Cursul 4

Structura Ciclică a Permutărilor. Tehnici Avansate de Numărare

30 octombrie 2015

Permutări și cicluri

Permutările au și rolul de funcții de rearanjare.

Exemplu

1. Permutarea $\langle 4,2,1,3\rangle$ este o funcție bijectivă care mapează 1 la 4, 2 la 2, 3 la 1, și 4 la 3. Putem scrie
$$1 \mapsto 4 \mapsto 3 \mapsto 1,\ \ 2 \mapsto 2$$
2. Permutarea $\langle 2,1,3,5,7,4,6\rangle$ este o funcție care mapează
$$1 \mapsto 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 3,\ \ 4 \mapsto 5 \mapsto 7 \mapsto 6 \mapsto 4$$

Definiție (Ciclu)

Un ciclu este o funcție $\pi : \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \to \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ care mapează
$$v_1 \mapsto v_2 \mapsto \ldots \mapsto v_{k-1} \mapsto v_k \mapsto v_1$$
Notația matematică a acestui ciclu este $(v_1, \ldots, v_k)$.
Ciclul (v_1) reprezintă funcția $\pi : \{v_1\} \to \{v_1\}$ cu $\pi(v_1) = v_1$.

Structura ciclică a permutărilor

Observație

Orice permutare poate fi reprezentată ca o compoziție de cicluri disjuncte. Această reprezentare se numește structura ciclică a permutării.

Exemplu

1. Permutarea $\langle 4, 2, 1, 3 \rangle$ poate fi reprezentată ca o compoziție de 2 cicluri disjuncte: $(1, 4, 3)(2)$.
2. Permutarea $\langle 2, 1, 3, 5, 7, 4, 6 \rangle$ poate fi reprezentată ca o compoziție de 3 cicluri disjuncte: $(1, 2)(3)(4, 5, 7, 6)$.

Reprezentarea unui ciclu nu este unică: de exemplu, $(2, 3, 4)$, $(3, 4, 2)$ și $(4, 2, 3)$ sunt cicluri care reprezintă aceeași funcție.

Reprezentarea unui ciclu nu este unică: de exemplu, $(2, 3, 4)$, $(3, 4, 2)$ și $(4, 2, 3)$ sunt cicluri care reprezintă aceeași funcție.

$\Rightarrow$ Structura ciclică a permutărilor nu este unică: de exemplu următoarele structuri ciclice reprezintă aceeași permutare:

- $(1, 5)(2, 3, 4)$
- $(1, 5)(3, 4, 2)$
- $(5, 1)(4, 2, 3)$
- $(2, 3, 4)(1, 5)$
- În general, structurile ciclice care se obțin prin
  - rotirea ciclurilor din structură, la stanga sau la dreapta, sau
  - permutarea ciclurilor structurii

  reprezintă aceeași permutare.

Reprezentarea unui ciclu nu este unică: de exemplu, $(2,3,4)$, $(3,4,2)$ și $(4,2,3)$ sunt cicluri care reprezintă aceeași funcție.

$\Rightarrow$ Structura ciclică a permutărilor nu este unică: de exemplu următoarele structuri ciclice reprezintă aceeași permutare:

- $(1,5)(2,3,4)$
- $(1,5)(3,4,2)$
- $(5,1)(4,2,3)$
- $(2,3,4)(1,5)$
- În general, structurile ciclice care se obțin prin
  - rotirea ciclurilor din structură, la stanga sau la dreapta, sau
  - permutarea ciclurilor structurii

  reprezintă aceeași permutare.

- Putem defini o structură ciclică canonică a unei permutări:
  - Fiecare ciclu începe cu elementul cel mai mic.
  - Ciclurile sunt scrise în ordinea crescătoare a celui mai mic element.

Idee de bază

1. Se pornește de la 1 calculul secvenței de succesori până se revine la 1. Acest proces construiește primul ciclu.
2. Se alege cel mai mic element care nu apare în primul ciclu și se construiește al doilea ciclu.
3. Se repetă acest proces până când toate elementele apar într-un ciclu.

Idee de bază

1. Se pornește de la 1 calculul secvenței de succesori până se revine la 1. Acest proces construiește primul ciclu.
2. Se alege cel mai mic element care nu apare în primul ciclu și se construiește al doilea ciclu.
3. Se repetă acest proces până când toate elementele apar într-un ciclu.

Exercițiu

Care sunt structurile ciclice canonice ale următoarelor permutări:

1. $\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \rangle$?

Idee de bază

1. Se pornește de la 1 calculul secvenței de succesori până se revine la 1. Acest proces construiește primul ciclu.
2. Se alege cel mai mic element care nu apare în primul ciclu și se construiește al doilea ciclu.
3. Se repetă acest proces până când toate elementele apar într-un ciclu.

Exercițiu

Care sunt structurile ciclice canonice ale următoarelor permutări:

1. $\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\rangle$?
   (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)

Idee de bază

1. Se pornește de la 1 calculul secvenței de succesori până se revine la 1. Acest proces construiește primul ciclu.
2. Se alege cel mai mic element care nu apare în primul ciclu și se construiește al doilea ciclu.
3. Se repetă acest proces până când toate elementele apar într-un ciclu.

Exercițiu

Care sunt structurile ciclice canonice ale următoarelor permutări:

1. $\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \rangle$?
   $(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)$
2. $\langle 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$?

Idee de bază

1. Se pornește de la 1 calculul secvenței de succesori până se revine la 1. Acest proces construiește primul ciclu.
2. Se alege cel mai mic element care nu apare în primul ciclu și se construiește al doilea ciclu.
3. Se repetă acest proces până când toate elementele apar într-un ciclu.

