1 EDP

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial t} &= rP - rS\frac{\partial P}{\partial S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}, \quad \forall (t,s) \in [0,T] \times [0,L], \\
P(T,s) &= \max(K-s,0), \quad \forall s \in [0,L] \quad \text{(CI)}, \\
P(t,0) &= Ke^{r(t-T)}, \quad \forall t \in [0,T] \quad \text{(CB1)}, \\
P(t,L) &= 0, \quad \forall t \in [0,T] \quad \text{(CB2)}.
\end{aligned}$$

2 Changement de variable

On veut une condition initiale et non terminale. Posons $u(t,x) = P(T-t,x)$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= -\frac{\partial P}{\partial t}(T-t,x), \\
&= -rP(T-t,x) + rx\partial Px(T-t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(T-t,x), \\
&= -ru(t,x) + rx\partial ux(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x).
\end{aligned}$$

De même pour la condition initiale (CI) et les deux conditions aux bord (CB1) et (CB2). On obtient au final :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= -ru + rx\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times [0,L], \\
u(0,x) &= \max(K-x,0), \quad \forall x \in [0,L] \quad \text{(CI)}, \\
u(t,0) &= Ke^{-rt}, \quad \forall t \in [0,T] \quad \text{(CB1)}, \\
u(t,L) &= 0, \quad \forall t \in [0,T] \quad \text{(CB2)}.
\end{aligned}$$

3 Discrétisation de $[0,T]$ et $[0,L]$

Soient $N,\ M \in \mathbb{N}^*$. Posons $\Delta T = \frac{T}{N}$, $t_n = n\Delta T\ \forall n \in \{0,\dots,N\}$ et $\Delta x = \frac{L}{M+1}$, $x_i = i\Delta x\ \forall i \in \{0,\dots,M+1\}$

4 Discrétisation de l'EDP

On utilise un θ-schéma qui permet de prendre en compte la méthode des différences finies (MDF) explicite ($\theta = 0$), implicite ($\theta = 1$) et de Crank-Nicholson ($\theta = \frac{1}{2}$). $u_{n,i}$ sera l'approximation de $u\left(t_n, x_i\right)$ et $\forall (n,i) \in \{1, \ldots, N-1\} \times \{1, \ldots, M\}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{u_{n+1,i} - u_{n,i}}{\Delta T} =& - r\left(\theta u_{n+1,i} + (1-\theta) u_{n,i}\right) \\
&+ r \frac{x_i}{\Delta x}\left(\theta\left(u_{n+1,i+1} - u_{n+1,i}\right) + (1-\theta)\left(u_{n,i+1} - u_{n,i}\right)\right) \\
&+ \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{x_i^2}{\Delta x^2}\left(\theta\left(u_{n+1,i+1} - 2u_{n+1,i} + u_{n+1,i-1}\right) + (1-\theta)\left(u_{n,i+1} - 2u_{n,i} + u_{n,i-1}\right)\right)
\end{aligned} \tag{1}
$$

Condition initiale :

$$u_{0,i} = \max(K - x_i, 0), \quad \forall i \in \{1, \ldots, M+1\}.$$

Conditions aux bords :

$$
\begin{aligned}
u_{n,0} &= e^{-rt_n}, \quad \forall n \in \{1, \ldots, N\}, \\
u_{n,M+1} &= 0, \quad \forall n \in \{1, \ldots, N\}.
\end{aligned}
$$

On simplifie (2) en remarquant que $\frac{x_i}{\Delta x} = i$:

$$
\begin{aligned}
\frac{u_{n+1,i} - u_{n,i}}{\Delta T} =& - r\left(\theta u_{n+1,i} + (1-\theta) u_{n,i}\right) \\
&+ ri\left(\theta\left(u_{n+1,i+1} - u_{n+1,i}\right) + (1-\theta)\left(u_{n,i+1} - u_{n,i}\right)\right) \\
&+ \frac{1}{2}\sigma^2 i^2\left(\theta\left(u_{n+1,i+1} - 2u_{n+1,i} + u_{n+1,i-1}\right) + (1-\theta)\left(u_{n,i+1} - 2u_{n,i} + u_{n,i-1}\right)\right),
\end{aligned} \tag{2}
$$

