Geometría Lineal

Victoria Torroja Rubio

8/9/2025

Índice general

Información útil en el Campus Virtual.

Bibliografía: El líbro que más sigue es el tercero de la bibliografía, aunque no incluye la primera parte de geometría sintética.

Evaluación: será el máximo entre

- Final
- 75 % Final + 15 % Parcial + 10 % Entrega ejercicios

Fechas:

- Parcial individual en el aula: 20 de octubre
- Entrega de ejercicios en grupo: 1 de diciembre

Capítulo 0

Preliminares

Definición 0.1 (Cuerpo). Un **cuerpo** es un conjunto $\mathbb{K}$ con dos operaciones $+$ y $\cdot$ tales que:

- $(\mathbb{K}, +)$ es un grupo abeliano.
- $(\mathbb{K}/\left\{0\right\}, \cdot)$ es un grupo abeliano.
- Se cumple la propiedad distributiva.

Definición 0.2 (Espacio vectorial). Un **espacio vectorial** V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, es un grupo abeliano $(V, +)$ con una función $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ tal que:

- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{v} \in V,\ \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{v}$.
- $\forall \vec{v} \in V,\ 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V,\ \lambda\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$.
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{v} \in V,\ \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$.

Observación. Dado V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, si $\dim\left(V\right) = n < \infty$, entonces se tiene que $V \cong \mathbb{K}^n$.

Definición 0.3 (Relación de equivalencia). Una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto X es de **equivalencia** si cumple:

Reflexiva. $\forall x \in X,\ x\mathcal{R}x$.

Simétrica. $\forall x, y \in X,\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.

Transitiva. $\forall x, y, z \in X,\ (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow (x\mathcal{R}z)$.

Recordamos los conjuntos de **clase de equivalencia** de un elemento $x \in X$:

$$[x]_{\mathcal{R}} = \left\{y \in X \ : \ y\mathcal{R}x\right\}.$$

Similarmente, tenemos que el **conjunto cociente** de una relación de equivalencia es

$$X/\mathcal{R} = \{[x]_{\mathcal{R}} \ : \ x \in X\}.$$

Una **partición** de X es una familia de subconjuntos de X, disjuntos dos a dos, cuya unión es X.

0.1. Partición de $\mathbb{Z}$ definida por $n\mathbb{Z}$

Para $A, B \subset \mathbb{Z}$, definimos las operaciones

- $A + B = \{a + b \ : \ a \in A, b \in B\}$.
- $A \cdot B = \{a \cdot b \ : \ a \in A, b \in B\}$.
- $n\mathbb{Z} := \{n\} \cdot \mathbb{Z}$.
- $a + n\mathbb{Z} := \{a\} + \{n\}\mathbb{Z}$.

Teorema 0.1 (Algoritmo de la división)**.** Para todo $x \in \mathbb{Z}$ existe un único $q \in \mathbb{Z}$ y $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tal que $x = r + qn$. Por tanto,

$$\{n\mathbb{Z}, 1 + n\mathbb{Z}, \dots, (n-1) + n\mathbb{Z}\},$$

es una partición de $\mathbb{Z}$ que denotamos por $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Observación. La partición anterior se corresponde con la relación de equivalencia

$$a\mathcal{R}_n b \iff a - b \in n\mathbb{Z}.$$

Teorema 0.2. El par $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ es un grupo, con la suma definida de la siguiente forma:

$$(a + n\mathbb{Z}) + (b + n\mathbb{Z}) = (a + b) + n\mathbb{Z} = r + n\mathbb{Z},$$

donde $a + b = r + qn$ con $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Demostración. Primero vamos a ver que la aplicación está bien definida. Para ello, vamos a ver que no depende del representante. Es decir, supongamos que $x_1, x_2 \in [x]_{\mathcal{R}}$ e $y_1, y_2 \in [y]_{\mathcal{R}}$. Tenemos que $x_2 = x_1 + \lambda n$ e $y_2 = y_1 + \mu n$, así tenemos que

$$y_2 + x_2 = y_1 + \mu n + x_1 + \lambda n = (y_1 + x_1) + (\mu + \lambda)\, n.$$

