

# Álgebra Lineal - Mayo 2025

14/5/2025

**Ejercicio 1.** En  $\mathbb{R}^9$  se considera un endomorfismo  $f$  con un único valor propio  $\lambda$  que verifica

$$\dim \text{Ker}(f - \lambda id)^5 = 8.$$

Determinar las posibles formas canónicas de Jordan de  $f$ .

**Solución 1.** Dado que  $\text{Ker}(f - \lambda id)^5 \subsetneq \text{Ker}(f - \lambda id)^6$ , tenemos que

$$\dim \text{Ker}(f - \lambda id)^5 = 8 < \dim \text{Ker}(f - \lambda id)^6 \leq 9,$$

por lo que  $\dim \text{Ker}(f - \lambda id)^6 = 9$ . Tenemos que el límite de nilpotencia de  $f - \lambda id$  es 6. Así, sabemos que habrá un bloque de orden 6. Las posibilidades restantes son:

- Un bloque de orden 3.

$$f \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & & & & & & & & \\ 1 & \lambda & & & & & & & \\ & 1 & \lambda & & & & & & \\ & & 1 & \lambda & & & & & \\ & & & 1 & \lambda & & & & \\ & & & & 1 & \lambda & & & \\ & & & & & 1 & \lambda & & \\ & & & & & & \lambda & & \\ & & & & & & 1 & \lambda & \\ & & & & & & & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

- Un bloque de orden 2 y uno de 1.

$$f \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & & & & & & & & \\ 1 & \lambda & & & & & & & \\ & 1 & \lambda & & & & & & \\ & & 1 & \lambda & & & & & \\ & & & 1 & \lambda & & & & \\ & & & & 1 & \lambda & & & \\ & & & & & 1 & \lambda & & \\ & & & & & & \lambda & & \\ & & & & & & 1 & \lambda & \\ & & & & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

- Tres bloques de orden 1.

$$f \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & & & & & & & \\ 1 & \lambda & & & & & & \\ & 1 & \lambda & & & & & \\ & & 1 & \lambda & & & & \\ & & & 1 & \lambda & & & \\ & & & & 1 & \lambda & & \\ & & & & & 1 & \lambda & \\ & & & & & & \lambda & \lambda \\ & & & & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 2.** En  $\mathbb{R}^4$  se considera la forma bilineal  $\beta$  que respecto de la base canónica tiene por matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcular una base de  $\mathbb{R}^4$  ortogonal para  $\beta$  y obtener los posibles índices y coíndices.

**Solución 2.** Sea  $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$  la base canónica. Dado que  $\beta \neq 0$ , tenemos que existe  $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$  tal que  $\beta(\vec{x}, \vec{x}) \neq 0$ . En efecto, tenemos que  $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$  no es isótropo:

$$\beta(\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_1 + \vec{u}_2) = 2\beta(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 2 \neq 0.$$

Calculamos  $\{\vec{v}_1\}_\beta^\perp$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \boxed{x + y + 2z + 2t = 0}.$$

Tenemos que  $\vec{v}_2 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 \in \{\vec{v}_1\}_\beta^\perp$  y no es isótropo:

$$\beta(\vec{u}_1 - \vec{u}_2, \vec{u}_1 - \vec{u}_2) = -\beta(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = -2 \neq 0.$$

Calculamos  $\{\vec{v}_2\}_\beta^\perp$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \boxed{-x + y = 0}.$$

Tenemos que  $\vec{v}_3 = \vec{u}_3 - \vec{u}_4 \in \{\vec{v}_1\}_\beta^\perp \cap \{\vec{v}_2\}_\beta^\perp$  y no es isótropo:

$$\beta(\vec{u}_3 - \vec{u}_4, \vec{u}_3 - \vec{u}_4) = -\beta(\vec{u}_3, \vec{u}_4) = -2 \neq 0.$$

Calculamos  $\{\vec{v}_3\}_\beta^\perp$ :

$$(0 \ 0 \ 1 \ -1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ -1 \ 1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \boxed{-z + t = 0}.$$

Tenemos que  $\vec{v}_4 = (-2, -2, 1, 1) \in \{\vec{v}_1\}_\beta^\perp \cap \{\vec{v}_2\}_\beta^\perp \cap \{\vec{v}_3\}_\beta^\perp$  y

$$(-2 \ -2 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ -3 \ -3) \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -6 < 0.$$

Así, la base ortogonal que buscamos es  $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$  y, como hemos visto tenemos que el índice es 3 y el coíndice es 1.