Exercițiu

Care sunt structurile ciclice canonice ale următoarelor permutări:

1. $\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \rangle$?
   $(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)$
2. $\langle 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$?
   $(1, 10)(2, 9)(3, 8)(4, 7)(5, 6)$

Exemplu ilustrat

Permutarea corespunzătoare structurii ciclice $(1,3,4)(2,6,7)(5)$ se poate calcula astfel:

1. Se rotesc la dreapta cu o poziție toate ciclurile structurii ciclice inițiale $\Rightarrow (4,1,3)(7,2,6)(5)$
2. Se aliniază structura ciclică rotită la dreapta peste structura ciclică inițială:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} (& 4 & , & 1 & , & 3 &)(& 7 & , & 2 & , & 6 &)(& 5 &) \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ (& 1 & , & 3 & , & 4 &)(& 2 & , & 6 & , & 7 &)(& 5 &) \end{array}$$

3. Se poate citi direct permutarea

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 & \\ \langle & 3 & , & 6 & , & 4 & , & 1 & , & 5 & , & 7 & , & 2 & \rangle \end{array}$$

Tipul unei permutări π de n elemente este lista $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ în care λ_i este numărul ciclurilor lui π cu lungimea i, pentru $1 \leq i \leq n$.

Tipul unei permutări π de n elemente este lista $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ în care λ_i este numărul ciclurilor lui π cu lungimea i, pentru $1 \leq i \leq n$.

Exemplu

1. Permutarea $\langle 1,2,3,4,5,6,7\rangle = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)$ are tipul $[7,0,0,0,0,0,0]$
2. Permutarea $\langle 7,6,5,4,3,2,1\rangle = (1,7)(2,6)(3,5)(4)$ are tipul $[1,3,0,0,0,0,0]$
3. Permutarea $\langle 1,3,2,6,7,8,9,4,10,5\rangle = (1)(2,3)(4,6,8)(5,7,9,10)$ are tipul $[1,1,1,1,0,0,0,0,0,0]$

Tipul unei permutări π de n elemente este lista $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ în care λ_i este numărul ciclurilor lui π cu lungimea i, pentru $1 \leq i \leq n$.

Exemplu

1. Permutarea $\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\rangle = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)$ are tipul $[7, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$
2. Permutarea $\langle 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\rangle = (1, 7)(2, 6)(3, 5)(4)$ are tipul $[1, 3, 0, 0, 0, 0, 0]$
3. Permutarea $\langle 1, 3, 2, 6, 7, 8, 9, 4, 10, 5\rangle = (1)(2, 3)(4, 6, 8)(5, 7, 9, 10)$ are tipul $[1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$

OBSERVAŢIE: $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ este tipul unei permutări dacă și numai dacă $1 \cdot \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 + \ldots + n \cdot \lambda_n = n$

$i \cdot \lambda_i =$ numărul de elemente ce apar în cicluri cu lungimea i.

Numărarea permutărilor de un anumit tip

Întrebare: Câte permutări au tipul $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$?

Întrebare: Câte permutări au tipul $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$?

- Scriem toate cele $n!$ permutări și inserăm paranteze pentru a construi n! structuri ciclice de forma

$$\underbrace{c_1^1 \ldots c_{\lambda_1}^1}_{\text{cicluri cu lung. } 1} \quad \ldots \quad \underbrace{c_1^n \ldots c_{\lambda_n}^n}_{\text{cicluri cu lung. } n}$$

Numărarea permutărilor de un anumit tip

Întrebare: Câte permutări au tipul $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$?

- Scriem toate cele $n!$ permutări și inserăm paranteze pentru a construi n! structuri ciclice de forma

$$\underbrace{c_1^1 \ldots c_{\lambda_1}^1}_{\text{cicluri cu lung. } 1} \quad \ldots \quad \underbrace{c_1^n \ldots c_{\lambda_n}^n}_{\text{cicluri cu lung. } n}$$

- Numărăm structurile ciclice care reprezintă aceeași permutare
  - ▷ Fiecare ciclu c_k^i de lungime i poate fi scris in i feluri echivalente $\Rightarrow$ din cauza echivalenței ciclurilor, există $1^{\lambda_1} \cdot 2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot n^{\lambda_n}$ structuri ciclice care reprezintă aceeași permutare. (am aplicat regula produsului)
  - ▷ Orice permutare a ciclurilor din cadrul unui bloc de cicluri cu aceeași lungime reprezintă aceeași permutare
    - există $\lambda_i!$ permutări in fiecare bloc de cicluri de lungime i

    $\Rightarrow$ există $\lambda_1! \cdot \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!$ structuri ciclice echivalente din acest motiv. (am aplicat regula produsului)

Întrebare: Câte permutări au tipul $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$?

- Scriem toate cele $n!$ permutări și inserăm paranteze pentru a construi n! structuri ciclice de forma

$$\underbrace{c_1^1 \ldots c_{\lambda_1}^1}_{\text{cicluri cu lung. } 1} \quad \ldots \quad \underbrace{c_1^n \ldots c_{\lambda_n}^n}_{\text{cicluri cu lung. } n}$$

- Numărăm structurile ciclice care reprezintă aceeași permutare
  - ▷ Fiecare ciclu c_k^i de lungime i poate fi scris in i feluri echivalente $\Rightarrow$ din cauza echivalenței ciclurilor, există $1^{\lambda_1} \cdot 2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot n^{\lambda_n}$ structuri ciclice care reprezintă aceeași permutare. (am aplicat regula produsului)
  - ▷ Orice permutare a ciclurilor din cadrul unui bloc de cicluri cu aceeași lungime reprezintă aceeași permutare
    - există $\lambda_i!$ permutări in fiecare bloc de cicluri de lungime i

    $\Rightarrow$ există $\lambda_1! \cdot \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!$ structuri ciclice echivalente din acest motiv. (am aplicat regula produsului)

$\Rightarrow$ nr. perm. de tip λ este $\dfrac{n!}{\lambda_1! \cdot \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n! \cdot 1^{\lambda_1} \cdot 2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot n^{\lambda_n}}$

O partiție întreagă a unui întreg pozitiv n este un multi-set de întregi pozitivi a căror sumă este n. Se observă că

$$\text{Numărul partițiilor lui } n = \text{Numărul tipurilor de } n\text{-permutări.}$$

$$[\lambda_1, \ldots, \lambda_n] \leftrightarrow \{\underbrace{1, \ldots, 1}_{\lambda_1 \text{ ori}}, \ldots, \underbrace{n, \ldots, n}_{\lambda_n \text{ ori}}\}$$

Exemplu

Partițiile întregi ale numărului 5 sunt multi-seturile $\{5\}, \{4, 1\}, \{3, 2\}, \{3, 1, 1\}, \{2, 2, 1\}, \{2, 1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1, 1\}$. Ele corespund tipurilor $[0, 0, 0, 0, 1]$, $[1, 0, 0, 1, 0]$, $[0, 1, 1, 0, 0]$, $[2, 0, 1, 0, 0]$, $[1, 0, 0, 2, 0]$, $[3, 1, 0, 0, 0]$, $[5, 0, 0, 0, 0]$.

