Teoria Grafurilor şi Combinatorică

Răspunsuri la examenul parţial (B)

4 decembrie 2015

1. Fie A mulţimea numerelor întregi cuprinse între 12 şi 547 inclusiv; $N = |A|$; N_3=câte numere din A se divid cu 3; N_5=câte numere din A se divid cu 5; şi N_{15} câte numere din A se divid cu 3 şi 5 (deci cu 15). Conform principiului incluziunii şi excluziunii, numărul căutat este $N - N_3 - N_5 + N_{15}$. Însă $N = 547 - 12 + 1 = 536$, $N_3 = 182 - 4 + 1 = 179$, $N_5 = 109 - 3 + 1 = 107$, şi $N_{15} = 36 - 1 + 1 = 36$, deci numărul căutat este $536 - 179 - 107 + 36 = \mathbf{286}$.

2. (a) Permutarea $\langle 1, 2, 5, 6, 4, 3\rangle$ are rangul **17**.

   (b) $108_6 = 300 \Rightarrow$ 3-permutarea cu repetiţie a lui $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ are are rangul 108 este $\langle \mathbf{4, 1, 1}\rangle$.

   (c) $\langle \mathbf{4, 3, 7, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9}\rangle$.

3. (a) Aplicăm regula produsului:

   - Mai întâi alegem poziţilie unde apare 8: sunt $C(5, 2)$ posibilităţi.
   - Apoi alegem una din cele 3 poziţii rămase, unde apare cifra 7: sunt $C(3, 1)$ posibilităţi.
   - Apoi completăm cele 2 poziţii rămase cu cifre diferite de 8 şi 7: sunt 14^2 posibilităţi.

   Deci numărul căutat este $\mathbf{C(5, 2) \cdot C(3, 1) \cdot 14^2}$.

   (b) Un astfel de şir conţine cifra 6 de k ori, unde $k = 0, 1, 2$ sau 3. Numărul de şiruri din M care conţin cifra 6 de k ori este $C(5, k) \cdot 15^{5-k}$. Din regula sumei rezultă că numărul căutat este

   $$\mathbf{C(5, 0) \cdot 15^5 + C(5, 1) \cdot 15^4 + C(5, 2) \cdot 15^3}.$$

   (c) **16** şiruri: 00000, 11111, ..., EEEEE, FFFFF.

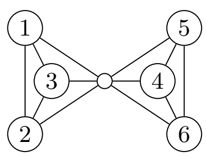
4. Ecuaţia caracteristică este $r^2 - 10\,r + 25 = 0$, care are rădăcina dublă $r = 5$. Deci $a_n = (a \cdot n + b) \cdot 5^n$ pentru $n \geq 0$. Din condiţiile $a_0 = 4$, $a_1 = 35$ rezultă că $b = 4$ şi $a = 3$. Deci $\mathbf{a_n = (3\,n + 4) \cdot 5^n}$.

5. (a) Evident că $a_1 = 3$. Dacă $n \geq 2$, atunci un astfel de şir de lungime n fără cifre consecutive este de forma $d_1 d_2 \ldots d_n$. Aplicăm regula produsului pentru a număra câte şiruri de acest fel putem construi, de la stânga la dreapta:

- Pentru d_1 putem alege orice cifră din $\{1, 2, 3\} \Rightarrow 3$ posibilităţi.
- Pentru d_i $(2 \leq i \leq n)$ putem alege orice cifră din $\{1, 2, 3\}$ diferită de $d_{i-1} \Rightarrow 2$ posibilităţi.

Rezultă că $a_n = 3 \cdot \underbrace{2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n-1 \text{ ori}} = 3 \cdot 2^{n-1}$. Deci $\mathbf{a_n = 3 \cdot 2^{n-1}}$.

(b) $\mathbf{a_4 = 3 \cdot 2^3 = 24}$.

6. 

(a) $G = \{(1)(2)(3)(4)(5)(6),$
$(1,2)(3)(4)(5,6),$
$(1,5)(3,4)(2,6),$
$(1,6)(2,5)(3,4)\}$.

(b) $\frac{1}{4} \cdot (3^6 + 3^4 + 2 \cdot 3^3) = \mathbf{216}$.

7. (a) **În câte feluri se pot pune n persoane la k mese rotunde astfel încât toate mesele să fie ocupate.**

(b) **(b5)**.

Punctaj:
Start: 1pt
1: 1pt
2: (a) 0.75pt; (b) 0.75pt; (c) 0.5pt
3: $0.5 \times 3 = 1.5$pt
4: 1pt
5: $0.75 \times 2 = 1.5$pt
6: $0.5 \times 2 = 1$pt
7: $0.5 \times 2 = 1$pt
Total: 10pt