Teoria de numărare a lui Pòlya
– Explicaţii suplimentare şi exerciţii –

1 Noţiuni preliminare

[Conţinutul acestei secţiuni este, în mare parte, descris în slide-urile cursului 5]

O **n-permutare** este un aranjament $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ al elementelor mulţimii $\{1, \ldots, n\}$. De exemplu, există şase 3-permutări:

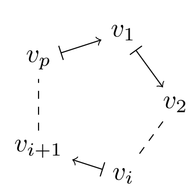
$$\langle 1, 2, 3 \rangle, \langle 1, 3, 2 \rangle, \langle 2, 1, 3 \rangle, \langle 2, 3, 1 \rangle, \langle 3, 1, 2 \rangle, \langle 3, 2, 1 \rangle.$$

Un aranjament $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ reprezintă şi funcţia $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ pentru care $\pi(i) = a_i$ pentru $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pentru a evidenţia acest fapt, putem scrie

$$\begin{array}{ccccc} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle \ldots} & {\scriptstyle n} & \\ & \downarrow & \ldots & \downarrow & \\ \langle & a_1, & \ldots & a_n & \rangle. \end{array}$$

Vom nota cu S_n mulţimea tuturor n-permutărilor. Reamintim faptul că, numărul de n-permutări al unei mulţimi cu n elemente este $n!$

Un **ciclu** este o funcţie $f : \{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \to \{v_1, \ldots, v_p\}$ astfel încât $f(v_1) = v_2$, $f(v_2) = v_3$, $\ldots$, $f(v_p) = v_1$. Alternativ, putem spune că f este funcţia care mapează $v_1 \mapsto v_2 \mapsto \ldots \mapsto v_p \mapsto v_1$, şi să o ilustrăm grafic ca pe un poligon regulat cu n vârfuri, în felul următor:



Reprezentăm acest ciclu cu notaţia $(v_1, \ldots, v_p)$. **Lungimea** ciclului este p. Observăm că acest ciclu poate fi reprezentat în p feluri diferite:

$$(v_1, \ldots, v_p) = (v_2, v_3, \ldots, v_p, v_1) = \ldots = (v_p, v_1, \ldots, v_{p-1}).$$

Dacă $\{v_1, \ldots, v_p\}$ este o mulţime ordonată astfel încât v_1 este elementul cel mai mic, atunci $(v_1, \ldots, v_p)$ se numeşte **reprezentarea canonică** a ciclului.

De exemplu:

1. $(4, 3, 1)$ este un ciclu de lungime 3 care reprezintă funcţia $4 \mapsto 3 \mapsto 1 \mapsto 4$. Reprezentarea canonică a acestui ciclu este $(1, 4, 3)$.
2. (2) este un ciclu de lungime 1 care reprezintă funcţia $2 \mapsto 2$.

Orice permutare poate fi scrisă ca o compoziţie de cicluri disjuncte: o astfel de scriere se numeşte **reprezentare ciclică** (vezi Cursul 4). De exemplu:

$$\underbrace{\langle 3, 5, 2, 4, 1, 6\rangle}_{\text{aranjament}} = \underbrace{(1, 3, 2, 5)(4, 6)}_{\text{structură ciclică}}.$$

sunt reprezentări diferite ale aceleiaşi permutări. Partea stângă a egalităţii reprezintă permutarea ca pe un aranjament, iar partea dreaptă ca pe o compoziţie de cicluri.

Tipul unei n-permutări este lista $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ unde λ_i este numărul de cicluri de lungime i în structura lui ciclică. De exemplu, tipul lui $\langle 3, 5, 2, 4, 1, 6\rangle = (1, 3, 2, 5)(4, 6)$ este $[0, 1, 0, 1, 0, 0]$ deoarece are $\lambda_2 = 1$ cicluri de lungime 2, şi $\lambda_4 = 1$ cicluri de lungime 4.

