

Cursul 7

Tipuri de grafuri. Structuri de date pentru grafuri.
Conectivitate: Algoritmul naiv și algoritmul lui Warshall

20 noiembrie 2015

Reamintim că:

Graf = structură matematică $G = (V, E)$ unde

- V : mulțime de **noduri** (sau **vârfuri**)
- E : mulțime de **muchii** incidente la două noduri, sau la 1 nod

Tipuri de grafuri, în funcție de tipul muchiilor $e \in E$:

- ▶ **Neorientate**: Fiecare muchie are 2 capete

Reprezentare grafică: $a \xrightarrow{e} b$ sau $\begin{matrix} e \\ \frown \\ a \end{matrix}$ (bucă)

- ▶ **Orientate** (sau **digrafuri**): Fiecare muchie $e \in E$ are o **sursă** (sau **start**) și o **destinație** (sau **end**)

Reprezentare grafică: $a \xrightarrow{e} b$ sau $\begin{matrix} e \\ \downarrow \\ a \end{matrix}$ (bucă)

Muchiile orientate se numesc si **arce** (singular: **arc**).

Graf simplu: graf neorientat sau orientat, care are cel mult un arc între orice două noduri și nu are nici o buclă.

$$G = (V, E)$$

$e_1, e_2 \in E$ sunt muchii **paralele** dacă sunt incidente la aceleași noduri și

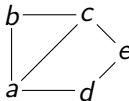
- Dacă G este orientat, atunci $start(e_1) = start(e_2)$ și $end(e_1) = end(e_2)$
- ▶ **Multigraf** orientat sau neorientat: nu are bucle, iar dacă graful este
 - neorientat: poate avea muchii paralele
 - orientat: poate avea arce paralele
- ▶ **Pseudograf**: graf neorientat care poate avea muchii paralele și bucle.
- ▶ **Graf ponderat**: fiecare muchie $e \in E$ are o **pondere** (sau **greutate**) $w(e)$; de obicei $w(e) \in \mathbb{R}$.

Reprezentări grafice ale grafurilor

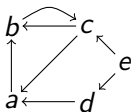
Exemple

- **Grafuri simple:** se trasează linii sau săgeți între nodurile conectate

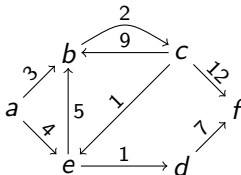
Graf simplu **neorientat**:



Graf simplu **orientat**:



- **Grafuri simple ponderate:** se indică ponderea în dreptul conexiunilor

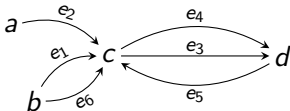


Reprezentări grafice ale grafurilor

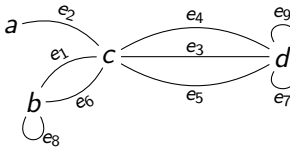
Exemple (continuare)

Multigrafuri sau **pseudografuri**: dacă au muchii paralele pe care vrem să le distingem, se etichetăm muchiile:

multigraf:



pseudograf:



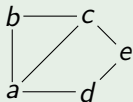
Reprezentări concrete ale grafurilor simple

- 1 Listă de noduri + listă de muchii
- 2 Liste de adiacență
- 3 Matrice de adiacență
- 4 Matrice de incidență
- 5 Matrice de ponderi

Grafuri simple

Reprezentarea cu listă de noduri + listă de muchii

Exemplu

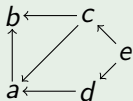


Listă de noduri $V = [a, b, c, d, e]$

Listă de muchii $E = [\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{c, e\}, \{d, e\}]$

Observații: $\{a, b\} = \{b, a\}$, $\{a, c\} = \{c, a\}$, etc.

muchie \leftrightarrow mulțimea de noduri adiacente la muchie



Listă de noduri $V = [a, b, c, d, e]$

Listă de arce $E = [(a, b), (c, a), (c, b), (d, a), (e, c), (e, d)]$

Observații: $(a, b) \neq (b, a)$, $(a, c) \neq (c, a)$, etc.

muchie \leftrightarrow pereche (start, end)

Remarcă

Dacă nu există noduri izolate (cu 0 vecini), nu este necesar să fie reținută lista de noduri V :

- V se poate calcula din E

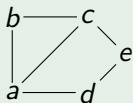
Grafuri simple

Reprezentarea cu liste de adiacență

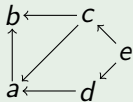
Pentru fiecare nod $u \in V$ se reține **lista de noduri adiacente** la u

- ▶ Dacă G este **neorientat**, v este adiacent la u dacă există o muchie cu capetele u și v .
 - În grafuri neorientate, relația de adiacență este simetrică.
- ▶ Dacă G este **orientat**, v este adiacent la u dacă există un arc $e \in E$ de la u la v , adică $start(e) = u$ și $end(e) = v$.

