Recapitulare

ianuarie 2015

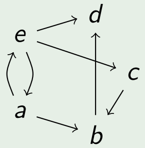
Teoria Grafurilor
Reprezentarea grafurilor

Pentru un graf ilustrat, să se indice reprezentarea lui cu

1. Listă de noduri + listă de muchii
2. Liste de adiacență
3. Matrice de adiacență
4. Dacă graful este ponderat, să se indice matricea lui de ponderi.

Exemplu

G :



Pentru un graf ilustrat, să se indice reprezentarea lui cu

1. Listă de noduri + listă de muchii
2. Liste de adiacență
3. Matrice de adiacență
4. Dacă graful este ponderat, să se indice matricea lui de ponderi.

Exemplu

$$G: \begin{tikzcd}
& d & \\
e \arrow[ur] \arrow[drr] \arrow[dd, bend left] & & \\
& & c \arrow[ddl] \\
a \arrow[uu, bend left] \arrow[dr] & & \\
& b \arrow[uuuu] &
\end{tikzcd}$$

Listă de noduri + listă de muchii:

$V = [a, b, c, d, e]$

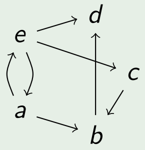
$E = [(a, b), (a, e), (b, d), (c, b), (e, a), (e, c), (e, d)]$

Pentru un graf ilustrat, să se indice reprezentarea lui cu

1. Listă de noduri + listă de muchii
2. Liste de adiacență
3. Matrice de adiacență
4. Dacă graful este ponderat, să se indice matricea lui de ponderi.

Exemplu

G :



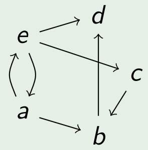
Liste de adiacență:
$a \mapsto [b, e]$
$b \mapsto [d]$
$c \mapsto [b]$
$d \mapsto []$
$e \mapsto [a, c, d]$

Pentru un graf ilustrat, să se indice reprezentarea lui cu

1. Listă de noduri + listă de muchii
2. Liste de adiacență
3. Matrice de adiacență
4. Dacă graful este ponderat, să se indice matricea lui de ponderi.

Exemplu

G :



Matrice de adiacență ($V = [a, b, c, d, e]$):

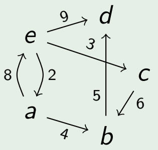
$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pentru un graf ilustrat, să se indice reprezentarea lui cu

1. Listă de noduri + listă de muchii
2. Liste de adiacență
3. Matrice de adiacență
4. Dacă graful este ponderat, să se indice matricea lui de ponderi.

Exemplu

G :



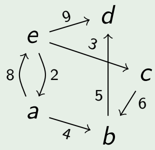
Matrice de ponderi $(V = [a, b, c, d, e])$:

Pentru un graf ilustrat, să se indice reprezentarea lui cu

1. Listă de noduri + listă de muchii
2. Liste de adiacență
3. Matrice de adiacență
4. Dacă graful este ponderat, să se indice matricea lui de ponderi.

Exemplu

G :

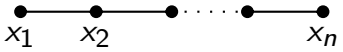


Matrice de ponderi ($V = [a, b, c, d, e]$):

$$W_G = \begin{pmatrix} 0 & 4 & \infty & \infty & 8 \\ \infty & 0 & \infty & 5 & \infty \\ \infty & 6 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Conectivitate în grafuri

O cale de la a la b este o secvență de noduri $x_1, \ldots, x_n$ astfel încât



or

- $x_1 = a$, $x_n = b$ (capetele căii)
- x_{i-1} este vecinul lui x_i pentru toți $1 < i \leq n$.

Lungimea unei astfel de căi este $n - 1$.

Observații

1. Dacă G are n noduri atunci există o cale de la a la b dacă și numai dacă există o cale cu lungimea cel mult $n - 1$ de la a la b.
2. Perechile de noduri între care există o cale de lungime k se pot afla din calculul matricii $A_G^k = \underbrace{A \odot A \odot \ldots \odot A}_{k \text{ ori}}$

(vezi slide-ul următor)

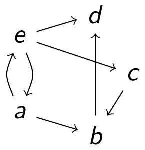
Dacă A_G este matricea de adiacență a unui graf G cu n noduri, atunci

- $A_G^0 := I_n$ unde I_n este matricea identitate $n \times n$, iar
- $A_G^k := A_G \odot A_G^{k-1}$ pentru orice $k > 0$, unde $\odot$ este operația de înmulțire booleană a matricilor:
  - adunarea $a + b$ se înlocuiește cu $a \oplus b := \max(a, b)$
  - înmulțirea $a \cdot b$ se înlocuiește cu $a \odot b := \min(a, b)$.

