Exámenes pasados

Victoria Eugenia Torroja Rubio

25 de agosto de 2025

Mayo 2024

Ejercicio 1. Sea $f(x) = \sqrt{1-x}$. Determinar para qué puntos del dominio de f se cumple que $|f(x) - 1| \geq \frac{1}{2}$.

Solución 1. Se puede hacer de dos formas:

- Resolver la inecuación $\left|\sqrt{1-x} - 1\right| \geq \frac{1}{2}$.
- Pintar la función y verlo gráficamente.

Lo hacemos de la segunda manera. Primero calculamos el dominio de f: $(-\infty, 1]$. Por otro lado, tenemos que

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} < 0.$$

Por tanto, es decreciente. Además, es inyectiva. Tenemos que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ y $f(1) = 0$. También sabemos que la función es continua en todo su dominio. Así, podemos pintar la función y podemos ver que

$$\left\{x \ : \ |f(x) - 1| \geq \frac{1}{2}\right\} = (-\infty, f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)] \cup [f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), \infty).$$

Como $f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{4}$ y $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, tenemos que la solución es el conjunto $\left(-\infty, -\frac{5}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, \infty\right)$.

Ejercicio 2. Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas y derivables en $[a,b] / \{s\}$ con $s \in (a,b)$, con $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [a,b] / \{s\}$. Si existe $\lim_{x\to s^-} f(x) = \lim_{x\to s^-} g(x) = 0$ y existe

$$\lim_{x\to s^-} \frac{g'(x)}{f'(x)},$$

entonces se verifica que

$$\lim_{x\to s^-} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to s^-} \frac{g'(x)}{f'(x)}.$$

Solución 2. Cogemos $f, g : [a, s) \to \mathbb{R}$. Definimos $f(s) = g(s) = \lim\limits_{x\to s^-} f(x) = \lim\limits_{x\to s^-} g(x) = 0$. Así, tenemos que f y g son continuas en $[a, s]$ y derivables en (a, s). Además, sabemos que $f'(x) \neq 0$. Por el teorema del valor medio de Cauchy, tenemos que $\forall x \in (a, s)$, $\exists \xi \in (x, s)$ tal que

$$\frac{g(x) - g(s)}{f(x) - f(s)} = \frac{g'(\xi)}{f'(\xi)}.$$

Además, como $\lim\limits_{x\to s^-} \frac{g'(x)}{f'(x)} = l$, tenemos que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $0 < \delta - x < \delta$, entonces $\left|\frac{g'(x)}{f'(x)} - l\right| < \epsilon$. Así, como $\xi \in (x, s)$ tenemos que

$$\left|\frac{g(x)}{f(x)} - l\right| = \left|\frac{g(x) - g(s)}{f(x) - f(s)} - l\right| = \left|\frac{g'(\xi)}{f'(\xi)} - l\right| < \epsilon.$$

Ejercicio 3. Calcula

$$\lim_{x\to 1^-} (1 - x)^{\frac{1}{\sqrt{-\ln(1-x)}}}.$$

Solución 3. Se trata de una indeterminación de la forma 0^0. Dado que el logaritmo neperiano es una función continua y monótona, el límite existe si y solo si existe el límite

$$\lim_{x\to 1^-} \ln\left((1 - x)^{\frac{1}{\sqrt{-\ln(1-x)}}}\right) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(1 - x)}{\sqrt{-\ln(1 - x)}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(-\ln(1 - x))}{\sqrt{-(1 - x)}} = -\sqrt{-\ln(1 - x)} = -\infty.$$

Así, el límite original vale 0.

Ejercicio 4. Encuentra una función $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ derivable en todo $[0, 1]$ y tal que $\varphi(0) = 0$ y $\forall x \in (\epsilon, 1)$, para cierto $\epsilon > 0$, $\varphi(x) = 1$ y además $\int_0^1 \varphi(x)\ dx < 1$.

Solución 4. Necesitamos una función continua en $[0, \epsilon]$ que cumpla que $\varphi(\epsilon) = 1$ y $\varphi'(\epsilon) = 0$. Así, podemos coger por ejemplo una parábola de la forma

$$\varphi(x) = k(x - \epsilon)^2 + 1.$$

Para que $\varphi(0) = 0$, cogemos $k = -\frac{1}{\epsilon^2}$. Así, hemos construido la función

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\epsilon^2}(x - \epsilon)^2 + 1, & x \in [0, \epsilon] \\ 1, & x \in [\epsilon, 1] \end{cases}.$$

Ahora falta ver que la integral es menor a uno. En efecto, tenemos que

$$\int_0^1 \varphi(x)\ dx = \int_0^\epsilon \varphi(x)\ dx + \int_\epsilon^1 \varphi(x)\ dx < \int_0^\epsilon 1\ dx + \int_\epsilon^1 1\ dx = 1.$$

Ejercicio 5. Calcular la integral

$$\int \frac{1}{x\ln^2 x - x\ln x^2 + x}\ dx.$$

Solución 5.
$$\int \frac{1}{x\ln^2 x - x\ln x^2 + x}\ dx = \int \frac{1}{x\ln^2 x - 2\ln x + x}\ dx = \int \frac{1}{x\left(\ln x - 1\right)^2}\ dx$$

Así, cogiendo $u = \left(\ln x - 1\right)^2$, $du = \dfrac{1}{x} dx$,
$$= \int \frac{1}{u^2}\ du = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{\ln x - 1} + C = \frac{1}{1 - \ln x} + C.$$

Ejercicio 6. Demostrar que $\ln x \leq \dfrac{1}{e}\left(x - e\right) + 1$, $x > 0$.

