Cursul 6

Numere Stirling de cicluri și mulțimi

Noiembrie 2015

Numere Stirling de cicluri

Definiție

Numărul Stirling de cicluri, denotat cu $\left[{n \atop k}\right]$, este numărul de feluri în care pot fi puse n persoane la k mese rotunde identice astfel încât nici o masă să nu rămână neocupată.

Definiție

Numărul Stirling de cicluri, denotat cu $\left[{n \atop k}\right]$, este numărul de feluri în care pot fi puse n persoane la k mese rotunde identice astfel încât nici o masă să nu rămână neocupată.

Din observația precedentă rezultă că $\left[{n \atop k}\right]$ este numărul de n-permutări a căror structură ciclică are exact k cicluri.

Numere Stirling de cicluri

Definiție

Numărul Stirling de cicluri, denotat cu $\left[{n \atop k}\right]$, este numărul de feluri în care pot fi puse n persoane la k mese rotunde identice astfel încât nici o masă să nu rămână neocupată.

Din observația precedentă rezultă că $\left[{n \atop k}\right]$ este numărul de n-permutări a căror structură ciclică are exact k cicluri.

- ÎNTREBARE: cum putem calcula direct $\left[{n \atop k}\right]$?

Numere Stirling de cicluri

Definiție

Numărul Stirling de cicluri, denotat cu $\left[{n \atop k}\right]$, este numărul de feluri în care pot fi puse n persoane la k mese rotunde identice astfel încât nici o masă să nu rămână neocupată.

Din observația precedentă rezultă că $\left[{n \atop k}\right]$ este numărul de n-permutări a căror structură ciclică are exact k cicluri.

- Întrebare: cum putem calcula direct $\left[{n \atop k}\right]$?
- Răspuns: căutam să identificăm o definiție recursivă a numerelor Stirling, pe care să o rezolvăm apoi.

1. Nu putem pune n persoane la 0 mese, decât dacă $n = 0$ (în acest caz special, numărul se consideră a fi 1). Deci:
$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n = 0, \\ 0 & \text{dacă } n > 0. \end{cases}$$
2. $n \geq 1$ persoane pot fi puse la 1 masă în $(n-1)!$ feluri. Deci:
$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)! \quad \text{dacă } n \geq 1.$$
3. n persoane pot fi puse la n mese în doar 1 fel: fiecare persoană stă singură la o masă. Deci: $\left[\begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix}\right] = 1$.
4. n persoane pot fi puse la $n-1$ mese astfel: toate persoanele, cu excepția unui singur cuplu, stau singure la masă. Deci
$$\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \text{numărul de cupluri posibile} = \binom{n}{2}.$$

5. Dacă numărul de mese k este negativ sau dacă sunt mai multe mese decât persoane, problema nu are soluție. Deci:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0 \text{ dacă } k < 0 \text{ sau } k > n.$$

6. Orice permutare are o structură ciclică formată din k cicluri, unde $1 \leq k \leq n$. Conform regulii sumei

$$\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!$$

Cum putem pune $n > 0$ persoane la $k > 0$ mese rotunde?

Distingem 2 cazuri disjuncte:

1. Punem primele $n-1$ persoane la $k-1$ mese, iar apoi așezăm persoana n la masa k. Acest caz se poate efectua în $\left[{n-1 \atop k-1}\right]$ feluri.
2. Punem $n-1$ persoane la k mese iar apoi așezăm persoana n împreună cu alte persoane la o masă.
   - Punerea a $n-1$ persoane la k mese se poate face în $\left[{n-1 \atop k}\right]$ feluri.
   - Punerea persoanei n la o masă = așezarea persoanei n la stânga uneia dintre persoanele $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \Rightarrow n-1$ feluri.

   $\Rightarrow$ Acest caz se poate face în $(n-1) \cdot \left[{n-1 \atop k}\right]$ feluri.

Conform regulii sumei

$$\left[{n \atop k}\right] = (n-1)\left[{n-1 \atop k}\right] + \left[{n-1 \atop k-1}\right] \quad \text{dacă } n \geq 1 \text{ și } k \geq 1.$$

- Știm că are loc formula binomială $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. Pentru $y = 1$ obținem

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

  Deasemenea, am demonstrat combinatorial în un curs anterior că

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

- Am demonstrat combinatorial că

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}.$$

- Știm că are loc formula binomială $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. Pentru $y=1$ obținem

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Deasemenea, am demonstrat combinatorial în un curs anterior că

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

- Am demonstrat combinatorial că

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}.$$

Vrem să găsim o formulă pentru numerele Stirling de cicluri, asemănătoare cu formula binomială.