Observații

- Există în G o cale de lungime k de la al i-lea nod la al j-lea nod dacă și numai dacă elementul (i, j) al lui A_G^k este 1
  $\Rightarrow$ există o cale în G de la al i-lea nod la al j-lea nod dacă și numai dacă elementul (i, j) al lui A_G^k este 1 pentru un $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

$$V = [a, b, c, d, e]$$

G : 

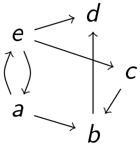
$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Ce perechi de noduri sunt conectate cu căi de lungime 3?

Conectivitate
Probleme rezolvate cu matrici de adiacență

$$V = [a, b, c, d, e]$$

G :



$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

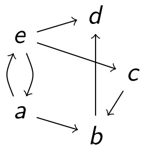
1. Ce perechi de noduri sunt conectate cu căi de lungime 3?
   Avem de calculat $A_G^3 = A \odot A_G^2$

Conectivitate

Probleme rezolvate cu matrici de adiacență

$$V = [a, b, c, d, e]$$

G :



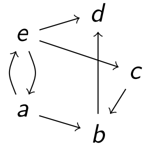
$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Ce perechi de noduri sunt conectate cu căi de lungime 3?
   Avem de calculat $A_G^3 = A \odot A_G^2$

$$A_G^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V = [a, b, c, d, e]$$

G :



$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Ce perechi de noduri sunt conectate cu căi de lungime 3?
   Avem de calculat $A_G^3 = A \odot A_G^2$

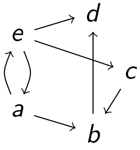
$$A_G^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   $\Rightarrow$perechile sunt: $(a, b), (a, e), (e, a), (e, c), (e, d)$.

Conectivitate
Probleme rezolvate cu matrici de adiacență

$$V = [a, b, c, d, e]$$

G :

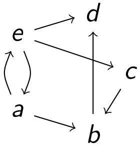


$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Ce perechi de noduri sunt conectate cu căi de lungime 3? Avem de calculat $A_G^3 = A \odot A_G^2$
2. Ce perechi de noduri sunt conectate?

$$V = [a, b, c, d, e]$$

G :

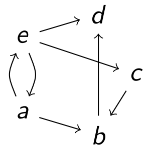


$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Ce perechi de noduri sunt conectate cu căi de lungime 3?
   Avem de calculat $A_G^3 = A \odot A_G^2$
2. Ce perechi de noduri sunt conectate?
   Calculăm închiderea reflexivă și tranzitivă
   $A_G^* = I_5 \oplus A \oplus A^2 \oplus A^3 \oplus A^4$

$$V = [a, b, c, d, e]$$

G :



$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

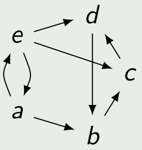
1. Ce perechi de noduri sunt conectate cu căi de lungime 3?
   Avem de calculat $A_G^3 = A \odot A_G^2$
2. Ce perechi de noduri sunt conectate?
   $$A_G^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   $\Rightarrow$perechile conectate sunt: $(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, b), (b, d), (c, b),$
   $(c, c), (c, d), (d, d), (e, a), (e, b), (e, c), (e, d), (e, e)$.

