Teoria Grafurilor şi Combinatorică

Răspunsuri la examenul parţial (C)

4 decembrie 2015

1. Numărul căutat este $N_3 - N_{15}$ unde N_3 este numărul numerelor divizibile cu 3, iar N_{15} este numărul numerelor divizibile cu 3 şi cu 5, adică cu 15. Deoarece

$$\left.\begin{array}{r} N_3 = \lfloor 547/3 \rfloor - \lceil 12/3 \rceil + 1 = 182 - 4 + 1 = 179 \\ N_{15} = \lfloor 547/15 \rfloor - \lceil 12/15 \rceil + 1 = 36 - 1 + 1 = 36 \end{array}\right\} \Rightarrow N_3 - N_{15} = \mathbf{143}.$$

2. (a) Permutarea $\langle 2,1,3,4,5\rangle$ are rangul **24**.

   (b) $599_4 = 4344 \Rightarrow$ 4-permutarea cu repetiţie a lui $\{1,2,3,4,5\}$ care are rangul 599 este $\langle \mathbf{5},\mathbf{4},\mathbf{5},\mathbf{5}\rangle$.

   (c) $\langle \mathbf{4},\mathbf{3},\mathbf{7},\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{5},\mathbf{6}\rangle$.

3. Fie M mulţimea de şiruri de lungime 4, cu cifre din mulţimea $\{1,2,3,4,5\}$.

   (a) Aplicăm regula produsului:

   - Mai întâi calculăm în câte feluri putem alege 2 din 4 poziţii pentru apariţiile cifrei 1 $\Rightarrow C(4,2)$ posibilităţi.
   - Apoi calculăm în câte feluri putem alege 2 din cele 2 poziţii rămase pentru apariţiile cifrei 5 $\Rightarrow C(2,2) = 1$ posibilitate.

   $\Rightarrow \mathbf{C(4,2)}$ astfel de şiruri.

   (b) $\mathbf{4^4 + C(4,1)4^3 + C(4,2)\cdot 4^2 + C(4,3)\cdot 4}$.

   (c) Aplicăm regula produsului:

   - Avem 2 posibilităţi pentru prima cifră
   - Avem 3 posibilităţi pentru ultima cifră
   - Avem câte 5 posibilităţi pentru cifrele de la poziţiile 2 şi 3

   $\Rightarrow 2\cdot 5\cdot 5\cdot 3 = \mathbf{150}$ astfel de şiruri.

4. Ecuaţia caracteristică este $r^2 - 2r + 1 = 0$, cu rădăcina dublă $r = 1$. Rezultă că $a_n = (a\cdot n + b)\cdot 1^n = a\cdot n + b$ pentru toţi $n \geq 0$. Din condiţiile iniţiale $a_0 = 3 = b$ şi $a_1 = 5 = a + b$ rezultă că $a = 2$ şi $b = 3$, deci $\mathbf{a_n = 2\cdot n + 3}$.

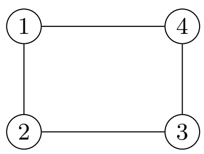
5. Fie a_n numărul de şiruri de lungime n, formate din cifrele 1,2,3 şi 4, care nu au două cifre consecutive identice.

   (a) $a_1 = 4$ deoarece nici unul din şirurile 1, 2, 3 sau 4 nu are 2 cifre consecutive identice. Dacă $n > 1$ atunci un astfel de şir este de forma $s = d_1 d_2 \dots d_n$. Aplicăm regula produsului pentru a număra câte astfel de şiruri putem construi, pornind de la poziţia 1 până la poziţia n:

   - d_1 poate fi orice număr de la 1 la 4 $\Rightarrow$ 4 posibilităţi.
   - d_i $(2 \leq i \leq n)$ poate fi orice număr de la 1 la 4, diferit de $d_{i-1} \Rightarrow$ 3 posibilităţi.

   Deci numărul de astfel de şiruri s este $\mathbf{a_n = 4 \cdot 3^{n-1}}$.

   (b) $\mathbf{a_5 = 4 \cdot 3^4 = 324}$.

6. 

   (a) $G = \{(1)(2)(3)(4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3), (1,2)(3,4)\}$.

   (b) $\frac{1}{4} \cdot (4^4 + 3 \cdot 4^2) = \mathbf{28}$.

7. (a) **Numărul de submulţimi cu k elemente al unei mulţimi cu n elemente.**

   (b) **(b1)**.

Punctaj:
Start: 1pt
1: 1pt
2: (a) 0.75pt; (b) 0.75pt; (c) 0.5pt
3: $0.5 \times 3 = 1.5$pt
4: 1pt
5: $0.75 \times 2 = 1.5$pt
6: $0.5 \times 2 = 1$pt
7: $0.5 \times 2 = 1$pt
Total: 10pt