Compoziţia permutărilor

Permutările sunt funcţii, iar funcţiile pot fi compuse. Scriem $\pi_1 \circ \pi_2$ pentru **compoziţia** permutărilor π_1 şi π_2.
De exemplu, dacă $\pi_1 = \langle 2, 4, 3, 1\rangle$ şi $\pi_2 = \langle 4, 3, 2, 1\rangle$ atunci

$$\pi_1 \circ \pi_2 = \langle \overset{1}{2}, \overset{2}{4}, \overset{3}{3}, \overset{4}{1} \rangle \circ \langle \overset{1}{4}, \overset{2}{3}, \overset{3}{2}, \overset{4}{1} \rangle = \langle 1, 3, 4, 2\rangle.$$

În general, rezultatul unei compoziţii se calculează astfel:

$$\langle p_1, p_2, \ldots, p_n\rangle \circ \langle q_1, q_2, \ldots, q_n\rangle = \langle p_{q_1}, p_{q_2}, \ldots, p_{q_n}\rangle.$$

Puterile π^m unei n-permutări π pentru întregi ne-negativi m sunt definite recursiv astfel:

- $\pi^0 = \langle 1, 2, \ldots, n\rangle = (1)(2)\ldots(n)$ (permutarea identitate)
- $\pi^1 = \pi$
- $\pi^m = \pi \circ \pi^{m-1}$ dacă $m > 1$.

De exemplu, dacă $\pi = \langle 2, 3, 4, 1\rangle = (1, 2, 3, 4)$ atunci:

- $\pi^0 = \langle 1, 2, 3, 4\rangle = (1)(2)(3)(4)$
- $\pi^1 = \langle 2, 3, 4, 1\rangle = (1, 2, 3, 4)$
- $\pi^2 = \langle 3, 4, 1, 2\rangle = (1, 3)(2, 4)$
- $\pi^3 = \langle 4, 1, 2, 3\rangle = (1, 4, 3, 2)$
- $\pi^4 = \langle 1, 2, 3, 4\rangle = \pi^0$; în general $\pi^m = \pi^{m \bmod 4}$

Grupuri de permutări

Un **grup de permutări** este o mulţime G de n-permutări cu proprietăţile următoare:

închidere: Dacă $a, b \in G$ atunci $a \circ b \in G$.

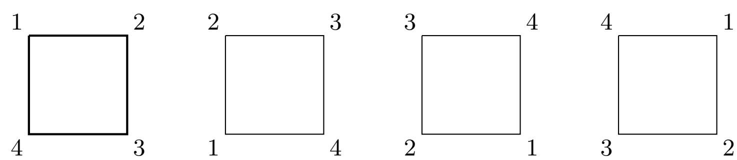
asociativitate: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ pentru toţi $a, b, c \in G$

identitate: Există $e \in G$ astfel încât $e \circ a = a \circ e = a$ pentru toţi $a \in G$. Elementul e se numeşte **identitate** au **element neutru** al lui G.

inversă: Pentru orice $a \in G$ există $b \in G$ astfel încât $a \circ b = b \circ a = e$. Elementul b se numeşte **inversul** lui a.

Permutări ca simetrii

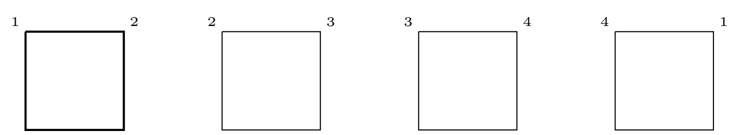
Permutările lui C_n sunt simetrii care sunt rotaţii cu multipli de $360°/n$ ale unui poligon regulat cu n noduri. De exemplu, simetriile rotaţionale ale unui pătrat formează mulţimea C_4 care poate fi ilustrată astfel:



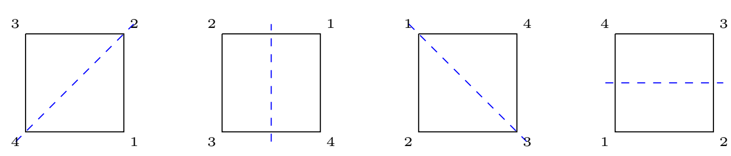
$\langle 1, 2, 3, 4 \rangle$ rotaţie cu 0° | $\langle 2, 3, 4, 1 \rangle$ rotaţie cu 90° | $\langle 3, 4, 1, 2 \rangle$ rotaţie cu 180° | $\langle 4, 1, 2, 3 \rangle$ rotaţie cu 270°

Permutările grupului diedral D_n sunt simetriile rotaţionale C_n ale unui poligon regulat cu n noduri împreună cu permutările care descriu simetriile în jurul tuturor axelor posibile de simetrie.

