

# Cálculo Diferencial

Victoria Torroja Rubio

8/9/2025

# Índice general

<b>1. Espacios métricos</b>	<b>3</b>
1.1. Espacios normados . . . . .	4
1.2. Bolas en un espacio métrico . . . . .	7
1.3. Conceptos topológicos . . . . .	9
1.4. Conjuntos abiertos y cerrados relativos . . . . .	15
1.5. Sucesiones en espacios métricos . . . . .	16
1.6. Completitud . . . . .	19
1.7. Compacidad y recubrimientos . . . . .	22
<b>2. Continuidad</b>	<b>26</b>
2.1. Continuidad global . . . . .	29
2.2. Continuidad y restricciones . . . . .	30
2.3. Conexión . . . . .	33
2.4. Continuidad uniforme . . . . .	38
2.5. Teorema del punto fijo de Banach . . . . .	42
<b>3. Límites en <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>43</b>
3.1. Coordenadas polares . . . . .	46
<b>4. Cálculo diferencial</b>	<b>47</b>
4.1. Caso $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ . . . . .	47
4.2. Derivadas parciales y direccionales . . . . .	48
4.3. Diferenciabilidad . . . . .	50
4.4. Conjuntos de nivel . . . . .	60
4.5. Teorema del valor medio . . . . .	62
4.6. Derivadas de orden superior . . . . .	64
4.7. Diferenciales de orden superior . . . . .	68
4.8. Máximos y mínimos locales . . . . .	72
4.9. Teorema de la función inversa . . . . .	78
4.10. Teorema de la función implícita . . . . .	82
4.11. Extremos condicionados . . . . .	85

**Profesor:** Jesús Jaramillo

**Despacho:** 305-E

**Correo:** jaramil@mat.ucm.es

**Contenido:**

- Topología de los espacios métricos (Cap 1-5) - Aprox: 6'5 semanas
- Cálculo diferencial en varias variables (Cap 6-11) - Resto

**Bibliografía:**

- Marsden-Hoffman (sirve para las dos partes): 'Análisis clásico elemental'
- K. Smith (la parte de integración es más avanzada): 'Primer of modern analysis'

**Materiales Campus:**

- Apuntes de Victor Sánchez (apuntes muy condensados)
- Manual de Ansemil-Ponte (versión extendida de Marsden-Hoffman)
- Curso de Daniel Azagra

# Capítulo 1

## Espacios métricos

**Definición 1.1 (Espacio métrico).** Un **espacio métrico** es un par  $(X, d)$  donde  $X$  es un conjunto no vacío y  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  es una función que se llama **distancia** o **métrica**, tal que:

1.  $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X.$
2.  $d(x, y) = 0 \iff x = y.$
3.  $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X.$
4. (Propiedad triangular)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X.$

**Ejemplo.** Algunos ejemplos de espacios métricos son:

1. Consideremos  $(\mathbb{R}, d)$  donde  $d(x, y) = |x - y|.$
2. La distancia euclídea en  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ :

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

3. La 'métrica del taxi' en  $\mathbb{R}^2$  con distancia:

$$d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

4. Distancias geodésicas: el camino más corto (por ejemplo, en una superficie esférica el camino más corto entre dos puntos es un arco de circunferencia).
5. Distancias en  $\mathbb{R}^n$ . Si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , consideramos la distancia euclídea

$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

También podemos generalizar la 'métrica del taxi':

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|.$$

También se puede considerar la métrica

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\}.$$

**Definición 1.2 (Espacio discreto).** Sea  $X \neq \emptyset$  un conjunto cualquiera, y definimos  $\forall x, y \in X$

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y \\ 1, & \text{si } x \neq y \end{cases}.$$

Se dice que  $d$  es la **métrica discreta** y  $(X, d)$  el **espacio métrico discreto**.

**Definición 1.3 (Subespacio métrico).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $Y \subset X$ . Se define la **métrica relativa** (o **restringida**) a  $Y$  como  $d_Y(y, y') = d(y, y')$ ,  $\forall y, y' \in Y$ . Entonces,  $(Y, d_Y)$  es un espacio métrico que llamaremos **subespacio** de  $X$ .

## 1.1. Espacios normados

**Definición 1.4 (Espacio normado).** Un **espacio normado** es un par  $(E, \|\cdot\|)$  donde  $E$  es un espacio vectorial y  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$  es una función que se llama **norma** tal que:

1.  $\|x\| \geq 0$ ,  $\forall x \in E$ .
2.  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ .
3.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\forall x \in E$ <sup>a</sup>.
4.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ,  $\forall x, y \in E$ .

<sup>a</sup>En este curso  $\mathbb{K}$  va a ser principalmente  $\mathbb{R}$ .

**Proposición 1.1.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio normado. Si definimos

$$d(x, y) = \|x - y\|, \forall x, y \in E,$$

se obtiene que  $d$  es una distancia en  $E$ , que se llama **asociada** a la norma.

*Demostración.* Demostremos todas las propiedades de las métricas:

1. Tenemos que  $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ ,  $\forall x, y \in E$ .
2.  $d(x, y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$ .
3.  $d(x, y) = \|y - x\| = |-1| \|x - y\| = \|x - y\| = d(x, y)$ .

$$4. \ d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y).$$

□

**Observación.** En  $\mathbb{R}^n$ , dado  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  se definen:

$$(\text{Norma euclídea}) \quad \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

$$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|.$$

$$\|x\|_\infty = \max \{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}.$$

**Proposición 1.2** (Relación entre las normas en  $\mathbb{R}^n$ ).  $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

*Demostración.* Supongamos que  $|x_{i_0}| = \|x\|_\infty$ . Entonces, tenemos que

$$|x_{i_0}|^2 \leq |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2.$$

Dado que la función de la raíz es creciente, tenemos que

$$\|x\|_\infty = |x_{i_0}| \leq \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} = \|x\|_2.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\|x\|_1^2 = (|x_1| + \dots + |x_n|)^2 = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 + C^1 \geq |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 = \|x\|_2^2.$$

Finalmente, tenemos que

$$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n| \leq |x_{i_0}| + \dots + |x_{i_0}| = n|x_{i_0}| = n\|x\|_\infty.$$

□

**Definición 1.5.** Dos normas  $\|\cdot\|$  y  $\|\cdot\|'$  en un mismo espacio vectorial  $E$  son **equivalentes** cuando existen  $m, M > 0$  tales que

$$m\|x\|' \leq \|x\| \leq M\|x\|', \quad \forall x \in E.$$

**Observación.** Hemos visto en la proposición anterior que  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  y  $\|\cdot\|_\infty$  son equivalentes en  $\mathbb{R}^n$ .

<sup>1</sup> $C \geq 0$ .

**Definición 1.6 (Producto escalar).** Sea  $E$  un espacio vectorial real. Un **producto escalar** en  $E$  es una forma bilineal, simétrica y definida positiva. Es decir, una aplicación  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

1.  $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .
2.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in E$ .
3.  $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$  y  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ .

**Observación.** En este caso, denotaremos  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

**Teorema 1.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz).** Sea  $E$  un espacio vectorial dotado de un producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Entonces

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \forall x, y \in E.$$

*Demostración.* **Caso 1.** Si  $x = 0$  o  $y = 0$ , obtenemos la igualdad.

**Caso 2.** Si  $y \neq 0$ , tenemos que  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$0 \leq \langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle = \langle x, x \rangle + \alpha \langle x, y \rangle + \alpha \langle y, x \rangle + \alpha^2 \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\alpha \langle x, y \rangle + \alpha^2 \|y\|^2.$$

Tomamos  $\alpha = -\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$ . Así, tenemos que

$$0 \leq \|x\|^2 - \frac{2\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} + \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^4} \|y\|^2 = \|x\|^2 - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2}.$$

Así, tenemos que  $\frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} \leq \|x\|^2$ , por lo que  $\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$  y tenemos que  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ .

□

**Proposición 1.3.** Sea  $E$  un espacio vectorial dotado de un producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Entonces,  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ , es una norma en  $E$ , que se dice asociada a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

*Demostración.* Comprobamos que se cumplen las propiedades de las normas:

1. Tenemos que claramente  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0, \forall x \in E$ .
2.  $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ .
3.  $\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle = \lambda^2 \|x\|^2$ . Tomando la raíz cuadrada,  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ .

4. Si  $x, y \in E$ ,

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

Tomando raíces, tenemos que se verifica la propiedad triangular:  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

□

## 1.2. Bolas en un espacio métrico

**Definición 1.7.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y consideramos  $a \in X$ ,  $r > 0$ . Se definen como **bola abierta** de centro  $a$  y radio  $r$  al conjunto

$$B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}.$$

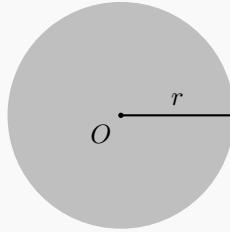
Similarmente, se llama **bola cerrada** de centro  $a$  y radio  $r$  al conjunto

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}.$$

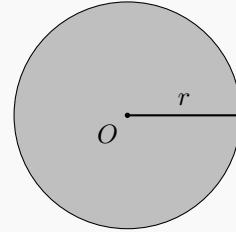
**Ejemplo.** Consideremos bolas en  $\mathbb{R}^2$  de distintas normas.

1. Consideremos bolas abiertas y cerradas con la métrica euclídea:

$$B_2((0, 0), r) = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} < r\}, \quad \overline{B}_2((0, 0), r) = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq r\}.$$



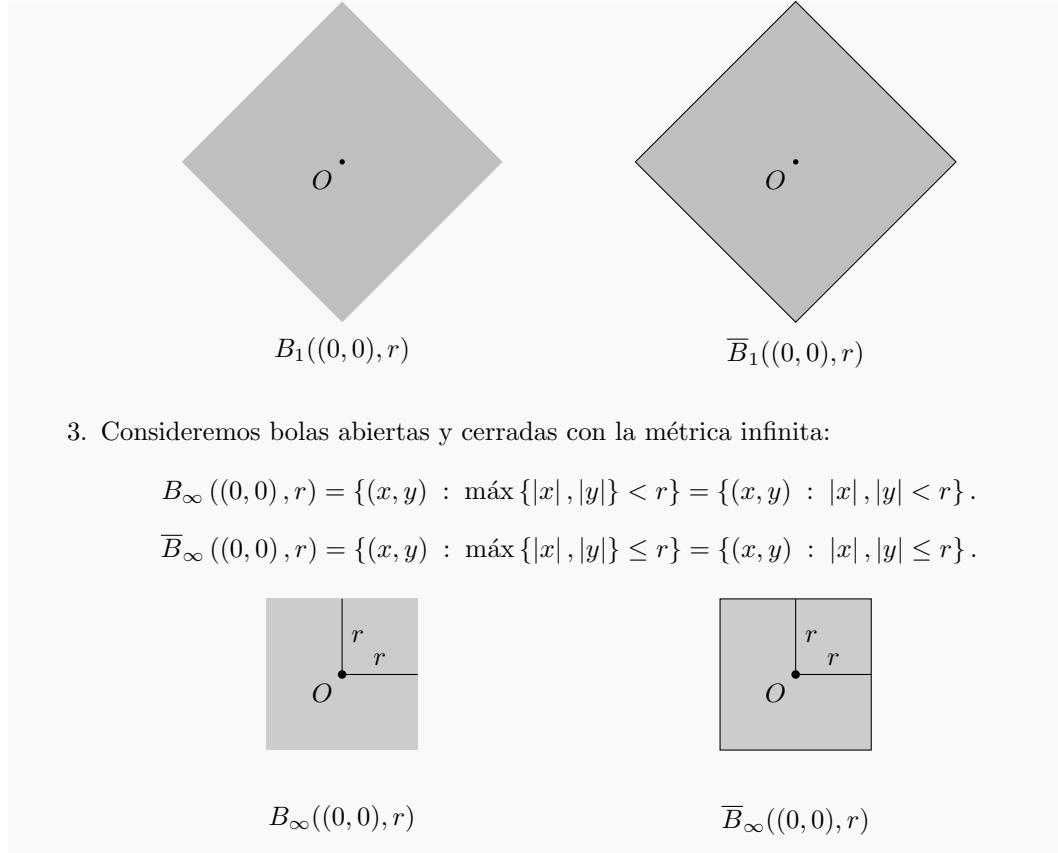
$B_2((0, 0), r)$



$\overline{B}_2((0, 0), r)$

2. Consideremos bolas abiertas y cerradas con la métrica 'del taxi':

$$B_1((0, 0), r) = \{(x, y) : |x| + |y| < r\}, \quad \overline{B}_1((0, 0), r) = \{(x, y) : |x| + |y| \leq r\}.$$



3. Consideremos bolas abiertas y cerradas con la métrica infinita:

$$B_\infty((0,0), r) = \{(x, y) : \max\{|x|, |y|\} < r\} = \{(x, y) : |x|, |y| < r\}.$$

$$\overline{B}_\infty((0,0), r) = \{(x, y) : \max\{|x|, |y|\} \leq r\} = \{(x, y) : |x|, |y| \leq r\}.$$

---

**Observación.** En  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  se tiene que  $B(0, r) = (-r, r)$  y  $\overline{B}(0, r) = [-r, r]$ . Similarmente, tenemos que  $B(a, r) = (a - r, a + r)$  y  $\overline{B}(a, r) = [a - r, a + r]$ .

---

**Observación (Relación de las bolas en  $\mathbb{R}^n$ ).** Sabemos que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

Por tanto, tenemos que

$$B_1(a, r) \subset B_2(a, r) \subset B_\infty(a, r) \subset B_1(a, nr)^a.$$

En efecto, si  $x \in B_1(a, r)$ , tenemos que  $\|x - a\|_1 < r$ . Por tanto, es fácil ver que  $\|x - a\|_2 \leq \|x - a\|_1 < r$ , por lo que  $x \in B_2(a, r)$ . El resto de inclusiones se deducen de forma análoga.

---

<sup>a</sup>También se puede escribir  $B_\infty(a, nr) \subset B_1(a, r) \subset B_2(a, r) \subset B_\infty(a, nr)$ .

---

**Definición 1.8.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subset X$ . Se define el **diámetro** de  $A$  como

$$\text{diam}(A) = \sup \{d(x, y) : x, y \in A\} \in [0, \infty).$$

Se dice que  $A$  es **acotado** si  $\text{diam}(A) < \infty$ .

**Proposición 1.4.** Dado un espacio métrico  $(X, d)$  con  $A \subset X$ , tenemos que  $A$  está acotado si y solo si  $A$  está contenido en alguna bola.

*Demostración.* (i) Supongamos que  $A$  está acotado, entonces  $\text{diam}(A) = r < \infty$ . Así, tenemos que si  $x \in A$ , entonces  $\forall a \in A$  se tiene que  $d(a, x) \leq r$ , por lo que  $A \subset \overline{B}(a, r)$ . También podemos ver que lo contiene una bola abierta:  $A \subset \overline{B}(a, r) \subset B(a, r + 1)$ .

(ii) Si  $A$  está contenido en una bola, tenemos que existe  $x \in X$  y  $\frac{r}{2} > 0$  tal que  $A \subset B\left(x, \frac{r}{2}\right)$ . De esta manera, si  $a, b \in A$  se tiene que

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Así, se tiene que  $\forall a, b \in A$ ,  $d(a, b) < r$ , por lo que  $\text{diam}(A) \leq r < \infty$ , por lo que  $A$  está acotado.  $\square$

### 1.3. Conceptos topológicos

**Definición 1.9 (Conjunto abierto).** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subset X$ . Se dice que  $A$  es un **conjunto abierto** si  $\forall a \in A, \exists r > 0$  tal que  $B(a, r) \subset A$ .

**Proposición 1.5.** Toda bola abierta es un conjunto abierto.

*Demostración.* Tomemos  $A = B(a, R)$  y  $x \in B(a, R)$ . Sea  $\delta = d(x, a) < R$  y  $r = R - \delta > 0$ <sup>2</sup>. Sea  $y \in B(x, r)$ , tenemos que  $d(x, y) < r$ . Así,

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < r + \delta = R.$$

Así,  $y \in B(a, R)$ , por lo que  $B(x, r) \subset B(a, R)$ .  $\square$

**Ejemplo.** En  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ .

1. Consideremos  $A = \{(x, y) : 0 < x < 1\}$ . Vamos a ver que es abierto. Si  $a \in A$ , sea  $a = (x, y)$  y consideramos  $r = \min\{x, 1 - x\}$ . Entonces, tenemos que  $B_2(a, r) \subset A$

<sup>2</sup>No hace falta de escribir  $r = \min\{R - \delta, \delta\}$  al tratarse de una bola.

$A$ , en efecto, si  $(x', y') \in B_2(a, r)$ :

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} < r \Rightarrow |x - x'| < r \Rightarrow 0 < x' < 1.$$

Así, tenemos que  $(x', y') \in A$ .

2. Consideremos  $A = \{(x, y) : 0 < x \leq 1\}$ . Vamos a ver que no es abierto. En efecto, si tomamos  $a = (1, 0)$  y  $r > 0$ , tenemos que  $\left(1 + \frac{r}{2}, 0\right) \in B_2(a, r)$  pero  $\left(1 + \frac{r}{2}, 0\right) \notin A$ .

**Proposición 1.6.** En  $\mathbb{R}^n$  los conjuntos abiertos coinciden para  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  y  $\|\cdot\|_\infty$ .

*Demostración.* Como se vio en una observación anterior, sabemos que

$$B_1(a, r) \subset B_2(a, r) \subset B_\infty(a, r) \subset B_1(a, nr).$$

- Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Si  $A$  es abierto con la norma  $\|\cdot\|_2$ , tenemos que  $\forall a \in A, \exists r > 0$  tal que  $B_2(a, r) \subset A$ . Por la observación, como  $B_1(a, r) \subset B_2(a, r) \subset A$ , tenemos que también es abierto para la norma  $\|\cdot\|_1$ .
- Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Si  $A$  es abierto con la norma  $\|\cdot\|_\infty$ , entonces  $\forall a \in A, \exists r > 0$  tal que  $B_\infty(a, r) \subset A$ . Por la observación anterior, tenemos que  $B_2(a, r) \subset B_\infty(a, r) \subset A$ , por lo que  $A$  es abierto respecto a la norma  $\|\cdot\|_2$ .
- Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Si  $A$  es abierto respecto de  $\|\cdot\|_1$ , tenemos que  $\forall a \in A, \exists r > 0$  tal que  $B_1(a, r) \subset A$ . Sea  $r' = \frac{r}{n} > 0$ ,

$$B_\infty(a, r') \subset B_1(a, nr') = B_1(a, r) \subset A.$$

Por tanto,  $A$  es abierto respecto de la norma  $\|\cdot\|_\infty$ .

□

**Teorema 1.2 (Propiedades de los abiertos).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico.

1.  $X$  y  $\emptyset$  son abiertos.
2. La unión arbitraria de abiertos es abierto.
3. La intersección finita de abiertos es abierto.

*Demostración.* 1. Es trivial que  $\emptyset$  es abierto. Por otro lado, si  $a \in X$ , tenemos que  $\forall r > 0$ ,  $B(x, r) \subset X$ . Así,  $X$  está abierto.

2. Supongamos que  $\{A_i\}_{i \in I}$  es una familia de conjuntos abiertos y sea  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ . Si  $a \in A$ , tenemos que  $a \in A_i$  para algún  $i \in I$ . Así, existe  $r > 0$  tal que  $B(a, r) \subset A_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ . Por tanto,  $B(a, r) \subset A$  y  $A$  es abierto.

3. Sean  $A_1, \dots, A_m$  conjuntos abiertos y sea  $A = A_1 \cap \dots \cap A_m$ . Si  $a \in A$ , tenemos que  $a \in A_i$  para  $1 \leq i \leq m$ . Así, existe  $r_i > 0$  tal que  $B(a, r_i) \subset A_i$ . Si tomamos  $r = \min\{r_i : 1 \leq i \leq m\}$ , tenemos que  $B(a, r) \subset B(a, r_i)$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$ . Por tanto,  $B(a, r) \subset A$  y  $A$  es abierto.

□

**Observación.** La intersección infinita de conjuntos abiertos puede no ser abierto. Por ejemplo, consideremos en  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$  consideramos  $A_m = B_2\left((0, 0), \frac{1}{m}\right)$ , que es abierto  $\forall m \in M$ . Sin embargo,  $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m = \{(0, 0)\}$ , que no es abierto.

**Definición 1.10 (Conjunto cerrado).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Se dice que un conjunto  $C \subset X$  es **cerrado** si  $X/C$  es abierto.

**Proposición 1.7.** Toda bola cerrada es un conjunto cerrado.

*Demostración.* En efecto, sea  $C = \overline{B}(p, R) = \{x \in X : d(x, p) \leq R\}$  y sea  $A = X/C = \{x \in X : d(x, p) > R\}$ . Si  $a \in A$ , tenemos que  $d(a, p) = \delta > R$ . Así, tomando  $r = \delta - R > 0$ , si  $x \in B(a, r)$ , tenemos que

$$d(x, p) \geq d(p, a) - d(x, a) > \delta - r = R.$$

Así, tenemos que  $x \in A$ , por lo que  $B(a, r) \subset A$  y  $X/C$  es abierto, por lo que  $C$  es cerrado. □

**Observación.** Es fácil ver que en  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ :

- $(a, b)$  es abierto.
- $[a, b]$  es cerrado.
- $(a, b]$  y  $[a, b)$  no son ni abiertos ni cerrados.

**Teorema 1.3 (Propiedades de los cerrados).** Sea  $(X, \emptyset)$  un espacio métrico.

1. Los conjuntos  $X$  y  $\emptyset$  son cerrados.
2. La intersección arbitraria de cerrados es cerrado.
3. La unión finita de cerrados es cerrado.

*Demostración.* 1. Dado que  $\emptyset = X/X$  y  $X = X/\emptyset$ , del teorema anterior se sigue que son cerrados.

2. Sean  $\{C_i\}_{i \in I}$  cerrados. Entonces,  $\forall i \in I$  tenemos que  $X/C_i$  es abierto, así,

$$X/\bigcap_{i \in I} C_i = \bigcup_{i \in I} (X/C_i),$$

que es abierto, por lo que  $\bigcap_{i \in I} C_i$  es cerrado.

3. Sean  $C_1, \dots, C_m$  cerrados. Entonces,  $\forall i = 1, \dots, m$ , tenemos que  $X/C_i$  es abierto. Así,

$$X/\bigcup_{i=1}^m C_i = \bigcap_{i=1}^m (X/C_i),$$

es abierto, por lo que  $\bigcup_{i=1}^m C_i$  es cerrado.

□

**Definición 1.11 (Punto interior).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subset X$ . Se dice que  $a \in A$  es un **punto interior** de  $A$  si existe  $r > 0$  tal que  $B(a, r) \subset A$ . Denotamos  $\text{Int}(A)$  al conjunto de puntos interiores de  $A$ .

**Observación.** Es trivial ver que  $\text{Int}(A) \subset A$ .

**Proposición 1.8.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subset X$ .

1. El conjunto  $\text{Int}(A)$  es el mayor abierto contenido en  $A$ .
2.  $A$  es abierto si y solo si  $A = \text{Int}(A)$ .

*Demostración.* 1. Sea  $U = \text{Int}(A)$ . Vamos a ver que es abierto. Dado  $x \in U$ , tenemos que existe  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \subset A$ . Si  $y \in B(x, r)$ , por tratarse de una bola abierta existe  $r' > 0$  tal que  $B(y, r') \subset B(x, r) \subset A$ , por lo que  $y \in \text{Int}(A) = U$ . Por tanto,  $B(x, r) \subset U$  y  $U$  es abierto.

Ahora tenemos que ver que es el mayor abierto. Supongamos que  $V$  es abierto y  $V \subset A$ . Sea  $x \in V$ , tenemos que existe  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \subset V \subset A$ . Por tanto,  $x \in \text{Int}(A) = U$  y  $V \subset U$ .

2. Si  $A = \text{Int}(A)$  está claro que  $A$  es abierto. Recíprocamente, si  $A$  es abierto, tenemos que como  $A$  es el mayor abierto contenido en  $A$ ,  $A = \text{Int}(A)$ .

□

**Ejemplo.** En  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ , sea  $A = (0, 2]$ . Tenemos que  $\text{Int}(A) = (0, 2)$ . En efecto,

- (i) Si  $x \in (0, 2)$ , entonces existe  $r > 0$  tal que  $(x - r, x + r) \subset (0, 2) \subset (0, 2]$ , por lo que  $x \in \text{Int}(A)$ .
- (ii) Recíprocamente, tenemos que  $2 \notin \text{Int}(A)$ , puesto que  $\forall r > 0$  tenemos que  $(2 - r, 2 + r) \cap (0, 2] = \emptyset$ .

no es subconjunto de  $(0, 2]$ .

**Definición 1.12 (Punto adherente).** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subset X$ . Se dice que  $x \in X$  es **punto adherente** a  $A$  (o también **punto clausura**) si  $\forall r > 0, A \cap B(x, r) \neq \emptyset$ . Denotamos  $\bar{A}$  o  $Adh(A)$  al conjunto de puntos adherentes de  $A$ .

**Observación.** Se ve trivialmente que  $A \subset \bar{A}$ .

**Ejemplo.** En  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  sea  $A = (0, 2]$ . Tenemos que  $\bar{A} = [0, 2]$ . En efecto:

- (i) Tenemos que  $0 \in \bar{A}$ , puesto que  $\forall r > 0$  tenemos que  $(-r, r) \cap A \neq \emptyset$ . Así, tenemos que  $[0, 2] \subset \bar{A}$ .
- (ii) Recíprocamente, si  $x > 2$ , tenemos que existe  $r > 0$  suficientemente pequeño tal que  $x - r > 2$ , por tanto  $x \notin \bar{A}$ . Similarmente, podemos demostrar que  $0 \notin \bar{A}$ .

**Lema 1.1.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subset X$ . Entonces,  $\bar{A} = X / \text{Int}(X/A)$ .

*Demostración.* (i) Sea  $x \in \bar{A}$ . Tenemos que  $\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ , por lo que  $B(x, r) \not\subset X/A$ , por lo que  $x \notin \text{Int}(X/A)$ , por lo que  $x \in X / \text{Int}(X/A)$ .

