Generarea și ordonarea permutărilor.
Principiul porumbeilor.
Principiul incluziunii si excluziunii

Recapitulare din cursul trecut

Presupunem că A este o mulțime cu n elemente.

Recapitulare din cursul trecut

Presupunem că A este o mulțime cu n elemente.

- Un aranjament de n luate câte r (sau r-permutare) a lui A este o secvență ordonată de elemente din A.

Recapitulare din cursul trecut

Presupunem că A este o mulțime cu n elemente.

- Un aranjament de n luate câte r (sau r-permutare) a lui A este o secvență ordonată de elemente din A.
  - O permutare a lui A este o secvență ordonată a tuturor elementelor din A.

Recapitulare din cursul trecut

Presupunem că A este o mulțime cu n elemente.

- Un aranjament de n luate câte r (sau r-permutare) a lui A este o secvență ordonată de elemente din A.
  - O permutare a lui A este o secvență ordonată a tuturor elementelor din A.
- O combinare de n luate câte r a lui A este o submulțime cu r elemente din A.

Recapitulare din cursul trecut

Presupunem că A este o mulțime cu n elemente.

- Un aranjament de n luate câte r (sau r-permutare) a lui A este o secvență ordonată de elemente din A.
  - O permutare a lui A este o secvență ordonată a tuturor elementelor din A.
- O combinare de n luate câte r a lui A este o submulțime cu r elemente din A.

Exemplu ($A = \{a_1, a_2, a_3\}$)

- 2-permutările lui A sunt (ordinea contează!):
- 2-combinările lui A sunt (ordinea nu contează!):
- Permutările lui A sunt:

Recapitulare din cursul trecut

Presupunem că A este o mulțime cu n elemente.

- Un aranjament de n luate câte r (sau r-permutare) a lui A este o secvență ordonată de elemente din A.
  - O permutare a lui A este o secvență ordonată a tuturor elementelor din A.
- O combinare de n luate câte r a lui A este o submulțime cu r elemente din A.

Exemplu ($A = \{a_1, a_2, a_3\}$)

- 2-permutările lui A sunt (ordinea contează!): $\langle a_1, a_2\rangle, \langle a_2, a_1\rangle, \langle a_1, a_3\rangle, \langle a_3, a_1\rangle, \langle a_2, a_3\rangle, \langle a_3, a_1\rangle$
- 2-combinările lui A sunt (ordinea nu contează!):
- Permutările lui A sunt:

Recapitulare din cursul trecut

Presupunem că A este o mulțime cu n elemente.

- Un aranjament de n luate câte r (sau r-permutare) a lui A este o secvență ordonată de elemente din A.
  - O permutare a lui A este o secvență ordonată a tuturor elementelor din A.
- O combinare de n luate câte r a lui A este o submulțime cu r elemente din A.

Exemplu ($A = \{a_1, a_2, a_3\}$)

- 2-permutările lui A sunt (ordinea contează!): $\langle a_1, a_2\rangle, \langle a_2, a_1\rangle, \langle a_1, a_3\rangle, \langle a_3, a_1\rangle, \langle a_2, a_3\rangle, \langle a_3, a_1\rangle$
- 2-combinările lui A sunt (ordinea nu contează!): $\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\}$
- Permutările lui A sunt:

Recapitulare din cursul trecut

Presupunem că A este o mulțime cu n elemente.

- Un aranjament de n luate câte r (sau r-permutare) a lui A este o secvență ordonată de elemente din A.
  - O permutare a lui A este o secvență ordonată a tuturor elementelor din A.
- O combinare de n luate câte r a lui A este o submulțime cu r elemente din A.

Exemplu ($A = \{a_1, a_2, a_3\}$)

- 2-permutările lui A sunt (ordinea contează!):
  $\langle a_1, a_2\rangle, \langle a_2, a_1\rangle, \langle a_1, a_3\rangle, \langle a_3, a_1\rangle, \langle a_2, a_3\rangle, \langle a_3, a_1\rangle$
- 2-combinările lui A sunt (ordinea nu contează!):
  $\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\}$
- Permutările lui A sunt:
  $\langle a_1, a_2, a_3\rangle$, $\langle a_1, a_3, a_2\rangle$, $\langle a_2, a_1, a_3\rangle$, $\langle a_2, a_3, a_1\rangle$,
  $\langle a_3, a_1, a_2\rangle$, $\langle a_3, a_2, a_1\rangle$

În prima parte a acestui curs vom învăța:

- Cum să ordonăm permutările încât să putem vorbi despre prima permutare, a doua, etc.
- Cum să generăm permutarea care urmează după o permutare dată
- Cum să generăm direct a k-a permutare
- Cum să determinăm a câta este o permutare dată

Presupunem că A este o mulțime finită cu n elemente.

1. Mai întâi ordonăm elementele mulțimii A

   $\Rightarrow$ $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ unde
   $a_1 =$ primul element
   $\ldots$
   $a_n =$ al n-lea element.

   $\Rightarrow$ A devine o mulțime ordonată (un alfabet) în care
   $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

2. r-permutările sunt cuvinte $\langle b_1, ..., b_r\rangle$ de lungime r pe care le ordonăm ca și cuvintele din dicționar, de exemplu:

   $$\langle a_1, a_2\rangle < \langle a_1, a_3\rangle < \langle a_2, a_1\rangle < \ldots$$

   Această ordonare a r-permutărilor se numește ordonare lexicografică:

   $\langle b_1, \ldots, b_r\rangle < \langle c_1, \ldots, c_r\rangle$ dacă există o poziție k astfel încât $b_i = c_i$ pentru $1 \leq i < k$, și $b_k < c_k$.

Fie $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ o mulțime ordonată cu $a_1 < \ldots < a_n$ și $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

1. r-permutările lui A sunt cuvinte de forma $\langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_r} \rangle$ cu $i_1, \ldots, i_r \in N$.
2. $\langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_r} \rangle$ este o r-permutare a lui A dacă și numai dacă $(i_1, \ldots, i_r)$ este o r-permutare a lui N.
3. $\langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_r} \rangle < \langle a_{j_1}, \ldots, a_{j_r} \rangle$ dacă și numai dacă $\langle i_1, \ldots, i_r \rangle < \langle j_1, \ldots, j_r \rangle$.

$\Rightarrow$ este suficient să știm cum să ordonăm și să enumerăm r-permutări de numere din mulțimea N.

De acum încolo vom considera doar r-permutări ale mulțimii ordonate $A = \{1, \ldots, n\}$.

Rangul unei r-permutări

Rangul unei r-permutări este poziția la care apare r-permutarea în ordine lexicografică, pornind de la poziția 0.

Exemplu ($A = \{1, 2, 3\}$)

2-permutare	rang	permutare	rang
$\langle 1, 2\rangle$	0	$\langle 1, 2, 3\rangle$	0
$\langle 1, 3\rangle$	1	$\langle 1, 3, 2\rangle$	1
$\langle 2, 1\rangle$	2	$\langle 2, 1, 3\rangle$	2
$\langle 2, 3\rangle$	3	$\langle 2, 3, 1\rangle$	3
$\langle 3, 1\rangle$	4	$\langle 3, 1, 2\rangle$	4
$\langle 3, 2\rangle$	5	$\langle 3, 2, 1\rangle$	5

Enumerarea permutărilor în ordine lexicografică

Problemă

Cum putem calcula permutarea lui $N = \{1, \ldots, n\}$ care urmează după permutarea $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle$ în ordine lexicografică?