A_G^* se poate calcula în cel puțin 2 feluri:

- $A_G^* = I_n \oplus A_G \oplus \ldots \oplus A_G^{n-1}$ (ineficient)
- Cu algoritmul lui Warshall (eficient): Dacă $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ atunci $A_G^* = C^{[n]} = (c_{ij}^{[n]})$ unde

$$c_{ij}^{[k]} := \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j, \\ a_{ij} & \text{dacă } k = 0 \text{ și } i \neq j, \\ c_{ij}^{[k-1]} \oplus (c_{ik}^{[k-1]} \odot c_{kj}^{[k-1]}) & \text{dacă } k \geq 1. \end{cases}$$

Exemplu



$v_1 = a, v_2 = b, v_3 = c, v_4 = d, v_5 = e$

Conectivitate

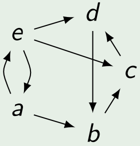
Calculul lui A_G^* cu algoritmul lui Warshall

A_G^* se poate calcula în cel puțin 2 feluri:

- $A_G^* = I_n \oplus A_G \oplus \ldots \oplus A_G^{n-1}$ (ineficient)
- Cu algoritmul lui Warshall (eficient): Dacă $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ atunci $A_G^* = C^{[n]} = (c_{ij}^{[n]})$ unde

$$c_{ij}^{[k]} := \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j, \\ a_{ij} & \text{dacă } k = 0 \text{ și } i \neq j, \\ c_{ij}^{[k-1]} \oplus (c_{ik}^{[k-1]} \odot c_{kj}^{[k-1]}) & \text{dacă } k \geq 1. \end{cases}$$

Exemplu



$v_1 = a, v_2 = b, v_3 = c, v_4 = d, v_5 = e$

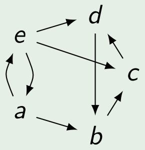
$$C^{[0]} = A_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C^{[1]} = C^{[a]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A_G^* se poate calcula în cel puțin 2 feluri:

- $A_G^* = I_n \oplus A_G \oplus \ldots \oplus A_G^{n-1}$ (ineficient)
- Cu algoritmul lui Warshall (eficient): Dacă $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ atunci $A_G^* = C^{[n]} = (c_{ij}^{[n]})$ unde

$$c_{ij}^{[k]} := \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j, \\ a_{ij} & \text{dacă } k = 0 \text{ și } i \neq j, \\ c_{ij}^{[k-1]} \oplus (c_{ik}^{[k-1]} \odot c_{kj}^{[k-1]}) & \text{dacă } k \geq 1. \end{cases}$$

Exemplu



$v_1 = a, v_2 = b, v_3 = c, v_4 = d, v_5 = e$

$$C^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C^{[2]} = C^{[b]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Conectivitate

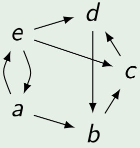
Calculul lui A_G^* cu algoritmul lui Warshall

A_G^* se poate calcula în cel puțin 2 feluri:

- $A_G^* = I_n \oplus A_G \oplus \ldots \oplus A_G^{n-1}$ (ineficient)
- Cu algoritmul lui Warshall (eficient): Dacă $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ atunci $A_G^* = C^{[n]} = (c_{ij}^{[n]})$ unde

$$c_{ij}^{[k]} := \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j, \\ a_{ij} & \text{dacă } k = 0 \text{ și } i \neq j, \\ c_{ij}^{[k-1]} \oplus (c_{ik}^{[k-1]} \odot c_{kj}^{[k-1]}) & \text{dacă } k \geq 1. \end{cases}$$

Exemplu



$v_1 = a, v_2 = b, v_3 = c, v_4 = d, v_5 = e$

$$C^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C^{[3]} = C^{[c]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Conectivitate

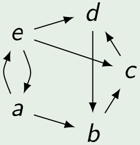
Calculul lui A_G^* cu algoritmul lui Warshall

A_G^* se poate calcula în cel puțin 2 feluri:

- $A_G^* = I_n \oplus A_G \oplus \ldots \oplus A_G^{n-1}$ (ineficient)
- Cu algoritmul lui Warshall (eficient): Dacă $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ atunci $A_G^* = C^{[n]} = (c_{ij}^{[n]})$ unde

$$c_{ij}^{[k]} := \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j, \\ a_{ij} & \text{dacă } k = 0 \text{ și } i \neq j, \\ c_{ij}^{[k-1]} \oplus (c_{ik}^{[k-1]} \odot c_{kj}^{[k-1]}) & \text{dacă } k \geq 1. \end{cases}$$

Exemplu



$v_1 = a, v_2 = b, v_3 = c, v_4 = d, v_5 = e$

$$C^{[3]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C^{[4]} = C^{[d]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

