VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
PROGRAMŲ SISTEMŲ KATEDRA

Ribų skaičiavimo programa „riboja.me”

Limit calculation program „riboja.me”

Programos aprašas

Atliko: 3 kurso studentai
Margiris Strakšys (parašas)
Domantas Jadenkus (parašas)
Vytautas Strimaitis (parašas)
Mantas Petrikas (parašas)

Versija: 1

Vilnius – 2018

TURINYS

1. Sistemos architektūra

Programos kūrimui pasirinkta Haskell programavimo kalba bei Stack projektų valdymo įrankis. Kūrimui buvo pasirinkta Haskell programavimo kalba dėl šių priežasčių:

1. Tingus skaičiavimas (angl. *Lazy evaluation*). Haskell programavimo kalboje galima aprašyti begalines duomenų struktūras, o veikimo metu jų sukonstruojama tik tokia dalis, kokia reikalinga, norint rasti atsakymą. Pavyzdžiui, galime aprašyti, kad reiškinys turi begalinį Teiloro skleidinį, tačiau jį spausdinant reikalingas tik pirmasis narys, todėl tik vienas narys ir bus suskaičiuotas.

2. Stipri tipų sistema. Haskell tipų sistema leidžia rašyti lengvai komponuojamą ir pernaudojamą kodą. Pavyzdžiui, skaičiavimą galima pritaikyti taip, kad būtų naudojami tiek apytiksliai, tiek visiškai tikslūs skaičiai. Taip pat nesunku valdyti skaičiavimo metu vykstančius efektus, pavyzdžiui, kai randame, kad kažkokia funkcijos dalis yra neapibrėžta, arba neturime informacijos žingsnio atlikimui ir būtinai turime viską nutraukti.

3. Funkcinė programavimo kalba iš prigimties tinkama matematinių skaičiavimų modeliavimui.

Siekiant palengvinti funkcionalumo perpanaudojamumą, sistemą suskirstyta į keturis modulius, kurių kiekvienas atlieka tarpusavyje nesusijusias funkcijas. Sistema moduliai yra šie:

1. Ribų skaičiavimo modulis. Tai – pagrindinė sistemos dalis, kuri atsakinga už pačių ribų skaičiavimą.

2. Sintaksinės analizės modulis (angl. *parser*). Šis modulis atlieka vertimą iš vartotojo įvesto teksto į ribų skaičiavimo moduliui suprantamą duomenų formatą.

3. Internetinio serverio modulis. Šis modulis leidžia kviesti biblioteką naudojant REST API bei pateikia vartotojo sąsają, kad vartotojams ją būtų galima pasiekti naršyklėje.

4. Vartotojo sąsajos modulis. Tai – internetinis puslapis, sąveikaujantis su anksčiau minėtu internetiniu serveriu, kad vartotojas visą funkcionalumą galėtų pasiekti naršyklėje.

2. Programos naudotojo vadovas

Programos naudojimui sukūrėme internetinį puslapį, kurį vartotojai gali pasiekti naudojantis savo įrenginiu, turinčiu prieigą prie interneto. Vartotojo sąsają sudaro keturi pagrindiniai komponentai: funkcijos ir taško įvedimo laukai, „go” mygtukas ir rezultato laukas.

- Funkcijos įvedimo laukas – tai tekstinis laukas, kuriame įvedama vartotojo pasirinkta funkcija. Leidžiamos naudoti konstantos, funkcijos, ir operatoriai pateikti lentelėje 1.
- Taško įvedimo laukas – tai tekstinis laukas, kuriame įvedamas vartotojo pasirinktas skaičius į kurį artėja kintamojo reikšmė. Galima pateikti baigtinį tašką (leidžiamos naudoti konstantos ir operatoriai pateikti lentelėje 2), arba begalinį – „+inf” ($+\infty$), „-inf” ($-\infty$), arba „inf” (tas pats kaip ir „+inf” – $+\infty$).
- Ribos skaičiavimo mygtukas „go” – tai mygtukas, kurį paspaudus siunčiamas kreipimasis į serverį ir laukiama skaičiavimo rezultato.
- Rezultato laukas – jame vaizduojamas gautas skaičiavimo rezultatas. Jį sudaro gauta ribos reikšmė arba klaidos pranešimas, nusakantis kodėl nepavyko jos apskaičiuoti.