E exemplu, D_4 poate fi ilustrat astfel:



(1)(2)(3)(4) | (1,2,3,4) | (1,3)(2,4) | (1,4,3,2)



(1,3)(2)(4) | (1,4)(2,3) | (1)(3)(2,4) | (1,4),(2,3)

Set 1 de exerciţii

1. Calculaţi compoziţiile următoare de permutări:

   (a) $\langle 2,3,6,5,1,4\rangle \circ \langle 1,6,5,4,3,2\rangle$

   (b) $(2,3,6,5,1,4) \circ (1,6,5,4,3,2)$

   (c) $(1,2,3,4) \circ (1,2,3,4)$

2. Câte elemente au grupurile ciclice determinate de permutările următoare:

   (a) $\pi_1 = (1,2,6)(3,5,4)$?

   (b) $\pi_2 = (1,2)(3,4,5)(3,7,8,9,10)$?

   (c) $\pi_3 = (1,5)(2,4)(3,6,7)$?

3. Care sunt elementele grupului ciclic $\langle \pi \rangle$ dacă

   (a) $\pi = (1,3,5,4)(2,6)$

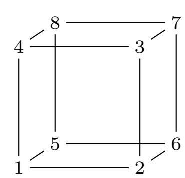
   (b) $\pi = (1,3,4)(2,5)$

4. Calculaţi inversele următoarelor permutări:

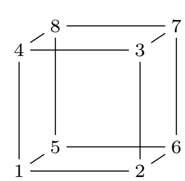
   a) $\langle 2,3,5,4,1\rangle$ b) $(2,3,5,4,1)(6,7,8)$
   c) $(1)(2,4,6)(3,7,5)$ d) $\langle 3,2,4,1,5,8,7,6\rangle$

5. Dacă $\pi \in S_n$ atunci $\langle \pi \rangle$ este un grup.

6. Să se determine grupul de simetrii al vârfurilor unui cub



Observaţie: Problema aceasta se bazează pe detecţia răsucirilor cubului care aduc nodurile sale în aceleaşi poziţii.



Aceste răsuciri formează un grup de permutări, care este grupul de simetrii al vârfurilor cubului:

$$
\begin{aligned}
G = \{&(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8),\\
&(3)(5)(1,8,6)(2,4,7), (3)(5)(1,6,8)(2,7,4),\\
&(2)(8)(1,3,6)(4,7,5), (2)(8)(1,6,3)(4,5,7),\\
&(1)(7)(4,5,2)(3,8,6), (1)(7)(4,2,5)(3,6,8),\\
&(4)(6)(1,3,8)(2,7,5), (4)(6)(1,8,3)(2,5,7),\\
&(1,2,3,4)(5,6,7,8), (1,3)(2,4)(5,7)(6,8), (4,3,2,1)(8,7,6,5),\\
&(1,4,8,5)(2,3,7,6), (1,8)(4,5)(2,7)(3,6), (5,8,4,1)(6,7,3,2),\\
&(3,4,8,7)(2,1,5,6), (3,8)(4,7)(2,5)(1,6), (7,8,4,3)(6,5,1,2),\\
&(3,4)(5,6)(1,7)(2,8)\\
&(4,8)(2,6)(1,7)(3,5)\\
&(8,7)(1,2)(3,5)(4,6)\\
&(1,5)(3,7)(2,8)(4,6)\\
&(1,4)(6,7)(2,8)(3,5)\\
&(2,3)(5,8)(4,6)(1,7)\\
&\}
\end{aligned}
$$

G are 24 elemente. ($|G| = 24$.)

7. Determinaţi grupul de simetrii al nodurilor unui tetraedru regulat.

2 Colorări. Rezumat al rezultator importante

O **colorare** a unei mulţimi de n elemente $\{1, 2, \ldots, n\}$ este o funcţie

$$c : \{1, 2, \ldots, n\} \to K$$

unde $K = \{k_1, \ldots, k_m\}$ este o mulţime de m elemente pe care le numim *culori*.

- Fiecare colorare c poate fi reprezentată ca o permutare cu repetiţie

  $$\langle c(1), c(2) \ldots, c(n)\rangle.$$

  Există m^n colorări diferite ale unei mulţimi cu n elemente.

  De exemplu colorarea $c : \{1, 2, 3, 4\} \to \{r, g\}$ care mapează

  $$1 \mapsto r,\ 2 \mapsto g,\ 3 \mapsto r,\ 4 \mapsto r$$

  este reprezentată ca $\langle r, g, r, r\rangle$.