- Numeroase probleme de numărare nu pot fi rezolvate cu metodele prezentate până acum.
- Exemple:
  1. Câte șiruri de biți de lungime n nu conțin două zerouri consecutive?
  2. În câte feluri se pot aloca 7 lucrări la 3 angajați astfel încât fiecare angajat să primească cel puțin o lucrare?

- Numeroase probleme de numărare nu pot fi rezolvate cu metodele prezentate până acum.
- Exemple:
  1. Câte șiruri de biți de lungime n nu conțin două zerouri consecutive?
  2. În câte feluri se pot aloca 7 lucrări la 3 angajați astfel încât fiecare angajat să primească cel puțin o lucrare?

Scopul părții a 2-a a cursului: prezentarea unor tehnici mai avansate de numărare:

- Numeroase probleme de numărare nu pot fi rezolvate cu metodele prezentate până acum.
- Exemple:
  1. Câte șiruri de biți de lungime n nu conțin două zerouri consecutive?
  2. În câte feluri se pot aloca 7 lucrări la 3 angajați astfel încât fiecare angajat să primească cel puțin o lucrare?

  Scopul părții a 2-a a cursului: prezentarea unor tehnici mai avansate de numărare:
  - Relații de recurență

- Numeroase probleme de numărare nu pot fi rezolvate cu metodele prezentate până acum.
- Exemple:
  1. Câte șiruri de biți de lungime n nu conțin două zerouri consecutive?
  2. În câte feluri se pot aloca 7 lucrări la 3 angajați astfel încât fiecare angajat să primească cel puțin o lucrare?

  Scopul părții a 2-a a cursului: prezentarea unor tehnici mai avansate de numărare:
  - Relații de recurență
  - Rezolvarea relațiilor de recurență liniară

Relații de recurență

Exemplu

Numărul bacteriilor din o colonie se dublează în fiecare oră. Dacă într-o colonie sunt inițial 5 bacterii, câte vor fi după n ore?

RĂSPUNS. Fie a_n numărul de bacterii după n ore.

- $a_0 = 5$ (cunoștințe inițiale)
- $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$ pentru $n > 0$ (evoluție)

Exemplu

Numărul bacteriilor din o colonie se dublează în fiecare oră. Dacă într-o colonie sunt inițial 5 bacterii, câte vor fi după n ore?

RĂSPUNS. Fie a_n numărul de bacterii după n ore.

- $a_0 = 5$ (cunoștințe inițiale)
- $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$ pentru $n > 0$ (evoluție)

- O relație de recurență pentru secvența $\{a_n\}$ este o ecuație care exprimă a_n în funcție de 0 sau mai mulți termeni dintre $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ ai secvenței, pentru toți $n \geq n_0$, unde $n_0 \geq 0$.

Exemplu

Numărul bacteriilor din o colonie se dublează în fiecare oră. Dacă într-o colonie sunt inițial 5 bacterii, câte vor fi după n ore?

RĂSPUNS. Fie a_n numărul de bacterii după n ore.

- $a_0 = 5$ (cunoștințe inițiale)
- $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$ pentru $n > 0$ (evoluție)

- O relație de recurență pentru secvența $\{a_n\}$ este o ecuație care exprimă a_n în funcție de 0 sau mai mulți termeni dintre $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ ai secvenței, pentru toți $n \geq n_0$, unde $n_0 \geq 0$.
- O soluție a relației de recurență este o formulă de calcul direct a lui a_n din n, care satisface relația de recurență.

Relații de recurență

Exemplu

Numărul bacteriilor din o colonie se dublează în fiecare oră. Dacă într-o colonie sunt inițial 5 bacterii, câte vor fi după n ore?

RĂSPUNS. Fie a_n numărul de bacterii după n ore.

- $a_0 = 5$ (cunoștințe inițiale)
- $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$ pentru $n > 0$ (evoluție)

- O relație de recurență pentru secvența $\{a_n\}$ este o ecuație care exprimă a_n în funcție de 0 sau mai mulți termeni dintre $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ ai secvenței, pentru toți $n \geq n_0$, unde $n_0 \geq 0$.
- O soluție a relației de recurență este o formulă de calcul direct a lui a_n din n, care satisface relația de recurență.

În continuare vor fi prezentate tehnici de rezolvare a unor tipuri de relații de recurență.

- $a_0 = 3, a_1 = 5, a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ pentru $n \geq 2$.
  Toate elementele lui $\{a_n\}$ pot fi calculate recursiv:

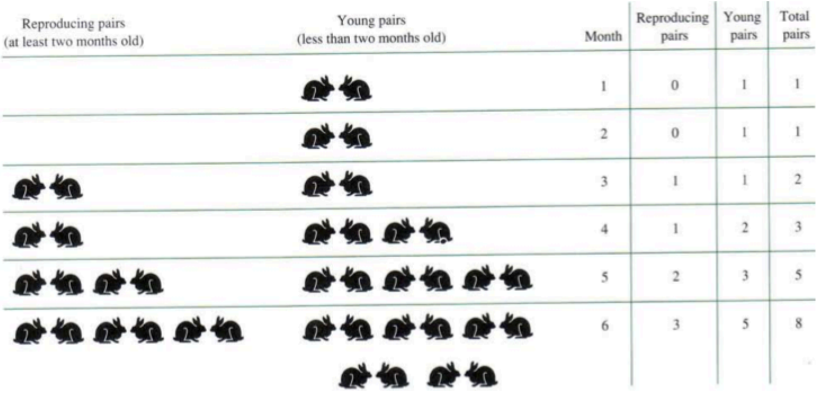
$$a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$$
$$a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$$
$$\ldots$$

Putem găsi o formulă generală de calcul direct a lui a_n în funcție de n?

