Teoria Grafurilor și Combinatorică

Curs 1: Introducere.
Principii de numărare. Aranjamente, permutări și combinări

octombrie 2015

Scopul cursului

Familiarizare cu noțiunile de bază din combinatorică și teoria grafurilor

Cuprins

Aspecte organizatorice

- Curs: Mircea Marin
  Seminar: Monica Tirea / Gabriel Iuhasz / Mircea Marin
- Pagina web:
  http:/web.info.uvt.ro/~mmarin/lectures/TGC
- Material de curs: disponibil din pagina web
- Evaluare: 50% probă scrisă (examen final), 50% seminar

Descrierea primului curs

- Principii fundamentale de numărare
  - Regula produsului
  - Regula sumei
  - Demonstrații combinatoriale; exemple
- Tehnici de numărare pentru
  - combinări - selecții neordonate de elemente distincte din o mulțime finită
  - permutări - selecții ordonate de elemente distincte din o mulțime finită
- Generalizări
  - permutări cu repetiție
  - combinări cu repetiție
  - permutări cu elemente nediferențiate
- Numere binomiale și multinomiale

Regula produsului. Dacă o procedură poate fi descompusă în o secvență de 2 proceduri astfel încât

- prima se poate efectua în n_1 feluri
- a doua se poate efectua în n_2 feluri

atunci există $n_1 \cdot n_2$ feluri de a efectua procedura.

Regula produsului. Dacă o procedură poate fi descompusă în o secvență de 2 proceduri astfel încât

- prima se poate efectua în n_1 feluri
- a doua se poate efectua în n_2 feluri

atunci există $n_1 \cdot n_2$ feluri de a efectua procedura.

Regula generalizată a produsului. Dacă o procedură poate fi descompusă în o secvență de m proceduri astfel încât

- prima se poate efectua în n_1 feluri
- a doua se poate efectua în n_2 feluri
- ...
- a m-a se poate efectua în n_m feluri

atunci există $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m$ feluri de a efectua procedura.

Aplicații ale regulii produsului

(1) O companie are 12 birouri și 2 angajați: Gheorghe și Ion. În câte feluri se pot aloca birouri diferite celor doi angajați?

(1) O companie are 12 birouri și 2 angajați: Gheorghe și Ion. În câte feluri se pot aloca birouri diferite celor doi angajați?
Răspuns

(1) O companie are 12 birouri și 2 angajați: Gheorghe și Ion. În câte feluri se pot aloca birouri diferite celor doi angajați?

Răspuns

- Alocarea se poate descompune în 2 operații distincte: alocarea unui birou pentru Gheorghe, urmată de alocarea unui birou pentru Ion.

(1) O companie are 12 birouri și 2 angajați: Gheorghe și Ion. În câte feluri se pot aloca birouri diferite celor doi angajați?

Răspuns

- Alocarea se poate descompune în 2 operații distincte: alocarea unui birou pentru Gheorghe, urmată de alocarea unui birou pentru Ion.
- Există 12 alternative pentru prima operație, deoarece sunt 12 birouri în total.

(1) O companie are 12 birouri și 2 angajați: Gheorghe și Ion. În câte feluri se pot aloca birouri diferite celor doi angajați?

Răspuns

- Alocarea se poate descompune în 2 operații distincte: alocarea unui birou pentru Gheorghe, urmată de alocarea unui birou pentru Ion.
- Există 12 alternative pentru prima operație, deoarece sunt 12 birouri în total.
- Există 11 alternative pentru operația a doua, deoarece biroul alocat lui Gheorghe nu mai este liber.

Aplicații ale regulii produsului

(1) O companie are 12 birouri și 2 angajați: Gheorghe și Ion. În câte feluri se pot aloca birouri diferite celor doi angajați?

Răspuns

- Alocarea se poate descompune în 2 operații distincte: alocarea unui birou pentru Gheorghe, urmată de alocarea unui birou pentru Ion.
- Există 12 alternative pentru prima operație, deoarece sunt 12 birouri în total.
- Există 11 alternative pentru operația a doua, deoarece biroul alocat lui Gheorghe nu mai este liber.

$\Rightarrow$ conform regulii produsului, sunt $12 \cdot 11 = 132$ variante.

(2) Într-o sală de laborator, scaunele sunt numerotate cu o literă mare urmată de un număr între 1 și 50. Câte scaune pot fi numerotate diferit în felul acesta?
Se presupune că sunt 26 litere mari.

Aplicații ale regulii produsului

(2) Într-o sală de laborator, scaunele sunt numerotate cu o literă mare urmată de un număr între 1 și 50. Câte scaune pot fi numerotate diferit în felul acesta?
Se presupune că sunt 26 litere mari.
Răspuns

(2) Într-o sală de laborator, scaunele sunt numerotate cu o literă mare urmată de un număr între 1 și 50. Câte scaune pot fi numerotate diferit în felul acesta?
Se presupune că sunt 26 litere mari.

Răspuns

- Problema poate fi descompusă în o secvență de 2 subprobleme: prima este alegerea unei litere din cele 26 posibile, iar următoarea este alegerea unui număr din cele 50 posibile.

(2) Într-o sală de laborator, scaunele sunt numerotate cu o literă mare urmată de un număr între 1 și 50. Câte scaune pot fi numerotate diferit în felul acesta?
Se presupune că sunt 26 litere mari.

Răspuns

- Problema poate fi descompusă în o secvență de 2 subprobleme: prima este alegerea unei litere din cele 26 posibile, iar următoarea este alegerea unui număr din cele 50 posibile.
- conform regulii produsului, există $26 \cdot 50 = 1300$ variante.

(2) Într-o sală de laborator, scaunele sunt numerotate cu o literă mare urmată de un număr între 1 și 50. Câte scaune pot fi numerotate diferit în felul acesta?
Se presupune că sunt 26 litere mari.

Răspuns

- Problema poate fi descompusă în o secvență de 2 subprobleme: prima este alegerea unei litere din cele 26 posibile, iar următoarea este alegerea unui număr din cele 50 posibile.
- conform regulii produsului, există $26 \cdot 50 = 1300$ variante.

