

Análisis de Variable Real

Victoria Torroja Rubio

9/10/2024 -

Índice general

1. El cuerpo de los números reales	3
1.1. El cuerpo de los números reales.	3
1.2. Completitud de \mathbb{R}	13
1.3. Expresión decimal de los números reales	22
1.4. Números Complejos	24
1.4.1. Representación polar	25
2. Sucesiones y límites	26
2.1. Criterios de Convergencia	34
2.2. Subsucesiones y Teorema de Bolzano-Weiestrass	40
2.3. Sucesiones Cauchy	43
2.4. Otros teoremas	45
2.5. Series numéricas	48
2.6. Exponentes reales.	58
3. Sucesiones de funciones	60

Profesor: Javier Soria
Oficina: 437
Correo: javier.soria@ucm.es

Ayudante: Fernando Ballesta Yague
Oficina: 224
Correo: ferballe@ucm.es

Exámenes: Parcial 1 (16/1/2025)

- 20 % evaluación continua + examen a finales de noviembre (solo sube no baja)
- 80 % exámenes parciales

Si apruebas los parciales no hay que hacer el final.

Recomendaciones de libros

- Primer libro de la bibliografía
- El de Ortega
- 5000 problemas de análisis (para practicar)

Capítulo 1

El cuerpo de los números reales

1.1. El cuerpo de los números reales.

Definición 1.1 (Cuerpo). Se define \mathbb{R} como un **cuerpo abeliano**:

(i) Existen dos operaciones en \mathbb{R} : $+$ (suma) y \cdot (producto).

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow x + y$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow x \cdot y.$$

(ii) La suma es conmutativa:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y = y + x.$$

(iii) La suma es asociativa:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x + y) + z = x + (y + z).$$

(iv) Existencia del elemento neutro de la suma ^a:

$$\exists 0 \in \mathbb{R}, 0 + x = x + 0 = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

(v) Existencia del elemento opuesto:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists -x^b \in \mathbb{R}, x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

(vi) El producto es conmutativo:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \cdot y = y \cdot x.$$

(vii) La multiplicación es asociativa:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

(viii) Existencia del elemento neutro del producto:

$$\exists 1 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, 1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$$

(ix) Existencia del opuesto en el producto:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists \frac{1}{x}^c \in \mathbb{R}, x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1.$$

(x) El producto es distributivo respecto a la suma ^d:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

^ano estamos afirmando que sea único

^bel menos no significa nada, no sabemos lo que es restar todavía

^cComo en a, esto es notación, no sabemos dividir

^dno hay que especificar distributiva por la izquierda y por la derecha por la propiedad de conmutatividad del producto

Los racionales (\mathbb{Q}) cumplen estos requisitos por lo que son un cuerpo, sin embargo \mathbb{Z} y \mathbb{N} no lo son porque no cumplen con todos los requisitos. Algunos cuerpos interesantes son las clases de equivalencia de la forma \mathbb{Z}_n . \mathbb{R} también tiene la propiedad de que existe un orden como en \mathbb{Q} .

Teorema 1.1. En $(\mathbb{R}, +, \cdot)$:

(a) El elemento neutro de la suma es único.

(b) El elemento neutro del producto es único.

(c) $\forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 0 = 0$.

Demostración. (a) Suponemos que existe otro elemento $0' \in \mathbb{R}$, además de $0 \in \mathbb{R}$ que cumple que es el elemento neutro de la suma. Tenemos que

$$0 + 0' \underset{(iv)}{=} 0' \underset{(ii)}{=} 0' + 0 \underset{(iii)}{=} 0.$$

Por tanto, $0 = 0'$.

(b) Suponemos que existen $1, 1' \in \mathbb{R}$ que son elementos neutros para el producto. Aplicamos lo mismo que en la demostración anterior.

$$1 \cdot 1' = 1' = 1' \cdot 1 = 1.$$

Por tanto, $1 = 1'$.

(c)

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0.$$

Sumamos el opuesto a ambos lados:

$$x \cdot 0 + (-x \cdot 0) = (-x \cdot 0) + x \cdot 0 + x \cdot 0$$

$$0 = 0 + x \cdot 0$$

$$0 = x \cdot 0.$$

También se puede demostrar de la siguiente forma:

$$a + a \cdot 0 = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a \cdot (1 + 0) = a \cdot 1 = a.$$

Si sumamos $-a$ en ambos lados tenemos que $a \cdot 0 = 0$.

□

Lema 1.1. $\forall x \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$(-x) = (-1) \cdot x.$$

Demostración. Aplicamos la parte (c) del teorema anterior.

$$(-1) \cdot x + x = (-1) \cdot x + 1 \cdot x = ((-1) + 1) \cdot x = 0 \cdot x = 0.$$

□

Teorema 1.2. (a) $x \neq 0$, $y \in \mathbb{R}$, $x \cdot y = 1$, entonces $y = \frac{1}{x}$.

(b) Si $x \cdot y = 0$ entonces $x = 0$ o $y = 0$.

Demostración. (a)

$$y = 1 \cdot y = \frac{1}{x} \cdot x \cdot y = \frac{1}{x} \cdot (x \cdot y) = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}.$$

(b) Si $x = 0$ hemos ganado. Si $x \neq 0$,

$$x \cdot y = 0.$$

Multiplicamos ambos lados por el inverso,

$$\frac{1}{x} \cdot x \cdot y = \frac{1}{x} \cdot 0 = 0 \Rightarrow 1 \cdot y = 0 \Rightarrow y = 0.$$

□

Notaciones: $x, y \in \mathbb{R}$

■ Definimos resta como: $x - y = x + (-y)$

- Si $y \neq 0$, definimos la división como

$$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}.$$

- Si $x \neq 0$, $x^0 = 1$.
- $x^1 = x$.
- Si $n \in \mathbb{N}$, $x^n = x \cdot x^{n-1}$.
- Si $x \neq 0$, $x^{-1} = \frac{1}{x}$.
- $x^{-2} = x^{-1} \cdot x^{-1} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot 1$.
- Si $n \in \mathbb{N}$, $x^{-n} = x^{-1} \cdot x^{-(n-1)}$.

Definimos los naturales como la suma de la unidad (elemento neutro del producto) y los enteros negativos como la suma del opuesto de la unidad.

Definición 1.2. Si $n, m \in \mathbb{Z}$ y $m \neq 0$, definimos \mathbb{Q} como

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}.$$

Definimos el complementario de los números racionales como los números irracionales:

$$\mathbb{R}/\mathbb{Q}.$$

Sabemos que $\mathbb{R}/\mathbb{Q} \neq \emptyset$ porque sabemos que existe $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ tal que $x^2 = 2$.

Definición 1.3 (Grupo). Un grupo es un conjunto con una operación (+) que cumple las condiciones de la suma.

Definición 1.4 (Anillo). Un anillo es un conjunto con dos operaciones (+, ·) que cumple todas las condiciones menos la existencia de la inversa en el producto.

Ejemplo 1.1. \mathbb{Z} es un anillo.

Definición 1.5 (Propiedades de cuerpo ordenado de \mathbb{R}). Asumimos que existe $P \subset \mathbb{R}$ (**números reales positivos**), con $P \neq \emptyset$, tal que

- (i) Conjunto cerrado por la suma:

$$\forall x, y \in P, x + y \in P.$$

¹No hemos demostrado que $x^{-2} = \left(\frac{1}{x}\right)^2$

(ii) Conjunto cerrado por el producto:

$$\forall x, y \in P, x \cdot y \in P.$$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}$ se cumple sólo una de las siguientes cosas:

$$x \in P, \text{ o } x = 0 \text{ o } -x \in P.$$

A los números tales que $-x \in P$ los llamaremos **números negativos**.

Notaciones

- Si $x \in P$, decimos que $x > 0$.
- Si $x > 0$ o $x = 0$, decimos que $x \geq 0$.
- Si $-x \in P$, decimos que $-x > 0$ o $x < 0$.
- Si $x < 0$ o $x = 0$ decimos que $x \leq 0$.

Definición 1.6. $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

(i) $x > y$ o $y < x$ si $x - y > 0$.

(ii) $x \geq y$ o $y \leq x$ si $x > y$ o $x = y$.

Tenemos que \mathbb{Q} también es un cuerpo ordenado.

Teorema 1.3. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(a) **Propiedad transitiva:** Si $x > y$ y $y > z$, entonces $x > z$.

(b) Si $x > y$, entonces $x + z > y + z$.

(c) Si $x > y$ y $z > 0$, entonces $x \cdot z > y \cdot z$.

Demostración. (a) Si $x > y$ entonces $x - y > 0$. Similarmente, $y - z > 0$. Por tanto, $x - y \in P$ y $y - z \in P$. Por las propiedades de P tenemos que:

$$(x - y) + (y - z) \in P \Rightarrow x - z \in P.$$

Consecuentemente, $x - z > 0$ y $x > z$.

(b)

$$(x + z) - (y + z) = x - y \in P.$$

(c)

$$x \cdot z - y \cdot z = (x - y) \cdot z.$$

Como $x - y \in P$ y $z \in P$, tenemos que $(x - y) \cdot z \in P$.

□

Teorema 1.4. (a) Si $x \in \mathbb{R}$ y $x \neq 0$, entonces $x^2 > 0$.

(b) $1 > 0$.

(c) Los números naturales son positivos.

Demostración. (a) Si $x \neq 0$, x puede ser positivo o negativo. Si $x > 0$, $x \in P$ y $x \cdot x = x^2 \in P$. Si $x < 0$, $-x \in P$, por tanto $(-x) \cdot (-x) \in P$. Además,

$$(-x)(-x) = (-1)^2 x^2 > 0.$$

Tenemos que demostrar que $(-1)^2$ es 1. Sabemos que

$$(-1)(-1) = -(-1).$$

Además,

$$(-1) + 1 = 0 \Rightarrow -(-1) + (-1) + 1 = -(-1) + 0 \Rightarrow -(-1) = 1.$$

Por tanto,

$$1 \cdot x^2 = x^2 > 0.$$

(b) Sabemos que $1 \neq 0$. Aplicamos lo demostrado en (a):

$$1 = 1 \cdot 1 = 1^2 > 0.$$

(c) Definimos un número natural n como la suma de 1, n veces. Tenemos que

$$1 = 1.$$

Además,

$$1 + 1 = 2.$$

Sabemos que $2 > 1$ porque $1 + 1 - 1 = 1 > 0$. Asumimos que esto se sostiene para $n = k$, entonces

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_k > \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{k-1}.$$

Entonces, si $n = k + 1$,

$$k + 1 = \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_k + 1.$$

Por tanto, para obtener $k + 1$ estamos sumando 1 un total de $k + 1$ veces. De manera similar, tenemos que

$$k + 1 - k = 1 > 0.$$

Además, por hipótesis de inducción

$$k + 1 - 1 = k > 0.$$

Por lo que, dado que $k \geq 1$ tenemos que $k \in P$ (por la propiedad transitiva).

□

Ejemplo 1.2. Consideramos el conjunto $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$. Tenemos que

$$1 + 2 \pmod 3 = 3 \pmod 3 = 0.$$

Tenemos que este conjunto no es un cuerpo ordenado, pues si $1 > 0$, tenemos que $1 \in P$ y, consecuentemente, $1 + 1 \in P$. Sin embargo,

$$1 + 1 = 2 = -1.$$

Como $1 \in P$, tenemos que $-1 < 0$.

Lema 1.2. Si $x \in \mathbb{R}$ y $x > 0$, entonces $\frac{1}{x} > 0$.

Demostración. Si $\frac{1}{x}$ no es mayor que 0, tenemos que o bien, es 0 o es negativo. No puede ser 0, porque cualquier cosa por 0 es 0. Por tanto, ha de ser negativo. Entonces, el opuesto del inverso ha de ser positivo:

$$-\frac{1}{x} > 0 \Rightarrow x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) > 0.$$

Consecuentemente, $-1 > 0$, que es una contradicción (en un teorema anterior quedó demostrado que $1 > 0$). \square

Lema 1.3.

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Demostración. Decimos que

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \iff 2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \iff 2 - 1 = (1 + 1) - 1 = 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

\square

Teorema 1.5 (Aproximación). Si $x \in \mathbb{R}$, satisface que $0 \leq x < \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$, entonces, $x = 0$.

Demostración. Suponemos que $x \neq 0$. Sabemos, por hipótesis, que es positivo, i.e. $x > 0$. Tomamos $\epsilon = \frac{x}{2} > 0$ (por el lema anterior). Entonces

$$x < \frac{x}{2} \iff x - \frac{x}{2} < 0 \iff x \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = x \cdot \frac{1}{2} < 0.$$

Esto nos da una contradicción.

