Элементы теории множеств. 03.09.16

• Множеством называется всякая совокупность объектов, собранных вместе по некоторому общему для них св-ву.

Данная формулировка является не точной, поскольку опирается на неуточнённые понятия „совокупность" и „св-ва".

• Содержательно: множество – семейство объектов, которое обладает определёнными признаками, которые не имеют другие объекты.

„Множество" не является точным, т.к. содержит внутренние противоречия. Поскольку возможно определение всех приведённых форм, но бессмысленных с точки зрения здравого смысла.

Ex

часть = целому   множество множеств

Множество – первичное понятие

Множество, которые рассматриваемая в курсе ДМ достаточно простые и соответствуют определениям и не производят противоречий.

Система обозначений

Если „a" содержится или принадлежит A, то a - элемент A.

$a \in A$

Если „a" не содержится в A, то

$a \overline{\in} A$

Представление множеств. Способы представления.

1) • Именование - каждое множество имеет имя:

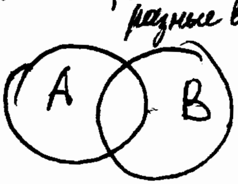
(A, B, C … L)

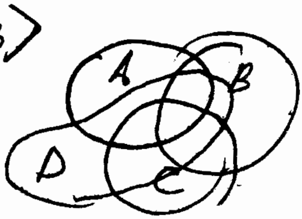
Важно для семантики, но не для математики.

2) Диаграммы Венна.

В таком способе отображения множества представляются в виде замкнутого пространства.

(Это то, что может быть) разные варианты исходов





3) Перечисление эл-тов множества. Множество представляет собой выражение с { и }, а в середине перечисление эл-тов.

$\{a, b, c\}$.

В таком представлении можно использовать конструкцию "и т.д."

$\{1, 2, 3 \ldots\}$

4) Указание характеристического св-ва множества.

Такое представление имеет вид $\{\,|\,\}$ вертикальная планка

Слева от планки — структура эл-тов множества, справа — вычисляемое логическое выражение, которое ~~соответствует~~ этим элементам (оно истинно или ложно)

$$\{x \mid P(x)\}$$

Среди множеств особые значения имеют:

1) $\varnothing$ — пустое множество (не содержит эл-тов)

$\varnothing \Leftrightarrow \{\}$

Ex $\{\{\}\}$ — множество, содержащее пустое мн-во.

2) Основное отношение между м-вами — отношение вложений.

• Вложение — каждый элемент мн-ва A содержится в B мн-ве B

подмножество $A \overset{\text{вложение}}{\leqslant} B$ - A является подмножеством B. (B содержит элементы подмножества A)

$A < B$ - B содержит элементы которые не принадлежат A

$A \nleqslant B$ - A не содержит элементы B. Если 1 эл-т из A вылезает из B.

3) равенство множеств.

A и B - называются равными, если $A \leqslant B$ и $B \leqslant A$

<u>Операции над множествами.</u>

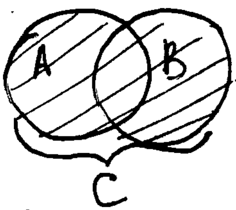
Основные операции:

1) Объединение

A, B - множества, то их объединением является C.

$C = A \cup B$

$C = \{ x \mid x \in A$ или $x \in B \}$



2) Пересечение м-в

A, B - м-ва, то пересечением $C = A \cap B$

$C = \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$

3) Разность

A, B - м-ва, то разность этих м-в $C = A \setminus B$

$C = \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$

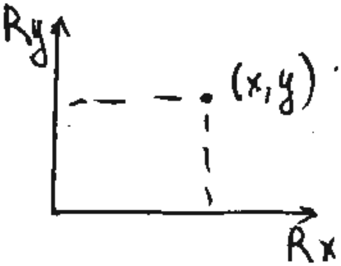
4) Произведение

A, B - м-ва, то $C = A \times B$ $\times$ - умножение

$C = \{(x,y)\}$, где $x \in A$, а $y \in B$

$C = \{(x,y) \mid x \in A$ и $y \in B\}$

Если $A \times A = A^2$



двухмерное пространство

R^3 - трехмерное пространство

Основы элементарной логики

Элементы элементарной логики.

$2x > 3y$

$P(x, y)$

$F(x) = y$

- <u>Высказывание (факт)</u> - утверждение, которое истинно или ложно. Это утверждение о св-вах некоторого мира.

„Зимой день короче, чем ночь" (В северном полушарии)

„Д/М изучается на 1-м курсе" (истинно)

„У человека 3 жизни" (ложно)

- <u>Предикаты (высказывательная форма)</u> - предложение содержащее неопределённые объекты, принадлежащие некоторым множествам, которые превращаются в высказывание при всякой замене неопределённых объектов на определённые значения.

Ex „x знает y"

„x даёт y z"

„y получает z от x"

Все утверждения о св-вах изучаемых областей представляются предикатами, которые являются всегда истинными

• Размерность (арность) предиката - кол-во переменных, используемых для записи предиката в общих случаях:

P-имя предиката

$x_1, x_2, x_3 \dots x_m$ - символ (переменные) предиката, принимающие значение этого предиката

Даёт (x, y, z)

Знает (x, y)

Операции на предикатах.

Основные операции составляют логические связки и кванторы

Логические связки:

& - конъюнкция

V - дизъюнкция

— - отрицание (инверсия)

→ - импликация

Если P, Q - предикаты, то

$(P \,\&\, Q)$

$(P \vee Q)$

$(\overline{P})$

$(P \to Q)$

Истинность значений определяется с помощью таблицы истинности:

P	Q	P&Q	PvQ	P→Q	P	$\overline{P}$
0	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0		
1	1	1	1	1		

Импликация — значит истинность всей конструкции.

Импликация — элемент дедукции.

<u>Кванторы</u>:

1) всеобщности ($\forall$)

2) существования ($\exists$)

• <u>Кванторы</u> — логические связки, операции, применяемые к отдельным предикаторам.

① $\forall$

Пусть задан некоторый предикат $P(x_1, .., x_n)$

Применение $\forall$ для предиката по переменной x_i записывается:

$\forall x_i\, P(x_1, ..., x_n)$.

Результатом применения $\forall$ является новый предикат:

$Q(x_1, ... x_{i-1}, x_{i+1}, ... x_n)$

Истинные значения предиката Q при произвольных значениях его переменных определяется по закону:

$x_1 = a$, $x_2 = a_2 \dots x_{i-1} = a_{i-1} \dots x_n = a_n$

Рассмотрим значение $P(a_1, \dots a_{i-1}, a_{i+1} \dots a_n)$.

$P(a_1 \dots a_{i-1}, \underset{\substack{b_1 \\ b_2}}{x}, a_{i+1} \dots a_n)$

Если рассматриваемое значение P, всегда истинно, то $Q(x_1, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_n)$ - истинно в противном случае - ложно.

② $\exists$

Пусть задан $P(x_1, \dots, x_n)$ применение к этому предикату $\exists$ по переменной x_i, записывается:

$\exists x_i\, P(x_1, \dots x_n)$

Результатом является новый предикат:

$Q(x_1 \dots x_{i-1}, x_{i+1} \dots x_n)$

Значение истинности находится по правилу:

$x_1 = a_1 \quad x_2 = a_2 \dots x_{i-1} = a_{i-1}.\ x_{i+1} = a_{i+1} \dots x_n = a_n$

$Q(a_1 \dots a_{i-1}, a_{i+1} \dots a_n)$ Рассмотрим значение

$P(a_1 \dots a_{i-1}, \underset{\substack{b_1 \\ b_2 \\ b_i}}{x}, a_{i+1} \dots a_n)$

Если в рассматриваемых значениях хотябо 1 истено, то рас-вые значения в Q - истино в противном случае $Q(a_1 \dots a_{i-1}, a_{i+1} \dots a_n)$ - ложно.

Ex

Любит (x, y) $\quad\quad$ $\forall y$ любит $(x y) = a(x)$

$\exists x$ любит $(x, y) = Q(y)$

$$\exists x \underbrace{A(x, y)}_{A(y)} \xrightarrow[=]{} \exists y \underbrace{B(x, y, z)}_{R(x, z)}$$

$$= T(x, y, z)$$

07.09.16. Отображения и функции.

Пусть A и B - произвольные мн-ва

Def-определение

Def. Отображение мно-ва A во мн-ва B называется всякое соотвествие F, которое сопоставляет каждому элементу A 1 элемент B в соотвествие

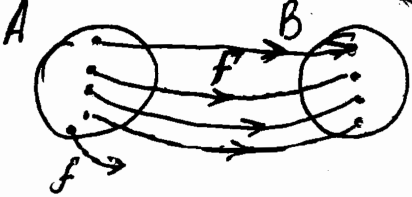
Обычно отображение выглядит так: $F: A \to B$

A - множество определения отображение F

B – множество значений отображения F

Представление функции.

В общем случае возможно с помощью диаграмм.



В дальнейшем отображения будем называть также функции.

Свойства отображений:

1) Инъективность

Def. $f: A \to B$ – инъективно $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x_1, x_2 \in A\, (x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2))$

$\Longleftrightarrow$ – тогда и только тогда

$f(x_1), f(x_2)$ – эл-ты B, которые соответствуют x_1 и x_2

Конструкция ложна, если 2 элемента из разных переходят в одинаковые.

$\forall x_1, x_2\, (f(x_1) \neq f(x_2))$ – не верная запись!!!

2) сюръективность

$f: A \to B$ – сюръективно $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x \in B\, \exists y \in A\, (f(y) = x)$ для которого

На диаграмме: нет ни одной лишней стрелки $\bar{A}$ для каждого эл-та B, есть хотя бы 1 стрелка

3) Биективность $f: A \to B$ – биективно $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ & f – инъективно, f – сюръективно

Все элементы A связаны с B – инъективность.

$A \Rightarrow B$ – следует

• Сюръективное отображение – означает отображение множества на множество.

Обратное отображение

$A \Leftrightarrow B$ ⇔ $\begin{cases} A \Rightarrow B \\ B \Rightarrow A \end{cases}$ равносильность

<W – для деления на 0>

Обратное отображение:

Пусть $f: A \to B$

$b \in B \quad A_b = \{x \mid f(x) = b\}$

Если все мн-ва A_b являются одноэлементными, (и $b \in B$) то $f: B \to A$, которое ставит в соответствие каждое $b \in B$. A_b – есть 1 элемент.

<Фун-ция – это элемент в элементе>

Такое отображение называют отображением обратным к f.

Т – теорема (Т) Для $f: A \to B \ \exists\ f^{-1}: B \to A \Leftrightarrow$

f – биекция

Док-во.

Пусть для f отображающего A в B существует такое f^{-1}, что из $B \to A$

$f: A \to B \quad \exists f^{-1}: B \to A \Rightarrow \forall b \in B$ (A_b - 1-элементно) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) f - сюръективно (не > и не < 1 эл-та) $\Rightarrow$ f - биекция, ч.т.д.
2) f - инъективно

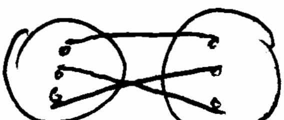
Пусть $F: A \to B$ - биекция

Покажем, что для F существует обратное отображение $\Rightarrow$ F - инъективно и $\forall b \in B$ (A_b содержит ≤ 1 элемента);
а также f - сюръективно и $\forall b \in B$ (A_b содержит ≥ 1 элемента)
$\Rightarrow \forall b \in B$ (A_b - 1-элементное) $\Rightarrow$ для эл-та $f: A \to B$ существует
$\exists f^{-1}: B \to A$, ч.т.д.

Мощность множеств.

Def. Множества A и B называются равномощными, если существует биективное отображение

$A, B \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists f: A \to B$ (f - биекция)

 - равномощны. И там и там по 3 эл-та

Def. Мощностью мн-ва A называют свойство всех мн-в равномощных A (мощность - $|A|$)

Для конечных мн-в приведённое понятие „мощности мн-ва" <=> кол-ву элементов таких множеств.

Прак. Элементарные множества.

1.2. Указать свободные и связанные переменные входящие во множества.

$P(x_1, \dots, x_n)$

x знает y <=> Знает(x, y)

V-ии $\&, \vee, \rightarrow, \neg$

$\exists, \forall$

все перебираются

$$\underbrace{\forall y \left(A(x,z) \vee \underbrace{\exists z \left(\underbrace{A(x,z) \,\&\, B(y)}_{Q(x,y,z)} \right)}_{R(x,y)} \right)}_{S(x,y,z)} \rightarrow \underbrace{\exists x \left(\underbrace{B(x) \,\&\, A(x,y)}_{T(x,y)} \right)}_{D(y)}$$

$L(x, z)$

$\langle \forall A(x,y) = B(y) \rangle$

$L(x,z) \rightarrow D(y) = W(x,y,z)$

Кванторы связывают переменные.

$$\underbrace{\exists x \left(\underbrace{C(x) \,\&\, A(x,y)}_{R(x,y)} \right)}_{Q(y)} \rightarrow \underbrace{\forall y \, P(y,z)}_{S(z)}$$

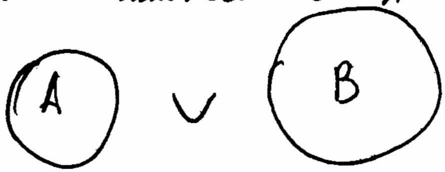
$$\underbrace{Q(y) \rightarrow S(z)}_{\Lambda(y,z)}$$

Def. $|A|$

Если A – конечное множество, то мощность A это семейство всех N-элементных множеств.

