Ecuaciones Diferenciales

Victoria Torroja Rubio

19/1/2026

Índice general

Libro principal:

- Libro de Carlos Fernández Pérez - Libro de 3 tomos
- Zilb - libro más de ingenieros con muchos ejercicios para practicar

Capítulo 1

Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias

1.1. Motivación: problema directo e inverso

- **Cuestión directa:** nos dan una función $x(t) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y nos piden que calculemos su derivada.

  Ejemplo. Consideremos $x(t) = e^{t^2}$. Tenemos que $x'(t) = 2te^{t^2} = 2tx(t)$.

- **Cuestión inversa:** busco $x(t) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazca una ecuación diferencial.

  Ejemplo. Encontrar $x(t)$ tal que $x'(t) = 2tx(t)$. Una solución es $x(t) = e^{t^2}$, como hemos visto en el ejemplo anterior. Otra solución es $x_C(t) = Ce^{t^2}$ con $C \in \mathbb{R}$. En el **Tema 2** veremos que no hay más soluciones. Diremos que $\{x_C\}$ es la familia de soluciones de la ecuación diferencial

  $$x' = 2tx$$

  y se denomina **familia monoparamétrica** porque depende de un único parámetro. Para conseguir una única solución podemos imponer alguna condición más, como que $x(0) = 1$. Entonces, tenemos que

  $$Ce^{0^2} = 1 \Rightarrow C = 1.$$

  Así, la única función que verifica esto es $x(t) = e^{t^2}$. A este par, ecuación más condición, se le llama **problema de valor inicial** o **problema de Cauchy**.

  Observación. Una pregunta natural es cómo debe ser $x(t)$ para que el problema de Cauchy tenga solución y sea única. Esta pregunta dio lugar a los **teoremas de existencia y unicidad.**

1.2. Notación y conceptos básicos

Notación. De forma habitual usaremos la notación de Newton para las derivadas de $x(t)$:

$$x'(t), x''(t), \ldots, x^{(n)}(t).$$

Puede que eventualmente aparezca la notación de Leibniz:

$$\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^nx}{dt^n}.$$

A menudo escribirmos simplemente $x, x', \ldots, x^{(n)}$ en vez de $x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)$, pues en las dos sólo hay una variable independiente.

Definición 1.1 (EDO)**.** Entendemos por **ecuación diferencial ordinaria** una relación que implica una o varias derivadas respecto de una única variable t (**variable independiente**) de una función especificada $x(t)$ (**variable dependiente** o **función incógnita**), pudiendo implicar también a funciones de dichas variables x y t. Llamamos **orden** de una EDO al valor de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación.

Observación. Utilizamos el adjetivo **ordinarias** para diferenciarlas de las **ecuaciones en derivadas parciales**, es decir, ecuaciones diferenciales donde una o más funciones dependen de dos o más variables independientes.

Ejemplo. Calculemos los órdenes de estas ecuaciones diferenciales.

- La ecuación
$$x^{'''} + x' = 0,$$
es una EDO de orden 3.
- La ecuación
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$
es una EDP de orden 2.

Ejemplo (Teorema Fundamental del Cálculo)**.** Supongamos que $f(t)$ es una función continua y acotada en un cierto intervalo (a, b) y queremos resolver la EDO $x'(t) = f(t)$. Por el TFC, sabemos que

$$x(t) = \int_a^t f(t)\ dt + x(a), \ \forall t \in (a, b).$$

Si conocemos el valor de $x(a)$ (problema de Cauchy), entonces podemos resolver la EDO.

Aunque ya hemos definido lo que es una EDO, ahora lo hacemos de manera más formal.

