

# Geometría Lineal

Victoria Torroja Rubio

8/9/2025

# Índice general

<b>0. Preliminares</b>	<b>3</b>
0.1. Partición de $\mathbb{Z}$ definida por $n\mathbb{Z}$ . . . . .	4
<b>1. Geometría sintética</b>	<b>6</b>
1.1. Planos afines sintéticos . . . . .	6
1.1.1. Independencia de los axiomas . . . . .	8
1.1.2. Algunos teoremas . . . . .	8
1.1.3. Planos afines finitos . . . . .	11
1.2. Planos proyectivos sintéticos . . . . .	12
1.2.1. Independencia de los axiomas . . . . .	13
1.2.2. Algunos teoremas . . . . .	13
1.2.3. Construcción de planos proyectivos desde planos afines . . . . .	15
1.2.4. Construcción de un plano afín desde un plano proyectivo . . . . .	17
1.2.5. Dualidad . . . . .	18
1.3. Independencia del teorema de Desargues . . . . .	20

**Información útil en el Campus Virtual.**

**Bibliografía:** El libro que más sigue es el tercero de la bibliografía, aunque no incluye la primera parte de geometría sintética.

**Evaluación:** será el máximo entre

- Final
- 75 % Final + 15 % Parcial + 10 % Entrega ejercicios

**Fechas:**

- Parcial individual en el aula: 20 de octubre
- Entrega de ejercicios en grupo: 1 de diciembre

# Capítulo 0

## Preliminares

**Definición 0.1 (Cuerpo).** Un **cuerpo** es un conjunto  $\mathbb{K}$  con dos operaciones  $+$  y  $\cdot$  tales que:

- $(\mathbb{K}, +)$  es un grupo abeliano.
- $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$  es un grupo abeliano.
- Se cumple la propiedad distributiva.

**Definición 0.2 (Espacio vectorial).** Un **espacio vectorial**  $V$  sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$ , es un grupo abeliano  $(V, +)$  con una función  $\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$  tal que:

- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{v} \in V, \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{v}.$
- $\forall \vec{v} \in V, 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}.$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}.$
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{v} \in V, \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}.$

**Observación.** Dado  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial, si  $\dim(V) = n < \infty$ , entonces se tiene que  $V \cong \mathbb{K}^n$ .

**Definición 0.3 (Relación de equivalencia).** Una relación  $\mathcal{R}$  en un conjunto  $X$  es de **equivalencia** si cumple:

**Reflexiva.**  $\forall x \in X, x\mathcal{R}x.$

**Simétrica.**  $\forall x, y \in X, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x.$

**Transitiva.**  $\forall x, y, z \in X, (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow (x\mathcal{R}z).$

Recordamos los conjuntos de **clase de equivalencia** de un elemento  $x \in X$ :

$$[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in X : y\mathcal{R}x\}.$$

Similarmente, tenemos que el **conjunto cociente** de una relación de equivalencia es

$$X/\mathcal{R} = \{[x]_{\mathcal{R}} : x \in X\}.$$

Una **partición** de  $X$  es una familia de subconjuntos de  $X$ , disjuntos dos a dos, cuya unión es  $X$ .

## 0.1. Partición de $\mathbb{Z}$ definida por $n\mathbb{Z}$

Para  $A, B \subset \mathbb{Z}$ , definimos las operaciones

- $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$
- $A \cdot B = \{a \cdot b : a \in A, b \in B\}.$
- $n\mathbb{Z} := \{n\} \cdot \mathbb{Z}.$
- $a + n\mathbb{Z} := \{a\} + \{n\} \mathbb{Z}.$

**Teorema 0.1 (Algoritmo de la división).** Para todo  $x \in \mathbb{Z}$  existe un único  $q \in \mathbb{Z}$  y  $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  tal que  $x = r + qn$ . Por tanto,

$$\{n\mathbb{Z}, 1 + n\mathbb{Z}, \dots, (n-1) + n\mathbb{Z}\},$$

es una partición de  $\mathbb{Z}$  que denotamos por  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

**Observación.** La partición anterior se corresponde con la relación de equivalencia

$$a\mathcal{R}_nb \iff a - b \in n\mathbb{Z}.$$

**Teorema 0.2.** El par  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  es un grupo, con la suma definida de la siguiente forma:

$$(a + n\mathbb{Z}) + (b + n\mathbb{Z}) = (a + b) + n\mathbb{Z} = r + n\mathbb{Z},$$

donde  $a + b = r + qn$  con  $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ .

*Demostración.* Primero vamos a ver que la aplicación está bien definida. Para ello, vamos a ver que no depende del representante. Es decir, supongamos que  $x_1, x_2 \in [x]_{\mathcal{R}}$  e  $y_1, y_2 \in [y]_{\mathcal{R}}$ . Tenemos que  $x_2 = x_1 + \lambda n$  e  $y_2 = y_1 + \mu n$ , así tenemos que

$$y_2 + x_2 = y_1 + \mu n + x_1 + \lambda n = (y_1 + x_1) + (\mu + \lambda)n.$$

Así, tenemos que  $y_2 + x_2 \mathcal{R}_n y_1 + x_1$ , por lo que  $y_2 + x_2 \in [y_1 + x_1]_{\mathcal{R}_n}$ . Así, hemos visto que está bien definida y, por la definición, se puede ver que es una operación binaria en  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Ahora tenemos que ver que es asociativa:

$$\begin{aligned} [(a + n\mathbb{Z}) + (b + n\mathbb{Z})] + (c + n\mathbb{Z}) &= [(a + b) + n\mathbb{Z}] + (c + n\mathbb{Z}) \\ &= (a + b + c) + n\mathbb{Z} \\ &= (a + n\mathbb{Z}) + [(b + c) + n\mathbb{Z}] \\ &= (a + n\mathbb{Z}) + [(b + n\mathbb{Z}) + (c + n\mathbb{Z})]. \end{aligned}$$

Ahora vamos a ver que existen el elemento neutro y los inversos. Por un lado, tenemos que el elemento neutro es claramente  $0 + n\mathbb{Z}$ . En efecto,  $\forall a \in \mathbb{Z}$ ,

$$(0 + n\mathbb{Z}) + (a + n\mathbb{Z}) = (0 + a) + n\mathbb{Z} = a + n\mathbb{Z}.$$

Así, tenemos que 0 es el elemento neutro. En cuanto al inverso, si  $a \in \mathbb{Z}$ , tenemos que  $-a + n\mathbb{Z}$  es su inverso:

$$(a + n\mathbb{Z}) + (-a + n\mathbb{Z}) = (a - a) + n\mathbb{Z} = 0 + n\mathbb{Z}.$$

□

**Observación.** Además, se tiene que dado que la suma en  $\mathbb{Z}$  es conmutativa, la suma definida en  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  también lo es.

**Proposición 0.1.** Para  $\forall a, b \in \mathbb{Z}$  se tiene que

- (i)  $(a + n\mathbb{Z}) \cdot (b + n\mathbb{Z}) \neq \emptyset$ .
- (ii)  $(a + n\mathbb{Z}) \cdot (b + n\mathbb{Z}) \subset (a \cdot b) + n\mathbb{Z} = r + n\mathbb{Z}$ , donde  $a \cdot b = r + qn$  con  $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ .

*Demostración.* (i) Dado que  $a, b \in \mathbb{Z}$ , tenemos que  $a + n\mathbb{Z}, b + n\mathbb{Z} \neq \emptyset$ . Así, por nuestra definición del producto de conjuntos, tenemos que  $(a + n\mathbb{Z}) \cdot (b + n\mathbb{Z}) \neq \emptyset$ .

(ii) Si  $x \in (a + n\mathbb{Z}) \cdot (b + n\mathbb{Z})$ , tenemos que  $x = y \cdot z$  para  $y \in a + n\mathbb{Z}$  y  $z = b + n\mathbb{Z}$ . Así,  $y = a + \lambda n$  y  $z = b + \mu n$ , con  $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ . Así, queda que

$$x = y \cdot z = (a + \lambda n) \cdot (b + \mu n) = ab + (a\mu + \lambda b + \lambda\mu n)n.$$

Así, está claro que  $x \in (a \cdot b) + n\mathbb{Z}$ .

