

Cálculo Diferencial

Victoria Torroja Rubio

8/9/2025

Índice general

1. Espacios métricos	3
1.1. Espacios normados	4
1.2. Bolas en un espacio métrico	7
1.3. Conceptos topológicos	9
1.4. Conjuntos abiertos y cerrados relativos	15
1.5. Sucesiones en espacios métricos	16
1.6. Completitud	19
1.7. Compacidad y recubrimientos	22
2. Continuidad	26
2.1. Continuidad global	29
2.2. Continuidad y restricciones	30
2.3. Conexión	33

Profesor: Jesús Jaramillo

Despacho: 305-E

Correo: jaramil@mat.ucm.es

Contenido:

- Topología de los espacios métricos (Cap 1-5) - Aprox: 6'5 semanas
- Cálculo diferencial en varias variables (Cap 6-11) - Resto

Bibliografía:

- Marsden-Hoffman (sirve para las dos partes): 'Análisis clásico elemental'
- K. Smith (la parte de integración es más avanzada): 'Primer of modern analysis'

Materiales Campus:

- Apuntes de Victor Sánchez (apuntes muy condensados)
- Manual de Ansemil-Ponte (versión extendida de Marsden-Hoffman)
- Curso de Daniel Azagra

Capítulo 1

Espacios métricos

Definición 1.1 (Espacio métrico). Un **espacio métrico** es un par (X, d) donde X es un conjunto no vacío y $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función que se llama **distancia** o **métrica**, tal que:

1. $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$.
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$.
4. (Propiedad triangular) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$.

Ejemplo. Algunos ejemplos de espacios métricos son:

1. Consideremos (\mathbb{R}, d) donde $d(x, y) = |x - y|$.
2. La distancia euclídea en $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$:

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

3. La 'métrica del taxi' en \mathbb{R}^2 con distancia:

$$d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

4. Distancias geodésicas: el camino más corto (por ejemplo, en una superficie esférica el camino más corto entre dos puntos es un arco de circunferencia).
5. Distancias en \mathbb{R}^n . Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, consideramos la distancia euclídea

$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

También podemos generalizar la 'métrica del taxi':

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|.$$

También se puede considerar la métrica

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\}.$$

Definición 1.2 (Espacio discreto). Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto cualquiera, y definimos $\forall x, y \in X$

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y \\ 1, & \text{si } x \neq y \end{cases}.$$

Se dice que d es la **métrica discreta** y (X, d) el **espacio métrico discreto**.

Definición 1.3 (Subespacio métrico). Sea (X, d) un espacio métrico y sea $Y \subset X$. Se define la **métrica relativa** (o **restringida**) a Y como $d_Y(y, y') = d(y, y')$, $\forall y, y' \in Y$. Entonces, (Y, d_Y) es un espacio métrico que llamaremos **subespacio** de X .

1.1. Espacios normados

Definición 1.4 (Espacio normado). Un **espacio normado** es un par $(E, \|\cdot\|)$ donde E es un espacio vectorial y $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ es una función que se llama **norma** tal que:

1. $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in E$.
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E$ ^a.
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in E$.

^aEn este curso \mathbb{K} va a ser principalmente \mathbb{R} .

Proposición 1.1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Si definimos

$$d(x, y) = \|x - y\|, \forall x, y \in E,$$

se obtiene que d es una distancia en E , que se llama **asociada** a la norma.

Demostración. Demostremos todas las propiedades de las métricas:

1. Tenemos que $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$, $\forall x, y \in E$.
2. $d(x, y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$.
3. $d(x, y) = \|y - x\| = |-1| \|x - y\| = \|x - y\| = d(x, y)$.

$$4. d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y).$$

□

Observación. En \mathbb{R}^n , dado $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se definen:

$$(\text{Norma euclídea}) \quad \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

$$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|.$$

$$\|x\|_\infty = \max \{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}.$$

Proposición 1.2 (Relación entre las normas en \mathbb{R}^n). $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

Demostración. Supongamos que $|x_{i_0}| = \|x\|_\infty$. Entonces, tenemos que

$$|x_{i_0}|^2 \leq |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2.$$

Dado que la función de la raíz es creciente, tenemos que

$$\|x\|_\infty = |x_{i_0}| \leq \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} = \|x\|_2.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\|x\|_1^2 = (|x_1| + \dots + |x_n|)^2 = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 + C^1 \geq |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 = \|x\|_2^2.$$

Finalmente, tenemos que

$$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n| \leq |x_{i_0}| + \dots + |x_{i_0}| = n|x_{i_0}| = n\|x\|_\infty.$$

□

Definición 1.5. Dos normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ en un mismo espacio vectorial E son **equivalentes** cuando existen $m, M > 0$ tales que

$$m\|x\|' \leq \|x\| \leq M\|x\|', \quad \forall x \in E.$$

Observación. Hemos visto en la proposición anterior que $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ son equivalentes en \mathbb{R}^n .

¹ $C \geq 0$.

Definición 1.6 (Producto escalar). Sea E un espacio vectorial real. Un **producto escalar** en E es una forma bilineal, simétrica y definida positiva. Es decir, una aplicación $\langle, \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

1. $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in E.$
3. $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$

Observación. En este caso, denotaremos $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$

Teorema 1.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Sea E un espacio vectorial dotado de un producto escalar \langle, \rangle . Entonces

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \forall x, y \in E.$$

Demostración. **Caso 1.** Si $x = 0$ o $y = 0$, obtenemos la igualdad.

Caso 2. Si $y \neq 0$, tenemos que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle = \langle x, x \rangle + \alpha \langle x, y \rangle + \alpha \langle y, x \rangle + \alpha^2 \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\alpha \langle x, y \rangle + \alpha^2 \|y\|^2.$$

Tomamos $\alpha = -\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$. Así, tenemos que

$$0 \leq \|x\|^2 - \frac{2\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} + \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^4} \|y\|^2 = \|x\|^2 - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2}.$$

Así, tenemos que $\frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} \leq \|x\|^2$, por lo que $\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$ y tenemos que $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$

□

Proposición 1.3. Sea E un espacio vectorial dotado de un producto escalar \langle, \rangle . Entonces, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, es una norma en E , que se dice asociada a \langle, \rangle .

Demostración. Comprobamos que se cumplen las propiedades de las normas:

1. Tenemos que claramente $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0, \forall x \in E.$
2. $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$
3. $\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle = \lambda^2 \|x\|^2.$ Tomando la raíz cuadrada, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$

4. Si $x, y \in E$,

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

Tomando raíces, tenemos que se verifica la propiedad triangular: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

□

1.2. Bolas en un espacio métrico

Definición 1.7. Sea (X, d) un espacio métrico y consideramos $a \in X$, $r > 0$. Se definen como **bola abierta** de centro a y radio r al conjunto

$$B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}.$$

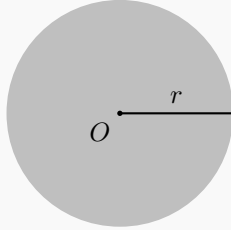
Similarmente, se llama **bola cerrada** de centro a y radio r al conjunto

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}.$$

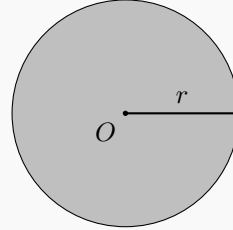
Ejemplo. Consideremos bolas en \mathbb{R}^2 de distintas normas.

1. Consideremos bolas abiertas y cerradas con la métrica euclídea:

$$B_2((0, 0), r) = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} < r\}, \quad \overline{B}_2((0, 0), r) = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq r\}.$$



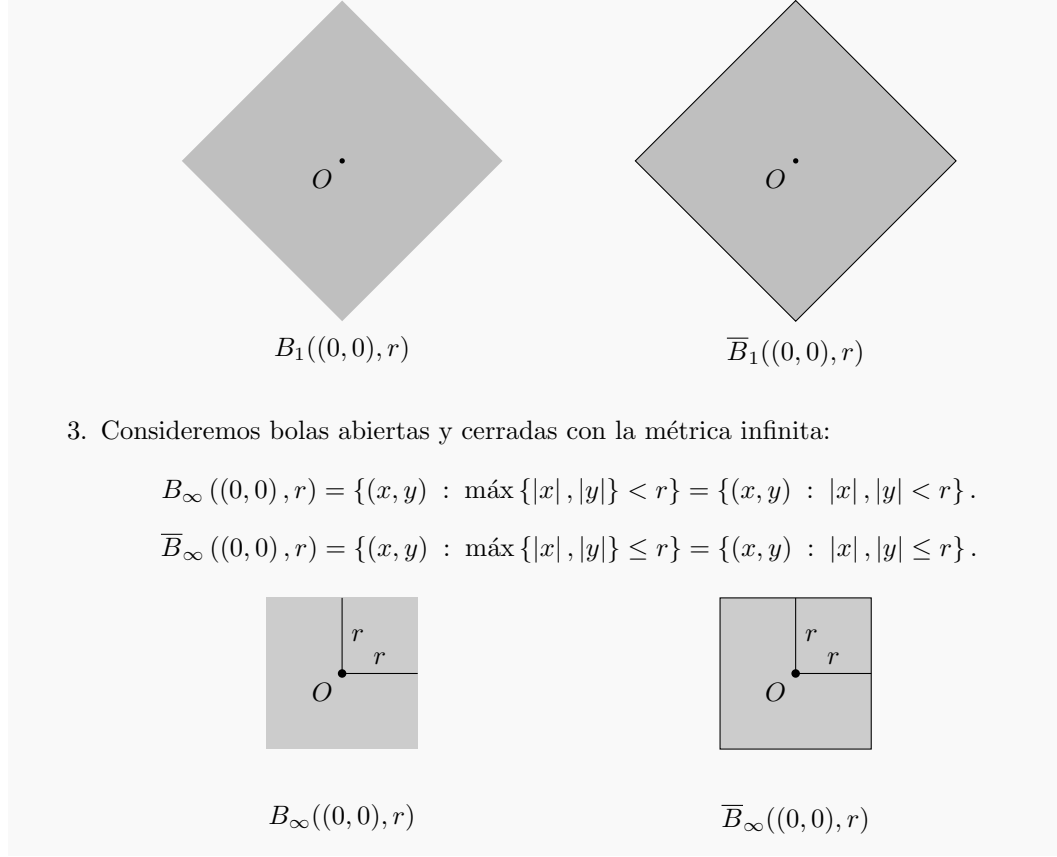
$B_2((0, 0), r)$



$\overline{B}_2((0, 0), r)$

2. Consideremos bolas abiertas y cerradas con la métrica 'del taxi':

$$B_1((0, 0), r) = \{(x, y) : |x| + |y| < r\}, \quad \overline{B}_1((0, 0), r) = \{(x, y) : |x| + |y| \leq r\}.$$



Observación. En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ se tiene que $B(0, r) = (-r, r)$ y $\overline{B}(0, r) = [-r, r]$. Similarmente, tenemos que $B(a, r) = (a - r, a + r)$ y $\overline{B}(a, r) = [a - r, a + r]$.

