Estructuras Algebraicas - Entrega 1

Irene García, Andrés Segarra, Victoria Eugenia Torroja

22/9/2025

Ejercicio 1

Sea G un grupo y $\{H_i\}_{i\in I}$ una familia de subgrupos de G. Demostrar que $\bigcap_{i\in I} H_i$ es un subgrupo de G.

Solución

Veamos que $H = \bigcap_{i\in I} H_i$ cumple los tres requisitos para ser un grupo, esto es, vamos a ver que $H \neq \emptyset$, que la operación restringida a H es interna y que $\forall h \in H$ se tiene que $h^{-1} \in H$.

(i) En primer lugar, si $H_i \leq G$, está claro que el elemento neutro $e \in H_i$. Así, tenemos que $e \in H_i$, $\forall i \in I$, por lo que $e \in \bigcap_{i\in I} H_i = H$. Así, tenemos que $H \neq \emptyset$.

(ii) Veamos ahora que la operación es interna en H. Si $a, b \in H$, tenemos que $\forall i \in I$, $a, b \in H_i$. Como cada H_i es subgrupo, se tiene que $ab \in H_i$, $\forall i \in I$, por lo que $ab \in H$. Así, hemos visto que la operación es interna en H.

(iii) Finalmente, si $a \in H_i \leq G$, tenemos que $a^{-1} \in H_i$. Así, tenemos que si $a \in H_i$, $\forall i \in I$, entonces $a^{-1} \in H_i$, $\forall i \in I$, es decir, $a^{-1} \in H = \bigcap_{i\in I}$.

Dado que se cumplen las tres características definitorias de un subgrupo, debe ser que $H \leq G$.

Ejercicio 2

Determinar si la operación $x \cdot y = (x + y) / (1 + xy)$ define una estructura de grupo sobre los números reales mayores que -1 y menores que 1.

Solución

Vamos a ver que $((-1, 1), \cdot, 0)$ es un grupo.

Operación bien definida. En primer lugar, vamos a ver que la operación está bien definida. Si $x, y = 0$, tenemos que $1 + xy = 1 \neq 0$, por lo que no se anula el denominador. Ahora, si $x, y \neq 0$ tenemos que

$$1 + xy = 0 \iff xy = -1 \iff x = -\frac{1}{y}.$$

Como $|y| < 1$, tendríamos que
$$|x| = \left|-\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{|y|} > 1.$$
Esto no es posible, puesto que $x \in (-1, 1)$. Así, hemos visto que el denominador nunca se anula, por lo que la operación está bien definida.

Operación interna. Ahora vamos a ver que la operación $\cdot$ es interna en el intervalo $(-1, 1)$. Deseamos ver que $\forall x, y \in (-1, 1)$,
$$-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1.$$
Tenemos que si $x, y \in (-1, 1)$, entonces $(1-y) > 0$ y $(x-1) < 0$, por lo que
$$(1-y)(x-1) = x - xy - 1 + y < 0.$$
Así, tenemos que $x + y < 1 + xy$, por lo que
$$\frac{x+y}{1+xy} < 1.$$
Por otro lado, tenemos que $(y+1), (x+1) > 0$, por lo que
$$(y+1)(x+1) = xy + x + y + 1 > 0.$$
Así, tenemos que $x + y > -1 - xy = -(1 + xy)$. Dado que $1 + xy > 0$, obtenemos el resultado deseado:
$$\frac{x+y}{1+xy} > -1.$$
Así, hemos visto que se trata de una operación interna.

Asociatividad. Vamos a ver que la operación $\cdot$ es asociativa. Sean $a, b, c \in (-1, 1)$,
$$\begin{aligned}(a\cdot b)\cdot c &= \frac{a+b}{1+ab}\cdot c = \frac{\frac{a+b}{1+ab}+c}{1+\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)c} = \frac{\frac{a+b+c+abc}{1+ab}}{\frac{1+ab+ac+bc}{1+ab}}\\ &= \frac{a+b+c+abc}{1+ab+ac+bc} = \frac{\frac{a+b+c+abc}{1+bc}}{\frac{1+ab+ac+bc}{1+bc}} = \frac{\frac{(1+bc)a+b+c}{1+bc}}{\frac{(1+bc)+a(b+c)}{1+bc}}\\ &= \frac{a+\frac{b+c}{1+bc}}{1+a\left(\frac{b+c}{1+bc}\right)} = a\cdot\left(\frac{b+c}{1+bc}\right) = a\cdot(b\cdot c)\,.\end{aligned}$$
Así, hemos visto que la operación cumple la propiedad asociativa.