(3) Câte șiruri diferite de 7 biți există?

Aplicații ale regulii produsului

(2) Într-o sală de laborator, scaunele sunt numerotate cu o literă mare urmată de un număr între 1 și 50. Câte scaune pot fi numerotate diferit în felul acesta?
Se presupune că sunt 26 litere mari.

Răspuns

- Problema poate fi descompusă în o secvență de 2 subprobleme: prima este alegerea unei litere din cele 26 posibile, iar următoarea este alegerea unui număr din cele 50 posibile.
- conform regulii produsului, există $26 \cdot 50 = 1300$ variante.

(3) Câte șiruri diferite de 7 biți există?

Răspuns

(2) Într-o sală de laborator, scaunele sunt numerotate cu o literă mare urmată de un număr între 1 și 50. Câte scaune pot fi numerotate diferit în felul acesta?
Se presupune că sunt 26 litere mari.

Răspuns

- Problema poate fi descompusă în o secvență de 2 subprobleme: prima este alegerea unei litere din cele 26 posibile, iar următoarea este alegerea unui număr din cele 50 posibile.
- conform regulii produsului, există $26 \cdot 50 = 1300$ variante.

(3) Câte șiruri diferite de 7 biți există?

Răspuns

- Fiecare din cei 7 biți poate fi ales în 2 feluri: 0 sau 1.

(2) Într-o sală de laborator, scaunele sunt numerotate cu o literă mare urmată de un număr între 1 și 50. Câte scaune pot fi numerotate diferit în felul acesta?
Se presupune că sunt 26 litere mari.

Răspuns

- Problema poate fi descompusă în o secvență de 2 subprobleme: prima este alegerea unei litere din cele 26 posibile, iar următoarea este alegerea unui număr din cele 50 posibile.
- conform regulii produsului, există $26 \cdot 50 = 1300$ variante.

(3) Câte șiruri diferite de 7 biți există?

Răspuns

- Fiecare din cei 7 biți poate fi ales în 2 feluri: 0 sau 1.

$\Rightarrow$ conform regulii produsului, există $2^7 = 128$ variante.

(4) Câte funcții sunt de la o mulțime cu m elemente la o mulțime cu n elemente?

Răspuns $f : \{a_1, \ldots, a_m\} \to \{b_1, \ldots, b_n\}$

(4) Câte funcții sunt de la o mulțime cu m elemente la o mulțime cu n elemente?

Răspuns $f : \{a_1, \ldots, a_m\} \to \{b_1, \ldots, b_n\}$

- Definirea unei astfel de funcții poate fi descompusă în m etape independente: în etapa i se fixează valoarea lui $f(a_i)$

(4) Câte funcții sunt de la o mulțime cu m elemente la o mulțime cu n elemente?

Răspuns $f : \{a_1, \ldots, a_m\} \to \{b_1, \ldots, b_n\}$

- Definirea unei astfel de funcții poate fi descompusă în m etape independente: în etapa i se fixează valoarea lui $f(a_i)$
- Etapa i are n posibilități, deoarece putem alege pentru $f(a_i)$ orice valoare din mulțimea $\{b_1, \ldots, b_n\}$

(4) Câte funcții sunt de la o mulțime cu m elemente la o mulțime cu n elemente?

Răspuns $f : \{a_1, \ldots, a_m\} \to \{b_1, \ldots, b_n\}$

- Definirea unei astfel de funcții poate fi descompusă în m etape independente: în etapa i se fixează valoarea lui $f(a_i)$
- Etapa i are n posibilități, deoarece putem alege pentru $f(a_i)$ orice valoare din mulțimea $\{b_1, \ldots, b_n\}$

$\Rightarrow$ conform regulii produsului, numărul de funcții este $\underbrace{n \cdot \ldots \cdot n}_{m \text{ ori}} = n^m$

(5) Câte funcții injective sunt de la o mulțime cu m elemente la o mulțime cu n elemente?
[Observați că trebuie să avem $m \leq n$.]

(5) Câte funcții injective sunt de la o mulțime cu m elemente la o mulțime cu n elemente?
[Observați că trebuie să avem $m \leq n$.]
Răspuns: descompunem problema în n subprobleme distincte

(5) Câte funcții injective sunt de la o mulțime cu m elemente la o mulțime cu n elemente?
[Observați că trebuie să avem $m \leq n$.]
Răspuns: descompunem problema în n subprobleme distincte

- Presupunem că $f : \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \to \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$

(5) Câte funcții injective sunt de la o mulțime cu m elemente la o mulțime cu n elemente?
[Observați că trebuie să avem $m \leq n$.]

Răspuns: descompunem problema în n subprobleme distincte

- Presupunem că $f : \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \to \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$
- Există n căi de alegere a valorii lui $f(a_1) \in \{b_1, \ldots, b_n\}$.

(5) Câte funcții injective sunt de la o mulțime cu m elemente la o mulțime cu n elemente?
[Observați că trebuie să avem $m \leq n$.]

Răspuns: descompunem problema în n subprobleme distincte

- Presupunem că $f : \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \to \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$
- Există n căi de alegere a valorii lui $f(a_1) \in \{b_1, \ldots, b_n\}$.
- Există $n - 1$ căi de alegere a valorii lui $f(a_2) \in \{b_1, \ldots, b_n\} - \{f(a_1)\}$.

(5) Câte funcții injective sunt de la o mulțime cu m elemente la o mulțime cu n elemente?
[Observați că trebuie să avem $m \leq n$.]

Răspuns: descompunem problema în n subprobleme distincte

- Presupunem că $f : \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \to \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$
- Există n căi de alegere a valorii lui $f(a_1) \in \{b_1, \ldots, b_n\}$.
- Există $n - 1$ căi de alegere a valorii lui $f(a_2) \in \{b_1, \ldots, b_n\} - \{f(a_1)\}$.