Exemplu ($N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$)

permutare	permutare următoare
$\langle 5, 1, 3, 2, 4 \rangle$	
$\langle 5, 2, 4, 3, 1 \rangle$	
$\langle 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$	

Enumerarea permutărilor în ordine lexicografică

Problemă

Cum putem calcula permutarea lui $N = \{1, \ldots, n\}$ care urmează după permutarea $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle$ în ordine lexicografică?

Exemplu ($N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$)

permutare	permutare următoare
$\langle 5, 1, 3, 2, 4 \rangle$	$\langle 5, 1, 3, 4, 2 \rangle$
$\langle 5, 2, 4, 3, 1 \rangle$	
$\langle 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$	

Enumerarea permutărilor în ordine lexicografică

Problemă

Cum putem calcula permutarea lui $N = \{1, \ldots, n\}$ care urmează după permutarea $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle$ în ordine lexicografică?

Exemplu ($N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$)

permutare	permutare următoare
$\langle 5, 1, 3, 2, 4 \rangle$	$\langle 5, 1, 3, 4, 2 \rangle$
$\langle 5, 2, 4, 3, 1 \rangle$	$\langle 5, 3, 1, 2, 4 \rangle$
$\langle 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$	

Enumerarea permutărilor în ordine lexicografică

Problemă

Cum putem calcula permutarea lui $N = \{1, \ldots, n\}$ care urmează după permutarea $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle$ în ordine lexicografică?

Exemplu ($N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$)

permutare	permutare următoare
$\langle 5, 1, 3, 2, 4 \rangle$	$\langle 5, 1, 3, 4, 2 \rangle$
$\langle 5, 2, 4, 3, 1 \rangle$	$\langle 5, 3, 1, 2, 4 \rangle$
$\langle 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$	nu există

Enumerarea permutărilor în ordine lexicografică

Problemă

Cum putem calcula permutarea lui $N = \{1, \ldots, n\}$ care urmează după permutarea $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle$ în ordine lexicografică?

Exemplu ($N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$)

permutare	permutare următoare
$\langle 5, 1, 3, 2, 4 \rangle$	$\langle 5, 1, 3, 4, 2 \rangle$
$\langle 5, 2, 4, 3, 1 \rangle$	$\langle 5, 3, 1, 2, 4 \rangle$
$\langle 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$	nu există

Permutarea care urmează după $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle$ se poate calcula astfel:

Enumerarea permutărilor în ordine lexicografică

Problemă

Cum putem calcula permutarea lui $N = \{1, \ldots, n\}$ care urmează după permutarea $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle$ în ordine lexicografică?

Exemplu ($N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$)

permutare	permutare următoare
$\langle 5, 1, 3, 2, 4 \rangle$	$\langle 5, 1, 3, 4, 2 \rangle$
$\langle 5, 2, 4, 3, 1 \rangle$	$\langle 5, 3, 1, 2, 4 \rangle$
$\langle 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$	nu există

Permutarea care urmează după $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle$ se poate calcula astfel:

1. Determină i astfel încât $p_i > \ldots > p_n$ este cel mai lung sufix descrescător al permutării $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle$

Enumerarea permutărilor în ordine lexicografică

Problemă

Cum putem calcula permutarea lui $N = \{1, \ldots, n\}$ care urmează după permutarea $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle$ în ordine lexicografică?

Exemplu ($N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$)

permutare	permutare următoare
$\langle 5, 1, 3, 2, 4 \rangle$	$\langle 5, 1, 3, 4, 2 \rangle$
$\langle 5, 2, 4, 3, 1 \rangle$	$\langle 5, 3, 1, 2, 4 \rangle$
$\langle 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$	nu există

Permutarea care urmează după $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle$ se poate calcula astfel:

1. Determină i astfel încât $p_i > \ldots > p_n$ este cel mai lung sufix descrescător al permutării $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle$
2. Detemină $j \geq i$ astfel încât p_j este cel mai mic număr mai mare decât p_{i-1}.

Enumerarea permutărilor în ordine lexicografică

Problemă

Cum putem calcula permutarea lui $N = \{1, \ldots, n\}$ care urmează după permutarea $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle$ în ordine lexicografică?

Exemplu ($N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$)

permutare	permutare următoare
$\langle 5, 1, 3, 2, 4 \rangle$	$\langle 5, 1, 3, 4, 2 \rangle$
$\langle 5, 2, 4, 3, 1 \rangle$	$\langle 5, 3, 1, 2, 4 \rangle$
$\langle 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$	nu există

Permutarea care urmează după $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle$ se poate calcula astfel:

1. Determină i astfel încât $p_i > \ldots > p_n$ este cel mai lung sufix descrescător al permutării $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle$
2. Detemină $j \geq i$ astfel încât p_j este cel mai mic număr mai mare decât p_{i-1}.
3. Permută p_j cu p_{i-1}, și apoi inversează sufixul $p_i, \ldots, p_n$.

Exemplu

$\langle p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \rangle = \langle 5, 2, 4, 3, 1 \rangle$

Exemplu

$$\langle p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \rangle = \langle 5, 2, 4, 3, 1 \rangle$$

$$\langle 5, 2, 4, 3, 1 \rangle$$

$i = 3$

Exemplu

$$\langle p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\rangle = \langle 5, 2, 4, 3, 1\rangle$$

$$\langle 5, 2, {\color{red}4}, {\color{red}3}, {\color{red}1}\rangle$$

$i = 3$ $j = 4$

permută $p_{i-1} = 2$ cu $p_j = 3$

Exemplu

$$\langle p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \rangle = \langle 5, 2, 4, 3, 1 \rangle$$

$\langle 5, 3, 4, 2, 1 \rangle$ inversează $\langle p_i, \ldots, p_n \rangle = \langle 4, 2, 1 \rangle$

$i = 3$

Exemplu

$$\langle p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\rangle = \langle 5, 2, 4, 3, 1\rangle$$

$$\langle 5, 3, 1, 2, 4\rangle \quad = \text{permutarea următoare}$$

PermutareUrmatoare(p: int[0 .. $n-1$])
$i := n-2$;
while $(p[i] > p[i+1])$
    i--;
$j := n-1$;
while $(p[j] < p[i])$
    j--;
// permuta valorile lui $p[i]$ si $p[j]$
$tmp := p[i]$;
$p[i] := p[j]$;
$p[j] := tmp$;
// inverseaza (p[i+1], ..., p[n-1])
for $(k := 0;\ k < \lfloor (n-i-1)/2 \rfloor;\ k{+}{+})$
    // swap $p[i+1+k]$ with $p[n-1-k]$
    $tmp := p[i+1+k]$;
    $p[i+1+k] := p[n-1-k]$;
    $p[n-1-k] := tmp$;
return p;

Operații cu permutări

Probleme

1. Cum putem calcula direct și eficient rangul unei permutări $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle$ a lui $N = \{1, \ldots, n\}$ într-o enumerare lexicografică?
2. Cum putem calcula direct și eficient permutarea $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle$ lui $N = \{1, \ldots, n\}$ care are rangul k?
   Presupunem că $0 \leq k < n!$

Calculul rangului unei permutări

- Fie r rangul permutării $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle$.
  - ▷ Dacă $p_1 = 1$ atunci $0 \leq r < (n-1)!$
  - ▷ Dacă $p_1 = 2$ atunci $(n-1)! \leq r < 2 \cdot (n-1)!$

