

# Análisis de Variable Real

Victoria Torroja Rubio

9/10/2024 -

# Índice general

0.1. Introducción . . . . .	3
0.2. Cardinalidad . . . . .	5
0.2.1. Números algebraicos . . . . .	8
0.3. Funciones de variable real . . . . .	9
0.3.1. Estudio de funciones . . . . .	9
0.3.2. Métodos para generar funciones . . . . .	10
<b>1. El cuerpo de los números reales</b>	<b>11</b>
1.1. El cuerpo de los números reales. . . . .	11
1.2. Completitud de $\mathbb{R}$ . . . . .	21
1.3. Expresión decimal de los números reales . . . . .	30
1.4. Números Complejos . . . . .	32
1.4.1. Representación polar . . . . .	33
<b>2. Sucesiones y límites</b>	<b>34</b>
2.1. Criterios de Convergencia . . . . .	42
2.2. Subsucesiones y Teorema de Bolzano-Weiestrass . . . . .	48
2.3. Sucesiones Cauchy . . . . .	51
2.4. Otros teoremas . . . . .	53
2.5. Series numéricas . . . . .	56
2.6. Exponentes reales. . . . .	66
<b>3. Límites de funciones</b>	<b>68</b>
<b>4. Funciones continuas</b>	<b>82</b>
4.1. Discontinuidad de funciones . . . . .	84
4.2. Funciones continuas en intervalos . . . . .	85
4.3. Propiedades de las funciones continuas . . . . .	87
4.4. Continuidad Uniforme . . . . .	88
4.5. Funciones monótonas . . . . .	92
<b>5. La Derivada</b>	<b>94</b>
5.1. Regla de L'Hôpital . . . . .	103
5.2. Crecimiento y decrecimiento . . . . .	107
5.3. Concavidad y convexidad . . . . .	109
5.4. Puntos críticos . . . . .	113

<b>6. La Integral</b>	<b>115</b>
6.1. Definición de la integral . . . . .	115
6.2. Funciones integrables . . . . .	118
6.3. Propiedades de la integral . . . . .	121
6.4. Teorema Fundamental del Cálculo . . . . .	125
6.5. Función logarítmica y exponencial . . . . .	129
6.6. Criterio de integrabilidad de Lebesgue . . . . .	133
<b>7. Cálculo de primitivas</b>	<b>138</b>
7.1. Primitivas elementales . . . . .	139
7.2. Integración por partes . . . . .	139
7.3. Cambio de variable . . . . .	140
7.4. Primitivas de funciones racionales . . . . .	142
7.5. Otras técnicas . . . . .	145
7.6. Funciones hiperbólicas . . . . .	147
<b>A. Productos infinitos</b>	<b>148</b>
<b>B. Reordenamiento de series</b>	<b>150</b>
<b>C. Series de potencias</b>	<b>151</b>
<b>D. Función logarítmica</b>	<b>152</b>
<b>E. Construcción de <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>155</b>

**Profesor:** Javier Soria  
**Oficina:** 437  
**Correo:** javier.soria@ucm.es

**Ayudante:** Fernando Ballesta Yague  
**Oficina:** 224  
**Correo:** ferballe@ucm.es

**Exámenes:** Parcial 1 (16/1/2025)

- 20 % evaluación continua + examen a finales de noviembre (solo sube no baja)
- 80 % exámenes parciales

Si apruebas los parciales no hay que hacer el final.

#### Recomendaciones de libros

- Primer libro de la bibliografía
- El de Ortega
- 5000 problemas de análisis (para practicar)

## 0.1. Introducción

**Definición 0.1** (Producto cartesiano). Se define

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Una relación  $\mathcal{R}$  es un conjunto  $\mathcal{R} \subset A \times A$ . Si  $(a, b) \in \mathcal{R}$  se dice que  $a\mathcal{R}b$ .

**Definición 0.2** (Relación de equivalencia). Una relación  $\mathcal{R}$  es de equivalencia si cumple las siguientes propiedades.

**Reflexiva.**  $\forall a \in A, a\mathcal{R}a$ .

**Simétrica.**  $a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$ .

**Transitiva.**  $(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \Rightarrow a\mathcal{R}c$ .

**Definición 0.3** (Relación de orden). Una relación  $\mathcal{R}$  es de orden si cumple las siguientes propiedades.

**Reflexiva.**  $\forall a \in A, a\mathcal{R}a$ .

**Antisimétrica.**  $(aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b$ .

**Transitiva.**  $(aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$ .

**Notación.** En una relación de orden, si  $aRb$ , podemos escribir  $a \leq b$ . Además, el par ordenado  $(A, \leq)$  es un conjunto ordenado. Se dice que es **totalmente ordenado** si  $\forall a, b \in A, a \leq b$  o  $b \leq a$ .

**Definición 0.4.** Dado  $(A, \leq)$  y  $C \subset A$ :

- (i) Se dice que  $C$  está **acotado superiormente** si existe  $M \in A$  tal que  $\forall c \in C, c \leq M$ . Se dice que  $M$  es una **cota superior**.
- (ii) Se dice que  $C$  está **acotado inferiormente** si existe  $m \in A$  tal que  $\forall c \in C, m \leq c$ . Se dice que  $m$  es una **cota inferior**.
- (iii)  $C$  tiene **supremo** si tiene una cota superior mínima. Es decir, si  $\alpha = \sup(C)$  si  $\forall c \in C, \alpha \geq c$  y si  $m$  es una cota superior,  $\alpha \leq m$ .
- (iv) La definición del **ínfimo** es análoga.

**Ejemplo 0.1.** Tenemos que el conjunto  $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$  está acotado superiormente por 2. Sin embargo, no tiene supremo en  $\mathbb{Q}$ , pero sí lo tiene en  $\mathbb{R}$ .

**Ejemplo 0.2.** Sea  $\mathbb{R}^2$  y sea  $C \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$  rectas del plano. Sean  $r_1, r_2 \in C$  con  $r_1 R r_2 \iff r_1$  y  $r_2$  son paralelas. Esto claramente es una relación de equivalencia.

**Definición 0.5 (Aplicación).** Dado  $C \subset A \times B$ , se dice que  $C$  es una **aplicación** si  $(a, b), (a, c) \in C \Rightarrow b = c$ .

**Notación.** Normalmente se escribe  $f : A \rightarrow B$  con  $a \rightarrow f(a)$ .

**Definición 0.6.** Si  $f : A \rightarrow B$ ,

**Dominio.**  $\text{dom}(f) = \{x \in A : \exists f(x)\}$ .

**Imagen.**  $\text{Im}(f) = \{b \in B : \exists a \in A, f(a) = b\} \subset B$ .

**Notación.** En las funciones de variable real se denomina gráfico de  $f$  al conjunto  $\text{Gra}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \text{dom}(f)\}$ .

**Ejemplo 0.3.** Consideremos la aplicación  $f(x) = a \in \mathbb{R}$ , la función constante. Tenemos que  $\text{dom}(f) = \text{Im}(f) = \mathbb{R}$ .

**Definición 0.7.** Dada  $f : A \rightarrow B$ ,

(a) Se dice que  $f$  es **inyectiva** si  $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ .

(b) Se dice que  $f$  es **suprayectiva** si  $\forall b \in B, \exists a \in A$  tal que  $f(a) = b$ .

(c) Se dice que  $f$  es **biyectiva** si es inyectiva y suprayectiva.

**Notación.** Dada  $f : A \rightarrow B$  y  $C \subset A$ , se denomina restricción de  $f$  en  $C$  a la aplicación  $f|_C : C \rightarrow B$ . Así, tenemos que  $f(C) = \text{Im}(f|_C) = \{b \in B : \exists c \in C, f(c) = b\}$ . De manera similar,  $f(A) = \text{Im}(f)$ .

**Notación.** Si  $f : A \rightarrow B$  y  $D \subset B$ , se define  $f^{-1}(D) = \{a \in A : f(a) \in D\}$ .

**Ejemplo 0.4.** Consideramos la aplicación  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 2, & x \in (0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{x-1} + 2, & x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

Tenemos que  $f$  es biyectiva. Comprobamos la inyectividad.

$$\frac{1}{x} - 2 = \frac{1}{y} - 2 \iff x = y.$$

$$\frac{1}{x-1} + 2 = \frac{1}{y-1} + 2 \iff x = y.$$

Ahora comprobamos la suprayectividad. Si  $a = 0$ , cogemos  $x = \frac{1}{2}$ . Si  $a < 0$ , cogemos  $x = \frac{1}{a-2} \in (0, 1)$ . Si  $a > 0$ , cogemos  $x = \frac{1}{a+2} \in (0, \frac{1}{2})$ . Así, la aplicación es biyectiva.

**Definición 0.8** (Inversa). Dada  $f : A \rightarrow \text{Im}(f)$ , si  $f$  es inyectiva tenemos que  $f$  es biyección y  $\exists f^{-1} : \text{Im}(f) \subset B \rightarrow A$  tal que  $b \rightarrow f^{-1}(b) = a$ .

**Ejemplo 0.5.** Consideremos  $f : \mathbb{R}/\{0\} \rightarrow \mathbb{R}/\{0\}$  tal que  $f(x) = \frac{1}{x}$ , entonces  $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ .

## 0.2. Cardinalidad

**Definición 0.9** (Equipotencia). Dos conjuntos  $A$  y  $B$  son **equipotentes** si existe una biyección  $f : A \rightarrow B$ .

**Proposición 0.1.** La relación de equipotencia es una relación de equivalencia.

*Demostración.* (i) Comprobamos la propiedad reflexiva. Tenemos que la identidad  $i : A \rightarrow A$  con  $a \rightarrow a$  es una biyección.

(ii) Comprobamos la propiedad simétrica. Dada una biyección, su inversa también es una biyección.

(iii) Comprobamos la propiedad transitiva. La composición de biyecciones es una biyección.

□

**Definición 0.10** (Cardinal). Se llama **cardinal** de un conjunto a la clase de equivalencia a la que pertenece por la relación de equipotencia.

**Definición 0.11.** Dados  $A$  y  $B$ , tenemos que  $|A| \leq |B|$  si  $\exists f : A \rightarrow B$  inyectiva.

**Proposición 0.2.** La relación anterior es una relación de orden total.

*Demostración.* (i) La identidad es inyectiva.

(ii) Por el teorema de Cantor-Bernstein, si  $f : A \rightarrow B$  inyectiva y  $g : B \rightarrow A$  inyectiva,  $\exists h : A \rightarrow B$  biyectiva.

(iii) Si  $f : A \rightarrow B$  inyectiva y  $f : B \rightarrow C$  inyectiva, tenemos que  $g \circ f : A \rightarrow C$  es inyectiva.

(iv) Existe un teorema que dice que si  $A$  y  $B$  son conjuntos, o bien existe  $f : A \rightarrow B$  inyectiva o bien existe  $g : B \rightarrow A$  inyectiva. □

**Definición 0.12.** Un conjunto  $A$  es **finito** si no existe  $C \subsetneq A$  tal que  $\exists g : C \rightarrow A$  biyectiva. Se dice que es **infinito** si no es finito, es decir,  $\exists C \subsetneq A$ ,  $\exists g : C \rightarrow A$  biyectiva.

**Ejemplo 0.6.** Tenemos que  $\mathbb{N}$  es infinito puesto que  $\mathbb{N}$  tiene el mismo cardinal que el conjunto de los números pares. Similarmente, antes hemos visto que  $\exists f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  biyectiva.

**Proposición 0.3.** (a) Sea  $X$  finito e  $Y \subset X$ , entonces  $Y$  es finito.

(b) Si  $X$  es finito y  $|X| = |Y|$ , entonces  $Y$  es finito.

(c) Si  $X$  es infinito y  $|X| = |Y|$ , entonces  $Y$  es infinito.

*Demostración.* (a) Si  $Y = X$  es trivial. Consideremos el caso  $Y \subsetneq X$ . Asumimos que  $X$  es finito e  $Y$  es infinito. Como  $Y$  es infinito,  $\exists Z \subsetneq Y$  y  $\exists f : Z \rightarrow Y$  biyección. Tenemos que  $X/Y \neq \emptyset$ . Consideremos la aplicación  $g : Z \cup (X/Y) \rightarrow X$  tal que

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in Z \\ x, & x \in X/Y \end{cases}$$

Tenemos que  $Z \cap (X/Y) = \emptyset$ . Así,  $x \neq y$  y  $x, y \in Z$  tenemos que  $f(x) \neq f(y)$ . Si  $x \in Z$  e  $y \in X/Y$ , tenemos que  $f(x) \in Y \Rightarrow f(x) \notin X/Y$ , así,  $f(x) \neq y$ , por lo que es inyectiva. Ahora comprobamos la sobreyectividad. Si  $x \in X$ , tenemos que  $x \in Y$  o  $x \in X/Y$ . Si  $x \in X/Y$ , cogemos  $x = g(x)$ . Si  $x \in Y$ , como  $f$  es biyectiva,  $\exists z \in Z$  tal que  $f(z) = x$ . Así, como  $Z \cup (X/Y) \subsetneq X$  y hemos encontrado una biyección  $g$  entre estos dos conjuntos, tenemos que  $X$  es infinito. Esto es una contradicción.

