Álgebra Lineal

Victoria Torroja Rubio

9/10/2024 -

Índice general

0.1. Introducción

El cuerpo de los números reales cumple los siguientes requisitos:

$(\mathbb{R},+)$ es un grupo abeliano:
Definimos suma y producto como

$$\begin{aligned} +: \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (a,b) &\to a+b \\ \cdot: \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (a,b) &\to a\cdot b. \end{aligned}$$

1. La suma es asociativa
$$\forall a,b,c \in \mathbb{R},\ (a+b)+c = a+(b+c)\,.$$

2. Existe un elemento neutro
$$\exists !0 \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R},\ 0+a = a+0 = a.$$

3. Existe el opuesto
$$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists -a \in \mathbb{R},\ a+(-a) = (-a)+a = 0.$$

4. La suma es conmutativa
$$\forall a,b \in \mathbb{R},\ a+b = b+a.$$

5. El producto es asociativo,
$$\forall a,b,c \in \mathbb{R},\ a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c.$$

6. El producto es distributivo con respecto a la suma (distributivo por la izquierda y por la derecha),
$$\forall a,b,c \in \mathbb{R},\ a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c.$$

7. Existe la unidad,
$$\exists !1 \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, 1\cdot a = a\cdot 1 = a.$$

8. Existe la inversa,
$$\forall a \in \mathbb{R}-\{0\}^1, \exists a^{-1} \in \mathbb{R}, a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = 1.$$

Definición 0.1 (Anillo)**.** Se denomina **anillo** a un conjunto y dos operaciones $(R,+,\cdot)$ que verifica las propiedades (1)-(6). Si se verifica también (7), se llama **anillo con unidad**.

[1] Utilizamos la notación $\mathbb{R}^*$ por sencillez para denotar $\mathbb{R}-\{0\}$

Definición 0.2 (Cuerpo)**.** Se denomina **cuerpo** a un conjunto con al menos dos elementos ($1 \neq 0$) y dos operaciones $(R, +, \cdot)$ que cumple las propiedades (1)-(8). Si también se verifica que la multiplicación es commutativa, decimos que se trata de un **cuerpo abeliano**.

Definición 0.3. Un conjunto $V \neq \emptyset$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial si existen dos operaciones

$$\begin{aligned} + &: V \times V \to V,\ (\vec{x}, \vec{y}) \to \vec{x} + \vec{y} \\ \cdot &: \mathbb{R} \times V \to V,\ (a, \vec{x}) \to a \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

que verifican que

(i) $(V, +)$ es un grupo abeliano.

(ii) Se cumple la propiedad distributiva,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in V,\ a\,(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}.$$

(iii) Se cumple otra propiedad distributiva,

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \vec{x} \in V,\ (a + b)\,\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x}.$$

(iv) Se cumple la propiedad asociativa,

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \vec{x} \in V,\ a\,(b\vec{x}) = (a \cdot b)\,\vec{x}.$$

(v) $\exists 1 \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in V,\ 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Definición 0.4. Se define $\mathbb{R}^n$, con $n \in \mathbb{N}$, como

$$\mathbb{R}^n = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) :\ x_i \in \mathbb{R}\right\}.$$

Definición 0.5. Se define la suma $+$ en $\mathbb{R}^n$ de la siguiente manera:

$$\forall \vec{x}, \vec{y},\ \vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)\,.$$

Utilizamos las propiedades de $\mathbb{R}$ como cuerpo abeliano para justificar que $(\mathbb{R}^n, +)$ es un grupo abeliano.

Definición 0.6. Definimos el producto escalar en $\mathbb{R}^n$ de la siguiente manera,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ a \cdot \vec{x} = (a \cdot x_1, a \cdot x_2, \ldots, a \cdot x_n).$$

Una consecuencia clara de esto es que para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$0 \cdot \vec{x} = \vec{0}.$$

Al igual que antes, podemos utilizar las propiedades de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ como cuerpo abeliano para justificar que $\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Por las definiciones anteriores tenemos que para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\vec{x} &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, \ldots, 0) + \cdots + (0, \ldots, x_n) \\ &= x_1 (1, 0, \ldots, 0) + x_2 (0, 1, \ldots, 0) + \cdots + x_n (0, \ldots, 1)..\end{aligned}$$

Además, podemos concluir que si

$$x_1 (1, \ldots, 0) + x_2 (0, 1, \ldots, 0) + \cdots + x_n (0, \ldots, 1) = y_1 (1, \ldots, 0) + y_2 (0, 1, \ldots, 0) + \cdots + y_n (0, \ldots, 1),$$

entonces $\forall i, 1 \leq i \leq n$, $x_i = y_i$.