  $\vdots$
- Există $n - (m - 1)$ căi de alegere a valorii lui $f(a_m) \in \{b_1, \ldots, b_n\} - \{f(a_1), \ldots, f(a_{m-1})\}$.

(5) Câte funcții injective sunt de la o mulțime cu m elemente la o mulțime cu n elemente?
[Observați că trebuie să avem $m \leq n$.]

Răspuns: descompunem problema în n subprobleme distincte

- Presupunem că $f : \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \to \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$
- Există n căi de alegere a valorii lui $f(a_1) \in \{b_1, \ldots, b_n\}$.
- Există $n - 1$ căi de alegere a valorii lui $f(a_2) \in \{b_1, \ldots, b_n\} - \{f(a_1)\}$.

  $\vdots$
- Există $n - (m - 1)$ căi de alegere a valorii lui $f(a_m) \in \{b_1, \ldots, b_n\} - \{f(a_1), \ldots, f(a_{m-1})\}$.

$\Rightarrow$ conform regulii produsului, există $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$ astfel de funcții.

(6) Numărul de submulțimi al unei mulțimi finite $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ este 2^n.

(6) Numărul de submulțimi al unei mulțimi finite $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ este 2^n.

Demonstrație

(6) Numărul de submulțimi al unei mulțimi finite $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ este 2^n.

Demonstrație

- Pentru fiecare submulțime B a lui A definim șirul de biți $b_1 b_2 \ldots b_n$ cu

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{dacă } a_i \in B \\ 0 & \text{dacă } a_i \notin B \end{cases}$$

(6) Numărul de submulțimi al unei mulțimi finite $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ este 2^n.

Demonstrație

- Pentru fiecare submulțime B a lui A definim șirul de biți $b_1 b_2 \dots b_n$ cu
$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{dacă } a_i \in B \\ 0 & \text{dacă } a_i \notin B \end{cases}$$
- Numărul de submulțimi al lui A coincide cu numărul de șiruri distincte de biți $b_1 \dots b_n$

(6) Numărul de submulțimi al unei mulțimi finite $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ este 2^n.

Demonstrație

- Pentru fiecare submulțime B a lui A definim șirul de biți $b_1 b_2 \ldots b_n$ cu
$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{dacă } a_i \in B \\ 0 & \text{dacă } a_i \notin B \end{cases}$$
- Numărul de submulțimi al lui A coincide cu numărul de șiruri distincte de biți $b_1 \ldots b_n$
- Definirea a unui șir de biți de lungime n se poate descompune în n subprobleme distincte: subproblema i fixează valoarea bitului b_i

(6) Numărul de submulțimi al unei mulțimi finite $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ este 2^n.

Demonstrație

- Pentru fiecare submulțime B a lui A definim șirul de biți $b_1 b_2 \ldots b_n$ cu
$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{dacă } a_i \in B \\ 0 & \text{dacă } a_i \notin B \end{cases}$$
- Numărul de submulțimi al lui A coincide cu numărul de șiruri distincte de biți $b_1 \ldots b_n$
- Definirea a unui șir de biți de lungime n se poate descompune în n subprobleme distincte: subproblema i fixează valoarea bitului b_i

$\Rightarrow$ conform regulii produsului, există $\underbrace{2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ ori}} = 2^n$ astfel de șiruri.

(6) Numărul de submulțimi al unei mulțimi finite $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ este 2^n.

Demonstrație

- Pentru fiecare submulțime B a lui A definim șirul de biți $b_1 b_2 \ldots b_n$ cu
$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{dacă } a_i \in B \\ 0 & \text{dacă } a_i \notin B \end{cases}$$
- Numărul de submulțimi al lui A coincide cu numărul de șiruri distincte de biți $b_1 \ldots b_n$
- Definirea a unui șir de biți de lungime n se poate descompune în n subprobleme distincte: subproblema i fixează valoarea bitului b_i

$\Rightarrow$ conform regulii produsului, există $\underbrace{2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ ori}} = 2^n$ astfel de șiruri.

$\Rightarrow$ numărul de submulțimi al lui S este 2^n.

Regula sumei. Dacă o procedură se poate face în 2 feluri, pentru felul i sunt n_i variante, și nici una din variantele de primul fel nu coincide cu vreo variantă de felul 2, atunci există $n_1 + n_2$ variante de a efectua procedura.

Regula sumei. Dacă o procedură se poate face în 2 feluri, pentru felul i sunt n_i variante, și nici una din variantele de primul fel nu coincide cu vreo variantă de felul 2, atunci există $n_1 + n_2$ variante de a efectua procedura.

Regula generalizată a sumei. Presupunem că o procedură poate fi efectuată în m feluri, pentru felul i sunt n_i variante, și variantele efectuate în feluri diferite sunt diferite. Atunci există $n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ variante de a efectua procedura respectivă.

Aplicații ale regulii sumei

(1) Un student trebuie să aleagă un proiect de programare din 3 liste. Prima listă conține 9 proiecte, a doua 8, iar a treia 12. Nici un proiect nu apare în mai multe liste. Câte proiecte posibile există?

Aplicații ale regulii sumei

(1) Un student trebuie să aleagă un proiect de programare din 3 liste. Prima listă conține 9 proiecte, a doua 8, iar a treia 12. Nici un proiect nu apare în mai multe liste. Câte proiecte posibile există?

Răspuns

(1) Un student trebuie să aleagă un proiect de programare din 3 liste. Prima listă conține 9 proiecte, a doua 8, iar a treia 12. Nici un proiect nu apare în mai multe liste. Câte proiecte posibile există?

Răspuns

- Proiectul poate fi ales independent din una din cele 3 liste

(1) Un student trebuie să aleagă un proiect de programare din 3 liste. Prima listă conține 9 proiecte, a doua 8, iar a treia 12. Nici un proiect nu apare în mai multe liste. Câte proiecte posibile există?

Răspuns

- Proiectul poate fi ales independent din una din cele 3 liste
- Deoarece nici un project nu apare în mai multe liste, putem aplica regula sumei $\Rightarrow 9 + 8 + 12 = 29$ posibilități.

