Дискретная математика и математическая логика (лабораторные задания)

1.ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ЛОГИКА

ЛОГИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ И ПРЕДИКАТЫ

Высказыванием называется всякое предложение, которое истинно или ложно. “ *ИСТИНА* “ и “ *ЛОЖЬ*“ являются логическими значениями и обозначаются как “ ***1*** “ и “ ***0*** “ . Из отдельных высказываний с помощью логических связок можно создавать составные высказывания.

При этом применяются следующие логические связки:

1. конъюнкция или связка “ **и** “ (обозначается как **&**);

2. дизъюнкция или связка “ **или** “ (обозначается как $\vee$);

3. **импликация** или логическое следование (обозначается как →);

4. отрицание или связка “ **не** “ (обозначается как ¯).

Если A и B - высказывания, то $A \,\&\, B$, $A \vee B$, $\bar{A}$ — это высказывания, логические значения которых определяются по значениям A и B согласно следующим таблицам истинности:

A	B	$A \,\&\, B$	$A \vee B$	$A \to B$	A	$\bar{A}$
0	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**0**	**1**	**0**		
1	**1**	**1**	**1**	**1**		

Более сложной логической связкой является логическое следование, или импликация, обозначаемая как →. При этом запись $A \to B$ понимается так: “ Из A следует B “.

1.1. Построить таблицы истинности для логических значений следующих составных высказываний:

a) $A \to (B \to C)$;   d) $A \,\&\, \bar{B} \,\&\, \overline{C \,\&\, D}$;

b) $C \to (A \,\&\, (B \to \bar{C}))$;   e) $(A \to B) \vee (B \to C)$;

c) $(A \vee (B \,\&\, C)) \to B$;   f) $(A \to B) \,\&\, (C \vee D)$.

Логической формулой, или предикатом, называется предложение, содержащее утверждение о свойстве объектов некоторого семейства таких объектов.

Для конкретных объектов логическая форма образует высказывания и принимает конкретные логические значения.

Например, предикат **P** (x , y) = “ x больше или равно y ” , где x и y - натуральные числа, для пары чисел (**8** , **5**) принимает логическое значение “ **1** “ , а для пары чисел (**3** , **25**) принимает значение “ **0** “ .

В качестве неарифметического примера предиката рассмотрим следующий:

“ x является учащимся средней школы номер y “.

Здесь x принимает значения из совокупности всех людей, а y — значения из множества натуральных чисел. Для каждой конкретной пары значений x и y приведенное предложение (предикат) принимает конкретное логическое значение.

К логическим формам можно применять логические связки, порождая новые предикаты, записи которых называются формулами.

Пример. Если $A(x, y)$ - это “ x *учится в школе номер* y “, а $B(x)$ - это “ x *занимается спортом* “ и $C(x)$ - это “ x *хорошо успевает по всем предметам* “, то запись

$$(A(x, y) \,\&\, B(x)) \to C(x)$$

представляет собой выражение, которое можно понимать так: “ *из того, что* x *учится в школе номер* y *и* x *занимается спортом следует, что* x *хорошо успевает по всем предметам* “ или так : “ *если* x *учится в школе* y *и занимается спортом, то он хорошо успевает по всем предметам* “.

К предикатам применяются специальные операторы, называемые кванторами:

1) квантор существования (обозначается как $\exists$ и называется также квантором “ *существует такой, что* “);

2) квантор всеобщности (обозначается как $\forall$ и называется также квантором “ *для всякого* “ или “ *для всех* “).

Пусть $\mathbf{A}(x_1, \ldots, x_n)$ - некоторый предикат. Здесь $x_1, \ldots, x_n$ — переменные этого предиката , называемые также свободными переменными .

Тогда выражение или запись $\exists x_j \mathbf{A}(x_1, \ldots, x_n)$ представляет предикат $\mathbf{B}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, который для конкретных значений переменных $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ равных $a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n$, принимает логическое значение “ **1** “ тогда и только тогда, когда найдется такое значение переменной x_j , равное b , для которого высказывание $\mathbf{A}(a_1, \ldots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \ldots, a_n)$ является истинным.

Аналогично, запись $\forall x_j \mathbf{A}(x_1, \ldots, x_n)$ — представляет такой предикат $\mathbf{B}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, который для всяких конкретных значений своих переменных, равных $a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n$ принимает логическое значение “ ***1*** “ тогда и только тогда, когда предикат $\mathbf{A}(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)$ является истинным при любых значениях переменной x_j .

В обоих случаях переменная x_j , по которой применяется квантор, в записях формул:

$\exists x_j \mathbf{A}(x_1, \ldots, x_n)$ и $\forall x_j \mathbf{A}(x_1, \ldots, x_n)$ называется связанной переменной.

1.2. Указать свободные и связанные вхождения переменных в следующих формулах, составленных из предикатов:

a) $\forall y\ (\mathbf{A}(x,z) \vee \exists z\, (\mathbf{A}(x,z) \,\&\, \mathbf{B}(y))) \to \exists x\, (\mathbf{B}(x) \,\&\, \mathbf{A}(x, y))$;

b) $\exists x\, (\mathbf{C}(x) \,\&\, \mathbf{A}(x,y)) \to \forall y\, \mathbf{P}(y,z)$;

c) $\exists x((\mathbf{A}(x) \vee \mathbf{B}(x)) \,\&\, (\forall z\, \mathbf{D}(z,y) \to \exists x\, \mathbf{C}(x,y)))$;

d) $\exists x\, (\mathbf{A}(x,y) \to \mathbf{B}(x,y)) \,\&\, \forall z\, (\mathbf{C}(x) \,\&\, \mathbf{A}(x,z))$.

1.3 . Для каких натуральных значений переменных x_1 и x_2 предикат является истинным?

a) $\exists x_3\, (x_1 < x_3 \,\&\, x_2 < x_3)$;

b) $\forall x_3\, (x_1 < x_3 \to x_2 \le x_3)$;

c) $\exists x_3\, (x_1 < x_3 \,\&\, x_2 \le x_3)$;

d) $\forall x_3\ \exists x_4\, (x_4 > x_2 \vee x_3 < x_1)$;

e) $\forall x_3\ \forall x_4\, (x_1 \le x_3 \vee x_2 \le x_4)$;

g) $\forall x_3\ \exists x_4\, (x_1 > x_3 \,\&\, x_2 > x_4)$;

g) $\forall x_3\ \forall x_4\, (x_1 < x_3 \,\&\, x_2 < x_4)$;

h) $\forall x_3\ \forall x_4\, (x_1 \le x_3 \to x_2 \le x_4)$;

i) $\exists x_3\ \exists x_4\, (x_1 \le x_3 \vee x_2 \le x_4)$;

j) $\forall x_3\ \forall x_4\, (x_1 > x_3 \,\&\, x_2 > x_4)$;

f) $\forall x_3\, (x_1 \le x_3 \vee x_3 \le x_2)$

h) $\exists x_3\ \forall x_4\, (x_1 > x_3 \,\&\, x_2 > x_4)$;

1.4 . Привести примеры предикатов $\mathbf{A}(x, y)$, где x и y принимают целочисленные значения, которые:

a) всегда истинны (тавтологии);

b) всегда ложны;

c) являются выполнимыми (бывают как истинными, так и ложными);

d) являются истинными на единственном наборе значений (x, y);

e) ложны на единственном наборе значений (x, y);

f) истинные на некоторых парах натуральных чисел, не имеющих общих делителей;

g) принимают значение истина и ложь на бесконечных множествах пар чисел.

Предикаты вида $\mathbf{P}(x)$, имеющие лишь одну свободную переменную, называются свойствами. Если для некоторого значения $x = a$ такой предикат является истинным, то говорят, что a обладает свойством **P**.

Примерами предикатов свойств являются:

— **твердый** (x), где x принимает значения из множества видов материалов ;

— **легкий (** x), где x принадлежит множеству химических соединений;

— **сильный** (x) , где x принадлежит множеству животных.

Другой важный класс предикатов — бинарные предикаты, или предикаты с двумя свободными переменными. Если такой предикат **P** (x , y) истинен для $x = a$ и $y = b$, то говорят, что между конкретными значениями a и b выполняется связь, представляемая предикатом **P** .

Например, предикат **часть(**x, y), где x и y принимают значения из множества частей и деталей устройства, истинен только для таких x и y**,** из которых первая деталь является частью второй детали.

Возможны предикаты, имеющие большее число переменных. Например, предикат **поставляет** (x , y , z) - это трехместный предикат, который истинен тогда и только тогда, когда объект x поставляет объекту y объект z . Конкретизация этого предиката вида **поставляет** (**агент**, **резидент**, **информация**) является истинной.

1.5. Приведите примеры предикатов **P** (x , y) и **Q** (x , y), для которых является всегда истинным предикат **P** (x , y) → **Q** (x , y).

1.6. Записать следующие предложения в виде выражений, выделив для этого первичные (базовые) предикаты, используя логические связки и кванторы:

A. При нагревании давление газа в замкнутом сосуде нарастает.

B. Все дети любят мороженое.

C. Некоторые люди не любят рисковать.

D. Существуют приборы, позволяющие видеть в темноте.

E. Все присутствующие на встрече уверены в выгодности заключенного контракта.

1.7. Записать следующие определения с помощью свойств и бинарных предикатов, логических связок и кванторов, например:

“ Ротор — это вращающаяся часть машины “ можно записать в виде

$$\mathbf{P}(x) \Longleftrightarrow \textbf{вращается}\,(x)\ \&\ \exists\, y(\textbf{часть}\,(x, y)\ \&\ \textbf{машина}\,(y))$$

A. Инвестиции — это затраты денежных средств, направленные на поддержание и расширение капитала.

B. Рефрижератор — это транспортное средство, содержащее холодильную установку, в которой перевозится груз.

C. Вексель — это составленное по установленной законом форме безусловное письменное долговое обязательство, выданное векселедателем векселедержателю.

D. Плавление — это процесс перехода вещества из твердого состояния в жидкое.

E. Акция — это ценная бумага, выпускаемая АО, которая удостоверяет право на долю в уставном капитале акционерного общества.

F. Тепловоз — это машина, перемещающаяся по рельсам, приводимая в движение с помощью двигателя внутреннего сгорания;

G. Встречаются люди, знающие несколько языков;

H. В Лондоне живет только один человек, который может решить эту задачу.

Один и тот же предикат может по-разному выражаться через другие предикаты.
Формулы, представляющие один и тот же предикат называются эквивалентными.

Например, $\overline{\forall}\, x\, \mathbf{A}(x)$ и $\exists\, x(\overline{A(x)})$ для любых наборов значений переменных принимают одинаковые истинные значения.

1.8. Обосновать эквивалентность следующих формул, показав, что на любых наборах значений свободных переменных они принимаю одинаковые значения:

a) $\exists x\,(\mathbf{A}(x)) \to \mathbf{B}$ и $\forall y\,(\mathbf{A}(y) \to \mathbf{B})$; **b)** $\mathbf{B} \to \forall x\ \mathbf{A}(x)$ и $\forall y\,(\mathbf{B} \to \mathbf{A}(y))$;

c) $\mathbf{B} \to \exists\, x\,(\mathbf{A}(x))$ и $\exists\, y\,(\mathbf{B} \to \mathbf{A}(y))$; **d)** $\forall\, x\,(\overline{A(x)}$ и $\overline{\exists}\, x\,(\mathbf{A}(x))$;

e) $\forall\ x\,(\mathbf{A}(x)) \to \mathbf{B}$ и $\exists\ y\,(\mathbf{A}(y) \to \mathbf{B})$.

Здесь переменные x и y не входят свободно в **B**.

1.9. Эквивалентны ли формулы $\exists x \forall y\ \mathbf{P}(x,y)$ и $\forall y\ \exists x\ \mathbf{P}(x,y)$.

1.10. Пусть задан предикат P(x). Составьте формулы, соответствующие высказываниям

a) существует ровно один x для которого P(x) истинно;

b) существует не более 3 значений x, для которых P(x) истинно;

c) существует не менее 2 значений x, для которых P(x) ложно;

1.11. Определить все истинные импликации между бинарными предикатами, переменные которых принимают значения на множестве людей: ***Знает***(x,y), ***Дружит***(x,y), ***Родственник***(x,y), ***Руководит***(x,y), ***Подчиняется***(x,y), ***Сосед***(x,y), ***Работают_рядом***(x,y), ***Советник***(x,y).

1.12. Ввести в рассмотрение не более чем двуместные предикаты, с помощью которых записать в виде формул следующие высказывательные формы:

A . *Интуиция отказывает, если сложность задачи превосходит способность человека к мгновенной концентрации внимания.*

B . *Умение выбрать верные направляющие ориентиры — это и есть лидерство .*

C . *Существует два типа лидеров: “технари“, которые знают любую техническую неполадку и могут её исправить, и “брокеры“, не имеющие исчерпывающих технических знаний, но обладающие большими организационными способностями.*

D . *Если информация, попавшая в электронную сеть, затеряется, то это может обострить разногласия и породить нежелательные эмоции, разрушить личные отношения.*

1.13. Используя математические символы, логические связки и кванторы, записать в виде предикатов следующие определения:

a) наибольшего общего делителя двух натуральных чисел;

b) симметрического числа;

c) простого числа;

d) последовательности чисел, образующей арифметическую прогрессию.

1.14. Пусть заданы предикаты: **мужчина** (x) , **женщина** (x), **отец** (x , y) , **мать**(x , y) .

Определить, какие свойства людей выражаются следующими формулами:

a) $\exists\, y\,(\textbf{отец}(x, y)\ \&\ (\textbf{отец}(y, z) \vee \textbf{мать}(y, z)))$;

b) $\textbf{мужчина}(x)\ \&\ \exists\, y\,(\textbf{отец}(y, x)\ \&\ \textbf{отец}(y, z))$;

c) $\exists\, y\, \exists\, z\,(\textbf{отец}(y, x)\ \&\ \textbf{отец}(y, z)\ \&\ \textbf{мать}(z, v))$;

d) $\exists\, y(\textbf{женщина}(x)\ \&\ \textbf{мать}(x, y)\&\ \textbf{мать}(y, z))$.

1.15. С помощью предикатов, используемых в предыдущей задаче, составить (когда это возможно) формулы, а также предикаты **муж** x , y) и **жена** (x , y), представляющие свойства:

a) x и y - братья;

b) x - племянник y;

c) x и y - двоюродные сестры;

d) x и y женаты на сестрах;

f) x и y не являются сёстрами и имеют детей, отцы которых – двоюродные братья;

e) x и y - родственники;.

1.16. привести примеры трёхместных предикатов $\mathbf{A}(x, y, z)$, для следующих множеств значений переменных x, y, z:

a). люди, книги, здания (сооружения); d). предметы, цвета, размеры;
b). люди, люди, события; e). события, люди, регионы;
c). животные, регионы, животные; f). профессии, образование, физические данные.

2. МНОЖЕСТВА

Множеством называется всякая совокупность объектов, называемых элементами этого множества. Если a — элемент множества **A** , то для обозначения этого факта используют символ принадлежности $\in$ и пишут $a \in \mathbf{A}$.

Множество, не содержащее элементов, называется пустым и обозначается как $\varnothing$.

Символ $\subseteq$ обозначает включение множеств. Запись $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — множества, означает, что $\forall \mathbf{a} \in A(\mathrm{a} \in B)$. В этом случае A называется подмножеством множества $\mathbf{B}$.

Множества можно задавать либо перечислением всех элементов, либо указанием вида элементов множества и свойства, которым обладают элементы множества и не обладают элементы, не входящее в это множество. В обоих случаях представление множества заключается в фигурные скобки, например:

множество натуральных чисел: $\mathrm{N} = \{1, 2, \ldots\}$;

множество десятичных цифр: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

множество простых чисел: $S = \{2, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$.

Объединением множеств $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называется множество $\{x \mid x \in \mathbf{A}$ или $x \in \mathbf{B}\}$, обозначаемое как $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$.

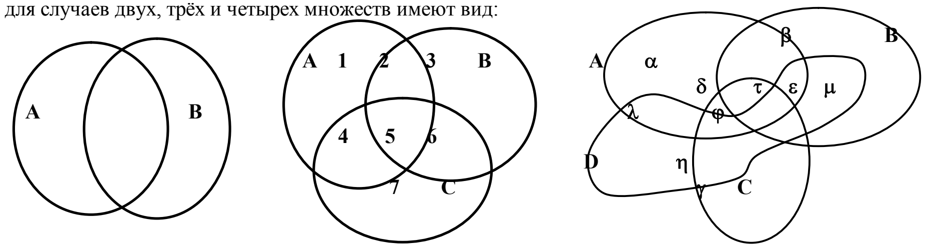
Пересечением множеств $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называется множество $\{x \mid x \in \mathbf{A}$ и $x \in \mathbf{B}\}$, обозначаемое как $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$.

Разностью множеств $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называется множество

$\{x \mid x \in \mathbf{A}$ и $x \notin \mathbf{B}\}$, обозначаемое как $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$.

Произведением множеств $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называется множество $\{(x, y) \mid x \in \mathbf{A} \,\&\, y \in \mathbf{B}\}$, которое обозначается как $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

Для изображения взаимного расположения множеств используются диаграммы Венна, которые для случаев двух, трёх и четырех множеств имеют вид:



2.1. a) Выразить множества **1 — 7**, используя множества: **A**, **B**, **C**.

b) Выразить множества α — τ, используя множества: **A**, **B**, **C**, **D**.

2.2. Нарисовать диаграмму Венна для четырех множеств и изобразить на ней множества:

a) $((\mathbf{A} \setminus (\mathbf{B} \cup (\mathbf{C} \setminus \mathbf{D})) \cap ((\mathbf{A} \cup \mathbf{C}) \setminus \mathbf{D}))) \cup ((\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \setminus (\mathbf{C} \setminus \mathbf{D}))$;

b) $(\mathbf{A} \setminus (\mathbf{B} \cup (\mathbf{C} \cap \mathbf{D}))) \setminus ((\mathbf{A} \cup \mathbf{C}) \cap \mathbf{D})$;

c) $((\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) \cup (\mathbf{C} \cup (\mathbf{D} \cap \mathbf{A}))) \cup (\mathbf{A} \cup (\mathbf{C} \setminus \mathbf{B}))$;

d) $(\mathbf{D} \setminus (\mathbf{B} \cup \mathbf{C})) \cap (\mathbf{C} \setminus \mathbf{D})$;

e) $((\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) \cap \mathbf{D}) \setminus ((\mathbf{D} \cap \mathbf{A} \cap \mathbf{C}) \cup (\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}))$;

f) $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C} \cup \mathbf{D}) \setminus (\mathbf{A} \cup ((\mathbf{C} \cap \mathbf{D}) \setminus (\mathbf{B} \cap \mathbf{C} \cap \mathbf{D})))$.

2.3. Доказать тождества:

a) $\mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap (\mathbf{A} \cup \mathbf{C})$;

b) $\mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{C})$;

c) $\mathbf{A} \setminus (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \setminus \mathbf{C})$;

d) $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \setminus \mathbf{C} = (\mathbf{A} \setminus \mathbf{C}) \cup (\mathbf{B} \setminus \mathbf{C})$;

e) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = (\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) \cup (\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$;

f) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \setminus ((\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) \cup (\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}))$;

h) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \times \mathbf{C})$;

i) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cap (\mathbf{A} \times \mathbf{C})$.

2.4. Определить, в каких случаях верны равенства:

a) $\mathbf{A} \setminus (\mathbf{B} \setminus \mathbf{C}) = \mathbf{A} \setminus (\mathbf{C} \setminus \mathbf{B})$;

b) $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \setminus \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cup \mathbf{C}) \setminus \mathbf{B}$;

c) $\mathbf{C} \setminus (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = (\mathbf{C} \setminus \mathbf{A}) \cup (\mathbf{C} \setminus \mathbf{B})$;

d) $\mathbf{C} \setminus (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = (\mathbf{C} \setminus \mathbf{A}) \cap (\mathbf{C} \setminus \mathbf{B})$;

e) $(\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) \cap \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) \setminus (\mathbf{B} \cap \mathbf{C})$;

f) $\mathbf{A} \times ((\mathbf{A} \setminus \mathbf{C}) \cup \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \cup ((\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) \times \mathbf{C})$;

g) $\mathbf{A} \times (\mathbf{C} \cup \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \cup (\mathbf{C} \times (\mathbf{B} \setminus \mathbf{C}))$;

2.5. Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ подмножества множества $\mathbf{U}$. Выразить:

a) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$, используя множества $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и операцию $\setminus$;

b) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, используя множества $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{U}$ и операцию $\setminus$.

2.6. Показать, что операцию разности множеств $\setminus$ нельзя выразить с помощью операций $\cap$ и $\cup$.

2.7. Решить системы уравнений, в которых $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ — заданные, а $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ — неизвестные множества:

a) $\mathbf{B} \cup \mathbf{X} = \mathbf{A}$, $\mathbf{B} \setminus \mathbf{X} = \mathbf{C}$;

b) $(\mathbf{A} \setminus \mathbf{X}) \cup (\mathbf{X} \setminus \mathbf{B}) = \mathbf{C}$, $\mathbf{X} \setminus (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \varnothing$, $\mathbf{B} \setminus (\mathbf{B} \setminus \mathbf{C}) = \mathbf{D}$;

c) $\mathbf{B} \cap (\mathbf{A} \cap \mathbf{X}) = \mathbf{C}$, $\mathbf{X} \setminus \mathbf{A} = \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \setminus \mathbf{X} = \mathbf{D}$;

d) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{X} = \mathbf{C}$, $\mathbf{B} \setminus \mathbf{X} = \mathbf{A}$;

e) $\mathbf{X} \setminus \mathbf{C} = \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \cap (\mathbf{X} \setminus \mathbf{B}) = \mathbf{C}$;

f) $\mathbf{X} \cup \mathbf{Y} = \mathbf{A}$, $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \mathbf{B}$, $\mathbf{X} \setminus \mathbf{Y} = \mathbf{C}$;

g) $\mathbf{C} \setminus (\mathbf{X} \cup \mathbf{A}) = \mathbf{B}$, $\mathbf{X} \setminus \mathbf{C} = \mathbf{D}$, $(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) \setminus \mathbf{X} = \varnothing$;

i) $\mathbf{X} \cup \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) \setminus (\mathbf{A} \setminus \mathbf{C})$; $\mathbf{X} \cup \mathbf{A} = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) \setminus (\mathbf{C} \setminus \mathbf{A})$; $\mathbf{X} \setminus (\mathbf{B} \cap (\mathbf{A} \cup \mathbf{C})) = \varnothing$. $\mathbf{X} \cap (\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = \varnothing$.

h) $\mathbf{X} \cap \mathbf{A} = \mathbf{Y}$, $\mathbf{X} \cup \mathbf{Y} = \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \setminus \mathbf{X} = \mathbf{C}$;

j) $\mathbf{X} \setminus \mathbf{Y} = \mathbf{C}$, $\mathbf{Y} \setminus \mathbf{X} = \mathbf{B}$, $\mathbf{Y} \cap \mathbf{X} = \mathbf{A}$

f) $\mathbf{X} \cup \mathbf{A} = \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \setminus \mathbf{X} = \mathbf{C}$

Два множества $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называются равномощными, если их элементы можно поставить во взаимно однозначное соответствие (то есть каждому элементу $\mathbf{A}$ ставится в соответствие ровно один элемент множества $\mathbf{B}$ и всякому элементу $\mathbf{B}$ ставится в соответствие ровно один элемент множества $\mathbf{A}$).

Множество $\mathbf{A}$ называется конечным, если оно равномощно некоторому начальному отрезку $\{\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{k}\}$ множества натуральных чисел.

Мощностью множества $\mathbf{A}$ называется класс всех множеств, равномощных $\mathbf{A}$.

Мощность множества $\mathbf{A}$ обозначается как $|\mathbf{A}|$.

Если $\mathbf{A}$ — конечное множество, то мощность $\mathbf{A}$ можно представлять числом элементов в $\mathbf{A}$.

Множество $\mathbf{A}$ называется счетным, если оно либо конечное, либо равномощно множеству натуральных чисел.

2.8. Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — счетно бесконечные множества. Показать, что следующие множества также являются счетными:

a) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$; **b)** $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$; **c)** $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$; **d)** $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$; **e)** $\mathbf{A} \times \mathbf{A} \times \ldots \times \mathbf{A}$ **(**произведение **k** множеств **A)**

f) всех конечных подмножеств множества **A**.

2.9 . Показать, что объединение и пересечение счетного семейства счетных множеств является счетным множеством.

2.10 . Доказать счетность следующих множеств, показав равномощность множеству натуральных чисел:

a) множества конечных подмножеств счетного множества **A**;

b) множества рациональных чисел;

c) точек на плоскости, имеющих рациональные координаты;

d) треугольников на плоскости с вершинами, имеющими целочисленные координаты;

e) конечных последовательностей символов латинского алфавита.

2.11 . Пусть $|\mathbf{A}| = \mathbf{m}$ и $|\mathbf{B}| = \mathbf{n}$. Оценить мощности следующих множеств:

a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $A \times B$; d) $A \setminus B$; e) $(A \setminus B) \times (A \cap B)$.

2.12 . При каких условиях верно равенство:

a) $|A \setminus B| = |A| - |B|$; c) $|A \cup B| > |A|$;

b) $|A \cap B| < |A|$; d) $|A \cap B| = |A \cup B|$; e) $|A \cup B| = |A \setminus B|$.