Ribų skaičiavimo sistema pateikia vieną iš keturių atsakymų, kurį parodo internetinis puslapis:

- Jei riba egzistuoja, grąžinama rasta riba.
- Jei riba neegzistuoja, pranešama, kad riba neegzistuoja.
- Jei įvesta funkcija arba taškas yra sintaksiškai neteisingi, apie tai pranešama ir parodoma klaidos vieta.
- Jei programa negalėjo nustatyti ribos arba jos neegzistavimo, pranešama, kad nepavyko išanalizuoti ribos.

1 lentelė. Funkcijos lauko įvestis

Matematinis reiškinys	Atitikmuo sistemoje
Suma	+
Atimtis	-
Daugyba	*
Dalyba	/
Kėlimas laipsniu	^
Skliaustai	(ir)
Sinusas	sin
Kosinusas	cos
Arktangentas	arctg arba atan
Natūrinis logoritmas	ln
Kvadratinė šaknis	sqrt
Konstantos e kėlimas laipsniu	exp
π	pi
e	e

2 lentelė. Taško lauko įvestis

Matematinis reiškinys	Atitikmuo sistemoje
π	pi
e	e
Suma	+
Atimtis	-
Daugyba	*
Dalyba	/
Kėlimas laipsniu	^
Skliaustai	(ir)

3. Teorinės dalies aprašymas

Programos kūrimo metodika pasirinkta laipsnių eilutės. Tai yra Teiloro eilučių praplėtimas, kuriame leidžiame turėti baigtinių kiekį neigiamų laipsnių. Jeigu skleidžiant įvestį gaunamas begalinis kiekis neigiamų laipsnių, ši metodika nebėra tinkama taikyti norint rasti išraiškos ribą. Tokiu atveju, naudojame eurisitinę analizę.

3.1. Teiloro eilutės

Teiloro skleidiniai yra būdas norimu tikslumu aproksimuoti funkcijų reikšmes artėjant į konkretų tašką. Pagrindinė apytikslės reikšmės skaičiavimo sąlyga - funkcija privalo būti diferencijuojama pasirinkto taško aplinkoje. Funkcija keičiama polinomu pasinaudojant Teiloro skleidiniu. Kadangi skleidinio forma yra begalinė, tikslumą galima laisvai pasirinkti, imant baigtinį kiekį polinomo narių. Skaičiuojant ribas, bandoma skaičiuti suskaičiuoti pirmųjų skleidinio narių reikšmes ir įvertinti likusių narių elgesį.

Begalinis skleidinys

Kadangi Teiloro skleidinys bendru atveju turi be galo daug polinominių narių, jis yra begalo tiklsus tikrosios funkcijos keitinys.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + ...$$

Alternatyvi begalinės polinominės sumos formulė:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Baigtinis skleidinys

Praktiškai neįmanoma suskaičiuoti tokios funkcijos tikslią reikšmę, todėl yra imamas baigtinis kiekis primųjų skleidinio narių, o paklaida kompensuojama liekamojo nario $r_n(x)$ įvedimu.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n(x)$$

Alternatyvi baigtinės polinominės sumos formulė:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + r_n(x)$$

Tegu funkcija f yra $n+1$ kartą diferencijuojama. Tada paklaida lygi:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \text{ , kur c } \in (a,x) \text{ arba c } \in (x,a).$$

Jei $f^{(n)}$ tolydi, tai:

$$r_n(x) = o((x-a)^n) \text{ , kai } x \to a.$$

Elementarių funkcijų ribos

Elementarių funcijų skleidiniai taškuose a ir $a = 0$:

e^x riba

$$\lim_{x\to a} e^x = e^a + \frac{e^a}{1!}(x-a) + \frac{e^a}{2!}(x-a)^2 + \frac{e^a}{3!}(x-a)^3 + ...$$