Definición 1.2 (EDO)**.** Una **ecuación diferencial ordinaria** es una ecuación que contiene a una función y sus derivadas con respecto a una variable. Formalmente, consideramos $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (incógnita), con I abierto, y $F : \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ con $\tilde{\Omega}$ abierto, y la EDO asociada será

$$F\left(t, x, x', \ldots, x^{(n)}\right) = 0.$$

Asumimos que $F \in \mathcal{C}^1\left(\tilde{\Omega}\right)$ y que existen $\left(t_0, x_0, \ldots, x_0^{(n)}\right) \in \tilde{\Omega}$ de manera que

$$F\left(t_0, x_0, \ldots, x_0^{(n)}\right) = 0.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x^{(n)}}\left(t_0, x_0, \ldots, x_0^{(n)}\right) \neq 0.$$

Esto es importante porque tiene que ver con el teorema de la función implícita. La forma que aparece en la definición se llama la **forma implícita** del problema. Por otro lado, si en la EDO podemos despejar la variable $x^{(n)}$, escribiendo entonces

$$x^{(n)} = f\left(t, x, \ldots, x^{(n-1)}\right),$$

para $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, diremos que la EDO está en **forma explícita**. Finalmente, a n se le llama el **orden** de la EDO.
Recordamos el **Teorema de la Función Implícita:**

Teorema 1.1 (Teorema de la función implícita). Sea $G : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ con U abierto, donde G es de clase $\mathcal{C}^k(U)$. Si existe un punto $(x_0, y_0) \in U$ tal que

- $G(x_0, y_0) = 0$ y,
- $D_2 G(x_0, y_0)$ es inversible,

entonces existen $\varepsilon, \delta > 0$ y una función $g : B(x_0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con $g \in \mathcal{C}^k(B(x_0, \varepsilon))$ tal que $g(B(x_0, \varepsilon)) \subset B(y_0, \delta)$ y

$$G(x, g(x)) = 0, \ \forall x \in B(x_0, \varepsilon).$$

Además, las únicas soluciones de $G(x, y) = 0$ en $B(x_0, \varepsilon) \times B(y_0, \delta)$ son las que cumplen la ecuación anterior.

1.2.1. Clasificación de EDOS

Podemos clasificar una EDO atendiendo a diferentes conceptos.

- Atenciendo al orden, es decir, el orden de la derivada de mayor orden involucrada en la EDO.

  Ejemplo. La EDO $x''' + tx' = 0$ es una EDO de orden 3.

- Atendiendo a la expresión dada, pueden ser

  1. **Expresión explícita** o **forma normal**
  2. **Expresión implícita**,
  3. Referidas a las EDOS de orden 1, a veces trabajamos con la **expresión diferencial**, que viene en general dada por $M(t, x)\, dx + N(t, x)\, dt = 0$.

  Ejemplo. La EDO

$$x' = \frac{3x^2 + t^2}{x + t},$$

esta en forma explícita, mientras que la forma diferencial será

$$(x+t)\,dx - \left(3x^2+t^2\right)dt = 0.$$

En general, dada la EDO de orden 1, $F(t,x,x') = 0$ (expresión implícita), $x' = f(t,x)$ (expresión implícita), tenemos que

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \iff dx - f(t,x)\,dt = 0,$$

es la **expresión diferencial**.

- Otra forma de clasificarlas es por <u>linealidad</u>.

Definición 1.3 (EDO Lineal)**.** Una EDO es **lineal** cuando se puede escribir de la forma

$$L(x(t)) = b(t),$$

siendo $L(x(t))$ el operador lineal

$$L(x(t)) = \sum_{j=0}^{n} a_j(t)\,x^{(j)}(t),$$

donde $x^{(0)}(t) = x(t)$. Los **coeficientes** $a_j(t)$ son funciones que dependen sólo de t. Cuando todos los coeficientes $a_j(t)$ hablamos de una EDO lineal **con coeficientes constantes**. Decimos que $b(t)$ es el **término independiente** de la EDO lineal. Cuando $b(t) \equiv 0$ decimos que la EDO lineal se denomina **lineal homogénea**.

Observación. La clave de las EDOS lineales homogéneas (y de ahí su nombre de lineal) es que el conjunto de soluciones tiene estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Formalmente, escribimos que si $L(x) = 0$ es una EDO lineal de orden n, entonces

- Si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son soluciones, $x_1(t) + x_2(t)$ también lo es.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ y $x(t)$ solución de la EDO, $\lambda x(t)$ también es solución.