Definición 0.7 (Sistema de ecuaciones homogéneo)**.** Sea H un sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\begin{aligned}&a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \cdots + a_n^1 x_n = 0 \\ &\vdots \\ &a_1^m x_1 + a_2^m + \cdots + a_n^m x^n = 0.\end{aligned}$$

donde $m, n \in \mathbb{N}$ y $a_i^j \in \mathbb{R}$. Definimos L como el conjunto de soluciones de H:

$$L = \left\{ \left(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n\right) \ : \ x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n \text{ es solución de } H \ \right\} \subset \mathbb{R}^n.$$

[a]

[a] a_j^i no es exponente sino una forma de numeración.

Teorema 0.1. Si $\vec{x_0}, \vec{y_0} \in L$, se cumple que

$$\vec{x_0} + \vec{y_0} \in L.$$

Demostración. Tenemos que $\forall i,\ 1 \leq i \leq m$,

$$\begin{aligned}
&a_1^i\left(x_0^1+y_0^1\right)+\cdots+a_n^i\left(x_0^n+y_0^n\right)\\
=&a_1^i x_0^1+a_1^i y_0^1+\cdots+a_n^i x_0^n+a_n^i y_0^n\\
=&\underbrace{\left(a_1^i x_0^1+a_2^i x_0^2+\cdots+a_n^i x_0^n\right)}_{0}+\underbrace{\left(a_1^i y_0^1+a_2^i y_0^2+\cdots+a_n^i y_0^n\right)}_{0}\\
=&0.
\end{aligned}$$

□

Teorema 0.2. Si $\vec{x_0} \in L$ y $a \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$a\vec{x_0}=\left(ax_0^1, ax_0^2, \ldots, ax_0^n\right) \in L.$$

Demostración. Tenemos que para $\forall i,\ 1 \leq i \leq m$,

$$\begin{aligned}
&a_1^i\left(ax_0^1\right)+a_2^i\left(ax_0^2\right)+\cdots+a_n^i\left(ax_0^n\right)\\
=&a\underbrace{\left(a_1^i x_0^1+a_2^i x_0^2+\cdots+a_n^i x_0^n\right)}_{0}\\
=&a\cdot 0\\
=&0.
\end{aligned}$$

□

Teorema 0.3. Por lo visto anteriormente, $L \subset \mathbb{R}^n$ es un **subespacio vectorial** sobre $\mathbb{R}$.

Demostración. Muchas de las propiedades de un espacio vectorial automáticamente se heredan a un subespacio vectorial. Las únicas excepciones son la definición de la suma, del producto y la existencia del elemento neutro 0. En este caso, hemos comprobado que la suma está definida en L y que existe la multiplicación $\cdot : \mathbb{R} \times L \to L$ definida en L. Además, $\vec{0} \in L$ es una solución trivial. □

Consideramos un sistema de ecuaciones no homogéneo S:

$$\begin{aligned}
&a_1^1 x_1+a_2^1 x_2+\cdots+a_n^1 x_n=b^1\\
&\vdots\\
&a_1^m x_1+a_2^m+\cdots+a_n^m x^n=b^m.
\end{aligned}$$

Consideramos que $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$ es el conjunto de las soluciones.

$$\mathcal{L}=\left\{\left(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n\right)\ :\ x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n \text{ es solución de } S\ \right\}.$$

Entonces, ya no se cumple necesariamente que la suma de dos soluciones también es solución. Si $\vec{x_0}, \vec{y_0} \in \mathcal{L}$, $\forall j,\ 1 \leq j \leq m$,

$$\begin{aligned} & a_1^j \left(x_0^1 + y_0^1\right) + a_2^j \left(x_0^2 + y_0^2\right) + \cdots + a_0^j \left(x_0^n + y_0^n\right) \\ = & \left(a_1^j x_0^1 + a_2^j x_0^2 + \cdots + a_n^j x_0^n\right) + \left(a_1^j y_0^1 + a_2^j y_0^2 + \cdots + a_n^j y_0^n\right) \\ = & b^j + b^j = 2b^j \neq b^j. \end{aligned}$$

Si $\vec{X_0} \in L$ y $\vec{x_0} \in \mathcal{L}$, tenemos que

$$\vec{X_0} + \vec{x_0} = b^j \in \mathcal{L}.$$

Capítulo 1

Espacios Vectoriales

Consideramos un cuerpo conmutativo con característica distinta de 2, es decir, $1+1 \neq 0$. A este cuerpo lo llamaremos $\mathbb{K}$.