Observación (Relación de las bolas en \mathbb{R}^n). Sabemos que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

Por tanto, tenemos que

$$B_1(a, r) \subset B_2(a, r) \subset B_\infty(a, r) \subset B_1(a, nr)^a.$$

En efecto, si $x \in B_1(a, r)$, tenemos que $\|x - a\|_1 < r$. Por tanto, es fácil ver que $\|x - a\|_2 \leq \|x - a\|_1 < r$, por lo que $x \in B_2(a, r)$. El resto de inclusiones se deducen de forma análoga.

^aTambién se puede escribir $B_\infty(a, nr) \subset B_1(a, r) \subset B_2(a, r) \subset B_\infty(a, nr)$.

Definición 1.8. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se define el **diámetro** de A como

$$\text{diam}(A) = \sup \{d(x, y) : x, y \in A\} \in [0, \infty).$$

Se dice que A es **acotado** si $\text{diam}(A) < \infty$.

Proposición 1.4. Dado un espacio métrico (X, d) con $A \subset X$, tenemos que A está acotado si y solo si A está contenido en alguna bola.

Demostración. (i) Supongamos que A está acotado, entonces $\text{diam}(A) = r < \infty$. Así, tenemos que si $x \in A$, entonces $\forall a \in A$ se tiene que $d(a, x) \leq r$, por lo que $A \subset \overline{B}(a, r)$. También podemos ver que lo contiene una bola abierta: $A \subset \overline{B}(a, r) \subset B(a, r+1)$.

(ii) Si A está contenido en una bola, tenemos que existe $x \in X$ y $\frac{r}{2} > 0$ tal que $A \subset B(x, \frac{r}{2})$. De esta manera, si $a, b \in A$ se tiene que

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Así, se tiene que $\forall a, b \in A$, $d(a, b) < r$, por lo que $\text{diam}(A) \leq r < \infty$, por lo que A está acotado. □

1.3. Conceptos topológicos

Definición 1.9 (Conjunto abierto). Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que A es un **conjunto abierto** si $\forall a \in A, \exists r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A$.

Proposición 1.5. Toda bola abierta es un conjunto abierto.

Demostración. Tomemos $A = B(a, R)$ y $x \in B(a, R)$. Sea $\delta = d(x, a) < R$ y $r = R - \delta > 0$ ². Sea $y \in B(x, r)$, tenemos que $d(x, y) < r$. Así,

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < r + \delta = R.$$

Así, $y \in B(a, R)$, por lo que $B(x, r) \subset B(a, R)$. □

Ejemplo. En $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.

1. Consideremos $A = \{(x, y) : 0 < x < 1\}$. Vamos a ver que es abierto. Si $a \in A$, sea $a = (x, y)$ y consideramos $r = \min\{x, 1 - x\}$. Entonces, tenemos que $B_2(a, r) \subset A$.

²No hace falta de escribir $r = \min\{R - \delta, \delta\}$ al tratarse de una bola.

A , en efecto, si $(x', y') \in B_2(a, r)$:

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} < r \Rightarrow |x - x'| < r \Rightarrow 0 < x' < 1.$$

Así, tenemos que $(x', y') \in A$.

2. Consideremos $A = \{(x, y) : 0 < x \leq 1\}$. Vamos a ver que no es abierto. En efecto, si tomamos $a = (1, 0)$ y $r > 0$, tenemos que $(1 + \frac{r}{2}, 0) \in B_2(a, r)$ pero $(1 + \frac{r}{2}, 0) \notin A$.

Proposición 1.6. En \mathbb{R}^n los conjuntos abiertos coinciden para $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$.

Demostración. Como se vio en una observación anterior, sabemos que

$$B_1(a, r) \subset B_2(a, r) \subset B_\infty(a, r) \subset B_1(a, nr).$$

- Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Si A es abierto con la norma $\|\cdot\|_2$, tenemos que $\forall a \in A, \exists r > 0$ tal que $B_2(a, r) \subset A$. Por la observación, como $B_1(a, r) \subset B_2(a, r) \subset A$, tenemos que también es abierto para la norma $\|\cdot\|_1$.
- Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Si A es abierto con la norma $\|\cdot\|_\infty$, entonces $\forall a \in A, \exists r > 0$ tal que $B_\infty(a, r) \subset A$. Por la observación anterior, tenemos que $B_2(a, r) \subset B_\infty(a, r) \subset A$, por lo que A es abierto respecto a la norma $\|\cdot\|_2$.
- Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Si A es abierto respecto de $\|\cdot\|_1$, tenemos que $\forall a \in A, \exists r > 0$ tal que $B_1(a, r) \subset A$. Sea $r' = \frac{r}{n} > 0$,

$$B_\infty(a, r') \subset B_1(a, nr') = B_1(a, r) \subset A.$$

Por tanto, A es abierto respecto de la norma $\|\cdot\|_\infty$.

□

Teorema 1.2 (Propiedades de los abiertos). Sea (X, d) un espacio métrico.

1. X y \emptyset son abiertos.
2. La unión arbitraria de abiertos es abierto.
3. La intersección finita de abiertos es abierto.

Demostración. 1. Es trivial que \emptyset es abierto. Por otro lado, si $a \in X$, tenemos que $\forall r > 0$, $B(a, r) \subset X$. Así, X está abierto.

2. Supongamos que $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos abiertos y sea $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Si $a \in A$, tenemos que $a \in A_i$ para algún $i \in I$. Así, existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i$. Por tanto, $B(a, r) \subset A$ y A es abierto.

3. Sean A_1, \dots, A_m conjuntos abiertos y sea $A = A_1 \cap \dots \cap A_m$. Si $a \in A$, tenemos que $a \in A_i$ para $1 \leq i \leq m$. Así, existe $r_i > 0$ tal que $B(a, r_i) \subset A_i$. Si tomamos $r = \min \{r_i : 1 \leq i \leq m\}$, tenemos que $B(a, r) \subset B(a, r_i)$, $\forall i = 1, \dots, m$. Por tanto, $B(a, r) \subset A$ y A es abierto.

□

Observación. La intersección infinita de conjuntos abiertos puede no ser abierto. Por ejemplo, consideremos en $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ consideramos $A_m = B_2\left((0, 0), \frac{1}{m}\right)$, que es abierto $\forall m \in \mathbb{N}$. Sin embargo, $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m = \{(0, 0)\}$, que no es abierto.

Definición 1.10 (Conjunto cerrado). Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que un conjunto $C \subset X$ es **cerrado** si X/C es abierto.

Proposición 1.7. Toda bola cerrada es un conjunto cerrado.

Demostración. En efecto, sea $C = \overline{B}(p, R) = \{x \in X : d(x, p) \leq R\}$ y sea $A = X/C = \{x \in X : d(x, p) > R\}$. Si $a \in A$, tenemos que $d(a, p) = \delta > R$. Así, tomando $r = \delta - R > 0$, si $x \in B(a, r)$, tenemos que

$$d(x, p) \geq d(p, a) - d(x, a) > \delta - r = R.$$

Así, tenemos que $x \in A$, por lo que $B(a, r) \subset A$ y X/C es abierto, por lo que C es cerrado. □

Observación. Es fácil ver que en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$:

- (a, b) es abierto.
- $[a, b]$ es cerrado.
- $(a, b]$ y $[a, b)$ no son ni abiertos ni cerrados.

Teorema 1.3 (Propiedades de los cerrados). Sea (X, d) un espacio métrico.

1. Los conjuntos X y \emptyset son cerrados.
2. La intersección arbitraria de cerrados es cerrado.
3. La unión finita de cerrados es cerrado.

Demostración. 1. Dado que $\emptyset = X/X$ y $X = X/\emptyset$, del teorema anterior se sigue que son cerrados.

2. Sean $\{C_i\}_{i \in I}$ cerrados. Entonces, $\forall i \in I$ tenemos que X/C_i es abierto, así,

$$X/\bigcap_{i \in I} C_i = \bigcup_{i \in I} (X/C_i),$$

que es abierto, por lo que $\bigcap_{i \in I} C_i$ es cerrado.

3. Sean C_1, \dots, C_m cerrados. Entonces, $\forall i = 1, \dots, m$, tenemos que X/C_i es abierto. Así,

$$X/\bigcup_{i=1}^m C_i = \bigcap_{i=1}^m (X/C_i),$$

es abierto, por lo que $\bigcup_{i=1}^m C_i$ es cerrado.

□

Definición 1.11 (Punto interior). Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que $a \in A$ es un **punto interior** de A si existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A$. Denotamos $\text{Int}(A)$ al conjunto de puntos interiores de A .

Observación. Es trivial ver que $\text{Int}(A) \subset A$.

Proposición 1.8. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$.

1. El conjunto $\text{Int}(A)$ es el mayor abierto contenido en A .
2. A es abierto si y solo si $A = \text{Int}(A)$.

Demostración. 1. Sea $U = \text{Int}(A)$. Vamos a ver que es abierto. Dado $x \in U$, tenemos que existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$. Si $y \in B(x, r)$, por tratarse de una bola abierta existe $r' > 0$ tal que $B(y, r') \subset B(x, r) \subset A$, por lo que $y \in \text{Int}(A) = U$. Por tanto, $B(x, r) \subset U$ y U es abierto.

Ahora tenemos que ver que es el mayor abierto. Supongamos que V es abierto y $V \subset A$. Sea $x \in V$, tenemos que existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset V \subset A$. Por tanto, $x \in \text{Int}(A) = U$ y $V \subset U$.

2. Si $A = \text{Int}(A)$ está claro que A es abierto. Recíprocamente, si A es abierto, tenemos que como A es el mayor abierto contenido en A , $A = \text{Int}(A)$.