Así, tenemos que $y_2 + x_2 \mathcal{R}_n y_1 + x_1$, por lo que $y_2 + x_2 \in [y_1 + x_1]_{\mathcal{R}_n}$. Así, hemos visto que está bien definida y, por la definición, se puede ver que es una operación binaria en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ahora tenemos que ver que es asociativa:

$$\begin{aligned}
[(a + n\mathbb{Z}) + (b + n\mathbb{Z})] + (c + n\mathbb{Z}) &= [(a + b) + n\mathbb{Z}] + (c + n\mathbb{Z}) \\
&= (a + b + c) + n\mathbb{Z} \\
&= (a + n\mathbb{Z}) + [(b + c) + n\mathbb{Z}] \\
&= (a + n\mathbb{Z}) + [(b + n\mathbb{Z}) + (c + n\mathbb{Z})].
\end{aligned}$$

Ahora vamos a ver que existen el elemento neutro y los inversos. Por un lado, tenemos que el elemento neutro es claramente $0 + n\mathbb{Z}$. En efecto, $\forall a \in \mathbb{Z}$,

$$(0 + n\mathbb{Z}) + (a + n\mathbb{Z}) = (0 + a) + n\mathbb{Z} = a + n\mathbb{Z}.$$

Así, tenemos que 0 es el elemento neutro. En cuanto al inverso, si $a \in \mathbb{Z}$, tenemos que $-a + n\mathbb{Z}$ es su inverso:

$$(a + n\mathbb{Z}) + (-a + n\mathbb{Z}) = (a - a) + n\mathbb{Z} = 0 + n\mathbb{Z}.$$

□

Observación. Además, se tiene que dado que la suma en $\mathbb{Z}$ es conmutativa, la suma definida en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ también lo es.

Proposición 0.1. Para $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ se tiene que

(i) $(a + n\mathbb{Z}) \cdot (b + n\mathbb{Z}) \neq \emptyset$.

(ii) $(a + n\mathbb{Z}) \cdot (b + n\mathbb{Z}) \subset (a \cdot b) + n\mathbb{Z} = r + n\mathbb{Z}$, donde $a \cdot b = r + qn$ con $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Demostración. **(i)** Dado que $a, b \in \mathbb{Z}$, tenemos que $a + n\mathbb{Z}, b + n\mathbb{Z} \neq \emptyset$. Así, por nuestra definición del producto de conjuntos, tenemos que $(a + n\mathbb{Z}) \cdot (b + n\mathbb{Z}) \neq \emptyset$.

(ii) Si $x \in (a + n\mathbb{Z}) \cdot (b + n\mathbb{Z})$, tenemos que $x = y \cdot z$ para $y \in a + n\mathbb{Z}$ y $z = b + n\mathbb{Z}$. Así, $y = a + \lambda n$ y $z = b + \mu n$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$. Así, queda que

$$x = y \cdot z = (a + \lambda n) \cdot (b + \mu n) = ab + (a\mu + \lambda b + \lambda \mu n)\, n.$$

Así, está claro que $x \in (a \cdot b) + n\mathbb{Z}$.

□

Observación. En cuanto a la parte **(ii)** de la proposición anterior, la igualdad no tiene por qué darse. En efecto, consideremos como ejemplo

Definimos la operación $* : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ como

$$(a + n\mathbb{Z}) * (b + n\mathbb{Z}) = (c + n\mathbb{Z}) \iff (a + n\mathbb{Z}) \cdot (b + n\mathbb{Z}) \subset c + n\mathbb{Z}.$$

Capítulo 1

Geometría sintética

1.1. Planos afines sintéticos

Definición 1.1 (Plano afín). Un **plano afín** es un par $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ donde $\mathcal{P}$ es un conjunto no vacío cuyos elementos llamamos **puntos**, y $\mathcal{R}$ es un conjunto de subconjuntos de $\mathcal{P}$ cuyos elementos llamamos **rectas**, que satisfacen lo siguiente:

A1. Sean $P, Q \in \mathcal{P}$ con $P \neq Q$. Existe una única recta $l \in \mathcal{R}$ tal que $P, Q \in l$ (escribimos $l = l\,(PQ)$).

A2. $\forall l \in \mathcal{R}, \forall P \in \mathcal{P}$, $P \notin l$, existe una única recta $m \in \mathcal{R}$ tal que $P \in m$ y $m \cap l = \emptyset$.

A3. Toda recta tiene al menos dos puntos y hay al menos dos rectas.

Observación. El tercer axioma asegura que se trata de algo dimensional.

Definición 1.2 (Rectas paralelas). Si $l, m \in \mathcal{R}$ tales que $l \cap m = \emptyset$, diremos que l y m son **paralelas** y escribimos $l||m$.