Probleme mai complexe de numărare

Multe probleme de numărare nu pot fi rezolvate folosind doar regula sumei sau doar regula produsului, însă pot fi rezolvate dacă folosim ambele reguli.

Exemple

Probleme mai complexe de numărare

Multe probleme de numărare nu pot fi rezolvate folosind doar regula sumei sau doar regula produsului, însă pot fi rezolvate dacă folosim ambele reguli.

EXEMPLE

(1) Se știe că o parolă este un șir între 6 și 8 caractere lungime, și că fiecare caracter este fie o literă mare sau o cifră zecimală. Fiecare parolă conține cel puțin o cifră. Câte parole posibile sunt?

Probleme mai complexe de numărare

Multe probleme de numărare nu pot fi rezolvate folosind doar regula sumei sau doar regula produsului, însă pot fi rezolvate dacă folosim ambele reguli.

EXEMPLE

(1) Se știe că o parolă este un șir între 6 și 8 caractere lungime, și că fiecare caracter este fie o literă mare sau o cifră zecimală. Fiecare parolă conține cel puțin o cifră. Câte parole posibile sunt?

Răspuns

Multe probleme de numărare nu pot fi rezolvate folosind doar regula sumei sau doar regula produsului, însă pot fi rezolvate dacă folosim ambele reguli.

EXEMPLE

(1) Se știe că o parolă este un șir între 6 și 8 caractere lungime, și că fiecare caracter este fie o literă mare sau o cifră zecimală. Fiecare parolă conține cel puțin o cifră. Câte parole posibile sunt?

Răspuns

- Fie P numărul total de parole, și P_6, P_7 și P_8 numărul de parole cu lungimea 6, 7, sau 8.

Multe probleme de numărare nu pot fi rezolvate folosind doar regula sumei sau doar regula produsului, însă pot fi rezolvate dacă folosim ambele reguli.

EXEMPLE

(1) Se știe că o parolă este un șir între 6 și 8 caractere lungime, și că fiecare caracter este fie o literă mare sau o cifră zecimală. Fiecare parolă conține cel puțin o cifră. Câte parole posibile sunt?

Răspuns

- Fie P numărul total de parole, și P_6, P_7 și P_8 numărul de parole cu lungimea 6, 7, sau 8.
- Conform regulii sumei, $P = P_6 + P_7 + P_8$.

Multe probleme de numărare nu pot fi rezolvate folosind doar regula sumei sau doar regula produsului, însă pot fi rezolvate dacă folosim ambele reguli.

EXEMPLE

(1) Se știe că o parolă este un șir între 6 și 8 caractere lungime, și că fiecare caracter este fie o literă mare sau o cifră zecimală. Fiecare parolă conține cel puțin o cifră. Câte parole posibile sunt?

Răspuns

- Fie P numărul total de parole, și P_6, P_7 și P_8 numărul de parole cu lungimea 6, 7, sau 8.
- Conform regulii sumei, $P = P_6 + P_7 + P_8$.
- Calculul lui P_m pentru $m \in \{6, 7, 8\}$, se poate face astfel:

Multe probleme de numărare nu pot fi rezolvate folosind doar regula sumei sau doar regula produsului, însă pot fi rezolvate dacă folosim ambele reguli.

EXEMPLE

(1) Se știe că o parolă este un șir între 6 și 8 caractere lungime, și că fiecare caracter este fie o literă mare sau o cifră zecimală. Fiecare parolă conține cel puțin o cifră. Câte parole posibile sunt?

Răspuns

- Fie P numărul total de parole, și P_6, P_7 și P_8 numărul de parole cu lungimea 6, 7, sau 8.
- Conform regulii sumei, $P = P_6 + P_7 + P_8$.
- Calculul lui P_m pentru $m \in \{6, 7, 8\}$, se poate face astfel:
  - Fie W_m numărul de șiruri de litere mari și cifre cu lungimea m. Conform regulii produsului, $W_m = (26 + 10)^m = 36^m$

Probleme mai complexe de numărare

Multe probleme de numărare nu pot fi rezolvate folosind doar regula sumei sau doar regula produsului, însă pot fi rezolvate dacă folosim ambele reguli.

EXEMPLE

(1) Se știe că o parolă este un șir între 6 și 8 caractere lungime, și că fiecare caracter este fie o literă mare sau o cifră zecimală. Fiecare parolă conține cel puțin o cifră. Câte parole posibile sunt?

Răspuns

- Fie P numărul total de parole, și P_6, P_7 și P_8 numărul de parole cu lungimea 6, 7, sau 8.
- Conform regulii sumei, $P = P_6 + P_7 + P_8$.
- Calculul lui P_m pentru $m \in \{6, 7, 8\}$, se poate face astfel:
  - Fie W_m numărul de șiruri de litere mari și cifre cu lungimea m. Conform regulii produsului, $W_m = (26 + 10)^m = 36^m$
  - Fie N_m numărul de șiruri de litere mari cu lungimea m. Conform regulii produsului, $N_m = 26^m$.

Probleme mai complexe de numărare

Multe probleme de numărare nu pot fi rezolvate folosind doar regula sumei sau doar regula produsului, însă pot fi rezolvate dacă folosim ambele reguli.

EXEMPLE

(1) Se știe că o parolă este un șir între 6 și 8 caractere lungime, și că fiecare caracter este fie o literă mare sau o cifră zecimală. Fiecare parolă conține cel puțin o cifră. Câte parole posibile sunt?

Răspuns

- Fie P numărul total de parole, și P_6, P_7 și P_8 numărul de parole cu lungimea 6, 7, sau 8.
- Conform regulii sumei, $P = P_6 + P_7 + P_8$.
- Calculul lui P_m pentru $m \in \{6, 7, 8\}$, se poate face astfel:
  - Fie W_m numărul de șiruri de litere mari și cifre cu lungimea m. Conform regulii produsului, $W_m = (26 + 10)^m = 36^m$
  - Fie N_m numărul de șiruri de litere mari cu lungimea m. Conform regulii produsului, $N_m = 26^m$.
- Se observă ușor că $P_m = W_m - N_m$ (explicați de ce!).