Definición 1.1 ($\mathbb{K}$-Espacio vectorial)**.** Un conjunto $V \neq \emptyset$ es un $\mathbb{K}$-**espacio vectorial** si se tienen definidas dos aplicaciones

$$\begin{aligned} + : V \times V &\to V \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\to \vec{x} + \vec{y} \\ \cdot : \mathbb{K} \times V &\to V \\ (a, \vec{x}) &\to a \cdot \vec{x}, \end{aligned}$$

tales que verifican que

(1) $(V, +)$ es un cuerpo abeliano.

[Commutatividad.] $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V,\ \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$.

[Asociatividad.] $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V,\ (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$.

[Existencia del elemento neutro.] $\exists \vec{0} \in V, \forall \vec{x} \in V,\ \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$.

[Existencia del opuesto.] $\forall \vec{x} \in V, \exists -\vec{x} \in V,\ \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$. [a]

(2) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \forall a \in \mathbb{K},\ a \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{y}$.

(3) $\forall \vec{x} \in V, \forall a, b \in \mathbb{K},\ (a + b) \cdot \vec{x} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{x}$.

(4) $\forall \vec{x} \in V, \forall a, b \in \mathbb{K},\ (a \cdot b) \cdot \vec{x} = a \cdot (b \cdot \vec{x})$.

(5) $\forall \vec{x} \in V,\ 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

[a] En la propiedad del elemento neutro y del opuesto, como la conmutatividad es un requisito no hay que especificar que el elemento neutro funciona por ambos lados, al igual que el opuesto.

Si considero a $\mathbb{R}$ como un cuerpo, tenemos que $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial (dimensión 2) y un $\mathbb{C}$-espacio vectorial (dimensión 1).

Teorema 1.1. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, entonces se verifica que:

(a) $\forall \vec{x} \in V,\ 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

(b) $\forall \vec{x} \in V, \forall a \in \mathbb{K},\ (-a) \cdot \vec{x} = -a \cdot \vec{x}$.

(c) $\forall a \in \mathbb{K},\ a \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

(d) $a \cdot \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0} \vee a = 0$.

Demostración. **(a)**

$$\begin{aligned} &\vec{x} = (1+0) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} = \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} \\ \iff &-\vec{x} + \vec{x} = -\vec{x} + \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} \\ \iff &0 = 0 \cdot \vec{x}. \end{aligned}$$

Se puede hacer de otra manera:

$$0 \cdot \vec{x} = (0+0) \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} \iff 0 = 0 \cdot \vec{x}.$$

(b)

$$\begin{aligned} &0 \cdot \vec{x} = (a + (-a)) \cdot \vec{x} = a \cdot \vec{x} + (-a) \cdot \vec{x} \\ \iff &-a \cdot \vec{x} = -a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{x} + (-a) \cdot \vec{x} \\ \iff &-a \cdot \vec{x} = (-a) \cdot x. \end{aligned}$$

(c)

$$a \cdot \vec{x} = a \cdot \left(\vec{x} + \vec{0}\right) = a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{0} \iff -a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{x} = -a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{0}.$$

$$\therefore \vec{0} = a \cdot \vec{0}.$$

También se puede hacer de la siguiente manera:

$$a \cdot \vec{0} = a \cdot \left(\vec{0} + \vec{0}\right) = a \cdot \vec{0} + a \cdot \vec{0} \iff 0 = a \cdot \vec{0}.$$

(d) Si $a = 0$, hemos ganado. Si $a \neq 0$, $\exists \frac{1}{a} \in \mathbb{K}$. Por tanto,

$$\vec{0} = \frac{1}{a} \cdot \vec{0} = \frac{1}{a} \cdot (a \cdot \vec{x}) = \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot \vec{x} = \vec{x}.$$

□

1.1. Subespacios vectoriales

Definición 1.2 (Subespacio vectorial)**.** Un conjunto $L \neq \emptyset$ y $L \subset V$ es **parte estable** si

(i) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L,\ \vec{x} + \vec{y} \in L.$

(ii) $\forall a \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in V,\ a \cdot \vec{x} \in L.$

Teorema 1.2. Sea $L \neq \emptyset$ y $L \subset V$, entonces L es parte estable si y sólo si L es subespacio vectorial.

Demostración. **(i)** Si L es un subespacio vectorial es trivial.

(ii) Si L es parte estable, tenemos que para $\vec{x} \in L$ se verifica la propiedad conmutativa, asociativa, etc, dado que $L \subset V$. Además, dado que $\cdot : \mathbb{K} \cdot L \to L$ y $(-1) \cdot \vec{x} = -\vec{x}$, tenemos que si $\vec{x} \in L$ entonces $-\vec{x} \in L$. Además, $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0} \in L$. El resto de propiedades se derivan de que $L \subset V$.

