Curs 12

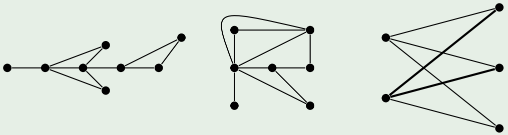
Grafuri planare.
Colorarea grafurilor. Polinoame cromatice

Ianuarie 2015

Grafuri planare
Definiții și exemple

Un graf G este planar dacă poate fi desenat în plan astfel încât muchiile să nu se intersecteze decât în nodurile grafului. O astfel de desenare se numește reprezentare planară a lui G.

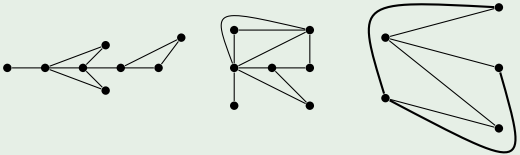
Exemplu (Grafuri planare)



Grafuri planare
Definiții și exemple

Un graf G este planar dacă poate fi desenat în plan astfel încât muchiile să nu se intersecteze decât în nodurile grafului. O astfel de desenare se numește reprezentare planară a lui G.

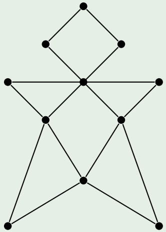
Exemplu (Grafuri planare)



Noțiuni auxiliare

Regiune a unei reprezentări planare a grafului G: porțiune din plan în care orice 2 puncte pot fi unite cu o curbă care nu intersectează G

Exemplu

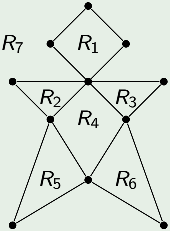


determină 7 regiuni

Noțiuni auxiliare

Regiune a unei reprezentări planare a grafului G: porțiune din plan în care orice 2 puncte pot fi unite cu o curbă care nu intersectează G

Exemplu

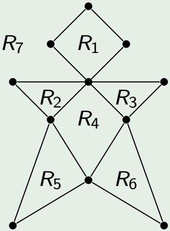


determină 7 regiuni
R_7 este regiunea exterioară

Noțiuni auxiliare

Regiune a unei reprezentări planare a grafului G: porțiune din plan în care orice 2 puncte pot fi unite cu o curbă care nu intersectează G

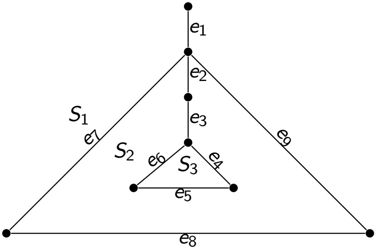
Exemplu



determină 7 regiuni
R_7 este regiunea exterioară

- Orice regiune este delimitată de muchii.
- Orice muchie este în contact cu una sau două regiuni.
- O muchie mărginește o regiune R dacă este în contact cu R și cu altă regiune.

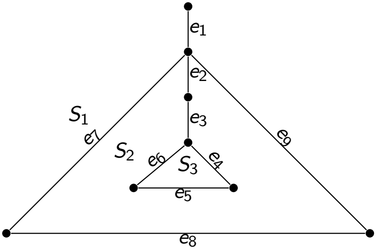
Regiuni și grade de mărginire



e_1 este în contact doar cu S_1
e_2 și e_3 sunt în contact doar cu S_2

S_1 este mărginită de e_7, e_8, e_9
S_3 este mărginită de e_4, e_5, e_6
S_2 este mărginită de $e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9$

Regiuni și grade de mărginire



e_1 este în contact doar cu S_1
e_2 și e_3 sunt în contact doar cu S_2

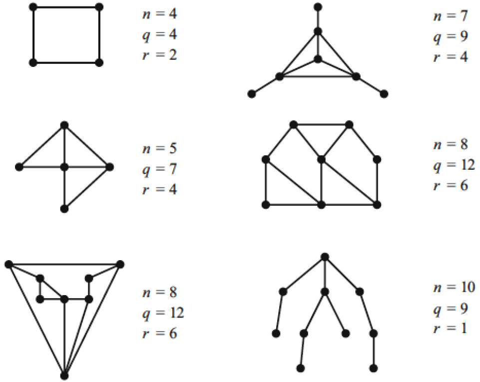
S_1 este mărginită de e_7, e_8, e_9
S_3 este mărginită de e_4, e_5, e_6
S_2 este mărginită de $e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9$

Gradul de mărginire $b(S)$ al unei regiuni S este numărul de muchii care mărginesc S.

$$b(S_1) = 3, \quad b(S_2) = 6, \quad b(S_3) = 3$$

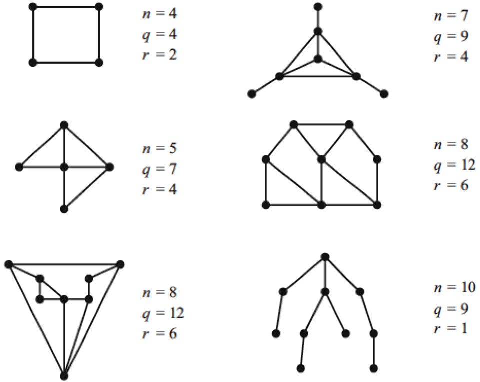
Proprietăți

Fie G un graf conex cu n noduri, q muchii, și o reprezentare planară a lui G cu r regiuni.