- (b) Asumimos que  $Y$  es infinito. El resto es análogo a la demostración (c).
- (c) Dado que  $X$  es infinito, tenemos que  $\exists Z \subsetneq X$  y  $f : Z \rightarrow X$  biyectiva. Como  $|X| = |Y|$ ,  $\exists T : X \rightarrow Y$  biyectiva. Así, tenemos que  $T(Z) \subsetneq Y$ . Definimos  $g = T \circ f \circ T^{-1} : T(Z) \rightarrow Y$ , que es una biyección, puesto que es una composición de biyecciones. Así,  $Y$  es infinito.  $\square$

**Observación.** Tenemos que  $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$ , puesto que  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(n) = n$  es inyectiva.

**Proposición 0.4.** Si  $X$  es infinito, entonces  $|\mathbb{N}| \leq |X|$ .

*Demostración.* Si  $X$  es infinito,  $\exists a_1 \in X$ . Cogemos  $f(1) = a_1$ . Similarmente cogemos  $f(2) = a_2 \in X \setminus \{a_1\}$ . Por inducción,  $f(n) = a_n \in X \setminus \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ . Tenemos que  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$  es una inyección.  $\square$

**Proposición 0.5.**

$$|X| < |\mathcal{P}(X)|.$$

*Demostración.* (i) Si  $X$  es finito,  $|X| = n < 2^n = |\mathcal{P}(X)|$ .

- (ii) Si  $X$  es infinito, tenemos que  $h : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  con  $a \rightarrow \{a\}$  es inyectiva. Así,  $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$ . Vamos a asumir que existe una biyección  $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ . Definimos

$$Z = \{a \in X : a \notin f(a)\} \subset X.$$

Si  $Z = \emptyset$ , tenemos que  $\forall a \in X$ ,  $a \in f(a)$ , por lo que  $\emptyset \notin \text{Im}(f)$ , así  $f$  no es sobreyectiva. Si  $Z \neq \emptyset$ , tenemos que  $\exists a \in Z$ . Similarmente, como  $Z \subset X$ ,  $\exists a \in X$  con  $Z = f(a)$ . De esta manera, tenemos que si  $a \in Z$ , entonces  $a \notin Z$ , por lo que tenemos una contradicción. Similarmente, si  $a \notin Z$ , tenemos que  $a \in Z$ .  $\square$

**Proposición 0.6.**

$$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|.$$

*Demostración.* Sabemos que  $\exists \varphi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  biyectiva. Así, vamos a buscar una biyección  $g : \mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$ . Sea  $B = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} : a_n \in \{0, 1\}, \exists a_{n_0} = 0, \exists a_{n_1} = 1, \forall m, \exists m' > m, a_{m'} = 1 \right\} \subset (0, 1)$ . Definimos  $g : \mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$  biyectiva tal que

$$g(k) = r_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{k,n}}{2^n}.$$



Vamos a construir  $r \in (0, 1)$  tal que  $\forall k \in \mathbb{N}, r \neq r_k$ . Sea  $a_{n_1} = 1$ , así, cogemos  $a_{n_1} = 0$ . Similarmente, si  $a_{2, n_2} = 1$ , con  $n_2 > n_1$ , y decimos que  $a_{n_2} = 0$ . En general, si  $a_{k, n_k} = 1$ ,  $a_{n_k} = 0$ . En el resto de coordenadas intermedias le ponemos un 1. Así, definimos

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} \neq r_k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

1

□

**Teorema 0.1.**

$$|\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}|.$$

*Demostración.* Vamos a ver que  $|(0, 1)| = |(0, 1) \times (0, 1)|$ . Cogemos  $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1) \times (0, 1)$  tal que  $r \rightarrow (r, a)$ . Así, está claro que  $|(0, 1)| \leq |(0, 1) \times (0, 1)|$ . Ahora, cogemos  $g : (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow (0, 1)$  tal que

$$(r, s) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n} \right) \rightarrow g(r, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{2n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^{n+1}} \in (0, 1).$$

Tenemos que demostrar que esto es una inyección.

□

**0.2.1. Números algebraicos**

Sea  $\mathbb{K}$  un cuerpo y  $\mathbb{K}[x] = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n\}$ .

**Proposición 0.7.** Si  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ , tenemos que existe  $p(x) \in \mathbb{R}[x]$  tal que  $p(z) = 0$ .

*Demostración.* Cogemos el polinomio

$$(x - z)(x + z) = x^2 - z^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 \in \mathbb{R}[x].$$

□

Entonces se dice que los números complejos son algebraicos sobre  $\mathbb{R}$ . Tenemos que  $\mathbb{R}$  no es algebraico sobre  $\mathbb{Q}$ . Considera, por ejemplo  $\pi$ . Tenemos que

$$\mathbb{Q}[x] = \{\text{polinomios de grado } 1\} \cup \{\text{polinomios de grado } 2\} \cup \dots \cup \{\text{polinomios de grado } n\} \cup \dots.$$

Podemos ver que las raíces de todos los polinomios de  $\mathbb{Q}[x]$  son tantas como  $|\mathbb{N}|$ . Por tanto, tiene que haber números reales que no son algebraicos.

<sup>1</sup>Si hay un número que tiene infinitos ceros, cogemos representación decimal por la derecha.

## 0.3. Funciones de variable real

### 0.3.1. Estudio de funciones

Las funciones pueden tener propiedades variadas. Un ejemplo es ser inyectiva, sobreyectiva (suprayectiva) o biyectiva.

**Ejemplo 0.7.** Consideremos  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ . Tenemos que  $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$ . Calculamos la imagen. Tenemos que

$$-1 < \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1.$$

Si  $a = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ , tenemos que

$$a^2 = \frac{x^2}{x^2+1} \iff a^2 x^2 + a^2 = x^2 \iff x = \pm \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Así,  $\text{Im}(-1, 1)$ . Así,  $f: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$  es biyectiva.

También se puede estudiar el signo de una función:

- $f^+ = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\}$ .
- $f^- = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < 0\}$ .

**Definición 0.13** (Paridad).  $f$  se dice **par** si se verifica que  $f(x) = f(-x)$ ,  $\forall x \in \text{dom}(f)$ . Se dice que  $f$  es **impar** si  $\forall x \in \text{dom}(f)$ ,  $f(-x) = -f(x)$ .

**Definición 0.14** (Monotonía). Se dice que  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es **monótona creciente** si  $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ . Similarmente, se dice que es **monótona decreciente** si  $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ .

**Definición 0.15** (Convexidad). Se dice que  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es **convexa** si  $\forall a, b \in \text{dom}(f)$  y  $\alpha \in [0, 1]$  se cumple que

$$f(\alpha a + (1 - \alpha)b) \leq \alpha f(a) + (1 - \alpha)f(b).$$

Unas propiedades importantes de las funciones son sus límites. Si  $a$  está en la 'frontera' de  $\text{dom}(f)$ , tenemos que  $a = \pm\infty$  o  $a \notin \text{dom}(f)$  pero existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

**Definición 0.16** (Continuidad). Dada  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a \in \text{dom}(f)$ , se dice que  $f$  es **continua** en  $a$  si existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

**Definición 0.17** (Continuidad). Se dice que  $f$  es **continua** en  $a \in \text{dom}(f)$  si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que si  $0 \leq |x - a| < \delta$  se tiene que  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .

**Definición 0.18** (Continuidad). Se dice que  $f$  es **continua** en  $a \in \text{dom}(f)$  si  $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow a$  se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ .

**Ejemplo 0.8.** ■ Dado  $f = a$  tenemos que es continua en todo  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

- Consideremos la función  $f(x) = x$ . Cogemos  $\delta = \varepsilon$ , entonces si  $0 \leq |x - x_0| < \delta$ , tenemos que  $|x - x_0| < \varepsilon$ . Así, esta función es continua en todo  $\mathbb{R}$ .

### 0.3.2. Métodos para generar funciones

Dadas  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\text{dom}(f) \cap \text{dom}(g) \neq \emptyset$ , tenemos que si  $x \in \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$ ,

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ .
- $(fg)(x) = f(x)g(x)$ .
- Si  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda f(x)$ .
- Si  $x \in \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$  y  $g(x) \neq 0$ ,  $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ .

**Observación.** Podemos observar que los polinomios se forman a través de estas transformaciones elementales.

Similarmente, las funciones racionales se forman a partir de polinomios y de su división.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_0}.$$

Cuando una función es **inyectiva**, podemos definir su inversa. Esta es otra forma de generar funciones. Dada una función inyectiva, se define su inversa  $f^{-1}$  por

$$\begin{aligned} f^{-1} : \text{Im}(f) &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\rightarrow f^{-1}(y) = x. \end{aligned}$$

donde  $x \in \text{dom}(f)$  es el único elemento en  $\text{dom}(f)$  tal que  $f(x) = y$ .

**Ejemplo 0.9.** La función  $f(x) = \sqrt{x}$  se genera a partir de la inversa de  $f(x) = x^2$ .

Dadas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\text{Im}(f) \subset \text{dom}(g)$ , se define  $f$  compuesta con  $g$  así:  $g \circ f : \text{Im}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ . Más adelante demostraremos que la composición de funciones conserva la continuidad. También podemos definir funciones con series de potencias.

**Ejemplo 0.10.** Dada  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3x^n}{n!}$ . El dominio son los valores  $x \in \mathbb{R}$  tales que la serie es convergente.

# Capítulo 1

## El cuerpo de los números reales

### 1.1. El cuerpo de los números reales.

**Definición 1.1** (Cuerpo). Se define  $\mathbb{R}$  como un **cuerpo abeliano**:

(i) Existen dos operaciones en  $\mathbb{R}$ :  $+$  (suma) y  $\cdot$  (producto).

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow x + y$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow x \cdot y.$$

(ii) La suma es conmutativa:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y = y + x.$$

(iii) La suma es asociativa:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x + y) + z = x + (y + z).$$

(iv) Existencia del elemento neutro de la suma <sup>a</sup>:

$$\exists 0 \in \mathbb{R}, 0 + x = x + 0 = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

(v) Existencia del elemento opuesto:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists -x^b \in \mathbb{R}, x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

(vi) El producto es conmutativo:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \cdot y = y \cdot x.$$

(vii) La multiplicación es asociativa:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

(viii) Existencia del elemento neutro del producto:

$$\exists 1 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, 1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$$

(ix) Existencia del opuesto en el producto:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists \frac{1}{x} \in \mathbb{R}, x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1.$$

(x) El producto es distributivo respecto a la suma <sup>d</sup>:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

<sup>a</sup>no estamos afirmando que sea único

<sup>b</sup>el menos no significa nada, no sabemos lo que es restar todavía

<sup>c</sup>Como en a, esto es notación, no sabemos dividir

<sup>d</sup>no hay que especificar distributiva por la izquierda y por la derecha por la propiedad de conmutatividad del producto

Los racionales ( $\mathbb{Q}$ ) cumplen estos requisitos por lo que son un cuerpo, sin embargo  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{N}$  no lo son porque no cumplen con todos los requisitos. Algunos cuerpos interesantes son las clases de equivalencia de la forma  $\mathbb{Z}_n$ .  $\mathbb{R}$  también tiene la propiedad de que existe un orden como en  $\mathbb{Q}$ .

**Teorema 1.1.** En  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ :

(a) El elemento neutro de la suma es único.

(b) El elemento neutro del producto es único.

(c)  $\forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 0 = 0$ .

*Demostración.* (a) Suponemos que existe otro elemento  $0' \in \mathbb{R}$ , además de  $0 \in \mathbb{R}$  que cumple que es el elemento neutro de la suma. Tenemos que

$$0 + 0' \underset{(iv)}{=} 0' \underset{(ii)}{=} 0' + 0 \underset{(iii)}{=} 0.$$

Por tanto,  $0 = 0'$ .

(b) Suponemos que existen  $1, 1' \in \mathbb{R}$  que son elementos neutros para el producto. Aplicamos lo mismo que en la demostración anterior.

$$1 \cdot 1' = 1' = 1' \cdot 1 = 1.$$

Por tanto,  $1 = 1'$ .

