Análisis de Variable Real

Victoria Torroja Rubio

9/10/2024 -

Índice general

Profesor: Javier Soria
Oficina: 437
Correo: javier.soria@ucm.es

Ayudante: Fernando Ballesta Yague
Oficina: 224
Correo: ferballe@ucm.es

Exámenes: Parcial 1 (16/1/2025)

- 20 % evaluación continua + examen a finales de noviembre (solo sube no baja)
- 80 % exámenes parciales

Si apruebas los parciales no hay que hacer el final.

Recomendaciones de libros

- Primer libro de la bibliografía
- El de Ortega
- 5000 problemas de análisis (para practicar)

Capítulo 1

El cuerpo de los números reales

1.1. El cuerpo de los números reales.

Definición 1.1 (Cuerpo)**.** Se define $\mathbb{R}$ como un **cuerpo abeliano**:

(i) Existen dos operaciones en $\mathbb{R}$: $+$ (suma) y $\cdot$ (producto).

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\to x + y \\ \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\to x \cdot y. \end{aligned}$$

(ii) La suma es conmutativa:

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x + y = y + x.$$

(iii) La suma es asociativa:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ \ (x + y) + z = x + (y + z)\,.$$

(iv) Existencia del elemento neutro de la suma [a] :

$$\exists 0 \in \mathbb{R},\ 0 + x = x + 0 = x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

(v) Existencia del elemento opuesto:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists - x^b \in \mathbb{R}\ ,\ x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

(vi) El producto es conmutativo:

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \cdot y = y \cdot x.$$

(vii) La multiplicación es asociativa:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)\,.$$

(viii) Existencia del elemento neutro del producto:

$$\exists 1 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ 1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$$

(ix) Existencia del opuesto en el producto:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists \frac{1}{x}^{c} \in \mathbb{R},\ x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1.$$

(x) El producto es distributivo respecto a la suma [d] :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

[a] no estamos afirmando que sea único
[b] el menos no significa nada, no sabemos lo que es restar todavía
[c] Como en a, esto es notación, no sabemos dividir
[d] no hay que especificar distributiva por la izquierda y por la derecha por la propiedad de conmutatividad del producto

Los racionales ($\mathbb{Q}$) cumplen estos requisitos por lo que son un cuerpo, sin embargo $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$ no lo son porque no cumplen con todos los requisitos.Algunos cuerpos interesantes son las clases de equivalencia de la forma $\mathbb{Z}_n$. $\mathbb{R}$ también tiene la propiedad de que existe un orden como en $\mathbb{Q}$.

Teorema 1.1. En $(\mathbb{R}, +, \cdot)$:

(a) El elemento neutro de la suma es único.

(b) El elemento neutro del producto es único.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}:\ x \cdot 0 = 0.$

Demostración. **(a)** Suponemos que existe otro elemento $0' \in \mathbb{R}$, además de $0 \in \mathbb{R}$ que cumple que es el elemento neutro de la suma. Tenemos que

$$0 + 0' \underbrace{=}_{(iv)} 0' \underbrace{=}_{(ii)} 0' + 0 \underbrace{=}_{(iii)} 0.$$

Por tanto, $0 = 0'$.

(b) Suponemos que existen $1, 1' \in \mathbb{R}$ que son elementos neutros para el producto. Aplicamos lo mismo que en la demostración anterior.

$$1 \cdot 1' = 1' = 1' \cdot 1 = 1.$$

Por tanto, $1 = 1'$.

(c)
$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0.$$

Sumamos el opuesto a ambos lados:

$$\begin{aligned}
&x \cdot 0 + (-x \cdot 0) = (-x \cdot 0) + x \cdot 0 + x \cdot 0 \\
&0 = 0 + x \cdot 0 \\
&0 = x \cdot 0.
\end{aligned}$$

También se puede demostrar de la siguiente forma:

$$a + a \cdot 0 = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a \cdot (1 + 0) = a \cdot 1 = a.$$

Si sumamos $-a$ en ambos lados tenemos que $a \cdot 0 = 0$.

□

Lema 1.1. $\forall x \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$(-x) = (-1) \cdot x.$$

Demostración. Aplicamos la parte **(c)** del teorema anterior.

$$(-1) \cdot x + x = (-1) \cdot x + 1 \cdot x = ((-1) + 1) \cdot x = 0 \cdot x = 0.$$

□

Teorema 1.2. **(a)** $x \neq 0,\ y \in \mathbb{R},\ x \cdot y = 1$, entonces $y = \dfrac{1}{x}$.

(b) Si $x \cdot y = 0$ entonces $x = 0$ o $y = 0$.

Demostración. **(a)**
$$y = 1 \cdot y = \frac{1}{x} \cdot x \cdot y = \frac{1}{x} \cdot (x \cdot y) = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}.$$

(b) Si $x = 0$ hemos ganado. Si $x \neq 0$,
$$x \cdot y = 0.$$

Multiplicamos ambos lados por el inverso,

$$\frac{1}{x} \cdot x \cdot y = \frac{1}{x} \cdot 0 = 0 \Rightarrow 1 \cdot y = 0 \Rightarrow y = 0.$$

□

Notaciones: $x, y \in \mathbb{R}$

- Definimos resta como: $x - y = x + (-y)$

- Si $y \neq 0$, definimos la división como
$$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}.$$
- Si $x \neq 0$, $x^0 = 1$.
- $x^1 = x$.
- Si $n \in \mathbb{N}$, $x^n = x \cdot x^{n-1}$.
- Si $x \neq 0$, $x^{-1} = \frac{1}{x}$.
- $x^{-2} = x^{-1} \cdot x^{-1} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$[1].
- Si $n \in \mathbb{N}$, $x^{-n} = x^{-1} \cdot x^{-(n-1)}$.

