Geometría Lineal

Victoria Torroja Rubio

8/9/2025

Índice general

Información útil en el Campus Virtual.

Bibliografía: El líbro que más sigue es el tercero de la bibliografía, aunque no incluye la primera parte de geometría sintética.

Evaluación: será el máximo entre

- Final
- 75 % Final + 15 % Parcial + 10 % Entrega ejercicios

Fechas:

- Parcial individual en el aula: 20 de octubre
- Entrega de ejercicios en grupo: 1 de diciembre

Capítulo 0

Preliminares

Definición 0.1 (Cuerpo). Un **cuerpo** es un conjunto $\mathbb{K}$ con dos operaciones $+$ y $\cdot$ tales que:

- $(\mathbb{K}, +)$ es un grupo abeliano.
- $(\mathbb{K}/\left\{0\right\}, \cdot)$ es un grupo abeliano.
- Se cumple la propiedad distributiva.

Definición 0.2 (Espacio vectorial). Un **espacio vectorial** V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, es un grupo abeliano $(V, +)$ con una función $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ tal que:

- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{v} \in V,\ \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{v}$.
- $\forall \vec{v} \in V,\ 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V,\ \lambda\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$.
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{v} \in V,\ \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$.

Observación. Dado V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, si $\dim\left(V\right) = n < \infty$, entonces se tiene que $V \cong \mathbb{K}^n$.

Definición 0.3 (Relación de equivalencia). Una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto X es de **equivalencia** si cumple:

Reflexiva. $\forall x \in X,\ x\mathcal{R}x$.

Simétrica. $\forall x, y \in X,\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.

Transitiva. $\forall x, y, z \in X,\ (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow (x\mathcal{R}z)$.

Recordamos los conjuntos de **clase de equivalencia** de un elemento $x \in X$:

$$[x]_{\mathcal{R}} = \left\{y \in X\ :\ y\mathcal{R}x\right\}.$$

Similarmente, tenemos que el **conjunto cociente** de una relación de equivalencia es

$$X/\mathcal{R} = \{[x]_{\mathcal{R}} \ : \ x \in X\}\,.$$

Una **partición** de X es una familia de subconjuntos de X, disjuntos dos a dos, cuya unión es X.

0.1. Partición de $\mathbb{Z}$ definida por $n\mathbb{Z}$

Para $A, B \subset \mathbb{Z}$, definimos las operaciones

- $A + B = \{a + b \ : \ a \in A, b \in B\}$.
- $A \cdot B = \{a \cdot b \ : \ a \in A, b \in B\}$.
- $n\mathbb{Z} := \{n\} \cdot \mathbb{Z}$.
- $a + n\mathbb{Z} := \{a\} + \{n\}\,\mathbb{Z}$.

Teorema 0.1 (Algoritmo de la división)**.** Para todo $x \in \mathbb{Z}$ existe un único $q \in \mathbb{Z}$ y $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tal que $x = r + qn$. Por tanto,

$$\{n\mathbb{Z}, 1 + n\mathbb{Z}, \ldots, (n-1) + n\mathbb{Z}\}\,,$$

es una partición de $\mathbb{Z}$ que denotamos por $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Observación. La partición anterior se corresponde con la relación de equivalencia

$$a\mathcal{R}_n b \iff a - b \in n\mathbb{Z}.$$

Teorema 0.2. El par $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ es un grupo, con la suma definida de la siguiente forma:

$$(a + n\mathbb{Z}) + (b + n\mathbb{Z}) = (a + b) + n\mathbb{Z} = r + n\mathbb{Z},$$

donde $a + b = r + qn$ con $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Demostración. Primero vamos a ver que la aplicación está bien definida. Para ello, vamos a ver que no depende del representante. Es decir, supongamos que $x_1, x_2 \in [x]_{\mathcal{R}}$ e $y_1, y_2 \in [y]_{\mathcal{R}}$. Tenemos que $x_2 = x_1 + \lambda n$ e $y_2 = y_1 + \mu n$, así tenemos que

$$y_2 + x_2 = y_1 + \mu n + x_1 + \lambda n = (y_1 + x_1) + (\mu + \lambda)\,n.$$

Así, tenemos que $y_2 + x_2 \mathcal{R}_n y_1 + x_1$, por lo que $y_2 + x_2 \in [y_1 + x_1]_{\mathcal{R}_n}$. Así, hemos visto que está bien definida y, por la definición, se puede ver que es una operación binaria en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ahora tenemos que ver que es asociativa:

$$\begin{aligned}
[(a + n\mathbb{Z}) + (b + n\mathbb{Z})] + (c + n\mathbb{Z}) =& [(a + b) + n\mathbb{Z}] + (c + n\mathbb{Z}) \\
=& (a + b + c) + n\mathbb{Z} \\
=& (a + n\mathbb{Z}) + [(b + c) + n\mathbb{Z}] \\
=& (a + n\mathbb{Z}) + [(b + n\mathbb{Z}) + (c + n\mathbb{Z})]\,.
\end{aligned}$$

