных состояний фотонов.

Предназначено для студентов и аспирантов, специализирующихся в области теоретической физики, оптики и квантовой теории информации.

УДК 530.145

© Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(государственный университет)», 2017  
© Филиппов С. Н., составление, 2017

# Содержание

1. Введение . . . . .	4
2. Поляризация классических электромагнитных волн . . . . .	4
3. Квантовое описание поляризации одиночных фотонов . . . . .	6
4. Унитарное пространство . . . . .	10
5. Измерения и наблюдаемые . . . . .	11
5.1. Поляроид . . . . .	12
5.2. Двулучепреломляющий кристалл . . . . .	15
5.3. Поворот плоскости поляризации . . . . .	16
5.4. Сдвиг фаз . . . . .	18
6. Сфера Пуанкаре . . . . .	19
7. Матрица плотности ансамбля . . . . .	20
8. Частично поляризованный свет . . . . .	22
9. Квантовая криптография . . . . .	23
10. Двухфотонные перепутанные состояния . . . . .	24
11. Сверхплотное кодирование . . . . .	27
12. Измерение в базисе состояний Белла . . . . .	28
13. Квантовая телепортация . . . . .	31
14. Поляризация произвольного многофотонного состояния . . . . .	32
15. Квантовые каналы . . . . .	34
Литература . . . . .	35

# 1. Введение

Поляризационные состояния электромагнитного поля служат своеобразным связующим звеном, наглядно показывающим связь между законами классической электродинамики, справедливыми для волн большой интенсивности, и законами квантового мира, определяющими поведение одиночных фотонов. Этому способствуют как компактное теоретическое описание, так и (в большей степени) относительно простые экспериментальные методы работы с оптическими поляризационными состояниями. Именно при помощи поляризационных состояний впервые были продемонстрированы такие сугубо квантовые явления, как нарушение неравенств Белла [1], протокол квантовой криптографии [2], квантовое сверхплотное кодирование [3], квантовая телепортация [4]. Таким образом, изучение квантовых поляризационных состояний необходимо для успешного освоения квантовых информационных технологий, особенно в области квантовой коммуникации. Кроме того, основные принципы и постулаты квантовой механики (пространство состояний, принцип суперпозиции, физические наблюдаемые и измерения) находят своё простое выражение в экспериментах с поляризацией одиночных фотонов. Учёт дополнительных степеней свободы (например, частотный спектр) позволяет демонстрировать с помощью поляризационных состояний динамику открытых квантовых систем и познакомить с понятиями матрицы плотности и квантового канала, активно используемых в квантовой теории информации [5].

## 2. Поляризация классических электромагнитных волн

Рассмотрим плоскую монохроматическую электромагнитную волну с частотой  $\omega$ , распространяющуюся со скоростью света  $c$  вдоль оси  $z$ . Волновой вектор  $\mathbf{k} \parallel z$ ,  $k = \omega/c$ . Вектор напряженности электрического поля  $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$  и поэтому имеет нулевую компоненту  $E_z = 0$ . Из уравнений Максвелла следует, что векторная функция  $\mathbf{E}$  является гармонической функцией переменной  $(kz - \omega t)$ , называемой *фазой*:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \cos(kz - \omega t + \varphi_1) \\ E_2 \cos(kz - \omega t + \varphi_2) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — сдвиги фазы для горизонтальной и вертикальной компонент поля.

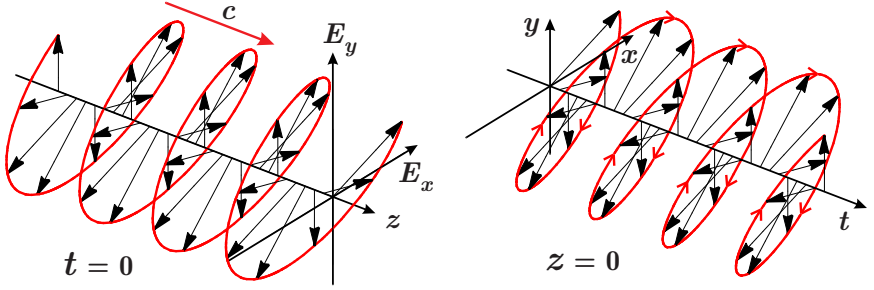


Рис. 1. Слева: напряжённость поля в зависимости от координаты  $z$  при фиксированном времени. Справа: зависимость напряжённости поля в фиксированной точке от времени. Здесь и далее будем использовать сокращённые обозначения:  $E_x \leftrightarrow x$ ,  $E_y \leftrightarrow y$

Для фиксированного момента времени  $t = 0$  геометрическое место точек

$$(E_1 \cos(kz + \varphi_1), E_2 \cos(kz + \varphi_2), z) \quad (2)$$

представляет собой винтовую линию (рис. 1).

Для фиксированной координаты  $z = 0$  геометрическое место точек

$$(E_1 \cos(-\omega t + \varphi_1), E_2 \cos(-\omega t + \varphi_2), t) \quad (3)$$

также представляет собой винтовую линию, но с противоположной ориентацией (рис. 1). Для фиксированной координаты при увеличении времени  $t$  конец вектора  $\mathbf{E}$  описывает в  $xy$ -плоскости эллипс (рис. 2).

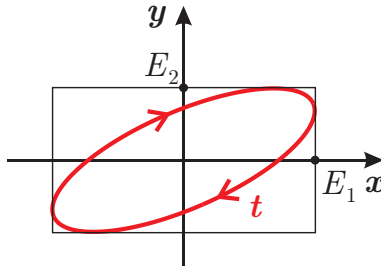


Рис. 2. Эллипс, описываемый вектором напряжённости поля с увеличением времени

### 3. Квантовое описание поляризации одинокных фотонов

Явление фотоэффекта и другие эксперименты по поглощению света показывают, что электромагнитная энергия поглощается квантами, т.е. порциями  $\hbar\omega$ , где  $\hbar \approx 1,05 \cdot 10^{-27}$  эрг·с — постоянная Планка. Кроме того, будем считать, что переносчиками электромагнитной энергии являются особые частицы — фотоны, несущие квант энергии.

Рассмотрим монохроматическую электромагнитную волну с *определённой* поляризацией. Тогда и все фотоны в волне обладают этой *определённой* поляризацией. Рассмотрим *единичный* фотон. С одной стороны, единичный фотон ведёт себя подобно исходной волне (волновые свойства), а с другой стороны, фотон может быть поглощён детектором только полностью или не поглощён вовсе (свойства частицы). Таким образом, имеет место корпускулярно-волновой дуализм.

Для квантового описания единичного фотона мы можем абстрагироваться от абсолютных значений  $E_1$  и  $E_2$ , важен лишь вид той винтовой линии, которую описывает в пространстве вектор  $\mathbf{E}$ . Удобно задать эту форму также вектором, только двумерным, а не трёхмерным, поскольку всегда  $E_z = 0$ . Далее, вид винтовой линии определяет не только соотношение между  $E_1$  и  $E_2$ , а также соотношение между сдвигами фаз  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Как и в оптике, нагляднее всего соотношение между фазами можно увидеть с помощью комплексных амплитуд  $E_1 e^{i(kz - \omega t + \varphi_1)}$  и  $E_2 e^{i(kz - \omega t + \varphi_2)}$ , действительные части которых равны  $E_1 \cos(kz - \omega t + \varphi_1)$  и  $E_2 \cos(kz - \omega t + \varphi_2)$  соответственно.

Перейдём на новый уровень абстракции и *для описания* единичного фотона (вида винтовой линии) будем использовать следующий комплексный вектор, известный в оптике как вектор Джонса:

$$\begin{pmatrix} E_1 \cos(kz - \omega t + \varphi_1) \\ E_2 \cos(kz - \omega t + \varphi_2) \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{E_1^2 + E_2^2}} \begin{pmatrix} E_1 e^{i(kz - \omega t + \varphi_1)} \\ E_2 e^{i(kz - \omega t + \varphi_2)} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

в котором намеренно подчёркивается тот факт, что интенсивность нас теперь не интересует (мы имеем дело с одним фотоном).

Далее заметим, что общий фазовый множитель  $e^{i(kz - \omega t)}$  присущ самой волне, поскольку мы изначально рассматривали монохроматическую волну. Само значение  $\omega$  определяет шаг винтовой линии ( $\lambda = 2\pi c/\omega$ ) или угловую скорость, с которой вектор  $\mathbf{E}$  описывает эллипс в плоскости  $xy$ . Сама форма эллипса задаётся лишь соотношением между  $E_1 e^{i\varphi_1}$  и  $E_2 e^{i\varphi_2}$ . По этой причине нас не интересуют сами зна-



чения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , а интересует лишь разность фаз  $\varphi_2 - \varphi_1$  — именно она вкупе с отношением  $E_1/E_2$  определяет форму эллипса. Это означает, что *физически* следующие записи состояния (4) эквивалентны:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{E_1^2 + E_2^2}} \begin{pmatrix} E_1 e^{i(kz - \omega t + \varphi_1)} \\ E_2 e^{i(kz - \omega t + \varphi_2)} \end{pmatrix} &\longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{E_1^2 + E_2^2}} \begin{pmatrix} E_1 e^{i\varphi_1} \\ E_2 e^{i\varphi_2} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \\ &\longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{E_1^2 + E_2^2}} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

*Физическая* эквивалентность означает, что все выводимые нами заключения о наблюдаемых экспериментально величинах должны быть одинаковы для перечисленных выше *математических* записей состояния.

Запишем некоторые состояния в новых обозначениях. Состояние с горизонтальной поляризацией ( $E_1 \neq 0, E_2 = 0$ ):  $|H\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Состояние с вертикальной поляризацией ( $E_1 = 0, E_2 \neq 0$ ):  $|V\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Произвольное состояние поляризации фотона имеет вид

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 |H\rangle + c_2 |V\rangle, \quad (6)$$

где  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ ,  $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ , представляет собой *суперпозицию* состояний  $|H\rangle$  и  $|V\rangle$ . Данное математическое описание имеет наглядную физическую интерпретацию: мы имеем дело со сложением гармонических колебаний в  $x$  и  $y$  направлениях.

Если аргументы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  комплексных чисел  $c_1$  и  $c_2$  совпадают или различаются на  $\pi$ , т.е.  $\varphi_1 = \varphi_2$  или  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm\pi$ , то имеем дело с линейной поляризацией (эллипс вырождается в прямую, рис. 3).

