# Cálculo Integral

Victoria Torroja Rubio

19/1/2026

# Índice general

**Despacho:** 431

**Correo:** jose_mendoza@mat.ucm.es

**Bibliografía:**

- Para cálculo integral: Marsden & Hoffman: *Elementary Classical Analysis.*
- Para cálculo vectorial: Marsden & Tromba: *Vector calculus.*

**Evaluación:**

- 13/2/2026: cambiar la clase de cálculo con la de ecuaciones diferenciales.
- Control: 27/2/2026 (*sólo sube, pero cuenta poco, alrededor de un 10 %*).

# Capítulo 1

# Integral de Riemann

## 1.1. Conceptos básicos

Consideramos el paralelepípedo

$$R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

que es producto directo de intervalos compactos en $\mathbb{R}$. Consideremos también una función $f : R \to \mathbb{R}$ acotada. Definimos el **volumen** del rectángulo $R$ como el producto de las longitudes de sus lados, es decir,

$$v(R) := (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$

**Definición 1.1** (Partición). Tomamos particiones

$$P_1 \in \mathcal{P}([a_1, b_1]), \ldots, P_n \in \mathcal{P}([a_n, b_n]),$$

y decimos que $P = (P_1, \ldots, P_n) \in \mathcal{P}(R)$ es una **partición** de $R$.

De esta forma, estamos dividiendo el rectángulo $R$ en subrectángulos.

**Definición 1.2.** Dadas dos particiones $P = (P_1, \ldots, P_n)$ y $Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$, decimos que $P$ es **más fina** que $Q$, $P \geq Q$, si $P_i$ es más fina que $Q_i$ para $i = 1, \ldots, n$.

Si $T \in \mathcal{P}(R)$, entonces $T$ es un pequeño paralelepípedo cuyos lados son intervalos de $P_i$ (queremos decir que $T$ es uno de los subrectángulos formados por la partición $P$). Podemos ver que para cada partición $P_i = \left\{x_0^i, \ldots, x_{m_i}^i\right\}$, los rectángulos $T$ tendrán la forma

$$T = \left[x_{j_1}^1, x_{j_1+1}^1\right] \times \cdots \times \left[x_{j_n}^n, x_{j_n+1}^n\right], \; 0 \leq j_i \leq m_i - 1.$$

Así, definimos,

**Definición 1.3** (Suma superior e inferior)**.** Decimos que la **suma inferior** de $f$ por $P$ es

$$s(f,P) := \sum_{T\in P} v(T) \inf\{f(t) \ : \ t\in T\}.$$

Análogamente, decimos que la **suma superior** de $f$ por $P$ es

$$S(f,P) := \sum_{T\in P} v(T) \sup\{f(t) \ : \ t\in T\}.$$

**Observación.** A partir de la definición anterior, podemos hacer un par de observaciones.

- En primer lugar, como $f$ está acotada, las sumas superiores e inferiores están bien definidas.
- Para cualquier partición $P\in\mathcal{P}(R)$ se cumple que $s(f,P)\leq S(f,P)$.

Para introducir la noción de **integral superior** e **integral inferior**, tenemos que ver que las sumas superiores e inferiores están acotadas, esto se puede ver de dos formas.

**Notación.** A partir de ahora, utilizamos la notación siguiente:

$$\alpha_T = \inf\{f(t) \ : \ t\in T\} \quad \text{y} \quad \beta_T = \sup\{f(t) \ : \ t\in T\}.$$

## Forma 1

Sea $P\in\mathcal{P}(R)$. Como $f$ es acotada en $R$ sabemos que existen $M,m\in\mathbb{R}$ tales que

$$m\leq f(x)\leq M, \ \forall x\in R.$$

Así, tenemos que

$$\sum_{T\in P} mv(T) \leq s(f,P)\leq S(f,P)\leq \sum_{T\in P} Mv(T).$$

Demostremos ahora la igualdad

$$\sum_{T\in P} v(T) = v(R).$$

En primer lugar, consideremos el caso $n=1$. Cogemos $R=[a,b]$ y la partición $P=\{t_0=a,t_1,\ldots,t_m=b\}$. Así, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{m} v([t_{i-1},t_i]) = \sum_{i=1}^{m}(t_i-t_{i-1}) = t_m-t_0 = b-a = v(R).$$

Demostraremos el caso $n=2$ pues a partir de este es fácil generalizar la demostración para $n>2$. Por tanto, tomamos $R=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ con la partición $P=(P_1,P_2)$ tal que

$$P_1=\{t_0=a_1,t_1,\ldots,t_m=b_1\}, \quad P_2=\{q_0=a_2,q_1,\cdots,q_r=b_2\}.$$

Tendremos que

$$\sum_{T\in R} v(T) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{r-1} v([t_i,t_{i+1}]\times[q_j,q_{j+1}]) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{r-1}(t_{i+1}-t_i)(q_{j+1}-q_j) = (b_1-a_1)(b_2-a_2).$$

Así, podemos decir que

$$mv(R) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq Mv(R).$$

## Forma 2

**Lema 1.1.** Sean $P,T\in\mathcal{P}(R)$ con $T\geq P$. Entonces,

$$s(f,P)\leq s(f,T)\leq S(f,T)\leq S(f,P).$$

*Demostración.* Lo demostramos para $n=2$ puesto que la demostración es fácil de generalizar para $n>2$. Sea $P=(P_1,P_2)\in\mathcal{P}(R)$. Para demostrar el lema basta con demostrar el caso $P'=(P_1',P_2)$, donde $P_1'=P_1\cup\{u\}$. Claramente tenemos que $P'$ es más fina que $P$. Concretamente, supongamos que

$$P_1=\left\{t_0^1,\ldots,t_n^1\right\} \quad \text{y} \quad P_1'=\left\{t_0^1,\ldots,t_i^1,u,t_{i+1}^1,\ldots,t_n^1\right\}.$$

Sea $P_2=\{q_0,\ldots,q_r\}$, y definimos los conjuntos de rectángulos

$$J_1=\{[t_i,u]\times[q_j,q_{j+1}] \ : \ 0\leq j\leq r-1\} \quad \text{y} \quad J_2=\{[u,t_{i+1}]\times[q_j,q_{j+1}] \ : \ 0\leq j\leq r-1\}.$$

Claramente tenemos que $J_1\cap J_2=\emptyset$. De esta forma, tenemos que

$$\begin{aligned}
s(f,P') &= \sum_{T\in P'} v(T)\alpha_T = \sum_{T\in P'/(J_1\cup J_2)} v(T)\alpha_T + \sum_{T\in J_1} v(T)\alpha_T + \sum_{T\in J_2} v(T)\alpha_T \\
&= \sum_{T\in P'/(J_1\cup J_2)} v(T)\alpha_T + \sum_{j=0}^{r-1}(u-t_i)(q_{j+1}-q_j)\alpha_j^1 + \sum_{j=0}^{r-1}(t_{i+1}-u)(q_{j+1}-q_j)\alpha_j^2 \\
&\geq \sum_{T\in P'/(J_1\cup J_2)} v(T)\alpha_T + \sum_{j=0}^{r-1}(t_{i+1}-t_i)(q_{j+1}-q_j)\alpha_j = s(f,P).
\end{aligned}$$

La desigualdad para la suma superior se demuestra de forma análoga. □

*Demostración.* Esta es una demostración alternativa. Consideremos que $T$ es más fina que $P$ y sean $R_1,\ldots,R_N$ los subrectángulos de $P$ y $\tilde{R}_1,\ldots,\tilde{R}_{\tilde{N}}$ los de $T$. Sea $I_k$ el conjunto de índices $j$ tales que $\tilde{R}_j\subset R_k$. Así, es fácil ver que

$$R_k=\bigsqcup_{j\in I_k}\tilde{R}_j, \quad v(R_k)=\sum_{j\in I_k} v\left(\tilde{R}_j\right).$$