Kai $a = 0$, tai:

$$\lim_{x\to 0} e^x = e^0 + \frac{e^0}{1!}(x-0) + \frac{e^0}{2!}(x-0)^2 + \frac{e^0}{3!}(x-0)^3 + ... = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + ...$$

$sin(x)$ riba

$$\lim_{x\to a} sin(x) = sin(a) + \frac{cos(a)}{1!}(x-a) + \frac{-sin(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{-cos(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{sin(a)}{4!}(x-a)^4 + ...$$

Kai $a = 0$, tai:

$$\lim_{x\to 0} sin(x) = sin(0) + \frac{cos(0)}{1!}(x-0) + \frac{-sin(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{-cos(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{sin(0)}{4!}(x-0)^4 + ... =$$

$$= 0 + x + 0 + \frac{-1}{3!}x^3 + 0 + \frac{1}{5!}x^5 + ... = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - ...$$

$cos(x)$ riba

$$\lim_{x\to a} cos(x) = cos(a) + \frac{-sin(a)}{1!}(x-a) + \frac{-cos(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{sin(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{cos(a)}{4!}(x-a)^4 + ...$$

Kai $a = 0$, tai:

$$\lim_{x\to 0} cos(x) = cos(0) + \frac{-sin(0)}{1!}(x-0) + \frac{-cos(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{sin(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{cos(0)}{4!}(x-0)^4 + ... =$$

$$= 1 + 0 + \frac{-1}{2!}x^2 + 0 + \frac{1}{4!}x^4 + ... = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - ...$$

$(1+x)^k$ riba

$$\lim_{x\to a}(1+x)^k =$$

$$= (1+x)^k + \frac{k(1+a)^{k-1}}{1!}(x-a) + \frac{k(k-1)(1+a)^{k-2}}{2!}(x-a)^2 + \frac{k(k-1)(k-2)(1+a)^{k-3}}{3!}(x-a)^3 + ...$$

Kai $a = 0$, tai:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^k =$$

$$= (1)^k + \frac{k(1)^{k-1}}{1!}(x-0) + \frac{k(k-1)(1)^{k-2}}{2!}(x-0)^2 + \frac{k(k-1)(k-2)(1)^{k-3}}{3!}(x-0)^3 + ... =$$

$$= 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{6}x^3 + ... =$$

***ln*(1 + *x*) riba**

$$\lim_{x\to a} ln(1+x) = ln(1+a) + \frac{\frac{1}{1+a}}{1!}(x-a) + \frac{-\frac{1}{(1+a)^2}}{2!}(x-a)^2 + \frac{\frac{2}{(1+a)^3}}{3!}(x-a)^3 + ...$$

Kai $a = 0$, tai:

$$\lim_{x\to 0} ln(1+x) = ln(1+0) + \frac{\frac{1}{1+0}}{1!}(x-0) + \frac{-\frac{1}{(1+0)^2}}{2!}(x-0)^2 + \frac{\frac{2}{(1+0)^3}}{3!}(x-0)^3 + ... =$$

$$= 0 + x + \frac{-1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + ... = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ...$$

arctan (*x*) riba

$$\lim_{x\to a} \arctan(x) = \arctan(a) + \frac{\frac{1}{a^2+1}}{1!}(x-a) + \frac{\frac{-2a}{(a^2+1)^2}}{2!}(x-a)^2 + \frac{\frac{6a^2-2}{(a^2+1)^3}}{3!}(x-a)^3$$

Kai $a = 0$, tai:

$$\lim_{x\to 0} \arctan(x) = \arctan(0) + \frac{\frac{1}{0^2+1}}{1!}(x-0) + \frac{\frac{-2*0}{(0^2+1)^2}}{2!}(x-0)^2 + \frac{\frac{6*0^2-2}{(0^2+1)^3}}{3!}(x-0)^3 =$$

$$= 0 + x + 0 + \frac{1}{3}x^3 + ... = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ...$$

3.2. Laipsnių eilutės

Laipsnių eilutės užrašome taip:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{m=-1}^{-k} a_m x^m = \sum_{i=-k}^{\infty} a_i x^i = a_{-k}x^{-k} + ... + a_{-1}x^{-1} + a_0 + a_1 x + ...$$

Tokiame užraše matome, jog teigiamų laipsnių galime turėti be galo daug, o neigiamų laipsnių kiekis būtinai turi būti baigtinis.