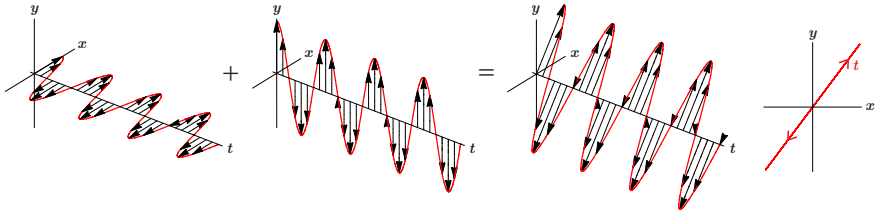


Рис. 3. Состояние  $\frac{3}{5}|H\rangle + \frac{4}{5}|V\rangle$  — пример суперпозиции, реализующей фотон с линейной поляризацией

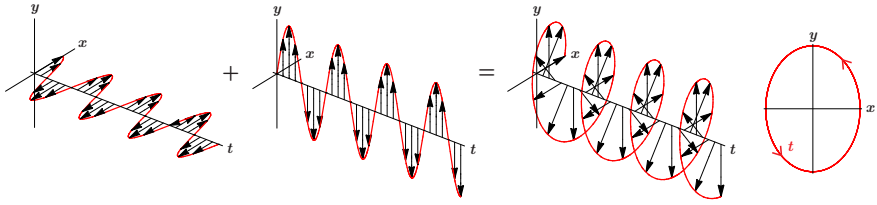


Рис. 4. Состояние  $\frac{3}{5}|H\rangle + \frac{4}{5}e^{i\pi/2}|V\rangle$  — пример суперпозиции, реализующей фотон с правой эллиптической поляризацией

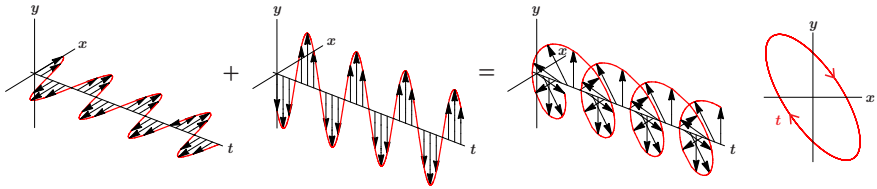


Рис. 5. Состояние  $\frac{3}{5}|H\rangle + \frac{4}{5}e^{i5\pi/4}|V\rangle$  — пример суперпозиции, реализующей фотон с левой эллиптической поляризацией

Умножение вектора  $|V\rangle$  на число  $|c_2|e^{i\varphi_2}$  означает, что амплитуда колебания вдоль оси  $y$  умножается на  $|c_2|$ , а сама волна сдвинута по фазе на  $\varphi_2$  (рис. 4 и 5).

Так, если  $\varphi_2 - \varphi_1 \in (0, \pi)$ , то с увеличением времени конец вектора  $\mathbf{E}$  движется против часовой стрелки по эллипсу в плоскости  $xy$  (по кратчайшему повороту от  $x$  к  $y$ ). Такое состояние называют состоянием с *правой* эллиптической поляризацией [6, 7], поскольку это соответствует закручиванию буравчика вдоль оси  $z$  и положительному моменту количества движения относительно направления распространения (рис. 6a).

Если  $\varphi_2 - \varphi_1 \in (\pi, 2\pi)$ , то с увеличением времени конец вектора  $\mathbf{E}$  движется по часовой стрелке по эллипсу в плоскости  $xy$  (по кратчайшему повороту от  $y$  к  $x$ ). Такое состояние называют состоянием с *левой* эллиптической поляризацией [6, 7], поскольку это соответствует выкручиванию буравчика из оси  $z$  и отрицательному моменту количества движения относительно направления распространения (рис. 6b).

Если  $|c_1| = |c_2|$  и  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$ , то имеем фотон с правой круговой поляризацией, вектор такого состояния  $|\odot\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + i|V\rangle)$ .

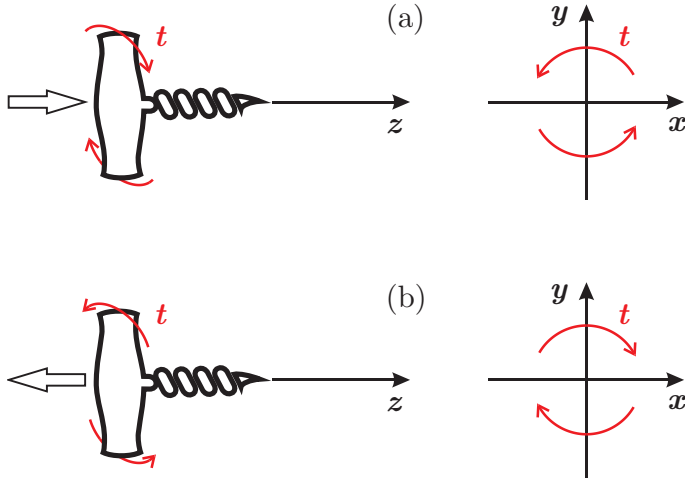


Рис. 6. (а) Правая поляризация. (б) Левая поляризация

Если  $|c_1| = |c_2|$  и  $\varphi_2 - \varphi_1 = 3\pi/2$ , то имеем дело с левой круговой поляризацией, вектор такого состояния  $|\circ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - i|V\rangle)$ .

Совершенно понятно, что складывать можно не только колебания в горизонтальной и вертикальной плоскостях. Так, например, складывая с равными по модулю коэффициентами состояния  $|\circ\rangle$  и  $|\circ\rangle$ , будем получать фотоны с линейной поляризацией. Сумма произвольных состояний также будет допустимым состоянием.

Если окажется, что  $|c_1|^2 + |c_2|^2 \neq 1$ , то нужно будет заменить  $c_1 \rightarrow c_1/\sqrt{|c_1|^2 + |c_2|^2}$  и  $c_2 \rightarrow c_2/\sqrt{|c_1|^2 + |c_2|^2}$ . Как мы увидим в дальнейшем, сумма  $|c_1|^2 + |c_2|^2$  имеет смысл «количества» фотонов и должна равняться единице, если мы *знаем*, что имеем дело с одним фотоном. Если же фотон мог где-то поглотиться и мы *не знаем*, поглотился ли он или нет, то сумма  $|c_1|^2 + |c_2|^2$  может быть меньше единицы, и вероятность поглощения есть  $1 - (|c_1|^2 + |c_2|^2)$ .

Мы увидели, что если отвлечься от условия  $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$  и отождествить состояния, отличающиеся лишь *глобальным* фазовым множителем, т.е. отождествить состояния  $|\psi\rangle$  и  $c|\psi\rangle$ ,  $c \in \mathbb{C}$ ,  $c \neq 0$ , то пространство векторов состояний будет *линейным*. Правило суперпозиции состояний тогда просто отражение линейности этого пространства. Следующий раздел посвящён краткому повторению соответствующей главы линейной алгебры.

## 4. Унитарное пространство

Рассмотренные нами векторы  $|\psi\rangle$  — элементы *унитарного* пространства  $\mathbb{C}^2$ .

**Определение 1.** Унитарное пространство — комплексное линейное пространство векторов  $|\psi\rangle$ , в котором каждой упорядоченной паре  $|\varphi\rangle$  и  $|\psi\rangle$  поставлено в соответствие комплексное число  $(|\varphi\rangle, |\psi\rangle)$ , обозначаемое кратко  $\langle\varphi|\psi\rangle$  и называемое их скалярным произведением, так, что выполнены аксиомы:

1.  $\langle\varphi|\psi\rangle = (\langle\psi|\varphi\rangle)^*$ ;
2.  $(|\varphi\rangle, a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle) = a\langle\varphi|\psi_1\rangle + b\langle\varphi|\psi_2\rangle$  для любых  $a, b \in \mathbb{C}$ ;
3.  $\langle\psi|\psi\rangle$  вещественно и  $\langle\psi|\psi\rangle \geq 0$ , причём  $\langle\psi|\psi\rangle = 0 \Leftrightarrow |\psi\rangle = 0$  (нулевой элемент пространства).

Из аксиом 1 и 2 следует, что скалярное произведение линейно по второму аргументу и антилинейно по первому, т.е.

$$(a|\varphi_1\rangle + b|\varphi_2\rangle, |\psi\rangle) = a^*\langle\varphi_1|\psi\rangle + b^*\langle\varphi_2|\psi\rangle, \quad \forall a, b \in \mathbb{C}. \quad (7)$$

Мы будем пользоваться конкретной реализацией скалярного произведения, которое легко понять в *обозначениях Дирака*: каждому вектору-столбцу  $|\psi\rangle$  поставим в соответствие вектор-строку  $\langle\psi|$  по следующему правилу:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \langle\psi| = (c_1^* \quad c_2^*) = (|\psi\rangle)^\dagger. \quad (8)$$

В последнем равенстве мы использовали операцию *эрмитового сопряжения* матриц  $\dagger = \top^* = * \top$ , которая осуществляет транспонирование и комплексное сопряжение.

**Определение 2.** Матрица  $A^\dagger = A^{\top*}$  размерности  $n \times m$  называется эрмитово сопряженной к матрице  $A$  размера  $m \times n$ :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} a_{11}^* & \cdots & a_{m1}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}^* & \cdots & a_{mn}^* \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Тогда легко реализовать скалярное произведение векторов  $|\varphi\rangle = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_1 \end{pmatrix}$  и  $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$  как произведение строки и столбца:

$$\underbrace{\langle\varphi|\psi\rangle}_{\text{bracket}} = \underbrace{\langle\varphi|}_{\text{bra}} \underbrace{|\psi\rangle}_{\text{ket}} = \begin{pmatrix} d_1^* & d_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = d_1^* c_1 + d_2^* c_2. \quad (10)$$

По понятной причине векторы-строки  $\langle\cdot|$  принято называть *бра*-векторами, а векторы-столбцы  $|\cdot\rangle$  — *кет*-векторами.

Очевидно, что введённое таким образом скалярное произведение удовлетворяет аксиомам 1 – 3. В частности, норма вектора

$$\langle\psi|\psi\rangle = |c_1|^2 + |c_2|^2. \quad (11)$$

Пусть  $|\chi\rangle = A|\psi\rangle$ , где  $A$  — квадратная матрица с элементами  $a_{ij}$  (для наших примеров матрица размера  $2 \times 2$ ). Тогда

$$\begin{aligned} \langle\varphi|\chi\rangle &= \langle\varphi|A|\psi\rangle = \langle\varphi|A|\psi\rangle = \sum_{ij} d_i^* a_{ij} c_j = \left( \sum_{ji} c_j^* a_{ij}^* d_i \right)^* = \\ &= \left( |\psi\rangle, A^\dagger |\varphi\rangle \right)^* = \left( A^\dagger |\varphi\rangle, |\psi\rangle \right), \end{aligned} \quad (12)$$

т.е.  $\langle\varphi|A|\psi\rangle = \left( A^\dagger |\varphi\rangle, |\psi\rangle \right)$  или кратко  $\langle\varphi|A|\psi\rangle = \langle A^\dagger \varphi | \psi \rangle$ . Из равенства (12) сразу следует, что  $(\hat{A}\hat{B} \dots \hat{F})^\dagger = \hat{F}^\dagger \dots \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$ . В частности,  $(A|f)^\dagger = \langle f|A^\dagger$ .

Введём ещё два определения.

**Определение 3.** Квадратная матрица  $A$  называется *эрмитовой*, если  $A = A^\dagger$ .

**Определение 4.** Невырожденная квадратная матрица  $U$  называется *унитарной*, если  $U^\dagger U = U U^\dagger = I$ , где  $I$  — единичная матрица, т.е.  $U^{-1} = U^\dagger$ .

## 5. Измерения и наблюдаемые

Раздел квантовых измерений традиционно в недостаточной мере излагается в стандартных курсах квантовой механики. Отчасти это связано с тем, что в середине XX века возможности эксперимента не позволяли работать с одиночными квантовыми системами, опыты проводились с макроскопическими ансамблями, где главное значение имеют средние значения, а не результаты отдельных наблюдений. Тем не

менее в связи с продолжающейся миниатюризацией в микро- и нано-электронике, развитием техники низких температур, созданием высокочастотных резонаторов для электромагнитного поля открылись новые возможности для манипулирования и проведения измерений над отдельными квантовыми системами. Квантовые поляризационные состояния фотонов начали использовать одними из первых, что позволило продемонстрировать с их помощью ряд интересных квантовых эффектов.

## 5.1. Поляроид

Если на пути фотона поставить идеальный фотодетектор, то он его зарегистрирует с вероятностью 1 («щелчок», рис. 7). Если же фотона нет, щелчка не будет.



Рис. 7. Фотон поглощается идеальным детектором

Проведем аналогичный опыт, но на пути фотона поставим *поляроид*. Для макроскопической электромагнитной волны поляроид, ориентированный вдоль некоторого направления, на выходе выдает компоненту волны с поляризацией вдоль этого направления, а перпендикулярную компоненту поглощает.

