Curs 5

Teoria de numărare a lui Pólya

Probleme motivante

1. În câte feluri pot fi așezați John, Ken, Jim, Jack și Rick la o masă rotundă?
2. Câte coliere diferite cu n mărgele pot fi formate folosind m tipuri diferite de mărgele?

Probleme motivante

1. În câte feluri pot fi așezați John, Ken, Jim, Jack și Rick la o masă rotundă?
2. Câte coliere diferite cu n mărgele pot fi formate folosind m tipuri diferite de mărgele?

Observații preliminare

- Ambele probleme au legătură cu numărarea permutărilor în prezența unor simetrii.

Probleme motivante

1. În câte feluri pot fi așezați John, Ken, Jim, Jack și Rick la o masă rotundă?
2. Câte coliere diferite cu n mărgele pot fi formate folosind m tipuri diferite de mărgele?

Observații preliminare

- Ambele probleme au legătură cu numărarea permutărilor în prezența unor simetrii.
    1. Nu există o poziție specifică la o masă rotundă $\Rightarrow$ nu facem distincție între configurațiile obținute prin mutarea locurilor în ordinea acelor de ceasornic,

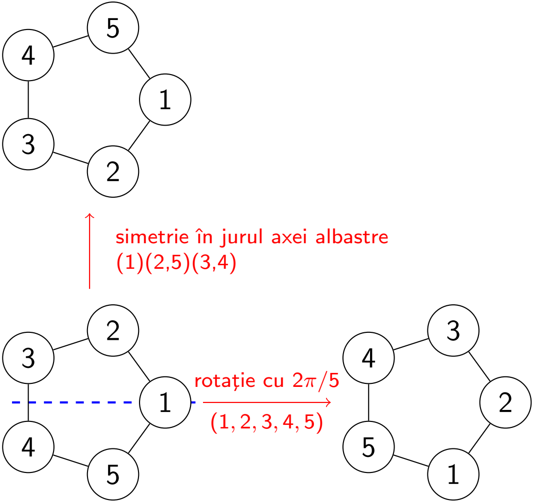
Probleme motivante

1. În câte feluri pot fi așezați John, Ken, Jim, Jack și Rick la o masă rotundă?
2. Câte coliere diferite cu n mărgele pot fi formate folosind m tipuri diferite de mărgele?

Observații preliminare

- Ambele probleme au legătură cu numărarea permutărilor în prezența unor simetrii.
  1. Nu există o poziție specifică la o masă rotundă $\Rightarrow$ nu facem distincție între configurațiile obținute prin mutarea locurilor în ordinea acelor de ceasornic,
  2. În mod asemănător, două coliere se consideră identice dacă unul se obține din celălalt prin rotire sau prin intoarcere pe partea cealaltă.

Exemple de simetrii
Colier cu 5 mărgele



- O simetrie este o permutare a elementelor care produce același obiect (colier);

- O simetrie este o permutare a elementelor care produce același obiect (colier);
- Simetriile sunt permutări (funcții bijective) care pot fi compuse:

$$\text{Exemplu: } \underbrace{(1,2,3,4,5)}_{\text{rotație cu } 2\pi/5} \circ \underbrace{(1,2,3,4,5)}_{\text{rotație cu } 2\pi/5} = \underbrace{(1,3,5,2,4)}_{\text{rotație cu } 4\pi/5}$$

- O simetrie este o permutare a elementelor care produce același obiect (colier);
- Simetriile sunt permutări (funcții bijective) care pot fi compuse:

$$\text{Exemplu: } \underbrace{(1,2,3,4,5)}_{\text{rotație cu } 2\pi/5} \circ \underbrace{(1,2,3,4,5)}_{\text{rotație cu } 2\pi/5} = \underbrace{(1,3,5,2,4)}_{\text{rotație cu } 4\pi/5}$$

- Rezultatul compunerii a 2 simetrii este tot o simetrie (adică o permutare care produce același obiect).

- O simetrie este o permutare a elementelor care produce același obiect (colier);
- Simetriile sunt permutări (funcții bijective) care pot fi compuse:

  Exemplu: $\underbrace{(1,2,3,4,5)}_{\text{rotație cu } 2\pi/5} \circ \underbrace{(1,2,3,4,5)}_{\text{rotație cu } 2\pi/5} = \underbrace{(1,3,5,2,4)}_{\text{rotație cu } 4\pi/5}$
- Rezultatul compunerii a 2 simetrii este tot o simetrie (adică o permutare care produce același obiect).
- Cea mai simplă simetrie este funcția identitate care nu permută nici un element.