(c)

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0.$$

Sumamos el opuesto a ambos lados:

$$x \cdot 0 + (-x \cdot 0) = (-x \cdot 0) + x \cdot 0 + x \cdot 0$$

$$0 = 0 + x \cdot 0$$

$$0 = x \cdot 0.$$

También se puede demostrar de la siguiente forma:

$$a + a \cdot 0 = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a \cdot (1 + 0) = a \cdot 1 = a.$$

Si sumamos  $-a$  en ambos lados tenemos que  $a \cdot 0 = 0$ .

□

**Lema 1.1.**  $\forall x \in \mathbb{R}$ , se cumple que

$$(-x) = (-1) \cdot x.$$

*Demostración.* Aplicamos la parte (c) del teorema anterior.

$$(-1) \cdot x + x = (-1) \cdot x + 1 \cdot x = ((-1) + 1) \cdot x = 0 \cdot x = 0.$$

□

**Teorema 1.2.** (a)  $x \neq 0$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,  $x \cdot y = 1$ , entonces  $y = \frac{1}{x}$ .

(b) Si  $x \cdot y = 0$  entonces  $x = 0$  o  $y = 0$ .

*Demostración.* (a)

$$y = 1 \cdot y = \frac{1}{x} \cdot x \cdot y = \frac{1}{x} \cdot (x \cdot y) = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}.$$

(b) Si  $x = 0$  hemos ganado. Si  $x \neq 0$ ,

$$x \cdot y = 0.$$

Multiplicamos ambos lados por el inverso,

$$\frac{1}{x} \cdot x \cdot y = \frac{1}{x} \cdot 0 = 0 \Rightarrow 1 \cdot y = 0 \Rightarrow y = 0.$$

□

**Notaciones:**  $x, y \in \mathbb{R}$

■ Definimos resta como:  $x - y = x + (-y)$

- Si  $y \neq 0$ , definimos la división como

$$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}.$$

- Si  $x \neq 0$ ,  $x^0 = 1$ .
- $x^1 = x$ .
- Si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x^n = x \cdot x^{n-1}$ .
- Si  $x \neq 0$ ,  $x^{-1} = \frac{1}{x}$ .
- $x^{-2} = x^{-1} \cdot x^{-1} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot 1$ .
- Si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x^{-n} = x^{-1} \cdot x^{-(n-1)}$ .

Definimos los naturales como la suma de la unidad (elemento neutro del producto) y los enteros negativos como la suma del opuesto de la unidad.

**Definición 1.2.** Si  $n, m \in \mathbb{Z}$  y  $m \neq 0$ , definimos  $\mathbb{Q}$  como

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}.$$

Definimos el complementario de los números racionales como los números irracionales:

$$\mathbb{R}/\mathbb{Q}.$$

Sabemos que  $\mathbb{R}/\mathbb{Q} \neq \emptyset$  porque sabemos que existe  $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$  tal que  $x^2 = 2$ .

**Definición 1.3** (Grupo). Un grupo es un conjunto con una operación (+) que cumple las condiciones de la suma.

**Definición 1.4** (Anillo). Un anillo es un conjunto con dos operaciones (+, ·) que cumple todas las condiciones menos la existencia de la inversa en el producto.

**Ejemplo 1.1.**  $\mathbb{Z}$  es un anillo.

**Definición 1.5** (Propiedades de cuerpo ordenado de  $\mathbb{R}$ ). Asumimos que existe  $P \subset \mathbb{R}$  (**números reales positivos**), con  $P \neq \emptyset$ , tal que

- (i) Conjunto cerrado por la suma:

$$\forall x, y \in P, x + y \in P.$$

<sup>1</sup>No hemos demostrado que  $x^{-2} = \left(\frac{1}{x}\right)^2$

(ii) Conjunto cerrado por el producto:

$$\forall x, y \in P, x \cdot y \in P.$$

(iii)  $\forall x \in \mathbb{R}$  se cumple sólo una de las siguientes cosas:

$$x \in P, \text{ o } x = 0 \text{ o } -x \in P.$$

A los números tales que  $-x \in P$  los llamaremos **números negativos**.

#### Notaciones

- Si  $x \in P$ , decimos que  $x > 0$ .
- Si  $x > 0$  o  $x = 0$ , decimos que  $x \geq 0$ .
- Si  $-x \in P$ , decimos que  $-x > 0$  o  $x < 0$ .
- Si  $x < 0$  o  $x = 0$  decimos que  $x \leq 0$ .

**Definición 1.6.**  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ,

(i)  $x > y$  o  $y < x$  si  $x - y > 0$ .

(ii)  $x \geq y$  o  $y \leq x$  si  $x > y$  o  $x = y$ .

Tenemos que  $\mathbb{Q}$  también es un cuerpo ordenado.

**Teorema 1.3.** Si  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .

(a) **Propiedad transitiva:** Si  $x > y$  y  $y > z$ , entonces  $x > z$ .

(b) Si  $x > y$ , entonces  $x + z > y + z$ .

(c) Si  $x > y$  y  $z > 0$ , entonces  $x \cdot z > y \cdot z$ .

*Demostración.* (a) Si  $x > y$  entonces  $x - y > 0$ . Similarmente,  $y - z > 0$ . Por tanto,  $x - y \in P$  y  $y - z \in P$ . Por las propiedades de  $P$  tenemos que:

$$(x - y) + (y - z) \in P \Rightarrow x - z \in P.$$

Consecuentemente,  $x - z > 0$  y  $x > z$ .

(b)

$$(x + z) - (y + z) = x - y \in P.$$

(c)

$$x \cdot z - y \cdot z = (x - y) \cdot z.$$

Como  $x - y \in P$  y  $z \in P$ , tenemos que  $(x - y) \cdot z \in P$ .

□



**Teorema 1.4.** (a) Si  $x \in \mathbb{R}$  y  $x \neq 0$ , entonces  $x^2 > 0$ .

(b)  $1 > 0$ .

(c) Los números naturales son positivos.

*Demostración.* (a) Si  $x \neq 0$ ,  $x$  puede ser positivo o negativo. Si  $x > 0$ ,  $x \in P$  y  $x \cdot x = x^2 \in P$ . Si  $x < 0$ ,  $-x \in P$ , por tanto  $(-x) \cdot (-x) \in P$ . Además,

$$(-x)(-x) = (-1)^2 x^2 > 0.$$

Tenemos que demostrar que  $(-1)^2$  es 1. Sabemos que

$$(-1)(-1) = -(-1).$$

Además,

$$(-1) + 1 = 0 \Rightarrow -(-1) + (-1) + 1 = -(-1) + 0 \Rightarrow -(-1) = 1.$$

Por tanto,

$$1 \cdot x^2 = x^2 > 0.$$

(b) Sabemos que  $1 \neq 0$ . Aplicamos lo demostrado en (a):

$$1 = 1 \cdot 1 = 1^2 > 0.$$

(c) Definimos un número natural  $n$  como la suma de 1,  $n$  veces. Tenemos que

$$1 = 1.$$

Además,

$$1 + 1 = 2.$$

Sabemos que  $2 > 1$  porque  $1 + 1 - 1 = 1 > 0$ . Asumimos que esto se sostiene para  $n = k$ , entonces

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_k > \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{k-1}.$$

Entonces, si  $n = k + 1$ ,

$$k + 1 = \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_k + 1.$$

Por tanto, para obtener  $k + 1$  estamos sumando 1 un total de  $k + 1$  veces. De manera similar, tenemos que

$$k + 1 - k = 1 > 0.$$

Además, por hipótesis de inducción

$$k + 1 - 1 = k > 0.$$

Por lo que, dado que  $k \geq 1$  tenemos que  $k \in P$  (por la propiedad transitiva).

□

**Ejemplo 1.2.** Consideramos el conjunto  $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ . Tenemos que

$$1 + 2 \pmod 3 = 3 \pmod 3 = 0.$$

Tenemos que este conjunto no es un cuerpo ordenado, pues si  $1 > 0$ , tenemos que  $1 \in P$  y, consecuentemente,  $1 + 1 \in P$ . Sin embargo,

$$1 + 1 = 2 = -1.$$

Como  $1 \in P$ , tenemos que  $-1 < 0$ .

**Lema 1.2.** Si  $x \in \mathbb{R}$  y  $x > 0$ , entonces  $\frac{1}{x} > 0$ .

*Demostración.* Si  $\frac{1}{x}$  no es mayor que 0, tenemos que o bien, es 0 o es negativo. No puede ser 0, porque cualquier cosa por 0 es 0. Por tanto, ha de ser negativo. Entonces, el opuesto del inverso ha de ser positivo:

$$-\frac{1}{x} > 0 \Rightarrow x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) > 0.$$

Consecuentemente,  $-1 > 0$ , que es una contradicción (en un teorema anterior quedó demostrado que  $1 > 0$ ).  $\square$

**Lema 1.3.**

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

*Demostración.* Decimos que

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \iff 2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \iff 2 - 1 = (1 + 1) - 1 = 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

$\square$

**Teorema 1.5** (Aproximación). Si  $x \in \mathbb{R}$ , satisface que  $0 \leq x < \varepsilon$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , entonces,  $x = 0$ .

*Demostración.* Suponemos que  $x \neq 0$ . Sabemos, por hipótesis, que es positivo, i.e.  $x > 0$ . Tomamos  $\varepsilon = \frac{x}{2} > 0$  (por el lema anterior). Entonces

$$x < \frac{x}{2} \iff x - \frac{x}{2} < 0 \iff x \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = x \cdot \frac{1}{2} < 0.$$

Esto nos da una contradicción.

Otra posible demostración es decir  $\varepsilon = x$  (contradicción porque es imposible que  $x < x$ , pues daría que 0 es un número negativo).  $\square$

**Definición 1.7** (Valor absoluto). Sea  $x \in \mathbb{R}$ , se define  $|x|$  de la siguiente manera

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

**Proposición 1.1.** (i)  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(ii)  $|x|^2 = x^2$

(iii) Si  $y \geq 0$ :

$$|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y.$$

(iv)  $-|x| \leq x \leq |x|$

*Demostración.* (i) Si  $x \cdot y > 0$ , entonces  $|x \cdot y| = x \cdot y$ . Además,  $x \cdot y > 0 \iff x > 0 \wedge y > 0$  o  $x < 0 \wedge y < 0$ . Si los dos son positivos

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| = x \cdot y.$$

Si los dos son negativos,

$$|x| \cdot |y| = (-x) \cdot (-y) = x \cdot y.$$

Por tanto,

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$$

Si  $x \cdot y < 0$ , sin pérdida de generalidad, sea  $x < 0$ . Entonces  $|x| = -x$  y  $|y| = y$ . Además,

$$|x \cdot y| = -x \cdot y.$$

Por otro lado,

$$|x| \cdot |y| = -x \cdot y.$$

Si  $x \cdot y = 0$ , o  $x = 0$  o  $y = 0$ . Sin pérdida de generalidad, sea  $x = 0$ , entonces  $|x| = 0$  y  $|x \cdot y| = 0$ . Además,

$$|x| \cdot |y| = 0 \cdot |y| = 0.$$

(ii) Sabemos que  $\forall x \in \mathbb{R}$  se cumple que  $x^2 \geq 0$ . Entonces, tenemos que

$$x^2 = |x^2| = |x| \cdot |x| = |x|^2.$$

(iii) Cogemos  $y \in \mathbb{R}^*$  y  $|x| \leq y$ . Analizamos todos los casos. Si  $x < 0$ ,  $|x| = -x$  y  $-x > 0$ . Por tanto,  $x < 0 \leq y$ . Por tanto,

$$x < y \Rightarrow x \leq y.$$

Por tanto,

$$|x| \leq y \Rightarrow -x \leq y \Rightarrow -y \leq x.$$

Si  $x = 0$  tenemos que  $|x| = 0$ . Además,  $0 \leq y$  y  $-y < 0$ . Si  $x > 0$ , tenemos que  $|x| = x \leq y$ . Además,

$$-y \leq 0 < x \Rightarrow -y \leq x.$$

(iv) Lo podemos demostrar de dos formas. En primer lugar, podemos considerar los posibles valores de  $x$ . Si  $x = 0$  es trivial. Si  $x > 0$ , tenemos que  $|x| = x$ . Por tanto,  $x \leq |x|$ . Además,  $-|x| = -x < 0$  y, por tanto,

$$-x < 0 \leq x \leq |x| \Rightarrow -|x| \leq x \leq |x|.$$

Si  $x < 0$  tenemos que  $|x| = -x$ . Entonces,  $-|x| = x \leq x$  y  $|x| > 0$ , por tanto,

$$-|x| \leq x \leq |x|.$$

Otra manera de hacerlo es utilizando el apartado anterior y afirmar que  $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq x$ . □

**Teorema 1.6** (Desigualdad triangular). Para  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

*Demostración.* Utilizamos el apartado (iii) del teorema anterior. Tenemos que:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \iff -|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

Utilizando (iv), sabemos que  $-|x| \leq x \leq |x|$  y, similarmente,  $-|y| \leq y \leq |y|$ . Por tanto, al sumar estas igualdades obtenemos que

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

Esto es lo que queríamos demostrar. □

**Corolario 1.1** (Desigualdad triangular al revés). Para  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$|x - y| \geq ||x| - |y||.$$

*Demostración.* Este enunciado es equivalente a (utilizando (iii))

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|.$$

Además,

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \iff |y| \leq |x - y| + |x|.$$

Entonces, utilizando el teorema anterior

$$|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x| = |x - y| + |x|.$$

Por el otro lado, tenemos que

$$|x| - |y| \leq |x - y| \iff |x| \leq |x - y| + |y|.$$

Por tanto, sabemos que

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|.$$

Por lo que

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y| \iff |x - y| \geq ||x| - |y||.$$

□

**Definición 1.8** (Distancia Euclídea). La distancia en  $\mathbb{R}$  se define como

$$d(x, y) = |x - y|.$$

**Nota.** A  $\mathbb{R}$  se le llama **espacio euclídeo** de dimensión 1.

**Proposición 1.2.** (i)  $d(x, y) \geq 0 \wedge d(x, y) = 0 \iff x = y$

(ii)  $d(x, y) = d(y, x)$

(iii)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

*Demostración.* (i) Trivial

(ii) Trivial

(iii) Utilizamos la desigualdad triangular.