Šioms eilutėms galima taikyti aritmetines operacijas:

- Sudėties operacija atliekame sudėdami atitinkamus eilučių koeficientus ir gauname tokios pačios formos eilutę.
- Atimties operacija veikia atitinkamai sudėčiai, tai yra, koeficientai atimami.
- Daugybos operacija atliekama taip - kiekvieną pirmos eilutės narį dauginame su antros eilutės nariu. Gautą išraišką sutraukiame ir kiekvienam konkrečiam n yra baigtinis skaičius narių turinčių x^n. Taip yra, nes x^n išraišką gauname sudauginę x^i ir x^j, kur $i \leq \frac{n}{2}$ ir $j \geq \frac{n}{2}$ ir atvirkščiai. Kiekvieną koeficientas yra konkretus skaičius, nes yra sutrauktas iš baigtinio kiekio narių.
- Dalybos operacija atliekama pasiremiant polinomų dalybos stulpeliu algoritmą. Šis algoritmas veikia taip pat kai turime ir baigtinius, ir begalinius dalinio ir daliklio argumentus.

Turint aukščiau įvardintas operacijas galima bet kokią iš jų sudarytą išraišką pasiversti laipsnių eilute. Dabar galima apibrėžti elgseną su funkcijomis.

Sakykime turime išraišką $f(S)$ kur S yra laipsnių eilutė. Imame šios funkcijos Teiloro skleidinį kažkokiame taške a:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x) + \frac{f''(a)}{2!}(x)^2 + + \frac{f'''(a)}{3!}(x)^3 + ...$$

Jeigu S turi bent vieną neigiamą x laipsnį, tai keldami S visais natūraliaisiais laipsniais, galutinėje išraiškoje gausime begalo daug skirtingų neigiamų x laipsnių. Tokia išraiška negali būti aprašyta mūsų apibrėžtomis laipsnių eilutėmis, nes neigiamų laipsnių privalo būti baigtinis kiekis. Todėl šioms situacijoms spręsti mes pasitelksime euristika. Jeigu S neturi nė vieno neigiamo x laipsnio, galime imti $a = a_0$ (S koeficientas prie x^0) . Pasižymime:

$P = \frac{S - a_0}{x}$

Tada turime:

$S - a_0 = P \cdot x$

Perrašome skleidinį:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(Px) + \frac{f''(a)}{2!}(Px)^2 + + \frac{f'''(a)}{3!}(Px)^3 + ...$$

Galutinei laipsnių eilutei, į kurią susiprastina šis reiškinys, norime surasti koeficientą prie x^n. Šiame reiškinyje matome, kad šis koeficientas priklauso tik nuo pirmųjų $n + 1$ sumos narių. Todėl norėdami rasti šį koeficientą, mes paimame tuos $n+1$ narių, juos suprastiname (naudodamiesi aukščiau parodytomis aritmetinėmis operacijomis) ir iš gautos eilutės paimame koeficientą prie x^n. Iš to seka, jog šis reiškinys susiprastina į laipsnių eilutę - galime rasti bet kurį tos eilutės koeficientą.

Savo programoje galime pridėti naujų funkcijų, tereikia pateikti, kaip skaičiuojami tų funkcijų Teiloro skleidinio koeficientai. Tai yra, turime pateikti funkciją:

$$g(a,n) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Operacijos $f(x)^{g(x)}$ bendru atveju išskleisti negalime. Šiai operacijai atlikti mes ją perrašome į $exp(g(x) \cdot ln(f(x)))$, o šių funkcijų skaičiavimas jau buvo pateiktas aukščiau.