- $a_0 = 3, a_1 = 5, a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ pentru $n \geq 2$.
  Toate elementele lui $\{a_n\}$ pot fi calculate recursiv:
  $$a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$$
  $$a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$$
  $$\ldots$$
  Putem găsi o formulă generală de calcul direct a lui a_n în funcție de n?
- $a_0 = 0, a_1 = 3, a_n = 2 \cdot a_{n-1} - a_{n-2}$ pentru $n \geq 2$. Toate elementele lui $\{a_n\}$ pot fi calculate recursiv:
  $$a_2 = 2\,a_1 - a_0 = 6$$
  $$a_3 = 2\,a_2 - a_1 = 9$$
  $$\ldots$$
  Se poate demonstra prin inducție că $a_n = 3\,n$ pentru toți $n \geq 0$.

Exemplu: iepuri și numere Fibonacci

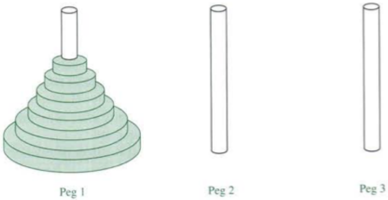
O pereche tânără de iepuri începe să se înmulțească la vârsta de 2 luni, dând naștere lunar la o pereche de iepuri. Se presupune că o pereche de iepuri cu vârsta de 0 luni este adusă pe o insulă. Să se determine o relație de recurență pentru numărul de iepuri de pe insulă după n luni.



Reproducing pairs (at least two months old)	Young pairs (less than two months old)	Month	Reproducing pairs	Young pairs	Total pairs
		1	0	1	1
		2	0	1	1
		3	1	1	2
		4	1	2	3
		5	2	3	5
		6	3	5	8

$f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ if $n \geq 2$.

Exemplu: Turnul din Hanoi



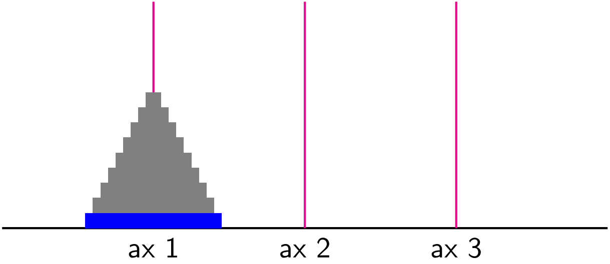
- Să se mute toate discurile pe axul 2 în ordinea mărimii lor, cu discul cel mai mare așezat dedesubt.
- Discurile pot fi mutate unul câte unul de pe un ax pe altul cu condiția ca niciodată să nu se pună un disc peste unul mai mic.

  Întrebare: Care este numărul minim de mutări necesare pentru a rezolva problema turnului din Hanoi cu *n* discuri?

Exemplu: Turnul din Hanoi (continuare)

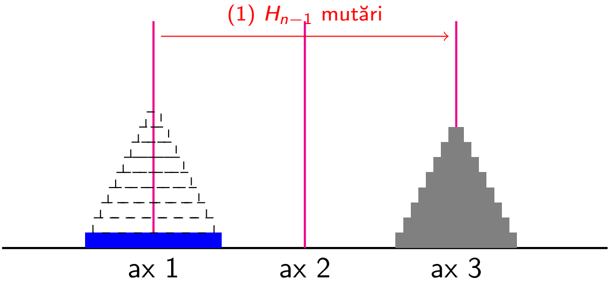
Răspuns: Fie H_n nr. minim de mutări necesare pentru a pune n discuri în ordinea mărimii, de pe un ax pe altul.

- Pentru a pune cel mai mare disc la baza axului 2, va trebui mai întâi să mutăm $n-1$ discuri mai mici de pe axul 1 pe axul 3. Nr. minim de mutări pentru a face acest lucru este H_{n-1}.
- După ce am pus cel mai mare disc de pe axul 1 pe axul 2, putem efectua H_{n-1} mutări pentru a muta discurile de pe axul 3 pe axul 2.



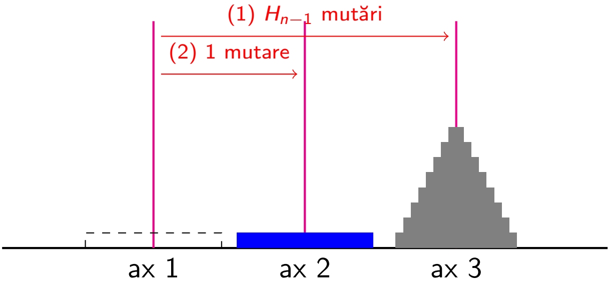
Răspuns: Fie H_n nr. minim de mutări necesare pentru a pune n discuri în ordinea mărimii, de pe un ax pe altul.

- Pentru a pune cel mai mare disc la baza axului 2, va trebui mai întâi să mutăm $n-1$ discuri mai mici de pe axul 1 pe axul 3. Nr. minim de mutări pentru a face acest lucru este H_{n-1}.
- După ce am pus cel mai mare disc de pe axul 1 pe axul 2, putem efectua H_{n-1} mutări pentru a muta discurile de pe axul 3 pe axul 2.



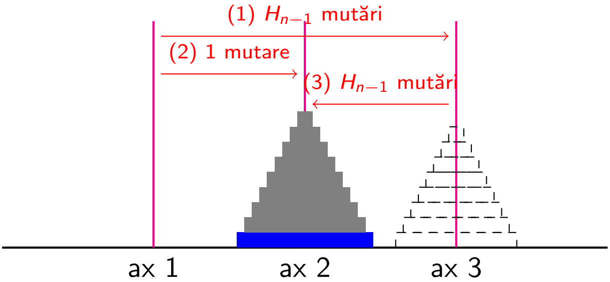
Răspuns: Fie H_n nr. minim de mutări necesare pentru a pune n discuri în ordinea mărimii, de pe un ax pe altul.

- Pentru a pune cel mai mare disc la baza axului 2, va trebui mai întâi să mutăm $n-1$ discuri mai mici de pe axul 1 pe axul 3. Nr. minim de mutări pentru a face acest lucru este H_{n-1}.
- După ce am pus cel mai mare disc de pe axul 1 pe axul 2, putem efectua H_{n-1} mutări pentru a muta discurile de pe axul 3 pe axul 2.