    ...
  - ▷ Dacă $p_1 = k$ atunci $(k-1) \cdot (n-1)! \leq r < k \cdot (n-1)!$

    ...
  - ▷ Dacă $p_1 = n$ atunci $(n-1) \cdot (n-1)! \leq r < n \cdot (n-1)! = n!$

Calcului rangului unei permutări

- Fie r rangul permutării $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle$.
  - ▷ Dacă $p_1 = 1$ atunci $0 \leq r < (n-1)!$
  - ▷ Dacă $p_1 = 2$ atunci $(n-1)! \leq r < 2 \cdot (n-1)!$

    ...
  - ▷ Dacă $p_1 = k$ atunci $(k-1) \cdot (n-1)! \leq r < k \cdot (n-1)!$

    ...
  - ▷ Dacă $p_1 = n$ atunci $(n-1) \cdot (n-1)! \leq r < n \cdot (n-1)! = n!$

$\Rightarrow$ în general, $(p_1 - 1) \cdot (n-1)! \leq r < p_1 \cdot (n-1)!$

Calculul rangului unei permutări

- Fie r rangul permutării $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle$.
  - ▷ Dacă $p_1 = 1$ atunci $0 \leq r < (n-1)!$
  - ▷ Dacă $p_1 = 2$ atunci $(n-1)! \leq r < 2 \cdot (n-1)!$

    ...
  - ▷ Dacă $p_1 = k$ atunci $(k-1) \cdot (n-1)! \leq r < k \cdot (n-1)!$

    ...
  - ▷ Dacă $p_1 = n$ atunci $(n-1) \cdot (n-1)! \leq r < n \cdot (n-1)! = n!$

$\Rightarrow$ în general, $(p_1 - 1) \cdot (n-1)! \leq r < p_1 \cdot (n-1)!$

$\Rightarrow$ rangul lui $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle =$ $(p_1 - 1) \cdot (n-1)! +$ rangul lui $\langle p_2, \ldots, p_n \rangle$ în enumerarea lexicografică a permutărilor lui $N - \{p_1\}$

Calculul rangului unei permutări

- Fie r rangul permutării $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle$.
  - ▷ Dacă $p_1 = 1$ atunci $0 \leq r < (n-1)!$
  - ▷ Dacă $p_1 = 2$ atunci $(n-1)! \leq r < 2 \cdot (n-1)!$

    ...
  - ▷ Dacă $p_1 = k$ atunci $(k-1) \cdot (n-1)! \leq r < k \cdot (n-1)!$

    ...
  - ▷ Dacă $p_1 = n$ atunci $(n-1) \cdot (n-1)! \leq r < n \cdot (n-1)! = n!$

$\Rightarrow$ în general, $(p_1 - 1) \cdot (n-1)! \leq r < p_1 \cdot (n-1)!$

$\Rightarrow$ rangul lui $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle =$ $(p_1 - 1) \cdot (n-1)! +$ rangul lui $\langle p_2, \ldots, p_n \rangle$ în enumerarea lexicografică a permutărilor lui $N - \{p_1\}$

$\Rightarrow$ r se poate calcula recursiv.

Calcul rangului unei permutări

Exemplu

- Permutarea $\langle p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \rangle = \langle 2, 3, 1, 5, 4 \rangle$ are rangul

  $r = (2-1) \cdot (5-1)! +$ rangul lui $\langle 3, 1, 5, 4 \rangle$ în ordonarea lexicografică a permutărilor lui $\{1, 3, 4, 5\}$.

  - rangul lui $\langle 3, 1, 5, 4 \rangle$ în ordonarea lexicografică a permutărilor lui $\{1, 3, 4, 5\}$ este același cu
    rangul lui $\langle 2, 1, 4, 3 \rangle$ în ordonarea lexicografică a permutărilor lui $\{1, 2, 3, 4\}$

    (am micșorat cu 1 toate elementele mai mari decât $p_1 = 2$)

- Procedând recursiv, vom obține că rangul lui $\langle 2, 1, 4, 3 \rangle$ este 7.

  $\Rightarrow$ rangul lui $\langle 2, 3, 1, 5, 4 \rangle$ este $24 + 7 = 31$.

```
Rang(p : int[0 .. n-1])
if n == 1
   return 0
else
   q : int[0 .. n-2];
   // ajusteaza p[1..n-1] sa fie permutare a lui {1, ..., n-1}
   // memorata in q[0 .. n-2]
   for(i := 1; i ≤ n-1; i++)
      if(p[i] < p[0])
            q[i-1] = p[i];
      else
            q[i-1] = p[i] - 1;
   return Rang[q] + (p[0] - 1) · (n - 1)!
```

Calculul unei permutări cu rang dat

Se dorește un algoritm care construiește direct permutarea $(p_1, \ldots, p_n)$ cu rangul r, când $0 \leq r < n!$.

- Am observat deja că dacă permutarea $(p_1, \ldots, p_n)$ are rangul r, atunci $(p_1 - 1) \cdot (n-1)! \leq r < p_1 \cdot (n-1)!$

$\Rightarrow$ $p_1 = \left\lfloor \dfrac{r}{(n-1)!} \right\rfloor + 1$

$\Rightarrow$ Dacă $(q_1, \ldots, q_{n-1})$ este permutarea cu rangul $r - (p_1 - 1) \cdot (n-1)!$ atunci

$$p_{i+1} = \begin{cases} q_i & \text{dacă } q_i < p_1, \\ q_i + 1 & \text{dacă } q_i \geq p_1. \end{cases}$$

pentru fiecare subsecvență.

- Generarea tuturor permutărilor se poate face și în altă ordine decât cea lexicografică.
- Uneori se dorește generarea foarte rapidă a tuturor permutărilor:
  - ▷ Acest lucru este posibil dacă fiecare permutare se obține foarte rapid din cea precedentă.
  - ▷ În 1963, Heap a descoperit un algoritm care generează permutarea următoare a unei permutări prin interschimbarea valorilor a 2 elemente.

Algoritmul lui Heap este cel mai rapid algoritm de generare a tuturor permutărilor.

Generarea rapidă a permutărilor cu algoritmul lui Heap
(Opțional)

for($i := 1; i \leq n; i{+}{+}$)
    $p[i] := i$
for($c := 1; c \leq n; c{+}{+}$)
    1. generează toate permutările lui $\langle p[1], \ldots, p[n-1]\rangle$ fără a-l modifica pe $p[n]$;
    (la sfârșitul pasului 1, p conține ultima permutare generată)
    2. permută $p[n]$ cu elementul $p[f(n,c)]$

$$\text{unde } f(n,c) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n \text{ este impar,} \\ c & \text{dacă } n \text{ este par.} \end{cases}$$

Generarea rapidă a permutărilor cu algoritmul lui Heap (Opțional)

for$(i := 1; i \leq n; i{+}{+})$
  $p[i] := i$
for$(c := 1; c \leq n; c{+}{+})$
  1. generează toate permutările lui $\langle p[1], \ldots, p[n-1] \rangle$ fără a-l modifica pe $p[n]$;
  (la sfârșitul pasului 1, p conține ultima permutare generată)
  2. permută $p[n]$ cu elementul $p[f(n, c)]$

$$\text{unde } f(n, c) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n \text{ este impar,} \\ c & \text{dacă } n \text{ este par.} \end{cases}$$

- ▷ Algoritmul lui Heap generează toate permutările lui $\{1, \ldots, n\}$ într-o ordine diferită de cea lexicografică.