Denotamos $\alpha_j=\inf\{f(x) \ : \ x\in R_j\}$ y $\tilde{\alpha}_j=\inf\left\{f(x) \ : \ x\in\tilde{R}_j\right\}$. Claramente, si $j\in I_k$ se tiene que $\alpha_k\leq\tilde{\alpha}_j$, así

$$s(f,P)=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k v(R_k)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{j\in I_k}\alpha_k v\left(\tilde{R}_j\right)\leq\sum_{k=1}^{N}\sum_{j\in I_k}\tilde{\alpha}_j v\left(\tilde{R}_j\right)=\sum_{j=1}^{\tilde{N}}\tilde{\alpha}_j v\left(\tilde{R}_j\right)=s(f,T).$$

El caso para la suma superior es análogo. □

**Proposición 1.1.** Dadas dos particiones, $P, Q \in \mathcal{P}(R)$

$$s(f,P) \leq S(f,Q).$$

*Demostración.* Sea $T = (P_1 \cup Q_1, \ldots, P_n \cup Q_n) \in \mathcal{P}(R)$. Claramente, $T \geq P$ y $T \geq Q$. Por tanto, aplicando el lema anterior

$$s(f,P) \leq s(f,T) \leq S(f,T) \leq S(f,Q).$$

□

Por ambas formas hemos visto que existen

$$\text{ínf}\{S(f,P) \,:\, P \in \mathcal{P}(R)\} \quad \text{y} \quad \sup\{s(f,P) \,:\, P \in \mathcal{P}(R)\},$$

por lo que estamos en condiciones de definir la integral superior e inferior.

## 1.2. Integral de Riemann

**Definición 1.4** (Integral superior e inferior)**.** Se define como **integral superior** e **integral inferior** a los valores

$$\overline{\int_R} f = \text{ínf}\{S(f,P) \,:\, P \in \mathcal{P}(R)\} \quad \text{y} \quad \underline{\int_R} f = \sup\{s(f,P) \,:\, P \in \mathcal{P}(R)\},$$

repsectivamente. Decimos que $f$ es **integrable** si el valor de la integral superior e inferior coincide.

**Corolario 1.1.** Dada $f : R \to \mathbb{R}$ acotada,

$$\underline{\int_R} f \leq \overline{\int_R} f.$$

**Ejemplo.** Consideremos $f \equiv c$, con $c$ constante. Tenemos que para una partición $P \in \mathcal{P}(R)$,

$$s(f,P) = \sum_{T \in P} v(T)\, \text{ínf}\{f(t) \,:\, t \in T\} = \sum_{T \in P} v(T)\, c = cv(R).$$

Por otro lado,

$$S(f,P) = \sum_{T \in P} v(T) \sup\{f(t) \,:\, t \in T\} = \sum_{T \in P} v(T)\, c = cv(R).$$

Como la integral superior y la inferior coinciden, debe ser que la función es integrable.

**Teorema 1.1** (Criterio de integrabilidad de Riemann)**.** Una función $f : R \to \mathbb{R}$ acotada es integrable si y solo si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P_\varepsilon \in \mathcal{P}(R)$ tal que

$$S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

*Demostración.* **(i)** Supongamos que $f$ es integrable y sea $\varepsilon > 0$. Por definición de supremo e ínfimo, tenemos que existen particiones $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(R)$ tales que

$$\int_R f - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, P_1), \quad \int_R f + \frac{\varepsilon}{2} > S(f, P_2).$$

Cogemos $P_\varepsilon \in \mathcal{P}(R)$ más fina que $P_1$ y $P_2$ y tenemos que

$$S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) \leq S(f, P_2) - s(f, P_1) < \left(\int_R f + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\int_R f - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

**(ii)** Sea $\varepsilon > 0$, entonces por hipótesis tenemos que

$$0 \leq \overline{\int_R} f - \underline{\int_R} f \leq S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, debe ser que la integral superior y la inferior coinciden, por lo que $f$ es integrable.

□

**Observación.** La negación del criterio anterior nos permite ver cuándo una función no es integrable, que es si y solo si existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $S(f, P) - s(f, P) \geq \varepsilon_0$, $\forall P \in \mathcal{P}(R)$.

**Ejemplo.** Un ejemplo muy común de función no integrable es la función de Dirichlet,

$$f : [0,1] \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Este ejemplo lo podemos generalizar en $\mathbb{R}^n$. En efecto, podemos tomar $R = [0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$, con

$$f : R \to \mathbb{R} : x = (x_1, \ldots, x_n) \to \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}^n \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}^n \end{cases}.$$

Tenemos que $\forall P \in \mathcal{P}(R)$, $S(f, P) = 1$ y $s(f, P) = 0$, por lo que $S(f, P) - s(f, P) = 1$ y $f$ no es integrable.
Esta noción la podemos generalizar. Consideremos $R = [0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ y $A \subset \mathbb{R}$ tal que $A$ y $R/A$ son densos en $R$. Por denso queremos decir que todo rectángulo no trivial $J$, $A \cap J \neq \emptyset$ y $(R/A) \cap J \neq \emptyset$. Entonces,

$$f : R \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in R/A \end{cases},$$

no es integrable.

**Teorema 1.2** (Teorema de Darboux)**.** Una función $f : R \to \mathbb{R}$ acotada es integrable en $R$ con integral $I$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $P \in \mathcal{P}(R)$ con $\|P\| < \delta$ [a], entonces

$$\left| \sum_{J \in P} f(x_J) v(J) - I \right| < \varepsilon, \quad \forall x_J \in J.$$

[a] Para cualquier $J \in P$, el diámetro de $J$ es menor a $\delta$.

*Demostración.* **(i)** Se puede mirar en el libro de Marsden y Hoffmann.

**(ii)** Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que si $\|P\| < \delta$ entonces

$$\left| \sum_{i=1}^{N} f(x_i) v(J_i) - I \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

Donde $J_1, \ldots, J_N$ son los rectángulos que componen la partición $P$. Cogemos $x_i \in J_i$ tal que

$$|f(x_i) - \beta_{J_i}| < \frac{\varepsilon}{v(J_i) 2N}.$$

Así, tenemos que

$$|S(f,P) - I| \leq \left| S(f,P) - \sum_{i=1}^{N} f(x_i) v(J_i) \right| + \left| \sum_{i=1}^{N} f(x_i) v(J_i) - I \right|.$$

Tenemos que

$$\left| S(f,P) - \sum_{i=1}^{N} f(x_i) v(J_i) \right| < \sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon v(J_i)}{v(J_i) 2N} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así, obtenemos que $|S(f,P) - I| < \varepsilon$. De forma análoga se puede demostrar que $|I - s(f,P)| < \varepsilon$. De esta forma, obtenemos que si $\varepsilon > 0$ existe $P \in \mathcal{P}(R)$ tal que

$$|S(f,P) - s(f,P)| \leq |S(f,P) - I| + |I - s(f,P)| < \varepsilon,$$

y por el criterio de Riemann tenemos que $f$ es integrable en $R$. Además, por lo visto anteriormente, existe $P \in \mathcal{P}(R)$ tal que

$$\left| \overline{\int_R} f - I \right| \leq \left| \overline{\int_R} f - S(f,P) \right| + |S(f,P) - I| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

El caso para la integral inferior es análogo. Así, hemos demostrado que $\displaystyle\int_R f = I$. $\square$