(ii) Sea  $x \in X / \text{Int}(X/A)$ , entonces  $x \notin \text{Int}(X/A)$ , es decir,  $\forall r > 0$  tenemos que  $B(x, r) \not\subset X/A$ . Así, debe ser que  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ , por lo que  $x \in \bar{A}$ .  $\square$

**Proposición 1.9.** 1.  $\bar{A}$  es el menor cerrado que contiene a  $A$ .

2. Un conjunto  $A \subset X$  es cerrado si y solo si  $A = \bar{A}$ .

*Demostración.* 1. Tenemos que  $\bar{A} = X / \text{Int}(X/A)$ , por lo que su complementario es abierto y él es cerrado. Ahora vamos a ver que es el menor cerrado que contiene a  $A$ . Sea  $C \subset X$  cerrado con  $A \subset C$ . Tenemos que  $X/C \subset X/A$ , por lo que  $X/C \subset \text{Int}(X/A)$  y tenemos que  $C \supset X / \text{Int}(X/A) = \bar{A}$ .

2. Si  $A = \bar{A}$ ,  $A$  es cerrado. Por otro lado, si  $A$  es cerrado, entonces su complementario,  $X/A$  es abierto, por lo que  $X/A = \text{Int}(X/A)$ , por lo que  $\bar{A} = X / \text{Int}(X/A) = X / (X/A) = A$ .  $\square$

**Definición 1.13 (Punto frontera).** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subset X$ . Se dice que  $x \in X$  es un **punto frontera** de  $A$  si  $\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$  y  $B(x, r) \cap (X/A) \neq \emptyset$ . Denotamos  $Fr(A)$  o  $\partial A$  el conjunto de puntos frontera de  $A$ .

**Observación.** Tenemos que  $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X/A}$  y en particular  $Fr(A)$  es cerrado.

**Ejemplo.** En  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$  sea  $A = \{(x, y) : 0 < x \leq 1\}$ . Tenemos que

$$Fr(A) = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \cup \{(1, y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

En efecto:

- (i) Sea  $P = (0, y)$ . Tenemos que  $\forall r > 0$ ,  $B(P, r) \cap A \neq \emptyset$  y  $B(P, r) \cap (X/A) \neq \emptyset$ . Así,  $P \in Fr(A)$ . De forma análoga, se puede demostrar que  $P = (1, y) \in Fr(A)$ .
- (ii) El recíproco lo demostramos típicamente por contrapositiva. Sea  $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  con  $x \neq 0$  y  $x \neq 1$ . Hay tres posibilidades a considerar:  $x \in (-\infty, 0)$ ,  $x \in (0, 1)$  o  $x \in (1, \infty)$ . Si  $x \in (-\infty, 0)$ ,  $\exists r > 0$  tal que  $B(P, r) \cap A = \emptyset$ . El resto de los casos se demuestran de forma análoga.

**Definición 1.14 (Punto de acumulación).** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subset X$ . Se dice que  $x \in X$  es un **punto de acumulación** de  $A$  si  $\forall r > 0$  se tiene que  $A \cap (B(x, r) / \{x\}) \neq \emptyset$ . Denotamos  $A'$  el conjunto de los puntos de acumulación de  $A$ .

**Observación.** Tenemos que  $A' \subset \overline{A}$ . En efecto, si  $x \in A'$ , tenemos que  $\forall r > 0$  se cumple que  $A \cap (B(x, r) / \{x\}) \neq \emptyset$ , es decir,  $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$ , por lo que  $x \in \overline{A}$ .

**Ejemplo.** Consideremos  $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \subset (\mathbb{R}^2, d_2)$ . Tenemos que

- $\text{Int}(A) = \emptyset$ . En efecto, tenemos que  $\forall r > 0$ , si  $n_0 = (n, n) \in \mathbb{N}^2$ , existe  $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$  tal que  $n < x < n + r$ , por lo que  $(x, x) \in B(n, r)$  pero  $(x, x) \notin \mathbb{N}^2$ .
- $\overline{A} = A$ . En efecto, si  $x \notin A$ , tenemos que podemos encontrar  $r > 0$  suficientemente pequeño tal que  $B(x, r) \cap A = \emptyset$ .
- $\partial A = A$ . Dado que  $A = \overline{A}$  y  $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X/A}$ , tenemos que  $A \subset \partial A$ . Por otro lado, si  $x \notin A$ , tenemos que existe un  $r > 0$  suficientemente pequeño tal que  $B(x, r) \cap A = \emptyset$ , como hemos visto anteriormente, por lo que  $x \notin \partial A$ .
- $A' = \emptyset$ . Si cogemos  $r < 1$  y  $n \in \mathbb{N}^2$ , está claro que  $(B(n, r) / \{n\}) \cap A = \emptyset$ , por lo que  $n$  no puede ser un punto de acumulación. Si  $x \notin A$ , hacemos un argumento similar al del apartado anterior.

**Definición 1.15 (Punto aislado).** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subset X$ . Se dice que  $x \in A$  es un **punto aislado** de  $A$  si existe  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \cap A = \{x\}$ . Denotaremos  $A_{\text{aisl}}(A)$  al conjunto de los puntos aislados de  $A$ .

**Proposición 1.10.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subset X$ . Entonces, se cumple que  $\bar{A} = A' \cup \text{Ais}(A)$ .

*Demostración.* (i) Sea  $x \in \bar{A}$ . Supongamos que  $x \notin A'$ , entonces existe  $r > 0$  tal que  $A \cap (B(x, r) / \{x\}) = \emptyset$ . Sin embargo, sabemos que  $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$  al ser  $x \in \bar{A}$ , por tanto debe ser que  $A \cap B(x, r) = \{x\}$ , es decir,  $x \in \text{Ais}(A)$ .

(ii) Está claro que  $\text{Ais}(A) \subset A \subset \bar{A}$  y  $A' \subset \bar{A}$ , por lo que  $A' \cup \text{Ais}(A) \subset \bar{A}$ .  $\square$

**Corolario 1.11.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subset X$ . Entonces,  $A$  es cerrado si y solo si  $A$  contiene todos sus puntos de acumulación.

*Demostración.* (i) Tenemos que  $A = \bar{A} = A' \cup \text{Ais}(A)$ , por lo que  $A' \subset A$ .

(ii) Tenemos que  $\text{Ais}(A) \subset A$  y  $A' \subset A$ , por lo que  $\bar{A} = \text{Ais}(A) \cup A' \subset A$ , así,  $\bar{A} = A$ .  $\square$

**Definición 1.16.** Sean  $(x, d)$  un espacio métrico,  $A \subset X$  y  $x \in X$ . Se define la **distancia** de  $x$  a  $A$  como:

$$d(x, A) = \inf \{d(x, a) : a \in A\}.$$

**Proposición 1.11.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subset X$ . Entonces,

$$\bar{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}.$$

*Demostración.* (i) Sea  $x \in \bar{A}$ , entonces existe  $r > 0$  tal que  $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$ . Por tanto, existe  $a_r \in A \cap B(x, r)$ , por tanto  $d(x, a_r) < r$ . Así, tenemos que

$$d(x, A) \leq d(x, a_r) < r, \forall r > 0.$$

Por tanto,  $d(x, A) = 0$ .

(ii) Tenemos que  $\forall r > 0$ ,  $d(x, A) < r$ , por lo que existe  $a_r \in A$  tal que  $d(x, a_r) < r$ . Por tanto,  $a_r \in A \cap B(x, r) \neq \emptyset$  y podemos concluir que  $x \in \bar{A}$ .  $\square$

## 1.4. Conjuntos abiertos y cerrados relativos

**Observación.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico e  $Y \subset X$ . Sabemos que  $(Y, d_Y)$  es un subespacio métrico de  $(X, d)$  donde  $d_Y(y_1, y_2) = d(y_1, y_2)$ . Dado  $y_0 \in Y$  y  $r > 0$ , la bola  $B_Y(y_0, r) = \{y \in Y : d(y, y_0) < r\} = B(y_0, r) \cap Y$ . Es decir, la forma de las bolas cambia.

**Observación.** En un espacio métrico  $(X, d)$ , todo conjunto abierto es unión de bolas abiertas. En efecto, si  $A$  es abierto, entonces  $\forall a \in A$ , existe  $r_a > 0$  tal que  $B(a, r_a) \subset A$ , por lo que  $A = \bigcup_{a \in A} B(a, r_a)$ <sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Esta observación se puede reformular diciendo que un subconjunto  $A \subset X$  es abierto si y solo si es unión de bolas abiertas.

**Proposición 1.12.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico e  $Y \subset X$ .

- (a)  $A \subset Y$  es  $d_Y$ -abierto si y solo si existe  $U \subset X$  abierto tal que  $A = U \cap Y$ .
- (b)  $C \subset Y$  es  $d_Y$ -cerrado si y solo si existe  $H \subset X$  cerrado tal que  $C = H \cap Y$ .

Estos conjuntos se llaman **abiertos y cerrados relativos** de  $Y$ , respectivamente.

*Demostración.* (a) Sea  $Y \subset X$ .

- (i) Tenemos que  $\forall y \in A$ , existe  $r_y > 0$  tal que  $B_Y(y, r_y) \subset A$ . Definimos  $U = \bigcup_{y \in A} B(y, r_y)$ , que es abierto en  $(X, d)$  por ser unión de bolas abiertas. Veamos que  $A = U \cap Y$ . Tenemos que si  $y \in A$ , entonces  $y \in B(y, r_y) \subset A \subset U$  (puesto que  $B_Y(y, r_y) \subset B(y, r_y)$ ). Recíprocamente, sea  $z \in Y \cap U$ , entonces existe  $y \in Y$  tal que  $z \in B(y, r_y) \cap Y = B_Y(y, r_y) \subset A$ . Por tanto,  $Y \cap U \subset A$ .
- (ii) Dado  $y_0 \in A = U \cap Y$ , como  $U$  es abierto<sup>3</sup>, existe  $r > 0$  tal que  $B(y_0, r) \subset U$ . Por tanto, tenemos que  $B_Y(y_0, r) = B(y_0, r) \cap Y \subset U \cap Y = A$ . Así, hemos visto que  $A$  es  $d_Y$ -abierto.

(b) Sea  $Y \subset X$ .

- (i) Sea  $C \subset Y$   $d_Y$ -cerrado, entonces tenemos que  $Y/C$  es  $d_Y$ -abierto. Así, existe  $U \subset X$  abierto tal que  $Y/C = U \cap Y$ . Sea  $H = X/U$ , que es cerrado. Veamos que  $C = H \cap Y$ :

$$C = Y/(Y/C) = Y/(U \cap Y) = Y/U = Y \cap (X/U) = Y \cap H.$$

- (ii) Si  $C = H \cap Y$  con  $H$  cerrado en  $X$ , entonces  $X/H$  es abierto. Tenemos que

$$Y/C = Y/(H \cap Y) = Y \cap (X/H).$$

Dado que  $X/H$  es abierto, por (a) tenemos que  $Y/C$  es  $d_Y$ -abierto, por lo que  $C$  es  $d_Y$ -cerrado.

□

## 1.5. Sucesiones en espacios métricos

<sup>3</sup>Cuando escribimos abierto y  $B(x, r)$  queremos decir que es  $d$ -abierto y es la bola en  $X$ , respectivamente.

**Definición 1.17** (Sucesión y convergencia). Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Una **sucesión** es una aplicación  $S : \mathbb{N} \rightarrow X$ . Si  $S(n) = x_n \in X$ , denotamos la sucesión por  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Se dice que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  **converge** a  $x_0 \in X$  cuando  $d(x_n, x_0)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$

**Observación.** Recordamos que  $x_n \rightarrow x_0$  si y solo si (ambas definiciones son equivalentes):

- $\forall \varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$  se tiene que  $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ .
- $\forall \varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$  se tiene que  $x_n \in B(x_0, \varepsilon)$ .

**Proposición 1.13.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Si la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge, el límite es único.

*Demostración.* Supongamos que  $l_1, l_2 \in X$  son límites de la sucesión, entonces tenemos que si  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$  se cumple que

$$d(l_1, l_2) \leq d(l_1, x_n) + d(x_n, l_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como esto es cierto para todo  $\varepsilon > 0$ , debe ser que  $d(l_1, l_2) = 0$ , por lo que  $l_1 = l_2$ .  $\square$

**Proposición 1.14.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subset X$ . Entonces,  $x \in \overline{A}$  si y solo si existe una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  tal que  $x_n \rightarrow x$ .

*Demostración.* (i) Tenemos que si  $x \in \overline{A}$ , entonces para todo  $\varepsilon > 0$  se tiene que  $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ , es decir. Así, podemos coger una sucesión tal que para  $\varepsilon = \frac{1}{n}$  se tiene que  $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A$ . Vamos a ver que la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $x$ .

$$0 \leq d(x_n, x) < \frac{1}{n} \Rightarrow d(x_n, x) \rightarrow 0 \iff x_n \rightarrow x.$$

(ii) Si existe  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  tal que  $x_n \rightarrow x$ , tenemos que si  $r > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$ ,  $x_n \in B(x, r)$ , es decir,  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ , por lo que  $x \in \overline{A}$ .  $\square$

**Proposición 1.15.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subset X$ . Entonces  $x \in A'$  si y solo si existe una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de términos distintos con  $x_n \rightarrow x$ .

*Demostración.* (i) Si  $x \in A'$ , tenemos que  $\forall r > 0$ ,  $A \cap (B(x, r) / \{x\}) \neq \emptyset$ .

- Para  $n = 1$ , tomamos  $x_1$  tal que  $x_1 \in A \cap (B(x, 1) / \{x\})$ .

- Para  $n = 2$ , tomamos  $\varepsilon = \min\left\{\frac{1}{2}, d(x_1, x)\right\}$ , y tomamos  $x_2$  tal que  $x_2 \in A \cap (B(x, \varepsilon) / \{x\})$ .
- Asumimos que tenemos  $\{x_1, \dots, x_n\}$  distintos como los hemos descrito anteriormente. Ahora, en el caso  $n + 1$ , cogemos  $\varepsilon = \min\left\{\frac{1}{n+1}, d(x_i, x)\right\}$  para  $i = 1, \dots, n$ . Así, cogemos  $x_{n+1} \in A \cap (B(x, \varepsilon) / \{x\})$ . Obtenemos que

$$0 < d(x_{n+1}, x) < \frac{1}{n+1} < d(x_i, x), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Así, está claro que  $x_{n+1} \neq x_i$  para  $1 \leq i \leq n$ .

Así, hemos construido la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que buscábamos. Tenemos que ver que la sucesión converge a  $x$ . En efecto, si  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0, \frac{1}{n} < \varepsilon$ , por lo que  $d(x_n, x) < \frac{1}{n} < \varepsilon$ .

- (ii) Puesto que los elementos de la sucesión no se repiten, existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq m, x_n \neq x$ . Como la sucesión converge, si  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \geq m$  tal que  $\forall n \geq n_0, A \cap (B(x_n, x) / \{x\}) \neq \emptyset$ , por lo que  $x \in A'$ .

□

**Observación.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio normado. Tenemos que una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a un punto  $x \in E$  si y solo si  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ .

**Proposición 1.16.** En  $\mathbb{R}^n$  consideremos las normas  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  y  $\|\cdot\|_\infty$ . Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de  $\mathbb{R}^n$  tal que

$$x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n),$$

y  $x_n \rightarrow x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ . Entonces, la sucesión converge si y solo si lo hace coordenada a coordenada, es decir,  $x_k^i \rightarrow x^i$  para  $1 \leq i \leq n$ .

*Demostración.* Recordamos que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 < n\|x\|_\infty.$$

Así, tenemos que si  $x_k \rightarrow x$ ,

$$\|x_k - x\|_\infty \leq \|x_k - x\|_2 \leq \|x_k - x\|_1 \leq n\|x_k - x\|_\infty.$$

Por tanto, la convergencia no depende de la norma que escogamos. Así, para  $1 \leq i \leq n$  tenemos que

$$|x_k^i - x^i| \leq \|x_k - x\|_2 \leq |x_k^1 - x^1| + \dots + |x_k^n - x^n| \rightarrow 0,$$

por lo que  $x_k^i \rightarrow x^i$ .

□

**Definición 1.18 (Subsucesión).** Sea sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ , donde  $(X, d)$  es un espacio métrico. Una **subsucesión** es otra sucesión de la forma  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $n_k$  es estrictamente creciente.

**Proposición 1.17.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Entonces, toda subsucesión converge a  $x$ .

*Demostración.* Sea  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Tenemos que si  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$  se tiene que  $d(x_n, x) < \varepsilon$ . Como  $n_k \rightarrow \infty$ , podemos encontrar  $n_{k_0} \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n_k \geq n_{k_0}$  se tenga que  $n_k \geq n_0$ , por lo que  $\forall k \geq k_0$ , tenemos que  $d(x_k, x) < \varepsilon$ . Así, hemos visto que la subsucesión converge al mismo límite.  $\square$

## 1.6. Completitud

**Definición 1.19 (Sucesión de Cauchy).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Se dice que una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $X$  es una **sucesión de Cauchy** si  $\forall \varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall m, n \geq n_0$ ,  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ .

**Proposición 1.18.** Toda sucesión convergente es de Cauchy.

*Demostración.* Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  una sucesión convergente a  $x_0 \in X$ . Así, si  $\varepsilon > 0$ , tenemos que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$ ,  $d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Si  $n, m \geq n_0$ ,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

**Definición 1.20 (Espacio completo).** Se dice que un espacio métrico  $(X, d)$  es **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente en  $(X, d)$ .

**Teorema 1.4.** El espacio  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  es completo.

**Ejemplo.** Consideramos  $X = \mathbb{Q}$  con la distancia usual. Entonces,  $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$  no es completo. Hay sucesiones  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$  de Cauchy tales que  $q_n \rightarrow x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ . Entonces la sucesión  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no converge en  $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ . Como ejemplo se puede tomar la sucesión de los decimales de  $\sqrt{2}$ .

**Corolario 1.2.** El espacio  $\mathbb{R}^n$  con la norma  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  y con  $\|\cdot\|_\infty$  también es completo.

*Demostración.* Recordamos que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

Por tanto una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$  es de Cauchy para  $\|\cdot\|_\infty$  si y solo si lo es para  $\|\cdot\|_2$ , si y solo si lo es para  $\|\cdot\|_1$ . Por ejemplo, para  $\|\cdot\|_2$ , si  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$  es de Cauchy, entonces  $\forall \varepsilon > 0$  existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall k, j \geq k_0$ ,

$$|x_k^i - x_j^i| \leq \|x_k - x_j\|_2 < \varepsilon, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Donde  $x_m = (x_m^1, \dots, x_m^n)$ . Por tanto, cada componente  $\{x_k^i\}_{k \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy en  $\mathbb{R}$ , por lo que cada componente es convergente en  $\mathbb{R}$  y la sucesión es convergente en  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Ejemplo.** Sea  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Consideramos el siguiente espacio normado:

$$X = \mathcal{C}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ continua en } [a, b]\}.$$

$$\|f\|_\infty = \sup \{|f(t)| : t \in [a, b]\} = \max \{|f(t)| : t \in [a, b]\}.$$

Por ser  $f$  continua, la norma está bien definida. Se trata de una norma, puesto que:

- $\|f\|_\infty \geq 0$ .
- $\|f\|_\infty = 0$  si y solo si  $|f(t)| = 0, \forall t \in [a, b]$ , es decir,  $f = 0$ .
- $\|\lambda f\|_\infty = \sup \{|\lambda f(t)| : t \in [a, b]\} = |\lambda| \sup \{|f(t)| : t \in [a, b]\} = |\lambda| \|f\|_\infty$ .
- Comprobamos la propiedad triangular:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_\infty &= \sup \{|f(t) + g(t)| : t \in [a, b]\} \\ &\leq \sup \{|f(t)| : t \in [a, b]\} + \sup \{|g(t)| : t \in [a, b]\} = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Podemos observar que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow f$  en  $\|\cdot\|_\infty$  si y solo si  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ . Es decir, si  $\forall \varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$ :  $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ . Esto es cierto si y solo si  $\forall \varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$  se tiene que  $|f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon, \forall t \in [a, b]$ . Es decir, si  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente en  $[a, b]$  a  $f$ .

Otra observación que podemos hacer es que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy con  $\|\cdot\|_\infty$  si y solo si  $\forall \varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n, m \geq n_0$  se tiene que  $\|f_m - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$ , si y solo si  $\forall \varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n, m \geq n_0$ ,  $|f_n(t) - f_m(t)| \leq \varepsilon, \forall t \in [a, b]$ . Así, podemos decir que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es **uniformemente de Cauchy**.

**Teorema 1.5.** El espacio  $(\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_\infty)$  es completo.

*Demostración.* Sea  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de Cauchy para  $\|\cdot\|_\infty$ . Tenemos que

$$\forall t \in [a, b], |f_n(t) - f_m(t)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty.$$

Luego,  $\forall t \in [a, b]$ ,  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy en  $\mathbb{R}$ , por lo que existe  $a_t \in \mathbb{R}$  tal que  $\{f_n(t)\} \rightarrow a_t$ . Definimos la función

$$\begin{aligned} f : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto a_t. \end{aligned}$$

Vamos a ver que  $f_n \rightarrow f$  en  $\|\cdot\|_\infty$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n, m \geq n_0$ , tenemos que

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [a, b].$$

Si cogemos  $m \rightarrow \infty$ , tenemos que

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [a, b], \forall n \geq n_0.$$

Así, tenemos que  $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon, \forall n \geq n_0$ . Por tanto,  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $f$  uniformemente en  $[a, b]$ . Como el límite de una sucesión de funciones continuas es una función continua, tenemos que  $f \in C[a, b]$ .  $\square$

**Proposición 1.19.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo y sea  $Y \subset X$ . Entonces,  $(Y, d_Y)$  es completo si y solo si  $Y$  es cerrado en  $X$ .

*Demostración.* (i) Sea  $(Y, d_Y)$  completo. Vamos a ver que  $Y$  es cerrado. Sea  $x \in \overline{Y}$ , por lo que  $\exists \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$  tal que  $y_n \rightarrow x$ . Por tanto,  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy en  $X$  e  $Y$ . Luego, existe  $y_0 = x = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in Y$ , por lo que  $x \in Y$ . Así, tenemos que  $\overline{Y} \subset Y$  y por tanto  $Y$  es cerrado.

(ii) Supongamos que  $Y$  es cerrado en  $X$ . Sea  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (Y, d_Y)$  sucesión de Cauchy. Entonces,  $\forall \varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n, m \geq n_0 d_Y(y_n, y_m) < \varepsilon$ . Por ser de Cauchy en  $(X, d)$ , existe  $x \in X$  tal que  $y_n \rightarrow x$ . Por tanto, tenemos que  $x \in \overline{Y} = Y$ , por lo que  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente en  $Y$ .  $\square$

**Lema 1.2.** En un espacio métrico  $(X, d)$ , toda sucesión de Cauchy está acotada.

*Demostración.* Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de Cauchy. Entonces, si cogemos  $\varepsilon = 1$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$  se tiene que  $d(x_n, x_{n_0}) < 1$ . Podemos tomar

$$R = \max \{1, d(x_n, x_m) : n, m \leq n_0\}^4.$$

Entonces, tenemos que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B(x_{n_0}, R)$ .  $\square$

**Lema 1.3.** Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sucesión de Cauchy en un espacio métrico  $(X, d)$ . Si existe una subsucesión  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  convergente a  $x \in X$ , entonces toda la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $x$ .

<sup>4</sup>En clase tomó  $R = \max \{d(x_1, x_{n_0}), d(x_2, x_{n_0}), \dots, d(x_{n_0-1}, x_{n_0}), 1\}$ .

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n, m \geq n_0$ ,  $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ . También existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall k \geq k_0$ ,  $d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Sea  $n_0 = \max\{n_0, n_{k_0}\}$  y sea  $n \geq n_0$ ,

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

## 1.7. Compacidad y recubrimientos

**Teorema 1.6 (Teorema de Bolzano-Weierstrass).** Toda sucesión acotada en  $\mathbb{R}$  admite una subsucesión convergente.

**Corolario 1.3.** En  $\mathbb{R}^{n-a}$ , toda sucesión acotada admite una subsucesión convergente.

<sup>a</sup>Con las normas  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  o  $\|\cdot\|_\infty$ .

*Demostración.* El caso general es un poco tedioso, por lo que solo haremos la demostración cuando  $n = 2$ .

Sea  $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$  acotada, por lo que existe  $R > 0$  tal que  $|x_n|, |y_n| \leq R, \forall n \in \mathbb{N}$ . Como  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  está acotada, existe  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  convergente a  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Consideramos  $\{y_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  está acotada, existe  $\{y_{n_{k_j}}\}_{j \in \mathbb{N}}$  convergente a  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Así, tenemos que  $(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$  es una subsucesión de  $(x_n, y_n)$  y  $(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) \rightarrow (x_0, y_0)$ . □

**Definición 1.21 (Conjunto compacto).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $K \subset X$ . Se dice que  $K$  es **compacto** si toda sucesión en  $K$  admite una subsucesión convergente en  $K$ .

**Lema 1.4.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $K \subset X$  compacto. Entonces  $K$  es cerrado y acotado en  $(X, d)$ .

*Demostración.* (i) Supongamos que  $K$  no es acotado. Si fijamos  $x_0 \in X$  y sabemos que  $\forall n \in \mathbb{N}, K \not\subset B(x_0, n)$ . Por tanto, existe  $x_n \in K$  tal que  $d(x_n, x_0) \geq n$ . Por tanto, la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$  y  $d(x_n, x_0) = \infty$ , por lo que la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no es acotada. Además, para toda subsucesión  $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ , se tiene que  $d(x_{n_j}, x_0) = \infty$ , por lo que  $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  no es acotada, por lo que no es convergente. Por tanto,  $K$  no es compacto.

(ii) Supongamos que  $K$  no es cerrado. Es decir, existe  $x \in \overline{K}/K$ . Así, existe una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$  con  $x_n \rightarrow x \notin K$ . Además, para toda subsucesión  $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  se tiene que  $x_{n_j} \rightarrow x \notin K$ . Es decir, todas las subsucesiones de  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergen fuera de  $K$ , por lo que  $K$  no es compacto. □

**Teorema 1.7.** En  $\mathbb{R}^n$  (con  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  o  $\|\cdot\|_\infty$ ) un subconjunto  $K \subset \mathbb{R}^n$  es compacto si y solo si  $K$  es cerrado y acotado.