2.13 . Показать, что если $|A \setminus B| = |B \setminus A|$, то $|A| = |B|$. Верно ли обратное утверждение?

2.14. Показать, что если множества **A** и **B** – конечне и непересекающиеся, то для обозначения мощностей множеств с помощью чисел, равных количеству элементов в них, справедливо соотношение: $|A \cup B| = |A| + |B|$.

2.15. Доказать несчетность множеств:

a) вещественных чисел;

b) подмножеств всякого счетно бесконечного множества;

c) всюду определенных числовых функций, отображающих целые числа в целые числа.

3. ОТОБРАЖЕНИЯ И ФУНКЦИИ

Отображением или функцией называется всякое множество $f \subseteq A \times B$, для которого выполняется условие единственности значения функции для каждого значения из A:

$$\forall x \in A \; \forall y_1, y_2 \in B \; ((x, y_1) \in f \;\&\; (x, y_2) \in f \rightarrow y_1 = y_2).$$

При этом, если $(x, y) \in f$, то говорят что f для x принимает значение y и обозначают указанное соотношение с помощью записи $f(x) = y$.

Если дополнительно выполняется условие определенности значения функции для всякого элемента $x \in A$, то функция f называется всюду определенной функцией.

В противном случае f называется частичной функцией.

Для общего представления функций используют запись вида:

$$f: A \rightarrow B,$$

где f — обозначение функции; A и B множества, для которых $f \subseteq A \times B$.

Будем рассматривать только всюду определенные функции.

Тогда возможно следующее определение.

Отображением или функцией из множества A на множество B называется всякое соответствие, которое сопоставляет всякому элементу множества A ровно один элемент множества B.

Областью определения функции $f: A \rightarrow B$ (обозначается как **dom** (f)) называется множество $\{x \mid \exists y (f(x) = y)\}$.

Областью значений $f: A \rightarrow B$ (обозначается как $f(A)$) называется множество $\{y \mid \exists x (f(x) = y)\}$.

Всюду определенное отображение f называется:

— инъективным, если

$$\forall x_1, x_2 \in A \; (f(x_1) = f(x_1) \rightarrow x_1 = x_2).$$

— сюрьективным, если $f(A) = B$;

— биективным, если $f: A \rightarrow B$ инъективно и сюръективно.

Суперпозицией отображений $f: A \rightarrow B$ и $g: B \rightarrow C$ называется такое отображение $h: A \rightarrow C$, при котором

$$h(x) = z \Leftrightarrow \exists y (f(x) = y \;\&\; g(y) = z).$$

3.1. Доказать соотношения:

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

b $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;

c) $f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$.

d). Если f-инъективно и $f(A) = ff(A)$, то f является биекцией.

Привести примеры, когда включения в заданиях **b** и **c** являются строгими и когда имеют место равенства.

Пусть $f \subseteq A \times B$. Рассмотрим соответствие которое каждому элементу y множества B ставит в соответствие все такие элементы множества A, для которых $f(x) = y$.

Если f является инъективно, то такое обратное соответствие является функцией из A на B, обозначаемое как f^{-1} (т.е. $f^{-1}: B \rightarrow A$). При этом такая функция может быть частичной.

Если f — биективное отображение, то f^{-1} - всюду определенная функция.

3.2. Привести примеры инъективных, сюръективных и биективных отображений $f: A \rightarrow B$, где A и B — следующие множества:

a) A – множество людей , B — множество животных;

b) A - множество продуктов питания , B — множество чисел;

c) A и B — множества людей;

d) A - множество предприятий и учреждений , B — множество людей;

e) A - множество книг , B — множество людей;

f). A и B- множества остановок на трамвайном маршруте.

3.3 . Доказать соотношения для биективных функций:

a) $f^{-1} \circ f(A) = A$;

b) $f \circ f^{-1}(A) = A$;

c) $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1} \circ g^{-1}(A)$;

d) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{1}(B)$;

e) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;

f) $f^{-1}(A \setminus B) \supseteq f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

g) Если $A \subseteq B$, то $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$

4. ОТНОШЕНИЯ

Пусть заданы множества **A** и **B**. Всякое множество $\rho \subseteq A \times B$ называется отношением на **A** и **B**.

Если $(a, b) \in \rho$, то будем говорить, что элементы **a** и **b** находятся между собой в отношении ρ. Применяется также запись $a \,\rho\, b$, если $(a, b) \in \rho$, например:

a) отношение “ *меньше* ” между натуральными числами — это множество, определяемое следующим соотношением:

a “*меньше*” **b** $\Leftrightarrow$ $a \leq b$;

b) отношение “ *быть родственниками* ” состоит из всевозможных пар людей, которые являются родственниками;

c) отношение “ *иметь частью* ” состоит из всех таких пар объектов, из которых второй объект — составная часть первого (в частности, в это отношение входит пара: (**самолет**, **крыло**).

Существует несколько способов представления отношений.

1. Диаграммы. Пусть $\rho \subseteq A \times B$, где $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$. На плоскости построим две системы из n и m точек , помеченных элементами множеств A и B соответственно. Две точки a_i и b_j соединяются ориентированной стрелкой, ведущей из a_i в b_j , если $(a_i, b_j) \in \rho$.

2. Таблицы. Для представления отношения $\rho \subseteq A \times B$, где $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ построим таблицу с n строками, соответствующими элементам A, и m столбцами, соответствующими элементам B .

Значение элемента $t_{i,j}$ этой таблицы, принадлежащего i-й строке и j - му столбцу, определяется соотношением:

$$t_{i,j}=\begin{cases}0,\ (a_i, b_j)\notin \rho\\ 1,(a_i, b_j)\in\rho\ .\end{cases}$$

Если **A = B** , то $\rho\subseteq A\times B$, называется отношением на множестве A.

Отношение ρ на множестве A называется:

a) рефлексивным, если $\forall x\in A(x\,\rho\, x)$;

b) симметричным, если $\forall x, y\in A\ (x\,\rho\, y\Rightarrow y\,\rho\, x)$;

c) антисимметричным, если $\forall x, y\in A\ (x\,\rho\, y \,\&\, y\,\rho\, x\Rightarrow x=y)$;

d) транзитивным, если $\forall x, y, z\in A\ (x\,\rho\, y\,\&\, y\,\rho\, z\Rightarrow x\,\rho\, z)$.

4.1 Привести примеры серий из трех последовательно вложенных отношений:
a) между растениями; **c)** между сотрудниками учреждения;
b) между населенными пунктами; **d)** документами в архиве.

(Например, для множества людей, такую последовательность образуют отношения: **сослуживец**, **подчиненный**, **помощник**)

4.2.Как устроены табличные задания рефлексивных, симметричных, антисимметричных и транзитивных отношений на конечных множествах?

4.3. Привести примеры максимальных по числу элементов (минимальных) рефлексивных, симметричных и транзитивные отношений на произвольном конечном множестве A.

4.4. Определить свойства следующих отношений на **N**:

a) $\{(x, y) \mid |x - y| = 9\}$;
b) $\{(x, y) \mid |x + y| \geq 6\}$;
c) $\{(x, y) \mid x > y^2\}$;
d) $\{(x, y) \mid (x - 2y) < 10\}$;
e) $\{(x, y) \mid |x - y| < 9\}$;
f) $\{(x, y) \mid x^y \geq y^x\}$;
g) $\{(x, y) \mid x^2 - y^2 > 12\}$;
h) $\{(x, y) \mid |x - y| > 20\}$;
i) $\{(x, y) \mid x$ является четной степенью числа $y\}$;
j) $\{(x, y) \mid$ десятичные записи x и y не содержат общих цифр$\}$;
k) $\{(x, y) \mid$ десятичные записи x и y содержат общие цифры$\}$;
l) $\{(x, y) \mid$ длина десятичной записи x больше длины записи $y\}$;
m) $\{(x, y) \mid x$ и y имеют не менее **k** общих простых делителей$\}$;
n) $\{(x, y) \mid x$ и y имеют равные множества простых делителей$\}$;
o) $\{(x, y) \mid x$ и y имеют не более **k** общих делителей$\}$;
p) $\{(x, y) \mid$ всякая цифра десятичной записи x больше соответствующей цифры записи $y\}$;
q) $\{(x, y) \mid$ сумма цифр десятичной записи x не превосходит удвоенную сумму цифр десятичной записи $y\}$.

4.5. Определить свойства следующих отношений между функциями на множестве вещественных чисел:

a) $\{(f, g) \mid f(x) > g(x)\}$; **b)** $\{(f, g) \mid |f(x) - g(x)| < 12\}$;
c) $\{(f, g) \mid f(x)\,g(x) > 1\}$; **d)** $\{(f, g) \mid f(x)\,g(x) < 0\}$;
e) $\{(f, g) \mid f(x) + g(x) \geq 0\}$; **f)** $\{(f, g) \mid f\,g(x) < 0\}$.
g) $\{(f, g) \mid (f(x)\,/\,g(x)) > 2\}$; **h)** $\{(f, g) \mid \max(f(x), g(x)) > 0\}$;

Определение. Всякое рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение называется отношением эквивалентности.

4.6. Какие из приведенных отношений на множестве функций, переводящих натуральные числа в натуральные числа, являются отношениями эквивалентности:

a) $\{(f_1, f_2) \mid f_1$ и f_2 отличаются на конечном множестве значений аргумента$\}$;
b) $\{(f_1, f_2) \mid f_1$ и f_2 отличаются не более чем на **12** значениях аргумента $\}$;
c). $\{(f_1, f_2) \mid \exists\, k \geq 0\ (f_1(x) - k \leq f_2(x) \leq f_1(x) + k\ )\}$;
d). $f_1\,\rho\, f_2 \Leftrightarrow \forall\, x\in \mathbf{N}$ (mod($f_1(x)$, 10) = mod ($f_2(x)$, 10)).
e) $f_1\,\rho\, f_2 \Leftrightarrow \exists\, k > 0\ \forall x\in \mathbf{N}\ (f_1(x) \leq k f_2(x))$;
f) $f_1\,\rho\, f_2 \Leftrightarrow \exists\, k, l > 0\ \forall x\in \mathbf{N}\ (l f_2(x) \leq f_1(x) \leq k f_2(x))$;
g) $f_1\,\rho\, f_2 \Leftrightarrow f_1(x) = \mathbf{O}(f_2(x)))$?

Отношение эквивалентности ρ на множестве **A** разбивает это множество на классы эквивалентных элементов. Класс эквивалентности для элемента a в отношении ρ — это множество $\{x \mid (a, x) \in \rho\}$, которое обозначается как $[\,a\,]_\rho$ или $[\,a\,]$, если известно, о каком отношении идет речь.

4.7. Доказать, что следующие отношения являются отношениями эквивалентности на множестве натуральных чисел. Определить для них число классов эквивалентности и количество элементов в каждом таком классе:

a) $x\rho y \Leftrightarrow x = y$ (mod (**k**)), $\mathbf{k}\in \mathbf{N}$;
b) $x\rho y \Leftrightarrow$ количества разных цифр в десятичных записях чисел x и y совпадают;
c) $x\rho y \Leftrightarrow$ суммы цифр двоичных записей x и y равны;
d) $x\rho y \Leftrightarrow$ для x и y совпадают максимальные простые делители;
e) $x\rho y \Leftrightarrow$ число нулей в десятичной записи x равно числу нулей в десятичной записи y;
f) $x\rho y \Leftrightarrow$ совпадают максимальные показатели степеней простых чисел, на которые нацело делятся x и y;
g) $x\rho y \Leftrightarrow$ числа x и y имеют равное число разных простых делителей.

4.8. Показать, что следующие отношения являются отношениями эквивалентности на множестве слов в латинском алфавите. Определить число и мощности классов эквивалентности:

1) $\alpha\rho\beta \Leftrightarrow$ множества разных букв в словах α и β совпадают;
2) $\alpha\rho\beta \Leftrightarrow$ совпадают слова, получающиеся из α и β после удаления первых вхождений каждой буквы в них;
3) $\alpha\rho\beta \Leftrightarrow$ совпадают слова, получаемые из α и β после удаления всех четных вхождений всякой буквы в них;
4) $\alpha\rho\beta \Leftrightarrow$ совпадают количества вхождений наиболее часто встречающихся букв в α и β;
5) $\alpha\rho\beta \Leftrightarrow$ совпадают слова, получаемые из α и β удалением всех непервых вхождений всякой буквы в них;
6) $\alpha\rho\beta \Leftrightarrow$ совпадают слова, получаемые из α и β сжатием групп подряд идущих одинаковых символов чётной длины в один такой символ;
7) $\alpha\rho\beta \Leftrightarrow$ слова, получающиеся из α и β после удаления всех непервых и непоследних вхождений всякой буквы в них, совпадают;
8) $\alpha\rho\beta \Leftrightarrow$ для слов α и β равны максимумы расстояний между вхождениями в каждое из этих слов пар одинаковых символов;
9) $\alpha\rho\beta \Leftrightarrow$ для α и β;совпадают множества букв, повторяющихся в этих словах более двух раз;
10) $\alpha\rho\beta \Leftrightarrow$ α и β совпадают с точностью до вхождений гласных букв;
11) $\alpha\rho\beta \Leftrightarrow$ количества разных гласных и согласных букв в α и β равны;
12) $\alpha\rho\beta \Leftrightarrow$ слова, получаемые из α и β удалением всех групп из более чем одной рядом стоящих одинаковых букв, совпадают;
13) $\alpha\rho\beta \Leftrightarrow$ совпадают слова, получаемые из α и β удалением всех символов, в которых нарушается монотонный (по нестрогому возрастанию букв) порядок следования букв.

14) $\alpha\rho\beta \Leftrightarrow$ число букв в α которым предшествует четное число отличных от них букв равно числу букв в β, которым предшествует чётное число отличных от них букв.

15) $\alpha\rho\beta \Leftrightarrow$ слова, получаемые из α и β удалением всех букв, которые не меньше своих сосе дей являются равными.

16) $\alpha\rho\beta \Leftrightarrow$ количества букв в α и β которые больше соседних с ними букв, являются равными.

17) $\alpha\rho\beta \Leftrightarrow$ количества букв в α и β которым предшествует больше отличных от них букв, чем следует отличных от них букв, являются равными;

18) $\alpha\rho\beta \Leftrightarrow$ слова, получаемые из α и β удалением крайних букв в каждой группе подряд идущих одинаковых символов являются равными;

19) $\alpha\rho\beta \Leftrightarrow$ слова, получаемые из α и β удалением всех букв , больших всех своих соседей на расстоянии 2, являются равными;

20) $\alpha\rho\beta \Leftrightarrow$ слова, получаемые из α и β удалением внутренних букв в каждой группе подряд идущих одинаковых символов являются равными.

4.9. Пусть ρ_1 и ρ_2 – отношения эквивалентности на некотором множестве A. Является ли отношением эквивалентности множество:

a) $\rho_1 \setminus \rho_2$; **b)** $\rho_1 \cap \rho_2$; **c)** $\rho_1 \cup \rho_2$.; **d)** $(\rho_1 \setminus \rho_2) \cup (\rho_2 \setminus \rho_1) \cup \{(x, x) \mid x \in A\}$

Определение. Рефлексивное, транзитивное и антисимметричное отношение на **A** называется частичным порядком на этом множестве. Множество, на котором введено отношение частичного порядка, называется упорядоченным множеством.

Частичный порядок ρ на множестве **A** называется линейным порядком, если в нем любые два элемента **A** сравнимы.

Множество, на котором введено отношение линейного порядка, называется линейно упорядоченным множеством.

Если $\rho \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{A}$ - отношение порядка на множестве $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$, то для наглядного представления ρ используется диаграмма специального вида, строящаяся по следующим правилам:

1) на плоскости изображаются n точек, помеченных символами элементов множества **A** ;

2) две точки $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{a}_j$ соединяются ориентированной дугой, ведущей из $\mathbf{a}_i$ $\mathbf{a}_j$, если $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) \in \rho$ и не существует такого элемента a_k, отличного от $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{a}_j$, что $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_k) \in \rho$ и $(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_j) \in \rho$.

4.10. При анализе деятельности 10 предприятий $A_1, \ldots, A_{10}$ состояние каждого из них оценивалось по четырем показателям в пятибалльной системе.

В результате были получены следующие значения показателей:

A_1 - (3, 1, 2, 2), A_2 - (1, 3, 2, 3) , A_3 - (3 , 4, 4, 5),
A_4 - (2, 3, 2, 2), A_5 - (2, 1, 4, 2), A_6 - (3, 5, 2, 3) ,
A_7 - (3, 1, 2, 1), A_8 - (3, 1, 4, 4) , A_9 - (3, 2, 1, 3),
A_{10} - (4, 3, 5, 4) .

Построить диаграмму для отношения предпочтения ρ на множестве предприятий, определяемом соотношением $A_i \rho A_j$ тогда и только тогда, когда каждый показатель предприятия A_i не хуже соответствующего показателя предприятия A_j .

4.11. Привести примеры двух разных отношений порядка для каждого из множеств:

a) предприятий одной отрасли; **e)** слов терминологического словаря;
b) учителей в школе; **f)** законов и нормативных актов;
c) деталей устройств и механизмов; **h)** молекул химических веществ.
d) классов и видов животных.

4.12. Пусть F — множество функций вещественной переменной, принимающих вещественные значения. Определить свойства отношений на F :

1) $f\rho g \Leftrightarrow)\forall x\,(f(x) \le g(x))$;

2) $f\rho g \Leftrightarrow \max\limits_{x\in[0,1]} f(x) \ge \max\limits_{x\in[0,1]} g(x)$;

3) $f\rho g \Leftrightarrow \exists k > 0\ \forall x\,(f(x) > g(x) + k)$;

4) $f\rho g \Leftrightarrow \exists k > 0\ \forall x\,(f(x) = g(x + k))$;

5) $f\rho g \Leftrightarrow \exists k > 0\ \forall x\,(f(x) \le g(kx)\ )$;

6) $f\rho g \Leftrightarrow \exists h(x) > 0\ \forall x\,(f(x) \ge h(x)\,g(x))$;

7) $f\rho g \Leftrightarrow \exists \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 > 0\ (f(x + \mathbf{k}_1)\,g(x - \mathbf{k}_2) > 1)$;

8) $f\rho g \Leftrightarrow \exists \mathbf{k} > 0\ (f(x) + \mathbf{k} < g(x + \mathbf{k}))$;

9) $f\rho g \Leftrightarrow \exists \mathbf{k} \in (0,1)\ \forall x\,(f(\mathbf{k}x) \ge g(x))$;

10) $f\rho g \Leftrightarrow \exists \mathbf{k} \ge \mathbf{1}\ \forall x\,(f(x) \ge \mathbf{k}\,g(x))$;

11) $f\rho g \Leftrightarrow \exists \mathbf{k} > 1\ (f(x/\ k) < g(\mathbf{k}x))$;

12) $f\rho g \Leftrightarrow \exists k > 1\ (f(x + k) \ge g(k - x))$;

13) $f\rho g \Leftrightarrow \exists k > 0\ \forall x\,(f(x - k) * g(x + k) > 0)$;

14) $f\rho g \Leftrightarrow \exists k > 0\ \forall x\,(f(x\text{-}k) \le g(x) + k)$

4.13. Привести примеры отношений линейного порядка на множествах:

a) квадратных целочисленных матриц размером $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$;
b) непрерывных функций на $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$;
c) треугольников на плоскости;
d) слов в латинском алфавите;
e) текстов программ на языке ***PASCAL***;
f) квадратных уравнений с вещественными коэффициентами.

Пусть ρ_1 и ρ_2 — отношения на **A**.
Произведением этих отношений называется отношение
$\{(x, y) \mid \exists z\,(x\rho_1 z\ \&\ z\rho_2 y)\}$, обозначаемое как $\rho_2\rho_1$.

Обращением отношения ρ называется отношение,
$\{(y, x) \mid x\rho y\}$, обозначаемое как ρ^{-1}.

4.14. Показать справедливость утверждений:

a) ρ — рефлексивно $\Leftrightarrow$ ρ^{-1} — рефлексивно;

b) если ρ_1 и ρ_2 рефлексивны, то $\rho_2\rho_1$ также рефлексивно;

c) ρ — симметрично $\Leftrightarrow$ ρ^{-1} — симметрично;

d) ρ — транзитивно $\Leftrightarrow$ справедливо соотношение $\rho\rho \subseteq \rho$;

e) $(\rho_1\,\rho_2)^{-1} = \rho_2^{-1}\rho_1^{-1}$;

f) если ρ является эквивалентностью, то $\rho = \rho\rho$;

g) $(\rho_1 \cup \rho_2)\,\rho_3 = \rho_1\rho_3 \cup \rho_2\rho_3$;

h) $(\rho_1 \cap \rho_2)\,\rho_3 \subseteq \rho_1\rho_3 \cap \rho_2\rho_3$.

4.15. Пусть ρ_1 и ρ_2 — отношения эквивалентности. Показать, что $\rho_1\ \rho_2$ является отношением эквивалентности $\Leftrightarrow$ $\rho_1\ \rho_2 = \rho_2\,\rho_1$.

4.16. Привести пример транзитивных (рефлексивных, симметричных) отношений ρ_1 и ρ_2, для которых отношение $\rho_2\ \rho_1$ не является транзитивным (рефлексивным, транзитивным)

4.17. Приведите пример бинарного отношения

a. симметричного и рефлексивного, но не транзитивного

b. транзитивного и рефлексивного, но не симметричного

c. симметричного и транзитивного, но не рефлексивного

d. антисимметричного и рефлексивного, но не транзитивного или симметричного

e. рефлексивного и антисимметричного, но не транзитивного

5. КОМБИНАТОРИКА

5.1. ОСНОВНЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ ПРАВИЛА

Комбинаторика занимается изучением структурных свойств конечных и счетных множеств.

Сами такие множества представляют собой семейства объектов, построенные по определенным правилам из простейших или базисных объектов. Обычно такие конструкции могут быть представлены как семейства совокупностей или последовательностей, элементами которых являются совокупности или последовательности.

В комбинаторике решаются задачи следующих основных типов:

1. Построить пример объекта, обладающего заданными свойствами.

2. Доказать существование объекта с указанными свойствами в заданном множестве;

3. Определить число элементов в заданном множестве.

Здесь будет рассмотрена третья из приведенных задач.

Следующие три правила называются основными комбинаторными правилами:

1. ***Правило птичьих гнёзд***.

Если $n+1$ объектов необходимо распределить среди n множеств, то хотя бы одно множество содержит не менее двух элементов.

2. ***Правило умножения***.

Пусть элементами множества являются все такие n - элементные последовательности $(a_1, \ldots, a_n)$, в которых первый элемент может принимать любое из m_1 возможных значений, второй элемент, при всяком выбранном значении первого элемента, может принимать любое из m_2 возможных значений и.т.д. При всяком выборе значений первых $n-1$ элементов последовательности последний элемент в ней может принимать любое из m_n возможных значений. Тогда множество всех таких последовательностей содержит $m_1 m_2 \ldots m_n$ элементов.

3. ***Правило сложения***.

Если множества $A_1, \ldots, A_n$ попарно не пересекаются, то $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$.

5.1. На факультете обучается **500** студентов, покажите, что хотя бы у двух студентов совпадают дни рождения.

5.2. В аудитории расставлены 12 столов и 25 стульев. Чему равен гарантированный максимум числа стульев возле столов (12 столов и 27 стульев)?

5.3. Как изменится решение предыдущей задачи, если в аудитории m столов и n стульев?

5.4. В финальном забеге участвуют 10 спортсменов. Сколько существует вариантов заполнения пьедестала почета?

5.5. Сколько различных шести и восьмисимвольных слов в латинском алфавите, все символы которых разные?

5.6. Сколько существует слов в латинском алфавите длины 12, в которыз любые две соседние вершины – разные? (слов длины 12, в которых всякая буква отлична от соседних с ней букв на расстоянии не больше, чем 2?)

5.7. Сколько существует способов белому королю, находящемуся в центре шахматной доски, сделать последовательно 1, 2, 3 шага?

5.8. Сколько слов из 6 символов, которые начинаются либо с символа ***a***, либо с символов ***ut***, возможны в латинском алфавите?

5.9. Сколько существует различных целых десятичных чисел (чисел в системе счисления с основанием m), которые представляются **n** разрядными записями?

5.10. Сколько различных целых двоичных чисел представляются не более чем **n** разрядными записями?

5.2. СОЧЕТАНИЯ И РАЗМЕЩЕНИЯ

Для решения комбинаторных задач обычно используются специальные конструкции, называемые сочетаниями и размещениями.

Размещением из n по m называется всякая m – элементная последовательность, каждый элемент которой принадлежит заданному n элементному множеству.

Число размещений из n по m без повторений выражается формулой: $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$

Число размещений из n по m с повторениями выражается формулой: $\overline{A_n^m} = n^m$.

Сочетанием из n по m называется всякая совокупность, состоящая из m элементов, каждый из которых является элементом некоторого n элементного множества.

Число сочетаний из n по m без повторений можно вычислить по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Число сочетаний из n по m с повторениями можно вычислить по формуле: $\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m$.

5.11. Сколько существует k-элементнх двоичных последовательностей, содержащих m нулей?

5.12. Сколько имеется вариантов сдачи 10 карт из колоды, содержащей 32 разные карты?

5.13. Сколько есть способов выбора 24 монет достоинством в 1, 5, 10, 20, 50 сантимов?

5.14. Сколько есть вариантов сдачи по 5 карт двум игрокам, если в колоде содержится 36 карт?