Definimos los naturales como la suma de la unidad (elemento neutro del producto) y los enteros negativos como la suma del opuesto de la unidad.

Definición 1.2. Si $n, m \in \mathbb{Z}$ y $m \neq 0$, definimos $\mathbb{Q}$ como
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \ : \ n, m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0 \right\}.$$
Definimos el complementario de los números racionales como los números irracionales:
$$\mathbb{R}/\mathbb{Q}.$$
Sabemos que $\mathbb{R}/\mathbb{Q} \neq \emptyset$ porque sabemos que existe $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ tal que $x^2 = 2$.

Definición 1.3 (Grupo)**.** Un grupo es un conjunto con una operación $(+)$ que cumple las condiciones de la suma.

Definición 1.4 (Anillo)**.** Un anillo es un conjunto con dos operaciones $(+,\ \cdot\ )$ que cumple todas las condiciones menos la existencia de la inversa en el producto.

Ejemplo 1. $\mathbb{Z}$ es un anillo.

Definición 1.5 (Propiedades de cuerpo ordenado de $\mathbb{R}$)**.** Asumimos que existe $P \subset \mathbb{R}$ (**números reales positivos**), con $P \neq \emptyset$, tal que

(i) Conjunto cerrado por la suma:
$$\forall x, y \in P,\ x + y \in P.$$

[1]No hemos demostrado que $x^{-2} = \left(\frac{1}{x}\right)^2$

(ii) Conjunto cerrado por el producto:

$$\forall x, y \in P,\ x \cdot y \in P.$$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}$ se cumple sólo una de las siguientes cosas:

$$x \in P,\ \text{o}\ x = 0\ \text{o}\ -x \in P.$$

A los números tales que $-x \in P$ los llamaremos **números negativos**.

Notaciones

- Si $x \in P$, decimos que $x > 0$.
- Si $x > 0$ o $x = 0$, decimos que $x \geq 0$.
- Si $-x \in P$, decimos que $-x > 0$ o $x < 0$.
- Si $x < 0$ o $x = 0$ decimos que $x \leq 0$.

Definición 1.6. $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

(i) $x > y$ o $y < x$ si $x - y > 0$.

(ii) $x \geq y$ o $y \leq x$ si $x > y$ o $x = y$.

Tenemos que $\mathbb{Q}$ también es un cuerpo ordenado.

Teorema 1.3. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(a) **Propiedad transitiva:** Si $x > y$ y $y > z$, entonces $x > z$.

(b) Si $x > y$, entonces $x + z > y + z$.

(c) Si $x > y$ y $z > 0$, entonces $x \cdot z > y \cdot z$.

Demostración. **(a)** Si $x > y$ entonces $x - y > 0$. Similarmente, $y - z > 0$. Por tanto, $x - y \in P$ y $y - z \in P$. Por las propiedades de P tenemos que:

$$(x - y) + (y - z) \in P \Rightarrow x - z \in P.$$

Consecuentemente, $x - z > 0$ y $x > z$.

(b)

$$(x + z) - (y + z) = x - y \in P.$$

(c)

$$x \cdot z - y \cdot z = (x - y) \cdot z.$$

Como $x - y \in P$ y $z \in P$, tenemos que $(x - y) \cdot z \in P$.

□

Teorema 1.4. **(a)** Si $x \in \mathbb{R}$ y $x \neq 0$, entonces $x^2 > 0$.

(b) $1 > 0$.

(c) Los números naturales son positivos.

Demostración. **(a)** Si $x \neq 0$, x puede ser positivo o negativo. Si $x > 0$, $x \in P$ y $x \cdot x = x^2 \in P$. Si $x < 0$, $-x \in P$, por tanto $(-x) \cdot (-x) \in P$. Además,

$$(-x)(-x) = (-1)^2 x^2 > 0.$$

Tenemos que demostrar que $(-1)^2$ es 1. Sabemos que

$$(-1)(-1) = -(-1).$$

Además,

$$(-1) + 1 = 0 \Rightarrow -(-1) + (-1) + 1 = -(-1) + 0 \Rightarrow -(-1) = 1.$$

Por tanto,

$$1 \cdot x^2 = x^2 > 0.$$

(b) Sabemos que $1 \neq 0$. Aplicamos lo demostrado en **(a)**:

$$1 = 1 \cdot 1 = 1^2 > 0.$$

(c) Definimos un número natural n como la suma de 1, n veces. Tenemos que

$$1 = 1.$$

Además,

$$1 + 1 = 2.$$

Sabemos que $2 > 1$ porque $1 + 1 - 1 = 1 > 0$. Asumimos que esto se sostiene para $n = k$, entonces

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{k} > \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{k-1}.$$

Entonces, si $n = k + 1$,

$$k + 1 = \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{k} + 1.$$

Por tanto, para obtener $k + 1$ estamos sumando 1 un total de $k + 1$ veces. De manera similar, tenemos que

$$k + 1 - k = 1 > 0.$$

Además, por hipótesis de inducción

$$k + 1 - 1 = k > 0.$$

Por lo que, dado que $k \geq 1$ tenemos que $k \in P$ (por la propiedad transitiva).