Proprietăți

Fie G un graf conex cu n noduri, q muchii, și o reprezentare planară a lui G cu r regiuni.



$n - q + r = 2$ în toate cazurile.

Proprietăți ale grafurilor planare conexe

Teoremă (Formula lui Euler)

Dacă G este un graf planar conex cu n noduri, q muchii și r regiuni, atunci $n - q + r = 2$.

DEMONSTRAȚIE: Inducție după q.
CAZUL 1: $q = 0 \Rightarrow G = K_1$, pentru care $n = 1$, $q = 0$, $r = 1$, deci $n - q + r = 2$.
CAZUL 2: G este arbore $\Rightarrow q = n - 1$ și $r = 1$, deci $n - q + r = n - (n - 1) + 1 = 2$.
CAZUL 3: G este arbore conex cu cel puțin 1 ciclu. Fie e o muchie din ciclul respectiv, și $G' = G - e$.
G' este conex cu n noduri, $q - 1$ muchii, și $r - 1$ regiuni $\Rightarrow$ conform ipotezei inductive: $n - (q - 1) + (r - 1) = 2$. Rezultă că $n - q + r = 2$ are loc și în acest caz.

Consecințe ale formulei lui Euler

Consecința 1

$K_{3,3}$ nu este graf planar.

DEMONSTRAȚIE: $K_{3,3}$ are $n = 6$ și $q = 9 \Rightarrow$ dacă ar fi planar, ar avea $r = q - n + 2 = 5$ regiuni R_i $(1 \leq i \leq 5)$. Fie $C = \sum_{i=1}^{5} b(R_i)$.

- Orice muchie mărginește cel mult 2 regiuni $\Rightarrow C \leq 2\,q = 18$.
- $K_{3,3}$ este bipartit $\Rightarrow$ nu conține C_3 ca subgraf, deci $b(S_i) \geq 4$ pentru toți i, și prin urmare $C \geq 4 \cdot 5 = 20$

$\Rightarrow$ contradicție, deci $K_{3,3}$ nu poate fi graf planar.

Consecințe ale formulei lui Euler

Consecința 2

Dacă G este graf planar cu $n \geq 3$ noduri și q muchii atunci $q \leq 3\,n - 6$.
Mai mult, dacă $q = 3\,n - 6$ atunci $b(S) = 3$ pentru orice regiune S din G.

DEMONSTRAȚIE. Fie $R_1, \ldots, R_r$ regiunile lui G, și $C = \sum_{i=1}^{r} b(R_i)$. Știm că $C \leq 2\,q$ și că $C \geq 3r$ (deoarece $b(R_i) \geq 3$ pentru toți i). Deci
$3\,r \leq 2\,q \Rightarrow 3\,(2 + q - n) \leq 2\,q \Rightarrow q \leq 3n - 6$.
Dacă egalitatea are loc, atunci
$3\,r = 2\,q \Rightarrow C = \sum_{i=1}^{r} b(R_i) = 3\,r \Rightarrow b(R_i) = 3$ pt. toate regiunile R_i.

Consecințe ale formulei lui Euler

Consecința 2

Dacă G este graf planar cu $n \geq 3$ noduri și q muchii atunci $q \leq 3\,n - 6$.
Mai mult, dacă $q = 3\,n - 6$ atunci $b(S) = 3$ pentru orice regiune S din G.

DEMONSTRAŢIE. Fie $R_1, \ldots, R_r$ regiunile lui G, și $C = \sum_{i=1}^{r} b(R_i)$. Știm că $C \leq 2\,q$ și că $C \geq 3r$ (deoarece $b(R_i) \geq 3$ pentru toți i). Deci
$3\,r \leq 2\,q \Rightarrow 3\,(2 + q - n) \leq 2\,q \Rightarrow q \leq 3n - 6$.
Dacă egalitatea are loc, atunci
$3\,r = 2\,q \Rightarrow C = \sum_{i=1}^{r} b(R_i) = 3\,r \Rightarrow b(R_i) = 3$ pt. toate regiunile R_i.

Consecința 3

K_5 nu este graf planar.

DEMONSTRAŢIE: K_5 are $n = 5$ noduri și $q = 10$ muchii
$\Rightarrow 3\,n - 6 = 9 < 10 = q \Rightarrow K_5$ nu poate fi planar (cf. Consecinței 2).

Consecințe ale formulei lui Euler

Consecința 4

$\delta(G) \leq 5$ pentru orice graf planar G.

DEMONSTRAȚIE: Presupunem că G este graf planar cu n noduri și q muchii.

CAZUL 1: $n \leq 6 \Rightarrow$ orice nod are grad $\leq 5 \Rightarrow \delta(G) \leq 5$.

CAZUL 2: $n > 6$. Fie $D = \sum_{v \in V} \deg(v)$. Rezultă că

$$\begin{aligned} D &= 2\,q && \text{(evident)} \\ &\leq 2\,(3\,n - 6) && \text{(conform Consecinței 2)} \\ &= 6\,n - 12. \end{aligned}$$

Dacă $\delta(G) \geq 6$ atunci $D = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq \sum_{v \in V} 6 = 6\,n$, contradicție.

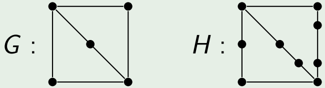
Deci $\delta(G) \leq 5$ trebuie să aibă loc.