## 1.3. Propiedades de la integral

**Teorema 1.3.** Sea $f : R \to \mathbb{R}$ continua, entonces $f$ es integrable.

*Demostración.* En esta demostración trabajaremos con la norma infinita pero la equivalencia de normas permite generalizar el resultado para cualquier norma en $\mathbb{R}^n$. Dado que $f$ es continua en $R$ y este es compacto, tenemos que $f$ es uniformemente continua en $R$. Sea $\varepsilon > 0$ y $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{v\left(R\right)} > 0$. Tenemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - y\|_\infty < \delta \Rightarrow |f\left(x\right) - f\left(y\right)| < \varepsilon', \ \forall x, y \in R.$$

Así, cogemos una partición $P_\delta \in \mathcal{P}\left(R\right)$ que form rectángulos de lados con longitud menor a $\delta$. Recordamos que dado que $f$ es continua en $R$, lo es también en cada subrectángulo generado por la partición $P_\delta$. De esta forma, en cada $T \in P_\delta$, $f$ alcanza su máximo y su mínimo, $\beta_T$ y $\alpha_T$, respectivamente. Por tanto,

$$S\left(f, P_\delta\right) - s\left(f, P_\delta\right) = \sum_{T \in P_\delta} v\left(T\right)\left(\beta_T - \alpha_T\right) < \varepsilon' \sum_{T \in P_\delta} v\left(T\right) = \varepsilon.$$

Por el criterio de integrabilidad de Riemann, $f$ es integrable en $R$. □

**Proposición 1.2** (Linealidad y monotonía)**.** Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo.

**Linealidad.** Si $f_1, f_2 : R \to \mathbb{R}$ son integrables en $R$, entonces

$$\int_R f_1 + f_2 = \int_R f_1 + \int_R f_2.$$

Además, si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : R \to \mathbb{R}$ es integrable en $R$, entonces

$$\int_R \alpha f = \alpha \int_R f.$$

**Monotonía.** Si $f_1, f_2 : R \to \mathbb{R}$ son integrables en $R$, con $f_1 \leq f_2$, $\forall x \in R$, entonces

$$\int_R f_1 \leq \int_R f_2.$$

*Demostración.* Aplicamos el teorema de Darboux.

1. Sea $\varepsilon > 0$, como $f$ y $g$ son integrables tenemos que existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ y $P_1, P_2 \in \mathcal{P}\left(R\right)$, con $\|P_1\| < \delta_1$ y $\|P_2\| < \delta_2$, tales que

$$\left|\sum_{J \in P_1} f\left(y_j\right) v\left(J\right) - I_1\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left|\sum_{T \in P_2} g\left(z_j\right) v\left(J\right) - I_2\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

   Cogemos $\delta = \text{mín}\left\{\delta_1, \delta_2\right\} > 0$, y tomamos $P \in \mathcal{P}\left(R\right)$ con $\|P\| < \delta$, de esta forma

$$\left|\sum_{J \in P} \left(f + g\right)\left(x_j\right) v\left(J\right) - \left(I_1 + I_2\right)\right| \leq \left|\sum_{J \in P} f\left(x_J\right) v\left(J\right) - I_1\right| + \left|\sum_{J \in P} g\left(x_J\right) v\left(J\right) - I_2\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. Sea $I = \int_R f$ y $\varepsilon > 0$. Por el teorema de Darboux, existe $\delta > 0$ tal que si $P \in \mathcal{P}(R)$ con $\|P\| < \delta$, entonces
$$\left| \sum_{J \in P} f(x_J) v(J) - I \right| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}.$$
Así, tenemos que
$$\left| \sum_{J \in P} \alpha f(x_J) v(J) - \alpha I \right| = |\alpha| \left| \sum_{J \in P} f(x_J) v(J) - I \right| < |\alpha| \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon.$$

3. Para demostrar la monotonía primero asumimos que $f : R \to \mathbb{R}$ es integrable y $f(x) \geq 0$, $\forall x \in R$. Tenemos que
$$s(f, P) = \sum_{J \in P} \alpha_J v(J) \geq 0, \ \forall P \in \mathcal{P}(R).$$
Así, está claro que la integral inferior debe ser superior a 0, por lo que el valor de la integral será superior a 0. Ahora, supongamos que $f_1, f_2 : R \to \mathbb{R}$ son integrables y $f_1(x) \leq f_2(x)$, $\forall x \in R$. Tenemos que la función $f_2 - f_1 : R \to \mathbb{R}$ cumple que es integrable (por la linealidad) y además $(f_2 - f_1)(x) \geq 0$, $\forall x \in R$. Por lo que acabamos de demostrar:
$$\int_R f_2 - f_1 = \int_R f_2 - \int_R f_1 \geq 0 \iff \int_R f_1 \leq \int_R f_2.$$

$\square$

---

**Observación (Cota de la integral).** Supongamos que $f : R \to \mathbb{R}$ es integrable en $R$. Entonces, $f$ es acotada, por lo que existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que
$$m \leq f(x) \leq M, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$
Así, tenemos que
$$\int_R m \leq \int_R f \leq \int_R M \Rightarrow m v(R) \leq \int_R f \leq M v(R).$$
Se puede hacer un razonamiento igual sobre un conjunto $A$ que es medible Jordan.

---

**Proposición 1.3.** Sean $S, R \subset \mathbb{R}^n$ rectángulos cerrados tales que $S \subset R$. Si $f : R \to \mathbb{R}$ es integrable, entonces $f$ es integrable en $S$.

*Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$ y $P = (P_1, \ldots, P_n) \in \mathcal{P}(R)$ tal que $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$. Podemos asumir que los vértices de $S$ están en $P$, es decir, si $S = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, entonces $a_i, b_i \in P_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Ahora, consideramos $\tilde{P} = \left(\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n\right) \in \mathcal{P}(S)$ tal que $\tilde{P}_i = P_i \cap [a_i, b_i]$ con $i = 1, \ldots, n$ . Dado que los subrectángulos de $\tilde{P}$ son subrectángulos de $P$

es fácil ver que $S$ es una unión de subrectángulos de $R$. Sean $R_1, \ldots, R_k$ los subrectángulos de $P$ que también lo son de $\tilde{P}$, y sean $R_{k+1}, \ldots, R_N$ el resto. Tenemos que

$$\begin{aligned}\varepsilon > S(f,P) - s(f,P) &= \sum_{j=1}^{k} (\beta_j - \alpha_j) v(R_j) + \sum_{j=k+1}^{N} (\beta_j - \alpha_j) v(R_j) \\ &\geq \sum_{j=1}^{k} (\beta_j - \alpha_j) v(R_j) = S\left(f|_S, \tilde{P}\right) - s\left(f|_S, \tilde{P}\right).\end{aligned}$$

Por el criterio de la integrabilidad de Riemann, $f|_S$ es integrable. □

**Lema 1.2.** Sean $R, R' \subset \mathbb{R}^n$ rectángulos con $R' \subset R$. Supongamos que $f : R \to \mathbb{R}$ es integrable en $R'$ y $f(x) = 0$ para $x \in \overline{R/R'}$. Entonces $f$ es integrable en $R$ y

$$\int_{R'} f = \int_R f.$$

*Demostración.* Sea $\tilde{f} := f|_{R'}$ y sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $\tilde{P} \in \mathcal{P}(R')$ tal que

$$S\left(\tilde{f}, \tilde{P}\right) - s\left(\tilde{f}, \tilde{P}\right) < \varepsilon.$$

Cogemos ahora la partición $P \in \mathcal{P}(R)$ que resulta de extender $\tilde{P}$ a una partición de $R$, como se muestra en la figura. Entonces, tendremos que $R'$ es una unión de subrectángulos de $P$. Sean $R_1, \ldots, R_k$ los subrectángulos de $P$ que también lo son de $\tilde{P}$ y $R_{k+1}, \ldots, R_N$ el resto. Así, tenemos que

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{i=1}^{k} (\beta_i - \alpha_i) v(R_i) + \sum_{i=k+1}^{N} (\beta_i - \alpha_i) v(R_i) < \varepsilon + \sum_{i=k+1}^{N} (\beta_i - \alpha_i) v(R_i).$$

Los rectángulos $R_{k+1}, \ldots, R_N$ pueden cumplir una de dos cosas.