□

Demostración. [2] □

Ejemplo 2. Consideramos el conjunto $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$. Tenemos que

$$1 + 2 \mod 3 = 3 \mod 3 = 0.$$

Tenemos que este conjunto no es un cuerpo ordenado, pues si $1 > 0$, tenemos que $1 \in P$ y, consecuentemente, $1 + 1 \in P$. Sin embargo,

$$1 + 1 = 2 = -1.$$

Como $1 \in P$, tenemos que $-1 < 0$.

Lema 1.2. Si $x \in \mathbb{R}$ y $x > 0$, entonces $\frac{1}{x} > 0$.

Demostración. Si $\frac{1}{x}$ no es mayor que 0, tenemos que o bien, es 0 o es negativo. No puede ser 0, porque cualquier cosa por 0 es 0. Por tanto, ha de ser negativo. Entonces, el opuesto del inverso ha de ser positivo:

$$-\frac{1}{x} > 0 \Rightarrow x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) > 0.$$

Consecuentemente, $-1 > 0$, que es una contradicción (en un teorema anterior quedó demostrado que $1 > 0$). □

Lema 1.3.

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Demostración. Decimos que

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \iff 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \iff 2 - 1 = (1 + 1) - 1 = 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

□

Teorema 1.5 (Aproximación)**.** Si $x \in \mathbb{R}$, satisface que $0 \leq x < \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$, entonces, $x = 0$.

Demostración. Suponemos que $x \neq 0$. Sabemos, por hipótesis, que es positivo, i.e. $x > 0$. Tomamos $\epsilon = \frac{x}{2} > 0$ (por el lema anterior). Entonces

$$x < \frac{x}{2} \iff x - \frac{x}{2} < 0 \iff x \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = x \cdot \frac{1}{2} < 0.$$

Esto nos da una contradicción.

Otra posible demostración es decir $\epsilon = x$ (contradicción porque es imposible que $x < x$, pues daría que 0 es un número negativo). □

[2] Vamos a usar hechos que no hemos comprobado (la inversa de un positivo es positiva y la mitad de un número positivo es menor que ese número).

Definición 1.7 (Valor absoluto)**.** Sea $x \in \mathbb{R}$, se define $|x|$ de la siguiente manera

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Proposición 1.1. **(i)** $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(ii) $|x|^2 = x^2$

(iii) Si $y \geq 0$:

$$|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y.$$

(iv) $-|x| \leq x \leq |x|$

Demostración. **(i)** Si $x \cdot y > 0$, entonces $|x \cdot y| = x \cdot y$. Además, $x \cdot y > 0 \iff x > 0 \wedge y > 0$ o $x < 0 \wedge y < 0$. Si los dos son positivos

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| = x \cdot y.$$

Si los dos son negativos,

$$|x| \cdot |y| = (-x) \cdot (-y) = x \cdot y.$$

Por tanto,

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$$

Si $x \cdot y < 0$, sin pérdida de generalidad, sea $x < 0$. Entonces $|x| = -x$ y $|y| = y$. Además,

$$|x \cdot y| = -x \cdot y.$$

Por otro lado,

$$|x| \cdot |y| = -x \cdot y.$$

Si $x \cdot y = 0$, o $x = 0$ o $y = 0$. Sin pérdida de generalidad, sea $x = 0$, entonces $|x| = 0$ y $|x \cdot y| = 0$. Además,

$$|x| \cdot |y| = 0 \cdot |y| = 0.$$

(ii) Sabemos que $\forall x \in \mathbb{R}$ se cumple que $x^2 \geq 0$. Entonces, tenemos que

$$x^2 = \left|x^2\right| = |x| \cdot |x| = |x|^2.$$

(iii) Cogemos $y \in \mathbb{R}^*$ y $|x| \leq y$. Analizamos todos los casos. Si $x < 0$, $|x| = -x$ y $-x > 0$. Por tanto, $x < 0 \leq y$. Por tanto,

$$x < y \Rightarrow x \leq y.$$

Por tanto,

$$|x| \leq y \Rightarrow -x \leq y \Rightarrow -y \leq x.$$

Si $x = 0$ tenemso que $|x| = 0$. Además, $0 \leq y$ y $-y < 0$. Si $x > 0$, tenemos que $|x| = x \leq y$. Además,

$$-y \leq 0 < x \Rightarrow -y \leq x.$$

(iv) Lo podemos demostrar de dos formas. En primer lugar, podemos considerar los posibles valores de x. Si $x = 0$ es trivial. Si $x > 0$, tenemos que $|x| = x$. Por tanto, $x \leq |x|$. Además, $-|x| = -x < 0$ y, por tanto,

$$-x < 0 \leq x \leq |x| \Rightarrow -|x| \leq x \leq |x| .$$

Si $x < 0$ tenemos que $|x| = -x$. Entonces, $-|x| = x \leq x$ y $|x| > 0$, por tanto,

$$-|x| \leq x \leq |x| .$$

Otra manera de hacerlo es utilizando el apartado anterior y afirmar que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq x$.