□

Definición 1.3 (Combinación lineal)**.** $\vec{x} \in V$ es la **combinación lineal** de $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p$ con coeficientes $a^1, a^2, \ldots, a^p$ si existen $\vec{x}_i \in V$ y $a^i \in \mathbb{K}$, con $p \in \mathbb{N}$ $(1 \leq i \leq p)$ tales que:

$$\vec{x} = a^1 \cdot \vec{x}_1 + a^2 \cdot \vec{x}_2 + \cdots + a^p \cdot \vec{x}_p.$$

[a]

[a] Los a^i no denotan exponente sino que se trata de una forma de numeración.

Nota. Podemos apreciar que, dadas las condiciones del subespacio vectorial, cualquier combinación lineal de vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p \in L$ es un vector de L.

Teorema 1.3. Sea $H \subset V$ con $H \neq \emptyset$. Definimos $L(H)$ como el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de H, es decir:

$$L(H) = \left\{ a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p \ :\ p \in \mathbb{N}, \vec{x}_i \in H, a^i \in \mathbb{K} \right\}.$$

Se verifica que

(1) $H \subset L(H)$.

(2) $L(H)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

(3) $L(H)$ es el menor subespacio vectorial que contiene a H. Es decir, si L es un subespacio vectorial y $H \subset L$, entonces $L(H) \subset L$.

Demostración. **(1)** Tenemos que si $\vec{x} \in H$ entonces

$$\vec{x} = \underbrace{1 \cdot \vec{x}}_{\text{combinación lineal}} \in L(H).$$

(2) Sean $\vec{x}, \vec{y} \in L(H)$, queremos ver que $\vec{x}+\vec{y} \in L(H)$. Dado que $\vec{x}, \vec{y} \in L(H)$, se pueden expresar como combinación lineal de otros vectores en H.

$$\exists p \in \mathbb{N},\ \exists \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p \in H,\ \exists a^1, a^2, \dots, a^p \in \mathbb{K},$$

tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

De manera similar, como $\vec{y} \in L(H)$,

$$\exists q \in \mathbb{N},\ \exists \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_q \in H,\ \exists b^1, b^2, \dots, b^p \in \mathbb{K},$$

tales que

$$\vec{y} = b^1\vec{y}_1 + b^2\vec{y}_2 + \cdots + b^q\vec{y}_q.$$

Entonces,

$$\vec{x}+\vec{y} = \left(a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p\right) + \left(b^1\vec{y}_1 + b^2\vec{y}_2 + \cdots + b^q\vec{y}_q\right).$$

Como $\forall \vec{x}_i, \vec{y}_i \in H$, tenemos que $\vec{x}+\vec{y} \in L(H)$.

A continuación, demostramos que si $\vec{x} \in L(H)$ entonces $a \cdot \vec{x} \in L(H)$. Como $\vec{x} \in L(H)$,

$$\exists p \in \mathbb{N},\ \exists \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p \in H,\ \exists a^1, a^2, \dots, a^p \in \mathbb{K},$$

tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} a \cdot \vec{x} =& a \cdot \left(a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p\right) \\ =& a \cdot \left(a^1\vec{x}_1\right) + a \cdot \left(a^2\vec{x}_2\right) + \cdots + a \cdot \left(a^p\vec{x}_p\right) \\ =& \left(a \cdot a^1\right) \cdot \vec{x}_1 + \left(a \cdot a^2\right) \cdot \vec{x}_2 + \cdots + \left(a \cdot a^p\right) \cdot \vec{x}_p. \end{aligned}$$

Aprovechamos las propiedades de V como espacio vectorial y el hecho de que $H \subset V$ (hemos utilizado la propiedad distributiva). Como $\forall a \cdot a^i \in \mathbb{K}$ y $\vec{x}_i \in H$, $a \cdot \vec{x}$ se trata de una combinación lineal y, por tanto, $a \cdot \vec{x} \in L(H)$.

(3) Si $\vec{x} \in L(H)$, tenemos que $\exists p \in \mathbb{N}$, $\exists \vec{x}_i \in H$, $\exists a^i \in \mathbb{K}$ con $1 \leq i \leq p$, tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Como $H \subset L$, $x_i \in L$ y, como L es un subespacio vectorial, tenemos que $a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p \in L$, por lo que $\vec{x} \in L$.

□

Definición 1.4. $L(H)$ es el subespacio generado por H o H es un sistema de generadores de de $L(H)$. Si $L(H) = V$ diremos que H es sistema de generadores.