  Pentru colierul cu 5 elemente, funcția identitate este permutarea cu structura ciclică (1)(2)(3)(4)(5).

- O simetrie este o permutare a elementelor care produce același obiect (colier);
- Simetriile sunt permutări (funcții bijective) care pot fi compuse:

  Exemplu: $\underbrace{(1,2,3,4,5)}_{\text{rotație cu } 2\pi/5} \circ \underbrace{(1,2,3,4,5)}_{\text{rotație cu } 2\pi/5} = \underbrace{(1,3,5,2,4)}_{\text{rotație cu } 4\pi/5}$
- Rezultatul compunerii a 2 simetrii este tot o simetrie (adică o permutare care produce același obiect).
- Cea mai simplă simetrie este funcția identitate care nu permută nici un element.

  Pentru colierul cu 5 elemente, funcția identitate este permutarea cu structura ciclică (1)(2)(3)(4)(5).
- Pólya a observat că simetriile unui obiect formează un grup.

Grupuri

Un grup este o mulțime G dotată cu o operație binară $\circ$ care satisface 4 proprietăți:

- Închidere: $a \circ b \in G$ pentru toți $a, b \in G$.
- Asociativitate: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ for all $a, b, c \in G$
- Identitate: Există $e \in G$ astfel încât $e \circ a = a \circ e = a$ pentru toți $a \in G$. Elementul e se numește identitate sau element neutru al lui G.
- Inversă: Pentru fiecare $a \in G$ există $b \in G$ astfel încât $a \circ b = b \circ a = e$. Elementul b se numește inversul lui a.

Grupuri

Un grup este o mulțime G dotată cu o operație binară $\circ$ care satisface 4 proprietăți:

Închidere: $a \circ b \in G$ pentru toți $a, b \in G$.

Asociativitate: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ for all $a, b, c \in G$

Identitate: Există $e \in G$ astfel încât $e \circ a = a \circ e = a$ pentru toți $a \in G$. Elementul e se numește identitate sau element neutru al lui G.

Inversă: Pentru fiecare $a \in G$ există $b \in G$ astfel încât $a \circ b = b \circ a = e$. Elementul b se numește inversul lui a.

Exemplu

Grupuri

Un grup este o mulțime G dotată cu o operație binară $\circ$ care satisface 4 proprietăți:

Închidere: $a \circ b \in G$ pentru toți $a, b \in G$.

Asociativitate: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ for all $a, b, c \in G$

Identitate: Există $e \in G$ astfel încât $e \circ a = a \circ e = a$ pentru toți $a \in G$. Elementul e se numește identitate sau element neutru al lui G.

Inversă: Pentru fiecare $a \in G$ există $b \in G$ astfel încât $a \circ b = b \circ a = e$. Elementul b se numește inversul lui a.

Exemplu

1. Mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ cu operația de adunare $(+)$ este grup:
   - Elementul neutru este 0, inversul lui $r \in \mathbb{R}$ este $-r$.

Grupuri

Un grup este o mulțime G dotată cu o operație binară $\circ$ care satisface 4 proprietăți:

- Închidere: $a \circ b \in G$ pentru toți $a, b \in G$.
- Asociativitate: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ for all $a, b, c \in G$
- Identitate: Există $e \in G$ astfel încât $e \circ a = a \circ e = a$ pentru toți $a \in G$. Elementul e se numește identitate sau element neutru al lui G.
- Inversă: Pentru fiecare $a \in G$ există $b \in G$ astfel încât $a \circ b = b \circ a = e$. Elementul b se numește inversul lui a.

Exemplu

1. Mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ cu operația de adunare $(+)$ este grup:
   - Elementul neutru este 0, inversul lui $r \in \mathbb{R}$ este $-r$.
2. Mulțimea S_n a tuturor permutărilor $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ ale lui $\{1, \ldots, n\}$, împreună cu operația de compoziție $\circ$ este grup.