Elemento neutro. Vamos a ver ahora que existe el elemento neutro, es decir, existe $e \in (-1, 1)$ tal que $\forall x \in (-1, 1)$, $x \cdot e = e \cdot x = x$. Sea $x \in (-1, 1)$,
$$x\cdot e = x \iff \frac{x+e}{1+xe} = x \iff x + e = x + x^2 e \iff x^2 e = e \iff \left(x^2-1\right)e = 0.$$

Dado que $x \neq \pm 1$, debe ser que $e = 0$. Veamos que efectivamente el elemento neutro es 0 [1]:

$$x \cdot 0 = \frac{x+0}{1+x\cdot 0} = \frac{x}{1} = x.$$

$$0 \cdot x = \frac{0+x}{1+0\cdot x} = \frac{x}{1} = x.$$

Así, tenemos que $e = 0$ es el elemento neutro.

Inverso. Para ver que se trata de un grupo nos falta ver que si $x \in (-1,1)$, entonces existe $y \in (-1,1)$ tal que $x \cdot y = y \cdot x = e$. Intentamos calcular el inverso: si $x, y \in (-1,1)$

$$x \cdot y = \frac{x+y}{1+xy} = 0 \iff x + y = 0 \iff y = -x.$$

Está claro que si $x \in (-1,1)$, entonces $-x \in (-1,1)$. Veamos que efectivamente $y = x^{-1}$:

$$x \cdot (-x) = \frac{x + (-x)}{1 + x\,(-x)} = 0.$$

$$(-x) \cdot x = \frac{-x + x}{1 + (-x)\,x} = 0.$$

Así, está claro que $x^{-1} = -x$.

Efectivamente, se cumplen las propiedades de los grupos, por tanto $((-1,1), \cdot, 0)$ es un grupo donde $\cdot$ está definido como viene en el enunciado.

Ejercicio 3

Sea G un grupo conmutativo. Si H_1 y H_2 son subgrupos de G, probar que

$$H_1H_2 = \{h_1h_2 \ : \ h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$$

es un subgrupo de G, y que es el menor subgrupo de G que contiene a H_1 y H_2. ¿Es cierto este resultado si se elimina la hipótesis de que G sea abeliano?

Solución

En primer lugar, veamos que $H = H_1H_2 \leq G$. Para ello, vamos a ver que $e \in H$ y que $\forall a, b \in H$ se tiene que $ab^{-1} \in H$.
En efecto, tenemos que $e \in H$, puesto que al darse que $H_1, H_2 \leq G$, debe ser que $e \in H_1 \cap H_2$, por lo que

$$e = \underbrace{e}_{\in H_1} \cdot \underbrace{e}_{\in H_2} \in H.$$

Ahora, supongamos que $a, b \in H$. Entonces, existen $x_1, y_1 \in H_1$ y $x_2, y_2 \in H_2$ tales que

$$a = x_1x_2, \quad b = y_1y_2.$$

[1] En las siguientes ecuaciones hemos usado $\cdot$ como el producto usual en $\mathbb{R}$ en casos en los que resulta trivial la interpretación.

Tenemos que $b^{-1} = (y_1 y_2)^{-1} = y_2^{-1} y_1^{-1}$. Si aplicamos que G es un grupo abeliano, obtenemos

$$ab^{-1} = x_1 x_2 y_2^{-1} y_1^{-1} = \underbrace{x_1 y_1^{-1}}_{\in H_1} \underbrace{x_2 y_2^{-1}}_{\in H_2} \in H.$$

Así, hemos visto que $H = H_1 H_2 \leq G$.
Ahora vamos a ver que si $C \leq G$ con $H_1, H_2 \subset C$, entonces $H \subset C$. En efecto, si $x \in H$, tenemos que existen $h_1 \in H_1$ y $h_2 \in H_2$ tales que $x = h_1 h_2$. Así, como $C \leq G$ y $H_1, H_2 \subset C$, la operación está cerrada en C, por lo que $x = h_1 h_2 \in C$. Así, hemos visto que $H = H_1 H_2 \subset C$.
Si eliminamos la hipótesis de que G sea abeliano no se cumple que $H_1 H_2 \leq G$. En efecto, dado un conjunto X con $|X| = 3$, en clase hemos visto que $\mathrm{Biy}(X)$ es un grupo con la composición de funciones. Si $X = \{a, b, c\}$, podemos considerar sus biyecciones:

	a	b	c
f_1	a	b	c
f_2	b	a	c
f_3	c	b	a
f_4	a	c	b
f_5	b	c	a
f_6	c	a	b

Es fácil comprobar que este grupo no es abeliano puesto que $f_2 \circ f_3 = f_5 \neq f_6 = f_3 \circ f_2$. Consideremos los subgrupos

$$H_1 = \langle f_2 \rangle = \{f_1, f_2\}, \quad H_2 = \langle f_3 \rangle = \{f_1, f_3\}.$$

Por construcción, tenemos que $H_1 H_2 = \{f_1, f_2, f_3, f_2 \circ f_3 = f_5\}$. Sin embargo, tenemos que $H_1 H_2$ no es subgrupo de $\mathrm{Biy}(X)$, puesto que $f_3 \circ f_2 = f_6 \notin H_1 H_2$, es decir, la operación no es interna.