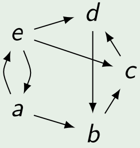
Conectivitate
Calculul lui A_G^* cu algoritmul lui Warshall

A_G^* se poate calcula în cel puțin 2 feluri:

- $A_G^* = I_n \oplus A_G \oplus \ldots \oplus A_G^{n-1}$ (ineficient)
- Cu algoritmul lui Warshall (eficient): Dacă $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ atunci $A_G^* = C^{[n]} = (c_{ij}^{[n]})$ unde

$$c_{ij}^{[k]} := \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j, \\ a_{ij} & \text{dacă } k = 0 \text{ și } i \neq j, \\ c_{ij}^{[k-1]} \oplus (c_{ik}^{[k-1]} \odot c_{kj}^{[k-1]}) & \text{dacă } k \geq 1. \end{cases}$$

Exemplu



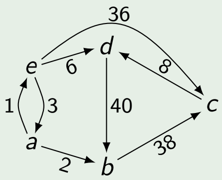
$v_1 = a, v_2 = b, v_3 = c, v_4 = d, v_5 = e$

$$C^{[4]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C^{[5]} = C^{[e]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Algoritmul lui Warshall pentru grafuri ponderate

Calculează cele mai ușoare căi dintre orice două noduri din graf:

Exemplu

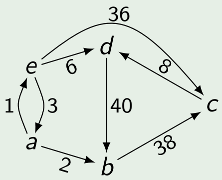


$v_1 = a, v_2 = b, v_3 = c, v_4 = d, v_5 = e$

Algoritmul lui Warshall pentru grafuri ponderate

Calculează cele mai ușoare căi dintre orice două noduri din graf:

Exemplu

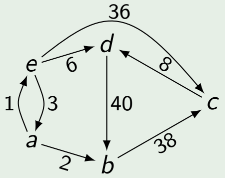


$v_1 = a, v_2 = b, v_3 = c, v_4 = d, v_5 = e$

$$WP^{[0]} = \begin{pmatrix} [a]_0 & [a,b]_2 & \bullet_\infty & \bullet_\infty & [a,e]_1 \\ \bullet_\infty & [b]_0 & [b,c]_{38} & \bullet_\infty & \bullet_\infty \\ \bullet_\infty & \bullet_\infty & [c]_0 & [c,d]_8 & \bullet_\infty \\ \bullet_\infty & [d,b]_{40} & \bullet_\infty & [d]_0 & \bullet_\infty \\ [e,a]_3 & \bullet_\infty & [e,c]_{36} & [e,d]_6 & [e]_0 \end{pmatrix}$$

Calculează cele mai ușoare căi dintre orice două noduri din graf:

Exemplu



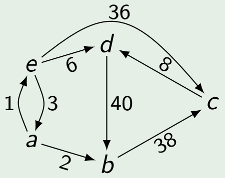
$v_1 = a, v_2 = b, v_3 = c, v_4 = d, v_5 = e$

$$WP^{[0]} = \begin{pmatrix} [a]_0 & [a,b]_2 & \bullet_\infty & \bullet_\infty & [a,e]_1 \\ \bullet_\infty & [b]_0 & [b,c]_{38} & \bullet_\infty & \bullet_\infty \\ \bullet_\infty & \bullet_\infty & [c]_0 & [c,d]_8 & \bullet_\infty \\ \bullet_\infty & [d,b]_{40} & \bullet_\infty & [d]_0 & \bullet_\infty \\ [e,a]_3 & \bullet_\infty & [e,c]_{36} & [e,d]_6 & [e]_0 \end{pmatrix}$$

$$WP^{[1]} = WP^{[a]} = \begin{pmatrix} [a]_0 & [a,b]_2 & \bullet_\infty & \bullet_\infty & [a,e]_1 \\ \bullet_\infty & [b]_0 & [b,c]_{38} & \bullet_\infty & \bullet_\infty \\ \bullet_\infty & \bullet_\infty & [c]_0 & [c,d]_8 & \bullet_\infty \\ \bullet_\infty & [d,b]_{40} & \bullet_\infty & [d]_0 & \bullet_\infty \\ [e,a]_3 & \color{red}{[e,a,b]_5} & [e,c]_{36} & [e,d]_6 & [e]_0 \end{pmatrix}$$