Subgrupuri. Grupuri de permutări

- Un subgrup al unui grup $(G, \circ)$ cu element neutru e este o submulțime nevidă H a lui G astfel încât
  - $a \circ b \in H$ pentru toți $a, b \in H$ (închidere)
  - $e \in H$, și
  - Pentru fiecare $a \in H$ există $b \in H$ astfel încât $a \circ b = b \circ a = e$.
- Un grup of permutări este un subgrup al mulțimii S_n a tuturor permutărilor lui $\{1, \ldots, n\}$.
- Pentru a permutare $\pi \in S_n$ se definesc puterile
  - $\pi^0 = \langle 1, 0, \ldots, n \rangle = (1)(2) \ldots (n)$,
  - $\pi^1 = \pi$, și
  - $\pi^n = \pi \circ \pi^{n-1}$ dacă $n > 1$.

Exemplu

Dacă $\pi = (2, 3)(1, 4, 5, 6)$ atunci

▷ $\pi^0 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$, $\pi^1 = \pi = (2, 3)(1, 4, 5, 6)$,

▷ $\pi^2 = \pi \circ \pi = (1, 5)(2)(3)(4, 6)$, $\pi^3 = \pi \circ \pi^2 = (1, 6, 5, 4)(2, 3)$,

▷ $\pi^4 = \pi \circ \pi^3 = (1)(2)(3)(4)(5)(6) = \pi^0$.

Grupuri ciclice de permutări. Reflecții

Pentru orice π permutare din S_n se definește mulțimea de permutări $\langle\pi\rangle = \{\pi^m \mid m \geq 0\}$. Se observă că $\langle\pi\rangle$ este un subgrup al lui S_n. $\langle\pi\rangle$ se numește subgrupul ciclic generat de π în S_n.

Pentru orice π permutare din S_n se definește mulțimea de permutări $\langle\pi\rangle = \{\pi^m \mid m \geq 0\}$. Se observă că $\langle\pi\rangle$ este un subgrup al lui S_n. $\langle\pi\rangle$ se numește subgrupul ciclic generat de π în S_n.

Exemplu

Grupul ciclic C_n este subgrupul ciclic $\langle(1, 2, \ldots, n)\rangle$ al lui S_n generat de ciclul $(1, 2, \ldots, n)$. C_n conține n elemente:

$$\begin{aligned}
(1, 2, \ldots, n)^0 &= \langle 1, 2, \ldots, n\rangle = (1)(2)\ldots(n) \\
(1, 2, \ldots, n)^1 &= \langle 2, 3, \ldots, n, 1\rangle \\
(1, 2, \ldots, n)^2 &= \langle 3, 4, \ldots, 1, 2\rangle \\
&\ldots \\
(1, 2, \ldots, n)^{n-1} &= \langle n, 1, \ldots, n-1\rangle \\
(1, 2, \ldots, n)^n &= \langle 1, 2, \ldots, n\rangle
\end{aligned}$$

Reflecția unei permutări $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ este permutarea $\langle a_n, \ldots, a_2, a_1\rangle$.

Grupuri ciclice

C_n poate fi identificat cu grupul de simetrii rotaționale ale unui poligon regulat cu n muchii.

Exemplu

$C_4 = \{(1)(2)(3)(4), (1,2,3,4), (1,3)(2,4), (1,4,3,2)\}$ corespunde permutărilor nodurilor din figura de mai jos, care se obțin prin rotirea pătratului cu $90°$, $180°$ sau $270°$.

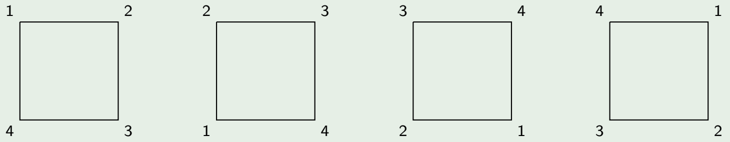


Figure: C_4 ca grup de rotații ale unui pătrat.

