Cálculo Diferencial

Victoria Torroja Rubio

8/9/2025

Índice general

Profesor: Jesús Jaramillo

Despacho: 305-E

Correo: jaramil@mat.ucm.es

Contenido:

- Topología de los espacios métricos (Cap 1-5) - Aprox: 6'5 semanas
- Cálculo diferencial en varias variables (Cap 6-11) - Resto

Bibliografía:

- Marsdem-Hoffman (sirve para las dos partes): 'Análisis clásico elemental'
- K. Smith (la parte de integración es más avanzada): 'Primer of modern analysis'

Materiales Campus:

- Apuntes de Victor Sánchez (apuntes muy condensados)
- Manual de Ansemil-Ponte (versión extendida de Marsden-Hoffman)
- Curso de Daniel Azagra

Capítulo 1

Espacios métricos

Definición 1.1 (Espacio métrico). Un **espacio métrico** es un par (X, d) donde X es un conjunto no vacío y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una función que se llama **distancia** o **métrica**, tal que:

1. $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$.
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in X$.
4. (Propiedad triangular) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $\forall x, y, z \in X$.

Ejemplo. Algunos ejemplos de espacios métricos son:

1. Consideremos $(\mathbb{R}, d)$ donde $d(x, y) = |x - y|$.
2. La distancia euclídea en $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$:
$$d\left(\left(x_1, x_2\right), \left(y_1, y_2\right)\right) = \sqrt{\left(x_1 - y_1\right)^2 + \left(x_2 - y_2\right)^2}.$$
3. La 'métrica del taxi' en $\mathbb{R}^2$ con distancia:
$$d_1\left(\left(x_1, x_2\right), \left(y_1, y_2\right)\right) = \left|x_1 - y_1\right| + \left|x_2 - y_2\right|.$$
4. Distancias geodésicas: el camino más corto (por ejemplo, en una superficie esférica el camino más corto entre dos puntos es un arco de circunferencia).
5. Distancias en $\mathbb{R}^n$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, consideramos la distancia euclídea
$$d_2(x, y) = \sqrt{\left(x_1 - y_1\right)^2 + \cdots + \left(x_n - y_n\right)^2}.$$

También podemos generalizar la 'métrica del taxi':

$$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|.$$

También se puede considerar la métrica

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i| \ : \ 1 \leq i \leq n\}.$$

Definición 1.2 (Espacio discreto). Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto cualquiera, y definimos $\forall x, y \in X$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y \\ 1, & \text{si } x \neq y \end{cases}.$$

Se dice que d es la **métrica discrecta** y (X,d) el **espacio métrico discreto**.

Definición 1.3 (Subespacio métrico). Sea (X,d) un espacio métrico y sea $Y \subset X$. Se define la **métrica relativa** (o **restringida**) a Y como $d_Y(y,y') = d(y,y')$, $\forall y, y' \in Y$. Entonces, (Y, d_Y) es un espacio métrico que llamaremos **subespacio** de X.

1.1. Espacios normados

Definición 1.4 (Espacio normado). Un **espacio normado** es un par $(E, \|\cdot\|)$ donde E es un espacio vectorial y $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ es una función que se llama **norma** tal que:

1. $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in E$.
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E$ [a].
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in E$.

[a] En este curso $\mathbb{K}$ va a ser principalmente $\mathbb{R}$.

Proposición 1.1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Si definimos

$$d(x,y) = \|x - y\|, \forall x, y \in E,$$

se obtene que d es una distancia en E, que se llama **asociada** a la norma.

Demostración. Demostremos todas las propiedades de las métricas:

1. Tenemos que $d(x,y) = \|x - y\| \geq 0$, $\forall x, y \in E$.
2. $d(x,y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$.
3. $d(x,y) = \|y - x\| = |-1| \, \|x - y\| = \|x - y\| = d(x,y)$.

4. $d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y)$.