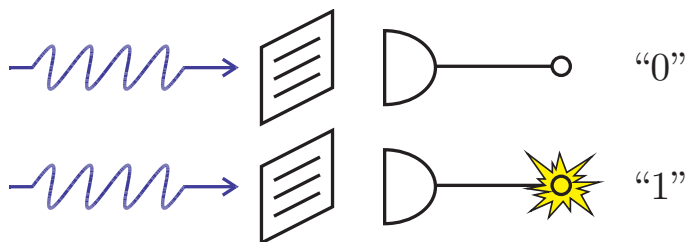


Рис. 8. Вероятностный характер срабатывания детектора для фиксированного состояния фотона

Опыт показывает, что одиночный фотон (в определённом состоянии  $|\psi\rangle$ ) может как пройти через поляроид и вызвать щелчок детектора, так и поглотиться в поляроиде и не быть зафиксированным

детектором. Причём заранее невозможно предсказать, какой вариант реализуется. Результат носит принципиальный *вероятностный характер* (рис. 8).

Единственными случаями, когда результат можно предсказать, являются случаи линейной поляризации вдоль и поперёк оси поляроида: в первом случае фотон детектируется с вероятностью 1, во втором с вероятностью 0.

Дело в том, что поляроид *проецирует* состояния и может выдавать на выходе фотоны только с поляризацией вдоль этого направления. Например, если поляроид ориентирован горизонтально, то на выходе из него все пролетающие фотоны находятся в состоянии  $|H\rangle$  (рис. 9).

Действие такого поляроида задаётся проектором

$$P = |H\rangle\langle H| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Подействуем этим проектором на произвольное состояние фотона  $|\psi\rangle = c_1|H\rangle + c_2|V\rangle$ :

$$P|\psi\rangle = |H\rangle\langle H||\psi\rangle = |H\rangle \underbrace{\langle H|\psi\rangle}_{\text{число}} = \langle H|\psi\rangle|H\rangle = c_1|H\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

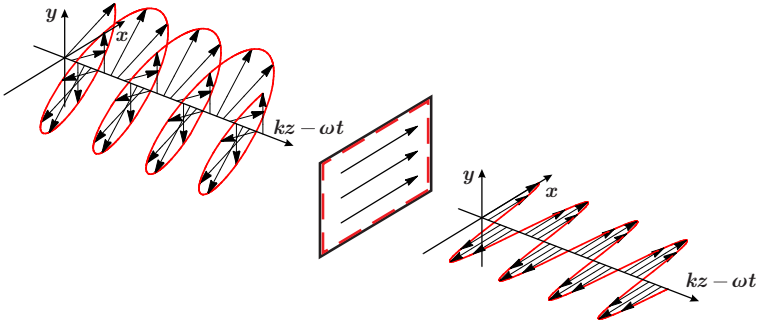


Рис. 9. Действие поляроида, ориентированного в горизонтальном направлении. Фотон либо поглощается поляроидом, либо проходит через него с горизонтальной поляризацией

Мы видим, что норма вектора  $P|\psi\rangle$  равна  $|c_1|^2 \leq 1$ . Это указывает на поглощение фотона поляроидом. Действительно, *опыт показывает*, что вероятность зафиксировать фотон детектором в точности

равна  $|c_1|^2$ . С другой стороны, эта вероятность есть не что иное, как  $|\langle H|\psi\rangle|^2$ . Вероятность поглощения равна  $1 - |c_1|^2 = |c_2|^2 = |\langle V|\psi\rangle|^2$ .

Для прояснения связи физики и математики вспомним математическую задачу поиска собственных векторов и собственных значений матрицы. Для заданной матрицы  $A$  требуется найти числа  $\lambda$  и ненулевые векторы  $|f\rangle$  такие, что

$$A|f\rangle = \lambda|f\rangle. \quad (15)$$

Поиск собственных значений заключается в решении уравнения  $\det(A - \lambda I) = 0$ , а затем решения системы уравнений  $(A - \lambda I)|f\rangle = 0$ .

Матрица  $P$  эрмитова, её собственные значения равны 1 и 0, соответствующие им собственные векторы — это векторы  $|H\rangle$  и  $|V\rangle$ .

Заметим, что собственные значения матрицы (13) равны 1 и 0. Это можно интерпретировать следующим образом. Физической наблюдаемой «прохождение фотона» приписаны два значения: значение «1», если фотон задетектирован приёмником, и значение «0», если фотон не задетектирован (рис. 8). В *единичном* акте измерения с одним налетающим фотоном мы получаем *одно* значение: либо значение «1», либо значение «0». Вероятность исхода «1» равна  $|\langle H|\psi\rangle|^2 = |\langle\psi|H\rangle|^2$ , т.е. квадрату модуля скалярного произведения вектора состояния фотона  $|\psi\rangle$  и собственного вектора  $P$ , отвечающего собственному значению 1. Аналогично, вероятность исхода «0» равна  $|\langle V|\psi\rangle|^2 = |\langle\psi|V\rangle|^2$ , т.е. квадрату модуля скалярного произведения вектора состояния фотона  $|\psi\rangle$  и собственного вектора  $P$ , отвечающего собственному значению 0.

Среднее значение физической наблюдаемой «прохождение фотона» есть математическое ожидание:

$$1 \cdot (\text{вероятность исхода «1»}) + 0 \cdot (\text{вероятность исхода «0»}) = \\ = 1 \cdot |c_1|^2 + 0 \cdot |c_2|^2 = \begin{pmatrix} c_1^* & c_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \langle\psi|P|\psi\rangle \equiv \langle P\rangle.$$

Запись  $\langle P\rangle$  означает среднее значение наблюдаемой, где усреднение ведётся по результатам измерений для фиксированного состояния фотона  $|\psi\rangle$  (много фотонов, каждый из которых находится в состоянии  $|\psi\rangle$ , пропускаем через поляризатор и смотрим, щёлкнул ли детектор). Такие средние называют *средними по состоянию*  $|\psi\rangle$ , что и подразумевает запись  $\langle P\rangle \equiv \langle\psi|P|\psi\rangle$ . Саму измеряемую величину «прохождение фотона» тоже можно обозначить буквой  $P_{\text{физ.вел.}} = \{1, 0\}$ , которая может принимать два значения. Тогда

$$\langle P_{\text{физ.вел.}} \rangle = \langle\psi|P|\psi\rangle. \quad (16)$$



## 5.2. Двулучепреломляющий кристалл

Рассмотрим более интересный случай измерения с двулучепреломляющим кристаллом (рис. 10). При попадании одиночного фотона на двулучепреломляющий кристалл компонента, поляризованная горизонтально, не отклоняется, а компонента, поляризованная вертикально, отклоняется от первоначального направления распространения луча (пунктирными линиями показаны фронты элементарных волн). Поставив два детектора, в каждом единичном акте мы будем наблюдать *экспериментально* срабатывание *лишь одного* из детекторов. Можно считать, что до попадания в детектор фотон находится в обоих лучах одновременно: и в верхнем, и в нижнем (принцип суперпозиции). Однако, будучи частицей, фотон может быть зарегистрирован только в одном детекторе — *либо* в верхнем, *либо* в нижнем, т.е. происходит коллапс состояния.

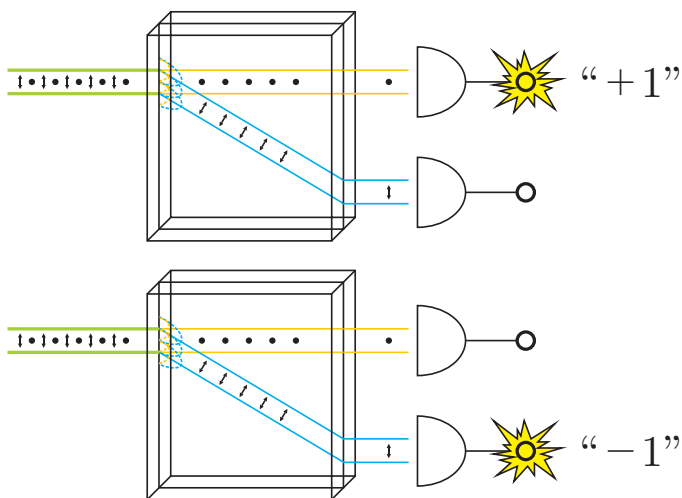


Рис. 10. Схема измерения параметра Стокса  $\langle \psi | \sigma_z | \psi \rangle$

Срабатыванию верхнего детектора припишем значение «+1», а срабатыванию нижнего — «−1». Обозначим соответствующую физическую величину  $Z_{\text{физ.вел.}}$ , тогда для состояния  $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$  получим

$$\begin{aligned}
\langle Z_{\text{физ.вел.}} \rangle &= (+1) \cdot |c_1|^2 + (-1) \cdot |c_2|^2 = \\
&= \begin{pmatrix} c_1^* & c_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \langle \psi | \sigma_3 | \psi \rangle, \quad (17)
\end{aligned}$$

где  $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  – матрица, отвечающая физической наблюдаемой  $Z_{\text{физ.вел.}}$ . Видно, что собственные значения  $\sigma_3$  – числа  $+1$  и  $-1$ , а отвечающие им собственные векторы –  $|H\rangle$  и  $|V\rangle$ .

Величину  $\langle \psi | \sigma_3 | \psi \rangle = |c_1|^2 - |c_2|^2$  также называют 3-м параметром Стокса. Схема на рис. 10 показывает, как этот параметр можно измерить экспериментально, суммируя количество срабатываний верхнего ( $N_+$ ) и нижнего ( $N_-$ ) детекторов и вычисляя отношение  $(N_+ - N_-)/(N_+ + N_-)$  при многократном отправлении на двулучепреломляющий кристалл идентичных фотонов в состоянии  $|\psi\rangle$ .

### 5.3. Поворот плоскости поляризации

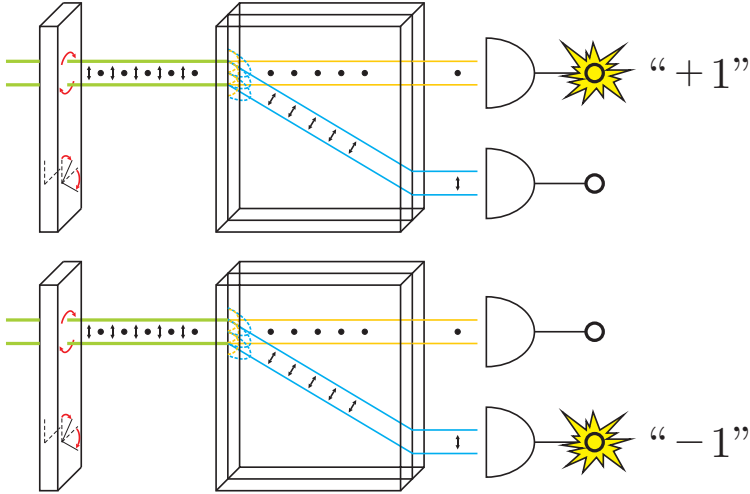


Рис. 11. Схема измерения параметра Стокса  $\langle \psi | \sigma_1 | \psi \rangle$

Видоизменим эксперимент, поставив перед двулучепреломляющим кристаллом пластинку, в которой вследствие эффекта Фарадея плоскость поляризации поворачивается на угол  $-45^\circ$ , рис. 11. Такой по-

ворот плоскости поляризации отвечает обычному повороту плоскости  $Oxy$  и задаётся унитарной матрицей  $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Тогда

$$|\psi\rangle \longrightarrow |\varphi\rangle = U|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ -c_1 + c_2 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Получим новую физическую величину  $X_{\text{физ.вел.}}$ , среднее значение которой равно

$$\langle X_{\text{физ.вел.}} \rangle = \frac{1}{2}|c_1 + c_2|^2 - \frac{1}{2}|-c_1 + c_2|^2 = \langle \varphi | \sigma_3 | \varphi \rangle = \langle \psi | U^\dagger \sigma_3 U | \psi \rangle. \quad (19)$$

Приходим к выводу, что среднее значение  $\langle X_{\text{физ.вел.}} \rangle$  равно  $\langle \psi | \sigma_1 | \psi \rangle$ , где

$$\sigma_1 = U^\dagger \sigma_3 U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Матрица  $\sigma_1$  эрмитова, её собственные значения равны  $\pm 1$ , а собственные векторы равны  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$  соответственно.