Otra posible demostración es decir $\epsilon = x$ (contradicción porque es imposible que $x < x$, pues daría que 0 es un número negativo). \square

Definición 1.7 (Valor absoluto). Sea $x \in \mathbb{R}$, se define $|x|$ de la siguiente manera

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Proposición 1.1. (i) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(ii) $|x|^2 = x^2$

(iii) Si $y \geq 0$:

$$|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y.$$

(iv) $-|x| \leq x \leq |x|$

Demostración. (i) Si $x \cdot y > 0$, entonces $|x \cdot y| = x \cdot y$. Además, $x \cdot y > 0 \iff x > 0 \wedge y > 0$ o $x < 0 \wedge y < 0$. Si los dos son positivos

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| = x \cdot y.$$

Si los dos son negativos,

$$|x| \cdot |y| = (-x) \cdot (-y) = x \cdot y.$$

Por tanto,

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$$

Si $x \cdot y < 0$, sin pérdida de generalidad, sea $x < 0$. Entonces $|x| = -x$ y $|y| = y$. Además,

$$|x \cdot y| = -x \cdot y.$$

Por otro lado,

$$|x| \cdot |y| = -x \cdot y.$$

Si $x \cdot y = 0$, o $x = 0$ o $y = 0$. Sin pérdida de generalidad, sea $x = 0$, entonces $|x| = 0$ y $|x \cdot y| = 0$. Además,

$$|x| \cdot |y| = 0 \cdot |y| = 0.$$

(ii) Sabemos que $\forall x \in \mathbb{R}$ se cumple que $x^2 \geq 0$. Entonces, tenemos que

$$x^2 = |x^2| = |x| \cdot |x| = |x|^2.$$

(iii) Cogemos $y \in \mathbb{R}^*$ y $|x| \leq y$. Analizamos todos los casos. Si $x < 0$, $|x| = -x$ y $-x > 0$. Por tanto, $x < 0 \leq y$. Por tanto,

$$x < y \Rightarrow x \leq y.$$

Por tanto,

$$|x| \leq y \Rightarrow -x \leq y \Rightarrow -y \leq x.$$

Si $x = 0$ tenemos que $|x| = 0$. Además, $0 \leq y$ y $-y < 0$. Si $x > 0$, tenemos que $|x| = x \leq y$. Además,

$$-y \leq 0 < x \Rightarrow -y \leq x.$$

(iv) Lo podemos demostrar de dos formas. En primer lugar, podemos considerar los posibles valores de x . Si $x = 0$ es trivial. Si $x > 0$, tenemos que $|x| = x$. Por tanto, $x \leq |x|$. Además, $-|x| = -x < 0$ y, por tanto,

$$-x < 0 \leq x \leq |x| \Rightarrow -|x| \leq x \leq |x|.$$

Si $x < 0$ tenemos que $|x| = -x$. Entonces, $-|x| = x \leq x$ y $|x| > 0$, por tanto,

$$-|x| \leq x \leq |x|.$$

Otra manera de hacerlo es utilizando el apartado anterior y afirmar que $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq x$. □

Teorema 1.6 (Desigualdad triangular). Para $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Demostración. Utilizamos el apartado (iii) del teorema anterior. Tenemos que:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \iff -|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

Utilizando (iv), sabemos que $-|x| \leq x \leq |x|$ y, similarmente, $-|y| \leq y \leq |y|$. Por tanto, al sumar estas igualdades obtenemos que

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

Esto es lo que queríamos demostrar. □

Corolario 1.1 (Desigualdad triangular al revés). Para $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x - y| \geq ||x| - |y||.$$

Demostración. Este enunciado es equivalente a (utilizando (iii))

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|.$$

Además,

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \iff |y| \leq |x - y| + |x|.$$

Entonces, utilizando el teorema anterior

$$|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x| = |x - y| + |x|.$$

Por el otro lado, tenemos que

$$|x| - |y| \leq |x - y| \iff |x| \leq |x - y| + |y|.$$

Por tanto, sabemos que

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|.$$

Por lo que

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y| \iff |x - y| \geq ||x| - |y||.$$

□

Definición 1.8 (Distancia Euclídea). La distancia en \mathbb{R} se define como

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Nota. A \mathbb{R} se le llama **espacio euclídeo** de dimensión 1.

Proposición 1.2. (i) $d(x, y) \geq 0 \wedge d(x, y) = 0 \iff x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Demostración. (i) Trivial

(ii) Trivial

(iii) Utilizamos la desigualdad triangular.

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y).$$

□

Definición 1.9. Dado $x \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$, definimos el **entorno de x** con radio ϵ

$${}^aB(x, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < \epsilon\} = (x - \epsilon, x + \epsilon).$$

^aTambién se usa la V

Observación. $|x - y| < \epsilon \iff -\epsilon < x - y < \epsilon \iff x - \epsilon < y < x + \epsilon \iff y - \epsilon < x < y + \epsilon.$

Notaciones. Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$,

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

Corolario 1.2. $x = a \iff \forall \epsilon > 0, x \in B(a, \epsilon)$

Demostración. Sabemos que $y = 0 \iff 0 \leq y < \epsilon, \forall \epsilon > 0$. Sea $y = |x - a|$. Ya sabemos que $|x - a| \geq 0$. La hipótesis me dice que

$$\forall \epsilon > 0, |x - a| < \epsilon \Rightarrow |x - a| = 0 \iff x = a.$$

Por el otro lado, es trivial que si $x = a, \forall \epsilon > 0, x \in B(a, \epsilon).$

□

Corolario 1.3. Para $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$\bigcap_{\epsilon > 0} B(a, \epsilon) = \{a\}.$$

a

^aEste corolario significa lo mismo que el anterior.

1.2. Completitud de \mathbb{R}

Sabemos que $\forall x \in \mathbb{Q}, x^2 \neq 2$.

De momento sabemos que \mathbb{R} es un cuerpo abeliano totalmente ordenado. \mathbb{C} no tiene un orden porque no se cumple la condición de que si $z \in \mathbb{C}$ entonces $z^2 \geq 0$.

Definición 1.10. Sea $S \subset \mathbb{R}$ con $S \neq \emptyset$. Se dice que $a \in \mathbb{R}$ es una **cota superior** de S si

$$\forall s \in S, s \leq a.$$

Decimos que S está **acotado superiormente** si tiene una cota superior.

Similarmente, se dice que $a \in \mathbb{R}$ es una **cota inferior** de S si

$$\forall s \in S, a \leq s.$$

Si tiene una cota inferior decimos que S está **acotado inferiormente**.

Si está acotado superiormente e inferiormente decimos que está acotado.

Ejemplo 1.3. (i) El conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$ está acotado superiormente pero no inferiormente, por lo que no es un conjunto acotado.

(ii) S está acotado si y solo si $\exists c > 0$ tal que $\forall s \in S, |s| \leq c$. Es decir,

$$\exists c > 0, \forall s \in S, -c \leq s \leq c.$$

Nota. Podemos asumir que el conjunto vacío está acotado (no tenemos nada que comprobar).

Definición 1.11. Sea $S \neq \emptyset$. Se dice que $u \in \mathbb{R}$ es el **supremo** de S si

(i) u es cota superior de S . Es decir, $\forall s \in S, u \geq s$.

(ii) Si $v \geq s, \forall s \in S$ entonces $v \geq u$. Es decir, es la menor cota superior.

Análogamente, se dice que $u \in \mathbb{R}$ es el **ínfimo** de S si

(i) $\forall s \in S, u \leq s$.

(ii) Si $\forall s \in S, v \leq s$, entonces $v \leq u$. Es decir, es la mayor cota inferior.

Definición 1.12. Si $u = \sup(S)$ y $u \in S$, diremos que u es el **máximo** de S .

Similarmente, si $u = \inf(S)$ y $u \in S$, diremos que u es el **mínimo** de S .

Ejemplo 1.4. (i) Si $S = (0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$. Tenemos que $1 = \sup(S)$ y como $1 \in S$, 1 ha de ser el máximo. Además, $\inf(S) = 0$ y como $0 \notin S$, no existe el mínimo en S .

(ii) Considera el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$. Tenemos que $\sup(S) = 1$ y como $1 \notin S$ tenemos que S no tiene máximo. Además, no tiene cotas inferiores, por lo que el ínfimo no existe. Si no existe lo denotamos de la siguiente manera: $\inf = -\infty$.

Axioma 1 (Axioma del supremo). Para todo conjunto $S \subset \mathbb{R}$ con $S \neq \emptyset$, si S está acotado superiormente, entonces existe $\sup(S)$.

Observaciones. Tenemos que \mathbb{Q} es un cuerpo abeliano ordenado, pero no se cumple el axioma del supremo. Considera el conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}.$$

Este conjunto está acotado superiormente pero no tiene supremo ($\sup(S) \notin S$) porque no existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = 2$.

Notación. Si se satisface el axioma del supremo diremos que el cuerpo abeliano, totalmente ordenado, es **completo**².

Teorema 1.7. Sea $S \subset \mathbb{R}$ con $S \neq \emptyset$. Supongamos que S está acotado inferiormente. Sea $-S = \{-s : s \in S\}$. Entonces $-S$ está acotado superiormente y, por el axioma del supremo, tiene supremo. Entonces,

$$\sup(-S) = -\inf(S).$$

Es decir, el ínfimo existe y es el opuesto del supremo de $-S$.

Demostración. Sea $v \leq s, \forall s \in S$. Sabemos que v existe por la hipótesis del teorema. Entonces, $\forall s \in S, -s \leq -v$. Por tanto, $-v$ es una cota superior de $-S$. Por el axioma del supremo, tenemos que $\exists u = \sup(-S)$.

(i) Demostramos que $-u$ es una cota inferior. Sabemos que $u \geq -s, \forall s \in S$. Consecuentemente, $-u \leq s, \forall s \in S$.

(ii) Si $\forall s \in S, v \leq s$. Entonces, $-s \leq -v$, por lo que $-v$ es cota superior de $-S$. Por tanto, $u \leq -v$ y, consecuentemente, $-u \geq v$.

□

²No es completo en el sentido algebraico, pues no hay $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = -1$, es completo en el sentido de que no tiene agujeros

Proposición 1.3. Sea $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}$.

(i) Si S está acotado superiormente

$$u = \sup(S) \iff (\forall s \in S, u \geq s) \wedge (\forall \epsilon > 0, \exists s \in S, u - \epsilon < s).$$

(ii) Si S está acotado inferiormente,

$$u = \inf(S) \iff (\forall s \in S, u \leq s) \wedge (\forall \epsilon > 0, \exists s \in S, s < u + \epsilon).$$

Demostración. (i) Sea $u = \sup S$, entonces $\forall s \in S, u \geq s$. Sea $\epsilon > 0$ y consideremos el punto $u - \epsilon$. Si $u - \epsilon \geq s, \forall s \in S$. Entonces $u - \epsilon$ es cota superior de S . Además, tenemos que $u - \epsilon < u$, pero como $\sup S = u$ tenemos que $u \leq u - \epsilon$. Esto es una contradicción.

(ii) Recíprocamente, si u es una cota superior y $\forall \epsilon > 0, \exists s \in S, u - \epsilon < s$. Si u no fuera supremo, existe $v \geq s, \forall s \in S$ tal que $v < u$. Si tomamos $\epsilon = u - v > 0$, tenemos que existe $s \in S$ tal que $s > u - \epsilon$, entonces,

$$u - \epsilon = v < s.$$

Esto es una contradicción. □

Proposición 1.4. Si $A, B \subset \mathbb{R}$ con $A, B \neq \emptyset$, tales que $\forall a \in A, \forall b \in B$ se verifica que $a \leq b$, entonces, $\sup A \leq \inf B$ (existen $\sup A$ y $\inf B$).

Demostración. Tenemos que $\forall b \in B, \forall a \in A, b \geq a$. Por tanto, A está acotado superiormente y, por el axioma de completitud, existe $\sup A$ y que $\sup A \leq b, \forall b \in B$. Por tanto, $\sup A$ es una cota inferior de B y, por tanto,

$$\sup A \leq \inf B.$$

□

Teorema 1.8 (Propiedad Arquimediana de \mathbb{R}). Para todo $x \in \mathbb{R}, \exists n_x \in \mathbb{N}$ tal que $x < n_x$.

Demostración. Asumimos que $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq x$. Por lo que \mathbb{N} está acotado superiormente. Entonces, por el axioma de completitud tenemos que $\exists \sup \mathbb{N} \leq x$. Sabemos que $u = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Como $u - 1 < u$, tenemos que $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $u - 1 < m \leq u$. Entonces, $u < m + 1$. Sin embargo, $m + 1 \in \mathbb{N}$ y tenemos que hay un número natural mayor que el supremo de todos los números naturales. Esto es una contradicción. □

Corolario 1.4.

$$\inf \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0.$$

Demostración. Sea $S = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Como el inverso de un número positivo es positivo, tenemos que el conjunto está acotado inferiormente por 0. Dado $\epsilon > 0$. Como \mathbb{N} no está acotado superiormente, si tomamos $x = \frac{1}{\epsilon}$, podemos encontrar $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{\epsilon} < n_\epsilon.$$

Por tanto,

$$0 \leq \inf S \leq \frac{1}{n_\epsilon} < \epsilon.$$

Por tanto, como $\forall \epsilon > 0, 0 \leq \inf S < \epsilon$, tenemos que $\inf S = 0$. □

Corolario 1.5. $\forall a > 0$,

$$\inf \left\{ \frac{a}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0.$$

Observación. \mathbb{R} es el cuerpo abeliano, ordenado, completo y arquimediano. Es el único conjunto que satisface esto (si hay otro conjunto que también lo cumple, es esencialmente el mismo).