$A = \{a_1 \dots a_n\}$

Число N можно применять в качестве обозначения имени множества A



$|A| = m$ $\qquad$ $|B| = m$

$m + n$

Множество равномощное мн-ву натуральных чисел называется <u>счётно бесконечным</u>

Мн-во натуральных чисел $\{1, 2, 3 \dots\}$

М-во называется счётным если оно конечно или счётно бесконечно.

(T.) Пусть A – некоторое мн-во. Обозначим как 2^A м-во всех подмножеств множества A. Для любого мн-ва A, м-ва A и 2^A неравномощны.

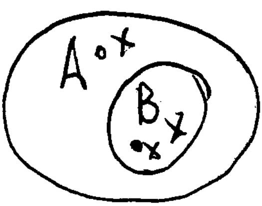
Док-во.

Проведём док-во методом от противного.

Предположим, что для мн-ва A, мн-ва A и 2^A — равномощные. 1) Пусть $h: A \to 2^A$ (h — биекция отображения A на 2^A)

Если $a \in A$ или B_a — мн-во соответствующего элементам A. $h(a)$

2) $D = \{x \mid x \in A \;\&\; x \,\bar{\in}\, B_x\}$ · обозначим специальное мн-во D.



D — подмножество A ($D \subseteq A$)

Поскольку h — биекция, то существует така A, что $B_a = D$.

$\exists a \in A$

$(B_a = D)$

3) Для значения A возможны 2 варианта:

$a \in D$

или

$a \,\bar{\in}\, D$

1. $a \in D \Rightarrow a \,\bar{\in}\, \underset{D}{\underset{\parallel}{B_a}} \Rightarrow a \,\bar{\in}\, D$ (значит случай не возможен)

Т.к. a и во множестве и одновременно вне его.

2. $a \overline{\in} D \Rightarrow a \in \underset{\substack{\text{и}\\ D}}{B_a} \Rightarrow a \in D$ - не возможно.

Т.к. ни 1 из случаев не возможен, то получаем противоречие. Значит предположение о существовании биекции h было ложно. Т.о. A и 2^A не равномощны, ч.т.д.

Доказаное говорит о том, что:

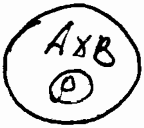
N и 2^N имеют разную мощность. $2^N > N$

<u>Отношения</u>

17.09.16.

A и B - мн-ва

<u>Def.</u> мн-во $\rho \leq A \times B$ (вынесенное A на B) - называется отношением мн-ва ρ на A и B



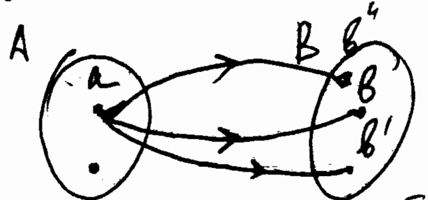
Если пара $(a, b) \in \rho$, то будем говорить, что a, b связывает отношение ρ и используем запись: $a \rho b$

связка элементов

Представление отношений.

Общий способ представления отношений составляют диаграммы отношений.

$\rho \subseteq A \times B$



$(a,b) \in \rho$

В отличие от отображения, отношение может связывать несколько значений и может существовать эл-нт, который ни с кем не связан.

Если мн-ва A и B конечные: $A = \{a_1 .. a_n\}$, то
$B = \{b_1 .. b_n\}$

$\rho \subseteq A \times B$ можно представить в виде таблицы

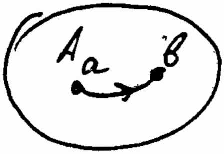
$$
\begin{array}{c|c}
 & \overbrace{b_1 \; \dots \; b_n \; \dots \; b_j}^{B} \\
A \left\{ \begin{array}{l} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ \vdots \\ a_j \end{array} \right. & \begin{array}{c} \\ \\ (\sigma) \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

(σ) - стоит $i \cdot j$ -

$$
\sigma_{ij} = \begin{cases} 0, (a_i, a_j) \overline{\in} \rho & \text{- 0 - не входит} \\ 1, (a_1, b) \in \rho & \text{- 1 - входит} \end{cases}
$$

Если мн-ва A и B совпадают, то на диаграмме рисуется 1 мно-во.

$A = B$ $\qquad (a, b) \in \rho$



Отношения на мн-ве

(включает отношение)

Если $\rho \subseteq A \times A$, то ρ - бинарное отношение на A или просто отношением на A.

Среди отношений на A особый интерес представляют отношения с заданными св-вами.

(ρ является)

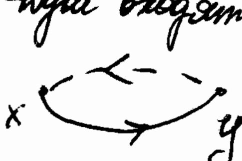
1) $\rho \subseteq A \times A$ - рефлексивным $\overset{Def.}{\Longleftrightarrow} \forall x \in A\, (x \rho x)$

Каждый элемент находится в отношении сам с собой.

Ex. A - люди $\quad$ x знает x $\quad$ Каждый человек знает себя.

2) $\rho \subseteq A \times A$ - симметричное $\overset{def.}{\Longleftrightarrow} \forall x, y \in A\, (\underset{и}{x \rho y} \to \underset{л}{y \rho x})$

Дуги входят парами.



Т.е. 2 элемента связаны, то они должны иметь 2 дуги в обоих направлениях.

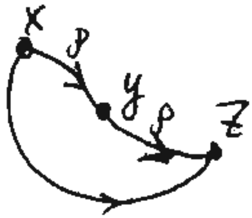
x любит y – не симметричное

x дружит y – симметричное.

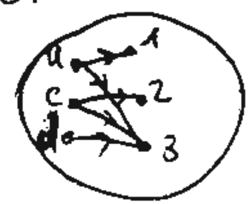
③ Транзитивность

$\rho \subseteq A \times A$ – транзитивное $\overset{def.}{\Leftrightarrow}$ $\forall x, y, z\, ((x \rho y \,\&\, y \rho z) \to$
(тогда и только тогда)
$\to x \rho z)$

Если из x в y идёт дуга и из y в z тоже идёт, то чтобы импликация была истинна должна оказаться ещё 1 дуга-замыкающая



Ex.



(a,1)

(a,3) Отношение транзитивно

(c,2) т.к. транзитивность не нарушается.

c(3)

d(3)

x знает y   y знает z

$x \xrightarrow{зн} y \xrightarrow{зн} z$ – отношения не транзитивны

(4.) Антисимметричность

$\rho \subseteq A \times A$ - антисимметрична $\overset{def.}{\Leftrightarrow} \forall x, y \in A (x\rho y \,\&\, y\rho x \to x = y)$

Всегда есть 1 дуга, а обратной нет. Допускаются петли.

Определение антисимметричного отношения означает, что это отношение не симметрично для любого отношения x, y, кроме одноэлементных от-ний. (Нестрогая антисимметричность)

$x \leqslant y$ - отношения (x, y)

$(2, 7) \in \leqslant$ читается: принадлежит отношению

$(8, 3) \overline{\in} \leqslant$

$\underbrace{x \leq y \,\&\, y \leq x}_{\text{истина}} \to x = y$

x руководит y

Отношение эквивалентности.

Def. $\rho \subseteq A \times A$ - отношение эквивалентности $\overset{def.}{\Leftrightarrow}$ когда ρ - рефлексивно, симметрично, транзитивно.

Def.

Эквивалентность

Def. ρ .. $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\begin{cases} \text{симметрично} \\ \text{рефлексивно} \\ \text{транзитивно} \end{cases}$

$\subseteq A \times A$

Разбиение мн-ва на части

Def. $\underbrace{A_1, A_2 \dots}_{}$ A — образуют разбиение мн-ва A

$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ 1) $\forall i \,(A_i \neq \emptyset)$

2) $\forall i j \,(i \neq j \to A_i \cap A_j = \emptyset)$

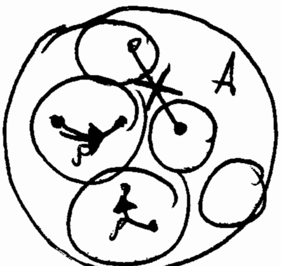
3) $\bigcup\limits_{(i)} A_i = A$.

<где $\cup$ - объединение мн-в A_i> это означает

- куски не пересекаются, но вместе содержат мн-во A.

(эквивал.)

(T). Если $\rho \subseteq A \times A$, то ρ разбивает A на классы эквивалентных элементов в этом отношении.



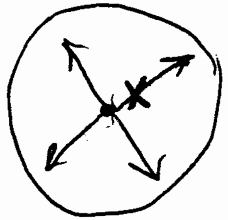
Пример: однофамильцы - все принадлежат к какому-то классу. Понятие транзитивно, поскольку от перемены мест ничего не меняется.

Док-во.

1. Определение разбиения мн-ва A.

Пусть $x \in A$ обозначим $[x] = \{y \mid x \rho y\}$.

если есть [ ], то это мн-во



Поскольку ρ-рефлексивно, то для каждого x множество $[x] \neq \emptyset$

$$\underset{(x,x)\in\rho}{\rho\text{ - рефл.}} \Rightarrow \forall x \in A\ \big([x] \neq \emptyset \big)\quad (x \in [x])$$

Они не пустые, т.к. содержат хоть элемент для которого оно построено.

$$\bigcup_{x\in A}[x] = A$$ - все эл-ты A встречаются в $[x]$ (см. 3 свойство)

Обозначим как F семейство мн-в вида $[x]$, где $x \in A$, где $[x]$ включается только 1 раз

$F\ [x],\ x \in A$

2) Докажем, что F - разбиение. Достаточно проверить, что $\forall x, y$ если они разные, то пересечение этих классов пустое.

$[x], [y] \in F$

$[x] \neq [y] \rightarrow [x] \cap [y] \neq \emptyset$

Докажем, что найдутся 2 такие разные мн-ва в F, которые имеют не пустое пересечение.

$[x], [y] \in F$

$[x] \neq [y] \rightarrow [x] \cap [y] \neq \varnothing$

$[x] \neq [y] \;\&\; [x] \cap [y] \neq \varnothing$

Докажем, что:

$[x] = [y]$

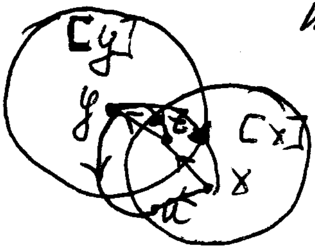
a) $[x] \leq [y]$

б) $[y] \leq [x]$

Проверим св-ва а):

пусть $a \in [x] \Rightarrow a \in [y]$

пусть $z \in [x] \cap [y]$



Проверим наличие стрелки из y в a.

Это доказывается исходя из транзитивности ($\rightarrow$ в обратную сторону)

$x \rho z \Rightarrow z \rho x$ (по симметр.)

$y \rho z \;\&\; z \rho x \Rightarrow y \rho x$ (по транзит.)

$y \rho x \;\&\; x \rho a \Rightarrow y \rho a$ (по транзит.)

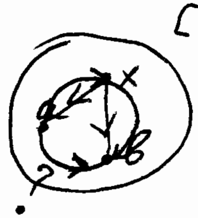
$a \in [y]$

Доказательство обратного отношения б) аналогично (достаточно поменять x и y).

Значит предположение о противном, что разные классы F могут иметь $\varnothing$ пересечение не верно, поэтому семейство F является разбиением A.

3. Докажем, что если $[x] \in F$

$a, b \in [x] \Rightarrow a\rho b$



(не учитываем, что элементы разные)

$x\rho a \Rightarrow a\rho x$ (по сим.)

$a\rho x \ \& \ x\rho b \Rightarrow a\rho b$ (по тран.)

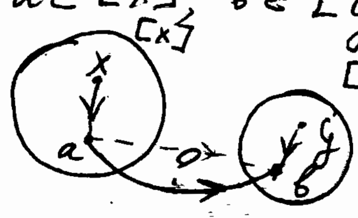
Элементы равноправны.

4. Докажем, что отношения между разными классами не пересекаются

$[x], [y] \in F$

$[x] \neq [y]$

$a \in [x]$, $b \in [y]$; $\overline{a\rho b}$ (или $(a,b) \notin \rho$)



Докажем от противного.