Если бы фотон изначально находился в состоянии  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , то при повороте плоскости поляризации на  $-45^\circ$  он бы превратился в фотон с горизонтальной поляризацией (вектор  $|H\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ) и с определённой пошёл бы в верхний детектор, и мы бы с определённой получили значение «+1».

Если бы фотон изначально находился в состоянии  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , то при повороте плоскости поляризации на  $-45^\circ$  он бы превратился в фотон с вертикальной поляризацией (вектор  $-|V\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ) и с определённой пошёл бы в нижний детектор, и мы бы с определённой получили значение «-1».

Этот пример ещё раз показывает, что каждой измеряемой физической величине можно поставить в соответствие матрицу, собственные векторы которой определяют такие состояния, для которых исходы измерения принимают *определённое* значение.

Величину  $\langle \psi | \sigma_1 | \psi \rangle = c_2^* c_1 + c_1^* c_2 = 2\text{Re}(c_1^* c_2)$  также называют 1-м параметром Стокса. Схема на рис. 11 показывает, как этот параметр можно измерить экспериментально.

## 5.4. Сдвиг фаз

Рассмотрим, наконец, случай, когда перед двулучепреломляющим кристаллом и пластинкой, вращающей плоскость поляризации на угол  $-45^\circ$ , установлена так называемая пластинка  $\lambda/4$ , которая создаёт между горизонтальной и вертикальной компонентами поляризации разность фаз  $\pi/2$  (из-за разных скоростей распространения волн, поляризованных горизонтально и вертикально). Действие такой пластинки задаётся унитарной матрицей:

$$W = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad |\psi\rangle \longrightarrow |\chi\rangle = W|\psi\rangle = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ic_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Получим новую физическую величину  $Y_{\text{физ.вел.}}$ , среднее значение которой равно

$$\langle Y_{\text{физ.вел.}} \rangle = \langle \chi | \sigma_1 | \chi \rangle = \langle \psi | W^\dagger \sigma_1 W | \psi \rangle. \quad (22)$$

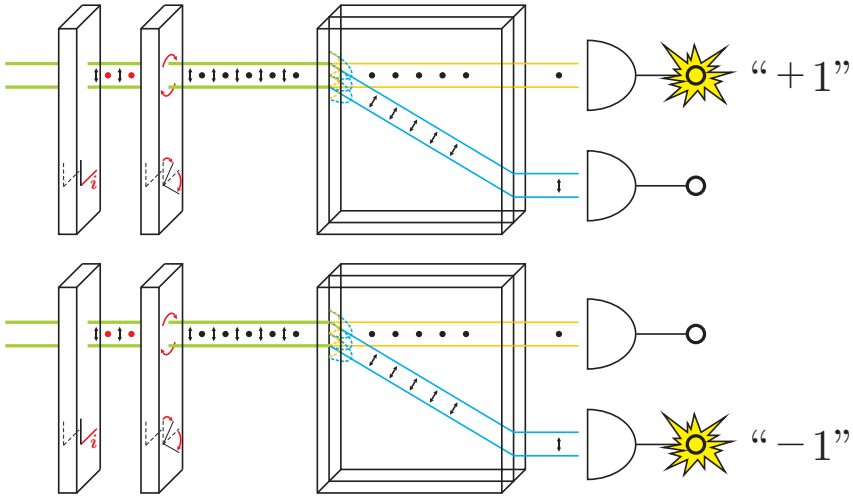


Рис. 12. Схема измерения параметра Стокса  $\langle \psi | \sigma_2 | \psi \rangle$

Приходим к выводу, что среднее значение  $\langle Y_{\text{физ.вел.}} \rangle$  равно  $\langle \psi | \sigma_2 | \psi \rangle$ , где

$$\sigma_2 = W^\dagger \sigma_1 W = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Матрица  $\sigma_2$  эрмитова, её собственные значения равны  $\pm 1$ , а собственные векторы равны  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$  соответственно.

Если бы фотон изначально находился в состоянии с правой круговой поляризацией  $|\odot\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ , то после сдвига фаз он бы превратился в фотон с линейной поляризацией  $\frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  и в итоге с определённостью попал бы в верхний детектор, и мы бы с определённостью получили значение «+1».

Если бы фотон изначально находился в состоянии с левой круговой поляризацией  $|\ominus\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ , то после сдвига фаз он бы превратился в фотон с линейной поляризацией  $\frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  и в итоге с определённостью попал бы в нижний детектор, и мы бы с определённостью получили значение «-1».

Величину  $\langle\psi|\sigma_2|\psi\rangle = i(c_2^*c_1 - c_1^*c_2) = 2\text{Im}(c_1^*c_2)$  также называют 2-м параметром Стокса. Схема на рис. 12 показывает, как этот параметр можно измерить экспериментально.

## 6. Сфера Пуанкаре

Для начала покажем, что физические свойства квантового состояния  $|\psi\rangle = c_1|H\rangle + c_2|V\rangle$  одиночного фотона определяются двумя вещественными параметрами. Несмотря на то, что задание комплексных чисел  $c_1$  и  $c_2$  эквивалентно заданию 4-х вещественных параметров, во-первых, общий фазовый множитель не изменяет физических свойств состояния, во-вторых, имеется условие нормировки  $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ . Таким образом, состояние  $|\psi\rangle$  можно описать двумя действительными параметрами, в частности углами на сфере  $\theta \in [0, \pi]$  и  $\varphi \in [0, 2\pi]$ :

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}. \quad (24)$$

При такой параметризации

$$s_x := \langle\psi|\sigma_x|\psi\rangle = \sin \theta \cos \varphi, \quad (25)$$

$$s_y := \langle\psi|\sigma_y|\psi\rangle = \sin \theta \sin \varphi, \quad (26)$$

$$s_z := \langle\psi|\sigma_z|\psi\rangle = \cos \theta. \quad (27)$$

Величины  $s_x$ ,  $s_y$ ,  $s_z$  называются параметрами Стокса и полностью характеризуют поляризационное квантовое состояние одиночного фотона  $|\psi\rangle$ . Заметим, что состояние (24) является собственным для оператора  $\mathbf{s} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} = s_x \hat{\sigma}_x + s_y \hat{\sigma}_y + s_z \hat{\sigma}_z$ .

Таким образом, множеству физических состояний  $|\psi\rangle$  можно поставить в соответствие сферу Пуанкаре (см. рис. 13). Линейной поляризации соответствует сечение сферы плоскостью  $Oxz$ . Правой круговой поляризации соответствует точка  $(0, 1, 0)$ , левой круговой поляризации — точка  $(0, -1, 0)$ .

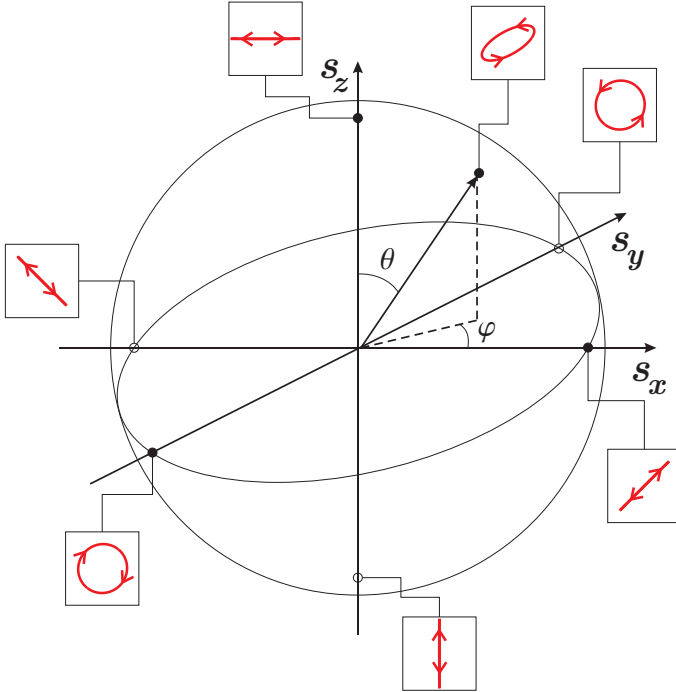


Рис. 13. Сфера Пуанкаре

## 7. Матрица плотности ансамбля

Рассмотренные выше понятия были сформулированы для одиночных фотонов, описываемых векторами состояния  $|\psi\rangle$ , называемых так-

же чистыми состояниями. Рассмотрим теперь *ансамбль* чистых состояний  $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ , в котором каждое состояние  $|\psi_i\rangle$  встречается с вероятностью  $p_i$ , причём  $\sum_i p_i = 1$ . Тогда среднее значение некоторой физической величины  $\hat{A}$  по такому ансамблю будет определяться формулой

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_i p_i \langle \psi_i | \hat{A} | \psi_i \rangle = \text{tr} \left( \hat{A} \hat{\rho} \right), \quad (28)$$

где  $\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$  — оператор плотности,  $\text{tr} \hat{M} = \sum_i \langle i | \hat{M} | i \rangle = \sum_i M_{ii}$  — след оператора, вычисляемый как сумма диагональных элементов матрицы оператора, записанного в ортонормированном базисе  $\{|i\rangle\}$ .

Матрица плотности  $\rho$  с элементами  $\rho_{ij} = \langle i | \hat{\rho} | j \rangle$  обладает следующими свойствами: 1) эрмитовость  $\rho^\dagger = \rho$ ; 2) неотрицательная определённость  $\rho \geq 0$ ; 3) единичный след  $\text{tr} \rho = 1$ . Действительно,

$$1) \quad \hat{\rho}^\dagger = \sum_i p_i (|\psi_i\rangle \langle \psi_i|)^\dagger = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| = \hat{\rho}; \quad (29)$$

$$2) \quad \langle \chi | \hat{\rho} | \chi \rangle = \sum_i p_i \langle \chi | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \chi \rangle = \sum_i p_i |\langle \chi | \psi_i \rangle|^2 \geq 0, \quad \forall |\chi\rangle; \quad (30)$$

$$3) \quad \text{tr} \hat{\rho} = \sum_i p_i \text{tr} (|\psi_i\rangle \langle \psi_i|) = \sum_i p_i \langle \psi_i | \psi_i \rangle = \sum_i p_i = 1. \quad (31)$$

Обратно, пусть имеется оператор  $\hat{\rho}$ , удовлетворяющий свойствам (29) – (31), тогда найдутся вероятности  $p_i$  и состояния  $|\psi_i\rangle$  такие, что  $\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ . Заметим, что в общем случае представление суммой  $\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$  не единственно. Один из способов заключается в том, чтобы в качестве  $p_i$  взять собственные значения  $\rho$ , а в качестве  $|\psi_i\rangle$  — соответствующие им ортонормированные собственные векторы.

Мы приходим к выводу, что статистические свойства ансамбля одиночных фотонов полностью определяются оператором плотности. В этом случае поляризационная матрица плотности имеет вид

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{HH} & \rho_{HV} \\ \rho_{VH} & \rho_{VV} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + s_3 & s_1 - i s_2 \\ s_1 + i s_2 & 1 - s_3 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

где  $s_i = \langle \sigma_i \rangle = \text{tr}(\rho \sigma_i)$  — параметры Стокса в общем случае.