Exemplu



$a \mapsto [b, c, d]$	$d \mapsto [a, e]$
$b \mapsto [a, c]$	$e \mapsto [c, d]$
$c \mapsto [a, b, e]$	



$a \mapsto [b]$	$d \mapsto [a]$
$b \mapsto []$	$e \mapsto [c, d]$
$c \mapsto [a, b]$	

Dacă G are n noduri, $A_G = (m_{ij})$ are dimensiunea $n \times n$ și
 $m_{ij} :=$ numărul de muchii de la al i -lea nod la al j -lea nod.

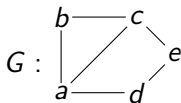
Observații

- 1 Înainte de a construi M_G din G , trebuie fixată o enumerare a tuturor nodurilor: $[v_1, v_2, \dots, v_n]$
- 2 Dacă G este neorientat, A_G este matrice simetrică
- 3 Dacă G este graf simplu, A_G conține doar 0 și 1

Grafuri neorientate

Matricea de adiacență A_G a unui graf neorientat G

Matricea de adiacență a grafului neorientat



pentru enumerarea de noduri $[a, b, c, d, e]$ este

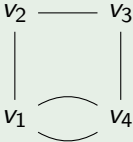
$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observație: A_G este matrice simetrică.

Dacă A este o matrice simetrică $n \times n$ cu $a_{ij} \in \mathbb{N}$ pentru toți i, j , un digraf G care are matricea de adiacență A se construiește astfel:

- 1 Se desenează n puncte v_1, \dots, v_n în plan
- 2 Pentru orice $i, j \in \{1, \dots, n\}$, se trasează a_{ij} muchii distincte între v_i și v_j

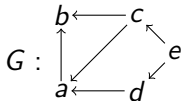
Exemplu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow G :$$


Digrafuri

Matricea de adiacență A_G a unui digraf G

Matricea de adiacență a grafului orientat



pentru enumerarea de noduri $[a, b, c, d, e]$ este

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

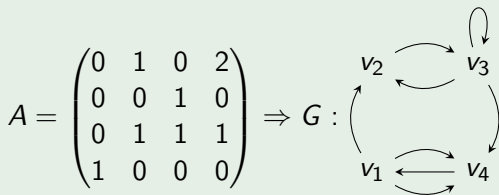
Digrafi

Digraful corespunzător unei matrici de adiacență

Dacă A este o matrice $n \times n$ cu $a_{ij} \in \mathbb{N}$ pentru toți i, j , un digraf G care are matricea de adiacență A se construiește astfel:

- 1 Se desenează n puncte v_1, \dots, v_n în plan
- 2 Pentru orice $i, j \in \{1, \dots, n\}$, se trasează a_{ij} arce distincte de la v_i la v_j

Exemplu



Digrafi cu muchii etichetate

Reprezentarea cu matrice de incidență

Presupunem date două liste (sau enumerări):

- $V = [v_1, \dots, v_n]$ a nodurilor lui G
- $L = [e_1, \dots, e_p]$ a etichetelor de muchii din G

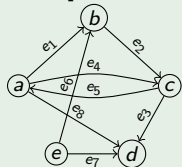
Matricea de incidență $M_G = (m_{ij})$ are dimensiunea $n \times p$ și

$$m_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{dacă } \text{start}(e_j) = v_i \\ 1 & \text{dacă } \text{end}(e_j) = v_i \\ 0 & \text{în toate celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Exemplu