$a\rho b$, тогда $x\rho a \,\&\, a\rho b \Rightarrow$

$\Rightarrow x\rho b$ значит:

Пример: $0{,}9999\ldots$, 1 — это 1 и то же

$b \in [x]$

$b \in [x] \cap [y] \Rightarrow$ пересечение $[x] \cap [y] \neq \varnothing$

Это противоречит утверждению о том, что пересечение 2-х разных классов - пустое.

(св. транзитивности. Пример: все соседи общие

$\boxed{1 \; 2 \; 3}$), ч.т.д.

общий

Справедливо утверждение обратное к сказанному.

<u>Замечание</u>.

Справедливо утверждение, - обратное к (Т.)

Если для A определено разбиение мн-ва:

A

$A_1, A_2 \ldots A$, то такое разбиение определяет отношение эквивалентности на A, задаваемое следующее соответствие -

$$\forall x, y \in A (x \in A_i \,\&\, y \in A_j \,\&\, i \neq j \leftrightarrow (x,y) \in \rho)$$

т.е. $(x,y) \in \rho \underset{\text{равносильно}}{\Leftrightarrow} x, y \in A_i$ одному и тому же мн-ву.

Проверить

1) рефлекс. $\forall x (x_1 \rho x_1)$ $\quad x_1 \in A_i$ и $x_2 \in A_i$

Каждый эл-т находится в отношении сам с собой

2) симметричность.

$x \rho y \to y \rho x$

$x \in A_i \Rightarrow y \in A_i$

$y \in A_i \quad x \in A_i$

3) транзитивность.

$$\underset{A_i}{x}\ \underset{A_i}{\rho}\ \underset{A_i}{y}\ \&\ \underset{A_i}{y}\ \rho\ z \to \underset{A_i}{x}\ \rho\ \underset{A_i}{z}$$

<u>ОТНОШЕНИЯ ПОРЯДКА</u>

Эквивалентность - все компоненты взаимозаменяемы. (Все сомнежники).

<u>Def</u> $\rho \subseteq A \times A$ (бинарно) - называется отношением порядка, если ($\overset{def}{\Leftrightarrow}$) 1) ρ - рефлексивно

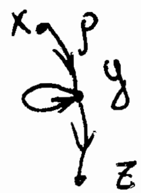
2) ρ - транзитивно

3) ρ - антисимметрично.

Элементы не равноправны.

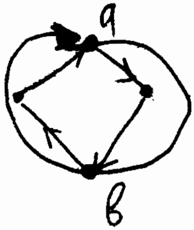
Структуры отн. порядка устроены сложнее, чем в эквивалентности, но в формате диаграмм можно определить специальные эл-ты.

Особенностью в отношении порядка является отсутствие циклов, но не петель.



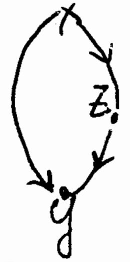
но в обратную сторону невозможно

Циклов не существует, т.к. нарушается принцип антисимметричности.

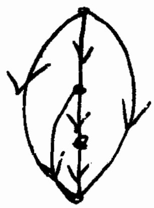


$a\rho b$ $\qquad$ $a\rho b \,\&\, b\rho a \to a=b$

Для изображения отношения порядка на диаграммах можно договорится об упрощении, когда не изображаются петли и когда не изображаются дуги, соединяющие пары элементов между которыми есть промежуточные.



Последнее возможно не всегда, но всегда имеет место для конечных мн-в A.

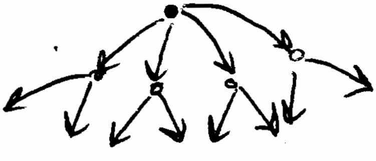


<u>Специальные эл-ты отношения порядка.</u>

Если A - конечное, то проявляются обязательно следующие эл-ты.

1) $a \in A$ - называется наибольшим эл-том в отношении порядка $\rho \subseteq A \times A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall b \in A (a \rho b)$

Если для $\rho \subseteq A \times A$ существует эл-т наиб., то он единственный, поскольку если таких эл-тов 2, то нарушается принцип антисимметричности. (3 не может быть, т.к. нет 2).



2) $a \in A$ - называется max для $\rho \subseteq A \times A \overset{def}{\Leftrightarrow}$
$\forall x \in A \, (x \rho a \to x = a)$

max эл-тов может быть несколько.

<Пример. Решение, которые мы должны принять

ρ - отношение (вот так лучше ...)

max и наиб. - это наилучший исход.>

Всякий наибольший эл-т является max.

(обратное к этому утверждению не верно)

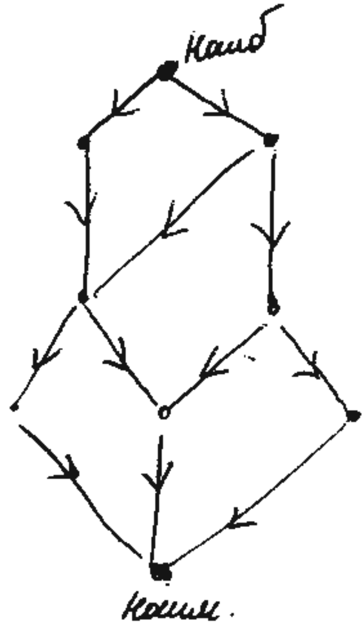
3) $a \in A$ $\rho \subseteq A \times A$ - наименьший, если

$(\overset{def}{\Leftrightarrow})$ $\forall b \in A \, (b \rho a)$

Если в отношении есть наименьший эл-т, то он 1.

4) $a \in A$ - минимальное $\rho \subseteq A \times A \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x \in A (a \rho x \overset{\text{то}}{\to} x = a)$

В отношении порядка может быть несколько мин. эл-тов и всякий наим-ий эл-т является минимальным)



Отношения линейного порядка

<u>Def</u>. Отношения линейного порядка ρ включенное в $A \times A$ называется линейным порядком, если

$\rho \subseteq A \times A$ - лин поряд. $\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall a, b \in A \, (a \rho b \overset{(лин)}{\vee} b \rho a)$.

Эл-ты следуют друг за другом, где эл-ты связаны между собой:

- вообще 2 вещественных чисел сравнимы

(Т) Если $\rho \subseteq A \times A$ - отн. линейного порядка, и $A \neq \emptyset$, где A - конечное мн-во, то

диаграмма для линейного порядка

Док-во

Док-во индукции для мн-ва эл-тов A.

1) $n=1$ $\quad \bullet a$

базис индукции: Диаграма для отношения лин. порядка A для одноэлементного порядка a.
$A=\{a\}$.

2) индуктивное предположение:
$n=k$

для всякого порядка $\rho \subseteq A \times A \quad |A|=k$

$$a_1 \longrightarrow a_2 \longrightarrow a_3 \longrightarrow a_k$$

3) индуктивный переход.
$n=k+1$

Пусть $A=\{a_1, \dots a_k, a_{k+1}\}$.

Возьмём эл-т a_{k+1} и образуем 2 мн-ва:

левее - $L=\{x \mid x \rho a_{k+1}\}$ - все эл-ны, которые составляют первую часть пар a_{k+1}.

правее - $R=\{x \mid a_{k+1} \rho x \ \& \ x \neq a_{k+1}\}$

Эти эл-ны можно связать через a_{k+1} - транзитивность

На мн-вах L и R отношение ρ - является отношением линейного порядка.

Если A - пустое, то это мн-во нарушается.

L и R - отношения линейного порядка т.к:

(Проверим для L)

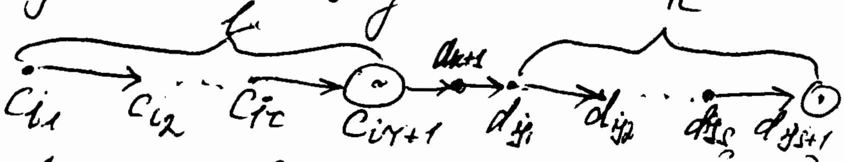
1) рефлексивность $a \in L$ $\underline{a \rho a}$

2) симметричность $(\underset{\in L}{a}, \underset{\in L}{b}) \in \rho \Rightarrow (\underset{\in L}{b}, \underset{\in L}{a}) \in \rho$

3) транзитивность $(a, b) \in \rho \;\&\; (b, c) \in \rho \Rightarrow a \rho c$

$a, b, c \in L$

Поскольку L - конечное мн-во, то по индуктивному предположению диаграмма для $\rho \in L$ имеет вид:



Аналогично отношение ρ - линейный порядок на мн-ве R

Эл-т a_{k+1} располагается между последним эл-том для L и 1-вым эл-том для R

Значит диаграмма для отношения ρ м-ва A L мощности $|k+1|$

имеет вид последовательно соединённых между собой элементов, стоящих элементам, стоящих рядом, т.п.д.

Операции над отношениями (ОНО)

2 важных примеров ОНО

1) <u>Унарное:</u>

Пусть $\rho \subseteq A \times A$

Обратное отношение $\rho^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \rho\}$

Если ρ - симметричное, то $\rho^{-1} = \rho$ (в ρ входит обратная пара, а в ρ^{-1} - прямая).

x любит y

y любим x

Если есть ρ, то ρ^{-1} есть всегда.

- алгоритм путешествия.

Направление по ориентации дуг. Поэтому ρ и ρ^{-1} должны храниться в разных местах.

2) <u>произведение отношений. (Композиция отношений)</u>

Задача Пусть заданы (мно) отношения $\rho \subseteq A \times B$ и $\gamma \subseteq A \times C$

Отношение $\mu \subseteq A \times C$ называется произведением

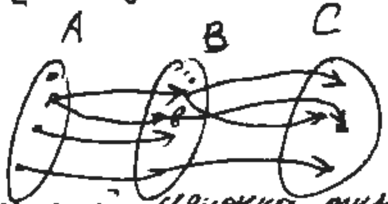
$\mu = \rho \circ \gamma$

($\circ$ - позиция)

$\mu \subseteq A \times C$

$\mu = \rho \circ \gamma$

$\mu = \{(a, c)\} \; . \; \exists b \, (a \rho b \; \& \; b \gamma c)$



Композиция отношений - цепочка отношений от начального до последнего элемента.
Операция бинарная.

$A = B = C$ - люди

$x \rho y$

знает

Это не всегда означает, что y знает x

$y \gamma z$

работают вместе.

Что связывает x и z? Их связывает, что y работает с z

Ex< Сломался кран. Спрашиваем у людей, что делать и искать сантехника >.

Если $\rho \subseteq A \times A$ - отношение порядка, то

ρ^{-1} - отношение тоже порядка.

(доказать, что ρ - 1) рефлексивно 2) транзитивно 3) антисимметрично). А на диаграмме просто меняется направление стрелок (наименьший эл-т на наибольший).

Элементы комбинаторики

• <u>Комбинаторика</u> - изучение комбинаторных объектов, составленных из эл-тов конечных или счётно бесконечных мн-в по определённым правилам. Основными задачами комбинаторики являются:

1) док-ть существование комбинаторного объекта с заданными св-вами.

Ex (укладка плиткой кол-вом 10м² 15м² пола)

2) построить комбинаторный объект с заданными св-вами.

Ex. < шахматы. Создание дерева ходов >

3) построить все комбинаторные объекты с данными св-вами.

4) Посчитать кол-во комбинаторных объектов с заданными св-вами.

<u>для 4)</u>. Решение этой задачи косвенно связано с решением остальных задач.

Посчитаем предметы – их 5 (выполнен 1) пункт, т.к. объекты существуют (для 0 также выполняется). На 2) пункте проводим комбинаторику. Закончим строить все варианты (пункт 3).

Основные комбинаторные правила

Для проведения ком-торного счёта полезны следующие фундаментальные правила:

1) правило „пустых гнёзд"

Если задано $n+1$ эл-тное множество A и эл-ты этого мн-ва раскладываются в n позициям. То при любом распределении эл-тов A по позициям, в 1 позиции будет $\geqslant 2$ эл-тов.

Док-во (от противного)

Эл-ты A можно разложить эл-том по позициям, так, что в каждой sig1, sig2 ... (b - sig-сигма)

$\sum_i b_i = n+1 \qquad b_i \in \{0,1\} \quad i=\overline{1,n}$

$$\sum_{1}^{n} b_i \leqslant \sum_{1}^{n} 1$$

$n \quad (n+1)$

Положение о противном не верно и правило

.. ичных гнёзд" справедливо.

2) <u>правило умножения</u>.

Пусть рассматриваются всевозможные последовательности $(a_1 \dots a_i)$, про которые известно a_1 последовательности принимает $a_1 - m_1$ разных значений. Т.о. кол-во принимаемых разных значений $a_2 - m_2$

Если выбраны значения эл-тов a_1 и a_2, то всегда возможны m_3 разных значений эл-тов a_3 идущих после эл-тов a_1 и a_2 и так для всех последующих.

<u>Док-во</u>

Тогда всего существует $m_1 \cdot m_2 \dots m_n$ разных последовательностей.