- Si $R_j \cap R' = \emptyset$, entonces $f|_{R_j} \equiv 0$ y se tiene que $\beta_j - \alpha_j = 0$.
- Si $R_j \cap R' \neq \emptyset$, entonces, debe ser que su intersección con $R'$ no es más que un segmento del borde de $R'$, es decir, $R_j \cap R' \subset \overline{R/R'}$, por lo que de nuevo tenemos que $\beta_j - \alpha_j = 0$.

Así, hemos visto que $\displaystyle\sum_{i=k+1}^{N} (\beta_i - \alpha_i) v(R_i) = 0$, por lo que $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$ y tenemos que $f$ es integrable en $R$. Veamos ahora que el valor de las integrales coincide. Sea $I = \displaystyle\int_{R'} \tilde{f}$. Sea $\varepsilon > 0$, podemos coger $\tilde{P} \in \mathcal{P}(R')$ tal que $I - s\left(\tilde{f}, \tilde{P}\right) < \varepsilon$. Cogemos $P \in \mathcal{P}(R)$ extendiendo $\tilde{P}$ a una partición de $R$ como hemos hecho antes, así

$$0 \leq I - s(f,P) = I - \sum_{J \in P, J \subset R'} \alpha_J v(J) = I - \sum_{J \in \tilde{P}} \tilde{\alpha}_J v(J) = I - s\left(\tilde{f}, \tilde{P}\right) < \varepsilon.$$

Así, hemos obtenido que

$$\underline{\int_R} f = \int_R f = I.$$

□

**Proposición 1.4.** Sean $R, R' \subset \mathbb{R}^n$ rectángulos con $R' \subset R$. Supongamos que $f : R \to \mathbb{R}$ es integrable en $R'$ y $f(x) = 0$ para $x \in R/R'$. Entonces $f$ es integrable en $R$ y

$$\int_{R'} f = \int_R f.$$

*Demostración.* Supongamos que $f(x) = g(x) + h(x)$ con $g, h : R \to \mathbb{R}$ tales que

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \overline{R/R'} \\ f(x), & \text{resto} \end{cases} \quad , \quad h(x) = \begin{cases} 0, & x \in R/\partial R' \\ f(x), & \text{resto} \end{cases} \quad .$$

Veamos que $\displaystyle\int_R h = \int_{R'} h = 0$. Veamos primero que $h$ es integrable en $R$. Se puede comprobar que $\partial R'$ tiene contenido nulo, por lo que para $\varepsilon > 0$, existe $P \in \mathcal{P}(R)$ tal que

$$\sum_{J \in P, J \cap \partial R' \neq \emptyset} v(J) < \frac{\varepsilon}{M}, \quad \text{donde } |f| \leq M.$$

Así, tendremos que

$$S(h, P) = \sum_{J \in P} \beta_J v(J) = \sum_{J \in P, J \cap \partial R' \neq \emptyset} \beta_J v(J) \leq M \sum_{J \in P, J \cap \partial R' \neq \emptyset} v(J) < \varepsilon.$$

Así, $h$ es integrable en $R$ y su integral es nula. Por una proposición anterior, como $R' \subset R$, tenemos que $h$ también es integrable en $R'$. De esta manera, como $s(h|_{R'}, P) = 0$, $\forall P \in \mathcal{P}(R')$, tenemos que

$$\underline{\int_{R'}} h = \int_{R'} h = 0.$$

Veamos ahora que $g$ es integrable en $R'$. Primero, como $f$ está acotada, tendremos que existe $K > 0$ tal que $\beta_{g,J} - \alpha_{g,J} \leq K$, $\forall J \in P$ con $J \cap \partial R' \neq \emptyset$. Ahora, sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $P_1 \in \mathcal{P}(R')$ tal que $S\left(\tilde{f}, P_1\right) - s\left(\tilde{f}, P_1\right) < \frac{\varepsilon}{2}$. Además, como $\partial R'$ tiene contenido nulo, existe $P_2 \in \mathcal{P}(R')$ tal que $\displaystyle\sum_{J \in P_2, J \cap \partial R'} v(J) < \frac{\varepsilon}{2K}$. Así, cogiendo $P \in \mathcal{P}(R')$ más fina que $P_1$ y $P_2$,

$$\begin{aligned}
S(g|_{R'}, P) - s(g|_{R'}, P) &= \sum_{J \in P} (\beta_{g,J} - \alpha_{g,J}) v(J) \\
&= \sum_{J \cap \partial R' = \emptyset} (\beta_{g,J} - \alpha_{g,J}) v(J) + \sum_{J \cap \partial R' \neq \emptyset} (\beta_{g,J} - \alpha_{g,J}) v(J) \\
&\leq \sum_{J \in P} (\beta_{f,J} - \alpha_{f,J}) v(J) + \sum_{J \cap \partial R' \neq \emptyset} (\beta_{g,J} - \alpha_{g,J}) v(J) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Así, tenemos que $g$ es integrable en $R'$ y por el lema anterior tenemos que también es integrable en $R$ y además

$$\int_{R'} g = \int_R g.$$

Por otro lado, sea $I = \int_{R'} f$, entonces, suponiendo que $I \geq \int_{R'} g$ tenemos que

$$\begin{aligned}
0 \leq & I - \int_{R'} g \leq S\left(f|_{R'}, P\right) - s\left(g|_{R'}, P\right) \\
&= \sum_{J\cap\partial R'=\emptyset} \beta_{f,J} v\left(J\right) + \sum_{J\cap\partial R'\neq\emptyset} \beta_{f,J} v\left(J\right) - \sum_{J\cap\partial R'=\emptyset} \alpha_{g,J} v\left(J\right) - \sum_{J\cap\partial R'\neq\emptyset} \alpha_{g,J} v\left(J\right) \\
&= \sum_{J\cap\partial R'=\emptyset} \left(\beta_{f,J} - \alpha_{f,J}\right) v\left(J\right) + \sum_{J\cap\partial R'\neq\emptyset} \left(\beta_{f,J} - \alpha_{g,J}\right) v\left(J\right) \\
&\leq \sum_{J\in P} \left(\beta_{f,J} - \alpha_{f,J}\right) v\left(J\right) + \sum_{J\cap\partial R'\neq\emptyset} \tilde{K} v\left(J\right) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

El objetivo de $\tilde{K}$ es acotar la resta $\beta_{f,J} - \alpha_{g,J} \geq 0$, lo cual podemos hacer puesto que $f$ y $g$ son acotadas y valen lo mismo en casi todos los puntos. El primer término lo podemos hacer arbitrariamente pequeño por la integrabilidad de $f$ en $R'$ y el segundo porque $\partial R'$ tiene contenido nulo. El caso $I \leq \int_{R'} g$ es análogo.

Finalmente, como $f$ es suma de funciones integrables, tendremos que

$$\int_R f = \int_R g + h = \int_R g + \int_R h = \int_{R'} g = \int_{R'} f.$$

□

## 1.4. Conjuntos medibles Jordan

**Definición 1.5** (Conjunto medible Jordan). Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ con $A \neq \emptyset$ y $A$ acotado. Tomamos un rectángulo $R$ tal que $A \subset R$. Definimos la función

$$\chi_A : R \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$

Diremos que $A$ tiene **volumen** (A es **medible Jordan**) si $\chi_A$ es integrable y en este caso diremos que su **volumen** es

$$V\left(A\right) = \int_R \chi_A.$$

**Ejemplo.**

- Ya vimos anteriormente que $\mathbb{Q}^n \cap [0,1]^n$ no tiene volumen.
- Si $R$ es un rectángulo, $R$ es medible Jordan.