Ejemplo (Plano cartesiano). El plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ es un plano afín. Tenemos que

$$\mathcal{P} = \{(x_1, x_2) \ : \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}\,.$$

$$\mathcal{R} : l = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ ax_1 + bx_2 = 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0)\right\} := \{ax_1 + bx_2 = c\}\,.$$

Vamos a ver que verifica los axiomas. Comprobamos **A1**. Si tomamos $P = (a_1, a_2)$ y $Q = (b_1, b_2)$, tenemos que la ecuación de una recta que pasa por P y Q será

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \iff (b_2 - b_1)\,x_1 + (a_1 - a_2)\,x_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Así, existe una única recta que contiene a P y Q. Sabemos que la recta es única porque el sistema

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = c \\ a'x_1 + b'x_2 = c \end{cases},$$

tiene dos soluciones (porque $P \neq Q$), por lo que tiene infinitas soluciones. Ahora comprobamos el axioma **A2**. Supongamos que $l = \{ax_1 + bx_2 = c\}$, $P = (a_1, b_1) \notin l$, es decir,

$$aa_1 + bb_1 \neq c.$$

Tomamos la recta $m = \{ax_1 + bx_2 = aa_1 + bb_1\}$. Tenemos que $P \in m$. Por otro lado, calculamos $m \cap l$:

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = c \\ ax_1 + bx_2 = aa_1 + bb_1 \end{cases}.$$

Se trata de un sistema incompatible puesto que $\operatorname{ran}\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} < \operatorname{ran}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & aa_1 + bb_1 \end{pmatrix}$. Así, tenemos que $l \cap m = \emptyset$. La unicidad se deduce de un argumento similar al anterior. En cuanto a **A3**, tenemos que existe dos rectas $\{x_1 = 0\}$ y $\{x_2 = 0\}$, y los puntos $\left(0, \frac{c}{b}\right), \left(\frac{c}{a}, 0\right) \in l = \{ax_1 + bx_2 = c\}$. Si $a = 0$ o $b = 0$ tenemos que **A3** se sigue cumpliendo:

$$\left(\frac{c}{a}, 0\right), \left(\frac{c}{a}, 1\right) \in \{ax_1 = c\}, \quad \left(0, \frac{c}{b}\right), \left(1, \frac{c}{b}\right) \in \{bx_2 = c\}.$$

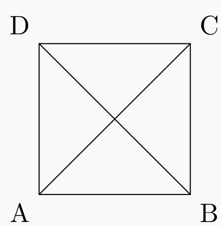
Observación. Una recta tiene más de una ecuación asociada. En efecto,

$$l = \{ax_1 + bx_2 = c\} = \{\lambda ax_1 + \lambda bx_2 = \lambda c\}, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}/\{0\}.$$

Ejemplo. Consideremos $\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}$ y

$$\mathcal{R} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}.$$

Tenemos que este plano se corresponde con el gráfico siguiente:



Se puede ver claramente que **A1** y **A2** se cumplen. Es trivial que **A3** se cumple.

Teorema 1.1. Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo, entonces $\mathbb{K}^2$ es un plano afín con puntos $\mathbb{K}^2$ y rectas las ecuaciones lineales.

Demostración. Adaptar la demostración del ejemplo del plano cartesiano. □

Ejemplo. Consideremos el cuerpo $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ con la suma módulo 2 y el producto también módulo 2. Tenemos, por el teorema anterior, el plano afín $\mathbb{F}_2^2$ de la forma:

$$\mathbb{F}_2^2 = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}.$$

$$\mathcal{R} = \{\{x_1 = 0\}, \{x_2 = 0\}, \{x_1 = 1\}, \{x_2 = 1\}, \{x_1 + x_2 = 1\}\}.$$

Gráficamente podemos ver que es igual al ejemplo anterior. En este caso, decimos que existe una colineación entre ellos.

1.1.1. Independencia de los axiomas

En primer lugar, estudiamos la independencia de **A3**. Consideremos un ejemplo que satisface **A1** y **A2**: $\mathcal{P} = \mathbb{R}$ y $\mathcal{R} = \{l = \mathbb{R}\}$. Así, tenemos que **A3** es independiente de los otros dos axiomas.