□

Teorema 1.6 (Desigualdad triangular)**.** Para $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x + y| \leq |x| + |y| .$$

Demostración. Utilizamos el apartado **(iii)** del teorema anterior. Tenemos que:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \iff -|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y| .$$

Utilizando **(iv)**, sabemos que $-|x| \leq x \leq |x|$ y, similarmente, $-|y| \leq y \leq |y|$. Por tanto, al sumar estas igualdades obtenemos que

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y| .$$

Esto es lo que queríamos demostrar. □

Corolario 1.1 (Desigualdad triangular al revés)**.** Para $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x - y| \geq ||x| - |y|| .$$

Demostración. Este enunciado es equivalente a (utilizando **(iii)**)

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y| .$$

Además,

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \iff |y| \leq |x - y| + |x| .$$

Entonces, utilizando el teorema anterior

$$|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x| = |x - y| + |x| .$$

Por el otro lado, tenemos que

$$|x| - |y| \leq |x - y| \iff |x| \leq |x - y| + |y| .$$

Por tanto, sabemos que

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| .$$

Por lo que

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y| \iff |x - y| \geq ||x| - |y|| .$$

□

Definición 1.8 (Distancia Euclídea)**.** La distancia en $\mathbb{R}$ se define como

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Nota. A $\mathbb{R}$ se le llama **espacio euclídeo** de dimensión 1.

Proposición 1.2. (i) $d(x, y) \geq 0 \wedge d(x, y) = 0 \iff x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Demostración. **(i)** Trivial

(ii) Trivial

(iii) Utilizamos la desigualdad triangular.

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y).$$

□

Definición 1.9. Dado $x \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$, definimos el **entorno de** x con radio ϵ

$$^{a}B(x, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R} \,:\, |x - y| < \epsilon\} = (x - \epsilon, x + \epsilon).$$

[a] También se usa la V

Observación. $|x - y| < \epsilon \iff -\epsilon < x - y < \epsilon \iff x - \epsilon < y < x + \epsilon \iff y - \epsilon < x < y + \epsilon.$

Notaciones. Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$,

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \leq b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x < b\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x \leq b\}$

Corolario 1.2. $x = a \iff \forall \epsilon > 0,\ x \in B(a, \epsilon)$

Demostración. Sabemos que $y = 0 \iff 0 \leq y < \epsilon,\ \forall \epsilon > 0$. Sea $y = |x - a|$. Ya sabemos que $|x - a| \geq 0$. La hipótesis me dice que

$$\forall \epsilon > 0, |x - a| < \epsilon \Rightarrow |x - a| = 0 \iff x = a.$$

Por el otro lado, es trivial que si $x = a$, $\forall \epsilon > 0,\ x \in B(a, \epsilon)$. □

Corolario 1.3. Para $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$\bigcap_{\epsilon>0} B(a,\epsilon) = \{a\}.$$

[a]

[a] Este colorario significa lo mismo que el anterior.

1.2. Completitud de $\mathbb{R}$

Sabemos que $\forall x \in \mathbb{Q},\ x^2 \neq 2$.
De momento sabemos que $\mathbb{R}$ es un cuerpo abeliano totalmente ordenado. $\mathbb{C}$ no tiene un orden porque no se cumple la condición de que si $z \in \mathbb{C}$ entonces $z^2 \geq 0$.

Definición 1.10. Sea $S \subset \mathbb{R}$ con $S \neq \emptyset$. Se dice que $a \in \mathbb{R}$ es una **cota superior** de S si

$$\forall s \in S,\ s \leq a.$$

Decimos que S está **acotado superiormente** si tiene una cota superior.

Similarmente, se dice que $a \in \mathbb{R}$ es una **cota inferior** de S si

$$\forall s \in S,\ a \leq s.$$

Si tiene una cota inferior decimos que S está **acotado inferiormente**.

Si está acotado superiormente e inferiormente decimos que está acotado.

Ejemplo 3. **(i)** El conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$ está acotado superiormente pero no inferiormente, por lo que no es un conjunto acotado.

(ii) S está acotado si y solo si $\exists c > 0$ tal que $\forall s \in S,\ |s| \leq c$. Es decir,

$$\exists c > 0, \forall s \in S,\ -c \leq s \leq c.$$

Nota. Podemos asumir que el conjunto vacío está acotado (no tenemos nada que comprobar).

Definición 1.11. Sea $S \neq \emptyset$. Se dice que $u \in \mathbb{R}$ es el **supremo** de S si

(i) u es cota superior de S. Es decir, $\forall s \in S,\ u \geq s$.

(ii) Si $v \geq s, \forall s \in S$ entonces $v \geq u$. Es decir, es la menor cota superior.

Analogamente, se dice que $u \in \mathbb{R}$ es el **ínfimo** de S si

(i) $\forall s \in S, u \leq s$.

(ii) Si $\forall s \in S,\ v \leq s$, entonces $v \leq u$. Es decir, es la mayor cota inferior.

Definición 1.12. Si $u = \sup(S)$ y $u \in S$, diremos que u es el **máximo** de S.