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y).$$

□

**Definición 1.9.** Dado  $x \in \mathbb{R}$  y  $\varepsilon > 0$ , definimos el **entorno de  $x$**  con radio  $\varepsilon$

$${}^aB(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < \varepsilon\} = (x - \varepsilon, x + \varepsilon).$$

<sup>a</sup>También se usa la  $V$

**Observación.**  $|x - y| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x - y < \varepsilon \iff x - \varepsilon < y < x + \varepsilon \iff y - \varepsilon < x < y + \varepsilon.$

**Notaciones.** Si  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $a < b$ ,

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

**Corolario 1.2.**  $x = a \iff \forall \varepsilon > 0, x \in B(a, \varepsilon)$

*Demostración.* Sabemos que  $y = 0 \iff 0 \leq y < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$ . Sea  $y = |x - a|$ . Ya sabemos que  $|x - a| \geq 0$ . La hipótesis me dice que

$$\forall \varepsilon > 0, |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |x - a| = 0 \iff x = a.$$

Por el otro lado, es trivial que si  $x = a, \forall \varepsilon > 0, x \in B(a, \varepsilon)$ .

□

**Corolario 1.3.** Para  $\forall a \in \mathbb{R}$ ,

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} B(a, \varepsilon) = \{a\}.$$

$a$

<sup>a</sup>Este corolario significa lo mismo que el anterior.

## 1.2. Completitud de $\mathbb{R}$

Sabemos que  $\forall x \in \mathbb{Q}, x^2 \neq 2$ .

De momento sabemos que  $\mathbb{R}$  es un cuerpo abeliano totalmente ordenado.  $\mathbb{C}$  no tiene un orden porque no se cumple la condición de que si  $z \in \mathbb{C}$  entonces  $z^2 \geq 0$ .

**Definición 1.10.** Sea  $S \subset \mathbb{R}$  con  $S \neq \emptyset$ . Se dice que  $a \in \mathbb{R}$  es una **cota superior** de  $S$  si

$$\forall s \in S, s \leq a.$$

Decimos que  $S$  está **acotado superiormente** si tiene una cota superior.

Similarmente, se dice que  $a \in \mathbb{R}$  es una **cota inferior** de  $S$  si

$$\forall s \in S, a \leq s.$$

Si tiene una cota inferior decimos que  $S$  está **acotado inferiormente**.

Si está acotado superiormente e inferiormente decimos que está acotado.

**Ejemplo 1.3.** (i) El conjunto  $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$  está acotado superiormente pero no inferiormente, por lo que no es un conjunto acotado.

(ii)  $S$  está acotado si y solo si  $\exists c > 0$  tal que  $\forall s \in S, |s| \leq c$ . Es decir,

$$\exists c > 0, \forall s \in S, -c \leq s \leq c.$$

**Nota.** Podemos asumir que el conjunto vacío está acotado (no tenemos nada que comprobar).

**Definición 1.11.** Sea  $S \neq \emptyset$ . Se dice que  $u \in \mathbb{R}$  es el **supremo** de  $S$  si

(i)  $u$  es cota superior de  $S$ . Es decir,  $\forall s \in S, u \geq s$ .

(ii) Si  $v \geq s, \forall s \in S$  entonces  $v \geq u$ . Es decir, es la menor cota superior.

Análogamente, se dice que  $u \in \mathbb{R}$  es el **ínfimo** de  $S$  si

(i)  $\forall s \in S, u \leq s$ .

(ii) Si  $\forall s \in S, v \leq s$ , entonces  $v \leq u$ . Es decir, es la mayor cota inferior.

**Definición 1.12.** Si  $u = \sup(S)$  y  $u \in S$ , diremos que  $u$  es el **máximo** de  $S$ .

Similarmente, si  $u = \inf(S)$  y  $u \in S$ , diremos que  $u$  es el **mínimo** de  $S$ .

**Ejemplo 1.4.** (i) Si  $S = (0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$ . Tenemos que  $1 = \sup(S)$  y como  $1 \in S$ , 1 ha de ser el máximo. Además,  $\inf(S) = 0$  y como  $0 \notin S$ , no existe el mínimo en  $S$ .

(ii) Considera el conjunto  $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$ . Tenemos que  $\sup(S) = 1$  y como  $1 \notin S$  tenemos que  $S$  no tiene máximo. Además, no tiene cotas inferiores, por lo que el ínfimo no existe. Si no existe lo denotamos de la siguiente manera:  $\inf = -\infty$ .

**Axioma 1** (Axioma del supremo). Para todo conjunto  $S \subset \mathbb{R}$  con  $S \neq \emptyset$ , si  $S$  está acotado superiormente, entonces existe  $\sup(S)$ .

**Observaciones.** Tenemos que  $\mathbb{Q}$  es un cuerpo abeliano ordenado, pero no se cumple el axioma del supremo. Considera el conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}.$$

Este conjunto está acotado superiormente pero no tiene supremo ( $\sup(S) \notin \mathbb{Q}$ ) porque no existe  $x \in \mathbb{Q}$  tal que  $x^2 = 2$ .

**Notación.** Si se satisface el axioma del supremo diremos que el cuerpo abeliano, totalmente ordenado, es **completo**<sup>2</sup>.

**Teorema 1.7.** Sea  $S \subset \mathbb{R}$  con  $S \neq \emptyset$ . Supongamos que  $S$  está acotado inferiormente. Sea  $-S = \{-s : s \in S\}$ . Entonces  $-S$  está acotado superiormente y, por el axioma del supremo, tiene supremo. Entonces,

$$\sup(-S) = -\inf(S).$$

Es decir, el ínfimo existe y es el opuesto del supremo de  $-S$ .

*Demostración.* Sea  $v \leq s, \forall s \in S$ . Sabemos que  $v$  existe por la hipótesis del teorema. Entonces,  $\forall s \in S, -s \leq -v$ . Por tanto,  $-v$  es una cota superior de  $-S$ . Por el axioma del supremo, tenemos que  $\exists u = \sup(-S)$ .

(i) Demostramos que  $-u$  es una cota inferior. Sabemos que  $u \geq -s, \forall s \in S$ . Consecuentemente,  $-u \leq s, \forall s \in S$ .

(ii) Si  $\forall s \in S, v \leq s$ . Entonces,  $-s \leq -v$ , por lo que  $-v$  es cota superior de  $-S$ . Por tanto,  $u \leq -v$  y, consecuentemente,  $-u \geq v$ .

□

<sup>2</sup>No es completo en el sentido algebraico, pues no hay  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $x^2 = -1$ , es completo en el sentido de que no tiene agujeros

**Proposición 1.3.** Sea  $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}$ .

(i) Si  $S$  está acotado superiormente

$$u = \sup(S) \iff (\forall s \in S, u \geq s) \wedge (\forall \varepsilon > 0, \exists s \in S, u - \varepsilon < s).$$

(ii) Si  $S$  está acotado inferiormente,

$$u = \inf(S) \iff (\forall s \in S, u \leq s) \wedge (\forall \varepsilon > 0, \exists s \in S, s < u + \varepsilon).$$

*Demostración.* (i) Sea  $u = \sup S$ , entonces  $\forall s \in S, u \geq s$ . Sea  $\varepsilon > 0$  y consideremos el punto  $u - \varepsilon$ . Si  $u - \varepsilon \geq s, \forall s \in S$ . Entonces  $u - \varepsilon$  es cota superior de  $S$ . Además, tenemos que  $u - \varepsilon < u$ , pero como  $\sup S = u$  tenemos que  $u \leq u - \varepsilon$ . Esto es una contradicción.

(ii) Recíprocamente, si  $u$  es una cota superior y  $\forall \varepsilon > 0, \exists s \in S, u - \varepsilon < s$ . Si  $u$  no fuera supremo, existe  $v \geq s, \forall s \in S$  tal que  $v < u$ . Si tomamos  $\varepsilon = u - v > 0$ , tenemos que existe  $s \in S$  tal que  $s > u - \varepsilon$ , entonces,

$$u - \varepsilon = v < s.$$

Esto es una contradicción. □

**Proposición 1.4.** Si  $A, B \subset \mathbb{R}$  con  $A, B \neq \emptyset$ , tales que  $\forall a \in A, \forall b \in B$  se verifica que  $a \leq b$ , entonces,  $\sup A \leq \inf B$  (existen  $\sup A$  y  $\inf B$ ).

*Demostración.* Tenemos que  $\forall b \in B, \forall a \in A, b \geq a$ . Por tanto,  $A$  está acotado superiormente y, por el axioma de completitud, existe  $\sup A$  y que  $\sup A \leq b, \forall b \in B$ . Por tanto,  $\sup A$  es una cota inferior de  $B$  y, por tanto,

$$\sup A \leq \inf B.$$

□

**Teorema 1.8** (Propiedad Arquimediana de  $\mathbb{R}$ ). Para todo  $x \in \mathbb{R}, \exists n_x \in \mathbb{N}$  tal que  $x < n_x$ .

*Demostración.* Asumimos que  $\exists x \in \mathbb{R}$  tal que  $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq x$ . Por lo que  $\mathbb{N}$  está acotado superiormente. Entonces, por el axioma de completitud tenemos que  $\exists \sup \mathbb{N} \leq x$ . Sabemos que  $u = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$ . Como  $u - 1 < u$ , tenemos que  $\exists m \in \mathbb{N}$  tal que  $u - 1 < m \leq u$ . Entonces,  $u < m + 1$ . Sin embargo,  $m + 1 \in \mathbb{N}$  y tenemos que hay un número natural mayor que el supremo de todos los números naturales. Esto es una contradicción. □

**Corolario 1.4.**

$$\inf \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0.$$



*Demostración.* Sea  $S = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ . Como el inverso de un número positivo es positivo, tenemos que el conjunto está acotado inferiormente por 0. Dado  $\varepsilon > 0$ . Como  $\mathbb{N}$  no está acotado superiormente, si tomamos  $x = \frac{1}{\varepsilon}$ , podemos encontrar  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{1}{\varepsilon} < n_\varepsilon.$$

Por tanto,

$$0 \leq \inf S \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Por tanto, como  $\forall \varepsilon > 0, 0 \leq \inf S < \varepsilon$ , tenemos que  $\inf S = 0$ . □

**Corolario 1.5.**  $\forall a > 0$ ,

$$\inf \left\{ \frac{a}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0.$$

**Observación.**  $\mathbb{R}$  es el cuerpo abeliano, ordenado, completo y arquimediano. Es el único conjunto que satisface esto (si hay otro conjunto que también lo cumple, es esencialmente el mismo).