Subdiviziuni

Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat, și (x, y) o muchie.

- O subdiviziune a lui (x, y) în G este o înlocuire a lui (x, y) în G cu o cale de la x la y prin puncte intermediare noi.
- Un graf H este o subdiviziune a unui graf G dacă H se poate obține din G printr-o secvență finită de subdiviziuni de muchii.

Exemplu



Criterii de detecție a grafurilor planare

Spunem că un graf G conține un graf H dacă H se poate obține prin eliminarea de noduri și muchii din G.

Remarcă

Dacă H este subgraf al lui G atunci G conține H. Reciproca este falsă: „G conține H" nu implică „H este subgraf al lui G".

- H este subgraf al lui G doar dacă se poate obține din G prin eliminare de noduri.

Teoremă (Teorema lui Kuratowski)

G este graf planar dacă și numai dacă nu conține subdiviziuni ale lui $K_{3,3}$ și ale lui K_5.

Detecția grafurilor neplanare

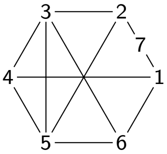
Criteriu bazat pe Teorema lui Kuratowski

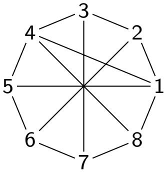
Este $G = (V, E)$ neplanar?

1. Mai întâi verificăm dacă G conține o subdiviziune a lui $K_{3,3}$:
   - Determinăm mulțimea S de noduri $v \in E$ cu $\deg(v) \geq 3$.
     - Dacă $|S| < 6$, G nu poate conține o subdiviziune a lui $K_{3,3}$. Altfel, verificăm dacă putem alege 6 puncte din S care pot fi capete ale unei subdiviziuni a lui $K_{3,3}$.
2. Apoi, verificăm dacă G conține o subdiviziune a lui K_5:
   - Determinăm mulțimea S' de noduri $v \in E$ cu $\deg(v) \geq 4$.
     - Dacă $|S'| < 5$, G nu poate conține o subdiviziune a lui K_5. Altfel, verificăm dacă putem alege 5 puncte din S' care pot fi capete ale unei subdiviziuni a lui $K_{3,3}$.
3. Dacă ambele verificări eșuează $\Rightarrow$ G este graf planar.

Teorema lui Kuratowski
Exemple ilustrate

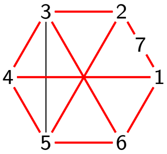
Aplicați teorema lui Kuratowski pentru a decide care din grafurile următoare este planar:

1. 

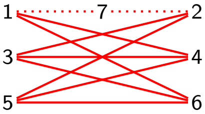
2. 

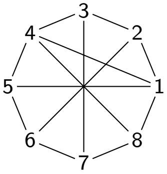
Teorema lui Kuratowski
Exemple ilustrate

Aplicați teorema lui Kuratowski pentru a decide care din grafurile următoare este planar:

1. 

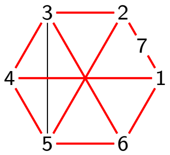
Nu, deoarece conține o subdiviziune a lui $K_{3,3}$:



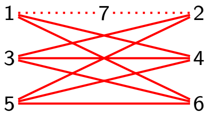
2. 

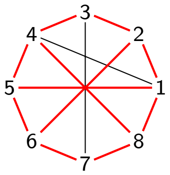
Teorema lui Kuratowski
Exemple ilustrate

Aplicați teorema lui Kuratowski pentru a decide care din grafurile următoare este planar:

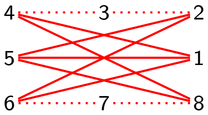
1. 

Nu, deoarece conține o subdiviziune a lui $K_{3,3}$:



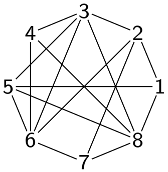
2. 

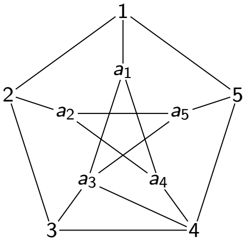
Nu, deoarece conține o subdiviziune a lui $K_{3,3}$:



Teorema lui Kuratowski
Exemple ilustrate

Aplicați teorema lui Kuratowski pentru a decide care din grafurile următoare este planar:

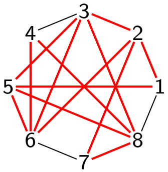
3. 

4. 

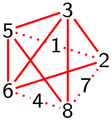
Teorema lui Kuratowski
Exemple ilustrate

Aplicați teorema lui Kuratowski pentru a decide care din grafurile următoare este planar:

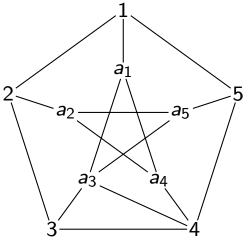
3.



Nu, deoarece conține o subdiviziune a lui K_5:

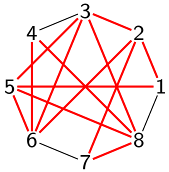


4.

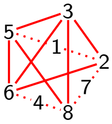


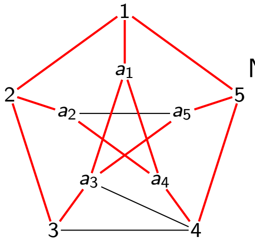
Teorema lui Kuratowski
Exemple ilustrate

Aplicați teorema lui Kuratowski pentru a decide care din grafurile următoare este planar:

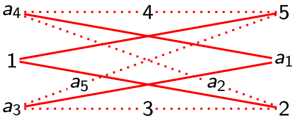
3. 