□

**Observación.** En cuanto a la parte (ii) de la proposición anterior, la igualdad no tiene por qué darse. En efecto, consideremos como ejemplo

Definimos la operación  $*$  :  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  como

$$(a + n\mathbb{Z}) * (b + n\mathbb{Z}) = (c + n\mathbb{Z}) \iff (a + n\mathbb{Z}) \cdot (b + n\mathbb{Z}) \subset c + n\mathbb{Z}.$$

# Capítulo 1

## Geometría sintética

### 1.1. Planos afines sintéticos

**Definición 1.1 (Plano afín).** Un **plano afín** es un par  $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$  donde  $\mathcal{P}$  es un conjunto no vacío cuyos elementos llamamos **puntos**, y  $\mathcal{R}$  es un conjunto de subconjuntos de  $\mathcal{P}$  cuyos elementos llamamos **rectas**, que satisfacen lo siguiente:

- A1.** Sean  $P, Q \in \mathcal{P}$  con  $P \neq Q$ . Existe una única recta  $l \in \mathcal{R}$  tal que  $P, Q \in l$  (escribimos  $l = l(PQ)$ ).
- A2.**  $\forall l \in \mathcal{R}, \forall P \in \mathcal{P}, P \notin l$ , existe una única recta  $m \in \mathcal{R}$  tal que  $P \in m$  y  $m \cap l = \emptyset$ .
- A3.** Toda recta tiene al menos dos puntos y hay al menos dos rectas.

**Observación.** El tercer axioma asegura que se trata de algo dimensional.

**Definición 1.2 (Rectas paralelas).** Si  $l, m \in \mathcal{R}$  tales que  $l \cap m = \emptyset$ , diremos que  $l$  y  $m$  son **paralelas** y escribimos  $l \parallel m$ .

**Ejemplo (Plano cartesiano).** El plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$  es un plano afín. Tenemos que

$$\mathcal{P} = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

$$\mathcal{R} : l = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : ax_1 + bx_2 = c, a, b, c \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0)\} := \{ax_1 + bx_2 = c\}.$$

Vamos a ver que verifica los axiomas. Comprobamos **A1**. Si tomamos  $P = (a_1, a_2)$  y  $Q = (b_1, b_2)$ , tenemos que la ecuación de una recta que pasa por  $P$  y  $Q$  será

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \iff (b_2 - b_1)x_1 + (a_1 - a_2)x_2 = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Así, existe una única recta que contiene a  $P$  y  $Q$ . Sabemos que la recta es única porque

el sistema

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = c \\ a'x_1 + b'x_2 = c \end{cases},$$

tiene dos soluciones (porque  $P \neq Q$ ), por lo que tiene infinitas soluciones. Ahora comprobamos el axioma **A2**. Supongamos que  $l = \{ax_1 + bx_2 = c\}$ ,  $P = (a_1, b_1) \notin l$ , es decir,

$$aa_1 + bb_1 \neq c.$$

Tomamos la recta  $m = \{ax_1 + bx_2 = aa_1 + bb_1\}$ . Tenemos que  $P \in m$ . Por otro lado, calculamos  $m \cap l$ :

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = c \\ ax_1 + bx_2 = aa_1 + bb_1 \end{cases}.$$

Se trata de un sistema incompatible puesto que  $\text{ran} \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} < \text{ran} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & aa_1 + bb_1 \end{pmatrix}$ . Así, tenemos que  $l \cap m = \emptyset$ . La unicidad se deduce de un argumento similar al anterior. En cuanto a **A3**, tenemos que existe dos rectas  $\{x_1 = 0\}$  y  $\{x_2 = 0\}$ , y los puntos  $(0, \frac{c}{b}), (\frac{c}{a}, 0) \in l = \{ax_1 + bx_2 = c\}$ . Si  $a = 0$  o  $b = 0$  tenemos que **A3** se sigue cumpliendo:

$$\left(\frac{c}{a}, 0\right), \left(\frac{c}{a}, 1\right) \in \{ax_1 = c\}, \quad \left(0, \frac{c}{b}\right), \left(1, \frac{c}{b}\right) \in \{bx_2 = c\}.$$

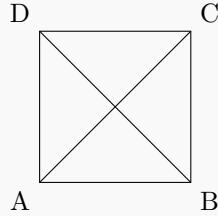
**Observación.** Una recta tiene más de una ecuación asociada. En efecto,

$$l = \{ax_1 + bx_2 = c\} = \{\lambda ax_1 + \lambda bx_2 = \lambda c\}, \forall \lambda \in \mathbb{R} / \{0\}.$$

**Ejemplo.** Consideremos  $\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}$  y

$$\mathcal{R} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}.$$

Tenemos que este plano se corresponde con el gráfico siguiente:



Se puede ver claramente que **A1** y **A2** se cumplen. Es trivial que **A3** se cumple.

**Teorema 1.1.** Si  $\mathbb{K}$  es un cuerpo, entonces  $\mathbb{K}^2$  es un plano afín con puntos  $\mathbb{K}^2$  y rectas las ecuaciones lineales.

*Demostración.* Adaptar la demostración del ejemplo del plano cartesiano. □



**Ejemplo.** Consideremos el cuerpo  $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$  con la suma módulo 2 y el producto también módulo 2. Tenemos, por el teorema anterior, el plano afín  $\mathbb{F}_2^2$  de la forma:

$$\mathbb{F}_2^2 = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}.$$

$$\mathcal{R} = \{\{x_1 = 0\}, \{x_2 = 0\}, \{x_1 = 1\}, \{x_2 = 1\}, \{x_1 + x_2 = 1\}\}.$$

Gráficamente podemos ver que es igual al ejemplo anterior. En este caso, decimos que existe una colineación entre ellos.

### 1.1.1. Independencia de los axiomas

En primer lugar, estudiamos la independencia de **A3**. Consideremos un ejemplo que satisface **A1** y **A2**:  $\mathcal{P} = \mathbb{R}$  y  $\mathcal{R} = \{l = \mathbb{R}\}$ . Así, tenemos que **A3** es independiente de los otros dos axiomas.

Ahora vamos a ver la independencia de **A2** respecto de **A1** y **A3**. Para ello eplearemos el ejemplo del plano de Fano (Gino Fano, 1892):

$$\mathcal{P} = \{A, B, C, D, E, F, G\}.$$

$$\mathcal{R} = \{\{A, B, C\}, \{C, D, E\}, \{E, F, A\}, \{A, G, D\}, \{B, G, E\}, \{C, G, F\}, \{F, B, D\}\}.$$

Tenemos que  $|\mathcal{P}| = |\mathcal{R}| = 7$ . Está claro que se verifica **A3**, puesto que  $|\mathcal{R}| = 7$  y  $\forall l \in \mathcal{R}, |l| = 3$ . Se puede ver gráficamente que se cumple **A1** y no se cumple **A2**, pues cualquier par de rectas se interseca y por tanto no existen rectas paralelas: Este es el plano proyectivo más pequeño.

Ahora tenemos que estudiar la independencia de **A1** respecto de **A2** y **A3**. Consideremos

$$\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}.$$

$$\mathcal{R} = \{\{A, B\}, \{C, D\}\}.$$

Tenemos que **A3** se verifica, pues  $|\mathcal{R}| = 2$  y  $|\{A, B\}| = |\{C, D\}| = 2$ . Por otro lado, si  $P \notin \{A, B\}$ , tenemos que  $P \in \{C, D\}$ , por lo que  $\{C, D\} \parallel \{A, B\}$ . Lo mismo podemos decir si  $P \notin \{C, D\}$ . Así, tenemos que se verifica **A2**. Sin embargo, no se cumple **A1** porque no existe ninguna recta que contenga a  $A$  y  $C$ .

### 1.1.2. Algunos teoremas

**Lema 1.1 (Tricotomía).** Sea  $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$  un plano afín. Sean  $l, m \in \mathcal{R}$ . Se cumple una y solo una de las siguientes afirmaciones:

1.  $l = m$ .
2.  $l \parallel m$ .
3.  $l \cap m$  es un punto.