**Lema 1.4.** Si  $a, b > 0$  entonces

$$a < b \iff a^2 < b^2.$$

*Demostración.*

$$a^2 < b^2 \iff b^2 - a^2 > 0 \iff (b + a)(b - a) > 0.$$

Sabemos que  $a, b > 0$ , por tanto  $b + a > 0$ , por tanto  $b - a$  tiene que ser positivo y, por tanto,  $b > a$ . □

**Teorema 1.9.** Existe  $x \in \mathbb{R}$ , tal que  $x^2 = 2$ .

*Demostración.* Sea  $S = \{s \in \mathbb{R} : 0 \leq s \wedge s^2 < 2\}$ . Sabemos que  $S \neq \emptyset$  porque  $1 \in S$ . Demostramos que está acotado superiormente. Si  $s \in S$ , entonces,  $s^2 < 2 < 4$ . Por el lema anterior,

$$s < 2.$$

Por tanto,  $S$  está acotado superiormente por 2. Por el axioma de la completitud,  $\exists u = \sup S$ . Sabemos que

$$1 \leq u \leq 2.$$

Supongamos que  $u^2 \neq 2$ :

(i) Si  $u^2 < 2$ , sea  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \left(u + \frac{1}{n}\right)^2 &= u^2 + \frac{2u}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &< u^2 + \frac{2u}{n} + \frac{1}{n} \\ &= u^2 + \frac{2u+1}{n}. \end{aligned}$$

Para demostrar que  $u^2 + \frac{2u+1}{n} < 2$  tenemos que demostrar que  $\frac{2u+1}{n} < 2 - u^2$ . Como  $2u+1 > 0$ , tenemos que por el colorario anterior que,

$$\inf \left\{ \frac{2u+1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0.$$

Por tanto,  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{2u+1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$ <sup>3</sup>. Si tomamos  $\varepsilon = 2 - u^2$ ,  $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{2u+1}{n_\varepsilon} < 2 - u^2 = \varepsilon \iff \left(u + \frac{1}{n_\varepsilon}\right)^2 < u^2 + \frac{2u+1}{n_\varepsilon} < 2 - u^2 + u^2 = 2.$$

Por tanto,  $u = \sup S < u + \frac{1}{n_\varepsilon} \in S$ . Esto es una contradicción.

(ii) Si  $u^2 > 2$ , sea  $m \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} \left(u - \frac{1}{m}\right)^2 &= u^2 - \frac{2u}{m} + \frac{1}{m^2} \\ &> u^2 - \frac{2u}{m}. \end{aligned}$$

Queremos decir que  $u^2 - \frac{2u}{m} > 2$ . Cogemos  $\varepsilon = u^2 - 2 > \frac{2u}{m}$ . Usamos el colorario de la propiedad arquimediana. Tenemos que  $2u > 0$ . Además,

$$\inf \left\{ \frac{2u}{m} : m \in \mathbb{N} \right\} = 0.$$

Por tanto,  $\exists m_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{2u}{m_\varepsilon} < \varepsilon$ .

$$u^2 - \frac{2u}{m_\varepsilon} > u^2 - \varepsilon = u^2 - (u^2 - 2) = 2.$$

Así, hemos llegado a la conclusión de que  $\left(u - \frac{1}{m_\varepsilon}\right)^2 > 2 > s^2, \forall s \in S$ . Por el lema anterior,

$$u - \frac{1}{m_\varepsilon} > s, \forall s \in S.$$

---

<sup>3</sup>En este paso puedes utilizar directamente la propiedad arquimediana y decir que puedes encontrar un  $n \in \mathbb{N}$  lo suficientemente grande.

Entonces,  $u - \frac{1}{m_\varepsilon}$  es una cota superior de  $S$  que a su vez es menor que  $u = \sup S$ . Es decir

$$u - \frac{1}{m_\varepsilon} < u \quad \text{y} \quad u - \frac{1}{m_\varepsilon} \geq u.$$

Esto es una contradicción.

Por tanto, no puede ser que  $u^2 > 2$  ni  $u^2 < 2$ . Por tanto, debe ser que  $u^2 = 2$ .  $\square$

**Corolario 1.6.** Para todo  $a > 0$ , y para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $x > 0$  tal que

$$x^n = a.$$

**Notación.** En las condiciones del corolario,

$$x = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

**Definición 1.13.** Si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a > 0$ ,

$$a^{-\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}.$$

**Definición 1.14.**  $a > 0$ ,  $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ,

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m.$$

**Proposición 1.5** (Principio de la buena ordenación). Si  $A \subset \mathbb{N}$  con  $A \neq \emptyset$ , entonces existe  $n \in A$  tal que

$$\forall m \in A, n \leq m.$$

**Definición 1.15.** Un conjunto  $A$  con un orden  $\leq$  se dice que está **bien ordenado** si contiene un primer elemento:

$$\exists x \in A, \forall y < x \Rightarrow y \notin A.$$

**Ejemplo 1.5.** (i) Todo conjunto finito de  $\mathbb{R}$  está bien ordenado.

(ii) El intervalo  $[0, \infty)$  está bien ordenado.

**Teorema 1.10.** Sea  $A \subset \mathbb{N}$  con  $A \neq \emptyset$ , entonces  $A$  está bien ordenado.

*Demostración.* Suponemos lo contrario, es decir, existe  $\exists A \subset \mathbb{N}$  que no tiene un primer elemento. Queremos ver que  $\forall n \in \mathbb{N}$ , el conjunto  $\{1, \dots, n\} \cap A = \emptyset$ . Si  $n = 1$ ,  $\{1\} \cap A = \emptyset$ , porque sino 1 sería el primer elemento.

Asumimos que  $\{1, 2, \dots, n\} \cap A = \emptyset$ . Entonces tenemos que en el caso de  $n + 1$ :

$$\{1, \dots, n + 1\} \cap A = (\{1, \dots, n\} \cup \{n + 1\}) \cap A = (\{1, \dots, n\} \cap A) \cup (\{n + 1\} \cap A) = \{n + 1\} \cap A.$$

Esto puede ser vacío, o que  $\{n + 1\} \cap A = \{n + 1\}$ . Si pasase esto último,  $n + 1$  sería el menor elemento de  $A$ , que romple con nuestra hipótesis inicial. Por lo tanto, tenemos que  $A = \emptyset$ . Esto rompe con nuestra hipótesis del teorema.  $\square$

**Corolario 1.7.** Si  $x \geq 0$ , entonces  $\exists n \in \mathbb{N}$  tal que  $n - 1 \leq x < n$ .

*Demostración.* Sea  $A = \{m \in \mathbb{N} : m > x\} \neq \emptyset$  (por la propiedad arquimediana). Sea  $n$  el primer elemento de  $A$ . Tenemos que como  $n \in A$ ,  $n > x$ . Además,  $n - 1 \notin A$ , por lo que  $n - 1 \leq x$ . Por tanto:

$$n - 1 \leq x < n.$$

4

 $\square$ 

**Notación.**  $\lfloor x \rfloor$  es la parte entera de  $x$  tal que  $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

**Teorema 1.11** (Densidad de  $\mathbb{Q}$  en  $\mathbb{R}$ ). Si  $x, y \in \mathbb{R}$  con  $x < y$ , entonces existe  $r \in \mathbb{Q}$  tal que  $x < r < y$ .

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, suponemos que  $0 \leq x < y$ <sup>5</sup>. Sabemos, entonces, que  $y - x > 0$ . Por tanto, podemos encontrar un  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande tal que

$$y - x > \frac{1}{n} > 0.$$

Entonces, sabemos que

$$ny > nx \geq 0.$$

Por el corolario anterior,  $\exists m \in \mathbb{N}$  tal que

$$m - 1 \leq nx < m.$$

<sup>4</sup>En el caso de números negativos, coges que  $-x > 0$  y repites la demostración.

<sup>5</sup>Si fuesen negativos, cambiamos el signo y repetimos la demostración.

Entonces, tenemos que  $x < \frac{m}{n} = r \in \mathbb{Q}$ . Combinando las ecuaciones anteriores:

$$ny > n \left( \frac{1}{n} + x \right) = 1 + xn \geq 1 + m - 1 = m \Rightarrow y > \frac{m}{n} = r > x.$$

Por tanto,

$$x < r < y.$$

□

**Notación.** Los intervalos no acotados los definimos de la siguiente manera:

- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$
- $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

**Teorema 1.12.** Sea  $S \subset \mathbb{R}$  con  $S \neq \emptyset$ , tal que  $\forall x, y \in S$ ,  $x < y$  se verifica que  $[x, y] \subset S$ . Entonces,  $S$  es un **intervalo**<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Es uno de los casos de intervalos que hemos visto anteriormente (acotado y no acotado).

*Demostración.* (i) Supongamos que  $S$  está acotado, sea  $a = \inf S$  y  $b = \sup S$ . Si consideramos el intervalo  $[a, b]$  tenemos que como  $a = \inf S$ ,  $\forall s \in S$ ,  $s \geq a$ . Por el mismo razonamiento,  $\forall s \in S$ ,  $b \geq s$ . Por tanto,

$$\forall s \in S, a \leq s \leq b \Rightarrow S \subset [a, b].$$

Sea  $z \in (a, b)$ , queremos decir que  $z \in S$ . Como  $a = \inf S$ , tenemos que  $\exists s \in S$  tal que  $a < s < z$ . Similarmente, como  $b = \sup S$ ,  $\exists s' \in S$  tal que  $z < s' < b$ . Por tanto, por la hipótesis del teorema tenemos que  $s < s'$ , por lo que  $[s, s'] \subset S$  y  $z \in [s, s']$  por lo que  $z \in S$ .

$$\therefore (a, b) \subset S.$$

Ahora hay que valorar los posibles casos de si  $a, b \in S$ , para determinar de qué tipo de intervalo acotado se trata.

(ii) Supongamos que  $S$  está acotado inferiormente pero no superiormente. Entonces tenemos que si  $x \in S$  y  $a = \inf S$ ,  $a \leq s, \forall s \in S$ . Por tanto,

$$\forall s \in S, a \leq s \Rightarrow S \subset [a, \infty).$$

Si  $z \in (a, \infty)$ , tenemos que  $a < z$ . Si cogemos  $\varepsilon > 0$  tal que  $a + \varepsilon = z$ , podemos encontrar  $s \in S$  tal que

$$a \leq s < z.$$

Dado que  $S$  no está acotado superiormente, podemos encontrar  $s'$  tal que  $s < z < s'$ . Por tanto,  $s < s'$  y por hipótesis,  $[s, s'] \subset S$ , por lo que  $z \in [s, s']$  y  $z \in S$ .

$$\therefore (a, \infty) \subset S.$$

- (iii) El caso en el que  $S$  está acotado superiormente pero no inferiormente se demuestra igual.
- (iv) Si  $S$  no está acotado, tenemos que  $S \subset \mathbb{R}$ . Si  $z \in \mathbb{R}$ , como  $S$  no está acotado, podemos encontrar  $s, s' \in S$  tales que  $s < z < s'$ . Por tanto,  $[s, s'] \subset S$  y  $z \in [s, s']$ , por lo que  $z \in S$ . De esta manera,

$$(S \subset \mathbb{R}) \wedge (\mathbb{R} \subset S) \Rightarrow S = \mathbb{R} = (-\infty, \infty).$$

□

**Teorema 1.13** (Teorema de los intervalos encajados). Sean  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ , con  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$ . Sea  $I_n = [a_n, b_n]$ . Esto no puede ser un punto, porque  $a_n < b_n$ . Entonces  $I_{n+1} \subset I_n$ . Entonces,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset.$$

*a*

<sup>a</sup>Si el intervalo estuviera abierto, este teorema no tiene por qué cumplirse.

*Demostración.* Sean  $m, n \in \mathbb{N}$ , tenemos que  $a_m < b_n$ . En efecto, si  $m \leq n$ , entonces,  $a_m \leq a_n < b_n \leq b_m$ . Si  $m > n$ ,

$$a_m < b_m \leq b_n.$$

Así, demostramos que todos los  $a_i$  están a la izquierda y los  $b_i$  a la derecha. Entonces,  $b_n$  es una cota superior de  $a_m$ , y existe  $a = \sup \{a_m : m \in \mathbb{N}\} \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . Similarmente,  $a \leq \inf \{b_n : n \in \mathbb{N}\} = b$ . Entonces

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n.$$

Por lo que  $[a, b] \subset I_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . Consecuentemente,

$$\emptyset \neq [a, b] \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n.$$

□

**Corolario 1.8.** En las condiciones del teorema de los intervalos encajados, si  $\inf \{b_n - a_n\} = 0$  entonces  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$  se reduce a un punto.