Nu, deoarece conține o subdiviziune a lui K_5:



4. 

Nu, deoarece conține o subdiviziune a lui $K_{3,3}$:



Problemă motivantă

Adi, Barbu, Călin, Dan, Eugen, Florin, Gelu și Ion sunt senatori ai unui stat, și fac parte din 7 comitete:

$C_1 = \{$Adi, Barbu, Călin$\}$, $C_2 = \{$Călin, Dan, Eugen$\}$,
$C_3 = \{$Dan,Florin$\}$, $C_4 = \{$Adam, Gelu$\}$, $C_5 = \{$Eugen, Ion$\}$,
$C_6 = \{$Eugen,Barbu,Gelu$\}$, $C_7 = \{$Ion, Călin, Florin$\}$.

Fiecare comitet trebuie să fixeze o dată la care să se întâlnească toți membrii săi.

Întrebare: Care este numărul minim de date ce trebuiesc fixate pentru întâlniri, dacă se știe că nici un membru nu poate participa simultan la două întâlniri fixate la aceeași dată?

Răspuns la problema motivantă

Observații:

- Două comitete C_i și C_j nu se pot întâlni la aceeași dată dacă și numai dacă au un membru comun (adică $C_i \cap C_j = \emptyset$).

$\Rightarrow$ Putem considera graful neorientat G cu

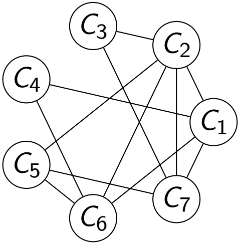
  - noduri = comitetele $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7$
  - muchii (C_i, C_j) dacă C_i și C_j au un membru comun (adică $C_i \cap C_j = \emptyset$)

- Colorăm fiecare nod C_i cu o culoare care reprezintă data la care are loc întâlnirea comitetului C_i

  $\Rightarrow$ problema se poate reformula astfel: care este numărul minim de culori pentru nodurile lui G, astfel încât nici o muchie să nu aibă capetele colorate la fel?

Răspuns la problema motivantă

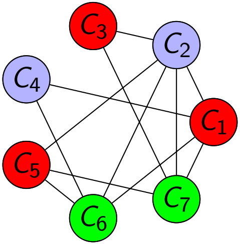
G :



Definiție (colorare de noduri, număr cromatic)

O k-colorare a nodurilor unui graf $G = (V, E)$ este o funcție $K : V \to \{1, \ldots, k\}$ astfel încât $K(u) \neq K(v)$ dacă $(u, v) \in E$.
Numărul cromatic $\chi(G)$ al unui graf G este valoarea minimă a lui $k \in \mathbb{N}$ pt. care există o k-colorare a lui G.

Răspuns la problema motivantă

G : 

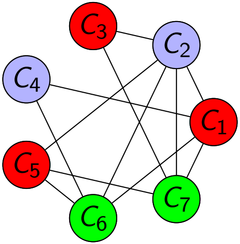
$K(C_1) = K(C_3) = K(C_5) = 1$
$K(C_2) = K(C_4) = 2$
$K(C_6) = K(C_7) = 3$

Definiție (colorare de noduri, număr cromatic)

O *k-colorare* a nodurilor unui graf $G = (V, E)$ este o funcție $K : V \to \{1, \ldots, k\}$ astfel încât $K(u) \neq K(v)$ dacă $(u, v) \in E$.
Numărul cromatic $\chi(G)$ al unui graf G este valoarea minimă a lui $k \in \mathbb{N}$ pt. care există o k-colorare a lui G.

Răspuns la problema motivantă

G :



$K(C_1) = K(C_3) = K(C_5) = 1$

$K(C_2) = K(C_4) = 2$

$K(C_6) = K(C_7) = 3$

$\Rightarrow$ nr. minim de date este 3.
(sunt necesare 3 culori)

Definiție (colorare de noduri, număr cromatic)

O *k-colorare* a nodurilor unui graf $G = (V, E)$ este o funcție $K : V \to \{1, \ldots, k\}$ astfel încât $K(u) \neq K(v)$ dacă $(u, v) \in E$.
Numărul cromatic $\chi(G)$ al unui graf G este valoarea minimă a lui $k \in \mathbb{N}$ pt. care există o k-colorare a lui G.

Colorări de noduri
Polinoame cromatice

Calculul lui $\chi(G)$ este o problemă dificilă (NP-completă).

- Birkhoff ($\approx$ 1900) a descoperit o metodă de calcul al unui polinom $c_G(z)$ pentru orice graf G, numit polinomul cromatic al lui G, astfel încât
  - $c_G(k) =$ nr. de k-colorări de noduri a lui G

$\Rightarrow$ $\chi(G) =$ valoarea minimă a lui k pt. care $c_G(k) > 0$.

Colorări de noduri
Polinoame cromatice

Calculul lui $\chi(G)$ este o problemă dificilă (NP-completă).