Dacă $V = [a, b, c, d, e]$, $L = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8]$ și

$$M_G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$



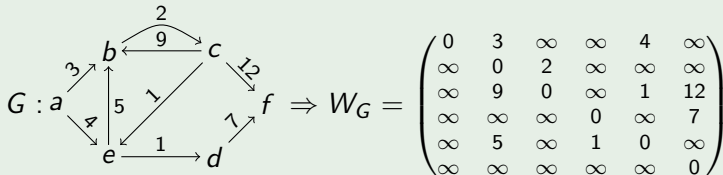
Grafuri simple ponderate

Reprezentarea cu matrice de ponderi

Matricea de ponderi $W_G = (w_{ij})$ a unui graf simplu ponderat G cu n noduri $[v_1, \dots, v_n]$ are dimensiunea $n \times n$ și

- ▷ $w_{ii} = 0$ pentru toți $1 \leq i \leq n$.
- ▷ $w_{ij} = w(\{v_i, v_j\})$ pentru orice muchie $\{v_i, v_j\} \in E$, dacă G este neorientat.
- ▷ $w_{ij} = w((v_i, v_j))$ pentru orice arc $(v_i, v_j) \in E$, dacă G este orientat.
- ▷ $w_{ij} = \infty$ în toate celelalte cazuri.

Exemplu (Digraf ponderat cu enumerare de noduri $[a, b, c, d, e, f]$)



Reprezentarea grafurilor

Studiu comparativ

- ▶ Reprezentarea cu **listă de muchii**
 - Adecvată pentru reprezentarea grafurilor simple fără noduri izolate, cu $|E| \ll |V|$
 - Complexitate spațială (memorie ocupată): $O(|E|)$
- ▶ Reprezentarea cu **liste de adiacență**
 - Permite enumerarea rapidă a vecinilor unui nod
 - Complexitate spațială (memorie ocupată): $O(|V| + |E|)$
- ▶ Reprezentarea cu **matrice de adiacență** $A_G = (a_{ij})$ sau cu **matrice de ponderi** $W_G = (w_{ij})$
 - Test rapid de conectivitate directă între 2 noduri: $O(1)$
 - $\nexists (v_i, v_j) \in E$ dacă $a_{ij} = 0$ sau dacă $w_{ij} = \infty$
 - Complexitate spațială (memorie ocupată): $O(|V|^2)$
 - reprezentare neadecvată când $|E| \ll |V|^2$
- Reprezentare cu matrice de incidență M_G
 - ▶ Complexitate temporală: $O(|V| \cdot |E|)$

Digrafi simpli

Proprietăți ale matricii de adiacență A_G

Presupunem că G este (di)graf simplu cu n noduri și matricea de adiacență $A_G = (a_{ij})$

- $a_{ij} = 0$ (sau false) dacă \nexists arc $v_i \rightarrow v_j$
- $a_{ij} = 1$ (sau true) dacă \exists arc $v_i \rightarrow v_j$

Definim:

- I_n : matricea identitate $n \times n$
- Operațiile booleene \odot (conjunție) și \oplus (disjuncție):

\odot	0	1
0	0	0
1	0	1

\oplus	0	1
0	0	1
1	1	1

Observații:

$$a \odot b = \min(a, b)$$

$$a \oplus b = \max(a, b)$$

- Dacă $U = (u_{ij})$, $V = (v_{ij})$ sunt matrici $n \times n$ cu elemente 0 sau 1, definim
 - $U \oplus V = (c_{ij})$ dacă $c_{ij} = u_{ij} \oplus v_{ij}$ pentru toți i, j
 - $U \odot V = (d_{ij})$ dacă $d_{ij} = (u_{i1} \odot v_{1j}) \oplus \dots \oplus (u_{in} \odot v_{nj})$
 - $U^k = \underbrace{U \odot \dots \odot U}_{k \text{ ori}}$ pentru orice $k > 0$

Digrafi simple

Proprietăți ale matricii de adiacență A_G (continuare)