Calculează cele mai ușoare căi dintre orice două noduri din graf:

Exemplu



$v_1 = a, v_2 = b, v_3 = c, v_4 = d, v_5 = e$

$$WP^{[0]} = \begin{pmatrix} [a]_0 & [a,b]_2 & \bullet_\infty & \bullet_\infty & [a,e]_1 \\ \bullet_\infty & [b]_0 & [b,c]_{38} & \bullet_\infty & \bullet_\infty \\ \bullet_\infty & \bullet_\infty & [c]_0 & [c,d]_8 & \bullet_\infty \\ \bullet_\infty & [d,b]_{40} & \bullet_\infty & [d]_0 & \bullet_\infty \\ [e,a]_3 & \bullet_\infty & [e,c]_{36} & [e,d]_6 & [e]_0 \end{pmatrix}$$

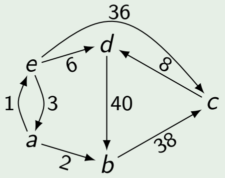
$$WP^{[1]} = WP^{[a]} = \begin{pmatrix} [a]_0 & [a,b]_2 & \bullet_\infty & \bullet_\infty & [a,e]_1 \\ \bullet_\infty & [b]_0 & [b,c]_{38} & \bullet_\infty & \bullet_\infty \\ \bullet_\infty & \bullet_\infty & [c]_0 & [c,d]_8 & \bullet_\infty \\ \bullet_\infty & [d,b]_{40} & \bullet_\infty & [d]_0 & \bullet_\infty \\ [e,a]_3 & [e,a,b]_5 & [e,c]_{36} & [e,d]_6 & [e]_0 \end{pmatrix}$$

$$WP^{[2]} = WP^{[b]} = \begin{pmatrix} [a]_0 & [a,b]_2 & [a,b,c]_{40} & \bullet_\infty & [a,e]_1 \\ \bullet_\infty & [b]_0 & [b,c]_{38} & \bullet_\infty & \bullet_\infty \\ \bullet_\infty & \bullet_\infty & [c]_0 & [c,d]_8 & \bullet_\infty \\ \bullet_\infty & [d,b]_{40} & [d,b,c]_{78} & [d]_0 & \bullet_\infty \\ [e,a]_3 & [e,a,b]_5 & [e,c]_{36} & [e,d]_6 & [e]_0 \end{pmatrix}$$

Algoritmul lui Warshall pentru grafuri ponderate

Calculează cele mai ușoare căi dintre orice două noduri din graf:

Exemplu



$v_1 = a, v_2 = b, v_3 = c, v_4 = d, v_5 = e$

$$WP^{[0]} = \begin{pmatrix} [a]_0 & [a,b]_2 & \bullet_\infty & \bullet_\infty & [a,e]_1 \\ \bullet_\infty & [b]_0 & [b,c]_{38} & \bullet_\infty & \bullet_\infty \\ \bullet_\infty & \bullet_\infty & [c]_0 & [c,d]_8 & \bullet_\infty \\ \bullet_\infty & [d,b]_{40} & \bullet_\infty & [d]_0 & \bullet_\infty \\ [e,a]_3 & \bullet_\infty & [e,c]_{36} & [e,d]_6 & [e]_0 \end{pmatrix}$$

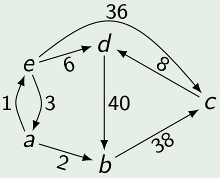
$$WP^{[3]} = WP^{[c]} = \begin{pmatrix} [a]_0 & [a,b]_2 & [a,b,c]_{40} & {\color{red}[a,b,c,d]_{48}} & [a,e]_1 \\ \bullet_\infty & [b]_0 & [b,c]_{38} & {\color{red}[b,c,d]_{46}} & \bullet_\infty \\ \bullet_\infty & \bullet_\infty & [c]_0 & [c,d]_8 & \bullet_\infty \\ \bullet_\infty & [d,b]_{40} & [d,b,c]_{78} & [d]_0 & \bullet_\infty \\ [e,a]_3 & [e,a,b]_5 & [e,c]_{36} & [e,d]_6 & [e]_0 \end{pmatrix}$$