5.15. Сколько разных видов подарков можно составить из игрушек 20 видов, если к любой подарок должно входить не более четырех игрушек?

5.16. Сколько различных подмножеств (**k -** элементных подмножеств) содержит множество, состоящее из n элементов?

5.17. Доказать, используя комбинаторные доводы справедливость соотношений:

a) $C_n^m = C_n^{n-m}$;

b) $\overline{C_{n+1}^m} = \overline{C_n^0} + \ldots + \overline{C_n^m}$ **.**

5.18. Сколько различных сортов цветов можно получить за два, три, k поколений скрещиваний, если вначале имеется 20 чистых линий цветов, а сорт цветов определяется набором долей чистых линий в нём?

5.19. Сколько существует способов расстановки **m** различных (одинаковых) книг по **n** полкам?

5.3. ПРАВИЛО УМНОЖЕНИЯ

5.20. Имеется 60 человек, среди которых распределяются 8 одинаковых поручений, так что каждое поручение выполняют 3 разных человека и каждые три человека могут выполнять произвольное количество поручений. Сколько возможно комбинаций?

5.21. Сколько существует способов распределения 10 разных книг среди 5 человек так, чтобы каждый получил две книги?

5.22. Сколько различных наборов фильмов можно просмотреть за неделю, если каждый день можно показывать два фильма в любом порядке, а в кинотеке содержатся 680 различных фильмов?

5.23. На приеме присутствовало 36 победителей соревнований в 12 видах спорта. Сколько вариантов распределения среди них 12 золотых, 12 серебряных и 12 бронзовых медалей возможны, если:

a) известны тройки призеров; **b)** о победителях ничего не известно?

5.24. Сколько есть способов ответа на анкету из 12 вопросов, если:

a) каждый вопрос предполагает 5 вариантов ответов, из которых выбратется ровно один;

b) для вопросов предусмотрены следующие количества вариантов ответов :5, 5, 7, 3, 3, 4, 7, 4, 5, 5, 3, 4 ?

5.25. Сколько существует способов составления слов из 9 букв в латинском алфавите, так чтобы на четных позициях слова стояли гласные буквы, а на нечетных — согласные?

5.26. Сколько слов из 12 букв содержат 3 буквы " ***a*** ", 2 буквы " ***b***", а остальные буквы произвольные и входят в слово по одному разу?

5.27. Чему равно число вариантов контрольных заданий из задач 5 типов, если известно, что имеется 120 задач первого типа, 150 задач второго типа, 160 задач третьего типа, 140 задач четвертого типа, 100 задач пятого типа?

Как изменится решение задачи, если контрольное задание составляется из четырёх разных заданий произвольных четырёх типов?

5.28. Сколько имеется вариантов 30 ученикам класса сесть за парты, которые стоят в три ряда по 8 парт, так, чтобы за каждой партой сидело по 2 ученика?

5.29. В продаже имеются книги 44 видов. Сколько существует способов, которыми 7 человек могут купить по 4 разных книги, так чтобы у них не было общих книг?

5.30. Сколько существует способов сдать по 6 карт четырём игрокам из колоды в 36 карт?

5.31. Сколько существует способов для 4-х человек сдать по 6 карт каждому, так чтобы у каждого все карты были одной масти?

5.32 Сколько существует различных способов сдать по десять карт двум игрокам, если у первого игрока карты 2-х мастей по пять карт каждой масти, а у второго игрока карты двух других мастей в количествах 4 карты младшей масти и 6 карт старшей масти?

5.33 Сколько существует различных слов длины 10 в латинском алфавите, содержащих 5 разных букв по два раза?

5.34 Сколько существует способов распределить 16 разных книг среди 4-х человек, так чтобы каждый взял по четыре разных книги?

5.35 Сколько существует способов распределить 16 разных книг среди 4-х человек так, чтобы два человека взяли по 5 книг и два человека взяли по 3 книги?

5.36 Сколько существует способов распределить 12 поручений среди 6 человек, так чтобы каждому человеку досталось ровно 2 поручения и все поручения были распределены?

5.37 Сколько существует двоичных матриц размера n x n, в которых в каждой строке и каждом столбце имеется ровно одна единица?

5.38 Сколько существует квадратных матриц размера $n \times n$, в которых строка с номером i содержит i нулей ?

5.39 Сколько существует различных пар слов (α, β), таких что α содержит 16 символов, из которых два символа встречаются по 3 раза, еще два символа встречаются по 5 раз. Слово β содержит 2 символа из α по 4 раза и еще 6 символов (не из α) по одному разу?

5.40 Сколько существует способов распределить игрушки 16 видов (неограниченное число игрушек каждого вида) среди 7 человек, так чтобы 2 человека взяли по 3 разных игрушки, 2 человека взяли по 5 разных игрушек, 3 человека взяли по 7 разных игрушек?

5.41 Сколько существует способов раздачи по 10 карт двум игрокам, так чтобы карты первого были 2-величин по 3 карты и еще 2-х величин по 2 карты, а карты второго игрока 2-х величин карт первого игрока по 2 карты каждой величины и еще трех величин по 2 карты каждой величины?

5.42 Сколько существует способов составить расписание занятий из 18 пар, по 3 пары в день, так чтобы в расписании было 3 пары математики, 4 пары – экономики, 5 пар – информатики, 2 пары – истории и 4 пары статистики?

5.43 Среди 24 человек распределяются 8 разных поручений так, что каждое поручение выполняют 2 человека. Сколько возможно комбинаций?

5.44 Среди 40 человек распределяются 8 разных поручений, так что 2 поручения выполняют по 3 человека, 3 поручения выполняют по 2 человека и 3 поручения выполняют по 4 человека. Сколько существует комбинаций, в которых каждый человек выполняет не более одного поручения и когда каждый человек выполняет любое число поручений?

5.45 В последовательно проводимых 5 соревнованиях по одному виду спорта приняло участие 60 человек. Сколько существует способов определения последовательности троек призёров?

5.46 Сколько существует троек слов (α, β, γ), длины 16, таких что в α две буквы встречаются по 3 раза и ещё пять букв встречаются по 2 раза; в β две буквы из α встречаются по 4 раза и ещё 4 новые буквы – по 2 раза, в γ встречаются 2 буквы из α и не из β по 2 раза, 1 буква из β и не из α встречается 7 раз, а остальные 5 букв встречаются только в γ по одному разу?

5.47 Сколько существует способов заполнения троичной матрицы размера $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{m}$?

5.48 Сколько двоичных матриц размера $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ содержат половину нулей и половину единиц?

5.49 Сколько матриц можно получить из единичной диагональной матрицы размера $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$, если разрешается замена нулей единичной матрицы на числа 2, . . . , 9 так, чтобы

a) в каждой строке было ровно $\boldsymbol{n}$ - 2 нуля; **b**) в каждой строке было не менее $\boldsymbol{n}$ - 3 нулей?

5.50 Сколько существует разных симметричных троичных матриц размера $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$?

5.51 Сколько имеется двоичных матриц размера $\boldsymbol{n}$ x 2 $\boldsymbol{n}$, в каждом столбце которых содержится по одной единице, а в каждой строке — по две единицы?

5.52 Сколько существует $\boldsymbol{n}$ — элементных k-ичных последовательностей, содержащих ровно $\boldsymbol{m}$ ненулей ($\boldsymbol{m} \le \boldsymbol{n}$) ?

5.53 Сколько существует различных двоичных последовательностей длины $\boldsymbol{n}$, которые содержат число единиц, кратное 2, 3, . . . , k ?

5.54 5.53. Решить эту же задачу для десятиричных последовательностей той же длины.

5.55 Сколько возможно комбинаций для выбора 6 подарков 6 финалистам соревнований из 24 видов?

5.56 Сколько способов у десяти человек купить билеты на проезд в междугородном автобусе, если на маршруте предусмотрено 19 остановок?

5.57 Сколько возможностей 24 сотрудникам уходить в месячные отпуска, если каждый месяц в отпуске должно находиться ровно 2 человека?

5.58 Сколько различных цепочек длины 80 можно составить из 17 видов деталей, если всякая деталь может соединяться с другими деталью одним из своих двух концов?

5.59 Чему равно число музыкальных мелодий, которые можно составить из 24 нот, если используются ноты двух октав, знаки бемоль и мажор перед нотами, и применяется продолжительность звучания в 1, 2 , 3 и 1/2 такта?

5.60 Сколько способов именования людей возможно, если имеются 1100 видов фамилий, 350 мужских и 420 женских имен?

5.61 Сколько пар слов длины 12 можно составить, если каждая буква в них встречается по два раза и буквы первого и второго слова разные?

5.62 Сколько предложений можно составить из шести слов, используя слова, состоящие из не более чем пяти букв?

5.63 Сколько есть вариантов формирования из 32 человек 5 команд (по четыре человека в каждой) по 5 видам спорта, если допускается участие каждого человека в нескольких командах?

5.64 Каково число вариантов расположения игроков двух шахматных команд по 8 человек за 8 перенумерованными и неперенумерованными игральными столами?

5.65 Чему равно число различных слов из 16 букв, в которых на четных местах стоят гласные буквы, а на нечетных — согласные и никакая согласная буква не располагается между одинаковыми гласными буквами?

5.66 Сколько есть способов распределения разных 12 поручений среди 16 человек, чтобы:

a) каждый имел не более одного поручения;
b) число поручений у каждого человека было произвольным?
c) каждое поручение поручалось двум человекам?

5.65. Сколько существует вариантов распределения 32 одинаковых призов среди 90 человек так, чтобы:
a) каждый получил не более одного приза;
b) 12 человек получили по два приза и 8 человек – по одному;
c) число призов у каждого человека было произвольным?

5.66. Как изменится решение задачи, если призов n и они распределяются среди m человек, причем призы возможны k - видов, так что имеется m_1 призов первого типа, m_2 призов второго типа, . . . m_k призов k -го типа ?

5.67. Сколько существует пар 10-буквенных слов, первое из которых состоит из неповторяющихся букв, а второе получается перестановкой символов первого слова?

5.68. Сколько существует слов из 16 букв, в которых одна буква встречается 3 раза, одна буква — 2 раза, одна буква — 5 раз, а остальные буквы — встречаются по одному разу?

5.69. Сколько существует 18-буквенных слов, в которых две буквы встречаются по 2 раза, три буквы встречаются по 3 раза, а остальные буквы — по одному разу?

5.70. В продаже имеется 18 видов игрушек. Сколько существует возможностей для 8 человек сделать покупки, если двое из них покупают по 3 игрушки, трое — по 4 игрушки, один — 7 игрушек, двое — по 5 игрушек? Рассмотреть случаи, когда выбираемые игрушки разные и когда могут быть одинаковыми.

5.71. Сколько существует различных пар слов в латинском алфавите (α, β), таких что α имеет длину 14 и содержит 2 буквы по 1 разу, 4 буквы по 2 раза и 1 букву 4 раза. Слово β состоит из двух разных букв слова α по 3 раза, и еще четырех разных букв не из α, входящих в β по два раза?

5.72. 80 команд разбиты на 16 групп по 5 команд в группе. Победитель в каждой группе выходит в финал, в котором по круговой системе разыгрываются три призовых места. Сколько возможно вариантов определения тройки призёров?

5.73. 60 команд разбиты на 12 групп по 5 команд. По два победителя из каждой группы выходят в полуфинал, в котором все 24 финалиста разбиты на 4 группы по 6 команд. По два поьедителя из каждой группы выходят в суперфинал. Сколько существует вариантов распределения пар призовых мест во всех группах, образующихся в процессе проведения соревнований? Сколько существует вариантов определения троек призёров?

5.4. РАЗБИЕНИЕ МНОЖЕСТВ ОБЪЕКТОВ НА ЧАСТИ

5.74. Сколько существует комбинаций из 4 и 7 разных книг, в которых имеются книги трёх жанров, если книги трех жанров имеются в количествах: 9 видов книг первого жанра, 27 видов книг второго жанра, 12 видов книг третьего жанра?

5.75. Сколько возможно способов разделения 10 человек на 3 или 4 группы так, чтобы во всякой группе было не менее двух человек?

(То же самое для 10 человек и 5 групп, в каждой из которых должно быть не менее одного человека)?

5.76. 82 школьника распределяются по трем классам так, чтобы во всяком классе было не менее 25 человек. Сколько возможно комбинаций?

5.77. Каково число вариантов раскладывания 16 монет на 3 и 4 стопки так, чтобы в каждой было не более 7 монет если:
a) все монеты одинаковые; **b)** все монеты разные?
Рассмотреть случаи, когда 1. стопки перенумерованы и 2. являются ненумерованными.

5.78. Сколько существует способов распределения книг среди 5 человек, из книг 4 видов, если
a) количества книг разных видов 24, 24, 28 и 24 разных книг и каждый человек берёт от 7 до 10 книг, так чтобы среди них были книги всех видов;
b) количества книг разных видов 8, 8, 16 и 16 разных книг и каждый человек берёт от 5 до 8 книг, так чтобы среди них были книги всех видов;

5.79. Найти число вариантов распределения спортсменов из 6 команд по 4 человека в двух 16 местных автобусах, так чтобы в каждом автобусе были представители всех команд.

5.80. Сколько есть способов для 27 спортсменов провести серию из 6 соревнований, если:
a) результат каждого соревнования может быть произвольным;
b) всякий призер был призером ровно 2 раза;
c) тройки призёров не пересекались?

5.81. Сколько существует способов составления слова длины 12, составленного с использованием 5 разных букв?

5.82. Сколько существует способов распределения 40 разных книг среди 4 человек, так, чтобы каждый взял от 8 до 12 книг и все книги были розданы?

5.83. Сколько существует способов распределения 60 сотрудников по трем отделам, так чтобы в каждом оказалось не менее 16 человек?

5.84. Сколько существует способов выбора 16 разных книг, если имеются книги 20 видов по 20 разных наименований каждого вида, так чтобы в выборки содержали книги ровно 5 видов?

5.85. Сколько существует способов выбора 8 поручений, если имеются 25 поручений типа I, 25 поручений типа II, 30 поручений типа III и 30 поручений типа IV, так чтобы в выборке были представлены поручения всех четырех типов?

5.86. Сколько существует способов распределения 16 документов по 5 нумерованным папкам, так чтобы в каждой папке было не более 2 или не менее 5 документов?

5.87. Сколько существует способов раздачи 12 карт игроку (из колоды в 36 карт), так, чтобы они были трех разных мастей?

5.88. Сколько существует способов раздачи 10 карт игроку из колоды в 36 карт, так чтобы они были 6 разных величин?

5.89. Сколько существует способов записи слова из 16 букв, так чтобы в нем содержалось 5 разных букв?

5.90. Сколько существует способов составления слова из 20 букв, так чтобы в нем было поровну вхождений гласных и согласных букв, и имелось 5 разных согласных и 4 разных гласных буквы ?

5.5. МНОГОКРАТНОЕ РАЗБИЕНИЕ МНОЖЕСТВ ОБЪЕКТОВ

5.91. Сколько имеется способов распределения 12 книг четырех наименований (4 — первого наименования, 3 — второго наименования, 3 — третьего наименования и 2 — четвертого наименования) среди 6 человек так, чтобы каждый получил 2 разные книги?

5.92. В шкафу содержатся 24 документа 6 типов, по 4 документа каждого типа. Эти документы раскладываются в 6 именованных папок по четыре документа разных типов в каждую папку. Сколько существует вариантов размещения документов в папках?

5.93. Сколько существует вариантов приобретения трех билетов на поезд из 17 вагонов, содержащих по 9 купе (по 4 полки в каждом), чтобы 3 пассажира попали:
a) в один вагон; **c)** размещались в разных вагонах;
b) в одно купе; **d)** не располагались в соседних купе?

5.94. В расписание сессии продолжительностью в 20 дней необходимо поставить 4 экзамена, которые проводятся с интервалом не менее чам в 3 дня. Сколько возможно различных расписаний?

5.95. Сколько существует способов для двух человек взять по 8 игрушек всех четырех видов, если имеется 15 наименований игрушек первого вида, 18 наименований игрушек второго вида, 20 наименований игрушек третьего вида, 25 наименований игрушек четвертого вида, так чтобы они не имели общих игрушек?

Имеются игрушки 6 видов по 10 разных игрушек каждого вида. Сколько существует способов для 2-х человек взять по 7 игрушек, так чтобы у них были игрушки 3-х общих видов?

5.96. Имеется 4 класса документов по 12 документов в каждом классе. Сколько существует способов для трех человек взять по 6 документов, так чтобы у них были документы из трех общих классов?

5.97. Два игрока расставляют на шахматной доске по 8 пешек. Сколько существует способов расстановки, при которых ровно в четырех столбцах будут размещены пешки обоих игроков?

5.98. Сколько существует способов для шести человек взять по 4 документа разных видов, если существует 8 видов документов, по 2 (3, 4) разных документа каждого вида?

5.99. Сколько существует способов раздать по 8 карт двум игрокам так, чтобы у них было 3 общих величины карт?

5.100. Сколько существует способов составить тройку слов длины 9, каждые два из которых содержат ровно 4 общих буквы?
5.101. Сколько существует способов для трёх человек выбрать по 6 разных подарков из 40 видов подарков, так чтобы у двух из них было 2 общих вида подарков и еще у двух было 3 общих вида подарков?
5.102. Сколько существует способов составить программу соревнований по 6 видам спорта, проводимых в течение 6 дней, так что каждый день последовательно проводятся соревнования по трём разным видам спорта и по двум видам соревнования проводятся в течение 2 дней, по двум видам – в течение 3 дней и ещё по двум видам – в течение 4 дней?
5.103. Сколько разных наборов подарков можно составить из конфет 32 сортов, если в подарок входит 14 конфет:
a) разных; **c)** любых; **e)** не более чем по 3 конфеты каждого сорта;
b) ровно трех сортов; **d)** не менее трёх сортов; **f)** не менее 5 конфет всякого представленного в подарке сорта?
5.104. Сколько имеется возможностей разбиения на пары 4 англичанин, 5 французов, 2 немцев и 3 испанцев так, чтобы во всякой паре были люди разных государств?
4.105. Сколько существует вариантов поселения 12 человек из 4 делегаций численностью по 3 человека в 6 двуместных номерах гостиницы так, чтобы:
a) во всяком номере жили представители разных делегаций;
b) ровно в 2 номерах жили представители одинаковых делегаций?
5.106. Сколько существует способов составления расписания для группы студентов, которые содержат 4 пары истории, 4 пары философии, 4 пары археологии, 3 пары иностранного языка и 3 пары документоведения так чтобы каждый день было по три пары по разным дисциплинам?
5.107. Сколько существует расписаний соревнований по 6 видам спорта, проводимых в течение 6 дней, так что каждое соревнование проводится в произвольные три дня и каждый день проводятся соревнования по трём разным видам спорта?
5.108. Сколько существует пар 8-ми символьных слов, содержащих ровно три общих буквы?
5.109. Сколько возможно способов сдачи по 6 карт двум игрокам так, чтобы у них не было карт общих мастей?
5.110. Сколько существует различных пар слов из 6 букв, не имеющих общих букв?
5.111. Сколько существует различных пар слов (α, β), таких что α имеет длину 10 и состоит из 5 букв, входящих в него по 2 раза, а β имеет длину 6 и состоит из трёх разных букв слова α.
5.112. Сколько имеется способов сдачи по 6 карт двум игрокам так, чтобы:
a) множества мастей карт игроков совпадали;
b) у игроков было ровно две общих масти;
c) у игроков были карты разных величин;
d) множества величин карт игроков совпадали
e) всякая карта первого игрока либо больше, либо меньше всех карт второго игрока
f) у игроков было ровно две общих масти и ровно две общих величины карт.
5.113. Сколько существует способов сдать по 6 карт трём игрокам так, чтобы ровно у двух из них было 3 общих величины карт?
5.114. Сколько существует способов сдать по шесть карт трём игрокам так, чтобы у двух из них было по 2 общих масти и у двух игроков были две общих величины карт?
5.115. Сколько существует способов сдать по 7 карт трём игрокам так, чтобы ровно у каждыз двух из них было 3 общих величины карт
5.116. Сколько существует пар восьмисимвольных слов имеющих две общие буквы, в которых никакие соседние буквы не совпадают?
5.117. Сколько существует пар восьмисимвольных слов, в которых совпадают количества разных гласных букв и имеется одна общая согласная буква ?
5.118. Сколько имеется восьмисимвольных слов, в которых всякая буква встречается не менее двух раз, а количества гласных и согласных букв совпадают?
5.119. Выписать рекуррентные сотношения для значения S_n – числа двоичных наборов длины n, в которых:
a) существуют рядом стоящие единицы;
b) количество групп подряд идущих единиц нечетное;
c) существуют группы из трех последовательно идущих единиц;
d) не существует групп, содержащих более чем три последовательно идущих нуля.
5.120. Выписать рекуррентные соотношения для значений S_n, равных:
a) количеству несимметричных слов длины n в латинском алфавите;
в) количеству слов длины n в латинском алфавите, содержащих подслово **abc**.
c) количеству двоичных наборов длины n, не содержащих групп из трёх последовательно идущих единиц.

5.6. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

5.121. Сколько имеется способов создания 8 именованных групп по 4 человека из коллектива в 74 сотрудника и распределения между ними 10 разных заданий (каждое задание одной группе), так чтобы каждая группа отвечала хотя бы за одно поручение, если группы:
a) не должны иметь общих сотрудников;
b) могут быть произвольными;
c) каждый сотрудник участвовал не более чем в двух группах?

5.7. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

5.8. ФОРМУЛА ВКЛЮЧЕНИЙ — ИСКЛЮЧЕНИЙ

Пусть заданы **n** конечных множеств $A_1, \dots, A_k$ и

$$A = \bigcup_{i=1,\dots,k} A_i .$$

Тогда справедливо следующее соотношение, называемое правилом включений—исключений:

$$A = n_1 - n_2 + \ \dots + (-1)^{i-1} n_i + \dots \ + (-1)^{k-1} n_k ,$$ где

n_1 — сумма мощностей множеств $A_1, \dots, A_k$;
n_2 — сумма мощностей попарных пересечений множеств $A_1, \dots, A_k$;
n_i — сумма мощностей всевозможных пересечений по i множеств из множеств $A_1, \dots, A_k$;
n_k — мощность пересечения всех множеств $A_1, \dots, A_k$.

5.122. Сколько слагаемых составляют значения n_i в формуле включений - исключений?
5.123. Среди сотрудников фирмы каждый либо имеет высшее образование, либо работает более 10 лет, либо владеет не менее чем двумя специальностями. При этом известно, что:
a) 40 человек имеют высшее образование;
b) 35 человек имеют стаж больше 10 лет;
c) 80 человек владеют не менее чем двумя специальностями;
d) 20 человек имеют высшее образование и стаж работы не менее 10 лет;
e) 30 человек имеют высшее образование и не менее двух специальностей;
f) 10 человек имеют не менее двух специальностей и стаж работы не менее 10 лет;
g) 7 человек имеют высшее образование, стаж работы не менее 10 лет и не менее двух специальностей.
Сколько сотрудников работают в фирме?
5.124. На факультете учатся 400 студентов. При этом известно, что:
a) 260 студентов занимаются спортом;
b) 200 студентов изучают иностранные языки;
c) 180 студентов увлекаются коллекционированием;
d) 140 студентов увлекаются спортом и изучают иностранные языки;

e) 100 студентов изучают иностранные языки и являются коллекционерами;

f) 120 студентов занимаются спортом и увлекаются коллекционированием;

g) 40 студентов занимаются спортом, изучают иностранные языки и увлекаются коллекционированием.

Сколько студентов факультета не занимаются спортом, не изучают иностранные языки и не являются коллекционерами?

6. ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

6. 1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Всюду определенная функция $\boldsymbol{f}$, отображающая двоичные наборы $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ во множество $\mathbf{E}_2 = \{ \mathbf{0}, \mathbf{1} \}$ называется функцией алгебры логики (ф.а.л.). Для обозначения первой, второй, . . . , $\boldsymbol{n}$-й компонент наборов $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ используются символы переменных.

Всякая ф.а.л. может быть задана таблицей, в которой наборы значений переменных перечислены слева и расположены в порядке возрастания представляемых этими наборами чисел.

В правой части таблицы указаны значения $\boldsymbol{f}$ на соответствующих наборах.

Множество всех ф.а.л. обозначается как $\boldsymbol{P}_2$, а множество всех ф.а.л. от $\boldsymbol{n}$ переменных — как P_2^n.

6. **1.** Определить число разных функций алгебры логики в следующих множествах:

a) P_2^n;

b) функций, принимающих значение 1 ровно на 1, 2, . . . , $\boldsymbol{k}$ наборах значений переменных;

c) функций, принимающих одинаковые значения на наборах, содержащих равное число единиц;

d) функций, принимающих разные значения на наборах, симметричных относительно середины таблицы;

e) функций $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$, принимающих значение **1** лишь на таких наборах $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, для которых $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i = [\, \boldsymbol{n} / 2 \,]$.

f) Функций, принимающих одинаковые значения на наборах с нечетным числом нулей

Следующие функции называются элементарными:

$\boldsymbol{x}$	0	1	$\boldsymbol{x}$	$\overline{\boldsymbol{x}}$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Они называются соответственно: *нулем*, *единицей*, *тождественной* функцией и *отрицанием*.