□

Ejemplo. En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, sea $A = (0, 2]$. Tenemos que $\text{Int}(A) = (0, 2)$. En efecto,

- (i) Si $x \in (0, 2)$, entonces existe $r > 0$ tal que $(x - r, x + r) \subset (0, 2) \subset (0, 2]$, por lo que $x \in \text{Int}(A)$.
- (ii) Recíprocamente, tenemos que $2 \notin \text{Int}(A)$, puesto que $\forall r > 0$ tenemos que $(2 - r, 2 + r)$

no es subconjunto de $(0, 2]$.

Definición 1.12 (Punto adherente). Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que $x \in X$ es **punto adherente** a A (o también **punto clausura**) si $\forall r > 0$, $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$. Denotamos \overline{A} o $Adh(A)$ al conjunto de puntos adherentes de A .

Observación. Se ve trivialmente que $A \subset \overline{A}$.

Ejemplo. En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sea $A = (0, 2]$. Tenemos que $\overline{A} = [0, 2]$. En efecto:

- (i) Tenemos que $0 \in \overline{A}$, puesto que $\forall r > 0$ tenemos que $(-r, r) \cap A \neq \emptyset$. Así, tenemos que $[0, 2] \subset \overline{A}$.
- (ii) Recíprocamente, si $x > 2$, tenemos que existe $r > 0$ suficientemente pequeño tal que $x - r > 2$, por tanto $x \notin \overline{A}$. Similarmente, podemos demostrar que $0 \notin \overline{A}$.

Lema 1.1. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces, $\overline{A} = X / \text{Int}(X/A)$.

Demostración. (i) Sea $x \in \overline{A}$. Tenemos que $\forall r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$, por lo que $B(x, r) \not\subset X/A$, por lo que $x \notin \text{Int}(X/A)$, por lo que $x \in X / \text{Int}(X/A)$.

(ii) Sea $x \in X / \text{Int}(X/A)$, entonces $x \notin \text{Int}(X/A)$, es decir, $\forall r > 0$ tenemos que $B(x, r) \not\subset X/A$. Así, debe ser que $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$, por lo que $x \in \overline{A}$. □

Proposición 1.9. 1. \overline{A} es el menor cerrado que contiene a A .

2. Un conjunto $A \subset X$ es cerrado si y solo si $A = \overline{A}$.

Demostración. 1. Tenemos que $\overline{A} = X / \text{Int}(X/A)$, por lo que su complementario es abierto y él es cerrado. Ahora vamos a ver que es el menor cerrado que contiene a A . Sea $C \subset X$ cerrado con $A \subset C$. Tenemos que $X/C \subset X/A$, por lo que $X/C \subset \text{Int}(X/A)$ y tenemos que $C \supset X / \text{Int}(X/A) = \overline{A}$.

2. Si $A = \overline{A}$, A es cerrado. Por otro lado, si A es cerrado, entonces su complementario, X/A es abierto, por lo que $X/A = \text{Int}(X/A)$, por lo que $\overline{A} = X / \text{Int}(X/A) = X / (X/A) = A$. □

Definición 1.13 (Punto frontera). Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que $x \in X$ es un **punto frontera** de A si $\forall r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ y $B(x, r) \cap (X/A) \neq \emptyset$. Denotamos $Fr(A)$ o ∂A el conjunto de puntos frontera de A .

Observación. Tenemos que $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X/A}$ y en particular $Fr(A)$ es cerrado.

Ejemplo. En $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ sea $A = \{(x, y) : 0 < x \leq 1\}$. Tenemos que

$$Fr(A) = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \cup \{(1, y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

En efecto:

- (i) Sea $P = (0, y)$. Tenemos que $\forall r > 0$, $B(P, r) \cap A \neq \emptyset$ y $B(P, r) \cap (X/A) \neq \emptyset$. Así, $P \in Fr(A)$. De forma análoga, se puede demostrar que $P = (1, y) \in Fr(A)$.
- (ii) El recíproco lo demostramos típicamente por contrapositiva. Sea $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ con $x \neq 0$ y $x \neq 1$. Hay tres posibilidades a considerar: $x \in (-\infty, 0)$, $x \in (0, 1)$ o $x \in (1, \infty)$. Si $x \in (-\infty, 0)$, $\exists r > 0$ tal que $B(P, r) \cap A = \emptyset$. El resto de los casos se demuestran de forma análoga.

Definición 1.14 (Punto de acumulación). Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que $x \in X$ es un **punto de acumulación** de A si $\forall r > 0$ se tiene que $A \cap (B(x, r) / \{x\}) \neq \emptyset$. Denotamos A' el conjunto de los puntos de acumulación de A .

Observación. Tenemos que $A' \subset \overline{A}$. En efecto, si $x \in A'$, tenemos que $\forall r > 0$ se cumple que $A \cap (B(x, r) / \{x\}) \neq \emptyset$, es decir, $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$, por lo que $x \in \overline{A}$.

Ejemplo. Consideremos $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \subset (\mathbb{R}^2, d_2)$. Tenemos que

- $\text{Int}(A) = \emptyset$. En efecto, tenemos que $\forall r > 0$, si $n_0 = (n, n) \in \mathbb{N}^2$, existe $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ tal que $n < x < n + r$, por lo que $(x, x) \in B(n, r)$ pero $(x, x) \notin \mathbb{N}^2$.
- $\overline{A} = A$. En efecto, si $x \notin A$, tenemos que podemos encontrar $r > 0$ suficientemente pequeño tal que $B(x, r) \cap A = \emptyset$.
- $\partial A = A$. Dado que $A = \overline{A}$ y $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X/A}$, tenemos que $A \subset \partial A$. Por otro lado, si $x \notin A$, tenemos que existe un $r > 0$ suficientemente pequeño tal que $B(x, r) \cap A = \emptyset$, como hemos visto anteriormente, por lo que $x \notin \partial A$.
- $A' = \emptyset$. Si cogemos $r < 1$ y $n \in \mathbb{N}^2$, está claro que $(B(n, r) / \{n\}) \cap A = \emptyset$, por lo que n no puede ser un punto de acumulación. Si $x \notin A$, hacemos un argumento similar al del apartado anterior.

Definición 1.15 (Punto aislado). Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que $x \in A$ es un **punto aislado** de A si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap A = \{x\}$. Denotaremos $\text{Ais}(A)$ al conjunto de los puntos aislados de A .

Proposición 1.10. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces, se cumple que $\overline{A} = A' \cup \text{Ais}(A)$.

Demostración. (i) Sea $x \in \overline{A}$. Supongamos que $x \notin A'$, entonces existe $r > 0$ tal que $A \cap (B(x, r) \setminus \{x\}) = \emptyset$. Sin embargo, sabemos que $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$ al ser $x \in \overline{A}$, por tanto debe ser que $A \cap B(x, r) = \{x\}$, es decir, $x \in \text{Ais}(A)$.

(ii) Está claro que $\text{Ais}(A) \subset A \subset \overline{A}$ y $A' \subset \overline{A}$, por lo que $A' \cup \text{Ais}(A) \subset \overline{A}$. □

Corolario 1.1. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces, A es cerrado si y solo si A contiene todos sus puntos de acumulación.

Demostración. (i) Tenemos que $A = \overline{A} = A' \cup \text{Ais}(A)$, por lo que $A' \subset A$.

(ii) Tenemos que $\text{Ais}(A) \subset A$ y $A' \subset A$, por lo que $\overline{A} = \text{Ais}(A) \cup A' \subset A$, así, $\overline{A} = A$. □

Definición 1.16. Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ y $x \in X$. Se define la **distancia** de x a A como:

$$d(x, A) = \inf \{d(x, a) : a \in A\}.$$

Proposición 1.11. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces,

$$\overline{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}.$$

Demostración. (i) Sea $x \in \overline{A}$, entonces existe $r > 0$ tal que $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$. Por tanto, existe $a_r \in A \cap B(x, r)$, por tanto $d(x, a_r) < r$. Así, tenemos que

$$d(x, A) \leq d(x, a_r) < r, \quad \forall r > 0.$$

Por tanto, $d(x, A) = 0$.

(ii) Tenemos que $\forall r > 0$, $d(x, A) < r$, por lo que existe $a_r \in A$ tal que $d(x, a_r) < r$. Por tanto, $a_r \in A \cap B(x, r) \neq \emptyset$ y podemos concluir que $x \in \overline{A}$. □

1.4. Conjuntos abiertos y cerrados relativos

Observación. Sean (X, d) un espacio métrico e $Y \subset X$. Sabemos que (Y, d_Y) es un subespacio métrico de (X, d) donde $d_Y(y_1, y_2) = d(y_1, y_2)$. Dado $y_0 \in Y$ y $r > 0$, la bola $B_Y(y_0, r) = \{y \in Y : d(y, y_0) < r\} = B(y_0, r) \cap Y$. Es decir, la forma de las bolas cambia.

Observación. En un espacio métrico (X, d) , todo conjunto abierto es unión de bolas abiertas. En efecto, si A es abierto, entonces $\forall a \in A$, existe $r_a > 0$ tal que $B(a, r_a) \subset A$, por lo que $A = \bigcup_{a \in A} B(a, r_a)$ ^a.

^aEsta observación se puede reformular diciendo que un subconjunto $A \subset X$ es abierto si y solo si es unión de bolas abiertas.

Proposición 1.12. Sean (X, d) un espacio métrico e $Y \subset X$.

(a) $A \subset Y$ es d_Y -abierto si y solo si existe $U \subset X$ abierto tal que $A = U \cap Y$.

(b) $C \subset Y$ es d_Y -cerrado si y solo si existe $H \subset X$ cerrado tal que $C = H \cap Y$.

Estos conjuntos se llaman **abiertos y cerrados relativos** de Y , respectivamente.

Demostración. (a) Sea $Y \subset X$.

- (i) Tenemos que $\forall y \in A$, existe $r_y > 0$ tal que $B_Y(y, r_y) \subset A$. Definimos $U = \bigcup_{y \in A} B(y, r_y)$, que es abierto en (X, d) por ser unión de bolas abiertas. Veamos que $A = U \cap Y$. Tenemos que si $y \in A$, entonces $y \in B(y, r_y) \subset A \subset U$ (puesto que $B_Y(y, r_y) \subset B(y, r_y)$). Recíprocamente, sea $z \in Y \cap U$, entonces existe $y \in Y$ tal que $z \in B(y, r_y) \cap Y = B_Y(y, r_y) \subset A$. Por tanto, $Y \cap U \subset A$.
- (ii) Dado $y_0 \in A = U \cap Y$, como U es abierto³, existe $r > 0$ tal que $B(y_0, r) \subset U$. Por tanto, tenemos que $B_Y(y_0, r) = B(y_0, r) \cap Y \subset U \cap Y = A$. Así, hemos visto que A es d_Y -abierto.