Proprietăți

- ❶ Dacă $A_G^k = (a_{ij}^{(k)})$ pentru $k \geq 1$ atunci $a_{ij}^{(k)} = 1$ dacă și numai dacă există o cale cu lungimea k de la nodul v_i la v_j .
- ❷ Fie $A_G^* = I_n \oplus A_G \oplus A_G^2 \oplus \dots \oplus A_G^{n-1} = (\bar{a}_{ij})$. Atunci
 - $\bar{a}_{ij} = 1$ dacă și numai dacă există o cale de lungime $j \in \{1, \dots, n-1\}$ de la nodul v_i la v_j .
 - A_G^* se poate calcula în $O(n^4)$.
 - A_G^* se numește **închidere reflexivă și tranzitivă** a lui A_G .
- ❸ v_i și v_j sunt conectate $\Leftrightarrow \exists$ o cale simplă $v_i \rightsquigarrow v_j \Leftrightarrow \bar{a}_{ij} = 1$.
- ❹ $I_n \oplus A_G \oplus A_G^2 \oplus \dots \oplus A_G^{k+1} = I_n \oplus (I_n \oplus A_G \oplus A_G^2 \oplus \dots \oplus A_G^k) \odot A_G \Rightarrow A^*$ se poate calcula în $O(n^4)$.

Digrafuri simple

Proprietăți ale matricii de adiacență A_G (continuare)

Proprietăți

- 1 Dacă $A_G^k = (a_{ij}^{(k)})$ pentru $k \geq 1$ atunci $a_{ij}^{(k)} = 1$ dacă și numai dacă există o cale cu lungimea k de la nodul v_i la v_j .
- 2 Fie $A_G^* = I_n \oplus A_G \oplus A_G^2 \oplus \dots \oplus A_G^{n-1} = (\bar{a}_{ij})$. Atunci
 - $\bar{a}_{ij} = 1$ dacă și numai dacă există o cale de lungime $j \in \{1, \dots, n-1\}$ de la nodul v_i la v_j .
 - A_G^* se poate calcula în $O(n^4)$.
 - A_G^* se numește **închidere reflexivă și tranzitivă** a lui A_G .
- 3 v_i și v_j sunt conectate $\Leftrightarrow \exists$ o cale simplă $v_i \rightsquigarrow v_j \Leftrightarrow \bar{a}_{ij} = 1$.
- 4 $I_n \oplus A_G \oplus A_G^2 \oplus \dots \oplus A_G^{k+1} = I_n \oplus (I_n \oplus A_G \oplus A_G^2 \oplus \dots \oplus A_G^k) \odot A_G \Rightarrow A^*$ se poate calcula în $O(n^4)$.

Corolar

Conectivitatea într-un digraf simplu se poate detecta în $O(n^4)$.

Digrafi simpli

Metode mai eficiente de calcul al lui A_G^*

Algoritmul lui Warshall calculează A_G^* în $O(n^3)$.

Idee de bază a lui Warshall

Dacă $V = [v_1, \dots, v_n]$ este o enumerare a nodurilor lui G și $v_k \in V$, atunci orice cale simplă $\pi : v_i \rightsquigarrow v_j$ are una din următoarele forme:

- 1 v_k nu apare în π ca nod intermediar între v_i și v_j



- 2 v_k apare exact o dată în π ca nod intermediar între v_i și v_j



Digrafi simpli

Algoritmul lui Warshall de calcul al lui A_G^*

Presupunem că $A_G = (a_{ij})$ are dimensiune $n \times n$

► Se calculează recursiv $C^{[n]} = (c_{ij}^{[n]})$ unde

$$c_{ij}^{[k]} := \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j \\ a_{ij} & \text{dacă } k = 0 \text{ și } i \neq j \\ c_{ij}^{[k-1]} \oplus (c_{ik}^{[k-1]} \odot c_{kj}^{[k-1]}) & \text{dacă } k \geq 1 \end{cases}$$

Proprietăți

- 1 $C^{[0]} = A_G$
- 2 $c_{ij}^{[k]} = 1$ dacă și numai dacă există o cale $\pi : v_i \rightsquigarrow v_j$ în care toate nodurile intermediare sunt din submulțimea $\{v_1, \dots, v_k\}$
- 3 $C^{[n]} = A_G^*$
- 4 $C^{[n]}$ se calculează în $O(n^3)$.