$\boldsymbol{x}_1$	$\boldsymbol{x}_2$	$\vee$	&	~	+	$\mid$	$\to$
0	0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0	0	1

Приведенные функции имеют собственные имена:

$\vee$ — дизъюнкция (записывается как $\boldsymbol{x}_1 \vee \boldsymbol{x}_2$);

& — конъюнкция ($\boldsymbol{x}_1 \,\&\, \boldsymbol{x}_2$);

~ — эквивалентность ($\boldsymbol{x}_1 \sim \boldsymbol{x}_2$);

+ — сумма по модулю 2 ($\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$);

$\mid$ — штрих Шеффера ($\boldsymbol{x}_1 \mid \boldsymbol{x}_2$);

$\to$ — импликация или следование ($\boldsymbol{x}_1 \to \boldsymbol{x}_2$);

Из обозначений элементарных функций можно образовывать записи, подобные арифметическим выражениям, в которых вместо арифметических функций используются элементарные ф.а.л.

Такие записи называются формулами.

В формулах можно опускать скобки, используя следующие соглашения о приоритете для таких функций:

1) 0, 1, $\boldsymbol{x}$, $\overline{\boldsymbol{x}}$;

2) &, $\mid$;

3) $\vee$, $\to$, ~, +.

Одноприоритетные операции выполняются в порядке записи в формулах слева направо.

Например, формула $((x_1 \& \overline{x_2}) \vee (\overline{x_3})) \to ((\overline{x_3}) + (x_1 \& x_2))$ может быть записана в виде:
$(x_1 \& \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \to (\overline{x_3} + x_1 \& x_2)$.

Формулы представляют функции алгебры логики. При этом с точностью до множества символов переменных, используемых в записи формулы, такая функция является единственной.

6. **2.** Построить табличные задания ф.а.л., представляемых формулами:

a) $(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \,\&\, \overline{\boldsymbol{x}_3}) \vee ((\boldsymbol{x}_1 \to \boldsymbol{x}_2) \sim \boldsymbol{x}_3)$;

b) $(x_1 \mid x_2) \& (x_1 \to x_3)$;

c) $(\mathbf{x}_1 \to (\overline{\mathbf{x}_2} \,\&\, \overline{\mathbf{x}_3} + (\mathbf{x}_1 \vee \mathbf{x}_2)))$;

d) $(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3) \to \boldsymbol{x}_1 \,\&\, \boldsymbol{x}_2 \,\&\, \boldsymbol{x}_3$

e) $(x_1 \to x_2) \& (\overline{x_3} \to x_2) \& (\overline{x_1} \to x_3)$;

f) $(x_1 \vee x_2) \& \overline{(\overline{x_3} \& x_2) + (\overline{x_1} \to x_3)}$;

g) $\mathbf{x}_1 \to (\mathbf{x}_2 \to (\mathbf{x}_3 \to (\ldots (\mathbf{x}_{n-1} \to \mathbf{x}_n) \ldots)$.

h)) $(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{x}_4) \vee (\boldsymbol{x}_1 \,\&\, \boldsymbol{x}_2 \,\&\, \boldsymbol{x}_3. \,\&\, \boldsymbol{x}_4)$;

6. **3.** Найти число наборов, на которых заданная функция принимает значение, равное **1**.

a) $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \boldsymbol{x}_n$;

b) $\boldsymbol{x}_1 \sim (\boldsymbol{x}_2 \sim (\ldots (\boldsymbol{x}_n \sim \boldsymbol{x}_n) \ldots)$;

c) $\boldsymbol{x}_1 \,\&\, \boldsymbol{x}_2 \vee \boldsymbol{x}_2 \,\&\, \boldsymbol{x}_3 \vee \ldots \vee \boldsymbol{x}_{n-1} \,\&\, \boldsymbol{x}_n$;

d) $(\ldots (\boldsymbol{x}_1 \to \boldsymbol{x}_2) \to \ldots) \to \boldsymbol{x}_n$;

e) $\boldsymbol{x}_1 \vee \boldsymbol{x}_2 \vee \ldots \vee \boldsymbol{x}_n$;

f) $\boldsymbol{x}_1 \mid \boldsymbol{x}_2 \ldots \mid \boldsymbol{x}_n$.

g) $\boldsymbol{x}_1 \,\&\, \boldsymbol{x}_2 \vee \boldsymbol{x}_2 \,\&\, \boldsymbol{x}_3 \vee \ldots \vee \boldsymbol{x}_{n-1} \,\&\, \boldsymbol{x}_n \vee \boldsymbol{x}_n \,\&\, \boldsymbol{x}_1$;

h) $\boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \boldsymbol{x}_{n-1} \boldsymbol{x}_n$;

i) $(\boldsymbol{x}_1 \mid \boldsymbol{x}_2) + \ldots + (\boldsymbol{x}_{n-1} \mid \boldsymbol{x}_n)$.

В каждом случае следует привести точную формулу или составить рекуррентное соотношение.

Переменная $\boldsymbol{x}_i$ ф.а.л. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ называется существенной переменной, если:

$\exists\, (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \in E_2^{n-1}$

$(\boldsymbol{f}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \neq \boldsymbol{f}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n))$

6. **4.** Определить понятие несущественной переменной.

Определить существенность переменной $\boldsymbol{x}_i$ функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ можно с помощью следующей процедуры:

a) построить табличное задание $\boldsymbol{f}$;

b) разбить столбец значений $\boldsymbol{f}$ на последовательно идущие части по 2^{n-i+1} элементов;

c) если в каждой полученной части столбца значений $\boldsymbol{f}$ верхняя половина совпадает с нижней половиной, то переменная $\boldsymbol{x}_i$ не является существенной (в противном случае $\boldsymbol{x}_i$ является существенной переменной).

6. 5. Доказать корректность приведенного метода нахождения существенных и несущественных переменных.

6. 6. Определить существенные и несущественные переменные функций:

a) $(x_1 + x_2)\&x_3 \vee x_1 \& x_2$;

b) (01100110);

c) $\left(x_3 + \overline{(\overline{x_2} + x_3)}\right) \sim (x_3 \& (\overline{x_2} + \overline{(\overline{x_1} \vee \overline{x_3})}))$;

d) (1100110011101110);

e) $x_1 \to (x_2 \to (x_3 \to (\ldots (x_{n-1} \to x_n) \ldots)$;

f) $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \boldsymbol{x}_n + 1$.

6.7. Сколько существует ф.а.л., все переменные которых не являются существенными?

6. 8. Сколько существенных переменных имеет функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$, принимающая значение **1** на нечетном числе наборов значений переменных?

Пусть рассматриваются ф.а.л. ***n*** переменных, которые обозначаем символами $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$

Элементарной конъюнкцией ранга ***n*** называется формула $x_1^{\alpha_1} \& \ldots x_n^{\alpha_n}$, где $x_i^{\alpha_i}$ обозначает $\overline{x_i}$, если $\alpha_i = 0$, и $\boldsymbol{x}_i$, если $\alpha_i = 1$.

Конъюнкция $x_1^{\alpha_1} \& \ldots x_n^{\alpha_n}$ принимает значение 1 на единственном наборе значений переменных $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$.

Поэтому всякая отличная от тождественного нуля ф. а. л. допускает следующее представление, называемое совершенной дизъюнктивной нормальной формой (С. Д. Н. Ф.) этой функции:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \bigvee_{f(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) = 1} \boldsymbol{x}_1^{\sigma_1} \& \ldots \& \boldsymbol{x}_n^{\sigma_n}.$$

Здесь дизъюнкция берется по всем наборам значений переменных, на которых ***f*** принимает значение **1**.

6. 9. Построить С. Д. Н. Ф. следующих функций:

a) $\boldsymbol{x}_1 | \boldsymbol{x}_2$;

b) $x_1 \to (x_2 \to x_3)$;

c) $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{x}_4$;

d) **(01110010)**;

e) (1100000000000011);

f) $x_1 \to (x_2 + (\overline{x_3} \to (x_2 \vee \overline{x_1})))$.

Если **f (x 1, x 2, . . . , x n)** $\in P_2^n$ *и* $1 \le r \le n$, *то справедливо следующее представление* **f**, *называемое разложением* **f** *по первым* **r** *переменным:*

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)} x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_r^{\sigma_r} \& f(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, x_{r+1}, \ldots, x_n).$$

6. 10. Построить разложение следующих функций по ***r*** переменным:

a) $\overline{(x_1 \to (x_2 \vee x_3 \& \overline{x_1} \vee x_4))}$, $\boldsymbol{r} = 2$;

b) $x_1 \to (\overline{x_2} \to \overline{x_3})$, $\boldsymbol{r} = 1$;

c) $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_1 + 1$, $\boldsymbol{r} = 3$;

d) $(\overline{x_1} \vee x_2) \to (x_3 \& \overline{x_4} \vee x_2)$, $\boldsymbol{r} = 2$;

e) (00010011), $\boldsymbol{r} = 1$;

f) (0011011100111001), $\boldsymbol{r} = 3$.

6.11. Используя соотношения дистрибутивности, преобразовать представление заданной функции в форме С. Д. Н. Ф. к виду дизъюнкции конъюнкций (С. К. Н. Ф.):

a) $x_1 \to (x_2 \vee (\overline{x_3} \to \overline{(x_2 \vee \overline{x_1})}))$;

b) $(x_1 + (\overline{x_2} \& \overline{x_3} \to (x_1 \vee x_2))$;

c) $(x_1 | x_2) \& (\overline{x_1 \to x_3}) \vee (x_2 \to \overline{x_3})$;

d) $(x_1 \vee x_2) \& (x_1 + x_3) \to (\overline{x_1} | (x_2 \& x_1) + x_3)$;

e) $(x_1 \to x_2) \vee ((\overline{x_2 + x_3}) \to (\overline{x_3} \vee x_2))$;

f) $x_1 \vee (x_2 \vee (\overline{x_3} \& (x_1 \vee x_2)))$.

Дизъюнктивной нормальной формой (д.н.ф.) называется дизъюнкция элементарных конъюнкций, в которой все дизъюнкции различны.

Сложностью д. н. ф. **D** называется число ***L*** (**D**) равное количеству символов функций **&** и $\vee$ в записи **D**.

Минимальной д. н. ф. для ф.а.л. ***f*** называется такая д.н.ф. **D**, которая представляет ***f***, и сложность которой — наименьшая среди всех сложностей д.н.ф., представляющих эту же функцию.

Если $f \in P_2$, то сокращенной д. н. ф. для ***f*** называется д.н.ф., состоящая из тех и только тех конъюнкций, которые принимают значение **1** в точности на максимальных гранях для множества вершин единичного ***n***- мерного куба, в которых ***f*** принимает значение, равное ***1***.

6. 12. Построить сокращенные д. н. ф. для следующих функций, используя геометрическую интерпретацию.

a) $x_1 \to (x_2 \to x_3)$;

b) $\overline{x_1} + (x_2 \vee x_3)$;

c) $((x_1 \to \overline{x_2}) \vee x_3) + 1$;

d) $(x_1 + x_2) \vee x_3) \to \overline{x_2} \& x_3$;

e) (01101110);

f) (0011011101111011).

6.13. Сколько различных k-мерных граней, содержится в n-мерном единичном кубе?

Если $f \neq 0$, то сокращенную д.н.ф. этой функции можно получить из с.д.н.ф. этой функции с помощью следующих правил преобразования:

— склеивания $x \& K \vee \overline{x} \& K \equiv K$;

— обобщенного склеивания $x \& K_1 \vee \overline{x} \& K_2 \equiv x \& K_1 \vee \overline{x} \& K_2 \vee K_1 \& K_2$;

— поглощения $x \& K \vee K \equiv K$ и $\overline{x} \& K \vee K \equiv K$;

(здесь K , K_1 и K_2 – произвольные элементарные конъюнкции или **1**)

6.14. Доказать, используя правила склеивания, обобщенного склеивания и поглощения, спаведливость эквивалентностей:

a. $\boldsymbol{x}_1^{\sigma 1} \& \boldsymbol{x}_2^{\sigma 2} \& K \vee K \equiv K$

6. 15. Построить минимальные д.н.ф. следующих функций, применяя правила преобразования к сокращенной д.н.ф.:

a) $x_1 \to (\overline{x_2} \to x_3)$;

b) $\overline{x_1} \to (x_2 \to (x_3 \to x_4))$;

c) $x_1 + (x_2 \to (x_3 \vee \overline{x_1}))$;

d) $x_1 \vee (x_2 \to (x_3 + x_1))$;

e) $x_1 \to (x_2 \to (x_4 \to (\overline{x_3 \to x_2})))$;

f) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

g) $((\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \to (\boldsymbol{x}_1 \vee \boldsymbol{x}_3)) \to \boldsymbol{x}_4)$

h)) $((\boldsymbol{x}_1 \vee \boldsymbol{x}_3) \to (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)) \to \boldsymbol{x}_4)$

6. 16. Привести примеры ф.а.л., имеющих одну, две, . . . , ***k*** минимальных д. н. ф.

6. 17. Определить число различных д. н. ф., которые могут быть составлены для переменных $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$.

6. 18. Показать, что если $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ равна **0** лишь на одном наборе $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, то минимальная д.н.ф. для ***f*** имеет вид $x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma_n}}$.

6.19. Показать, что если x_i является несущественной переменной отличной от нуля функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то x_i не входит в запись минимальной ДНФ для f.

Пусть $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ — некоторый двоичный набор. Обозначение $\Pi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ используется для представления произведения переменных $x_{j_1} \cdot x_{j_2} \cdots x_{j_k}$, где переменная x_j входит в произведение $\Pi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ тогда и только тогда, когда $\sigma_j = 1$. При этом $j_1 < j_2 < \dots < j_k$.

Пустое произведение переменных обозначается как 1.

Полиномом Жегалкина называется формула $\quad \sum \alpha_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} \times \Pi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$.

Здесь суммирование ведется по всем наборам $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ а, $\alpha_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n)}$ — коэффициенты перед произведениями переменных, принимающие значения **0** или **1**.

При этом из записи полинома Жегалкина удаляются нулевые слагаемые за исключением случая, когда в полиноме остается единственное слагаемое, равное нулю.

Всякая ф.а.л. представляется единственным, с точностью до порядка слагаемых, полиномом Жегалкина.

6. 20. Записать общий вид полинома Жегалкина от 2, 3, 4. . . , k переменных.

6. 21. Преобразовать к виду полинома Жегалкина следующие формулы:

a) $(x_1 + x_2)(x_1 x_3 + x_2)(1 + x_3 x_1 + x_4)$;

b) $(x_1 + x_2 + x_3)(x_3 + x_2)(x_3 + x_1 + x_4)$;

c) $(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + x_3)$;

d) $(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)(x_3 + x_1 + x_2)$;

e) $(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)\dots(x_{n-1} + x_n)$;

f) $(x_1 + 1)(x_2 + 1)\dots(x_n + 1)$.

Полиномы Жегалкина для произвольных ф.а.л. можно находить с помощью метода неопределенных коэффициентов, который продемонстрируем на примере функции $f = \overline{x_1 \to x_2}$.

1. Построим табличное задание f:

x_1	x_2	f
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

2. Выпишем общий вид полинома Жегалкина для функции двух переменных: $\alpha\, x_1 x_2 + \beta x_1 + \gamma x_2 + \delta$.

3. Уточним значения коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

a) так как $f(0, 0) = 0$, то $\alpha\, 0 + \beta\, 0 + \gamma\, 0 + \delta = 0$, т. е. $\delta = 0$;

b) так как $f(0, 1) = 0$, то $\alpha\, 0 + \beta\, 0 + \gamma\, 1 + \delta = 0$, т. е. $\chi = 0$;

c) так как $f(1, 0) = 1$, то $\alpha\, 0 + \beta\, 1 + \gamma\, 0 + \delta = 1$, т. е. $\beta = 1$;

d) наконец, $f(1, 1) = 0$, т. е. $\alpha\, 1 + \beta\, 1 + \gamma\, 1 + \delta = 0$ и $\alpha = 1$.

Окончательно получаем $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_1$.

6. 22. Построить полиномы Жегалкина для следующих функций:

a) $X_1 \vee X_2$;

b) $X_1 \to X_2$;

c) $(x_1 \vee \overline{x_2}) \& ((x_3 \vee x_2) \to x_1)$;

d) $(x_1 + x_2) \vee (x_3 \to \overline{x_2})$;

f) $(x_1 + x_2) \vee (x_3 \to \overline{x_2}) \& (x_1 + \overline{x_2})(\overline{x_3} \to \overline{x_2})$;

e) $(\overline{x_1} \to x_2)(x_3 + \overline{x_2})$;

g) $X_1 \vee X_2 \vee \dots \vee X_n$;

h) $x_1 \to (x_2 \to (\dots \to x_n)\dots)$.

i) $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$ (составить формулу для полинома Жегалкина данной функции).

6. 23. Сколько существует различных полиномов Жегалкина для переменных $x_1, \dots, x_n$, которые не содержат произведений более трёх переменных?

6. 24. Является ли существенной переменной заданной функции переменная, входящая в полином Жегалкина для этой функции?

6. 2. ЗАМКНУТЫЕ КЛАССЫ И ПОЛНОТА

Пусть $B \subseteq P_2$. Замыканием B называется множество $[B]$ функций алгебры логики, которые могут быть представлены формулами над B.

Множество функций B называется замкнутым, если $[B] = B$.

6. 25. Показать справедливость следующих свойств операции замыкания:

a) $[[B]] = [B]$;

b) $B \subseteq [B]$;

c) $[B_1] \cup [B_2] \subseteq [B_1 \cup B_2]$;

d) $[B_1 \cap B_2] \subseteq [B_1] \cap [B_2]$;

e) $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow [B_1] \subseteq [B_2]$;

f) $[B_1 \setminus B_2] \supseteq [B_1] \setminus [B_2]$.

Привести примеры множеств B_1 и B_2, для которых включения являются строгими.

6.26. каких случаях верны соотношения:

a) $[B_1 \setminus B_2] \subseteq [B_1] \setminus [B_2]$; c) $[B_1] \cup B_2 = [B_1 \cup B_2]$;

b) $[B_1] \setminus [B_2] = [B_1 \setminus B_2]$; d) $[B_1] \cap B_2 = [B_1 \cap B_2]$;

6. 27. Описать множества $[B]$ для следующих классов функций:

a) $\{x_1 + x_2, \overline{x}\}$;

b) $\{\overline{X}\}$;

c) $\{x_1 \& x_2, \overline{x}\}$;

d) $\{x_1 \vee x_2, x_1 \& x_2\}$;

e) $\{x_1 + x_2, \mathbf{1}\}$;

f) $\{\overline{x_1} + x_2, \overline{x}\}$.

6. 28. Показать, что $f \notin [B]$, где:

a) $f = x_1 \vee x_2$, $B = \{x_1 + x_2, \overline{x}\}$;

b) $f = x_1 + x_2$, $B = \{x_1 \& x_2\}$;

c) $f = x_1 \vee x_2$, $B = \{X_1 \sim X_2\}$;

d) $f = \overline{X}$, $B = \{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2\}$;

e) $f = x_1 \& x_2$, $B = \{x_1 \to x_2\}$.

6. 29. Показать, что $f = x_1 + x_2$ принадлежит $[B]$ и записать формулу, представляющую f, где:

a) $B = \{x_1 \to x_2, \overline{x}\}$;

b) $B = \{x_1 \vee x_2, \overline{x}\}$;

c) $B = \{$ **1101, 0010** $\}$;

d) $B = \{x_1 \& x_2, \overline{x}\}$;

e) $B = \{\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}\}$;

f) $B = \{\overline{x_1} \to x_2, x_1 + x_2\}$.

6. 30. Через функции $x_1 \to x_2$ и $\overline{x}$ выразить функцию:

a) $x_1 + x_2 + x_3$; **b)** $\overline{x_1} \vee x_2 \& x_3$; **c)** .

Если $f(x_1, \dots, x_n)$ — функция алгебры логики, то функция $f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})}$ называется двойственной к функции f.

Если $f(x_1, \dots, x_n) = f^*(x_1, \dots, x_n)$, то f называется самодвойственной (т. е. на любой паре противоположных наборов $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ и $(\overline{\sigma_1}, \dots, \overline{\sigma_n})$ всякая самодвойственная функция принимает противоположные значения).

Класс всех самодвойственных функций обозначается как **S**.

6. 31. Построить все самодвойственные функции двух и трех переменных в P_2.

6. 32. Показать, что противоположные наборы значений переменных в табличном задании функций алгебры логики располагаются симметрично относительно середины таблицы.

6. 33. Построить функции, двойственные к следующим ф. а. л.:

a) $x_1 \vee x_2$;

b)) $x_1 \to x_2$;

c) $x_1 + (x_2 + x_3)$;

d) $x_1 \to (x_2 \to x_3)$;

e) (0010110111000111);

f) $x_1 \& x_2 \vee x_2 \& x_3 \vee x_1 \& x_3$.

Какие из этих функций самодвойственные?

6. 34. Показать, что если $f = \varphi(\varphi_1(\ldots), \ldots, \varphi_k(\ldots))$, то f^* представляется формулой: $\varphi^*(\varphi_1^*(\ldots), \ldots, \varphi_k^*(\ldots))$.

6. 35. Проверить утверждение: Всякая функция из **S** имеет нечетное число существенных переменных.

На множестве E_2^n определим отношение $\leq$ — предшествования двоичных наборов, соотношением $(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \leq (\delta_1,\ldots,\delta_n) \Leftrightarrow \forall i = \overline{1,n}\ (\sigma_i \leq \delta_i)$.

Функция $f \in P_2$ называется монотонной, если: $\forall \alpha, \beta \in E_2^n (\alpha \leq \beta \Rightarrow f(\alpha) \leq f(\beta))$.

6. 36. Построить диаграмму для отношения $\leq$ на множествах: E_2^2, E_2^3, E_2^n.

Класс всех монотонных функций обозначается как **M**.

6. 37.

a) Показать, что отношение $\leq$ является отношением частичного порядка на множестве наборов длины n.

b) Привести пример **3** попарно несравнимых наборов длины **3**.

c) Найти **6** попарно несравнимых наборов длины **6**.

d) Набор $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ содержит **k** единиц. Сколько наборов предшествуют набору $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ в отношении $\leq$ и сколько наборов следуют за ним и сколько наборов - несравнимые с $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

e) Каково максимальное число попарно несравнимых наборов, длины **n**?

f). Показать, что никакие два противоположных набора, за исключением наборов (**0**, , , **0**) и (**1**. . . **1**) — не являются сравнимыми в отношении $\leq$.

g) Показать, что не существует четырех попарно несравнимых наборов длины **3**.

6. 38. Является ли монотонной функция:

a); $x_1 \to (x_2 \to x_3)$;

b) $x_1 + (x_2 + (x_3 \ldots (x_{n-1} + x_n) \ldots)$;

c) $x_1 + (x_2 \to x_3)$;

d) (0010110011111111);

e) $x_1 \& x_2 \vee x_2 \& x_3 \vee \ldots \vee x_{n-1} \& x_n$;

f) (01100111).

6.39. Докажите, что если монотонная функция f не является тождественной, то минимальная ДНФ для f не содержит отрицаний переменных.

6. 40. Сколько существует монотонных функций в P_2^n, для которых:

a) f**(0, 1, 1) = 0** и f**(1, 0, 0) = 1**;

b) f**(0, 1, 0) = 0** и f**(1, 0, 1) = 1**;

c) f**(1, 0, 0, 1) = 1** и f**(0, 1, 1, 0) = 0**;

d) f**(0, 1, 1) = 1** и **f ∈ S**;

e) f**(1, 0, 1, 0) = 1** и **f ∈ S**;

f) f**(1, 0, 1, 1) = 1** и f**(1, 0, 1, 0) = 0**.

6. 41. Показать, что если из f заменой переменных на функции 0, 1, x можно получить отрицание $\overline{x}$, то $f \notin$ **M**.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ сохраняет ноль, если $f(\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ сохраняет единицу, если $f(\mathbf{1}, \ldots, \mathbf{1}) = \mathbf{1}$.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ — линейная, если полином Жегалкина для f не содержит произведений переменных.

Множества функций, сохраняющих ноль и единицу, обозначаются как $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_0}$. Множество линейных функций обозначается как **L**.

6. 42. Показать, что ни один из классов $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_0}$, **L**, **S**, **M** целиком не содержится ни в одном из остальных классов.

6. 43. Определить число ф.а.л. из $\mathbf{P_2}$, содержащихся в следующих множествах функций:

a) $\mathbf{L \cap T_0}$;

b) $\mathbf{S \cap T_1}$;

c) $\mathbf{L \cap T_1}$;

d) $\mathbf{L \cup T_1}$;

e) $\mathbf{T_0 \setminus S}$;

f) $\mathbf{L \cup T_0 \cup S}$;

g) $\mathbf{L \setminus (T_1 \setminus T_0)}$;

h) $\mathbf{S \cap L \cap T_0}$;

i) $\mathbf{L \setminus (T_1 \cap T_0)}$;

j) $\mathbf{S \setminus (T_1 \cup T_0)}$;

k) $\mathbf{(S \cap T_0) \cup (L \setminus T_1)}$;

l) $\mathbf{(S \cap L) \cup (T_0 \setminus S)}$;

m) $\mathbf{(S \setminus L) \cup (L \setminus (T_1 \cup T_0))}$;

n) $\mathbf{(T_0 \setminus (T_1 \cup S)) \cup (L \setminus (T_0 \setminus (S \setminus T_1)))}$;

o) $\mathbf{((S \cup T_1) \setminus (L \setminus T_0)) \cup (S \cap (T_1 \setminus (L \cap T_0)))}$;

p) $\mathbf{(S \cap (T_0 \setminus (T_1 \cap L))) \cup ((T_1 \cup T_0) \setminus (L \setminus (M \setminus T_1)))}$;

Множество функций $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{P_2}$ называется полной системой, если $[\mathbf{B}] = \mathbf{P_2}$.