(b) Sea $Y \subset X$.

- (i) Sea $C \subset Y$ d_Y -cerrado, entonces tenemos que Y/C es d_Y -abierto. Así, existe $U \subset X$ abierto tal que $Y/C = U \cap Y$. Sea $H = X/U$, que es cerrado. Veamos que $C = H \cap Y$:

$$C = Y/(Y/C) = Y/(U \cap Y) = Y/U = Y \cap (X/U) = Y \cap H.$$

- (ii) Si $C = H \cap Y$ con H cerrado en X , entonces X/H es abierto. Tenemos que

$$Y/C = Y/(H \cap Y) = Y \cap (X/H).$$

Dado que X/H es abierto, por (a) tenemos que Y/C es d_Y -abierto, por lo que C es d_Y -cerrado.

□

1.5. Sucesiones en espacios métricos

³Cuando escribimos abierto y $B(x, r)$ queremos decir que es d -abierto y es la bola en X , respectivamente.

Definición 1.17 (Sucesión y convergencia). Sea (X, d) un espacio métrico. Una **sucesión** es una aplicación $S : \mathbb{N} \rightarrow X$. Si $S(n) = x_n \in X$, denotamos la sucesión por $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Se dice que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** a $x_0 \in X$ cuando $d(x_n, x_0)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$

Observación. Recordamos que $x_n \rightarrow x_0$ si y solo si (ambas definiciones son equivalentes):

- $\forall \varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene que $d(x_n, x_0) < \varepsilon$.
- $\forall \varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene que $x_n \in B(x_0, \varepsilon)$.

Proposición 1.13. Sea (X, d) un espacio métrico. Si la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge, el límite es único.

Demostración. Supongamos que $l_1, l_2 \in X$ son límites de la sucesión, entonces tenemos que si $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se cumple que

$$d(l_1, l_2) \leq d(l_1, x_n) + d(x_n, l_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, debe ser que $d(l_1, l_2) = 0$, por lo que $l_1 = l_2$. \square

Proposición 1.14. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces, $x \in \bar{A}$ si y solo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tal que $x_n \rightarrow x$.

Demostración. (i) Tenemos que si $x \in \bar{A}$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, es decir. Así, podemos coger una sucesión tal que para $\varepsilon = \frac{1}{n}$ se tiene que $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A$. Vamos a ver que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x .

$$0 \leq d(x_n, x) < \frac{1}{n} \Rightarrow d(x_n, x) \rightarrow 0 \iff x_n \rightarrow x.$$

(ii) Si existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tal que $x_n \rightarrow x$, tenemos que si $r > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0, x_n \in B(x, r)$, es decir, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$, por lo que $x \in \bar{A}$. \square

Proposición 1.15. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces $x \in A'$ si y solo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de términos distintos con $x_n \rightarrow x$.

Demostración. (i) Si $x \in A'$, tenemos que $\forall r > 0, A \cap (B(x, r) \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.

- Para $n = 1$, tomamos x_1 tal que $x_1 \in A \cap (B(x, 1) \setminus \{x\})$.

- Para $n = 2$, tomamos $\varepsilon = \min \left\{ \frac{1}{2}, d(x_1, x) \right\}$, y tomamos x_2 tal que $x_2 \in A \cap (B(x, \varepsilon) / \{x\})$.
- Asumimos que tenemos $\{x_1, \dots, x_n\}$ distintos como los hemos descrito anteriormente. Ahora, en el caso $n + 1$, cogemos $\varepsilon = \min \left\{ \frac{1}{n+1}, d(x_i, x) \right\}$ para $i = 1, \dots, n$. Así, cogemos $x_{n+1} \in A \cap (B(x, \varepsilon) / \{x\})$. Obtenemos que

$$0 < d(x_{n+1}, x) < \frac{1}{n+1} < d(x_i, x), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Así, está claro que $x_{n+1} \neq x_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Así, hemos construido la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que buscábamos. Tenemos que ver que la sucesión converge a x . En efecto, si $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, $\frac{1}{n} < \varepsilon$, por lo que $d(x_n, x) < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

- (ii) Puesto que los elementos de la sucesión no se repiten, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq m$, $x_n \neq x$. Como la sucesión converge, si $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \geq m$ tal que $\forall n \geq n_0$, $A \cap (B(x_n, \varepsilon) / \{x\}) \neq \emptyset$, por lo que $x \in A'$. □

Observación. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Tenemos que una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un punto $x \in E$ si y solo si $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

Proposición 1.16. En \mathbb{R}^n consideremos las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de \mathbb{R}^n tal que

$$x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n),$$

y $x_n \rightarrow x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$. Entonces, la sucesión converge coordenada a coordenada, es decir, $x_k^i \rightarrow x^i$ para $1 \leq i \leq n$.

Demostración. Recordamos que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

Así, tenemos que si $x_k \rightarrow x$,

$$\|x_k - x\|_\infty \leq \|x_k - x\|_2 \leq \|x_k - x\|_1 \leq n\|x_k - x\|_\infty.$$

Por tanto, la convergencia no depende de la norma que escojamos. Así, para $1 \leq i \leq n$ tenemos que

$$|x_k^i - x^i| \leq \|x_k - x\|_2 \leq |x_k^1 - x^1| + \dots + |x_k^n - x^n| \rightarrow 0,$$

por lo que $x_k^i \rightarrow x^i$. □

Definición 1.18 (Subsucesión). Sea sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, donde (X, d) es un espacio métrico. Una **subsucesión** es otra sucesión de la forma $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que n_k es estrictamente creciente.

Proposición 1.17. Sea (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \rightarrow x$. Entonces, toda subsucesión converge a x .

Demostración. Sea $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Tenemos que si $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene que $d(x_n, x) < \varepsilon$. Como $n_k \rightarrow \infty$, podemos encontrar $n_{k_0} \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n_k \geq n_{k_0}$ se tenga que $n_k \geq n_0$, por lo que $\forall k \geq k_0$, tenemos que $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$. Así, hemos visto que la subsucesión converge al mismo límite. \square

1.6. Completitud

Definición 1.19 (Sucesión de Cauchy). Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X es una **sucesión de Cauchy** si $\forall \varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m, n \geq n_0$, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Proposición 1.18. Toda sucesión convergente es de Cauchy.

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ una sucesión convergente a $x_0 \in X$. Así, si $\varepsilon > 0$, tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Si $n, m \geq n_0$,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

\square

Definición 1.20 (Espacio completo). Se dice que un espacio métrico (X, d) es **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente en (X, d) .

Teorema 1.4. El espacio $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es completo.

Ejemplo. Consideramos $X = \mathbb{Q}$ con la distancia usual. Entonces, $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ no es completo. Hay sucesiones $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ de Cauchy tales que $q_n \rightarrow x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Entonces la sucesión $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no converge en $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$. Como ejemplo se puede tomar la sucesión de los decimales de $\sqrt{2}$.

Corolario 1.2. El espacio \mathbb{R}^n con la norma $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y con $\|\cdot\|_\infty$ también es completo.

Demostración. Recordamos que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

Por tanto una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ es de Cauchy para $\|\cdot\|_\infty$ si y solo si lo es para $\|\cdot\|_2$, si y solo si lo es para $\|\cdot\|_1$. Por ejemplo, para $\|\cdot\|_2$, si $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ es de Cauchy, entonces $\forall \varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k, j \geq k_0$,

$$|x_k^i - x_j^i| \leq \|x_k - x_j\|_2 < \varepsilon, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Donde $x_m = (x_m^1, \dots, x_m^n)$. Por tanto, cada componente $\{x_k^i\}_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en \mathbb{R} , por lo que cada componente es convergente en \mathbb{R} y la sucesión es convergente en \mathbb{R}^n . \square

Ejemplo. Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Consideramos el siguiente espacio normado:

$$X = \mathcal{C}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ continua en } [a, b]\}.$$

$$\|f\|_\infty = \sup \{|f(t)| : t \in [a, b]\} = \max \{|f(t)| : t \in [a, b]\}.$$

Por ser f continua, la norma está bien definida. Se trata de una norma, puesto que:

- $\|f\|_\infty \geq 0$.
- $\|f\|_\infty = 0$ si y solo si $|f(t)| = 0, \forall t \in [a, b]$, es decir, $f = 0$.
- $\|\lambda f\|_\infty = \sup \{|\lambda f(t)| : t \in [a, b]\} = |\lambda| \sup \{|f(t)| : t \in [a, b]\} = |\lambda| \|f\|_\infty$.
- Comprobamos la propiedad triangular:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_\infty &= \sup \{|f(t) + g(t)| : t \in [a, b]\} \\ &\leq \sup \{|f(t)| : t \in [a, b]\} + \sup \{|g(t)| : t \in [a, b]\} = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Podemos observar que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow f$ en $\|\cdot\|_\infty$ si y solo si $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$. Es decir, si $\forall \varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$: $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$. Esto es cierto si y solo si $\forall \varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene que $|f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon, \forall t \in [a, b]$. Es decir, si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en $[a, b]$ a f .

Otra observación que podemos hacer es que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy con $\|\cdot\|_\infty$ si y solo si $\forall \varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq n_0$ se tiene que $\|f_m - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$, si y solo si $\forall \varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq n_0, |f_n(t) - f_m(t)| \leq \varepsilon, \forall t \in [a, b]$. Así, podemos decir que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es **uniformemente de Cauchy**.

Teorema 1.5. El espacio $(\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ es completo.