Digraful simplu ponderat

Cele cea mai ușoare căi

Se consideră digraful simplu $G = (V, E)$ cu $V = \{1, \dots, n\}$ și funcția de greutate $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$

- ▶ În G , **greutatea** unei căi $\pi : v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_p$ este
 - $w(\pi) = \sum_{i=1}^{p-1} w((v_i, v_{i+1}))$
 - (se adună greutatea tuturor arcelor din π)
- ▶ Pentru orice pereche de noduri (i, j) din V , se dorește găsirea
 - celei mai ușoare căi de la nodul i la nodul j
(pot fi mai multe căi cele mai ușoare)
 - greutatea celei mai ușoare căi

Reamintim că **matricea de ponderi** a lui G este $W_G = (w_{ij})$ unde

$$w_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } j = i, \\ w((i, j)) & \text{dacă } (i, j) \in E, \\ \infty & \text{dacă } (i, j) \notin E \end{cases}$$

Cele mai ușoare căi într-un digraf simplu ponderat

Algoritmul lui Warshall: Idee de bază

Generalizare a ideii de calcul a celor mai mai scurte căi: Fie $k \in V = \{1, \dots, n\}$, și $\pi : i \rightsquigarrow j$ o cale cea mai ușoară de la i la j . Distingem două cazuri:

- 1 π nu trece prin nodul k
- 2 π trece prin k . Atunci $\pi = i \xrightarrow{\pi_1} k \xrightarrow{\pi_2} j$ și $w(\pi) = w(\pi_1) + w(\pi_2)$.

Cele mai ușoare căi într-un digraf simplu ponderat

Algoritmul lui Warshall: Idee de bază

Generalizare a ideii de calcul a celor mai mai scurte căi: Fie $k \in V = \{1, \dots, n\}$, și $\pi : i \rightsquigarrow j$ o cale cea mai ușoară de la i la j . Distingem două cazuri:

- 1 π nu trece prin nodul k
- 2 π trece prin k . Atunci $\pi = i \xrightarrow{\pi_1} k \xrightarrow{\pi_2} j$ și $w(\pi) = w(\pi_1) + w(\pi_2)$.

Structură de date auxiliară de calcul:

- Matrice de căi ușoare $P^{[k]} = (p_{ij}^{[k]})$ în care fiecare

$$p_{ij}^{[k]} := \begin{cases} \bullet & \text{valoare specială: } \nexists \text{ cale } i \rightsquigarrow j \text{ prin noduri} \\ & \text{intermediare din submulțimea } \{1, \dots, k\} \\ \pi & \text{o cea mai ușoară cale de la } i \text{ la } j \text{ prin noduri} \\ & \text{intermediare din submulțimea } \{1, \dots, k\} \end{cases}$$

Cele mai ușoare căi într-un digraf simplu ponderat

Algoritmul lui Warshall: Noțiuni auxiliare

Presupunem că matricea de ponderi a lui G este $W_G = (w_{ij})$. Pentru orice $0 \leq k \leq n$ se calculează recursiv, începând de la $k = 0$, următoarele valori:

- ▶ $p_{ij}^{[k]}$: o cale cea mai ușoară $p : i \rightsquigarrow j$, în care toate nodurile intermediare sunt din mulțimea $\{1, 2, \dots, k\}$.
- ▶ $w_{ij}^{[k]}$: greutatea căii $p_{ij}^{[k]}$

OBSERVAȚII:

- Dacă nu există o astfel de cale de la i la j , definim $p_{ij}^{[k]} = \bullet$ și $w_{ij}^{[k]} = \infty$.
- $w_{ij}^{[0]} := w_{ij}$ și
- $p_{ij}^{[0]} := \begin{cases} [i] & \text{dacă } i = j \text{ (în acest caz, } w_{ij} = w_{ii} = 0) \\ [i, j] & \text{dacă } i \neq j \text{ și } w_{ij} < \infty \\ \bullet & \text{dacă } w_{ij} = \infty \end{cases}$

Cele mai ușoare căi într-un digraf simplu ponderat

Algoritmul lui Warshall: Formule de calcul recursiv

Pentru $0 < k \leq n$:

$$p_{ij}^{[k]} := \begin{cases} p_{ij}^{[k-1]} & \text{dacă } w_{ij}^{[k-1]} \leq w_{ik}^{[k-1]} + w_{kj}^{[k-1]} \\ p_{ik}^{[k-1]} \asymp p_{kj}^{[k-1]} & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

unde $p_{ik}^{[k-1]} \asymp p_{kj}^{[k-1]}$ denotă concatenarea căilor $p_{ik}^{[k-1]}$ și $p_{kj}^{[k-1]}$.