Multe probleme de numărare nu pot fi rezolvate folosind doar regula sumei sau doar regula produsului, însă pot fi rezolvate dacă folosim ambele reguli.

Exemple

(1) Se știe că o parolă este un șir între 6 și 8 caractere lungime, și că fiecare caracter este fie o literă mare sau o cifră zecimală. Fiecare parolă conține cel puțin o cifră. Câte parole posibile sunt?

Răspuns

- Fie P numărul total de parole, și P_6, P_7 și P_8 numărul de parole cu lungimea 6, 7, sau 8.
- Conform regulii sumei, $P = P_6 + P_7 + P_8$.
- Calculul lui P_m pentru $m \in \{6, 7, 8\}$, se poate face astfel:
  - Fie W_m numărul de șiruri de litere mari și cifre cu lungimea m. Conform regulii produsului, $W_m = (26 + 10)^m = 36^m$
  - Fie N_m numărul de șiruri de litere mari cu lungimea m. Conform regulii produsului, $N_m = 26^m$.
- Se observă ușor că $P_m = W_m - N_m$ (explicați de ce!).

$\Rightarrow$ $P = W_6 - N_6 + W_7 - N_7 + W_8 - N_8 = 36^6 - 26^6 + 36^7 - 26^7 + 36^8 - 26^8$.

(2) În câte feluri putem alege 2 cărți scrise în limbaje diferite dintr-o colecție de 5 cărți scrise în română, 9 scrise în engleză, și 10 în germană?

(2) În câte feluri putem alege 2 cărți scrise în limbaje diferite dintr-o colecție de 5 cărți scrise în română, 9 scrise în engleză, și 10 în germană?

Răspuns

$$\begin{aligned} R\&E &= 5 \times 9 = 45 && \text{cf. regulii produsului} \\ R\&G &= 5 \times 10 = 50 && \text{cf. regulii produsului} \\ E\&G &= 9 \times 10 = 90 && \text{cf. regulii produsului} \end{aligned}$$

$\Rightarrow 45 + 50 + 90 = 185$ feluri (cf. regulii sumei).

Demonstrații combinatoriale

- O demonstrație combinatorială este o demonstrație care folosește argumente de numărare, precum regula sumei și regula produsului pentru a demonstra ceva.
- Demonstrațiile ilustrate mai devreme sunt combinatoriale.

Presupunem că A este o mulțime finită cu n elemente.

- Un aranjament de n luate câte r (sau r-permutare) al lui A este o secvență ordonată $\langle a_1, a_2, \ldots, a_r \rangle$ de elemente distincte din A.
- O permutare a lui A este un aranjament $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ al tuturor elementelor lui A.
- O r-combinare a lui A este o submulțime $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ cu r elemente a lui A.

Presupunem că A este o mulțime finită cu n elemente.

- Un aranjament de n luate câte r (sau r-permutare) al lui A este o secvență ordonată $\langle a_1, a_2, \ldots, a_r\rangle$ de elemente distincte din A.
- O permutare a lui A este un aranjament $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ al tuturor elementelor lui A.
- O r-combinare a lui A este o submulțime $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ cu r elemente a lui A.

Exemple

$\langle 3, 1, 2\rangle$ și $\langle 1, 3, 2\rangle$ sunt permutări ale mulțimii $\{1, 2, 3\}$.
$\langle 3, 1\rangle$ și $\langle 1, 2\rangle$ sunt 2-permutări ale mulțimii $\{1, 2, 3\}$.
2-combinările lui $\{1, 2, 3\}$ sunt submulțimille $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$

Presupunem că A este o mulțime finită cu n elemente.

- Un aranjament de n luate câte r (sau r-permutare) al lui A este o secvență ordonată $\langle a_1, a_2, \ldots, a_r \rangle$ de elemente distincte din A.
- O permutare a lui A este un aranjament $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ al tuturor elementelor lui A.
- O r-combinare a lui A este o submulțime $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ cu r elemente a lui A.

Exemple

$\langle 3, 1, 2 \rangle$ și $\langle 1, 3, 2 \rangle$ sunt permutări ale mulțimii $\{1, 2, 3\}$.
$\langle 3, 1 \rangle$ și $\langle 1, 2 \rangle$ sunt 2-permutări ale mulțimii $\{1, 2, 3\}$.
2-combinările lui $\{1, 2, 3\}$ sunt submulțimille $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$

- $P(n, r) :=$ nr. de r-permutări ale unei mulțimi cu n elemente.
- $C(n, r) :=$ nr. de r-combinări ale unei mulțimi cu n elemente. Notație alternativă: $\binom{n}{r}$.

Teoremă

$$P(n,r) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1).$$

DEMONSTRAŢIE

Teoremă

$P(n, r) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$.

DEMONSTRAŢIE

$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$

r-permutare $= p_1, p_2, ..., p_r$ cu elemente distincte din mulţimea A

	subprobleme distincte de selecție			
	$p_1 \in A$	$p_2 \in A - \{p_1\}$	$\ldots$	$p_r \in A - \{p_1, \ldots, p_{r-1}\}$
nr. de posib.	n	$n-1$	$\ldots$	$n-r+1$

Teoremă

$$P(n, r) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1).$$

DEMONSTRAȚIE

$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$

r-permutare $= p_1, p_2, ..., p_r$ cu elemente distincte din mulțimea A

	subprobleme distincte de selecție			
	$p_1 \in A$	$p_2 \in A - \{p_1\}$	$\ldots$	$p_r \in A - \{p_1, \ldots, p_{r-1}\}$
nr. de posib.	n	$n-1$	$\ldots$	$n-r+1$

$$\Rightarrow P(n, r) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Teoremă

$P(n,r) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$.