et on regroupe $u_{n+1,i}$ à gauche et $u_{n,i}$ à droite :

$$
\begin{aligned}
(1 + r\Delta T\theta)u_{n+1,i} - r\Delta T\theta i(u_{n+1,i+1} - u_{n+1,i}) - \\
\frac{1}{2}\sigma^2 \Delta T\theta i^2(u_{n+1,i+1} - 2u_{n+1,i} + u_{n+1,i-1}) = \\
(1 - r\Delta T(1-\theta))u_{n,i} + r\Delta T(1-\theta)i(u_{n,i+1} - u_{n,i}) + \\
\frac{1}{2}\sigma^2 \Delta T(1-\theta)i^2(u_{n,i+1} - 2u_{n,i} + u_{n,i-1}),
\end{aligned} \tag{3}
$$

équivalent à :

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\sigma^2\Delta T\theta i^2 u_{n+1,i-1} + (1 + r\Delta T\theta + r\Delta T\theta i + \sigma^2\Delta T\theta i^2)u_{n+1,i} \\
&\qquad - (r\Delta T\theta i + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta T\theta i^2 u_{n+1,i+1}) = \\
&\frac{1}{2}\sigma^2\Delta T(1-\theta)i^2 u_{n,i-1} + (1 - r\Delta T(1-\theta) - r\Delta T(1-\theta)i - \sigma^2\Delta T(1-\theta)i^2)u_{n,i} \\
&\qquad + (r\Delta T(1-\theta)i + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta T(1-\theta)i^2)u_{n,i+1}. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

5 Ecriture sous forme matricielle de (4)

Ne **pas** oublier les conditions initiale et aux bords. Pour simplifier les expressions, posons :

$$
\begin{aligned}
\alpha &= r\Delta T\theta i, \\
\beta &= \sigma^2\Delta T\theta i^2, \\
\gamma &= r\Delta T(1-\theta)i, \\
\delta &= \sigma^2\Delta T(1-\theta)i^2.
\end{aligned}
$$

Alors (4) est équivalent à

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\beta u_{n+1,i-1} + (1 + r\Delta T\theta + \alpha + \beta)u_{n+1,i} - \left(\alpha + \frac{1}{2}\beta\right) u_{n+1,i+1} = \\
&\qquad \frac{1}{2}\delta u_{n,i-1} + (1 - r\Delta T(1-\theta) - \gamma - \delta)u_{n,i} + \left(\gamma + \frac{1}{2}\delta\right) u_{n,i+1}. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Conditions aux bords :

$$
\begin{aligned}
u_{n,0} &= Ke^{-rt_n} \text{ pour } i = 1 \\
u_{n,M+1} &= 0 \text{ pour } i = M
\end{aligned}
$$

On pose le vecteur colonne $U_n = (u_{n,1}, \ldots, u_{n,M})$. Avec (5) et (CB), la formulation équivalente est $AU_{n+1} = BU_n + F_n$, A et B deux matrices carrées tridiagonales de taille

M, et F_n est un vecteur colonne de taille M, avec :

$$
\begin{aligned}
a_{i,i} &= 1 + r\Delta T\theta + \alpha + \beta,\ i = 1 \ldots M \\
a_{i,i-1} &= -\frac{1}{2}\beta,\ i = 2 \ldots M \text{ sous} - \text{diag} \\
a_{i+1,i} &= -\left(\alpha + \frac{1}{2}\beta\right),\ i = 1 \ldots M-1 \text{ sur} - \text{diag} \\
b_{i,i} &= 1 - \Delta T(1-\theta) + \gamma + \delta,\ i = 1 \ldots M \\
b_{i,i-1} &= \frac{1}{2}\delta,\ i = 2 \ldots M \text{ sous} - \text{diag} \\
b_{i+1,i} &= \left(\gamma + \frac{1}{2}\delta\right),\ i = 1 \ldots M-1 \text{ sur} - \text{diag} \\
f_1 &= \frac{1}{2}K\left(\beta e^{-rt_{n+1}} + \delta e^{-rt_n}\right) \\
&= \frac{1}{2}Ke^{-rt_n}\left(\beta e^{-r\Delta T} + \delta\right) \\
f_i &= 0\ i = 2, \ldots, M.
\end{aligned}
$$