Условие  $\rho \geq 0$  эквивалентно условию  $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \leq 1$ , т.е. матрица плотности задаётся точкой внутри шара на рис. 13. Граница шара (сфера Пуанкаре) соответствует так называемым *чистым* состояниям  $\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|$ , а внутренние точки шара — *смешанным* состояниям  $\hat{\rho} \neq |\psi\rangle \langle \psi|$ . Нетрудно заметить, что состояние является чистым тогда и только тогда, когда  $\text{tr}(\rho^2) = 1$ .

## 8. Частично поляризованный свет

Смешанные состояния соответствуют частично поляризованному свету. В классической теории поля такая ситуация возникает для немонохроматической электромагнитной волны. Напряжённость электрического поля в некоторой точке пространства:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t)e^{-i\omega t}$ , где  $\omega$  – средняя частота излучения. Амплитуда  $\mathbf{E}_0(t) \in \mathbb{C}^2$  медленно меняется со временем на временах  $\omega^{-1}$ , если волна почти монохроматическая, т.е.  $\Delta\omega \ll \omega$ . Зависимость  $\mathbf{E}_0(t)$  показывает, что форма эллиптической поляризации меняется со временем, причём характерное время изменения формы эллипса –  $(\Delta\omega)^{-1}$ . Средняя интенсивность волны определяется выражением  $J = \overline{\mathbf{E}\mathbf{E}^*} = \overline{\mathbf{E}_0\mathbf{E}_0^*}$ , где черта сверху означает усреднение по времени  $T \gg (\Delta\omega)^{-1}$ . Усреднённые по времени свойства поляризации описываются тензором

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{J} \overline{\mathbf{E}_\alpha \mathbf{E}_\beta^*} = \frac{1}{J} \overline{\mathbf{E}_{0\alpha} \mathbf{E}_{0\beta}^*}, \quad (33)$$

называемым *поляризационным тензором* классического электромагнитного излучения [8]. Индексы  $\alpha, \beta = 1, 2$  обозначают направления в пространстве, ортогональные направлению распространения волны. Заметьте, что  $\sum_\alpha \rho_{\alpha\alpha} = 1$ .

Связь классического и квантового описания сводится к тому, что усреднение по времени для классической электромагнитной волны эквивалентно усреднению по ансамблю для квантовых состояний фотонов, т.е. введённая в квантовой теории матрица плотности  $\varrho_{\alpha\beta}$  совпадает с поляризационным тензором  $\rho_{\alpha\beta}$ . Введённые ранее параметры Стокса определяют *степень поляризации*:  $P = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}$ .

Для неполяризованного света  $\varrho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  и  $P = 0$ . Неполяризованный свет может быть представлен как равновероятная смесь состояний  $|H\rangle$  и  $|V\rangle$  или равновероятная смесь любых других ортогональных состояний, например  $|\circ\rangle$  и  $|\cdot\rangle$ , или равновероятная смесь всех состояний на сфере Пуанкаре.

Если разброс частот  $\Delta\omega = 0$ , то классическое описание разрешает лишь поляризационные тензоры вида  $\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{J} \mathbf{E}_{0\alpha} \mathbf{E}_{0\beta}^*$ , т.е. такие, для которых  $\det \rho = 0$  и степень поляризации  $P = 1$ . Неполяризованный свет можно описать классически только статистически, т.е. как серию волн, поляризации которых различны и никак не коррелированы между собой. Таким образом, само существование неполяризованного света указывает на его квантовую природу [9]. В квантовом описании фотон может с разной вероятностью находиться в различных состояниях поляризации с одной и той же частотой.



## 9. Квантовая криптография

Рассмотрим принцип работы простейшей квантовой криптографической схемы BB84 (названной так по фамилиям авторов и году публикации [2]). Протокол предназначен для секретной передачи классической информации, закодированной бинарным образом, т.е. нулями и единицами.

На передающем устройстве  $A$  установлен однофотонный источник, приготавливающий состояния  $|H\rangle$ ,  $|V\rangle$ ,  $|\nearrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$ ,  $|\swarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle)$ . Состояния  $|H\rangle$  и  $|V\rangle$  образуют 1-й ортонормированный базис, состояния  $|\nearrow\rangle$  и  $|\swarrow\rangle$  образуют 2-й ортонормированный базис. Таким образом, состояния можно переобозначить следующим образом:  $|H\rangle = |0+\rangle$ ,  $|V\rangle = |1+\rangle$ ,  $|\nearrow\rangle = |0\times\rangle$ ,  $|\swarrow\rangle = |1\times\rangle$ , где первый символ соответствует передаваемому биту (0 или 1), а второй – используемому базису (+ или  $\times$ ). На передающем устройстве равновероятно выбирается одно из 4-х состояний и отправляется адресату. Для каждого приходящего фотона адресат на приемном конце  $B$  использует либо схему, показанную на рис. 10, либо схему, показанную на рис. 11 (равновероятно). Схема на рис. 10 однозначно различает состояния  $|H\rangle$  и  $|V\rangle$ , поэтому обозначим её «+». Схема на рис. 11 однозначно различает состояния  $|\nearrow\rangle$  и  $|\swarrow\rangle$ , поэтому обозначим её « $\times$ ». Щелчок верхнего детектора (0) или нижнего детектора (1) для каждой из схем фиксируется и записывается как результат измерения в выбранном базисе.

Рассмотрим возможный вариант измерений:

состояние $A$	$0\times$	$0+$	$1+$	$1+$	$1\times$	$0\times$	$1+$	$0\times$	$0+$	$1\times$
базис $B$	+	+	$\times$	+	$\times$	+	+	$\times$	$\times$	+
измерение $B$	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0
совп. баз. $A$ и $B$	нет	да	нет	да	да	нет	да	да	нет	нет
бит $A$		0		1	1		1	0		
бит $B$		0		1	1		1	0		

С вероятностью  $\frac{1}{2}$  на передающем и принимающем концах выберут разные базисы (+ и  $\times$ ) и результат измерения на конце  $B$  с вероятностью  $\frac{1}{2}$  будет 0 или 1. Если же базисы на передающем и принимающем концах совпадают, то с вероятностью 1 на конце  $B$  зарегистрируется именно тот исход (0 или 1), который был использован на передающем конце. Сверка базисов между  $A$  и  $B$  производится по открытому каналу связи (телефону), однако результат измерения не сообщается! В случае совпадения базисов  $A$  знает переданный бит,  $B$  знает результат

измерения, и они должны совпадать! Таким способом можно осуществить передачу ключа.

Допустим, что подслушиватель  $E$  внедряется в квантовую линию передачи фотонов и пытается измерить их до того, как они будут зарегистрированы на принимающем конце. Для получения хоть какой-нибудь информации подслушиватель  $E$  должен измерять фотоны, а новые приготовленные фотоны отправлять к принимающему концу. Если подслушиватель  $E$  угадывает базис  $A$ , то он может оставаться незамеченным. Вероятность угадывания равна  $\frac{1}{2}$ . При неправильном угадывании испущенный подслушивателем  $E$  фотон будет отличаться от фотона, испущенного  $A$ , и с вероятностью  $\frac{1}{2}$  приведёт к неправильному исходу даже при совпадении базисов  $A$  и  $B$ :

состояние $A$	$0\times$	$0+$	$1+$	$1+$	$1\times$	$0\times$	$1+$	$0\times$	$0+$	$1\times$
базис $E$	$\times$	$+$	$\times$	$+$	$\times$	$+$	$\times$	$+$	$\times$	$+$
базис $B$	$+$	$+$	$\times$	$+$	$\times$	$+$	$+$	$\times$	$\times$	$+$
измерение $B$	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
совп. баз. $A$ и $B$	нет	да	нет	да	да	нет	да	да	нет	нет
бит $A$		0		1	1		1	<span style="border: 1px solid black;">0</span>		
бит $B$		0		1	1		1	<span style="border: 1px solid black;">1</span>		

Несовпадение показано квадратной рамкой. Таким образом,  $A$  и  $B$  по незащищенному каналу связи открывают базисы измерений, и для совпадающих базисов проверяют на совпадение *часть* результатов измерений  $B$  и приготовлений  $A$ . Обнаружение ошибки в этой части означает подслушивание. Вероятность ошибки при подслушивании равна 25%. Таким образом, квантово-механический принцип суперпозиции позволяет обеспечить секретную коммуникацию.

На практике ошибки могут возникать не только в результате подслушивания, но и вследствие шумов. Поэтому устанавливается некоторый порог ошибок ( $p_{\text{cut}} < 25\%$ ), в пределах которого связь является секретной и допускает процедуру исправления.

## 10. Двухфотонные перепутанные состояния

Рассмотрим поляризационные степени свободы системы, составленной из двух фотонов, и пренебрежем пространственно-частотными характеристиками электромагнитного поля. Базисными векторами составной системы являются состояния  $H_1H_2$ ,  $H_1V_2$ ,  $V_1H_2$ ,  $V_1V_2$ , т.е. мы

имеем дело с пространством состояний  $\mathbb{C}^4$ . Определим *тензорное* произведение векторов  $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_H & c_V \end{pmatrix}^\top$  и  $|\chi\rangle = \begin{pmatrix} d_H & d_V \end{pmatrix}^\top$  по правилу

$$|\psi\rangle \otimes |\chi\rangle = \begin{pmatrix} c_H \\ c_V \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} d_H \\ d_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_H d_H \\ c_H d_V \\ c_V d_H \\ c_V d_V \end{pmatrix} \quad (34)$$

и обобщим его на матрицы

$$(A \otimes B)_{ik,jl} = A_{ij} B_{kl}, \quad (35)$$

где  $ik$  и  $jl$  – мультииндексы.

Если оператор  $\hat{A}$  действует только на степени свободы 1-го фотона (оператор действует в  $\mathbb{C}^2$ ), то в пространстве состояний составной системы этому оператору нужно поставить в соответствие оператор  $\hat{A} \otimes \hat{I}$ , где  $\hat{I}$  – тождественный оператор. Аналогично, если оператор  $\hat{B}$  действует только на степени свободы 2-го фотона, то в пространстве состояний составной системы этому оператору нужно поставить в соответствие оператор  $\hat{I} \otimes \hat{B}$ .

Математическое свойство

$$(\hat{A} \otimes \hat{B})|\psi\rangle \otimes |\chi\rangle = \hat{A}|\psi\rangle \otimes \hat{B}|\chi\rangle \quad (36)$$

показывает действие локальных операторов  $\hat{A} \otimes \hat{B}$  на факторизованные состояния  $|\psi\rangle \otimes |\chi\rangle$ . С точки зрения физики это соответствует описанию невзаимодействующих подсистем.

Для краткости записи знак тензорного произведения часто опускают, например:  $|H\rangle|H\rangle = |H\rangle \otimes |H\rangle$ .

Согласно квантово-механическому принципу суперпозиции произвольное чистое двухфотонное поляризационное состояние задаётся вектором

$$|\Psi\rangle = c_1|H\rangle|H\rangle + c_2|H\rangle|V\rangle + c_3|V\rangle|H\rangle + c_4|V\rangle|V\rangle, \quad (37)$$

где  $c_i \in \mathbb{C}$ ,  $\sum_{i=1}^4 |c_i|^2 = 1$ .

В общем случае  $|\Psi\rangle \neq |\psi\rangle|\chi\rangle$  ни для каких  $|\psi\rangle$  и  $|\chi\rangle$ . В этом случае говорят, что состояние  $|\Psi\rangle$  является *перепутанным* (также используют термины *запутанный*, *сцепленный*, *зацепленный*). Примером перепутанного состояния является состояние  $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle|V\rangle + |V\rangle|H\rangle)$ .