**Observación.** Sea $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ acotado y $R$ un rectángulo tal que $A \subset R$. Cogemos $P \in \mathcal{P}(R)$. Podemos observar que

$$\alpha_J = \begin{cases} 1, & J \subset A \\ 0, & J \subsetneq A \end{cases}.$$

Así, tendremos que

$$s(\chi_A, P) = \sum_{J \in P} v(J)\, \alpha_J = \sum_{J \in P, J \subset A} v(J).$$

De esta forma,

$$\underline{\int_R} \chi_A = \sup \left\{ \sum_{J \in P, J \subset A} v(J) \ : \ P \in \mathcal{P}(R) \right\}.$$

Consideremos ahora las sumas superiores,

$$\beta_J = \begin{cases} 1, & J \cap A \neq \emptyset \\ 0, & J \cap A = \emptyset \end{cases}.$$

De esta forma,

$$S(\chi_A, P) = \sum_{J \in P, J \cap A \neq \emptyset} v(J).$$

Así,

$$\overline{\int_R} \chi_A = \inf \left\{ \sum_{J \in P, J \cap A \neq \emptyset} v(J) \ : \ P \in \mathcal{P}(R) \right\}.$$

**Definición 1.6** (Integral en otros conjuntos). Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado y $f : A \to \mathbb{R}$ también acotada. Diremos que $f$ **es integrable en** $A$ si existe $R$ rectángulo tal que $A \subset R$ y

$$\tilde{f} : R \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases},$$

es integrable en $R$. En este caso

$$\int_A f := \int_R \tilde{f}.$$

De forma equivalente, desde $f : R \to \mathbb{R}$ y $A \subset R$, diremos que $f$ es integrable en $A$ si $f \cdot \chi_A$ es integrable en $R$ y tomamos

$$\int_A f = \int_R f \cdot \chi_A.$$

**Observación.** Tanto para la definición anterior como para la de volumen, tenemos que ver que basta con que exista $R$, puesto que en cuanto existe uno para cualquier otro rectángulo que cumpla estas características el valor de la integral coincide.

En efecto, sea $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\chi_A$ es integrable en el rectángulo $R \supset A$ y sea $R' \supset A$ otro rectángulo. Tenemos que $R \cap R'$ es un rectángulo que contiene a $A$. Por las últimas proposiciones de la sección anterior tenemos que, por ser $f$ integrable en $R$ lo es en $R \cap R'$ y además

$$\int_R \chi_A = \int_{R\cap R'} \chi_A = \int_{R'} \chi_A.$$

Las integrales sobre conjuntos que no sean rectángulos cumplen propiedades parecidas a las integrales sobre rectángulos.

**Proposición 1.5** (Linealidad y monotonía)**.** Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ con $A \neq \emptyset$.

1. **Linealidad.** Si $f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}$ son integrables en $A$, entonces

$$\int_A f_1 + f_2 = \int_A f_1 + \int_A f_2.$$

Además, si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ es integrable en $A$, entonces

$$\int_A \alpha f = \alpha \int_A f.$$

2. **Monotonía.** Si $f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}$ son integrables en $A$, con $f_1 \leq f_2$, $\forall x \in A$, entonces

$$\int_A f_1 \leq \int_A f_2.$$

*Demostración.* Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ con $A \neq \emptyset$.

1. Como $f_1$ y $f_2$ son integrables en $A$, existe $R$ rectángulo tal que $A \subset R$ y existen $\displaystyle\int_R \tilde{f}_1$ y $\displaystyle\int_R \tilde{f}_2$. Así, tendremos que existe

$$\int_A f_1 + f_2 = \int_R \widetilde{f_1 + f_2} = \int_R \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 = \int_R \tilde{f}_1 + \int_R \tilde{f}_2 = \int_A f_1 + \int_A f_2.$$

Similarmente, si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ es integrable en $A$, entonces existe $R \subset \mathbb{R}^n$ rectángulo con $A \subset R$ y existe $\displaystyle\int_R \tilde{f}$. Así, existe

$$\int_A \alpha f = \int_R \widetilde{\alpha f} = \int_R \alpha \tilde{f} = \alpha \int_R \tilde{f} = \alpha \int_A f.$$

2. Como $f_1$ y $f_2$ son integrables en $A$, existe $R \subset \mathbb{R}^n$ rectángulo con $A \subset R$ tal que $\tilde{f}_1$ y $\tilde{f}_2$ son integrables en $R$. Es fácil ver que $\tilde{f}_1 \leq \tilde{f}_2$, $\forall x \in R$, por lo que

$$\int_A f_1 = \int_R \tilde{f}_1 \leq \int_R \tilde{f}_2 = \int_A f_2.$$

□

**Definición 1.7** (Media)**.** Sea $f : A \to \mathbb{R}$ integrable con $A \subset \mathbb{R}^n$ medible Jordan y $v(A) > 0$, definimos la **media** de $f$ en $A$ como

$$m_A(f) = \frac{1}{v(A)} \int_A f.$$

**Observación.** Si $f : A \to \mathbb{R}$ es integrable, entonces está acotada por lo que existen $M, m > 0$ tales que $m \leq f(x) \leq M$, así

$$mv(A) \leq \int_A f \leq Mv(A) \iff m \leq \frac{1}{v(A)} \int_A f \leq M \iff m \leq m_A(f) \leq M.$$

Podemos observar que

$$\int_A m_A(f) = \int_A f.$$

**Teorema 1.4** (Teorema del valor medio)**.** Sea $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y conexo, medible Jordan con volumen positivo, y sea $f : A \to \mathbb{R}$ continua. Entonces, existe $x_m \in A$ tal que

$$f(x_m) = m_A(f) = \frac{1}{v(A)} \int_A f.$$

*Demostración.* Como $f$ es continua y $A$ es compacto y conexo, debe ser que $f(A)$ también es compacto y conexo (por lo que debe ser un intervalo cerrado y acotado), es decir, existen $x_1, x_2 \in A$ tales que

$$m = f(x_1) \leq f(x) \leq M = f(x_2), \ \forall x \in A.$$

Así, tenemos que $f(A) = [m, M]$. Anteriormente hemos visto que $m \leq m_A(f) \leq M$, por lo que $m_A(f) \in f(A)$ y en consecuencia existe $x_m \in A$ tal que $f(x_m) = m_A(f)$. □

**Proposición 1.6.** Si $f : A \to \mathbb{R}$ es integrable, entonces $|f|$ es integrable y

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|.$$

*Demostración.* Demostramos la segunda parte. Claramente tenemos que

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \ \forall x \in A.$$

Por la propiedad de la monotonía tenemos que

$$-\int_A |f| \leq \int_A f \leq \int_A |f| \iff \left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|.$$

□

**Observación.** Sea $A$ medible Jordan y $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in A$. Entonces, tenemos que

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f| \leq M v(A).$$

De esta manera, podemos utilizar la proposición anterior para obtener una cota de la integral.