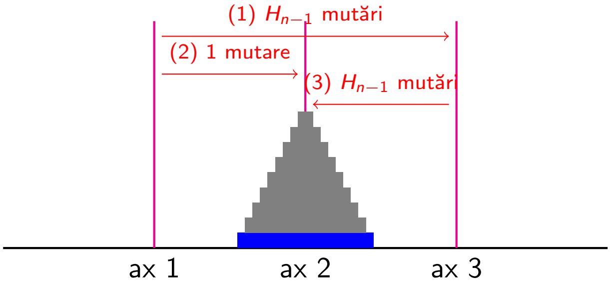
Răspuns: Fie H_n nr. minim de mutări necesare pentru a pune n discuri în ordinea mărimii, de pe un ax pe altul.

- Pentru a pune cel mai mare disc la baza axului 2, va trebui mai întâi să mutăm $n-1$ discuri mai mici de pe axul 1 pe axul 3. Nr. minim de mutări pentru a face acest lucru este H_{n-1}.
- După ce am pus cel mai mare disc de pe axul 1 pe axul 2, putem efectua H_{n-1} mutări pentru a muta discurile de pe axul 3 pe axul 2.



Răspuns: Fie H_n nr. minim de mutări necesare pentru a pune n discuri în ordinea mărimii, de pe un ax pe altul.

- Pentru a pune cel mai mare disc la baza axului 2, va trebui mai întâi să mutăm $n-1$ discuri mai mici de pe axul 1 pe axul 3. Nr. minim de mutări pentru a face acest lucru este H_{n-1}.
- După ce am pus cel mai mare disc de pe axul 1 pe axul 2, putem efectua H_{n-1} mutări pentru a muta discurile de pe axul 3 pe axul 2.



$\Rightarrow H_n = H_{n-1} + 1 + H_{n-1} = 2H_{n-1} + 1$. Se observă că $H_1 = 1$.

Exemplu: Turnul din Hanoi (continuat)

- Putem aplica o metodă iterativă de aflare a unei formule de calcul pentru H_n direct din n atunci când $n > 1$:

$$\begin{aligned}
H_n &= 2\,H_{n-1} + 1 \\
&= 2(2\,H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2\,H_{n-2} + 2 + 1 \\
&= 2^2(2\,H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3\,H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\
&\vdots \\
&= 2^{n-1} H_1 + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1 \\
&= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1 \\
&= \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1
\end{aligned}$$

- Putem aplica o metodă iterativă de aflare a unei formule de calcul pentru H_n direct din n atunci când $n > 1$:

$$\begin{aligned}
H_n &= 2\,H_{n-1} + 1 \\
&= 2(2\,H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2\,H_{n-2} + 2 + 1 \\
&= 2^2(2\,H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3\,H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\
&\vdots \\
&= 2^{n-1}H_1 + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1 \\
&= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1 \\
&= \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1
\end{aligned}$$

Legenda turnului din Hanoi:

Exemplu: Turnul din Hanoi (continuat)

- Putem aplica o metodă iterativă de aflare a unei formule de calcul pentru H_n direct din n atunci când $n > 1$:

$$\begin{aligned}
H_n &= 2\,H_{n-1} + 1 \\
&= 2(2\,H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2\,H_{n-2} + 2 + 1 \\
&= 2^2(2\,H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3\,H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\
&\vdots \\
&= 2^{n-1} H_1 + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1 \\
&= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1 \\
&= \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1
\end{aligned}$$

Legenda turnului din Hanoi:

- Sunt 64 discuri, iar mutarea unui disc durează 1 secundă

Exemplu: Turnul din Hanoi (continuat)

- Putem aplica o metodă iterativă de aflare a unei formule de calcul pentru H_n direct din n atunci când $n > 1$:

$$\begin{aligned} H_n &= 2\,H_{n-1} + 1 \\ &= 2(2\,H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2\,H_{n-2} + 2 + 1 \\ &= 2^2(2\,H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3\,H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\ &\vdots \\ &= 2^{n-1} H_1 + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1 \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1 \\ &= \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1 \end{aligned}$$

  Legenda turnului din Hanoi:
  - Sunt 64 discuri, iar mutarea unui disc durează 1 secundă
  - Timpul minim de mutare a întregului turn= $(2^{64} - 1)\,s = 18446744073709551615\,s \approx 500$ miliarde ani.

Exemplu: Șiruri speciale de biți

- Să se găsească o relație de recurență și condițiile inițiale pentru numărul de șiruri de biți de lungime n care nu au două zerouri consecutive. Câte astfel de șiruri de lungime 5 există?

A: Avem de numărat a două lucruri distincte:

1. Șirurile de n-biți fără 2 zerouri consec., care se termină cu 1:
2. Șirurile de n biți fără 2 zerouri consec. care se termină cu 0:

			Nr. șiruri de lungime n fără 00:
Se termină cu 1:	Orice șir de lungime $n-1$ fără 00	1	a_{n-1}
Se termină cu 0:	Orice șir de lungime $n-2$ fără 00	1 0	a_{n-2}

Total: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Șirurile cu lungimea 1 sunt 0 and 1 $\Rightarrow a_1 = 2$, iar șirurile cu lungimea 2 fără 00 sunt $01, 10, 11 \Rightarrow a_2 = 3$.

Exemplu: Șiruri speciale de biți (continuare)

Numărul a_n de șiruri de biți de lungime n fără 00 satisface relația de recurență

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 3, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ dacă } n \geq 2.$$

$\Rightarrow$ $a_3 = a_1 + a_2 = 2 + 3 = 5$

$\Rightarrow$ $a_4 = a_2 + a_3 = 3 + 5 = 8$

$\Rightarrow$ $a_5 = a_3 + a_4 = 5 + 8 = 13.$

Relații de recurență liniară

- O relație omogenă de recurență liniară de gradul k cu coeficienți constanți este o relație de forma

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k},$$

unde $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ și $c_k \neq 0$.

Dacă se cunosc cele k condiții inițiale

- $a_0 = C_0,\ a_1 = C_1,\ \ldots,\ a_{k-1} = C_{k-1},$

atunci se poate calcula recursiv a_n pentru toți $n \geq k$.

Exemplu (Relații de recurență liniară)

- $\{f_n\}$ unde $f_0 = f_1 = 1$, și $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ dacă $n > 1$.
- $\{P_n\}$ unde $P_0 = 1$, și $P_n = 1.11\, P_{n-1}$ dacă $n > 0$.