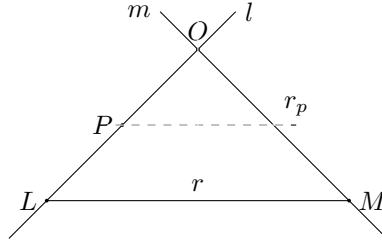
*Demostración.* Si  $l$  no es paralela a  $m$ , tenemos que  $l \cap m \neq \emptyset$ . Si  $|l \cap m| = 1$ , tenemos que es un punto y se cumple **3**. Si  $|l \cap m| \geq 2$ , tenemos que existen  $P, Q \in l \cap m$ . Por **A1**, dado que por dos puntos pasa una única recta, debe ser que  $m = l$ .  $\square$

**Teorema 1.2 (Rectas equipotentes).** Sea  $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$  un plano afín. Todo par de rectas están en biyección.

*Demostración.* Sean  $l, m \in \mathcal{R}$ .

**Caso 1.** Si  $l = m$ , es trivial que  $l$  y  $m$  son equipotentes.

**Caso 2.** Supongamos  $l \cap m = O$ , donde  $O \in \mathcal{P}$ . Por **A3**, tenemos que existen  $L \in l, M \in m$  tales que  $M, L \neq O$ . Por **A1**, existe una única  $r \in \mathcal{R}$  tal que  $L, M \in r$ . Si  $P \in l / \{L\}$ , tenemos que existe una única  $r_p \parallel r$  tal que  $P \in r_p$ .



Podemos hacer un par de observaciones:

**Observación 1.** Vamos a ver que  $\forall P \in l / \{L\}$  tenemos que  $P \notin r$ , queremos ver que  $r_p$  existe. Si  $P \in l \cap r$ , tenemos que  $L, P \in l \cap r$ , por lo que  $l = r$ , por lo que  $M \in l$  y  $O, M \in l$  y  $l = m$ , que es una contradicción. Por tanto, podemos afirmar que  $\forall P \in l, P \neq L, \exists r_p$  recta paralela a  $r$  y  $P \in r_p$ .

**Observación 2.** Tenemos que ver que  $r_p \cap m$  es un punto. Si  $r_p \parallel m$ , como  $r_p \parallel r$ ,  $M \in m$  y  $M \in r$ , se tiene que  $m = r$ , por lo que  $L \in r = m$  y  $O \in m$ , por lo que  $m = l$ , lo que es una contradicción. Por otro lado, si  $r_p = m$ ,  $P \in l$  y  $P \in r_p = m$  y  $O \in m, l$ , por lo que  $m = l$ , que es una contradicción. Por tanto, debe ser que  $r_p \cap m$  es un punto.

De esta manera, podemos definir la función

$$\begin{aligned} f : l / \{L\} &\rightarrow m / \{M\} \\ P &\rightarrow r_p \cap m. \end{aligned}$$

Para ver que  $f$  es biyectiva, vamos a ver que existe su inversa. En efecto, tenemos que  $\forall Q \in m / \{M\}, Q \notin r$  y  $r_Q \cap l$  es un punto. Así, tenemos una función

$$\begin{aligned} g : m / \{M\} &\rightarrow l / \{L\} \\ Q &\rightarrow r_Q \cap l. \end{aligned}$$

Para ver que  $g = f^{-1}$  tenemos que ver que  $g \circ f = id$  y que  $f \circ g = id$ :

$$(g \circ f)(P) = g(f(P)) = g(r_p \cap m).$$

Tenemos que  $r_{f(P)} = r_{r_p \cap m} || r$  y  $r_{f(P)}$  pasa por  $r_p \cap m$ . Pero  $r_p || r$  y  $r_p$  pasa por  $r_p \cap m$ . Por **A2**, tenemos que  $r_{f(P)} = r_p$ . Así, tenemos que

$$g(r_p \cap m) = r_{f(P)} \cap l = r_p \cap l = P.$$

**Caso 3.** Si  $m || l$  y  $M \in m$ ,  $L \in l$ , tenemos que existe una recta  $r$  tal que  $M, L \in r$ . Así, tenemos que  $r \cap m$  y  $r \cap l$  es un punto y por lo aplicado en el caso anterior, tenemos que existe una biyección entre  $r$  y  $m$  y entre  $r$  y  $l$ .

□

**Lema 1.2.** Sea  $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$  un plano afín. Ponemos  $l \sim m$ ,  $l, m \in \mathcal{R}$ , si  $l = m$  o  $l || m$ . Entonces,  $\sim$  es una relación de equivalencia.

*Demostración.* (i) Está claro que si  $l \in \mathcal{R}$  se tiene que  $l = l$ , por lo que se cumple la propiedad reflexiva.

(ii) Sean  $l, m \in \mathcal{R}$ . Si  $l = m$  es trivial que se cumple la propiedad simétrica. Si  $l \sim m$  y  $l || m$ , tenemos que  $l \cap m = m \cap l = \emptyset$ , por lo que  $m \sim l$ . Así, hemos verificado la propiedad simétrica.

(iii) Sean  $l, m, r \in \mathcal{R}$  con  $l \sim m$  y  $m \sim r$ . Hay que valorar varios casos:

**Caso 1.** Si  $l = m$  y  $m = r$ , está claro que  $l = r$  y, por tanto,  $l \sim r$ .

**Caso 2.** Si  $l = m$  y  $m || r$ , está claro que  $l \cap r = m \cap r = \emptyset$ , por lo que  $l \sim r$ .

**Caso 3.** Si  $l || m$  y  $m = r$ , tenemos que  $l \cap r = l \cap m = \emptyset$ , por lo que  $l \sim r$ .

**Caso 4.** Si  $l || m$  y  $m || r$ , está claro que  $l \cap m = m \cap r = \emptyset$ , por lo que  $l \sim r$ .

Así, queda demostrada la propiedad transitiva.

□

**Definición 1.3 (Haz de rectas).** Un **haz de rectas paralelas** es una clase de equivalencia de  $\sim$ . Entonces,  $\mathcal{H} \subset \mathcal{R}$  es un **haz** si y solo si  $\exists l \in \mathcal{R}$  tal que

$$\mathcal{H} = [l]_{\sim} = \{m \mid m = l \text{ o } m || l\}.$$

**Proposición 1.1.** Sea  $\mathcal{H}$  un haz y  $l \in \mathcal{R}$  con  $l \notin \mathcal{H}$ , entonces  $f : \mathcal{H} \rightarrow l : m \rightarrow l \cap m$  es una biyección.

*Demostración.* (i) Primero vamos a ver que la función está bien definida. Como  $l \notin \mathcal{H}$ ,  $\forall m \in \mathcal{H}$  tenemos que  $l$  no es paralelo a  $m$  y  $l \neq m$ . Por el lema de la tricotomía, debe ser que  $l \cap m$  es un punto. Así, la función está bien definida.

- (ii) Veamos que la función es inyectiva. Consideremos  $m_1, m_2 \in \mathcal{H}$  tales que  $m_1 \cap l = m_2 \cap l \neq \emptyset$ , por lo que  $m_1 \cap m_2 \neq \emptyset$ . Dado que  $m_1, m_2 \in \mathcal{H}$ , tenemos que  $m_1 \sim m_2$  y como  $m_1$  no es paralela a  $m_2$ , debe ser que  $m_1 = m_2$ .
- (iii) Comprobemos que la aplicación es sobreyectiva. Supongamos que  $P \in l$ ,  $m \in \mathcal{H}$ . Si  $P \in m$ , tenemos que  $m \cap l = P$ , por lo que hemos ganado. Si  $P \notin m$ , por **A2** tenemos que existe  $m_1 \in \mathcal{H}$  (es decir, paralela a  $m$ ) tal que  $P \in m_1$ , por lo que  $P = m_1 \cap l$ .  $\square$

**Proposición 1.2.** Si  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  son dos haces distintos, tenemos que  $\forall P \in \mathcal{P}$ ,  $\exists! l \in \mathcal{H}_1, \exists! m \in \mathcal{H}_2$  tales que  $P = l \cap m$ . En particular, la aplicación  $f : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{P} : (l, m) \rightarrow l \cap m$  es una biyección.

