

Análisis - Parcial 1 Solución

Victoria Eugenia Torroja Rubio

21/1/2025

Solución 1. Visto en clase.

Solución 2. (a) Aplicamos el criterio del cociente para sucesiones

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{3 \cdot 5 \cdots (2n+3)} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{n!} = \frac{n+1}{2n+3} \rightarrow \frac{1}{2} < 1.$$

Por tanto, la sucesión converge a 0.

(b) Tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{n^3 + n^2 + 1}{n^3 + n} \right)^{\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}} &= \left(1 + \frac{n^2 - n + 1}{n^3 + n} \right)^{\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}} = \left(1 + \frac{1}{\frac{n^3 + n}{n^2 - n + 1}} \right)^{\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}} \\ &= \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n^3 + n}{n^2 - n + 1}} \right)^{\frac{n^3 + n}{n^2 - n + 1}} \right]^{\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} \cdot \frac{n^2 - n + 1}{n^3 + n}}. \end{aligned}$$

Sea $C(n) = \left(1 + \frac{1}{\frac{n^3 + n}{n^2 - n + 1}} \right)^{\frac{n^3 + n}{n^2 - n + 1}}$. Entonces tenemos que

$$x_n = C(n)^{\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} \cdot \frac{n^2 - n + 1}{n^3 + n}}.$$

Tenemos que $C(n) \rightarrow e$ y

$$\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} \cdot \frac{n^2 - n + 1}{n^3 + n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{n^3 - n^2 + 1}{n^3 + n} \rightarrow e \cdot 1 = e.$$

Así, $x_n \rightarrow e^e$.

Solución 3. (a) Tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 1 \cdot 0 = 0.$$

(b) Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Existen sucesiones $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ e $y_n = \frac{1}{\pi n}$, que convergen a 0 y son estrictamente positivas, pero sus imágenes convergen a cosas distintas.

(c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Solución 4. (a) Visto en clase.

(b) (i) Vamos a ver que converge absolutamente. Tenemos que

$$\left| \frac{(-1)^n 4^{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{n (\log(n))^2} \right| \leq \frac{4^{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{n (\log(n))^2}.$$

Para el primero, aplicamos la regla del cociente.

$$\frac{4^{2n+2}}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{4^{2n}} = \frac{16}{(2n+1)(2n+2)} \rightarrow 0 < 1.$$

Por tanto converge. Para la segunda aplicamos el criterio de condensación de Cauchy.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\log(n))^2} \approx \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n (n \log 2)^2} \approx \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Por tanto, la segunda serie converge. Por el criterio de comparación, la serie original converge absolutamente, por lo que converge.

(ii) Vamos a ver que no converge absolutamente.

$$\left| \frac{\cos(n\pi) n^{n-1}}{(n+1)^n} \right| = \frac{n^{n-1}}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^n} \frac{1}{n} \geq \frac{1}{3n}.$$

Así, la serie no converge absolutamente. Vamos a ver si converge. Para ello aplicamos el criterio de Leibniz, que nos dice que sí converge. Podemos usar el criterio de Leibniz puesto que $\sum_{j=1}^n (-1)^j$ está acotada y el otro término es estrictamente decreciente y converge a 0.