Ejercicio 4

Determina los números complejos a, b tales que la operación $x \cdot y = ax + by$ define una estructura de grupo en $\mathbb{C}$.

Solución

Para encontrar los valores de a y b, obtengamos primero información sobre estos a partir de las propiedades de los grupos. Es evidente que se trata de una operación interna. Estudiamos primero la propiedad asociativa. Si $x, y, z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} (x \cdot y) \cdot z = (ax + by) \cdot z = a(ax + by) + bz = a^2 x + aby + bz \\ x \cdot (y \cdot z) = x \cdot (ay + bz) = ax + b(ay + bz) = ax + aby + b^2 z \end{cases}.$$

Como tiene que darse que $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, debe ser que $a^2 = a$ y $b^2 = b$, por lo que $a, b \in \{0, 1\}$.
Veamos ahora lo que tiene que suceder para que haya un elemento neutro. Si existe $e \in \mathbb{C}$ tal que $\forall x \in \mathbb{C}$, $e \cdot x = x \cdot e = x$, tenemos que

$$x \cdot e = ax + be = x \iff (a-1)x + be = 0.$$

Como el elemento neutro no depende de x, debe ser que $(a-1)\,x=0$, por lo que $a=1$. De forma análoga, se demuestra que $b=a=1$. Así, nos queda que $\cdot$ en verdad es la suma usual en $\mathbb{C}$, por lo que el grupo que nos queda es $(\mathbb{C},+,0)$. Para ver que se trata de un grupo basta comprobar que existen inversos. Si $z\in\mathbb{C}$, tenemos que $-z\in\mathbb{C}$ y $z+(-z)=(-z)+z=0$.
En conclusión, para que $\mathbb{C}$ forme un grupo con la operación $\cdot$, debe ser que $a=b=1$.

Otra forma de obtener este resultado es, sabiendo que $a,b\in\{0,1\}$, estudiar los distintos casos:

- Si $a=b=0$, está claro que $x\cdot y=0, \forall x,y\in\mathbb{C}$ no define una operación de grupo puesto que no hay inversos.
- Si $a=1$ y $b=0$, tenemos que $\forall x,y\in\mathbb{Z}$, $x\cdot y=x$. Esta operación tampoco puede dar lugar a un grupo puesto que no existe un elemento neutro. En efecto, $x\cdot e=x$ para cualquier $e\in\mathbb{C}$, pero $e\cdot x=e$, por lo que el único elemento neutro podría ser x y no es único para todo $\mathbb{C}$.
- Si $a=0$ y $b=1$ se razona de forma análoga al caso anterior.
- Si $a=b=1$ obtenemos una estructura de grupo, como hemos visto anteriormente.

Ejercicio 5

Sea H un subconjunto no vacío de un grupo G. Probar que H es subgrupo de G si y solo si $xH=H$ para todo $x\in H$.

Solución

Recordamos que si $x\in H$, entonces $xH=\{xh\ :\ h\in H\}$.

($\Rightarrow$) Supongamos que $H\leq G$ y $x\in H$. Vamos a ver que $xH=H$. Si $y\in xH$, tenemos que existe $h\in H$ tal que $y=xh$. Como $H\leq G$, la operación es interna en H, por lo que $y\in H$. Así, hemos visto que $xH\subset H$. Recíprocamente, si $y\in H$, tenemos que

$$y=x\left(x^{-1}y\right)\in xH.$$

Está claro que $x^{-1}y\in H$, puesto que $x^{-1}\in H$ por ser H subgrupo, y $x^{-1}y\in H$ por tratarse de una operación interna. Así, hemos visto que $H\subset xH$, por lo que debe ser que $xH=H$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\forall x\in H$ se tiene que $xH=H$. Vamos a ver que $H\leq G$. Para ello vamos a ver que $e\in H$ y que $\forall a,b\in H$ se tiene que $ab^{-1}\in H$.
Por hipótesis, tenemos que $H\neq\emptyset$, por lo que existe $x\in H$. Como $xH=H$, existe $h\in H$ tal que $xh=x$, por lo que debe ser que $h=e\in H$.
Veamos que si $h\in H$, entonces $h^{-1}\in H$. En efecto, si $h\in H$ tenemos que $hH=H$, por lo que $\exists z\in H$ tal que $e=hz$, por lo que $z=h^{-1}\in H$.
Así, si $a,b\in H$ tenemos que $a^{-1},b^{-1}\in H$, por lo que $a^{-1}H=H$ y existe $h\in H$ tal que $b^{-1}=a^{-1}h$, es decir, $h=ab^{-1}\in H$. Por tanto, hemos comprobado que $H\leq G$.