- Birkhoff ($\approx$ 1900) a descoperit o metodă de calcul al unui polinom $c_G(z)$ pentru orice graf G, numit polinomul cromatic al lui G, astfel încât
  - $c_G(k)$ = nr. de k-colorări de noduri a lui G

$\Rightarrow$ $\chi(G)$ = valoarea minimă a lui k pt. care $c_G(k) > 0$.

Vom prezenta

1. formule simple de calcul al lui $c_G(z)$ pentru grafuri speciale G.
2. doi algoritmi recursivi de calcul al lui $c_G(z)$ pt. orice graf G.

Polinoame cromatice pentru grafuri speciale

1. Graful vid E_n: $v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n$
   pentru fiecare nod, putem alege oricare din z culori:
   $\Rightarrow c_{E_n}(z) = z^n$ și $\chi(E_n) = 1$

Polinoame cromatice pentru grafuri speciale

1. Graful vid E_n: v_1 v_2 $\cdots$ v_n
   pentru fiecare nod, putem alege oricare din z culori:
   $\Rightarrow c_{E_n}(z) = z^n$ și $\chi(E_n) = 1$
2. Arbore T_n cu n noduri:
   - z opțiuni pentru culoarea rădăcinii
   - orice alt nod poate fi colorat cu orice culoare diferită ce cea a nodului părinte $\Rightarrow z-1$ opțiuni pt. colorarea lui

   $\Rightarrow c_{T_n}(z) = z \cdot (z-1)^{n-1}$ și $\chi(T_n) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n = 1, \\ 2 & \text{dacă } n > 1. \end{cases}$

Polinoame cromatice pentru grafuri speciale

1. Graful vid E_n: v_1 v_2 $\cdots$ v_n
   pentru fiecare nod, putem alege oricare din z culori:
   $\Rightarrow c_{E_n}(z) = z^n$ și $\chi(E_n) = 1$
2. Arbore T_n cu n noduri:
   - z opțiuni pentru culoarea rădăcinii
   - orice alt nod poate fi colorat cu orice culoare diferită ce cea a nodului părinte $\Rightarrow z - 1$ opțiuni pt. colorarea lui

   $$\Rightarrow c_{T_n}(z) = z \cdot (z-1)^{n-1} \text{ și } \chi(T_n) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n = 1, \\ 2 & \text{dacă } n > 1. \end{cases}$$
3. Caz special: graful P_n (cale cu n noduri) este un arbore special cu n noduri: $v_1 - v_2 - \cdots - v_n$

   $$\Rightarrow c_{P_n}(z) = z \cdot (z-1)^{n-1} \text{ și } \chi(P_n) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n = 1, \\ 2 & \text{dacă } n > 1. \end{cases}$$

Polinoame cromatice pentru grafuri speciale

1. Graful vid E_n: $v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n$
   pentru fiecare nod, putem alege oricare din z culori:
   $\Rightarrow c_{E_n}(z) = z^n$ și $\chi(E_n) = 1$
2. Arbore T_n cu n noduri:
   - z opțiuni pentru culoarea rădăcinii
   - orice alt nod poate fi colorat cu orice culoare diferită ce cea a nodului părinte $\Rightarrow z - 1$ opțiuni pt. colorarea lui

   $$\Rightarrow c_{T_n}(z) = z \cdot (z-1)^{n-1} \text{ și } \chi(T_n) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n = 1, \\ 2 & \text{dacă } n > 1. \end{cases}$$
3. Caz special: graful P_n (cale cu n noduri) este un arbore special cu n noduri: $v_1 - v_2 - \cdots - v_n$

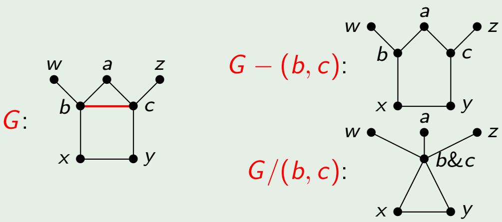
   $$\Rightarrow c_{P_n}(z) = z \cdot (z-1)^{n-1} \text{ și } \chi(P_n) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n = 1, \\ 2 & \text{dacă } n > 1. \end{cases}$$
4. Graful complet K_n:
   $c_{K_n}(z) = z \cdot (z-1) \cdot \ldots \cdot (z-n+1)$ și $\chi(K_n) = n$.

Calculul polinoamelor cromatice
Operații speciale asupra unui graf

Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat și $e = (x, y)$ o muchie din E

- $G - e$ este graful obținut din G prin eliminarea muchiei e
- G/e este graful obținut din G astfel:
  - Se înlocuiesc nodurile x și y cu un singur nod, care se învecinează cu vecinii lui x și ai lui y.

Exemplu



Calculul polinoamelor cromatice

Formule de calcul recursiv

Se observă că, pentru orice $e \in E$: $c_G(z) = c_{G-e}(z) - c_{G/e}(z)$
$\Rightarrow$ doi algoritmi de calcul recursiv al polinomului cromatic:

1. Se reduce G eliminând pe rând câte o muchie $e \in E$:

$$c_G(z) = c_{G-e}(z) - c_{G/e}(z)$$

   până când se obțin grafuri speciale E_n sau T_n:
   - Cazuri de bază: $c_{E_n}(z) = z^n$ și $c_{T_n}(z) = z \cdot (z-1)^{n-1}$