*Demostración.* Si  $\inf \{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$ , entonces para  $\forall \varepsilon > 0$  existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que

$$0 \leq b - a \leq b_m - a_m < \varepsilon.$$

Como esto se cumple para todo  $\varepsilon > 0$ , tenemos que  $b - a = 0$  y, por tanto,  $b = a \in I_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . □

**Teorema 1.14.**  $\mathbb{R}$  no es numerable.

*Demostración.* Basta probar que el intervalo  $I = [0, 1]$  no es numerable <sup>6</sup>. Supongamos que es numerable, es decir,  $\exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$  biyectiva. Así,  $\forall x \in [0, 1], \exists ! n \in \mathbb{N}, \varphi(n) = x$ . Sea  $x_n = \varphi(n)$ . Entonces,  $I = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Sea  $n = 1$  y  $x_1 \in [0, 1]$ . Sea  $I_1 \subset [0, 1]$  tal que  $x_1 \notin I_1$ . Si  $x_2 \in I_1$ , sea  $I_2 \subset I_1$  tal que  $x_2 \notin I_2$ . Iterando, sean  $I_1, \dots, I_n$  intervalos cerrados y encajados tales que  $x_n \notin I_n$  <sup>7</sup>.

$$I \subset I_1 \subset \dots \subset I_n.$$

Por el teorema de los intervalos encajados, podemos asegurar que

$$\emptyset \neq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \subset I = [0, 1].$$

Sea  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ . Entonces,  $x \neq x_1$ , pues  $x \in I_1$ . Por la misma razón,  $x \neq x_2$ , y  $x \neq x_n$ . Por tanto,  $\forall n \in \mathbb{N}, x \neq x_n$ , por lo que  $x \notin I$ , lo que es una contradicción. Por tanto,  $I$  no es numerable y, consecuentemente,  $\mathbb{R}$  tampoco lo es.  $\square$

**Corolario 1.9.** Los números irracionales,  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$  no es un conjunto numerable.

*Demostración.* Asumimos que  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$  es numerable. Entonces, tenemos que

$$(\mathbb{R}/\mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}.$$

Sabemos que la unión de dos conjuntos numerables será numerable, pero  $\mathbb{R}$  no es numerable, esto es una contradicción. Por tanto, debe ser que  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$  no es numerable.  $\square$

### 1.3. Expresión decimal de los números reales

Expresión en base  $m \in \mathbb{N}$  con  $m \geq 2$  de los números reales.

Sea  $m = 2$  y sea  $x \in \mathbb{R}$ . Definimos

$$\lfloor x \rfloor = \max \{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$$

parte entero. Sea  $a = x - \lfloor x \rfloor$ , claramente tenemos que  $a \in [0, 1)$ . Tenemos que  $a$  es la parte decimal.

- (i) Tomamos como convenio que el intervalo que tomamos está cerrado por la izquierda. Vamos a dividir el intervalo  $[0, 1)$  en  $m$  partes iguales (en este caso  $m = 2$ ). El primer intervalo desde la izquierda lo denominamos 0 y el segundo 1 (en el caso  $m$  lo hacemos desde 0 hasta  $m - 1$ ). Si  $a$  está en el primer intervalo tomamos  $j_1 = 0$ , si estuviera en el segundo tomaríamos  $j_1 = 1$ . Definimos  $a_1 = j_1$ . Tenemos que

$$\frac{j_1}{2} \leq a < \frac{j_1 + 1}{2} \Rightarrow a \in \left[ \frac{j_1}{2}, \frac{j_1 + 1}{2} \right).$$

<sup>6</sup>Hay que tener en cuenta que existe una biyección entre  $\mathbb{R}$  y  $[0, 1]$ .

<sup>7</sup>Estamos asumiendo que estos intervalos cumplen con los requisitos del teorema de los intervalos encajados, es decir, son intervalos cerrados.

- (ii) Repetimos el caso anterior pero con este último intervalo, por lo que lo dividimos en  $m$  trozos. El punto medio será

$$\frac{j_1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2j_1 + 1}{4}.$$

El primer grupo lo denominamos 0 y el segundo 1 (en el caso  $m$  iría de 0 a  $m - 1$ ). Entonces,  $j_2 \in \{0, 1\}$ . Tenemos que  $a_2 = j_2$ . Así pues,

$$\frac{j_1}{2} + \frac{j_2}{4} \leq a < \frac{j_1}{2} + \frac{j_2 + 1}{4}.$$

- (iii) Paso  $n$ -ésimo. Repetimos el mismo procedimiento hasta elegir  $j_m \in \{0, 1\}$  (en el caso  $m = 2$ ) para obtener

$$\underbrace{\frac{j_1}{2} + \frac{j_2}{2^2} + \cdots + \frac{j_n}{2^n}}_{i_n} \leq a < \underbrace{\frac{j_1}{2} + \frac{j_2}{2^2} + \cdots + \frac{j_n + 1}{2^n}}_{s_n}.$$

Tenemos que  $a \in [i_n, s_n)$  y

$$0 \leq \inf \{s_n - i_n\} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} = 0.$$

Por tanto,  $a_n = j_n$ .

**Notación.** Sea  $m \geq 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

$$x = [x] + a = [x] + (a_1 a_2 \cdots a_n \cdots)_m.$$

**Ejemplo 1.6.** (i) Sea  $m = 10$  y  $x = \pi$ .

$$[x] = 3.$$

Tenemos que  $a = \pi - 3$ .  $a$  tendrá una expresión de la forma  $a = (\cdot 1415 \cdots)_{10}$ .<sup>8</sup>

- (ii) Sea  $m = 2$  y  $x = \frac{1}{2}$ . Tenemos que  $[x] = 0$ , por lo que  $a = x$ . Tenemos que en el primer paso, está en el intervalo de la derecha. Por tanto,  $a_1 = 1$ . En el segundo paso se encuentra en la izquierda, por tanto,  $a_2 = 0$ . Desde aquí, siempre va a estar en el lado izquierdo, por tanto  $a_n = 0, n \geq 2$ .

$$\therefore \frac{1}{2} = (\cdot 10 \cdots 0 \cdots)_2.$$

- (iii) Cómo escribir 13 en base 2:

$$13 = 8 + 4 + 1 = 2^3 + 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 2^0 \Rightarrow (13)_{10} = (1101)_2.$$

- (iv) En general, si  $a_j \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$ ,

$$(a_n \cdots a_1)_m = a_n m^{n-1} + \cdots + a_2 m^1 + a_1 m^0.$$

---

<sup>8</sup>Ambos puntos y comas en los decimales son aceptados.



**Observación.** Tenemos que  $x \in \mathbb{Q}$  si y solo si la parte decimal es periódica. La segunda implicación se puede demostrar utilizando una sucesión geométrica. Recíprocamente, tomamos el caso  $p < q$ . Si  $x = \frac{p}{q}$ , tenemos que los restos de dividir  $p$  entre  $q$  están entre 0 y  $q - 1$  y, por tanto, después de como mucho  $q$  pasos, algún resto se va a volver a repetir. En este punto, los dígitos del cociente empezarán a repetirse en ciclos y, consecuentemente, la representación decimal será periódica.

Expresión decimal en base  $m \geq 2$ .

$$\forall x \in [0, 1], \exists a_1, a_2, \dots, a_j, \dots \in \{0, 1, \dots, m-1\}$$

tales que

$$\frac{a_1}{m} + \frac{a_2}{m^2} + \dots + \frac{a_j}{m^j} \leq x < \frac{a_1}{m} + \dots + \frac{a_j + 1}{m^j}.$$

Recíprocamente, dadas  $a_1, \dots, a_j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$  por el teorema de los intervalos encajados,  $\exists! x \in [0, 1)$  tal que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \frac{a_1}{m} + \frac{a_2}{m^2} + \dots + \frac{a_j}{m^j} \leq x < \frac{a_1}{m} + \dots + \frac{a_j + 1}{m^j}.$$

**Observación.** Representamos  $\mathbb{R}$  como una recta infinita sin huecos.

## 1.4. Números Complejos

Sabemos que  $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ , es decir, si  $(x, y) \in \mathbb{C}$  tenemos que  $x, y \in \mathbb{R}$ . Definimos  $i = (0, 1)$  y si  $x \in \mathbb{C}$  podemos expresar  $x$  de la siguiente manera:

$$(x, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1).$$

**Definición 1.16.** En  $\mathbb{C}$  se definen la suma y el producto:

(a) Suma.

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

(b) Producto.

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

**Teorema 1.15.**  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  es un cuerpo abeliano.

**Observación.** Tenemos que, según nuestra definición de producto:

$$i^2 = -1.$$

Es decir, en este cuerpo abeliano no existe un orden total.<sup>9</sup>

<sup>9</sup>Para que el orden sea total, el cuadrado de cualquier número debe ser positivo.

**Observación.** Existe una inyección de  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\rightarrow x + i \cdot 0.\end{aligned}$$

Decimos que  $\mathbb{R}$  hereda de  $\mathbb{C}$  las propiedades de la suma, producto, etc. Además,  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

**Teorema 1.16** (Teorema Fundamental del Álgebra). Si  $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$ , con  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ .  $P(z)$  es un polinomio de grado  $n \in \mathbb{N}$  con  $a_j \in \mathbb{C}$ . Entonces, existe  $w \in \mathbb{C}$  tal que  $P(w) = 0$ . En particular, podemos encontrar  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{N}$  ( $1 \leq m \leq n$ ) y existen  $w_1, \dots, w_m \in \mathbb{C}$  tales que

$$P(z) = (z - w_1)^{\alpha_1} \cdots (z - w_m)^{\alpha_m}, \quad \alpha_1 + \cdots + \alpha_m = n.$$

<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Este teorema nos dice que  $\mathbb{C}$  es algebraicamente completo.

**Ejemplo 1.7.** Sea  $P(z) = z^4 + 2z^2 + 1$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Tenemos que:

$$P(z) = (z^2 + 1)^2 = (z + i)^2 (z - i)^2.$$

### 1.4.1. Representación polar

**Definición 1.17.** Norma de  $z = x + iy$  es:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

**Teorema 1.17.** Si  $z \in \mathbb{C}^*$ ,

$$\left| \frac{z}{|z|} \right| = \frac{|z|}{|z|} = 1.$$

**Definición 1.18.** Podemos representar  $z \in \mathbb{C}$  como:

$$z = |z|_\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Si  $x, y > 0$  tenemos que:

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}.$$

## Capítulo 2

# Sucesiones y límites

**Definición 2.1.** Se dice que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una **sucesión** de números reales si existe una función

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\rightarrow \varphi(n) = x_n.\end{aligned}$$

**Ejemplo 2.1.** (i)  $\varphi(n) = \frac{1}{n}$ .

(ii) Sucesión de Fibonacci.

$$\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 1, \varphi(n) = \varphi(n-1) + \varphi(n-2).$$

**Definición 2.2.** Se dice que una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  **converge** a  $x \in \mathbb{R}$ , y lo escribiremos de esta manera

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x,$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, |x - x_n| < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

**Proposición 2.1.** Si  $x_n = \frac{1}{n}$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ , tomamos  $x = 0$ , tenemos que

$$|x - x_n| = \left| 0 - \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}.$$

Entonces, queremos probar que

$$\frac{1}{n} < \varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

Como sabemos que  $\inf \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$ , tenemos que  $\forall \varepsilon > 0$

$$0 \leq \frac{1}{n_0} < 0 + \varepsilon,$$

para algún  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Si  $n \geq n_0$ , tenemos que

$$n \geq n_0 \iff \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Por tanto, hemos encontrado  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$ ,

$$|x - x_n| \leq \varepsilon.$$

□

**Ejemplo 2.2.** (i) Cogemos  $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ . Vamos a ver que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , mientras que  $\sup x_n \neq \inf x_n \neq 0$ .

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n}.$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tales que  $\forall n \geq n_0$ ,

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Por lo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

(ii)  $x_n = (-1)^n$ . Esta sucesión no converge, pues oscila. Tenemos que ver que  $\forall x, \exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0$  tal que  $|x - x_n| \geq \varepsilon$ . Supongamos que  $x > 1$  y tomamos  $\varepsilon = 2$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Sea  $n \geq n_0$  impar. Entonces

$$|x_n - x| = |-1 - x| = 2 + x - 1 = 1 + x > 2 = \varepsilon.$$

Si  $x < -1$ , tenemos que  $-x > 1$ . Tomamos  $\varepsilon = 2$ . Podemos encontrar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq n_0$  y  $n$  es par.

$$|x - 1| = 2 + (-1 - x) = 1 - x \geq 2 = \varepsilon.$$

Finalmente, si  $-1 \leq x \leq 1$ , tomamos  $\varepsilon = 1$ . Si  $x = 0$ , tenemos que

$$|1 - 0| = |0 - 1| = 1 \geq 1 = \varepsilon.$$

Si  $x > 0$ , tenemos que si  $n_0 \in \mathbb{N}$  podemos encontrar  $n \geq n_0$  impar, tal que

$$|x - (-1)| = x + 1 \geq 1 = \varepsilon.$$

Similarmente, si  $x < 0$  ( $-x > 0$ ) y  $n_0 \in \mathbb{N}$  podemos encontrar tal que  $n$  sea par:

$$|1 - x| = 1 - x \geq 1 = \varepsilon.$$

**Proposición 2.2.** Si una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge, entonces el límite es único.

*Demostración.* Supongamos que existen  $x, x' \in \mathbb{R}$  con  $x \neq x'$  tales que  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, n'_0 \in \mathbb{N}$  tales que si  $n \geq n_0$  y  $n \geq n'_0$ ,  $|x_n - x| < \varepsilon$  y  $|x_n - x'| < \varepsilon$ . Sea  $\varepsilon = \frac{|x - x'|}{3}$ . Entonces, podemos encontrar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - x| < \varepsilon$  si  $n \geq n_0$ . Lo mismo sucede con  $n'_0 \in \mathbb{N}$ . Tenemos que  $|x - x'| = 3\varepsilon$ . Sea  $n \geq \max\{n_0, n'_0\}$ ,

$$3\varepsilon = |x - x_n + x_n - x'| \leq |x - x_n| + |x_n - x'| < 2\varepsilon.$$

Esto es una contradicción, por lo que  $x = x'$ .