1.2. Bases de un espacio vectorial

Definición 1.5. V es **finito generado** si existe un sistema de generadores formado por un número finito de vectores. Es decir, si $\exists \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\} = H$ tal que $V = L(H)$, es decir, $\exists \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\} \subset V$ tales que $\forall \vec{x} \in V, \exists a^1, a^2, \dots, a^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Definición 1.6. Una familia de vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ es **linealmente dependiente** si uno de ellos es combinación lineal de los otros.

$$\exists i = 1, 2, \dots, p,\ \vec{x}_L \in L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}).$$

Es decir,

$$\exists i = 1, 2, \dots, p,\ \exists a^1, a^2, \dots, a^{i-1}, a^{i+1}, \dots, a^p \in \mathbb{K}$$
$$\vec{x}_i = a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^{i-1}\vec{x}_{i-1} + a^{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + a^p\vec{x}_p..$$

Es decir, si $\vec{x}_j = \vec{0}$, $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ es dependiente, pues

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + 0 \cdot \vec{x}_{j-1} + 0 \cdot \vec{x}_{j+1} + \cdots + 0 \cdot \vec{x}_p.$$

Teorema 1.4. Sea $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\} \subset V$. Son linealmente dependientes si y solo si $\exists a^1, a^2, \dots, a^p \in \mathbb{K}$ no todos nulos tales que

$$\vec{0} = a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Demostración. **(i)** Supongamos que la familia es linealmente dependiente. Por tanto, $\exists i = 1, \dots, p$ tal que $\vec{x}_i \in L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_p\})$. Por tanto, existen $a^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x}_i = a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^{i-1}\vec{x}_{i-1} + a^{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Si sumamos el opuesto a ambos lados tenemos que

$$\vec{0} = \vec{x}_i - \vec{x}_i = a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^{i-1}\vec{x}_{i-1} + (-1)\vec{x}_1 + a^{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

(ii) Suponemos que $\exists a^1, a^2, \dots, a^p \in \mathbb{K}$ no todos nulos tales que

$$a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p = \vec{0}.$$

Como no todos los escalares son nulos, podemos encontrar $a^i \neq 0$, y a^i tiene inversa.

$$\therefore (-1)\, a^i\vec{x}_i = a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^{i-1}\vec{x}_{i-1} + a^{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Aprovechando las propiedades:

$$\vec{x}_i = \frac{-a^1}{a^i}\vec{x}_1 + \cdots + \frac{-a^{i-1}}{a^i}\vec{x}_{i-1} + \frac{-a^{i+1}}{a^i}\vec{x}_{i+1} + \cdots + \frac{-a^p}{a^i}\vec{x}_p.$$

□

Corolario 1.1. La familia de vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\} \subset V$ es **linealmente independiente** si y solamente si

$$a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p = \vec{0} \Rightarrow a^1 = a^2 = \cdots = a^p = 0.$$

Teorema 1.5. Una familia de vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ es linealmente independiente si y solamente si $\forall \vec{x} \in L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}), \exists! a^1, a^2, \ldots, a^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Demostración. **(i)** Si $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ es linealmente independiente y sea $\vec{x} \in L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\})$. Supongamos que existen otros escalares $b^1, b^2, \ldots, b^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = b^1\vec{x}_1 + \cdots + b^p\vec{x}_p.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}\vec{0} =& \vec{x} - \vec{x} = \left(a^1\vec{x}_1 + \cdots a^p\vec{x}_p\right) - \left(b^1 + \cdots + b^p\vec{x}_p\right)\\ =& \left(a^1 - b^1\right)\vec{x}_1 + \cdots + \left(a^p - b^p\right)\vec{x}_p.\end{aligned}$$

Como se trata de una familia linealmente independiente, tenemos que $\forall i,\ 1 \leq i \leq p$,

$$a^i - b^i = 0 \iff a^i = b^i.$$

(ii) Recíprocamente, tenemos que si $a^1, a^2, \ldots, a^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^p\vec{x}_p = \vec{0}.$$

Esto puede pasar si $a^1 = a^2 = \cdots = a^p = 0$. Como a^i son únicos, tenemos que si hay alguno no nulo, la combinación lineal no va a ser nula. Por tanto, será linealmente independiente.

□

Definición 1.7 (Base)**.** Una **base** de un espacio vectorial V es un sistema de generadores linealmente independientes.

Corolario 1.2. Una familia de vectores $B \subset V$ es una base de E si y solo si $\forall \vec{x} \in V$ se expresa de manera única como combinación lineal de elementos de B.