$$w_{ij}^{[k]} := \begin{cases} w_{ij}^{[k-1]} & \text{dacă } w_{ij}^{[k-1]} \leq w_{ik}^{[k-1]} + w_{kj}^{[k-1]} \\ w_{ik}^{[k-1]} + w_{kj}^{[k-1]} & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

Observații

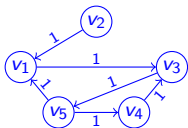
- ▶ Pentru orice $1 \leq i, j \leq n$, dacă $p_{ij}^{[n]} \neq \bullet$ atunci $p_{ij}^{[n]}$ este o cea mai ușoară cale de la i la j , iar $w(p_{ij}^{[n]}) = w_{ij}^{[n]}$.
- ▶ Calculul matricilor $W^{[n]}$ și $P^{[n]}$ se efectuează în $O(n^3)$.

Cele mai scurte căi într-un digraf simplu

- Lungimea unei căi $p = [x_1, \dots, x_n]$ este $n - 1$, adică numărul de arce ce la x_1 la x_n de-a lungul căii p .
- Dacă presupunem că fiecare arc are greutatea 1, atunci lungimea unei căi coincide cu greutatea ei.
 - \Rightarrow cele mai scurte căi dintre orice pereche de noduri pot fi calculate cu algoritmul lui Warshall (vezi slide-ul următor.)

Cele mai scurte căi într-un digraf simplu

Algoritmul lui Warshall ilustrat



$$PW_G^{[0]} = \begin{pmatrix} [v_1]_0 & \bullet & [v_1, v_3]_1 & \bullet & \bullet \\ [v_2, v_1]_1 & [v_2]_0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & [v_3]_0 & \bullet & [v_3, v_5]_1 \\ \bullet & \bullet & [v_4, v_3]_1 & [v_4]_0 & \bullet \\ [v_5, v_1]_1 & \bullet & \bullet & [v_5, v_4]_1 & [v_5]_0 \end{pmatrix},$$

$$PW_G^{[1]} = \begin{pmatrix} [v_1]_0 & \bullet & [v_1, v_3]_1 & \bullet & \bullet \\ [v_2, v_1]_1 & [v_2]_0 & [v_2, v_1, v_3]_2 & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & [v_3]_0 & \bullet & [v_3, v_5]_1 \\ \bullet & \bullet & [v_4, v_3]_1 & [v_4]_0 & \bullet \\ [v_5, v_1]_1 & \bullet & [v_5, v_1, v_3]_2 & [v_5, v_4]_1 & [v_5]_0 \end{pmatrix},$$

$$PW_G^{[2]} = PW_G^{[1]}, \quad PW_G^{[3]} = \begin{pmatrix} [v_1]_0 & \bullet & [v_1, v_3]_1 & \bullet & [v_1, v_3, v_5]_2 \\ [v_2, v_1]_1 & [v_2]_0 & [v_2, v_1, v_3]_2 & \bullet & [v_2, v_1, v_3, v_5]_3 \\ \bullet & \bullet & [v_3]_0 & \bullet & [v_3, v_5]_1 \\ \bullet & \bullet & [v_4, v_3]_1 & [v_4]_0 & [v_4, v_3, v_5]_2 \\ [v_5, v_1]_1 & \bullet & [v_5, v_1, v_3]_2 & [v_5, v_4]_1 & [v_5]_0 \end{pmatrix}, \quad PW_G^{[4]} = PW_G^{[3]},$$

$$PW_G^{[5]} = \begin{pmatrix} [v_1]_0 & \bullet & [v_1, v_3]_1 & [v_1, v_3, v_5, v_4]_3 & [v_1, v_3, v_5]_2 \\ [v_2, v_1]_1 & [v_2]_0 & [v_2, v_1, v_3]_2 & [v_2, v_1, v_3, v_5, v_4]_4 & [v_2, v_1, v_3, v_5]_3 \\ [v_3, v_5, v_1]_2 & \bullet & [v_3]_0 & \bullet & [v_3, v_5]_1 \\ [v_4, v_3, v_5, v_1]_3 & \bullet & [v_4, v_3]_1 & [v_4]_0 & [v_4, v_3, v_5]_2 \\ [v_5, v_1]_1 & \bullet & [v_5, v_1, v_3]_2 & [v_5, v_4]_1 & [v_5]_0 \end{pmatrix}$$