Ahora vamos a ver la independencia de **A2** respecto de **A1** y **A3**. Para ello eplearemos el ejemplo del plano de Fano (Gino Fano, 1892):

$$\mathcal{P} = \{A, B, C, D, E, F, G\}.$$

$$\mathcal{R} = \{\{A, B, C\}, \{C, D, E\}, \{E, F, A\}, \{A, G, D\}, \{B, G, E\}, \{C, G, F\}, \{F, B, D\}\}.$$

Tenemos que $|\mathcal{P}| = |\mathcal{R}| = 7$. Está claro que se verifica **A3**, puesto que $|\mathcal{R}| = 7$ y $\forall l \in \mathcal{R}, |l| = 3$. Se puede ver gráficamente que se cumple **A1** y no se cumple **A2**, pues cualquier par de rectas se interseca y por tanto no existen rectas paralelas: Este es el plano proyectivo más pequeño.

Ahora tenemos que estudiar la independencia de **A1** respecto de **A2** y **A3**. Consideremos

$$\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}.$$

$$\mathcal{R} = \{\{A, B\}, \{C, D\}\}.$$

Tenemos que **A3** se verifica, pues $|\mathcal{R}| = 2$ y $|\{A, B\}| = |\{C, D\}| = 2$. Por otro lado, si $P \notin \{A, B\}$, tenemos que $P \in \{C, D\}$, por lo que $\{C, D\} \,||\, \{A, B\}$. Lo mismo podemos decir si $P \notin \{C, D\}$. Así, tenemos que se verifica **A2**. Sin embargo, no se cumple **A1** porque no existe ninguna recta que contenga a A y C.

1.1.2. Algunos teoremas

Lema 1.1 (Tricotomía). Sea $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ un plano afín. Sean $l, m \in \mathcal{R}$. Se cumple una y solo una de las siguientes afirmaciones:

1. $l = m$.
2. $l||m$.
3. $l \cap m$ es un punto.

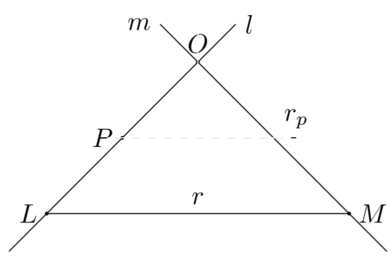
Demostración. Si l no es paralela a m, tenemos que $l \cap m \neq \emptyset$. Si $|l \cap m| = 1$, tenemos que es un punto y se cumple **3**. Si $|l \cap m| \geq 2$, tenemos que existen $P, Q \in l \cap m$. Por **A1**, dado que por dos puntos pasa una única recta, debe ser que $m = l$. □

Teorema 1.2 (Rectas equipotentes)**.** Sea $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ un plano afín. Todo par de rectas están en biyección.

Demostración. Sean $l, m \in \mathcal{R}$.

Caso 1. Si $l = m$, es trivial que l y m son equipotentes.

Caso 2. Supongamos $l \cap m = O$, donde $O \in \mathcal{P}$. Por **A3**, tenemos que existen $L \in l, M \in m$ tales que $M, L \neq O$. Por **A1**, existe una única $r \in \mathcal{R}$ tal que $L, M \in r$. Si $P \in l / \{L\}$, tenemos que existe una única $r_p || r$ tal que $P \in r_p$.



Podemos hacer un par de observaciones:

Observación 1. Vamos a ver que $\forall P \in l / \{L\}$ tenemos que $P \notin r$, queremos ver que r_p existe. Si $P \in l \cap r$, tenemos que $L, P \in l \cap r$, por lo que $l = r$, por lo que $M \in l$ y $O, M \in l$ y $l = m$, que es una contradicción. Por tanto, podemos afirmar que $\forall P \in l$, $P \neq L$, $\exists r_p$ recta paralela a r y $P \in r_p$.

Observación 2. Tenemos que ver que $r_p \cap m$ es un punto. Si $r_p || m$, como $r_p || r$, $M \in m$ y $M \in r$, se tiene que $m = r$, por lo que $L \in r = m$ y $O \in m$, por lo que $m = l$, lo que es una contradicción. Por otro lado, si $r_p = m$, $P \in l$ y $P \in r_p = m$ y $O \in m, l$, por lo que $m = l$, que es una contradicción. Por tanto, debe ser que $r_p \cap m$ es un punto.