DEMONSTRAŢIE

$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$

r-permutare $= p_1, p_2, ..., p_r$ cu elemente distincte din mulţimea A

	subprobleme distincte de selecţie			
	$p_1 \in A$	$p_2 \in A - \{p_1\}$	$\ldots$	$p_r \in A - \{p_1, \ldots, p_{r-1}\}$
nr. de posib.	n	$n-1$	$\ldots$	$n-r+1$

$$\Rightarrow P(n,r) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

REMARCĂ. $n!$ reprezintă produsul $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.
$n!$ se numeşte n *factorial*. Prin definiţie, $0! = 1$.

Teoremă

$P(n, r) = C(n, r) \times P(r, r).$

Demonstrație combinatorială

Teoremă

$P(n, r) = C(n, r) \times P(r, r)$.

DEMONSTRAȚIE COMBINATORIALĂ

- Enumerarea r-combinărilor unei mulțimi cu n elemente poate fi descompusă în o secvență de 2 activități:
  1. Se selectează r elemente din mulțimea cu n elemente
  2. Se aranjează elementele selectate.

Teoremă

$P(n, r) = C(n, r) \times P(r, r).$

DEMONSTRAŢIE COMBINATORIALĂ

- Enumerarea r-combinărilor unei mulțimi cu n elemente poate fi descompusă în o secvență de 2 activități:
  1. Se selectează r elemente din mulțimea cu n elemente
  2. Se aranjează elementele selectate.
- Există $C(n, r)$ moduli de a selecta r elemente din o mulțime cu n elemente $\Rightarrow$ activitatea (1) se poate face în $C(n, r)$ moduri.

Teoremă

$P(n,r) = C(n,r) \times P(r,r)$.

Demonstrație combinatorială

- Enumerarea r-combinărilor unei mulțimi cu n elemente poate fi descompusă în o secvență de 2 activități:
  1. Se selectează r elemente din mulțimea cu n elemente
  2. Se aranjează elementele selectate.
- Există $C(n,r)$ moduli de a selecta r elemente din o mulțime cu n elemente $\Rightarrow$ activitatea (1) se poate face în $C(n,r)$ moduri.
- Există $P(r,r)$ moduli de aranjare a celor r elemente selectate $\Rightarrow$ activitatea (2) se poate face în $P(r,r)$ moduri.

Teoremă

$P(n, r) = C(n, r) \times P(r, r)$.

Demonstrație combinatorială

- Enumerarea r-combinărilor unei mulțimi cu n elemente poate fi descompusă în o secvență de 2 activități:
  1. Se selectează r elemente din mulțimea cu n elemente
  2. Se aranjează elementele selectate.
- Există $C(n, r)$ moduli de a selecta r elemente din o mulțime cu n elemente $\Rightarrow$ activitatea (1) se poate face în $C(n, r)$ moduri.
- Există $P(r, r)$ moduli de aranjare a celor r elemente selectate $\Rightarrow$ activitatea (2) se poate face în $P(r, r)$ moduri.

$\Rightarrow$ conform regulii produsului, există $P(n, r) = C(n, r) \times P(r, r)$ moduri.

$$C(n, r) = ?$$

$$C(n, r) = ?$$

- Știm că $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

$$C(n, r) = ?$$

- Știm că $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
- Am demonstrat deja că $P(n, r) = C(n, r) \times P(r, r)$

$$C(n,r) = ?$$

- Știm că $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
- Am demonstrat deja că $P(n,r) = C(n,r) \times P(r,r)$

$$\Rightarrow C(n,r) = \frac{P(n,r)}{P(r,r)} = \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \frac{0!}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Proprietăți ale combinațiilor

Teoremă

$C(n, r) = C(n-1, r-1) + C(n-1, r)$ *pentru toți* $n > r > 0$.

Proprietăți ale combinațiilor

Teoremă

$C(n,r) = C(n-1,r-1) + C(n-1,r)$ *pentru toți* $n > r > 0$.

DEMONSTRAŢIE COMBINATORIALĂ

- Fie $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Există $C(n,r)$ moduri de a selecta r elemente din S. Avem 2 cazuri **distincte**:

Teoremă

$C(n,r) = C(n-1,r-1) + C(n-1,r)$ *pentru toți* $n > r > 0$.

DEMONSTRAŢIE COMBINATORIALĂ

- Fie $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Există $C(n,r)$ moduri de a selecta r elemente din S. Avem 2 cazuri **distincte**:
  1. Selecția celor r elemente din S conține a_1. Fie N_1 numărul de astfel de selecții.

Proprietăți ale combinațiilor

Teoremă

$C(n, r) = C(n-1, r-1) + C(n-1, r)$ *pentru toți* $n > r > 0$.

DEMONSTRAŢIE COMBINATORIALĂ

- Fie $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Există $C(n, r)$ moduri de a selecta r elemente din S. Avem 2 cazuri **distincte**:
  1. Selecția celor r elemente din S conține a_1. Fie N_1 numărul de astfel de selecții.
  2. Selecția celor r elemente din S nu conține a_1. Fie N_2 numărul de astfel de selecții.

Proprietăți ale combinațiilor

Teoremă

$C(n, r) = C(n-1, r-1) + C(n-1, r)$ *pentru toți* $n > r > 0$.

DEMONSTRAŢIE COMBINATORIALĂ

- Fie $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Există $C(n, r)$ moduri de a selecta r elemente din S. Avem 2 cazuri **distincte**:
  1. Selecția celor r elemente din S conține a_1. Fie N_1 numărul de astfel de selecții.
  2. Selecția celor r elemente din S nu conține a_1. Fie N_2 numărul de astfel de selecții.

  Conform regulii sumei, $C(n, r) = N_1 + N_2$. Însă:

Proprietăți ale combinațiilor

Teoremă

$C(n, r) = C(n-1, r-1) + C(n-1, r)$ *pentru toți* $n > r > 0$.

DEMONSTRAŢIE COMBINATORIALĂ

- Fie $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Există $C(n, r)$ moduri de a selecta r elemente din S. Avem 2 cazuri **distincte**:
  1. Selecția celor r elemente din S conține a_1. Fie N_1 numărul de astfel de selecții.
  2. Selecția celor r elemente din S nu conține a_1. Fie N_2 numărul de astfel de selecții.