$$WP^{[2]} = WP^{[b]} = \begin{pmatrix} [a]_0 & [a,b]_2 & {\color{red}[a,b,c]_{40}} & \bullet_\infty & [a,e]_1 \\ \bullet_\infty & [b]_0 & [b,c]_{38} & \bullet_\infty & \bullet_\infty \\ \bullet_\infty & \bullet_\infty & [c]_0 & [c,d]_8 & \bullet_\infty \\ \bullet_\infty & [d,b]_{40} & {\color{red}[d,b,c]_{78}} & [d]_0 & \bullet_\infty \\ [e,a]_3 & [e,a,b]_5 & [e,c]_{36} & [e,d]_6 & [e]_0 \end{pmatrix}$$

Algoritmul lui Warshall pentru grafuri ponderate

Calculează cele mai ușoare căi dintre orice două noduri din graf:

Exemplu



$v_1 = a, v_2 = b, v_3 = c, v_4 = d, v_5 = e$

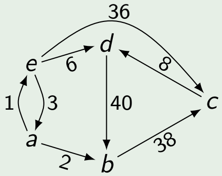
$$WP^{[0]} = \begin{pmatrix} [a]_0 & [a,b]_2 & \bullet_\infty & \bullet_\infty & [a,e]_1 \\ \bullet_\infty & [b]_0 & [b,c]_{38} & \bullet_\infty & \bullet_\infty \\ \bullet_\infty & \bullet_\infty & [c]_0 & [c,d]_8 & \bullet_\infty \\ \bullet_\infty & [d,b]_{40} & \bullet_\infty & [d]_0 & \bullet_\infty \\ [e,a]_3 & \bullet_\infty & [e,c]_{36} & [e,d]_6 & [e]_0 \end{pmatrix}$$

$$WP^{[3]} = WP^{[c]} = \begin{pmatrix} [a]_0 & [a,b]_2 & [a,b,c]_{40} & [a,b,c,d]_{48} & [a,e]_1 \\ \bullet_\infty & [b]_0 & [b,c]_{38} & [b,c,d]_{46} & \bullet_\infty \\ \bullet_\infty & \bullet_\infty & [c]_0 & [c,d]_8 & \bullet_\infty \\ \bullet_\infty & [d,b]_{40} & [d,b,c]_{78} & [d]_0 & \bullet_\infty \\ [e,a]_3 & [e,a,b]_5 & [e,c]_{36} & [e,d]_6 & [e]_0 \end{pmatrix}$$

$$WP^{[4]} = WP^{[d]} = \begin{pmatrix} [a]_0 & [a,b]_2 & [a,b,c]_{40} & [a,b,c,d]_{48} & [a,e]_1 \\ \bullet_\infty & [b]_0 & [b,c]_{38} & [b,c,d]_{46} & \bullet_\infty \\ \bullet_\infty & [c,d,b]_{48} & [c]_0 & [c,d]_8 & \bullet_\infty \\ \bullet_\infty & [d,b]_{40} & [d,b,c]_{78} & [d]_0 & \bullet_\infty \\ [e,a]_3 & [e,a,b]_5 & [e,c]_{36} & [e,d]_6 & [e]_0 \end{pmatrix}$$

Calculează cele mai ușoare căi dintre orice două noduri din graf:

Exemplu



$v_1 = a, v_2 = b, v_3 = c, v_4 = d, v_5 = e$

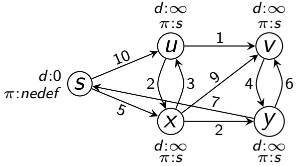
$$WP^{[0]} = \begin{pmatrix} [a]_0 & [a,b]_2 & \bullet_\infty & \bullet_\infty & [a,e]_1 \\ \bullet_\infty & [b]_0 & [b,c]_{38} & \bullet_\infty & \bullet_\infty \\ \bullet_\infty & \bullet_\infty & [c]_0 & [c,d]_8 & \bullet_\infty \\ \bullet_\infty & [d,b]_{40} & \bullet_\infty & [d]_0 & \bullet_\infty \\ [e,a]_3 & \bullet_\infty & [e,c]_{36} & [e,d]_6 & [e]_0 \end{pmatrix}$$