□

Observación. En $\mathbb{R}^n$, dado $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se definen:

$$\text{(Norma euclídea)} \quad \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|.$$

$$\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_i| \ : \ 1 \leq i \leq n\}.$$

Proposición 1.2 (Relación entre las normas en $\mathbb{R}^n$). $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

Demostración. Supongamos que $|x_{i_0}| = \|x\|_\infty$. Entonces, tenemos que

$$|x_{i_0}|^2 \leq |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2.$$

Dado que la función de la raíz es creciente, tenemos que

$$\|x\|_\infty = |x_{i_0}| \leq \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} = \|x\|_2.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\|x\|_1^2 = (|x_1| + \cdots + |x_n|)^2 = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 + C^1 \geq |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 = \|x\|_2^2.$$

Finalmente, tenemos que

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n| \leq |x_{i_0}| + \cdots + |x_{i_0}| = n\,|x_{i_0}| = n\|x\|_\infty.$$

□

Definición 1.5. Dos normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ en un mismo espacio vectorial E son **equivalentes** cuando existen $m, M > 0$ tales que

$$m\|x\|' \leq \|x\| \leq M\|x\|', \ \forall x \in E.$$

Observación. Hemos visto en la proposición anterior que $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ son equivalentes en $\mathbb{R}^n$.

---

[1] $C \geq 0$.

Definición 1.6 (Producto escalar)**.** Sea E un espacio vectorial real. Un **producto escalar** en E es una forma bilineal, simétrica y definida positiva. Es decir, una aplicación $\langle , \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ tal que

1. $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$, $\forall x, y, z \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\forall x, y \in E$.
3. $\forall x \in E$, $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

Observación. En este caso, denotaremos $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Teorema 1.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** Sea E un espacio vectorial dotado de un producto escalar $\langle , \rangle$. Entonces

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \ \forall x, y \in E.$$

Demostración. **Caso 1.** Si $x = 0$ o $y = 0$, obtenemos la igualdad.

Caso 2. Si $y \neq 0$, tenemos que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle = \langle x, x \rangle + \alpha \langle x, y \rangle + \alpha \langle y, x \rangle + \alpha^2 \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\alpha \langle x, y \rangle + \alpha^2 \|y\|^2.$$

Tomamos $\alpha = -\dfrac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$. Así, tenemos que

$$0 \leq \|x\|^2 - \frac{2 \langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} + \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^4} \|y\|^2 = \|x\|^2 - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2}.$$

Así, tenemos que $\dfrac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} \leq \|x\|^2$, por lo que $\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$ y tenemos que $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

□

Proposición 1.3. Sea E un espacio vectorial dotado de un producto escalar $\langle , \rangle$. Entonces, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, es una norma en E, que se dice asociada a $\langle , \rangle$.

Demostración. Comprobamos que se cumplen las propiedades de las normas:

1. Tenemos que claramente $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$, $\forall x \in E$.
2. $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.
3. $\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle = \lambda^2 \|x\|^2$. Tomando la raíz cuadrada, $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.

4. Si $x, y \in E$,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2\\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 .\end{aligned}$$

Tomando raíces, tenemos que se verifica la propiedad triangular: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

□

1.2. Bolas en un espacio métrico

Definición 1.7. Sea (X, d) un espacio métrico y consideramos $a \in X$, $r > 0$. Se definen como **bola abierta** de centro a y radio r al conjunto

$$B(a, r) = \{x \in X \ : \ d(x, a) < r\}.$$

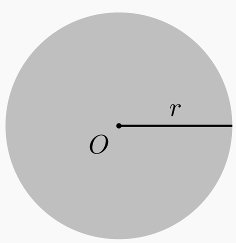
Similarmente, se llama **bola cerrada** de centro a y radio r al conjunto

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in X \ : \ d(x, a) \leq r\}.$$

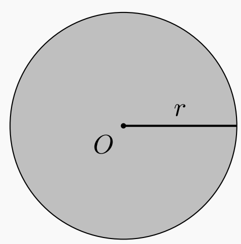
Ejemplo. Considermos bolas en $\mathbb{R}^2$ de distintas normas.