*Demostración.* Supongamos que

$$\mathcal{H}_1 = [l]_{\sim} = \{l' \mid l' = l \circ l' \parallel l\}.$$

$$\mathcal{H}_2 = [m]_{\sim} = \{m' \mid m' = m \circ m' \parallel m\}.$$

Tenemos que dado que  $\mathcal{H}_1 \neq \mathcal{H}_2$ , tenemos que  $l \neq m$  y  $l$  no es paralelo a  $m$ , por lo que  $l \cap m$  es un punto. Así, hemos visto que la aplicación está bien definida.

Sea  $P \in \mathcal{P}$ :

**Caso 1.** Si  $P \in l$  hemos terminado.

**Caso 2.** Si  $P \notin l$ , por **A2** existe una única recta  $l' \in \mathcal{H}_1$  tal que  $P \in l'$ .

En ambos casos, tenemos que  $\exists! l_1 \in \mathcal{H}_1$  tal que  $P \in l_1$ . Así, simétricamente existe una única  $m_1 \in \mathcal{H}_2$  tal que  $P \in m_1$ .  $\square$

### 1.1.3. Planos afines finitos

**Definición 1.4.** Un plano afín tiene **orden**  $n$  si todas sus rectas tienen  $n$  elementos.

**Observación.** La definición tiene sentido dado que todas las rectas tienen el mismo número de puntos.

**Teorema 1.3.** Sea  $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$  un plano afín de orden  $n$ .

- (i) Cada haz de rectas tiene  $n$  elementos.
- (ii)  $|\mathcal{P}| = n^2$ .
- (iii) Cada punto está en  $n + 1$  rectas.
- (iv) Hay  $n + 1$  haces de rectas.
- (v) Hay  $n(n + 1)$  rectas.

*Demostración.* Sea  $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$  un plano afín de orden  $n$ .

- (i) Sea  $\mathcal{H}$  un haz de rectas. Por **A3**, existe  $l_1, l_2 \in \mathcal{R}$  con  $l_1 \neq l_2$ . Si existe  $l \notin \mathcal{H}$  hemos ganado. Si  $l_1, l_2 \in \mathcal{H}$ , sea  $P \in l_1$  y  $Q \in l_2$ , tenemos que  $l(P, Q) \notin \mathcal{H}$  por lo que existe  $l \notin \mathcal{H}$ . Por una proposición anterior, tenemos que existe una biyección entre  $\mathcal{H}$  y  $l$ , por lo que  $|\mathcal{H}| = |l| = n$ .
- (ii) Por el argumento del apartado anterior, existen  $l, m \in \mathcal{R}$  con  $l \neq m$  y que no son paralelas entre sí, tales que  $\mathcal{H}_1 = [l]_{\sim}$  y  $\mathcal{H}_2 = [m]_{\sim}$ . Por la proposición anterior, tenemos que  $|\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2| = |\mathcal{P}|$ . Por la primera propiedad, nos queda que  $|\mathcal{P}| = |\mathcal{H}_1| \cdot |\mathcal{H}_2| = n^2$ .
- (iii) Sea  $P \in \mathcal{P}$ . Por **A3** es fácil deducir que existe una recta  $l \in \mathcal{R}$  tal que  $P \notin l$ . Tenemos que  $l = \{A_1, \dots, A_n\}$ , por lo que  $P \in l(P, A_1), \dots, l(P, A_n)$ . Por **A2**, existe una única paralela  $m$  a  $l$  tal que  $P \in m$ , por lo que  $P$  está en  $n + 1$  rectas. En efecto, todas las rectas anteriores son distintas porque de no serlo tendríamos que

$$l(P, A_i) = l(P, A_j) \Rightarrow l(P, A_i) = l(A_i, A_j) = l \Rightarrow P \in l.$$

Si  $r \in \mathcal{R}$  tal que  $P \in r$ , por **A2** se sigue que o  $r \cap l = \emptyset$ , por lo que  $r = m$ ; o  $r \cap l = A_i$ , por lo que  $r = l(P, A_i)$ .

- (iv) Por (iii), dado  $P \in \mathcal{P}$ , existen  $l_1, \dots, l_{n+1} \in \mathcal{R}$  con  $P \in l_i, \forall i = 1, \dots, n + 1$ . Como  $l_i \cap l_j = P$ , tenemos que  $[l_i]_{\sim} \neq [l_j]_{\sim}$  si  $i \neq j$ . Por tanto hay al menos  $n + 1$  haces. Sea  $r \in \mathcal{R}$ ,
- Si  $P \in r$ , tenemos que  $r = l_i$  para algún  $1 \leq i \leq n + 1$ .
  - Si  $P \notin r$ , por **A2** tenemos que existe una única  $l_i$  tal que  $r \parallel l_i$ , por lo que  $P \in l_i$ .

En ambos casos tenemos que  $r \in [l_i]_{\sim}$  para algún  $i$ .

- (v) Los haces son distintos dos a dos, por ser una relación de equivalencia. Por tanto,

$$|\mathcal{R}| = \left| \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{H}_i \right| = \sum_{i=1}^{n+1} |\mathcal{H}_i| = \sum_{i=1}^{n+1} n = n(n+1).$$

□

**Observación.** Para todo primo  $p$  y todo  $k \geq 1$ , existe un cuerpo  $\mathbb{K}$  con  $p^k$  elementos. Entonces,  $\forall p$  primo y  $\forall k \geq 1$ , existe un plano afín de orden  $p^k$ , porque  $\mathbb{K}^2$  es un plano afín.

## 1.2. Planos proyectivos sintéticos

**Definición 1.5 (Plano proyectivo).** Un **plano proyectivo** es un par  $(\overline{\mathcal{P}}, \overline{\mathcal{R}})$  donde  $\overline{\mathcal{P}}$  es un conjunto no vacío cuyos elementos se llaman **puntos** y  $\overline{\mathcal{R}}$  es un conjunto de subconjuntos de  $\overline{\mathcal{P}}$  cuyos elementos se llaman **rectas**. Se cumplen los axiomas:

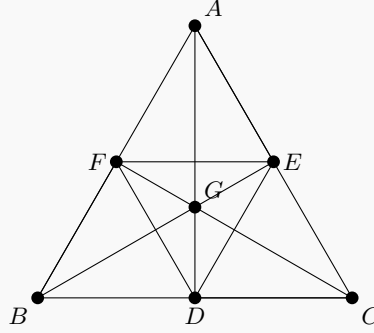
- P1.** Para cada par de puntos distintos existe una única recta que los contiene.
- P2.** Todo par de rectas tiene intersección no vacía.
- P3.** Toda recta tiene al menos tres puntos y hay al menos dos rectas.

En primer lugar, vamos a comprobar la consistencia de la definición, es decir, que hemos definido algo que existe.

**Ejemplo (Plano de Fano).** Consideremos los conjuntos

$$\overline{\mathcal{P}} = \{A, B, C, D, E, F, G\}.$$

$$\overline{\mathcal{R}} = \{\{A, B, C\}, \{C, D, E\}, \{E, F, A\}, \{B, G, F\}, \{A, G, D\}, \{F, G, C\}, \{F, D, B\}\}.$$



Es fácil comprobar que se trata de un plano proyectivo.

**Observación.** Este es el plano proyectivo más pequeño, es decir, que tiene menos puntos.

### 1.2.1. Independencia de los axiomas

- Comprobamos la independencia de **P3** respecto de **P2** y **P1**. Consideremos el ejemplo  $\overline{\mathcal{P}} = \mathbb{R}$  y  $\overline{\mathcal{R}} = \{\mathbb{R}\}$ . Está claro que se cumplen **P1** y **P2** pero no se cumple **P3**.
- Comprobamos la independencia de **P2** respecto de **P1** y **P3**. Consideremos como ejemplo el plano afín  $\mathbb{R}^2$ . Tenemos que **A1** es igual que **P1**, hay rectas paralelas, por lo que **P2** no se cumple y está claro que se cumple **P3** puesto que  $|\overline{\mathcal{R}}| = \infty, \forall \bar{l} \in \overline{\mathcal{R}}, |\bar{l}| = \infty$ .
- Comprobamos la independencia de **P1** respecto de **P2** y **P3**. Consideremos por ejemplo:

$$\overline{\mathcal{P}} = \{A, B, C, D, E\}.$$

$$\overline{\mathcal{R}} = \{\{A, B, C\}, \{C, D, E\}\}.$$

Claramente se cumple **P3** y se cumple **P2** porque hay dos rectas y las dos se intersectan. No se cumple **P1** puesto que no existe  $\bar{l} \in \overline{\mathcal{R}}$  tal que  $A, D \in \bar{l}$ .