De esta manera, podemos definir la función

$$\begin{aligned} f : l / \{L\} &\to m / \{M\} \\ P &\to r_p \cap m. \end{aligned}$$

Para ver que f es biyectiva, vamos a ver que existe su inversa. En efecto, tenemos que $\forall Q \in m / \{M\}$, $Q \notin r$ y $r_Q \cap l$ es un punto. Así, tenemos una función

$$\begin{aligned} g : m / \{M\} &\to l / \{L\} \\ Q &\to r_Q \cap l. \end{aligned}$$

Para ver que $g = f^{-1}$ tenemos que ver que $g \circ f = id$ y que $f \circ g = id$:

$$(g \circ f)(P) = g(f(P)) = g(r_p \cap m).$$

Tenemos que $r_{f(P)} = r_{r_p \cap m} || r$ y $r_{f(P)}$ pasa por $r_p \cap m$. Pero $r_p || r$ y r_p pasa por $r_p \cap m$. Por **A2**, tenemos que $r_{f(P)} = r_p$. Así, tenemos que

$$g(r_p \cap m) = r_{f(P)} \cap l = r_p \cap l = P.$$

Caso 3. Si $m||l$ y $M \in m$, $L \in l$, tenemos que existe una recta r tal que $M, L \in r$. Así, tenemos que $r \cap m$ y $r \cap l$ es un punto y por lo aplicado en el caso anterior, tenemos que existe una biyección entre r y m y entre r y l.

□

Lema 1.2. Sea $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ un plano afín. Ponemos $l \sim m$, $l, m \in \mathcal{R}$, si $l = m$ o $l||m$. Entonces, $\sim$ es una relación de equivalencia.

Demostración. **(i)** Está claro que si $l \in \mathcal{R}$ se tiene que $l = l$, por lo que se cumple la propiedad reflexiva.

(ii) Sean $l, m \in \mathcal{R}$. Si $l = m$ es trivial que se cumple la propiedad simétrica. Si $l \sim m$ y $l||m$, tenemos que $l \cap m = m \cap l = \emptyset$, por lo que $m \sim l$. Así, hemos verificado la propiedad simétrica.

(iii) Sean $l, m, r \in \mathcal{R}$ con $l \sim m$ y $m \sim r$. Hay que valorar varios casos:

Caso 1. Si $l = m$ y $m = r$, está claro que $l = r$ y, por tanto, $l \sim r$.

Caso 2. Si $l = m$ y $m||r$, está claro que $l \cap r = m \cap r = \emptyset$, por lo que $l \sim r$.

Caso 3. Si $l||m$ y $m = r$, tenemos que $l \cap r = l \cap m = \emptyset$, por lo que $l \sim r$.

Caso 4. Si $l||m$ y $m||r$, está claro que $l \cap m = m \cap r = \emptyset$, por lo que $l \sim r$.

Así, queda demostrada la propiedad transitiva.

□

Definición 1.3 (Haz de rectas). Un **haz de rectas paralelas** es una clase de equivalencia de $\sim$. Entonces, $\mathcal{H} \subset \mathcal{R}$ es un **haz** si y solo si $\exists l \in \mathcal{R}$ tal que

$$\mathcal{H} = [l]_\sim = \{m \mid m = l \text{ o } m||l\}.$$

Proposición 1.1. Sea $\mathcal{H}$ un haz y $l \in \mathcal{R}$ con $l \notin \mathcal{H}$, entonces $f : \mathcal{H} \to l : m \to l \cap m$ es una biyección.

Demostración. **(i)** Primero vamos a ver que la función está bien definida. Como $l \notin \mathcal{H}$, $\forall m \in \mathcal{H}$ tenemos que l no es paralelo a m y $l \neq m$. Por el lema de la tricotomía, debe ser que $l \cap m$ es un punto. Así, la función está bien definida.

(ii) Veamos que la función es inyectiva. Consideremos $m_1, m_2 \in \mathcal{H}$ tales que $m_1 \cap l = m_2 \cap l \neq \emptyset$, por lo que $m_1 \cap m_2 \neq \emptyset$. Dado que $m_1, m_2 \in \mathcal{H}$, tenemos que $m_1 \sim m_2$ y como m_1 no es paralela a m_2, debe ser que $m_1 = m_2$.