1. Consideremos bolas abiertas y cerradas con la métrica euclídea:

$$B_2((0,0), r) = \left\{(x, y) \ : \ \sqrt{x^2+y^2} < r\right\}, \ \overline{B}_2((0,0), r) = \left\{(x, y) \ : \ \sqrt{x^2+y^2} \leq r\right\}.$$



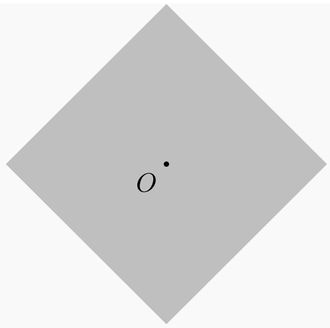
$B_2((0,0), r)$



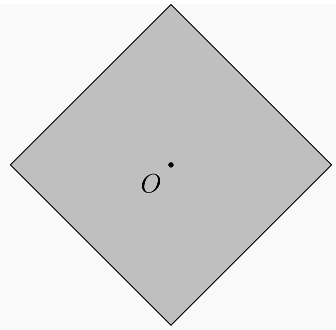
$\overline{B}_2((0,0), r)$

2. Consideremos bolas abiertas y cerradas con la métrica 'del taxi':

$$B_1((0,0), r) = \{(x, y) \ : \ |x| + |y| < r\}, \ \overline{B}_1((0,0), r) = \{(x, y) \ : \ |x| + |y| \leq r\}.$$



$B_1((0,0),r)$

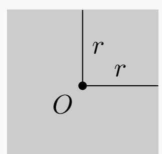


$\overline{B}_1((0,0),r)$

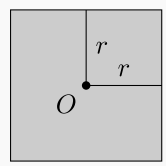
3. Consideremos bolas abiertas y cerradas con la métrica infinita:

$$B_\infty\left((0,0),r\right)=\left\{(x,y)\ :\ \text{máx}\left\{|x|,|y|\right\}<r\right\}=\left\{(x,y)\ :\ |x|,|y|<r\right\}.$$

$$\overline{B}_\infty\left((0,0),r\right)=\left\{(x,y)\ :\ \text{máx}\left\{|x|,|y|\right\}\leq r\right\}=\left\{(x,y)\ :\ |x|,|y|\leq r\right\}.$$



$B_\infty((0,0),r)$



$\overline{B}_\infty((0,0),r)$

Observación. En $(\mathbb{R},|\cdot|)$ se tiene que $B\left(0,r\right)=\left(-r,r\right)$ y $\overline{B}\left(0,r\right)=[-r,r]$. Similarmente, tenemos que $B\left(a,r\right)=\left(a-r,a+r\right)$ y $\overline{B}\left(a,r\right)=[a-r,a+r]$.

Observación (Relación de las bolas en $\mathbb{R}^n$)**.** Sabemos que

$$\|x\|_\infty\leq\|x\|_2\leq\|x\|_1\leq n\|x\|_\infty.$$

Por tanto, tenemos que

$$B_1\left(a,r\right)\subset B_2\left(a,r\right)\subset B_\infty\left(a,r\right)\subset B_1\left(a,nr\right).$$

En efecto, si $x\in B_1\left(a,r\right)$, tenemos que $\|x-a\|_1<r$. Por tanto, es fácil ver que $\|x-a\|_2\leq\|x-a\|_1<r$, por lo que $x\in B_2\left(a,r\right)$.

Definición 1.8. Sean (X,d) un espacio métrico y $A\subset X$. Se define el **diámetro** de A como

$$diam\left(A\right)=\sup\left\{d\left(x,y\right)\ :\ x,y\in A\right\}\in[0,\infty).$$

Se dice que A es **acotado** si $diam\left(A\right)<\infty$.

Proposición 1.4. Dado un espacio métrico (X, d) con $A \subset X$, tenemos que A está acotado si y solo si A está contenido en alguna bola.