  Conform regulii sumei, $C(n, r) = N_1 + N_2$. Însă:
  - $N_1 = C(n-1, r-1)$ deoarece N_1 reprezintă numărul de selecții de submulțimi de $r-1$ elemente din $\{a_2, \ldots, a_n\}$
  - $N_2 = C(n-1, r)$ deoarece N_2 reprezintă numărul de selecții de submulțimi de r elemente din $\{a_2, \ldots, a_n\}$

Proprietăți ale combinațiilor

Teoremă

$C(n,r) = C(n-1,r-1) + C(n-1,r)$ pentru toți $n > r > 0$.

DEMONSTRAŢIE COMBINATORIALĂ

- Fie $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Există $C(n,r)$ moduri de a selecta r elemente din S. Avem 2 cazuri **distincte**:
  1. Selecția celor r elemente din S conține a_1. Fie N_1 numărul de astfel de selecții.
  2. Selecția celor r elemente din S nu conține a_1. Fie N_2 numărul de astfel de selecții.

  Conform regulii sumei, $C(n,r) = N_1 + N_2$. Însă:
  - $N_1 = C(n-1,r-1)$ deoarece N_1 reprezintă numărul de selecții de submulțimi de $r-1$ elemente din $\{a_2, \dots, a_n\}$
  - $N_2 = C(n-1,r)$ deoarece N_2 reprezintă numărul de selecții de submulțimi de r elemente din $\{a_2, \dots, a_n\}$

$\Rightarrow C(n,r) = N_1 + N_2 = C(n-1,r-1) + C(n-1,r)$.

Exerciții

1. Dați o demonstrație algebrică, folosind formula pentru $C(n, r)$, a faptului că $C(n, r) = C(n-1, r-1) + C(n-1, r)$.
2. Dați o demonstrație combinatorială a faptului că $C(n, r) = C(n, n-r)$.
3. În câte moduri se pot alege primul, al doilea și al treilea câștigător din 100 de participanți la un concurs?
4. În câte moduri se pot așeza n persoane la o masă rotundă?
5. Câte permutări ale literelor $ABCDEFGH$ conțin șirul ABC?
6. Câte șiruri de biți cu lungimea n conțin cifra 1 de exact r ori?

- În multe probleme de numărare se dorește folosirea repetată a unor elemente.

- În multe probleme de numărare se dorește folosirea repetată a unor elemente.
- Permutările și combinările presupun că fiecare element apare o singură dată.

- În multe probleme de numărare se dorește folosirea repetată a unor elemente.
- Permutările și combinările presupun că fiecare element apare o singură dată.
- O r-permutare cu repetiție a unei mulțimi cu n elemente este an aranjament de r elemente din acea mulțime, în care fiecare element poate să apară de mai multe ori.

Exemplu

Câte șiruri cu lungimea n se pot forma cu litere mici și mari din alfabetul latin?
Răspuns: $|Alfabet_{latin}| = 52 \Rightarrow 52^n$ șiruri (cf. regulii produsului)

- În multe probleme de numărare se dorește folosirea repetată a unor elemente.
- Permutările și combinările presupun că fiecare element apare o singură dată.
- O r-permutare cu repetiție a unei mulțimi cu n elemente este an aranjament de r elemente din acea mulțime, în care fiecare element poate să apară de mai multe ori.

Exemplu

Câte șiruri cu lungimea n se pot forma cu litere mici și mari din alfabetul latin?
Răspuns: $|Alfabet_{latin}| = 52 \Rightarrow 52^n$ șiruri (cf. regulii produsului)

Teoremă

Numărul de r-permutări cu repetiție al unei mulțimi cu n elemente este n^r.

- O *r*-combinare cu repetiție a unei mulțimi cu n elemente este o selecție de r elemente din mulțimea respectivă, în care fiecare element poate să apară de oricâte ori.

Q: Care este numărul r-combinărilor cu repetiție al unei mulțimi cu n elemente?

Exemplu

În câte feluri se pot selecta 5 bancnote din o cutie cu bani care conține bancnote de \$1, \$2, \$5, \$10, \$20, \$50. Presupunem că: ordinea de selecție a bancnotelor nu contează; există cel puțin 5 bancnote de fiecare denominație.

Combinări cu repetiție
Exemplu – continuat

Cinci bancnote nu neapărat distincte = o 5-combinare cu repetiție din mulțimea $\{\$1, \$2, \$5, \$10, \$20, \$50\}$ de tipuri de bancnote = a plasare de cinci $*$ în sertarele cutiei de bani ilustrate mai jos:

- Numărul de $*$ în un sertar reprezintă numărul de bancnote luate din acel sertar.

$\Rightarrow$ Numărul de 5-combinări cu repetiție al unei mulțimi cu 6 elemente = numărul de moduri de plasare a 5 $*$ în 6 sertare.

\$1	\$2	\$5	\$10	\$20	\$50

cutie de bani cu 6 tipuri de bancnote

		**			***

$|||**||***$

*		*	*	**	

$*||*|*|**|$

...

Combinări cu repetiție

OBSERVAŢIE

- Fiecare plasare de 5 $*$ în 6 sertare posibile este descrisă unic de către un șir de 5 $*$ și 5 bare roșii.
- În general, numărul de r-combinări cu repetiție al unei mulțimi cu n elemente $=$ numărul de șiruri cu r $*$ și $n-1$ bare roșii.

Î: În câte feluri putem aranja $n-1$ bare și r $*$?

Combinări cu repetiție

OBSERVAȚIE

- Fiecare plasare de 5 $*$ în 6 sertare posibile este descrisă unic de către un șir de 5 $*$ și 5 bare roșii.
- În general, numărul de r-combinări cu repetiție al unei mulțimi cu n elemente = numărul de șiruri cu r $*$ și $n-1$ bare roșii.

Î: În câte feluri putem aranja $n-1$ bare și r $*$?