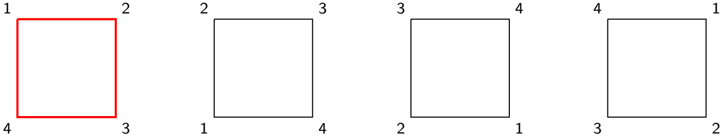
Grup diedral

- Grupul diedral D_n cuprinde elementele lui C_n precum și reflecțiile elementelor lui C_n. De exemplu:

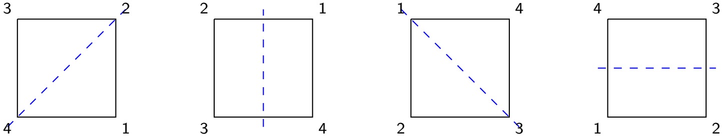
$$
\begin{aligned}
D_4 = &\{\langle 1,2,3,4\rangle, \langle 2,3,4,1\rangle, \langle 3,4,1,2\rangle, \langle 4,1,2,3\rangle\} \cup \\
&\{\langle 4,3,2,1\rangle, \langle 1,4,3,2\rangle, \langle 2,1,4,3\rangle, \langle 3,2,1,4\rangle\} \\
= &\{(1)(2)(3)(4), (1,2,3,4), (1,3)(2,4), (1,4,3,2)\} \cup \\
&\{(1,4)(2,3), (1)(2,4)(3), (1,2)(3,4), (1,3)(2)(4)\}.
\end{aligned}
$$

- D_n are $2 \cdot n$ elemente.
- D_n poate fi identificat cu grupul de simetrii rotaționale și de reflecții ale unui poligon regulat cu n elemente.

D_4 ca grup de simetrii ale unui pătrat



(1)(2)(3)(4) (1,2,3,4) (1,3)(2,4) (1,4,3,2)



(1,3)(2)(4) (1,2)(3,4) (1)(3)(2,4) (1,4),(2,3)

Grup alternant

Noțiuni preliminare

- O transpoziție este un ciclu cu lungimea 2.
- Fiecare ciclu $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ de lungime $p > 1$ al unei n-permutări poate fi scris ca o compoziție de transpoziții:
  - $(a_1, a_2, \ldots, a_p) = (a_1, a_2)(a_2, a_3) \ldots (a_{p-1}, a_p)$.
- Fiecare n-permutare este o compoziție de cicluri (vezi curs 4) $\Rightarrow$ fiecare n-permutare este o compoziție de transpoziții.
- O n-permutare este
  - pară dacă este compoziția unor cicluri de lungime 1 cu un număr par de transpozi
  - impară dacă este compoziția unor cicluri de lungime 1 cu un număr impar de transpoziții.
- Se poate demonstra că orice n-permutare este fie pară, fie impară.

Grupul alternant A_n este format din permutările pare ale lui S_n.

Colorări

O colorare de n obiecte $\{1, 2, \ldots, n\}$ este o funcție $c : \{1, 2, \ldots, n\} \to K$ unde $K = \{k_1, \ldots, k_m\}$ conține m culori.

- Orice colorare c poate fi reprezentată ca o permutare cu repetiție $\langle c(1), \ldots, c(n) \rangle$.
- Sunt m^n colorări posibile.

Exemplu

Colorarea $c : \{1, 2, 3, 4\}$ care mapează $1 \mapsto r, 2 \mapsto g, 3 \mapsto r, 4 \mapsto r$ este reprezentată de $\langle r, g, r, r \rangle$.

- Fie C mulțimea tuturor colorărilor $c : \{1, \ldots, n\} \to K$. Dacă π este o permutare și $c = \langle c(1), \ldots, c(n) \rangle$ este o colorare, definim funcția $\pi^* : C \to C$ definită astfel: $\pi^*(\langle c(1), \ldots, c(n) \rangle) := \langle c(\pi(1)), \ldots, c(\pi(n)) \rangle$.

Exemplu

Dacă $\pi = (1, 2, 3, 4)$, atunci $\pi^*(\langle r, g, r, r \rangle) = \langle g, r, r, r \rangle$.

Grupuri de colorări. Colorări echivalente

G: grup de n-permutări

$c_1, c_2 : \{1, 2, \ldots, n\} \to K$ colorări

- c_1 și c_2 sunt echivalente în raport cu G, și scriem $c_1 \sim_G c_2$ dacă există $\pi \in G$ astfel încât $c_2 = \pi^*(c_1)$.