2. Se extinde G adăugând pe rând muchii e care lipsesc din G:

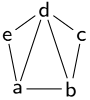
$$c_G(z) = c_{\bar{G}}(z) + c_{\bar{G}/e}(z)$$

   unde e este o muchie lipsă din G, și $\bar{G} = G + e$
   - Caz de bază: $c_{K_n}(z) = z \cdot (z-1) \cdot \ldots \cdot (z-n+1)$

Calculul polinomului cromatic prin reducere

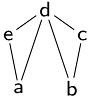
Exemplu ilustrat

G :



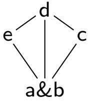
$c_G(z) = c_{G_1}(z) - c_{G_2}(z)$, unde

G_1:



$c_{G_1}(z) = c_{G_{11}}(z) - c_{G_{12}}(z)$
unde $G_{11} = G_1 - (b, c)$
și $G_{12} = G_1/(b, c)$

G_2:

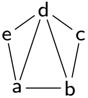


$c_{G_2}(z) = c_{G_{21}}(z) - c_{G_{22}}(z)$
unde $G_{21} = G_2 - (a\&b, c)$
și $G_{22} = G_2/(a\&b, c)$

Calculul polinomului cromatic prin reducere

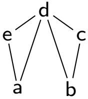
Exemplu ilustrat

G :



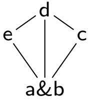
$c_G(z) = c_{G_1}(z) - c_{G_2}(z)$, unde

G_1:



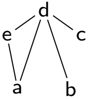
$c_{G_1}(z) = c_{G_{11}}(z) - c_{G_{12}}(z)$
unde $G_{11} = G_1 - (b, c)$
și $G_{12} = G_1/(b, c)$

G_2:

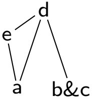


$c_{G_2}(z) = c_{G_{21}}(z) - c_{G_{22}}(z)$
unde $G_{21} = G_2 - (a\&b, c)$
și $G_{22} = G_2/(a\&b, c)$

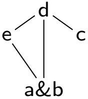
G_{11}:



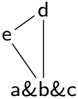
G_{12}:



G_{21}:



G_{22}:



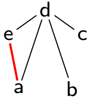
Grafurile următoare sunt izomorfe: $G_{12} \equiv G_{21}$ și $G_{22} = K_3$, deci:

$$c_G(z) = c_{G_{11}}(z) - 2 \cdot c_{G_{12}}(z) + \underbrace{z(z-1)(z-2)}_{c_{K_3}(z)}$$

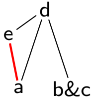
Calculul polinomului cromatic prin reducere
Exemplu ilustrat (continuare)

$$c_G(z) = c_{G_{11}}(z) - 2 \cdot c_{G_{12}}(z) + z(z-1)(z-2)$$

G_{11}:



G_{12}:

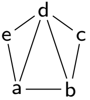


Se observă că

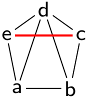
- $c_{G_{11}}(z) = c_{T_5}(z) - c_{T_4}(z) = z(z-1)^4 - z(z-1)^3$
- $c_{G_{12}}(z) = c_{T_4}(z) - c_{T_3}(z) = z(z-1)^3 - z(z-1^2)$

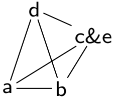
$$\begin{aligned} \Rightarrow c_G(z) = & z(z-1)^4 - z(z-1)^3 - 2(z(z-1)^3 - z(z-1)^2) \\ & + z(z-1)(z-2) \\ & = z^5 - 7\,z^4 + 18\,z^3 - 20\,z^2 + 8\,z \end{aligned}$$

Calculul polinomului cromatic prin extindere
Exemplu ilustrat

G :


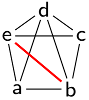
$c_G(z) = c_{G_1}(z) + c_{G_2}(z)$, unde

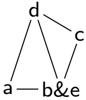
$G_1 = G + (c, e)$:


$G_2 = G_1/(c, e)$:


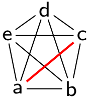
$c_{G_2}(z) = z(z-1)(z-2)(z-3)$ deoarece $G_2 \equiv K_4$, și

$c_{G_1}(z) = c_{G_{11}}(z) + c_{G_{12}}(z)$ unde

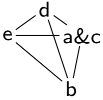
G_{11} :


G_{12} :


$$c_{G_{11}}(z) = c_{G_{111}}(z) + c_{G_{112}}(z)$$
$$= c_{K_5}(z) + c_{K_4}(z) \text{ unde}$$

G_{111} :


$G_{111} \equiv K_5$

G_{112} :


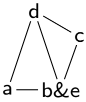
$G_{112} \equiv K_4$

Calculul polinomului cromatic prin extindere

Exemplu ilustrat (continuare)

$$\begin{aligned} c_G(z) &= c_{G_1}(z) + c_{G_2}(z) = (c_{G_{11}}(z) + c_{G_{12}}(z)) + c_{K_4}(z) \\ &= c_{K_5}(z) + c_{K_4}(z) + c_{G_{12}}(z) + c_{K_4}(z) \end{aligned}$$

unde G_{12} :

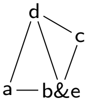


Calculul polinomului cromatic prin extindere

Exemplu ilustrat (continuare)

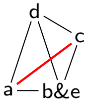
$$c_G(z) = c_{G_1}(z) + c_{G_2}(z) = (c_{G_{11}}(z) + c_{G_{12}}(z)) + c_{K_4}(z)$$
$$= c_{K_5}(z) + c_{K_4}(z) + c_{G_{12}}(z) + c_{K_4}(z)$$

unde G_{12} :