### 1.2.2. Algunos teoremas

**Teorema 1.4.** Sea  $\mathbb{K}$  es un cuerpo y  $\mathbb{K}^3$  un espacio vectorial. Sean

$$\overline{\mathcal{P}} = \{U \subset \mathbb{K}^3 : U \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3), \dim_{\mathbb{K}} U = 1\}.$$

$$\overline{\mathcal{R}} = \{W \subset \mathbb{K}^3 : W \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3), \dim_{\mathbb{K}} W = 2\}.$$

Entonces,  $(\overline{\mathcal{P}}, \overline{\mathcal{R}})$  es un plano proyectivo <sup>a</sup>.

<sup>a</sup>La definición de  $\overline{\mathcal{R}}$  es más bien el conjunto de los conjuntos de rectas que son contenidas por un plano, así se puede hacer una correspondencia biyectiva entre  $\overline{\mathcal{R}}$  y la descripción que le hemos dado. Así, decimos que un punto  $\overline{P} \in \overline{\mathcal{P}}$  está en una recta  $\overline{l} \in \overline{\mathcal{R}}$  si  $\overline{P}$  está contenido en el plano que caracteriza a  $\overline{l}$ .

*Demostración.* (i) Vamos a ver que se cumple **P1**. Si  $P, Q \in \overline{\mathcal{P}}$  con  $P \neq Q$ , existen  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{K}^3$  linealmente independientes tales que  $P = L(\{\vec{v}_1\})$  y  $Q = L(\{\vec{v}_2\})$ . Así, existe  $r \in \overline{\mathcal{R}}$  tal que  $r = L(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\})$  que cumple que  $P, Q \subset r$ . En concreto, tenemos que  $r = P \oplus Q$ .

Sea  $r_2 \in \overline{\mathcal{R}}$  tales que  $P, Q \subset r_2$ , entonces tenemos que  $P \oplus Q \subset r_2$  y  $\dim(P \oplus Q) = \dim r_2$ , por lo que  $r_2 = r$ .

(ii) Vamos a ver que se cumple **P2**. Sean  $l, m \in \overline{\mathcal{R}}$ , tenemos que

$$\underbrace{\dim(l \cap m)}_{\leq 3} = \underbrace{\dim l}_2 + \underbrace{\dim m}_2 - \underbrace{\dim(l \cap m)}_{\geq 1}.$$

Por tanto,  $\dim(l \cap m) \geq 1$ , por lo que  $l \cap m \neq \emptyset$ .

(iii) Vamos a ver que se cumple **P3**. Sea  $\mathbb{K}^3 = L(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\})$ , sean  $r_1 = L(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\})$  y  $r_2 = L(\{\vec{u}_1, \vec{u}_3\})$  dos rectas. Así, hemos visto que hay al menos dos rectas. Ahora, dada una recta  $r = L(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\})$  tenemos que  $P_1 = L(\{\vec{v}_1\})$ ,  $P_2 = L(\{\vec{v}_2\})$  y  $P_3 = L(\{\vec{v}_1 + \vec{v}_2\})$  son puntos de la recta. Así, hemos visto que cada recta tiene al menos tres puntos. □

**Definición 1.6.** Sea  $\mathbb{K}$  un cuerpo. Al plano proyectivo construido en el teorema anterior lo llamamos **proyectivizado de  $\mathbb{K}^3$**  y lo denotamos por  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^3)$ .

**Notación.** Dado  $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^3$  denotamos por  $[a_0 : a_1 : a_2]$  al punto  $L(\{(a_0, a_1, a_2)\})$ . Observamos que

$$[a_0 : a_1 : a_2] = [b_0 : b_1 : b_2] \iff L(\{(a_0, a_1, a_2)\}) = L(\{(b_0, b_1, b_2)\}).$$

Esto es cierto si y solo si existe  $\lambda \in \mathbb{K}/\{0\}$  tal que  $(a_0, a_1, a_2) = \lambda(b_0, b_1, b_2)$ . Así, tenemos que esta notación está bien definida salvo proporcionalidad. Así, tenemos que los puntos de  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^3)$  son

$$\{[a_0 : a_1 : a_2] : (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^3/\{0\}\}.$$

Por otro lado, si  $u \in \mathbb{K}^3$  tal que  $\dim(u) = 2$ , podemos describir  $u$  con una ecuación implícita homogénea:

$$u = \{(x_0, x_1, x_2) : ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0\}.$$

Decimos que  $\bar{l}$  es la recta  $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$ . Tenemos que si  $(u_0, u_1, u_2) \in \bar{l}$ , entonces  $(\lambda u_0, \lambda u_1, \lambda u_2) \in \bar{l}$ . En efecto,

$$au_0 + bu_1 + cu_2 = 0 \Rightarrow a\lambda u_0 + b\lambda u_1 + c\lambda u_2 = 0.$$

Así hemos visto que  $[u_0 : u_1 : u_2] \in \bar{l}$  si y solo si  $au_0 + bu_1 + cu_2 = 0$ , por lo que  $[u_0 : u_1 : u_2] \in \bar{l}$  está bien definido. Definimos  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^3)$  de la siguiente forma,

$$\bar{\mathcal{P}} = \{[a_0 : a_1 : a_2] : a_i \in \mathbb{K} / \{0\}\}.$$

$$\bar{\mathcal{R}} = \{ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0\}^1.$$

Podemos observar que si  $P = [a_0 : a_1 : a_2]$  y  $Q = [b_0 : b_1 : b_2]$  con  $P \neq Q$ , se cumple que

$$\bar{l}(P, Q) = \left\{ \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \right\}.$$

### 1.2.3. Construcción de planos proyectivos desde planos afines

Sea  $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$  un plano afín.

- Para cada haz de rectas  $\mathcal{H}$  creamos un punto  $P_{\mathcal{H}}$  <sup>2</sup>.
- Cogemos  $\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \cup \{P_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \text{ haz de rectas}\}$ .
- Dado  $l \in \mathcal{R}$  con  $l \in \mathcal{H}$ , ponemos  $\bar{l} = l \cup \{P_{\mathcal{H}}\}$ .
- Ponemos  $\bar{l}_{\infty} = \{P_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \text{ haz de rectas}\}$ .
- Tomamos  $\bar{\mathcal{R}} = \{\bar{l} : l \in \mathcal{R}\} \cup \{\bar{l}_{\infty}\}$ .

**Observación.** Se tiene que  $\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \cup \bar{l}_{\infty}$ .

**Ejemplo.** Consideremos el plano afín  $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$  tal que

$$\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}.$$

$$\mathcal{R} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}.$$

Tomamos los haces de rectas:

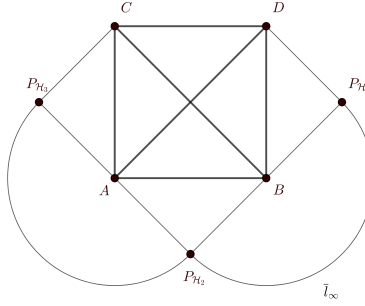
$$\mathcal{H}_1 = \{\{A, B\}, \{C, D\}\}, \quad \mathcal{H}_2 = \{\{A, C\}, \{B, D\}\}, \quad \mathcal{H}_3 = \{\{A, D\}, \{C, B\}\}.$$

Gráficamente queda así:

<sup>1</sup>Claramente  $a, b$  y  $c$  no son 0 simultáneamente.

<sup>2</sup>Este punto es distinto para cada haz de rectas.





**Teorema 1.5.** Con esta construcción,  $(\overline{\mathcal{P}}, \overline{\mathcal{R}})$  es un plano proyectivo.

*Demostración.* Comprobamos que se cumplen los axiomas.