(iii) Comprobemos que la aplicación es sobreyectiva. Supongamos que $P \in l$, $m \in \mathcal{H}$. Si $P \in m$, tenemos que $m \cap l = P$, por lo que hemos ganado. Si $P \notin m$, por **A2** tenemos que existe $m_1 \in \mathcal{H}$ (es decir, paralela a m) tal que $P \in m_1$, por lo que $P = m_1 \cap l$. □

Proposición 1.2. Si $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son dos haces distintos, tenemos que $\forall P \in \mathcal{P}$, $\exists! l \in \mathcal{H}_1, \exists! m \in \mathcal{H}_2$ tales que $P = l \cap m$. En particular, la aplicación $f : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathcal{P} : (l, m) \to l \cap m$ es una biyección.

Demostración. Supongamos que

$$\mathcal{H}_1 = [l]_\sim = \{l' \mid l' = l \text{ o } l'||l\}.$$

$$\mathcal{H}_2 = [m]_\sim = \{m' \mid m' = m \text{ o } m'||m\}.$$

Tenemos que dado que $\mathcal{H}_1 \neq \mathcal{H}_2$, tenemos que $l \neq m$ y l no es paralelo a m, por lo que $l \cap m$ es un punto. Así, hemos visto que la aplicación está bien definida.
Sea $P \in \mathcal{P}$:

Caso 1. Si $P \in l$ hemos terminado.

Caso 2. Si $P \notin l$, por **A2** existe una única recta $l' \in \mathcal{H}_1$ tal que $P \in l'$.

En ambos casos, tenemos que $\exists! l_1 \in \mathcal{H}_1$ tal que $P \in l_1$. Así, simétricamente existe una única $m_1 \in \mathcal{H}_2$ tal que $P \in m_1$. □

1.1.3. Planos afines finitos

Definición 1.4. Un plano afín tiene **orden** n si todas sus rectas tienen n elementos.

Observación. La definición tiene sentido dado que todas las rectas tienen el mismo número de puntos.

Teorema 1.3. Sea $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ una plano afín de orden n.

(i) Cada haz de rectas tiene n elementos.

(ii) $|\mathcal{P}| = n^2$.

(iii) Cada punto está en $n + 1$ rectas.

(iv) Hay $n + 1$ haces de rectas.

(v) Hay $n\,(n + 1)$ rectas.

Demostración. Sea $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ un plano afín de orden n.

(i) Sea $\mathcal{H}$ un haz de rectas. Por **A3**, existe $l_1, l_2 \in \mathcal{R}$ con $l_1 \neq l_2$. Si existe $l \notin \mathcal{H}$ hemos ganado. Si $l_1, l_2 \in \mathcal{H}$, sea $P \in l_1$ y $Q \in l_2$, tenemos que $l(P,Q) \notin \mathcal{H}$ por lo que existe $l \notin \mathcal{H}$. Por una proposición anterior, tenemos que existe una biyección entre $\mathcal{H}$ y l, por lo que $|\mathcal{H}| = |l| = n$.

(ii) Por el argumento del apartado anterior, existen $l, m \in \mathcal{R}$ con $l \neq m$ y que no son paralelas entre sí, tales que $\mathcal{H}_1 = [l]_\sim$ y $\mathcal{H}_2 = [m]_\sim$. Por la proposición anterior, tenemos que $|\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2| = |\mathcal{P}|$. Por la primera propiedad, nos queda que $|\mathcal{P}| = |\mathcal{H}_1| \cdot |\mathcal{H}_2| = n^2$.

(iii) Sea $P \in \mathcal{P}$. Por **A3** es fácil deducir que existe una recta $l \in \mathcal{R}$ tal que $P \notin l$. Tenemos que $l = \{A_1, \ldots, A_n\}$, por lo que $P \in l(P, A_1), \ldots, l(P, A_n)$. Por **A2**, existe una única paralela m a l tal que $P \in m$, por lo que P está en $n+1$ rectas. En efecto, todas las rectas anteriores son distintas porque de no serlo tendríamos que

$$l(P, A_i) = l(P, A_j) \Rightarrow l(P, A_i) = l(A_i, A_j) = l \Rightarrow P \in l.$$

Si $r \in \mathcal{R}$ tal que $P \in r$, por **A2** se sigue que o $r \cap l = \emptyset$, por lo que $r = m$; o $r \cap l = A_i$, por lo que $r = l(P, A_i)$.