Lema 1.4. Si $a, b > 0$ entonces

$$a < b \iff a^2 < b^2.$$

Demostración.

$$a^2 < b^2 \iff b^2 - a^2 > 0 \iff (b + a)(b - a) > 0.$$

Sabemos que $a, b > 0$, por tanto $b + a > 0$, por tanto $b - a$ tiene que ser positivo y, por tanto, $b > a$. □

Teorema 1.9. Existe $x \in \mathbb{R}$, tal que $x^2 = 2$.

Demostración. Sea $S = \{s \in \mathbb{R} : 0 \leq s \wedge s^2 < 2\}$. Sabemos que $S \neq \emptyset$ porque $1 \in S$. Demostramos que está acotado superiormente. Si $s \in S$, entonces, $s^2 < 2 < 4$. Por el lema anterior,

$$s < 2.$$

Por tanto, S está acotado superiormente por 2. Por el axioma de la completitud, $\exists u = \sup S$. Sabemos que

$$1 \leq u \leq 2.$$

Supongamos que $u^2 \neq 2$:

(i) Si $u^2 < 2$, sea $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left(u + \frac{1}{n}\right)^2 &= u^2 + \frac{2u}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &< u^2 + \frac{2u}{n} + \frac{1}{n} \\ &= u^2 + \frac{2u+1}{n}. \end{aligned}$$

Para demostrar que $u^2 + \frac{2u+1}{n} < 2$ tenemos que demostrar que $\frac{2u+1}{n} < 2 - u^2$. Como $2u+1 > 0$, tenemos que por el colorario anterior que,

$$\inf \left\{ \frac{2u+1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0.$$

Por tanto, $\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2u+1}{n_\epsilon} < \epsilon$ ³. Si tomamos $\epsilon = 2 - u^2$, $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{2u+1}{n_\epsilon} < 2 - u^2 = \epsilon \iff \left(u + \frac{1}{n_\epsilon}\right)^2 < u^2 + \frac{2u+1}{n_\epsilon} < 2 - u^2 + u^2 = 2.$$

Por tanto, $u = \sup S < u + \frac{1}{n_\epsilon} \in S$. Esto es una contradicción.

(ii) Si $u^2 > 2$, sea $m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \left(u - \frac{1}{m}\right)^2 &= u^2 - \frac{2u}{m} + \frac{1}{m^2} \\ &> u^2 - \frac{2u}{m}. \end{aligned}$$

Queremos decir que $u^2 - \frac{2u}{m} > 2$. Cogemos $\epsilon = u^2 - 2 > \frac{2u}{m}$. Usamos el colorario de la propiedad arquimediana. Tenemos que $2u > 0$. Además,

$$\inf \left\{ \frac{2u}{m} : m \in \mathbb{N} \right\} = 0.$$

Por tanto, $\exists m_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2u}{m_\epsilon} < \epsilon$.

$$u^2 - \frac{2u}{m_\epsilon} > u^2 - \epsilon = u^2 - (u^2 - 2) = 2.$$

Así, hemos llegado a la conclusión de que $\left(u - \frac{1}{m_\epsilon}\right)^2 > 2 > s^2, \forall s \in S$. Por el lema anterior,

$$u - \frac{1}{m_\epsilon} > s, \forall s \in S.$$

³En este paso puedes utilizar directamente la propiedad arquimediana y decir que puedes encontrar un $n \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande.

Entonces, $u - \frac{1}{m_\epsilon}$ es una cota superior de S que a su vez es menor que $u = \sup S$. Es decir

$$u - \frac{1}{m_\epsilon} < u \quad \text{y} \quad u - \frac{1}{m_\epsilon} \geq u.$$

Esto es una contradicción.

Por tanto, no puede ser que $u^2 > 2$ ni $u^2 < 2$. Por tanto, debe ser que $u^2 = 2$. \square

Corolario 1.6. Para todo $a > 0$, y para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x > 0$ tal que

$$x^n = a.$$

Notación. En las condiciones del corolario,

$$x = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Definición 1.13. Si $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$,

$$a^{-\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}.$$

Definición 1.14. $a > 0$, $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$,

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m.$$

Proposición 1.5 (Principio de la buena ordenación). Si $A \subset \mathbb{N}$ con $A \neq \emptyset$, entonces existe $n \in A$ tal que

$$\forall m \in A, n \leq m.$$

Definición 1.15. Un conjunto A con un orden se dice que está **bien ordenado** si contiene un primer elemento:

$$\exists x \in A, \forall y < x \Rightarrow y \notin A.$$

Ejemplo 1.5. (i) Todo conjunto finito de \mathbb{R} está bien ordenado.

(ii) El intervalo $[0, \infty)$ está bien ordenado.

Teorema 1.10. Sea $A \subset \mathbb{N}$ con $A \neq \emptyset$, entonces A está bien ordenado.

Demostración. Suponemos lo contrario, es decir, existe $\exists A \subset \mathbb{N}$ que no tiene un primer elemento. Queremos ver que $\forall n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{1, \dots, n\} \cap A = \emptyset$. Si $n = 1$, $\{1\} \cap A = \emptyset$, porque sino 1 sería el primer elemento.

Asumimos que $\{1, 2, \dots, n\} \cap A = \emptyset$. Entonces tenemos que en el caso de $n + 1$:

$$\{1, \dots, n + 1\} \cap A = (\{1, \dots, n\} \cup \{n + 1\}) \cap A = (\{1, \dots, n\} \cap A) \cup (\{n + 1\} \cap A) = \{n + 1\} \cap A.$$

Esto puede ser vacío, o que $\{n + 1\} \cap A = \{n + 1\}$. Si pasase esto último, $n + 1$ sería el menor elemento de A , que romple con nuestra hipótesis inicial. Por lo tanto, tenemos que $A = \emptyset$. Esto rompe con nuestra hipótesis del teorema. \square

Corolario 1.7. Si $x \geq 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 \leq x < n$.

Demostración. Sea $A = \{m \in \mathbb{N} : m > x\} \neq \emptyset$ (por la propiedad arquimediana). Sea n el primer elemento de A . Tenemos que como $n \in A$, $n > x$. Además, $n - 1 \notin A$, por lo que $n - 1 \leq x$. Por tanto:

$$n - 1 \leq x < n.$$

4

 \square

Notación. $\lfloor x \rfloor$ es la parte entera de x tal que $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Teorema 1.11 (Densidad de \mathbb{Q} en \mathbb{R}). Si $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, entonces existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $0 \leq x < y$ ⁵. Sabemos, entonces, que $y - x > 0$. Por tanto, podemos encontrar un $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$y - x > \frac{1}{n} > 0.$$

Entonces, sabemos que

$$ny > nx \geq 0.$$

Por el corolario anterior, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que

$$m - 1 \leq nx < m.$$

⁴En el caso de números negativos, coges que $-x > 0$ y repites la demostración.

⁵Si fuesen negativos, cambiamos el signo y repetimos la demostración.

Entonces, tenemos que $x < \frac{m}{n} = r \in \mathbb{Q}$. Combinando las ecuaciones anteriores:

$$ny > n \left(\frac{1}{n} + x \right) = 1 + xn \geq 1 + m - 1 = m \Rightarrow y > \frac{m}{n} = r > x.$$

Por tanto,

$$x < r < y.$$

□

Notación. Los intervalos no acotados los definimos de la siguiente manera:

- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$
- $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

Teorema 1.12. Sea $S \subset \mathbb{R}$ con $S \neq \emptyset$, tal que $\forall x, y \in S$, $x < y$ se verifica que $[x, y] \subset S$. Entonces, S es un **intervalo** ^a.

^aEs uno de los casos de intervalos que hemos visto anteriormente (acotado y no acotado).

Demostración. (i) Supongamos que S está acotado, sea $a = \inf S$ y $b = \sup S$. Si consideramos el intervalo $[a, b]$ tenemos que como $a = \inf S$, $\forall s \in S$, $s \geq a$. Por el mismo razonamiento, $\forall s \in S$, $b \geq s$. Por tanto,

$$\forall s \in S, a \leq s \leq b \Rightarrow S \subset [a, b].$$

Sea $z \in (a, b)$, queremos decir que $z \in S$. Como $a = \inf S$, tenemos que $\exists s \in S$ tal que $a < s < z$. Similarmente, como $b = \sup S$, $\exists s' \in S$ tal que $z < s' < b$. Por tanto, por la hipótesis del teorema tenemos que $s < s'$, por lo que $[s, s'] \subset S$ y $z \in [s, s']$ por lo que $z \in S$.

$$\therefore (a, b) \subset S.$$

Ahora hay que valorar los posibles casos de si $a, b \in S$, para determinar de qué tipo de intervalo acotado se trata.

(ii) Supongamos que S está acotado inferiormente pero no superiormente. Entonces tenemos que si $x \in S$ y $a = \inf S$, $a \leq s, \forall s \in S$. Por tanto,

$$\forall s \in S, a \leq s \Rightarrow S \subset [a, \infty).$$

Si $z \in (a, \infty)$, tenemos que $a < z$. Si cogemos $\epsilon > 0$ tal que $a + \epsilon = z$, podemos encontrar $s \in S$ tal que

$$a \leq s < z.$$

Dado que S no está acotado superiormente, podemos encontrar s' tal que $s < z < s'$. Por tanto, $s < s'$ y por hipótesis, $[s, s'] \subset S$, por lo que $z \in [s, s']$ y $z \in S$.

$$\therefore (a, \infty) \subset S.$$

- (iii) El caso en el que S está acotado superiormente pero no inferiormente se demuestra igual.
- (iv) Si S no está acotado, tenemos que $S \subset \mathbb{R}$. Si $z \in \mathbb{R}$, como S no está acotado, podemos encontrar $s, s' \in S$ tales que $s < z < s'$. Por tanto, $[s, s'] \subset S$ y $z \in [s, s']$, por lo que $z \in S$. De esta manera,

$$(S \subset \mathbb{R}) \wedge (\mathbb{R} \subset S) \Rightarrow S = \mathbb{R} = (-\infty, \infty).$$

□

Teorema 1.13 (Teorema de los intervalos encajados). Sean $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, con $n \in \mathbb{N}$ tales que $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$. Sea $I_n = [a_n, b_n]$. Esto no puede ser un punto, porque $a_n < b_n$. Entonces $I_{n+1} \subset I_n$. Entonces,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset.$$

a

^aSi el intervalo estuviera abierto, este teorema no tiene por qué cumplirse.

Demostración. Sean $m, n \in \mathbb{N}$, tenemos que $a_m < b_n$. En efecto, si $m \leq n$, entonces, $a_m \leq a_n < b_n \leq b_m$. Si $m > n$,

$$a_m < b_m \leq b_n.$$

Así, demostramos que todos los a_i están a la izquierda y los b_i a la derecha. Entonces, b_n es una cota superior de a_m , y existe $a = \sup \{a_m : m \in \mathbb{N}\} \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Similarmente, $a \leq \inf \{b_n : n \in \mathbb{N}\} = b$. Entonces

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n.$$

Por lo que $[a, b] \subset I_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Consecuentemente,

$$\emptyset \neq [a, b] \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n.$$

□

Corolario 1.8. En las condiciones del teorema de los intervalos encajados, si $\inf \{b_n - a_n\} = 0$ entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ se reduce a un punto.

Demostración. Si $\inf \{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$, entonces para $\forall \epsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq b - a \leq b_m - a_m < \epsilon.$$

Como esto se cumple para todo $\epsilon > 0$, tenemos que $b - a = 0$ y, por tanto, $b = a \in I_n, \forall n \in \mathbb{N}$. □

Teorema 1.14. \mathbb{R} no es numerable.

Demostración. Basta probar que el intervalo $I = [0, 1]$ no es numerable ⁶. Supongamos que es numerable, es decir, $\exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ biyectiva. Así, $\forall x \in [0, 1], \exists ! n \in \mathbb{N}, \varphi(n) = x$. Sea $x_n = \varphi(n)$. Entonces, $I = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sea $n = 1$ y $x_1 \in [0, 1]$. Sea $I_1 \subset [0, 1]$ tal que $x_1 \notin I_1$. Si $x_2 \in I_1$, sea $I_2 \subset I_1$ tal que $x_2 \notin I_2$. Iterando, sean I_1, \dots, I_n intervalos cerrados y encajados tales que $x_n \notin I_n$ ⁷.

$$I \subset I_1 \subset \dots \subset I_n.$$

Por el teorema de los intervalos encajados, podemos asegurar que

$$\emptyset \neq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \subset I = [0, 1].$$

Sea $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Entonces, $x \neq x_1$, pues $x \in I_1$. Por la misma razón, $x \neq x_2$, y $x \neq x_n$. Por tanto, $\forall n \in \mathbb{N}, x \neq x_n$, por lo que $x \notin I$, lo que es una contradicción. Por tanto, I no es numerable y, consecuentemente, \mathbb{R} tampoco lo es. \square

Corolario 1.9. Los números irracionales, \mathbb{R}/\mathbb{Q} no es un conjunto numerable.

Demostración. Asumimos que \mathbb{R}/\mathbb{Q} es numerable. Entonces, tenemos que

$$(\mathbb{R}/\mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}.$$

Sabemos que la unión de dos conjuntos numerables será numerable, pero \mathbb{R} no es numerable, esto es una contradicción. Por tanto, debe ser que \mathbb{R}/\mathbb{Q} no es numerable. \square

1.3. Expresión decimal de los números reales

Expresión en base $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 2$ de los números reales.