**P1.** Sean  $P, Q \in \overline{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \cup \bar{l}_{\infty}$ . Entonces, tenemos los casos:

**Caso 1.** Si  $P, Q \in \mathcal{P}$ , por **A1** existe una única  $l \in \mathcal{R}$  tal que  $P, Q \in l$ . Así, tenemos que  $P, Q \in \bar{l} = l \cup P_{\mathcal{H}} \in \overline{\mathcal{R}}$ .

**Caso 2.** Si  $P, Q \in \bar{l}_{\infty}$  tenemos que  $P$  y  $Q$  están en una recta y  $\bar{l}_{\infty}$  es la única recta con más de un punto que no está en  $\mathcal{P}$ .

**Caso 3.** Si  $P \in \mathcal{P}$  y  $Q \in \bar{l}_{\infty}$ , tenemos que  $Q = P_{\mathcal{H}}$ , siendo  $\mathcal{H}$  un haz de rectas. Por **A2**, existe  $l \in \mathcal{H}$  tal que  $P \in l$ , por lo que  $P, Q \in \bar{l} = l \cup \{P_{\mathcal{H}}\}$ . La unicidad se deduce por construcción.

**P2.** Sean  $\bar{l}, \bar{m} \in \overline{\mathcal{R}}$ .

**Caso 1.** Si  $\bar{l} = \bar{l}_{\infty}$ , tenemos que  $\bar{l} \cap \bar{m}$  contiene un punto del infinito por construcción, por lo que  $\bar{l} \cap \bar{m} \neq \emptyset$ .

**Caso 2.** Si  $\bar{l} \neq \bar{l}_{\infty} \neq \bar{m}$ , tenemos que  $\bar{l} = l \cup \{P_{\mathcal{H}_1}\}$  y  $\bar{m} = m \cup \{P_{\mathcal{H}_2}\}$ . Si  $l \parallel m$ , tenemos que  $P_{\mathcal{H}_1} = P_{\mathcal{H}_2}$ , por lo que  $\bar{l} \cap \bar{m} \neq \emptyset$ . Por otro lado, si  $l = m$  está claro que  $\bar{l} = \bar{m}$ . Finalmente, tenemos que si  $l \cap m$  es un punto, entonces  $\bar{l} \cap \bar{m} \neq \emptyset$ .

**P3.** Por **A3** se tiene que  $|\mathcal{R}| \geq 2$ , por lo que  $|\overline{\mathcal{R}}| \geq 2$ . Similarmente, por **A3** tenemos que  $|l| \geq 2, \forall l \in \mathcal{R}$ . Por tanto,

$$|\bar{l}| = |l \cup \{P_{\mathcal{H}}\}| \geq 3.$$

□

**Ejemplo (Completación proyectiva de  $\mathbb{K}^2$ ).** Sea  $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$  un plano afín sobre  $\mathbb{K}^3$ . Consideramos  $\mathcal{P} = \{(u_1, u_2) : u_i \in \mathbb{K}\}$ . Construimos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^2 &\rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{K}^3) \\ (u_1, u_2) &\rightarrow [1 : u_1 : u_2]. \end{aligned}$$

Vamos a ver que es inyectiva. Si  $(u_1, u_2) \neq (u'_1, u'_2)$ , no existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tal que  $[1 : u_1 : u_2] = \lambda[1 : u'_1 : u'_2]$ .

Sabemos que las rectas de  $\mathbb{K}^2$  son de la forma  $l = \{ax_1 + bx_2 = c\}$ . Vemos que

$$(u_1, u_2) \in l \iff [1 : u_1 : u_2] \in \bar{l} = \{ax_1 + bx_2 = cx_0\}.$$

Por ahora todo ha sido notación. Vamos a ver la construcción. Tenemos que  $l = \{ax_1 + bx_2 = c\}$  es paralela a  $m = \{a'x_1 + b'x_2 = c'\}$  si y solo si existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tal que  $(a, b) = \lambda(a', b')$ . Consideremos  $\mathcal{H} = \{\{ax_1 + bx_2 = d\} : d \in \mathbb{K}\}$  y tomamos  $P_{\mathcal{H}} = [0 : b : -a]$ .

Podemos hacer un par de observaciones:

- $[0 : b : -a] \in \bar{l} = \{ax_1 + bx_2 = cx_0\}$ .
- $\bar{l} = l \cup \{[0 : b : -a]\}$ .
- $\bar{l}_{\infty} = \{[0 : u_1 : u_2] : u_i \in \mathbb{K}\}$ .

Ahora ya podemos construir  $\bar{\mathcal{P}}$  y  $\bar{\mathcal{R}}$ :

$$\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \cup \bar{l}_{\infty} = \{[1 : u_1 : u_2] : u_i \in \mathbb{K}\} \cup \{[0 : u_1 : u_2] : u_i \in \mathbb{K}\} = \mathbb{P}(\mathbb{K}^3).$$

$$\bar{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cup \{\bar{l}\} = \{\bar{l}_{\infty} = \{ax_1 + bx_2 = cx_0 : (a, b) \neq (0, 0)\}\} \cup \{x_0 = 0\}.$$

#### 1.2.4. Construcción de un plano afín desde un plano proyectivo

Sea  $(\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{R}})$  un plano proyectivo y sea  $\bar{l}_{\infty} \in \bar{\mathcal{P}}$  una recta cualquiera <sup>3</sup>. Tomamos

$$\mathcal{P} = \bar{\mathcal{P}} - \bar{l}_{\infty}.$$

$$\bar{\mathcal{R}} = \{l = \bar{l} - (\bar{l} \cap \bar{l}_{\infty}) : \bar{l} \in \bar{\mathcal{R}} - \{\bar{l}_{\infty}\}\}.$$

**Teorema 1.6.** El par  $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$  construido anteriormente es un plano afín.

*Demostración.* Comprobemos que se cumplen los axiomas.

**A1.** Dados  $P, Q \in \mathcal{P} \subset \bar{\mathcal{P}}$  con  $P \neq Q$ , por **P1** tenemos que existe una única  $\bar{l} \in \bar{\mathcal{R}}$  tal que  $P, Q \in \bar{l}$ . Como  $P, Q \notin \bar{l}_{\infty}$ , tenemos que  $P, Q \in \bar{l} - (\bar{l} \cap \bar{l}_{\infty}) = l \in \mathcal{R}$ . La unicidad de  $l$  es por construcción de  $\mathcal{R}$ .

**A2.** Sea  $l \in \mathcal{R}$ , por lo que  $l = \bar{l} - \{Q\}$  donde  $\bar{l} \in \bar{\mathcal{R}}$  y  $Q \in \bar{l}_{\infty}$ . Sea  $P \in \mathcal{P}$  tal que  $P \notin l$ . Por **P1** tenemos que existe una única  $\bar{m} \in \bar{\mathcal{R}}$  que une  $P$  y  $Q$ . Por tanto

$$m = \bar{m} - (\bar{m} \cap \bar{l}_{\infty}) = \bar{m} - \{Q\}.$$

Si  $m \cap l \neq \emptyset$ , existe  $Q_2 \in \mathcal{P}$  tal que  $Q_2 \in m \cap l \subset \bar{m} \cap \bar{l}$  y  $Q \in \bar{m} \cap \bar{l}$ . Así, tenemos que  $\bar{m} = \bar{l}$ , y como  $P \notin \bar{l}$  y  $P \in \bar{m}$ , obtenemos una contradicción. Así, debe ser que  $m \parallel l$ . La unicidad se deduce por construcción.

<sup>3</sup>Realmente es una recta cualquiera, lo que pasa es que la vamos a tratar como la recta infinita.

**A3.** Por **P3**, tenemos que  $|\bar{l}| \geq 3$ ,  $\forall \bar{l} \in \bar{\mathcal{R}}$ . Tenemos entonces que si  $l \in \mathcal{R}$

$$|l| = |\bar{l} - (\bar{l} \cap \bar{l}_\infty)| \geq 2.$$

Por lo que se vio en uno de los ejercicios, tenemos que  $|\bar{\mathcal{R}}| \geq 3$ , por lo que

$$|\mathcal{R}| = |\bar{\mathcal{R}} - \{\bar{l}_\infty\}| = |\bar{\mathcal{R}}| - 1 \geq 2.$$

□

**Corolario.** Todo par de rectas de  $(\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{R}})$  están en biyección.