*Demostración.* (i) Es trivial a partir del lema anterior.

- (ii) Sea  $K \subset \mathbb{R}^n$  cerrado y acotado. Sea  $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $K$ . Entonces,  $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  está acotada y por tanto existe una subsucesión  $\{x_{n_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$  convergente a  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Entonces,  $x_0 \in \overline{K} = K$  puesto que  $K$  es cerrado. Entonces,  $K$  es compacto.  $\square$

**Ejemplo.** El recíproco del lema anterior no es cierto. Consideremos por ejemplo  $(X, d)$  donde  $X = \mathbb{N}$  y  $d$  es la métrica discreta. El conjunto de todos los números naturales es cerrado y acotado (tal y como lo hemos definido). Sin embargo, no es compacto.

Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergente a  $x \in \mathbb{N}$ . Entonces, tenemos que  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, d(x_n, x) < \varepsilon$ . Esto solo sucede si existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0, x_n = x$ .

Por tanto, la sucesión  $\{n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  está acotada pero no es convergente (puesto que no cumple la condición de convergencia que hemos visto anteriormente) y no tiene subsucesiones convergentes.

**Definición 1.22 (Recubrimiento).** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $M \subset X$ .

- (a) Un **recubrimiento** de  $M$  es una familia  $\{U_i\}_{i \in I}$  de subconjuntos de  $X$  que **recubre**  $M$  en el sentido de que  $M \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ . Se dice que el recubrimiento es **abierto** si cada  $U_i$  es un conjunto abierto en  $X$ .
- (b) Un **sub-recubrimiento** de  $\{U_i\}_{i \in I}$  es un recubrimiento de la forma  $\{U_j\}_{j \in J}$  donde  $J \subset I$  y tal que  $M \subset \bigcup_{j \in J} U_j$ .

**Teorema 1.8.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $K \subset X$ . Entonces  $K$  es compacto si y solo si todo recubrimiento abierto de  $K$  admite un subrecubrimiento finito.

*Demostración.* Por simplicidad, vamos a ver la demostración en el caso particular  $X = \mathbb{R}^n$  con la norma euclídea.

- (i) Sea  $K \subset \mathbb{R}^n$  compacto y sea  $U = \{U_i : i \in I\}$  un recubrimiento abierto de  $K$ . Consideremos la familia auxiliar  $\mathcal{B}$  de todas las bolas abiertas de la forma  $B(q, r)$ , donde  $q \in \mathbb{Q}^n$  y  $r \in \mathbb{Q}^+$ , tales que  $B(q, r)$  esté contenida en alén  $U_i$ . Como  $\mathbb{Q}$  es numerable,  $\mathbb{Q}^n$  también lo es, por lo que  $\mathcal{B}$  es numerable y se puede escribir  $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ .

En primer lugar, veamos que  $K \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$ . En efecto, dado  $x \in K$ , existe  $i \in I$

tal que  $x \in U_i$ , que es abierto, por lo que existe  $r' > 0$  tal que  $B(x, r') \subset U_i$ . Tomamos  $r \in \mathbb{Q}$  tal que  $0 < r < \frac{r'}{2}$  y, como  $\mathbb{Q}^n$  es denso en  $\mathbb{R}^n$  se tiene que  $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$ , por lo que podemos elegir  $q \in \mathbb{Q}^n \cap B(x, r)$ . Entonces,

$$x \in B(q, r) \subset B(x, r') \subset U_i.$$

Por tanto  $B(q, r) \in \mathcal{B}$  y  $K \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$ .

Ahora, veamos que  $\mathcal{B}$  admite un subrecubrimiento finito de  $K$ . Procedamos por reducción al absurdo. Si no fuera así, tendríamos que

- $K \not\subset B_1$ , luego existe  $x_1 \in K$  tal que  $x_1 \notin B_1$ .
- $K \not\subset B_1 \cup B_2$ , luego existe  $x_2 \in K$  con  $x_2 \notin B_1 \cup B_2$ .
- $\forall m \in \mathbb{N}, K \not\subset B_1 \cup \dots \cup B_m$ , por lo que existe  $x_m \in K$  con  $x_m \notin B_1 \cup \dots \cup B_m$ .

Así, obtenemos la sucesión  $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset K$ . Por ser  $K$  compacto, existe  $\{x_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $x_{m_k} \rightarrow x \in K \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$ . Por tanto, existe  $j_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in B_{j_0}$  bola abierta, por lo que existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  con  $x_{m_k} \in B_{j_0}, \forall k \geq k_0$ . Tomamos ahora  $k \in \mathbb{N}$  con  $k \geq k_0$  y  $m_k > j_0$ . Entonces, tenemos que  $x_{m_k} \in B_{j_0}$  y  $x_{m_k} \notin B_1 \cup \dots \cup B_{m_k}$ , en particular  $x_{m_k} \notin B_{j_0}$ , que es una contradicción. Por tanto, existe  $l \in \mathbb{N}$  tal que

$$K \subset B_1 \cup \dots \cup B_l.$$

Anteriormente vimos que  $B(q, r) \subset U_i$ , por lo que tenemos que para cada  $j = 1, \dots, l$ , existe  $i_j \in I$  tal que  $B_j \subset U_{i_j}$ . Entonces,

$$K \subset B_1 \cup \dots \cup B_l \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_l}.$$

Así, hemos encontrado un recubrimiento finito de  $K$ .

- (ii) Veamos que si  $K \subset \mathbb{R}^n$  no es compacto, entonces existe algún recubrimiento abierto de  $K$  que no admite un subrecubrimiento finito. Existen dos posibles casos:

**Caso 1.** Supongamos que  $K$  no es acotado. Tenemos que  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B(0, j)$ , luego

$K \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B(0, j)$ . Tenemos que  $U = \{B(0, j)\}_{j \in \mathbb{N}}$  es un recubrimiento abierto de

$K$ , que no admite ningún subrecubrimiento finito, puesto que  $B(0, 1) \cup \dots \cup B(0, k)$  es acotado.

**Caso 2.** Supongamos que  $K$  no es cerrado. Tenemos que existe  $x_0 \in \overline{K}/K$ . Consideremos  $U_j = \mathbb{R}^n / \overline{B}\left(x_0, \frac{1}{j}\right), \forall j \in \mathbb{N}$ . Tenemos que

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j = \mathbb{R}^n / \{x_0\}.$$

Luego,  $K \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j$  que es un recubrimiento abierto de  $K$ , pero no admite ningún subrecubrimiento finito,

$$K \not\subset U_1 \cup \cdots \cup U_k = \mathbb{R}^n / \overline{B}\left(x_0, \frac{1}{k}\right),$$

porque  $x_0 \in \overline{K}$  y entonces  $K \cap B\left(x_0, \frac{1}{k}\right) \neq \emptyset$ .

□

**Observación (Propiedad de Lindelöf).** Esta demostración prueba que todo conjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$  (compacto o no) verifica que todo recubrimiento abierto de  $M$  admite un subrecubrimiento numerable.

## Capítulo 2

# Continuidad

**Definición 2.1 (Continuidad).** Sea  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  una función entre dos espacios métricos y  $x_0 \in X$ . Se dice que  $f$  es **continua** en  $x_0$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

. Decimos que  $f$  es continua en un subconjunto  $M \subset X$  si es continua en  $x_0$ ,  $\forall x_0 \in M$ .

**Observación.** Una definición equivalente es

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x \in (B_X(x_0, \delta)) \Rightarrow f(x) \in B_Y(f(x_0), \varepsilon).$$

Es decir,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon).$$

**Proposición 2.1.** Sea  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  y  $x_0 \in X$ . Son equivalentes:

1.  $f$  es continua en  $x_0$ .
2.  $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  con  $x_n \rightarrow x_0$  en  $X$ , entonces la sucesión  $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $f(x_0)$  en  $Y$ .

*Demostración.* (i) Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  una sucesión cualquiera con  $x_n \rightarrow x_0$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , sabemos que existe  $\delta > 0$  tal que si  $d_X(x, x_0) < \delta$ , entonces  $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ . Tenemos que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$  se tiene que  $d_X(x_n, x_0) < \delta$ . Por tanto,  $\forall n \geq n_0$  se tiene que  $d_Y(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ .

(ii) Supongamos que  $f$  no es continua en  $x_0$ . Así, existe un  $\varepsilon > 0$  tal que  $\forall \delta > 0$  existe  $x_\delta \in X$  tal que  $d_X(x, x_0) < \delta$  y  $d_Y(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon$ . Si  $n \in \mathbb{N}$  podemos tomar  $x_n \in X$  tal que  $d_X(x_n, x_0) < \delta = \frac{1}{n}$  y  $d_Y(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon$ . Por tanto, tenemos que  $x_n \rightarrow x_0$  en  $X$ , pero  $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$  en  $Y$ .

□

**Observación.** Si  $f$  no es continua en  $x_0$ , tenemos que existe una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  tal que

$$d_Y(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto,  $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$  y ninguna subsucesión suya converge a  $f(x_0)$ .

**Proposición 2.2.** Las funciones  $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y$  y  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x \cdot y$ , son continuas en  $\mathbb{R}^2$  (con las normas  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ ).

*Demostración.* Sea  $\{z_n = (x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $z_n \rightarrow (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . Tenemos que  $x_n \rightarrow x_0$  e  $y_n \rightarrow y_0$  en  $\mathbb{R}$ . Ahora,

$$s(x_n, y_n) = x_n + y_n \rightarrow x_0 + y_0 = s(x_0, y_0).$$

De forma similar,

$$p(x_n, y_n) = x_n \cdot y_n \rightarrow x_0 \cdot y_0 = p(x_0, y_0).$$

Así, tenemos que  $s$  y  $p$  son continuas. □

**Proposición 2.3.** Sean  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  y  $g : (Y, d_Y) \rightarrow (Z, d_Z)$ . Supongamos que  $f$  es continua en  $x_0$  y  $g$  es continua en  $f(x_0)$ . Entonces  $g \circ f : (X, d_X) \rightarrow (Z, d_Z)$  es continua en  $x_0$ .

*Demostración.* Dado  $\varepsilon > 0$ , tenemos que existe  $\delta_1 > 0$  tal que si  $d_Y(y, f(x_0)) < \delta_1$ , entonces  $d_Z(g(y), g(f(x_0))) < \varepsilon$ . Así, existe  $\delta > 0$  tal que si  $d_X(x, x_0) < \delta$  entonces  $d_Y(f(x), f(x_0)) < \delta_1$ . Por tanto, si  $d_X(x, x_0) < \delta$ , tenemos que  $d_Z(g(f(x)), g(f(x_0))) < \varepsilon$ . □

**Ejemplo.** Las funciones siguientes son continuas:  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

- $f(x, y) = \cos(xy)$ .
- $g(x, y) = \sin(x + y)^3$ .

**Proposición 2.4.** Sea  $f : (X, d_X) \rightarrow \mathbb{R}^n$  (con  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  o  $\|\cdot\|_\infty$ ). Entonces,  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ . Por tanto,  $f$  es continua en  $x_0 \in X$  si y solo si  $f_1, \dots, f_n$  son continuas en  $x_0$ .

*Demostración.* (i) Supongamos que  $f$  es continua en  $x_0$ . Sea  $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset X$  tal que  $x_j \rightarrow x_0$  en  $(X, d_X)$ . Entonces, tenemos que

$$f(x_j) = (f_1(x_j), \dots, f_n(x_j)) \rightarrow f(x_0) = (f_1(x_0), \dots, f_n(x_0)).$$

Así, tenemos que  $\forall i = 1, \dots, n$ ,  $f_i(x_j) \rightarrow f_i(x_0)$ , por lo que  $\forall i = 1, \dots, n$  se tiene que  $f_i$  es continua.

(ii) Sea  $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset X$  tal que  $x_j \rightarrow x_0$  en  $(X, d_X)$ . Tenemos que  $\forall i = 1, \dots, n$ ,  $f_i(x_j) \rightarrow f_i(x_0)$ , por lo que  $f(x_j) \rightarrow f(x_0)$  en  $\mathbb{R}^n$  y  $f$  es continua en  $x_0$ .

□

**Corolario 2.1.** Sean  $f, g : (X, d_X) \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  y  $g$  son continuas en  $x_0$ , entonces  $f + g$  y  $f \cdot g$  también son continuas en  $x_0$ .

*Demostración.* Consideremos  $h = (f, g) : (X, d_X) \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $h(x) = (f(x), g(x))$ . Tenemos que  $h$  es continua en  $x_0$  por la proposición anterior. Además,

$$\begin{aligned} f + g : (X, d_X) &\rightarrow^h \mathbb{R}^2 \rightarrow^s \mathbb{R} \\ x \rightarrow (f(x), g(x)) &\rightarrow f(x) + g(x), \end{aligned}$$

que es continua en  $x_0$ . Similarmente,

$$\begin{aligned} f \cdot g : (X, d_X) &\rightarrow^h \mathbb{R}^2 \rightarrow^p \mathbb{R} \\ x \rightarrow (f(x), g(x)) &\rightarrow f(x) \cdot g(x), \end{aligned}$$

que también es continua en  $x_0$ .

□

**Ejemplo.**

- La función  $u(x, y) = \sin(x + y)^3 + \cos(xy)$  es continua en  $\mathbb{R}^2$ .
- La función  $w(x, y, z) = \sin(x + y + z)^3 + \cos(xyz + 2xy)$  es continua en  $\mathbb{R}^3$ .
- La función  $v(x, y, z) = \log(1 + x^2 + y^2)$  es continua en  $\mathbb{R}^3$ .

**Observación.** Las proyecciones  $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ , son continuas en  $\mathbb{R}^n$  para  $\forall i = 1, \dots, n$ . En efecto, tenemos que la identidad es continua y sus componentes son  $(\pi_1, \dots, \pi_n)$ ,

$$id(x) = id(x_1, \dots, x_n) = (\pi_1(x), \dots, \pi_n(x)) = (x_1, \dots, x_n).$$

**Observación.** Toda aplicación lineal  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es continua (con  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  y  $\|\cdot\|_\infty$ ). En efecto, tenemos que  $T(x) = (T_1(x), \dots, T_m(x)) \in \mathbb{R}^m$  y existe  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$  tal que

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1(x) \\ \vdots \\ T_m(x) \end{pmatrix}.$$

Así, tenemos que  $T_i(x) = \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k$ , que es continua  $\forall i = 1, \dots, m$ . Como las coordenadas son continuas tenemos que  $T$  es continua.

**Observación.** Veremos que  $\mathcal{M}_{n \times m} \cong \mathbb{R}^{n \cdot m}$ .

## 2.1. Continuidad global

**Notación.** Sea  $f : X \rightarrow Y$ .

- Para  $y \in Y$  definimos  $f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X : f(x) = y\}$ .
- Para  $M \subset Y$  definimos  $f^{-1}(M) = \{x \in X : f(x) \in M\}$ .

**Teorema 2.1.** Sea  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ . Son equivalentes:

1.  $f$  es continua en  $X$ .
2.  $\forall V \subset Y$  abierto,  $f^{-1}(V)$  es abierto en  $X$ .
3.  $\forall H \subset Y$  cerrado,  $f^{-1}(H)$  es cerrado en  $X$ .

*Demostración.* (1)  $\Rightarrow$  (2) Sea  $V \subset Y$  abierto y  $x_0 \in f^{-1}(V)$ . Tenemos que  $f(x_0) \in V$ , que es abierto en  $Y$ , por lo que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subset V$ . Por ser  $f$  continua en  $X$  existe  $\delta > 0$  tal que  $f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subset V$ , por lo que  $B_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(V)$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1) Sea  $x_0 \in X$ . Dado  $\varepsilon > 0$  podemos considerar  $V = B_Y(f(x_0), \varepsilon)$ , que es abierto en  $Y$ . Por hipótesis tenemos que  $f^{-1}(V)$  es abierto en  $X$ , por lo que existe  $\delta > 0$  tal que  $B_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(V)$ . Así, nos queda que

$$f(B_X(x_0, \delta)) \subset V = B_Y(f(x_0), \varepsilon).$$

Es decir,  $f$  es continua en  $x_0$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3) Sea  $H \subset Y$  cerrado, por lo que  $V = Y/H$  es abierto. Así, tenemos que  $f^{-1}(V)$  es abierto en  $X$ , por lo que

$$f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \notin H\} = X/f^{-1}(H).$$

Por tanto,  $f^{-1}(H)$  es cerrado en  $Y$ .

(3)  $\Rightarrow$  (2) Sea  $V \subset Y$  abierto. Consideramos  $H = Y/V$  cerrado. Tenemos que  $f^{-1}(H)$  es cerrado en  $X$ . Como

$$f^{-1}(H) = \{x \in X : f(x) \notin V\} = X/f^{-1}(V),$$

se sigue que  $f^{-1}(V)$  es abierto en  $X$ .

□

**Ejemplo.** 1. Sea  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < 1 + y^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 - 1 < 0\}$ .

Sea  $f(x, y) = x^2 - y^2 - 1$ , que es continua en  $\mathbb{R}^2$ . Podemos decir que  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \in (-\infty, 0)\} = f^{-1}((-\infty, 0))$ . Como  $(-\infty, 0)$  es abierto en  $\mathbb{R}$ , tenemos que  $A$  es abierto en  $\mathbb{R}^2$ .

2. Sea  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 + z^2\}$ . Podemos considerar  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2 - 1$ , que es continua. Tenemos, pues que  $B = g^{-1}((-\infty, 0])$  que es cerrado, por lo que  $B$  es cerrado en  $\mathbb{R}^3$ .

3. Sea  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$ . Podemos tomar  $h(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$ , que es continua. Así, tenemos que  $C = h^{-1}(\{0\})$  y como  $\{0\}$  es cerrado en  $\mathbb{R}$ , tenemos que  $C$  es cerrado.

## 2.2. Continuidad y restricciones

**Proposición 2.5.** Sea  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  es continua en  $X$  y sea  $M \subset X$ . Entonces la restricción de  $f$  a  $M$ <sup>a</sup> es continua en  $M$ .

<sup>a</sup>Se define la función de  $f$  restringida a  $M$  como  $f|_M : (M, d_X|_M) \rightarrow (Y, d_Y)$

*Demostración.* Sea  $z_0 \in M \subset X$  y sea  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M$  con  $x_k \rightarrow z_0$  en  $d_X|_M$ , por lo que  $x_k \rightarrow z_0$  en  $d_X$ . Como  $f$  es continua tenemos que  $f(x_k) \rightarrow f(z_0)$ , por lo que  $f|_M$  es continua en  $z_0$ .  $\square$

**Proposición 2.6.** Supongamos que  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  y sea  $A \subset X$  abierto. Si  $f|_A : (A, d_X|_A) \rightarrow (Y, d_Y)$  es continua en  $A$ , entonces  $f$  es continua en  $A$ .

*Demostración.* Sea  $x_0 \in A$  y  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$  con  $x_k \rightarrow x_0$ . Como  $A$  es abierto, existe  $r > 0$  tal que  $B_X(x_0, r) \subset A$ . Por otro lado, existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall k \geq k_0, x_k \in B_X(x_0, r)$ . Así, como  $\{x_k\}_{k \geq k_0} \subset A$ , tenemos que  $x_k \rightarrow x_0$  por lo que  $f(x_k) \rightarrow f(x_0)$ <sup>1</sup>. Por tanto,  $f$  es continua en  $x_0$ .  $\square$

**Ejemplo.** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Consideremos  $A = \mathbb{R}^2 / \{(0, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$ , que es abierto en  $\mathbb{R}^2$ . Tenemos que  $f|_A(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  es continua en  $A$ . Por la proposición anterior tenemos que  $f$  es continua en todos los puntos de  $A$ .

Veamos si es continua en  $(0, 0)$ . Dado  $\lambda \in \mathbb{R}$  consideramos  $M_\lambda = \{(x, y) : y = \lambda x\}$ .

<sup>1</sup>Hemos usado que el límite de dos sucesiones que difieren en un número finito de términos es el mismo.

Tenemos que

$$f|_{M_\lambda}(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{\lambda x^2}{x^2 + \lambda^2 x^2} = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}.$$

Como  $f|_{M_\lambda}$  es constante en  $M_\lambda$ , tenemos que  $f|_{M_\lambda}$  es continua. Sin embargo, tenemos que  $f$  no es continua en  $(0, 0)$ , puesto que adopta valores distintos para cada  $M_\lambda$ .

**Lema 2.1 (Lema de pegado).** Sea  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ . Supongamos que  $X = F_1 \cup \dots \cup F_m$  es una unión finita de cerrados tales que  $f|_{F_i} : (F_i, d_X|_{F_i}) \rightarrow (Y, d_Y)$  es continua  $\forall i = 1, \dots, m$ . Entonces,  $f$  es continua en  $X$ .

*Demostración.* Sea  $H \subset Y$  cerrado. Tenemos que

$$f^{-1}(H) = \{x \in X : f(x) \in H\} = \bigcup_{1 \leq i \leq m} \underbrace{\{x \in F_i : f(x) \in H\}}_{f^{-1}(H) \cap F_i} = \bigcup_{1 \leq i \leq m} (f|_{F_i})^{-1}(H).$$

Tenemos que  $(f|_{F_i})^{-1}(H)$  es cerrado relativo en  $(F_i, d_X|_{F_i})$  y que  $F_i$  es cerrado en  $X$ . Por tanto,  $(f|_{F_i})^{-1}(H)$  es cerrado en  $X$ <sup>2</sup> y  $f$  es continua en  $X$ .  $\square$

**Ejemplo.** 1. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  con

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, & \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 1 \end{cases}.$$

Podemos considerar

$$F_1 = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 1\} \text{ y } F_2 = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 1\},$$

que son cerrados. Tenemos que  $\mathbb{R}^3 = F_1 \cup F_2$  pero  $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ . Tenemos que  $f|_{F_1}$  y  $f|_{F_2}$  son continuas, por lo que  $f$  es continua en  $\mathbb{R}^3$ .

2. Veamos que  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \max\{x, y\}$  es continua. Podemos considerar los conjuntos cerrados

$$F_1 = \{(x, y) : y \geq x\} \text{ y } F_2 = \{(x, y) : y \leq x\}.$$

Tenemos que  $f|_{F_1}(x, y) = y$  y  $f|_{F_2}(x, y) = x$ , que son continuas por lo que  $f$  es continua en  $\mathbb{R}^2$ .

**Teorema 2.2.** Sea  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  continua en  $X$ <sup>a</sup>. Si  $K \subset X$  es compacto, entonces  $f(K)$  es compacto en  $Y$ .

<sup>a</sup>Bastaría con que fuese continua en  $K$ .

<sup>2</sup>Hemos usado que  $C$  es cerrado relativo en  $(Z, d_Z)$  si y solo si existe  $F$  cerrado en  $X$  tal que  $C = Z \cap F$ .

*Demostración.* Sea  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset f(K)$  una sucesión cualquiera. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , como  $y_n \in f(K)$ , existe  $x_n \in K$  tal que  $f(x_n) = y_n$ . Así, tenemos la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ . Como  $K$  es compacto, existe  $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $x_{n_j} \rightarrow x_0 \in \mathbb{K}$ . Por ser  $f$  continua, tenemos que  $f(x_{n_j}) = y_{n_j} \rightarrow f(x_0) \in f(K)$ . Así, hemos visto que la sucesión  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene una subsucesión convergente en  $f(K)$ .  $\square$

**Corolario 2.2.** Sean  $(X, d_X)$  un espacio métrico y  $f : (X, d_X) \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $X$ . Si  $K \subset X$  es compacto,  $f$  alcanza un valor máximo y un valor mínimo en  $K$ , es decir,  $\exists x_m, x_M \in K$  tales que  $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M), \forall x \in K$ .

*Demostración.* Como  $K \subset X$  es compacto, tenemos que  $f(K)$  es compacto en  $\mathbb{R}$ , por lo que  $f(K)$  es cerrado y acotado. Por ser  $f(K)$  acotado en  $\mathbb{R}$  existen  $\alpha = \inf(f(K))$  y  $\beta = \sup(f(K))$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Tenemos que  $\alpha, \beta \in \overline{f(K)} = f(K)$  puesto que  $f(K)$  es cerrado. Así, existen  $x_m, x_M \in K$  tales que  $\alpha = f(x_m)$  y  $\beta = f(x_M)$ .  $\square$

---

**Observación.** Si  $M \subset \mathbb{R}$  es acotado, entonces  $\alpha = \inf(M)$  y  $\beta = \sup(M)$  son puntos adherentes a  $M$ , puesto que  $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in M$  tal que

$$x \in M \cap (\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon) = M \cap B(\beta, \varepsilon) \neq \emptyset.$$


---

**Teorema 2.3 (Normas equivalentes).** En  $\mathbb{R}^n$  todas las normas son equivalentes.

*Demostración.* Sea  $\|\cdot\|$  una norma en  $\mathbb{R}^n$ . Vamos a demostrar que  $\|\cdot\|$  es equivalente a  $\|\cdot\|_\infty$ .