Sea $m = 2$ y sea $x \in \mathbb{R}$. Definimos

$$\lfloor x \rfloor = \max \{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$$

parte entero. Sea $a = x - \lfloor x \rfloor$, claramente tenemos que $a \in [0, 1)$. Tenemos que a es la parte decimal.

- (i) Tomamos como convenio que el intervalo que tomamos está cerrado por la izquierda. Vamos a dividir el intervalo $[0, 1)$ en m partes iguales (en este caso $m = 2$). El primer intervalo desde la izquierda lo denominamos 0 y el segundo 1 (en el caso m lo hacemos desde 0 hasta $m - 1$). Si a está en el primer intervalo tomamos $j_1 = 0$, si estuviera en el segundo tomaríamos $j_1 = 1$. Definimos $a_1 = j_1$. Tenemos que

$$\frac{j_1}{2} \leq a < \frac{j_1 + 1}{2} \Rightarrow a \in \left[\frac{j_1}{2}, \frac{j_1 + 1}{2} \right).$$

⁶Hay que tener en cuenta que existe una biyección entre \mathbb{R} y $[0, 1]$.

⁷Estamos asumiendo que estos intervalos cumplen con los requisitos del teorema de los intervalos encajados, es decir, son intervalos cerrados.

- (ii) Repetimos el caso anterior pero con este último intervalo, por lo que lo dividimos en m trozos. El punto medio será

$$\frac{j_1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2j_1 + 1}{4}.$$

El primer grupo lo denominamos 0 y el segundo 1 (en el caso m iría de 0 a $m - 1$). Entonces, $j_2 \in \{0, 1\}$. Tenemos que $a_2 = j_2$. Así pues,

$$\frac{j_1}{2} + \frac{j_2}{4} \leq a < \frac{j_1}{2} + \frac{j_2 + 1}{4}.$$

- (iii) Paso n -ésimo. Repetimos el mismo procedimiento hasta elegir $j_m \in \{0, 1\}$ (en el caso $m = 2$) para obtener

$$\underbrace{\frac{j_1}{2} + \frac{j_2}{2^2} + \cdots + \frac{j_n}{2^n}}_{i_n} \leq a < \underbrace{\frac{j_1}{2} + \frac{j_2}{2^2} + \cdots + \frac{j_n + 1}{2^n}}_{s_n}.$$

Tenemos que $a \in [i_n, s_n)$ y

$$0 \leq \inf \{s_n - i_n\} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} = 0.$$

Por tanto, $a_n = j_n$.

Notación 1.1. Sea $m \geq 2$, $x \in \mathbb{R}$.

$$x = \lfloor x \rfloor + a = \lfloor x \rfloor + (\cdot a_1 a_2 \cdots a_n \cdots)_m.$$

Ejemplo 1.6. (i) Sea $m = 10$ y $x = \pi$.

$$\lfloor x \rfloor = 3.$$

Tenemos que $a = \pi - 3$. a tendrá una expresión de la forma $a = (\cdot 1415 \cdots)_{10}$.⁸

- (ii) Sea $m = 2$ y $x = \frac{1}{2}$. Tenemos que $\lfloor x \rfloor = 0$, por lo que $a = x$. Tenemos que en el primer paso, está en el intervalo de la derecha. Por tanto, $a_1 = 1$. En el segundo paso se encuentra en la izquierda, por tanto, $a_2 = 0$. Desde aquí, siempre va a estar en el lado izquierdo, por tanto $a_n = 0, n \geq 2$.

$$\therefore \frac{1}{2} = (\cdot 10 \cdots 0 \cdots)_2.$$

- (iii) Cómo escribir 13 en base 2:

$$13 = 8 + 4 + 1 = 2^3 + 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 2^0 \Rightarrow (13)_{10} = (1101)_2.$$

- (iv) En general, si $a_j \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$,

$$(a_n \cdots a_1)_m = a_n m^{n-1} + \cdots + a_2 m^1 + a_1 m^0.$$

⁸Ambos puntos y comas en los decimales son aceptados.

Observación 1.1. Tenemos que $x \in \mathbb{Q}$ si y solo si la parte decimal es periódica. La primera implicación se puede demostrar utilizando una sucesión geométrica. Recíprocamente, si $x = \frac{p}{q}$, tenemos que los restos están entre 0 y $q - 1$.

Expresión decimal en base $m \geq 2$.

$$\forall x \in [0, 1], \exists a_1, a_2, \dots, a_j, \dots \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$$

tales que

$$\frac{a_1}{m} + \frac{a_2}{m^2} + \dots + \frac{a_j}{m^j} \leq x < \frac{a_1}{m} + \dots + \frac{a_j + 1}{m^j}.$$

Recíprocamente, dadas $a_1, \dots, a_j \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$ por el teorema de los intervalos encajados, $\exists! x \in [0, 1)$ tal que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \frac{a_1}{m} + \frac{a_2}{m^2} + \dots + \frac{a_j}{m^j} \leq x < \frac{a_1}{m} + \dots + \frac{a_j + 1}{m^j}.$$

Observación 1.2. Representamos \mathbb{R} como una recta infinita sin huecos.

1.4. Números Complejos

Sabemos que $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, es decir, si $(x, y) \in \mathbb{C}$ tenemos que $x, y \in \mathbb{R}$. Definimos $i = (0, 1)$ y si $x \in \mathbb{C}$ podemos expresar x de la siguiente manera:

$$(x, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1).$$

Definición 1.16. En \mathbb{C} se definen la suma y el producto:

(a) Suma.

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

(b) Producto.

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Teorema 1.15. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo abeliano.

Observación 1.3. Tenemos que, según nuestra definición de producto:

$$i^2 = -1.$$

Es decir, en este cuerpo abeliano no existe un orden total.⁹

Observación 1.4. Existe una inyección de \mathbb{R} a \mathbb{C} :

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \rightarrow x + i \cdot 0.$$

Decimos que \mathbb{R} hereda de \mathbb{C} las propiedades de la suma, producto, etc. Además, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

⁹Para que el orden sea total, el cuadrado de cualquier número debe ser positivo.

Teorema 1.16 (Teorema Fundamental del Álgebra). Si $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$, con $z = x + iy \in \mathbb{C}$. $P(z)$ es un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$ con $a_j \in \mathbb{C}$. Entonces, existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $P(w) = 0$. En particular, podemos encontrar $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{N}$ ($1 \leq m \leq n$) y existen $w_1, \dots, w_m \in \mathbb{C}$ tales que

$$P(z) = (z - w_1)^{\alpha_1} \dots (z - w_m)^{\alpha_m}, \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_m = n.$$

^a

^aEste teorema nos dice que \mathbb{C} es algebraicamente completo.

Ejemplo 1.7. Sea $P(z) = z^4 + 2z^2 + 1$, $z \in \mathbb{C}$. Tenemos que:

$$P(z) = (z^2 + 1)^2 = (z + i)^2 (z - i)^2.$$

1.4.1. Representación polar

Definición 1.17. Norma de $z = x + iy$ es:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Teorema 1.17. Si $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\left| \frac{z}{|z|} \right| = \frac{|z|}{|z|} = 1.$$

Definición 1.18. Podemos representar $z \in \mathbb{C}$ como:

$$z = |z|_\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Si $x, y > 0$ tenemos que:

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}.$$

Capítulo 2

Sucesiones y límites

Definición 2.1. Se dice que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una **sucesión** de números reales si existe una función

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto \varphi(n) = x_n.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.1. (i) $\varphi(n) = \frac{1}{n}$.

(ii) Sucesión de Fibonacci.

$$\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 1, \varphi(n) = \varphi(n-1) + \varphi(n-2).$$

Definición 2.2. Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** a $x \in \mathbb{R}$, y lo escribiremos de esta manera

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x,$$

si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, |x - x_n| < \epsilon, \forall n \geq n_0.$$

Proposición 2.1. Si $x_n = \frac{1}{n}$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, tomamos $x = 0$, tenemos que

$$|x - x_n| = \left| 0 - \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}.$$

Entonces, queremos probar que

$$\frac{1}{n} < \epsilon, \quad n \geq n_0.$$

Como sabemos que $\inf \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$, tenemos que $\forall \epsilon > 0$

$$0 \leq \frac{1}{n_0} < 0 + \epsilon,$$

para algún $n_0 \in \mathbb{N}$. Si $n \geq n_0$, tenemos que

$$n \geq n_0 \iff \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon.$$

Por tanto, hemos encontrado $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$,

$$|x - x_n| \leq \epsilon.$$

□

Ejemplo 2.2. (i) Cogemos $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Vamos a ver que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, mientras que $\sup x_n \neq \inf x_n \neq 0$.

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n}.$$

$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $\forall n \geq n_0$,

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Por lo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

(ii) $x_n = (-1)^n$. Esta sucesión no converge, pues oscila. Tenemos que ver que $\forall x, \exists \epsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0$ tal que $|x - x_n| \geq \epsilon$. Supongamos que $x > 1$ y tomamos $\epsilon = 2$ y $n_0 \in \mathbb{N}$. Sea $n \geq n_0$ impar. Entonces

$$|x_n - x| = |-1 - x| = 2 + x - 1 = 1 + x > 2 = \epsilon.$$

Si $x < -1$, tenemos que $-x > 1$. Tomamos $\epsilon = 2$. Podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ y n es par.

$$|x - 1| = 2 + (-1 - x) = 1 - x \geq 2 = \epsilon.$$

Finalmente, si $-1 \leq x \leq 1$, tomamos $\epsilon = 1$. Si $x = 0$, tenemos que

$$|1 - 0| = |0 - 1| = 1 \geq 1 = \epsilon.$$

Si $x > 0$, tenemos que si $n_0 \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $n \geq n_0$ impar, tal que

$$|x - (-1)| = x + 1 \geq 1 = \epsilon.$$

Similarmente, si $x < 0$ ($-x > 0$) y $n_0 \in \mathbb{N}$ podemos encontrar tal que n sea par:

$$|1 - x| = 1 - x \geq 1 = \epsilon.$$

Proposición 2.2. Si una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge, entonces el límite es único.

Demostración. Supongamos que existen $x, x' \in \mathbb{R}$ con $x \neq x'$ tales que $\forall \epsilon > 0, \exists n_0, n'_0 \in \mathbb{N}$ tales que si $n \geq n_0$ y $n \geq n'_0$, $|x_n - x| < \epsilon$ y $|x_n - x'| < \epsilon$. Sea $\epsilon = \frac{|x - x'|}{3}$. Entonces, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \epsilon$ si $n \geq n_0$. Lo mismo sucede con $n'_0 \in \mathbb{N}$. Tenemos que $|x - x'| = 3\epsilon$. Sea $n \geq \max\{n_0, n'_0\}$,

$$3\epsilon = |x - x_n + x_n - x'| \leq |x - x_n| + |x_n - x'| < 2\epsilon.$$

Esto es una contradicción, por lo que $x = x'$.

Otra demostración consiste en asumir que existen dos límites de la sucesión, x y x' . Tenemos que si $\epsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_1$

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Similarmente, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_2$, entonces

$$|x_n - x'| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Entonces, si cogemos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ y $n \geq n_0$, tenemos que

$$|x - x'| = |x - x_n + x_n - x'| \leq |x - x_n| + |x_n - x'| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por tanto, $x' = x$. □

Definición 2.3. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

(i) Diremos que la sucesión diverge a ∞ , es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, si

$$\forall c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, x_n \geq c.$$

(ii) Diremos que la sucesión diverge a $-\infty$, es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ si

$$\forall c < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, x_n \leq c.$$

Observación 2.1. Existen sucesiones que convergen y las que no convergen. Dentro de las que no convergen están las que divergen (a ∞ y $-\infty$) y las que no divergen $((-1)^n)$.