Generarea rapidă a permutărilor cu algoritmul lui Heap (Opțional)

for$(i := 1; i \leq n; i{+}{+})$
  $p[i] := i$
for$(c := 1; c \leq n; c{+}{+})$
  1. generează toate permutările lui $\langle p[1], \ldots, p[n-1]\rangle$ fără a-l modifica pe $p[n]$;
  (la sfârșitul pasului 1, p conține ultima permutare generată)
  2. permută $p[n]$ cu elementul $p[f(n,c)]$

$$\text{unde } f(n,c) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n \text{ este impar,} \\ c & \text{dacă } n \text{ este par.} \end{cases}$$

- Algoritmul lui Heap generează toate permutările lui $\{1, \ldots, n\}$ într-o ordine diferită de cea lexicografică.
- Fiecare permutare diferă de cea precedentă printr-o transpoziție (adică, o interschimbare a valorilor a 2 elemente).

Generarea rapidă a permutărilor cu algoritmul lui Heap
(Opțional)

for($i := 1; i \leq n; i$++)
    $p[i] := i$
for($c := 1; c \leq n; c$++)
    1. generează toate permutările lui $\langle p[1], \ldots, p[n-1] \rangle$ fără a-l modifica pe $p[n]$;
    (la sfârșitul pasului 1, p conține ultima permutare generată)
    2. permută $p[n]$ cu elementul $p[f(n,c)]$

$$\text{unde } f(n,c) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n \text{ este impar,} \\ c & \text{dacă } n \text{ este par.} \end{cases}$$

- Algoritmul lui Heap generează toate permutările lui $\{1, \ldots, n\}$ într-o ordine diferită de cea lexicografică.
- Fiecare permutare diferă de cea precedentă printr-o transpoziție (adică, o interschimbare a valorilor a 2 elemente).

Exemplu

Algoritmul lui Heap enumeră permutările lui $\{1, 2, 3\}$ în ordinea următoare:

$$\langle 1,2,3 \rangle, \langle 2,1,3 \rangle, \langle 3,1,2 \rangle, \langle 1,3,2 \rangle, \langle 2,3,1 \rangle, \langle 3,2,1 \rangle$$

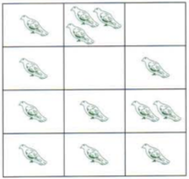
1. Să se implementeze un program care citește o secvență de n numere și apoi afișează:
   - "este permutare" dacă secvența respectivă este o permutare a lui $\{1, \ldots, n\}$
   - "nu este permutare" în caz contrar.
2. Să se implementeze un program care citește numerele n și $r \in \{0, 1, \ldots, n! - 1\}$ și afișează permutarea lui $\{1, \ldots, n\}$ care are rangul r.
3. Să se implementeze un program care citește o permutare a lui $\{1, \ldots, n\}$ și afișează rangul permutării respective.
4. Scrieți un program care citește o permutare $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ și calculează inversa ei, adică permutarea $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ astfel încât $b_{a_i} = a_{b_i} = i$ pentru orice $1 \leq i \leq n$.

Exerciții

1. Scrieți un program care citește o permutare și calculează permutarea următoare în ordine lexicografică.
2. Scrieți un program care citește o permutare și calculează permutarea precedentă în ordine lexicografică.

Exemplu

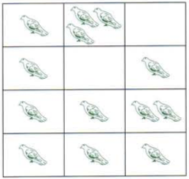
- Presupunem că un cârd de 13 porumbei ocupă o cușcă cu 12 adăposturi.
- Numărul de adăposturi este mai mic decât numărul de porumbei $\Rightarrow$ cel puțin un adăpost va fi ocupat de cel puțin 2 porumbei.



Principiul porumbeilor

EXEMPLU

- Presupunem că un cârd de 13 porumbei ocupă o cușcă cu 12 adăposturi.
- Numărul de adăposturi este mai mic decât numărul de porumbei $\Rightarrow$ cel puțin un adăpost va fi ocupat de cel puțin 2 porumbei.



Principiul porumbeilor (sau Principiul lui Dirichlet)

Fie n un număr întreg pozitiv. Dacă mai mult de n obiecte sunt distribuite în n containere, atunci un container trebuie să conțină cel puțin 2 obiecte.

Stabilirea existenței unei anumite configurații sau combinări în diverse situații.

1. Presupunem că sunt 367 studenți înscriși la cursul de istorie. Atunci cel puțin 2 studenți au aceeași zi de naștere.

   DEMONSTRAŢIE. Numărul de studenți este mai mare decât numărul de zile calendaristice. Conform pricipiului porumbeilor, cel puțin 2 studenți sunt născuți în aceeași zi calendaristică.

2. n pugiliști concurează într-un turneu care prevede un meci între fiecare pereche de pugiliști. Fiecare pugilist a pierdut cel puțin un meci. Atunci cel puțin 2 pugiliști au obținut același număr de victorii.

   DEMONSTRAŢIE. Sunt n pugiliști, și fiecare pugilist are între 0 și $n-2$ victorii. (Observați că nici un pugilist nu are $n-1$ victorii deoarece știm că fiecare a pierdut cel puțin un meci.) Conform principiului porumbeilor, cel puțin 2 pugiliști au același număr de victorii.

Principiul porumbeilor

Generalizare: Fie m și n întregi pozitivi. Dacă mai mult decât $m \cdot n$ obiecte sunt distribuite în n containere, atunci cel puțin un container trebue să conțină cel puțin $m+1$ obiecte.

DEMONSTRAŢIE: prin contradicție. Dacă punem cel mult m obiecte în fiecare container, atunci numărul total de obiecte ar fi cel mult $m \cdot n$.

Teoremă

Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ și $\mu = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$, atunci există întregii i și j cu $1 \le i, j \le n$ astfel încât $a_i \le \mu$ și $a_j \ge \mu$.

DEMONSTRAŢIE: prin contradicție.

- Dacă fiecare element este strict mai mare decât μ atunci
$$\mu = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n > \frac{n \cdot \mu}{n} = \mu, \text{ contradicție} \Rightarrow \exists a_i \le \mu.$$
- Dacă fiecare element este strict mai mic decât μ atunci
$$\mu = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n < \frac{n \cdot \mu}{n} = \mu, \text{ contradicție} \Rightarrow \exists a_j \ge \mu.$$

Definiție (Secvență monotonă)

O secvență $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este

- crescătoare dacă $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$
- strict crescătoare dacă $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$
- descrescătoare dacă $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$
- strict descrescătoare dacă $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$

- Fie secvența $3, 5, 8, 10, 6, 1, 9, 2, 7, 4.$
- Care sunt subsecvențele crescătoare de lungime maximă?

$$(3, 5, 8, 10), (3, 5, 8, 9), (3, 5, 6, 7), (3, 5, 6, 9)$$

- Care sunt subsecvențele descrescătoare de lungime maximă?

$$(10, 9, 7, 4)$$

Teoremă

Presupunem că $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$. O secvență cu mai mult de $m \cdot n$ numere reale trebuie să conțină fie o subsecvență crescătoare de lungime cel puțin $m+1$, sau o subsecvență strict descrescătoare de lungime cel puțin $n+1$.