Teorema 1.6. Si $V \neq \{0\}$, es finitamente generado, entonces $\exists \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ es base de V. Es decir, todo espacio vectorial $V \neq \{0\}$ generado por un número finito de vectores tiene una base finita.

Demostración. Sea $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ un sistema de generadores de V. Si $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ son linealmente independientes, forman una base (hemos ganado). Sino, uno se puede expresar como combinación lineal de los otros, por lo que $\exists i = 1, 2, \dots, p$ tal que $\vec{x}_i \in L\left(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_p\}\right)$, por lo que $\exists b^1, b^2, \dots, b^p \in \mathbb{K}$

$$\vec{x}_i = b^1\vec{x}_1 + b^2\vec{x}_2 + \cdots + b^{i-1}\vec{x}_{i-1} + b^{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + b^p\vec{x}_p.$$

Dado que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ es un sistema de generadores de V, $\forall \vec{x} \in V, \exists a^1, a^2, \dots, a^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\begin{aligned}
\vec{x} =& a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p \\
=& a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^{i-1}\vec{x}_{i-1} + a^i\left(b^1\vec{x}_1 + b^2\vec{x}_2 + \cdots + b^{i-1}\vec{x}_{i-1} + b^{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + b^p\vec{x}_p\right) + a^{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + a^p\vec{x}_p \\
=& \left(a^1 + a^ib^1\right)\vec{x}_1 + \cdots + \left(a^{i-1} + a^ib^{i-1}\right)\vec{x}_{i-1} + \left(a^ib^{i+1} + a^{i+1}\right)\vec{x}_{i+1} + \cdots + \left(a^ib^p + a^p\right)\vec{x}_p.
\end{aligned}$$

Por tanto, el conjunto $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\} - \{x_i\}$ también es un sistema de generadores de V. Si $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_{i+1}, \vec{x}_p\}$ es linealmente independiente, es un sistema de generadores de V. Si es linealmente dependiente repetimos el proceso hasta tener $\{\vec{x}_i\}$, que no puede ser 0, porque $V \neq 0$, y $\{x_i\}$ es linealmente independiente. □

Observación. De esto podemos concluir que todo sistema de generadores contiene una base.

Teorema 1.7 (Teorema de Steinitz)**.** Sea $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_p\} \subset V$ una base de V y sea $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q\} \subset V$ linealmente independiente, entonces $q \leq p$ y se puede obtener una nueva base sustituyendo q de los vectores $\vec{y}_i$ por $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$.

Demostración. Se trata de introducir uno por uno los vectores $\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_p\}$ por los vectores de la base dada. Sea $\vec{x}_1 \in V$, entonces $\exists a^1, a^2, \dots, a^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x}_1 = a^1\vec{y}_1 + a^2\vec{y}_2 + \cdots + a^p\vec{y}_p = \sum_{i=1}^{p} a^i\vec{y}_i.$$

Existe al menos un $a^i \neq 0$ (porque $\vec{x}_1$ no es nulo). Sea $a^1 \neq 0$.

$$\vec{y}_1 = \left(a^1\right)^{-1}\vec{x}_1 - \sum_{i=2}^{p}\left(a^1\right)^{-1}a^i\vec{y}_i$$

Entonces, $\forall x \in V, \exists b^1, b^2, \ldots, b^p \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}\vec{x} =& b^1\vec{y}_1 + b^2\vec{y}_2 + \cdots b^p\vec{y}_p \\ =& b^1\left(\frac{1}{a^1}\vec{x}_1 + \left(-\frac{a^2}{a^1}\right)\vec{y}_2 + \cdots + \left(-\frac{a^p}{a^1}\right)\vec{y}_p\right) + b^2\vec{y}_2 + \cdots + b^p\vec{y}_p \\ =& \frac{b^1}{a^1}\vec{x}_1 + \left(b^1\left(-\frac{a^2}{b^1}\right) + b^2\right)\vec{y}_2 + \cdots + \left(b^1\left(-\frac{a^p}{a^1}\right) + b^p\right)\vec{y}_p.\end{aligned}$$

Hemos llegado a la conclusión de que $\{\vec{x}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_p\}$ forman un sistema de generadores de V. Además, son linealmente independientes, pues

$$\vec{0} = b^1\vec{x}_1 + b^2\vec{y}_2 + \cdots + b^p\vec{y}_p \Rightarrow b^1\left(\sum_{i=1}^{p} a^i\vec{y}_i\right) + b^2\vec{y}_2 + \cdots + b^p\vec{y}_p = \vec{0}$$

$$b^1a^1\vec{y}_1 + \sum_{i=2}^{p}\left(b^1a^i + b^i\right)\vec{y}_i = \vec{0}$$

$$\Rightarrow b^1a^1 = 0,\ b^1a^i + b^i = 0,\ i \geq 2.$$

pues $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_p\}$ son una base. Como $a^1 \neq 0$, tenemos que $b^1 = b^i = 0$. Por tanto, $\{\vec{x}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_p\}$ es una base de V.