Ahora vamos a ver que existen el elemento neutro y los inversos. Por un lado, tenemos que el elemento neutro es claramente $0 + n\mathbb{Z}$. En efecto, $\forall a \in \mathbb{Z}$,

$$(0 + n\mathbb{Z}) + (a + n\mathbb{Z}) = (0 + a) + n\mathbb{Z} = a + n\mathbb{Z}.$$

Así, tenemos que 0 es el elemento neutro. En cuanto al inverso, si $a \in \mathbb{Z}$, tenemos que $-a + n\mathbb{Z}$ es su inverso:

$$(a + n\mathbb{Z}) + (-a + n\mathbb{Z}) = (a - a) + n\mathbb{Z} = 0 + n\mathbb{Z}.$$

□

Observación. Además, se tiene que dado que la suma en $\mathbb{Z}$ es conmutativa, la suma definida en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ también lo es.

Proposición 0.1. Para $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ se tiene que

(i) $(a + n\mathbb{Z}) \cdot (b + n\mathbb{Z}) \neq \emptyset$.

(ii) $(a + n\mathbb{Z}) \cdot (b + n\mathbb{Z}) \subset (a \cdot b) + n\mathbb{Z} = r + n\mathbb{Z}$, donde $a \cdot b = r + qn$ con $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Demostración. **(i)** Dado que $a, b \in \mathbb{Z}$, tenemos que $a + n\mathbb{Z}, b + n\mathbb{Z} \neq \emptyset$. Así, por nuestra definición del producto de conjuntos, tenemos que $(a + n\mathbb{Z}) \cdot (b + n\mathbb{Z}) \neq \emptyset$.

(ii) Si $x \in (a + n\mathbb{Z}) \cdot (b + n\mathbb{Z})$, tenemos que $x = y \cdot z$ para $y \in a + n\mathbb{Z}$ y $z = b + n\mathbb{Z}$. Así, $y = a + \lambda n$ y $z = b + \mu n$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$. Así, queda que

$$x = y \cdot z = (a + \lambda n) \cdot (b + \mu n) = ab + (a\mu + \lambda b + \lambda \mu n)\, n.$$

Así, está claro que $x \in (a \cdot b) + n\mathbb{Z}$.

□

Observación. En cuanto a la parte **(ii)** de la proposición anterior, la igualdad no tiene por qué darse. En efecto, consideremos como ejemplo

Definimos la operación $* : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ como

$$(a + n\mathbb{Z}) * (b + n\mathbb{Z}) = (c + n\mathbb{Z}) \iff (a + n\mathbb{Z}) \cdot (b + n\mathbb{Z}) \subset c + n\mathbb{Z}.$$

Capítulo 1

Geometría sintética

1.1. Planos afines sintéticos

Definición 1.1 (Plano afín). Un **plano afín** es un par $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ donde $\mathcal{P}$ es un conjunto no vacío cuyos elementos llamamos **puntos**, y $\mathcal{R}$ es un conjunto de subconjuntos de $\mathcal{P}$ cuyos elementos llamamos **rectas**, que satisfacen lo siguiente:

A1. Sean $P, Q \in \mathcal{P}$ con $P \neq Q$. Existe una única recta $l \in \mathcal{R}$ tal que $P, Q \in l$ (escribimos $l = l\,(PQ)$).

A2. $\forall l \in \mathcal{R}, \forall P \in \mathcal{P}$, $P \notin l$, existe una única recta $m \in \mathcal{R}$ tal que $P \in m$ y $m \cap l = \emptyset$.

A3. Toda recta tiene al menos dos puntos y hay al menos dos rectas.

Observación. El tercer axioma asegura que se trata de algo dimensional.

Definición 1.2 (Rectas paralelas). Si $l, m \in \mathcal{R}$ tales que $l \cap m = \emptyset$, diremos que l y m son **paralelas** y escribimos $l||m$.