Solución 6. Tenemos que la recta del lado derecho de la desigualdad es la recta tangente de la función $\ln x$ en $x = e$. Una forma de resolver el ejercicio es demostrar que si una función es cóncava, cualquier recta tangente a la función queda por encima de la función. Otra forma de hacerlo es estudiando la función $g\left(x\right) = \dfrac{1}{e}\left(x - e\right) + 1 - \ln x$ y viendo que $g\left(x\right) \geq 0$, $x > 0$. Hacemos la segunda opción:
$$g'\left(x\right) = \frac{1}{e} - \frac{1}{x} = \begin{cases} < 0,\ x > e \\ 0,\ x = e \\ > 0,\ x < e \end{cases}.$$

Tenemos que $g\left(e\right) = 0$, que es un mínimo. Así, $\forall x > 0$ se tiene que $g\left(x\right) \geq 0$.

Ejercicio 7. Consideramos una función $f : [0,\infty) \to (0,\infty)$ continua en $(0,\infty)$ y tal que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f\left(x\right)\ dx \quad \text{y} \quad \int_{n}^{n+\frac{1}{n}} f\left(x\right)\ dx = \frac{1}{n}.$$

Estudiar si existen $\displaystyle\int_0^1 f\left(x\right)\ dx$ y $\displaystyle\int_0^\infty f\left(x\right)\ dx$.

Solución 7. Partimos el ejercicio en dos partes.

- Primero estudiamos $\displaystyle\int_0^1 f\left(x\right)\ dx$. Sabemos que $\forall y \in (0,1]$, $\exists \displaystyle\int_y^1 f\left(x\right)\ dx$. Así, tenemos que ver si existe el límite
$$\lim_{y\to 0^+} \int_y^1 f\left(x\right)\ dx.$$
Consideremos $F\left(y\right) = \displaystyle\int_y^1 f\left(x\right)\ dx$. Por el teorema fundamental del cálculo, tenemos que $F'\left(y\right) = -f\left(y\right) < 0$. Por tanto, F es estrictamente decreciente. Por ser monótona, tenemos que
$$\lim_{y\to 0^+} F\left(y\right) = \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 f\left(x\right)\ dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f\left(x\right)\ dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$
Por tanto, la integral $\displaystyle\int_0^1 f\left(x\right)\ dx$ existe.

- Para estudiar la convergencia de $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\ dx$ hacemos algo similar. Como sabemos que existe $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$, para ver que converge nuestra integral de interés basta con que estudiemos la convergencia de $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\ dx$. Consideremos ahora $F(y) = \displaystyle\int_1^y f(x)\ dx$. Por el TFC tenemos que $F'(y) = f(y) > 0$, por lo que es monótona, por lo que

$$\lim_{y\to\infty} F(y) = \lim_{y\to\infty} \int_1^y f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \int_n^{n+1} f(x)\ dx$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_n^{n+\frac{1}{n}} f(x)\ dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Así, como no converge la integral $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\ dx$, no converge $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\ dx$.

Ejercicio 8. Consideremos la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^n (x-a)^n$, $0 < r < a < \dfrac{1}{2}$.

(a) Calcular el radio de convergencia.

(b) Calcular el límite puntual.

(c) Deducir si converge uniformemente en $[-1, 1]$.

Solución 8. **(a)** Aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1} |x-a|^{n+1}}{r^n |x-a|^n} = r|x-a|.$$

Así, como $r|x-a| < 1 \iff |x-a| < \dfrac{1}{r}$, tenemos que el radio de convergencia es $\dfrac{1}{r}$.

(b) Al tratarse de una serie geométrica, si $x \in \left(a - \dfrac{1}{r}, a + \dfrac{1}{r}\right)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n (x-a)^n = \frac{r(x-a)}{1 - r(x-a)}.$$

En $x = a$ la serie vale 0.

(c) Tenemos que $r < \dfrac{1}{2}$, por lo que $2 < \dfrac{1}{r}$ y $-\dfrac{1}{r} < -2$. Así, $a + \dfrac{1}{r} > a + 2 > 2$ y $a - \dfrac{1}{r} < a - 2 < -1$. Así, tenemos que $[-1, 1] \subset \left(a - \dfrac{1}{r}, a + \dfrac{1}{r}\right)$, por lo que la serie converge uniformemente en $[-1, 1]$.