Exemplu (Relații de recurență neliniară)

$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1}^2 + a_{n-2}$ pentru toți $n > 1$.

Relații de recurență liniară

- Apar frecvent în procesul de modelare a problemelor.
- Se poate determina o formulă care calculează a_n direct din n.

Teorema 1

Se consideră relația de recurență

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k},\ \ a_0 = C_0, \ldots, a_{k-1} = C_{k-1}. \quad (1)$$

Se presupune că $r_1, \ldots, r_t$ sunt rădăcinile distincte ale ecuației $r^k - c_1 r^{k-1} - \ldots - c_k = 0$ cu multiplicitățile $m_1, \ldots, m_t$, unde $m_i \geq 1$ pentru $i = 1, 2, \ldots, t$ și $m_1 + m_2 + \ldots + m_t = k$. Atunci secvența $\{a_n\}$ este o soluție a relației de recurență (1) dacă și numai dacă

$$\begin{aligned} a_n =& (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} n + \ldots + \alpha_{1,m_1-1} n^{m_1-1}) r_1^n \\ &+ (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1} n + \ldots + \alpha_{2,m_2-1} n^{m_2-1}) r_2^n \\ &+ \ldots + (\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1} n + \ldots + \alpha_{t,m_t-1} n^{m_t-1}) r_t^n \end{aligned}$$

pentru $n \in \mathbb{N}$, unde $\alpha_{i,j}$ sunt constante pentru $1 \leq i \leq t$ și $0 \leq j < m_i$.

- Să se afle soluțiile relației de recurență

$$a_n = -3\,a_{n-1} - 3\,a_{n-2} - a_{n-3}$$

care satisface condițiile inițiale $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, și $a_2 = -1$.

- Să se afle soluțiile relației de recurență

$$a_n = -3\, a_{n-1} - 3\, a_{n-2} - a_{n-3}$$

care satisface condițiile inițiale $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, și $a_2 = -1$.

- RĂSPUNS. Ecuația caracteristică a relației de recurență este $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$, adică $(r+1)^3 = 0$, care are singura rădăcină $r = -1$ cu multiplicitatea 3.

- Să se afle soluțiile relației de recurență

$$a_n = -3\, a_{n-1} - 3\, a_{n-2} - a_{n-3}$$

care satisface condițiile inițiale $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, și $a_2 = -1$.
- Răspuns. Ecuația caracteristică a relației de recurență este $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$, adică $(r+1)^3 = 0$, care are singura rădăcină $r = -1$ cu multiplicitatea 3.
$\Rightarrow$ soluțiile relației de recurență sunt de forma

$$a_n = \alpha_{1,0}(-1)^n + \alpha_{1,1}\, n(-1)^n + \alpha_{1,2}\, n^2(-1)^n.$$

- Să se afle soluțiile relației de recurență
$$a_n = -3\,a_{n-1} - 3\,a_{n-2} - a_{n-3}$$
care satisface condițiile inițiale $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, și $a_2 = -1$.
- RĂSPUNS. Ecuația caracteristică a relației de recurență este $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$, adică $(r+1)^3 = 0$, care are singura rădăcină $r = -1$ cu multiplicitatea 3.
$\Rightarrow$ soluțiile relației de recurență sunt de forma
$$a_n = \alpha_{1,0}(-1)^n + \alpha_{1,1}n(-1)^n + \alpha_{1,2}n^2(-1)^n.$$
Mai avem de aflat constantele $\alpha_{1,0}, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}$, folosind informațiile despre condițiile inițiale:
$$\begin{cases} a_0 = 1 = \alpha_{1,0} \\ a_1 = -2 = -\alpha_{1,0} - \alpha_{1,1} - \alpha_{1,2} \\ a_2 = -1 = \alpha_{1,0} + 2\alpha_{1,1} + 4\alpha_{1,2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{1,0} = 1 \\ \alpha_{1,1} = 3 \\ \alpha_{1,2} = -2. \end{cases}$$

- Să se afle soluțiile relației de recurență

$$a_n = -3\, a_{n-1} - 3\, a_{n-2} - a_{n-3}$$

care satisface condițiile inițiale $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, și $a_2 = -1$.

- RĂSPUNS. Ecuația caracteristică a relației de recurență este $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$, adică $(r+1)^3 = 0$, care are singura rădăcină $r = -1$ cu multiplicitatea 3.

  $\Rightarrow$ soluțiile relației de recurență sunt de forma

$$a_n = \alpha_{1,0}(-1)^n + \alpha_{1,1}\, n(-1)^n + \alpha_{1,2} n^2(-1)^n.$$

  Mai avem de aflat constantele $\alpha_{1,0}, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}$, folosind informațiile despre condițiile inițiale:

$$\begin{cases} a_0 = 1 = \alpha_{1,0} \\ a_1 = -2 = -\alpha_{1,0} - \alpha_{1,1} - \alpha_{1,2} \\ a_2 = -1 = \alpha_{1,0} + 2\alpha_{1,1} + 4\alpha_{1,2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{1,0} = 1 \\ \alpha_{1,1} = 3 \\ \alpha_{1,2} = -2. \end{cases}$$

  $\Rightarrow a_n = (1 + 3\, n - 2\, n^2)(-1)^n.$

Recurențe liniare neomogene cu coeficienți constanți

Definiție

O relație de recurență liniară neomogenă cu coeficienți constanți este

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k} + F(n),$$

unde $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ și $F(n)$ este o funcție diferită de funcția constantă 0, care depinde doar de n. Recurența liniară

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k}$$

se numește relația omogenă asociată.

Definiție

O relație de recurență liniară neomogenă cu coeficienți constanți este

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k} + F(n),$$

unde $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ și $F(n)$ este o funcție diferită de funcția constantă 0, care depinde doar de n. Recurența liniară

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k}$$

se numește relația omogenă asociată.

Exemple

Recurențe liniare neomogene cu coeficienți constanți

Definiție

O relație de recurență liniară neomogenă cu coeficienți constanți este

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k} + F(n),$$

unde $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ și $F(n)$ este o funcție diferită de funcția constantă 0, care depinde doar de n. Recurența liniară

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k}$$

se numește relația omogenă asociată.