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy para $\|\cdot\|_\infty$. Tenemos que

$$\forall t \in [a, b], |f_n(t) - f_m(t)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty.$$

Luego, $\forall t \in [a, b]$, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en \mathbb{R} , por lo que existe $a_t \in \mathbb{R}$ tal que $\{f_n(t)\} \rightarrow a_t$. Definimos la función

$$\begin{aligned} f : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow a_t. \end{aligned}$$

Vamos a ver que $f_n \rightarrow f$ en $\|\cdot\|_\infty$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq n_0$, tenemos que

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [a, b].$$

Si cogemos $m \rightarrow \infty$, tenemos que

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [a, b], \forall n \geq n_0.$$

Así, tenemos que $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$. Por tanto, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f uniformemente en $[a, b]$. Como el límite de una sucesión de funciones continuas es una función continua, tenemos que $f \in \mathcal{C}[a, b]$. \square

Proposición 1.19. Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $Y \subset X$. Entonces, (Y, d_Y) es completo si y solo si Y es cerrado en X .

Demostración. (i) Sea (Y, d_Y) completo. Vamos a ver que Y es cerrado. Sea $x \in \bar{Y}$, por lo que $\exists \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$ tal que $y_n \rightarrow x$. Por tanto, $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en X e Y . Luego, existe $y_0 = x = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in Y$, por lo que $x \in Y$. Así, tenemos que $\bar{Y} \subset Y$ y por tanto Y es cerrado.

(ii) Supongamos que Y es cerrado en X . Sea $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (Y, d_Y)$ sucesión de Cauchy. Entonces, $\forall \varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq n_0$ $d_Y(y_n, y_m) < \varepsilon$. Por ser de Cauchy en (X, d) , existe $x \in X$ tal que $y_n \rightarrow x$. Por tanto, tenemos que $x \in \bar{Y} = Y$, por lo que $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente en Y . \square

Lema 1.2. En un espacio métrico (X, d) , toda sucesión de Cauchy está acotada.

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. Entonces, si cogemos $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene que $d(x_n, x_{n_0}) < 1$. Podemos tomar

$$R = \max\{1, d(x_n, x_m) : n, m \leq n_0\}^4.$$

Entonces, tenemos que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B(x_{n_0}, R)$. \square

Lema 1.3. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de Cauchy en un espacio métrico (X, d) . Si existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a $x \in X$, entonces toda la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x .

⁴En clase tomé $R = \max\{d(x_1, x_{n_0}), d(x_2, x_{n_0}), \dots, d(x_{n_0-1}, x_{n_0}), 1\}$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq n_0, d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. También existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \geq k_0, d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $n_0 = \max\{n_1, n_{k_0}\}$ y sea $n \geq n_0$,

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

1.7. Compacidad y recubrimientos

Teorema 1.6 (Teorema de Bolzano-Weierstrass). Toda sucesión acotada en \mathbb{R} admite una subsucesión convergente.

Corolario 1.3. En \mathbb{R}^n ^a, toda sucesión acotada admite una subsucesión convergente.

^aCon las normas $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ o $\|\cdot\|_\infty$.

Demostración. El caso general es un poco tedioso, por lo que solo haremos la demostración cuando $n = 2$.

Sea $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ acotada, por lo que existe $R > 0$ tal que $|x_n|, |y_n| \leq R, \forall n \in \mathbb{N}$. Como $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ está acotada, existe $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a $x_0 \in \mathbb{R}$. Consideramos $\{y_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ está acotada, existe $\{y_{n_{k_j}}\}_{j \in \mathbb{N}}$ convergente a $y_0 \in \mathbb{R}$. Así, tenemos que $(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión de (x_n, y_n) y $(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) \rightarrow (x_0, y_0)$. □

Definición 1.21 (Conjunto compacto). Sea (X, d) un espacio métrico y sea $K \subset X$. Se dice que K es **compacto** si toda sucesión en K admite una subsucesión convergente en K .

Lema 1.4. Sean (X, d) un espacio métrico y $K \subset X$ compacto. Entonces K es cerrado y acotado en (X, d) .

Demostración. (i) Supongamos que K no es acotado. Si fijamos $x_0 \in X$ y sabemos que $\forall n \in \mathbb{N}, K \not\subset B(x_0, n)$. Por tanto, existe $x_n \in K$ tal que $d(x_n, x_0) \geq n$. Por tanto, la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ y $d(x_n, x_0) = \infty$, por lo que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no es acotada. Además, para toda subsucesión $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$, se tiene que $d(x_{n_j}, x_0) = \infty$, por lo que $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ no es acotada, por lo que no es convergente. Por tanto, K no es compacto.

(ii) Supongamos que K no es cerrado. Es decir, existe $x \in \overline{K} \setminus K$. Así, existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ con $x_n \rightarrow x \notin K$. Además, para toda subsucesión $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ se tiene que $x_{n_j} \rightarrow x \notin K$. Es decir, todas las subsucesiones de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergen fuera de K , por lo que K no es compacto. □

Teorema 1.7. En \mathbb{R}^n (con $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ o $\|\cdot\|_\infty$) un subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y solo si K es cerrado y acotado.

Demostración. (i) Es trivial a partir del lema anterior.

(ii) Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y acotado. Sea $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión en K . Entonces, $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ está acotada y por tanto existe una subsucesión $\{x_{n_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ convergente a $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Entonces, $x_0 \in \overline{K} = K$ puesto que K es cerrado. Entonces, K es compacto. \square

Ejemplo. El recíproco del lema anterior no es cierto. Consideremos por ejemplo (X, d) donde $X = \mathbb{N}$ y d es la métrica discreta. El conjunto de todos los números naturales es cerrado y acotado (tal y como lo hemos definido). Sin embargo, no es compacto.

Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a $x \in \mathbb{N}$. Entonces, tenemos que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $d(x_n, x) < \varepsilon$. Esto solo sucede si existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, $x_n = x$.

Por tanto, la sucesión $\{n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ está acotada pero no es convergente (puesto que no cumple la condición de convergencia que hemos visto anteriormente) y no tiene subsucesiones convergentes.

Definición 1.22 (Recubrimiento). Sean (X, d) un espacio métrico y $M \subset X$.

- (a) Un **recubrimiento** de M es una familia $\{U_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de X que **recubre** M en el sentido de que $M \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Se dice que el recubrimiento es **abierto** si cada U_i es un conjunto abierto en X .
- (b) Un **sub-recubrimiento** de $\{U_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento de la forma $\{U_j\}_{j \in J}$ donde $J \subset I$ y tal que $M \subset \bigcup_{j \in J} U_j$.

Teorema 1.8. Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subset X$. Entonces K es compacto si y solo si todo recubrimiento abierto de K admite un subrecubrimiento finito.

Demostración. Por simplicidad, vamos a ver la demostración en el caso particular $X = \mathbb{R}^n$ con la norma euclídea.

(i) Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto y sea $U = \{U_i : i \in I\}$ un recubrimiento abierto de K . Consideremos la familia auxiliar \mathcal{B} de todas las bolas abiertas de la forma $B(q, r)$, donde $q \in \mathbb{Q}^n$ y $r \in \mathbb{Q}^+$, tales que $B(q, r)$ esté contenida en algún U_i . Como \mathbb{Q} es numerable, \mathbb{Q}^n también lo es, por lo que \mathcal{B} es numerable y se puede escribir $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$.

En primer lugar, veamos que $K \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$. En efecto, dado $x \in K$, existe $i \in I$

tal que $x \in U_i$, que es abierto, por lo que existe $r' > 0$ tal que $B(x, r') \subset U_i$. Tomamos $r \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < r < \frac{r'}{2}$ y, como \mathbb{Q}^n es denso en \mathbb{R}^n se tiene que $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$, por lo que podemos elegir $q \in \mathbb{Q}^n \cap B(x, r)$. Entonces,

$$x \in B(q, r) \subset B(x, r') \subset U_i.$$

Por tanto $B(q, r) \in \mathcal{B}$ y $K \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$.

Ahora, veamos que \mathcal{B} admite un subrecubrimiento finito de K . Procedamos por reducción al absurdo. Si no fuera así, tendríamos que

- $K \not\subset B_1$, luego existe $x_1 \in K$ tal que $x_1 \notin B_1$.
- $K \not\subset B_1 \cup B_2$, luego existe $x_2 \in K$ con $x_2 \notin B_1 \cup B_2$.
- $\forall m \in \mathbb{N}$, $K \not\subset B_1 \cup \dots \cup B_m$, por lo que existe $x_m \in K$ con $x_m \notin B_1 \cup \dots \cup B_m$.

Así, obtenemos la sucesión $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset K$. Por ser K compacto, existe $\{x_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $x_{m_k} \rightarrow x \in K \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$. Por tanto, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_{j_0}$ bola abierta, por lo que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ con $x_{m_k} \in B_{j_0}$, $\forall k \geq k_0$. Tomamos ahora $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq k_0$ y $m_k > j_0$. Entonces, tenemos que $x_{m_k} \in B_{j_0}$ y $x_{m_k} \notin B_1 \cup \dots \cup B_{m_k}$, en particular $x_{m_k} \notin B_{j_0}$, que es una contradicción. Por tanto, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que

$$K \subset B_1 \cup \dots \cup B_l.$$

Anteriormente vimos que $B(q, r) \subset U_i$, por lo que tenemos que para cada $j = 1, \dots, l$, existe $i_j \in I$ tal que $B_j \subset U_{i_j}$. Entonces,

$$K \subset B_1 \cup \dots \cup B_l \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_l}.$$

Así, hemos encontrado un recubrimiento finito de K .

- (ii) Veamos que si $K \subset \mathbb{R}^n$ no es compacto, entonces existe algún recubrimiento abierto de K que no admite un subrecubrimiento finito. Existen dos posibles casos:

Caso 1. Supongamos que K no es acotado. Tenemos que $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B(0, j)$, luego

$K \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B(0, j)$. Tenemos que $\mathcal{U} = \{B(0, j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ es un recubrimiento abierto de K , que no admite ningún subrecubrimiento finito, puesto que $B(0, 1) \cup \dots \cup B(0, k)$ es acotado.

Caso 2. Supongamos que K no es cerrado. Tenemos que existe $x_0 \in \overline{K} \setminus K$. Consideremos $U_j = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}\left(x_0, \frac{1}{j}\right)$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Tenemos que

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j = \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}.$$

Luego, $K \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j$ que es un recubrimiento abierto de K , pero no admite ningún subrecubrimiento finito,

$$K \not\subset U_1 \cup \dots \cup U_k = \mathbb{R}^n / \overline{B} \left(x_0, \frac{1}{k} \right),$$

porque $x_0 \in \overline{K}$ y entonces $K \cap B \left(x_0, \frac{1}{k} \right) \neq \emptyset$.