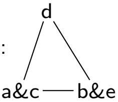
$c_{G_{12}}(z) = c_{G_{121}}(z) + c_{G_{122}}(z) = c_{K_4}(z) + c_{K_3}(z)$ unde

unde G_{121} :



$G_{121} \equiv K_4$

unde G_{122} :



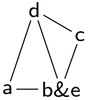
$G_{122} \equiv K_3$

Calculul polinomului cromatic prin extindere

Exemplu ilustrat (continuare)

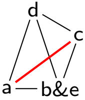
$$c_G(z) = c_{G_1}(z) + c_{G_2}(z) = (c_{G_{11}}(z) + c_{G_{12}}(z)) + c_{K_4}(z)$$
$$= c_{K_5}(z) + c_{K_4}(z) + c_{G_{12}}(z) + c_{K_4}(z)$$

unde G_{12} :



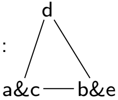
$c_{G_{12}}(z) = c_{G_{121}}(z) + c_{G_{122}}(z) = c_{K_4}(z) + c_{K_3}(z)$ unde

unde G_{121} :



$G_{121} \equiv K_4$

unde G_{122} :



$G_{122} \equiv K_3$

$\Rightarrow c_G(z) = c_{K_5}(z) + 3c_{K_4}(z) + c_{K_3}(z) = z^5 - 7\,z^4 + 18\,z^3 - 20\,z^2 + 8\,z$

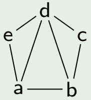
Proprietăți ale polinomului cromatic

Dacă $G = (V, E)$ este un graf neorientat cu n noduri și q muchii atunci polinomul cromatic $c_G(z)$ satisface condițiile următoare:

- Are gradul n.
- Coeficientul lui z^n este 1.
- Coeficienții săi au semne alternante.
- Termenul constant este 0.
- Coeficientul lui z^{n-1} este $-q$.

Exemplu

G :



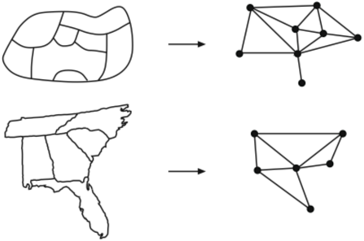
$n = 5,\ q = 7$
$c_G(z) = z^5 - 7\,z^4 + 18\,z^3 - 20\,z^2 + 8\,z$

Rezultate remarcabile

Hărți și grafuri planare

- Fiecare țară a unei hărți se reprezintă ca nod al unui graf
- Două noduri se conectează dacă și numai dacă țările respective au o graniță nebanală (mai mult decât un punct)

$\Rightarrow$ graf neorientat G_H corespunzător unei hărți H. De exemplu:



OBSERVAȚIE: **H este hartă dacă și numai dacă G_H este graf planar.**

Rezultate remarcabile

Colorarea hărții cu 4 culori

Țările unei hărți H pot fi colorate cu 4 culori, astfel încât să nu existe țări învecinate colorate la fel.

Rezultate remarcabile

Colorarea hărții cu 4 culori

Țările unei hărți H pot fi colorate cu 4 culori, astfel încât să nu existe țări învecinate colorate la fel.

Observații

Rezultate remarcabile
Colorarea hărții cu 4 culori

Țările unei hărți H pot fi colorate cu 4 culori, astfel încât să nu existe țări învecinate colorate la fel.

Observații

1. Una dintre cele mai faimoase teoreme din Teoria Grafurilor
   - Demonstrație extrem de lungă și complexă
   - Problemă propusă in 1858, rezolvată de-abia în 1976 (Appel & Haken)
   - Echivalentă cu faptul că graful planar G_H este 4-colorabil.

Rezultate remarcabile
Colorarea hărții cu 4 culori

Țările unei hărți H pot fi colorate cu 4 culori, astfel încât să nu existe țări învecinate colorate la fel.

Observații

1. Una dintre cele mai faimoase teoreme din Teoria Grafurilor
   - Demonstrație extrem de lungă și complexă
   - Problemă propusă in 1858, rezolvată de-abia în 1976 (Appel & Haken)
   - Echivalentă cu faptul că graful planar G_H este 4-colorabil.
2. Teorema este echivalentă cu afirmația:

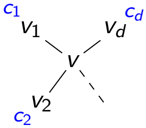
$$\chi(G) \leq 4 \text{ pentru orice graf planar } G.$$

Colorarea hărții cu 5 culori

Țările unei hărți H pot fi colorate cu 5 culori, astfel încât să nu existe țări învecinate colorate la fel. sau, echivalent: $\chi(G) \leq 5$ pentru orice graf planar G.

DEMONSTRAȚIE: Inducție după $n =$ numărul de noduri din G. Teorema este evidentă pt. $n \geq 5$, deci considerăm doar $n \geq 6$. $\delta(G) \leq 5$ datorită consecinței 4, deci G are un nod v cu $\deg(v) \leq 5$. Fie G' graful obținut prin eliminarea lui v din $G \Rightarrow G'$ are $n-1$ noduri, deci $\chi(G') \leq 5$ conform ipotezei inductive. Deci putem presupune că G' are o 5-colorare cu culorile 1,2,3,4,5.

