Teoria de numarare a lui Polya

Câte zaruri distincte pot fi produse dacă se folosesc 3 culori pentru colorarea fetelor, si fiecare culoare este folosiťa pentru a colora 2 fete?

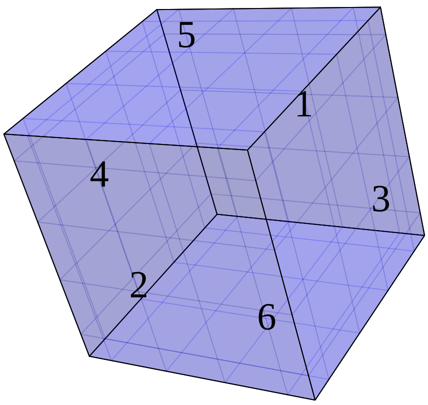
Raspuns

1) Consideram ca r,g,a sunt variabile pentru 3 culori -- rosu galben si albastru -- folosite la colorarea zarului.
2) Mai intai, determinam grupul de simetrii al fetelor zarului, si indexul lui ciclic:

Pentru a distinge cele 6 fete ale zarului, il desenam cu fetele numerotate de la 1 la 6.

In[26]:=

Out[26]=



Grupul de simetrii este alcatuit din

- permutarea identica (1)(2)(3)(4)(5)(6) --> monomul x_1^6
- rasuciri de multiplu de 90º in jurul unei axe care trece prin mijloacele a 2 fete opuse:

  in jurul axei 5-6: (1,4,2,3)(5)(6), (1,2)(3,4)(5)(6),(1,3,2,4)(5)(6) --> 2 $x_1^2 x_4 + x_1^2 x_2^2$

  ...

  sunt 3 astfel de axe => total = $6\ x_1^2 x_4 + 3\ x_1^2 x_2^2$
- rasuciri de multiplu de 120º in jurul unei axe care trece prin 2 varfuri diametral opuse:

  (2,5,4)(3,1,6),(2,4,5)(3,6,1) -->2 x_3^2

  ...

  Sunt 4 astfel de axe => total = $8\ x_3^2$

- rasuciri de 180º in jurul unei axe care trece prin mijloacele a muchii diametral opuse:

  (2,4)(1,3),(5,6) --> x_2^3

  ...

  Sunt 6 astfel de axe => total = $6\, x_2^3$

Rezulta un grup G cu 24 permutari, si indexul ciclic

In[27]:=
```
1 / 24 (x1^6 + 6 x1^2 x4 + 3 x1^2 x2^2 + 8 x3^2 + 6 x2^3)
```

Out[27]= $\frac{1}{24}\left(x1^6 + 3\, x1^2\, x2^2 + 6\, x2^3 + 8\, x3^2 + 6\, x1^2\, x4\right)$

In[33]:= $P[x1\_, x2\_, x3\_, x4\_, x5\_, x6\_] := \frac{1}{24}\left(x1^6 + 3\, x1^2\, x2^2 + 6\, x2^3 + 8\, x3^2 + 6\, x1^2\, x4\right)$

3) Aplicam formula de numarare a lui Polya pentru a calcula inventarul de modele de colorare cu r,g,a:

In[36]:=
```
{c1 + c2 + c3, c1^2 + c2^2 + c3^2, c1^3 + c2^3 + c3^3,
 c1^4 + c2^4 + c3^4, c1^5 + c2^5 + c3^5, c1^6 + c2^6 + c3^6}
```

Out[36]= $\{c1 + c2 + c3,\ c1^2 + c2^2 + c3^2,\ c1^3 + c2^3 + c3^3,\ c1^4 + c2^4 + c3^4,\ c1^5 + c2^5 + c3^5,\ c1^6 + c2^6 + c3^6\}$

In[42]:= $F[c1\_, c2\_, c3\_] := P\left[c1 + c2 + c3,\ c1^2 + c2^2 + c3^2,\ c1^3 + c2^3 + c3^3,\ c1^4 + c2^4 + c3^4,\ c1^5 + c2^5 + c3^5,\ c1^6 + c2^6 + c3^6\right]$

In[40]:=
```
F[r, g, a]
```

Out[40]= $$\frac{1}{24}\left((a + g + r)^6 + 3\,(a + g + r)^2\left(a^2 + g^2 + r^2\right)^2 + 6\left(a^2 + g^2 + r^2\right)^3 + 8\left(a^3 + g^3 + r^3\right)^2 + 6\,(a + g + r)^2\left(a^4 + g^4 + r^4\right)\right)$$

Dupa efectuarea tuturor inmultirilor si insumarilor posibile obtinem

In[43]:=
```
Expand[F[r, g, a]]
```

Out[43]= $$a^6 + a^5 g + 2 a^4 g^2 + 2 a^3 g^3 + 2 a^2 g^4 + a g^5 + g^6 + a^5 r + 2 a^4 g r + 3 a^3 g^2 r + 3 a^2 g^3 r + 2 a g^4 r + g^5 r + 2 a^4 r^2 + 3 a^3 g r^2 + 6 a^2 g^2 r^2 + 3 a g^3 r^2 + 2 g^4 r^2 + 2 a^3 r^3 + 3 a^2 g r^3 + 3 a g^2 r^3 + 2 g^3 r^3 + 2 a^2 r^4 + 2 a g r^4 + 2 g^2 r^4 + a r^5 + g r^5 + r^6$$

Numarul de colorari distincte cu a de 2 ori, g de 2 ori, si r de 2 ori este coeficientul lui $a^2\, g^2\, r^2$ in polinomul F[r,g,a] $\Longrightarrow$ 6 colorari distincte.