**Proposición 1.7** (Aditividad de la integral respecto de los conjuntos de integración)**.** Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ acotados con $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ acotada. Supongamos que $\displaystyle\int_{A\cap B} f = 0$ y $f$ es integrable en $A$ y en $B$. Entonces $f$ es integrable en $A \cup B$ y

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

*Demostración.* Es fácil ver que

$$\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}.$$

Por tanto, tenemos que

$$f \cdot \chi_{A\cup B} = f \cdot \chi_A + f \cdot \chi_B - f \cdot \chi_{A\cap B}.$$

Si cogemos $R \subset \mathbb{R}^n$ rectángulo tal que $A \cup B \subset R$, aplicando las hipótesis de la proposición y la linealidad de la integral tendremos que

$$\int_{A\cup B} f = \int_R f \cdot \chi_{A\cup B} = \int_R f \cdot \chi_A + \int_R f \cdot \chi_B - \int_R f \cdot \chi_{A\cap B} = \int_A f + \int_B f.$$

□

## 1.5. Conjuntos de medida nula

**Lema 1.3.** Sea $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, $A$ tiene contenido nulo [a] si y solo si existe $R \supset A$ tal que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P \in \mathcal{P}(R)$ tal que $\displaystyle\sum_{J\in P,\ J\cap A\neq\emptyset} v(J) < \varepsilon$.

[a] $A$ es medible Jordan y $v(A) = 0$.

*Demostración.* Tenemos que $A$ tiene contenido nulo si y solo si es medible Jordan y $v(A) = 0$, es decir, si existe $R \subset \mathbb{R}^n$ rectángulo con $A \subset R$ y

$$0 \leq \underline{\int_R} \chi_A \leq \overline{\int_R} \chi_A \leq 0.$$

Esto último sucede si y solo si ínf $\{S(\chi_A, P) : P \in \mathcal{P}(R)\} \leq 0$, es decir, si $\forall \varepsilon > 0$ existe $P \in \mathcal{P}(R)$ tal que [1]

$$S(\chi_A, P) = \sum_{J \in P,\ J \cap A \neq \emptyset} v(J) < \varepsilon.$$

□

**Proposición 1.8** (Caracterización de contenido nulo). $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene contenido nulo si y solo si $\forall \varepsilon > 0$ existe $\{J_1, \ldots, J_N\}$ familia finita de rectángulos tal que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N} J_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{N} v(J_i) < \varepsilon.$$

*Demostración.* La primera implicación es trivial a partir del lema anterior, por lo que demostraremos únicamente la segunda implicación. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $\{J_1, \ldots, J_N\}$ familia de rectángulos que recubren $A$ y $\sum_{i=1}^{N} v(J_i) < \varepsilon$. Cogemos $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo grande tal que $\bigcup_{i=1}^{N} J_i \subset R$. Podemos obtener una partición $P \in \mathcal{P}(R)$ tal que cualquiera de los $J_i$ es unión de rectángulos de $P$. Entonces,

$$\sum_{J \in P,\ J \cap A \neq \emptyset} v(J) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{J \in P, J \subset J_i} v(J) \leq \sum_{i=1}^{N} v(J_i) < \varepsilon.$$

Por el lema anterior, tenemos que $A$ tiene contenido nulo. □

**Proposición 1.9.** Sea $\{A_1, \ldots, A_N\} \subset \mathbb{R}^n$ una familia finita de conjuntos de contenido nulo. Entonces, $\bigcup_{i=1}^{N} A_i$ tiene contenido nulo.

*Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $A_i$ existe una familia $\left\{J_1^i, \ldots, J_{N_i}^i\right\}$ de rectángulos tales que

$$A_i \subset \bigcup_{1 \leq j \leq N_i} J_j^i \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{N_i} v\left(J_j^i\right) < \frac{\varepsilon}{N}.$$

Así, si cogemos la familia $\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{N} \{J_1^i, \ldots, J_{N_i}^i\}$, tendremos que claramente $\bigcup_{i=1}^{N} A_i$ está recubierto por $\mathcal{F}$ y además

$$\sum_{J \in \mathcal{F}} v(J) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N_i} v\left(J_j^i\right) < \sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon.$$

[1] Esto último se deduce de la caracterización de ínfimo: $S(\chi_A, P) < \overline{\int_R} \chi_A + \varepsilon \leq \varepsilon$.

Una demostración alternativa es hacerlo por inducción. Supongamos que $A$ y $B$ tienen contenido nulo y veamos que $A \cup B$ también tiene contenido nulo. Como $A \cap B \subset A$, es sencillo ver que también tendrá contenido nulo, y por la propiedad de aditividad tendremos que para un rectángulo $R \supset A \cup B$ se tiene que

$$v(A \cup B) = \int_R \chi_{A \cup B} = \int_R \chi_A + \int_R \chi_B - \int_R \chi_{A \cap B} = v(A) + v(B) - v(A \cap B) = 0.$$

A partir de aquí es sencillo ver inducitvamente que la proposición se cumple para una familia finita de conjuntos de contenido nulo. □

---

**Observación.** En la proposición anterior es importante que la familia de conjuntos sea finita y no numerable. En efecto, ya vimos que $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ no tiene contenido nulo.

---

**Definición 1.8** (Medida nula). Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que $A$ tiene **medida nula** si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \{J_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ familia de rectángulos tales que

$$A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} J_k \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} v(J_k) < \varepsilon.$$

**Proposición 1.10.** Si $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene contenido nulo entonces también tiene medida nula.

*Demostración.* Supongamos que $A$ tiene contenido nulo y sea $\varepsilon > 0$. Tenemos que existe $\{J_1, \ldots, J_N\}$ familia de rectángulos tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N} J_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{N} v(J_i) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora, tomamos una sucesión cualquiera de rectángulos $\{J_{N+k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $v(J_{N+k}) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. De esta forma, es trivial que $\{J_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ recubre a $A$ y

$$\sum_{i=1}^{\infty} v(J_i) = \sum_{i=1}^{N} v(J_i) + \sum_{k=1}^{\infty} v(J_{N+k}) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon.$$

□

**Proposición 1.11.** Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una sucesión o familia finita de conjuntos de medida nula, entonces $\bigcup_{i \in I} A_i$ también tiene medida nula.

*Demostración.* Sea $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Tomamos $\varepsilon > 0$ y para cada $i \in I$ tomamos un rectángulo $J_i$ tal que $A_i \subset J_i$ y $v(J_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. Claramente se tiene que

$$A \subset \bigcup_{i \in I} J_i \quad \text{y} \quad \sum_{i \in I} v(J_i) < \sum_{i \in I} \frac{\varepsilon}{2^i} < \varepsilon.$$

Alternativamente, podemos ver que para un $i \in I$ se tiene que existe $\{J_{ij}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que

$$A_i \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} J_{ij} \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{\infty} v\left(J_{ij}\right) < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

De esta forma, podemos coger la familia numerable $\{J_{ij}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ que recubre a $A$ y tendremos que [2]

$$\sum_{i\in I, j\in\mathbb{N}} = \sum_{i\in I}\sum_{j=1}^{\infty} v\left(J_{ij}\right) < \sum_{i\in I}\frac{\varepsilon}{2^i} < \varepsilon.$$

□

**Ejemplo.** Por la proposición anterior tenemos que $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ tiene medida nula pero como vimos no tiene contenido nulo puesto que no es medible Jordan. Es decir, **que un conjunto tenga medida nula no significa que tenga contenido nulo**.

**Proposición 1.12.** Si $\emptyset \neq B \subset A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $A$ tiene contenido (resp. medida) nulo, entonces $B$ tiene contenido (resp. medida) nulo.

*Demostración.* Supongamos que $B \subset A$ y $A$ tiene contenido nulo. Si $\varepsilon > 0$ tendremos que existe $\{J_1, \ldots, J_N\}$ familia de rectángulos que recubre a $A$ y $\sum_{i=1}^{N} v\left(J_i\right) < \varepsilon$. Como $B \subset A$ se tiene que también recubren a $B$, por lo que $B$ también tiene contenido nulo. La demostración para el caso de medida nula es análoga. □

**Proposición 1.13.** Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ medible Jordan. Entonces, $A$ tiene contenido nulo si y solo si tiene medida nula.