Ejemplo. El plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ es un plano afín. Tenemos que

$$\mathcal{P} = \{(x_1, x_2)\ :\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}\,.$$

$$\mathcal{R} : l = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\ :\ ax_1 + bx_2 = 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0)\right\} := \{ax_1 + bx_2 = c\}\,.$$

Vamos a ver que verifica los axiomas. Comprobamos **A1**. Si tomamos $P = (a_1, a_2)$ y $Q = (b_1, b_2)$, tenemos que la ecuación de una recta que pasa por P y Q será

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \iff (b_2 - b_1)\, x_1 + (a_1 - a_2)\, x_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Así, existe una única recta que contiene a P y Q. Sabemos que la recta es única porque el sistema

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = c \\ a'x_1 + b'x_2 = c \end{cases},$$

tiene dos soluciones (porque $P \neq Q$), por lo que tiene infinitas soluciones. Ahora comprobamos el axioma **A2**. Supongamos que $l = \{ax_1 + bx_2 = c\}$, $P = (a_1, b_1) \notin l$, es decir,

$$aa_1 + bb_1 \neq c.$$

Tomamos la recta $m = \{ax_1 + bx_2 = aa_1 + bb_1\}$. Tenemos que $P \in m$. Por otro lado, calculamos $m \cap l$:

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = c \\ ax_1 + bx_2 = aa_1 + bb_1 \end{cases}.$$

Se trata de un sistema incompatible puesto que $\operatorname{ran}\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} < \operatorname{ran}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & aa_1 + bb_1 \end{pmatrix}$. Así, tenemos que $l \cap m = \emptyset$. La unicidad se deduce de un argumento similar al anterior. En cuanto a **A3**, tenemos que existe dos rectas $\{x_1 = 0\}$ y $\{x_2 = 0\}$, y los puntos $\left(0, \frac{c}{b}\right), \left(\frac{c}{a}, 0\right) \in l = \{ax_1 + bx_2 = c\}$. Si $a = 0$ o $b = 0$ tenemos que **A3** se sigue cumpliendo:

$$\left(\frac{c}{a}, 0\right), \left(\frac{c}{a}, 1\right) \in \{ax_1 = c\}, \quad \left(0, \frac{c}{b}\right), \left(1, \frac{c}{b}\right) \in \{bx_2 = c\}.$$

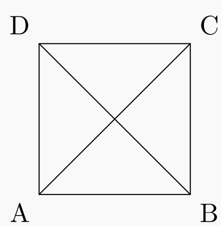
Observación. Una recta tiene más de una ecuación asociada. En efecto,

$$l = \{ax_1 + bx_2 = c\} = \{\lambda a x_1 + \lambda b x_2 = \lambda c\}, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}/\{0\}.$$

Ejemplo. Consideremos $\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}$ y

$$\mathcal{R} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}.$$

Tenemos que este plano se corresponde con el gráfico siguiente:



Se puede ver claramente que **A1** y **A2** se cumplen. Es trivial que **A3** se cumple.

Teorema 1.1. Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo, entonces $\mathbb{K}^2$ es un plano afín con puntos $\mathbb{K}^2$ y rectas las ecuaciones lineales.

Demostración. Adaptar la demostración del ejemplo del plano cartesiano. □

Ejemplo. Consideremos el cuerpo $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ con la suma módulo 2 y el producto también módulo 2. Tenemos, por el teorema anterior, el plano afín $\mathbb{F}_2^2$ de la forma:

$$\mathbb{F}_2^2 = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}.$$

$$\mathcal{R} = \{\{x_1 = 0\}, \{x_2 = 0\}, \{x_1 = 1\}, \{x_2 = 1\}, \{x_1 + x_2 = 1\}\}.$$

Gráficamente podemos ver que es igual al ejemplo anterior. En este caso, decimos que existe una colineación entre ellos.

1.1.1. Independencia de los axiomas

En primer lugar, estudiamos la independencia de **A3**. Consideremos un ejemplo que satisface **A1** y **A2**: $\mathcal{P} = \mathbb{R}$ y $\mathcal{R} = \{l = \mathbb{R}\}$. Así, tenemos que **A3** es independiente de los otros dos axiomas.

Ahora vamos a ver la independencia de **A2** respecto de **A1** y **A3**. Para ello eplearemos el ejemplo del plano de Fano (Gino Fano, 1892):

$$\mathcal{P} = \{A, B, C, D, E, F, G\}.$$

$$\mathcal{R} = \{\{A, B, C\}, \{C, D, E\}, \{E, F, A\}, \{A, G, D\}, \{B, G, E\}, \{C, G, F\}, \{F, B, D\}\}.$$

Tenemos que $|\mathcal{P}| = |\mathcal{R}| = 7$. Está claro que se verifica **A3**, puesto que $|\mathcal{R}| = 7$ y $\forall l \in \mathcal{R}, |l| = 3$. Se puede ver gráficamente que se cumple **A1** y no se cumple **A2**, pues cualquier par de rectas se interseca y por tanto no existen rectas paralelas: Este es el plano proyectivo más pequeño.