DEMONSTRAŢIE.

$$r_1, r_2, \ldots, r_{m \cdot n+1}$$

Pentru fiecare $1 \leq i \leq m \cdot n + 1$, fie

a_i :=lungimea celei mai lungi subsecvențe crescătoare ce începe cu r_i
d_i :=lungimea celei mai lungi subsecvențe strict descrescătoare ce începe cu r_i

De exemplu, dacă secvența este $3, 5, 8, 10, 6, 1, 9, 2, 7, 4$ atunci

$a_2 = 3$ (pentru subsecvența $5, 8, 10$ sau $5, 8, 9$)
$d_2 = 2$ (pentru subsecvența $5, 1$ sau $5, 2$ sau $5, 4$)

- Presupunem că teorema este falsă $\Rightarrow 1 \leq a_i \leq m$ și $1 \leq d_i \leq n$
  $\Rightarrow$ perechea (a_i, d_i) are $m \cdot n$ valori posibile.
- Există $m \cdot n + 1$ perechi $\Rightarrow \exists i < j$ cu $(a_i, d_i) = (a_j, d_j)$.
- Dacă $i < j$ și $(a_i, d_i) = (a_j, d_j)$ atunci
  1. Lungimea maximă a subsecvențelor crescătoare ce pornesc din r_i și din r_j este a_i.
  2. Lungimea maximă a subsecvențelor strict descrescătoare ce pornesc din r_i și din r_j este d_i.
- Acest lucru este imposibil fiindcă
  1. dacă $r_i \leq r_j$ atunci $\underbrace{r_i \leq \overbrace{r_j \leq \ldots}^{\text{lungime } a_i}}_{\text{lungime } a_i+1}$
  2. Dacă $r_i > r_j$ atunci $\underbrace{r_i > \overbrace{r_j > \ldots}^{\text{lungime } d_i}}_{\text{lungime } d_i+1}$.

Pentru fiecare număr real $x \in \mathbb{R}$ definim:

Pentru fiecare număr real $x \in \mathbb{R}$ definim:

- $\lfloor x \rfloor :=$ cel mai mare întreg m astfel încât $m \leq x$.

Pentru fiecare număr real $x \in \mathbb{R}$ definim:

- $\lfloor x \rfloor :=$ cel mai mare întreg m astfel încât $m \leq x$.
- $\lceil x \rceil :=$ cel mai mic întreg m astfel încât $x \leq m$.

Pentru fiecare număr real $x \in \mathbb{R}$ definim:

- $\lfloor x \rfloor :=$ cel mai mare întreg m astfel încât $m \leq x$.
- $\lceil x \rceil :=$ cel mai mic întreg m astfel încât $x \leq m$.
- Partea fracționară a lui x:
  $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$

Pentru fiecare număr real $x \in \mathbb{R}$ definim:

- $\lfloor x \rfloor :=$ cel mai mare întreg m astfel încât $m \leq x$.
- $\lceil x \rceil :=$ cel mai mic întreg m astfel încât $x \leq m$.
- Partea fracționară a lui x:
  $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$
- Un număr irațional este un număr care nu este rezultatul împărțirii a doi întregi.

Pentru fiecare număr real $x \in \mathbb{R}$ definim:

- $\lfloor x \rfloor :=$ cel mai mare întreg m astfel încât $m \leq x$.
- $\lceil x \rceil :=$ cel mai mic întreg m astfel încât $x \leq m$.
- Partea fracționară a lui x:
  $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$
- Un număr irațional este un număr care nu este rezultatul împărțirii a doi întregi.
- Exemple: $\pi = 3.14159265\ldots$, $e = 2.7182818\ldots$, etc.

Pentru fiecare număr real $x \in \mathbb{R}$ definim:

- $\lfloor x \rfloor$:= cel mai mare întreg m astfel încât $m \leq x$.
- $\lceil x \rceil$:= cel mai mic întreg m astfel încât $x \leq m$.
- Partea fracționară a lui x:
  $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$
- Un număr irațional este un număr care nu este rezultatul împărțirii a doi întregi.
- Exemple: $\pi = 3.14159265\ldots$, $e = 2.7182818\ldots$, etc.
- Dacă α este un număr irațional și $Q \in \mathbb{N} - \{0\}$, cât de bine putem aproxima α cu un număr rațional $\frac{p}{q}$ unde $1 \leq q \leq Q$?

Pentru fiecare număr real $x \in \mathbb{R}$ definim:

- $\lfloor x \rfloor :=$ cel mai mare întreg m astfel încât $m \leq x$.
- $\lceil x \rceil :=$ cel mai mic întreg m astfel încât $x \leq m$.
- Partea fracționară a lui x:
  $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$
- Un număr irațional este un număr care nu este rezultatul împărțirii a doi întregi.
- Exemple: $\pi = 3.14159265\ldots$, $e = 2.7182818\ldots$, etc.
- Dacă α este un număr irațional și $Q \in \mathbb{N} - \{0\}$, cât de bine putem aproxima α cu un număr rațional $\frac{p}{q}$ unde $1 \leq q \leq Q$?
  - Cât de mic poate deveni $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right|$ când $1 \leq q \leq Q$?

Teoremă (Teorema de aproximare a lui Dirichlet)

Dacă α este un număr irațional și Q un întreg pozitiv, atunci există un număr rațional p/q cu $1 \leq q \leq Q$ astfel încât

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q \cdot (Q+1)}.$$

DEMONSTRAȚIE. Împărțim intervalul $[0,1]$ în $Q+1$ subintervale de lungimi egale:

$$\left[0, \frac{1}{Q+1}\right), \left[\frac{1}{Q+1}, \frac{2}{Q+1}\right), \ldots, \left[\frac{Q}{Q+1}, 1\right]$$

și următoarele $Q+2$ numere reale:

$$r_1 = 0, r_2 = \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \ldots, r_{Q+1} = \{Q\alpha\}, r_{Q+2} = 1$$

- Avem $Q+2$ numere în $Q+1$ intervale

- Avem $Q+2$ numere în $Q+1$ intervale
  $\Rightarrow$ există $i < j$ cu r_i, r_j în același interval

- Avem $Q+2$ numere în $Q+1$ intervale
  $\Rightarrow$ există $i<j$ cu r_i, r_j în același interval
  $\Rightarrow |r_i - r_j| \leq \frac{1}{Q+1}$. Se observă că $(i,j) \neq (1, Q+2)$

- Avem $Q+2$ numere în $Q+1$ intervale
  $\Rightarrow$ există $i<j$ cu r_i, r_j în același interval
  $\Rightarrow |r_i - r_j| \leq \frac{1}{Q+1}$. Se observă că $(i,j) \neq (1, Q+2)$
  Deasemenea

$$\begin{array}{rcccl} r_1 = & 0 & \cdot\alpha- & 0 & \\ r_i = & (i-1) & \cdot\alpha- & \lfloor (i-1)\alpha \rfloor & \text{dacă } 2 \leq i \leq Q+1 \\ r_{Q+2} = & 0 & \cdot\alpha- & (-1) & \end{array}$$

- Avem $Q+2$ numere în $Q+1$ intervale
  $\Rightarrow$ există $i<j$ cu r_i, r_j în același interval
  $\Rightarrow |r_i - r_j| \leq \frac{1}{Q+1}$. Se observă că $(i,j) \neq (1, Q+2)$
  Deasemenea

$$\begin{aligned} r_1 &= \quad 0 \quad \cdot\alpha - \quad 0 \\ r_i &= (i-1) \cdot\alpha - \lfloor (i-1)\alpha \rfloor \quad \text{dacă } 2 \leq i \leq Q+1 \\ r_{Q+2} &= \quad 0 \quad \cdot\alpha - (-1) \end{aligned}$$

  $\Rightarrow$ fiecare r_i este $u_i \cdot \alpha - v_i$ cu $u_i, v_i \in \mathbb{Z}$, și
  - dacă $i<j$ atunci $u_i = u_j$ numai dacă $(i,j) = (1, Q+2)$.