Demostración. Tenemos que $L(x_1(t)) = L(x_2(t)) = 0$. Por tanto, tenemos que

$$L(x_1(t) + x_2(t)) = L(x_1(t)) + L(x_2(t)) = 0.$$

Hemos aplicado que la derivada de la suma es la suma de las derivadas. Del mismo modo, si $x(t)$ es solución, $L(x(t)) \equiv 0$ y por tanto

$$L(\lambda x(t)) = \sum_{j=0}^{n} a_j(t)\,(\lambda x(t))^{(j)} = \lambda \sum_{j=0}^{n} a_j(t)\,x^{(j)}(t) = \lambda L(x(t)) = 0.$$

□

Observación. Una EDO es lineal si su expresión implícita es lineal, es decir, todas las derivadas están elevadas a exponente 0 o 1 y no se multiplican entre sí.

Ejemplo. Consideremos la EDO anterior:

$$x' = \frac{3x^2 + t^2}{x + t}.$$

Podemos despejar de forma que

$$(x + t)\, x' - 3x^2 = t^2.$$

Está claro que no es lineal, puesto que el término x está al cuadrado. Sin embargo, la EDO $x'' + 3tx' + x = 0$ sí es lineal. Finalmente,

$$xx'' + tx' = t^2,$$

no es lineal, puesto que se están multiplicando x y x''.

- Atendiendo a la dependencia o no de la variable independiente, cuando una EDO no depende explícitamente de la variable independiente se denomina **autónoma**.

Definición 1.4 (EDO autónoma)**.** En una EDO, cuando no aparece explícitamente la variable independiente decimos que es **autónoma**. Formalmente, su expresión explícita será

$$x^{(n)} = f\left(x, x', \ldots, x^{(n-1)}\right).$$

Ejemplo.
- La EDO $x'' + x'x = 0$ es **autónoma** (la t sólo puede aparecer implícitamente con la variable dependiente).
- La EDO $x''' + x' = 0$ es autónoma pero $x' = 2tx$ no es autónoma.

Observación. Veremos que de las EDOs autónomas de orden 1 es fácil sacar mucha información cualitativa con la representación.

Observación. Las únicas EDOs lineales que son autónomas son las lineales de coeficientes constantes con término independiente también constante, es decir

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_0 x = b.$$

1.2.2. Solución de una EDO

El problema principal asociado a una EDO es encontrar sus soluciones.

Definición 1.5 (Solución de una EDO)**.** Dada una EDO de orden n donde $t \in I \subset \mathbb{R}$, decimos que la función $x = x(t)$ definida en $J \subset I$ es **solución** de la EDO si

- Existen sus n primeras derivadas: $x', \ldots, x^{(n)}$ en J.
- Satisfacen la ecuación dada para todo $t \in J$.

El proceso de obtención de las soluciones de una EDO se denomina también **integración de la ecuación** y a sus soluciones **curvas integrales**. Además, cuando nos dan una EDO de forma explícita, es decir

$$x^{(n)} = f\left(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}\right),$$

decimos que f es el **campo** asociado a la ecuación anterior. Lo ideal es encontrar una solución explícitamente pero en muchos casos la solución vendrá dada de manera implícita.

Notación. Normalmente I denota el intervalo de definición de la EDO y J el intervalo donde está definida la solución. En general, buscamos el intervalo J más grande posible. Si no se indica lo contrario, supondremos que I y J son abiertos, donde las derivadas de los extremos del intervalo se consideran siempre laterales.

Definición 1.6. Dadas dos soluciones (x, J) y $\left(\tilde{x}, \tilde{J}\right)$ de $x' = f(t, x)$, se dice que (x, J) es una **prolongación** de $\left(\tilde{x}, \tilde{J}\right)$ o que $x(t)$ **se extiende** a $\tilde{x}(t)$ si $\tilde{J} \subset J$ y $\tilde{x}(t) = x(t)$, $\forall t \in \tilde{J}$.