Ahora tenemos que estudiar la independencia de **A1** respecto de **A2** y **A3**. Consideremos

$$\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}.$$

$$\mathcal{R} = \{\{A, B\}, \{C, D\}\}.$$

Tenemos que **A3** se verifica, pues $|\mathcal{R}| = 2$ y $|\{A, B\}| = |\{C, D\}| = 2$. Por otro lado, si $P \notin \{A, B\}$, tenemos que $P \in \{C, D\}$, por lo que $\{C, D\} \,||\, \{A, B\}$. Lo mismo podemos decir si $P \notin \{C, D\}$. Así, tenemos que se verifica **A2**. Sin embargo, no se cumple **A1** porque no existe ninguna recta que contenga a A y C.

1.1.2. Algunos teoremas

Lema 1.1 (Tricotomía)**.** Sea $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ un plano afín. Sean $l, m \in \mathcal{R}$. Se cumple una y solo una de las siguientes afirmaciones:

1. $l = m$.
2. $l||m$.
3. $l \cap m$ es un punto.

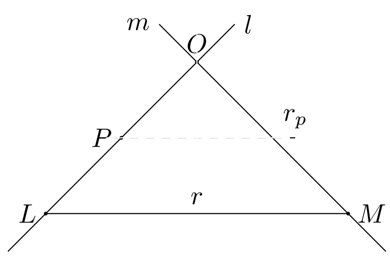
Demostración. Si l no es paralela a m, tenemos que $l \cap m \neq \emptyset$. Si $|l \cap m| = 1$, tenemos que es un punto y se cumple **3**. Si $|l \cap m| \geq 2$, tenemos que existen $P, Q \in l \cap m$. Por **A1**, dado que por dos puntos pasa una única recta, debe ser que $m = l$. □

Teorema 1.2 (Rectas equipotentes). Sea $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ un plano afín. Todo par de rectas están en biyección.

Demostración. Sean $l, m \in \mathcal{R}$.

Caso 1. Si $l = m$, es trivial que l y m son equipotentes.

Caso 2. Supongamos $l \cap m = O$, donde $O \in \mathcal{P}$. Por **A3**, tenemos que existen $L \in l, M \in m$ tales que $M, L \neq O$. Por **A1**, existe una única $r \in \mathcal{R}$ tal que $L, M \in r$. Si $P \in l/\{L\}$, tenemos que existe una única $r_p || r$ tal que $P \in r_p$.



Podemos hacer un par de observaciones:

Observación 1. Vamos a ver que $\forall P \in l/\{L\}$ tenemos que $P \notin r$, queremos ver que r_p existe. Si $P \in l \cap r$, tenemos que $L, P \in l \cap r$, por lo que $l = r$, por lo que $M \in l$ y $O, M \in l$ y $l = m$, que es una contradicción. Por tanto, podemos afirmar que $\forall P \in l$, $P \neq L$, $\exists r_p$ recta paralela a r y $P \in r_p$.

Observación 2. Tenemos que ver que $r_p \cap m$ es un punto. Si $r_p || m$, como $r_p || r$, $M \in m$ y $M \in r$, se tiene que $m = r$, por lo que $L \in r = m$ y $O \in m$, por lo que $m = l$, lo que es una contradicción. Por otro lado, si $r_p = m$, $P \in l$ y $P \in r_p = m$ y $O \in m, l$, por lo que $m = l$, que es una contradicción. Por tanto, debe ser que $r_p \cap m$ es un punto.

De esta manera, podemos definir la función

$$\begin{aligned} f : l/\{L\} &\to m/\{M\} \\ P &\to r_p \cap m. \end{aligned}$$

Para ver que f es biyectiva, vamos a ver que existe su inversa. En efecto, tenemos que $\forall Q \in m/\{M\}$, $Q \notin r$ y $r_Q \cap l$ es un punto. Así, tenemos una función

$$\begin{aligned} g : m/\{M\} &\to l/\{L\} \\ Q &\to r_Q \cap l. \end{aligned}$$

Para ver que $g = f^{-1}$ tenemos que ver que $g \circ f = id$ y que $f \circ g = id$:

$$(g \circ f)(P) = g(f(P)) = g(r_p \cap m).$$

Tenemos que $r_{f(P)} = r_{r_p \cap m} || r$ y $r_{f(P)}$ pasa por $r_p \cap m$. Pero $r_p || r$ y r_p pasa por $r_p \cap m$. Por **A2**, tenemos que $r_{f(P)} = r_p$. Así, tenemos que

$$g(r_p \cap m) = r_{f(P)} \cap l = r_p \cap l = P.$$

Caso 3. Si $m || l$ y $M \in m$, $L \in l$, tenemos que existe una recta r tal que $M, L \in r$. Así, tenemos que $r \cap m$ y $r \cap l$ es un punto y por lo aplicado en el caso anterior, tenemos que existe una biyección entre r y m y entre r y l.

$\square$