Ejemplo 2.3. Tenemos que $x_n = n$ satisface que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

Ejemplo 2.4. Consideremos $x_n = \frac{2n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Demostramos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

Queremos decir que $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |x_n - 2| < \epsilon$. Tenemos que

$$\left| \frac{2n}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2n - 2}{n+1} \right| = \frac{2}{n+1}.$$

$$\frac{2}{n_0 + 1} < \epsilon \iff \frac{2}{\epsilon} - 1 < n_0.$$

Por la propiedad arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$. Si $n \geq n_0$, tenemos que

$$\frac{2}{n + 1} < \epsilon.$$

Proposición 2.3. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ y sea $m \in \mathbb{N}$. Sea $y_n = x_{n+m}$. Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \iff \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x.$$

Demostración. (i) Asumimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Entonces tenemos que

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |x - x_n| < \epsilon.$$

Como $m \in \mathbb{N}$, tenemos que $m + n_0 > n_0$, por lo que, si $n \geq n_0$, $|x - x_{m+n}| < \epsilon$. Es decir,

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |x - y_n| < \epsilon.$$

(ii) Recíprocamente, si $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$, tenemos que

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |x - y_n| < \epsilon.$$

Es decir,

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 + m \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |x - x_{m+n}| < \epsilon.$$

Si cogemos $n'_0 = m + n_0$, tenemos que

$$\forall \epsilon > 0, \exists n'_0, \forall n \geq n'_0, |x - x_n| < \epsilon.$$

□

Teorema 2.1 (Regla del bocado). Sean $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ con

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n \leq z_n \leq x_n.$$

Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Entonces, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Cogemos $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_1$

$$|y_n - x| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Similarmente, sea $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_2$,

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{6}.$$

Sea $n_0 = \max \{n_1, n_2\}$. Sea $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} |z_n - x| &= |z_n - y_n + y_n - x_n + x_n - x| \\ &\leq |z_n - y_n| + |y_n - x_n| + |x_n - x| \\ &= z_n - y_n + x_n - y_n + |x_n - x| \\ &\leq x_n - y_n + x_n - y_n + |x_n - x| \\ &= 2(x_n - y_n) + |x_n - x|. \end{aligned}$$

Observación 2.2. Tenemos que

$$|x_n - y_n| = |x_n - x + x - y_n| \leq |x_n - x| + |y_n - x|.$$

Por tanto,

$$2(x_n - y_n) + |x_n - x| \leq 3|x_n - x| + 2|x - y_n| < 3 \cdot \frac{\epsilon}{6} + 2 \cdot \frac{\epsilon}{4} = \epsilon.$$

Una demostración alternativa es decir que existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que si $\epsilon > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_1, |x_n - x| < \epsilon &\iff -\epsilon < x_n - x < \epsilon \iff -\epsilon + x < x_n < \epsilon + x \\ \forall n \geq n_2, |y_n - x| < \epsilon &\iff -\epsilon < y_n - x < \epsilon \iff -\epsilon + x < y_n < \epsilon + x. \end{aligned}$$

Sea $n > \max \{n_1, n_2\}$, por hipótesis tenemos que

$$-\epsilon + x < x_n < z_n < y_n < \epsilon + x.$$

$$\therefore |z_n - x| < \epsilon.$$

□

Ejemplo 2.5. (i) $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0.$$

Como $n^k \geq n$, tenemos que $n^{k-1} \geq 1$. Además, podemos deducir que

$$0 \leq \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n}.$$

La primera sucesión converge a 0 y la segunda también converge a 0 (propiedad arquimediana), por lo que $\frac{1}{n^k} \rightarrow 0$.

(ii) Si $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n^k}.$$

Tenemos que

$$0 \leq \left| \frac{\sin n}{n^k} \right| \leq \frac{1}{n^k}.$$

Como $0 \rightarrow 0$ y $\frac{1}{n^k} \rightarrow 0$, tenemos que $\frac{\sin n}{n^k} \rightarrow 0$.

Observación 2.3. En la regla del bocado, basta que las estimaciones sean ciertas a partir de un cierto valor. Es decir, si $y_n \leq z_n \leq x_n$, $n \geq n_0$, si $y_n, x_n \rightarrow x$, tenemos que $z_n \rightarrow x$.

Ejemplo 2.6. La sucesión $\frac{n}{2^n} \rightarrow 0$. Esto lo demostramos diciendo que $\frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$. En el caso $n = 3$ esto no se cumple, porque se cumple en $n \geq 4$.

Definición 2.4. Se dice que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ está acotada si existe $c > 0$, tal que

$$|x_n| \leq c, \forall n \in \mathbb{N}.$$

^a

^aEs decir, $-c \leq x_n \leq c$, o sea, está acotado superior e inferiormente.

Teorema 2.2. Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ converge, entonces está acotada.

Demostración. Sea $\epsilon = 1$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$

$$|x_n - x| < 1.$$

Además, $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Tenemos que si $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} |x_n| &= |x_n - x + x| \\ &\leq |x_n - x| + |x| \\ &\leq 1 + |x|. \end{aligned}$$

Sea $c = \max\{1 + |x|, |x_n| : n \leq n_0\}$. Entonces tenemos que

$$|x_n| \leq c, \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Observación 2.4. El recíproco del teorema anterior no es cierto en general. Considera $(-1)^n$ que está acotada por 1 pero no converge.

Ejemplo 2.7. Si $x \in \mathbb{R}$, existe $a_0 \in \mathbb{Z}$ y existen $a_n \in \{0, \dots, 9\}$ tales que

$$\underbrace{a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n}}_{x_n} \leq x \leq a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n + 1}{10^n}.$$

Vamos a demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. En efecto,

$$x_n \leq x < x_n + \frac{1}{10^n}.$$

Entonces, tenemos que

$$0 \leq |x - x_n| \leq \frac{1}{10^n}.$$

Tenemos que $0 \rightarrow 0$ y $\frac{1}{10^n} \rightarrow 0$, por lo que $|x - x_n| \rightarrow 0$, por lo que $x_n \rightarrow x$.

Teorema 2.3. Sean $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, tales que $x_n \rightarrow x$ y $y_n \rightarrow y$.

(i) $x_n + y_n \rightarrow x + y \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$

(ii) $x_n y_n \rightarrow xy \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right).$

(iii) Si $y_n \neq 0, y \neq 0$,

$$\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{x}{y} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$$

(iv) $|x - x_n| \rightarrow 0.$

Demostración. (i) Si $\epsilon > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, |x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$. Similarmente, existe $n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$. Tomamos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

$$|x_n + y_n - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

(ii)

$$|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| = |x_n (y_n - y) + y (x_n - x)| \leq |x_n| |y_n - y| + |y| |x_n - x|.$$

Cogemos $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_1, |x_n - x| < |x|$,

$$|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| < 2|x|.$$

Así,

$$|x_n y_n - xy| \leq 2|x| |y_n - y| + |y| |x_n - x|.$$

Cogemos $n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ tales que $\forall n \geq n_2$ y $\forall n \geq n_3$,

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2|y|} \quad \text{y} \quad |y_n - y| < \frac{\epsilon}{4|x|}.$$

Entonces, si cogemos $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$, tenemos que $\forall n \geq n_0$,

$$|x_n y_n - xy| \leq 2|x| |y_n - y| + |y| |x_n - x| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

(iii)

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y} \right| &= \left| \frac{x_n y - x y_n}{y_n y} \right| = \left| \frac{y(x_n - x) - x(y_n - y)}{y_n y} \right| \\ &\leq \frac{1}{|y_n|} \frac{|x_n - x|}{|y_n|} + \frac{1}{|y_n|} \left| \frac{x}{y} \right| |y_n - y|. \end{aligned}$$

Si cogemos $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_1, |y_n - y| < \frac{|y|}{2}$. Entonces tenemos que

$$|y_n| = |y_n - y + y| \geq |y| - |y_n - y| > \frac{|y|}{2}.$$

Entonces,

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y} \right| \leq \frac{1}{|y_n|} \frac{|x_n - x|}{|y_n|} + \frac{1}{|y_n|} \left| \frac{x}{y} \right| |y_n - y| < \frac{2}{|y|} |x_n - x| + \left| \frac{2x}{y^2} \right| |y_n - y|.$$

Cogemos $n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_2$ y $\forall n \geq n_3$ tenemos que

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon |y|}{4} \quad \text{y} \quad |y_n - y| < \epsilon \left| \frac{y^2}{4x} \right|.$$

Si cogemos $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$, tenemos que $\forall n \geq n_0$,

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y} \right| \leq \frac{1}{|y_n|} \frac{|x_n - x|}{|y_n|} + \frac{1}{|y_n|} \left| \frac{x}{y} \right| |y_n - y| < \frac{2}{|y|} |x_n - x| + \left| \frac{2x}{y^2} \right| |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

(iv) Decir que $|x - x_n| \rightarrow 0$ es lo mismo que decir que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. En efecto, si $|x - x_n| \rightarrow 0$, tenemos que

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |x_n - x| < \epsilon.$$

Esta es la definición de $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

□

Corolario 2.1. (i) Si cada una de estas sucesiones converge ^a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n + \cdots + z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} z_n.$$

(ii) Si $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^k.$$

^aSi la suma converge, las sucesiones individuales no tienen por qué converger. Considera $x_n = n$ y $y_n = -n$.

Teorema 2.4. Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, con $x_n \geq 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, entonces, $x \geq 0$.

Demostración. Supongamos que $x < 0$. Sea $\epsilon = \frac{|x|}{2} > 0$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, $|x_n - x| < \epsilon$. Tenemos que

$$|x_n - x| = x_n - x < \epsilon = \frac{|x|}{2} = \frac{-x}{2} \Rightarrow x_n < \frac{x}{2} \iff x_n < \frac{x}{2} < 0 \iff x_n < 0, \forall n \geq n_0.$$

Esto es una contradicción.

□

Corolario 2.2. Si $x_n \leq y_n$, $x_n \rightarrow x$ y $y_n \rightarrow y$. Entonces, $x \leq y$.

Demostración. Si $y_n - x_n \geq 0$, entonces $y_n - x_n \rightarrow y - x$. Por el teorema anterior tenemos que

$$y - x \geq 0 \iff y \geq x.$$

□

Corolario 2.3. Si $x_n \rightarrow x$. Entonces, $|x_n| \rightarrow |x|$.^a

^aEl recíproco no se cumple, comprueba $(-1)^n$.

Demostración. Tenemos que

$$0 \leq ||x_n| - |x|| \leq \underbrace{|x_n - x|}_{\rightarrow 0}.$$

Entonces, $||x_n| - |x|| \rightarrow 0$.

□

Teorema 2.5. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{+a}$, y supongamos que $x_n \rightarrow x$ y $x > 0$. Sea $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$x_n^{\frac{1}{m}} \rightarrow x^{\frac{1}{m}} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{\frac{1}{m}} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)^{\frac{1}{m}}.$$

^b

^a $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

^bSi aplicamos esta propiedad junto a la del exponente, lo podemos demostrar para $q \in \mathbb{Q}$.

Demostración. Sea $a = x^{\frac{1}{m}} \iff a^m = x$ y $a_n = x_n^{\frac{1}{m}} \iff a_n^m = x_n$. Sabemos que

$$\begin{aligned} a^m - a_n^m &= (a - a_n)(a^{m-1} + \dots + a_n^{m-1}). \\ \Rightarrow \frac{a^m - a_n^m}{a^{m-1} + \dots + a_n^{m-1}} &= a - a_n. \end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$\frac{|a^m - a_n^m|}{a^{m-1}} \geq \frac{|a^m - a_n^m|}{|a^{m-1} + \dots + a_n^{m-1}|} = |a - a_n|.$$

Por tanto,

$$0 \leq \left| x^{\frac{1}{m}} - x_n^{\frac{1}{m}} \right| \leq \underbrace{\frac{1}{a^{m-1}} |x - x_n|}_{\rightarrow 0}.$$

Entonces, $\left| x^{\frac{1}{m}} - x_n^{\frac{1}{m}} \right| \rightarrow 0$.

□

2.1. Criterios de Convergencia

Proposición 2.4. Si $0 < r < 1$, entonces $r^n \rightarrow 0$.

Demostración. Sea $R = \frac{1}{r} > 1$. Queremos ver que $R^n \rightarrow \infty$. Como $R > 0$, por la desigualdad de Bernoulli tenemos que

$$R^n = (1+x)^n \geq 1+nx.$$

Por tanto,

$$0 < r^n = \frac{1}{R^n} = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{1+nx} < \frac{1}{nx}.$$

Como $\frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{x}$ y $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, tenemos que $\frac{1}{nx} \rightarrow 0$. Entonces, $r^n \rightarrow 0$. □

Observación 2.5. En la demostración anterior hemos dicho que $r^n \rightarrow 0$ es equivalente a decir que $R^n \rightarrow \infty$. Esto es porque la definición de la segunda será:

$$\forall c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, R^n > c.$$

Si $R^n > c$ tenemos que

$$\frac{1}{r^n} > c \iff \frac{1}{r^n} < c.$$

Por tanto, se trata de la misma definición, solo que cambiamos ϵ por c .

Ejemplo 2.8. (i) Si $c > 0$, tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} c^{\frac{1}{n}} = 1$. Si $c = 1$ el resultado es trivial. Si $c > 1$, tenemos que, $c^{\frac{1}{n}} > 1$ (problema 18 de la hoja 2). Entonces, podemos encontrar $x_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$c^{\frac{1}{n}} = 1 + x_n \iff x_n = c^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Entonces, utilizando la desigualdad de Bernoulli:

$$c = (1+x_n)^n \geq 1+nx_n \iff x_n \leq \frac{c-1}{n}.$$

Por tanto, tenemos que

$$0 < \left| c^{\frac{1}{n}} - 1 \right| = x_n \leq \frac{c-1}{n}.$$

Como $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ y $c-1 \rightarrow c-1$, por el teorema 2.3 tenemos que $\frac{c-1}{n} \rightarrow 0$. Entonces,

$$\left| c^{\frac{1}{n}} - 1 \right| \rightarrow 0 \iff c^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1.$$

Si $0 < c < 1$, tenemos que $c^{\frac{1}{n}} < 1$. Entonces existe $x_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$c^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+x_n}.$$

Utilizando la identidad de Bernoulli:

$$c = \frac{1}{(1+x_n)^n} \leq \frac{1}{1+nx_n} < \frac{1}{nx_n}.$$

Entonces tenemos que,

$$\left| c^{\frac{1}{n}} - 1 \right| = \frac{x_n}{1 + x_n} < x_n < \left(\frac{1}{c} \right) \frac{1}{n}.$$

Utilizando el teorema 2.3, tenemos que $\frac{1}{nc} \rightarrow 0$ y, consecuentemente, $c^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$.