Exemplu

$G = C_4$, $c = \langle g, g, g, r\rangle$

- $C_4 = \langle \pi \rangle = \{\pi^n \mid n \geq 0\}$ unde $\pi = (1, 2, 3, 4)$.
- $C_4 = \{\langle 1, 2, 3, 4\rangle, \langle 2, 3, 4, 1\rangle, \langle 3, 4, 1, 2\rangle, \langle 4, 1, 2, 3\rangle\}$

$\Rightarrow$ colorările echivalente cu c sunt:

$\langle c(1), c(2), c(3), c(4)\rangle = \langle g, g, g, r\rangle$
$\langle c(2), c(3), c(4), c(1)\rangle = \langle g, g, r, g\rangle$
$\langle c(3), c(4), c(1), c(2)\rangle = \langle g, r, g, g\rangle$
$\langle c(4), c(1), c(2), c(3)\rangle = \langle r, g, g, g\rangle$

Grupuri de colorări. Colorări echivalente

G: grup de n-permutări
C : mulțime de colorări $c : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{k_1, \ldots, k_m\}$ astfel încât $\pi^*(c) \in C$ pentru orice colorare $c \in C$
OBSERVAȚII:

1. $\sim_G$ este o relație de echivalență (reflexivă/simetrică/tranzitivă) $\Rightarrow$ C poate fi partiționată în clase de echivalență

$$\bar{c} = \{c' \in C \mid c' \sim_G c\} = \{\pi^*(c) \mid \pi \in G\}$$

Grupuri de colorări. Colorări echivalente

G: grup de n-permutări
C : mulțime de colorări $c : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{k_1, \ldots, k_m\}$ astfel încât $\pi^*(c) \in C$ pentru orice colorare $c \in C$

OBSERVAȚII:

1. $\sim_G$ este o relație de echivalență (reflexivă/simetrică/tranzitivă) $\Rightarrow$ C poate fi partiționată în clase de echivalență

$$\bar{c} = \{c' \in C \mid c' \sim_G c\} = \{\pi^*(c) \mid \pi \in G\}$$

2. $\bar{c}$ este clasa de echivalență a colorării c în raport cu relația de echivalență $\sim_G$. În literatură, $\bar{c}$ se numește orbita lui c sub acțiunea grupului G.

Grupuri de colorări. Colorări echivalente

G: grup de n-permutări
C : mulțime de colorări $c : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{k_1, \ldots, k_m\}$ astfel încât $\pi^*(c) \in C$ pentru orice colorare $c \in C$
OBSERVAȚII:

1. $\sim_G$ este o relație de echivalență (reflexivă/simetrică/tranzitivă) $\Rightarrow C$ poate fi partiționată în clase de echivalență

$$\bar{c} = \{c' \in C \mid c' \sim_G c\} = \{\pi^*(c) \mid \pi \in G\}$$

2. $\bar{c}$ este clasa de echivalență a colorării c în raport cu relația de echivalență $\sim_G$. În literatură, $\bar{c}$ se numește orbita lui c sub acțiunea grupului G.
3. Numărul $|\bar{c}|$ de elemente al mulțimii $\bar{c}$ reprezintă numărul de colorări echivalente cu c în raport cu G.

Grupuri de colorări. Colorări echivalente

G: grup de n-permutări
C : mulțime de colorări $c : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{k_1, \ldots, k_m\}$ astfel încât $\pi^*(c) \in C$ pentru orice colorare $c \in C$
OBSERVAȚII:

1. $\sim_G$ este o relație de echivalență (reflexivă/simetrică/tranzitivă) $\Rightarrow$ C poate fi partiționată în clase de echivalență

$$\bar{c} = \{c' \in C \mid c' \sim_G c\} = \{\pi^*(c) \mid \pi \in G\}$$

2. $\bar{c}$ este clasa de echivalență a colorării c în raport cu relația de echivalență $\sim_G$. În literatură, $\bar{c}$ se numește orbita lui c sub acțiunea grupului G.
3. Numărul $|\bar{c}|$ de elemente al mulțimii $\bar{c}$ reprezintă numărul de colorări echivalente cu c în raport cu G.
4. Vrem să numărăm câte colorări neechivalente există, adică

Grupuri de colorări. Colorări echivalente

G: grup de n-permutări
C : mulțime de colorări $c : \{1, 2, \ldots, n\} \rightarrow \{k_1, \ldots, k_m\}$ astfel încât $\pi^*(c) \in C$ pentru orice colorare $c \in C$

OBSERVAȚII:

1. $\sim_G$ este o relație de echivalență (reflexivă/simetrică/tranzitivă) $\Rightarrow$ C poate fi partiționată în clase de echivalență

$$\bar{c} = \{c' \in C \mid c' \sim_G c\} = \{\pi^*(c) \mid \pi \in G\}$$

2. $\bar{c}$ este clasa de echivalență a colorării c în raport cu relația de echivalență $\sim_G$. În literatură, $\bar{c}$ se numește orbita lui c sub acțiunea grupului G.
3. Numărul $|\bar{c}|$ de elemente al mulțimii $\bar{c}$ reprezintă numărul de colorări echivalente cu c în raport cu G.
4. Vrem să numărăm câte colorări neechivalente există, adică

   câte clase de echivalență are C?