Similarmente, si $u = \text{ínf}(S)$ y $u \in S$, diremos que u es el **mínimo** de S.

Ejemplo 4. **(i)** Si $S = (0,1] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 < x \leq 1\}$. Tenemos que $1 = \sup(S)$ y como $1 \in S$, 1 ha de ser el máximo. Además, $\text{ínf}(S) = 0$ y como $0 \notin S$, no existe el mínimo en S.

(ii) Considera el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < 1\}$. Tenemos que $\sup(S) = 1$ y como $1 \notin S$ tenemos que S no tiene máximo. Además, no tiene cotas inferiores, por lo que el ínfimo no existe. Si no existe lo denotamos de la siguiente manera: $\text{ínf} = -\infty$.

Axioma 1 (Axioma del supremo)**.** Para todo conjunto $S \subset \mathbb{R}$ con $S \neq 0$, si S está acotado superiormente, entonces existe $\sup(S)$.

Observaciones. Tenemos que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo abeliano ordenado, pero no se cumple el axioma del supremo. Considera el conjunto

$$S = \left\{x \in \mathbb{Q} \ : \ x^2 \leq 2\right\}.$$

Este conjunto está acotado superiormente pero no tiene supremo ($\sup(S) \notin S$) porque no existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = 2$.

Notación. Si se satisface el axioma del supremo diremos que el cuerpo abeliano, totalmente ordenado, es **completo** [3].

Teorema 1.7. Sea $S \subset \mathbb{R}$ con $S \neq \emptyset$. Supongamos que S está acotado inferiormente. Sea $-S = \{-s \ : \ s \in S\}$. Entonces $-S$ está acotado superiormente y, por el axioma del supremo, tiene supremo. Entonces,

$$\sup(-S) = -\text{ínf}(S).$$

Es decir, el ínfimo existe y es el opuesto del supremo de $-S$.

Demostración. Sea $v \leq s,\ \forall s \in S$. Sabemos que v existe por la hipótesis del teorema. Entonces, $\forall s \in S,\ -s \leq -v$. Por tanto, $-v$ es una cota superior de $-S$. Por el axioma del supremo, tenemos que $\exists u = \sup(-S)$.

(i) Demostramos que $-u$ es una cota inferior. Sabemos que $u \geq -s,\ \forall s \in S$. Consecuentemente, $-u \leq s,\ \forall s \in S$.

(ii) Si $\forall s \in S,\ v \leq s$. Entonces, $-s \leq -v$, por lo que $-v$ es cota superior de $-S$. Por tanto, $u \leq -v$ y, consecuentemente, $-u \geq v$.

$\square$

[3] No es completo en el sentido algebraico, pues no hay $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = -1$, es completo en el sentido de que no tiene agujeros

Proposición 1.3. Sea $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}$.

(i) Si S está acotado superiormente

$$u = \sup(S) \iff (\forall s \in S, u \geq s) \wedge (\forall \epsilon > 0, \exists s \in S,\ u - \epsilon < s).$$

(ii) Si S está acotado inferiormente,

$$u = \text{ínf}(S) \iff (\forall s \in S,\ u \leq s) \wedge (\forall \epsilon > 0, \exists s \in S,\ s < u + \epsilon).$$

Demostración. **(i)** Sea $u = \sup S$, entonces $\forall s \in S,\ u \geq s$.Sea $\epsilon > 0$ y consideremos el punto $u - \epsilon$. Si $u - \epsilon \geq s, \forall s \in S$. Entonces $u - \epsilon$ es cota superior de S. Además, tenemos que $u - \epsilon < u$, pero como $\sup S = u$ tenemos que $u \leq u - \epsilon$. Esto es una contradicción.

(ii) Recíprocamente, si u es una cota superior y $\forall \epsilon > 0, \exists s \in S,\ u - \epsilon < s$. Si u no fuera supremo, existe $v \geq s, \forall s \in S$ tal que $v < u$. Si tomamos $\epsilon = u - v > 0$, tenemos que existe $s \in S$ tal que $s > u - \epsilon$, entonces,

$$u - \epsilon = v < s.$$

Esto es una contradicción.

□

Proposición 1.4. Si $A, B \subset \mathbb{R}$ con $A, B \neq \emptyset$, tales que $\forall a \in A, \forall b \in B$ se verifica que $a \leq b$, entonces, $\sup A \leq \text{ínf} B$ (existen $\sup A$ y $\text{ínf} B$).

Demostración. Tenemos que $\forall b \in B, \forall a \in A,\ b \geq a$. Por tanto, A está acotado superiormente y, por el axioma de completitud, existe $\sup A$ y que $\sup A \leq b, \forall b \in B$. Por tanto, $\sup A$ es una cota inferior de B y, por tanto,

$$\sup A \leq \text{ínf} B.$$

□

Teorema 1.8 (Propiedad Arquimediana de $\mathbb{R}$)**.** Para todo $x \in \mathbb{R}, \exists n_x \in \mathbb{N}$ tal que $x < n_x$.