Demostración. **(i)** Supongamos que A está acotado, entonces $diam\,(A) = r < \infty$. Así, tenemos que si $x \in A$, etonces $\forall a \in A$ se tiene que $d\,(a, x) \leq r$, por lo que $A \subset \overline{B}\,(a, r)$. También podemos ver que lo contiene una bola abierta: $A \subset \overline{B}\,(a, r) \subset B\,(a, r+1)$.

(ii) Si A está contenido en una bola, tenemos que existe $x \in X$ y $\frac{r}{2} > 0$ tal que $A \subset B\left(x, \frac{r}{2}\right)$. De esta manera, si $a, b \in A$ se tiene que

$$d\,(a, b) \leq d\,(a, x) + d\,(x, b) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Así, se tiene que $\forall a, b \in A$, $d\,(a, b) < r$, por lo que $diam\,(A) \leq r < \infty$, por lo que A está acotado.

□

1.3. Conceptos topológicos

Definición 1.9 (Conjunto abierto). Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que A es un **conjunto abierto** si $\forall a \in A, \exists r > 0$ tal que $B\,(a, r) \subset A$.

Proposición 1.5. Toda bola abierta es un conjunto abierto.

Demostración. Tomemos $A = B\,(a, R)$ y $x \in B\,(a, r)$. Sea $\delta = d\,(x, a) < R$ y $r = R - \delta > 0$. Sea $y \in B\,(x, r)$, tenemos que $d\,(x, y) < r$. Así,

$$d\,(y, a) \leq d\,(y, x) + d\,(x, a) < r + \delta = R.$$

Así, $y \in B\,(a, R)$, por lo que $B\,(x, r) \subset B\,(a, R)$. □

Ejemplo. En $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\right)$.

1. Consideremos $A = \{(x, y) \ : \ 0 < x < 1\}$. Vamos a ver que es abierto. Si $a \in A$, sea $a = (x, y)$ y consideramos $r = \text{mín}\,\{x, 1 - x\}$. Entonces, tenemos que $B_2\,(a, r) \subset A$, en efecto, si $(x', y') \in B_2\,(a, r)$:

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} < r \Rightarrow |x - x'| < r \Rightarrow 0 < x' < 1.$$

   Así, tenemos que $(x', y') \in A$.

2. Consideremos $A = \{(x, y) \ : \ 0 < x \leq 1\}$. Vamos a ver que no es abierto. En efecto, si tomamos $a = (1, 0)$ y $r > 0$, tenemos que $\left(1 + \frac{r}{2}, 0\right) \in B_2\,(a, r)$ pero

$\left(1+\frac{r}{2},0\right) \notin A.$

Proposición 1.6. En $\mathbb{R}^n$ los conjuntos abiertos coinciden para $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$.

Demostración. Como se vio en una observación anterior, sabemos que

$$B_1(a,r) \subset B_2(a,r) \subset B_\infty(a,r) \subset B_1(a,nr).$$

- Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Si A es abierto con la norma $\|\cdot\|_2$, tenemos que $\forall a \in A, \exists r > 0$ tal que $B_2(a,r) \subset A$. Por la observación, como $B_1(a,r) \subset B_2(a,r) \subset A$, tenemos que también es abierto para la norma $\|\cdot\|_1$.
- Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Si A es abierto con la norma $\|\cdot\|_\infty$, entonces $\forall a \in A, \exists r > 0$ tal que $B_\infty(a,r) \subset A$. Por la observación anterior, tenemos que $B_2(a,r) \subset B_\infty(a,r) \subset A$, por lo que A es abierto respecto a la norma $\|\cdot\|_2$.
- Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Si A es abierto respecto de $\|\cdot\|_1$, tenemos que $\forall a \in A, \exists r > 0$ tal que $B_1(a,r) \subset A$. Sea $r' = \frac{r}{n} > 0$,

$$B_\infty(a,r') \subset B_1(a,nr') = B_1(a,r) \subset A.$$

  Por tanto, A es abierto respecto de la norma $\|\cdot\|_\infty$.