Fie $G_n(x) = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$. Atunci $G_0(x) = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] x^0 = 1 \cdot 1 = 1$, iar pentru $n \geq 1$

$$
\begin{aligned}
G_n(x) =& \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \\
=& (n-1) \sum_k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k + \sum_k \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^k \\
=& (n-1) G_{n-1}(x) + x\, G_{n-1}(x) \\
=& (x+n-1) G_{n-1}(x)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow G_n(x) = \underbrace{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot \ldots \cdot (x+n-1)}_{\text{notație: } x^{\bar{n}}}.$$

Deci $x^{\bar{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$.

$\left[{n \atop k}\right]$	$k=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	$n!$
$n=0$	1									1
1	0	1								1
2	0	1	1							2
3	0	2	3	1						6
4	0	6	11	6	1					24
5	0	24	50	35	10	1				120
6	0	120	274	225	85	15	1			720
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1		5040
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	40320

Formula de calcul recursiv folosită:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}.$$

$\binom{n}{k}$	$k=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	$n!$
$n=0$	1									1
1	1	1								1
2	1	2	1							2
3	1	3	3	1						6
4	1	4	6	4	1					24
5	1	5	10	10	5	1				120
6	1	6	15	20	15	6	1			720
7	1	7	21	35	35	21	7	1		5040
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	40320

Formula de calcul recursiv folosită:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Numere Stirling de mulțimi

Problemă

În câte feluri pot fi împărțite n persoane în k grupuri nevide disjuncte, dacă ordinea persoanelor din un grup nu contează?

Numere Stirling de mulțimi

Problemă

În câte feluri pot fi împărțite n persoane în k grupuri nevide disjuncte, dacă ordinea persoanelor din un grup nu contează?

Exemplu

Mulțimea $\{1, 2, 3\}$ poate fi partiționată in 2 grupuri nevide în 3 feluri: $\{1, 2\}, \{3\}$; $\{1, 3\}, \{2\}$; și $\{1\}, \{2, 3\}$.

Numere Stirling de mulțimi

Problemă

În câte feluri pot fi împărțite n persoane în k grupuri nevide disjuncte, dacă ordinea persoanelor din un grup nu contează?

Exemplu

Mulțimea $\{1, 2, 3\}$ poate fi partiționată in 2 grupuri nevide în 3 feluri: $\{1, 2\}, \{3\}$; $\{1, 3\}, \{2\}$; și $\{1\}, \{2, 3\}$.

Definiție

Numărul de feluri în care se poate partiționa o mulțime de n elemente în exact k submulțimi nevide disjuncte este numărul Stirling $\left\{ {n \atop k} \right\}$ de mulțimi. Adesea în literatură se folosește notația $S(n, k)$ în locul lui $\left\{ {n \atop k} \right\}$.

1. Există un singur mod de a pune n oameni în un grup, și un singur mod de a partiționa n oameni în n grupuri. Deci:

$$\left\{ {n \atop 1} \right\} = \left\{ {n \atop n} \right\} = 1.$$

2. Nu putem pune $n > 0$ oameni în 0 grupuri. Dacă $n = 0$ atunci considerăm că există un mod de a îi pune în 0 grupuri. Deci:

$$\left\{ {n \atop 0} \right\} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n = 0, \\ 0 & \text{dacă } n > 0. \end{cases}$$

3. Partiționarea a n oameni în $n - 1$ grupuri presupune alegerea unui cuplu de persoane în un grup; restul sunt singure în grup. Deci

$$\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}.$$

4. Este evident că

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = 0 \quad \text{dacă } k < 0 \text{ sau } k > n.$$

Cum putem împărți $n > 0$ persoane în $k > 0$ grupuri nevide distincte?

Distingem 2 cazuri distincte:

1. Grupăm $n-1$ persoane în $k-1$ grupuri și apoi formăm un grup nou doar cu persoana $n \Rightarrow \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$ posibilități.
2. Grupăm primele $n-1$ persoane în k grupuri $\Rightarrow \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$ posibilități și apoi adăugăm persoane la unul din cele k grupuri$\Rightarrow k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$ posibilități.

Conform regulii sumei

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} \quad \text{dacă } n \geq 1 \text{ și } k \geq 1.$$

$\left\{ {n \atop k} \right\}$	$k = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8
$n = 0$	1								
1	0	1							
2	0	1	1						
3	0	1	3	1					
4	0	1	7	6	1				
5	0	1	15	25	10	1			
6	0	1	31	90	65	15	1		
7	0	1	63	301	350	140	21	1	
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1

Formula de calcul recursiv folosită:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}.$$

Bibliografie

1. J. M. Harris, J. L. Hirst, M. J. Mossinghoff. *Combinatorics and Graph Theory, Second Edition*. Springer 2008.

    §2.7. Pólya's Theory of Counting.

2. G. Pólya. *Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen, und chemische Verbindungen*, Acta Math. 68 (1937), 145–254; English transl. in G. Polýa and R. C. Read, *Combinatorial Enumeration of Groups, Graphs, and Chemical Compounds* (1987).