Jei skleidžiame funkciją kurios apibrėžimo sritis nėra visa realiųjų skaičių aibė, pirma reikia patikrinti funkcijos argumento ribą. Iš mūsų palaikomų funkcijų tokia funkcija yra tik natūrinis logaritmas. Kai skleidžiame $ln(f(x))$, pirma turime patikrinti $f(x)$ skleidinį:

- Jei $f(x)$ skleidinys diverguoja, patikriname į kurią begalybę - jei į teigiamą arba abi, riba yra $+\infty$ (grąžiname kaip euristinę informaciją).
- Jei $f(x)$ skleidinys konverguoja į teigiamą reikšmę, funkciją skleidžiame įprastai.
- Jei $f(x)$ skleidinys konverguoja į neigiamą reikšmę, tai ieškome ribos neribiniame taške – tokiu atveju pranešame klaidą.
- Jei $f(x)$ skleidinys konverguoja į 0, patikriname sekančius skleidinio narius – iš jų galime nustatyti iš kurios pusės į 0 artėja $f(x)$. Jei tik iš neigiamos – pranešame klaidą dėl neribinio taško. Jei ne – $ln(f(x))$ riba yra $-\infty$ (grąžiname kaip euristinę informaciją).

3.3. Paklaidos skaičiavimas

Laipsnių eilutės ribą paprasčiausia skaičiuoti kai x artėja į 0:

- Jei laipsnių eilutėje nėra narių su neigiamu x laipsniu, eilutės riba bus lygi laisvajam nariui (koeficientui prie x^0).
- Jei mažiausias iš neigiamų x laipsnių yra nelyginis, ribos nėra – kai x artės į 0 iš priešingų pusių, eilutės reikšmė artės į skirtingų ženklų begalybes.
- Jei mažiausias iš neigiamų x laipsnių yra lyginis, ribas bus begalinė, o jos ženklas bus lygus to nario koeficiento ženklui.

Todėl ribą visada skaičiuojame kai x artėja į 0. Jei duotas kitoks taškas, galime vietoj x įsistatyti keitinį:

- Jei duotas baigtinis taškas a, vietoj x įsistatome $a + x$.
- Jei duotas taškas yra $+\infty$, vietoj x įsistatome $\frac{1}{x^2}$.
- Jei duotas taškas yra $-\infty$, vietoj x įsistatome $-\frac{1}{x^2}$.

3.4. Euristikos

Naudojamos dviejų tipų euristikos:

1. Reiškinių prastinimas – pertvarko reiškinius į formas, kurias galima išspręsti naudojantis laipsnių eilutėmis.
2. Tarpinės ribos stebėjimas – naudojama tais atvejais, kai funkcijos išskleisti tikrai nebegalima.

3.4.1. Reiškinių prastinimas

Skaičiuodami ribą pakeičiame reiškinius į formas, kurias galima išspręsti laipsnių eilutėmis. Visi atliekami pakeitimai yra tokie, kurie nepakeičia funkcijos apibrėžimo srities. Prieš skaičiavimus atliekami šie pertvarkymai:

- $f(x)\cdot c \Longrightarrow c \cdot f(x)$
- $\frac{f(x) \pm g(x)}{h(x)} \Longrightarrow \frac{f(x)}{h(x)} \pm \frac{g(x)}{h(x)}$
- $\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} \Longrightarrow e^{f(x)-g(x)}$
- $e^{f(x)}\cdot e^{g(x)} \Longrightarrow e^{f(x)+g(x)}$
- $\frac{e^{f(x)}}{g(x)} \Longrightarrow \frac{1}{\frac{g(x)}{e^{f(x)}}}$
- $c\cdot f(x) \pm c\cdot g(x) \Longrightarrow c\cdot (f(x) \pm g(x))$
- $c_1\cdot f(x) \pm c_2\cdot g(x) \Longrightarrow c_1\cdot (f(x) \pm g(x)) \pm (c_2 - c_1) \cdot g(x)$

Skaičiavimo metu atliekamas dar keli papildomi pertvarkymai (jiems teisingai atlikti reikia žinoti tarpinių reiškinių ribas):