Смешанное двухфотонное поляризационное состояние задаётся матрицей плотности

$$\varrho = \begin{pmatrix} \varrho_{HH,HH} & \varrho_{HH,HV} & \varrho_{HH,VH} & \varrho_{HH,VV} \\ \varrho_{HV,HH} & \varrho_{HV,HV} & \varrho_{HV,VH} & \varrho_{HV,VV} \\ \varrho_{VH,HH} & \varrho_{VH,HV} & \varrho_{VH,VH} & \varrho_{VH,VV} \\ \varrho_{VV,HH} & \varrho_{VV,HV} & \varrho_{VV,VH} & \varrho_{VV,VV} \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Оператор плотности первой подсистемы определяется выражением

$$\hat{\varrho}_1 = \sum_i \hat{I} \otimes \langle i | \cdot \hat{\varrho} \cdot \hat{I} \otimes | i \rangle =: \text{tr}_2 \hat{\varrho}, \quad (39)$$

где суммирование ведётся по ортонормированному базису второй подсистемы. Процедура редукции матрицы плотности на подсистему – взятие *частичного следа* по другим подсистемам. Аналогично, оператор плотности второй подсистемы определяется выражением

$$\hat{\varrho}_2 = \sum_i \langle i | \otimes \hat{I} \cdot \hat{\varrho} \cdot | i \rangle \otimes \hat{I} =: \text{tr}_1 \hat{\varrho}. \quad (40)$$

Нетрудно убедиться, что среднее значение  $\langle \hat{A} \otimes \hat{I} \rangle = \text{tr}(\hat{A} \varrho_1)$ , а среднее значение  $\langle \hat{I} \otimes \hat{B} \rangle = \text{tr}(\hat{B} \varrho_2)$ . Таким образом, среднее значение *локального* оператора определяется редуцированной матрицей плотности подсистемы.

Смешанное состояние  $\varrho$  называют перепутанным, если его невозможно представить в виде выпуклой суммы факторизованных состояний, т.е.  $\varrho \neq \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \otimes |\chi_i\rangle \langle \chi_i|$ .

Для матриц  $4 \times 4$  справедлив простой критерий перепутанности: матрица плотности  $\varrho$  отвечает перепутанному состоянию тогда и только тогда, когда её *частичное транспонирование*

$$\varrho^\Gamma = \begin{pmatrix} \varrho_{HH,HH} & \varrho_{HV,HH} & \varrho_{HH,VH} & \varrho_{HV,VH} \\ \varrho_{HH,HV} & \varrho_{HV,HV} & \varrho_{HH,VV} & \varrho_{HV,VV} \\ \varrho_{VH,HH} & \varrho_{VV,HH} & \varrho_{VH,VH} & \varrho_{VV,VH} \\ \varrho_{VH,HV} & \varrho_{VV,HV} & \varrho_{VH,VV} & \varrho_{VV,VV} \end{pmatrix} \not\geq 0, \quad (41)$$

т.е.  $\varrho^\Gamma$  имеет отрицательные собственные значения [10, 11]. Геометрические свойства перепутанных матриц плотности рассмотрены в [12].

Существует несколько способов приготовления перепутанных двухфотонных состояний. Одним из наиболее распространенных является спонтанное параметрическое рассеяние на нелинейных кристаллах с синхронизмом типа II, где два рассеянных фотона в паре всегда поляризованы ортогонально, и принципиально нет никакой возможности различить состояния  $|H\rangle|V\rangle$  и  $|V\rangle|H\rangle$ , т.е. реализуется квантовое состояние  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle|V\rangle + |V\rangle|H\rangle)$  [13].

## 11. Сверхплотное кодирование

В данном разделе показывается, что квантовая перепутанность является ресурсом для передачи информации. Допустим, что в лабораториях  $A$  и  $B$  имеются по одному фотону, причём двухфотонное состояние  $|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle|V\rangle + |V\rangle|H\rangle)$  является перепутанным. Для передачи информации из  $A$  в  $B$  можно воспользоваться алфавитом из 4-х элементов (0, 1, 2, 3) и следующим кодированием:

для передачи «0» просто переправить фотон из  $A$  в  $B$ ;

для передачи «1» повернуть плоскость поляризации фотона в лаборатории  $A$  на угол  $\pi/2$ , затем переправить фотон из  $A$  в  $B$ ;

для передачи «2» создать сдвиг фаз  $\pi$  между вертикальной и горизонтальной поляризациями фотона в лаборатории  $A$ , затем переправить фотон из  $A$  в  $B$ ;

для передачи «3» в лаборатории  $A$  повернуть плоскость поляризации фотона на угол  $\pi/2$ , создать сдвиг фаз  $\pi$  между вертикальной и горизонтальной поляризациями фотона, затем переправить фотон из  $A$  в  $B$ .

В результате таких *локальных* операций и пересылки одного фотона из  $A$  в  $B$  на приёмном устройстве в лаборатории  $B$  окажутся следующие состояния соответственно:

$$|\Psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle|V\rangle + |V\rangle|H\rangle), \quad (42)$$

$$|\Phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|V\rangle|V\rangle + |H\rangle|H\rangle), \quad (43)$$

$$|\Psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle|V\rangle - |V\rangle|H\rangle), \quad (44)$$

$$|\Phi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle|H\rangle - |V\rangle|V\rangle). \quad (45)$$

Эти четыре состояния являются взаимно ортогональными и образуют *базис Белла* в  $\mathbb{C}^4$ . В силу ортогональности эти состояния однозначно различаются в лаборатории  $B$ . Схема однозначного различения поляризационных состояний Белла представлена в работе [14] и изложена в следующем разделе. Таким образом, пересылая один фотон, можно передавать 4 буквы алфавита, т.е. 2 бита информации. Без применения перепутанного состояния при пересылке одного фотона можно передать лишь 1 бит информации (две ортогональные поляризации). Использование перепутанного состояния (между отправителем и приемником) позволяет получить выигрыш в 2 раза, т.е. перепутанные состояния повышают плотность кодирования информации.

## 12. Измерение в базисе состояний Белла

Измерить поляризационное двухфотонное состояние в базисе Белла – реализовать проекторы  $|\Phi_{\pm}\rangle\langle\Phi_{\pm}|$ ,  $|\Psi_{\pm}\rangle\langle\Psi_{\pm}|$ , сумма которых равна  $I$  (проекторнозначная мера). Другими словами, необходимо реализовать эксперимент, в котором можно достоверно различить 4 состояния:  $|\Phi_{+}\rangle$ ,  $|\Phi_{-}\rangle$ ,  $|\Psi_{+}\rangle$ ,  $|\Psi_{-}\rangle$ . Задача различения этих состояний не является простой с экспериментальной точки зрения, и первоначальные варианты обладали низкой эффективностью [13]. Эффективная схема была предложена в работе [14], схема установки представлена на рис. 14.

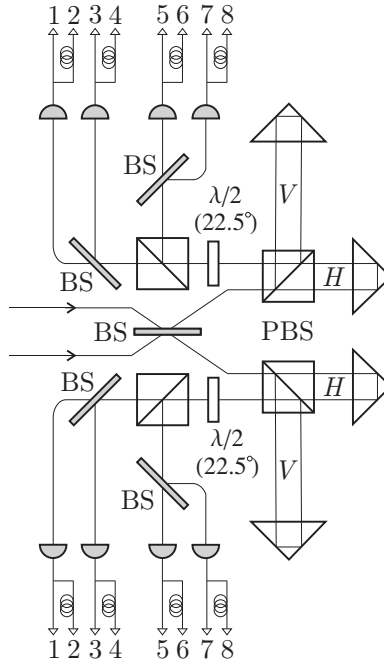


Рис. 14. Схема измерений в базисе поляризационных состояний Белла

Входное состояние попадает на делитель пучка с равными коэффициентами прохождения и отражения (BS), действие которого определяется преобразованием  $\begin{pmatrix} \hat{a}_{\uparrow}^{\dagger} \\ \hat{a}_{\downarrow}^{\dagger} \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{\uparrow}^{\dagger} \\ \hat{a}_{\downarrow}^{\dagger} \end{pmatrix}$  для операторов рождения фотонов в верхней ( $\uparrow$ ) и нижней ( $\downarrow$ ) частях схемы,

в результате чего

$$|H\rangle_{\uparrow}|H\rangle_{\downarrow} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_{\uparrow}|H\rangle_{\uparrow} + |H\rangle_{\downarrow}|H\rangle_{\downarrow}), \quad (46)$$

$$|H\rangle_{\uparrow}|V\rangle_{\downarrow} \rightarrow \frac{1}{2}(-|H\rangle_{\uparrow}|V\rangle_{\uparrow} + |H\rangle_{\uparrow}|V\rangle_{\downarrow} - |H\rangle_{\downarrow}|V\rangle_{\uparrow} + |H\rangle_{\downarrow}|H\rangle_{\downarrow}), \quad (47)$$

$$|V\rangle_{\uparrow}|H\rangle_{\downarrow} \rightarrow \frac{1}{2}(-|H\rangle_{\uparrow}|V\rangle_{\uparrow} - |H\rangle_{\uparrow}|V\rangle_{\downarrow} + |H\rangle_{\downarrow}|V\rangle_{\uparrow} + |H\rangle_{\downarrow}|H\rangle_{\downarrow}), \quad (48)$$

$$|V\rangle_{\uparrow}|V\rangle_{\downarrow} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|V\rangle_{\uparrow}|V\rangle_{\uparrow} + |V\rangle_{\downarrow}|V\rangle_{\downarrow}). \quad (49)$$

Состояния Белла с точностью до общего фазового множителя преобразуются следующим образом:

$$|\Phi_{+}\rangle \rightarrow \frac{1}{2}(|H\rangle_{\uparrow}|H\rangle_{\uparrow} + |H\rangle_{\downarrow}|H\rangle_{\downarrow} + |V\rangle_{\uparrow}|V\rangle_{\uparrow} + |V\rangle_{\downarrow}|V\rangle_{\downarrow}), \quad (50)$$

$$|\Phi_{-}\rangle \rightarrow \frac{1}{2}(|H\rangle_{\uparrow}|H\rangle_{\uparrow} + |H\rangle_{\downarrow}|H\rangle_{\downarrow} - |V\rangle_{\uparrow}|V\rangle_{\uparrow} - |V\rangle_{\downarrow}|V\rangle_{\downarrow}), \quad (51)$$

$$|\Psi_{+}\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(-|H\rangle_{\uparrow}|V\rangle_{\uparrow} + |H\rangle_{\downarrow}|V\rangle_{\downarrow}), \quad (52)$$

$$|\Psi_{-}\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_{\uparrow}|V\rangle_{\downarrow} - |H\rangle_{\downarrow}|V\rangle_{\uparrow}). \quad (53)$$

Из последней формулы видно, что один детектор в верхней части схемы и один детектор в нижней части схемы могут сработать одновременно только для состояния  $|\Psi_{-}\rangle$  (критерий детектирования  $|\Psi_{-}\rangle$ ).