Примером полной системы является множество { &, $\vee$, $\bar{\ }$ }.

Произвольная система $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{P_2}$ функций алгебры логики полна тогда и только тогда, когда через функции этой системы можно выразить функции &, $\vee$, $\bar{\ }$.

6. 44. Доказать полноту следующих систем, выразив через них все функции полной системы &, $\vee$, $\bar{\ }$:

a) $\{\overline{x_1 \vee x_2}\}$;

b) $\{\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}\}$;

c) $\{x_1 + x_2 + x_3 + 1,\ x_1 \& \overline{x_2}\}$;

d) {(10000111), (00111000)};

e) $\{x_1 \to (x_2 \to \overline{x_3}),\ \overline{x_1} \to x_2\}$;

f) $\{x_1 \to (\overline{x_2} \to \overline{x_3}), \overline{x_1}\}$;

g) { (10101001), (00111010)}.;

h) $\{x_1 \to (x_2 + x_3)\}$.

Справедлив следующий критерий полноты систем функций алгебры логики.

Произвольная система функций из $\mathbf{P_2}$ полна тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из классов: $\mathbf{T_0}$, $\mathbf{T_1}$, **L**, **S**, **M**, что можно записать так:

$[\mathbf{B}] = \mathbf{P_2} \Leftrightarrow \forall A \in \{\mathbf{T_0}, \mathbf{T_1}, \mathbf{L}, \mathbf{S}, \mathbf{M}\}\ (\mathbf{B} \not\subseteq A)$.

Поэтому для полноты **B** необходимо, чтобы:

$\exists f \in B(f \notin S)$, $\exists f \in B(f \notin T_0)$, $\exists f \in B(f \notin T_1)$, $\exists f \in B(f \notin L)$, $\exists f \in B(f \notin M)$.

Если система **B** — конечная, то для определения полноты составляется таблица, строки которой соответствуют функциям системы, а столбцы — классам $\mathbf{T_0}$, $\mathbf{T_1}$, **L**, **S**, **M.** Элементами таблицы являются знаки + и -.

Значения элементов таблицы определяются тем, принадлежит ли функция, приписанная строке, классу, приписанному столбцу.

Например, для **B** = $\{x_1 \to x_2, \overline{x}\}$ такая таблица имеет вид:

	$\mathbf{T_0}$	$\mathbf{T_1}$	L	S	M
$x_1 \to x_2$	-	+	-	-	-
$\overline{x}$	-	-	+	+	-

Если в построенной таблице найдется столбец, состоящий только из знаков +, то система **B** — неполная. В противном случае **B** — полная система.

6. 45. Используя критерий полноты определить, полна ли система:

a) $\{x_1 + x_2 \& x_3, x_1 + x_2 + 1\}$;

b) $\{x_1 + x_2,\ x_1 \to x_2\}$;

c) $\{x_1 \to (x_2 \to x_3),\ x_1 + x_2\}$;

d) $\{x_1 + x_2,\ x_1 \& x_2 \vee x_2 \& x_3 \vee \overline{x_2} \& \overline{x_3}\}$;

e) { (1001), (01011010) };

f) $\{ \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \ldots \vee \bar{x}_n \}$;

g) {(11000101), (0011011011110111) }.

6. 46. Определить, полна ли система:

a) $(S \cap L) \cup (T_0 \cap T_1)$; **b)** $(S \cap M) \cup (L \setminus M) \cup (T_0 \setminus S)$;

c) $(L \setminus S) \cup (T_0 \setminus M)$; **d)** $(M \setminus (T_0 \cap T_1)) \cup (T_1 \setminus S)$;

e) $(M \setminus (T_0 \setminus T_1)) \cup (L \setminus S)$; **f)** $((S \setminus T_0) \cap L)) \cup (L \setminus T_1)$;

g) $(S \setminus L) \cap (T_0 \cup T_1) \cup (M \setminus S) \cap L$; **h)** $(T_0 \setminus (T_1 \cap M)) \cup (T_1 \setminus (S \cap L))$.

6. 47. Пусть $B = \{ f_1, \ldots, f_n \}$ — полная система. Доказать, что система $B^* = \{ f_1^*, \ldots, f_n^* \}$ — также является полной.

Множество $B \subseteq P_2$ называется предполным классом, если $[B] \neq P_2$, но $\forall f \bar{\in} B ([B \cup \{f\}] = P_2)$.

6. 48. Показать, что если **B** — предполный класс, то **B** — замкнутый класс.

6. 49. Показать, что каждый из классов T_0, T_1, **L**, **S**, **M** является предполным.

6. 50. Показать, что в P_2 не существует предполных классов, отличных от T_0, T_1, **L**, **S**, **M**.

7. ГРАФЫ И СЕТИ

7.1. ЗАДАНИЕ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРАФОВ

Графом называется всякая пара $G = (V, U)$,где V — множество вершин, а U — множество ребер графа. Ребра графов указывают на наличие связей между парами вершин и представляются в простейшем случае парами вершин, которые они соединяют.

Далее будут рассматриваться только такие графы, в которых любые две вершины соединяются не более чем одним ребром. При этом единственное ребро, соединяющее две вершины a и b, может быть неориентированным или ориентированным.

В первом случае ребро ведет как из **a** в **b** так и из **b** в **a.** Такое ребро представляется двумя парами (**a** , **b**) и (**b**, **a**) .Во втором случае ребро, соединяющее вершины **a** и **b** ведет только из **a** в **b**, и представляется одной парой (**a** , **b**).

Степенью вершины a графа G называется число выходящих из этой вершины ребер, которое обозначается как $d(a)$. Граф G называется конечным графом, если множества его вершин и ребер — конечные. Конечные графы могут задаваться с помощью матриц смежности, матриц инциденции и списков смежности.

Пусть $G = (V, U)$, где $V = \{ a_1, \ldots, a_m \}$ и $U = \{ u_1, \ldots, u_n \}$.

Матрица смежности для графа G представляет собой таблицу размера $m \times m$, строки и столбцы которой соответствуют вершинам графа.

Значение $t_{i,j}$, элемента такой таблицы, принадлежащего i-й строке и j-му столбцу, определяется по следующему правилу:

$$t_{i,j} = \begin{cases} 1, (a_i, a_j) \in U \\ 0, (a_i, a_j) \notin U \end{cases}.$$

Матрица инциденции, представляющая граф G, имеет m строк, соответствующих вершинам, и n столбцов, соответствующих ребрам графа G.

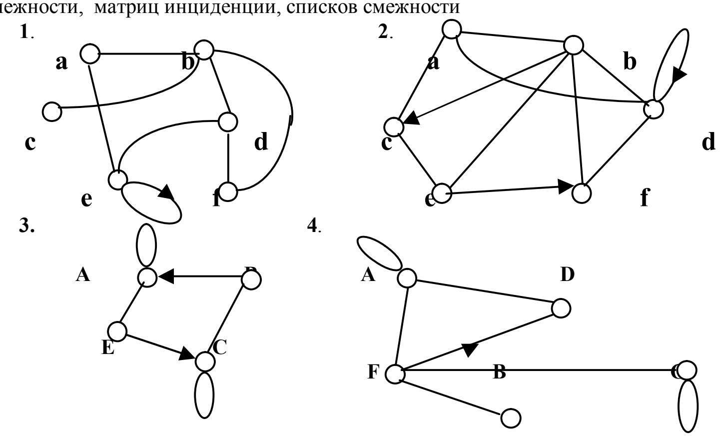
Значение элемента $t_{i,j}$ матрицы инциденции определяется по правилу:

$$t_{i,j} = \begin{cases} -1, \ u_j = (a_i, x) \\ 1, u_j = (x, a_i) \ \& \ x \neq a_i \\ 0, x \notin u_j \end{cases}.$$

Пусть k равно числу концов ребер графа G.

Представление графа G с помощью списков смежности задается посредством двух линейных массивов A и B, имеющих m и k элементов. В массиве A последовательно записываются списки вершин, являющихся концами ребер, выходящих из вершин $a_1, \ldots, a_n$.В массиве B записываются номера элементов массива A, в которых начинаются списки вершин, соседних с вершинами $a_1, \ldots, a_n$. При этом, если соответствующий список является пустым, то ссылка равна 0. Кроме того графы можно изображать наглядно в виде геометрического задания. При этом вершины графа представляются точками пространства, а ребра — дугами, соединяющими точки, соответствующие началам и концам ребер. Дуги, представляющие ориентированные ребра, снабжаются указанием ориентации. Кроме того, дополнительно требуется чтобы дуги, представляющие ребра, не пересекались и не содержали внутренних точек, соответствующих вершинам графа.

7.1. Построить представления изображенных графов в виде геометрического задания, матриц смежности, матриц инциденции, списков смежности



7.2. Граф **G** имеет **n** вершин и **m** ребер.

A. Определить максимальную возможную долю нулей для представлении **G** в форме матрицы смежности и матрицы инциденций.

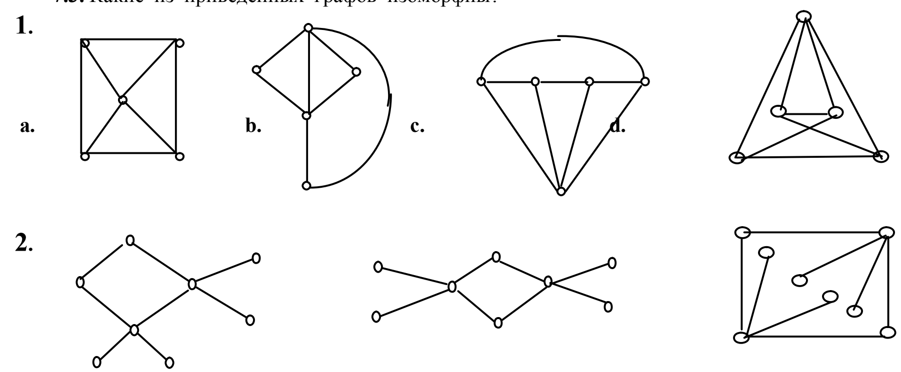
B. Определить размеры списков представления **G** с помощью списков смежности.

7.2. ИЗОМОРФИЗМ И ПЛАНАРНОСТЬ ГРАФОВ

Графы $G = (V, U)$ и $G_1 = (V_1, U_1)$ называются изоморфными, если существует такая биекция $h : V \to V_1$, что $\forall$ a, b $\in$ V ((a , b) $\in$ U $\Leftrightarrow$ (h(a) , h(b)) $\in$ U_1) **).**

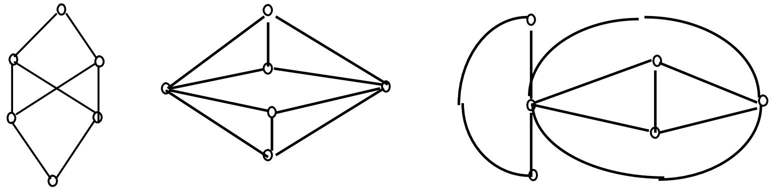
Причем ребра (**a** , **b**) и (h(**a**) , h (**b**)) — ориентированные или неориентированные одновременно, т. е. если графы изоморфны, то они совпадают с точностью до именования вершин. Если графы рассматриваются с точностью до изоморфизма, то вершины таких графов можно не именовать.

7.3. Какие из приведенных графов изоморфны?



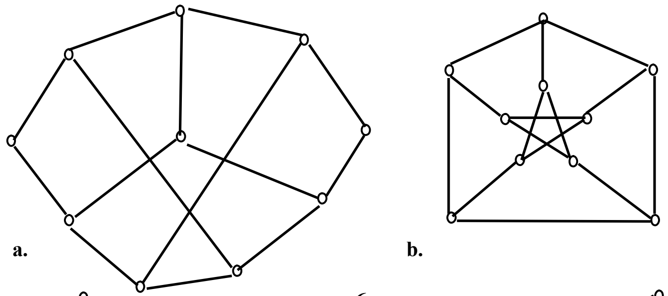
a. b. c.

3.



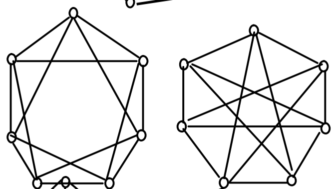
a. b. c.

4.

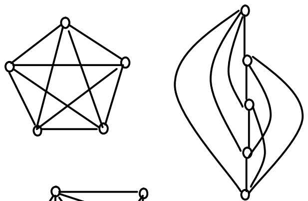


a. b.

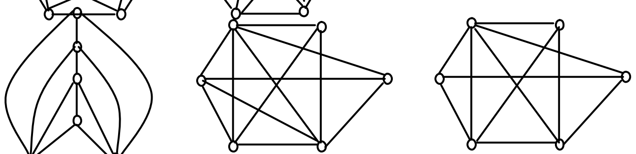
5



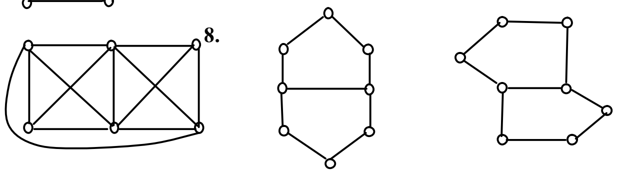
6



7.



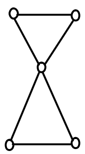
8.



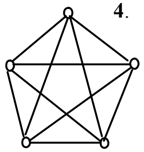
7.4. Сколько существует графов с вершинами $a, \ldots, z,$ изоморфных графу:

1.

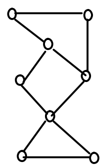
2.



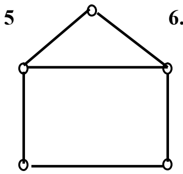
3.



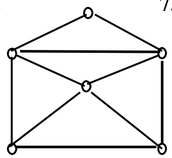
4.



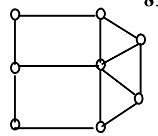
5



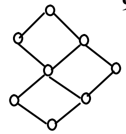
6.



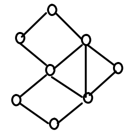
7.



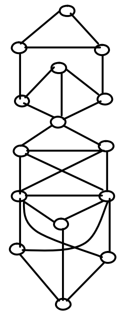
8.



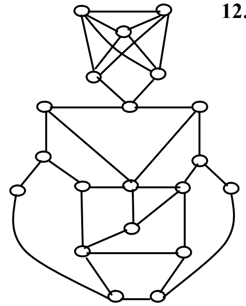
9.



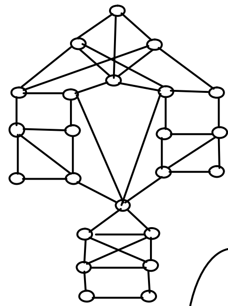
10.

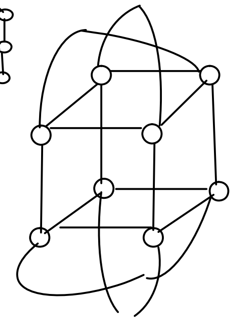


11.

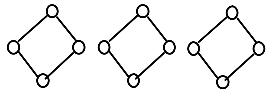


12.

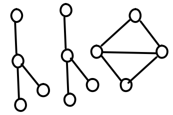




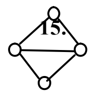
13.



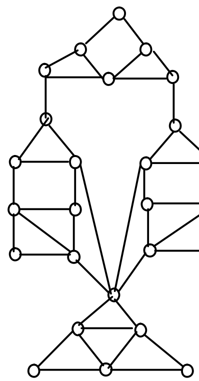
14.



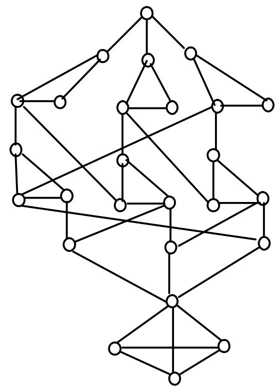
15.



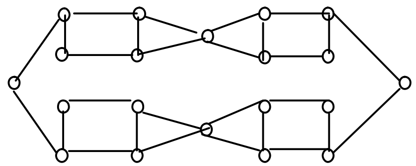
16.



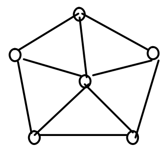
17.



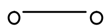
18.

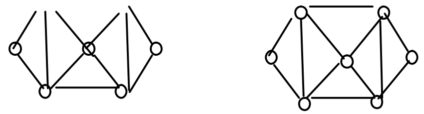


19.



20.





7.5. Привести пример графа G, имеющего множество вершин $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$, для которого:

a. всякий граф, получаемый из G нетождественной перестановкой вершин не совпадает с G;

b. всякий граф, изоморфный G и имеюший множество вершин $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ совпадает с G.

7.6. Показать, что если графы $G_1 = (V_1, U_1)$ и $G_2 = (V_2, U_2)$ изоморфны для биективного отображения вершин $h : V_1 \to V_2$, то:

a) $|V_1| = |V_2|$ и $|U_1| = |U_2|$;

b) $\forall\, a \in V_1$ $(\mathbf{d}(a) = \mathbf{d}(\mathbf{h}(a))$;

c) матрицы смежности и инциденции для G_1 и G_2 совпадают с точностью до перестановок строк и столбцов;

d) всякий подграф графа G_1 переводится в изоморфный ему подграф графа G_2.

7.7. Сколько существует неизоморфных графов с 4 вершинами и 5 ребрами?

7.8. Сколько существует неизоморфных графов с 5 вершинами и 7 ребрами, которые не содержат вершин степени больше 3?

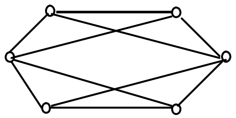
7.9. Сколько существует неизоморфных связных графов с 9 вершинами и 14 ребрами бех вершин степени 4?

Всякий граф со счетными множествами вершин и ребер допускает геометрическую реализацию в трехмерном пространстве.

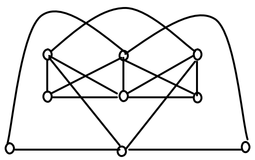
Граф называется плоским или планарным, если он допускает геометрическое представление на плоскости. Доказать планарность произвольного графа можно, построив его геометрическую реализацию на плоскости.

7.10. Показать планарность изображенных графов:

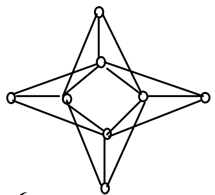
1.



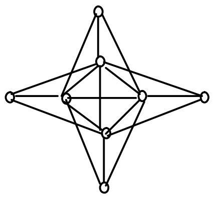
2.



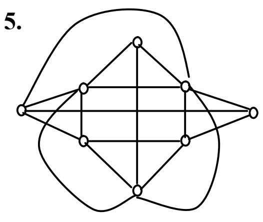
3.



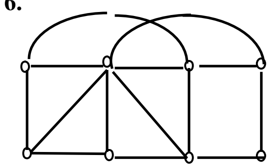
4.



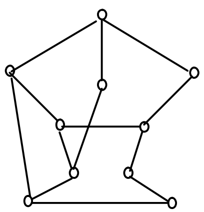
5.



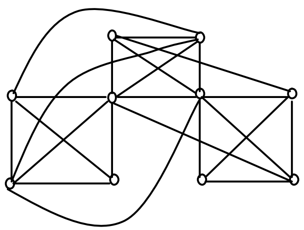
6.



7.



8.



Для доказательства непланарности графа можно воспользоваться критерием планарности.

Определим основные понятия.

1. Граф $G_1 = (V_1, U_1)$ называется подграфом графа $G = (V, U)$, если $V_1 \subseteq V$ и $U_1 \subseteq U$.

2. Пусть $u = (v_1, v_2)$ — ребро графа G. Разбиением этого ребра называется операция, добавления к графу G новой вершины v и замене ребра u на ребра (v_1, v) и (v, v_2).

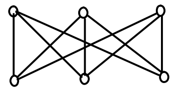
3. Граф G_1 называется разбиением графа G, если он может быть получен из G с помощью конечного числа разбиений ребер.

4. Графы G_1 и G_2 называются гомеоморфными, если существуют такие их разбиения, которые изоморфны.

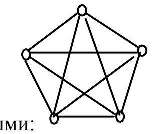
Справедлив следующий критерий планарности графов.

Граф G является плоским тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных графам $K_{3,3}$ или A_5.

$K_{3,3}$

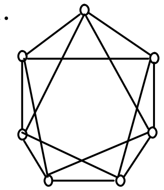


A_5

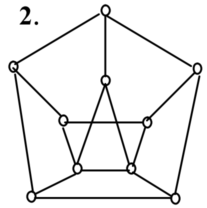


7.11. Какие из приведенных графов являются непланарными:

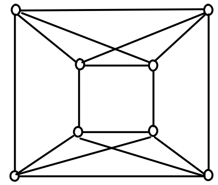
1.



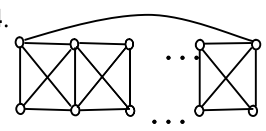
2.



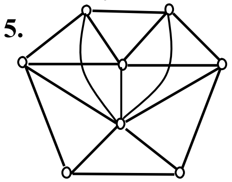
3.



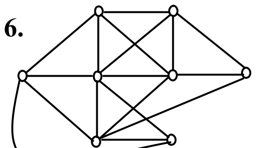
4.



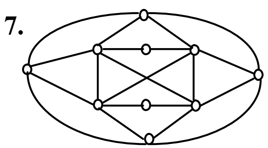
5.



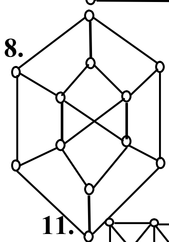
6.



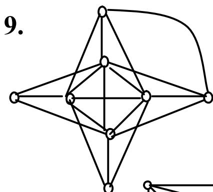
7.



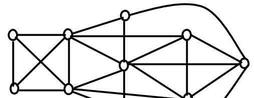
8.



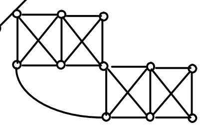
9.



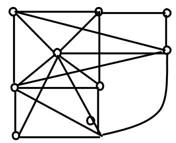
10.



11.



12.



7.12. При каких n существуют планарные неориентированный графы без петель с n вершинами и $n(n-1)/2$ ребрами?

7.13. Сколько существует непланарных неизоморфных графов с:

a. **6** вершинами и **10** ребрами?

b. **9** вершинами и **12** ребрами, не имеющих петель?
c. **10** вершинами и **16** рёбрами, без соседних вершин степени 5?
d. **9** вершинами и **18** рёбрами без полных подграфов с 4 вершинами?

7.3. СВЯЗНОСТЬ И ЦИКЛЫ В ГРАФАХ

Последовательность $W = v_1, \dots, v_n$ вершин графа $G = (V, U)$ образует путь в этом графе, если $\forall i = 1, \dots, n-1 \ ((v_i, v_{i+1}) \in U)$.

Вершина v_1 называется началом, а v_n — концом пути W.
Путь, у которого начало и конец совпадают, называется циклом.
Граф G называется связным, если любые две его вершины соединяет некоторый путь.

7.14. Показать, что у всякого неориентированного связного графа без петель имеются две вершины, которые имеют одинаковые степени.

7.15. Неориентированный граф без петель содержит 8 вершин и 22 ребра. Является ли такой граф связным?

7.16. Для каких n существуют связные неориентированные связные графы без петель с n вершинами, степени всех вершин которых равны 3?

7.17. Доказать, что если в неориентированном графе без петель $G = (V, U)$ выполнено условие $\forall a, b \in V \ (d(a) + d(b) \geq |V|)$, то:

a) G является связным графом; **b)** G не имеет вершин степени 1.

7.18. Сколько существует неориентированных связных графов с 6 вершинами и 10 ребрами?

7.19. Сколько существует неизоморфных связных графов без петель с 12 вершинами и 18 рёбрами, содержащими 2 четырёхугольника?

Связный неориентированный граф называется деревом, если он не содержит циклов. Корневым деревом называется такое представление дерева, в котором выделена вершина, называемая корнем, а остальные вершины располагаются по ярусам, определяемым длинами путей, ведущих из корня в эти вершины.

Всякое дерево с n вершинами содержит $n-1$ ребро.

7.20. Сколько ребер нужно удалить из связного неориентированного графа с n вершинами и m ребрами, чтобы получить дерево?

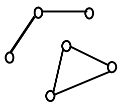
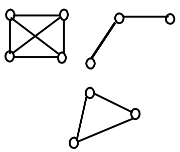
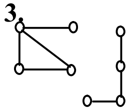
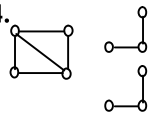
7.21. Пусть дерево G является корневым. Из m_1 вершин этого дерева в следующий ярус ведет одно ребро, из m_2 вершин — в следующий ярус ведет два ребра, . . . , из m_k вершин в следующий ярус ведет – k ребер.

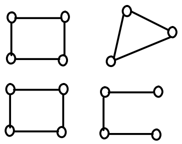
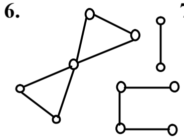
Чему равно число m_0 – висячих вершин, из которых в следующий ярус не ведет ни одно ребро?