*Demostración.* Habíamos demostrado que todo par de rectas de un plano afín están en biyección. Sean  $\bar{l}, \bar{m} \in \bar{\mathcal{R}}$ . Existe  $\bar{r} \in \bar{\mathcal{R}}$  tal que  $\bar{r} \neq \bar{l}, \bar{m}$ . Tomamos  $\bar{l}_\infty = \bar{r}$  y construimos un plano afín  $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ . Así, tenemos que

$$l = \bar{l} - (\bar{l}_\infty \cap \bar{l}), \quad m = \bar{m} - (\bar{l}_\infty \cap \bar{m}) \in \mathcal{R}.$$

Como  $l$  y  $m$  están en biyección y  $|\bar{l}_\infty \cap \bar{l}| = |\bar{l}_\infty \cap \bar{m}| = 1$ , es fácil ver que  $\bar{l}$  y  $\bar{m}$  están en biyección. □

### 1.2.5. Dualidad

**Proposición 1.3.** Sea  $(\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{R}})$  un plano proyectivo. Se cumplen:

- P1'.** Si  $P$  y  $Q$  son puntos distintos de  $\bar{\mathcal{P}}$ , entonces existe una única  $\bar{l} \in \bar{\mathcal{R}}$  tal que  $P, Q \in \bar{l}$ .
- P2'.** Si  $\bar{l}$  y  $\bar{m}$  son rectas distintas de  $\bar{\mathcal{R}}$ , entonces existe un único  $P \in \bar{\mathcal{P}}$  tal que  $\bar{l}$  y  $\bar{m}$  contienen a  $P$ .
- P3'.** Cada recta contiene al menos tres puntos y cada punto está contenido en al menos tres rectas.

*Demostración.* **P1'.** Como **P1'** y **P1** son lo mismo, es trivial que se cumple.

**P2'.** Por **P2** sabemos que  $\bar{l} \cap \bar{m} \neq \emptyset$ . Por **P1**, si  $|\bar{l} \cap \bar{m}| \geq 2$ , tenemos que  $\bar{l} = \bar{m}$ . Así, debe ser que si  $\bar{l} \neq \bar{m}$ , entonces  $|\bar{l} \cap \bar{m}| = 1$ .

**P3'.** Por **P3** cada recta contiene al menos tres puntos. Por un ejercicio de la hoja, tenemos que  $|\bar{\mathcal{R}}| \geq 3$ , por lo que si  $\bar{l}, \bar{m}, \bar{r} \in \bar{\mathcal{R}}$  son distintas, y  $P \in \bar{\mathcal{P}}$  con  $P \in \bar{l} \cap \bar{m} \cap \bar{r}$ , tenemos que  $P$  está en tres rectas. Si  $P \notin \bar{l}$ , existen  $A_1, A_2, A_3 \in \bar{l}$  y existen  $\bar{l}(P, A_1), \bar{l}(P, A_2), \bar{l}(P, A_3) \in \bar{\mathcal{R}}$  tres rectas distintas. □

**Teorema 1.7.** Sea  $\overline{\mathcal{P}}$  un conjunto no vacío y sea  $\overline{\mathcal{R}}$  una colección de subconjuntos de  $\overline{\mathcal{P}}$ . Entonces, son equivalentes

- $(\overline{\mathcal{P}}, \overline{\mathcal{R}})$  es un plano proyectivo.
- $(\overline{\mathcal{P}}, \overline{\mathcal{R}})$  cumple **P1'**, **P2'** y **P3'**.

Es decir, podríamos haber tomado **P1'**, **P2'** y **P3'** como axiomas.

*Demostración.* (i) Es trivial a partir de la proposición anterior.

(ii) Tenemos que **P1'** es igual que **P1**, **P2'** implica **P2** y **P3'** implica **P3**. □

**Observación.** En los nuevos axiomas, si cambiamos la palabra 'punto' por 'recta' y 'está contenido' por 'contiene', obtenemos los mismos axiomas. En efecto, **P1'** se convierte en **P2'**, **P2'** se convierte en **P1'** y **P3'** cambia el orden de las oraciones.

En particular, toda afirmación cierta usando **P1**, **P2** y **P3** tendrá una afirmación (llamada afirmación dual) que también será cierta y se obtiene haciendo el cambio indicado anteriormente.

**Corolario.** En un plano proyectivo cada par de puntos está contenido en el mismo número de rectas. <sup>a</sup>

<sup>a</sup>Esta es la afirmación dual del corolario anterior.

**Ejemplo.** Consideremos la afirmación:

$$\forall \bar{l}_1, \bar{l}_2 \in \overline{\mathcal{R}}, \bar{l}_1 \neq \bar{l}_2, \exists P \in \overline{\mathcal{P}}, P \notin \bar{l}_1 \cup \bar{l}_2.$$

La afirmación dual será:

$$\forall P_1, P_2 \in \overline{\mathcal{P}}, P_1 \neq P_2, \exists \bar{l} \in \overline{\mathcal{R}}, \bar{l} \not\supset \{P_1, P_2\}.$$

Demostración de la primera afirmación:

- Por **P2'** tenemos que existe un único  $Q \in \bar{l}_1 \cap \bar{l}_2$  con  $Q \in \overline{\mathcal{P}}$ .
- Por **P3'** existe  $\bar{r} \in \overline{\mathcal{R}}$  tal que  $\bar{r} \neq \bar{l}_1, \bar{l}_2$  y  $Q \in \bar{r}$ .
- Por **P3'** existe  $A \in \bar{r}$  tal que  $A \neq Q$  y  $A \in \overline{\mathcal{P}}$ .
- Tenemos que si  $A \in \bar{l}_1$  se tiene que  $A, Q \in \bar{r} \cap \bar{l}_1$  y por **P2'** se tiene que  $A = Q$ , que es una contradicción. Por tanto,  $A \notin \bar{l}_1 \cup \bar{l}_2$ . □

Demostramos la afirmación dual:

- Por **P1'** tenemos que existe una única  $\bar{l} \in \overline{\mathcal{R}}$  con  $P_1, P_2 \in \bar{l}$ .
- Por **P3'** tenemos que existe  $Q \in \bar{l}$  tal que  $Q \neq P_1, P_2$ .

- Por **P3'**, existe  $\bar{r} \in \bar{\mathcal{R}}$  con  $\bar{r} \neq \bar{l}$ .
- Si  $P_1 \in \bar{r}$ , tenemos que  $P_1, Q \in \bar{r}$ , por lo que  $\bar{r} = \bar{l}$ , que es una contradicción, por lo que  $P_1, P_2 \notin \bar{r}$ .  $\square$

### 1.3. Independencia del teorema de Desargues

**Teorema 1.8 (Desargues proyectivo).** Sean  $A, B, C, A', B', C'$  puntos dos a dos distintos y ningún triple alineado <sup>a</sup>. Si  $\bar{l}(A, A') \cap \bar{l}(B, B') \cap \bar{l}(C, C') = O \in \bar{\mathcal{P}}$ , entonces  $\bar{l}(A, B) \cap \bar{l}(A', B')$ ,  $\bar{l}(A, C) \cap \bar{l}(A', C')$  y  $\bar{l}(B, C) \cap \bar{l}(B', C')$  están alineados.

<sup>a</sup>Buscamos poder tener dos triángulos:  $ABC$  y  $A'B'C'$ .

**Lema 1.3.** Sean  $A, B, C, D \in \mathbb{P}(\mathbb{K}^3)$  distintos dos a dos y ninguna terna alineada. Existe una base  $\mathcal{B} = \{v_0, v_1, v_2\}$  de  $\mathbb{K}^3$  tal que  $A = L(\{v_0\})$ ,  $B = L(\{v_1\})$ ,  $C = L(\{v_2\})$  y  $D = L(\{v_0 + v_1 + v_2\})$ .