□

Observación (Propiedad de Lindelöf). Esta demostración prueba que todo conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ (compacto o no) verifica que todo recubrimiento abierto de M admite un subrecubrimiento numerable.

Capítulo 2

Continuidad

Definición 2.1 (Continuidad). Sea $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ una función entre dos espacios métricos y $x_0 \in X$. Se dice que f es **continua** en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

. Decimos que f es continua en un subconjunto $M \subset X$ si es continua en $x_0, \forall x_0 \in M$.

Observación. Una definición equivalente es

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x \in (B_X(x_0, \delta)) \Rightarrow f(x) \in B_Y(f(x_0), \varepsilon).$$

Es decir,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon).$$

Proposición 2.1. Sea $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ y $x_0 \in X$. Son equivalentes:

1. f es continua en x_0 .
2. $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ con $x_n \rightarrow x_0$ en X , entonces la sucesión $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $f(x_0)$ en Y .

Demostración. (i) Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ una sucesión cualquiera con $x_n \rightarrow x_0$. Dado $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que si $d_X(x, x_0) < \delta$, entonces $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se tiene que $d_X(x_n, x_0) < \delta$. Por tanto, $\forall n \geq n_0$ se tiene que $d_Y(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$.

(ii) Supongamos que f no es continua en x_0 . Así, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0$ existe $x_\delta \in X$ tal que $d_X(x_\delta, x_0) < \delta$ y $d_Y(f(x_\delta), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Si $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar $x_n \in X$ tal que $d_X(x_n, x_0) < \delta = \frac{1}{n}$ y $d_Y(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Por tanto, tenemos que $x_n \rightarrow x_0$ en X , pero $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$ en Y .

□

Observación. Si f no es continua en x_0 , tenemos que existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ tal que

$$d_Y(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$ y ninguna subsucesión suya converge a $f(x_0)$.

Proposición 2.2. Las funciones $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow x + y$ y $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow x \cdot y$, son continuas en \mathbb{R}^2 (con las normas $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$).

Demostración. Sea $\{z_n = (x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ tal que $z_n \rightarrow (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Tenemos que $x_n \rightarrow x_0$ e $y_n \rightarrow y_0$ en \mathbb{R} . Ahora,

$$s(x_n, y_n) = x_n + y_n \rightarrow x_0 + y_0 = s(x_0, y_0).$$

De forma similar,

$$p(x_n, y_n) = x_n \cdot y_n \rightarrow x_0 \cdot y_0 = p(x_0, y_0).$$

Así, tenemos que s y p son continuas. □

Proposición 2.3. Sean $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ y $g : (Y, d_Y) \rightarrow (Z, d_Z)$. Supongamos que f es continua en x_0 y g es continua en $f(x_0)$. Entonces $g \circ f : (X, d_X) \rightarrow (Z, d_Z)$ es continua en x_0 .

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, tenemos que existe $\delta_1 > 0$ tal que si $d_Y(y, f(x_0)) < \delta_1$, entonces $d_Z(g(y), g(f(x_0))) < \varepsilon$. Así, existe $\delta > 0$ tal que si $d_X(x, x_0) < \delta$ entonces $d_Y(f(x), f(x_0)) < \delta_1$. Por tanto, si $d_X(x, x_0) < \delta$, tenemos que $d_Z(g(f(x)), g(f(x_0))) < \varepsilon$. □

Ejemplo. Las funciones siguientes son continuas: $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

- $f(x, y) = \cos(xy)$.
- $g(x, y) = \sin(x + y)^3$.

Proposición 2.4. Sea $f : (X, d_X) \rightarrow \mathbb{R}^n$ (con $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ o $\|\cdot\|_\infty$). Entonces, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$. Por tanto, f es continua en $x_0 \in X$ si y solo si f_1, \dots, f_n son continuas en x_0 .

Demostración. (i) Supongamos que f es continua en x_0 . Sea $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_j \rightarrow x_0$ en (X, d_X) . Entonces, tenemos que

$$f(x_j) = (f_1(x_j), \dots, f_n(x_j)) \rightarrow f(x_0) = (f_1(x_0), \dots, f_n(x_0)).$$

Así, tenemos que $\forall i = 1, \dots, n$, $f_i(x_j) \rightarrow f_i(x_0)$, por lo que $\forall i = 1, \dots, n$ se tiene que f_i es continua.

- (ii) Sea $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_j \rightarrow x_0$ en (X, d_X) . Tenemos que $\forall i = 1, \dots, n$, $f_i(x_j) \rightarrow f_i(x_0)$, por lo que $f(x_j) \rightarrow f(x_0)$ en \mathbb{R}^n y f es continua en x_0 . \square

Corolario 2.1. Sean $f, g : (X, d_X) \rightarrow \mathbb{R}$. Si f y g son continuas en x_0 , entonces $f + g$ y $f \cdot g$ también son continuas en x_0 .

Demostración. Consideremos $h = (f, g) : (X, d_X) \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $h(x) = (f(x), g(x))$. Tenemos que h es continua en x_0 por la proposición anterior. Además,

$$\begin{aligned} f + g : (X, d_X) &\xrightarrow{h} \mathbb{R}^2 \rightarrow^s \mathbb{R} \\ x &\rightarrow (f(x), g(x)) \rightarrow f(x) + g(x), \end{aligned}$$

que es continua en x_0 . Similarmente,

$$\begin{aligned} f \cdot g : (X, d_X) &\xrightarrow{h} \mathbb{R}^2 \rightarrow^p \mathbb{R} \\ x &\rightarrow (f(x), g(x)) \rightarrow f(x) \cdot g(x), \end{aligned}$$

que también es continua en x_0 . \square

Ejemplo. ■ La función $u(x, y) = \sin(x + y)^3 + \cos(xy)$ es continua en \mathbb{R}^2 .

■ La función $w(x, y, z) = \sin(x + y + z)^3 + \cos(xyz + 2xy)$ es continua en \mathbb{R}^3 .

■ La función $v(x, y, z) = \log(1 + x^2 + y^2)$ es continua en \mathbb{R}^3 .

Observación. Las proyecciones $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$, son continuas en \mathbb{R}^n para $\forall i = 1, \dots, n$. En efecto, tenemos que la identidad es continua y sus componentes son (π_1, \dots, π_n) ,

$$id(x) = id(x_1, \dots, x_n) = (\pi_1(x), \dots, \pi_n(x)) = (x_1, \dots, x_n).$$

Observación. Toda aplicación lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continua (con $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$). En efecto, tenemos que $T(x) = (T_1(x), \dots, T_m(x)) \in \mathbb{R}^m$ y existe $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ tal que

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1(x) \\ \vdots \\ T_m(x) \end{pmatrix}.$$

Así, tenemos que $T_i(x) = \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k$, que es continua $\forall i = 1, \dots, m$. Como las coordenadas son continuas tenemos que T es continua.

Observación. Veremos que $\mathcal{M}_{n \times m} \cong \mathbb{R}^{n \cdot m}$.

2.1. Continuidad global

Notación. Sea $f : X \rightarrow Y$.

- Para $y \in Y$ definimos $f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X : f(x) = y\}$.
 - Para $M \subset Y$ definimos $f^{-1}(M) = \{x \in X : f(x) \in M\}$.
-

Teorema 2.1. Sea $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$. Son equivalentes:

1. f es continua en X .
2. $\forall V \subset Y$ abierto, $f^{-1}(V)$ es abierto en X .
3. $\forall H \subset Y$ cerrado, $f^{-1}(H)$ es cerrado en X .

Demostración. **(1) \Rightarrow (2)** Sea $V \subset Y$ abierto y $x_0 \in f^{-1}(V)$. Tenemos que $f(x_0) \in V$, que es abierto en Y , por lo que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subset V$. Por ser f continua en X existe $\delta > 0$ tal que $f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subset V$, por lo que $B_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(V)$.

(2) \Rightarrow (1) Sea $x_0 \in X$. Dado $\varepsilon > 0$ podemos considerar $V = B_Y(f(x_0), \varepsilon)$, que es abierto en Y . Por hipótesis tenemos que $f^{-1}(V)$ es abierto en X , por lo que existe $\delta > 0$ tal que $B_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(V)$. Así, nos queda que

$$f(B_X(x_0, \delta)) \subset V = B_Y(f(x_0), \varepsilon).$$

Es decir, f es continua en x_0 .

(2) \Rightarrow (3) Sea $H \subset Y$ cerrado, por lo que $V = Y/H$ es abierto. Así, tenemos que $f^{-1}(V)$ es abierto en X , por lo que

$$f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \notin H\} = X/f^{-1}(H).$$

Por tanto, $f^{-1}(H)$ es cerrado en X .

(3) \Rightarrow (2) Sea $V \subset Y$ abierto. Consideramos $H = Y/V$ cerrado. Tenemos que $f^{-1}(H)$ es cerrado en X . Como

$$f^{-1}(H) = \{x \in X : f(x) \notin V\} = X/f^{-1}(V),$$

se sigue que $f^{-1}(V)$ es abierto en X . □

- Ejemplo.** 1. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < 1 + y^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 - 1 < 0\}$. Sea $f(x, y) = x^2 - y^2 - 1$, que es continua en \mathbb{R}^2 . Podemos decir que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \in (-\infty, 0)\} = f^{-1}((-\infty, 0))$. Como $(-\infty, 0)$ es abierto en \mathbb{R} , tenemos que A es abierto en \mathbb{R}^2 .
2. Sea $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 + z^2\}$. Podemos considerar $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \rightarrow x^2 + y^2 - z^2 - 1$, que es continua. Tenemos, pues que $B = g^{-1}((-\infty, 0])$ que es cerrado, por lo que B es cerrado en \mathbb{R}^3 .
3. Sea $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$. Podemos tomar $h(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$, que es continua. Así, tenemos que $C = h^{-1}(\{0\})$ y como $\{0\}$ es cerrado en \mathbb{R} , tenemos que C es cerrado.

2.2. Continuidad y restricciones

Proposición 2.5. Sea $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ es continua en X y sea $M \subset X$. Entonces la restricción de f a M ^a es continua en M .