- Avem $Q+2$ numere în $Q+1$ intervale
  $\Rightarrow$ există $i<j$ cu r_i, r_j în același interval
  $\Rightarrow |r_i - r_j| \leq \frac{1}{Q+1}$. Se observă că $(i,j) \neq (1, Q+2)$
  Deasemenea

$$\begin{array}{rcclll} r_1 = & 0 & \cdot\alpha - & 0 & \\ r_i = & (i-1) & \cdot\alpha - & \lfloor (i-1)\alpha \rfloor & \text{dacă } 2 \leq i \leq Q+1 \\ r_{Q+2} = & 0 & \cdot\alpha - & (-1) & \end{array}$$

  $\Rightarrow$ fiecare r_i este $u_i \cdot \alpha - v_i$ cu $u_i, v_i \in \mathbb{Z}$, și
  - dacă $i<j$ atunci $u_i = u_j$ numai dacă $(i,j) = (1, Q+2)$.

$$\Rightarrow \; |r_i - r_j| = |(u_i - u_j)\alpha - (v_i - v_j)| = \underbrace{|u_i - u_j|}_{q \in [1,Q]} \cdot |\alpha - \underbrace{\frac{v_i - v_j}{u_i - u_j}}_{\frac{p}{q}}| \leq \frac{1}{Q+1}.$$

- Avem $Q+2$ numere în $Q+1$ intervale
  $\Rightarrow$ există $i<j$ cu r_i, r_j în același interval
  $\Rightarrow |r_i - r_j| \leq \frac{1}{Q+1}$. Se observă că $(i,j) \neq (1, Q+2)$
  Deasemenea

$$
\begin{array}{rcccl}
r_1 = & 0 & \cdot\alpha - & 0 & \\
r_i = & (i-1) & \cdot\alpha - & \lfloor (i-1)\alpha \rfloor & \text{dacă } 2 \leq i \leq Q+1 \\
r_{Q+2} = & 0 & \cdot\alpha - & (-1) &
\end{array}
$$

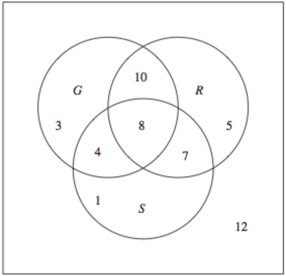
  $\Rightarrow$ fiecare r_i este $u_i \cdot \alpha - v_i$ cu $u_i, v_i \in \mathbb{Z}$, și
  - dacă $i<j$ atunci $u_i = u_j$ numai dacă $(i,j) = (1, Q+2)$.

$$\Rightarrow |r_i - r_j| = |(u_i - u_j)\alpha - (v_i - v_j)| = \underbrace{|u_i - u_j|}_{q \in [1,Q]} \cdot \left|\alpha - \underbrace{\frac{v_i - v_j}{u_i - u_j}}_{\frac{p}{q}}\right| \leq \frac{1}{Q+1}.$$

- Deci $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q \cdot (Q+1)}$.

Presupunem că un sertar conține 50 de mărgele: 25 sunt de sticlă, 30 sunt roșii, 20 sunt sferice, 18 sunt de sticlă roșie, 12 sunt sferice de sticlă, 15 sunt sferice roșii, și 8 sunt sferice de sticlă roșie. Câte mărgele există care nu sunt nici roșii, nici de sticlă și nici sferice?

RĂSPUNS: Desenăm o diagramă Venn cu 3 mulțimi: mulțimea G a mărgelelor de sticlă, R a mărgelelor roșii, și S a mărgelelor sferice.



OBSERVAȚIE.
$|G \cup R \cup S| = |G| + |R| + |S| - |G \cap R| - |G \cap S| - |R \cap S| + |G \cap R \cap S|.$

Ipoteze:

- U: o mulțime universală cu N elemente
- $a_1, \ldots, a_r$: proprietăți ale elementelor mulțimii U
- $N(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_m})$: numărul obiectelor din U care au simultan proprietățile $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}$.
- N_0: numărul obiectelor din U care nu au nici una din aceste proprietăți.

Teoremă (Principiul Incluziunii și Excluziunii)

$$N_0 = N - \sum_{i} N(a_i) + \sum_{i<j} N(a_i a_j) - \sum_{i<j<k} N(a_i a_j a_k) + \ldots$$
$$+ (-1)^m \sum_{i_1<\cdots<i_m} N(a_{i_1} \ldots a_{i_m}) + \ldots + (-1)^r N(a_1 a_2 \ldots a_r).$$

Exemplu

Câte numere cuprinse între 50 și 213 sunt divizibile cu 5 și 12?

Exemplu

Câte numere cuprinse între 50 și 213 sunt divizibile cu 5 și 12?

Fie $U = \{n \mid 50 \leq n \leq 213\}$. Numărul de elemente al lui U este $N = 213 - 50 + 1 = 164$.

- a_1: proprietatea că $50 \leq n \leq 213$ și n este divizibil cu 5.
- a_2: proprietatea că $50 \leq n \leq 213$ și n este divizibil cu 12.

Exemplu

Câte numere cuprinse între 50 și 213 sunt divizibile cu 5 și 12?

Fie $U = \{n \mid 50 \leq n \leq 213\}$. Numărul de elemente al lui U este $N = 213 - 50 + 1 = 164$.

- a_1: proprietatea că $50 \leq n \leq 213$ și n este divizibil cu 5.
- a_2: proprietatea că $50 \leq n \leq 213$ și n este divizibil cu 12.

- Primul număr din U divizibil cu 5 este $50 = 5 \cdot 10$. Ultimul număr din U divizibil cu 5 este $210 = 5 \cdot 42 \Rightarrow N(a_1) = 42 - 10 + 1 = 33$.

Exemplu

Câte numere cuprinse între 50 și 213 sunt divizibile cu 5 și 12?

Fie $U = \{n \mid 50 \leq n \leq 213\}$. Numărul de elemente al lui U este $N = 213 - 50 + 1 = 164$.

- a_1: proprietatea că $50 \leq n \leq 213$ și n este divizibil cu 5.
- a_2: proprietatea că $50 \leq n \leq 213$ și n este divizibil cu 12.

- Primul număr din U divizibil cu 5 este $50 = 5 \cdot 10$. Ultimul număr din U divizibil cu 5 este $210 = 5 \cdot 42 \Rightarrow N(a_1) = 42 - 10 + 1 = 33$.
- Primul număr din U divizibil cu 12 este $60 = 12 \cdot 5$. Ultimul număr din U divizibil cu 12 este $204 = 12 \cdot 17 \Rightarrow N(a_2) = 17 - 5 + 1 = 13$.

Exemplu

Câte numere cuprinse între 50 și 213 sunt divizibile cu 5 și 12?

Fie $U = \{n \mid 50 \leq n \leq 213\}$. Numărul de elemente al lui U este $N = 213 - 50 + 1 = 164$.