После прохождения через первый поляризационный делитель пучка (PBS) вертикально и горизонтально поляризованные компоненты становятся разнесёнными во времени, появляется дополнительная степень свободы – время  $f$  для быстрого фотона,  $s$  для медленного.

$$|\Phi_{+}\rangle \rightarrow \frac{1}{2}(|H\rangle_{\uparrow f}|H\rangle_{\uparrow f} + |H\rangle_{\downarrow f}|H\rangle_{\downarrow f} + |V\rangle_{\uparrow s}|V\rangle_{\uparrow s} + |V\rangle_{\downarrow s}|V\rangle_{\downarrow s}), \quad (54)$$

$$|\Phi_{-}\rangle \rightarrow \frac{1}{2}(|H\rangle_{\uparrow f}|H\rangle_{\uparrow f} + |H\rangle_{\downarrow f}|H\rangle_{\downarrow f} - |V\rangle_{\uparrow s}|V\rangle_{\uparrow s} - |V\rangle_{\downarrow s}|V\rangle_{\downarrow s}), \quad (55)$$

$$|\Psi_{+}\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(-|H\rangle_{\uparrow f}|V\rangle_{\uparrow s} + |H\rangle_{\downarrow f}|V\rangle_{\downarrow s}). \quad (56)$$

Видно, что  $|\Psi_{+}\rangle$  преобразуется таким образом, что один фотон будет регистрироваться раньше, а другой позже. Экспериментально на схеме рис. 14 будет зафиксировано одно из совпадений событий: 1 и 4, 1 и 6, 1 и 8, 3 и 6, 3 и 8, 5 и 8, 2 и 3, 2 и 5, 2 и 7, 4 и 5, 4 и 7, 6 и 7 (в верхней или нижней части установки).

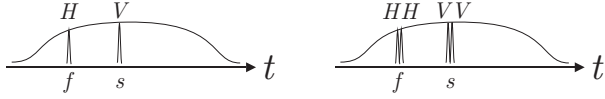


Рис. 15. Слева: состояние  $|H\rangle_f|V\rangle_s = \int f(t)|H\rangle_t|V\rangle_{t+s-f}dt$ . Справа: состояние  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_f|H\rangle_f + |V\rangle_s|V\rangle_s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int f(t)(|H\rangle_t|H\rangle_t + |V\rangle_{t+s-f}|V\rangle_{t+s-f})dt \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \int f(t)(|H\rangle_t|H\rangle_t + |V\rangle_t|V\rangle_t)dt$

Для различения состояний  $|\Phi_+\rangle$  и  $|\Phi_-\rangle$  нужно отметить, что поскольку волновая функция перепутанной пары фотонов имеет характерный разброс по времени создания в пределах времени когерентности импульсного лазера (17 нс), что превышает время  $s - f = 3$  нс, то для пары фотонов с волновыми функциями  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_{\uparrow f}|H\rangle_{\uparrow f} \pm |V\rangle_{\uparrow s}|V\rangle_{\uparrow s})$  волновые пакеты  $|H\rangle_{\uparrow f}|H\rangle_{\uparrow f}$  и  $|V\rangle_{\uparrow s}|V\rangle_{\uparrow s}$  полностью перекрываются, и поэтому задержка не влияет на когерентность (рис. 15). Состояния можно переписать в виде

$$|\Phi_+\rangle \rightarrow \frac{1}{2}(|\nearrow\rangle_{\uparrow}|\nearrow\rangle_{\uparrow} + |\nearrow\rangle_{\downarrow}|\nearrow\rangle_{\downarrow} + |\searrow\rangle_{\uparrow}|\searrow\rangle_{\uparrow} + |\searrow\rangle_{\downarrow}|\searrow\rangle_{\downarrow}), \quad (57)$$

$$|\Phi_-\rangle \rightarrow \frac{1}{2}(|\nearrow\rangle_{\uparrow}|\searrow\rangle_{\uparrow} + |\nearrow\rangle_{\downarrow}|\searrow\rangle_{\downarrow} + |\searrow\rangle_{\uparrow}|\nearrow\rangle_{\uparrow} + |\searrow\rangle_{\downarrow}|\nearrow\rangle_{\downarrow}), \quad (58)$$

где  $|\nearrow\rangle = (|H\rangle + |V\rangle)/\sqrt{2}$  и  $|\searrow\rangle = (|H\rangle - |V\rangle)/\sqrt{2}$ . При пропускании света через полуволновую пластинку ( $\lambda/2$ ), повернутую на угол  $22.5^\circ$ , осуществляется преобразование состояний  $|\nearrow\rangle \rightarrow |H\rangle$ ,  $|\searrow\rangle \rightarrow |V\rangle$ , т.е.

$$|\Phi_+\rangle \rightarrow \frac{1}{2}(|H\rangle_{\uparrow}|H\rangle_{\uparrow} + |H\rangle_{\downarrow}|H\rangle_{\downarrow} + |V\rangle_{\uparrow}|V\rangle_{\uparrow} + |V\rangle_{\downarrow}|V\rangle_{\downarrow}), \quad (59)$$

$$|\Phi_-\rangle \rightarrow \frac{1}{2}(|H\rangle_{\uparrow}|V\rangle_{\uparrow} + |H\rangle_{\downarrow}|V\rangle_{\downarrow} + |V\rangle_{\uparrow}|H\rangle_{\uparrow} + |V\rangle_{\downarrow}|H\rangle_{\downarrow}). \quad (60)$$

После прохождения заключительного поляризационного делителя пучка (PBS) фотоны летят в одном направлении для состояния  $|\Phi_+\rangle$  и в разных направлениях для состояния  $|\Phi_-\rangle$ . Таким образом, одновременные события 1 и 3 (2 и 4), 5 и 7 (6 и 8) или наблюдение только одного из событий 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (в верхней или нижней части установки) означают, что исходное состояние было состоянием  $|\Phi_+\rangle$ . Одновременные наблюдения событий 1 и 5 (2 и 6), 1 и 7 (2 и 8), 3 и 5 (4 и 6), 3 и 7 (4 и 8) в верхней или нижней части установки означают, что исходное состояние было состоянием  $|\Phi_-\rangle$ .

Таким образом, по наблюдению исходов можно однозначно произвести измерение в базисе состояний Белла.



### 13. Квантовая телепортация

Рассмотрим процедуру передачи *неизвестного* квантового состояния  $|\psi\rangle = c_1|H\rangle + c_2|V\rangle$  с произвольными  $c_1, c_2$  между удалёнными лабораториями (рис. 16). Сразу отметим, что передаётся не материя, а именно квантовое состояние. Другими словами, не происходит передачи энергии. В удалённой лаборатории лишь воссоздаётся квантовое состояние  $|\psi\rangle$  в уже имеющемся в этой лаборатории фотоне.

Ресурсом для квантовой телепортации является квантовая запутанность между лабораториями. Допустим, в лабораториях  $A$  и  $B$  имеется по одному фотону, которые являются частями двухфотонного состояния  $|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_A|V\rangle_B + |V\rangle_A|H\rangle_B)$ . Дополнительно в лаборатории  $A$  имеется состояние  $|\psi\rangle_A = c_1|H\rangle + c_2|V\rangle$ , которое и требуется воссоздать в лаборатории  $B$ . Начальное состояние всей трёхфотонной системы

$$|\psi\rangle_A|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1|H\rangle|H\rangle|V\rangle + c_2|V\rangle|H\rangle|V\rangle + c_1|H\rangle|V\rangle|H\rangle + c_2|V\rangle|V\rangle|H\rangle). \quad (61)$$

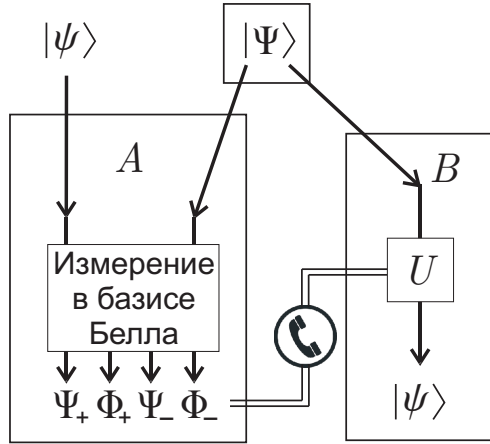


Рис. 16. Схема квантовой телепортации неизвестного состояния  $|\psi\rangle$

К первым двум фотонам, находящимся в лаборатории  $A$ , применяют измерение в базисе состояний Белла. Поскольку

$$|\psi\rangle_A|\Psi\rangle_{AB} = |\Phi_+\rangle(c_1|V\rangle + c_2|H\rangle) + |\Phi_-\rangle(c_1|V\rangle - c_2|H\rangle) + |\Psi_+\rangle(c_1|H\rangle + c_2|V\rangle) + |\Psi_-\rangle(c_1|H\rangle - c_2|V\rangle), \quad (62)$$

то при наблюдении конкретного исхода  $(\Phi_+, \Phi_-, \Psi_+, \Psi_-)$  квантовое состояние 3-го фотона становится определённым:  $\Psi_+ \longleftrightarrow c_1|H\rangle + c_2|V\rangle$ ,  $\Phi_+ \longleftrightarrow c_1|V\rangle + c_2|H\rangle$ ,  $\Psi_- \longleftrightarrow -c_1|H\rangle + c_2|V\rangle$ ,  $\Phi_- \longleftrightarrow -c_1|V\rangle + c_2|H\rangle$ .

Результат измерения в лаборатории  $A$  передаётся по классическому каналу связи (телефону) в лабораторию  $B$ . В зависимости от полученного сообщения в лаборатории  $B$  применяют одну из унитарных операций  $U$ , описанных в разделе 5.:

$$\begin{aligned}\Psi_+ &\longrightarrow I, & c_1|H\rangle + c_2|V\rangle &\longrightarrow c_1|H\rangle + c_2|V\rangle, \\ \Phi_+ &\longrightarrow \sigma_x, & c_1|V\rangle + c_2|H\rangle &\longrightarrow c_1|H\rangle + c_2|V\rangle, \\ \Psi_- &\longrightarrow \sigma_z, & -c_1|H\rangle + c_2|V\rangle &\longrightarrow c_1|H\rangle + c_2|V\rangle, \\ \Phi_- &\longrightarrow i\sigma_y, & -c_1|V\rangle + c_2|H\rangle &\longrightarrow c_1|H\rangle + c_2|V\rangle.\end{aligned}$$

В итоге состояние 3-го кубита в любом случае преобразуется к виду  $c_1|H\rangle + c_2|V\rangle = |\psi\rangle$ , т.е. в лаборатории  $B$  осуществляется восстановление произвольного квантового состояния 1-го кубита, изначально находившегося в  $A$ . Протокол «телепортации» напрямую связан с передачей классической информации, поэтому противоречий с теорией относительности нет. Также отметим, что 3-й фотон не берётся из ниоткуда, он уже представлен в лаборатории  $B$  как часть перепутанного состояния.

## 14. Поляризация произвольного многофотонного состояния

Рассмотрим горизонтально поляризованную плоскую электромагнитную волну с заданным волновым вектором  $\mathbf{k}$ , т.е. фиксированную *моду* излучения. В предыдущих разделах рассматривались ситуации, когда в одной моде излучения находился один фотон или не находился вовсе. На самом деле фотоны являются бозонами, поэтому в фиксированной моде излучения может находиться  $n_H = 0, 1, 2, \dots$  тождественных фотонов (любое неотрицательное число). Многофотонные квантовые состояния удобно описывать в представлении чисел заполнения, где базисными векторами являются состояния  $|n_H\rangle$  с заданным числом фотонов, причём состояния с различным числом частиц ортогональны:  $\langle n_H | k_H \rangle = \delta_{nk}$ . Произвольное многофотонное состояние в фиксированной моде с горизонтальной поляризацией записывается в виде  $|\psi\rangle = \sum_n c_n |n_H\rangle \in l_2(Z_+)$ . Произвольное состояние в моде с вертикальной поляризацией записывается в виде  $|\varphi\rangle = \sum_m c_m |m_V\rangle \in l_2(Z_+)$ , где

$|m_V\rangle$  — состояние с  $m$  вертикально поляризованными фотонами. Заметим, что  $|\psi\rangle$  и  $|\varphi\rangle$  — элементы разных пространств. *Двухмодовое* пространство состояний состоит из векторов

$$|\Psi\rangle = \sum_{n,m} c_{nm} |n_H, m_V\rangle, \quad (63)$$

представляющих собой линейную комбинацию векторов с определённым числом фотонов в каждой из мод,  $|\Psi\rangle \in l_2(Z_+ \times Z_+)$ . В частном случае однофотонного состояния имеем  $c_1|1, 0\rangle + c_2|0, 1\rangle$ , т.е. такое физическое состояние, которое ранее обозначалось  $c_1|H\rangle + c_2|V\rangle$ . Состояние без фотонов  $|0, 0\rangle$  называют *вакуумным*.