EXEMPLE

1. $a_n = a_{n-1} + 2^n$ este o recurență neomogenă.
   Relația omogenă asociată este $a_n = a_{n-1}$.

Definiție

O relație de recurență liniară neomogenă cu coeficienți constanți este

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k} + F(n),$$

unde $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ și $F(n)$ este o funcție diferită de funcția constantă 0, care depinde doar de n. Recurența liniară

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k}$$

se numește relația omogenă asociată.

Exemple

1. $a_n = a_{n-1} + 2^n$ este o recurență neomogenă.
   Relația omogenă asociată este $a_n = a_{n-1}$.
2. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n^2 + n + 1$ este o recurență neomogenă.
   Relația omogenă asociată este $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Recurențe liniare neomogene cu coeficienți constanți

Teorema 2

Dacă $\{a_n^{(p)}\}$ este o soluție particulară a recurenței

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k} + F(n),$$

atunci orice altă soluție este de forma $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$, unde $\{a_n^{(h)}\}$ unde $\{a_n^{(h)}\}$ este o soluție a recurenței omogene asociate

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k}.$$

Teorema 2

Dacă $\{a_n^{(p)}\}$ este o soluție particulară a recurenței

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k} + F(n),$$

atunci orice altă soluție este de forma $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$, unde $\{a_n^{(h)}\}$ unde $\{a_n^{(h)}\}$ este o soluție a recurenței omogene asociate

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k}.$$

OBSERVAŢII:

Teorema 2

Dacă $\{a_n^{(p)}\}$ este o soluție particulară a recurenței

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k} + F(n),$$

atunci orice altă soluție este de forma $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$, unde $\{a_n^{(h)}\}$ unde $\{a_n^{(h)}\}$ este o soluție a recurenței omogene asociate

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k}.$$

OBSERVAȚII:

- Știm din Teorema 1 cum să calculăm $\{a_n^{(h)}\}$.

Teorema 2

Dacă $\{a_n^{(p)}\}$ este o soluție particulară a recurenței

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k} + F(n),$$

atunci orice altă soluție este de forma $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$, unde $\{a_n^{(h)}\}$ unde $\{a_n^{(h)}\}$ este o soluție a recurenței omogene asociate

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k}.$$

OBSERVAŢII:

- Știm din Teorema 1 cum să calculăm $\{a_n^{(h)}\}$.
- Cum putem afla o soluție particulară $\{a_n^{(p)}\}$?

Teorema 3

Dacă $F(n) = (b_t\, n^t + b_{t-1}\, n^{t-1} + \ldots + b_1\, t + b_0)\, s^n$ cu $b_0, \ldots, b_{t-1}, b_t, s \in \mathbb{R}$ atunci

1. Dacă s nu este o rădăcină a ecuației caracteristice a recurenței liniare omogene asociate, atunci există o soluție particulară de forma
$$(p_t\, n^t + p_{t-1}\, n^{t-1} + \ldots + p_1\, n + p_0)\, s^n.$$
2. Dacă s este o rădăcină cu multiplicitatea m a recurenței liniare omogene asociate, atunci există o soluție particulară de forma
$$n^m(p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \ldots + p_1\, n + p_0)\, s^n.$$

Să se afle soluția generală a recurenței liniare neomogene

$$a_n = 6\,a_{n-1} - 9\,a_{n-2} + F(n)$$

dacă $F(n) = n^2 2^n$

Să se afle soluția generală a recurenței liniare neomogene

$$a_n = 6\,a_{n-1} - 9\,a_{n-2} + F(n)$$

dacă $F(n) = n^2 2^n$

RĂSPUNS: Recurența liniară omogenă asociată este $a_n = 6\,a_{n-1} - 9\,a_{n-2}$. Ecuația ei caracteristică este $r^2 - 6\,r + 9 = 0$, care are o singură rădăcină, $r = 3$, cu multiplicitatea 2.

Să se afle soluția generală a recurenței liniare neomogene

$$a_n = 6\,a_{n-1} - 9\,a_{n-2} + F(n)$$

dacă $F(n) = n^2 2^n$

RĂSPUNS: Recurența liniară omogenă asociată este $a_n = 6\,a_{n-1} - 9\,a_{n-2}$. Ecuația ei caracteristică este $r^2 - 6\,r + 9 = 0$, care are o singură rădăcină, $r = 3$, cu multiplicitatea 2.
$\Rightarrow$ soluția părții omogene este $a_n^{(h)} = (b_1\,n + b_0)\,3^n$.

Să se afle soluția generală a recurenței liniare neomogene

$$a_n = 6\, a_{n-1} - 9\, a_{n-2} + F(n)$$

dacă $F(n) = n^2 2^n$

RĂSPUNS: Recurența liniară omogenă asociată este $a_n = 6\, a_{n-1} - 9\, a_{n-2}$. Ecuația ei caracteristică este $r^2 - 6\, r + 9 = 0$, care are o singură rădăcină, $r = 3$, cu multiplicitatea 2.
$\Rightarrow$ soluția părții omogene este $a_n^{(h)} = (b_1\, n + b_0)\, 3^n$.
$F(n)$ este de forma $Q(n)\, s^n$ unde $Q(n)$ este un polinom de gradul $t = 2$, și $s = 2$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice a recurenței omogene asociate $\Rightarrow$ conform Teoremei 3, o soluție particulară este $a_n^{(p)} = (p_2\, n^2 + p_1\, n + p_0)\, 2^n$.