- a_1: proprietatea că $50 \leq n \leq 213$ și n este divizibil cu 5.
- a_2: proprietatea că $50 \leq n \leq 213$ și n este divizibil cu 12.

- Primul număr din U divizibil cu 5 este $50 = 5 \cdot 10$. Ultimul număr din U divizibil cu 5 este $210 = 5 \cdot 42 \Rightarrow N(a_1) = 42 - 10 + 1 = 33$.
- Primul număr din U divizibil cu 12 este $60 = 12 \cdot 5$. Ultimul număr din U divizibil cu 12 este $204 = 12 \cdot 17 \Rightarrow N(a_2) = 17 - 5 + 1 = 13$.
- Un număr are simultan proprietățile a_1 și a_2 dacă este divizibil cu $5 \cdot 12 = 60$. Primul număr din U divizibil cu 60 este $60 = 60 \cdot 1$. Ultimul număr din U divizibil cu 60 este $180 = 60 \cdot 3 \Rightarrow N(a_1 a_2) = 3 - 1 + 1 = 3$.

Exemplu

Câte numere cuprinse între 50 și 213 sunt divizibile cu 5 și 12?

Fie $U = \{n \mid 50 \leq n \leq 213\}$. Numărul de elemente al lui U este $N = 213 - 50 + 1 = 164$.

- a_1: proprietatea că $50 \leq n \leq 213$ și n este divizibil cu 5.
- a_2: proprietatea că $50 \leq n \leq 213$ și n este divizibil cu 12.

- Primul număr din U divizibil cu 5 este $50 = 5 \cdot 10$. Ultimul număr din U divizibil cu 5 este $210 = 5 \cdot 42 \Rightarrow N(a_1) = 42 - 10 + 1 = 33$.
- Primul număr din U divizibil cu 12 este $60 = 12 \cdot 5$. Ultimul număr din U divizibil cu 12 este $204 = 12 \cdot 17 \Rightarrow N(a_2) = 17 - 5 + 1 = 13$.
- Un număr are simultan proprietățile a_1 și a_2 dacă este divizibil cu $5 \cdot 12 = 60$. Primul număr din U divizibil cu 60 este $60 = 60 \cdot 1$. Ultimul număr din U divizibil cu 60 este $180 = 60 \cdot 3 \Rightarrow N(a_1 a_2) = 3 - 1 + 1 = 3$.

  $\Rightarrow$ **Numărul căutat este** $N(a_1) + N(a_2) - N(a_1 a_2) = 33 + 13 - 3 = \mathbf{43}$.

- $\varphi(n)$:= numărul întregilor $1 \leq m < n$ cu $\gcd(m, n) = 1$.
- Exemplu: $\varphi(24) = 8$ deoarece sunt 8 intregi între 1 și 23 care nu au factor comun cu 24: 1,5,7,11,13,17,19,23.
- $\varphi(n)$ joaca un rol important în teoria numerelor.
- $\varphi(n)$ poate fi calculată cu Principiul Incluziunii și Excluziunii:
  - Presupunem că $n = p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r}$ unde $p_1, \dots, p_r$ sunt numere prime distincte, și $n_i > 0$ pentru $1 \leq i \leq r$.
  - Fie a_i proprietatea "mai mic decât n și divizibil cu p_i" $(1 \leq i \leq r)$

$$\Rightarrow \varphi(n) = N_0 = n - \sum_i N(a_i) + \sum_{i<j} N(a_i a_j) + \dots + (-1)^r N(a_1 \dots a_r).$$

  - $N(a_{i_1} \dots, a_{i_m})$ este numărul de elemente $< n$ divizibile cu $p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_m} \Rightarrow N(a_{i_1} \dots a_{i_m}) = \dfrac{n}{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_m}}$.

$$\varphi(n) = n - \sum_{i} \frac{n}{p_i} + \sum_{i<j} \frac{n}{p_i p_j} + \ldots + (-1)^n \frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_r}$$
$$= n \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

- Exemplu: $\varphi(24) = \varphi(2^3 \cdot 3) = 24 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 8.$

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

OBSERVAȚIE: Dacă n nu este prim atunci $n = a \cdot b$ cu $1 < a \leq b \Rightarrow a^2 \leq n$, deci $a \leq \sqrt{n}$ și n trebuie să fie divizibil cu un număr prim $p \leq \sqrt{n}$.

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

OBSERVAȚIE: Dacă n nu este prim atunci $n = a \cdot b$ cu $1 < a \leq b \Rightarrow a^2 \leq n$, deci $a \leq \sqrt{n}$ și n trebuie să fie divizibil cu un număr prim $p \leq \sqrt{n}$.

$\Rightarrow$ CRITERIU de numărare a numerelor prime $< n$:

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

OBSERVAȚIE: Dacă n nu este prim atunci $n = a \cdot b$ cu $1 < a \leq b \Rightarrow a^2 \leq n$, deci $a \leq \sqrt{n}$ și n trebuie să fie divizibil cu un număr prim $p \leq \sqrt{n}$.

$\Rightarrow$ CRITERIU de numărare a numerelor prime $< n$:

- Începem cu mulțimea $N = \{1, \ldots, n\}$ și numărăm N_0 = numărul de elemente rămase după ce se elimină din mulțimea N multiplii de numere prime $p \leq \sqrt{n}$.

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

OBSERVAȚIE: Dacă n nu este prim atunci $n = a \cdot b$ cu $1 < a \leq b \Rightarrow a^2 \leq n$, deci $a \leq \sqrt{n}$ și n trebuie să fie divizibil cu un număr prim $p \leq \sqrt{n}$.

$\Rightarrow$ CRITERIU de numărare a numerelor prime $< n$:

- Începem cu mulțimea $N = \{1, \ldots, n\}$ și numărăm N_0 = numărul de elemente rămase după ce se elimină din mulțimea N multiplii de numere prime $p \leq \sqrt{n}$.
- Numărul obținut nu este tocmai cel dorit deoarece
  - nu am numărat numerele prime $\leq \sqrt{n}$
  - am numărat 1

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

OBSERVAȚIE: Dacă n nu este prim atunci $n = a \cdot b$ cu $1 < a \leq b \Rightarrow a^2 \leq n$, deci $a \leq \sqrt{n}$ și n trebuie să fie divizibil cu un număr prim $p \leq \sqrt{n}$.

$\Rightarrow$ CRITERIU de numărare a numerelor prime $< n$:

- Începem cu mulțimea $N = \{1, \ldots, n\}$ și numărăm N_0 = numărul de elemente rămase după ce se elimină din mulțimea N multiplii de numere prime $p \leq \sqrt{n}$.
- Numărul obținut nu este tocmai cel dorit deoarece
  - nu am numărat numerele prime $\leq \sqrt{n}$
  - am numărat 1
- Numărul căutat este

$$N_0 + r - 1$$

unde r este numărul numerelor prime $\leq \sqrt{n}$.

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

- Cel mai mare număr prim $\leq \sqrt{120}$ este 7

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

- Cel mai mare număr prim $\leq \sqrt{120}$ este 7
  - Considerăm mulțimea universală $N = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 120\}$ și eliminăm din N toate elementele divizible cu un număr prim ≤ 7. Altfel spus, eliminăm din N toate elementele care au una din proprietățile următoare:
    - $a_1 =$ "este divizibil cu $p_1 = 2$"
    - $a_2 =$ "este divizibil cu $p_2 = 3$"
    - $a_3 =$ "este divizibil cu $p_3 = 5$"
    - $a_4 =$ "este divizibil cu $p_4 = 7$"

    și obținem o mulțime M cu N_0 elemente.