Если последовательность обходит знание а' = вовсе $(a_1, a_2 \dots a_n)$, то оно находится как перемножение.

$$\begin{cases} a_1 - m_1 \\ a_2 - m_2 \\ a_1 a_2 - m_3 \end{cases}$$

(принимает одно а и m-различных значений)

$(a_1 \dots a_n)$

$a_1 - m_1$

$a_1, a_2 \quad a_2 - m_2$

$a_1, a_2 \quad a_3 - m_3$

Проведём док-во индукции по длине последовательности n.

1) Базис индукции (a_1)

$n=1$

Кол-во разных значений, которые принимает $a_1 = m_1$

2) Индуктивное предположение $n=k$

Пусть кол-во разных последовательностей $(a_1 \dots a_k)$ существует $m_1 \cdot m_2 \dots m_k$ разных значений.

3) Индукционный переход.

Пусть $n=k+1$

$(a_1, \dots, a_k, a_{k+1})$

Тогда на начала таких последовательностей делит k, таких чисел $(m_1 \dots m_k)$ при дописывании к таким началам ещё одного эл-та $(m_1 \dots m_{k+1})$, тогда кол-во таких последовательностей в m_{k+1} раз больше. Т.е. число последовательности $m_1 \dots m_k, m_{k+1}$, ч.т.д.

Правило умножения - осн. правило комбинаторного счёта, из которого выводятся другие комбинаторные отношения.

Пусть a_1 принимает m значение и т. д. - это не верно!

$(0, 0 \ldots 0)$

$(1, 1 \ldots 1)$

$\vdots$

$(9 \ldots 9)$ - 10 значений

Получится 10^n

$a_1 - 10$ Когда эл-т для a_1 выбран, то для 2-го он определяется автоматически

$a_2 - 1$

$\vdots$

$a_n = 1$ 10

2) Правило сложения

Пусть $A = A_1 \vee A_2 \ldots \vee A_k$, где $A_1 - A_k$ - не пересекающиеся конечные мн-ва.

Тогда $|A| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|$

(сумма мощностей от $i = 1$ до k)

Пусть $a \in A$, тогда в левой части доказанного равенства:

а учтено равно 1 раз, в правой части — также 1 раз в множестве того мн-ва, в котором оно содержится.

Поскольку слева и справа учитываются значения эл-та A, то на каждый эл-т слева и справа приходится по единице.

Для разнородных эл-тов нельзя использовать правило умножения.

3) <u>Размещение и сочетание.</u>　　Порядок важен или нет?

размещение A_n^m　　сочетание C_n^m

Для решения прикладных задач удобно использовать вспомогательные комбинаторные конструкции, из которых составляются более сложные структуры.

Рассмотрим 2 таких конструкции размещения и сочетания.

<u>**Def.**</u> m-сочетание n-элементного мн-ва называется всякая совокупность из m эл-тов этого мн-ва.

Сочетание, все эл-ты которого разные — сочетание без повторений (т.е. сочета-

ние без повторений - это подмножество)
сочет. без повторений (подм. $m \leq n$)
Сочетание называется сочетанием с повторением, если в нём могут повторятся одинаковые эл-ты.
Это означает, что m - любое
(Ex) <Есть 30 кубков одинаковых имеется 60 человек, которые расхватали кубки.>
Модальность - могут встречаться (не встречаться, т.е. сочетания без повторения являются сочетания с повторениями
Def. m размещением n-элементного мн-ва называется всякая последовательность, составленная из m-элементов этого мн-ва.
- Размещение без повторений - все эл-ты разные ($m \leq n$) - иначе нарушается отсутствие повторений и включается правило голубиных гнёзд.
- Размещение, в котором могут повторятся одинаковые элементы - размещение с повторением.

Поэтому каждое размещение без повторений является размещением с повторениями.
размещение с повторениями – частный случай р.б./п.
Обозначим кол-во m с n-эл-ного мн-ва
как C_n^m, а $\overline{C}_n^m$ ← с повторениями
без повторения

C - combination

кол-во m размещений из n-эл-го множества
без повторения записывается как:

A_n^m ← кол-во мест; n ← упорядоченные объекты

$\overline{A}_n^m$

← с повторениями.

Выведем формулы для значений числа сочетаний и размещений

Размещение.

$\{a_1, a_2 \dots a_m\}$ m-длина.

В этой последовательности a_1 принимает 1 значение, тогда 2-ой элемент имеет (принимает) значение $(n-1)$.

Если выбраны первые $(m-1)$ эл-ты, то последний выбирается $n-(m-1)$ способом.

$n(m-1)\dots n-m+1$

$n(n-1)\cdots(n-m+1)$ или $A_n^m = \dfrac{A_n^n}{(n-m)!}$

A_n^n (а из n по n) $= \dfrac{n(n-1)\dots 1}{(n-m)(n-m-1)\dots 1}$

$k! = 1\cdot 2 \cdots k$

$0! = 1$.

Выведем формулу для значения $\bar{A}_m^n$

таким образом: составляют последовательности n по m, состоящие из n-го мн-ва.

В них a_1 принимает n разных значений

$\bar{A}_n^m(\underset{n}{a_1}, \underset{n}{\dots} \underset{n}{a_m}) \Rightarrow \bar{A}_n^m = n^m$

<Ex. x^y - можно вычислить и корень и log.>

Выведем формулу для значения C_n^m

1) Существует А из n по m различных m-размещений n-го мн-ва без повторений (A_n^m)

2) Всякое такое размещение $(a_1 \dots a_m)$ порождает m сочетание без повторений

$$\underbrace{(a_1 \dots a_m)}_{\text{фиксирован порядок}} \Rightarrow \{\underbrace{a_1 \dots a_m}_{\text{эл-ты могут переставляться}}\}$$

3] Если $\{a_1 \dots a_m\}$ некоторое конкретное m сочетание n-го множества б/п, то образуется m! $(a_{i1}, \dots, a_{im})$ б/п - буквально [illegible]

Это так, поскольку в размещениях, составляемого заданного сочетания значение c/п - с повторениями

a1-го эл-та можно выбрать m способом,

а последний эл-т множества приобретает единственное последнее значение.

$\{a_1, \dots a_m\} \xrightarrow{m!} \frac{(a_{i1} \dots a_{im})}{m(m-1)\dots 1} = m!$

Значит справедливо соотношение

4] $C_n^m \cdot m! = A_n^m$

Значит $C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!\, m!}$

Выведем ф-лу для значения $\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m$

1) Пусть D некоторое $\overset{n\text{-эл-ное}}{\text{м-во}}$. $D = \{a_1 \dots a_n\}$

Всякому m сочетанию n-го мн-ва без повторения поставим в соответствие двоичную последовательность длиной $m + (n-1)$, содержащую m нулей и n-1 единицу по следующему правилу:

двоичная последовательность составлена
n-группами нулей, разделёнными n-1
единицами.

$m+n-1$

m - "0"

$n-1$ - "1"

Ex. $\mathcal{D}=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$

сочетание $[\underbrace{a_1, a_1, a_1}_{000}\ a_2, a_2, a_4, a_5, a_5]$ $n=5$ $m=8$

т.к. 3-ей нет

$\underbrace{000}_{3-a_1}\ 1\underbrace{00}_{2-a_2}\ 1\ 1\underbrace{0}_{1-a_4}\ 1\underbrace{00}_{2-a_5}$

2) Если задана некоторая двоичная последовательность длины $m+n-1$, содержащая m - "0" и $n-1$ - "1", то такой последовательности соответствует сочетание из n-го множества, определяемого по правилу:

- разобьём последовательность на группы "0" разделённых единицами

$\smile 1 \smile 1 \smile 1 \dots 1 \smile$

Всего таких групп нулей n

Составим сочетание C/n включив в него

ровно столько эл-тов a_i сколько эл-тов содержит i эл-тов слева на право послед-сть.

Последняя схема восстанавливает сочетание по 2-ичной последовательности конструируемого для сочетания по схеме 1. (схема 2 обратная схеме 1)

$(b_1, \ldots b_{m+n-1})$

m - "0"
$n-1$ - "1"

$\_1\_1\_1\ldots1\_$

$\Rightarrow$ между m сочетаниями n-го мн-ва б/п и двоичной последовательности длины $m+n-1$ соответствует

Значит m сочет. n-го мн-ва с/п и двоичной последовательности с m - "0" и $n-1$ - "1" - равномощны.

$\overline{C}_n^m$ = число разных двоичных последовательностей длины $n+m-1$ с m - "0" $= C^m_{\underline{n+m-1}}$ длина

$n+m-1$ - мн-во позиций
m - способы.

(Ex) В группе 25 человек, нужно выбрать 8 человек, которые носят компьютеры из кабинета в кабинет

C_{25}^{8} - Это ответ.

25 чел.

100 бон. карт, которые раздаются как угодно

$\overline{C}_{25}^{100}$

Повторы - сколько они берут.

1 может взять все 100 карт.

Нужно выбрать 3 чел. для помощи декану, зам. декану и ректору

1 | 2 | 3 $\quad A_{25}^{3}$

$\overline{A}_{25}^{3}$ - 1 человек может выполнить все поручения.

Разбиение мн-в на части.

Пусть задано A содержащее n элементов и требуется распределить эл-ты A большого по именованным мн-ва $A_1 \dots A_m$, содержащее $k_1 \dots k_m$, т.е. все эл-ты A должны разойтись.

$$\sum_{\substack{1 \\ k_i > 0}}^{m} k_i = n$$ — разбиение мн-ва A на мн-ва $A_1 \dots A_m$ (эти мн-ва именованные)

<Если не именованные, то все эл-ты одинаковы>

Сколько возможно таких размещений в комбинации?

Рассмотрим 2 способа:

(I)

1. $\exists A_n^n$ различных размещений эл.

2. Каждому такому размещению можно поставить в разбиение $A_1 .. A_k$

$$\underbrace{\quad}_{k_1}\underbrace{\quad}_{k_2} \dots \underbrace{\quad}_{k_n}$$

Из 1-ых эл-тов мн-ва k_1 составим A_1.

Последнее мн-во будет A_{k_n} (A - k эл-тная)

3 Если задано разбиение A на именованные $A_1 .. A_m$ мн-во, то $\exists k_1! \cdot k_2! \cdot k_m!$ разных перестановок A в соответствии с этим разбиением.

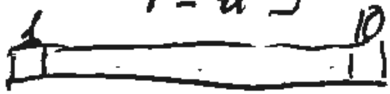
В таких перестановках в 1-ых k_1 эл-тах, составляющих k_1 : $k_1! = A_{k_1}^{k_1}$

Следующий вписывается 2ое мн-во как
$k_2!$
$k_3!$ - размещение всех эл-тов мн-ва k_3
без повторений
...
$k_m!$
т.е. для перестановок соответствующих
1и тому же разбиению существует
$k_1! \cdot k_2! \ldots k_m!$ способов их составления.
Каждому мн-ву A соответствует
$k_1! \cdot k_2! \ldots k_m!$ разных перестановок.
$X \cdot (k_1! \ldots k_m!) = A_n^n$ - соотношение баланса

$$X = \frac{A_n^n}{k_1! \ldots k_m!}$$

(8.) Сколько сущ-вует слов длины 10, в которых

$\left.\begin{array}{l} 5 - \text{"a"} \\ 2 - \text{"b"} \\ 2 - \text{"e"} \\ 1 - \text{"d"} \end{array}\right\}$ это размещение с/п.



$a \; |A_1| = 5 \qquad e \; |A_3| = 2$

$b \; |A_2| = 2 \qquad d \; |A_4| = 1$

$$\frac{10!}{5!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!}$$

II.. Построим мн-ва $A_1 \dots A_m$ выбирая из них эл-ты в фиксированном порядке.

1) Строим мн-во A_1 : $C_n^{k_1}$

2) Как бы мы не составили 1ое мн-во, 2-ое строится способом: $C_{n-k_1}^{k_2}$

3) $C_{n-(k_1+\dots k_{m-1})}^{k_m}$

По правилу умножения $\exists\ C_n^{k_1}\cdot C_{n-k_1}^{k_2}\dots C_{n(k_1+k_{m-1})}^{k_m}$

$\exists$ разные пос-ти действий, которые строят разбиения по $A_1 \dots A_m$

< Считаем не разбиения, а разные пос-ти действий. >

Количество пос-тей действий, конструирующих разбиение = кол-ву разбиений, если:

1) $\forall$ последовательности действий строится разбиение.

2.} биекция
3.}

2) Всякое разбиение конструируется хотя бы 1 способом. (сюръективность)

3) Разные последовательности действий соответствуют разным разбиениям (инъективность)

посл-д. разб.

для 3) I $\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_m$

II $\beta_1\ \beta_2 \dots \beta_m$

$\longrightarrow$

Если различаются первые 2 действия, то мн-ва, которые выбираются разные.