- Pentru o n-permutare π şi o mulţime de colorări C, definim $\pi^* : C \to C$ astfel: $\pi^*(c) = c'$ dacă $c'(i) = c(\pi(i))$. Deci

  $$\pi^*(\langle c_1, \ldots, c_n\rangle) = \langle c_{\pi(1)}, c_{\pi(2)}, \ldots, c_{\pi(n)}\rangle.$$

  De exemplu, dacă $\pi = (1, 2, 3, 4) = \langle 2, 3, 4, 1\rangle$ atunci

  $$\pi^*(\langle r, g, r, r\rangle) = \langle g, r, r, r\rangle.$$

Observaţii preliminare:

- Dacă G este un grup de permutări atunci relaţia $\sim_G$ definită de

  $c_1 \sim_G c_2$ dacă există $\pi \in G$ astfel încât $c_2 = \pi^*(c_1)$

  este o relaţie de echivalanţă pe mulţimea C. Dacă $c_1 \sim_G c_2$, spunem că c_1 şi c_2 sunt **echivalente** (sau **nediferenţiabile**) în raport cu G. De exemplu, mulţimea

  $$\{\langle g,g,g,r\rangle, \langle g,g,r,g\rangle, \langle g,r,g,g\rangle, \langle r,g,g,g\rangle\}$$

  este formată din colorări care sunt nediferenţiabile în raport cu C_4.

- În general, vrem să determinăm câte colorări poti fi diferenţiate de către un grup de permutări. Acest număr coincide cu numărul claselor de echivalenţă determinate de relaţia de echivalenţă $\sim_G$.

De acum încolo presupunem implicit că:

- C este mulţimea tuturor colorărilor unei mulţimi de n obiecte cu m culori.
- G este un grup de permutări.

Noţiuni auxiliare

Dacă $\pi \in G$ şi $c \in C$ atunci

Mulţimea invariantă a lui π în C este $C_\pi = \{c \in C \mid \pi^*(c) = c\}$.

Stabilizatorul lui c în G este $G_c = \{\pi \in G \mid \pi^*(c) = c\}$.

Clasa de echivalenţă a lui c în raport cu relaţia $\sim_G$ este $\overline{c} = \{\pi^*(c) \mid \pi \in G\}$. $\bar{c}$ se numeşte şi **orbita** lui c în raport cu acţiunea grupului G.

Rezultatul 1

$$|G_c| \cdot |\overline{c}| = |G| \text{ pentru toţi } c \in C.$$

DEMONSTRAŢIE: Fie $\bar{c} = \{c_1, \ldots, c_m\}$. Deoarece $\bar{c} = \{\pi^*(c) \mid \pi \in G\}$, există m permutări distincte $\pi_1, \ldots, \pi_m \in G$ astfel încât $\pi_i^*(c) = c_i$. Fie $P = \{\pi_1, \ldots, \pi_m\}$ şi

$$f : P \times G_c \to G, \quad f(\pi_i, \pi) := \pi_i \circ \pi.$$

Pentru a demonstra că $|G_c| \cdot |\overline{c}| = |G|$ este suficient de demonstrat că f este bijectivă deoarece, în acest caz, avem

$$|G| = |P \times G_c| = |P| \cdot |G_c| = m \cdot |G_c| = |G_c| \cdot m = |G_c| \cdot |\overline{c}|.$$

Pentru a demonstra acest lucru, trebuie demonstrat că pentru fiecare $\sigma \in G$ există o singură pereche de permutări $(\pi_i, \pi) \in P \times G_c$ astfel încât $\pi_i \circ \pi = \sigma$.

Fie $\sigma \in G$ o permutare arbitrară. Atunci $\sigma^*(c) = c_i = \pi_i^*(c)$ pentru un $1 \leq i \leq m$, deci $(\pi_i^{-1} \circ \sigma)^*(c) = (\pi^{-1})^*(\sigma^*(c)) = \pi_i^*(c_i) = c$, deci $\pi_i^{-1} \circ \sigma \in G_c$. Prin urmare, putem alege $\pi = \pi_i^{-1} \circ \sigma \in G_c$ şi $\pi_i \circ \pi = \pi_i \circ (\pi_i^{-1} \circ \sigma) = (\pi_1 \circ \pi_i^{-1}) \circ \sigma = \sigma$.