Supongamos que $i < \text{mín}\,(p, q)$ y que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_i, \vec{y}_{i+1}, \ldots, \vec{y}_p\}$ es sistema de generadores. Entonces, $\exists c^1, c^2, \ldots, c^i, d^{i+1}, \ldots, d^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x}_{i+1} = c^1\vec{x}_1 + c^2\vec{x}_2 + \cdots + c^i\vec{x}_i + d^{i+1}\vec{y}_{i+1} + \cdots + d^p\vec{y}_p = \sum_{j=1}^{i} c^j\vec{x}_j + \sum_{j=i+1}^{p} d^j\vec{y}_j.$$

El procedimiento anterior nos asegura que podemos sustituir $\vec{x}_{i+1}$ por cualquier vector con coeficiente no nulo. Por tanto, tenemos que demostrar que existe un coeficiente del segundo sumatorio no nulo. Si fueran todos nulos, tendríamos que $\vec{x}_{i+1}$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$, esto contradice que sean linealmente independientes. □

Corolario 1.3. Si el espacio vectorial V tiene una base finita, todas las bases de V tienen el mismo número de vectores.

Demostración. Sean $B_1 = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ y $B_2 = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_q\}$ dos bases de V. Como B_1 es una base y B_2 es un conjunto de vectores linealmente independientes, tenemos que todas las bases de V han de ser finitas. Entonces, como B_1 y B_2 son bases y, consecuentemente, linealmente independientes, tenemos que $p \leq q$ y $q \leq p$, por lo que $p = q$. □

Definición 1.8 (Dimensión)**.** La **dimensión** de un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es el número de elementos de sus bases, si son finitas. Si no lo son, diremos que V es de dimensión infinita.

Corolario 1.4. La dimensión de un espacio vectorial coincide con el número máximo de elementos linealmente independientes, y también con el número mínimo de generadores.

Corolario 1.5. Todo conjunto de vectores linealmente independientes puede completarse hasta obtener una base.

Lema 1.1. Si $S \subset V$ es linealmente independiente y $\vec{x} \in V$ y $\vec{x} \notin L(S)$, tenemos que la familia $S \cup \{\vec{s}\}$ es linealmente independiente.

Demostración. Sean $a, a^i \in \mathbb{K}$ y

$$a\vec{x} + a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^p\vec{x}_p = \vec{0}.$$

Si $a \neq 0$, entonces $\vec{x}$ se puede expresar como combinación lineal de S, pero por hipótesis esto no es posible. Por tanto, debe ser que $a = 0$ y, consecuentemente, $\forall a^i = 0$, pues S es linealmente independiente. Por tanto, $S \cup \{\vec{x}\}$ también es linealmente independiente. □

Proposición 1.1. Si V es finitamente generado y L es subespacio vectorial de V, entonces L es infinitamente generado y

$$\dim L \leq \dim V.$$

Además,

$$\dim L = \dim V \iff L = V.$$

Demostración. Si $L = \{0\}$ no hay nada que probar (no tiene bases). En caso contrario, existe $\vec{x}_1 \in L$. Si $L = L(\{\vec{x}_1\})$, tenemos que $\vec{x}_1$ es una base. En caso contrario, existe $\vec{x}_2 \in L$ con $\vec{x}_2 \notin L(\{\vec{x}_1\})$. Si $L = L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\})$, $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ forman una base. Sabemos que son linealmente independientes por el lema anterior. En algún momento llegaremos a que $L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\})$ forman una base, pues un corolario anterior nos dice que hay un número máximo de vectores linealmente independientes.

Además, si $\dim L = n$ y $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ es una base de L, por el teorema de Steinitz, también es una base de V. Por tanto,

$$L = L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}) = V.$$

□

Teorema 1.8 (Teorema de apliación de base)**.** Sea L un suespacio vectorial de V y sea $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ una base de L. Entonces existe $\{\vec{u}_{p+1}, \vec{u}_{p+2}, \ldots, \vec{u}_n\} \subset V$ tales que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p, \vec{u}_{p+1}, \vec{u}_{p+2}, \ldots, \vec{u}_n\}$ son base de V.