(iv) Por **(iii)**, dado $P \in \mathcal{P}$, existen $l_1, \ldots, l_{n+1} \in \mathcal{R}$ con $P \in l_i$, $\forall i = 1, \ldots, n+1$. Como $l_i \cap l_j = P$, tenemos que $[l_i]_\sim \neq [l_j]_\sim$ si $i \neq j$. Por tanto hay al menos $n+1$ haces. Sea $r \in \mathcal{R}$,

- Si $P \in r$, tenemos que $r = l_i$ para algún $1 \leq i \leq n+1$.
- Si $P \notin r$, por **A2** tenemos que existe una única l_i tal que $r || l_i$, por lo que $P \in l_i$.

En ambos casos tenemos que $r \in [l_i]_\sim$ para algún i.

(v) Los haces son distintos dos a dos, por ser una relación de equivalencia. Por tanto,

$$|\mathcal{R}| = \left| \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{H}_i \right| = \sum_{i=1}^{n+1} |\mathcal{H}_i| = \sum_{i=1}^{n+1} n = n(n+1).$$

□

Observación. Para todo primo p y todo $k \geq 1$, existe un cuerpo $\mathbb{K}$ con p^k elementos. Entonces, $\forall p$ primo y $\forall k \geq 1$, existe un plano afín de orden p^k, porque $\mathbb{K}^2$ es un plano afín.

1.2. Planos proyectivos sintéticos

Definición 1.5 (Plano proyectivo). Un **plano proyectivo** es un par $\left(\overline{\mathcal{P}}, \overline{\mathcal{R}}\right)$ donde $\overline{\mathcal{P}}$ es un conjunto no vacío cuyos elementos se llaman **puntos** y $\overline{\mathcal{R}}$ es un conjunto de subconjuntos de $\overline{\mathcal{P}}$ cuyos elementos se llaman **rectas**. Se cumplen los axiomas:

P1. Para cada par de puntos distintos existe una única recta que los contiene.

P2. Todo par de rectas tiene intersección no vacía.

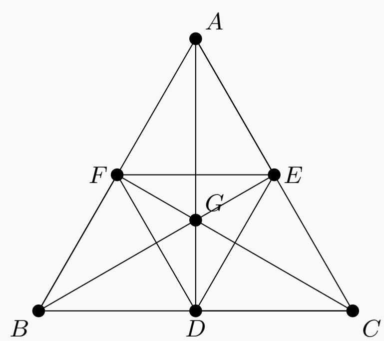
P3. Toda recta tiene al menos tres puntos y hay al menos dos rectas.

En primer lugar, vamos a comprobar la consistencia de la definición, es decir, que hemos definido algo que existe.

Ejemplo (Plano de Fano)**.** Consideremos los conjuntos

$$\overline{\mathcal{P}} = \{A, B, C, D, E, F, G\}.$$

$$\overline{\mathcal{R}} = \{\{A, B, C\}, \{C, D, E\}, \{E, F, A\}, \{B, G, F\}, \{A, G, D\}, \{F, G, C\}, \{F, D, B\}\}.$$



Es fácil comprobar que se trata de un plano proyectivo.

Observación. Este es el plano proyectivo más pequeño, es decir, que tiene menos puntos.

1.2.1. Independencia de los axiomas

- Comprobamos la independencia de **P3** respecto de **P2** y **P1**. Consideremos el ejemplo $\overline{\mathcal{P}} = \mathbb{R}$ y $\overline{\mathcal{R}} = \{\mathbb{R}\}$. Está claro que se cumplen **P1** y **P2** pero no se cumple **P3**.

- Comprobamos la independencia de **P2** respecto de **P1** y **P3**. Consideremos como ejemplo el plano afín $\mathbb{R}^2$. Tenemos que **A1** es igual que **P1**, hay rectas paralelas, por lo que **P2** no se cumple y está claro que se cumple **P3** puesto que $\left|\overline{\mathcal{R}}\right| = \infty, \forall \bar{l} \in \overline{\mathcal{R}}, \left|\bar{l}\right| = \infty$.

- Comprobamos la independencia de **P1** respecto de **P2** y **P3**. Consideremos por ejemplo:

  $$\overline{\mathcal{P}} = \{A, B, C, D, E\}.$$

  $$\overline{\mathcal{R}} = \{\{A, B, C\}, \{C, D, E\}\}.$$

  Claramente se cumple **P3** y se cumple **P2** porque hay dos rectas y las dos se intersecan. No se cumple **P1** puesto que no existe $\bar{l} \in \overline{\mathcal{R}}$ tal que $A, D \in \bar{l}$.