- $ln(f(x)) + ln(g(x)) \Longrightarrow ln(f(x)\cdot g(x))$, jei žinome, kad lim $f(x) > 0$ ir lim $g(x) > 0$
- $ln(f(x)) - ln(g(x)) \Longrightarrow ln(\frac{f(x)}{g(x)})$, jei žinome, kad lim $f(x) > 0$ ir lim $g(x) > 0$

3.4.2. Tarpinės ribos stebėjimas

Jei negalime išskleisti funkcijos, tada laikome tik tai, ką žinome apie tarpinio reiškinio ribą. Galimi variantai:

- Žinome, kokia yra riba
- Žinome, kad ribos nėra
- Nieko nežinome

Jeigu bandome išskleisti reiškinį ir bent vienam iš jo subreiškinių žinome tik šią ribos informaciją, tuomet iš šio reiškinio subreiškinių informacijos pasiliekame tik ribos informaciją ir patį reiškinį sutraukiame turėdami tik tai.

Atliekant šiuos žingsnius labai tikėtina gauti atsakymą, kad nieko nežinome. Pavyzdžiui, jei turime reiškinį $f(x) + g(x)$, kur žinome, kad lim $f(x) = +\infty$ ir lim $g(x) = -\infty$, tai apie sumos ribą nieko nebežinome.

4. Programos testavimo protokolas

Testavimui pasirinkta juodos dežės metodas. Testavimui pasirinkintas įvairus spektras mūsų pačių sugalvotų ribų. Stengtasi padengti visas palaikomas Teiloro skleidinių funkcijas. Taip pat, mėginome ištestuoti skirtingas funkcijų kompozicijas.

Žemiau pateiktoje 3 lentelėje vaizduojami visi testavimo atvejai, sugrupuoti į dvi grupes - elementariųjų funkcijų bei jų kompozicijų ribos. Be to, pateikiamas tikėtini ir gauti ribų atsakimų rezultatai. Jeigu programos gautasis atsakymas sutapo su tikrąja funkcijos riba, rezultatas teigiamas ir pažymėtas žalia spalva, kitu atveju neigiamas - raudona.

3 lentelė. Testavimo rezultatai

Testo numeris	**Skaičiuojama riba**	**Tikėtinas rezultatas**	**Gautas rezultatas**	**Rezultatas**
1	**Elementarių funkcijų ribos**			
1.1	$\lim\limits_{x \to 30} x$	1	1	teigiamas
1.2	$\lim\limits_{x \to -1} 1 + x$	0	0	teigiamas
1.3	$\lim\limits_{x \to \infty} 1 - x$	-∞	-∞	teigiamas
1.4	$\lim\limits_{x \to 100\pi} cos(x) + sin(x)$	1	1	teigiamas
1.5	$\lim\limits_{x \to 50} e^{lnx}$	50	50	teigiamas
1.6	$\lim\limits_{x \to \pi} sin(x)cos(x)$	0	0	teigiamas
1.7	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{ln(x+1)}{x}$	1	1	teigiamas

Tęsinys kitame puslapyje

3 lentelė. Testavimo rezultatai

Testo numeris	**Skaičiuojama riba**	**Tikėtinas rezultatas**	**Gautas rezultatas**	**Rezultatas**
1.8	$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{42}-1}{x}$	42	42	teigiamas
1.9	$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$	1	1	teigiamas
1.10	$\lim_{x \to \infty} \frac{ln(x)}{x^7}$	0	Nepavyko išanalizuoti ribos	neigiamas
1.11	$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^e}$	∞	Nepavyko išanalizuoti ribos	neigiamas
1.12	$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$	e	e	teigiamas
1.13	$\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$	e	e	teigiamas
1.14	$\lim_{x \to 0} x \times \frac{1}{x}$	1	1	teigiamas
1.15	$\lim_{x \to \infty} x \times \frac{1}{x}$	1	1	teigiamas
1.16	$\lim_{x \to -1} \frac{1}{1+x}$	Riba neegzistuoja	Riba neegzistuoja	teigiamas
1.17	$\lim_{x \to 2} \frac{e^{xln2}}{x^2}$	1	1	teigiamas