Otra demostración consiste en asumir que existen dos límites de la sucesión,  $x$  y  $x'$ . Tenemos que si  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_1$

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Similarmente, existe  $n_2 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_2$ , entonces

$$|x_n - x'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces, si cogemos  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  y  $n \geq n_0$ , tenemos que

$$|x - x'| = |x - x_n + x_n - x'| \leq |x - x_n| + |x_n - x'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por tanto,  $x' = x$ . □

**Definición 2.3.** Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ .

(i) Diremos que la sucesión diverge a  $\infty$ , es decir,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ , si

$$\forall c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, x_n \geq c.$$

(ii) Diremos que la sucesión diverge a  $-\infty$ , es decir,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$  si

$$\forall c < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, x_n \leq c.$$

**Observación.** Existen sucesiones que convergen y las que no convergen. Dentro de las que no convergen están las que divergen (a  $\infty$  y  $-\infty$ ) y las que no divergen  $((-1)^n)$ .

**Ejemplo 2.3.** Tenemos que  $x_n = n$  satisface que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ .

**Ejemplo 2.4.** Consideremos  $x_n = \frac{2n}{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Demostramos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ .

Queremos decir que  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |x_n - 2| < \varepsilon$ . Tenemos que

$$\left| \frac{2n}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2n - 2}{n+1} \right| = \frac{2}{n+1}.$$

$$\frac{2}{n_0 + 1} < \varepsilon \iff \frac{2}{\varepsilon} - 1 < n_0.$$

Por la propiedad arquimediana, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Si  $n \geq n_0$ , tenemos que

$$\frac{2}{n + 1} < \varepsilon.$$

**Proposición 2.3.** Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  y sea  $m \in \mathbb{N}$ . Sea  $y_n = x_{n+m}$ . Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \iff \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x.$$

*Demostración.* (i) Asumimos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Entonces tenemos que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |x - x_n| < \varepsilon.$$

Como  $m \in \mathbb{N}$ , tenemos que  $m + n_0 > n_0$ , por lo que, si  $n \geq n_0$ ,  $|x - x_{m+n}| < \varepsilon$ . Es decir,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |x - y_n| < \varepsilon.$$

(ii) Recíprocamente, si  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$ , tenemos que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |x - y_n| < \varepsilon.$$

Es decir,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 + m \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |x - x_{m+n}| < \varepsilon.$$

Si cogemos  $n'_0 = m + n_0$ , tenemos que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n'_0, \forall n \geq n'_0, |x - x_n| < \varepsilon.$$

□

**Teorema 2.1** (Regla del bocado). Sean  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  con

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n \leq z_n \leq x_n.$$

Supongamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Entonces,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x$ .

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ . Cogemos  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_1$

$$|y_n - x| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Similarmente, sea  $n_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_2$ ,

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Sea  $n_0 = \max \{n_1, n_2\}$ . Sea  $n \geq n_0$ ,

$$\begin{aligned} |z_n - x| &= |z_n - y_n + y_n - x_n + x_n - x| \\ &\leq |z_n - y_n| + |y_n - x_n| + |x_n - x| \\ &= z_n - y_n + x_n - y_n + |x_n - x| \\ &\leq x_n - y_n + x_n - y_n + |x_n - x| \\ &= 2(x_n - y_n) + |x_n - x|. \end{aligned}$$

**Observación.** Tenemos que

$$|x_n - y_n| = |x_n - x + x - y_n| \leq |x_n - x| + |y_n - x|.$$

Por tanto,

$$2(x_n - y_n) + |x_n - x| \leq 3|x_n - x| + 2|x - y_n| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{6} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Una demostración alternativa es decir que existen  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tales que si  $\varepsilon > 0$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_1, |x_n - x| < \varepsilon &\iff -\varepsilon < x_n - x < \varepsilon \iff -\varepsilon + x < x_n < \varepsilon + x \\ \forall n \geq n_2, |y_n - x| < \varepsilon &\iff -\varepsilon < y_n - x < \varepsilon \iff -\varepsilon + x < y_n < \varepsilon + x. \end{aligned}$$

Sea  $n > \max \{n_1, n_2\}$ , por hipótesis tenemos que

$$-\varepsilon + x < x_n < z_n < y_n < \varepsilon + x.$$

$$\therefore |z_n - x| < \varepsilon.$$

□

**Ejemplo 2.5.** (i)  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0.$$

Como  $n^k \geq n$ , tenemos que  $n^{k-1} \geq 1$ . Además, podemos deducir que

$$0 \leq \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n}.$$

La primera sucesión converge a 0 y la segunda también converge a 0 (propiedad arquimediana), por lo que  $\frac{1}{n^k} \rightarrow 0$ .

(ii) Si  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n^k}.$$

Tenemos que

$$0 \leq \left| \frac{\sin n}{n^k} \right| \leq \frac{1}{n^k}.$$

Como  $0 \rightarrow 0$  y  $\frac{1}{n^k} \rightarrow 0$ , tenemos que  $\frac{\sin n}{n^k} \rightarrow 0$ .

**Observación.** En la regla del bocado, basta que las estimaciones sean ciertas a partir de un cierto valor. Es decir, si  $y_n \leq z_n \leq x_n$ ,  $n \geq n_0$ , si  $y_n, x_n \rightarrow x$ , tenemos que  $z_n \rightarrow x$ .

**Ejemplo 2.6.** La sucesión  $\frac{n}{2^n} \rightarrow 0$ . Esto lo demostramos diciendo que  $\frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$ . En el caso  $n = 3$  esto no se cumple, porque se cumple en  $n \geq 4$ .

**Definición 2.4.** Se dice que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  está acotada si existe  $c > 0$ , tal que

$$|x_n| \leq c, \forall n \in \mathbb{N}.$$

<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Es decir,  $-c \leq x_n \leq c$ , o sea, está acotado superior e inferiormente.

**Teorema 2.2.** Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  converge, entonces está acotada.

*Demostración.* Sea  $\varepsilon = 1$ , entonces existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para  $n \geq n_0$

$$|x_n - x| < 1.$$

Además,  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Tenemos que si  $n \geq n_0$ :

$$\begin{aligned} |x_n| &= |x_n - x + x| \\ &\leq |x_n - x| + |x| \\ &\leq 1 + |x|. \end{aligned}$$

Sea  $c = \max\{1 + |x|, |x_n| : n \leq n_0\}$ . Entonces tenemos que

$$|x_n| \leq c, \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

**Observación.** El recíproco del teorema anterior no es cierto en general. Considera  $(-1)^n$  que está acotada por 1 pero no converge.

**Ejemplo 2.7.** Si  $x \in \mathbb{R}$ , existe  $a_0 \in \mathbb{Z}$  y existen  $a_n \in \{0, \dots, 9\}$  tales que

$$\underbrace{a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n}}_{x_n} \leq x \leq a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n + 1}{10^n}.$$

Vamos a demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . En efecto,

$$x_n \leq x < x_n + \frac{1}{10^n}.$$

Entonces, tenemos que

$$0 \leq |x - x_n| \leq \frac{1}{10^n}.$$

Tenemos que  $0 \rightarrow 0$  y  $\frac{1}{10^n} \rightarrow 0$ , por lo que  $|x - x_n| \rightarrow 0$ , por lo que  $x_n \rightarrow x$ .



**Teorema 2.3.** Sean  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ , tales que  $x_n \rightarrow x$  y  $y_n \rightarrow y$ .

(i)  $x_n + y_n \rightarrow x + y \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$

(ii)  $x_n y_n \rightarrow xy \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right).$

(iii) Si  $y_n \neq 0$ ,  $y \neq 0$ ,

$$\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{x}{y} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$$

(iv)  $|x - x_n| \rightarrow 0.$

*Demostración.* (i) Si  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Similarmente, existe  $n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Tomamos  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ .

$$|x_n + y_n - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(ii)

$$|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| = |x_n (y_n - y) + y (x_n - x)| \leq |x_n| |y_n - y| + |y| |x_n - x|.$$

Cogemos  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_1, |x_n - x| < |x|$ ,

$$|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| < 2|x|.$$

Así,

$$|x_n y_n - xy| \leq 2|x| |y_n - y| + |y| |x_n - x|.$$

Cogemos  $n_2, n_3 \in \mathbb{N}$  tales que  $\forall n \geq n_2$  y  $\forall n \geq n_3$ ,

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2|y|} \quad \text{y} \quad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{4|x|}.$$

Entonces, si cogemos  $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ , tenemos que  $\forall n \geq n_0$ ,

$$|x_n y_n - xy| \leq 2|x| |y_n - y| + |y| |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(iii)

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y} \right| &= \left| \frac{x_n y - x y_n}{y_n y} \right| = \left| \frac{y(x_n - x) - x(y_n - y)}{y_n y} \right| \\ &\leq \frac{1}{|y_n|} |x_n - x| + \frac{1}{|y_n|} \left| \frac{x}{y} \right| |y_n - y|. \end{aligned}$$

Si cogemos  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_1, |y_n - y| < \frac{|y|}{2}$ . Entonces tenemos que

$$|y_n| = |y_n - y + y| \geq |y| - |y_n - y| > \frac{|y|}{2}.$$

Entonces,

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y} \right| \leq \frac{1}{|y_n|} |x_n - x| + \frac{1}{|y_n|} \left| \frac{x}{y} \right| |y_n - y| < \frac{2}{|y|} |x_n - x| + \left| \frac{2x}{y^2} \right| |y_n - y|.$$

Cogemos  $n_2, n_3 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_2$  y  $\forall n \geq n_3$  tenemos que

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon |y|}{4} \quad \text{y} \quad |y_n - y| < \varepsilon \left| \frac{y^2}{4x} \right|.$$

Si cogemos  $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ , tenemos que  $\forall n \geq n_0$ ,

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y} \right| \leq \frac{1}{|y_n|} |x_n - x| + \frac{1}{|y_n|} \left| \frac{x}{y} \right| |y_n - y| < \frac{2}{|y|} |x_n - x| + \left| \frac{2x}{y^2} \right| |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(iv) Decir que  $|x - x_n| \rightarrow 0$  es lo mismo que decir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . En efecto, si  $|x - x_n| \rightarrow 0$ , tenemos que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |x_n - x| < \varepsilon.$$

Esta es la definición de  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

□

**Corolario 2.1.** (i) Si cada una de estas sucesiones converge <sup>a</sup> :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n + \cdots + z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} z_n.$$

(ii) Si  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^k.$$

<sup>a</sup>Si la suma converge, las sucesiones individuales no tienen por qué converger. Considera  $x_n = n$  y  $y_n = -n$ .

**Teorema 2.4.** Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ , con  $x_n \geq 0$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , entonces,  $x \geq 0$ .

*Demostración.* Supongamos que  $x < 0$ . Sea  $\varepsilon = \frac{|x|}{2} > 0$ . Sea  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$ ,  $|x_n - x| < \varepsilon$ . Tenemos que

$$|x_n - x| = x_n - x < \varepsilon = \frac{|x|}{2} = \frac{-x}{2} \Rightarrow x_n < \frac{x}{2} \iff x_n < \frac{x}{2} < 0 \iff x_n < 0, \forall n \geq n_0.$$

Esto es una contradicción.

□

**Corolario 2.2.** Si  $x_n \leq y_n$ ,  $x_n \rightarrow x$  y  $y_n \rightarrow y$ . Entonces,  $x \leq y$ .

*Demostración.* Si  $y_n - x_n \geq 0$ , entonces  $y_n - x_n \rightarrow y - x$ . Por el teorema anterior tenemos que

$$y - x \geq 0 \iff y \geq x.$$

□

**Corolario 2.3.** Si  $x_n \rightarrow x$ . Entonces,  $|x_n| \rightarrow |x|$ .<sup>a</sup>

<sup>a</sup>El recíproco no se cumple, comprueba  $(-1)^n$ .