1.2.2. Algunos teoremas

Teorema 1.4. Sea $\mathbb{K}$ es un cuerpo y $\mathbb{K}^3$ un espacio vectorial. Sean

$$\overline{\mathcal{P}} = \left\{U \subset \mathbb{K}^3 \ : \ U \in \mathcal{L}\left(\mathbb{K}^3\right), \dim_{\mathbb{K}} U = 1\right\}.$$

$$\overline{\mathcal{R}} = \left\{W \subset \mathbb{K}^3 \ : \ W \in \mathcal{L}\left(\mathbb{K}^3\right), \dim_{\mathbb{K}} W = 2\right\}.$$

Entonces, $\left(\overline{\mathcal{P}}, \overline{\mathcal{R}}\right)$ es un plano proyectivo [a] .

[a] La definición de $\overline{\mathcal{R}}$ es más bien el conjunto de los conjuntos de rectas que son contenidas por un plano, así se puede hacer una correspondencia biyectiva entre $\overline{\mathcal{R}}$ y la descripción que le hemos dado. Así, decimos que un punto $\overline{P} \in \overline{\mathcal{P}}$ está en una recta $\overline{l} \in \overline{\mathcal{R}}$ si $\overline{P}$ está contenido en el plano que caracteriza a $\overline{l}$.

Demostración. **(i)** Vamos a ver que se cumple **P1**. Si $P, Q \in \overline{\mathcal{P}}$ con $P \neq Q$, existen $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{K}^3$ linealmente independientes tales que $P = L\left(\{\vec{v}_1\}\right)$ y $Q = L\left(\{\vec{v}_2\}\right)$. Así, existe $r \in \overline{\mathcal{R}}$ tal que $r = L\left(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}\right)$ que cumple que $P, Q \subset r$. En concreto, tenemos que $r = P \oplus Q$.
Sea $r_2 \in \overline{\mathcal{R}}$ tales que $P, Q \subset r_2$, entonces tenemos que $P \oplus Q \subset r_2$ y $\dim\left(P \oplus Q\right) = \dim r_2$, por lo que $r_2 = r$.

(ii) Vamos a ver que se cumple **P2**. Sean $l, m \in \overline{\mathcal{R}}$, tenemos que

$$\underbrace{\dim\left(l \cap m\right)}_{\leq 3} = \underbrace{\dim l}_{2} + \underbrace{\dim m}_{2} - \underbrace{\dim\left(l \cap m\right)}_{\geq 1}.$$

Por tanto, $\dim\left(l \cap m\right) \geq 1$, por lo que $l \cap m \neq \emptyset$.

(iii) Vamos a ver que se cumple **P3**. Sea $\mathbb{K}^3 = L\left(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}\right)$, sean $r_1 = L\left(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}\right)$ y $r_2 = L\left(\{\vec{u}_1, \vec{u}_3\}\right)$ dos rectas. Así, hemos visto que hay al menos dos rectas. Ahora, dada una recta $r = L(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\})$ tenemos que $P_1 = L\left(\{\vec{v}_1\}\right)$, $P_2 = L\left(\{\vec{v}_2\}\right)$ y $P_3 = L\left(\{\vec{v}_1 + \vec{v}_2\}\right)$ son puntos de la recta. Así, hemos visto que cada recta tiene al menos tres puntos.

$\square$

Definición 1.6. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Al plano proyectivo construido en el teorema anterior lo llamamos **proyectivizado de** $\mathbb{K}^3$ y lo denotamos por $\mathbb{P}\left(\mathbb{K}^3\right)$.

Observación. Dado $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^3$ denotamos por $[a_0 : a_1 : a_2]$ al punto $L\left(\{(a_0, a_1, a_2)\}\right)$. Observamos que

$$[a_0 : a_1 : a_2] = [b_0 : b_1 : b_2] \iff L\left(\{(a_0, a_1, a_2)\}\right) = L\left(\{(b_0, b_1, b_2)\}\right).$$

Esto es cierto si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{K}/\left\{0\right\}$ tal que $(a_0, a_1, a_2) = \lambda\left(b_0, b_1, b_2\right)$. Así, tenemos que esta notación está bien definida salvo proporcionalidad. Así, tenemos que los puntos de $\mathbb{P}\left(\mathbb{K}^3\right)$ son

$$\left\{[a_0 : a_1 : a_2] \ : \ (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^3/\left\{0\right\}\right\}.$$