CAZUL 1: $\deg(G) = d \leq 4$. Fie $v_1, \ldots, v_d$ vecinii lui v, cu culorile $c_1, \ldots, c_d$.



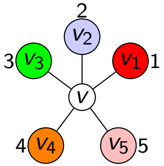
pentru nodul v putem alege orice culoare $c \in \{1,2,3,4,5\} - \{c_1, \ldots, c_d\}$
$\Rightarrow G$ este 5-colorabil.

Colorarea hărții cu 5 culori

Continuarea demonstrației

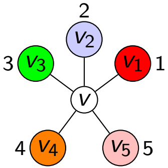
CAZUL 2: $\deg(v) = 5$, deci v are 5 vecini v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 pe care-i presupunem colorați cu culorile c_1, c_2, c_3, c_4, c_5.

1. Dacă $\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\} \neq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, putem să-l colorăm pe v cu orice culoare $c \in \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$ $\Rightarrow$ G este 5-colorabil.
2. Dacă $\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, putem presupune că $c_1 = 1, c_2 = 2, c_3, c_4 = 4, c_5 = 5$.

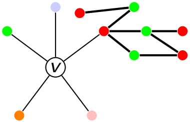


Idee de bază: Vom rearanja culorile lui G' pentru a face disponibilă o culoare pentru v.

Colorarea hărții cu 5 culori
Continuarea demonstrației

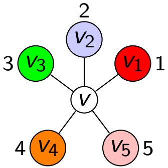


Considerăm toate nodurile lui G' care sunt colorate cu 1 (roșu) și 3 (verde).
CAZUL 2.1. G' nu are nici o cale de la v_1 la v_3 colorată doar cu 1 și 3.
Fie H subgraful lui G' care conține toate căile ce pornesc din v_1 și sunt colorate doar cu 1 (roșu) și 3 (verde).

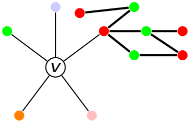


Colorarea hărții cu 5 culori

Continuarea demonstrației

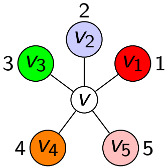


Considerăm toate nodurile lui G' care sunt colorate cu 1 (roșu) și 3 (verde).
CAZUL 2.1. G' nu are nici o cale de la v_1 la v_3 colorată doar cu 1 și 3.
Fie H subgraful lui G' care conține toate căile ce pornesc din v_1 și sunt colorate doar cu 1 (roșu) și 3 (verde).

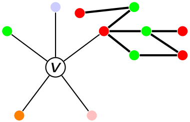


- $V[v_3] \cap V(H) = \emptyset$, adică nici v_3 și nici vecinii lui v_3 nu sunt noduri din H.

Colorarea hărții cu 5 culori
Continuarea demonstrației

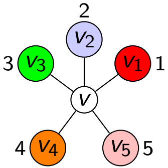


Considerăm toate nodurile lui G' care sunt colorate cu 1 (roșu) și 3 (verde).
Cazul 2.1. G' nu are nici o cale de la v_1 la v_3 colorată doar cu 1 și 3.
Fie H subgraful lui G' care conține toate căile ce pornesc din v_1 și sunt colorate doar cu 1 (roșu) și 3 (verde).

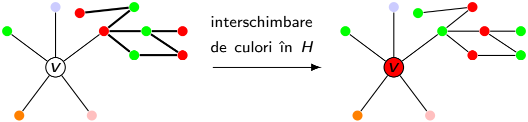


- $V[v_3] \cap V(H) = \emptyset$, adică nici v_3 și nici vecinii lui v_3 nu sunt noduri din H.
- Putem interschimba culorile 1 și 3 în H, iar apoi să atribuim culoarea 1 (roșu) lui $v \Rightarrow G$ este 5-colorabil.

Colorarea hărții cu 5 culori
Continuarea demonstrației

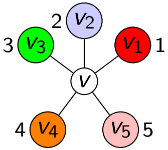


Considerăm toate nodurile lui G' care sunt colorate cu 1 (roșu) și 3 (verde).
CAZUL 2.1. G' nu are nici o cale de la v_1 la v_3 colorată doar cu 1 și 3.
Fie H subgraful lui G' care conține toate căile ce pornesc din v_1 și sunt colorate doar cu 1 (roșu) și 3 (verde).

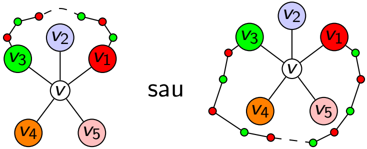


- $V[v_3] \cap V(H) = \emptyset$, adică nici v_3 și nici vecinii lui v_3 nu sunt noduri din H.
- Putem interschimba culorile 1 și 3 în H, iar apoi să atribuim culoarea 1 (roșu) lui $v \Rightarrow G$ este 5-colorabil.

Colorarea hărții cu 5 culori
Continuarea demonstrației



Cazul 2.2. G' are o cale de la v_1 la v_3 colorată doar cu culorile 1 și cu 3 $\Rightarrow$ una din următoarele situații are loc:



În ambele cazuri, nu poate exista o cale de la v_2 la v_4 colorată doar cu culorile 2 și 4 $\Rightarrow$ cazul 2.1 este aplicabil pentru nodurile v_2 și v_4 $\Rightarrow$ G este 5-colorabil și în cazul acesta.