Введём оператор уничтожения  $\hat{a}_i$  и оператор рождения  $\hat{a}_i^\dagger$  фотонов в  $i$ -й моде согласно правилу [15]

$$\hat{a}_i |\dots n_i \dots\rangle = \sqrt{n_i} |\dots n_i - 1 \dots\rangle, \quad (64)$$

$$\hat{a}_i^\dagger |\dots n_i \dots\rangle = \sqrt{n_i + 1} |\dots n_i + 1 \dots\rangle. \quad (65)$$

Обобщением введённых ранее операторов Стокса на случай произвольного многофотонного состояния являются эрмитовы операторы

$$\hat{S}_1 = \hat{a}_H \hat{a}_V^\dagger + \hat{a}_H^\dagger \hat{a}_V, \quad (66)$$

$$\hat{S}_2 = i(\hat{a}_H \hat{a}_V^\dagger - \hat{a}_H^\dagger \hat{a}_V), \quad (67)$$

$$\hat{S}_3 = \hat{a}_H^\dagger \hat{a}_H - \hat{a}_V^\dagger \hat{a}_V. \quad (68)$$

Дополнительно также вводят оператор  $\hat{S}_0 = \hat{a}_H^\dagger \hat{a}_H + \hat{a}_V^\dagger \hat{a}_V$ , который представляет собой оператор числа фотонов. Заметьте, что сужение оператора  $\hat{S}_0$  на подпространство однофотонных состояний  $c_1|1, 0\rangle + c_2|0, 1\rangle$  есть единичный оператор. Из коммутатора  $[\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}$  следует, что  $[\hat{S}_\alpha, \hat{S}_\beta] = 2i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{S}_\gamma$ , т.е. операторы Стокса удовлетворяют тем же самым коммутационным соотношениям, что и матрицы Паули.

Рассмотрим двухфотонные состояния  $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2, 0\rangle + |0, 2\rangle)$  и  $|\Phi\rangle = |1, 1\rangle$ . Заметим, что  $\langle\Psi|\hat{S}_i|\Psi\rangle = \langle\Phi|\hat{S}_i|\Phi\rangle$  для всех  $i = 0, 1, 2, 3$ , т.е. состояния  $|\Psi\rangle$  и  $|\Phi\rangle$  невозможно различить в обычных поляризационных экспериментах, рассмотренных ранее! Этот пример показывает, что одним и тем же параметрам Стокса могут отвечать различные многофотонные поляризационные состояния. Заметим, однако, что в рассмотренном примере состояния  $|\Psi\rangle$  и  $|\Phi\rangle$  ортогональны друг другу, и их можно однозначно различить с помощью другого эксперимента, основанного на интерференции фотонов. Полное восстановление (томография) многофотонных поляризационных состояний рассмотрено в работе [16].

## 15. Квантовые каналы

Рассмотрим взаимодействие квантовой системы с окружением. Начальное состояние системы задаётся оператором плотности  $\varrho$ , начальное состояние окружения – оператором плотности  $\xi$ . Начальное состояние системы и окружения – оператор плотности  $\varrho \otimes \xi$ . Гамильтониан системы и окружения  $\hat{H} = \hat{H}_{\text{sys}} \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \hat{H}_{\text{env}} + \hat{H}_{\text{int}}$  состоит из гамильтониана системы  $\hat{H}_{\text{sys}}$ , гамильтониана окружения  $\hat{H}_{\text{env}}$  и гамильтониана взаимодействия системы с окружением  $\hat{H}_{\text{int}}$ . Для простоты предположим, что  $\hat{H}$  не зависит от времени, а система взаимодействует с окружением в течение конечного времени  $t$ , тогда оператор эволюции  $\hat{U} = \exp(-i\hat{H}t/\hbar)$ . Состояние системы и окружения после взаимодействия есть  $\hat{U}(\varrho \otimes \xi)\hat{U}^\dagger$  и является перепутанным в общем случае. Если мы интересуемся только состоянием системы после взаимодействия, то оно получается взятием частичного следа по окружению. В результате реализуется следующее отображение оператора плотности системы:

$$\varrho \longrightarrow \Phi[\varrho] = \text{tr}_{\text{env}} \left[ \hat{U}(\varrho \otimes \xi)\hat{U}^\dagger \right]. \quad (69)$$

С математической точки зрения  $\Phi$  – линейное вполне положительное отображение, сохраняющее след (СРТ), называемое *квантовым каналом* [5, 17]. Из теоремы Стайнспринга следует, что для любого СРТ-отображения  $\Phi$  найдутся  $\xi$  и  $\hat{U}$  такие, что верно (69).

Примером квантового канала является дефазировка. В качестве системы рассмотрим поляризационные степени свободы одиночного фотона, т.е. матрицу плотности  $\varrho = \begin{pmatrix} \varrho_{HH} & \varrho_{HV} \\ \varrho_{VH} & \varrho_{VV} \end{pmatrix}$ . В качестве окружения рассмотрим пространственные моды электромагнитного поля с частотами  $\omega$ . Базисные состояния пространственных мод обозначим  $|\omega\rangle$ , тогда  $\langle\omega|\omega'\rangle = \delta_{\omega\omega'}$ . Начальное состояние системы и окружения – оператор  $\varrho \otimes |\chi\rangle\langle\chi|$ , где  $|\chi\rangle = \int d\omega f(\omega)|\omega\rangle$ . Функция  $f(\omega)$  – амплитуда вероятности обнаружить фотон в моде с частотой  $\omega$ , поэтому  $\int d\omega |f(\omega)|^2 = 1$ . В результате двулучепреломления при прохождении расстояния  $z$  в среде между состояниями  $|H\rangle$  и  $|V\rangle$  возникает набег фаз  $\omega(n_H - n_V)z/c$ , где  $n_H$  и  $n_V$  – показатели преломления для горизонтально и вертикально поляризованных волн. Изменение квантового состояния при распространении фотона в пространстве соответствует эволюции во времени  $t = z/c$  с эффективным гамильтонианом

$$\hat{H} = \int d\omega \hbar\omega (n_H |H\rangle\langle H| + n_V |V\rangle\langle V|) \otimes |\omega\rangle\langle\omega|. \quad (70)$$

Подставляя оператор эволюции

$$\hat{U} = \int d\omega [\exp(-in_H\omega t)|H\rangle\langle H| + \exp(-in_V\omega t)|V\rangle\langle V|] \otimes |\omega\rangle\langle\omega| \quad (71)$$

в уравнение (69), получаем

$$\Phi[\varrho] = \begin{pmatrix} \varrho_{HH} & G^*(t)\varrho_{HV} \\ G(t)\varrho_{VH} & \varrho_{VV} \end{pmatrix}, \quad (72)$$

где  $G(t) = \int d\omega |f(\omega)|^2 e^{i(n_H - n_V)\omega t}$  – функция декогеренции. Заметим, что  $G(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , поэтому на больших временах матрица плотности становится диагональной, т.е. происходит *дефазирувка*. Действие канала (72) сводится к сжатию сферы Пуанкаре вдоль направлений  $s_x$  и  $s_y$  с коэффициентом  $|G(t)|$  и повороту вокруг оси  $s_z$  на угол  $\arg G(t)$ .

Отметим важный случай *деполяризующего* канала, реализующегося для поляризационных степеней свободы в многомодовом волокне вследствие перекачки энергии между модами с разными поляризациями [18]:

$$\Phi[\varrho] = q\varrho + \text{tr}[\varrho]\frac{1}{2}I, \quad (73)$$

где  $q \in [0, 1]$  – параметр деполяризации. Действие канала (73) сводится к сжатию сферы Пуанкаре во всех направлениях с коэффициентом  $q$ .

Действие дефазирующих и деполяризующих локальных каналов вида  $\Phi \otimes \Phi$  на перепутанные состояния изучено в работе [19].

## Литература

1. Aspect A., Dalibard J., Roger G. Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers // Physical Review Letters. – 1982. – V. 49. – P. 1804.
2. Bennett C.H., Brassard G. Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing // Proceedings of IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing. – 1984. – V. 175. – P. 8.
3. Bennett C., Wiesner S. Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states // Physical Review Letters. – 1992. – V. 69. – P. 2881.
4. Bennett C. H., Brassard G., Crépeau C., Jozsa R., Peres A., Wootters W. K. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels // Physical Review Letters. – 1993. – V. 70. – P. 1895.

5. Нильсен М., Чанг И. Квантовые вычисления и квантовая информация. – М.: Мир, 2006.
6. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 3. Излучение. Волны. Кванты. – М.: Либроком, 2014.
7. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 8, 9: Квантовая механика. – М.: Либроком, 2014.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики. Т. 2. Теория поля. – М.: Физматлит, 2012.
9. Липкин Г. Квантовая механика. – М.: Мир, 1977.
10. Peres A. Separability criterion for density matrices // Physical Review Letters. – 1996. – V. 77. – P. 1413.
11. Horodecki M., Horodecki P., Horodecki R. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions // Physics Letters A. – 1996. – V. 223. – P. 1.
12. Filippov S. N., Man'ko V. I. Geometrical interpretation of density matrix: mixed and entangled states // Journal of Russian Laser Research. – 2008. – V. 29. – P. 564.
13. Бауместер Д., Экерт А., Цайлингер А. Физика квантовой информации. М.: Постмаркет, 2002.
14. Schuck C., Huber G., Kurtsiefer C., Weinfurter H. Complete deterministic linear optics Bell state analysis // Physical Review Letters. – 2006. – V. 96. – P. 190501.
15. Фейнман Р. Статистическая механика. – М.: Мир, 1978.
16. Söderholm J., Björk G., Klimov A. B., Sánchez-Soto L. L., Leuchs G. Quantum polarization characterization and tomography // New Journal of Physics. – 2012. – V. 14. – P. 115014.
17. Холево А. С. Квантовые системы, каналы, информация. – М.: МЦ-НМО, 2010.
18. Gisin N., Ribordy G., Tittel W., Zbinden H. Quantum cryptography // Reviews of Modern Physics. – 2002. – V. 74. – P. 145.
19. Filippov S. N., Rybár T., Ziman M. Local two-qubit entanglement-annihilating channels // Physical Review A. – 2012. – V. 85. – P. 012303.

Учебное издание

**Филиппов Сергей Николаевич**

**КВАНТОВЫЕ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ  
СОСТОЯНИЯ ФОТОНОВ**

Учебно-методическое пособие

Редактор *О. П. Котова*. Корректор *Л. В. Себова*

Компьютерная верстка *С. Н. Филиппов*

Подписано в печать 24.03.2017. Формат 60 × 84  $\frac{1}{16}$ . Усл. печ. л. 2,25. Уч.-изд. л. 2,0.  
Тираж 100 экз. Заказ № 83.

Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования «Московский  
физико-технический институт (государственный университет)»  
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9  
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: [rio@mipt.ru](mailto:rio@mipt.ru)

---

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»  
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9  
Тел.: (495) 408-84-30, e-mail: [polygraph@mipt.ru](mailto:polygraph@mipt.ru)