^aSe define la función de f restringida a M como $f|_M : (M, d_X|_M) \rightarrow (Y, d_Y)$

Demostración. Sea $z_0 \in M \subset X$ y sea $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M$ con $x_k \rightarrow z_0$ en $d_X|_M$, por lo que $x_k \rightarrow z_0$ en d_X . Como f es continua tenemos que $f(x_k) \rightarrow f(z_0)$, por lo que $f|_M$ es continua en z_0 . \square

Proposición 2.6. Supongamos que $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ y sea $A \subset X$ abierto. Si $f|_A : (A, d_X|_A) \rightarrow (Y, d_Y)$ es continua en A , entonces f es continua en A .

Demostración. Sea $x_0 \in A$ y $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ con $x_k \rightarrow x_0$. Como A es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_X(x_0, r) \subset A$. Por otro lado, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \geq k_0, x_k \in B_X(x_0, r)$. Así, como $\{x_k\}_{k \geq k_0} \subset A$, tenemos que $x_k \rightarrow x_0$ por lo que $f(x_k) \rightarrow f(x_0)$ ¹. Por tanto, f es continua en x_0 . \square

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Consideremos $A = \mathbb{R}^2 / \{(0, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$, que es abierto en \mathbb{R}^2 . Tenemos que $f|_A(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ es continua en A . Por la proposición anterior tenemos que f es continua en todos los puntos de A . Veamos si es continua en $(0, 0)$. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ consideramos $M_\lambda = \{(x, y) : y = \lambda x\}$.

¹Hemos usado que el límite de dos sucesiones que difieren en un número finito de términos es el mismo.

Tenemos que

$$f|_{M_\lambda}(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{\lambda x^2}{x^2 + \lambda^2 x^2} = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}.$$

Como $f|_{M_\lambda}$ es constante en M_λ , tenemos que $f|_{M_\lambda}$ es continua. Sin embargo, tenemos que f no es continua en $(0, 0)$, puesto que adopta valores distintos para cada M_λ .

Lema 2.1 (Lema de pegado). Sea $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$. Supongamos que $X = F_1 \cup \dots \cup F_m$ es una unión finita de cerrados tales que $f|_{F_i} : (F_i, d_X|_{F_i}) \rightarrow (Y, d_Y)$ es continua $\forall i = 1, \dots, m$. Entonces, f es continua en X .

Demostración. Sea $H \subset Y$ cerrado. Tenemos que

$$f^{-1}(H) = \{x \in X : f(x) \in H\} = \bigcup_{1 \leq i \leq m} \{x \in F_i : f(x) \in H\} = \bigcup_{1 \leq i \leq m} (f|_{F_i})^{-1}(H).$$

Tenemos que $(f|_{F_i})^{-1}(H)$ es cerrado relativo en $(F_i, d_X|_{F_i})$ y que F_i es cerrado en X . Por tanto, $(f|_{F_i})^{-1}(H)$ es cerrado en X ² y f es continua en X . \square

Ejemplo. 1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, & \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 1 \end{cases}.$$

Podemos considerar

$$F_1 = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 1\} \text{ y } F_2 = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 1\},$$

que son cerrados. Tenemos que $\mathbb{R}^3 = F_1 \cup F_2$ pero $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. Tenemos que $f|_{F_1}$ y $f|_{F_2}$ son continuas, por lo que f es continua en \mathbb{R}^3 .

2. Veamos que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow \max\{x, y\}$ es continua. Podemos considerar los conjuntos cerrados

$$F_1 = \{(x, y) : y \geq x\} \text{ y } F_2 = \{(x, y) : y \leq x\}.$$

Tenemos que $f|_{F_1}(x, y) = y$ y $f|_{F_2}(x, y) = x$, que son continuas por lo que f es continua en \mathbb{R}^2 .

Teorema 2.2. Sea $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ continua en X ^a. Si $K \subset X$ es compacto, entonces $f(K)$ es compacto en Y .

^aBastaría con que fuese continua en K .

Demostración. Sea $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset f(K)$ una sucesión cualquiera. Para cada $n \in \mathbb{N}$, como $y_n \in f(K)$, existe $x_n \in K$ tal que $f(x_n) = y_n$. Así, tenemos la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$.

²Hemos usado que C es cerrado relativo en (Z, d_Z) si y solo si existe F cerrado en X tal que $C = Z \cap F$.

Como K es compacto, existe $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_{n_j} \rightarrow x_0 \in \mathbb{K}$. Por ser f continua, tenemos que $f(x_{n_j}) = y_{n_j} \rightarrow f(x_0) \in f(K)$. Así, hemos visto que la sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente en $f(K)$. \square

Corolario 2.2. Sean (X, d_X) un espacio métrico y $f : (X, d_X) \rightarrow \mathbb{R}$ continua en X . Si $K \subset X$ es compacto, f alcanza un valor máximo y un valor mínimo en K , es decir, $\exists x_m, x_M \in K$ tales que $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$, $\forall x \in K$.

Demostración. Como $K \subset X$ es compacto, tenemos que $f(K)$ es compacto en \mathbb{R} , por lo que $f(K)$ es cerrado y acotado. Por ser $f(K)$ acotado en \mathbb{R} existen $\alpha = \inf(f(K))$ y $\beta = \sup(f(K))$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tenemos que $\alpha, \beta \in \overline{f(K)} = f(K)$ puesto que $f(K)$ es cerrado. Así, existen $x_m, x_M \in K$ tales que $\alpha = f(x_m)$ y $\beta = f(x_M)$. \square

Observación. Si $M \subset \mathbb{R}$ es acotado, entonces $\alpha = \inf(M)$ y $\beta = \sup(M)$ son puntos adherentes a M , puesto que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in M$ tal que

$$x \in M \cap (\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon) = M \cap B(\beta, \varepsilon) \neq \emptyset.$$

Teorema 2.3 (Normas equivalentes). En \mathbb{R}^n todas las normas son equivalentes.

Demostración. Sea $\|\cdot\|$ una norma en \mathbb{R}^n . Vamos a demostrar que $\|\cdot\|$ es equivalente a $\|\cdot\|_\infty$.

1. Consideramos $\{e_i\}_{i=1}^n$ la base canónica de \mathbb{R}^n y sea $M = \sum_{i=1}^n \|e_i\|$. Tenemos que si

$$x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \leq \sum_{i=1}^n \|x\|_\infty \|e_i\| = M \|x\|_\infty.$$

2. Consideramos $f : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \|x\|$. Veamos que f es continua en \mathbb{R}^n . Sea $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ con $x_k \rightarrow x_0$ en $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Vamos a ver que $f(x_k) \rightarrow f(x_0)$:

$$|f(x_k) - f(x_0)| = |\|x_k\| - \|x_0\|| \leq \|x_k - x_0\| \leq M \|x_k - x_0\|_\infty \rightarrow 0.$$

3. El conjunto $S_{\|\cdot\|_\infty} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = 1\}$ es compacto en $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ puesto que es cerrado y acotado. Por tanto, f alcanza un valor mínimo en $S_{\|\cdot\|_\infty}$:

$$\exists u_m \in S_{\|\cdot\|_\infty}, 0 < \alpha = f(u_m) = \|u_m\| \leq \|u\|, \forall u \in S_{\|\cdot\|_\infty}.$$

Tenemos que $\|u\| \geq \alpha > 0$, $\forall u \in \mathbb{R}^n$ con $\|u\|_\infty = 1$. Por tanto, $\forall x \neq 0$,

$$\|x\| = \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \cdot \|x\|_\infty \right\| = \|x\|_\infty \cdot \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| \geq \|x\|_\infty \cdot \alpha.$$

Así, nos queda que $\alpha \cdot \|x\|_\infty \leq \|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. \square

Corolario 2.3. En un espacio vectorial real de dimensión finita todas las normas son equivalentes.

Demostración. Sea E con $\dim(E) = n$, entonces E es linealmente isomorfo a \mathbb{R}^n . \square

Ejemplo. En el espacio $\mathcal{M}_{n \times m}$ de matrices $n \times m$, todas las normas son equivalentes.

2.3. Conexión

Definición 2.2 (Intervalo). Un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ es un **intervalo** si $\forall x, y \in I$ con $x < y$ y $\forall z \in \mathbb{R}$ con $x < z < y$, entonces $z \in I$.

Teorema 2.4 (Teorema de Bolzano). Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Si f toma dos valores, entonces toma los valores intermedios. Es decir, si $\exists x, y \in I$ con $f(x) = u, f(y) = v$ y $u < w < v$, entonces existe $z \in I$ tal que $f(z) = w$.

Corolario 2.4. Sea $M \subset \mathbb{R}$. Son equivalentes:

1. M es un intervalo.
2. No existe ninguna función continua $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(M) = \{0, 1\}$.
3. Para toda función continua $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(M) \subset \{0, 1\}$, se tiene que f es constante.

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Es trivial a partir del teorema de Bolzano.

(2) \Rightarrow (1) Supongamos que M no es un intervalo. Por tanto, existen $x, y \in M$ con $x < y$ y existe $z \in \mathbb{R}$ con $x < z < y$ con $z \notin M$. Definimos $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < z \\ 1, & t > z \end{cases}.$$

Está claro que $f(M) = \{0, 1\}$ y que f es continua en M .

(2) \Longleftrightarrow (3) Trivial. \square

Definición 2.3 (Conjunto conexo). Sean (X, d) un espacio métrico y $M \subset X$.

- (a) Diremos que M es **conexo** cuando $\forall f : M \rightarrow \mathbb{R}$ continua con $f(M) \subset \{0, 1\}$, entonces f es constante.
- (b) Diremos que M es **desconexo** cuando no es conexo, es decir, existe alguna $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(M) = \{0, 1\}$.

Teorema 2.5. Sea $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ una función continua entre espacios métricos. Si $M \subset X$ es conexo, entonces $f(M)$ es conexo.

Demostración. Sea $h : f(M) \rightarrow \mathbb{R}$ continua con $h(f(M)) \subset \{0, 1\}$. Tenemos que $h \circ f|_M$ es continua y $h \circ f|_M(M) \subset \{0, 1\}$. Por ser M conexo, tenemos que $h \circ f|_M$ es constante, por lo que h es constante. \square

Lema 2.2. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Consideramos $\chi_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & x \in X/A \\ 1, & x \in A \end{cases}.$$

Entonces χ_A es continua en X si y solo si A es abierto y cerrado a la vez.