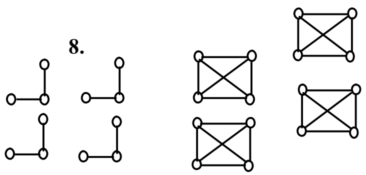
7.22. Определить, сколько существует:

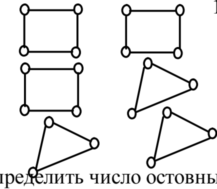
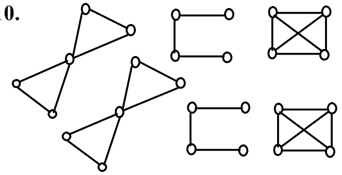
a) различных деревьев с вершинами $a_1, \dots, a_6$;
b) неизоморфных деревьев с 7 вершинами, которые не содержат вершин степени больше 3;
c) неизоморфных деревьев с 8 и 9 вершинами.
d). деревьев с 9 вершинами, не содержащих элементарных путей длины больше **5**.
e). деревьев с 15 вершинами содержащих элементарный путь длины **9**.

7.23. Сколькими способами граф можно сделать связным, добавляя минимальное число ребер?

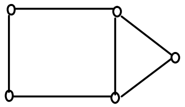
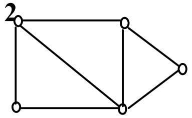
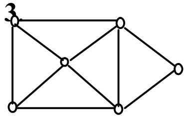
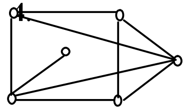
1.

2.

3.

4.


5.

6.

7.

8.


9.

10.


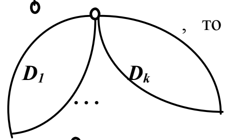
7.24. Определить число остовных деревьев для следующих графов:

1.

2

3

4


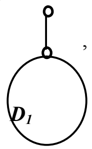
С точностью до изоморфизма корневые деревья можно представлять двоичными последовательностями. Двоичный код $U(D)$ дерева D определяется по следующим правилам:

1. Если D =

, то $U(D) = \mathbf{01}$.

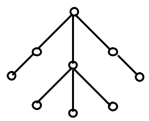
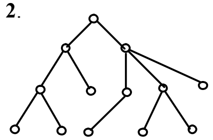
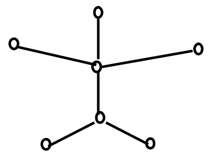
2. Если D =


, то $U(D) = U(D_1) \dots U(D_k)$.

3. Если D =


, то $U(D) = 0\, U(D_1)\, 1$.

7.25. Построить двоичные коды деревьев:

1.

2.

3.


7.26. Восстановить деревья по их кодам:

a) 0100101100011011011; **c)** 0000111010011011;
b) 0010011011100101101; **d)** 0100010101101101.

7.27. Показать, что если $\bar{\alpha} = \sigma_1 \dots \sigma_n$ — код дерева, то:

a) n — четное число и в дереве $n/2$ ребер;

b) число нулей в $\bar{\alpha}$ равно $n/2$.

7.27. Показать, что $\bar{\alpha} = \sigma_1 \dots \sigma_n$ является кодом дерева тогда и только тогда, когда:

1) n четное;

2) число нулей в $\bar{\alpha}$ равно $n/2$;

3) $\forall\, i \le n$ (число нулей в последовательности $\sigma_1 \ldots \sigma_i$ не меньше числа единиц в $\sigma_1 \ldots \sigma_i$).

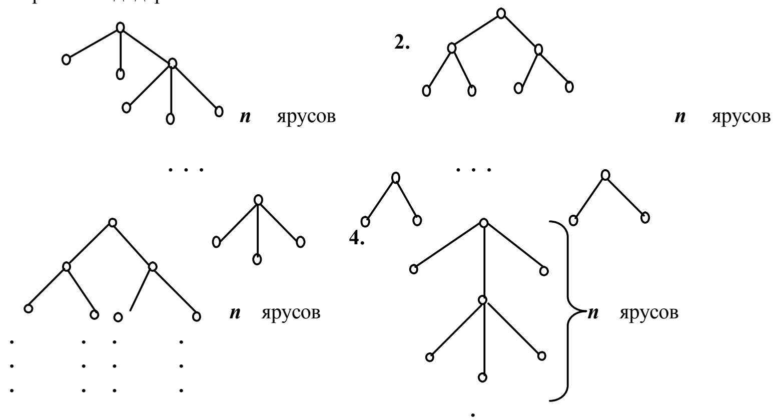
7.29. Насыщенным бинарным деревом называется корневое дерево, всякая вершина которого имеет не более двух потомков в следующем ярусе, а ярусы заполнены последовательно сверху вниз и в каждом ярусе слева — направо.

Перенумеруем вершины насыщенного бинарного дерева числами ***1***, ***2*** . . . в порядке возрастания глубины ярусов, а в каждом ярусе слева — направо.

Определить номера вершин потомков вершины с номером ***n*** .

7.30. Существует ли дерево с 9 вершинами, содержащее 2 вершины степени 5?

7.31. Построить код дерева:

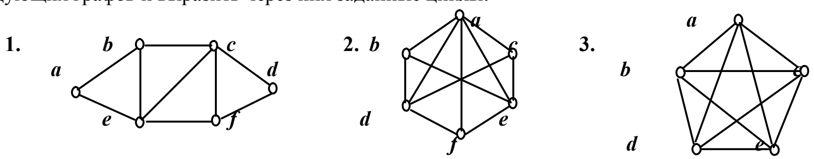


7.32. Изоморфны ли деревья, имеющие коды:
a) 00101101000111; 00100100101111; **b)** 01001011; 00110101;
c) 001011001011; 010010110101; **d)** 0100101011; 0001010111;
e) 000101101011; 000101101101 .

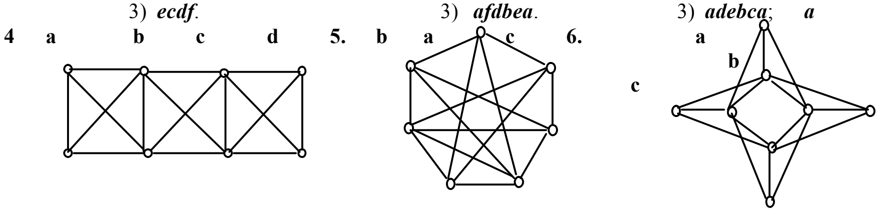
7.33. Сколько простых циклов содержится в полном графе с ***n*** вершинами?

7.34. Показать, что в графе, представляющем единичный n-мерный куб, не существует циклов нечетной длины.

7.35. Построить фундаментальные множества циклов (по возможности минимальной длины) для следующих графов и выразить через них заданные циклы:



Циклы: 1) ***bcdfeb***; 1) ***acefdba***; 1) ***abcdea***;
2) ***abcdfea***; 2) ***acdfeba***; 2) ***acedba***;
3) ***ecdf***. 3) ***afdbea***. 3) ***adebca***;



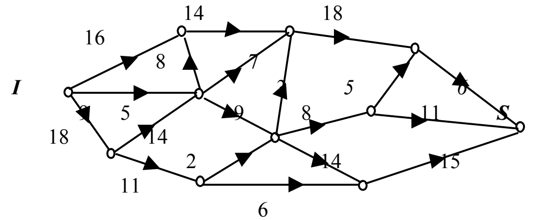
d **e** **d** **e** **f**
g

e **f** **g** **h**
f **g** **h**

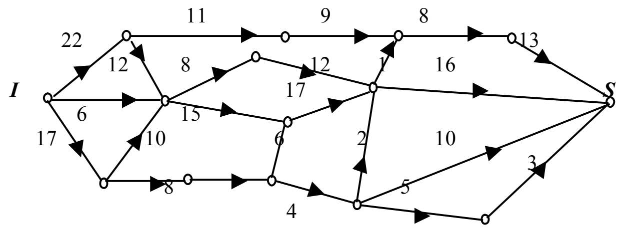
Циклы: 1) ***abcdhgfea***; 1) ***acegfdba;*** 1) ***aegdcba***
2) ***afchgba***; 2) ***abcfdega;*** 2) ***abdhgfea;***
3) ***beafgdhcb***. 3) ***bedcfab;*** 3) ***cbfghdc;***

7.36. Построить полные потоки для следующих транспортных сетей::

a.



b.



7.37. Для сетей, приведенных в задании **7.33**, построить максимальные потоки. Найти такие сечения в этих сетях, пропускная способность которых совпадает с величиной максимального потока в них.

7.38. Построить пример связного графа, хроматическое число которого равно 4.

7.39. Хроматическое число графа равно n. Как изменится значение хроматического числа этого графа если из него удалить одно ребро (одну вершину)?

7.40. Является ли связным граф, имеющий n вершин, хроматические число которого равно n – 1?

7.41 Хроматические числа двух графов равны n и m. Оцените значение хроматического числа объединения и пересечения этих графов?

7.42 Привести пример неориентированного графа, хроматическое число которого равно 4, не содержащего полных подграфов с четырьмя вершинами.

8.КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ

8.1.ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ЗАДАНИЕ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

Алфавитом называется всякое множество, элементы которого называются символами этого алфавита. Словом в алфавите ***A*** называется всякая конечная (том числе пустая) последовательность символов из ***A***. Множество всех слов в алфавите ***A*** обозначается как ***A****.

Конечным автоматом называется пятерка (A, B, Q, φ, ψ) , где ***A*** — входной, ***B*** — выходной алфавиты, а ***Q*** — множество состояний автомата. При этом множества ***A*** , ***B*** и ***Q*** являются конечными . φ: $A \times Q \to Q$ и ψ: $A \times Q \to B$ — это функции перехода и выхода. Они задают функционирование автомата во времени.

Табличное задание автомата $A = (A, B, Q, \varphi, \psi)$, где $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $Q = \{q_1, \dots, q_m\}$, состоит из двух таблиц, представляющих функции φ и ψ:

φ	q_1	…	q_j	…	q_m
a_1			.		
…			.		
a_i	.	…	$\varphi(a_i,q_j)$	…	.
…			.		
a_n			.		

ψ	q_1	…	q_j	…	q_m
a_1			.		
…			.		
a_i	.	…	$\psi(a_i,q_j)$	…	.
…			.		
a_n			.		

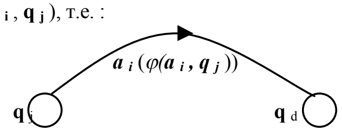
8.1. Определить число различных конечных автоматов (***КА***), которые можно задать для множеств $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, $Q = \{q_1, \dots, q_r\}$.

Всякий конечный автомат работает в дискретном времени. Это означает, что в моменты времени $t_0, t_0+1, \dots, t_0+i, \dots$ вход A поступают символы входного алфавита. Если в момент времени t на вход A поступает символ a_i и автомат находится в состоянии q_j, то в этот же момент времени автомат A подает на выход символ $\psi(a_i, q_j)$ и переходит в состояние $\varphi(a_i, q_j)$, в котором находится в момент времени $t+1$.

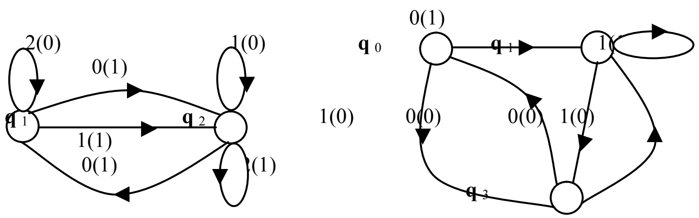
Работу автомата можно предсталять выражениями вида

$a_i q_j \to \psi(a_i, q_j)\, \varphi(a_i, q_j)$, где $a_i \in A$, $q_j \in B$, называемых командами.

Задание конечного автомата A в виде диаграммы переходов (или диаграммы Мура) получается изображением на плоскости r кругов, помеченных символами состояний Q. Из каждого круга выходит n ориентированных ребер, помеченных символами входного алфавита. Ребро, выходящее из состояния q_j, помеченное символом a_i, помечается также выходным символом $\psi(a_i, q_j)$, записываемым в скобках, и ведет в состояние $q_d = \varphi(a_i, q_j)$, т.е. :



8.2. Построить табличные задания автоматов, представленных диаграммами переходов:



8.3. Построить диаграммы переходов для конечных автоматов, заданных таблично:

a.

φ	1	2	3
0	1	1	2
1	2	2	3
2	3	1	2

ψ	1	2	3
0	0	1	0
1	1	0	1
2	1	1	0

b.

φ	1	2	3	4	5
0	2	1	2	3	5
1	1	1	4	2	3
2	2	3	2	3	4
3	4	3	4	4	1

ψ	1	2	3	4	5
0	a	b	a	b	c
1	b	b	b	a	c
2	c	a	b	c	a
3	d	a	d	c	b

8.4. Построить диаграммы переходов для конечных автоматов, описывающих функционирование следующих устройств:

a) автоматической продажи билетов стоимостью в **50** копеек, если на его вход можно помещать монеты достоинством в **5**, **10**, **15**, **20** копеек;

b) междугороднего телефона-автомата, в который одновременно помещается не более **5** монет достоинством в **15** копеек;

c) самолета, жизненный цикл которого состоит в прохождении состояний стоянки, взлета, полета, посадки и т.д;

d) пассажирского поезда.

8.2. ФУНКЦИИ, ВЫЧИСЛЯЕМЫЕ КОНЕЧНЫМИ АВТОМАТАМИ

Если $\alpha, \beta \in A^*$, то запись α, β обозначает сцепление слов α и β.

Если A и B — алфавиты, то $f: A \to B$ называется словарной функцией.

Для каждого состояния $q \in Q$ конечного автомата A определим словарную функцию f^q_A, вычисляемую A из состояния q как начального состояния, с помощью следующих соотношений:

$$\forall\, a \in A(\, g(a) = \varphi(a,q));$$

$$\forall\, a \in A,\, \beta \in A^*(\, g(\beta a) = \varphi(a,g(\beta)));$$

$$\forall\, a \in A(\, f^q_A(a) = \psi(a,q));$$

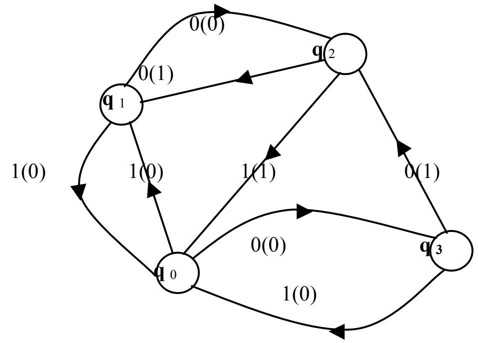
$$\forall\, a \in A,\, \beta \in A^*(\, f^q_A(\beta a) = f^q_A(\beta)\psi(a,g(\beta)))$$

То есть, если $\alpha = a_{i1}, \dots, a_{ik}$ и в момент времени t автомат A находится в состоянии q, а в моменты времени $t, t+1, \dots, t+k-1$ на его вход поступают символы слова α в порядке слева направо, то в эти же моменты времени на выходе A появляются выходные символы, образующие некоторое выходное слово β. Для этого слова полагается, что $f^q_A(\alpha) = \beta$.

8.5. Построить диаграмму переходов конечного автомата с входным алфавитом {**a**, **b**, **c**, **d**}, который перерабатывает входные слова заменяя на символ **a** каждое второе вхождение символов **b** и **c** и каждое третье вхождения символа **d.**

8.6. Определить значения $f^{q_1}_A$(**100101111011**) для автоматов в заданиях **2** и **3**.

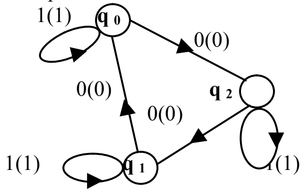
8.7. Определить $f^{q_1}_A(\alpha)$, где α = 1010, 00101101, 100101011, 11100110110100 для следующего автомата:



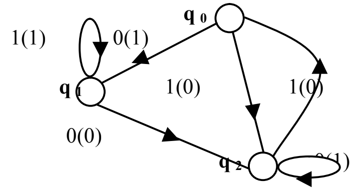
Состояния q_i и q_j автомата A называются неотличимыми, если $f_A^{q_i} = f_A^{q_j}$.

8.8. Определить отличимые и неотличимые состояния следующих автоматов:

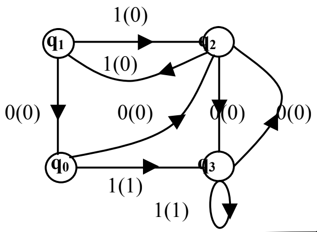
1.



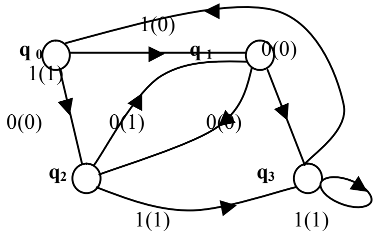
2.



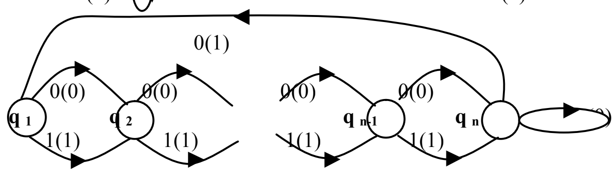
3.



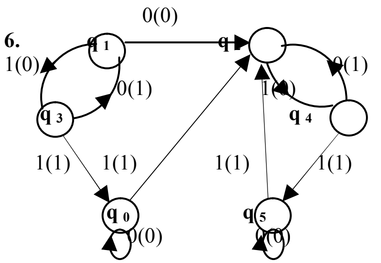
4.



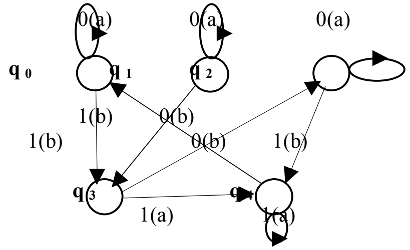
5.



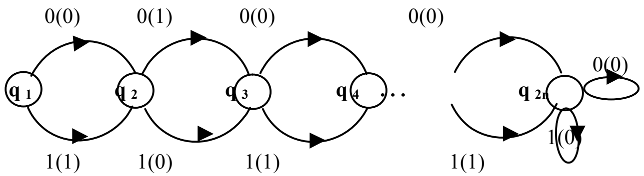
6.



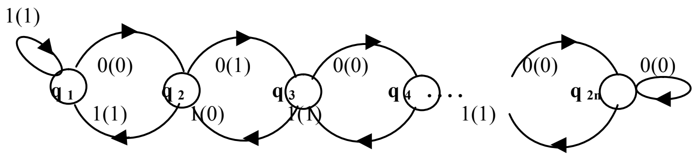
7.



8.



9.



8.9. Показать, что если никакие два состояния автомата, имеющего n состояний, не являются отличимыми на словах длины **1**, то все состояния такого автомата являются неотличимыми.

8.10. Построить минимальные автоматы для автоматов из задания **8.7**.

Если n — натуральное число, то запись $\overline{n}$ обозначает слово, получаемое инвертированием двоичной записи этого числа.

Функция f: $\mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$ вычисляется автоматом A из состояния q_i если: $\forall\, n_1, \ldots, n_k\, (f(n_1, \ldots, n_k) = m$ тогда и только тогда, когда $f_A^{q_i}(\overline{n_1,\ldots,n_k}) = \overline{m}$.

Здесь $\overline{n_1,\ldots,n_k}$ — обозначает слово, получаемое инвертированием слова, символами которого являются наборы значений одноименных разрядов двоичных представлений чисел n_1, . . . , n_k. При этом более короткие записи чисел дополняются незначащими нулями.

8.11. Построить конечные автоматы, вычисляющие следующие функции:

a) $f(\overline{n}) = \overline{2n}$;
b) $f(\overline{n}) = \overline{2n+7}$;
c) $f(\overline{n}) = \overline{n-1}$;
d) $f(\overline{n}) = \overline{2n+7}$;
e) $f(\overline{n}) = \overline{3n-7}$;
f) $f(\overline{n}) = \overline{kn}$, k — натуральное число;
g) $f(\overline{n}, \overline{m}) = \overline{m-kn}$, k — целое число.
h) $f(\overline{n}, \overline{m}) = \overline{n+m-3}$;
i) $f(\overline{n}, \overline{m}) = \overline{2n+3m}$;
j) $f(\overline{n}, \overline{m}) = \overline{n-m}$;
k) $f(\overline{n}, \overline{m}) = \overline{n-4m+3}$;
l) $f(\overline{n}, \overline{m}) = \overline{n+2m-5}$;
m) $f(\overline{n}, \overline{m}) = \overline{n-2m}$;

(Здесь предполагается, что если значение соответствующей функции оказывается меньше нуля, то значение, вычисляемое автоматом, может быть произвольным).

Для каждого из состояний создаваемых автоматов указать функцию, вычисляемую из этого состояния.

8.12. Построить диаграммы перехода конечных автоматов с входным и выходным алфавитами {**a**, **b**, **c**} вычисляющих следующие словарные функции:

a) $f(\alpha) = \beta \Leftrightarrow$ слово β получается из слова α заменой четных вхождений каждого символа на циклически следующий за ним символ алфавита.

b) $f(\alpha) = \beta \Leftrightarrow$ слово β получается из слова α заменой всякого вхождения в α символа **c** на символ **a** , если этому символу в α предшествует чётное число символов **a** и нечётное число символов **b**.

c) $f(\alpha) = \beta \Leftrightarrow$ слово β получается из слова α заменой всех вхождений символа **a** на символ **c**, после всякого четного по порядку вхождения в α слова **abba** до следующего вхождения этого же слова.

d. $f(\alpha) = \beta \Leftrightarrow$ слово β получается из слова α заменой всякого нечётного вхождения в α символа **a** на символ **b** , если ему предшествует чётное число слов **aa** и нечётное число слов **bb**.

8.13. Пусть f вычисляется автоматом с n отличимыми состояниями, а g вычисляется автоматом с m отличимыми состояниями.

a) Сколько состояний может иметь автомат, вычисляющий суперпозицию функций $g \circ f$?

b) Привести примеры автоматов, для которых достигаются верхняя и нижняя оценки числа состояний.

Автомат $z = (A, A, A, \varphi, \psi)$, $A = \{\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ с фиксированным начальным состоянием $\mathbf{a}_0$, функционирование которого задается следующими уравнениями:

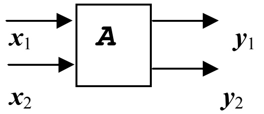
$$\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{a}_0;$$
$$\mathbf{q}(t+1) = \mathbf{x}(t);$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{q}(t)$$

называется автоматом задержки.

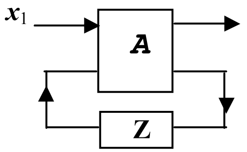
8.14. Пусть конечный автомат A имеет n попарно отличимых состояний.

Сколько состояний может иметь автомат, полученный из A с помощью операции обратной связи?

(То есть, если *A* имеет вид:



то из него получается новый автомат, имеющий структуру:



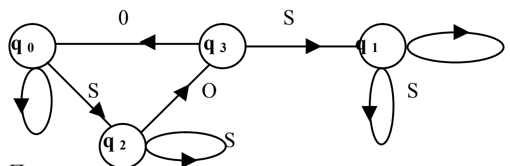
Здесь $\boxed{Z}$ — автомат задержки входного символа на один шаг.

8.3. РАСПОЗНАВАНИЕ СЛОВ КОНЕЧНЫМИ АВТОМАТАМИ

С помощью конечных автоматов можно распознавать слова из подмножеств множества всех слов входного алфавита.

Автомат (A , B , Q , φ , ψ) с выделенным начальным состоянием q_0 и множеством $Q_1 \subseteq Q$ состояний, называемых диагностирующими состояниями, распознаёт множество слов $B \subseteq A^*$ тогда и только тогда, когда, перерабатывая произвольное слово $\alpha \in A^*$ из начального состояния q_0, автомат заканчивает свою работу в состоянии из Q_1 тогда и только тогда, когда $\alpha \in B$.

Пример. Построить диаграмму переходов конечного автомата с начальным состоянием q_0, диагностирующим состоянием q_1 и входным алфавитом {*0* , *S*}, который распознает слова вида $\alpha_1 SOS \alpha_2$. Здесь α_1 и α_2 — произвольные слова в алфавит {*0*, *S*}. Приводимый ниже автомат является решением этой задачи:



8.15. Построить автомат с диагностирующим состоянием q_1, распознающий слова вида $\alpha_1 \beta \alpha_2$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in \{0, 1\}^*$ и

a) β= *0101*;
b) β= *1001*;
c) β= *10101*;
d) β= *0100*;
e) β= *1010011011*;
f) β= *0011010101* .

8.16. Построить автомат с диагностирующим состоянием q_1, распознающий слова вида $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \alpha_3$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \{0, 1\}^*$ и:

a) β_1 = *010* , β_2 = *110*;
b) β_1 = *000* , β_2 = *1101*;
c) β_1 = *0011* , β_2 = *10010*;
d) β_1 =*11001* , β_2 = *010*;
e) β_1 = *011* , β_2 = *1010*;
f) β_1 = *0111* , β_2 = *10101.*

8.17 Построить диаграммы переходов конечных автоматов, распознающих слова вида $\alpha_1 \beta \alpha_2$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in \{0, 1\}^*$ и $\beta \in B$:

a) B = {*001*, *0011* , *0111*};
b) B = {*001* , *1101*, *1001*};
c) B = {*001* , *1101* ,*1100*};
d) B = {*1101*, *0010* , *111*};
e) B = {*0011* , *1101*, *01100*};
f) B = {*1101*, *001*, *0000*, *1101*}.

