TEORIA GRAFURILOR ŞI COMBINATORICĂ

Răspunsuri la examenul parţial (A)

4 decembrie 2015

1. Conform principiului incluziunii şi excluziunii, numărul căutat este $N_1 + N_2 - N_{1,2}$ unde

   - N_1 = numărul submulţimilor care conţin 1. Acestea sunt de forma $\{1\} \cup S$ unde S este orice submulţime a lui $\{2,3,4,5,6,7,8\}$. Există 2^7 astfel de $S \Rightarrow N_1 = 2^7$.
   - N_2 = numărul submulţimilor care conţin 2. Acestea sunt de forma $\{2\} \cup S$ unde S este orice submulţime a lui $\{1,3,4,5,6,7,8\}$. Există 2^7 astfel de $S \Rightarrow N_2 = 2^7$.
   - $N_{1,2}$ = numărul submulţimilor care conţin 1 şi 2. Acestea sunt de forma $\{1,2\} \cup S$ unde S este orice submulţime a lui $\{3,4,5,6,7,8\}$. Există 2^6 astfel de $S \Rightarrow N_{1,2} = 2^6$.

   Deci numărul căutat este $2^7 + 2^7 - 2^6 = 2^8 - 2^6 = 256 - 64 = \mathbf{192}$.

2. (a) $\langle 4,3,5,1,6,2\rangle$ are rangul **421**.

   (b) $149_6 = 405 \Rightarrow$ 3-permutarea cu repetiţie a mulţimii $\{1,2,3,4,5,6\}$ care are rangul 149 este $\langle \mathbf{5},\mathbf{1},\mathbf{6}\rangle$. Rezultatul se obţine din 405 făcând înlocuirile $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 4$, $4 \mapsto 5$, $5 \mapsto 6$.

   (c) $\langle \mathbf{4},\mathbf{3},\mathbf{6},\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{5},\mathbf{7},\mathbf{8},\mathbf{9}\rangle$.

3. (a) $\mathbf{C(5,2)\cdot 15^3}$. Rezultatul provine din regula produsului:

   > Mai întâi selectăm 2 din 5 poziţii unde apare cifra 8. Sunt $C(5,2)$ posibilităţi. Rămân de completat 3 poziţii cu cifre hexazecimale diferite de 8. Sunt 15 astfel de cifre, deci completarea celor 3 poziţii rămase se poate face in 15^3 feluri.

   (b) Cifra 6 apare de 3, 4 sau 5 ori. Rezultă că numărul căutat este $\mathbf{C(5,3)\cdot 15^2 + C(5,4)\cdot 15 + C(5,5)}$.

   (c) $\mathbf{P(16,5)}$.

4. Ecuaţia caracteristică este $r^2+5\,r-6=0$, cu rădăcinile $r_1=1, r_2=-6 \Rightarrow$ soluţia relaţiei de recurenţă este $a_n = a\cdot 1^n + b\cdot(-6)^n = a + b\cdot(-6)^n$.

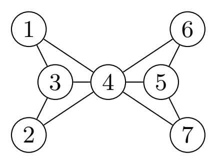
$$\left.\begin{aligned} a_0 = 1 = a + b\cdot(-6)^0 = a+b \\ a_1 = 0 = a - 6\,b \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = \frac{6}{7},\ \ b = \frac{1}{7}$$

Deci $\mathbf{a_n = \frac{6}{7} + \frac{1}{7}\cdot(-6)^n}$.

5. (a) Fie b_n numărul şirurilor de n biţi care nu conţin subşirul 01. Observăm că
   - $a_n + b_n =$ numărul total de şiruri de n biţi $= 2^n$.
   - Şirurile de n biţi care nu conţin 01 sunt de forma $\underbrace{1\ldots1}_{k\text{ ori}}\ \underbrace{0\ldots0}_{n-k\text{ ori}}$ unde $0\leq k\leq n$.

   Rezultă că $b_n = n+1$, deci $\mathbf{a_n = 2^n - n - 1}$.

   (b) $a_5 = 2^5 - 5 - 1 = 32 - 6 = \mathbf{26}$.

6. 

   (a) $G = \{(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7),$
   $(1,7)(2,6)(3,5)(4),$
   $(1,2)(3)(4)(5)(6,7),$
   $(1,7)(2,6)(3,5)(4)\}.$

   (b) $\frac{1}{4}(2^7 + 2^5 + 2\cdot 2^4) = \mathbf{48}$.

7. (a) **În câte feluri se poate partiţiona o mulţime de n elemente în k submulţimi nevide.**

   (b) **(b4)**

Punctaj:
Start: 1pt
1: 1pt
2: (a) 0.75pt; (b) 0.75pt; (c) 0.5pt
3: $0.5\times 3 = 1.5$pt
4: 1pt
5: $0.75\times 2 = 1.5$pt
6: $0.5\times 2 = 1$pt
7: $0.5\times 2 = 1$pt
Total: 10pt