Demostración. Asumimos que $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \leq x$. Por lo que $\mathbb{N}$ está acotado superiormente. Entonces, por el axioma de completitud tenemos que $\exists \sup \mathbb{N} \leq x$. Sabemos que $u = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Como $u - 1 < u$, tenemos que $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $u - 1 < m \leq u$. Entonces, $u < m + 1$. Sin embargo, $m + 1 \in \mathbb{N}$ y tenemos que hay un número natural mayor que el supremo de todos los números naturales. Esto es una contradicción. □

Corolario 1.4.

$$\text{ínf} \left\{ \frac{1}{n}\ :\ n \in \mathbb{N} \right\} = 0.$$

Demostración. Sea $S = \left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ Como el inverso de un número positivo es positivo, tenemos que el conjunto está acotado inferiormente por 0. Dado $\epsilon > 0$. Como $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente, si tomamos $x = \frac{1}{\epsilon}$, podemos encontrar $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{\epsilon} < n_\epsilon.$$

Por tanto,

$$0 \leq \text{ínf}\, S \leq \frac{1}{n_\epsilon} < \epsilon.$$

Por tanto, como $\forall \epsilon > 0, 0 \leq \text{ínf}\, S < \epsilon$, tenemos que $\text{ínf}\, S = 0$. □

Corolario 1.5. $\forall a > 0$,

$$\text{ínf}\left\{\frac{a}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\} = 0.$$

Observación. $\mathbb{R}$ es el cuerpo abeliano, ordenado, completo y arquimediano.Es el único conjunto que satisface esto (si hay otro conjunto que también lo cumple, es esencialmente el mismo).

Lema 1.4. Si $a, b > 0$ entonces

$$a < b \iff a^2 < b^2.$$

Demostración.

$$a^2 < b^2 \iff b^2 - a^2 > 0 \iff (b + a)(b - a) > 0.$$

Sabemos que $a, b > 0$, por tanto $b + a > 0$, por tanto $b - a$ tiene que ser positivo y, por tanto, $b > a$. □

Teorema 1.9. Existe $x \in \mathbb{R}$, tal que $x^2 = 2$.

Demostración. Sea $S = \left\{s \in \mathbb{R} \ : \ 0 \leq s \ \wedge \ s^2 < 2\right\}$. Sabemos que $S \neq \emptyset$ porque $1 \in S$. Demostramos que está acotado superiormente. Si $s \in S$, entonces, $s^2 < 2 < 4$. Por el lema anterior,

$$s < 2.$$

Por tanto, S está acotado superiormente por 2. Por el axioma de la completitud, $\exists u = \sup S$. Sabemos que

$$1 \leq u \leq 2.$$

Supongamos que $u^2 \neq 2$:

(i) Si $u^2 < 2$, sea $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\left(u + \frac{1}{n}\right)^2 &= u^2 + \frac{2u}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &< u^2 + \frac{2u}{n} + \frac{1}{n} \\ &= u^2 + \frac{2u+1}{n}.\end{aligned}$$

Para demostrar que $u^2 + \dfrac{2u+1}{n} < 2$ tenemos que demostrar que $\dfrac{2u+1}{n} < 2 - u^2$. Como $2u + 1 > 0$, tenemos que por el colorario anterior que,

$$\operatorname{ínf}\left\{\frac{2u+1}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\} = 0.$$

Por tanto, $\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{2u+1}{n_\epsilon} < \epsilon$ [4] . Si tomamos $\epsilon = 2 - u^2$, $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{2u+1}{n_\epsilon} < 2 - u^2 = \epsilon \iff \left(u + \frac{1}{n_\epsilon}\right)^2 < u^2 + \frac{2u+1}{n_\epsilon} < 2 - u^2 + u^2 = 2.$$

Por tanto, $u = \sup S < u + \dfrac{1}{n_\epsilon} \in S$. Esto es una contradicción.

(ii) Si $u^2 > 2$, sea $m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\left(u - \frac{1}{m}\right)^2 &= u^2 - \frac{2u}{m} + \frac{1}{m^2} \\ &> u^2 - \frac{2u}{m}.\end{aligned}$$

Queremos decir que $u^2 - \dfrac{2u}{m} > 2$. Cogemos $\epsilon = u^2 - 2 > \dfrac{2u}{m}$. Usamos el colorario de la propiedad arquimediana. Tenemos que $2u > 0$. Además,

$$\operatorname{ínf}\left\{\frac{2u}{m} \;:\; m \in \mathbb{N}\right\} = 0.$$

Por tanto, $\exists m_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{2u}{m_\epsilon} < \epsilon$.

$$u^2 - \frac{2u}{m_\epsilon} > u^2 - \epsilon = u^2 - \left(u^2 - 2\right) = 2.$$

Así, hemos llegado a la conclusión de que $\left(u - \dfrac{1}{m_\epsilon}\right)^2 > 2 > s^2, \forall s \in S$. Por el lema anterior,

$$u - \frac{1}{m_\epsilon} > s, \forall s \in S.$$

[4] En este paso puedes utilizar directamente la propiedad arquimediana y decir que puedes encontrar un $n \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande.

Entonces, $u - \dfrac{1}{m_\epsilon}$ es una cota superior de S que a su vez es menor que $u = \sup S$. Es decir

$$u - \frac{1}{m_\epsilon} < u \quad \text{y} \quad u - \frac{1}{m_\epsilon} \geq u.$$

Esto es una contradicción.