Tęsinys kitame puslapyje

3 lentelė. Testavimo rezultatai

Testo numeris	**Skaičiuojama riba**	**Tikėtinas rezultatas**	**Gautas rezultatas**	**Rezultatas**
1.18	$\lim_{x \to 30} \sqrt[5]{x}$	$\sqrt[5]{30}$	$\sqrt[5]{30}$	teigiamas
1.19	$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} cos(2x)$	-1	-1	teigiamas
1.10	$\lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}}$	Riba neeg-zistuoja	Riba neeg-zistuoja	teigiamas
1.21	$\lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x^2}}$	$+\infty$	$+\infty$	teigiamas
1.22	$\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x}$	1	1	teigiamas
1.23	$\lim_{x \to \infty} \frac{sin(x)}{x}$	0	Nepavyko išana-lizuoti ribos	neigiamas
1.24	$\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{cos(x)}$	0	0	teigiamas
1.25	$\lim_{x \to 0} \frac{cos(x)}{sin(x)}$	Riba neeg-zistuoja	Riba neeg-zistuoja	teigiamas
1.26	$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$	0	0	teigiamas
1.27	$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^4}$	0	0	teigiamas

Tęsinys kitame puslapyje

3 lentelė. Testavimo rezultatai

Testo numeris	**Skaičiuojama riba**	**Tikėtinas rezultatas**	**Gautas rezultatas**	**Rezultatas**
1.28	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}+2\sqrt{x})}$	1/4	Nepavyko išana-lizuoti ribos	neigiamas
1.29	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x sin(x) - x(1+x)}{x^3}$	1/3	1/3	teigiamas
1.21	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{cos(x) - e^{(-\frac{x^2}{2})}}{x^4}$	-1/12	-1/12	teigiamas
1.32	$\lim\limits_{x\to 5}(5+x)^5$	100000	100000	teigiamas
1.33	$\lim\limits_{x\to 0.7854} \sqrt{2}sin(x)$	≈1	≈1	teigiamas
1.34	$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}+2\sqrt{x})}$	$\frac{1}{2+\sqrt{2}}$ ≈0.2929	Nepavyko išana-lizuoti ribos	neigiamas
1.35	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$	0	Nepavyko išana-lizuoti ribos	neigiamas
1.36	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$	1/4	1/4	teigiamas
1.37	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sin x}$	4	4	teigiamas
2	**Funkcijų kompozicijos ribos**			
				Tęsinys kitame puslapyje

3 lentelė. Testavimo rezultatai

Testo numeris	**Skaičiuojama riba**	**Tikėtinas rezultatas**	**Gautas rezultatas**	**Rezultatas**
2.1	$\lim_{x \to 0} sin(2arctg\frac{1}{x})$	0	Nepavyko išana-lizuoti ribos	neigiamas
2.2	$\lim_{x \to 0} arctg(\frac{sin(x)}{cos(x)})$	0	0	teigiamas
2.3	$\lim_{x \to 0} \frac{arctg(e^x - 1 - x)}{x^2}$	1/2	1/2	teigiamas
2.4	$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} arctg(\frac{sin(x)}{cos(x)})$	Riba neeg-zistuoja	Riba neeg-zistuoja	teigiamas
2.5	$\lim_{x \to 0} xsin(\frac{1}{x})$	0	Nepavyko išana-lizuoti ribos	neigiamas
2.6	$\lim_{x \to 0} \frac{(cos^2(x) - 1) \times \frac{2sin(x)}{cos(x)}}{1 - (\frac{sin(x)}{cos(x)})^2}$	0	0	teigiamas
2.7	$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{sin(x)}{x} - 1}{sin^2(x-1) + cos^2(x+1) - 1}$	0	0	teigiamas
2.8	$\lim_{x \to 0} \frac{sin^2(x-1) + cos^2(x+1) - 1}{\frac{sin(x)}{x} - 1}$	Riba neeg-zistuoja	Riba neeg-zistuoja	teigiamas