Ejemplo. Consideremos los siguientes ejemplos.

1. Dada la EDO $x' = x\cos t$, tenemos que la solución $x(t) = e^{\sin t}$ es solución para todo $\mathbb{R}$. Lo mismo sucede con la solución $x_C = Ce^{\sin t}$ para $C \in \mathbb{R}$. Sin embargo, la ecuación $x' + \sqrt{t}x = t^2$ sólo tiene sentido para $t \geq 0$. Respecto a la solución, se puede ver que $x(t) = t^{\frac{3}{2}} - \dfrac{3}{2}$ es solución.

2. Es importante ver que la solución debe ser solución en un intervalo. Por ejemplo, $x' = x$ tiene como solución $x(t) = e^t$ en $t \in \mathbb{R}$. Podríamos pensar que $x = \sin t$ también, pero no es solución salvo para $t = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, que no es un intervalo. Por tanto, esta última no es solución.

Normalmente encontrar la solución a una EDO es muy complicado. Sin embargo, ver si una función es o no es solución es muy sencillo, basta con derivar, sustituir en la ecuación y ver si obtenemos o no una identidad para algún intervalo de la variable independiente.

Ejemplo.

1. Consideremos $x'' - 2x' + x = 0$, es sencillo comprobar que $x(t) = (1 + 2t)e^t$ es solución.

2. Las soluciones a una EDO no siempre se pueden dar explícitamente. En efecto, para la EDO

$$x' = \frac{x}{x^2 + 1},$$

una solución es

$$\ln|x(t)| + \frac{x(t)^2}{2} = t + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Decimos que esta es una solución **implícita** de la EDO.

Ejemplo. La solución de una EDO puede ser una función definida a trozos. En efecto, consideremos la EDO, $x'^2 - 9tx = 0$. Una solución es

$$x(t) = \begin{cases} 0, \ t \leq 0 \\ t^3, \ t > 0 \end{cases} .$$

Se puede comprobar que $x \in \mathcal{C}^1$ y es solución de la ecuación.

Obtener la **solución general** de una EDO es hallar todas las soluciones que verifican la ecuación. En una EDO lineal de orden n veremos que la solución general es una familia que depende de n parámetros y se denomina **familia n-paramétrica**.

Ejemplo. Para la EDO $x' = x$ vimos que la solución general era la familia $\{x_c\}$ con $x_C(t) = Ce^t$, $C \in \mathbb{R}$. Decimos que es una **familia monoparamétrica**, puesto que depende de un único parámetro C.

Ejemplo. La EDO $x'' - x = 0$ tiene por solución general

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

que es una **familia biparamétrica**. La base del espacio vectorial de soluciones $\left\{e^t, e^{-t}\right\}$, puesto que son linealmente independientes.

En el caso no lineal, obtener una solución genera es mas complicado. En este escenario podemos, por ejemplo, tener **soluciones singulares** que son aquellas que no pertenecen a una familia de funciones dependiente de un parámetro que también es solución.

Ejemplo. Consideremos $x' = t\sqrt{x}$. Una solución de la EDO es

$$x(t) = \left(\frac{t^2}{4} + C\right)^2, C \in \mathbb{R},$$

es una familia solución de la EDO. Sin embargo, esta familia no incluye la solución trivial, $x(t) \equiv 0$, por tanto decimos que esta es una solución singular.

En el caso anterior, para encontrar la solución general tenemos que encontrar la familia y la solución singular.

Observación. No confundir solución singular con solución particular. Una **solución particular** es una solución concreta de la EDO; es decir un miembro de la familia si la solución es una familia.

Ejemplo. En el ejemplo anterior, la solución singular también es solución particular. Otro ejemplo es que $x(t) = e^t$ es una solución particular de $x' = x$.

Notación. La **solución trivial** es la solución idénticamente nula.