R: Secvența are lungimea $n+r-1$

$\Rightarrow$ secvența are $n-r+1$ poziții

$\Rightarrow$ trebuie să alegem r poziții din cele $n-r+1$ care să fie ocupate cu $*$; celelalte vor fi ocupate cu bare.

OBSERVAȚIE

- Fiecare plasare de 5 $*$ în 6 sertare posibile este descrisă unic de către un șir de 5 $*$ și 5 bare roșii.
- În general, numărul de r-combinări cu repetiție al unei mulțimi cu n elemente = numărul de șiruri cu r $*$ și $n-1$ bare roșii.

Î: În câte feluri putem aranja $n-1$ bare și r $*$?

R: Secvența are lungimea $n+r-1$

$\Rightarrow$ secvența are $n-r+1$ poziții

$\Rightarrow$ trebuie să alegem r poziții din cele $n-r+1$ care să fie ocupate cu $*$; celelalte vor fi ocupate cu bare.

Există $C(n+r-1, r)$ de selecții de acest fel.

OBSERVAŢIE

- Fiecare plasare de 5 $*$ în 6 sertare posibile este descrisă unic de către un șir de 5 $*$ și 5 bare roșii.
- În general, numărul de r-combinări cu repetiție al unei mulțimi cu n elemente $=$ numărul de șiruri cu r $*$ și $n-1$ bare roșii.

Î: În câte feluri putem aranja $n-1$ bare și r $*$?

R: Secvența are lungimea $n+r-1$

$\Rightarrow$ secvența are $n-r+1$ poziții

$\Rightarrow$ trebuie să alegem r poziții din cele $n-r+1$ care să fie ocupate cu $*$; celelalte vor fi ocupate cu bare.

Există $C(n+r-1,r)$ de selecții de acest fel.

Teoremă

Numărul de r-combinări cu repetiție al unei mulțimi cu n elemente este $C(r+n-1,r)$.

Tip	Repetiții admise?	Formulă
r-permutări	Nu	$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
r-combinări	Nu	$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
r-permutări cu repetiție	Da	n^r
r-combinări cu repetiție	Da	$C(n+r-1,r) = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$

Problemă

Câte șiruri distincte se pot obține reordonând literele șirului SUCCES?

Permutări cu elemente nediferențiate

Problemă

Câte șiruri distincte se pot obține reordonând literele șirului SUCCES?

- SUCCES conține 2 S-uri, 2 C-uri, 1U, 1 E.
- alegerea locurilor lui S-uri: $C(6,2) \Rightarrow 4$ locuri rămase.
- alegerea locurilor pentru C-uri: $C(4,2) \Rightarrow 2$ locuri rămase.
- alegerea locului pentru U: $C(2,1) \Rightarrow 1$ loc rămas.
- alegerea locului pentru E: $C(1,1)$.

$\Rightarrow$ cf. regulii produsului, numărul este

$$C(6,2) \times C(4,2) \times C(2,1) \times C(1,1) = \frac{6!}{2!2!1!1!}$$

Permutări cu elemente nediferențiate

Teoremă

Numărul de permutări diferite de n obiecte, dintre care n_1 sunt elemente nediferențiate de tip 1, n_2 sunt elemente nediferențiate de tip 2, ..., și n_k sunt elemente nediferențiate de tip n_k, este

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

Numere binomiale și multinomiale

- Numerele binomiale sunt coeficienții $c_{n,k}$ din formula binomului
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} \cdot x^{n-k} y^k$$
- Numerele multinomiale sunt coeficienții $c_{n,k_1,\ldots,k_r}$ din formula
$$(x_1 + \ldots + x_r)^n = \sum_{k_1+\ldots+k_r=n}^{n} c_{n,k_1,\ldots,k_r} \cdot x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_r^{k_r}$$

Exemple

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 y + 3 \cdot x\, y^2 + 1 \cdot y^3\\ (x_1+x_2+x_3)^2 &= 1 \cdot x_1^2 + 1 \cdot x_2^2 + 1 \cdot x_3^2 +\\ & \quad 2 \cdot x_1 x_2 + 2 \cdot x_1 x_3 + 2 \cdot x_2 x_3\end{aligned}$$

$$(x_1 + \ldots + x_r)^n = \sum_{k_1+\ldots+k_r=n}^{n} \frac{n!}{k_1!\ldots k_r!} \cdot x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_r^{k_r}$$

DEMONSTRAŢIE COMBINATORIALĂ

$$(x_1 + \ldots + x_r)^n = \overbrace{(x_1 + \ldots + x_r) \cdot \ldots \cdot (x_1 + \ldots + x_r)}^{n \text{ paranteze}}$$

În câte feluri poate fi produs monomul $x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_r^{k_r}$?

- Alegem k_1 paranteze din care provine $x_1 \Rightarrow C(n, k_1)$ posibilități.
- Alegem k_2 paranteze din care provine $x_2 \Rightarrow C(n - k_1, k_2)$ posibilități.

  ...
- Alegem k_r paranteze din care provine $x_r \Rightarrow C(n - \sum_{i=1}^{r-1} k_i, k_r)$ posibilități.

$\Rightarrow$ cf. regulii produsului, nr. de apariții al lui $x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_r^{k_r}$ în partea dreaptă este $C(n, k_1)C(n - k_1, k_2) \cdot \ldots \cdot C(n - \sum_{i=1}^{r-1} k_i, k_r) = \dfrac{n!}{k_1!\ldots k_r!}$

- Pentru formula $\frac{n!}{k_1!\ldots k_r!}$ cu $k_1 + \ldots + k_r = n$ se folosește adesea notația $\binom{n}{k_1,\ldots,k_r}$.
- Formula binomială este

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

- Formula multinomială este

$$(x_1 + \ldots + x_r)^n = \sum_{k_1+\ldots+k_r=n} \binom{n}{k_1, \ldots, k_r} x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_r^{k_r}$$

Remarcă. $\binom{n}{k} = \binom{n}{k,n-k}$ și

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_1^k x_2^{n-k} = \sum_{k_1+k_2=n} \binom{n}{k_1, k_2} x_1^{k_1} x_2^{k_2}.$$