**Ejercicio 3.** Sea  $(V_1, \langle, \rangle_1)$  un espacio vectorial euclídeo y  $V_2$  un espacio vectorial real. Sea  $f : V_2 \rightarrow V_1$  una aplicación lineal. En  $V_2$  se considera la forma bilineal  $\langle, \rangle_2$  definida por

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_2 = \langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle_1, \quad \vec{x}, \vec{y} \in V_2.$$

Pruébese que  $\langle, \rangle_2$  es un producto escalar en  $V_2$  si y solo si  $f$  es inyectiva.

**Solución 3. (i)** Supongamos que  $\langle, \rangle_2$  es un producto escalar. Si  $\vec{x} \in \text{Ker}(f)$  tenemos que

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_2 = \langle f(\vec{x}), f(\vec{x}) \rangle_1 = \langle \vec{0}, \vec{0} \rangle_1 = 0.$$

Dado que  $\langle, \rangle_2$  es un producto escalar, tenemos que  $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_2 = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$ , por lo que  $\vec{x} = \vec{0}$  y  $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$ , por lo que  $f$  es inyectiva.

**(ii)** Supongamos que  $f$  es inyectiva si  $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_2 = 0$  tenemos que

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_2 = \langle f(\vec{x}), f(\vec{x}) \rangle_1 = 0.$$

Como  $\langle, \rangle_1$  es un producto escalar, tenemos que  $\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle_1 = 0 \iff \vec{y} = \vec{0}$ , por lo que  $f(\vec{x}) = \vec{0}$  y  $\vec{x} \in \text{Ker}(f)$ , por lo que  $\vec{x} = \vec{0}$ . Así, hemos visto que  $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_2 = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$ , por lo que  $\langle, \rangle_2$  es un producto escalar.

**Ejercicio 4.** En un espacio afín de dimensión tres se considera una rotación  $f$  de eje una recta  $l$  y una traslación  $\tau_{\vec{u}}$  de vector  $\vec{u}$ . Demostrar que  $\tau_{\vec{u}} \circ f \circ \tau_{-\vec{u}}$  es una rotación. Determinar el eje de rotación en función de  $l$  y  $\vec{u}$ .

**Solución 4.** Tenemos que

$$\overrightarrow{\tau_{\vec{u}} \circ f \circ \tau_{-\vec{u}}} = \overrightarrow{\tau_{\vec{u}}} \circ \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{\tau_{-\vec{u}}} = id_V \circ \overrightarrow{f} \circ id_V = \overrightarrow{f}.$$

Para ver que se trata de una rotación vamos a ver que el conjunto de puntos invariantes es de dimensión 1. Sabemos que  $\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{A} : f(A) = A\}$  es una variedad lineal afín que, si no es vacía,

tiene como subespacio vectorial asociado a  $L = \left\{ \vec{x} \in V : \vec{f}(\vec{x}) = \vec{x} \right\}$ . Tenemos que  $A + \vec{u}$ , si  $A \in l$ . En efecto

$$\tau_{\vec{u}} \circ f \circ \tau_{-\vec{u}}(A + \vec{u}) = \tau_{\vec{u}}(f(A)) = \tau_{\vec{u}}(A) = A + \vec{u}.$$

Así, tenemos que  $\mathcal{L} \neq \emptyset$ , por lo que su subespacio vectorial asociado será  $L = \left\{ \vec{x} \in V : \vec{f}(\vec{x}) = \vec{x} \right\}$ . Dado que  $f$  es una rotación y el conjunto de sus puntos invariantes es 1, está claro que la dimensión de  $\mathcal{L}$  será 1. Además, tenemos que

$$\mathcal{L} = \{A + \vec{u} : A \in l\} = l + \vec{u}.$$