LAMBDA CALCULUS

VIVATSATHORN T.

Lambda Calculus

สุด / ปิดวงเล็บ

Syntax : $\lambda(\text{variable}).(\text{body})$

e.g. $\lambda x.x+10 \longleftrightarrow f(x)=x+10$

$\lambda x.\lambda y.x+y \longleftrightarrow f(x,y)=x+y$

Application : $(\lambda x.x+10)20 = 20+10 = 30$

$(\lambda x.\lambda y.x+y)10((\lambda x.x+10)20) \to (\lambda y.10+y)((\lambda x.x+10)20)$

$\to 10+((\lambda x.x+10)20)$

$\to 10+(20+10) = 40$

Evaluate ไหนก่อนก็ได้.

Renaming (α- Equiv.) : $\lambda x.[z/x]x \to \lambda z.z$

Substitute free occurrences

$\lambda x.x =_{\alpha} \lambda y.y$: $\lambda x.x \to \lambda y.[y/x]x$

β- Equiv. (Body Substitution) $(\lambda x.M)N \to [N/x]M$

Recursion $f(n) =$ if $n=0$ then 1 else $n \cdot f(n-1)$ → factorial

Let $f = \lambda n.$ if $n=0$ then 1 else $n \cdot f(n-1)$

Let $G = \lambda f.\lambda n.$ if $n=0$ then 1 else $n \cdot f(n-1)$

$\therefore Gf = \lambda n.$ if $n=0$ then 1 else $n \cdot f(n-1) = f$

$\therefore f = G(f)$ (f เป็น fixed point ของ G)

fixed point เป็นฟังก์ชัน

e.g. $Y = \lambda f.(\lambda x. f(x\,x))(\lambda x. f(x\,x))$

$$Yf =_\beta (\lambda x. f(x\,x))(\lambda x. f(x\,x)) =_\alpha (\lambda y. f(y\,y))(\lambda x. f(x\,x))$$

$$=_\beta f(\underbrace{(\lambda x. f(x\,x))(\lambda x. f(x\,x))}_{Yf})$$

$$\therefore\ Yf = f(Yf)$$

fixed point of f

จาก G (factorial) , YG เป็น fixed point ของ G

$$\begin{aligned}
f(2) &= YG(2) \\
&= G(YG)2 \\
&= (\lambda f. \lambda n.\ \text{if } n=0 \text{ then } 1 \text{ else } n \cdot f(n-1))(YG)2 \\
&= \lambda n.\ \text{if } n=0 \text{ then } 1 \text{ else } n(YG(n-1))\ )\ 2 \\
&= 2(YG(2-1)) \\
&= 2 \cdot YG(1) \\
&= 2 \cdot G(YG(1)) \\
&= 2\ (\lambda n. \text{ if } n=0 \text{ then } 1 \text{ else } n \cdot YG(n-1)) \\
&= 2 \cdot 1 \cdot YG(1-1) \\
&= 2 \cdot 1 \cdot YG(0) \ldots = 2 \cdot 1 \cdot 1 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

β-reduction : e.g. $\lambda y. y+1 =_\beta (\lambda y. y+1)x = x+1$

* Function evaluation มี สมบัติ "Confluence" (ผลลัพธ์สุดท้าย ไม่ว่าทำลำดับไหน จะได้ค่าเท่ากัน "normal form")