Să se afle soluția generală a recurenței liniare neomogene

$$a_n = 6\,a_{n-1} - 9\,a_{n-2} + F(n)$$

dacă $F(n) = n^2 2^n$

RĂSPUNS: Recurența liniară omogenă asociată este $a_n = 6\,a_{n-1} - 9\,a_{n-2}$. Ecuația ei caracteristică este $r^2 - 6\,r + 9 = 0$, care are o singură rădăcină, $r = 3$, cu multiplicitatea 2.
$\Rightarrow$ soluția părții omogene este $a_n^{(h)} = (b_1\,n + b_0)\,3^n$.
$F(n)$ este de forma $Q(n)\,s^n$ unde $Q(n)$ este un polinom de gradul $t = 2$, și $s = 2$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice a recurenței omogene asociate $\Rightarrow$ conform Teoremei 3, o soluție particulară este $a_n^{(p)} = (p_2\,n^2 + p_1\,n + p_0)\,2^n$.
Din $a_n^{(p)} = 6\,a_{n-1}^{(p)} - 9\,a_{n-2}^{(p)} + n^2 2^n$ obținem
$2^{n-2}((p_2 - 4)n^2 + (p_1 - 12\,p_2)n + p_0 - 6\,p_1 + 24\,p_2) = 0 \Rightarrow p_0 = 192, p_1 = 48, p_2 = 4$

Să se afle soluția generală a recurenței liniare neomogene

$$a_n = 6\,a_{n-1} - 9\,a_{n-2} + F(n)$$

dacă $F(n) = n^2 2^n$

RĂSPUNS: Recurența liniară omogenă asociată este $a_n = 6\,a_{n-1} - 9\,a_{n-2}$. Ecuația ei caracteristică este $r^2 - 6\,r + 9 = 0$, care are o singură rădăcină, $r = 3$, cu multiplicitatea 2.
$\Rightarrow$ soluția părții omogene este $a_n^{(h)} = (b_1\,n + b_0)\,3^n$.
$F(n)$ este de forma $Q(n)\,s^n$ unde $Q(n)$ este un polinom de gradul $t = 2$, și $s = 2$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice a recurenței omogene asociate $\Rightarrow$ conform Teoremei 3, o soluție particulară este $a_n^{(p)} = (p_2\,n^2 + p_1\,n + p_0)\,2^n$.
Din $a_n^{(p)} = 6\,a_{n-1}^{(p)} - 9\,a_{n-2}^{(p)} + n^2 2^n$ obținem
$2^{n-2}((p_2 - 4)n^2 + (p_1 - 12\,p_2)n + p_0 - 6\,p_1 + 24\,p_2) = 0 \Rightarrow p_0 = 192, p_1 = 48, p_2 = 4$
$\Rightarrow a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = (4\,n^2 + 48\,n + 192)\,2^n + (b_1\,n + b_0)\,3^n$.

Să se afle soluția generală a recurenței liniare neomogene $a_n = a_{n-1} + n$ care satisface condiția inițială $a_1 = 1$.

Să se afle soluția generală a recurenței liniare neomogene $a_n = a_{n-1} + n$ care satisface condiția inițială $a_1 = 1$.

RĂSPUNS: Recurența liniară omogenă asociată lui a_n este $a_n = a_{n-1}$. Ecuația caracteristică este $r - 1 = 0$, deci soluția ei este de forma $a_n^{(h)} = c \cdot 1^n = c$ unde $c \in \mathbb{R}$.

Să se afle soluția generală a recurenței liniare neomogene $a_n = a_{n-1} + n$ care satisface condiția inițială $a_1 = 1$.

RĂSPUNS: Recurența liniară omogenă asociată lui a_n este $a_n = a_{n-1}$. Ecuația caracteristică este $r - 1 = 0$, deci soluția ei este de forma $a_n^{(h)} = c \cdot 1^n = c$ unde $c \in \mathbb{R}$.
Partea neliniară este $F(n) = Q(n)\, s^n$ unde $Q(n) = n$ și $s = 1$ este rădăcină cu multiplicitatea 1 a ecuației caracteristice a recurenței liniare omogene asociate $\Rightarrow$ conform Teoremei 3, există o soluție particulară de forma $a_n^{(p)} = n^s(p_1\, n + p_0)\, 1^n = p_1 n^2 + p_0\, n$.

Să se afle soluția generală a recurenței liniare neomogene $a_n = a_{n-1} + n$ care satisface condiția inițială $a_1 = 1$.

RĂSPUNS: Recurența liniară omogenă asociată lui a_n este $a_n = a_{n-1}$. Ecuația caracteristică este $r - 1 = 0$, deci soluția ei este de forma $a_n^{(h)} = c \cdot 1^n = c$ unde $c \in \mathbb{R}$.
Partea neliniară este $F(n) = Q(n)\, s^n$ unde $Q(n) = n$ și $s = 1$ este rădăcină cu multiplicitatea 1 a ecuației caracteristice a recurenței liniare omogene asociate $\Rightarrow$ conform Teoremei 3, există o soluție particulară de forma $a_n^{(p)} = n^s(p_1\, n + p_0)\, 1^n = p_1 n^2 + p_0 n$.
Pentru a afla p_0 and p_1, ținem cont de faptul că $a_n^{(p)} = a_{n-1}^{(p)} + n$, care implică $n(2\, p_1 - 1) + (p_0 - p_1) = 0$, deci $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$. Rezultă că $a_n^{(p)} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

Să se afle soluția generală a recurenței liniare neomogene $a_n = a_{n-1} + n$ care satisface condiția inițială $a_1 = 1$.

RĂSPUNS: Recurența liniară omogenă asociată lui a_n este $a_n = a_{n-1}$.
Ecuația caracteristică este $r - 1 = 0$, deci soluția ei este de forma $a_n^{(h)} = c \cdot 1^n = c$ unde $c \in \mathbb{R}$.
Partea neliniară este $F(n) = Q(n)\, s^n$ unde $Q(n) = n$ și $s = 1$ este rădăcină cu multiplicitatea 1 a ecuației caracteristice a recurenței liniare omogene asociate $\Rightarrow$ conform Teoremei 3, există o soluție particulară de forma $a_n^{(p)} = n^s(p_1\, n + p_0)\, 1^n = p_1 n^2 + p_0 n$.
Pentru a afla p_0 and p_1, ținem cont de faptul că $a_n^{(p)} = a_{n-1}^{(p)} + n$, care implică $n(2\,p_1 - 1) + (p_0 - p_1) = 0$, deci $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$. Rezultă că $a_n^{(p)} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.
Din Teorema 2, rezultă că $a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = c + \frac{n(n+1)}{2}$. Știm și că $1 = a_1 = c + \frac{1 \cdot 2}{2} = c + 1$, deci $c = 0$. Prin urmare $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Bibliografie

Capitolul 7 din

- Kenneth H. Rosen. *Discrete Mathematics and Its Applications.* Sixth Edition. McGraw-Hill, 2007.