1. Consideramos  $\{e_i\}_{i=1}^n$  la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $M = \sum_{i=1}^n \|e_i\|$ . Tenemos que si  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \leq \sum_{i=1}^n \|x\|_\infty \|e_i\| = M \|x\|_\infty.$$

2. Consideramos  $f : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \|x\|$ . Veamos que  $f$  es continua en  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$  con  $x_k \rightarrow x_0$  en  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ . Vamos a ver que  $f(x_k) \rightarrow f(x_0)$ :

$$|f(x_k) - f(x_0)| = \||x_k| - |x_0|\| \leq \|x_k - x_0\| \leq M \|x_k - x_0\|_\infty \rightarrow 0.$$

3. El conjunto  $S_{\|\cdot\|_\infty} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = 1\}$  es compacto en  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$  puesto que es cerrado y acotado. Por tanto,  $f$  alcanza un valor mínimo en  $S_{\|\cdot\|_\infty}$ :

$$\exists u_m \in S_{\|\cdot\|_\infty}, 0 < \alpha = f(u_m) = \|u_m\| \leq \|u\|, \forall u \in S_{\|\cdot\|_\infty}.$$

Tenemos que  $\|u\| \geq \alpha > 0, \forall u \in \mathbb{R}^n$  con  $\|u\|_\infty = 1$ . Por tanto,  $\forall x \neq 0$ ,

$$\|x\| = \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \cdot \|x\|_\infty \right\| = \|x\|_\infty \cdot \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| \geq \|x\|_\infty \cdot \alpha.$$

Así, nos queda que  $\alpha \cdot \|x\|_\infty \leq \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

□

**Corolario 2.3.** En un espacio vectorial real de dimensión finita todas las normas son equivalentes.

*Demostración.* Sea  $E$  con  $\dim(E) = n$ , entonces  $E$  es linealmente isomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . □

**Ejemplo.** En el espacio  $\mathcal{M}_{n \times m}$  de matrices  $n \times m$ , todas las normas son equivalentes.

## 2.3. Conexión

**Definición 2.2 (Intervalo).** Un conjunto  $I \subset \mathbb{R}$  es un **intervalo** si  $\forall x, y \in I$  con  $x < y$  y  $\forall z \in \mathbb{R}$  con  $x < z < y$ , entonces  $z \in I$ .

**Teorema 2.4 (Teorema de Bolzano).** Sean  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo y sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Si  $f$  toma dos valores, entonces toma los valores intermedios. Es decir, si  $\exists x, y \in I$  con  $f(x) = u, f(y) = v$  y  $u < w < v$ , entonces existe  $z \in I$  tal que  $f(z) = w$ .

**Corolario 2.4.** Sea  $M \subset \mathbb{R}$ . Son equivalentes:

1.  $M$  es un intervalo.
2. No existe ninguna función continua  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(M) = \{0, 1\}$ .
3. Para toda función continua  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(M) \subset \{0, 1\}$ , se tiene que  $f$  es constante.

*Demostración.* (1)  $\Rightarrow$  (2) Es trivial a partir del teorema de Bolzano.

(2)  $\Rightarrow$  (1) Supongamos que  $M$  no es un intervalo. Por tanto, existen  $x, y \in M$  con  $x < y$  y existe  $z \in \mathbb{R}$  con  $x < z < y$  con  $z \notin M$ . Definimos  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < z \\ 1, & t > z \end{cases} .$$

Está claro que  $f(M) = \{0, 1\}$  y que  $f$  es continua en  $M$ .

(2)  $\iff$  (3) Trivial. □

**Definición 2.3 (Conjunto conexo).** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $M \subset X$ .

- (a) Diremos que  $M$  es **conexo** cuando  $\forall f : M \rightarrow \mathbb{R}$  continua con  $f(M) \subset \{0, 1\}$ , entonces  $f$  es constante.
- (b) Diremos que  $M$  es **desconexo** cuando no es conexo, es decir, existe alguna  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $f(M) = \{0, 1\}$ .

**Teorema 2.5.** Sea  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  una función continua entre espacios métricos. Si  $M \subset X$  es conexo, entonces  $f(M)$  es conexo.

*Demostración.* Sea  $h : f(M) \rightarrow \mathbb{R}$  continua con  $h(f(M)) \subset \{0, 1\}$ . Tenemos que  $h \circ f|_M$  es continua y  $h \circ f|_M(M) \subset \{0, 1\}$ . Por ser  $M$  conexo, tenemos que  $h \circ f|_M$  es constante, por lo que  $h$  es constante.  $\square$

**Lema 2.2.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subset X$ . Consideramos  $\chi_A : X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & x \in X/A \\ 1, & x \in A \end{cases}.$$

Entonces  $\chi_A$  es continua en  $X$  si y solo si  $A$  es abierto y cerrado a la vez.

*Demostración.* (i) Como  $\chi_A$  es continua, hemos visto anteriormente que el siguiente conjunto es cerrado:

$$A = \{x \in X : \chi_A(x) = 1\} = \chi_A^{-1}(\{1\}).$$

Tenemos que

$$X/A = \{x \in X : \chi_A(x) = 0\} = \chi_A^{-1}(\{0\}).$$

De esta última igualdad obtenemos que  $A$  es abierto, por lo que podemos concluir que  $A$  es abierto y cerrado a la vez.

(ii) Sea  $U \subset \mathbb{R}$  abierto.

- Si  $0, 1 \in U$ , entonces  $\chi_A^{-1}(U) = X$ , que es abierto.
- Si  $0, 1 \notin U$ , entonces  $\chi_A^{-1}(U) = \emptyset$ , que es abierto.
- Si  $1 \in U$  y  $0 \notin U$ , tenemos que  $\chi_A^{-1}(U) = A$ , que es abierto.
- Si  $1 \notin U$  y  $0 \in U$ , tenemos que  $\chi_A^{-1}(U) = X/A$  que es abierto.

$\square$

**Ejemplo.** Consideremos  $X = \mathbb{R}$  y  $M = \mathbb{R}/\{z\}$ . Tenemos que

$$A = (-\infty, z) = (-\infty, z] \cap M,$$

por lo que  $A$  es abierto y cerrado relativo en  $M$ .

**Teorema 2.6.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $M \subset X$ . Son equivalentes:

1.  $M$  es desconexo.
2.  $M = A \sqcup B$  donde  $A$  y  $B$  son abiertos relativos y no vacíos de  $(M, d|_M)$ .
3. Existe  $A \subset M$  con  $\emptyset \neq A \neq M$  tal que  $A$  es abierto y cerrado relativo en  $(M, d|_M)$ .

*Demostración.* (1)  $\Rightarrow$  (2) Si  $M$  es desconexo, existe  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $f(M) = \{0, 1\}$ . Consideramos  $A = f^{-1}(\{0\})$  y  $B = f^{-1}(\{1\})$ . Es fácil ver que  $A$  y  $B$  son cerrados relativos en  $(M, d|_M)$  y que  $A \cap B = \emptyset$ . Además,  $A = M/B$  y  $B = M/A$ , por lo que  $A$  y  $B$  son a la vez abiertos y cerrados relativos en  $(M, d|_M)$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3) Si  $\emptyset \neq A \neq M$ , entonces  $A$  es abierto y  $B = M/A$  es abierto por lo que  $A$  también es cerrado.

(3)  $\Rightarrow$  (1) Basta considerar  $f = \chi_A : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in M/A \\ 1, & x \in M/B \end{cases}.$$

Por el lema tenemos que  $f$  es continua en  $M$  y  $f(M) = \{0, 1\}$ . □

**Definición 2.4 (Separación).** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $M \subset X$ . Una **separación** de  $M$  en  $X$  es un par  $(U, V)$  donde:

1.  $U$  y  $V$  son conjuntos abiertos en  $X$ .
2.  $M \subset U \cup V$ .
3.  $M \cap U, M \cap V \neq \emptyset$ .
4.  $M \cap U \cap V = \emptyset$ .

**Teorema 2.7.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $M \subset X$ . Entonces  $M$  es desconexo si y solo si  $M$  admite una separación en  $X$ .

*Demostración.* (i) Si  $M$  es desconexo, existen  $A, B \subset X$  abiertos relativos en  $M$  tales que  $M = A \sqcup B$ . Por ser abiertos relativos, existen  $U, V \subset X$  abiertos tales que  $A = U \cap M$  y  $B = V \cap M$ . Es fácil comprobar que  $(U, V)$  es una separación.

(ii) Si  $M$  admite una separación tenemos que  $M \subset (U \cap M) \sqcup (V \cap M)$ , que son abiertos relativos en  $M$ , por lo que se cumple (2) del teorema anterior y  $M$  es desconexo. □

**Ejemplo.** Sea  $M = \mathbb{Q}$  subespacio de  $X = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ .

(a) Un ejemplo de abierto y cerrado relativo en  $M$  es

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : \pi < x < \pi + 1\} = \mathbb{Q} \cap (\pi, \pi + 1).$$

Está claro que  $A$  es abierto relativo en  $\mathbb{Q}$  por ser la intersección de un abierto en  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{Q}$ . Además, tenemos que

$$A = \mathbb{Q} \cap [\pi, \pi + 1].$$

Por la misma razón,  $A$  es también cerrado relativo en  $\mathbb{Q}$ , por lo que  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  es desconexo.

(b) Sea  $C \subset \mathbb{Q}$  conexo. Nos preguntamos, cuántos elementos puede contener  $C$ ?

**Lema 2.3 (Lema del pivote).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $\{M_i\}_{i \in I}$  una familia de subconjuntos conexos de  $X$ . Supongamos que  $\bigcap_{i \in I} M_i \neq \emptyset$ . Entonces,  $\bigcup_{i \in I} M_i$  es conexo.

*Demostración.* Sea  $x_0 \in \bigcap_{i \in I} M_i \neq \emptyset$  y sea  $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ . Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  continua con  $f(M) \subset \{0, 1\}$ . Supongamos que  $f(x_0) = 0$ . Como  $M_i$  es conexo  $\forall i \in I$ , tenemos que  $f|_{M_i}$  es constante y por tener  $x_0 \in \bigcap_{i \in I} M_i$ ,  $f|_{M_i} \equiv 0$ . Luego,  $f \equiv 0$  en  $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ .  $\square$

**Lema 2.4 (Lema de la percha).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $\{M_i\}_{i \in I}$  una familia de subconjuntos conexos de  $X$ . Supongamos que existe  $M_0 \subset X$  conexo tal que  $M_i \cap M_0 \neq \emptyset$ ,  $\forall i \in I$ . Entonces,  $M_0 \cup \left( \bigcup_{i \in I} M_i \right)$  es conexo.

*Demostración.* Sean  $M = M_0 \cup \left( \bigcup_{i \in I} M_i \right)$  y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  continua con  $f(M) \subset \{0, 1\}$ .

- Como  $M_0$  es conexo, tenemos que  $f|_{M_0}$  es constante. Por ejemplo, supongamos que  $f|_{M_0} \equiv 0$ .
- Tenemos que  $\forall i \in I$ ,  $f|_{M_i}$  es constante y  $M_i \cap M_0 \neq \emptyset$ , por lo que  $f|_{M_i} \equiv 0$ .

$\square$

---

**Observación.** La unión de dos conjuntos no tiene por qué ser conexa. En efecto, podemos considerar en  $\mathbb{R}$  el conjunto  $M = (0, 1) \cup (3, 4)$ , que claramente no es conexo.

**Teorema 2.8.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $M \subset X$ . Si  $M$  es conexo y  $M \subset A \subset \overline{M}$ , entonces  $A$  es conexo. En particular, si  $M$  es conexo,  $\overline{M}$  también lo es.

*Demostración.* Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  continua con  $f(A) \subset \{0, 1\}$ . Tenemos que  $f|_M$  es constante y ponemos que  $f|_M \equiv 0$ . Sea  $x \in A \subset \bar{M}$ . Tenemos que existe  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$  tal que  $x_n \rightarrow x_0$ . Por ser  $f$  continua, tenemos que  $f(x_n) \rightarrow f(x) = 0$ , puesto que  $f(x_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . Así, hemos demostrado que  $f|_A$  es constante.  $\square$

**Definición 2.5 (Camino).** Un **camino** en un espacio métrico  $(X, d)$  es una función continua  $\sigma : [a, b] \rightarrow X$ .

**Ejemplo.** En  $\mathbb{R}^n$ , dados  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , tenemos que el segmento que los une  $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n : t \rightarrow (1 - t)x + ty$  es un camino.

**Definición 2.6 (Conexión por caminos).** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $M \subset X$ . Se dice que  $M$  es **conexo por caminos** si  $\forall x, y \in M$  existe  $\sigma : [a, b] \rightarrow X$  camino tal que  $\text{Im}(\sigma) \subset M$ ,  $\sigma(a) = x$  y  $\sigma(b) = y$ <sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Es decir, cada par de puntos en  $M$  se puede unir mediante un camino en  $M$ .

**Definición 2.7 (Convexidad).** Un conjunto  $C \subset \mathbb{R}^n$  es **convexo** si  $\forall x, y \in C$  el segmento  $\sigma(t) = (1 - t)x + ty, t \in [0, 1]$ , está contenido en  $C$ .

**Observación.** Está claro que si un conjunto es convexo, es conexo por caminos. Puede darse que sea conexo por caminos pero que no sea convexo.

**Teorema 2.9.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Si  $M \subset X$  es conexo por caminos, entonces  $M$  es conexo.

*Demostración.* Sea  $M$  conexo por caminos y sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  continua con  $f(M) \subset \{0, 1\}$ . Dados  $x, y \in M$ , existe  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  camino. Tenemos que  $f \circ \sigma$  es continua y  $f \circ \sigma([a, b]) \subset \{0, 1\}$ . Por ser  $[a, b]$  conexo, tenemos que  $f \circ \sigma$  es constante en  $[a, b]$ , es decir,  $f(\sigma(a)) = f(\sigma(b))$  y  $f(x) = f(y)$ , por lo que  $f|_M$  es constante.  $\square$

**Teorema 2.10.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y conexo. Entonces,  $U$  es conexo por caminos.

*Demostración.* Fijamos  $x_0 \in U$ . Dado  $x \in U$  veamos que existe un camino de  $x$  a  $x_0$ . Consideremos

$$A = \{x \in U : \exists \text{ camino en } U \text{ de } x_0 \text{ a } x\}.$$

- Está claro que  $A \neq \emptyset$ , puesto que  $x_0 \in A$ .
- Veamos que  $A$  es abierto relativo en  $U$ . Si  $x \in A \subset U$ , tenemos que existe  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \subset U$ . Tenemos que  $\forall y \in B(x, r)$  podemos conectar  $x$  con  $y$  mediante un segmento, por lo que existe un camino en  $U$  de  $x_0$  a  $x$  y de  $x$  a  $y$ , luego existe uno de  $x_0$  a  $y$ . Así,  $B(x, r) \subset A$ .

- Veamos que  $A$  es cerrado relativo en  $U$ . Para ello, veamos que  $U/A$  es abierto. Dado  $x \in U/A$  existe  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \subset U$ . Tenemos que  $\forall y \in B(x, r)$ , no existe camino en  $U$  de  $x_0$  a  $y$ . Si existiera, existiría un camino en  $U$  de  $x_0$  a  $x$ , que es una contradicción. Por tanto,  $B(x, r) \subset U/A$ , por lo que  $A$  es cerrado relativo en  $U$ .
- Por ser  $U$  conexo y  $A \neq \emptyset$ , debe ser que  $A = U$ .

□

**Ejemplo.** En general, conexo no implica conexo por caminos. En efecto, podemos considerar  $M = \{(0, 0)\} \cup \left\{ \left( x, \sin \frac{1}{x} \right) : 0 < x \leq 1 \right\} \subset \mathbb{R}^2$ . Si  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(x) = \left( x, \sin \frac{1}{x} \right)$ , tenemos que

- $f$  es continua en  $(0, 1]$ .
- $(0, 1]$  es convexo.
- Si  $G_f(x)$  es la segunda parte de la unión, entonces  $G_f = f((0, 1])$  es convexo.
- $(0, 0) \in \overline{G}_f$ .
- $(0, 0) \cup G_f = M$  es conexo.

Sin embargo, gráficamente se puede ver que no podemos conectar los puntos  $(1, \sin 1)$  y  $(0, 0)$  por un camino contenido en  $M$ .

## 2.4. Continuidad uniforme

**Definición 2.8 (Continuidad uniforme).** Sean  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  y  $M \subset X$ . Se dice que  $f$  es **uniformemente continua** en  $M$  si  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $x, x' \in M$  con  $d_X(x, x') < \delta$ , entonces  $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ .

**Observación.**

- $f : X \rightarrow Y$  es continua en  $X$  si y solo si  $\forall x \in X$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que  $d_X(x, x') < \delta$  implica que  $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ .
- $f : X \rightarrow Y$  es uniformemente continua en  $X$  si y solo si  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $x, x' \in X$  con  $d_X(x, x') < \delta$  entonces  $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ .

---

**Observación.** Si  $f$  es uniformemente continua en  $M$ , entonces  $f|_M$  es continua en  $M$ .

---

**Teorema 2.11.** Sean  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  y  $M \subset X$ . Son equivalentes:

1.  $f$  es uniformemente continua en  $M$ .
2.  $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$  con  $d_Y(x_n, y_n) \rightarrow 0$ , entonces  $d_Y(f(x_n), f(y_n)) \rightarrow 0$ .

*Demostración.* (1)  $\Rightarrow$  (2) Sean  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$  con  $d_X(x_n, y_n) \rightarrow 0$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , por la continuidad uniforme existe  $\delta > 0$  tal que si  $d_X(x, x') < \delta$  entonces  $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ . Existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$  se tiene que  $d_X(x_n, y_n) < \delta$ , por lo que  $d_Y(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1) Supongamos que  $f$  no es uniformemente continua en  $M$ . Así, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\forall \delta > 0$  existen  $x_\delta, x'_\delta \in M$  con  $d_X(x_\delta, x'_\delta) < \delta$  pero  $d_Y(f(x_\delta), f(x'_\delta)) \geq \varepsilon$ . En concreto, si tomamos  $\delta = \frac{1}{n}$  tenemos que existen  $x_n, y_n \in M$  tal que

$$d_X(x_n, y_n) < \frac{1}{n}, \quad d_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon.$$

Así, tenemos dos sucesiones  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$  tal que  $d_X(x_n, y_n) \rightarrow 0$  pero  $d_Y(f(x_n), f(y_n)) \not\rightarrow 0$ .  $\square$

**Teorema 2.12.** Sea  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  y  $K \subset X$  compacto. Si  $f$  es continua en  $K$ , entonces  $f$  es uniformemente continua en  $K$ .

*Demostración.* Sean  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$  tales que  $d_X(x_n, y_n) \rightarrow 0$ . Como  $K$  es compacto, existe  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  subsucesión con  $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in K$ . Consideramos ahora  $\{y_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ , que tiene una subsucesión  $\{y_{n_{k_j}}\}_{j \in \mathbb{N}}$  tal que  $x_{n_{k_j}} \rightarrow x'_0 \in K$ . Tenemos que

$$d_X(x_0, x'_0) \leq d_X(x_0, x_{n_{k_j}}) + d_X(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) + d_X(y_{n_{k_j}}, x'_0) \rightarrow 0.$$

Así, tenemos que  $x_0 = x'_0$ . Como  $f$  es continua en  $x_0 \in X$ , tenemos que

$$d_Y(f(x_{n_{k_j}}), f(y_{n_{k_j}})) \leq d_Y(f(x_{n_{k_j}}), f(x_0)) + d_Y(f(x_0), f(y_{n_{k_j}})) \rightarrow 0.$$

Si suponemos que  $f$  no es uniformemente continua en  $K$ , existe  $\varepsilon > 0$  y existen  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$  tales que  $d_X(x_n, y_n) \rightarrow 0$  pero  $d_Y(f(x_n), f(y_n)) \not\rightarrow 0$ . Esto supone una contradicción con lo que hemos visto anteriormente.  $\square$

**Ejemplo.** La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(x) = x^2$  es continua pero no es uniformemente continua en  $\mathbb{R}$ . En efecto, si  $\delta > 0$  tenemos que si  $x \rightarrow \infty$ ,

$$|f(x) - f(x + \delta)| = |x^2 - (x + \delta)^2| = 2x\delta + \delta^2 \rightarrow \infty.$$

Otra forma de verlo es tomar  $x_n = n$  e  $y_n = n + \frac{1}{n}$ . Tenemos que

$$d(x_n, y_n) = \left| n + \frac{1}{n} - n \right| = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Sin embargo, nos queda que

$$d(f(x_n), f(y_n)) = \left| n^2 - \left( n + \frac{1}{n} \right)^2 \right| = 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2 \not\rightarrow 0.$$

**Definición 2.9 (Función Lipschitz).** Se dice que  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  es **Lipschitz** si existe  $K \geq 0$  tal que

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq K \cdot d_X(x, x'), \quad \forall x, x' \in X.$$

**Observación.** Es fácil ver que si  $f$  es de Lipschitz entonces  $f$  es uniformemente continua.

**Proposición 2.7.** Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo y supongamos que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable con derivada acotada en  $I$ . Entonces,  $f$  es Lipschitz en  $I$  y por tanto uniformemente continua.

*Demostración.* Existe  $K \geq 0$  tal que  $|f'(t)| \leq K, \forall t \in I$ . Sean  $x, y \in I$ , por el Teorema del Valor Medio tenemos que existe  $\xi \in (x, y)$  tal que

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y).$$

Por tanto, tenemos que

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| |x - y| \leq K |x - y|, \quad \forall x, y \in I.$$

□

**Ejemplo.** Sea  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ . Tenemos que  $f$  es uniformemente continua en  $[0, \infty)$ . En efecto, sabemos que para  $\varepsilon > 0$ , existe  $R > 0$  tal que si  $x > R$  entonces  $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ .

- Como  $[0, R]$  es compacto, existe  $\delta > 0$  tal que si  $x, y \in [0, R]$  con  $|x - y| < \delta$ , entonces  $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ .
- Si  $x, y \geq R$  tenemos que  $|f(x) - f(y)| < \frac{2\varepsilon}{3}$ .
- Si  $x \leq R < y$  con  $|x - y| < \delta$ , tenemos que  $|x - R| < \delta$ , por lo que

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(R)| + |f(R)| + |f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

**Lema 2.5.** Sea  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  uniformemente continua en  $X$ . Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  es de Cauchy, entonces  $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy.

*Demostración.* Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  una sucesión de Cauchy. Por ser  $f$  uniformemente continua, si  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $d_X(x, y) < \delta$ , entonces  $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ . Como  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n, m \geq n_0$ ,

$$d_X(x_n, x_m) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon.$$

□

**Teorema 2.13 (Teorema de extensión).** Sean  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  espacios métricos, siendo  $(Y, d_Y)$  completo. Sean  $M \subset X$  y  $f : M \rightarrow Y$  uniformemente continua en  $M$ . Entonces  $f$  admite una extensión  $\bar{f} : \overline{M} \rightarrow Y$  uniformemente continua en  $\overline{M}$  (es decir,  $\bar{f}$  es uniformemente continua en  $\overline{M}$  y  $\bar{f}|_M = f$ ).

*Demostración.* Sea  $x_0 \in \overline{M}$ , tenemos que existe  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$  con  $x_n \rightarrow x_0$ . Por tanto,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy. Por ser  $f$  uniformemente continua, es tenemos que  $f$  transforma sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy. Así,  $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy. Por ser  $Y$  completo, tenemos que existe  $y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \in Y$ . Definimos  $\bar{f}(x_0) = y_0$ . Veamos que hemos definido bien  $\bar{f}(x_0)$ , es decir, que si  $\{x'_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$  con  $x'_n \rightarrow x_0$ , entonces  $f(x'_n) \rightarrow y_0$ . En efecto

$$d_Y(f(x'_n), y_0) \leq d_Y(f(x'_n), f(x_n)) + d_Y(f(x_n), y_0) \rightarrow 0.$$

Hemos utilizado que  $d_Y(f(x'_n), f(x_n)) \rightarrow 0$  puesto que  $d_X(x'_n, x_n) \rightarrow 0$  por tender ambas sucesiones al mismo límite y ser  $f$  uniformemente continua en  $M$ . Está claro que  $\bar{f}|_M = f$  por definición. Veamos que  $\bar{f}$  es uniformemente continua en  $\overline{M}$ . Hay dos posibles casos:

- Si  $x, y \in M$ , como  $\bar{f}|_M = f$  es trivial que se cumple la condición de continuidad uniforme.
- Si  $x, y \in \overline{M}$  tomamos sucesiones  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$  con  $x_n \rightarrow x$  e  $y_n \rightarrow y$ . Así,  $\forall n \in \mathbb{N}$  se tiene que

$$d_Y(\bar{f}(x), \bar{f}(y)) \leq d_Y(\bar{f}(x), f(x_n)) + d_Y(f(x_n), f(y_n)) + d_Y(f(y_n), \bar{f}(y)).$$

Esta expresión tiende a 0 si  $d_X(x, y) \rightarrow 0$  por la convergencia de las sucesiones  $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}, \{f(y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  a  $\bar{f}(x)$  y  $\bar{f}(y)$ , respectivamente, y a la continuidad uniforme de  $\bar{f}$  en  $M$  por ser  $\bar{f}|_M = f$ .

□

**Ejemplo.** Consideremos  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ . Está claro que  $f$  es continua en  $(0, 1]$  pero no es uniformemente continua en este intervalo puesto que no admite ninguna extensión continua a  $[0, 1]$  porque no existe  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x}$ .

## 2.5. Teorema del punto fijo de Banach

**Definición 2.10 (Función contractiva).** Se dice que  $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$  es **contractiva** si existe  $0 \leq \alpha < 1$  tal que  $d(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y)$ ,  $\forall x, y \in X$ .

**Teorema 2.14 (Teorema del punto fijo de Banach).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo. Toda aplicación contractiva  $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$  tiene un único punto fijo, es decir, un único  $x \in X$  tal que  $f(x) = x$ . Además,  $\forall x_0 \in X$  la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  definida por  $x_{n+1} = f(x_n)$  verifica que  $x_n \rightarrow x_0$ .

*Demostración.* Sea  $x_0 \in X$  y  $\forall n \geq 1$  definimos  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Consideramos pues la sucesión  $\{f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots\}$ .

Veamos que la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy en  $(X, d)$ . Tenemos que

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq \alpha \cdot d(x_{n-1}, x_n) \leq \dots \leq \alpha^n \cdot d(x_0, x_1).$$

Sea  $m > n$ , haciendo un cálculo similar tenemos que

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq \alpha^{m-1} d(x_1, x_0) + \alpha^{m-2} d(x_1, x_0) + \dots + \alpha^n d(x_1, x_0) \\ &= \alpha^n (1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-1-n}) d(x_1, x_0) \leq \alpha^n \left( \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \right) d(x_1, x_0) \\ &= \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Así, está claro que la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy. Como  $(X, d)$  es completo, existe  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in X$ . Como  $f$  es continua, tenemos que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Veamos que el punto fijo que hemos calculado es único. Sea  $y \in X$  con  $y \neq x$ , por lo que  $d(y, x) > 0$ , y  $f(y) = y$ . Tenemos que

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) < d(x, y).$$

Esto es una contradicción, por lo que debe ser que  $x = y$ . □

# Capítulo 3

## Límites en $\mathbb{R}^n$

**Definición 3.1 (Límite).** Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$  y sea  $x_0 \in S'$ . Se dice que  $l \in \mathbb{R}^m$  es límite de  $f$  en  $x_0$  si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon.$$

Denotaremos  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  (o también  $l = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in S} f(x)$ ).