8.18. Построить автоматы, распознающие следующие множества слов в алфавите: {**0**,**1**,**S**}.
(здесь запись {*A*}* обозначает любое слово в алфавите *A*, а запись [*A*]*, используется для обозначения непустого слова в алфавите *A*).

a) A_1 = 1*S*O*;
b) A_2 = {0,1}* S {0,S }* [11, 0]*;
c) A_3 = {{100,11}*, S0 , 010}*;
d) A_4 = 0*S{0,1}*S*{0,11,S11}* [1,S]*;
e) $A_3 \cup A_4$;
f) 1*{0,1}*S{0,1}*S*(01)*;
g) A_5= 0*1*{S,1}*S*{S,1}*[1,0]*;
h) A_6 ={0,S}*S{00,1}*S*[01]* S*[S,1]*[1,0]*;
i) $A_1 \cup A_2$;
j) [1,S]*[S][0,1]*[1,S]*;
k) (010)*S*1*0*{0,1}*;
l) {(01)*, (110)*,{0,S}*,1}*;
m) $A_1 \cup A_3$;
n) 0*1*{0,1}*S*{S,0}*{1,0}*.
o) $A_5 \cup A_6$.
p) $A_5 \setminus A_6$.

8.19. Построить автоматы, распознающие следующие множества слов в алфавите: {**0**,**1**,**S**} вида $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \alpha_3$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in$ {**0** , **1**, **S**}* и:

a) $\beta_1 \in$ 1*0*S*{0,1}*S*; $\beta_2 \in$ S*{0,1}*S*(01)*;
b) $\beta_1 \in$ {S,1}*{0, S}*{0,1}*(S0)*; $\beta_2 \in$ {S, 0}*{0,1}*(01)*;

8.20. Построить диаграммы переходов конечных автоматов, распознающих следующие множества слов в алфавите {**0**, **1**}:

a) {α | количества нулей и единиц в α имеют разные четности};
b) {α | α не содержит последовательностей подряд идущих нулей четной длины};
c) {α | α заканчивается последовательностью значений **1** нечетной длины};
d) {α | все последовательности подряд идущих одинаковых значений в α имеют длины одной и той же четности};
e) {α | после каждой последовательности нулей в α идет последовательность единиц с другим остатком отделения длины последовательности на 3}.
f) {α | расстояние между любыми двумя последовательными вхождениями одинаковых символов в α не превышает 3}.
g) {α | число локальных максимумов в α не превышает 4}.

8.21. Построить диаграммы переходов конечных автоматов, распознающих такие слова в алфавите {0, 1}, которые содержат в качестве подслов все слова следующих множеств:

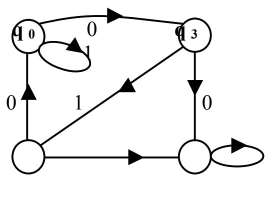
a) {001, 0101};
b) {01010, 110, 1010};
c) {001, 011, 1110};
d) {1001,011,11011}.

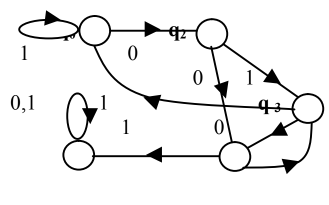
Предполагается, что вхождения слов множеств в распознаваемые слова могут пересекаться.

8.22. Решить задачу **8.21**. в предположении, что вхождения подслов заданных множеств не должны пересекаться.

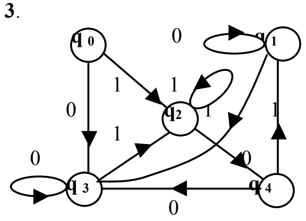
8.23. Пусть **B** – конечное множество слов в алфавите {0, 1}. $\alpha_1, \alpha_2 \in$ **B** и α_1 является частью α_2. Показать что: α_2 можно не учитывать в задаче **8.16**, α_1 можно не учитывать в задаче **8.21**, α_1 и α_2 следует учитывать в задаче **8.22**.

8.24. Составить выражение, описывающее структуру множества слов, распознаваемых автоматами для начального состояния q_0 и диагностирующего состояния q_1:

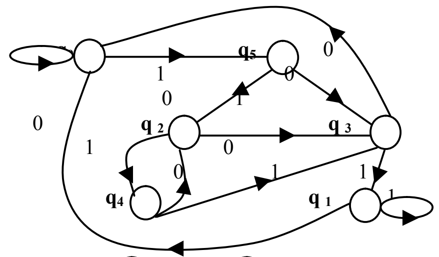
1.


2.


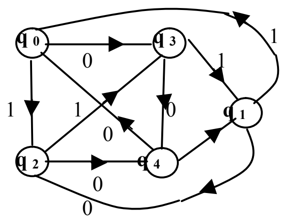
3.



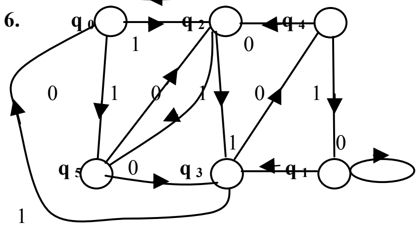
4.



5.



6.



8.25. Пусть автоматы $A_1=(A, B, Q_1, \varphi_1, \psi_1)$ и $A_2=(A, B, Q_2, \varphi_2, \psi_2)$ из начальных состояний q^1 и q^2 с помощью множеств диагностирующих состояний $Q_1{}^*$ и $Q_2{}^*$ соответственно распознают множества слов B_1 и B_2.

Построить автоматы, распознающие следующие множества слов:

a) $B_1 \cup B_2$;

b) $B_1 \cap B_2$;

c) $B_1 \setminus B_2$;

d) B_1^*. (Здесь **B*** - множество слов, являющихся сцеплениями произвольных конечных последоватльностей слов из множества **B**).

8.26. Для каких из перечисленных множеств слов не существует распознающих конечных автоматов с входным и выходным алфавитами $\{0, 1\}$:

a) число единиц в слове α больше числа нулей в этом слове;

b) в слове α все последовательности подряд идущих единиц имеют разные длины;

c) слово α является кодом дерева;

d) число нулей в слове α равно числу единиц;

e) слово α является записью простого числа;

f) α содержит два одинаковых подслова длины больше, чем **10**.

g) в слове α всякое чётное вхождение последовательности подряд идущих 0 встречается в α ровно один раз.

h) слово α не является симметричным**.**

8.4. АВТОМАТНЫЕ СХЕМЫ

Если для $\mathbf{A}=(A, B, Q, \varphi, \psi)$ задано начальное состояние (обычно берется q_0) , то функционирование $\mathbf{A}$ может быть описано с помощью следующих канонических уравнений:

$\mathbf{q}(t_0) = q_0$;

$\mathbf{q}(t+1) = \varphi(\mathbf{x}(t), \mathbf{q}(t))$;

$\mathbf{y}(t) = \psi(\mathbf{x}(t), \mathbf{q}(t))$.

Здесь $\mathbf{q}(t_0)$ — состояние $\mathbf{A}$ в начальный момент времени t_0, $\mathbf{q}(t)$ — состояние $\mathbf{A}$ в момент t, а $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ — символы на входе и выходе $\mathbf{A}$ в момент t.

Пусть $A=\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$, $B=\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r\}$, $Q=\{\mathbf{q}_0, \ldots, \mathbf{q}_n\}$. Закодируем символы A, B, Q двоичными наборами длины:

$\mathbf{p} =]\log_2 m[$, $\mathbf{d} =]\log_2 r[$, $\mathbf{v} =]\log_2(n+1)[$ соответственно, так чтобы начальное состояние кодировалось набором (**0** , . . . **0**). Тогда канонические уравнения для A можно переписать в виде:

$\mathbf{q}_1(t_0) = \mathbf{0}$;

. . . . . .

$\mathbf{q}_v(t_0) = \mathbf{0}$;

$\mathbf{q}_1(t+1) = \varphi_1(\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_p(t), \mathbf{q}_1(t), \ldots, \mathbf{q}_v(t))$;

. . . . . .

$\mathbf{q}_v(t+1) = \varphi_v(\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_p(t), \mathbf{q}_1(t), \ldots, \mathbf{q}_v(t))$;

$\mathbf{y}_1(t) = \psi_1(\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_p(t), \mathbf{q}_1(t), \ldots, \mathbf{q}_v(t))$;

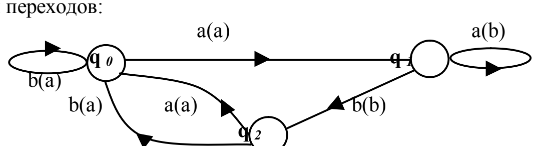
. . . . . .

$\mathbf{y}_d(t) = \psi_d(\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_p(t), \mathbf{q}_1(t), \ldots, \mathbf{q}_v(t))$.

Здесь $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_p(t), \mathbf{y}_1(t), \ldots, \mathbf{y}_d(t), \mathbf{q}_1(t), \ldots, \mathbf{q}_v(t)$ — значения компонент наборов, кодирующих входной и выходной символы и состояние автомата A в момент t .

Поскольку $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_p(t), \mathbf{y}_1(t), \ldots, \mathbf{y}_d(t), \mathbf{q}_1(t), \ldots, \mathbf{q}_v(t)$ принимают значения из множества $\mathbf{E}_2$, то $\varphi_1, \ldots, \varphi_v, \psi_1, \ldots, \psi_d$ — это функции алгебры логики, которые могут быть записаны в виде формул, составленных из элементарных функций алгебры логики.

Пример. Построим канонические уравнения для конечного автомата, заданного следующей диаграммой переходов:

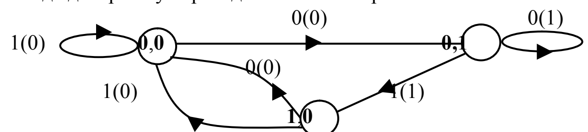


То есть $\mathbf{A}=(A, B, Q, \varphi, \psi)$, где $A = B = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ и $Q = \{\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$.

1. Кодируем элементы A , B и множества Q наборами, составленными из нулей и единиц:

$\mathbf{a} \sim (\mathbf{0})$, $\mathbf{b} \sim (\mathbf{1})$, $\mathbf{q}_0 \sim (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, $\mathbf{q}_1 \sim (\mathbf{0}, \mathbf{1})$, $\mathbf{q}_2 \sim (\mathbf{1}, \mathbf{0})$.

Тогда диаграмму переходов $\mathbf{A}$ можно переписать так:



2. Канонические уравнения для приведенной диаграммы имеют вид:

$\mathbf{q}_1(t_0) = \mathbf{0}$;

$\mathbf{q}_2(t_0) = \mathbf{0}$;

$\mathbf{q}_1(t+1) = \varphi_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{q}_1(t), \mathbf{q}_2(t))$;

$\mathbf{q}_2(t+1) = \varphi_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{q}_1(t), \mathbf{q}_2(t))$;

$\mathbf{y}(t) = \psi(\mathbf{x}(t), \mathbf{q}_1(t), \mathbf{q}_2(t))$.

Здесь $\mathbf{q}_1(t)$ определяет значение первой компоненты, а $\mathbf{q}_2(t)$ — значение второй компоненты пары, кодирующей состояния исходного автомата.

3. Так как $\varphi_1, \varphi_2, \psi \in \mathbf{P}_2$ и отличны от тождественного нуля, то они могут быть записаны в виде совершенных д.н.ф. этих функций:

$$\psi(\mathbf{x}(t), \mathbf{q}_1(t), \mathbf{q}_2(t)) = \bigvee_{\psi(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=1} x^{\sigma_1} \& q_1^{\sigma_1} \& q_2^{\sigma_2};$$

$$\varphi_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{q}_1(t), \mathbf{q}_2(t)) = \bigvee_{\varphi_1(\sigma 1,\sigma 2,\sigma 3)=1} x^{\sigma 1} \& q_1^{\sigma 1} \& q_2^{\sigma 2};$$

$$\varphi_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{q}_1(t), \mathbf{q}_2(t)) = \bigvee_{\varphi_2(\sigma 1,\sigma 2,\sigma 3)=1} x^{\sigma 1} \& q_1^{\sigma 1} \& q_2^{\sigma 2}.$$

Поэтому $\psi(\mathbf{x}(t), \mathbf{q}_1(t), \mathbf{q}_2(t)) = \overline{x(t)} \& \overline{q_1(t)} \& q_2(t) \vee x(t) \& \overline{q_1(t)} \& q_2(t)$, так как выходной символ в момент времени t равен $\mathbf{1}$ тогда и только тогда, когда имеет место один из случаев:

a) $\mathbf{x}(t)=0$, $\mathbf{q}_1(t)=0$, $\mathbf{q}_2(t)=1$;
b) $\mathbf{x}(t)=1$, $\mathbf{q}_1(t)=0$, $\mathbf{q}_2(t)=1$.

Аналогично можно выписать формулы, представляющие φ_1 и φ_2:

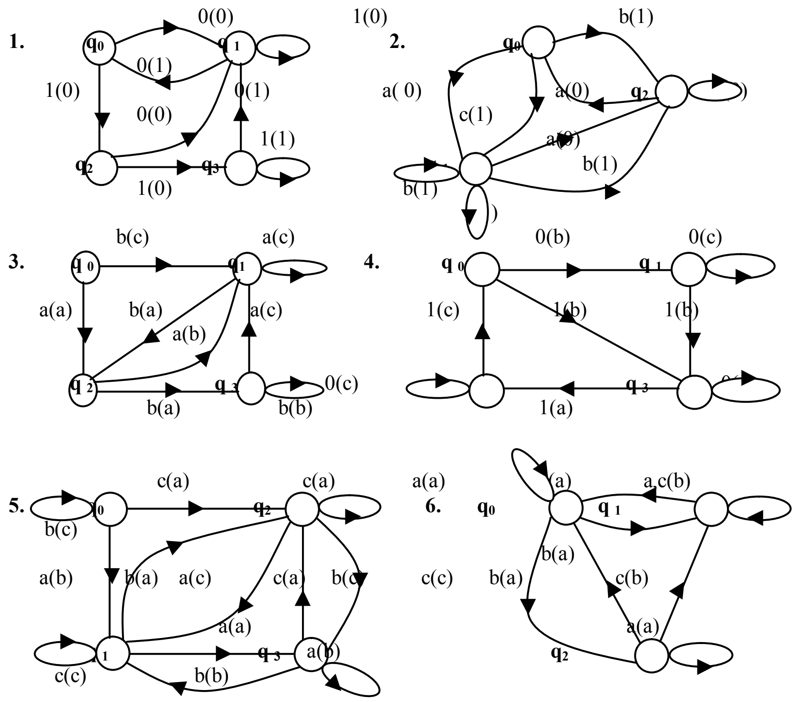
$\varphi_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{q}_1(t), \mathbf{q}_2(t)) = x(t)\&\overline{q_1(t)}\&q_2(t)$

$\varphi_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{q}_1(t), \mathbf{q}_2(t)) = \overline{x(t)}\&\overline{q_1(t)}\&\overline{q_2(t)} \vee \overline{x(t)}\&\overline{q_1(t)}\&q_2(t)$.

Остается подставить полученное выражение φ_1, φ_2 и ψ в канонические уравнения для $\boldsymbol{A}$.

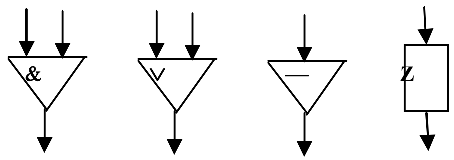
8.27. Построить канонические уравнения для автоматов из заданий **2** и **3** .

8.28. Построить канонические уравнения для автоматов:



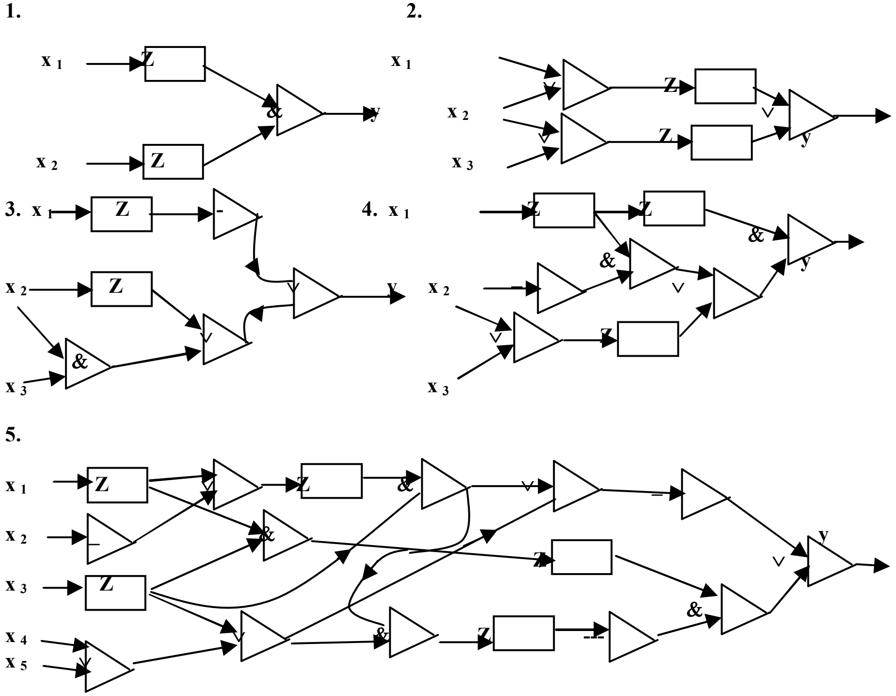
Автоматные схемы составляются из экземпляров простейших автоматов конъюнкции, дизъюнкции, отрицания и задержки. При этом запрещается существование циклов, не содержащих элементов задержки.

На схемах элементарные автоматы изображаются как:



8.29. Построить автоматные схемы по каноническим уравнениям автоматов из задания **8.21** .

8.30. Построить канонические уравнения для автоматов, задаваемых автоматными схемами:



8.31. Сколько состояний имеет автомат с входным и выходным алфавитами $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, значение последовательности выходных символов которого определяется уравнениями:

$$\mathbf{y}(t_0 + i) = \mathbf{q}(t_0 + i);\ i = 0,\dots,k-1;$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t-k);\ t > t_0 + k - 1.$$

Построить схему этого автомата.

9. АЛГОРИТМЫ И ВЫЧИСЛИМЫЕ ФУНКЦИИ

9.1. ЧАСТИЧНО РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ

Простейшими называются следующие числовые функции:

a) $\mathbf{O}(x) = \mathbf{0}$;
b) $\mathbf{S}(x) = x + \mathbf{1}$;
c) $I_n^m(x_1, \dots, x_n) = x_m,\ 1 \le m \le n$.

Множество всех функций, получаемых из простейших с помощью операции суперпозиции, называется множеством элементарных функций.

Функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_{n+1})$ получается из функций $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)$ и $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_{n+2})$ с помощью операции примитивной рекурсии, если справедливы соотношения:

$$\boldsymbol{f}(x_1, \dots x_n, \mathbf{0}) = \boldsymbol{g}(x_1, \dots, x_n);$$

$$\boldsymbol{f}(x_1, \dots x_n, y + 1) = \boldsymbol{h}(x_1, \dots x_n, y, \boldsymbol{f}(x_1, \dots x_n, y)).$$

Функция называется примитивно — рекурсивной, если она может быть получена из простейших функций с помощью конечного числа применения операций суперпозиции и примитивной рекурсии.

9.1. Показать примитивную рекурсивность следующих функций:

a) $\underline{sg}(x)$;

b) $sg(x)$;

c) $x+y$;

d) $x \times y$;

k) x^y;

e) $x \dot{-} y$;

f) max(x,y);

h) $mod(x, y)$;

i) min(x,y);

k) $div(x, y)$;

l) $]x/y[$;

m) $|x-y|$;

n) $]\log_2 x[$;

o) $[\log_2 x]$;

o) $]\sqrt{x}[$;

p) $[\sqrt{x}]$;

q) $f(x,y)=\begin{cases} x+y, & x \ge 10 \\ x \times y, & x \le y \wedge x < 10 \\ y, & \text{иначе} \end{cases}$

r) $\left[\sqrt[x]{y}\right]$

s) $]\log_y x[$;

t) $[\log_y x]$;

9.2. Функция $f(x_1, \dots x_n)$ — примитивно рекурсивная. Доказать примитивную рекурсивность следующих функций:

a) $\max\limits_{i=0,\dots,x_n} f(x_1, \dots x_{n-1}, i)$;

b) $\sum\limits_{i=0}^{x_n} f(x_1, \dots x_{n-1}, i)$;

c) $\prod\limits_{i=0}^{x_n} f(x_1, \dots x_{n-1}, i)$;

d) $\sum\limits_{\sigma_1 \le x_1, \dots, \sigma_n \le x_n} f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$.

9.3. Доказать примитивную рекурсивность следующих функций введением вспомогательной функции:

a) $nd(x)$ = количество делителей числа x;

b) $nsd(x)$ = число простых делителей числа x;

c) $nod(x, y)$ = наибольший общий делитель чисел x и y;

d) $deg(x, y)$ = максимальная степень числа y, на которую число x делится нацело, или 0.

e) $f(x)$ = сумма разрядов десятичного представления x;

f) $f(x)$ = число разрядов двоичной записи x, совпадающих с симметричными им разрядами;

g) $f(x)$ = сумме всех простых делителей числа x;

h) $f(x, y)$ = число делителей либо только x либо только y.

j) $f(x, y)$ = число разрядов, значения которых одинаковы для записей чисел x и y в десятичной системе;

i) $f(x, y)$ = сумма старших y разрядов десятичной записи x;

9.4. Основная теорема алгебры гласит, что всякое натуральное число $x > 1$ представляется в виде: $x = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$, где $p_1, p_2, \dots, p_n$ –все разные простые делители числа x.

Доказать, что следующие функции являются примитивно рекурсивными:

a) $f(x) = \max\limits_{x=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_n^{k_n}}(k_1, \dots, k_n, 1)$;

b) $f(x) = \max\limits_{x=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_n^{k_n}}(p_i^{k_i})$;

c) $f(x)$ = количеству различных значений k_i в разложении x на простые множители;

d) $simple(x, i)$ – простой делитель x с номером i или 0, если такого делителя нет;

e) $num(x, y)$ – номер масимального простого делителя x, не преаосходящего y;

f) $f(x) = \sum k_i$, где $x = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$;

g) $f(x)$ = сумма разных простых делителей x, для которых соответствующие значения k_i являются наибольшими;

h) $f(x)$ = число значений k_i, таких, что $k_{i-1} < k_i < k_{i+1}$.

i) $f(x) = p_1^{k_n} p_2^{k_{n-1}} \dots p_n^{k_1}$, где где $x = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$;

9.5. Доказать, что следующие функции являются примитивно рекурсивными:

a) $f(x)$ = число различных цифр десятичной записи числа x;

b) $f(x)$ = наименьшая из наиболее часто встречающихся цифр десятичной записи x;

c) $f(x)$ = сумма всех таких цифр десятичной записи числа x, которые встречаются в этой записи четное число раз;

d) $f(x)$ = ближайшее к x число, не превосходящее x и являющееся степенью простого числа;

e) $f(x)$ = ближайшее к x число, не превосходящее x, сумма цифр десятичной записи которого является простым числом;

f) $f(x)$ = длина максимальной монотонно неубывающей последовательности подряд идущих цифр десятичной записи числа x.

g) $f(x)$ = число, получаемое из десятичной записи x удалением первых вхождений каждой цифры или 0.

h) $f(x)$ = число вхождений в запись x последовательностей подряд идущих единиц максимальной длины.

i) $f(x)$ = сумма длин максимальных последовательностей одинаковых цифр в записи x.

9.6. Доказать, что следующие функции являются примитивно рекурсивными:

a) $f(x, y) = p_1^{d_1} \dots p_{\min(r,s)}^{d_{\min(r,s)}}$;

b) $f(x, y) = h_1^{k_1} \dots h_{\min(r,s)}^{k_{\min(r,s)}}$;

c) $f(x,y) = k_1^{h_1} \dots k_{\min(r,s)}^{h_{\min(r,s)}}$;

d) $f(x,y) = h_1^{k_{\min(r,s)}} \dots h_{\min(r,s)}^{k_1}$;

e) $f(x, y) = \max(p_1, h_1)^{k_1} \dots \max(p_{\min(r,s)}, h_{\min(r,s)})^{k_{\min(r,s)}}$.

f). $f(x, y)$ = **0** или минимальное значение k_i, которое входит в последовательность $\{k_1, \dots, k_r\}$ в четном числе групп одинаковых значений и входит в последовательность $\{d_1, \dots, d_s\}$ в хотя бы одну последовательность возрастающих значений;

g) $f(x, y)$ = количество последовательностей подряд идущих элементов в $k_1, \dots, k_r$ чётной длины, которые входят в последовательность $d_1, \dots, d_s$ без пересечений не более одного раза.

h) $f(x, y)$ = количество разных последовательностей в $k_1, \dots, k_r$, которые никогда не входят в $d_1, \dots, d_s$ два раза полряд в обратном порядке.