Exemplu (Colorarea cu cel mult 2 culori a vârfurilor unui pătrat)

$S = \{1,2,3,4\}$ este mulțimea vârfurilor unui pătrat și C este mulțimea tuturor colorărilor posibile ale acestor noduri cu roșu (r) și galben (g):

$$\begin{aligned} C = \{&\langle g,g,g,g\rangle, \langle g,g,g,r\rangle, \langle g,g,r,g\rangle, \langle g,g,r,r\rangle,\\ &\langle g,r,g,g\rangle, \langle g,r,g,r\rangle, \langle g,r,r,g\rangle, \langle g,r,r,r\rangle,\\ &\langle r,g,g,g\rangle, \langle r,g,g,r\rangle, \langle r,g,r,g\rangle, \langle r,g,r,r\rangle,\\ &\langle r,r,g,g\rangle, \langle r,r,g,r\rangle, \langle r,r,r,g\rangle, \langle r,r,r,r\rangle\}\end{aligned}$$

Considerăm două colorări echivalente dacă putem obține una din cealaltă rotind pătratul $\Rightarrow$ considerăm $G = C_4 \Rightarrow$ 6 clase de echivalență ale lui C:

$$\begin{aligned}
\overline{\langle g,g,g,g\rangle} &= \{\langle g,g,g,g\rangle\},\\
\overline{\langle g,g,g,r\rangle} &= \{\langle g,g,g,r\rangle, \langle g,g,r,g\rangle, \langle g,r,g,g\rangle, \langle r,g,g,g\rangle\}\\
\overline{\langle g,g,r,r\rangle} &= \{\langle g,g,r,r\rangle, \langle g,r,r,g\rangle, \langle r,g,g,r\rangle, \langle r,r,g,g\rangle\},\\
\overline{\langle g,r,g,r\rangle} &= \{\langle g,r,g,r\rangle, \langle r,g,r,g\rangle\},\\
\overline{\langle g,r,r,r\rangle} &= \{\langle g,r,r,r\rangle, \langle r,g,r,r\rangle, \langle r,r,g,r\rangle, \langle r,r,r,g\rangle\},\\
\overline{\langle r,r,r,r\rangle} &= \{\langle r,r,r,r\rangle\}
\end{aligned}$$

- **Problema mesei rotunde:** S este mulțimea celor n locuri la o masă rotundă, G este C_n, iar C este mulțimea celor $n!$ alocări de locuri la n persoane diferite.

- **Problema mesei rotunde:** S este mulțimea celor n locuri la o masă rotundă, G este C_n, iar C este mulțimea celor $n!$ alocări de locuri la n persoane diferite.
- **Problema colierului:** S este mulțimea celor n poziții ale mărgelelor, G este D_n, iar C este mulțimea celor m^n aranjamente possible de m feluri de mărgele pe colier.

- **Problema mesei rotunde:** S este mulțimea celor n locuri la o masă rotundă, G este C_n, iar C este mulțimea celor $n!$ alocări de locuri la n persoane diferite.
- **Problema colierului:** S este mulțimea celor n poziții ale mărgelelor, G este D_n, iar C este mulțimea celor m^n aranjamente possible de m feluri de mărgele pe colier.
- Vom prezenta o metodă generală de calcul al colorărilor neechivalente.

G: grup de n-permutări
C : mulțimea tuturor colorărilor $c : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{k_1, \ldots, k_m\}$
$\pi \in G$

Mulțimea invariantă a lui π în C:

$$C_\pi := \{c \in C \mid \pi^*(c) = c\}$$

Stabilizatorul lui c în G:

$$G_c := \{\pi \in G \mid \pi^*(c) = c\}$$

G_c este întotdeauna un subgrup al lui G.