**Proposición 3.1.** En límite, si existe, es único.

*Demostración.* Si  $l, l' \in \mathbb{R}^m$  son posibles límites, tenemos que  $\forall \varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $0 < \|x - x_0\| < \delta$  entonces  $\|f(x) - l\|, \|f(x) - l'\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Así,

$$\|l - l'\| \leq \|l - f(x)\| + \|f(x) - l'\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como esto es cierto  $\forall \varepsilon > 0$ , debe ser que  $\|l - l'\| = 0$ , por lo que  $l = l'$ .  $\square$

**Proposición 3.2.** Para una función  $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $x_0 \in S'$ , son equivalentes

(i)  $l = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in S} f(x)$ .

(ii)  $\forall \{x_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset S / \{x_0\}$  con  $x_j \rightarrow x_0$ , se tiene que  $f(x_j) \rightarrow l$ .

*Demostración.* (i) Sea  $\{x_j\}_j \subset S / \{x_0\}$  con  $x_j \rightarrow x_0$ . Tenemos que  $\forall \varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $0 < \|x - x_0\| < \delta$ , entonces  $\|f(x) - l\| < \varepsilon$ . Como  $x_j \rightarrow x_0$ , tenemos que existe  $j_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall j \geq j_0$ ,  $0 < \|x_j - x_0\| < \delta$ , por lo que  $\|f(x_j) - l\| < \varepsilon$ .

(ii) Supongamos que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq l$ , es decir, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\forall \delta > 0$  existe  $x \in S$  con  $0 < \|x - x_0\| < \delta$  y  $\|f(x) - l\| \geq \varepsilon$ . Así, podemos tomar  $\delta = \frac{1}{j}$  y  $x_j \in S$  tal

que  $0 < \|x_j - x_0\| < \frac{1}{j}$  y  $\|f(x_j) - l\| \geq \varepsilon$ , para  $j \in \mathbb{N}$ . Tenemos que la sucesión  $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset S / \{x_0\}$  converge a  $x_0$  pero su imagen no converge a  $l$ .

□

**Proposición 3.3.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \in S'$  y  $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ . Supongamos que existen  $p = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  y  $q = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ . Entonces,

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = p + q.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = pq.$$

$$3. \text{ Si } q \neq 0, \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p}{q}.$$

*Demostración.* Basta con tomar una sucesión  $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset S / \{x_0\}$  con  $x_j \rightarrow x_0$  y aplicar las propiedades de las sucesiones en  $\mathbb{R}$ . Demostraremos únicamente la tercera afirmación.

Sea  $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset S'$  tal que  $x_j \rightarrow x_0$ . Sabemos que  $f(x_j) \rightarrow p$  y  $g(x_j) \rightarrow q$  en  $\mathbb{R}$ . Si  $q \neq 0$ , existe  $j_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall j \geq j_0, g(x_j) \neq 0$ . Dado que  $\left\{ \frac{f(x_j)}{g(x_j)} \right\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  es una sucesión, podemos aplicar las propiedades de las sucesiones en  $\mathbb{R}$  y obtener el resultado deseado:

$$\frac{f(x_j)}{g(x_j)} \rightarrow \frac{p}{q}.$$

□

**Proposición 3.4.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $x_0 \in U$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Son equivalentes:

(i)  $f$  es continua en  $x_0$ .

(ii)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

(iii)  $\forall S \subset U$  con  $x_0 \in S'$  se tiene que  $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in S} f(x) = f(x_0)$ .

*Demostración.* Como  $x_0 \in U$ , que es abierto, tenemos que existe  $r > 0$  tal que  $B(x_0, r) \subset U$ , por lo que  $x_0 \in U'$ .

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Si  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $0 < \|x - x_0\| < \delta$ <sup>1</sup> entonces  $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ , por lo que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Sea  $S \subset U$  con  $x_0 \in S'$  y  $x_0 \in U$ . Si  $x \in S$  y  $0 < \|x - x_0\| < \delta$ , entonces  $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ . Por tanto,  $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in S} f(x) = f(x_0)$ .

<sup>1</sup>Podemos poner que esto es mayor estrictamente que 0 porque siempre van a haber puntos en cualquier entorno de  $x_0$  que no sean iguales a él.

(iii)  $\Rightarrow$  (ii) En particular, tomando  $S = U$  es trivial.

(ii)  $\Rightarrow$  (i)  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que si  $x \in U$  y  $\|x - x_0\| < \delta^2$ , entonces  $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ .

□

**Ejemplo.** 1. Consideremos la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \sin(x+y), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Podemos ver que  $h(x, y) = \sin(x+y)$  es continua en  $\mathbb{R}^2$  y  $g(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$  es continua en  $\mathbb{R}^2 / \{(0, 0)\} = U$ . Luego  $f$  es continua en  $\mathbb{R}^2 / \{(0, 0)\}$ . Estudiemos la continuidad en  $(0, 0)$ :

$$|f(x, y)| = \left| \frac{xy}{x^2+y^2} \right| |\sin(x+y)| \leq \frac{1}{2} |\sin(x+y)| \rightarrow 0.$$

Así, tenemos que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = (0, 0)$  por lo que  $f$  es continua en  $(0, 0)$ .

2. Nos preguntamos si existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ . Dado  $\lambda \in \mathbb{R}$  podemos considerar  $S_\lambda = \{(x, y) : y = \lambda x\}$ . Tenemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), y=\lambda x} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), y=\lambda x} \frac{\lambda x^2}{(1+\lambda^2)x^2} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}.$$

Como depende de  $\lambda$ , debe ser que el límite no existe.

3. Calculemos  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4}{x^4+y^2}$ . Si tomamos el mismo conjunto que antes obtenemos que si  $\lambda \neq 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0, y=\lambda x} \frac{x^4}{x^4+\lambda^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2+\lambda^2} = 0.$$

Sin embargo, esto no nos asegura que exista el límite. En efecto, si tomamos  $y = \lambda x^2$  tenemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), y=\lambda x^2} \frac{x^4}{x^4+\lambda^2 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{(1+\lambda^2)x^4} = \frac{1}{1+\lambda^2}.$$

Lo que nos dice que el límite no existe.

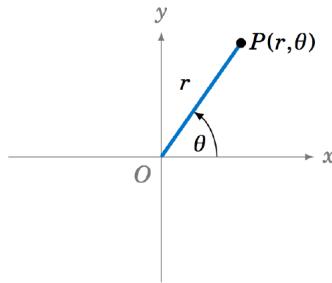


Figura 3.1: Coordenadas polares

### 3.1. Coordenadas polares

Como se puede deducir de la imagen, tenemos que  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ , donde  $r \geq 0$  y  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Así, por ejemplo, tenemos que

$$B((0,0), R) = \{(x,y) : x^2 + y^2 < R^2\} = \{(r,\theta) : 0 \leq r < R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

El último igual no es un igual, estrictamente. Sin embargo dada  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , si podemos decir que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x) = l$  si y solo si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < r < \delta \Rightarrow |f(r \cos \theta, r \sin \theta) - l| < \varepsilon, \forall \theta \in [0, 2\pi].$$

Diremos que  $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = l$  uniformemente en  $\theta$ .

**Ejemplo.** Tenemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r|\cos \theta| \cdot r \sin \theta}{r} = r |\cos \theta \sin \theta| \leq r \rightarrow 0.$$

---

**Observación.** El objetivo del ejemplo anterior es hacer desaparecer el ángulo para que se cumpla  $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ .

---

<sup>2</sup>El que sea mayor estrictamente que 0 da igual porque  $f(x_0)$  está bien definido.

# Capítulo 4

## Cálculo diferencial

Consideremos, en primer lugar, funciones de la forma  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , que podemos considerar curvas paramétricas.

### 4.1. Caso $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

**Definición 4.1 (Curva paramétrica).** Una **curva** en  $\mathbb{R}^m$  es una función continua  $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ , donde  $I$  es un intervalo de  $\mathbb{R}$ .

**Definición 4.2 (Derivabilidad).** Se dice que  $\sigma$  es **derivable** en  $t_0 \in I$  cuando existe

$$\sigma'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\sigma(t) - \sigma(t_0)}{t - t_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma(t_0 + h) - \sigma(t_0)}{h}.$$

Si  $\sigma'(t_0) \neq 0$ , se define la **recta tangente** a  $\sigma$  en  $t_0$  como la recta que pasa por  $\sigma(t_0)$  con vector director  $\sigma'(t_0)$ .

**Observación.** Si denotamos  $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \dots, \sigma_m(t))$ , entonces  $\sigma$  es derivable en  $t_0$  si y solo si  $\forall j = 1, \dots, m$ ,  $\sigma_j$  es derivable en  $t_0$ . Entonces tendremos que  $\sigma'(t_0) = (\sigma'_1(t_0), \dots, \sigma'_m(t_0))$ . Esto es consecuencia de que en  $\mathbb{R}^m$  los límites se hacen coordenada a coordenada.

**Ejemplo.** 1. Consideremos  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$ . Tenemos que  $\text{Im}(\sigma) = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ . Por la observación anterior tenemos que

$$\sigma'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

2. Si consideramos  $\gamma(t) = (\cos t, -\sin t)$ , tenemos que  $\text{Im}(\gamma) = \text{Im}(\sigma)$ , pero como

$$\gamma'(t) = (-\sin t, -\cos t).$$

Por lo que los vectores tangentes recorren la curva en sentido contrario.

3. Consideremos  $\beta(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$ . Nuevamente,  $\text{Im}(\beta) = \text{Im}(\sigma)$  pero

$$\beta'(t) = (-2\sin 2t, 2\cos 2t) = 2(-\sin 2t, \cos 2t).$$

Por tanto, podemos interpretar que los vectores tangentes de  $\beta$  van el doble de rápido que los de  $\sigma$ .

**Teorema 4.1.** Sean  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo abierto y  $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  una curva. Son equivalentes para  $t_0 \in I$

1.  $\sigma$  es derivable en  $t_0$ .
2. Existe  $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  lineal tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma(t_0 + h) - \sigma(t_0) - L(h)}{|h|} = 0.$$

*Demostración.* (i) Supongamos que existe  $\sigma'(t_0) \in \mathbb{R}^m$ . Definimos  $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $L(h) = h\sigma'(t_0)$ ,  $h \in \mathbb{R}$ . Sabemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\sigma(t_0 + h) - \sigma(t_0)}{h} - \sigma'(t_0) \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma(t_0 + h) - \sigma(t_0) - L(h)}{h} \\ \iff \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{\sigma(t_0 + h) - \sigma(t_0) - L(h)}{h} \right\| &= 0 \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma(t_0 + h) - \sigma(t_0) - L(h)}{|h|} = 0 \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

(ii) Si tenemos  $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  lineal, definimos  $w = L(1) \in \mathbb{R}^m$ . Entonces, tenemos que  $L(h) = L(h \cdot 1) = hL(1)$ . Veamos que  $w = \sigma'(t_0)$ . Sabemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma(t_0 + h) - \sigma(t_0) - hw}{|h|} \\ \iff 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma(t_0 + h) - \sigma(t_0) - hw}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\sigma(t_0 + h) - \sigma(t_0)}{h} - w \right) \\ \Rightarrow w &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma(t_0 + h) - \sigma(t_0)}{h}. \end{aligned}$$

□

## 4.2. Derivadas parciales y direccionales

**Ejemplo.** Consideremos  $f(x, y) = \sin(x^2 - y^2 + 3xy)$ . Tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (2x + 3y) \cos(x^2 - y^2 + 3xy).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (-2y + 3x) \cos(x^2 - y^2 + 3xy).$$

Dado  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , podemos definir las derivadas parciales de la siguiente forma

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x_0, y_0) + t(1, 0)) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

**Definición 4.3 (Derivadas parciales).** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $a \in U$ . Se define  $\forall i = 1, \dots, n$ , la **derivada parcial  $i$ -ésima** de  $f$  en  $a$  como el límite, cuando existe,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}^m,$$

donde  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ .

**Observación.** Otra forma de escribir la definición anterior es:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}.$$

**Definición 4.4 (Derivada direccional).** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $a \in U$ . Dado  $w \in \mathbb{R}^n$ , se define la **derivada direccional** de  $f$  en  $a$  según el vector  $w$  al límite, si existe

$$D_w f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tw) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}^m.$$

**Observación.** Es fácil ver que  $D_{e_i} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ .

**Observación.** Podemos deducir que  $D_w f(a) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(a + tw)$ . En efecto, si tomamos  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m : t \rightarrow f(a + tw)$ , tenemos que

$$\varphi'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tw) - f(a)}{t} = D_w f(a).$$

**Ejemplo.** Consideremos  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x, y) = \begin{cases} x + \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Calculemos las derivadas parciales en  $(0, 0)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( t + \frac{t \cdot 0}{\sqrt{t^2}} - 0 \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t} = 1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot 0 = 0.$$

Por otro lado, si  $w = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ , tenemos que

$$\begin{aligned} D_w f(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu, tv) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( tu + \frac{t^2 uv}{|t| \sqrt{u^2 + v^2}} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( u + \frac{t}{|t|} \frac{uv}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right). \end{aligned}$$

Si  $vu \neq 0$ , tenemos que  $\frac{uv}{\sqrt{u^2 + v^2}} \neq 0$ , por lo que el límite no existe <sup>a</sup>.

<sup>a</sup>El problema es que al tener  $|t|$  en el denominador, al hacer el límite por la izquierda y por la derecha obtenemos  $-1$  y  $1$ , respectivamente.

**Observación.** Denotamos  $f = (f_1, \dots, f_m)$ . Entonces, puesto que los límites en  $\mathbb{R}^m$  se obtienen coordenada a coordenada, tenemos que

$$D_w f(a) = (D_w f_1(a), \dots, D_w f_m(a)) \in \mathbb{R}^m.$$

### 4.3. Diferenciabilidad

**Definición 4.5 (Diferenciabilidad).** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $a \in U$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Se dice que  $f$  es **diferenciable** en  $a$  si existe  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  lineal tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0.$$

**Observación.** Podemos observar que  $f(a + h) = f(a) + L(h) + r(h)$ , donde  $r(h) = f(a + h) - f(a) - L(h)$ . Entonces,  $f$  es diferenciable en  $a$  si y solo si  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$ . En este caso, se denota  $r(h) = o(h)$  y así tenemos que  $f$  es diferenciable en  $a$  si y solo si  $f(a + h) = f(a) + L(h) + o(h)$ , donde  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es lineal.

**Proposición 4.1.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $a \in U$ . Si  $f$  es diferenciable en  $a$  con aplicación lineal  $L$ , entonces  $\forall v \in \mathbb{R}^n$  existe  $D_v f(a) = L(v)$ . Por tanto, la aplicación  $L$  es única y la denotaremos  $L = Df(a)$  y la llamaremos **diferencial** de  $f$  en  $a$ .

*Demostración.* Tomamos  $v \in \mathbb{R}^n$  con  $v \neq 0$ , y consideramos  $h = tv$  con  $t \in \mathbb{R}$ . Entonces,

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a) - L(tv)}{\|tv\|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a) - tL(v)}{|t|}.$$

Por tanto, tenemos que

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f(a + tv) - f(a) - tL(v)}{t} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} - L(v) \right|.$$

Por tanto, existe  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(a + tv) - f(a)) = L(v)$ . Por otro lado, si  $v = 0$ , tenemos que  $D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} (f(a) - f(a)) = 0 = L(0)$ .  $\square$

**Ejemplo.** Consideremos  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con

$$f(x, y) = \begin{cases} x + \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Estudiemos si  $f$  es diferenciable en  $a = (0, 0)$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(t, 0) - f(0, 0)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (t + 0) = 1. \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(0, t) - f(0, 0)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (0 - 0) = 0. \end{aligned}$$

Veamos si  $L$  que buscamos es lineal. Si  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , por ser  $L$  lineal tendríamos que

$$L(u, v) = uL(e_1) + vL(e_2) = uD_{e_1}f(a) + vD_{e_2}f(a).$$

Así, podemos ver que si  $f$  es diferenciable en  $a$ , entonces  $L(u, v) = u \cdot 1 + v \cdot 0 = u$ . Vamos a ver si  $f$  es diferenciable en  $a = (0, 0)$ :

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - L(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left( x + \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 - x \right) \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x|y|}{x^2 + y^2} \sim \frac{r^2 \cos \theta |\sin \theta|}{r^2}. \end{aligned}$$

Como el valor del límite depende de  $\theta$ , tenemos que el límite no existe, por lo que  $f$  no es diferenciable en  $(0, 0)$ . Otra forma de verlo es, dado  $w = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ , tenemos que

$$\begin{aligned} D_w f(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(tu, tv) - f(0, 0)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( tu + \frac{t|t|u|v|}{|t|\sqrt{u^2+v^2}} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( u + \frac{u|v|}{\sqrt{u^2+v^2}} \right) = u + \frac{u|v|}{\sqrt{u^2+v^2}}. \end{aligned}$$

Esta última expresión no es lineal, por lo que  $f$  no es diferenciable en  $(0,0)$ .

**Proposición 4.2.** Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $a \in U$ . Entonces  $f$  es diferenciable en  $a$  si y solo si  $f_1, \dots, f_m$  son diferenciables en  $a$  y en este caso

$$Df(a)(v) = (Df_1(a)(v), \dots, Df_m(a)(v)).$$

*Demostración.* Sea  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y denotamos  $L = (L_1, \dots, L_m)$ . Entonces, el límite de la definición es cero si y solo si cada componente tiene límite cero, es decir, si y solo si cada  $f_j$  es diferenciable en  $a$  con  $L_j, \forall j = 1, \dots, m$ .

$$D(f(a))(v) = D_v f(a) = (D_v f_1(a), \dots, D_v f_m(a)) = (Df_1(a)(v), \dots, Df_m(a)(v)).$$

□

**Definición 4.6 (Matriz jacobiana).** Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $a \in U$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Si  $f$  admite todas las derivadas parciales en  $a$ , se define la **matriz jacobiana** de  $f$  en  $a$  como

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n}.$$

**Proposición 4.3.** Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $a \in U$ . Si  $f$  es diferenciable en  $a$ , la matriz jacobiana,  $Jf(a)$ , es la matriz de  $Df(a)$  con respecto a las bases canónicas.

*Demostración.* Sea  $v = \sum_{i=1}^m v_i e_i \in \mathbb{R}^m$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} Df(a)(v) &= (Df_1(a)(v), \dots, Df_m(a)(v)) = \left( Df_1(a) \left( \sum_{i=1}^m v_i e_i \right), \dots, Df_m(a) \left( \sum_{i=1}^m v_i e_i \right) \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n v_i Df_1(a)(e_i), \dots, \sum_{i=1}^n v_i Df_m(a)(e_i) \right) = \left( \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \dots, \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(a) \right) \\ &= Jf(a) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

**Observación.** Podemos establecer dos límites equivalentes que definen la diferenciabilidad

lidad:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|}.$$

**Proposición 4.4.** Si  $f$  es constante, entonces  $f$  es diferenciable en todos los puntos y  $Df(a) = 0, \forall a \in U$ .

*Demuestra*ción. En efecto, tenemos que si  $x \rightarrow a$

$$\frac{f(x) - f(a) - 0}{\|x-a\|} = \frac{0}{\|x-a\|} \rightarrow 0.$$

□

**Proposición 4.5.** Si  $f$  es lineal, tenemos que  $f$  es diferenciable en todos los puntos y  $Df(a) = f, \forall a \in U$ .

*Demuestra*ción. En efecto, tenemos que

$$\frac{f(x) - f(a) - f(x-a)}{\|x-a\|} = \frac{f(x) - f(a) - f(x) + f(a)}{\|x-a\|} = 0.$$

□

**Proposición 4.6.** Si  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  son diferenciables en  $a \in U$  y  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , entonces  $\lambda f + \mu g$  es diferenciable en  $a$  y

$$D(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda Df(a) + \mu Dg(a).$$

*Demuestra*ción. En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} & \frac{(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(a) - (\lambda Df(a) + \mu Dg(a))(x-a)}{\|x-a\|} \\ &= \frac{\lambda [f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)] + \mu [g(x) - g(a) - Dg(a)(x-a)]}{\|x-a\|} \\ &= \lambda \left( \frac{f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)}{\|x-a\|} \right) + \mu \left( \frac{g(x) - g(a) - Dg(a)(x-a)}{\|x-a\|} \right) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

---

**Notación.** Denotamos  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \{L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : L \text{ lineal}\}$ , que es un espacio vectorial de dimensión  $n \times m$ . Para  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  definimos la norma matricial <sup>a</sup>

$$\|L\| = \sup \{\|L(u)\| : \|u\| \leq 1\} = \sup \{\|L(u)\| : u \in \overline{B}(0, 1)\} < \infty.$$

<sup>a</sup>Por ser  $L$  una aplicación lineal (y por ello continua) y por ser  $\overline{B}(0, 1)$  un conjunto compacto, existe el supremo del conjunto.

**Proposición 4.7.** La aplicación definida anteriormente es efectivamente una norma.

*Demostración.* ■ Veamos que si  $\|L\| = 0$ , entonces  $L = 0$ . Para ello, supongamos que  $L \neq 0$ . Entonces, existe  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $L(x) \neq 0$ . Así, tenemos que  $x \neq 0$  y podemos considerar  $u = \frac{x}{\|x\|} \in \overline{B}(0, 1)$ . Así, tenemos que

$$\|L\| \geq \|L(u)\| = \left\| L\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \left\| \frac{1}{\|x\|} L(x) \right\| = \frac{\|L(x)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}} \neq 0.$$

Así, tenemos que si  $\|L\| = 0$  entonces  $L = 0$ .

- Por otro lado, tenemos que si  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\|\lambda L\| = \sup \{ \|\lambda L(u)\| : u \in \overline{B}(0, 1) \} = |\lambda| \sup \{ \|L(u)\| : u \in \overline{B}(0, 1) \} = |\lambda| \|L\|.$$

- Similarmente, tenemos que  $\forall u \in \overline{B}(0, 1)$ ,

$$\|(L_1 + L_2)(u)\| \leq \|L_1(u)\| + \|L_2(u)\| \leq \|L_1\| + \|L_2\|.$$

Así, tenemos que  $\|L_1 + L_2\| \leq \|L_1\| + \|L_2\|$ .

□

**Observación.** Por tanto,  $\|\cdot\|$  define una norma en  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  que se llamará **matricial** porque

$$\|L(x)\|_{\mathbb{R}^m} \leq \|L\| \|x\|_{\mathbb{R}^n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

En efecto, para  $x = 0$  es trivial. Si  $x \neq 0$ , tomamos  $u = \frac{x}{\|x\|} \in \overline{B}(0, 1)$  por lo que  $\|L(u)\| \leq \|L\|$ . Así, obtenemos que

$$\|L(x)\|_{\mathbb{R}^m} \leq \|L\| \|x\|_{\mathbb{R}^n}.$$

**Proposición 4.8.** Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $a \in U$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Si  $f$  es diferenciable en  $a$ , entonces existen  $r > 0$  y  $M > 0$  tales que

$$\|f(x) - f(a) - Df(a)(x - a)\| \leq M\|x - a\|, \quad \|x - a\| \leq r.$$

*Demostración.* Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $\|x - a\| \leq \delta$ , entonces

$$\|f(x) - f(a) - Df(a)(x - a)\| \leq \varepsilon\|x - a\|.$$

Dado  $\varepsilon = 1$ , existe  $r > 0$  tal que si  $\|x - a\| \leq r$ , entonces

$$\|f(x) - f(a) - Df(a)(x - a)\| \leq \|x - a\|.$$

Así, nos queda que

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(a)\| &\leq \|x - a\| + \|Df(a)(x - a)\| \\ &\leq \|x - a\| + \|Df(a)\|\|x - a\| = (\|Df(a)\| + 1)\|x - a\|.\end{aligned}$$

Así, basta con tomar  $M = \|Df(a)\| + 1$ .  $\square$

**Corolario 4.1.** Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $a \in U$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Si  $f$  es diferenciable en  $a$  entonces  $f$  es continua en  $a$ .

**Teorema 4.2 (Regla de la cadena).** Sean  $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$  abiertos,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$  con  $f(U) \subset V$ , y sea  $a \in U$ . Entonces, si  $f$  es diferenciable en  $a$  y  $g$  es diferenciable en  $f(a)$ , entonces  $g \circ f$  es diferenciable en  $a$  y

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a).$$

Por tanto,  $J(g \circ f)(a) = Jg(f(a)) \cdot J(f(a))$ .

*Demostración.* Por la proposición anterior sabemos que existen  $r > 0$  y  $M > 0$  tales que

$$\|f(x) - f(a)\| \leq M\|x - a\|, \|x - a\| \leq r.$$

Sea ahora  $M' = \|Dg(f(a))\|$  y denotamos  $b = f(a)$ . Dado  $\varepsilon > 0$  consideramos  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M + M'} > 0$ . Existe  $\delta_1 > 0$  tal que si  $\|y - b\| \leq \delta_1$ , entonces

$$\|g(y) - g(b) - Dg(b)(y - b)\| \leq \varepsilon'\|y - b\|.$$

También tenemos que existe  $\delta_2 > 0$  tal que si  $\|x - a\| \leq \delta_2$ , entonces

$$\|f(x) - f(a) - Df(a)(x - a)\| \leq \varepsilon'\|x - a\|.$$

Sea  $\delta = \min \left\{ r, \frac{\delta_1}{M}, \delta_2 \right\} > 0$ . Si  $\|x - a\| \leq \delta$ , en particular tenemos que

$$\|f(x) - f(a)\| \leq M\|x - a\| \leq M \cdot \frac{\delta_1}{M} = \delta_1.$$

Así, tomando  $y = f(x)$  tenemos que

$$\|g(f(x)) - g(f(a)) - Dg(f(a))(f(x) - f(a))\| \leq \varepsilon'\|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon'M\|x - a\|.$$

Así, nos queda

$$\begin{aligned}&\|g(f(x)) - g(f(a)) - Dg(f(a))(Df(a)(x - a))\| \\ &\leq \|g(f(x)) - g(f(a)) - Dg(f(a))(f(x) - f(a))\| + \|Dg(f(a))(f(x) - f(a) - Df(a)(x - a))\| \\ &\leq \varepsilon'M\|x - a\| + \|Dg(f(a))\|\|f(x) - f(a) - Df(a)(x - a)\| \leq \varepsilon'M'\|x - a\| + M\varepsilon'\|x - a\| \\ &= \varepsilon'(M + M')\|x - a\| = \varepsilon\|x - a\|.\end{aligned}$$

$\square$

**Teorema 4.3 (Condición suficiente de diferenciabilidad).** Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $a \in U$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Supongamos que  $\forall j = 1, \dots, m$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ ,  $\forall x \in U$ , existe  $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$  y además las funciones  $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  son continuas en  $a$ . Entonces,  $f$  es diferenciable en  $a$ .