Demostración. (i) Como χ_A es continua, hemos visto anteriormente que el siguiente conjunto es cerrado:

$$A = \{x \in X : \chi_A(x) = 1\} = \chi_A^{-1}(\{1\}).$$

Tenemos que

$$X/A = \{x \in X : \chi_A(x) = 0\} = \chi_A^{-1}(\{0\}).$$

De esta última igualdad obtenemos que A es abierto, por lo que podemos concluir que A es abierto y cerrado a la vez.

(ii) Sea $U \subset \mathbb{R}$ abierto.

- Si $0, 1 \in U$, entonces $\chi_A^{-1}(U) = X$, que es abierto.
- Si $0, 1 \notin U$, entonces $\chi_A^{-1}(U) = \emptyset$, que es abierto.
- Si $1 \in U$ y $0 \notin U$, tenemos que $\chi_A^{-1}(U) = A$, que es abierto.
- Si $1 \notin U$ y $0 \in U$, tenemos que $\chi_A^{-1}(U) = X/A$ que es abierto.

\square

Ejemplo. Consideremos $X = \mathbb{R}$ y $M = \mathbb{R}/\{z\}$. Tenemos que

$$A = (-\infty, z) = (-\infty, z] \cap M,$$

por lo que A es abierto y cerrado relativo en M .

Teorema 2.6. Sean (X, d) un espacio métrico y $M \subset X$. Son equivalentes:

1. M es desconexo.
2. $M = A \sqcup B$ donde A y B son abiertos relativos y no vacíos de $(M, d|_M)$.
3. Existe $A \subset M$ con $\emptyset \neq A \neq M$ tal que A es abierto y cerrado relativo en $(M, d|_M)$.

Demostración. **(1) \Rightarrow (2)** Si M es desconexo, existe $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(M) = \{0, 1\}$. Consideramos $A = f^{-1}(\{0\})$ y $B = f^{-1}(\{1\})$. Es fácil ver que A y B son cerrados relativos en $(M, d|_M)$ y que $A \cap B = \emptyset$. Además, $A = M/B$ y $B = M/A$, por lo que A y B son a la vez abiertos y cerrados relativos en $(M, d|_M)$.

(2) \Rightarrow (3) Si $\emptyset \neq A \neq M$, entonces A es abierto y $B = M/A$ es abierto por lo que A también es cerrado.

(3) \Rightarrow (1) Basta considerar $f = \chi_A : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in M/A \\ 1, & x \in M/B \end{cases}.$$

Por el lema tenemos que f es continua en M y $f(M) = \{0, 1\}$. □

Definición 2.4 (Separación). Sean (X, d) un espacio métrico y $M \subset X$. Una **separación** de M en X es un par (U, V) donde:

1. U y V son conjuntos abiertos en X .
2. $M \subset U \cup V$.
3. $M \cap U, M \cap V \neq \emptyset$.
4. $M \cap U \cap V = \emptyset$.

Teorema 2.7. Sean (X, d) un espacio métrico y $M \subset X$. Entonces M es desconexo si y solo si M admite una separación en X .

Demostración. **(i)** Si M es desconexo, existen $A, B \subset X$ abiertos relativos en M tales que $M = A \sqcup B$. Por ser abiertos relativos, existen $U, V \subset X$ abiertos tales que $A = U \cap M$ y $B = V \cap M$. Es fácil comprobar que (U, V) es una separación.

(ii) Si M admite una separación tenemos que $M \subset (U \cap M) \sqcup (V \cap M)$, que son abiertos relativos en M , por lo que se cumple **(2)** del teorema anterior y M es desconexo. □

Ejemplo. Sea $M = \mathbb{Q}$ subespacio de $X = (\mathbb{R}, |\cdot|)$.

(a) Un ejemplo de abierto y cerrado relativo en M es

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : \pi < x < \pi + 1\} = \mathbb{Q} \cap (\pi, \pi + 1).$$

Está claro que A es abierto relativo en \mathbb{Q} por ser la intersección de un abierto en \mathbb{R} y \mathbb{Q} . Además, tenemos que

$$A = \mathbb{Q} \cap [\pi, \pi + 1].$$

Por la misma razón, A es también cerrado relativo en \mathbb{Q} , por lo que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ es desconexo.

(b) Sea $C \subset \mathbb{Q}$ conexo. Nos preguntamos, cuántos elementos puede contener C ?

Lema 2.3 (Lema del pivote). Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos conexos de X . Supongamos que $\bigcap_{i \in I} M_i \neq \emptyset$. Entonces, $\bigcup_{i \in I} M_i$ es conexo.

Demostración. Sea $x_0 \in \bigcap_{i \in I} M_i \neq \emptyset$ y sea $M = \bigcup_{i \in I} M_i$. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ continua con $f(M) \subset \{0, 1\}$. Supongamos que $f(x_0) = 0$. Como M_i es conexo $\forall i \in I$, tenemos que $f|_{M_i}$ es constante y por tener $x_0 \in \bigcap_{i \in I} M_i$, $f|_{M_i} \equiv 0$. Luego, $f \equiv 0$ en $M = \bigcup_{i \in I} M_i$. \square

Lema 2.4 (Lema de la percha). Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos conexos de X . Supongamos que existe $M_0 \subset X$ conexo tal que $M_i \cap M_0 \neq \emptyset$, $\forall i \in I$. Entonces, $M_0 \cup \left(\bigcup_{i \in I} M_i\right)$ es conexo.

Demostración. Sean $M = M_0 \cup \left(\bigcup_{i \in I} M_i\right)$ y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ continua con $f(M) \subset \{0, 1\}$.

- Como M_0 es conexo, tenemos que $f|_{M_0}$ es constante. Por ejemplo, supongamos que $f|_{M_0} \equiv 0$.
- Tenemos que $\forall i \in I$, $f|_{M_i}$ es constante y $M_i \cap M_0 \neq \emptyset$, por lo que $f|_{M_i} \equiv 0$.

\square

Observación. La unión de dos conjuntos no tiene por qué se conexas. En efecto, podemos considerar en \mathbb{R} el conjunto $M = (0, 1) \cup (3, 4)$, que claramente no es conexo.

Teorema 2.8. Sean (X, d) un espacio métrico y $M \subset X$. Si M es conexo y $M \subset A \subset \overline{M}$, entonces A es conexo. En particular, si M es conexo, \overline{M} también lo es.

Demostración. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua con $f(A) \subset \{0, 1\}$. Tenemos que $f|_M$ es constante y ponemos que $f|_M \equiv 0$. Sea $x \in A \subset \overline{M}$. Tenemos que existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ tal que $x_n \rightarrow x$. Por ser f continua, tenemos que $f(x_n) \rightarrow f(x) = 0$, puesto que $f(x_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Así, hemos demostrado que $f|_A$ es constante. \square

Definición 2.5 (Camino). Un **camino** en un espacio métrico (X, d) es una función continua $\sigma : [a, b] \rightarrow X$.

Ejemplo. En \mathbb{R}^n , dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, tenemos que el segmento que los une $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n : t \rightarrow (1 - t)x + ty$ es un camino.

Definición 2.6 (Conexión por caminos). Sean (X, d) un espacio métrico y $M \subset X$. Se dice que M es **conexo por caminos** si $\forall x, y \in M$ existe $\sigma : [a, b] \rightarrow X$ camino tal que $\text{Im}(\sigma) \subset M$, $\sigma(a) = x$ y $\sigma(b) = y$ ^a.

^aEs decir, cada par de puntos en M se puede unir mediante un camino en M .

Definición 2.7 (Convexidad). Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es **convexo** si $\forall x, y \in C$ el segmento $\sigma(t) = (1 - t)x + ty$, $t \in [0, 1]$, está contenido en C .

Observación. Está claro que si un conjunto es convexo, es conexo por caminos. Puede darse que sea conexo por caminos pero que no sea convexo.

Teorema 2.9. Sea (X, d) un espacio métrico. Si $M \subset X$ es conexo por caminos, entonces M es conexo.

Demostración. Sea M conexo por caminos y sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ continua con $f(M) \subset \{0, 1\}$. Dados $x, y \in M$, existe $\sigma : [a, b] \rightarrow M$ camino. Tenemos que $f \circ \sigma$ es continua y $f \circ \sigma([a, b]) \subset \{0, 1\}$. Por ser $[a, b]$ conexo, tenemos que $f \circ \sigma$ es constante en $[a, b]$, es decir, $f(\sigma(a)) = f(\sigma(b))$ y $f(x) = f(y)$, por lo que $f|_M$ es constante. \square

Teorema 2.10. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y conexo. Entonces, U es conexo por caminos.

Demostración. Fijamos $x_0 \in U$. Dado $x \in U$ veamos que existe un camino de x a x_0 . Consideremos

$$A = \{x \in U : \exists \text{ camino en } U \text{ de } x_0 \text{ a } x\}.$$

- Está claro que $A \neq \emptyset$, puesto que $x_0 \in A$.
- Veamos que A es abierto relativo en U . Si $x \in A \subset U$, tenemos que existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset U$. Tenemos que $\forall y \in B(x, r)$ podemos conectar x con y mediante un segmento, por lo que existe un camino en U de x_0 a x y de x a y , luego existe uno de x_0 a y . Así, $B(x, r) \subset A$.
- Veamos que A es cerrado relativo en U . Para ello, veamos que U/A es abierto. Dado $x \in U/A$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset U$. Tenemos que $\forall y \in B(x, r)$, no existe camino en U de x_0 a y . Si existiera, existiría un camino en U de x_0 a x , que es una contradicción. Por tanto, $B(x, r) \subset U/A$, por lo que A es cerrado relativo en U .
- Por ser U conexo y $A \neq \emptyset$, debe ser que $A = U$.

\square

Ejemplo. En general, conexo no implica conexo por caminos. En efecto, podemos considerar $M = \{(0, 0)\} \cup \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x}\right) : 0 < x \leq 1 \right\} \subset \mathbb{R}^2$. Si $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \left(x, \sin \frac{1}{x}\right)$, tenemos que

- f es continua en $(0, 1]$.
- $(0, 1]$ es convexo.
- Si $G_f(x)$ es la segunda parte de la unión, entonces $G_f = f((0, 1])$ es convexo.
- $(0, 0) \in \overline{G_f}$.
- $(0, 0) \cup G_f = M$ es conexo.

Sin embargo, gráficamente se puede ver que no podemos conectar los puntos $(1, \sin 1)$ y $(0, 0)$ por un camino contenido en M .