Por tanto, no puede ser que $u^2 > 2$ ni $u^2 < 2$. Por tanto, debe ser que $u^2 = 2$. □

Corolario 1.6. Para todo $a > 0$, y para tod $n \in \mathbb{N}$, existe $x > 0$ tal que

$$x^n = a.$$

Notación. En las condiciones del corolario,

$$x = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Definición 1.13. Si $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$,

$$a^{-\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}.$$

Definición 1.14. $a > 0$, $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$,

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m.$$

Proposición 1.5 (Principio de la buena ordenación)**.** Si $A \subset \mathbb{N}$ con $A \neq \emptyset$, entonces existe $n \in A$ tal que

$$\forall m \in A,\ n \leq m.$$

Definición 1.15. Un conjunto A con un orden se dice que está **bien ordenado** si contiene un primer elemento:

$$\exists x \in A, \forall y < x \Rightarrow y \notin A.$$

Ejemplo 5. **(i)** Todo conjunto finito de $\mathbb{R}$ está bien ordenado.

(ii) El intervalo $[0, \infty)$ está bien ordenado.

Teorema 1.10. Sea $A \subset \mathbb{N}$ con $A \neq \emptyset$, entonces A está bien ordenado.

Demostración. Suponemos lo contrario, es decir, existe $\exists A \subset \mathbb{N}$ que no tiene un primer elemento. Queremos ver que $\forall n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{1, \ldots, n\} \cap A = \emptyset$. Si $n = 1$, $\{1\} \cap A = \emptyset$, porque sino 1 sería el primer elemento.

Asumimos que $\{1, 2, \ldots, n\} \cap A = \emptyset$. Entonces tenemos que en el caso de $n + 1$:

$$\{1, \ldots, n+1\} \cap A = (\{1, \ldots, n\} \cup \{n+1\}) \cap A = (\{1, \ldots, n\} \cap A) \cup (\{n+1\} \cap A) = \{n+1\} \cap A.$$

Esto puede ser vacío, o que $\{n+1\} \cap A = \{n+1\}$. Si pasase esto último, $n + 1$ sería el menor elemento de A, que rompe con nuestra hipótesis inicial. Por lo tanto, tenemos que $A = \emptyset$. Esto rompe con nuestra hipótesis del teorema. $\square$

Corolario 1.7. Si $x \geq 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 \leq x < n$.

Demostración. Sea $A = \{m \in \mathbb{N} \,:\, m > x\} \neq \emptyset$ (por la propiedad arquimediana). Sea n el primer elemento de A. Tenemos que como $n \in A$, $n > x$. Además, $n - 1 \notin A$, por lo que $n - 1 \leq x$. Por tanto:

$$n - 1 \leq x < n.$$

[5] $\square$

Notación. $\lfloor x \rfloor$ es la parte entera de x tal que $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Teorema 1.11 (Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$)**.** Si $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, entonces existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $0 \leq x < y$ [6]. Sabemos, etonces, que $y - x > 0$. Por tanto, podemos encontrar un $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$y - x > \frac{1}{n} > 0.$$

Entonces, sabemos que

$$ny > nx \geq 0.$$

Por el corolario anterior, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que

$$m - 1 \leq nx < m.$$

[5] En el caso de números negativos, coges que $-x > 0$ y repites la demostración.

[6] Si fuesen negativos, cambiamos el signo y repetimos la demostración.

Entonces, tenemos que $x < \dfrac{m}{n} = r \in \mathbb{Q}$. Combinando las ecuaciones anteriores:

$$ny > n\left(\frac{1}{n} + x\right) = 1 + xn \geq 1 + m - 1 = m \Rightarrow y > \frac{m}{n} = r > x.$$

Por tanto,

$$x < r < y.$$

□

Notación. Los intervalos no acotados los definimos de la siguiente manera:

- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x\}$
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x\}$
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \leq b\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < b\}$
- $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

Teorema 1.12. Sea $S \subset \mathbb{R}$ con $S \neq \emptyset$, tal que $\forall x, y \in S,\ x < y$ se verifica que $[x, y] \subset S$. Entonces, S es un **intervalo** [a] .

[a] Es uno de los casos de intervalos que hemos visto anteriormente (acotado y no acotado).

Demostración. **(i)** Supongamos que S está acotado, sea $a = \inf S$ y $b = \sup S$. Si consideramos el intervalo $[a, b]$ tenemos que como $a = \inf S$, $\forall s \in S,\ s \geq a$. Por el mismo razonamiento, $\forall s \in S,\ b \geq s$. Por tanto,

$$\forall s \in S,\ a \leq s \leq b \Rightarrow S \subset [a, b]\,.$$

Sea $z \in (a, b)$, queremos decir que $z \in S$. Como $a = \inf S$, tenemos que $\exists s \in S$ tal que $a < s < z$. Similarmente, como $b = \sup S$, $\exists s' \in S$ tal que $z < s' < b$. Por tanto, por la hipótesis del teorema tenemos que $s < s'$, por lo que $[s, s'] \subset S$ y $z \in [s, s']$ por lo que $z \in S$.

$$\therefore (a, b) \subset S.$$

Ahora hay que valorar los posibles casos de si $a, b \in S$, para determinar de qué tipo de intervalo acotado se trata.