- (ii) Similarmente, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$. Sabemos que $n^{\frac{1}{n}} > 1$ para $n > 1$. Entonces podemos escribir

$$n^{\frac{1}{n}} = 1 + x_n.$$

Entonces, aplicando el teorema del binomio tenemos que

$$n = (1 + x_n)^n = 1 + nx_n + \frac{1}{2}n(n-1)x_n^2 + \cdots \geq 1 + \frac{1}{2}n(n-1)x_n^2.$$

Por tanto, tenemos que $x_n^2 \leq \frac{2}{n}$. Entonces podemos decir que

$$0 < \left| n^{\frac{1}{n}} - 1 \right| = x_n \leq \left(\frac{2}{n} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por el teorema 2.5 tenemos que $\left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0^{\frac{1}{2}} = 0$. Entonces, $\left(\frac{2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$ y $n^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$.

Teorema 2.6 (Regla del cociente). Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ y existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Entonces, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Demostración. Sea $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Como se trata de una sucesión de términos positivos, tenemos que $l \in [0, 1)$ ¹. Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} - l \right| < \epsilon \iff -\epsilon + l < \frac{x_{n+1}}{x_n} < \epsilon + l.$$

Por lo tanto,

$$x_{n+1} < (l + \epsilon) x_n.$$

Consecuentemente,

$$x_{n+1} < (l + \epsilon) x_n < (l + \epsilon)^2 x_{n-1} < \cdots < (l + \epsilon)^{n+1-n_0} x_{n_0}.$$

Sea $\epsilon > 0$ tal que $l + \epsilon < 1$, por ejemplo, cogemos $\epsilon = \frac{1-l}{2}$. Tomamos $r = l + \epsilon < 1$ y obtenemos que si $n \geq n_0$

$$x_{n+1} < r^{n+1} \frac{x_{n_0}}{r^{n_0}}.$$

Por la proposición 2.4 tenemos que $r^{n+1} \rightarrow 0$, por lo que $x_{n+1} \rightarrow 0$ (aplicando la regla del bocado). □

¹Los límites no conservan estrictamente las desigualdades. Considera la sucesión $x_n = \frac{1}{n}$. Tenemos que cada elemento es mayor que 0 pero el límite es 0.

Observación 2.6. Si $l = 1$ el resultado puede ser falso, considera el caso $x_n = n$. Tenemos que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1,$$

pero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty.$$

Ejemplo 2.9. Consideramos la sucesión $x_n = \frac{n}{2^n}$. Aplicamos la regla del cociente.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} < 1.$$

Entonces, $x_n \rightarrow 0$.

Definición 2.5 (Monotonía). Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Se dice que

- (i) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es **creciente** si $x_n \leq x_{n+1}$ ^a.
- (ii) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es **decreciente** si $x_n \geq x_{n+1}$.
- (iii) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es **monótona** si es creciente o decreciente.

^aEs estrictamente creciente si $x_n < x_{n+1}$. También funciona así si es estrictamente decreciente.

Teorema 2.7. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

- (i) Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y está acotada superiormente, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

- (ii) Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente y está acotada inferiormente, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

^a

^aLo importante de este teorema es que si una sucesión está acotada y es monótona, entonces existe el límite.

Demostración. (i) Sea $s = \sup \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} < \infty$. Sea $\epsilon > 0$, queremos ver que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s - x_n < \epsilon, \forall n \geq n_0$. Como $s = \sup \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$s - \epsilon < x_{n_0}.$$

Además, como se trata de una sucesión creciente, tenemos que si $n \geq n_0$,

$$x_n \geq x_{n_0} > s - \epsilon \iff s - x_n < \epsilon.$$

- (ii) Se puede demostrar de dos formas: una es similar a la anterior, mientras que la otra se parece a la demostración de la existencia del ínfimo en casos de la existencia de una cota inferior. Comenzamos con la primera. Sea $i = \inf \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Como i es el ínfimo, sabemos que si $\epsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_{n_0} < i + \epsilon.$$

Además, como la sucesión es decreciente tenemos que si $n \geq 0$

$$x_n < x_{n_0} < i + \epsilon.$$

Entonces, si $n \geq n_0$ tenemos que

$$x_n - i < \epsilon.$$

Por tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

La otra demostración comienza diciendo que si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente acotada inferiormente, entonces la sucesión $\{-x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente acotada superiormente. Por un teorema que vimos en el capítulo anterior, sabemos que $\sup \{-x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = -\inf \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Aplicando el apartado anterior tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = \inf \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

□

Ejemplo 2.10. (i)

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}.$$

Esta sucesión decrece. Además, $1 + \frac{1}{n} \geq 1$, es decir, está acotada inferiormente. Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \inf \left\{1 + \frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}} = 1 + \inf \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}} = 1.$$

- (ii) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{2^n}$, $n \geq 2$. La sucesión va a ser de la forma

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \dots$$

Tenemos que el término general será $x_n = \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \rightarrow 1$, pues $\frac{1}{2^{n+1}} \rightarrow 0$.

Observación 2.7. Si $r > 0$ y $m > n$,

$$\sum_{j=n}^m r^j = \frac{r^n - r^{m+1}}{1 - r}.$$

- (iii) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Esta serie diverge. Sabemos que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ existe, entonces estaría acotada superiormente. Nos vamos a fijar en los términos x_{2^n} . Tenemos que

$$x_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1} + 1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right).$$

Tenemos que en el último paréntesis hay $2^n - (2^{n-1} + 1) + 1 = 2^{n-1}$ elementos. Entonces tenemos que

$$x_{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2} \rightarrow \infty.$$

Entonces, esta sucesión diverge y, por tanto, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no puede estar acotada superiormente. Entonces, la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es divergente.

- (iv) Número de Euler.

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Vamos a demostrar que es creciente y que está acotada superiormente. En efecto,

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{1}{n^i}.$$

Observación 2.8.

$$\begin{aligned} \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} &= \frac{n(n-1) \cdots 1}{i!(n-i)!n^i} = \frac{n(n-1) \cdots (n-i+1)}{i!n^i} = \frac{1}{i!} \cdot 1 \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-i+1}{n} \\ &= \frac{1}{i!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{i-1}{n}\right). \end{aligned}$$

A partir de la observación 2.8, podemos ver que

$$\binom{n}{i} \frac{1}{n^i} = \frac{1}{i!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) < \frac{1}{i!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{i-1}{n+1}\right).$$

Por lo tanto,

$$e_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \frac{1}{(n+1)^i} = \sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} \frac{1}{(n+1)^i} + \frac{1}{(n+1)^{n+1}} > \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} = e_n.$$

Por tanto, $e_n < e_{n+1}$, por lo que la sucesión e_n es creciente. Ahora tenemos que ver que está acotada, en concreto, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $e_n \leq 3$. Usamos que $2^{j-1} \leq j!$. Partiendo de la observación 2.8, tenemos que

$$\binom{n}{i} \frac{1}{n^i} < \frac{1}{i!} \leq \frac{1}{2^{i-1}}.$$

De esta manera,

$$e_n \leq 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{i-1}} = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} \leq 1 + 2 = 3.$$

Por tanto, la sucesión va a converger a e , es decir,

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Ejemplo 2.11. Si $r > 0$ y $x_n = r^{\frac{1}{n}}$ entonces $x_n \rightarrow 1$. Consideramos varios casos. Si $r = 1$, es trivial. Si $r > 1$, entonces vamos a ver si es creciente o decreciente. Tenemos que

$$r > 1 \iff r^{n+1} > r^n \iff r^{\frac{1}{n}} > r^{\frac{1}{n+1}}.$$

Es decir, la sucesión decrece y, por tanto, decrece. Como $r > 1$, entonces, $x_n = r^{\frac{1}{n}} > 1$. Entonces la sucesión decreciente $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada inferiormente por 1. Consecuentemente, la sucesión converge. Vamos a demostrar que el límite es 1. Sea $x = \lim_{n \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{n}}$. Como, $x_n > 1$, tenemos que $x \geq 1$. Supongamos que $x > 1$. Tenemos que

$$x_n = r^{\frac{1}{n}} \geq x \Rightarrow r \geq x^n.$$

Si $n \rightarrow \infty$ tenemos que x^n diverge, por lo que $r = \infty$. Esto es una contradicción, por lo que debe ser que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$. Ahora, supongamos que $0 < r < 1$.

2.2. Subsucesiones y Teorema de Bolzano-Weiestrass

Definición 2.6. Dada una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ y una sucesión creciente estrictamente de números naturales: $n_1 < n_2 < \dots < n_j < n_{j+1} < \dots$. Se dice que $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una **subsucesión** (o **parcial**) de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Ejemplo 2.12. Si $x_n = (-1)^n$. Una subsucesión sería $x_{2n} = 1$ y otra sería $x_{2n-1} = -1$.

Teorema 2.8. Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ sucesión convergente con $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, y $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión, entonces $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = x$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $|x_n - x| < \epsilon$. Si $n_j \geq n_0$ entonces $|x_{n_j} - x| < \epsilon$. □

Observación 2.9. El teorema anterior sirve para ver que algo no converge.

Ejemplo 2.13.

$$x_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ n, & n \text{ impar} \end{cases}.$$

Tenemos que $x_{2n-1} = 2n - 1$ no converge, por lo que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no converge.

Teorema 2.9. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Son equivalentes:

- (i) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no converge a x .
- (ii) $\exists \epsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, |x_n - x| \geq \epsilon$.
- (iii) $\exists \epsilon > 0$ y $\exists \{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $|x_{n_j} - x| \geq \epsilon, \forall j \in \mathbb{N}$.

Demostración. (i) Tenemos que (i) \iff (ii) son equivalentes por definición.

- (ii) Vamos a ver que (iii) \Rightarrow (i). Como $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ no converge a x , tenemos que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no converge a x .
- (iii) Vamos a ver que (ii) \Rightarrow (iii). Dado $\epsilon > 0$ de (ii), sea $n_1 \geq n_0$ tal que $|x_{n_1} - x| \geq \epsilon$. Tomamos ahora $n_2 \geq n_1 + 1 > n_1$ tal que $|x_{n_2} - x| \geq \epsilon$. Iterando, obtenemos una colección de índices estrictamente crecientes: $n_1 < n_2 < \dots < n_j < \dots$, de manera que,

$$|x_{n_j} - x| \geq \epsilon.$$

□

Ejemplo 2.14. Sea $x_n = \sin n$. Vamos a demostrar que no existe el límite. Supongamos que $x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} [2k\pi, (2k+1)\pi]$. Entonces $\sin x \geq 0$. Como la longitud de los intervalos es mayor que uno, sabemos que hay un natural. Por tanto podemos decir que

$$n_k \in [2k\pi, (2k+1)\pi], \quad n_k \in \mathbb{N}.$$

Como los intervalos son disjuntos, tenemos que $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n = l$, existe $\lim_{k \rightarrow \infty} \sin n_k = l \geq 0$. Ahora consideramos el caso $x < 0$, para ello, tomamos $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Sea $I_\epsilon = [\pi + \epsilon, 2\pi - \epsilon]$. Si $x \in I_\epsilon$, tenemos que

$$|\sin x| \geq |\sin(\pi + \epsilon)| > 0.$$

Entonces, la longitud del intervalo es estrictamente mayor que 1. Por tanto,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists m_k \in [(2k+1)\pi - \epsilon, (2k+2)\pi - \epsilon]$$

tal que $\sin m_k \leq \sin[(2k+1)\pi + \epsilon]$. Si $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$, existe el límite de esta subsucesión, es decir, $\exists l = \lim_{k \rightarrow \infty} \sin m_k \leq \sin(\epsilon + \pi) < 0$. Por tanto, tenemos que $l \geq 0$ y $l < 0$. Esto es una contradicción.

Teorema 2.10 (Teorema de la sucesión monótona). Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Entonces $\exists \{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que es monótona.

Demostración. Diremos que x_m es un **pico** de la sucesión si $x_m \geq x_n, \forall n \geq m$. Supongamos que en $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ hay infinitos picos. Entonces podemos crear una subsucesión decreciente (monótona), $\{x_{m_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ con los picos:

$$x_{m_1} < x_{m_2} < \dots < x_{m_j} < \dots$$

Si hay un número finito de picos, podemos ir hasta el último pico tal que a partir de este no hay más picos. Supongamos que no hay picos. Es decir, sea $x_{n_1} \in \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\forall n \geq n_1, x_n$ no es un pico. Por tanto, $\exists n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} > x_{n_1}$. Iterando,

$$\exists n_1 < n_2 < \dots < n_j < \dots,$$

tales que

$$x_{n_1} < x_{n_2} < \dots < x_{n_j} < \dots$$

Por tanto, la subsucesión $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ es creciente y, por tanto, monótona. \square

Teorema 2.11 (Teorema de Bolzano-Weiestrass). Dada $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ acotada entonces $\exists \{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ subsucesión convergente.