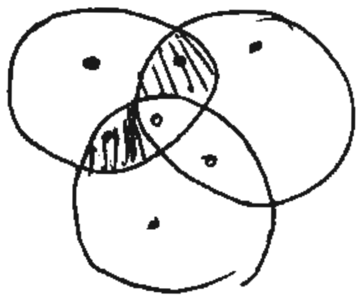
Если 2-ые эл-ты, то множества различаются со 2-ой и т.д. До 1-го различия.

<u>Фор-мула включения-исключения</u>

Пусть конечное A представляется как

$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots A_k$

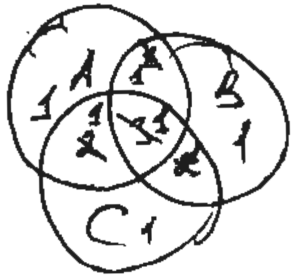
$|A|$-? когда мн-ва $A_1 \dots A_k$ могут пересекаться.



присутствуют эл-ты с разными набором св-в

и что [штрих.] может $\exists$.

$A_1 \cap A_2 \cap A_3$ - мн-ва одинаковые по набору св-в.



$|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-$

$-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

1, 2, 3 - число повторений.

$A = A_1 \cup \ldots \cup A_k$ $\quad ? - |A|$

Определим кол-во $m_1 = \sum_{i=1}^{k} |A_i|$

$$m_2 = \sum_{i<j} |A_i \cap A_j|$$

$$m_1 = \sum_{i=1}^{k} |A_i|$$

$$m_2 = \sum_{i<j} |A_i \cap A_j|$$

$$m_3 = \sum |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}|$$

$\vdots$

$$m_k = \sum_{i_1<i_2<i_k} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$$

тогда $|A| = m_1 - m_2 + \ldots (-1)^{i-1} m_i + \ldots (-1)^{k-1} m_k$ (1)

(1) Формула вклю. ния ~~вычитания~~ исключения

Докажем справедливость этой формулы.

Пусть $a \in A$ покажем, что в значениях правой и левой частях (1) этот элемент присутствует ровно 1 раз.

1) значение левой части формулы a учтён ровно 1 раз.

Определим кол-во a также, вхождение в правой части.

Пусть a в r мн-в $A_1 \dots A_k$, где $r \geq 1$.

тогда в значении $m_1 - C_r^1$, в значении
<a учтено 1 раз>

m_2 - a учтено в C_r^2 (C из 2 r разных способов)

$m_3 - C_r^3$

$\vdots$

$m_r - C_r^r$

m_{r+1} - 0 - значение a не резервируется.

$\vdots$

m_k - 0

Тогда итоговое кол-во вхождения a в правой части $\underset{C_r^1}{m_1} - \underset{C_r^2}{m_2} + \dots (-1)^{i-1} \underset{C_r^i}{m_i} + \dots (-1)^{r-1} \underset{C_r^r}{m_r} =$
$= 1$ (2)

$C_r^1 - C_r^2 + \dots + (-1)^{i-1} C_r^i + \dots + (-1)^{r-1} C_r^r = 1$

Проверим последнее равенство.

$C_n^0 - C_n^1 + \ldots (-1)^i C_n^i + \ldots (-1)^n C_n^n = 0$

$C_n^0 = 1$

< перебрасываем знак равно >

$(1-x)^n$

Ex. $(a \pm b)^n$

$(a+b)(a-b)\ldots(a+b)$ — выбирается 1 сомножитель.

$$\overset{\curvearrowleft}{(1-x)^n} = \underbrace{(1-x)\cdots(1-x)}_{n\text{ раз}} = C_n^0 x^0 - C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 \ldots + (-1)^n C_n^n x^n$$

$(-x)\cdot(x)$

из 1-ой берём x и надёргивать 1-ницы

При $x=1$ последнее соотношение имеет вид

$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots (-1)^n C_n^n$

Значит доказываемое утверждение является частным случаем бинома Ньютона $\Rightarrow$ оно верное.

Поэтому соотношение (1) тоже является верным.

Ф-ции АЛГЕБРЫ-ЛОГИКИ.

Пусть E_2 - это мн-во 0,1.

$E_2 = \{0,1\}$

Def Ф-цией алгебры-логики, называется всякое отображение f, такое что $f: E_2^n \to E_2$

Если f отображает $E_2^n \to E_2$, то будем использовать запись

$f(x_1 \dots x_n)$

значения 1, 2 - n компоненты элементов области определения

$f(x_1 \dots x_n)$ - ф-ция n переменных.

$x_1 \dots x_n$ - переменные ф-ции f.

А/л - алгебры-логики! Мн-во всех ф-ций алгебры-логики обозначен как "Р"

P_2 P_2^n - ф-ции А/л зависящие от n переменных

$f: E_2^n \to E_2$ 0,1-логические значения

Для представления ф-ций А/л можно использовать таблицы.

$f(x_1 \dots x_n) \in P_2$ задаётся с помощью таблицы, имеющей n+1 столбец и n+1 строк.

$x_1 \dots x_n$	f
$0 \dots 0$	$f(0 \dots 0)$
$0 \dots 1$	$f(0 \dots 1)$
$0 \dots 10$	$f(0 \dots 10)$
$\sigma_1 \dots \sigma_n$	$f(\sigma_1 \dots \sigma_n)$

В строках последовательно выписываются двоичные наборы f и кол-во символов.

Табличные задания P_n^2 различаются только столбцом значений. Поэтому различных значений P_2^n столько, сколько наборов из двоичных эл-тов длины 2^{2^n}.

Табличные задания P_2^n

Табличные задания f^n различаются только столбцом значения.

В различных f А/л в P_2^n представлены столько, сколько наборов значений.

Мн-во A зависящих от числа переменных - конечное число.

$P_2^n \quad 2^{2^{2^n}} \quad 2^{2^n}.$

$n=1 \quad 2^2=4$

$n=2 \quad (2^2)^2=2^4=16$

$n=3 \quad 2^8=256$

$n=4 \quad 2^{16} > 65000$

Поэтому кол-во $f(\ell)$ велико и исследовать св-ва конечных классов затруднительно, если применять этот перебор

<u>Существенность и несущественность переменных.</u>

<u>Def</u> Переменная x_i от $f(x_1 .. x_n)$ - существенная переменная этой ф-ции, если по определению $\exists$ такой набор значений $\exists(\sigma_1 .. \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \sigma_n)$ - какой-то набор, для которого $\in E_2^{n-1} (f(\sigma_1 ... \sigma_{i-1}, 0, \sigma_{i+1} .. \sigma_n) \neq f(\sigma_1 .. \sigma_{i-1}, 1, \sigma_{i+1} ... \sigma_n))$

перем. x_i $f(x_1 ... x_n)$ сущ. $\overset{def}{\Leftrightarrow} \exists(\sigma_1, .. \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1} .. \sigma_n) \in E_2^{n-1} (f(\sigma_1 .. \sigma_{i-1}, 0, \sigma_{i+1} ... \sigma_n) \neq f(\sigma_1 .. \sigma_{i-1}, 1, \sigma_{i+1} ... \sigma_n))$

Т.е. для существенности переменной достаточно 1 ситуации, где без значения этой переменной обойтись нельзя.

<u>Def</u> x_i $f(1 .. x_n)$ - несущественная $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall (\sigma_1 .. \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1} .. \sigma_n) \in E_2^{n-1} (f(\sigma_1 .. \sigma_{i-1}, 0, \sigma_{i+1} .. \sigma_n) = f(\sigma_1 .. \sigma_{i-1}, 1, \sigma_{i+1} ... \sigma_n))$

Чтобы пер-ная была несущественная, она всегда должна быть несущественная.
Если ф-ция А/л $f(\ell)$ имеет несущественные переменные, то такую функцию можно преобразовать в другую ф-цию $f(\ell)$
Такое преобразование можно реализовать с помощью схемы:
1) Пусть x_i - не существенная переменная $f(x_1 \dots x_n)$
2) удалим все наборы с $x_i = 1$
(преобразование обратимо)
3) удалим из таблицы столбец x_i
(преобразование также обратимо)
В результате получим $g(x_1 \dots x_{i-1}, x_{i+1} \dots x_n)$
x_i - нет. Получилась ф-ция другая, но не нужная для $f(\ell)$
Такая ф-ция g называется ф-цией $= f$.
Ф-ции g и $f(\ell)$ - равны, если преобразуются друг в друга добавлением или удалением несущественных переменных.

Замечание.

Если у ф-ции А/л все переменные не существенные, то удаление всех не существенных переменных заканчивается составлением 1 строки для значения ф-ции. Это ф-ции константы 0 и 1.

1) Для сохранения структуры нужно сохранить хотя бы 1 незнач. переменную.

2) Без ссылки на переменную записываем просто const.

Формулы представления ф-ций формулы.

Будем рассматривать способ представления f-ф-ция ф-ции А/л с помощью выражения 1. ф-ций через другие. Для этого определим специальное мн-во f, называемых специальными и класс f представляемых формулами.

Элементарные.

Следующие f(l) - элементарные

x	0	1	x (тождественная)	$\bar{x}$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0 (отрицание)

$\underbrace{0 \quad 1}_{Const}$

Эл-тарными называются:

x_1	x_2	$\&$	V	$+$	$\sim$ (эквивалентность)	$\rightarrow$	$\mid$ (ф-ция Шиффера)
0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	1	1	0

$\&(x_1, x_2)$ - конъюнкция - min значение

V - дизъюнкция - max значение

$\sim$ - эквивалентность (отрицание суммы)

<в сумме при $1+1=0$, т.к. получается 10, а нужно только 1 число 1(0).>

$\mid$ - Ф-ция Шиффера - отрицание конъюнкции.

Пусть $B \underset{(\text{вложено})}{\subseteq} P_2$.

Определим понятие мн-ва формул над B. (B - любое)

B - источник, через который мы выражаем.

1) Если $\underbrace{f(x_1 \dots x_n)}_{\text{функция}} \in B$, то запись $\underbrace{\text{"}f(x_1, \dots, x_n)\text{"}}_{\text{запись ф-ции}}$ -

формула над B.

2) Если $f(x_1 \dots x_n) \in B$ => $A_1, \dots A_n$ - формулы над B или символы переменных

то запись "$f(A_1, \dots, A_n)$" - формула над B.

Никакие другие записи не являются формулами над B.

3) ~~Никакие другие записи не являются формулами над B.~~

Def Понятие формулы.

(Подформула) формулы - если U-ф-мула, то U - подформула формулы U.

Def. Если $U = f(A_1, .., A_n)$ и A_i - формула, тогда A_i и подформулы формулы A_i являются подформулой формулы U.

Если U - формула, а U' - подформула U, то ф-ла $U = f(\dots \varphi(\dots \psi(\dots, U', \dots)))$

Def (Глубина формулы)

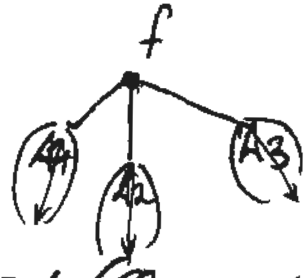
Если x - символ переменной, то $d(x) = 0$

Если U-формула имеет вид $U = f(x_1 \dots x_n)$ $f \in B$ => $d(U) = 1$

(Если x - формула, то $d(U)=1$, а если символ, то $d(x)=1$.)

Если $U=f(A_1,\dots A_n) \Rightarrow d(U)=\max\limits_{i=\overline{1,n}}(d(A_i))+1$

диапазон $\overline{1,n}=(1,\dots,n)$



Def (Ф-ция представляемая формулой)

Пусть U - ф-ла над B, в запись которой входят символы $x_1,\dots x_n$, тогда $f_U(x_1\dots x_n)$ функция представляемая ф-лой U

Значение f_U на различных наборах из E_2^n определяется по правилу:

1) Пусть задан набор $(\sigma_1\dots\sigma_n)\in E_2^n$
2) Подставим значение $(\sigma_1\dots\sigma_n)$ в U заменяя все вхождения переменных $x_1\dots x_n$
3) проведём вычисления значения принимаемого ф-лой по шагам, так что на каждом шаге вычисляется значение ф-ций, значение всех переменных которых посчитаны.
4) Последнее значение в процессе вычисления

примени как $f_u(G_1 \dots G_n)$

Замечание.

Отличие понятия формулы от ф-ции А/-и состоит в том, что 1 и таже ф-ция может представляться разными ф-лами.