(ii) Supongamos que S está acotado inferiormente pero no superiormente. Entonces tenemos que si $x \in S$ y $a = \inf S$, $a \leq s, \forall s \in S$. Por tanto,

$$\forall s \in S, a \leq s \Rightarrow S \subset [a, \infty).$$

Si $z \in (a, \infty)$, tenemos que $a < z$. Si cogemos $\epsilon > 0$ tal que $a + \epsilon = z$, podemos encontrar $s \in S$ tal que

$$a \leq s < z.$$

Dado que S no está acotado superiormente, podemos encontrar s' tal que $s < z < s'$. Por tanto, $s < s'$ y por hipótesis, $[s, s'] \subset S$, por lo que $z \in [s, s']$ y $z \in S$.

$$\therefore (a, \infty) \subset S.$$

(iii) El caso en el que S está acotado superiormente pero no inferiormente se demuestra igual.

(iv) Si S no está acotado, tenemos que $S \subset \mathbb{R}$. Si $z \in \mathbb{R}$, como S no está acotado, podemos encontrar $s, s' \in S$ tales que $s < z < s'$. Por tanto, $[s, s'] \subset S$ y $z \in [s, s']$, por lo que $z \in S$. De esta manera,

$$(S \subset \mathbb{R}) \wedge (\mathbb{R} \subset S) \Rightarrow S = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)\,.$$

□

Teorema 1.13 (Teorema de los intervalos encajados)**.** Sean $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, con $n \in \mathbb{N}$ tales que $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$. Sea $I_n = [a_n, b_n]$. Esto no puede ser un punto, porque $a_n < b_n$. Entonces $I_{n+1} \subset I_n$. Entonces,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset.$$

[a]

[a] Si el intervalo estuviera abierto, tenemos que la intersección sería el conjunto vacío. Esto se puede demostrar por reducción al absurdo.

Demostración. Sean $m, n \in \mathbb{N}$, tenemos que $a_m < b_n$. En efecto, si $m \leq n$, entonces, $a_m \leq a_n < b_n \leq b_m$. Si $m > n$,

$$a_m < b_m \leq b_n.$$

Así, demostramos que todos los a_i están a la iquierda y los b_i a la derecha. Entonces, b_n es una cota superior de a_m, y existe $a = \sup\{a_m \,:\, m \in \mathbb{N}\} \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Similarmente, $a \leq \operatorname{ínf}\{b_n \,:\, n \in \mathbb{N}\} = b$. Entonces

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n.$$

Por lo que $[a, b] \subset I_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Consecuentemente,

$$\emptyset \neq [a, b] \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n.$$

□

Corolario 1.8. En las condiciones del teorema de los intervalos encajados, si $\operatorname{ínf}\{b_n - a_n\} = 0$ entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ se reduce a un punto.

Demostración. Si $\operatorname{ínf}\{b_n - a_n \,:\, n \in \mathbb{N}\} = 0$, entonces para $\forall \epsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq b - a \leq b_m - a_m < \epsilon.$$

Como esto se cumple para todo $\epsilon > 0$, tenemos que $b - a = 0$ y, por tanto, $b = a \in I_n, \forall n \in \mathbb{N}$. □

Teorema 1.14. $\mathbb{R}$ no es numerable.

Demostración. Basta probar que el intervalo $I = [0,1]$ no es numerable [7]. Supongamos que es numerable, es decir, $\exists \varphi : \mathbb{N} \to [0,1]$ biyectiva. Así, $\forall x \in [0,1], \exists! n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) = x$. Sea $x_n = \varphi(n)$. Entonces, $I = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sea $n = 1$ y $x_1 \in [0,1]$. Sea $I_1 \subset [0,1]$ tal que $x_1 \notin I_1$. Si $x_2 \in I_1$, sea $I_2 \subset I_1$ tal que $x_2 \notin I_2$. Iterando, sean $I_1, \ldots, I_n$ intervalos cerrados y encajados tales que $x_n \notin I_n$ [8].

$$I \subset I_1 \subset \cdots \subset I_n.$$

Por el teorema de los intervalos encajados, podemos asegurar que

$$\emptyset \neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \subset I = [0,1].$$

Sea $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Entonces, $x \neq x_1$, pues $x \in I_1$. Por la misma razón, $x \neq 2$, y $x \neq x_n$. Por tanto, $\forall n \in \mathbb{N}, x \neq x_n$, por lo que $x \notin I$, lo que es una contradicción. Por tanto, I no es numerable y, consecuentemente, $\mathbb{R}$ tampoco lo es. $\square$

Corolario 1.9. Los números irracionales, $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ no es un conjunto numerable.

Demostración. Asumimos que $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ es numerable. Entonces, tenemos que

$$(\mathbb{R}/\mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}.$$

Sabemos que la unión de dos conjuntos numerables será numerable, pero $\mathbb{R}$ no es numerable, esto es una contradicción. Por tanto, debe ser que $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ no es numerable. $\square$

[7] Hay que tener en cuenta que existe una biyección entre $\mathbb{R}$ y $[0,1]$.

[8] Estamos asumiendo que estos intervalos cumplen con los requisitos del teorema de los intervalos encajados, es decir, son intervalos cerrados.