Demostración. Por el teorema de la sucesión monótona, sabemos que existe $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ subsucesión es monótona. Además, como la sucesión está acotada, la subsucesión también lo está y, por tanto, $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_j}$. \square

Teorema 2.12. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ sucesión acotada y $x \in \mathbb{R}$. Si para toda $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ subsucesión que converge, lo hace a x , entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Demostración. Sea $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$ y supongamos que para esta sucesión no existe el límite (por lo que no es igual a x). Así, $\exists \epsilon > 0$ tal que $\exists \{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ con $|x_{n_j} - x| \geq \epsilon, \forall j \in \mathbb{N}$. Por hipótesis esta subsucesión está acotada. Aplicando el teorema de Bolzano-Weiestrass, $\exists \{y_l\}_{l \in \mathbb{N}} \subset \{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ subsucesión convergente. Entonces tenemos que esta subsucesión converge a x . Sin embargo, tenemos que

$$|y_l - x| \geq \epsilon, l \geq l_0.$$

Esto implica que y_l no converge a x . Esto es una contradicción, por lo que debe ser que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. \square

Ejemplo 2.15. Considera

$$x_n = \begin{cases} n, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}.$$

Satisface que toda subsucesión convergente tiene como límite 0 pero la sucesión no converge (observamos que no es una sucesión acotada).

Ejemplo 2.16. Estudiamos la convergencia de $x_n = n^{\frac{1}{n}}$. Vamos a ver que es decreciente (monótona). Tenemos que

$$x_{n+1} = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} < x_n = n^{\frac{1}{n}} \iff (n+1)^n < n^{n+1} = n \cdot n^n \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n.$$

Tenemos que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e \leq 3.$$

Entonces tenemos que si $n \geq 4$ (recordamos que no nos importan los primeros términos de la sucesión),

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n.$$

Por tanto, si $n \geq 4$ la sucesión es decreciente. Además, tenemos que está acotada inferiormente por 1. Por tanto, la sucesión converge. Tenemos que

$$n^{\frac{1}{n}} \rightarrow l \geq 1.$$

Como esta sucesión converge, sabemos que todas las subsucesiones han de converger al mismo límite, por lo que basta con calcular la convergencia de una subsucesión. Vamos a ver que

$$x_{2n} = (2n)^{\frac{1}{2n}} \rightarrow 1.$$

Tenemos que

$$x_{2n} = (2n)^{\frac{1}{2n}} = 2^{\frac{1}{2n}} \cdot n^{\frac{1}{2n}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sabemos que $\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ y $\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \sqrt{l}$. Entonces tenemos que,

$$l = \sqrt{l} \iff l^2 = l \iff l \in \{0, 1\}.$$

Podemos descartar 0 porque $l \geq 1$, por tanto, $l = 1$.

2.3. Sucesiones Cauchy

Definición 2.7 (Sucesión de Cauchy). Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Se dice que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de **Cauchy** si $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \epsilon$, con $n, m \geq n_0$.

Proposición 2.5. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

- (i) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, entonces $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy.
- (ii) Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy entonces es una sucesión acotada.

Demostración. (i) Sabemos que $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$. Así, cogemos $m, n \geq n_0$.

Entonces,

$$\begin{aligned} |x_n - l| &< \frac{\epsilon}{2}. \\ |x_m - l| &< \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |x_n - l + x_m - l| \\ &\leq |x_n - l| + |l - x_m| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

(ii) Cogemos $\epsilon = 1$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq n_0$, $|x_n - x_m| < 1$. Cogemos $m = n_0$ y $n \geq n_0$. Tenemos que

$$|x_n - x_{n_0}| < 1.$$

Entonces,

$$|x_n| = |x_n - x_{n_0} + x_{n_0}| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < 1 + |x_{n_0}|.$$

Si $n \geq n_0$, la sucesión está acotada por $1 + |x_{n_0}|$, nos queda por acotar los $n < n_0$.

$$|x_n| \leq \max \{ \max \{ |x_k| : 1 \leq k \leq n_0 \}, 1 + |x_{n_0}| \}.$$

□

Observación 2.10. Vamos a concluir que ser de Cauchy es equivalente a converger. Esto se cumple en \mathbb{R} pero no en \mathbb{Q} ! Entonces, podemos pensar que este hecho está relacionado con el axioma de completitud.

Teorema 2.13 (Criterio de convergencia de Cauchy). Una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ converge si y solo si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Demostración. Basta probar que si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es de Cauchy, entonces converge. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, como es una sucesión de Cauchy está acotada, por lo que existe $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a l . Sabemos que $\forall \epsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_1$,

$$|x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Además, $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n_k \geq n_2$,

$$|x_{n_2} - l| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea $n_0 = \max \{n_1, n_2\}$, si $n \geq n_0$, queremos ver que

$$|x_n - l| < \epsilon.$$

Sea $n_k \geq n_0$ y $n \geq n_0$,

$$|x_n - l| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - l| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - l| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Ejemplo 2.17. $x_1 = 1, x_2 = 2,$

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}, \quad n \geq 3.$$

Tenemos que la distancia entre dos puntos sucesivos será:

$$|x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} + \cdots + x_{n+1} + x_n| \\ &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &= \frac{1}{2^{m-2}} + \frac{1}{2^{m-3}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{m-1}}}{1 - \frac{1}{2}} \rightarrow 0, \text{ si } n, m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Así, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. En efecto, $x_n \rightarrow \frac{5}{3}$.

2.4. Otros teoremas

Observación 2.11. Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$,

- Recordamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ si $\forall c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$ tal que $x_n > c$.
- Si $x_n \leq y_n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$.
- Si $x_n \leq y_n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

Corolario 2.4. Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = L \in (0, \infty)$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, entonces, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$.

Demostración. Dado $\epsilon = 1$, tenemos que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_1$

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - L \right| < 1.$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x_n, y_n > 0$. Entonces, tenemos que

$$-1 < \frac{x_n}{y_n} - L < 1 \iff -y_n < x_n - y_n L < y_n.$$

Así, $x_n < y_n(1 + L)$. Tenemos que $x_n \rightarrow \infty$, por lo que $y_n(1 + L) \rightarrow \infty$ por lo que $y_n \rightarrow \infty$. □

Ejemplo 2.18.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5n}{n^2 + 1} = 3.$$

Como $n^2 + 1 \rightarrow \infty$ tenemos que $3n^2 + 5n \rightarrow \infty$ y viceversa.

Teorema 2.14 (Criterio de Stolz). Sean $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tales que

$$b_1 < b_2 < \dots < b_n < \dots,$$

y supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$. Si existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l,$$

entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$,

$$-\frac{\epsilon}{2} < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} - l < \frac{\epsilon}{2}.$$

$$\iff \left(l - \frac{\epsilon}{2}\right)(b_{n+1} - b_n) < a_{n+1} - a_n < \left(l + \frac{\epsilon}{2}\right)(b_{n+1} - b_n), \forall n \geq n_0.$$

Así, para n_0 ,

$$\left(l - \frac{\epsilon}{2}\right)(b_{n_0+1} - b_{n_0}) < a_{n_0+1} - a_{n_0} < \left(l + \frac{\epsilon}{2}\right)(b_{n_0+1} - b_{n_0}).$$

\vdots

$$\left(l - \frac{\epsilon}{2}\right)(b_{n_0+m} - b_{n_0+m-1}) < a_{n_0+m} - a_{n_0+m-1} < \left(l + \frac{\epsilon}{2}\right)(b_{n_0+m} - b_{n_0+m-1}), m \in \mathbb{N}.$$

Si sumamos todas las desigualdades y usando la propiedad telescópica,

$$\left(l - \frac{\epsilon}{2}\right)(b_{n_0+m} - b_{n_0}) < a_{n_0+m} - a_{n_0} < \left(l + \frac{\epsilon}{2}\right)(b_{n_0+m} - b_{n_0}).$$

Dividimos todo por $b_{n_0+m} \neq 0$ ($b_{n_0+m} > 0$),

$$\left(l - \frac{\epsilon}{2}\right) \left(1 - \frac{b_{n_0}}{b_{n_0+m}}\right) < \frac{a_{n_0+m}}{b_{n_0+m}} - \frac{a_{n_0}}{b_{n_0+m}} < \left(l + \frac{\epsilon}{2}\right) \left(1 - \frac{b_{n_0}}{b_{n_0+m}}\right).$$

Así, tenemos que

$$l - \frac{\epsilon}{2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \inf \left(l - \frac{\epsilon}{2}\right) \left(1 - \frac{b_{n_0}}{b_{n_0+m}}\right) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \inf \frac{a_{n_0+m}}{b_{n_0+m}} - 0.$$

Además, tenemos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup \frac{a_{n_0+m}}{b_{n_0+m}} - 0 \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sup \left(l + \frac{\epsilon}{2}\right) \left(1 - \frac{b_{n_0}}{b_{n_0+m}}\right) = l + \frac{\epsilon}{2}.$$

Así, $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_{n_0+m}}{b_{n_0+m}} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sup \frac{a_{n_0+m}}{b_{n_0+m}} \leq l + \frac{\epsilon}{2}.$$

Por lo tanto, $\forall \epsilon > 0$:

$$l - \frac{\epsilon}{2} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \inf \frac{a_m}{b_m} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sup \frac{a_m}{b_m} \leq l + \frac{\epsilon}{2}.$$

Por lo que

$$l \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \inf \frac{a_m}{b_m} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sup \frac{a_m}{b_m} \leq l.$$

Por tanto tenemos que $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{b_m} = l$. □

Observación 2.12. (i) En el criterio de Stolz, si $l = \pm\infty$, entonces $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{b_m} = \pm\infty$.

Segundo criterio de Stolz. Si tenemos $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tales que $a_n \rightarrow 0$ y $b_n \rightarrow 0$ y $b_n < b_{n+1}$ ², entonces, si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Observación 2.13. Propiedades de los límites superiores e inferiores:

(i) Si $x_n \leq y_n$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf y_n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup y_n$.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n = l \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$.

(iii) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup (x_n + y_n) = l + \lim_{n \rightarrow \infty} \sup y_n.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf (x_n + y_n) = l + \lim_{n \rightarrow \infty} \inf y_n.$$

Ejemplo 2.19. Sea $x_n = (-1)^n$ y $y_n = (-1)^n + 1$, tenemos que $x_n \leq y_n$. Además,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n = -1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf y_n = 0.$$

Similarmente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n = 1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup y_n = 2.$$

Ejemplo 2.20. Sabemos que si $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, entonces $a_n \rightarrow \infty$. Veamos a qué tiende³

$$n \geq 2, \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\log n}.$$

²Realmente solo importa que sea monotona, no importa que sea creciente o decreciente.

³A partir de ahora $\log = \ln$, no es en base 10.

Por el criterio de Stolz, basta estudiar el límite,

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{\log(n+1) - \log n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{\frac{n+1}{n} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}.$$

Tenemos que $\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \log e = 1$ y $\frac{n+1}{n} \rightarrow 1$, por lo que

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{\log(n+1) - \log(n)} \rightarrow 1.$$

Es decir, la serie armónica, en el infinito, se aproxima al logaritmo neperiano.

2.5. Series numéricas

Definición 2.8 (Suma parcial). Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Sea llama **suma parcial n-ésima**

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n.$$

Definición 2.9. Dada la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, diremos que la **serie** $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge a S si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Ejemplo 2.21. (i) $a_n = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}}.$$

De esta manera,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1.$$

(ii) $a_n = (-1)^n$. Tenemos que $S_1 = -1$, $S_2 = 0$, entonces, no existe el límite de S_n . Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ no converge.

(iii) $a_n = \frac{1}{n}$. Tenemos que

$$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, por lo que la serie armónica es divergente.

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$. Tenemos que

$$\frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Entonces tenemos que,

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \\ S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\ &\vdots \\ S_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

De esta manera, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$.

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Teorema 2.15. Si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Demostración. Sea $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Como $S_n \rightarrow l$, entonces $S_{n-1} \rightarrow l$. Así, $S_n - S_{n-1} \rightarrow 0$. Entonces tenemos que $S_n - S_{n-1} = a_n \rightarrow 0$. □

Teorema 2.16. Si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada superiormente.

Demostración. Como los $a_n \geq 0$, tenemos que $S_n \leq S_{n+1}$ (es monótona creciente). Así, $S_n \rightarrow l \iff S_n$ está acotada superiormente. □

Observación 2.14. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = a + b.$$

Es decir, podemos extrapolar todas las propiedades de los límites a las series.

Teorema 2.17 (Criterio de comparación). Si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tales que $a_n \leq b_n$ para $n \geq k$. Si, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Demostración. Sea $n \geq k$, entonces

$$\sum_{k=1}^n a_k \leq \underbrace{a_1 + \cdots + a_{k-1}}_{a \in \mathbb{R}} + \sum_{j=k}^n b_j \leq a + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}_C < \infty.$$

Entonces, tenemos que $S_n \leq C$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y, por el teorema anterior, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. □

Ejemplo 2.22. Vamos a demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Tenemos que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$n \leq n^2 \iff \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n^2 + n}.$$

Entonces, sea $a_n = \frac{1}{n^2}$ y $b_n = \frac{2}{n^2 + n}$. Entonces tenemos que $0 \leq a_n \leq b_n$. De un ejemplo anterior deducimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2 \cdot 1 = 2.$$

Entonces, por el teorema anterior tenemos que ⁴

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Ejemplo 2.23. Si $p \in \mathbb{R}$ y $a_n = \frac{1}{n^p}$:

- Si $p \leq 0$, tenemos que

$$a_n \rightarrow \begin{cases} \infty, & p \neq 0 \\ 1, & p = 0 \end{cases}.$$

Así, como a_n no tiende a 0, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \infty$.