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

- Cel mai mare număr prim $\leq \sqrt{120}$ este 7
  - Considerăm mulțimea universală $N = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 120\}$ și eliminăm din N toate elementele divizible cu un număr prim ≤ 7. Altfel spus, eliminăm din N toate elementele care au una din proprietățile următoare:
    - $a_1 =$ "este divizibil cu $p_1 = 2$"
    - $a_2 =$ "este divizibil cu $p_2 = 3$"
    - $a_3 =$ "este divizibil cu $p_3 = 5$"
    - $a_4 =$ "este divizibil cu $p_4 = 7$"

    și obținem o mulțime M cu N_0 elemente.

Î: Este N_0 numărul pe care-l căutăm?

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

- Cel mai mare număr prim $\leq \sqrt{120}$ este 7
  - Considerăm mulțimea universală $N = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 120\}$ și eliminăm din N toate elementele divizible cu un număr prim ≤ 7. Altfel spus, eliminăm din N toate elementele care au una din proprietățile următoare:
    - $a_1 =$ "este divizibil cu $p_1 = 2$"
    - $a_2 =$ "este divizibil cu $p_2 = 3$"
    - $a_3 =$ "este divizibil cu $p_3 = 5$"
    - $a_4 =$ "este divizibil cu $p_4 = 7$"

    și obținem o mulțime M cu N_0 elemente.

Î: Este N_0 numărul pe care-l căutăm?

R: Nu tocmai, fiindcă:

- M conține toate numerele prime între 1 și 120, cu excepția lui $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$.
- M conține 1, care nu este număr prim.

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

- Cel mai mare număr prim $\leq \sqrt{120}$ este 7
  - Considerăm mulțimea universală $N = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 120\}$ și eliminăm din N toate elementele divizible cu un număr prim ≤ 7. Altfel spus, eliminăm din N toate elementele care au una din proprietățile următoare:
    - $a_1 =$ "este divizibil cu $p_1 = 2$"
    - $a_2 =$ "este divizibil cu $p_2 = 3$"
    - $a_3 =$ "este divizibil cu $p_3 = 5$"
    - $a_4 =$ "este divizibil cu $p_4 = 7$"

    și obținem o mulțime M cu N_0 elemente.

Î: Este N_0 numărul pe care-l căutăm?

R: Nu tocmai, fiindcă:

  - M conține toate numerele prime între 1 și 120, cu excepția lui $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$.
  - M conține 1, care nu este număr prim.

- Numărul numerelor prime ≤ 120 este $N_0 + 4 - 1$.

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

- $N_0 = 120 - \sum_{i=1}^{4} N(a_i) + \sum_{i<j} N(a_i a_j) - \sum_{i<j<k} N(a_i a_j a_k) + N(a_1 a_2 a_3 a_4)$

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

- $N_0 = 120 - \sum_{i=1}^{4} N(a_i) + \sum_{i<j} N(a_i a_j) - \sum_{i<j<k} N(a_i a_j a_k) + N(a_1 a_2 a_3 a_4)$
- Observăm că $N(a_{i_1} \ldots a_{i_m}) = \left\lfloor \frac{120}{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_m}} \right\rfloor$ (de ce?)

  De exemplu:
  - $N(a_1) = \lfloor 120/2 \rfloor = 60,\ N(a_2) = \lfloor 120/3 \rfloor = 40,$
    $N(a_3) = \lfloor 120/5 \rfloor = 24,\ N(a_4) = \lfloor 120/7 \rfloor = 17$
  - $N(a_1 a_2) = \lfloor 120/(2 \cdot 3) \rfloor = 20,\ N(a_1 a_3) = \lfloor 120/(2 \cdot 5) \rfloor = 12,$
    $\ldots$
  - $N(a_1 a_2 a_3 a_4) = \lfloor 120/(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7) \rfloor = \lfloor 120/210 \rfloor = 0$

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

- $N_0 = 120 - \sum_{i=1}^{4} N(a_i) + \sum_{i<j} N(a_i a_j) - \sum_{i<j<k} N(a_i a_j a_k) + N(a_1 a_2 a_3 a_4)$
- Observăm că $N(a_{i_1} \dots a_{i_m}) = \left\lfloor \frac{120}{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_m}} \right\rfloor$ (de ce?)

  De exemplu:
  - $N(a_1) = \lfloor 120/2 \rfloor = 60$, $N(a_2) = \lfloor 120/3 \rfloor = 40$,
    $N(a_3) = \lfloor 120/5 \rfloor = 24$, $N(a_4) = \lfloor 120/7 \rfloor = 17$
  - $N(a_1 a_2) = \lfloor 120/(2 \cdot 3) \rfloor = 20$, $N(a_1 a_3) = \lfloor 120/(2 \cdot 5) \rfloor = 12$,
    $\dots$
  - $N(a_1 a_2 a_3 a_4) = \lfloor 120/(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7) \rfloor = \lfloor 120/210 \rfloor = 0$

  $\Rightarrow N_0 = 120 - (60 + 40 + 24 + 17) + (20 + 12 + 8 + 8 + 5 + 3) - (4 + 2 + 1 + 1) + 0 = 27$.

Câte numere prime sunt între 1 și 120?

- $N_0 = 120 - \sum_{i=1}^{4} N(a_i) + \sum_{i<j} N(a_i a_j) - \sum_{i<j<k} N(a_i a_j a_k) + N(a_1 a_2 a_3 a_4)$
- Observăm că $N(a_{i_1} \ldots a_{i_m}) = \left\lfloor \frac{120}{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_m}} \right\rfloor$ (de ce?)

  De exemplu:
  - $N(a_1) = \lfloor 120/2 \rfloor = 60,\ N(a_2) = \lfloor 120/3 \rfloor = 40,$
    $N(a_3) = \lfloor 120/5 \rfloor = 24,\ N(a_4) = \lfloor 120/7 \rfloor = 17$
  - $N(a_1 a_2) = \lfloor 120/(2 \cdot 3) \rfloor = 20,\ N(a_1 a_3) = \lfloor 120/(2 \cdot 5) \rfloor = 12,$
    $\ldots$
  - $N(a_1 a_2 a_3 a_4) = \lfloor 120/(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7) \rfloor = \lfloor 120/210 \rfloor = 0$

  $\Rightarrow N_0 = 120 - (60 + 40 + 24 + 17) + (20 + 12 + 8 + 8 + 5 + 3) - (4 + 2 + 1 + 1) + 0 = 27.$
- Numărul pe care-l căutăm este $27 + 4 - 1 = 30$

Bibliografie

1. Capitolul 2, Secțiunea 2.1: *Generating Permutations* of
   - S. Pemmaraju, S. Skiena. *Combinatorics and Graph Theory with Mathematica.* Cambridge University Press 2003.
2. Capitolul 2, Secțiunile 2.4 și 2.5 din
   - J. M. Harris, J. L. Hirst, M.J. Mossinghoff. *Combinatorics and Graph Theory*. Second Edition. Springer 2008.
3. Capitolul 5 din
   - K. H. Rosen. *Discrete Mathematics and Its Aplications.* Sixth Edition. McGraw Hill Higher Education. 2007.