Teoria Grafurilor şi Combinatorică

# Răspunsuri la examenul parţial (D)

4 decembrie 2015

1. Fie $A = \{7, 8, \ldots, 910\}$. Numărul căutat este $N_7 - N_{35}$ unde $N_7$ este numărul numerelor din $A$ divizibile cu 7 iar $N_{15}$ este numărul numerelor din $A$ divizibile cu 7 şi 5, deci cu 35.
$$\left.\begin{array}{r} N_7 = \lfloor 910/7 \rfloor - \lceil 5/7 \rceil + 1 = 130 - 1 + 1 = 130 \\ N_{35} = \lfloor 910/35 \rfloor - \lceil 5/35 \rceil + 1 = 26 - 1 + 1 = 26 \end{array}\right\} \Rightarrow 130 - 26 = \mathbf{104}.$$

2. (a) Permutarea $\langle 2, 1, 3, 6, 4, 5 \rangle$ are rangul **124**.
   (b) $199 = 3013_4 \Rightarrow$ 4-permutarea cu repetiţie a mulţimii $\{1, 2, 3, 4\}$ care are rangul 199 este $\langle \mathbf{4, 1, 2, 4} \rangle$.
   (c) $\langle \mathbf{4, 6, 5, 1, 2, 7} \rangle$.

3. (a) Aplicăm regula produsului:
   - Mai întâi numărăm în câte feluri putem alege 2 din 5 poziţii unde să apară $1 \Rightarrow C(5, 2)$ posibilităţi.
   - Apoi numărăm în câte feluri putem alege 2 din cele 3 poziţii rămase unde să apară $5 \Rightarrow C(3, 2)$ posibilităţi.
   - Apoi numărăm în câte feluri putem complete poziţia rămasă cu o cifră din $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ diferită de 1 şi $5 \Rightarrow 5$ posibilităţi.

   $\Rightarrow$ numărul căutat este $\mathbf{C(5, 2) \cdot C(3, 2) \cdot 5}$.
   (b) Acesta este numărul şirurilor $d_1 d_2 d_3 d_4 d_5$ cu $d_i \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ pentru toţi $i$. Acest număr este $\mathbf{6^5}$.
   (c) Avem 2 posibilităţi de ales prima cifră (care coincide cu ultima). Pentru fiecare din cifrele de la poziţiile 2, 3, 4 avem 7 posibilităţi. Din regulă produsului, rezultă că sunt $\mathbf{2 \cdot 7^3}$ astfel de numere.

4. Ecuaţia caracteristică a acestei recurenţe liniare este $r^2 + 4\,r + 4 = 0$, cu rădăcina dublă $r = -2$. Rezultă că $a_n = (a \cdot n + b) \cdot (-2)^n$ pentru toţi $n \geq 0$. Din $a_0 = 0$ şi $a_1 = -6$ rezultă $a = 3$ şi $b = 0$, deci $\mathbf{a_n = 3\,n\,(-2)^n}$.

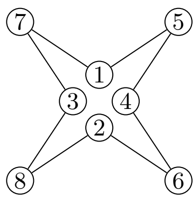
5. Un şir ternar este un şir format din cifrele 0, 1 şi 2. Fie $s_n$ numărul de şiruri ternare lungime $n$ care nu au două zerouri consecutive.

(a) $\mathbf{s_1 = 3}$ şi $\mathbf{s_2 = 8}$. Pentru $n > 2$, fie $d_1 d_2 d_3 \ldots d_n$ un astfel de şir ternar. Distingem cazurile următoare:

- $d_1 = 0$. Atunci $d_2 \neq 0$ şi $d_3 \ldots d_n$ este şir ternar de lungime $n-2$ fără două zerouri consecutive. Sunt 2 posibilităţi pentru $d_2$ şi $s_{n-2}$ posibilităţi pentru $d_3 \ldots d_n \Rightarrow 2 \cdot s_{n-2}$ posibilităţi.
- $d_1 \in \{1, 2\}$. Atunci $d_3 \ldots d_n$ este un şir ternar de lungime $n-1$ fără două zerouri consecutive $\Rightarrow 2 \cdot s_{n-1}$ posibilităţi.

$\Rightarrow \mathbf{s_n = 2 \cdot s_{n-1} + 2 \cdot s_{n-2}}$ dacă $n \geq 3$.

(b) $s_3 = 2\,s_2 + 2\,s_1 = 22$ şi $s_4 = 2\,s_3 + 2\,s_2 = 2 \cdot (8 + 22) = 2 \cdot 30 = \mathbf{60}$.

6. 

(a) Grupul de simetriii are 8 permutări:

$$\{(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8), (1,3,2,4)(5,7,8,6),$$
$$(1,2)(3,4)(5,8)(7,6), (1,4,2,3)(5,6,8,7),$$
$$(1,2)(3)(4)(5,6)(7,8), (1)(2)(3,4)(5,7)(6,8),$$
$$(1,3)(2,4)(5,8)(6)(7), (1,4)(2,3)(6,7)(5)(8)\}.$$

(b) $(2^8 + 2 \cdot 2^2 + 2^4 + 4 \cdot 2^5)/8 = \mathbf{51}$.

7. (a) Fie $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ şi $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Orice funcţie injectivă $f : A \to B$ se construieşte alegând valori diferite din $B$ pentru $f(a_1), \ldots, f(a_n)$. Aplicăm regula produsului pentru a calcula în câte feluri putem alege valorile lui $f(a_1), \ldots, f(a_n)$:
Pentru $f(a_1)$ putem alege orice valoare din $B \Rightarrow n$ posibilităţi.
Pentru $f(a_2)$ putem alege orice valoare din $B \setminus \{f(a_1)\} \Rightarrow n-1$ posibilităţi.
...
Pentru $f(a_n)$ putem alege orice valoare din $B\setminus\{f(a_1), \ldots, f(a_{n-1}\} \Rightarrow n-(n-1) = 1$ posibilitate.
$\Rightarrow$ numărul căutat este $n \cdot (n-1) \cdot \ldots 2 \cdot 1 = P(n,n) = \mathbf{n!}$.

(b) Fie $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ şi $B = \{b_1, \ldots, b_{n+1}\}$. Folosim regula produsului pentru a număra în câte feluri putem alege valori diferite din $B$ pentru $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)$
$\Rightarrow \mathbf{P(n+1, n) = (n+1)!}$

**Punctaj:**
Start: 1pt
1: 1pt
2: (a) 0.75pt; (b) 0.75pt; (c) 0.5pt
3: $0.5 \times 3 = 1.5$pt
4: 1pt
5: $0.75 \times 2 = 1.5$pt
6: $0.5 \times 2 = 1$pt
7: $0.5 \times 2 = 1$pt
**Total: 10**pt