Apoi, trebuie demonstrat că această reprezentare a lui σ este unică. Dacă $\sigma = \pi_i \circ \pi = \pi_i' \circ \pi$ pentru $(\pi_i, \pi), (\pi_j, \pi') \in P \times G_c$ atunci $\sigma^*(c) = \pi_i^*(\pi^*(c)) = \pi_i^*(c) = c_i$ şi $\sigma^*(c) = \pi_j^*(\pi'^*(c)) = \pi_j^*(c) = c_j$, deci $c_i = c_j$ şi prin urmare $i = j$. Rezultă că $\pi_i = \pi_j$, de unde tragem concluzia că $\pi = \pi_j^{-1} \circ \sigma = \pi_i^{-1} \circ \sigma = \pi'$. Aşadar, această reprezentare a lui σ este unică.

Rezultatul 2: Lema lui Burnside

Fie N numărul de clase de echivalenţă ale lui $\sim_G$. Atunci

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |C_\pi|.$$

DEMONSTRAŢIE:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |C_\pi| &= \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \sum_{c \in C} [\pi^*(c) = c] = \frac{1}{|G|} \sum_{c \in C} \sum_{\pi \in G} [\pi^*(c) = c] \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{c \in C} |G_c| = \sum_{c \in C} \frac{1}{\overline{c}} \\
&= \sum_{\overline{c}} \sum_{c \in \overline{c}} \frac{1}{\overline{c}} \\
&= \sum_{\overline{c}} 1 = N.
\end{aligned}$$

Cum putem determina numărul N al claselor de echivalenţă a lui $\sim_G$?

Pentru a afla N, trebuie să calculăm şi să măsurăm mărimile mulţimilor invariante C_π pentru $\pi \in G$.

Cum putem determina numărul de elemente ale lui C_π în prezenţa a m culori?

- ▷ Dacă c este invariant sub acţiunea lui π atunci toate obiectele permutate de către un ciclu al lui π trebuie să aibă aceeaşi culoare.
- ▷ Dacă π are k cicluri distincte, numărul de colorări invariante sub acţiunea lui π este $|C_\pi| = m^k$, unde m este numărul de culori.

De exemplu

$|C_{(1,2,3,4)}| = m$, $|C_{(1,2)(3,4)}| = m^2$,

$|C_{(1,3)(2)(4)}| = m^3$ şi $|C_{(1)(2)(3)(4)}| = m^4$.

Set 2 de exerciţii

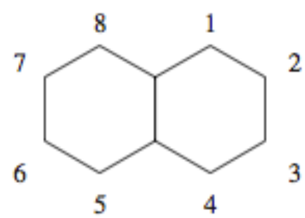
1. Câte colorări diferite cu 5 mărgele pot fi formate folosind 3 tipuri diferite de mărgele, dacă luăm în considerare:

   (a) Toate rotaţiile şi simetriile în jurul unei axe?

   (b) Doar rotaţiile?

   (c) Doar o simetrie în jurul unei axe?

2. Să se indice simetriile configuraţiei următoare



   şi să se calculeze numărul de colorări diferite ale acesteia cu

   (a) o culoare.

   (b) 2 culori.

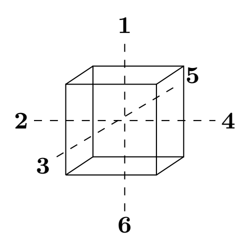
   (c) 3 culori.

3. În câte feluri diferite putem colora feţele unui cub cu

   (a) 2 culori?

   (b) 3 culori?

   Sugestie. Un cub are 6 feţe care pot fi distinse marcându-le cu numerele de la 1 la 6, în felul indicat în figura următoare. (Liniile punctate sunt axe care trec prin centrele feţelor opuse.)



   Grupul G de simetrii al feţelor cubului constă din 6-permutările următoare:

   (a) Permutarea identitate (1)(2)(3)(4)(5)(6).

   (b) Multipli de rotaţii de 90° în jurul axelor punctate:

În jurul axei 1-6: ...
În jurul axei 2-4: ...
În jurul axei 3-5: $(1,4,6,2)(3)(5)$, $(1,6)(2,4)(3)(5)$, $(1,2,6,4)(3)(5)$

(c) Multipli de rotaţii de 120° în jurul axelor ce trec prin colţuri opuse ale cubului (Sunt 4 axe de acest tip):

...
...
...
...