*Demostración.* La primera implicación es cierta para cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^n$, por lo que sólo demostraremos la segunda implicación. Supongamos que $A$ tiene medida nula □

**Ejemplo.** Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo (no trivial, es decir, no tiene volumen nulo). Entonces, $v\left(R\right) > 0$ por lo que $R$ no tiene contenido nulo, que se puede deducir a partir de la definición. Además, como $R$ es medible Jordan y no tiene contenido nulo tenemos que no tiene medida nula.

**Corolario 1.2.** Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $A \supset R$ con $R$ rectángulo no trivial. Entonces $A$ no tiene contenido ni medida nula.

[2] El hecho de que podamos sumar primero en función de $J$ y luego de $i$ se debe a que los términos se pueden reordenar en una serie doble que es absolutamente convergente.

*Demostración.* Como contenido nulo implica medida nula, basta con demostrar que no puede tener medida nula. Supongamos que $A$ tiene medida nula, entonces para $\varepsilon > 0$ existe $\{J_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que esta familia recubre a $A$ y $\sum_{k=1}^{\infty} v(J_k) < \varepsilon$. Como $R \subset A$, tendremos que esta familia también recubre a $R$ y por tanto $R$ también tiene medida nula, lo cual es una contradicción como se ha visto en el ejemplo anterior. [3] □

**Teorema 1.5.** Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Entonces $K$ tiene contenido nulo si y solo si $K$ tiene medida nula.

*Demostración.* La primera implicación es cierta para cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^n$, por lo que demostraremos únicamente la segunda implicación. Supongamos que $K$ no tiene contenido nulo. □

## 1.6. Teorema de Lebesgue

**Teorema 1.6** (Teorema de Lebesgue)**.** Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ acotada y $R$ un rectángulo. Entonces $f$ es integrable si y solo si el conjunto de discontinuidades de $f$ en $R$, $D(f)$, tiene medida nula.

Ahora estamos preparados para demostrar la proposición siguiente (que ya habíamos mencionado antes):

**Corolario 1.3.** Si $f : R \to \mathbb{R}$ es integrable, entonces $|f|$ también es integrable.

*Demostración.* Si $f$ es continua en $x \in R$, entonces $|f|$ también es continua en $x$. De esta manera, tenemos que $D(|f|) \subset D(f)$. Así, como $D(f)$ tiene medida nula, por una proposición anterior tenemos que $D(|f|)$ también tiene medida nula, por lo que $|f|$ también es integrable en $R$. □

**Corolario 1.4.** Sean $f, g : R \to \mathbb{R}$ integrables. Entonces, $f + g$ es integrable en $R$.

*Demostración.* Es sencillo ver que $D(f+g) \subset D(f) \cup D(g)$. Como $D(f)$ y $D(g)$ tienen medida nula su unión también, por lo que $D(f+g)$ tiene medida nula y $f+g$ es integrable. □

**Corolario 1.5.** Sean $f, g : R \to \mathbb{R}$ integrables en $R$. Entonces, $f \cdot g$ es integrable en $R$.

**Observación.** Recordamos que $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado es medible Jordan si y solo si existe $R \subset \mathbb{R}^n$ rectángulo tal que $\chi_A$ es integrable en $R$. Entonces, por el criterio de Lebesgue,

[3] La demostración no es necesaria realmente puesto que este enunciado es una consecuencia directa de la proposición anterior.

$A$ es medible Jordan si y solo si $D(\chi_A)$ tiene medida nula. Tenemos que $D(\chi_A) = \partial A$, por lo que buscamos que $\partial A$ tenga medida nula [a].

[a]Recordamos que $\partial A = \{x \in R \ : \ B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ y } B(x,\varepsilon) \cap (R/A) \neq \emptyset, \ \forall \varepsilon > 0\}$.

**Ejemplo.** Consideremos $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Tenemos que $\partial A = [0,1]$ y como $v(\partial A) = 1 \neq 0$, $\partial A$ no tiene medida nula por lo que $A$ no es medible Jordan.

**Observación.** Supongamos que $A$ y $B$ son medibles Jordan. Tenemos que

$$\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B.$$

Como $\chi_A$ y $\chi_B$ son integrables Riemann, tenemos que $\chi_{A\cap B}$ es integrable Riemann.

## 1.7. 11/2/2026

**Proposición 1.14.** Sea $A$ de contenido nulo y $f : A \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces, $f$ es integrable en $A$ y $\displaystyle\int_A f = 0$.

*Demostración.* Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ de contenido nulo y $f : A \to \mathbb{R}$ acotada. Cogemos $R \subset \mathbb{R}^n$ rectángulo tal que $A \subset R$ y consideramos la función

$$\tilde{f} : R \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$

Tendremos que $D\left(\tilde{f}\right) \subset \overline{A}$. En efecto, si $x \notin \overline{A}$ tendremos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset R/A$, por lo que $\tilde{f}|_{B(x,\varepsilon)} \equiv 0$ y por tanto es continua en $x$. Como $A$ tiene contenido nulo, $\overline{A}$ también tiene contenido nulo (Hoja 3, Ejercicio 2). Por tanto, $\overline{A}$ tiene medida nula. Así, $\tilde{f}$ es integrable en $R$ y en consecuencia $f$ es integrable en $A$. Veamos ahora que el valor de la integral es nulo. Como $\tilde{f}$ es integrable, basta con ver que la integral inferior de $\left|\tilde{f}\right|$ vale 0, es decir,

$$\underline{\int_R} \left|\tilde{f}\right| = \sup\left\{ s\left(\left|\tilde{f}\right|, P\right) \ : \ P \in \mathcal{P}(R) \right\} = 0.$$

Sea $P \in \mathcal{P}(R)$, entonces

$$s\left(\left|\tilde{f}\right|, P\right) = \sum_{J \in P} \alpha_J v(J).$$

Como $A$ tiene volumen nulo y $J$ no, no puede ser que $J \subset A$. Así, tenemos que existe $x \in J$ con $x \notin A$, por lo que $\alpha_J = 0$, $\forall J \in P$. Así, tenemos que $s\left(\left|\tilde{f}\right|, P\right) = 0$, por lo que la integral inferior vale 0. Así,

$$\left|\int_R \tilde{f}\right| \leq \int_R \left|\tilde{f}\right| = 0 \Rightarrow \int_R \tilde{f} = \int_A f = 0.$$

Otra forma de verlo es ver que

$$\left|\int_A f\right| \leq \int_A |f| \leq \int_A M = Mv(A) = 0,$$

donde $|f| \leq M$, $\forall x \in A$. $\square$

---

**Observación.** Nos podemos preguntar, es válido el resultado si en vez de tener $A$ contenido nulo tenemos que $A$ tiene medida nula? Claramente, la respuesta es que no. En efecto, tenemos que $\chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ tiene medida nula pero no es integrable. Sin embargo, sí es cierto que si $A$ tiene medida nula y $f : A \to \mathbb{R}$ es integrable, entonces $\displaystyle\int_A f = 0$.

---

**Corolario 1.6.** Sean $f, g : R \to \mathbb{R}$ acotadas con $f$ integrable en $A \subset R$ y $\{x \in R \ : \ f(x) \neq g(x)\}$ tiene contenido nulo. Entonces, $g$ es integrable en $A$ y

$$\int_A g = \int_A f.$$

*Demostración.* Tenemos que $g(x) = g(x) - f(x) + f(x)$. Por la proposición anterior tenemos que $g(x) - f(x)$ es integrable y tiene integral nula, por ser suma de funciones integrables tenemos que $g$ es integrable y

$$\int_A g = \int_A g - f + \int_A f = \int_A f.$$

$\square$

---

**Observación.** Al igual que antes, el enunciado no es cierto sis sustituimos 'contenido nulo' con 'medida nula'. En efecto, basta con considerar $f \equiv 0$ y $g = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$.