- Si $0 \leq p \leq 1$, tenemos que $n^p \leq n$. Por tanto,

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \infty.$$

⁴Si la sucesión es de términos positivos, entonces decir $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \infty$ es lo equivalente a decir que converge. Si no son términos positivos no lo podemos afirmar. Considera $a_n = (-1)^n$.

- Si $p \geq 2$, tenemos que $n^p \geq n^2$, por lo que $\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2}$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, por el criterio de comparación tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty.$$

- Si $1 < p < 2$, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty$ por el **criterio de la integral** (lo veremos en el segundo semestre).

Observación 2.15. Así, podemos concluir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1.$$

Ejemplo 2.24. Demostramos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 2n + 1} < \infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3 + 2n + 1}} = 1.$$

Así pues,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 2n + 1} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty.$$

5

Teorema 2.18. Si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l > 0$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty.$$

Demostración. Sea $\epsilon = \frac{l}{2} > 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$,

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - l \right| < \epsilon \iff l - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < \epsilon + l \iff \frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3l}{2}.$$

Entonces, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, tenemos que

$$\frac{l}{2} b_n < a_n,$$

⁵El símbolo \approx lo utilizamos para decir que cuando $n \rightarrow \infty$ se comportan prácticamente igual.

por lo que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también converge. Recíprocamente, si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ tenemos que $a_n < \frac{3l}{2}b_n$, por lo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. \square

Teorema 2.19 (Criterio de la raíz). Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ y supongamos que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a \geq 0$.

- Si $a < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $a > 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
- Si $a = 1$, entonces no sabemos.

Demostración. (i) Si $a < 1$, sea $a < r < 1$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $a - \epsilon > 0$ y $a + \epsilon < r$. Entonces, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$,

$$a - \epsilon < \sqrt[n]{a_n} < a + \epsilon < r.$$

Entonces tenemos que si $n \geq n_0$,

$$(a - \epsilon)^n < a_n < (a + \epsilon)^n < r^n.$$

Por el criterio de comparación, como

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r} < \infty, \quad 0 \leq r < 1,$$

es convergente, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también es convergente.

(ii) Análogamente, si $a > 1$, tomamos $1 < r < a$ y ϵ tal que $r < a - \epsilon$. Así, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$,

$$|\sqrt[n]{a_n} - a| < \epsilon \iff r < -\epsilon + a < \sqrt[n]{a_n} < \epsilon + a.$$

Es decir, si $n \geq n_0$,

$$r^n < a_n.$$

Como $r > 1$, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r - r^{n+1}}{1 - r} = \infty.$$

Por el criterio de comparación, como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n > \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \infty$, tenemos que la serie de a_n diverge. \square

Ejemplo 2.25. Ejemplos del caso $a = 1$.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

(ii) Considera $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} \right)^2 = 1.$$

Ejemplo 2.26. Ejercicio 76(f). $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} 3^{-n}$. Llamamos a_n al término general. Entonces,

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^n 3^{-1}.$$

Si $n \rightarrow \infty$, tenemos que

$$\left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \rightarrow e.$$

Como $0 < e < 3$, tenemos que $\frac{e}{3} < 1$. Por el criterio de la raíz, la serie converge.

Teorema 2.20 (Criterio del cociente). Si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, entonces:

- Si $a < 1$, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $a > 1$, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
- Si $a = 1$, no sabemos.

Demostración. Una manera de demostrarlo es ver que este criterio implica el de la raíz. Otra manera de hacerlos es recurriendo a series geométricas.

(i) Si $a < 1$, tomamos $\epsilon > 0$ tal que si $n \geq n_0$, y tomamos $a < r < 1$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < a + \epsilon < r.$$

Entonces tenemos que si $n \geq n_0$,

$$a_{n+1} < r a_n < \dots < r^{n+1-n_0} a_{n_0} = r^{n+1} \frac{a_{n_0}}{r^{n_0}}.$$

Entonces, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} < \frac{a_{n_0}}{r^{n_0}} \sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1}.$$

Como $r < 1$, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1} < \infty.$$

Por el criterio de comparación, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(ii) Si $a > 1$ es análogo.

□

Ejemplo 2.27. Ejemplos de $a = 1$.

(i) Sea $a_n = \frac{1}{n}$. Tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

(ii) Sea $a_n = \frac{1}{n^2}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{(n+1)^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = 1.$$

(iii) Sea $k \in \mathbb{N}$ y sea $a_n = \frac{n^k}{2^n}$. Usamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^k}{2^{n+1}}}{\frac{n^k}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} \left(\frac{n+1}{n} \right)^k = \frac{1}{2} < 1.$$

Por el criterio del cociente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{2^n}$ converge.

Teorema 2.21 (Criterio de Leibniz). Supongamos que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ decreciente, es decir, $a_{n+1} \leq a_n$ y tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Entonces, la serie alternada converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \text{converge.}$$

Ejemplo 2.28. Considera $a_n = \frac{1}{n}$. Entonces tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, mientras que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Definición 2.10. Se dice que una serie es **absolutamente convergente** si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

Observación 2.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ no es absolutamente convergente.

Teorema 2.22. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente (i.e. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$), entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Demostración. Sea $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Queremos ver que $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente. Sea $S_n^* = \sum_{k=1}^n |a_k|$. Sabemos que $\{S_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Entonces, tenemos que $|S_n| \leq S_n^*$. Sabemos que $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente si y solo si es de Cauchy. Sea $m > n$,

$$0 \leq |S_m - S_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| = S_m^* - S_n^*.$$

Si $m, n \rightarrow \infty$, tenemos que $S_m^* - S_n^* \rightarrow 0$. Entonces, $|S_m - S_n| \rightarrow 0$, por lo que es de Cauchy y, consecuentemente, converge. \square

Ejemplo 2.29. Estudiar la convergencia de las siguientes series.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$. Usamos el criterio del cociente.

$$\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{n+1}{(n+1) \left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1.$$

Por tanto, la serie converge, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} < \infty$.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^2}$. Tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\theta|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Por el criterio de comparación, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\theta|}{n^2} < \infty$. Es decir, la serie inicial converge absolutamente por lo que converge.

- (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ con $x \in \mathbb{R}$. Tomamos la serie en valor absoluto para ver que converge absolutamente. Empleamos el criterio del cociente:

$$\frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} < \infty$, la serie inicial converge absolutamente, por lo que converge.

Observación 2.17.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Teorema 2.23 (Sumación por partes de Abel). Sean $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, sea $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ y sea $m > n$. Entonces,

$$\sum_{k=n+1}^m a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_m b_m - A_n b_{n+1}.$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^m a_k b_k &= \sum_{k=n+1}^m (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=n+1}^m A_k b_k - \sum_{k=n}^{m-1} A_k b_{k+1} \\ &= A_m b_m - A_n b_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}). \end{aligned}$$

□

Teorema 2.24 (Criterio de Dirichlet). Sean $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que si $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ entonces $|A_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y b_n decrece y converge a 0. Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ converge.}$$

Demostración. Vamos a ver que es sucesión de Cauchy, es decir, $\sum_{k=n+1}^m a_k b_k \rightarrow 0$ si $m \geq n+1$, cuando $n, m \rightarrow \infty$. Utilizamos el teorema anterior:

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k b_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_m b_m - A_n b_{n+1} \right|.$$

Sea $\epsilon > 0$ y sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$,

$$|b_n| < \frac{\epsilon}{3M},$$

y $\forall m > n \geq n_0$ tal que

$$|b_m - b_n| < \frac{\epsilon}{3M}.$$

Seguimos con lo anterior:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^m a_k b_k \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_m b_m - A_n b_{n+1} \right| \\ &\leq M \sum_{k=n+1}^{m-1} |b_k - b_{k+1}| + M |b_m| + M |b_{n+1}| \\ &\leq M \sum_{k=n+1}^{m-1} (b_k - b_{k+1}) + M \frac{\epsilon}{3M} + M \frac{\epsilon}{3M} = M (b_{n+1} - b_m) + \frac{2\epsilon}{3} \\ &= M \frac{\epsilon}{3M} + \frac{2\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.25 (Criterio de Leibniz). Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ decreciente que converge a 0, entonces la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

Demostración. Tenemos que

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k = \begin{cases} -1, & n \text{ impar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}.$$

Entonces, las sumas parciales están acotadas superiormente por $M = 1$. Por el criterio de Dirichlet, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n,$$

converge ⁶.

□

Ejemplo 2.30. (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

(iii) Demostrar que (usar inducción)

$$\left| \sum_{n=1}^m \cos nx \right| = \left| \frac{\sin \left(m + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \right|.$$

⁶Este teorema es realmente un corolario del teorema anterior.

2.6. Exponentes reales.

Recordamos que si $x > 0$ y $n \in \mathbb{N}$:

$$x^{\frac{1}{n}} = \sup \{r \in \mathbb{Q} : r^n < x\}.$$

En general, si $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, definimos $x^0 = 1$ y

$$x^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{n}}.$$

Pasamos al caso $p = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$,

$$x^p = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m.$$

Queremos ver que pasa en el caso x^α con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lema 2.1. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x^r - 1| < \epsilon, \quad 0 < r < \frac{1}{n_0}, \quad r \in \mathbb{Q}.$$

Demostración. Sabemos que $x^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ si $n \rightarrow \infty$. Así, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$,

$$\left|x^{\frac{1}{n}} - 1\right| < \epsilon.$$

Sea $0 < r < \frac{1}{n_0}$, $r \in \mathbb{Q}$. Si $x > 1$, tenemos que $0 < x^r - 1 < x^{\frac{1}{n_0}} - 1 < \epsilon$. Si $0 < x < 1$, tenemos que $x^r > x^{\frac{1}{n_0}}$ por lo que $0 < 1 - x^r < 1 - x^{\frac{1}{n_0}} < \epsilon$. El caso $x = 1$ es trivial. \square

Corolario 2.5. Si $r_n \rightarrow 0$ y $r_n \in \mathbb{Q}^+$, con $x > 0$, entonces $x^{r_n} \rightarrow 1$ si $n \rightarrow \infty$.

Teorema 2.26. Si $x > 0$, y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

(i) Si $r_n \in \mathbb{Q}$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \alpha$, entonces $\{x^{r_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

(ii) Si $s_n \in \mathbb{Q}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \alpha$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{s_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{r_n}$.

Demostración. (i) Tenemos $r_n \in \mathbb{Q}$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \alpha$. Sin pérdida de generalidad tomamos $\alpha > 0$.

Vamos a demostrar que es de Cauchy. Como $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge, entonces está acotada, por lo que existe K tal que $0 \leq r_n < K \in \mathbb{N}$ (descartamos los primeros términos negativos). Hacemos primero el caso $x > 1$ (el caso $x < 1$ es análogo). Supongamos que $r_m \geq r_n$.

$$|x^{r_m} - x^{r_n}| = |x^{r_n} (x^{r_m - r_n} - 1)| \leq x^K |x^{r_m - r_n} - 1| \rightarrow 0.$$

En el paso anterior hemos utilizado el lema y corolario anterior. Así, tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{r_n}$ converge.

(ii) Si $s_n \rightarrow \alpha$ y $r_n \rightarrow \alpha$, tenemos que $s_n - r_n \rightarrow 0$. Supongamos que $r_n \geq s_n$,

$$x^{r_n} - x^{s_n} = x^{s_n} (x^{r_n - s_n} - 1).$$

Entonces, tenemos que

$$|x^{r_n} - x^{s_n}| \leq x^K |x^{r_n - s_n} - 1| \rightarrow 0.$$

Como la diferencia converge a 0, tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{s_n}$.⁷

□

Definición 2.11. Dado $x > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se define $x^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{r_n}$ donde $r_n \in \mathbb{Q} \rightarrow \alpha$.

Proposición 2.6. Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ con $x_n, y_n > 0$, con $x_n \rightarrow x > 0$ y $y_n \rightarrow y > 0$, entonces

$$x_n^{y_n} \rightarrow x^y.$$

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, sea $\epsilon' = \left[\left(\frac{\epsilon}{x^y} + 1 \right)^{\frac{1}{y}} - 1 \right] \cdot x > 0$. Entonces, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $x_n < x + \epsilon'$. Así, tenemos que

$$x_n^{y_n} < (x + \epsilon')^{y_n}.$$

Entonces, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n^{y_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup (x + \epsilon')^{y_n} = (x + \epsilon')^y = x^y + \epsilon, \forall \epsilon > 0.$$

Así, tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n^{y_n} \leq x^y$. Ahora, dado $\epsilon > 0$, tomamos $\epsilon'' = x - (x^y - \epsilon)^{\frac{1}{y}} > 0$. Así, obtenemos que para $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$, $x - \epsilon'' < x_n$:

$$(x - \epsilon'')^y = x^y - \epsilon \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n^{y_n}, \forall \epsilon > 0.$$

Así, $x^y \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n^{y_n}$.

□

⁷Esta afirmación solo la podemos hacer si las sucesiones convergen. Sino, no, considera $x_n = n$ y $y_n = n$.

Capítulo 3

Límites de funciones