*Demuestra.* Es suficiente considerar el caso  $m = 1$ , puesto que  $f = (f_1, \dots, f_m)$  es diferenciable en  $a$  si y solo si  $f_j$  es diferenciable en  $a$ ,  $\forall j = 1, \dots, m$ . Como  $U$  es abierto y  $a \in U$ , existe  $r > 0$  tal que  $B_\infty(a, r) \subset U$ . Sea  $x \in B_\infty(a, r)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n) \\ &= f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, x_2, \dots, x_n) + f(a_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\quad - f(a_1, a_2, x_3, \dots, x_n) + \dots + f(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x_n) - f(a_1, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Denotamos  $\varphi(t) = f(t, x_2, \dots, x_n)$  con  $t \in (a_1 - r, a_1 + r)$ , tenemos que si aplicamos el teorema del valor medio encontramos  $c_1$  un punto intermedio entre  $a_1$  y  $x_1$  tal que

$$f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi(x_1) - \varphi(a_1) = \varphi'(c_1)(x_1 - a_1).$$

En efecto, podemos aplicar el teorema del valor medio puesto que  $\varphi$  es derivable en  $(a_1 - r, a_1 + r)$  y

$$\varphi'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h, x_2, \dots, x_n) - f(t, x_2, \dots, x_n)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_n).$$

Así, aplicando el mismo razonamiento nos queda que

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= (x_1 - a_1) \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, x_2, \dots, x_n) + (x_2 - a_2) \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, c_2, \dots, x_n) \\ &\quad + \dots + (x_n - a_n) \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_{n-1}, c_n). \end{aligned}$$

donde cada  $c_i$  es un punto intermedio entre  $a_i$  y  $x_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ . Ahora, definimos  $L(h) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ , por tanto tendremos que

$$L(x - a) = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Así, nos queda que

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) - L(x - a) &= (x_1 - a_1) \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, x_2, \dots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_n) \right) \\ &\quad + \dots + (x_n - a_n) \left( \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_{n-1}, c_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_n) \right). \end{aligned}$$

De esta forma la fracción nos queda

$$\begin{aligned} \frac{|f(x) - f(a) - L(x - a)|}{\|x - a\|} &\leq \frac{|x_1 - a_1|}{\|x - a\|} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, x_2, \dots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_n) \right| \\ &\quad + \dots + \frac{|x_n - a_n|}{\|x - a\|} \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_{n-1}, c_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_n) \right|. \end{aligned}$$

Por tanto, cuando  $x \rightarrow a$  tenemos que  $\forall i = 1, \dots, n$ ,  $c_i \rightarrow a_i$  por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, x_2, \dots, x_n) &\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_{n-1}, c_n) &\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_n}(a). \end{aligned}$$

□

**Ejemplo.** Consideremos  $f(x, y, z) = x^2z + \sin(x + y + z)$ . Tenemos que  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Además,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xz + \cos(x + y + z), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x + y + z), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x^2 + \cos(x + y + z).$$

Todas las derivadas son continuas en  $\mathbb{R}^3$ , por lo que  $f$  es diferenciable en todo punto de  $\mathbb{R}^3$ .

**Observación.** El mismo resultado se obtiene  $\forall j = 1, \dots, m$ ,  $\forall i = 1, \dots, n - 1$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  es continua en  $a$  y además existe  $\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$ .

**Corolario 4.2.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Si  $f$  admite todas sus derivadas parciales en  $U$  y son continuas en  $U$ , entonces  $f$  es diferenciable en  $U$ .

**Lema 4.1.** La función  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $p(x, y) = xy$  es diferenciable en  $\mathbb{R}^2$  y  $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$Dp(x_0, y_0)(u, v) = x_0v + y_0u.$$

*Demostración.* Es trivial ver que

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x, y) = y, \quad \frac{\partial p}{\partial y}(x, y) = x.$$

Como ambas funciones son continuas en  $\mathbb{R}^2$ , por el teorema anterior tenemos que  $p$  es diferenciable en  $\mathbb{R}^2$ . Por otro lado,

$$Dp(x_0, y_0)(u, v) = \left( \frac{\partial p}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial p}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = x_0v + y_0u.$$

□

**Lema 4.2.** Sean  $A = \{(x, y) : y \neq 0\}$  y  $q : A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $q(x, y) = \frac{x}{y}$ . Entonces  $q$  es diferenciable en  $A$  y  $\forall (x_0, y_0) \in A$

$$Dq(x_0, y_0)(u, v) = \frac{y_0 u - x_0 v}{y_0^2}.$$

*Demostración.* Es trivial ver que

$$\frac{\partial q}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial q}{\partial y}(x, y) = -\frac{x}{y^2}.$$

Como son continuas en  $A$  tenemos que  $q$  es diferenciable en  $A$ . Por otro lado,

$$Dq(x_0, y_0)(u, v) = \left( \frac{1}{y_0}, -\frac{x_0}{y_0^2} \right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{y_0 u - x_0 v}{y_0^2}.$$

□

**Corolario 4.3 (de la Regla de la Cadena).** Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciables en  $a$ .

1. Entonces,  $f \cdot g$  es diferenciable en  $a$  y

$$D(f \cdot g)(a) = g(a)Df(a) + f(a)Dg(a).$$

2. Si además,  $g(a) \neq 0$ , entonces  $\frac{f}{g}$  es diferenciable en  $a$  y

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)Df(a) - f(a)Dg(a)}{g(a)^2}.$$

*Demostración.* 1. Podemos considerar la composición de funciones

$$\begin{aligned} U &\rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow (f(x), g(x)) \rightarrow f(x)g(x). \end{aligned}$$

Así, nos queda que  $f \cdot g = p \circ (f, g)$ . De esta forma, tenemos que  $\forall v \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} D(f \cdot g)(a)(v) &= [D(p(f(a), g(a))) \circ D(f, g)(a)](v) \\ &= Dp(f(a), g(a))(Df(a)(v), Dg(a)(v)) = g(a) \cdot Df(a)(v) + f(a) \cdot Dg(a)(v). \end{aligned}$$

2. Según el lema previo, la función  $q : A = \{(x, y) : y \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$  :  $(x, y) \rightarrow \frac{x}{y}$  es diferenciable en  $A$ . Como  $g(a) \neq 0$  y  $g$  es continua, el conjunto  $V = \{x \in U : g(x) \neq 0\}$  es abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Así, la función  $\frac{f}{g}$  está bien definida en  $V$  y tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} &: V \rightarrow^{(f,g)} A \rightarrow^q \mathbb{R} \\ x &\rightarrow (f(x), g(x)) \rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}. \end{aligned}$$

Puesto que  $h = (f, g)$  es diferenciable en  $A$  y  $Dh(a)(v) = (Df(a)(v), Dg(a)(v))$ , tenemos que

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(a) = D(q \circ h)(a) = Dq(h(a)) \circ Dh(a).$$

Así,  $\forall w \in \mathbb{R}^n$  se cumple que

$$\begin{aligned} D\left(\frac{f}{g}\right)(a)(w) &= Dq(f(a), g(a))[Dh(a)(w)] = Dq(f(a), g(a))(Df(a)(w), Dg(a)(w)) \\ &= \frac{g(a)Df(a)(w) - f(a)Dg(a)(w)}{g(a)^2}. \end{aligned}$$

□

**Observación.** Sean  $f, g$  diferenciables y  $h = g \circ f$ . Por la regla de la cadena tenemos que  $Dh(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$  y que  $Jh(a) = Jg(f(a)) \cdot Jf(a)$ . Así, nos queda que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}_a = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial y_m} \end{pmatrix}_{f(a)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_a.$$

Así, si cogemos el elemento que está en la columna  $i$  y la fila  $k$  obtenemos que

$$\frac{\partial h_k}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_k}{\partial y_j} f(a) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a).$$

Convencionalmente, la regla de la cadena se escribe de la forma

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial z_k}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_i}.$$

**Ejemplo.** Consideremos  $u = x^2 + 3y$ ,  $v = \sin(x - y)$  y  $w = y$ . Consideremos la aplicación  $z = 2u - v^2 + w$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \\ &= 4x - 2v \cos(x - y) = 4x - 2 \sin(x - y) \cos(x - y). \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \\ &= 6 + 2v \cos(x - y) + 1 = 7 + 2 \sin(x - y) \cos(x - y). \end{aligned}$$

También las podríamos haber calculado con el producto de las matrices jacobianas.

**Definición 4.7 (Vector gradiente).** Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en  $a \in U$ . Se define el **vector gradiente** de  $f$  en  $a$  como

$$\nabla f(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \in \mathbb{R}^n.$$

**Observación.** Tenemos que  $\forall w \in \mathbb{R}^n$ ,

$$Df(a)(w) = D_w f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) w_i = \langle \nabla f(a), w \rangle.$$

**Observación.** Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo abierto y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Sabemos que  $f$  es diferenciable en  $t_0 \in I$  si y solo si  $f$  es derivable en  $t_0$  y además  $f'(t_0) = Df(t_0)(1)$ .

**Corolario 4.4.** Sean  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo abierto,  $t_0 \in I$ ;  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  derivable en  $t_0$  con  $f(I) \subset U$  abierto;  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en  $a = f(t_0)$ . Entonces,  $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable en  $t_0$  y además

$$(g \circ f)'(t_0) = \langle \nabla g(f(t_0)), f'(t_0) \rangle.$$

*Demostración.* Es fácil ver que

$$(g \circ f)'(t_0) = D(g \circ f)(t_0)(1) = Dg(f(t_0))(f'(t_0)) = \langle \nabla g(f(t_0)), f'(t_0) \rangle.$$

□

## 4.4. Conjuntos de nivel

**Definición 4.8 (Conjuntos de nivel).** Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en  $U$ . Se define el **conjunto de nivel** de  $F$  correspondiente al valor  $r \in \mathbb{R}$  como

$$S_r = \{x \in U : F(x) = r\}.$$

**Ejemplo.** 1. Si consideramos  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $F(x, y) = x^2 + y^2$ . Para un  $r \in \mathbb{R}$  tenemos que

$$S_r = \begin{cases} \emptyset, & r < 0 \\ \{(0, 0)\}, & r = 0 \\ \{(x, y) : x^2 + y^2 = r\}, & r > 0 \end{cases}.$$

2. Consideremos  $F(x, y) = xy$ . Tenemos que sus curvas de nivel son hipérbolas si

$r \neq 0$  y los ejes de coordenadas en el caso de que  $r = 0$ .

3. Si tomamos  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , obtenemos superficies esféricas para  $r > 0$ ; el origen si  $r = 0$ ; y el conjunto vacío si  $r < 0$ .
4. Consideremos  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ . En el caso  $r = 0$  tenemos el conjunto de nivel dado por la ecuación  $z^2 = x^2 + y^2$ , que es un cono. Si  $r = 1$ , tenemos el conjunto de nivel dado por la ecuación  $x^2 + y^2 = r + z^2$  por lo que obtenemos un hiperboloide. Si  $r = -1$ , obtenemos el conjunto de nivel dado por la ecuación  $x^2 + y^2 - r = +z^2$ , es decir,  $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - r}$ , que es un paraboloide.

**Proposición 4.9.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable,  $r \in \mathbb{R}$  y sea  $p \in S_r$ . Sea  $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva diferenciable con  $\sigma(t_0) = p$  y tal que  $\text{Im}(\sigma) \subset S_r$ . Entonces,  $\nabla F(p) \perp \sigma'(t_0)$ .

*Demostración.* Consideremos la composición

$$I \xrightarrow{\sigma} S_r \subset U \xrightarrow{F} \mathbb{R}.$$

Tenemos que  $F \circ \sigma(t) = r, \forall t \in I$ . Consecuentemente,

$$0 = (F \circ \sigma)'(t) = \langle \nabla F(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle.$$

Por lo que  $\nabla F(p) \perp \sigma'(t_0)$ . □

**Definición 4.9 (Hiperplano tangente).** Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  y  $r \in \mathbb{R}$ . Sea  $p \in S_r$ . Si  $\nabla F(p) \neq 0$ , se dice que  $\nabla F(p)$  es un **vector normal** a  $S_r$  en  $p$  y se define el **hiperplano tangente** a  $S_r$  en  $p$  como el hiperplano que pasa por  $p$  y es perpendicular a  $\nabla F(p)$ .

**Ejemplo.** Consideremos  $M = \{(x, y, z) : 2x^2 + y^2 + 3z^2 = 6\}$ , que es un elipsoide. Tomamos  $p = (1, 2, 0) \in M$ . Calculamos el hiperplano tangente a  $M$  en  $p$ . Tenemos que

$$\nabla F(p) = (4x, 2y, 6z)|_p = (4, 4, 0).$$

Así, el hiperplano que buscamos es

$$4(x - 1) + 4(y - 2) = 0.$$

## Superficies explícitas

Una superficie es explícita si tiene la forma  $z = f(x, y)$  con  $f$  diferenciable. Una forma de calcular el hiperplano tangente es definir  $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ . Así, tenemos que

$$z = f(x, y) \iff F(x, y, z) = 0.$$

Por tanto, toda superficie explícita puede considerarse una superficie implícita. Tendremos que

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right).$$

Tomando  $z_0 = f(x_0, y_0)$  tendremos que el plano tangente en  $p = (x_0, y_0, z_0)$  será

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Es decir,

$$z = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Otra forma de calcular el hiperplano tangente es, dada  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable, considerar su gráfica  $z = f(x, y)$ . Dado  $p = (x_0, y_0) \in \text{Im}(z)$ , podemos considerar la curva

$$\sigma(t) = (x_0 + t, y_0, f(x_0 + t, y_0)), \quad \sigma(0) = p$$

Así, tenemos que

$$\sigma'(0) = \left( 1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right).$$

De manera análoga, podemos fijar  $x_0$  y obtener la curva

$$\gamma(t) = (x_0, y_0 + t, f(x_0, y_0 + t)), \quad \gamma(0) = t.$$

Así, tendremos que el vector tangente a la superficie será

$$\gamma'(0) = \left( 0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Así, el plano tangente será el que viene dado por las ecuaciones

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda \\ y = y_0 + \mu \\ z = f(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \mu \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{cases}.$$

Claramente, obtenemos el mismo plano por ambos métodos.

## 4.5. Teorema del valor medio

**Definición 4.10 (Segmento).** Dados  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , el **segmento** que los une es

$$[x, y] = \{(1 - t)x + ty : 0 \leq t \leq 1\}.$$

**Teorema 4.4 (Teorema del valor medio).** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en  $U$ , y supongamos que  $[x, y] \subset U$ . Entonces, existe  $z \in [x, y]$  tal que

$$f(y) - f(x) = \langle \nabla f(z), y - x \rangle = Df(z)(y - x).$$

*Demostración.* Consideramos  $\sigma : [0, 1] \rightarrow U$ ,  $\sigma(t) = (1-t)x + ty = x + t(y-x)$  es derivable en  $[0, 1]$  y además  $\sigma'(t) = y - x$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ . Consideremos  $g = f \circ \sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $g(t) = f(\sigma(t)) = f((1-t)x + ty)$ . Por la regla de la cadena tenemos que  $g$  es derivable en  $[0, 1]$  y

$$g'(t) = \langle \nabla f(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle = \langle \nabla f((1-t)x + ty), y - x \rangle.$$

Aplicando el teorema del valor medio en  $\mathbb{R}$ , tenemos que existe  $c \in (0, 1)$  tal que

$$g(1) - g(0) = g'(c) \iff f(y) - f(x) = \langle \nabla f((1-c)x + cy), y - x \rangle.$$

Llamando  $z = (1-c)x + cy \in [x, y]$ , tenemos que

$$f(x) - f(y) = \langle \nabla f(z), y - x \rangle.$$

□

**Corolario 4.5.** Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto convexo,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en  $U$  y supongamos que  $\|\nabla f(z)\| \leq K$ ,  $\forall z \in U$ <sup>a</sup>. Entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq K\|x - y\|, \quad \forall x, y \in U.$$

<sup>a</sup>Consideramos la norma euclídea.

*Demostración.* Dados  $x, y \in U$ , tenemos que  $[x, y] \subset U$  y por el teorema anterior existe  $z \in [x, y]$  tal que, aplicando la desigualdad Cauchy-Swartz,

$$|f(y) - f(x)| = |\langle \nabla f(z), y - x \rangle| \leq \|\nabla f(z)\| \|y - x\| \leq K\|y - x\|.$$

□

**Corolario 4.6.** Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto convexo y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en  $U$  tal que  $\nabla f(z) = 0$ ,  $\forall z \in U$ . Entonces  $f$  es constante en  $U$ .

*Demostración.* Tenemos que  $\forall x, y \in U$ ,

$$|f(x) - f(y)| \leq \|\nabla f(z)\| \|x - y\| = 0.$$

Así, tenemos que  $f(x) = f(y)$ . □

**Observación.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto conexo y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en  $U$  tal que  $\nabla f(z) = 0$ ,  $\forall z \in U$ . Entonces  $f$  es constante en  $U$ .

*Demostración.* Sea  $x_0 \in U$ , tenemos que existe  $r > 0$  tal que  $B(x_0, r) \subset U$ , que es convexo, por lo que  $f$  es constante en  $B(x, r)$ . Sea  $A = \{x \in U : f(x) = f(x_0)\}$ .

- Tenemos que  $A \neq \emptyset$  puesto que  $x_0 \in A$ .

- Tenemos que  $A$  es abierto en  $U$ . En efecto, dado  $x \in A$ , existe  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \subset U$  y por el corolario anterior tenemos que  $f$  es constante en  $B(x, r)$  por ser esta convexa. Así,  $f(y) = f(x_0)$ ,  $\forall y \in B(x, r)$  por lo que  $B(x, r) \subset A$ .
- Análogamente, tenemos que  $A$  es cerrado en  $U$ . Veamos que  $U/A$  es abierto. Dado  $x \in U/A$  tenemos que  $f(x) \neq f(x_0)$ . Existe  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \subset U$  y sabemos que  $f|_{B(x, r)}$  es constante. Por tanto, debe ser que  $f(y) = f(x) \neq f(x_0)$ ,  $\forall y \in B(x, r)$ . Por lo que  $B(x, r) \subset U/A$ .

Por conexión debe ser que  $A = U$ . □

**Teorema 4.5 (Desigualdad del valor medio).** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciable en  $U$ . Supongamos que  $\left| \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(z) \right| \leq K$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ ,  $\forall j = 1, \dots, m$ ,  $\forall z \in [x, y] \subset U$ . Entonces <sup>a</sup>,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K\sqrt{n \cdot m}\|y - x\|.$$

<sup>a</sup>Consideramos la norma euclídea.

*Demostración.* Tenemos que  $\forall j = 1, \dots, m$ ,  $f_j : U \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable, luego por el teorema del valor medio existe  $z_j \in [x, y]$  tal que

$$|f_j(y) - f_j(x)| = |\langle \nabla f_j(z_j), y - x \rangle| \leq \|\nabla f_j(z_j)\| \|y - x\|.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\|\nabla f_j(z_j)\|^2 = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(z_j) \right|^2 \leq nK^2.$$

Así, la desigualdad anterior nos queda

$$|f_j(y) - f_j(x)| \leq \sqrt{n}K\|y - x\|.$$

Así, tenemos que

$$\|f(y) - f(x)\|^2 = \sum_{j=1}^m |f_j(y) - f_j(x)|^2 \leq \sum_{j=1}^m nK^2\|y - x\|^2 = nmK^2\|y - x\|^2.$$

Quitando los cuadrados obtenemos el resultado deseado. □

**Corolario 4.7.** Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto convexo,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciable en  $U$ , y supongamos que  $\left| \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(z) \right| \leq K$ ,  $\forall j = 1, \dots, m$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ ,  $\forall z \in U$ . Entonces,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K\sqrt{nm}\|x - y\|, \quad \forall x, y \in U.$$

## 4.6. Derivadas de orden superior

**Ejemplo.** Consideremos  $f(x, y, z) = x^3y^2 + xz + \sin(x - y^2)$ . Tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 + z + \cos(x - y^2).$$

Así, podemos calcular las derivadas:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x^2y + 2y \sin(x - y^2).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 6x^2y + 2y \sin(x - y^2).$$

**Definición 4.11** (Derivadas parciales de orden 2). Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto, consideremos  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a \in U$ . Se define, cuando existe, la **derivada parcial de orden 2** de la forma

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right), \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

**Definición 4.12.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Se dice que  $f$  es de **clase  $\mathcal{C}^2$**  en  $U$ , y se denota,  $f \in \mathcal{C}^2(U)$ , cuando  $f$  admite todas las derivadas parciales segundas en  $U$  y todas son continuas en  $U$ .

**Teorema 4.6** (Teorema de Schwarz). Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $f \in \mathcal{C}^2(U)$ . Entonces,  $\forall i, j = 1, \dots, n, \forall a \in U$ , se tiene que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

*Demostración.* Podemos limitarnos al caso  $n = 2$ . Así, supongamos que  $U \subset \mathbb{R}^2$  y  $a = (x_0, y_0) \in U$ . Sea  $r > 0$  tal que  $B_\infty((x_0, y_0), r) \subset U$ <sup>1</sup>. Dados  $(h, k) \in B_\infty((0, 0), r)$ , es decir,  $|h|, |k| < r$ , obtenemos que el rectángulo  $R_{(h,k)}$  de vértices  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_0 + h, y_0)$ ,  $(x_0, y_0 + k)$  y  $(x_0 + h, y_0 + k)$  está contenido en  $U$ . Consideramos

$$S(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0).$$

Consideremos  $\varphi_k(t) = f(t, y_0 + k) - f(t, y_0)$ , así, tenemos que

$$S(h, k) = \varphi_k(x_0 + h) - \varphi_k(x_0) = \varphi'_k(\alpha(h, k))h.$$

En efecto, tenemos que

$$\varphi'_k(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, y_0),$$

que existe por hipótesis. Así, nos queda que

$$S(h, k) = h \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha(h, k), y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha(h, k), y_0) \right],$$

<sup>1</sup>Recordamos que  $B_\infty((x_0, y_0), r) = (x_0 - r, x_0 + r) \times (y_0 - r, y_0 + r)$ .

donde  $\alpha(h, k)$  es un punto intermedio entre  $x_0$  y  $x_0 + h$ . Denotamos  $g(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha(h, k), t)$ , y obtenemos que

$$S(h, k) = h [g(y_0 + k) - g(y_0)].$$

Por otro lado,

$$g'(t) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (\alpha(h, k), t).$$

Aplicando nuevamente el teorema del valor medio obtenemos que existe  $\beta(h, k)$  punto intermedio entre  $y_0$  e  $y_0 + k$ ,

$$S(h, k) = h k g'(\beta(h, k)).$$

Por tanto, para cada par  $(h, k) \in B_\infty((0, 0), r)$  existen puntos intermedios  $(\alpha(h, k), \beta(h, k)) \in R(h, k)$  tales que

$$\frac{S(h, k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\alpha(h, k), \beta(h, k)) \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0),$$

cuando  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ , por lo que  $(\alpha(h, k), \beta(h, k)) \rightarrow (x_0, y_0)$ , puesto que  $f \in C^2(U)$ . De forma análoga, podemos plantear  $\psi_h(t) = f(x_0 + h, t) - f(x_0, t)$ , obteniendo

$$\psi'_h(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, t) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, t).$$

Aplicando el teorema del valor medio, existe  $\tilde{\beta}(h, k)$  un punto intermedio entre  $y_0$  e  $y_0 + k$  tal que

$$S(h, k) = \psi_h(y_0 + k) - \psi(y_0) = k \psi'_h(\tilde{\beta}(h, k)) = k \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, \tilde{\beta}(h, k)) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \tilde{\beta}(h, k)) \right].$$

Considerando  $\tilde{g} = \frac{\partial f}{\partial y}(t, \tilde{\beta}(h, k))$ , tenemos que

$$S(h, k) = k [\tilde{g}(x_0 + h) - \tilde{g}(x_0)] = kh \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\tilde{\alpha}(h, k), \tilde{\beta}(h, k)),$$

donde  $\tilde{\alpha}(h, k)$  es un punto intermedio entre  $x_0$  y  $x_0 + h$ . Así, obtenemos que

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{S(h, k)}{hk} = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\tilde{\alpha}(h, k), \tilde{\beta}(h, k)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

Nuevamente hemos usado la continuidad de  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ . □

**Definición 4.13.** Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a \in U$ . Dados  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$  se define recursivamente, cuando existe

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(a) = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left( \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}}(a) \right).$$

**Definición 4.14.** Se dice que  $f$  es de clase  $\mathcal{C}^k$  en  $U$ , y se denota  $f \in \mathcal{C}^k(U)$ , si existen todas las derivadas parciales de orden  $k$  en  $U$  y son continuas. Análogamente, decimos que  $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$  si  $f \in \mathcal{C}^k(U)$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .

**Corolario 4.8.** Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^k$  en  $U$ . Sea  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$  y sea  $(i'_1, \dots, i'_k)$  una permutación de  $(i_1, \dots, i_k)$ . Entonces,

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i'_1} \cdots \partial x_{i'_k}}, \text{ en } U.$$

*Demostración.* Sabemos que toda permutación es composición de trasposiciones. Por tanto, trasponiendo  $(i_1, \dots, i_k)$  podemos pasar de  $(i_1, \dots, i_k)$  a  $(i'_1, \dots, i'_{k'})$  en una cantidad finita de pasos en los cuales intercambiamos dos índices entre sí.  $\square$

**Definición 4.15.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Se dice que  $f$  es de **clase**  $\mathcal{C}^k$  en  $U$ , y se denota  $f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^m)$ , si  $\forall j = 1, \dots, m$  se tiene que  $f_j \in \mathcal{C}^k(U)$ .

**Observación.** Es fácil comprobar que

$$\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^m) \subset \mathcal{C}^{k-1}(U, \mathbb{R}^m) \subset \cdots \subset \mathcal{C}(U, \mathbb{R}^m),$$

donde  $\mathcal{C}(U, \mathbb{R}^m)$  representa el conjunto de las funciones continuas de  $U$  en  $\mathbb{R}^m$ .

**Lema 4.3.** Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Son equivalentes, para  $k \in \mathbb{N}$  con  $k \geq 2$ :

1.  $f \in \mathcal{C}^k(U)$ .
2.  $\forall i = 1, \dots, n, \exists \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{C}^{k-1}(U)$ .

*Demostración.* (i) Tenemos que  $\forall i_1, \dots, i_{k-1} \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k-1}} \partial x_i} = \frac{\partial^{k-1}}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k-1}}} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right),$$

estas últimas existen y son continuas  $\forall i = 1, \dots, n$ .

(ii) Por otro lado,  $\forall i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ , tenemos que

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^{k-1}}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k-1}}} \left( \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}} \right),$$

estas últimas existen y son continuas.  $\square$

**Teorema 4.7** (Regla de la cadena -  $\mathcal{C}^r$ ). Esto es cierto si  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $V \subset \mathbb{R}^m$  abierto,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $f(U) \subset V$ ;  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Si  $f \in \mathcal{C}^r(U)$  y  $g \in \mathcal{C}^r(V)$ , tenemos que  $g \circ f \in \mathcal{C}^r(U)$ .

*Demostración.* Consideremos varios casos:

- Para  $r \in \mathbb{N}$ , aplicamos inducción sobre  $r$ .
    - Si  $r = 1$ , tenemos que  $f, g \in \mathcal{C}^1$ . Por tanto, tenemos que  $f$  y  $g$  son diferenciables en  $U$  y  $V$ , respectivamente, luego por la regla de la cadena tenemos que  $h = g \circ f$  es diferenciable y  $\forall k \in \{1, \dots, p\}$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ , como  $J(g \circ f)(x) = Jg(f(x)) \cdot Jf(x)$ ,
- $$\frac{\partial h_k}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial g_k}{\partial y_j} \circ f \right)(x) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x),$$
- que es continua.
- Supongamos que la composición de funciones en  $\mathcal{C}^r$  está también en  $\mathcal{C}^r$ . Veamos que pasa con  $r + 1$ . Sean  $f, g \in \mathcal{C}^{r+1}$ , tenemos que las derivadas parciales de  $f$  y de  $g$  son  $\mathcal{C}^r$ , por el lema anterior. Es fácil aplicar la fórmula anterior para obtener el resultado deseado.
  - El caso  $r = \infty$ , tenemos que  $f, g \in \mathcal{C}^\infty$ , que es cierto si y solo si  $\forall r \in \mathbb{N}$  se tiene que  $f, g \in \mathcal{C}^r$ . Por tanto,  $g \circ f \in \mathcal{C}^r$ ,  $\forall r \in \mathbb{N}$ , que es lo mismo que decir que  $g \circ f \in \mathcal{C}^\infty$ .

□

**Ejemplo** (Ejemplos de funciones de  $\mathcal{C}^\infty$ ). Algunos ejemplos ilustrativos:

- Polinomios en varias variables:

$$f(x, y, z) = x + 5y^2 + 3xyz - 2x^3 + 7yz^2.$$

- $f(x, y) = \sin(x^2 - y^2 + 1)$ .
- $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$ .

## 4.7. Diferenciales de orden superior

**Definición 4.16** (Diferencial segunda). Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ . Para cada  $a \in U$ , se define la **diferencial segunda** de  $f$  en  $a$  como la forma cuadrática  $D^2f(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$D^2f(a)(h) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j.$$

Es decir,

$$Df^2(a)(h_1, \dots, h_n) = (h_1, \dots, h_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

**Definición 4.17** (Polinomio homogéneo de grado  $k$ ). Un **polinomio homogéneo de grado  $k$**  en  $\mathbb{R}^n$  es una función  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de la forma:

$$P(h) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n a_{i_1, \dots, i_k} h_{i_1} \cdots h_{i_k},$$

donde  $a_{i_1, \dots, i_k} \in \mathbb{R}$ ,  $\forall i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ .

**Definición 4.18** (Diferencial  $k$ -ésima). Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$  donde  $k \in \mathbb{N}$ . Para cada  $a \in U$  se define la **diferencial  $k$ -ésima** de  $f$  en  $a$  como el polinomio homogéneo de grado  $k$  dado por

$$D^k f(a)(h) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} h_{i_1} \cdots h_{i_k}.$$

**Ejemplo.** Consideremos  $f(x, y) = e^{2x+3y}$  y  $a = (0, 0)$ . Es fácil ver que  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 2e^{2x+3y}|_a = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 3e^{2x+3y}|_a = 3.$$

Así, tendremos que la diferencial es  $Df(a)(h_1, h_2) = 2h_1 + 3h_2$ . Ahora calculamos la diferencial de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) = 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) = 9.$$

Así, nos queda

$$D^2f(a)(h_1, h_2) = 4h_1^2 + 12h_1h_2 + 9h_2^2.$$

Ahora calculamos la diferencial de tercer orden:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a) = 8, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(a) = 12, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(a) = 18, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a) = 27.$$

Así, tenemos que

$$Df^3(a)(h_1, h_2) = 8h_1^3 + 3 \cdot 12h_1^2h_2 + 3 \cdot 18h_1h_2^2 + 27h_2^3.$$

**Teorema 4.8 (Teorema de Taylor).** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $a \in U$ ,  $f \in \mathcal{C}^k(U)$  donde  $k \in \mathbb{N}$ . Si  $[a, a+h] \subset U$ , entonces existe  $\theta \in [0, 1]$  tal que

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + Df(a)(h) + \frac{1}{2}D^2f(a)(h) \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}D^{k-1}(a)(h) + \frac{1}{k!}D^k f(a+\theta h)(h). \end{aligned}$$

*Demostración.* Aplicamos el teorema de Taylor con resto de Lagrange en una variable. Denotamos  $\varphi(t) = a + th$  para  $t \in \mathbb{R}$ , donde  $\varphi(0) = a$  y  $\varphi(1) = a + h$ . Consideramos la función  $g(t) = (f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t))$ . Como  $f \in \mathcal{C}^k$  y  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ , tenemos que  $g \in \mathcal{C}^k$  en un abierto que contiene a  $[0, 1]$ <sup>2</sup>. Así, podemos aplicar a  $g$  el teorema de Taylor con resto de Lagrange:

$$g(1) = g(0) + g'(0) \cdot 1 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}g^{(k-1)}(0) \cdot 1 + \frac{1}{k!}g^{(k)}(\theta) \cdot 1.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} g'(0) &= (f \circ \varphi)'(0) = \langle \nabla f(\varphi(0)), \varphi'(0) \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} h_i. \\ g''(t) &= (f \circ \varphi)''(t) = \sum_{i=1}^n h_i \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t)) \right) h_j \right) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(\varphi(t))}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j. \end{aligned}$$

Por tanto,  $g''(0) = D^2f(a)(h)$ . Por inducción se demuestra que  $\forall 2 \leq j \leq k$ , se cumple que

$$g^{(j)}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_j=1}^n \frac{\partial^j(\varphi(t))}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_j}} h_{i_1} \cdots h_{i_j}.$$

Por lo que,

$$g^{(j)}(0) = \sum_{i_1, \dots, i_j=1}^n \frac{\partial^j f(a)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_j}} h_{i_1} \cdots h_{i_j}.$$

Así, obtenemos que

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)(h) + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}D^{k-1}f(a)(h) + \frac{1}{k!}D^k f(a+\theta h)(h).$$

□

---

<sup>2</sup>Estamos hablando del conjunto  $\varphi^{-1}(U)$ .

**Observación.** Haciendo  $h = x - a$  obtenemos

$$f(x) = f(a) + Df(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} D^{k-1}f(a)(x-a) + \frac{1}{k!} D^k f((1-\theta)a + \theta x)(x-a).$$

**Definición 4.19 (Polinomio de Taylor).** Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $a \in U$ ,  $f \in \mathcal{C}^k(U)$ . Se define el **polinomio de Taylor** de orden  $k$  de  $f$  en  $a$  como:

$$P_a^k(h) = f(a) + Df(a)(h) + \cdots + \frac{1}{k!} D^k f(a)(h) = f(a) + \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} D^j f(a)(h).$$

**Observación.** También podemos escribir el polinomio de Taylor de la forma

$$P_a^k(x-a) = f(a) + \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} D^j f(a)(x-a).$$

**Corolario 4.9 (al Teorema de Taylor).** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $a \in U$  y  $f \in \mathcal{C}^k(U)$ , con  $k \in \mathbb{N}$ . Entonces,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - P_a^k(h)}{\|h\|^k} = 0.$$

*Demostración.* Por el Teorema de Taylor, para  $h$  suficientemente pequeño tenemos que  $a+h \in U$  y por tanto existe  $\theta \in [0, 1]$  tal que

$$f(a+h) - P_a^k(h) = \frac{1}{k!} (D^k f(a+\theta h)(h) - D^k f(a)(h)).$$

Así, nos queda que

$$|f(a+h) - P_a^k(h)| \leq \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \left| \frac{\partial^k f(a+\theta h)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} - \frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} \right| |h_{i_1}| \cdots |h_{i_k}|.$$

Teniendo en cuenta que  $\forall i = 1, \dots, n$  se tiene que

$$|h_i| \leq \|h\| = \sqrt{|h_1|^2 + \cdots + |h_n|^2} \Rightarrow \frac{|h_i|}{\|h\|} \leq 1.$$

Por tanto, tenemos que

$$\frac{|f(a+h) - P_a^k(h)|}{\|h\|^k} \leq \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \left| \frac{\partial^k f(a+\theta h)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} - \frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} \right| \cdot 1 \rightarrow 0.$$

Este último paso se deduce de que  $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}$  es continua y  $a+\theta h \rightarrow a$  (porque  $h \rightarrow 0$ ).  $\square$

**Observación.** El equivalente en la otra notación sería

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_a^k(x-a)}{\|x-a\|^k} = 0.$$

**Observación.** Si  $f \in C^k(U)$ , el polinomio de Taylor de orden  $k$  de  $f$  en  $a$  satisface que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - P_a^k(h)}{\|h\|^k} = 0.$$

Se puede demostrar que el único polinomio  $P$  de orden menor o igual que  $k$  que cumpla esta condición es el polinomio de Taylor, es decir,  $P = P_a^k$ .

**Notación (Notación de multi-índices).** Un **multi-índice** en  $\mathbb{R}^n$  es  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , donde cada  $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ . La **longitud** de  $\alpha$  es  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ . Sea  $k = |\alpha|$  y  $f \in C^k(U)$ . Si  $(i_1, \dots, i_k)$  es una permutación de

$$\underbrace{(1, \dots, 1)}_{\alpha_1 \text{ veces}}; \dots; \underbrace{(n, \dots, n)}_{\alpha_n \text{ veces}}.$$

Así, podemos escribir

$$\frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k f(a)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Por tanto, tenemos que

$$D^k f(a)(h) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \frac{\partial^k f(a)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n}.$$

Así, podemos escribir

$$P_a^k(h) = f(a) + \sum_{j=1}^k \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \frac{\partial^j f(a)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n}.$$

## 4.8. Máximos y mínimos locales

**Definición 4.20 (Extremos locales).** Sea  $M \subset \mathbb{R}^n$ ,  $a \in M$  y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Se dice que

- $a$  es un **máximo local** de  $f$  si existe  $r > 0$  tal que  $f(a) \geq f(x)$ ,  $\forall x \in M \cap B(a, r)$ .  
Se dice que es **estricto** si  $f(a) > f(x)$ ,  $\forall x \in M \cap B(a, r)$ .
- $a$  es un **mínimo local** de  $f$  si existe  $r > 0$  tal que  $f(a) \leq f(x)$ ,  $\forall x \in M \cap B(a, r)$ .  
Se dice que es **estricto** si  $f(a) < f(x)$ ,  $\forall x \in M \cap B(a, r)$ .

Se dice que  $a$  es un **extremo local** de  $f$  si es un máximo o un mínimo local.

**Proposición 4.10** (Condición necesaria de extremo). Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $a \in U$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en  $a$ . Si  $a$  es un extremo local de  $f$ , entonces  $Df(a) = 0$ , es decir,  $\nabla f(a) = 0$ .

*Demostración.* Supongamos sin pérdida de generalidad que  $a$  es un máximo local y sea  $v \in \mathbb{R}^n$  con  $v \neq 0$ . Tenemos que existe  $r > 0$  tal que  $f(a) \geq f(x)$ ,  $\forall x \in B(a, r)$ . Además, existe un  $\delta > 0$  tal que si  $|t| < \delta$  entonces  $a + tv \in U$  y  $f(a) \geq f(a + tv)$ . Consideremos la función

$$g : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto f(a + tv).$$

Así, tenemos que

$$g(0) = f(a) \geq f(a + tv) = g(t), \quad \forall t \in (-\delta, \delta).$$

Así, 0 es un máximo local de  $g$ , por lo que  $g'(0) = 0$ . Por tanto, tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = D_v f(a) = Df(a)(v) = 0.$$

Así,  $Df(a)(v) = 0$ ,  $\forall v \in \mathbb{R}^n$ , por lo que  $Df(a) = 0$ .  $\square$

**Ejemplo.** La función  $f(x, y) = x^2 - y^2$  en  $a = (0, 0)$  cumple que  $\nabla f(0, 0) = 0$ , pero  $(0, 0)$  no es ni máximo ni mínimo local. En efecto, tenemos que  $f(0, 0) = 0$ , pero  $f(x, 0) = x^2 > 0$  y  $f(0, y) = -y^2 < 0$ .

**Definición 4.21** (Punto crítico y punto de silla). Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $a \in U$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en  $a$ . Si  $\nabla f(a) = 0$ , se dice que  $a$  es un **punto crítico** de  $f$ . Si  $a$  es un punto crítico pero no es un extremo relativo se dice que es un **punto de silla** de  $f$ .

**Definición 4.22.** Sea  $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una forma cuadrática.

- (a.1)  $Q$  es **definida positiva** ( $Q > 0$ ) si  $Q(h) > 0$ ,  $\forall h \neq 0$ .
- (a.2)  $Q$  es **semidefinida positiva** ( $Q \geq 0$ ) si  $Q(h) \geq 0$ ,  $\forall h \in \mathbb{R}^n$ .
- (b.1)  $Q$  es **definida negativa** ( $Q < 0$ ) si  $Q(h) < 0$ ,  $\forall h \neq 0$ .
- (b.2)  $Q$  es **semidefinida negativa** ( $Q \leq 0$ ) si  $Q(h) \leq 0$ ,  $\forall h \in \mathbb{R}^n$ .
- (c)  $Q$  es **indefinida** si existen  $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n$  tales que  $Q(h_1) > 0$  y  $Q(h_2) < 0$ .

**Teorema 4.9** (Clasificación de puntos críticos). Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $a \in U$ ,  $f \in C^2(U)$  tal que  $Df(a) = 0$ .

- (a)  $D^2 f(a) > 0 \Rightarrow a$  es un mínimo local de  $f \Rightarrow D^2 f(a) \geq 0$ .
- (b)  $D^2 f(a) < 0 \Rightarrow a$  es un máximo local de  $f \Rightarrow D^2 f(a) \leq 0$ .
- (c) Si  $D^2 f(a)$  es indefinida, entonces  $a$  es un punto de silla.

*Demostración.* (a) Demostramos las dos implicaciones. En primer lugar, sea  $Q = D^2 f(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , que es una forma cuadrática definida positiva. Como  $Q$  es continua en  $\mathbb{R}^n$  y  $S = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\| = 1\}$  es compacto, entonces  $Q$  alcanza un mínimo en  $S$ , es decir,  $\exists u_0 \in S$  tal que

$$\alpha = \inf \{Q(u) : \|u\| = 1\} = Q(u_0) > 0.$$

Ahora,  $\forall h \neq 0$  (también funciona para  $h = 0$ ),

$$Q(h) = Q\left(\|h\| \cdot \frac{h}{\|h\|}\right) = \|h\|^2 Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \geq \alpha \|h\|^2.$$

Por el corolario al teorema de Taylor tenemos que

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)(h) + \frac{1}{2}D^2 f(a)(h) + R(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(h)}{\|h\|^2} = 0.$$

Así, tenemos que

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}Q(h) + R(h).$$

Dado  $\varepsilon = \frac{\alpha}{4} > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $0 < \|h\| < \delta$  implica que  $a+h \in U$  y  $\frac{|R(h)|}{\|h\|^2} < \varepsilon$ .

Por otro lado,

$$\frac{|R(h)|}{\|h\|^2} < \varepsilon \Rightarrow |R(h)| \leq \varepsilon \|h\|^2 \iff -\varepsilon \|h\|^2 \leq R(h) \leq \varepsilon \|h\|^2.$$

Por tanto, si  $0 < \|h\| < \delta$ , tenemos que

$$f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{2}Q(h) - \varepsilon \|h\|^2 \geq \frac{\alpha}{2} \|h\|^2 - \varepsilon \|h\|^2 = \frac{\alpha}{4} \|h\|^2 > 0.$$

Por tanto,  $f(a+h) - f(a) > 0$  si  $0 < \|h\| < \delta$ , por lo que  $a$  es un mínimo local estricto de  $f$ .

Supongamos ahora que  $a$  es un mínimo local de  $f$ . Sea  $h \in \mathbb{R}^n$  con  $h \neq 0$ . Por el corolario al teorema de Taylor,

$$f(a+th) = f(a) + Df(a)(th) + \frac{1}{2}D^2 f(a)(th) + R(th), \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(th)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{R(th)}{\|th\|^2} \|h\|^2 \right) = 0$$

Así, tenemos que si  $\varepsilon > 0$ , entonces existe  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |t| < \delta$ , entonces  $\frac{|R(th)|}{t^2} < \varepsilon$  y  $f(a+th) \geq f(a)$ . En este caso,

$$\begin{aligned} 0 \leq f(a+th) - f(a) &= \frac{1}{2}Q(th) + R(th) \\ &\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2}Q(th) + R(th). \end{aligned}$$

Así, nos queda que

$$\frac{1}{2}t^2 Q(h) = \frac{1}{2}Q(th) \geq -R(th) > -\varepsilon t^2 \Rightarrow Q(h) \geq -\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Así, tenemos que  $Q(h) \geq 0$ .

- (b) Es análogo al apartado anterior. Alternativamente podemos aplicar el apartado anterior a la función  $-f$ .
- (c) Supongamos que  $D^2f(a)$  es indefinida. Por lo visto anteriormente,  $a$  no puede ser ni mínimo local ni máximo local de  $f$ , por lo que  $a$  es un punto de silla.

□

**Definición 4.23 (Matriz Hessiana).** Llamamos **matriz Hessiana** de  $f$  en  $a$  a la matriz de  $D^2f(a)$ , es decir

$$\text{Hess } f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix},$$

que es simétrica al ser  $f \in C^2$ .

**Ejemplo.** Consideremos  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(x, y) = x^2 - y^2$  y  $a = (0, 0)$ . Como vimos en un ejemplo anterior, tenemos que  $\nabla f(a) = 0$ . Así,

$$\text{Hess } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Claramente,  $D^2f(a)$  es indefinida, por lo que  $(0, 0)$  es un punto de silla.

**Ejemplo.** Consideremos  $f(x, y) = x^2 \geq 0$ . El punto  $a = (0, 0)$  es un mínimo absoluto de  $f$ . Por tanto, tenemos que  $\nabla f(a) = 0$ . Además,

$$\text{Hess } f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que no es definida positiva, pero sí es semidefinida positiva.

**Teorema 4.10 (Criterio de los autovalores).** Sea  $Q$  una forma cuadrática en  $\mathbb{R}^n$  dada por

$$Q(h_1, \dots, h_n) = (h_1, \dots, h_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix},$$

con  $A$  simétrica. Entonces,

- $Q$  es definida positiva si y solo si todos los autovalores de  $A$  son positivos.
- $Q$  es definida negativa si y solo si todos los autovalores de  $A$  son negativos.
- $Q$  es indefinida si y solo si existen autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  de  $A$  con  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ .

**Ejemplo.** 1.  $f(x, y) = x^3 - 3x^2 + y^2$ . Tenemos que

$$\nabla f = (3x^2 - 6x, 2y) = (0, 0) \iff \begin{cases} 3x(x-2) = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} .$$

Así, los puntos críticos son  $P_1 = (0, 0)$  y  $P_2 = (2, 0)$ . Así, tenemos que

$$\text{Hess } f = \begin{pmatrix} 6x-6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Por tanto,

$$\text{Hess } f(P_1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} ,$$

como los autovalores son  $-6$  y  $2$  tenemos que se trata de un punto de silla. Por otro lado,

$$\text{Hess } f(P_2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} ,$$

como los autovalores son  $6$  y  $2$  tenemos que  $P_2$  es un mínimo local (estricto).

2. Sea  $f(x, y, z) = xy + y + z^2$ . Tenemos que

$$\nabla f = (y, x+1, 2z) = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} y = 0 \\ x+1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

Así, el único punto crítico es  $P = (-1, 0, 0)$ . Así, tenemos que

$$\text{Hess } f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Calculemos los autovalores de la matriz:

$$0 = \det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(\lambda + 1)(\lambda - 1) .$$

Como los autovalores son  $\lambda \in \{-1, 1, 2\}$ , se trata de un punto de silla.

**Teorema 4.11 (Criterio de Sylvester).** Para  $j = 1, \dots, n$  denotamos

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} \end{vmatrix},$$

a los menores angulares.

- $Q$  es definida positiva si y solo si  $\Delta_j > 0$ ,  $\forall j = 1, \dots, n$ .
- $Q$  es definida negativa si y solo si  $(-1)^j \Delta_j > 0$ ,  $\forall j = 1, \dots, n$ .
- Si  $\det(A) \neq 0$  y no se cumple ninguna de las condiciones entonces es indefinida.

**Notación.** En algunos casos utilizamos la notación

$$f_{xx} := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}, \quad f_{xy} := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

**Ejemplo.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^2$  abierto,  $a \in U$ ,  $f \in C^2(U)$  con  $Df(a) = 0$ . Tenemos que

$$\text{Hess } f(a) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a) & f_{xy}(a) \\ f_{yx}(a) & f_{yy}(a) \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$\Delta_1 = f_{xx}(a), \quad \Delta_2 = f_{xx}(a) \cdot f_{yy}(a) - (f_{xy}(a))^2.$$

Así, tenemos que

- Si  $\Delta_1 > 0$  y  $\Delta_2 > 0$ , entonces  $a$  es un mínimo local.
- Si  $\Delta_1 < 0$  y  $\Delta_2 > 0$ , entonces  $a$  es un máximo local.
- Si  $\Delta_2 < 0$ , entonces  $a$  es un punto de silla.

**Ejemplo.** Consideremos  $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz + yz)$ . Calculemos los puntos críticos:

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 3(x+y) = 0 \\ f_y = 3y^2 - 3(x+z) = 0 \\ f_z = 3z^2 - 3(y+z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y+z \\ y^2 = x+z \\ z^2 = x+y \end{cases}.$$

Resolviendo el sistema obtenemos que los puntos críticos son  $P_1 = (0, 0, 0)$  y  $P_2 =$

$(2, 2, 2)$ . Tenemos que

$$\text{Hess } f = \begin{pmatrix} 6x & -3 & -3 \\ -3 & 6y & -3 \\ -3 & -3 & 6z \end{pmatrix}.$$

Así, tenemos que

$$\text{Hess } f(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = -9 < 0 \end{cases}.$$

Por tanto, tenemos que  $P_1$  es un punto de silla. Por otro lado,

$$\text{Hess } f(P_2) = 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 > 0 \end{cases}.$$

Por tanto,  $P_2$  es un mínimo local.

## 4.9. Teorema de la función inversa

**Teorema 4.12 (Teorema de la función inversa).** Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $U$ ;  $a \in U$  tal que  $\det Jf(a) \neq 0$ . Entonces, existe  $V \subset \mathbb{R}^n$  abierto tal que  $a \in V \subset U$  y existe  $W \subset \mathbb{R}^n$  abierto tal que  $f(a) \in W$ , tales que  $f(V) = W$  y  $f|_V : V \rightarrow W$  admite una función inversa diferenciable  $g = (f|_V)^{-1} : W \rightarrow V$ , que satisface

$$Dg(f(x)) = Df(x)^{-1}, \quad \forall x \in V.$$

Además, si  $f \in \mathcal{C}^m(U)$ , entonces  $g \in \mathcal{C}^m(W)$  para  $m \in \mathbb{N}$ .

**Ejemplo.** Consideremos  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ . Consideremos

$$\begin{cases} u = e^x \cos y \\ v = e^x \sin y \end{cases}.$$

Buscamos saber si existen  $x = x(u, v)$  e  $y = y(u, v)$ . Tenemos que si  $a = (0, 0)$ ,  $f(a) = (1, 0)$ . Además,

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como  $\det Jf(a) \neq 0$ , tenemos que se cumple el teorema de la función inversa y por tanto podemos encontrar las expresiones de  $x$  e  $y$  en función de  $u$  y  $v$  en un entorno cercano a  $a$ .

**Teorema 4.13 (Teorema de la función inyectiva).** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $a \in U$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $U$ , tal que  $Df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es inyectiva. Entonces existen  $C, r > 0$  tales que

$$\|x - y\| \leq C\|f(x) - f(y)\|, \quad \forall x, y \in \overline{B}(a, r) \subset U.$$

En particular,  $f|_{\overline{B}(a, r)}$  es inyectiva.