Orbita lui c sub acțiunea grupului G:

$$\bar{c} := \{\pi^*(c) \mid \pi \in G\}$$

Exemplu (Colorarea vârfurilor unui pătrat cu 2 culori)

Considerăm

$$C = \{\langle g,g,g,g\rangle, \langle g,g,g,r\rangle, \langle g,g,r,g\rangle, \langle g,g,r,r\rangle, \\ \langle g,r,g,g\rangle, \langle g,r,g,r\rangle, \langle g,r,r,g\rangle, \langle g,r,r,r\rangle, \\ \langle r,g,g,g\rangle, \langle r,g,g,r\rangle, \langle r,g,r,g\rangle, \langle r,g,r,r\rangle, \\ \langle r,r,g,g\rangle, \langle r,r,g,r\rangle, \langle r,r,r,g\rangle, \langle r,r,r,r\rangle\}.$$

și grupul diedral $G = D_4$. Atunci

$$\begin{aligned} \overline{\langle g,g,g,r\rangle} &= \{\langle g,g,g,r\rangle, \langle g,g,r,g\rangle, \langle g,r,g,g\rangle, \langle r,g,g,g\rangle\} \\ G_{\langle g,g,g,r\rangle} &= \{(1)(2)(3)(4), (1,3)(2)(4)\} \\ \overline{\langle g,r,g,r\rangle} &= \{\langle g,r,g,r\rangle, \langle r,g,r,g\rangle\} \\ G_{\langle g,r,g,r\rangle} &= \{(1)(2)(3)(4), (1,3)(2,4), (1,3)(2)(4), (1)(2,4)(3)\} \end{aligned}$$

Observație. $|G_{\langle g,g,g,r\rangle}| \cdot |\overline{\langle g,g,g,r\rangle}| = 2 \cdot 4 = 8 = |G|$ și $|G_{\langle g,r,g,r\rangle}| \cdot |\overline{\langle g,r,g,r\rangle}| = 4 \cdot 2 = 8 = |G|$.

Lemă

Fie G un grup care acționează pe o mulțime de colorări C. Pentru orice colorare $c \in C$ are loc egalitatea $|G_c| \cdot |\overline{c}| = |G|$.

Lema lui Burnside

Numărul N de clase de echivalență ale mulțimii de colorări C în prezența simetriilor lui G este

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |C_\pi|.$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}|C_\pi| &= \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}\sum_{c\in C}[\pi^*(c)=c]\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{c\in C}\sum_{\pi\in G}[\pi^*(c)=c]\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{c\in C}|G_c|\\
&= \sum_{c\in C}\frac{1}{\overline{c}} = \sum_{\overline{c}}\sum_{c\in\overline{c}}\frac{1}{\overline{c}}\\
&= \sum_{\overline{c}} 1 = N
\end{aligned}
$$

unde $[\pi^*(c)=c] := \begin{cases} 1 & \text{dacă } \pi^*(c)=c \\ 0 & \text{în caz contrar} \end{cases}$

- Ca să putem aplica Lemma lui Burnside la numărarea claselor de echivalență ale unei mulțimi de colorări C, trebuie să calculăm mărimea mulțimii invariante C_π pentru orice permutare $\pi \in G$.
- Calculul mărimii mulțimiii C_π
  - Dacă colorarea c este invariantă sub acțiunea lui π și π conține un ciclu $(i_1, \ldots, i_p)$, atunci obiectele $i_1, \ldots, i_p$ trebuie să aibă aceeași culoare.
  - Dacă π are k cicluri disjuncte atunci numărul de colorări invariante sub acțiunea lui π este $|C_\pi| = m^k$, unde m este nr. total de culori disponibile.

Exemplu

Dacă S este mulțimea vârfurilor unui pătrat și $G = D_4$ atunci $|C_{(1,2,3,4)}| = m$, $|C_{(1,2)(3,4)}| = m^2$, $|C_{(1)(2,4)(3)}| = m^3$ și $|C_{(1)(2)(3)(4)}| = m^4$.

Bibliografie

1. J. M. Harris, J. L. Hirst, M. J. Mossinghoff. *Combinatorics and Graph Theory, Second Edition*. Springer 2008.

   §2.7. Pólya's Theory of Counting.

2. G. Pólya. *Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen, und chemische Verbindungen*, Acta Math. 68 (1937), 145–254; English transl. in G. Polýa and R. C. Read, *Combinatorial Enumeration of Groups, Graphs, and Chemical Compounds* (1987).