Demostración. Si $\dim V = n$ tenemos que existe un número finito de generadores que forman una base de V, y consideramos que los vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ forman una base de L. Entonces, $p \leq n$ y, por el teorema de Steinitz, se puede obtener una nueva base sustituyendo $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ por p vectores de $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$. □

1.3. Suma directa de subespacios.

Notación.

$$\mathcal{P}(V) = \{A \ : \ A \subset V\}.$$

$$\mathcal{L}(V) = \{L \in \mathcal{P}(V) \ : \ L \text{ es subespacio vectorial de } V\ \}.$$

Por tanto,

$$\mathcal{L}(V) \subset \mathcal{P}(V).$$

Teorema 1.9. $\forall I$ conjunto, $\forall i \in I$, si $L_i \in \mathcal{L}(V)$ entonces

$$\bigcap_{i \in I} L_i \in \mathcal{L}(V).$$

Es decir, la intersección de espacios vectoriales es un espacio vectorial.

Demostración. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \bigcap_{i \in I} L_i$ implica que $\vec{x}, \vec{y} \in L_i, \forall i \in I$.Como L_i son subespacios vectoriales:

$$\vec{x} + \vec{y} \in L_i, \forall i \in I \ \Rightarrow \ \vec{x} + \vec{y} \in \bigcap_{i \in I} L_i.$$

Similarmente, si $\vec{x} \in \bigcap_{i \in I} L_i$ y $a \in \mathbb{K}$, tenemos que $\vec{x} \in L_i, \forall i \in I$. Como L_i son subespacios vectoriales, son parte estable, por lo que

$$a \cdot \vec{x} \in L_i, \forall i \in I \ \Rightarrow \ a \cdot \vec{x} \in \bigcap_{i \in I} L_i.$$

□

Observación. Sin embargo, no tiene que cumplirse necesariamente que $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}(V)$ si $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$.

Ejemplo 1. Sean $\{\vec{u}, \vec{v}\} \subset V$ linealmente independientes y $L_1 = L(\{\vec{u}\})$ y $L_2 = L(\{\vec{v}\})$ las rectas que generan. Asumamos que $\vec{u} + \vec{v} \in L_1 \cup L_2$. Sin pérdida de generalidad, $\vec{u} + \vec{v} \in L_1$. Por tanto, $\exists a \in \mathbb{K}$ tal que $\vec{u} + \vec{v} = a\vec{u}$. De esta manera,

$$(a-1)\,\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}.$$

Esto es absurdo, pues hemos dicho que estos vectores son linealmente independientes.

Definición 1.9. Si $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$, definimos $L_1 + L_2$ al menor subespacio vectorial generado por la unión.

$$L_1 + L_2 = L(L_1 \cup L_2).$$

Teorema 1.10. Sean $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ y sea $L' = \{\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \, : \, \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2\}$. Tenemos que $L' = L_1 + L_2$.

Demostración. Si $\vec{x}_1 \in L_1$, tenemos que $\vec{x}_1 = \vec{x}_1 + \vec{0} \in L'$, pues $\vec{x}_1 \in L_1$ y $\vec{0} \in L_2$. Por tanto, $L_1 \subset L'$. Similarmente, $L_2 \subset L'$. Consecuentemente, $L_1 \cup L_2 \subset L'$.

Además, tenemos que $L' \in \mathcal{L}(V)$, pues $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L'$ tenemos que $\exists \vec{x}_1, \vec{y}_1 \in L_1$ y $\exists \vec{x}_2, \vec{y}_2 \in L_2$.

$$\vec{x} + \vec{y} = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + (\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \underbrace{(\vec{x}_1 + \vec{y}_1)}_{\in L_1} + \underbrace{(\vec{x}_2 + \vec{y}_2)}_{\in L_2}.$$

Por tanto, $\vec{x} + \vec{y} \in L'$. Similarmente, si $a \in \mathbb{K}$ y $\vec{x} \in L'$ tenemos que existen $\vec{x}_1 \in L_1$ y $\vec{x}_2 \in L_2$ tales que

$$a \cdot \vec{x} = a \cdot (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \underbrace{a\vec{x}_1}_{\in L_1} + \underbrace{a\vec{x}_2}_{\in L_2}.$$

Por tanto, $a \cdot \vec{x} \in L'$. Por tanto, $L' \in \mathcal{L}(V)$.

A continuación demostramos que si $L \in \mathcal{L}(V)$ y $L_1 \cup L_2 \subset L$, entonces $L' \subset L$. Tenemos que $\forall \vec{x} \in L'$ existen $\vec{x}_1 \in L_1$ y $\vec{x}_2 \in L_2$ tales que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$. Por tanto, $\vec{x} \in L$.

$$\therefore L' \subset L.$$

Por todo ello, $L' = L_1 + L_2$. $\square$