---

**Observación.** Podemos repasar nuestro resultado sobre la aditividad de la integral en conjuntos integrables. Si $A = A_1 \cup A_2$ con $A, A_1$ y $A_2$ medibles Jordan, si además $A_1 \cap A_2$ tiene contenido nulo entonces

$$\int_A f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f.$$

---

**Proposición 1.15.** Sea $f : R \to \mathbb{R}$ con $f \geq 0$, y $\displaystyle\int_R f = 0$. Entonces el conjunto $\{x \in R \ : \ f(x) \neq 0\}$ tiene medida nula. Es decir, existe $A \subset R$ de medida nula tal que $f(x) = 0$, $\forall x \in R/A$.

*Demostración.* Queremos ver que el conjunto $X = \{x \in \mathbb{R} \,:\, f(x) \neq 0\}$ tiene medida nula. Tenemos que

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

con $A_k = \left\{x \in R \,:\, f(x) > \dfrac{1}{k}\right\}$. Basta probar que $A_k$ tienen medida nula y basta probar que tienen contenido nulo. Supongamos que $A_k$ es medible Jordan, entonces

$$0 = \int_R f \geq \int_{A_k} f \geq \int_{A_k} \frac{1}{k} = \frac{1}{k} v(A_k) \geq 0.$$

Así, debe ser que $\dfrac{1}{k} v(A_k) = 0$, por lo que $v(A_k) = 0$. Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ y sea $\varepsilon > 0$, existe $P \in \mathcal{P}(R)$ tal que $S(f, P) < \dfrac{\varepsilon}{k_0}$. Así, tenemos que

$$\frac{\varepsilon}{k_0} > \sum_{J \in P} \beta_J v(J) \geq \sum_{J \cap A_{k_0} \neq \emptyset} \beta_J v(J) \geq \sum_{J \cap A_{k_0} \neq \emptyset} v(J) \frac{1}{k_0}.$$

Así, tenemos que $\displaystyle\sum_{J \cap A_{k_0} \neq \emptyset} v(J) < \varepsilon$, por lo que $A_{k_0}$ tiene contenido nulo. □

---

**Notación.** A partir de ahora, si decimos que algo se cumple en casi todo punto es porque se cumple en todos los puntos salvo en un conjunto de medida nula.

---

**Observación.** No podemos concluir que $\{x \in R \,:\, f(x) \neq 0\}$ tiene contenido nulo. En efecto, basta tomar la función de Thomae,

$$x \to \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \left(\text{la fracción } \dfrac{p}{q} \text{ es irreducible}\right) \end{cases}.$$

que es continua en los irracionales y discontinua en los racionales. Así, $D(f) = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ que tiene medida nula, por lo que $f$ es integrable.

---

# Capítulo 2

# Cálculo de integrales

**Ejemplo.** Consideremos $f(x,y) = x^2y + \cos xy$ y $R = [0,1] \times [2,3]$. Como $f$ es continua en $\mathbb{R}^2$, lo es en $R$ por lo que es integrable. Buscamos cómo calcular

$$\int_{[0,1]\times[2,3]} f(x,y)\ dx\ dy.$$

Veremos que la forma de calcular integrales es a través de integrales iteradas, es decir,

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]\times[2,3]} f(x,y)\ dx\ dy &= \int_2^3 \int_0^1 x^2y + \cos xy\ dx\ dy = \int_2^3 \frac{y}{3} + \frac{\sin y}{y}\ dy \\ &= \left[\frac{y^2}{6}\right]_2^3 + \int_2^3 \frac{\sin y}{y}\ dy = \frac{5}{6} + \int_2^3 \frac{\sin y}{y}\ dy.\end{aligned}$$

Podríamos haber planteado también la integral

$$\int_0^1 \int_2^3 x^2y + \cos xy\ dy\ dx,$$

es decir, cambiar el orden de integración. En este caso, los dos resultados coinciden.

## 2.1. Teorema de Fubini

**Teorema 2.1** (Teorema de Fubini)**.** Sea $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ y $f : R \to \mathbb{R}$ integrable. Supongamos que para cada $x \in [a, b]$, la función

$$f_x : [c, d] \to \mathbb{R} : y \to f(x, y),$$

es integrable en $[c, d]$. Entonces, la función

$$x \to \int_c^d f_x(y)\ dy,$$

es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\ dy\ dx.$$

**Observación.** Podemos hacer un par de observaciones.

- Es importante ver la condición de que $f_x$ sea integrable es necesaria puesto que el hecho de que $f$ sea integrable no implica siempre que $f_x$ lo sea.
- El teorema también se cumple si cambiamos $x$ por $y$.

**Teorema 2.2** (Teorema de Fubini en $\mathbb{R}^n$)**.** Sea $R = R_1 \times R_2 \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo con $R_1 \subset \mathbb{R}^k$ rectángulo y $R_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$ rectángulo. Suponemos que $\forall x \in R_1$, $f_x : R_2 \to \mathbb{R} : y \to f(x, y)$ es integrable en $R_2$. Entonces la función

$$x \to \int_{R_2} f(x, y),$$

es integrable en $R_1$ y se tiene que

$$\int_R f = \int_{R_1} \int_{R_2} f(x, y)\ dy\ dx.$$

**Ejemplo.** Consideremos los siguientes ejemplos.

1. Sea $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x + y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$, queremos calcular

$$\int_A f(x, y)\ dx\ dy.$$

Si cogemos el rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 1]$, tenemos que

$$\int_A f(x, y)\ dx\ dy = \int_R \tilde{f}(x, y)\ dx\ dy.$$

Si cogemos un $x_0 \in [a,b]$, podemos considerar

$$\tilde{f}_{x_0} : [c,d] \to \mathbb{R} : y \to \begin{cases} f(x_0,y), & (x_0,y) \in A \\ 0, & (x_0,y) \notin A \end{cases}.$$

Supongamos que es integrable, entonces tendremos que

$$\int_R \tilde{f} = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{f}(x,y)\ dy\ dx.$$

Dado que nos es incómodo calcular la integral de $\tilde{f}$, podemos decir que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left( \int_0^y \tilde{f}(x,y)\ dy + \int_y^1 \tilde{f}(x,y)\ dy \right) dx &= \int_0^1 \int_0^y f(x,y)\ dy\ dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y)\ dy\ dx.\end{aligned}$$

Si tomamos por ejemplo $f(x,y) = x$, tendremos que

$$\int_A f(x,y)\ dy\ dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} x\ dy\ dx = \int_0^1 x(1-x)\ dx = \frac{1}{6}.$$

Podemos cambiar el orden de integración:

$$\int_A f(x,y)\ dx\ dy = \int_0^1 \int_0^{1-y} x\ dx\ dy = \int_0^1 \frac{(1-y)^2}{2}\ dy = \frac{1}{6}.$$

2. Consideremos ahora $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq 1, \ y \geq 0\right\}$. Podemos considerar $R = [-1,1] \times [0,1]$. De esta forma,

$$\int_A f(x,y)\ dy\ dx = \int_{-1}^1 \int_0^1 \tilde{f}(x,y)\ dy\ dx = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\ dy\ dx.$$

Podemos cambiar el orden de integración:

$$\int_A f(x,y)\ dx\ dy = \int_0^1 \int_{-1}^1 \tilde{f}(x,y)\ dx\ dy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\ dx\ dy.$$

3. Sea $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [a,b], \ g_2(x) \leq y \leq g_1(x)\right\}$ para $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas. Tendremos que

$$\int_A f(x,y)\ dy\ dx = \int_a^b \int_{g_2(x)}^{g_1(x)} f(x,y)\ dy\ dx.$$