Matemáticas Básicas - Deberes 5

Victoria Eugenia Torroja Rubio

7/10/24

Ejercicio 1. Sean p y q primos impares consecutivos. Probar que $p+q$ tiene al menos tres factores primos, no necesariamente distintos. Dar un ejemplo en el que el número de factores primos distintos sea uno, otro en el que sea dos y otro en el que sea tres.

Solución 1. Dado que p y q son primos impares, tenemos que su suma será un número par, por lo que

$$p+q=2k,$$

con $k \in \mathbb{N}$. Además, tenemos que $\dfrac{p+q}{2}$ no es primo, pues (si $p<q$)

$$p<\frac{p+q}{2}<q,$$

y no existe ningún número primo entre p y q, dado que son primos consecutivos. Por tanto $\dfrac{p+q}{2}$ es compuesto. Utilizando el Teorema Fundamental de la Aritmética:

$$\frac{p+q}{2}=\prod_{i=1}^{n} a_i, \quad \text{con } a_j \text{ primo.}$$

Dado que $\dfrac{p+q}{2}$ es compuesto, tiene al menos dos factores primos (los números primos tienen solo un factor primo, si mismos). Por tanto, ya hemos encontrado tres factores primos de $p+q$ no necesariamente distintos.

Un ejemplo en el que el número de factores primos es uno es cuando $p=3$ y $q=5$, pues

$$p+q=3+5=8=2^3.$$

Si $p=11$ y $q=13$, tenemos que $p+q$ tiene dos factores primos distintos:

$$p+q=11+13=24=2^3\cdot 3.$$

Si $p=29$ y $q=31$, tenemos que $p+q$ tiene tres factores primos distintos, pues

$$p+q=29+31=60=2^2\cdot 3\cdot 5.$$

Ejercicio 2. ¿Cuántas palabras se pueden formar con todas las letras de la palabra 'Discreta'? ¿Cuántas de ellas tienen las tres vocales juntas?

Solución 2. En primer lugar, el número de palabras que podemos formar con las letras del conjunto $L = \{d, i, s, c, r, e, t, a\}$ es igual al número de listas (importa el orden) de cinco elementos cuyas entradas están formadas por los elementos del conjunto L y no se repiten.

$$(\square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square)$$

La primera caja la pueden rellenar 8 elementos, la segunda 7, la tercera 6, etc. Por el Prinipio de la Multiplicación, el número de palabras que podemos formar es P,

$$P = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdots 1 = 8! = 40320.$$

Si queremos que las vocales estén juntas, podemos reducir todas las vocales a un único elemento A. Consecuentemente, tenemos que averiguar el número de listas compuestas por 6 elementos que no se repiten. Esto lo podemos hacer utilizando el Principio de la Multiplicación como hicimos anteriormente. Por tanto tenemos 6! listas posibles. Para cada una de estas listas, las vocales que están dentro del bloque A se pueden organizar de 3! maneras posibles (se trata de una lista de tres elementos que no se repiten). Por tanto, el número de palabras formadas por los elementos del conjunto L y que tiene las vocales juntas será:

$$6! \cdot 3! = 4320.$$

Ejercicio 3. Sean n un número entero positivo y S un conjunto formado por $n+1$ números enteros positivos, todos menores que $2n+1$. Demostrar que existen $x, y \in S$ distintos tales que $\frac{x}{y}$ es potencia de 2.

Solución 3. Consideramos un conjunto S formado por $n + 1$ números enteros positivos, todos menores que $2n + 1$.

Todos número natural a se pueden escribir de la forma

$$a = 2^k \cdot b,$$

donde $k \in \mathbb{Z}^+$, $b \in \mathbb{N}$, 2^k es la máxima potencia de 2 que divide a a y b es un número impar. Si $a \in S$, entonces $a < 2n + 1$ y $b < a < 2n + 1$. Además, tenemos que hay $\left\lfloor \frac{2n+1}{2} \right\rfloor = n$ números impares menores que $2n + 1$. Por tanto, podemos crear n agrupaciones de números: aquellos que se pueden expresar como $2^k \cdot 1$, $2^k \cdot 3$, $2^k \cdot 5$, ..., hasta $2^k \cdot (2n - 1)$.

Dado que $|S| = n + 1$, por el Principio del Palomar, tenemos que hay al menos dos elementos en S que comparten la misma parte impar. Es decir, existen $x, y \in S$ tales que $x = 2^{k_j} \cdot b_j$ y $y = 2^{k_i} \cdot b_i$, tales que $b_j = b_i$. Por tanto, tenemos que si $x > y$,

$$\frac{x}{y} = \frac{2^{k_j} \cdot b_j}{2^{k_i} \cdot b_i} = 2^{k_j - k_i}.$$

Dado que $x > y$, comparten la misma parte impar y $2^{k_h} \in \mathbb{N}$ para todo $h \in \mathbb{N}$, $k_j > k_i$. Por tanto, $k_j - k_i \in \mathbb{Z}^+$ y $\frac{x}{y}$ es potencia de dos.