(Здесь предполагается, что для $x, y \le 1$ значения функций равны 0, а $x = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$, $y = h_1^{d_1} \dots h_s^{d_s}$

9.7. Показать примитивную рекурсивность функций:

a) $f(x, y)$ = самая длинная последовательность подряд идущих символов 10-ичной записи x, которая не содержит символов 0 и встречается в 10-ичной записи y или 0, если таких последовательностей нет;

b) $f(x, y)$ = число непересекающихся вхождений двоичного представления x в запись двоичного представления y;

c) $f(x, y)$ = число символов, которые встречаются одинаковое число раз в 10-ичных представлениях чисел x и y;

d) $f(x, y)$ = самая длинная последовательность подряд идущих совпадающих, одоименных разрядов двоичных представлений чисел x и y не начинающаяся с 0;

e) $f(x, y)$ - число разных симметричных последовательностей символов в x максимальной длины, входящих в запись y без пересечений не менее трёх раз.

f) $f(x, y)$ – первая слева-направо самая длинная подпоследовательность последоватлельности $k_1, \ldots, k_r$, которая входит в $k_1, \ldots, k_r$ только без пересечений и не содержится в $d_1, \ldots, d_s$ в инвертированной виде.

g) $f(x, y)$ – максимум расстояний между крайними вхождениями несимметричных последовательностей в $k_1, \ldots, k_r$, которые входят в $d_1, \ldots, d_s$ равноудалёно от концов.

9.8. Пусть функция $f(x, y)$ представляется следующей схемой:
$f(x, 0) = g(x)$;
$f(x, 1) = d(x)$;
$f(x, y+1) = h(x, f(x, y), f(x, y-1))$, где g, d, h — примитивно рекурсивные функции.
Доказать, что f также является примитивно рекурсивной функцией.

9.9. Доказать примитивную рекурсивность функции, определяемой схемой:
$f(x, 0) = g(x)$;
$f(x, 1) = d(x)$;
$f(x, y+1) = h(x, y-1, f(x, y-1))$, где g, d, h — примитивно рекурсивные функции.
Функция $f(x_1, \ldots, x_{n+1})$ получается из функции $g(x_1, \ldots, x_{n+1})$ помощью операции минимизации, если справедливо соотношение:

$$f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \mu t\,(g(x_1, \ldots, x_n, t) = x_{n+1}),$$

которое означает, что в качестве значения $f(x_1, \ldots, x_{n+1})$ берется такое наименьшее значение t, если оно существует, что $g(x_1, \ldots, t) = x_{n+1}$ и все значения $g(x_1, \ldots, i)$, $0 \le i \le t-1$, определены.

Множество функций, получаемых из простейших функций с помощью операций суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации, называется множеством частично рекурсивных функций.

Частично рекурсивные функции могут быть не всюду определенными.

9.10. Применить операцию минимизации к функциям:

a) $x + y$;	**d)** $]\log_2 x[$;
b) x / y;	**e)** x^y;
c) $x - y$;	**f)** $\max(x, y)$.

9.2. ПРОДУКЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

Пусть A и V — два алфавита, называемые соответственно основным алфавитом и алфавитом переменных.

Образцом называется всякое непустое слово из $(A \cup V)^*$. Применением образца t называется всякое слово из A^*, получаемое из t заменой всякого символа переменной в t на некоторое слово в основном алфавите. При этом все вхождения одной и той же переменной заменяются одинаково.

Если образец t содержит вхождения символов переменных $x_1, \ldots, x_k$, которые заменяются на слова $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ из A^*, то можно определить подстановку $\Theta = \dfrac{x_1, \ldots, x_k}{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}$ и обозначать результат замены символов переменных на соответствующие слова как $t\Theta$.

Множество всех применений образца t обозначается как U_t.

9.11. Построить алгоритм, который по произвольным образцам t_1 и t_2 определяет существование такой подстановки Θ, что:

$t_1\Theta = t_2\Theta$.

Обобщить алгоритм на случай произвольного конечного числа образцов $t_1 \ldots t_n$.

9.12. Существует ли алгоритм, который по произвольному образцу t и слову α в основном алфавите A определяет, является ли α применением t?

9.13. Существуют ли алгоритмы, которые для произвольных образцов t_1 и t_2 распознают следующие свойства:

a) $U_{t1} \subseteq U_{t2}$;

b) $U_{t1} \cap U_{t2} = \varnothing$;

Продукциями называются записи вида $\pi = \dfrac{t_1 \ldots t_n}{t_{n+1}}$ **(1)**, где $t_1, \ldots, t_{n+1}$ - образцы. Образцы $t_1, \ldots, t_n$ называются посылками, а t_{n+1} — заключением продукции.

Если $n = 0$, то продукция называется аксиомой. Продукция (**1**) может быть применена к словам $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ из A, если существует такая подстановка Θ, что $\forall i = 1, \ldots, n$ $(\alpha_i = t_i\Theta)$.

При этом слово $t_{n+1}\Theta$ называется результатом применения продукции π к словам $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Продукционной системой называется всякая система $\mathbf{P} = (A, V, \prod)$, где A и V — основной алфавит и алфавит переменных, а $\prod$ — некоторая совокупность продукций, посылки и заключения которой составлены из символов алфавитов A и V.

Выводом в продукционной системе $\mathbf{P}$ называется всякая последовательность слов в основном алфавите: $\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots$, в которой каждое слово является либо применением некоторой аксиомы, либо получается применением одной из продукций системы к словам вывода, предшествующим этому слову.

Слово α называется выводимым в системе продукций $\prod$, если существует вывод, который содержит α.

9.14. Существует ли алгоритм, который по произвольной продукции $\pi = \dfrac{t_1 \ldots t_n}{t_{n+1}}$ и словам в основнойм и вспомогательном алфавитах $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ устанавливает применимость продукции к этим словам.

9.15. Построить продукционную систему, в которой выводится множество всех таких слов в алфавите $\{0, 1\}$, которые образуют правильные записи натуральных чисел.

9.16. Построить выводы слов **100101001** и **1001110** в продукционной системе задачи **9.4.**

9.17. Построить продукционные системы, в которых выводятся следующие множества слов в алфавите $\{0, 1, S\}$:

a) двоичных кодов деревьев;

b) симметричных слов;

c) слов, в которых никакие два соседних символа не являются одинаковыми;

d) пар двоичных слов (α, β), таких что β является обращением α (т. е. $\beta = \alpha^{-1}$);

e) пар слов, в которых первое слово произвольное, а второе получается из первого удалением всех нулей;

f) пар слов (α, β), содержащих поровну единиц;

g) пар слов (α, β), содержащих поровну и нулей и единиц;

h) пар слов (α, β), таких что число единиц в α больше числа единиц в β;

i) $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha$ и β — двоичные последовательности, длины которых различаются не более чем в два раза$\}$;

j) Пар слов (α, β) равной длины.

k) Пар слов (α, β) из которых первое слово короче второго.

l) $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha$ произвольное, а β получается из сжатием всякой группы подряд идущих одинаковых символов в один такой символ$\}$;

m) пар слов (α, β), таких что α — произвольное, а β получается из α удвоением всякого нуля и сжатием всякой последовательности подряд идущих единиц в одну единицу;

n) $\{(\alpha , \beta) \mid \alpha$ получается из β сжатием всякой последовательности подряд идущих нулей в один ноль, а β получается из α сжатием всякой группы подряд идущих единиц в одну единицу $\}$;

o) $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha$ произвольное, а β составлено из нечетных по порядку групп единиц разделенных нулями $\}$;

p) $\{(\alpha , \beta, \gamma) \mid \alpha$ произвольное, а β и γ составлены соответственно из четных и нечетных по порядку групп нулей в α, разделенных единицами$\}$;

q) монотонных слева направо слов в алфавите $\{0, 1\}$;

r) немонотонных слева направо слов в алфавите $\{0, 1\}$.

9.18. Для продукционных систем задачи **9.6,** построить деревья вывода следующих слов:

a) 00101101, **000101100110101011**, **001011001011**;

b) 10001, **010011010010**, **01100111100110**;

c) (**1110** , **0111**), (**1010001**, **1000101**), (**10110** , **01101**);

d) (**1001011**,**1111**), (**00010** , **1**), (**10010**, **11**);

e) (**10101**, **1110**), (**0010110**, **100100010**), (**1010010**, **000111**);

f) (**1011**, **1110**), (**0010110**, **1100010**), (**101010**, **000111**);

g) (**1100101**, **00101**), (**11100** , **00010**), (**010100** , **0100**);

h) (**01110** , **00100**), (**1010011** , **100100001**), (**01111**, **001**).

9.19. Построить продукционные системы, в которых выводятся следующие отношения на множестве натуральных чисел:

a) меньше;

b) больше или равно;

c) пар чисел равной длины, которые не имеют одинаковых одноименных разрядов;

d) пар чисел, модуль разности между которыми не больше ***3*** .

Обычно интерес представляют не все слова, выводимые в системе Поста, а часть таких слов, имеющих специальную структуру. В частности, это могут быть слова, составленные из символов некоторой части алфавита ***A*** .

При этом остальные символы алфавита ***A*** называются вспомогательными и образуют вспомогательный алфавит.

Тогда продукционная система — это четверка $\mathbf{P} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \mathbf{V}, \prod)$, где ***A*** , ***B*** и ***V*** — соответственно основной, вспомогательный алфавиты и алфавит переменных. $\prod$ — множество продукций, в которых образцы составлены из символов трех алфавитов ***A***, ***B*** ,***V***.

Множество слов, выводимых в **P** — это все такие слова в основном алфавите ***A***, которые входят в выводы в системе Поста **P**.

9.20. Построить продукционные системы, в которых с помощью вспомогательных выводов выводятся следующие множества слов в алфавите $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{0} , \mathbf{1}\}$:

a) $\{\alpha \mid \alpha$ содержит либо четное число нулей, либо четное число единиц$\}$;

b) $\{\alpha \mid \alpha$ — запись натурального числа, длина которого либо кратна ***3*,** либо кратна ***5***$\}$;

c) $\{(\alpha , \beta) \mid \alpha$ и β — записи натуральных чисел, равной длины, совпадающие не менее чем в трёх позициях $\}$;

d) $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha$ и β — двоичные последовательности, длины которых различаются не более чем в трёх позициях$\}$;

e) $\{\alpha \mid \alpha$ – является несимметричным словом в алфавите $\{\mathbf{0},\mathbf{1},\boldsymbol{S}\}\}$;

f) $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha$ и β — произвольные слова в $\{0, 1\}$ и $\alpha = \beta^n$, где $n \in \mathrm{N}$ $\}$

g) $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha$ и β — произвольные слова в $\{0, 1\}$ и $\alpha \neq \beta^n$, где $n \in \mathrm{N}\}$

h)$\{(\alpha, \beta \mid \alpha$ – произвольное, а β - это самая длинная последовательность подряд идущих нулей в слове $\alpha\}$;

i)$\{(\alpha, \beta \mid \alpha$ – произвольное, а β - это самая короткая непустая последовательность подряд идущих нулей в слове α или пустое слово, если α не содержит символов 0 $\}$;

j)$\{(\alpha, \beta) \mid \alpha$ – произвольное, а β – это самая длинная четная в порядке слева направо последовательность нулей в $\alpha\}$;

k) ($\alpha, \beta) \mid \alpha$ получается из β сжатием всякой четной последовательности подряд идущих нулей в один ноль, а β получается из α сжатием всякой нечетной последовательности подряд идущих 1 в одну единицу$\}$;

l)$\{(\alpha, \beta) \mid \alpha$ – произвольная последовательность, а β составлено из символов α и имеет вид $(\mathbf{010})^n$, где n - наибольшее возможное $\}$;

m)$\{(\alpha, \beta) \mid \alpha$ – произвольное, а β получается из α удалением всех четных в порядке слева направо групп подряд идущих нулей$\}$;

n)$\{(\alpha, \beta) \mid \alpha$ – произвольное, а β - получается из слова α одновременным удалением всех вхождений самых длинных последовательностей подряд идущих единиц$\}$;

o) $\{(\alpha, \beta, \gamma) \mid \alpha, \beta \in \{\mathbf{0},\mathbf{1},\boldsymbol{S}\}^*$, а γ самое длинное подслово в α, имеющего вид β^n $\}$;

p) $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha$ – произвольное, а β получается из α удалением всех первых по порядку групп подряд идущих нулей, имеющих одинаковую длину$\}$;

q) Слов в $\{0,1\}$ вида $\beta^{\,n}$**,** где $n > 2$ и β произвольное слово

r) Слов в $\{0,1\}$, которые не представимы в виде $\beta^{\,n}$**,** где $n > 2$ и β произвольное слово.

(При этом вспомогательный алфавит и алфавит переменных приводимых продукционных систем могут быть произвольными).

9.21. Построить системы поста, в которых вычисляются следующие функции:

a) $kol(\alpha, \beta)$ – количество вхождений слова β в слово α.

b) $col(\alpha, \beta)$ – максимум вхождений слова β в слово α без пересечений.

c) $invkol(\alpha, \beta)$ - – количество вхождений слова β в слово α в инвертированном виде.

d) intersect(α, β) – максимум одновременных пересечений вхождений слова β в слово α/

9.22. Построить системы Поста, в которых выводятся следующие множества слов, используя продукции, реализующие схему последовательной проверки подслов (перебора вариантов)

a) $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in \{\mathbf{0},\mathbf{1},\boldsymbol{S}\}^*$, а β – всякая самая длинная монотонно неубывающая последовательность символов в слове α $\}$;

b) $\{\alpha \mid \alpha$ **-** является словом в алфавите $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \boldsymbol{S}\}$ и не содержит симметричных подслов чет ной длины$\}$;

c) $\{(\alpha, \beta) \mid \beta \in \{\mathbf{0},\mathbf{1},\boldsymbol{S}\}^*$, а α – всякое самое длинное симметричное подслово в $\beta\}$;

d) $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha$ – произвольное, а β - самое длинное несимметричное подслово слова $\alpha\}$;

h) $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha$-произвольное, β - всякое несимметричное подслово в α немаксимальной длины$\}$.

i) $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha$-произвольное, β - получается из α удалением всех не первых и не последних вхождений последовательностей одинаковых символов равной длины$\}$.

j) $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha$-произвольное, β - всякое несимметричное подслово в α немаксимальной длины$\}$

k) $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha$-произвольное, β - всякое не самое длинное немонотонное подслово слова α**,** которое входит в α не менее трёх раз$\}$.

l)) $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha$ – произвольное, а β - самое длинное несимметричное подслово слова $\alpha\}$;

Числовая функция $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{N}^k\ \boldsymbol{N}$ вычисляется продукционной системой продукций **P**, если:
$\forall\, \boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_k \in \boldsymbol{N}$

$(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_k) = \boldsymbol{w}$ тогда и только тогда, когда в **P** выводится слово $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_k) = \boldsymbol{w}$).

Здесь $\boldsymbol{n}$ обозначает двоичную запись числа $\boldsymbol{n}$.

9.23. Построить продукционные системы, в которых вычисляются следующие числовые функции:

a) $x + 1$;
b) $\min(x, y)$;
c) $x + y$;
d) $\mathrm{div}(x, y)$;
e) $]\, x / y\, [$;
f) $]\, \log_2 x\, [$;
g) $[\log_2 x]$;
h) $[\log_y x]$;
g) $]\sqrt{x}\,[$;
i) $x y$;
j) x^y;
k) $|x - y|$;
l) $\mathrm{mod}(x, y)$;
m) $f(x) = \sum \sigma_i$, $\overline{x} = \sigma_1 \ldots \sigma_k$;
n)

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x - y| > 10 \\ xy, & x + y > 20 \wedge |x - y| = 10 \\ 0, & \text{- в остальных случаях} \end{cases}$$

o)

$$f(x, y) = \begin{cases} \log_x y, & x - y < 25 \\ xy, & x + 20 > 2y \wedge x - y < 25 \\ y, & \text{иначе} \end{cases}$$

9.24. Пусть числовые функции $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ вычисляются продукционными системами $\mathbf{P}_f$ и $\mathbf{P}_g$. Построить продукционную систему **P**, в которой вычисляется суперпозиция $g \circ f$ этих функций.

9.25. Пусть $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \mu\, t(g(x_1, \ldots, x_n, t) = x_{n+1})$ и $g(x_1, \ldots, x_{n+1})$ вычисляется продукционной системой $\mathbf{P}_g$. Показать, что существует система Поста $\mathbf{P}_f$, которая вычисляет функцию $\boldsymbol{f}$.

9.26. Функция $f(x_1, \ldots x_{n+1})$ получается из функций $g(x_1, \ldots, x_n)$ и $h(x_1, \ldots x_{n+2})$ с помощью операции примитивной рекурсии. Функции $\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{h}$ вычисляются продукционными системами $\mathbf{P}_g$ и $\mathbf{P}_h$.

Построить продукционную систему $\mathbf{P}_f$, с помощью которой вычисляется функция $\boldsymbol{f}$.

9.27. Построить продукционную систему, в которой выводятся все такие пары (α, β), что α и β — это записи одного и того же целого неотрицательного числа в двоичной и десятичной системах счисления соответственно.

9.28. Составить алгоритм, который по произвольной заданной системе продукций за конечное число шагов определяет: является ли конечным множество слов, выводимых в данной продукционной системе.

9.29. Составить алгоритм, который по произвольной заданной системе продукций последовательно порождает (перечисляет) все слова, выводимые в этой системе.

9.30. Сколько различных систем продукций могут порождать множество $\mathbf{U}_P$ слов, выводимых в заданной продукционной системе.

10. Примеры зачётных заданий

I семестр

1. Доказать, что отношение является эквивалентностью на множестве слов в латинском алфавите, определить число (конечное или бесконечное) классов эквивалентных слов и их мощности.

a. $\alpha\, \rho\, \beta \Leftrightarrow$ множество разных букв в α, перед которыми стоит четное число отличных от них букв, равно множеству разных букв в β, перед которыми стоит четное число отличных от них букв;

b. $\alpha\, \rho\, \beta \Leftrightarrow$ множество разных букв в α, после которых в слове содержится нечетное число отличных от них букв, равно множеству разных букв в β, после которых в слове содержится нечётное число отличных от них букв

2. Проверить свойства отношения между функциями $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

a. $f \rho g \Leftrightarrow \exists\, \mathbf{k} > 1\ (f(\mathbf{k} - 2x) > \mathbf{g}(\mathbf{k} + 2x))$;

b. $f \rho g \Leftrightarrow \exists\, \mathbf{k} > 1\ (f(\mathbf{k} + 2x) > \mathbf{g}(2x - \mathbf{k}))$;

3. Определить число троек слов (α, β, γ) в латинском алфавите, таких что:

a. в α содержатся **3** буквы по **5** раз, **2** буквы по **3** раза и **4** буквы по **1** разу, в β содержатся **2** буквы из α по **4** раза, **2** буквы не из α по **4** раза и **4** буквы не из α по **1** разу, в γ содержатся **3** буквы из α и не из β по **4** раза, **2** буквы из β и не из α по **4** раза и **4** буквы не из α или β по **1** разу.

b. в α содержатся **2** буквы по **3** раз, **2** буквы по **4** раза и **3** буквы по **1** разу, в β содержатся **3** буквы из α по **5** раз, **2** буквы не из α по **3** раза и **3** буквы не из α по **1** разу, в γ содержатся **2** буквы из α и не из β по **5** раз, **3** буквы из β и не из α по **3** раза и **3** буквы не из α или β по **1** разу.

4. Определить число способов для 3-х человек взять игрушки из игрушек 5 видов, если:

a. количества разных игрушек в видах равны **7**, **7**, **4**, **4** и **5** соответственно и один человек берет **14** игрушек, не менее чем по 1 игрушки каждого вида, а другой берет **12** игрушек не менее чем по **2** игрушки каждого вида;

b. Количества разных игрушек в видах равны **9**, **5**, **5**, **4** и **4** соответственно и один человек берет **13** игрушек, не менее чем по **2** игрушки каждого вида, а другой берет **14** игрушек не менее чем по **1** игрушке каждого вида

5. Определить число троек слов (α, β, γ) длины **12** в латинском алфавите, таких что:

a. два слова имеют **4** общих буквы и **2** слова имеют **3** позиции, символы в которых совпадают;

b. два слова имеют **3** общих буквы и **2** слова имеют **4** позиции, символы в которых совпадают.

6. Построить минимальную ДНФ функции, используя геометрическую интерпретацию ДНФ:

a. $f = (x_1 \to (\overline{x_2} + x_4)) \vee (\overline{x_3} \to x_2)$; **b)** $f = (x_4 \vee (\overline{x_2} + x_1)) \to (x_1 \to \overline{x_3})$;

7. Показать, что $f \in [\mathbf{B}]$ и построить формулу, выражающую $\boldsymbol{f}$ через функции **B**, где:

a. $f = x_1 \sim x_3 \,\&(x_2 \to x_4)$, а $\mathbf{B} = \{\mathbf{01100100}, \mathbf{11000011}\}$

b. $f = (x_4 \,\&\, \overline{x_3}) \vee (x_2 + x_1)$, а $\mathbf{B} = \{\mathbf{11110101}, \mathbf{00000010}\}$

8. Найти мощность множества

a. $(\mathbf{L} \setminus (\mathbf{S} \cup (\mathbf{T}_1 \cap \mathbf{T}_0))) \cup (\mathbf{T}_0 \setminus (\mathbf{S} \cap \mathbf{L})) \setminus (\mathbf{M} \cap (\mathbf{L} \cup (\mathbf{S} \setminus \mathbf{T}_1)))$;

b. $((\mathbf{T}_1 \cup (\mathbf{L} \cap \mathbf{T}_0)) \setminus \mathbf{S}) \cup (\mathbf{S} \setminus (\mathbf{T}_0 \cap \mathbf{L})) \setminus (\mathbf{M} \setminus (\mathbf{L} \cup (\mathbf{S} \cap \mathbf{T}_1)))$;

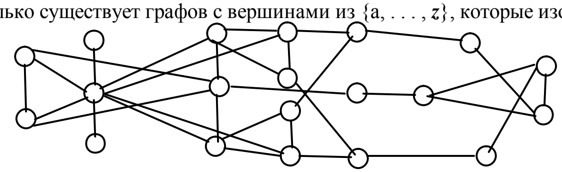
9. Проверить полноту системы функций:

a. $(\mathbf{S} \setminus (\mathbf{L} \cup (\mathbf{M} \cap (\mathbf{T}_0 \cup \mathbf{T}_1))) \cup (\mathbf{S} \cap (\mathbf{L} \setminus (\mathbf{T}_0 \cup \mathbf{T}_1)) \cup (\mathbf{M} \cap (\mathbf{L} \setminus \mathbf{S}))$

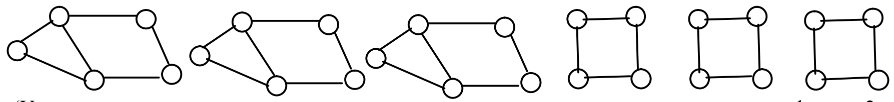
b. $(\mathbf{T}_0 \cap (\mathbf{M} \setminus (\mathbf{L} \cup (\mathbf{S} \setminus \mathbf{T}_1)))) \cup (\mathbf{L} \setminus (\mathbf{S} \cap (\mathbf{T}_0 \setminus \mathbf{T}_1)) \cup (\mathbf{L} \setminus (\mathbf{M} \cap \mathbf{S}))$

II семестр

1. Сколько существует графов с вершинами из $\{a, \ldots, z\}$, которые изоморфны графу:



2. Сколько существует неизоморфных связных графов, получаемых из заданного графа добавлением минимального количества рёбер:



(Указание: рассмотреть все варианты связывания компонент связности заданного графа, для 2-х вариантов построить одну ветвь дерева разбиения на случаи)

3. Сколько существует неизоморфных непланарных графов без петель, имеющих 12 вершин и 18 ребер? (Указание: Построить одну ветвь дерева разбиения на случаи)

4. Построить диаграмму переходов КА, вычисляющего функцию $f(x, y) = 5x - 4y - 3$.

5. Построить диаграмму переходов КА, распознающего слова, структура которых представляется выражением {0,1}*[S0, 101, 11]*{0O,OS}*(011)*{S,S0}*1*{SS,01}*[0,1]*.

6. Построить диаграмму переходов КА, распознающего множество всех таких слов, которые содержат вхождения без пересечений всех слов множества {0010, 1100, 0100}

7. Доказать примитивную рекурсивность функции $\boldsymbol{f}$(x, y) = максимум длин последовательностей нечётных чисел в $\boldsymbol{k}_1, \ldots, \boldsymbol{k}_r$, которые содержат симметричную подпоследовательность и не входят в последовательность чисел $\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_s$ более двух раз. (Здесь $\boldsymbol{x} = p_1^{k_1} \ldots p_r^{k_r}$, y = $h_1^{d_1} \ldots h_s^{d_s}$)

8. Доказать примитивную рекурсивность функции $\boldsymbol{f}$(x, y) = максимум длин последовательностей одинаковых цифр в записи x, которая входит в запись у максимальное число раз.

9. Построить систему Поста, в которой выводятся слова вида (α, β), где α – произвольная двоичная последовательность, а β– всякое подслово в α вида (010)*, которое входит в α чётное число раз без пересечений.

10. Построить систему Поста, в которой выводятся слова вида (α, β), где α – произвольная двоичная последовательность, а β– получается из α удалением всех групп нулей не максимальной длины, которые входят в запись α нечётное число раз.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Тема 1

Тема 2.

Тема 3.

Тема 4.

Тема 5.

Тема 6.

Тема 7.

Тема 8.

8.24. 3 [1*, 0*1*]0 {0*1*0}*1{0*}{1{0*}1*0{0*1*0}*1{0*}}*.

Тема 9.

Тема 10.