Ex. $f(x_1, x_2) = \frac{x_1 \to \bar{x}_2}{x_1 \& \bar{x}_2}$

0 1
0 1
1 0
0 1

Эквивалентность формул

Def Формулы U_1 и U_2 - эквивалентны, если ($\overset{def}{\Leftrightarrow}$) представления f_{U_1} и f_{U_2} - равные

Т о замене равных

Пусть U - формула и U_1 - подформула ф-лы U и $U_1 \equiv U_2$ (эквивалентно), тогда фор-ла U', полученая из U заменой U_1 на U_2 эквивалентна U

$U' \equiv U$

$U = f(\dots \varphi(\dots, \overset{U_1 \equiv U_2}{U_1}, \dots) \dots)$

$U' = f(\dots \varphi(\dots, U_2, \dots)\dots)$

Док-во

Пусть $x_1 \dots x_n$ – все различные символы переменных в U и U'; возьмём произвольный набор таких $(\gamma_1 \dots \gamma_n)$, покажем, что значения f_U и $f_{U'}$ на наборах значений переменных, выбранных из $(\gamma_1 \dots \gamma_n)$ равны. Подставим U и U' в значения переменных и вычислим значения, принимаемые этими ф-лами.
Сначала вычислим значения U_1 и U_2 – эти значения совпадают, т.к. $U_1 \equiv U_2$.
Дальнейшие вычисления будут проводится одинаково, поэтому все заканчиваются с одинаковым для U и U' результатом. Поэтому $f_U = f_{U'} \Rightarrow U \equiv U'$, ч.т.д.

Соотношение эквивалентности

для формул

1) Соотношения ассоциативности операций (или $+$ или $\vee$)
Если $\circ \in \{\&, \vee, +\}$ тогда для любых U_1, U_2, U_3 справедливо $U_1 \circ (U_2 \circ U_3) \equiv (U_1 \circ U_2) \circ U_3$

2) соотношение коммутативности

Если $\circ \in \{\&, \vee, +\}$, то $\forall U_1, U_2$ $\quad U_1 \circ U_2 \equiv U_2 \circ U_1$

3) соотношение дистрибутивности

$$U_1 \& (U_2 \vee U_3) \equiv (U_1 \& U_2) \vee (U_1 \& U_3)$$

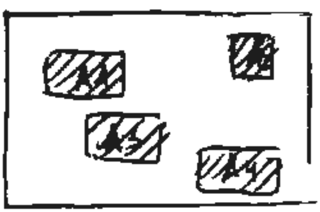
$$U_1 \vee (U_2 \& U_3) \equiv (U_1 \vee U_2) \& (U_1 \vee U_3)$$

4) <u>правило де Моргана</u>

$$\overline{U_1 \vee U_2} \equiv \overline{U_1} \& \overline{U_2}$$

$$\overline{U_1 \& U_2} \equiv \overline{U_1} \vee \overline{U_2}$$

U_1	U_2	L	R
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0



Оставшаяся часть

$$\overline{A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee A_4} = \overline{A_1} \& \overline{A_2} \& \overline{A_3} \& \overline{A_4}$$

6) закон исключённого третьего

$$\overline{\overline{U}} = U$$

7)

$$U \vee 0 \equiv U \qquad U \& 0 = 0$$

$$U \vee 1 \equiv 1 \qquad U \& 1 = U$$

$$U \vee U \equiv U \qquad U \& U = U$$

$u \vee \bar{u} \equiv 1$ | $u \& \bar{u} = 0$

Замечание.

Соглашение над мн-вом элементарных функций

1) Приоритет функций. В ф-циях можно опускать скобки, договорившись о приоритетах

I $0, 1, x, \bar{x}$

II $\&$, |

III $\vee, \rightarrow, +, \sim$

2) $x_1 \vee x_2 \vee_3 \dots \vee x_n$. В записи таких выражений скобки можно опускать по св-ву ассоциативности.

$\bigvee_{i=n}^{1} x_i \; (\vee, +, \&)$ можно использовать такую запись.

(Т) о разложении ф-ции а/л по переменным.

Рассмотрим $f(x_1 \dots x_n)$

Определим вспомогательную ф-цию $x^{\sigma} = \begin{cases} \bar{x}, & \sigma = 0 \\ x & \sigma = 1 \end{cases}$

$x^{\sigma} = 1 \Leftrightarrow x = \sigma$

x	σ	x^{σ}
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$x \sim \sigma$

Элементарной конъюнкцией ранга k называается всякая ф-ла вида

$K = x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2} \dots \& x_n^{\sigma_n}$, где $(\sigma_1 \dots \sigma_n) \in E_2^n$

ранг длина конъюнкции.

Из св-ва x^{σ} $\Rightarrow$, что $K = x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}$ принимает значение 1 лишь на единственном наборе значений $(\sigma_1 \dots \sigma_n)$

(Т) О разложении ф-й а/л по переменным.

Если $f(x_1 \dots x_n) \in P_2$, где P_2 - множ ф-й а/л $1 \le m \le n$, то (1) $f(x_1 \dots x_n) = \bigvee\limits_{(\sigma_1 \dots \sigma_m) \in E_2^m} \left(x_1^{\sigma_1} \& \dots \& x_m^{\sigma_m} \& f(\sigma_1 \dots \sigma_m, x_{m+1} \dots x_n)\right)$

(Ex) $\cdot\, f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $m = 2$

00 $x_1^0 \& x_2^0 \& f(0,0,x_3,x_4) \vee x_1^0 \& x_2^1 \&$

01 $\& f(0,1,x_3,x_4) \vee (x_1^1 \& x_2^0 \& f(1,0,x_3,x_4) \vee$

10 $\vee x_1^1 \& x_2^1 \& f(1,1,x_3,x_4)$

11

$\bigvee\limits_{(\sigma_1,\sigma_2) \in E_2^2} \left(x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2} \& f(\sigma_1,\sigma_2)\right)$

Док-во

Докажем, что на наборе $(\gamma_1, \dots \gamma_n)$ $x_1 \dots x_n$

значения равенства (4), левой и правой части совпадают

На выбранном знач. левой части равно $f(\gamma_1 \ldots \gamma_n)$

Рассмотрим значение выражения справа:

$$\vee \left(\gamma_1^{\sigma_1} \ldots \& \gamma_m^{\sigma_m} \& f(\sigma_1 \ldots \sigma_m, \gamma_{m+1} \ldots \gamma_n) \right), \quad (\sigma_1 \ldots \sigma_m) \in E_2^m$$

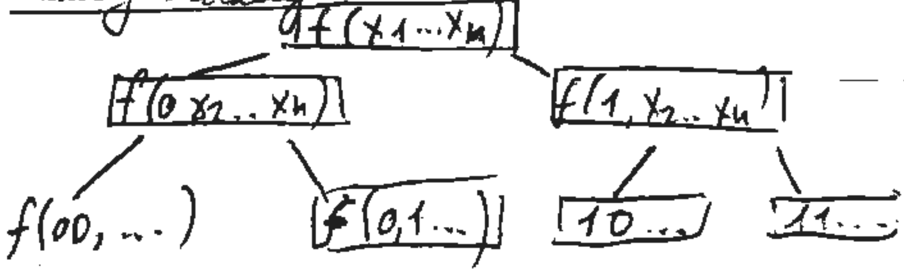
Поскольку $\gamma_1^{\sigma_1} \& \ldots \gamma_m^{\sigma_m} = 1 \Leftrightarrow \gamma_1 = \sigma_1, \gamma_2 = \sigma_2 \ldots \gamma_m = \sigma_m \Leftrightarrow \underbrace{\gamma_1^{\gamma_1} \& \ldots \gamma_m^{\gamma_m}}_{1} \& f(x_1 \ldots x_n) = f(\gamma_1 \ldots \gamma_n)$, ч.т.д.

<u>Частные случаи теоремы о разложении.</u>

1) $m = 1$

$$f(x_1 \ldots x_n) = \overline{x_1} \& f(0, x_2 \ldots x_n) \vee x_1 \& f(1, x_2 \ldots x_n)$$

<u>Метод каскадов</u>



2) Разложение по всем переменным $(m = n)$

$$f(x_1 \ldots x_n) = \bigvee_{(\sigma_1 \ldots \sigma_n) \in E_2^n} \left(x_1^{\sigma_1} \& \ldots x_n^{\sigma_n} \& f(\sigma_1 \ldots \sigma_n) \right)$$

Если $f \not\equiv 0$, то разложение f по всем переменным, можно записать в виде:

$$f(x_1 \dots x_n) = \bigvee_{f(\sigma_1 \dots \sigma_n) = 1} \left(x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}\right)$$

Полученное представление ф-л а/л $f \not\equiv 0$ называется СДНФ (совершенной дизъюнктивной нормальной формулой)

$x_1 \dots x_n$	f
	0
	0
	0
$\sigma_1 \dots \sigma_n$	1
	0
	0
	0
	0

Если в таблице заданий набора ровно 1 единица, то записать f можно как $x_1^{\sigma_1} \& \dots x_n^{\sigma_n}$

Если 2 единицы, то $x_1^{\sigma_1} \dots \& x_n^{\sigma_n} \vee$ $\vee\, x_1^{\sigma_1} \& \dots \& x_n^{\sigma_n}$ и т.д.

(Т) $f(x_1 \dots x_n) \in P_2$, то f представлена ф-лой над мн-вом $B = \{\&, \vee, \neg\}$

Док-во

1) $f(x_1 \dots x_2) \equiv 0 \Rightarrow f(x_1 \dots x_n) = x_1 \& \overline{x_1}$

2) $f(x_1 \dots x_2) \not\equiv 0 \Rightarrow f(x_1 \dots x_n) = \vee \left(x_1^{\sigma_1} \& \dots \& x_n^{\sigma_n}\right)$
$f(x\,\sigma_1 \dots \sigma_n) = 1$ и т.д.

Минимизация дизъюнктивных нормальных ф-л.

Будем рассматривать ф-ции от n перемен-ных.

$f(x_1 - x_n) \in P_2$ Элементарной конъюнкцией ранга r, где $1 \leq r \leq n$ называется всякая ф-на $K = x_{i_1}^{\sigma_1} \& \ldots x_{i_r}^{\sigma_r}$

$i_1 < i_2 \ldots < i_r$

$(\sigma_1 \ldots \sigma_r) \in E_2^r$

разных элементов

Сколько существует ранга r

$C_n^r \cdot 2^r$

1. $K = x_{i}^{\sigma_1} \ldots x_{ir}^{\sigma_r}$

Всякая Эл-рная конъюнкция ранга r принимает значение на 2^{n-r};

2. Дизъюнктивной нормальной ф-ой (ДНФ) будем называть $D = \underline{k_1 \vee k_2 \vee \ldots \vee k_s}$ - разные эл-тарные конъюнкции.

Будем рассматривать ДНФ с точностью до пер-в составляющих ДНФ этих конъюнкций.

3. Сложностью ДНФ $\mathcal{D}$ называется число $L(\mathcal{D})$ значение которого = кол-ву вхождений конъюнкций ($\&$) и дизъюнкций ($\vee$) в запись $\mathcal{D}$.

Если $L(\mathcal{D}) = m$, то

длина будет $2m+1$

4. ДНФ $\mathcal{D}$ - минимальное ДНФ для ф-ции $f \in P_2 \overset{def}{\Leftrightarrow}$ 1) $f_{\mathcal{D}} = f$ ($\mathcal{D}$ для ф-ции f не чужая)

2) $L(\mathcal{D}) = \min(L(\mathcal{D}'),$ где $f_{\mathcal{D}'} = f)$

(минимальная сложность)

Ⓣ Если $f \not\equiv 0$ (отлично тождественности 0), то для f существует $\min$ ДНФ

<u>Док-во</u>

1. Т.к. $f \not\equiv 0 \Rightarrow f(x_1 \dots x_n) = \bigvee (x_1^{\sigma_1} \& \dots \& x_n^{\sigma_n})$ то набор составляется из $f(\sigma \dots \sigma_n) = 1$

Значит, мн-во, представляющее ДНФ, не пустое.

2. Используя символы переменных $x_1 \dots x_n$ можно составить $3^n - 1$ разных эл-тарных конъюнкций. Это так, поскольку разные эл-тарные

наборы можно представлять как

$(\sigma_1, \ldots \sigma_n)$, где $\forall i = \overline{1, n} \, (\sigma_i \in \{0, 1, 2\})$

значение σ_i = 0, X_i - входит по правилу в конъюнкцию
1, X_i - входит в конъюнкцию
2, иначе (не входит)

3^n $(2, 2, \ldots, 2)$ - это не эл-тарная конъюнкция.

3^n - троичных наборов длины n.

3. Существует ровно $2^{3^n-1} - 1$ разных дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ) составленных с использованием переменных $X_1 \ldots X_n$. Действительно, всякая ДНФ рассматриваемого класса соответствует $\overline{\Phi}$ подмножеству мн-ва эл-тарных конъюнкций, составленных с использованием эл-то $X_1 \ldots X_n$ $\overline{\Phi}$ - пустое

$3^n - 1$ $\quad 2^{3^n-1} - 1$ - (1 из таких подмножеств - φ, т.е. не соответствует ни 1 ДНФ)

$\{a_1 \ldots, a_k\}$ кодируется двоичными наборами $\boxed{\tilde{a}_1 | \ldots | \tilde{a}_k}$, значит конечное значение 2^{3^n-1}

4. Значит мн-во ДНФ представляющих f_n составленных с помощью символов

$x_1 \dots x_n$ конечное и $\not\varnothing$. На этом

мн-ве функционал D достигает миним.