$$WP^{[5]} = WP^{[e]} = \begin{pmatrix} [a]_0 & [a,b]_2 & [a,e,c]_{37} & [a,e,d]_7 & [a,e]_1 \\ \bullet_\infty & [b]_0 & [b,c]_{38} & [b,c,d]_{46} & \bullet_\infty \\ \bullet_\infty & [c,d,b]_{48} & [c]_0 & [c,d]_8 & \bullet_\infty \\ \bullet_\infty & [d,b]_{40} & [d,b,c]_{78} & [d]_0 & \bullet_\infty \\ [e,a]_3 & [e,a,b]_5 & [e,c]_{36} & [e,d]_6 & [e]_0 \end{pmatrix}$$

$$WP^{[4]} = WP^{[d]} = \begin{pmatrix} [a]_0 & [a,b]_2 & [a,b,c]_{40} & [a,b,c,d]_{48} & [a,e]_1 \\ \bullet_\infty & [b]_0 & [b,c]_{38} & [b,c,d]_{46} & \bullet_\infty \\ \bullet_\infty & [c,d,b]_{48} & [c]_0 & [c,d]_8 & \bullet_\infty \\ \bullet_\infty & [d,b]_{40} & [d,b,c]_{78} & [d]_0 & \bullet_\infty \\ [e,a]_3 & [e,a,b]_5 & [e,c]_{36} & [e,d]_6 & [e]_0 \end{pmatrix}$$

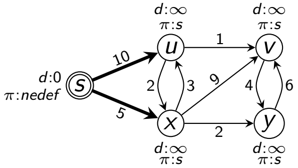
- Se presupune dat un graf ponderat, cu ponderi pozitive
- Determină cele mai scurte căi de la un nod sursă la toate celelalte noduri din graf.

Exemplu:



- Se presupune dat un graf ponderat, cu ponderi pozitive
- Determină cele mai scurte căi de la un nod sursă la toate celelalte noduri din graf.

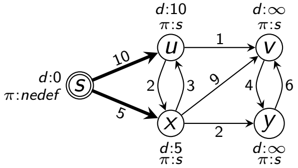
EXEMPLU:



Vizitez nodul s și relaxez toate arcele care pleacă din s spre noduri nevizitate

- Se presupune dat un graf ponderat, cu ponderi pozitive
- Determină cele mai scurte căi de la un nod sursă la toate celelalte noduri din graf.

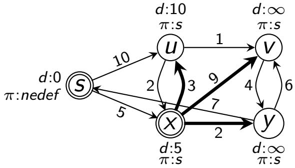
Exemplu:



Vizitez nodul s și relaxez toate arcele care pleacă din s spre noduri nevizitate

- Se presupune dat un graf ponderat, cu ponderi pozitive
- Determină cele mai scurte căi de la un nod sursă la toate celelalte noduri din graf.

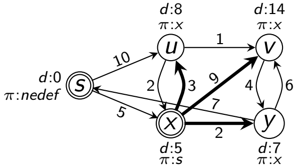
EXEMPLU:



Vizitez nodul x și relaxez toate arcele care pleacă din x spre noduri nevizitate

- Se presupune dat un graf ponderat, cu ponderi pozitive
- Determină cele mai scurte căi de la un nod sursă la toate celelalte noduri din graf.

EXEMPLU:

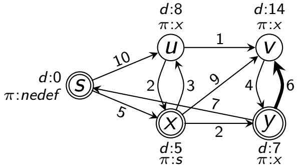


Vizitez nodul x și relaxez toate arcele care pleacă din x spre noduri nevizitate

Algoritmul lui Dijkstra

- Se presupune dat un graf ponderat, cu ponderi pozitive
- Determină cele mai scurte căi de la un nod sursă la toate celelalte noduri din graf.

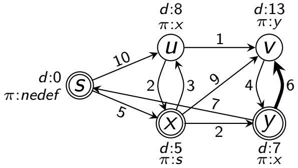
EXEMPLU:



Vizitez nodul y și relaxez toate arcele care pleacă din y spre noduri nevizitate

- Se presupune dat un graf ponderat, cu ponderi pozitive
- Determină cele mai scurte căi de la un nod sursă la toate celelalte noduri din graf.