(d) Rotaţii de 180° în jurul axelor prin mijloacele muchiilor opuse (sunt 6 axe de acest tip):

$(1,2)(3,5)(4,6)$
$(1,5)(2,4)(3,6)$
$(1,4)(2,6)(3,6)$
$(1,3)(2,4)(5,6)$
$(1,6)(2,3)(4,5)$
$(1,6)(2,5)(3,4)$

În final, rezultă un grup de 24 elemente, şi aplicăm lema lui Burnside.

2.1 Index ciclic

Presupunem că $x_1, \ldots, x_n$ sunt n variabile distincte. Un *monom* este o expresie de forma $p \cdot x_1^{\ell_1} x_2^{\ell_2} \ldots x_n^{\ell_n}$ unde p este un număr.

- Indexul ciclic al unui grup G este polinomul $P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \frac{\text{sumă de monoame } p \cdot x_1^{\ell_1} x_2^{\ell_2} \ldots x_n^{\ell_n}}{|G|}$$

  unde p is este numărul de permutări din G care au ℓ_1 cicluri de lungime 1, ℓ_2 cicluri de lungime 2, ..., ℓ_n cicluri de lungime n. Observaţi că $\ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_n = n$.

- Dacă π este o permutare cu ℓ_i cicluri de lungime i pentru $1 \leq i \leq n$ atunci $\pi^*(c) = c$ dacă şi numai dacă fiecare ciclu al lui π are elementele colorate la fel

  $\Rightarrow$ $|C_\pi| = m^{\ell_1} m^{\ell_2} \ldots m^{\ell_n}$

  $\Rightarrow$ Lema lui Burnside spune că $N = P_G(m, m, \ldots, m)$.

2.2 Formula de numărare a lui Pólya

Această formulă este utilă pentru rezolvarea problemelor de colorare de tipul următor:

Să se determine numărul $a_{(n_1,n_2,\ldots,n_m)}$ de colorări distincte în raport cu permutările unui grup de simetrii G, dacă suntem constrânşi să folosim culoarea y_1 de exact n_1 ori, culoarea y_2 de exact n_2 ori, ..., şi culoarea y_m de exact n_m ori. (Observaţi că $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$.

Pólya a descoperit o formulă de calcul direct al polinomului

$$F_G(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_m} a_{(n_1,\ldots,n_m)} y_1^{n_1} y_2^{n_2} \ldots y_m^{n_m}$$

Acest polinom se numeşte **inventar de modele de colorare**, iar formula de numărare a lui Pólya este

$$F_G(y_1, y_2, \ldots, y_m) = P_G\left(\sum_{i=1}^{m} y_i, \sum_{i=1}^{m} y_i^2, \ldots, \sum_{i=1}^{m} y_i^n\right).$$

Set 3 de exerciţii

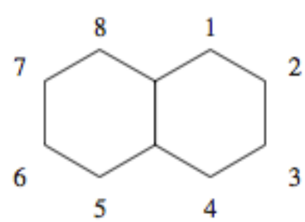
1. Câte zaruri distincte pot fi produse dacă se folosesc 3 culori pentru colorarea feţelor, şi fiecare culoare este folosită pentru a colora 2 feţe?

2. Benzenul este o hidrocarbură cu 6 atomi de carbon plasaţi în vârfurile unui hexagon regulat, şi 6 atomi de hidrogen, fiecare legat la câte un atom de carbon. Două molecule sunt *izomeri* dacă sunt formate din acelaşi număr şi tip de atomi, dar au structuri diferite.

   (a) Câţi izomeri se pot obţine dacă se înlocuiesc 2 atomi de hidrogen cu 2 atomi de clor în benzen?

   (b) Câţi izomeri se pot obţine dacă în molecula de benzen se înlocuiesc 2 atomi de hidrogen cu 2 atomi de clor, şi alţi 2 atomi de hidrogen cu 2 atomi de brom?

3. Naftalina este o hidrocarbură cu 10 atomi de carbon aranjaţi în o structură dublu-hexagală ca în figura de mai jos, şi 8 atomi de hidrogen legaţi de atomii de carbon de la poziţiile marcate cu numerele de la 1 la 8.



(a) Naftolul se obţine înlocuind un atom de hidrogen cu un grup hydroxil (OH). Câţi izomeri de naftol se pot produce?

(b) Tetrametilnaftalina se obţine înlocuind în molecula de naftalină 4 atomi de hidrogen cu grupuri de metil (CH_3). Câţi izomeri de tetramethylnaftalină se pot produc?