*Demostración.* Sea  $L = Df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  que es inyectiva, por lo que  $\text{Ker}(L) = \{0\}$ . Por tanto, consideremos

$$\alpha = \inf \{\|L(v)\| : \|v\| = 1\}.$$

Como la aplicación  $v \rightarrow \|L(v)\|$  es continua en  $\mathbb{R}^n$  y  $S = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| = 1\}$  es compacto, tenemos que existe  $v_0 \in S$  tal que  $\alpha = \|L(v_0)\| > 0$ . En consecuencia,  $\forall x \neq 0$ , tenemos que

$$\|L(x)\| = \left\| L\left(\|x\|\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \|x\| \left\| L\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \geq \|x\|\alpha.$$

Ahora, como  $f$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $U$ , tenemos que  $\forall i = 1, \dots, n$  y  $\forall j = 1, \dots, m$ , tenemos que  $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$  es continua en  $U$ . Tomando  $\varepsilon = \frac{\alpha}{2\sqrt{nm}}$ , existe  $r > 0$  tal que  $\overline{B}(a, r) \subset U$  y además

$$\left| \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \right| < \frac{\alpha}{2\sqrt{nm}}, \quad \forall i = 1, \dots, n; \forall j = 1, \dots, m; \forall x \in \overline{B}(a, r).$$

Consideremos ahora  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $g(x) = f(x) - L(x)$ . Tenemos que  $\forall j = 1, \dots, m$ ,

$$g_j(x) = f_j(x) - L_j(x) = f_j(x) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)x_i.$$

Así, tenemos que

$$\left| \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x) \right| = \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \right| < \frac{\alpha}{2\sqrt{nm}}, \quad \forall x \in \overline{B}(a, r).$$

Por la desigualdad del valor medio tenemos que, como  $V = B(a, r)$  es abierto convexo y se cumple la desigualdad anterior, tenemos que

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \sqrt{nm} \frac{\alpha}{2\sqrt{nm}} \|x - y\| = \frac{\alpha}{2} \|x - y\|, \quad \forall x, y \in B(a, r).$$

Por continuidad, podemos extender la desigualdad anterior a la bola  $\overline{B}(a, r)$ . Así, nos queda que

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y) - L(x) + L(y)\| &= \|f(x) - f(y) - L(x - y)\| \geq \|L(x - y)\| - \|f(x) - f(y)\| \\ &\geq \alpha \|x - y\| - \|f(x) - f(y)\|. \end{aligned}$$

Así, nos queda que

$$\frac{\alpha}{2} \|x - y\| \geq \alpha \|x - y\| - \|f(x) - f(y)\|.$$

Así, obtenemos que

$$\|f(x) - f(y)\| \geq \alpha \|x - y\| - \frac{\alpha}{2} \|x - y\| = \frac{\alpha}{2} \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \overline{B}(a, r).$$

□

**Lema 4.4.** El conjunto  $\text{GL}(\mathbb{R}^n) = \{L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : L \text{ lineal biyectiva}\}$  es abierto en  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \cong \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$  y además la aplicación

$$J : \text{GL}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^n) : L \mapsto L^{-1}$$

es de clase  $\mathcal{C}^\infty$ .

*Demostración.* Podemos decir que

$$\text{GL}(\mathbb{R}^n) = \{L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : \det(L) \neq 0\}.$$

Además, la aplicación  $\det : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \cong \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : L \mapsto \det(L)$  es continua y es de clase  $\mathcal{C}^\infty$  puesto que  $\det(L)$  se obtiene a partir de operaciones algebraicas de sus componentes en la base canónica. Otra forma de verlo es que

$$L^{-1} = \frac{1}{\det(L)} \text{Adj}(L^T),$$

se obtiene por medio de operaciones algebraicas, por lo que es de clase  $\mathcal{C}^\infty$ .  $\square$

Ahora estamos en condiciones para demostrar el **Teorema de la Función Inversa**.

**Teorema 4.14 (Teorema de la función inversa).** Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $U$ ;  $a \in U$  tal que  $\det Jf(a) \neq 0$ . Entonces, existe  $V \subset \mathbb{R}^n$  abierto tal que  $a \in V \subset U$  y existe  $W \subset \mathbb{R}^n$  abierto tal que  $f(a) \in W$ , tales que  $f(V) = W$  y  $f|_V : V \rightarrow W$  admite una función inversa diferenciable  $g = (f|_V)^{-1} : W \rightarrow V$ , que satisface

$$Dg(f(x)) = Df(x)^{-1}, \quad \forall x \in V.$$

Además, si  $f \in \mathcal{C}^m(U)$ , entonces  $g \in \mathcal{C}^m(W)$  para  $m \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* **Paso 1.** Consideramos  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\varphi(x) = \det(Df(x))$ , que es continua en  $U$  puesto que  $\varphi$  se obtiene por medio de operaciones algebraicas con las derivadas parciales primeras  $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_{i,j=1,\dots,n}$ , las cuales son continuas. Como  $\varphi(a) = \det(Df(a)) \neq 0$ , existe  $U_0 \subset U$  abierto con  $a \in U_0$  tal que  $\varphi(x) = \det(Df(x)) \neq 0$ ,  $\forall x \in U_0$ .

**Paso 2.** Por el teorema de la función inyectiva, existen  $C, r > 0$  tales que  $\overline{B}(a, r) \subset U_0$  y

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \geq C\|x_1 - x_2\|, \quad \forall x_1, x_2 \in \overline{B}(a, r).$$

En particular,  $f|_{\overline{B}(a, r)}$  es inyectiva. Sea  $S = \partial(\overline{B}(a, r)) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| = r\}$ , que es un conjunto compacto por lo que  $f(S)$  es también compacto. Además,  $f(a) \notin f(S)$  por la inyectividad de  $f$  y  $a \notin S$ . Así, podemos definir

$$d = \min\{\|f(a) - f(x)\| : x \in S\} > 0.$$

Por tanto, tenemos que

$$\|f(x) - f(a)\| \geq d, \quad \forall x \in S.$$

**Paso 3.** Consideremos  $W = B\left(f(a), \frac{d}{2}\right)$  y  $B = B(a, r)$ . Tenemos que ver que  $W \subset f(B)$ .

Sea  $\hat{y} \in W$  y consideremos la función

$$h : \overline{B}(a, r) \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \|f(x) - \hat{y}\|^2.$$

Como  $\overline{B}(a, r)$  es compacto y  $h$  es continua, existe  $\hat{x} \in \overline{B}(a, r)$  donde  $h$  alcanza un mínimo. Veamos que  $\hat{x} \notin S$ . En efecto, si  $x \in S$  tenemos que

$$\|f(x) - \hat{y}\| \geq \|f(x) - f(a)\| - \|f(a) - \hat{y}\| \geq d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} > \|f(a) - \hat{y}\|.$$

Así, tenemos que si  $x \in S$ ,  $h(x) > h(a)$ , por lo que  $\hat{x} \notin S$  y debe ser que  $\hat{x} \in B$ , por lo que  $\hat{x}$  es un mínimo local de  $h$ . Así, debe ser que  $\nabla h(\hat{x}) = 0$ . Si denotamos  $\hat{y} = (y_1, \dots, y_n)$ , tenemos que

$$h(x) = \sum_{j=1}^n (f_j(x) - y_j)^2.$$

Por tanto,  $\forall j = 1, \dots, n$ ,

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\hat{x}) = \sum_{j=1}^n \underbrace{2(f_j(x) - y_j)}_{u_j} \cdot \underbrace{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\hat{x})}_{a_{ij}} = 0.$$

Así, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + \dots + a_{1n}u_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}u_1 + \dots + a_{nn}u_n = 0 \end{cases}.$$

Tenemos que

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\hat{x}) \right) = \det(Jf(\hat{x})) \neq 0.$$

Así, debe ser que el sistema tiene sólo una solución, la solución trivial, por lo que  $u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0$ . Por tanto,  $f_j(\hat{x}) = y_j$ ,  $\forall j = 1, \dots, n$ . Así, tenemos que  $f(\hat{x}) = \hat{y}$ .

**Paso 4.** Definimos  $V = B(a, r) \cap f^{-1}(W) = \{x \in B(a, r) : f(x) \in W\}$  que es abierto y  $a \in V$ . Por construcción tenemos que  $f|_V : V \rightarrow W$ , que es inyectiva y sobreyectiva, por lo que es biyectiva.

**Paso 5.** Veamos que  $g$  es diferenciable con  $Dg(f(x)) = (Df(x))^{-1}$ ,  $\forall x \in V$ . Sea  $x_0 \in V$ ,  $x \in V$  y denotamos  $y_0 = f(x_0)$  e  $y = f(x)$ , así como  $L = Df(x_0)$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\|g(y) - g(y_0) - L^{-1}(y - y_0)\|}{\|y - y_0\|} &= \frac{\|x - x_0 - L^{-1}(f(x) - f(x_0))\|}{\|f(x) - f(x_0)\|} \\ &= \frac{\|x - x_0\|}{\|f(x) - f(x_0)\|} \cdot \frac{\|L^{-1}(f(x) - f(x_0)) - L^{-1}(f(x) - f(x_0))\|}{\|x - x_0\|} \\ &\leq C\|L^{-1}\| \frac{\|f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Hemos aplicado el teorema de la función inyectiva. Si  $y \rightarrow y_0$  tenemos que  $f(x) \rightarrow f(x_0)$ , por lo que  $x \rightarrow x_0$  (puesto que  $\|x - x_0\| \leq C\|f(x) - f(x_0)\|$ ). Así, tenemos que si  $x \in V$ ,  $Dg(f(x)) = (Df(x))^{-1}$ . Equivalentemente, podemos decir que si  $y \in W$ ,  $Dg(y) = (Df(g(y)))^{-1}$ .

**Paso 6.** Sabemos que

$$Jg(y) = (Jf(g(y)))^{-1},$$

es continua puesto que

$$y \rightarrow g(y) \rightarrow Jf(g(y)) \rightarrow (Jf(g(y)))^{-1},$$

y son todas continuas. Por tanto, tenemos que  $g$  es de clase  $C^1$  siempre. Inductivamente podemos ver que si  $f$  es  $C^m$ , entonces  $g$  es  $C^m$ .

□

## 4.10. Teorema de la función implícita

**Ejemplo.** Una par  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  satisface la ecuación implícita  $x^2 + y^2 = 1$  si y solo si satisface

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{o} \quad y = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Podemos considerar  $F(x) = x^2 + y^2 - 1$  y  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$  y  $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ . Tendremos que  $F(x, y) = 0 \iff f(x) = 0 \text{ o } g(x) = 0$ , dependiendo del conjunto en el que estemos.

**Notación.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$  abierto,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  de clase  $C^1$ . Denotamos los elementos de  $U$  como  $(x, y) = (x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m)$ . Para  $(x_0, y_0) \in U$ ,

$$JF(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} & \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}.$$

A la submatriz izquierda la denotamos  $D_1 F(x_0, y_0)$  y a la de la derecha la llamamos  $D_2 F(x_0, y_0)$ .

**Teorema 4.15** (Teorema de la función implícita). Sean  $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$  abierto,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  de clase  $\mathcal{C}^1$ ,  $(x_0, y_0) \in U$  tal que  $F(x_0, y_0) = 0$  y  $\det(D_2F(x_0, y_0)) \neq 0$ . Existe  $V \subset \mathbb{R}^n$  abierto con  $x_0 \in V$  y existe  $W \subset \mathbb{R}^m$  abierto con  $y_0 \in W$  con  $V \times W \subset U$ , tales que existe  $f : V \rightarrow W$  de clase  $\mathcal{C}^1$  tal que  $\forall (x, y) \in V \times W$ ,

$$F(x, y) = 0 \iff y = f(x).$$

Además,  $\forall x \in V$ ,

$$Jf(x) = -D_2F(x, f(x))^{-1} \cdot D_1F(x, f(x)).$$

Si  $F \in \mathcal{C}^k$ , entonces  $f \in \mathcal{C}^k$  para  $k \in \mathbb{N}$ .

**Notación.** Tenemos que en  $V \times W$ ,

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases}.$$

Muchas veces omitiremos la función  $f$  y denominaremos

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = y_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases}.$$

*Demostración.* No veremos la demostración pero daremos una idea de cómo se demuestra. Definimos

$$H : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : (x, y) \rightarrow (x, F(x, y)).$$

Tendremos pues

$$JH(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ D_1F(x_0, y_0) & D_2F(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Por tanto, obtenemos que  $\det(DH(x_0, y_0)) \neq 0$ , por lo que  $H$  es localmente invertible alrededor de  $(x_0, y_0)$  y  $F(x, y) = 0 \iff H(x, y) = (x, 0)$ . Si consideramos  $A = \{(x, y) : F(x, y) = 0\} \subset U$ , tenemos que  $H|_A : A \rightarrow B$  es invertible y podemos considerar  $G = (H|_A)^{-1}$ .  $\square$

**Ejemplo.** 1. Consideremos  $z^3 + x(z - y) = 1$ . Nos preguntamos si podemos despejar  $z = z(x, y)$  alrededor de  $p = (0, 0, 1)$ . Tenemos que

$$F(x, y, z) = z^3 + x(z - y) - 1, \quad U = \mathbb{R}^3.$$

Podemos observar varias cosas:

- $F \in \mathcal{C}^\infty$  en  $\mathbb{R}^3$ .

- $F(p) = F(0, 0, 1) = 0.$
- En este caso tenemos que  $JF = \nabla F = \left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = (z - y, -x, 3z^2 + x).$   
En nuestro caso tenemos que  $n = 2$  y  $m = 1.$

$$JF(p) = (1, 0, 3) \Rightarrow \det(D_2F(p)) = 3 \neq 0.$$

Como se cumplen las hipótesis del teorema, existen  $V^{(0,0)} \subset \mathbb{R}^2$ ,  $W^1 \subset \mathbb{R}$  y  $f : V \rightarrow W$  de clase  $\mathcal{C}^\infty$  tal que  $\forall (x, y, z) \in V \times W$ ,

$$F(x, y, z) = 0 \iff z = f(x, y).$$

Además,  $\forall (x, y) \in V$ , tenemos que

$$h(x, y) := F(x, y, f(x, y)) = 0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot 0 + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 = \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot 0 + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}.$$

Así, tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{1}{3}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = 0.$$

Podemos calcular también las derivadas de segundo orden.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y-z}{3z^2+x} \right) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x} (3z^2+x) - (y-z) \left( 6z \frac{\partial f}{\partial x} + 1 \right)}{(3z^2+x)^2}.$$

En  $p$ , es fácil ver que la derivada segunda será 0. El resto de derivadas segundas se calculan de forma análoga.

Otra manera de calcular las derivadas es de forma implícita:

$$\frac{\partial}{\partial x} (z^3 + x(z-y)) = 0 \Rightarrow 3z^2 \frac{\partial f}{\partial x} + (z-1) + x \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (z^3 + x(z-y)) = 0 \Rightarrow 3z^2 \frac{\partial f}{\partial y} + x \left( \frac{\partial f}{\partial y} - 1 \right) = 0.$$

2. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} xu^3 + y^2v^3 + z^2 - 1 = 0 \\ 2xy^3 + uv^2 + vz = 0 \end{cases},$$

y el punto  $p = (0, 1, 0, 0, 1)$ . Buscamos despejar  $u$  y  $v$ . Veamos que se cumplen las condiciones del teorema:

- $F \in \mathcal{C}^\infty$ ,  $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

- $F(0, 1, 0, 0, 1) = (0, 0)$ .
- Calculamos  $\det(D_2F(p))$ .

$$JF = \begin{pmatrix} \nabla F_1 \\ \nabla F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^3 & 2yv^3 & 2z & 3xu^2 & 3v^2y^2 \\ 2y^3 & 6xy^2 & v & v^2 & 2uv + z \end{pmatrix}.$$

Así, tendremos que  $D_2F = \begin{pmatrix} 3xu^2 & 3v^2y^2 \\ v^2 & 2uv + z \end{pmatrix}$ . Claramente  $\det(D_2F(p)) = -3 \neq 0$ .

Así, tenemos que existen  $V^{(0,1,0)} \subset \mathbb{R}^3$ ,  $W^{(0,1)} \subset \mathbb{R}^2$  y  $f : V \rightarrow W$  tales que  $\forall (x, y, z, u, v) \in V \times W$ ,

$$F(x, y, z, u, v) = 0 \iff (u, v) = f(x, y, z).$$

Tenemos que el jacobiano de  $f$  evaluado en  $p$  será

$$Jf(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Si derivamos de forma implícita:

$$\begin{cases} u^3 + 3xu^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3y^2v^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ 2y^3 + \frac{\partial u}{\partial x} v^2 + 2uv \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} z = 0 \end{cases}.$$

Para calcular las derivadas tenemos que resolver el sistema.

## 4.11. Extremos condicionados

**Ejemplo.** Calcular el máximo y el mínimo valor de  $f(x, y) = 2x + 3y$  sobre la elipse  $E = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 = 1\}$ .

Tenemos que  $f$  es continua en  $\mathbb{R}^2$  y  $E$  es compacto, por lo que existen  $p_m, p_M \in E$  tales que

$$f(p_m) \leq f(p) \leq f(p_M), \quad \forall p \in E.$$

Tenemos que  $\nabla f(x, y) = (2, 3) \neq (0, 0)$  y  $f$  es lineal. El problema se puede ver de forma más sencilla geométricamente. Buscamos el punto  $(x, y) \in E$  tal que  $\nabla F(x, y) = \lambda \nabla f(x, y)$ , es decir, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  con

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla F(x, y),$$

donde  $F(x, y) = x^2 + 4y^2 - 1$ . Como  $\nabla F(x, y) = (2x, 8y)$ , tenemos que resolver el sistema

$$\begin{cases} 2 = \lambda 2x \\ 3 = \lambda 8y \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases}.$$

Obtenemos dos puntos:  $p_1 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{10}\right)$  y  $p_2 = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{10}\right)$ . Así, obtenemos que el máximo y el mínimo de  $f$  serán,

$$f(p_1) = \frac{25}{10} \quad \text{y} \quad f(p_2) = -\frac{25}{10},$$

respectivamente.

**Definición 4.24 (Variedades diferenciables implícitas).** Sean  $1 \leq k \leq n$ ;  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  de clase  $\mathcal{C}^m$ . Consideramos el conjunto

$$M = \{x \in U : F(x) = 0\} = \{x \in U : F_1(x) = 0, \dots, F_k(x) = 0\}.$$

Supongamos que  $\forall x \in U$  la matriz  $JF(x)$  tiene rango  $k$ . Decimos entonces que  $M$  es una **variable diferenciable** de clase  $\mathcal{C}^p$  en  $\mathbb{R}^n$ , con dimensión  $d = n - k$ . Diremos también que

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_k(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

son las **ecuaciones implícitas** de  $M$ .

**Definición 4.25 (Espacio normal y tangente).** Dada una variedad diferenciable  $M$ , decimos que

$$N_p(M) = L(\{\nabla F_1(p), \dots, \nabla F_k(p)\})$$

es el **espacio vectorial normal** a  $M$  en  $p$ . Por otro lado, decimos que

$$T_p(M) = L(\{\nabla F_1(p), \dots, \nabla F_k(p)\})^\perp,$$

es el **espacio vectorial tangente** a  $M$  en  $p$ .

**Ejemplo.** 1. Consideremos  $M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$  y

$$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 1.$$

Para que sea variedad debe ser que  $\nabla F = (2x, 2y, 2z)$  tenga rango máximo en  $M$ , que lo tiene puesto que es 0 si y solo si  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ .

2. Consideremos  $M = \{(x, y, z) : x^2 + xy + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$  y

$$F(x, y, z) = x^2 + xy + y^2 + z^2 - 1,$$

que es de clase infinito. Tenemos que

$$\nabla F = (2x + y, 2y + x, 2z).$$

Si  $\nabla F = 0$ , resolviendo el sistema obtenemos que no tiene solución más que la trivial, que no pertenece a nuestro conjunto, por lo que sí es una variedad diferencial.

3. Sea  $M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$ . Las ecuaciones implícitas son,

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ F_2(x, y, z) = x + y + z \end{cases}.$$

Queremos ver si el rango es máximo,

$$\text{ran} \begin{pmatrix} \nabla F_1 \\ \nabla F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como  $(x, y, z) = (0, 0, 0) \in M$ , no se trata de una variedad diferenciable.

**Teorema 4.16 (Teorema de los multiplicadores de Lagrange).** Sean  $1 \leq k < n$ ;  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto;  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  de clase  $C^1$ , donde  $F = (F_1, \dots, F_k)$ . Supongamos que  $M = \{x \in U : F(x) = 0\}$  es una variedad diferenciable. Sea además,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable. Si  $p \in M$  es un punto máximo o mínimo local de  $f|_M$ , entonces existen  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  (a los que llamaremos **multiplicadores de Lagrange**) tales que

$$\nabla f(p) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla F_i(p).$$

**Lema 4.5 (Lema del espacio tangente).** Sea  $M \subset \mathbb{R}^n$  una variedad diferenciable de clase  $C^1$  y sea  $p \in M$ . Si  $w \in \mathbb{R}^n$ , son equivalentes:

1.  $w \in T_p(M)$ .
2. Existe  $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  curva de clase  $C^1$  con  $\text{Im}(\gamma) \subset M$  y existe  $t_0 \in (a, b)$  tal que  $\gamma(t_0) = p$  y  $\gamma'(t_0) = w$ .

**Ejemplo.** 1. Calcular el máximo y el mínimo de  $f(x, y, z) = 2x - z^2$  en la esfera  $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 5\}$ . Como  $f$  es continua y  $S$  es compacto, existen  $p_m, p_M \in S$  tales que

$$f(p_m) \leq f(x) \leq f(p_M), \quad \forall x \in S.$$

Sea  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 5$  y cogemos  $S = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\}$ . Como  $k = 1$ , tenemos que  $S$  es una variedad diferenciable de clase  $C^\infty$  y  $\dim S = n - k = 3 - 1 = 2$ , siempre que

$$\text{ran } \nabla F = (2x, 2y, 2z) = 1, \quad \forall (x, y, z) \in S.$$

Como esto se da, lo que hemos dicho anteriormente también se cumple. Tenemos

que  $p_m$  y  $p_M$  son extremos locales de  $f|_S$ , por lo que existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\nabla f = \lambda \nabla F$ . Como  $\nabla f = (2, 0, -2z)$ , tenemos que

$$\begin{cases} 2 = \lambda 2x \\ 0 = \lambda 2y \\ -2z = \lambda 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \end{cases}.$$

Debe ser que  $y = 0$  y  $x = \frac{1}{\lambda}$ , y tenemos dos opciones:

- Si  $z = 0$ , tenemos que  $x^2 = 5$ , por lo que  $x = \pm\sqrt{5}$  y obtenemos dos posibles puntos

$$p_1 = (\sqrt{5}, 0, 0) \quad y \quad p_2 = (-\sqrt{5}, 0, 0).$$

- Si  $\lambda = -1$ , tenemos que  $x = -1$  por lo que  $z^2 = 4$  y  $z = \pm 2$ . Así, obtenemos dos puntos

$$p_3 = (-1, 0, 2) \quad y \quad p_4 = (-1, 0, -2).$$

Necesariamente debe ser que  $p_m, p_M \in \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ . Para calcular el valor exacto calculamos el valor de las imágenes

$$f(p_1) = 2\sqrt{5}, \quad f(p_2) = -2\sqrt{5}, \quad f(p_3) = -6, \quad f(p_4) = -6.$$

Por tanto, el mínimo se alcanza en  $p_3$  y  $p_4$  y el máximo se alcanza en  $p_1$ .

2. Calcular el máximo y el mínimo de  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z$  en  $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 1\}$ . Como  $f$  es continua y  $C$  es compacto, existe  $p_m, p_M \in C$  tales que

$$f(p_m) \leq f(x) \leq f(p_M), \quad \forall x \in C.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} C &= \text{Int}(C) \cup \partial C \\ &= \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, z < 1\} \cup \{x^2 + y^2 + z^2 < 4, z = 1\} \cup \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, z = 1\}. \end{aligned}$$

Podemos considerar  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$  y  $G(x, y, z) = z - 1$ . Tenemos que

$$\nabla f = (2x + 1, 2y + 1, 2z + 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow (x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Cogemos  $p_0 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \in \text{Int}(C)$ . Así, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\nabla f = \lambda \nabla F$ ,

por lo que

$$\begin{cases} 2x + 1 = \lambda 2x \\ 2y + 1 = \lambda 2y \\ 2z + 1 = \lambda 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z < 1 \end{cases} .$$

De aquí sacamos  $x = y = z$  y sacamos dos puntos

$$p_1 = \left( \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \notin M_1, \quad p_2 = \left( -\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \in M_1.$$

Así, el único punto que nos vale es  $p_2$ . Por otro lado, existe  $\mu \in \mathbb{R}$  tal que  $\nabla f = \mu \nabla G$ :

$$\begin{cases} 2x + 1 = \mu \cdot 0 \\ 2y + 1 = \mu \cdot 0 \\ 2z + 1 = \mu \cdot 1 \\ z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 < 4 \end{cases} .$$

De aquí sacamos el punto  $p_3 = \left( -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right) \in M_2$ . Ahora estudiamos  $M_3$  (hay que comprobar previamente que  $M_1, M_2$  y  $M_3$  son variedades diferenciables). Si  $p_m, p_M \in M_3$ , existen  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tales que  $\nabla = \lambda \nabla F + \mu \nabla G$ . Así, tenemos que

$$\begin{cases} 2x + 1 = \lambda 2x + 0 \cdot \mu \\ 2y + 1 = \lambda 2y + 0 \cdot \mu \\ 2z + 1 = \lambda 2z + \mu \cdot 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases} .$$

De aquí sacamos

$$p_4 = \left( \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1 \right) \quad \text{y} \quad p_5 = \left( -\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}, 1 \right).$$

Tenemos que  $p_m, p_M \in \{p_0, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ . Comparando los valores de las imágenes obtenemos que el máximo se obtiene en  $p_4$  con  $f(p_4) = 5 + \sqrt{6}$ ; y el mínimo en  $p_0$  con  $f(p_0) = -\frac{3}{4}$ .