QUANTUM FOURIER TRANSFORM

tommaso.faorlin

May 2020

La trasformata di Fourier classica discreta mappa un vettore $[f(t_1), \dots, f(t_N)] \in \mathbb{C}^N$ in un vettore $[\tilde{f}(k_1), \dots, \tilde{f}(k_N)] \in \mathbb{C}^N$ tramite la relazione:

$$\tilde{f}(k) = \sum_{t=1}^{2^n-1} \exp\left(\frac{2\pi i k t}{N}\right) f(t)$$

Similmente, la QFT mappa

$$|\psi\rangle = \sum f(j)\,|j\rangle \to |\tilde{\psi}\rangle = QFT(|\psi\rangle) = \sum \tilde{f}(k)\,|k\rangle$$

perché, dal momento che

$$QFT(|j\rangle) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi i j k}{N}\right) |k\rangle$$

si ha

$$|\tilde{\psi}\rangle = QFT(|\psi\rangle) = \sum_j f(j) QFT(|j\rangle) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j f(j) \sum_k \exp\left(\frac{2\pi i j k}{N}\right) |k\rangle =$$

$$= \sum_k \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j \exp\left(\frac{2\pi i j k}{N}\right) f(j) \right) |k\rangle = \sum_k \tilde{f}(k)\,|k\rangle \tag{1}$$

Quindi, parto riscrivendo k in notazione binaria:

$$k = k_\ell = k_1 2^{n-1} + k_2 2^{n-2} + \dots + k_n 2^0$$

questo è diviso per $N = 2^n$ e allora, avendo introdotto il nuovo indice ℓ che va da 1 a n:

$$\frac{k_\ell}{2^n} = k_1 2^{-1} k_2 2^{-2} + \dots + k_n 2^{-n} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{k_\ell}{2^\ell}$$

$$QFT(|j\rangle) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k_\ell=0}^{N-1} \exp\left(2\pi i j \sum_{\ell=1}^{n} \frac{k_\ell}{2^\ell}\right) |k_1, \ldots, k_n\rangle$$

sposto la somma all'esponente come prodotto di esponenziali

$$QFT(|j\rangle) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k_\ell=0}^{N-1} \prod_{\ell=1}^{n} \exp\left(2\pi i j \frac{k_\ell}{2^\ell}\right) |k_\ell\rangle$$

dove ora ho i prodotti dei singoli k_ℓ, ma so che ogni k_l, viste le somme fuori, può essere o 0 o 1. Quindi, dopo aver spezzato la somma:

$$\sum_{k_\ell=0}^{N-1} = \sum_{k_1=0}^{1} \sum_{k_2=0}^{1} \cdots \sum_{k_n=0}^{1}$$

le porto dentro singolarmente e ottengo (primo termine per $k_\ell = 0$):

$$QFT(|j\rangle) = \frac{1}{\sqrt{N}} \bigotimes_{\ell=1}^{n} \left(|0\rangle + \exp\left(\frac{2\pi i j}{2^\ell}\right)|1\rangle\right)$$

ovvero

$$\begin{aligned} QFT(|j\rangle) = \frac{1}{\sqrt{N}} &\left(|0\rangle + \exp\left(\frac{2\pi i j}{2}\right)|1\rangle\right)_1 \otimes \left(|0\rangle + \exp\left(\frac{2\pi i j}{2^2}\right)|1\rangle\right) \\ \otimes \cdots \otimes \frac{1}{\sqrt{N}} &\left(|0\rangle + \exp\left(\frac{2\pi i j}{2^{n-1}}\right)|1\rangle\right)_{n-1} \otimes \left(|0\rangle + \exp\left(\frac{2\pi i j}{2^n}\right)|1\rangle\right)_n \end{aligned}$$

Noto che se ho solo $n = 1$ qubit, ovvero $N = 2$, inizializzato a $|0\rangle$, fare la sua trasformata di Fourier equivale ad applicare un Hadamard. Supponiamo invece di avere $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = f_0|0\rangle + f_1|1\rangle$ e vediamo la trasformata di Fourier come applicata al coefficiente $\tilde{f}(k)$ come da equazione 1:

$$\tilde{f}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=0}^{1} \exp\left(\frac{2\pi i j \times 0}{N}\right) f_j = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f_0 \cdot e^{\frac{2\pi i 0 \times 0}{N}} + f_1 \cdot e^{\frac{2\pi i 1 \times 0}{N}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha+\beta)$$

$$\tilde{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=0}^{1} \exp\left(\frac{2\pi i j \times 1}{N}\right) f_j = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f_0 \cdot e^{\frac{2\pi i 0 \times 1}{N}} + f_1 \cdot e^{\frac{2\pi i 1 \times 1}{N}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha-\beta)$$

$$QFT(|\psi\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\alpha+\beta)|0\rangle + (\alpha-\beta)|1\rangle] = H|\psi\rangle$$