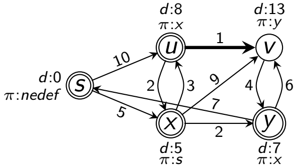
EXEMPLU:



Vizitez nodul y și relaxez toate arcele care pleacă din y spre noduri nevizitate

- Se presupune dat un graf ponderat, cu ponderi pozitive
- Determină cele mai scurte căi de la un nod sursă la toate celelalte noduri din graf.

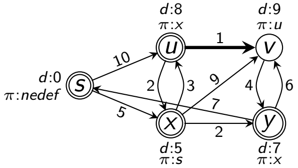
EXEMPLU:



Vizitez nodul u și relaxez toate arcele care pleacă din u spre noduri nevizitate

- Se presupune dat un graf ponderat, cu ponderi pozitive
- Determină cele mai scurte căi de la un nod sursă la toate celelalte noduri din graf.

EXEMPLU:

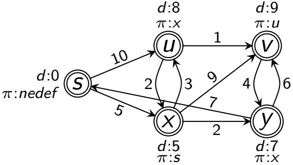


Vizitez nodul u și relaxez toate arcele care pleacă din u spre noduri nevizitate

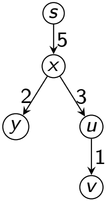
Algoritmul lui Dijkstra

- Se presupune dat un graf ponderat, cu ponderi pozitive
- Determină cele mai scurte căi de la un nod sursă la toate celelalte noduri din graf.

EXEMPLU:



Graful G_π al celor mai ușoare căi din s este

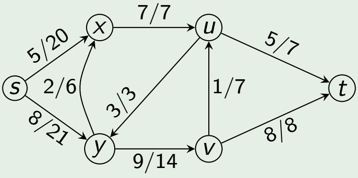


Permite calculul unul flux maxim de la o sursă la o destinație într-o rețea de transport

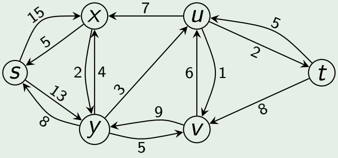
Cerințe:

- Să știți să găsiți un drum de creștere în o rețea de transport G cu un flux dat f, folosind rețeaua reziduală
- Să determinați un flux maxim în o rețea de transport cu algoritmul Ford-Fulkerson

Exemplu

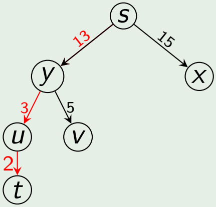


$G + f$



G_f

Pentru a fi siguri că găsim o cale de creștere de la s la t, dacă există vreuna, traversăm G_f în lărgime, pornind de la nodul s:

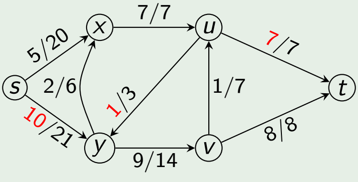


Cale de creștere $s \xrightarrow{13} y \xrightarrow{3} u \xrightarrow{2} t$

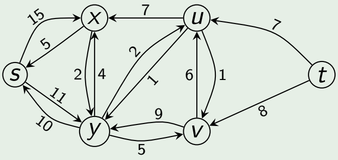
$\Downarrow$

putem crește f cu 2 de-a lungul acestei căi

Exemplu



$G + f$



G_f

Pentru a fi siguri că găsim o cale de creștere de la s la t, dacă există vreuna, traversăm G_f în lărgime, pornind de la nodul s:

Cale de creștere $s \xrightarrow{13} y \xrightarrow{3} u \xrightarrow{2} t$

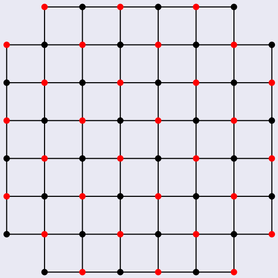
$\Downarrow$

putem crește f cu 2 de-a lungul acestei căi

- Ce este un cuplaj maximal/maxim/perfect?
- Care este legătura dintre cuplaje maximale si M-căi de creștere?

Exercițiu

Să se arate că graful de mai jos nu are nici un cuplaj perfect:



Observație: nr. noduri roșii=30, nr. noduri negre=32.