1.2.3. Problemas de valor inicial y contornos

Definición 1.7 (Problema de valor inicial)**.** Un **problema de valor inicial** o **de Cauchy** es un sistema

$$\begin{cases} x^{(n)} = f\left(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}\right), \ t \in I \\ x(t_0) = x_0, \ t_0 \in I, \ x_0 \in \mathbb{R} \\ x'(t_0) = x_1, \ x_1 \in \mathbb{R} \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}, \ x_{n-1} \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Ejemplo.

1. La EDO $x' = x$ sujeta a $x(0) = 3$ es un problema de valor inicial que tiene por solución única la función $x(t) = 3e^t$.
2. La EDO $x'' + 16x = 0$ tiene por soluciones la familia biparamétrica $x(t) = C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t$. El problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'' + 16x = 0 \\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

tiene una única solución, que es $x(t) = -2\cos 4t + \dfrac{1}{4}\sin 4t$.

Definición 1.8 (Problema de contorno)**.** Se define **problema de contorno** como un par formado por una EDO y unas condiciones inciales de frontera, que pueden o no implicar a las derivadas [a] . Existen dos casos especiales de problemas de contorno:

- **Problema de Dirichlet:** se proporciona el valor de la función en puntos diferentes.
- **Problema de Neumann:** se proporciona el valor de la derivada de una función en puntos diferentes.

[a] La principal diferencia respecto de las anteriores es que las condiciones iniciales no están todas asociadas al mismo instante $t = t_0$.

Ejemplo.

1. El siguiente es un ejemplo de condición de frontera de tipo Dirichlet:

$$\begin{cases} x'' + x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x(\pi) = 0 \end{cases}.$$

2. El siguiente es un ejemplo de condición de frontera de tipo Neumann:

$$\begin{cases} x'' + 3x = 1 \\ x'(0) = x'(\pi) = 0 \end{cases}.$$

1.2.4. Sistemas de ecuaciones diferenciales

Definición 1.9 (Sistema de EDOS de orden 1 y n ecuaciones)**.** El orden indica la derivada de mayor orden involucrada. Se trata de hallar n funciones incógnita $x_1(t), \dots, x_n(t)$ referidas a la misma variable independiente t tales que

$$(S)\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}.$$

Para resolver el sistema tendremos que encontrar las $x_i(t)$ soluciones definidas en un intervalo de definición J común a todas ellas.

Podemos reescribir este sistema de n incógnitas como una EDO vectorial de orden 1. En efecto, podemos considerar

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{f}(t, \vec{x}(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix},$$

Además, una EDO de orden n se puede reescribir como un sistema de EDOS de orden 1.En efecto, consideremos $x^{(n)} = f\left(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}\right)$. Podemos reescribir $x \equiv x_1$, $x' \equiv x_2$, ..., $x^{(n-1)} \equiv x_n$. Así, nos queda el sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}.$$

Observación. Un sistema lineal de orden 1 son siempre de la forma

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)\, x_1 + a_{12}(t)\, x_2 + \cdots + a_{1n}(t)\, x_n + b_1(t) \\ \vdots \\ x_i' = a_{i1}(t)\, x_1 + a_{i2}(t)\, x_2 + \cdots + a_{in}(t)\, x_n + b_i(t) \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}(t)\, x_1 + a_{n2}(t)\, x_2 + \cdots + a_{nn}(t)\, x_n + b_n(t) \end{cases}.$$

Matricialmente, podemos escribir $\vec{x}'(t) = A(t)\,\vec{x}(t) + \vec{b}(t)$, con $A(t) \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Posteriormente estudiaremos las EDOS lineales de coeficientes constantes puesto que entonces tendremos que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Ejemplo. Hoja 1, Ejercicio 10. Convierte $x'' + x\left(\frac{3}{2}x - 1\right) = 0$ en un sistema de dos ecuaciones de primer orden. Denotamos $x_1 \equiv x$ y $x_2 \equiv x'$, así, tenemos que

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_1 \left(1 - \frac{3}{2} x_1\right) \end{cases} .$$