значение, ч.т.д.

<u>Замечание.</u>

1) Для ф-ции $f(x_1 \dots x_n) = 0$ ДНФ $=0$ не

существует, т.к. никакая ДНФ не представ-

ляет эту ф-цию.

Если ДНФ содержит хотябы 1 конъюнкцию,

то каждая конъюнкция принимает значе-

ние 1 на 1 (любом) из наборов конъюнкции.

Всякая ДНФ принимает значение 1 хотябы

на 1-м наборе.

$$D = \dots \vee \underset{\substack{x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n} \\ x_{i_1} \dots x_{i_r}}}{D} \vee$$

<u>Замечание.</u>

2) Содержащееся в Т. док-во нахождения способа

ДНФ фактически не применимо.

Ex. 2^{3n-1} $n=10$ $3^{10} \gg 2^{10}$ 1000. 2^{n-r}

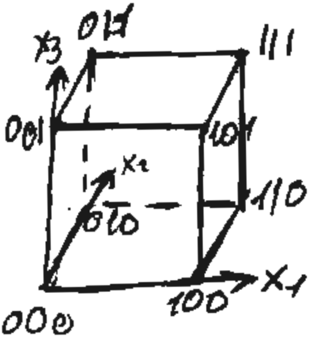
$\Rightarrow 2^{1000} = 10^{250}$ $\left(\frac{1}{4}\right)$ $10^{9} \cdot 10$ сек $\cdot 10^{3}$

10^{233} лет

Геометрическая интерпретация ДНФ.

Рассмотрим ф-ции определенные $f(x_1 \dots x_n) E_2^n$ мн-во 2-чных наборов длины и будем интерпретировать как мн-во граней n-мерного куба.

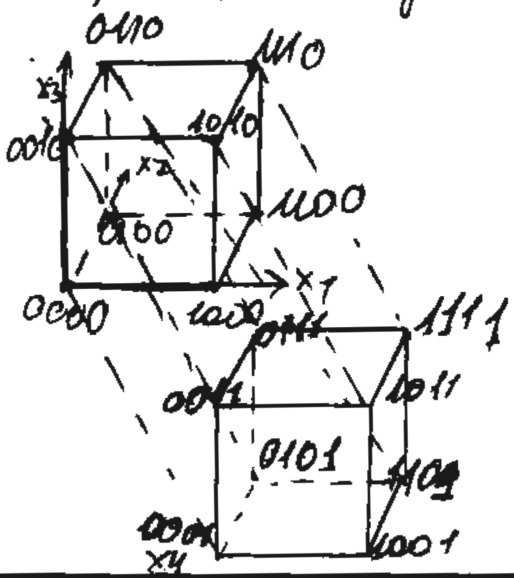
$n = 3$



Вершины куба - наборы, где наборы значений каждой компоненты min / max.

⟨Если внутри куба, то это все координаты⟩

Четырёхмерный куб.



Пусть $f(x_1 \dots x_n)$ представляется в виде D

$f(x_1 \dots x_n) = D = k_1 \vee \dots \vee k_s$

Обозначим кол-а N_f мн-во наборов, на которых $N = 1$.

$N_f = \{(\sigma_1 \dots \sigma_n) \mid f(\sigma_1 \dots \sigma_n) = 1\}$

$N_D = \{(\sigma_1 \dots \sigma_n) \mid f_D(\sigma_1 \dots \sigma_n) = 1\}$

$N_k = \{(\sigma_1 \dots \sigma_n) \mid N_{k_i} \text{ на } (\sigma_1 \dots \sigma_n) = 1\}$

Для введенных соотношений справедливо соотношение $N_f = N_D = \bigcup_{i = \overline{1,s}} N_{k_i}$

(покрывается значениями 1, входящими в ДНФ)

Т.е. мн-во наборов, на котором N принимает значение 1, покрывается мн-вами наборов на значении которых принимается 1 отдельные эл-тарные конъюнкции.

Пусть $k = x_{i_1}^{\sigma_1} \& \dots x_{i_r}^{\sigma_r}$

Наборы, на которых $k = 1$ $x_{i_1} = \sigma_1, x_{i_2} = \sigma_2 \dots x_{i_r} = \sigma_r$

Остальные $n-r$ наборы принимают наборы значений 2^{n-r}, т.е. $|N_k| = 2^{n-r}$

Def $n-r$ мерной гранью единичного n-мерного куба называется всякое мн-во элементов E_2^n (е 2 в степени n), в которых значение переменных

$\sigma(x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r})$ / $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_r$ - фиксированные, а остальные эл-тов таких наборов $(n-r)$ принимают любые комбинации двоичных значений

	i_1	i_2		i_r	
	σ_1	σ_2	...	σ_r	

Поэтому всякая непустая грань n-ного мерного куба инъективно соответствует эл-тарной конъюнкции, принимающей значение 1 в эл-тах этой грани.

Поэтому между гранями и эл-тарными конъюнкциями существуют взаимные соответствия (отношения).

Если при конструировании ДНФ ... применять эл-т конъюнкции, которые

то сложность ДНФ будет уменьшаться, поскольку длина эл-тарной конъюнкции и мощность мн-ва наборов $= 1$ находятся в обратно пропорциональной зависимости.

$\cancel{\underline{N_k} \le N_f}$

Max ГРАНИЦЫ их СВ-ВА.
(конъюнкции)

<u>Def</u> Конъюнкция k - max для ф-ции $f(x_1 \ldots x_n) \in P_2 \overset{def}{\Leftrightarrow}$

1) $N_k \subseteq N_f$ (N_k принадлежит N_f)

2) $\forall k'$, если ($N_k \subset N_{k'} \xrightarrow{\text{(следует)}} N_{k'} \not\subseteq N_f$) - т.е. самые хорошие конъюнкции, которые можно включить в N_f.

Конъюнкция k' - короче.

<max конъюнкция - то, больше которой брать нельзя.>

Если k - max конъюнкция для f, то N_k - max грань для f.

Понятие max конъюнкции.

Некоторая конъюнкция k max для f если:

1) $N_k \subseteq N_f$

2) $\forall k'$ $N_k \underset{\text{(нет равенства)}}{\subsetneq} N_{k'} \rightarrow N_{k'} \subseteq N_f$

(Т) Если $D = k_1 \vee \ldots \vee k_s$ - min ДНФ для $f \in P_2$

то $\Rightarrow \forall i = \overline{1,s}$ (k_i - max k для f)

Док-во

Пусть $D = k_1 \vee \ldots \vee k_s$ - min ДНФ для f и

$k_i \in D$ покажем, что k_i - max конъюнкция для f.

Положим противное:

Тогда для k_i нарушается определение

max конъюнкции, т.е. существует $\exists k' (N_k \subset N_{k'} \& N_{k'} \subseteq N_f)$

т.е. $l(k') < l(k)$ (т.к. размер грани образного k' конъюнкция

пропорционален длине конъюнкции)

Образуем ДНФ $D' = k_1 \vee \ldots \vee k_{i-1} \vee k' \vee k_{i+1} \ldots k_s$

Покажем, что D' представляет: $N_{D'} = N_f$

т.е. $N_{D'} \subseteq N_f$ и $N_f \subseteq N_{D'}$

- В 1-ом случае: $N_{D'} \subseteq N_f$ следует из того, что $N_{k'} \subseteq N_f$, т.е. если $k \subseteq D'$, то $N_k \subseteq N_f \Rightarrow N_{D'} \subseteq N_f$
- 2ое вложение $N_f \subseteq N_{D'}$ следует из того, что $N_f = N_D$, а в переходе от D к D': $D \Rightarrow D'$ мн-во, на котором принимает значение D' не уже D. (D' - шире чем N_{k_i}), значит

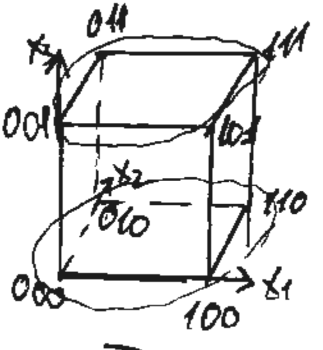
$N_{\mathcal{D}'} = N_f$ и $L(\mathcal{D}') < l(\mathcal{D})$, а это противоречит предположению ~~мінімальн~~ ДНФ для f, ч.т.д.

Доказанное утверждение является необходимым условием min'ости ДНФ, поэтому утверждаем, что всякое min ДНФ => из max конъюнкций.

Поэтому поиск min ДНФ можно ограничить поиском max & ДНФ

(Ex) $x_1 \to (x_2 \to x_3)$

x_1	x_2	x_3	
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
0	1	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1
1	0	1	1



$$\left.\begin{matrix} 001 \\ 011 \\ 111 \\ 101 \end{matrix}\right\} x_3$$

$\overline{x_1}$ $\overline{x_2}$

$\mathcal{D} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3$ – min ДНФ для f, т.к. $N_{\mathcal{D}} = N_f$

у f все 3 переменные существенные, т.е.

каждая из них должна войти хотя бы 1 раз

$2^{3^3-1}-1$ $\quad 2^{26}$

В общем случае применение геометрической интерпретации ДНФ позволяет сформулировать правило отыскания мин ДНФ:

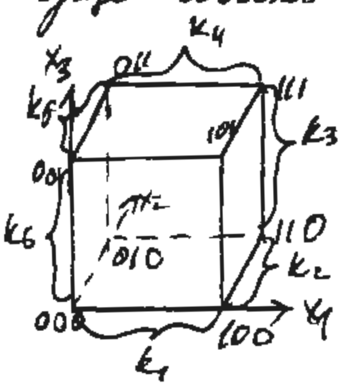
Пусть задано $f \in P_2$, построим множество N_f $K_1 \ldots K_s$ всех max конъюнкций для f.

Построим сокращённую ДНФ $D' = K_1 \vee \ldots \vee K_r$

После этого мин ДНФ выявляется путём удаления "лишних" эл-тов из ДНФ D'.

<u>Примечание</u>

Для одной и той же ф-ции а/л могут существовать несколько разных мин ДНФ.



$K_1 = \overline{x_2} \,\&\, \overline{x_3}$

$K_2 = x_1 \,\&\, \overline{x_3}$

$K_3 = x_1 \,\&\, x_2$

$K_4 = x_2 \,\&\, x_3$

$K_5 = \overline{x_1} \,\&\, x_3$

$K_6 = \overline{x_1} \,\&\, \overline{x_2}$

Можно построить ДНФ $D' = k_1 \vee k_3 \vee k_5$

$D'' = k_2 \vee k_4 \vee k_6$

Меньше 3-х & ДНФ входить не могут, т.к. 6 точе[к]

Эквивалентные преобразования при построении min ДНФ.

Рассмотрим 3 специальные соотношения эквивалентности:

1) правило поглощения: (&-должны быть разной длины)

$$X^{\sigma} \& k \vee k \equiv k \qquad \sigma \in \{0,1\}$$

2) правило склеивания:

$$\bar{x} \& k \vee x \& k \equiv k$$

3) правило обобщённого склеивания.

$$\bar{x} \& k_1 \vee x \& k_2 \overset{\text{(эквивалентно)}}{\equiv} \bar{x} \& k_1 \vee x \& k_2 \vee k_1 \& k_2$$

Здесь k_1, k_2 произвольные & или тождественная единица.

Рассмотрим применение правил 1-3 для

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \to (x_2 \to x_3)$

min ДНФ для f.

Начнём с ДНФ для f.

(1) $D' = \bar{x}_1 \& \bar{x}_2 \& \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \& \bar{x}_2 \& x_3 \vee \bar{x}_1 \& x_2 \& \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \& x_2 \& x_3 \vee$

$\vee\, x_1 \& \bar{x}_2 \& \bar{x}_3 \vee x_1 \& \bar{x}_2 \& x_3 \vee x_1 \& x_2 \& x_3 \overset{(2)}{=} \bar{x}_1 \& \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \& x_2 \vee$

(1) $l(D') = \underset{\vee}{6} + \underset{\&}{\underline{7 \cdot 2}_{14}} = 20$

$\vee\, x_1 \& \bar{x}_2 \vee x_1 \& x_2 \& x_3.$

(2) $l(D') = 8.$

$= \bar{x}_1 \vee x_1 \& \bar{x}_2 \vee x_1 \& x_2 \& x_3 \Rightarrow \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_1 \& x_2 \& x_3$

$l(D') = 5$

по поглощению $x_1 \& \bar{x}_2$

$\bar{x}_1 \vee x_1 \& \bar{x}_2 = \bar{x}_1 \& \underset{K_1}{1} \vee \underset{K_2}{x_1 \& \bar{x}_2} \vee \bar{x}_2 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$

$1 \& \bar{x}_2$

$K_1 \& K_2$

$x_1 \& \underset{K_1}{1} \vee \cancel{x_2 \& x_3}$

K_1 поглотил K_2, т.к. K_1 короче.