*Demostración.* Sean  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{K}^3$  tales que  $A = L(\vec{a})$ ,  $B = L(\vec{b})$ ,  $C = L(\vec{c})$  y  $D = L(\vec{d})$ . Si  $A \neq B$ , tenemos que  $\{\vec{a}, \vec{b}\}$  son linealmente independientes. Como  $C$  no está alineado con  $A$  y  $B$ , debe ser que  $\vec{c} \notin L(\vec{a}, \vec{b})$ . Por tanto, tenemos que  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  son linealmente independientes. Así, tenemos que

$$\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}.$$

Si  $\alpha = 0$ , tenemos que  $\vec{d} \in L(\vec{b}, \vec{c})$ , por lo que  $D \in \bar{l}(B, C)$ , lo que es una contradicción, por lo que  $\alpha \neq 0$ . De análoga demostramos que  $\beta, \gamma \neq 0$ . Tomamos  $v_0 = \alpha \vec{a}$ ,  $v_1 = \beta \vec{b}$  y  $v_2 = \gamma \vec{c}$ , de forma que nos queda que  $\vec{d} = v_0 + v_1 + v_2$ .  $\square$

**Teorema 1.9.** Sea  $\mathbb{K}$  un cuerpo. Entonces, el teorema de Desargues se cumple en  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^3)$ .

*Demostración.* En primer lugar, veamos que  $O = \bar{l}(A, A') \cap \bar{l}(B, B') \cap \bar{l}(C, C')$ , no está alineado con  $A$  y  $B$ . Si  $O \in \bar{l}(A, B)$ , tenemos que  $O \in \bar{l}(O, B)$ , por lo que  $\bar{l}(A, B) = \bar{l}(O, B)$ . Sin embargo, tenemos que  $B' \in \bar{l}(O, B)$ , por lo que  $A, B$  y  $B'$  están alineados, que es una contradicción. También,  $O \neq A$ , puesto que si  $O = A$  tendríamos que  $A \in \bar{l}(B, B')$  y  $A, B$  y  $B'$  estarían alineados.

De forma análoga tenemos que  $O \neq B, C$  y  $O \notin \bar{l}(B, C), \bar{l}(A, C)$ . Podemos usar el lema con  $A, B, C$  y  $O$ . En la base apropiada, tenemos que

$$A = [1 : 0 : 0], \quad B = [0 : 1 : 0], \quad C = [0 : 0 : 1], \quad D = [1 : 1 : 1].$$

Tenemos que

$$A' \in \bar{l}(A, O) = \left\{ \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \right\} = \{x_1 = x_2\}.$$

De esta manera, tenemos que  $A' = [\alpha : \beta : \beta]$ . Como  $A \neq A'$ , tenemos que  $\beta \neq 0$ . Así, podemos definir  $A' = \left[\frac{\alpha}{\beta} : 1 : 1\right] = [1 + a : 1 : 1]$ , para algún  $a \in \mathbb{K}/\{0\}$ . De forma similar, deducimos que  $B' = [1 : 1 + b : 1]$  y  $C' = [1 : 1 : 1 + c]$  con  $b, c \neq 0$ . Calculamos  $\bar{l}(A, B) \cap \bar{l}(A', B')$ :

$$\bar{l}(A, B) = \left\{ \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \right\} = \{x_2 = 0\}.$$

$$\bar{l}(A', B') = \left\{ \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \end{vmatrix} = 0 \right\} = \{-bx_0 - ax_1 + ((1+a)(1+b) - 1)x_2 = 0\}.$$

Así, tenemos que  $\bar{l}(A, B) \cap \bar{l}(A', B') = [a : -b : 0]$ . De forma similar, tenemos que  $\bar{l}(B, C) \cap \bar{l}(B', C') = [0 : b : -c]$  y  $\bar{l}(A, C) \cap \bar{l}(A', C') = [a : 0 : -c]$ . Para ver que estos tres puntos están alineados vamos a ver que el determinante se anula:

$$\begin{vmatrix} a & -b & 0 \\ 0 & b & -c \\ a & 0 & -c \end{vmatrix} = -abc + abc = 0.$$

Otra forma de hacerlo es calcular la recta de dos cualesquiera de ellos y ver si el tercero pertenece a esa recta.  $\square$

**Proposición 1.4.** Supongamos que  $(\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{R}})$  es un plano proyectivo que cumple el teorema de Desargues. Sea  $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$  un plano afín obtenido de  $(\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{R}})$  quitando una recta. Entonces, dados  $A, A', B, B', C, C'$  puntos dos a dos distintos de  $\mathcal{P}$ , ningún triple alineado, tales que  $l(A, A') \parallel l(B, B') \parallel l(C, C')$ ,  $l(A, B) \parallel l(A', B')$  y  $l(A, C) \parallel l(A', C')$ . Entonces,  $l(B, C) \parallel l(B', C')$ .

*Demostración.* Si  $\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \cup \bar{l}_\infty$ , tenemos que

$$l(A, A') \parallel l(B, B') \parallel l(C, C') \Rightarrow \bar{l}(A, A') \cap \bar{l}(B, B') \cap \bar{l}(C, C') = O \in \bar{l}_\infty.$$

De forma similar, como  $l(A, B) \parallel l(A', B')$  y  $l(A, C) \parallel l(A', C')$ , se tiene que  $\bar{l}(A, B) \cap \bar{l}(A', B'), \bar{l}(A, C) \cap \bar{l}(A', C') \in \bar{l}_\infty$ . Como se cumple el teorema de Desargues, tenemos que  $\bar{l}(B, C) \cap \bar{l}(B', C') \in \bar{l}_\infty$ , entonces  $l(B, C) \parallel l(B', C')$ .  $\square$

Vamos a probar que existen planos proyectivos que no cumplen el teorema de Desargues viendo un plano afín que no cumple la proposición anterior.

**Ejemplo (Plano de Moulton).** Consideremos el plano afín  $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$  y tenemos que  $\mathcal{R}$  es el conjunto de:

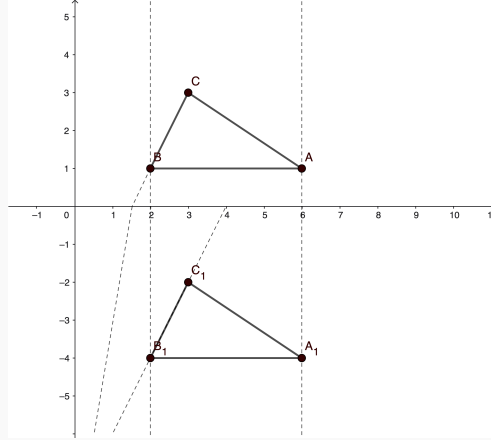
- Rectas horizontales,  $x_2 = k$ .
- Rectas verticales,  $x_1 = k$ .
- Rectas de pendiente negativa, es decir,  $x_2 = \lambda x_1 + c$ ,  $\lambda < 0$ .

- Rectas quebradas de la forma

$$x_2 = \begin{cases} 2\lambda(x_1 - c), & x_1 \leq c \\ \lambda(x_1 - c), & x_1 \geq c \end{cases}$$

con  $\lambda > 0$ .

Vamos a ver que el plano de Moulton no cumple la proposición.



Tenemos que

$$l(A, A') \parallel l(B, B') \parallel l(C, C')$$

son verticales y  $l(A, B)$  y  $l(A, B')$  son horizontales y paralelas. Las rectas  $l(A, C)$  y  $l(A', C')$  son paralelas y de pendiente negativa. Sin embargo, por construcción tenemos que  $l(B, C)$  y  $l(B', C')$  no son paralelas. Este es el primer ejemplo de un plano afín que no viene de un espacio vectorial.

Recordemos que  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^3) = \{[x_0 : x_1 : x_2] : (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{K}^3 / \{0\}\}$ . Tenemos que

$$[x_0 : x_1 : x_2] = [y_0 : y_1 : y_2] \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} / \{0\}, (x_0, x_1, x_2) = \lambda(y_0, y_1, y_2).$$

Las rectas las definimos de la forma

$$\bar{l} = \{[x_0 : x_1 : x_2] : ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0\}, (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

$$\bar{l}([a_0 : a_1 : a_2], [b_0, b_1, b_2]) = \left\{ \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \right\}.$$