□

Teorema 1.2 (Propiedades de los abiertos)**.** Sea (X,d) un espacio métrico.

1. X y $\emptyset$ son abiertos.
2. La unión arbitraria de abiertos es abierto.
3. La intersección finita de abiertos es abierto.

Demostración.

1. Es trivial que $\emptyset$ es abierto. Por otro lado, si $a \in X$, tenemos que $\forall r > 0$, $B(x,r) \subset X$. Así, X está abierto.
2. Supongamos que $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos abiertos y sea $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. Si $a \in A$, tenemos que $a \in A_i$ para algún $i \in I$. Así, existe $r > 0$ tal que $B(a,r) \subset A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i$. Por tanto, $B(a,r) \subset A$ y A es abierto.
3. Sean $A_1, \dots, A_m$ conjuntos abiertos y sea $A = A_1 \cap \dots \cap A_m$. Si $a \in A$, tenemos que $a \in A_i$ para $1 \leq i \leq m$. Así, existe $r_i > 0$ tal que $B(a,r_i) \subset A_i$. Si tomamos $r = \min\{r_i : 1 \leq i \leq m\}$, tenemos que $B(a,r) \subset B(a,r_i)$, $\forall i = 1, \dots, m$. Por tanto, $B(a,r) \subset A$ y A es abierto.

□

Observación. La intersección infinita de conjuntos abiertos puede no ser abierto. Por ejemplo, consideremos en $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\right)$ consideramos $A_m = B_2\left((0,0), \frac{1}{m}\right)$, que es abierto $\forall m \in M$. Sin embargo, $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m = \{(0,0)\}$, que no es abierto.

Definición 1.10 (Conjunto cerrado)**.** Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que un conjunto $C \subset X$ es **cerrado** si X/C es abierto.

Proposición 1.7. Toda bola cerrada es un conjunto cerrado.

Demostración. En efecto, sea $C = \overline{B}(p, R) = \{x \in X \ : \ d(x,p) \leq R\}$ y sea $A = X/C = \{x \in X \ : \ d(x,p) > R\}$. Si $a \in A$, tenemos que $d(a,p) = \delta > R$. Así, tomando $r = \delta - R > 0$, si $x \in B(a, r)$, tenemos que

$$d(x,p) \geq d(p,a) - d(x,a) > \delta - r = R.$$

Así, tenemos que $x \in A$, por lo que $B(a,r) \subset A$ y X/C es abierto, por lo que C es cerrado. $\square$

Observación. Es fácil ver que en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$:

- (a, b) es abierto.
- $[a, b]$ es cerrado.
- $(a, b]$ y $[a, b)$ no son ni abiertos ni cerrados.

Teorema 1.3 (Propiedades de los cerrados)**.** Sea $(X, \emptyset)$ un espacio métrico.

1. Los conjuntos X y $\emptyset$ son cerrados.
2. La intersección arbitraria de cerrados es cerrado.
3. La unión finita de cerrados es cerrado.

Demostración.

1. Dado que $\emptyset = X/X$ y $X = X/\emptyset$, del teorema anterior se sigue que son cerrados.
2. Sean $\{C_i\}_{i \in I}$ cerrados. Entonces, $\forall i \in I$ tenemos que X/C_i es abierto, así,

$$X/\bigcap_{i \in I} C_i = \bigcup_{i \in I} (X/C_i),$$

que es abierto, por lo que $\bigcap_{i \in I} C_i$ es cerrado.

3. Sean $C_1, \ldots, C_m$ cerrados. Entonces, $\forall i = 1, \ldots, m$, tenemos que X/C_i es abierto. Así,

$$X/\bigcup_{i=1}^{m} C_i = \bigcap_{i=1}^{m} \left(X/C_i\right),$$

es abierto, por lo que $\bigcup_{i=1}^{m} C_i$ es cerrado.

$\square$