$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_1 \& x_2 \& x_3 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_2 \& x_3$

$\Downarrow$

$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$

$\bar{x}_1 \& \underset{K_1}{1} \vee \cancel{x_1 \& x_2 \& x_3} \vee x_2 \& x_3$

В общем случае справедливо следующее утверждение:

Если для f отличное тождественно от 0 построить из всех тах.. для $f\&$, то с помощью правил 1-3 эту ДНФ можно преобразовании в min ДНФ для f.

Полные системы ф-ции

А/Л.

<u>Def</u> Пусть $B \subseteq P_2$ замыканием B (обозначается как $[B]$) называется мн-во ф-ций а/л представимых ф-лами над B.

Ex(1) - пример 1 Ex(1) $B = \{\&, \vee, -\}$ $[B] = P_2$

(2) $B = \{-\}$ $[B] = \{x, \bar{x}\}$.

<u>Def</u>

$B \subseteq P_2$ - полная система ф-ций а/л. $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ когда замыкание $[B] = P_2$

Т. Индукции.

Если B_1 и $B_2 \subseteq P_2$ и:

1) $[B_1] = P_2$

2) $\forall f \in B_1 (f \in [B_2])$ - каждая система ф-ций B_1 выражается через B_2.

тогда $[B_2] = P_2$

<u>Док-во</u>

1) Пусть $h(x_1 \ldots x_n) \in P_2$, покажем, что h представляется ф-лой над B_2.

2) по условиям теоремы $[B1]=P_2 \Rightarrow h_1(x_1 \dots x_n) = U(f_1, \dots f_m)$, где U - ф-ла над $B1$, представляющая B_2, составленная из ф-ций: $(f_1 \dots f_m) \in B_1$

3) Для каждой из ф-ций $f_1 \dots f_m$ по условию, существует ф-ла над B_2 представляющая эту ф-цию.

$$f_1(x_{11} \dots x_{1k_1}) = U_1(x_{11} \dots x_{1k_1})$$

$U_1 \dots U_m$ - ф-лы

$\vdots$

$$f_m(x_{m1}, \dots, x_{mk_m}) = U_m(x_{m1} \dots x_{mk_m})$$

4) Выполним замену U каждого вхождения

$$f_i(A_1, \dots A_{m_i}) \Leftrightarrow U_i(A_1, \dots A_{m_i})$$

на ф-лу ей эквивалентную.

Такая замена, выполненная последовательно преобразует U в эквивалентную ей ~~ф-цию~~ ф-лу функции $= h$. Поэтому $h \in [B_2]$, ч.т.д.

(8)(1) 1. В качестве $B1$ возьмём $\&, \vee, -$

$B_1 \{\&, \vee, -\}$, а для $B_2 = \{\vee, -\}$

<Нужно показать, что $\&$ можно выразить через $\vee$ и $-$>

$$x_1 \& x_2 = \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}}$$

$\overline{\overline{x_1 \& x_2}} = \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}}$

Значит $[B_2]$-полная система $[B_2] = P_2$

Ex.(2) $B_1 = \{\&, \vee, -\}$

$B_2 = \{\&, -\}$

$x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x_1} \& \overline{x_2}}$ значит $[B_2] = P_2$

Фун-ция Шеффера. $B_2 = \{|\}$

↓-Стрелка Пирса $B_1 = \{\&, -\}$

$x_1 | x_2 = \overline{x_1 \& x_2}$

$\overline{x} = x|x = \overline{x \& x} = \overline{x}$

$x_1 \& x_2 = (x_1|x_2) \underset{\text{отрицание}}{|} (x_1|x_2)$

< доля ф-ций которые можно выразить x 2^{n} >

Полиномы Жегалкина.

Пусть $B = \{\underbrace{x_1 \cdot x_2}_{\text{это конъюнкция } x_1 \& x_2}, \frac{x+1}{x}\}$, т.е. B - полная система

<$x+1$ это $\overline{x}$, т.к. уже не x, 0, 1>

Ф-лой над B выражаются любые ф-ции А/Л

1 Пусть U некоторая формула над B. Преобразуем эту ф-лу. Раскроем скобки используя дистрибутивность + и $\cdot$. В результате

получим ф-цию имеющую вид суммы произведение. $(x_1 \cdot (x_2+x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3$

Пусть произведение переменных:
$(x+1) \cdot (y+1)$

2. В каждом произведении переменных расположим все переменные в порядке возрастания индексов (коммуникативность умножения).

3. Из каждого повторения удалим повторяющиеся эл-ты. $(x \cdot x = x)$

4. В полученной сумме удалим пары одинаковых слагаемых. $(x+x=0)$

5. Если удалены все слагаемые, то выпишем 0. Полученный полином, рассматриваемый с точностью до порядка слагаемых - <u>полином Жегалкина</u>.

Поскольку B - полная система, то каждая ф-ция а/л представляется хотя бы 1 полиномом Жегалкина.

(T) Всякая ф-ция а/л представляется ровно 1 полиномом Жегалкина.

Док-во

1) Всякая ф-ция а/л представляется не менее чем 1 полиномом Жегалкина.

$f(x_1 \dots x_n)$

2) Подсчитаем кол-во разных полиномов Жегалкина, в записи которых содержится $x_1 \dots x_n$ ‹Такая замена не влияет на значение ф-ции никогда›

3) Из символов $x_1 \dots x_n$ можно составить ровно 2^n произведений переменных

$$\sigma_i = \begin{cases} 0, x_i - \text{не входит в произведение} \\ 1, x_i - \text{входит в произведение.} \end{cases}$$

$(\sigma_1 \dots \sigma_n)$

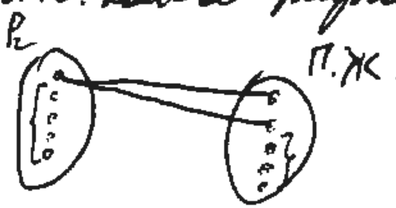
$(0, \dots 0) = 1$

2^n - включая пустое произведение $(0 \dots 0)$

Из 2^n разных произведений произведений можно составить 2^{2^n} полиномов Жегалкина, т.к. каждый полин. Жегалкина определяется совокупностью мн-в

поэтому полиномов Жегалкина столько, сколь разных подмножеств 2^n [illegible] множеств.

Т.е. кол-во разных полиномов Жегалкина



= кол-ву разных функций переменных n

Поскольку каждое $f(L)$ представляется хотя бы 1 полиномом Жегалкина, то такое представление единственное. Т.к. тех и других поровну.

Если каждой ф-ции будет соответствовать 2 полинома, то ф-ций будет > полиномов => по правилу птичьих гнёзд 2-ум полиномам будет соответствовать 1 ф-ция, ч.т.д.

Если переменная входит в полином Жегалкина, то она является существенной.

(Ex.) Нахождение полиномов Жегалкина для заданных ф-ций можно осуществлять с помощью неопределённых коэффициентов.

$x_1 \to x_2$

1) Возьмём табличное значение ф-ции.

x_1	x_2	$x_1 \to x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

2) $\overset{1}{\overset{=}{\alpha}} x_1 \cdot x_2 + \overset{1}{\overset{=}{\beta}} x_1 + \overset{0}{\overset{=}{\gamma}} x_2 + \overset{1}{\overset{=}{\delta}}$

? значение $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$

$$f(0,0)=1 \quad \begin{cases} \alpha\cdot 0+\beta\cdot 0+\gamma\cdot 0+\delta=1 \Rightarrow \delta=1 \\ \alpha\cdot 0+\beta\cdot 0+\gamma\cdot 1+\delta=1 \\ \alpha\cdot 0+\beta\cdot 1+\gamma\cdot 0+\delta=0 \\ \alpha\cdot 1+\beta\cdot 1+\gamma\cdot 1+\delta=1 \end{cases}$$

$f(0,1)=1$, $f(1,0)=0$, $f(1,1)=1$

$f(0,1)=1 \quad \alpha\cdot 0+\beta\cdot 0+\gamma\cdot 1+1=1$

$\gamma+1=1$

$\gamma=0$

$f(1,0)=0 \quad \alpha\cdot 0+\beta\cdot 1+1=0$

$\beta+1=0$

$f(1,1)=1 \quad \alpha\cdot 1+\underset{=}{\beta}\cdot 1+1=1$

$1\ +1\ +1=1 \quad \alpha=1$

Специальные классы ф-ции А/Л.

Def Замкнутый класс - $B \subset P_2$ (вычисление) называется замкнутым классом $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ когда замыкание $[B]=B$

Мн-во $B = \{x, \bar{x}\}$

$[B] = B$, т.к. можно получить 1 из другого.

$P_2 = [P_2]$

1) Класс ф-ций сохраняющих "0".

Определим класс $T_0 = \{f(x_1 \dots x_n) \mid f \in P_2 \,\&\, f(0 \dots 0) = 0\}$ каждое значение ф-ции на любом наборе значений $f = 0$.

$x_1 \dots x_n$	f
$0 \dots 0$	0
$0 \dots 1$	
$\vdots$	
$\sigma_1 \dots \sigma_n$	
$\vdots$	
$1 \dots 1$	

$\Big\} \; 2^n - 1$

Поскольку ф-ции из T_0 вида $f_1 \dots f_n$ на $2^n - 1$ наборе отличных от нулевого набора принимают любые различные значения. Значит T_0 принимает $2^{2^n - 1}$ разных значений P_2^n.

(Т) $[T_0] = T_0$ — T_0 - замкнутый класс.

<u>Док-во.</u>

Покажем, что всякая ф-ла над T_0 представляет ф-цию из T_0

Проведём док-во индукции по глубине ф-лы.

1) Базис индукции $d=1$

Пусть U - ф-ла над T_0 и $d(U)=1$, тогда

$U=f(x_1 \dots x_n)$, где $f\in T_0$

$f_U(x_1 \dots x_n) = f(x_1 \dots x_n)$

$f_U(0, \dots 0) = f(0 \dots 0) = 0$, ч.т.д.

2) Индуктивное предположение

$d\le k$

U - ф-ла над T_0 и $d(U)\le k \Rightarrow f_U \in T_0$

3) индуктивный переход

$d=k+1$

Пусть $U=f(A_1, \dots A_m)$ формула над T_0 глубины $d=k+1$, где $f\in T_0$, где $A_1 \dots A_m$ - символы переменных или ф-лы T_0, где $\forall i=\overline{1,m}\ (d(A_i)\le k)$

Определим ф-ции $f_{A_i}(x_{i} \dots x_{i l_i})$, $i=\overline{1,m}$

Если $A_i = x_j \Rightarrow f_{A_i}(x_j) - x_j \in T_0$

Если A_i - ф-ла, то $f_{A_i}(x_{i1} \dots x_{i l_i})$ - A_i функция представляется $\Rightarrow$ по инд. предпол. $f_{A_i}\in T_0$

$\Rightarrow f_k(x_1 \dots x_n) = f(f_{A_1}(x_1 \dots x_n b_1), \dots, f_{A_m}(x_{m1} \dots x_n l_m))$
(по теореме о замене равных)

$f_1 f_2 \dots f_m \in T_0$, тогда $f_k(0 \dots 0) = f(f_{A_1}(0 \dots 0), \dots$
$, f_{A_m}(\underbrace{0 \dots 0}_{=0})) = f(0, \dots 0) = 0 \Rightarrow f_k \in T_0$, ч.т.д.

$\Leftarrow$ из (Т) никакая ф-ция из T_0 не представляется как T_0 > класс T_0 не является полной системой.

(2) Класс ф-ций сохраняющий единицу.
Определим класс $T_1 = \{f(x_1 \dots x_n) \mid f \in P_2 \,\&\, f(1 \dots 1) = 1\}$
T_1 содержит 2^{2^n-1} ф-ций из P_2^n и
$T_1 = [T_1]$. Оба св-ва аналогичны св-вам T_0.

$x_1 \dots x_n$	f
	$\left.\right\} 2^n-1$
$1 \dots 1$	

(3) Класс S - самодвойственной ф-ции.
Def Если $f(x_1 \dots x_n) \in P_2$, то ф-ция $g(x_1 \dots x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n)$ называется ф-цией двойственной к f.
Если $f \in P_2$, то f обозначается как f^* это

тогда $f^*(x_1 \dots x_n) = \overline{f}(\overline{x_1} \dots \overline{x_n})$, поэтому

$(f^*)^* = f$

x	x	x^*
0	0	0
1	1	1

$f(x) = \overline{\overline{x}}$

ф-ция совпала со своей двойственной

x	$\overline{x}$	$(\overline{x})^*$
0	1	1
1	0	0

Для & и ∨

$(x_1 \& x_2)^* = x_1 \vee x_2$

$(x_1 \vee x_2)^* = x_1 \& x_2$