*Demostración.* Tenemos que

$$0 \leq ||x_n| - |x|| \leq \underbrace{|x_n - x|}_{\rightarrow 0}.$$

Entonces,  $||x_n| - |x|| \rightarrow 0$ .

□

**Teorema 2.5.** Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{+a}$ , y supongamos que  $x_n \rightarrow x$  y  $x > 0$ . Sea  $m \in \mathbb{N}$ , entonces

$$x_n^{\frac{1}{m}} \rightarrow x^{\frac{1}{m}} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{\frac{1}{m}} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)^{\frac{1}{m}}.$$

<sup>b</sup>

<sup>a</sup> $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ .

<sup>b</sup>Si aplicamos esta propiedad junto a la del exponente, lo podemos demostrar para  $q \in \mathbb{Q}$ .

*Demostración.* Sea  $a = x^{\frac{1}{m}} \iff a^m = x$  y  $a_n = x_n^{\frac{1}{m}} \iff a_n^m = x_n$ . Sabemos que

$$\begin{aligned} a^m - a_n^m &= (a - a_n)(a^{m-1} + \dots + a_n^{m-1}). \\ \Rightarrow \frac{a^m - a_n^m}{a^{m-1} + \dots + a_n^{m-1}} &= a - a_n. \end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$\frac{|a^m - a_n^m|}{a^{m-1}} \geq \frac{|a^m - a_n^m|}{|a^{m-1} + \dots + a_n^{m-1}|} = |a - a_n|.$$

Por tanto,

$$0 \leq \left| x^{\frac{1}{m}} - x_n^{\frac{1}{m}} \right| \leq \underbrace{\frac{1}{a^{m-1}} |x - x_n|}_{\rightarrow 0}.$$

Entonces,  $\left| x^{\frac{1}{m}} - x_n^{\frac{1}{m}} \right| \rightarrow 0$ .

□

## 2.1. Criterios de Convergencia

**Proposición 2.4.** Si  $0 < r < 1$ , entonces  $r^n \rightarrow 0$ .

*Demostración.* Sea  $R = \frac{1}{r} > 1$ . Queremos ver que  $R^n \rightarrow \infty$ . Como  $R > 0$ , por la desigualdad de Bernoulli tenemos que

$$R^n = (1+x)^n \geq 1+nx.$$

Por tanto,

$$0 < r^n = \frac{1}{R^n} = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{1+nx} < \frac{1}{nx}.$$

Como  $\frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{x}$  y  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ , tenemos que  $\frac{1}{nx} \rightarrow 0$ . Entonces,  $r^n \rightarrow 0$ . □

**Observación.** En la demostración anterior hemos dicho que  $r^n \rightarrow 0$  es equivalente a decir que  $R^n \rightarrow \infty$ . Esto es porque la definición de la segunda será:

$$\forall c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, R^n > c.$$

Si  $R^n > c$  tenemos que

$$\frac{1}{r^n} > c \iff r^n < c.$$

Por tanto, se trata de la misma definición, solo que cambiamos  $\varepsilon$  por  $c$ .

**Ejemplo 2.8. (i)** Si  $c > 0$ , tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} c^{\frac{1}{n}} = 1$ . Si  $c = 1$  el resultado es trivial. Si  $c > 1$ , tenemos que,  $c^{\frac{1}{n}} > 1$  (problema 18 de la hoja 2). Entonces, podemos encontrar  $x_n \in \mathbb{R}$  tal que

$$c^{\frac{1}{n}} = 1 + x_n \iff x_n = c^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Entonces, utilizando la desigualdad de Bernoulli:

$$c = (1+x_n)^n \geq 1+nx_n \iff x_n \leq \frac{c-1}{n}.$$

Por tanto, tenemos que

$$0 < \left| c^{\frac{1}{n}} - 1 \right| = x_n \leq \frac{c-1}{n}.$$

Como  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  y  $c-1 \rightarrow c-1$ , por el teorema 2.3 tenemos que  $\frac{c-1}{n} \rightarrow 0$ . Entonces,

$$\left| c^{\frac{1}{n}} - 1 \right| \rightarrow 0 \iff c^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1.$$

Si  $0 < c < 1$ , tenemos que  $c^{\frac{1}{n}} < 1$ . Entonces existe  $x_n \in \mathbb{R}$  tal que

$$c^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+x_n}.$$

Utilizando la identidad de Bernoulli:

$$c = \frac{1}{(1+x_n)^n} \leq \frac{1}{1+nx_n} < \frac{1}{nx_n}.$$

Entonces tenemos que,

$$\left| c^{\frac{1}{n}} - 1 \right| = \frac{x_n}{1 + x_n} < x_n < \left( \frac{1}{c} \right) \frac{1}{n}.$$

Utilizando el teorema 2.3, tenemos que  $\frac{1}{nc} \rightarrow 0$  y, consecuentemente,  $c^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ .

- (ii) Similarmente, se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ . Sabemos que  $n^{\frac{1}{n}} > 1$  para  $n > 1$ . Entonces podemos escribir

$$n^{\frac{1}{n}} = 1 + x_n.$$

Entonces, aplicando el teorema del binomio tenemos que

$$n = (1 + x_n)^n = 1 + nx_n + \frac{1}{2}n(n-1)x_n^2 + \cdots \geq 1 + \frac{1}{2}n(n-1)x_n^2.$$

Por tanto, tenemos que  $x_n^2 \leq \frac{2}{n}$ . Entonces podemos decir que

$$0 < \left| n^{\frac{1}{n}} - 1 \right| = x_n \leq \left( \frac{2}{n} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por el teorema 2.5 tenemos que  $\left( \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0^{\frac{1}{2}} = 0$ . Entonces,  $\left( \frac{2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$  y  $n^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ .

**Teorema 2.6** (Regla del cociente). Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$  y existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ . Entonces,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

*Demostración.* Sea  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ . Como se trata de una sucesión de términos positivos, tenemos que  $l \in [0, 1)$ <sup>1</sup>. Sea  $\varepsilon > 0$ , entonces existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} - l \right| < \varepsilon \iff -\varepsilon + l < \frac{x_{n+1}}{x_n} < \varepsilon + l.$$

Por lo tanto,

$$x_{n+1} < (l + \varepsilon) x_n.$$

Consecuentemente,

$$x_{n+1} < (l + \varepsilon) x_n < (l + \varepsilon)^2 x_{n-1} < \cdots < (l + \varepsilon)^{n+1-n_0} x_{n_0}.$$

Sea  $\varepsilon > 0$  tal que  $l + \varepsilon < 1$ , por ejemplo, cogemos  $\varepsilon = \frac{1-l}{2}$ . Tomamos  $r = l + \varepsilon < 1$  y obtenemos que si  $n \geq n_0$

$$x_{n+1} < r^{n+1} \frac{x_{n_0}}{r^{n_0}}.$$

Por la proposición 2.4 tenemos que  $r^{n+1} \rightarrow 0$ , por lo que  $x_{n+1} \rightarrow 0$  (aplicando la regla del bocado). □

---

<sup>1</sup>Los límites no conservan estrictamente las desigualdades. Considera la sucesión  $x_n = \frac{1}{n}$ . Tenemos que cada elemento es mayor que 0 pero el límite es 0.

**Observación.** Si  $l = 1$  el resultado puede ser falso, considera el caso  $x_n = n$ . Tenemos que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1,$$

pero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty.$$

**Ejemplo 2.9.** Consideramos la sucesión  $x_n = \frac{n}{2^n}$ . Aplicamos la regla del cociente.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} < 1.$$

Entonces,  $x_n \rightarrow 0$ .

**Definición 2.5** (Monotonía). Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ . Se dice que

- (i)  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es **creciente** si  $x_n \leq x_{n+1}$  <sup>a</sup>.
- (ii)  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es **decreciente** si  $x_n \geq x_{n+1}$ .
- (iii)  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es **monótona** si es creciente o decreciente.

<sup>a</sup>Es estrictamente creciente si  $x_n < x_{n+1}$ . También funciona así si es estrictamente decreciente.

**Teorema 2.7.** Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ .

- (i) Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es creciente y está acotada superiormente, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

- (ii) Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es decreciente y está acotada inferiormente, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Lo importante de este teorema es que si una sucesión está acotada y es monótona, entonces existe el límite.

*Demostración.* (i) Sea  $s = \sup \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} < \infty$ . Sea  $\varepsilon > 0$ , queremos ver que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $s - x_n < \varepsilon, \forall n \geq n_0$ . Como  $s = \sup \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$s - \varepsilon < x_{n_0}.$$

Además, como se trata de una sucesión creciente, tenemos que si  $n \geq n_0$ ,

$$x_n \geq x_{n_0} > s - \varepsilon \iff s - x_n < \varepsilon.$$

- (ii) Se puede demostrar de dos formas: una es similar a la anterior, mientras que la otra se parece a la demostración de la existencia del ínfimo en casos de la existencia de una cota inferior. Comenzamos con la primera. Sea  $i = \inf \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Como  $i$  es el ínfimo, sabemos que si  $\varepsilon > 0$ , existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$x_{n_0} < i + \varepsilon.$$

Además, como la sucesión es decreciente tenemos que si  $n \geq 0$

$$x_n < x_{n_0} < i + \varepsilon.$$

Entonces, si  $n \geq n_0$  tenemos que

$$x_n - i < \varepsilon.$$

Por tanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

La otra demostración comienza diciendo que si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión decreciente acotada inferiormente, entonces la sucesión  $\{-x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión creciente acotada superiormente. Por un teorema que vimos en el capítulo anterior, sabemos que  $\sup \{-x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = -\inf \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Aplicando el apartado anterior tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = \inf \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

□

**Ejemplo 2.10.** (i)

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}.$$

Esta sucesión decrece. Además,  $1 + \frac{1}{n} \geq 1$ , es decir, está acotada inferiormente. Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \inf \left\{1 + \frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}} = 1 + \inf \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}} = 1.$$

- (ii)  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{2^n}$ ,  $n \geq 2$ . La sucesión va a ser de la forma

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \dots$$

Tenemos que el término general será  $x_n = \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \rightarrow 1$ , pues  $\frac{1}{2^{n+1}} \rightarrow 0$ .

**Observación.** Si  $r > 0$  y  $m > n$ ,

$$\sum_{j=n}^m r^j = \frac{r^n - r^{m+1}}{1 - r}.$$

- (iii)  $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ . Esta serie diverge. Sabemos que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es creciente. Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  existe, entonces estaría acotada superiormente. Nos vamos a fijar en los términos  $x_{2^n}$ . Tenemos que

$$x_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right).$$

Tenemos que en el último paréntesis hay  $2^n - (2^{n-1} + 1) + 1 = 2^{n-1}$  elementos. Entonces tenemos que

$$x_{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2} \rightarrow \infty.$$

Entonces, esta sucesión diverge y, por tanto,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no puede estar acotada superiormente. Entonces, la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es divergente.

- (iv) Número de Euler.

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Vamos a demostrar que es creciente y que está acotada superiormente. En efecto,

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{1}{n^i}.$$

**Observación.**

$$\begin{aligned} \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} &= \frac{n(n-1) \cdots 1}{i!(n-i)!n^i} = \frac{n(n-1) \cdots (n-i+1)}{i!n^i} = \frac{1}{i!} \cdot 1 \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-i+1}{n} \\ &= \frac{1}{i!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{i-1}{n}\right). \end{aligned}$$

A partir de la observación 2.8, podemos ver que

$$\binom{n}{i} \frac{1}{n^i} = \frac{1}{i!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) < \frac{1}{i!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{i-1}{n+1}\right).$$

Por lo tanto,

$$e_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \frac{1}{(n+1)^i} = \sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} \frac{1}{(n+1)^i} + \frac{1}{(n+1)^{n+1}} > \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} = e_n.$$

Por tanto,  $e_n < e_{n+1}$ , por lo que la sucesión  $e_n$  es creciente. Ahora tenemos que ver que está acotada, en concreto, que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $e_n \leq 3$ . Usamos que  $2^{j-1} \leq j!$ . Partiendo de la observación 2.8, tenemos que

$$\binom{n}{i} \frac{1}{n^i} < \frac{1}{i!} \leq \frac{1}{2^{i-1}}.$$



De esta manera,

$$e_n \leq 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{i-1}} = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} \leq 1 + 2 = 3.$$

Por tanto, la sucesión va a converger a  $e$ , es decir,

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

**Ejemplo 2.11.** Si  $r > 0$  y  $x_n = r^{\frac{1}{n}}$  entonces  $x_n \rightarrow 1$ . Consideramos varios casos. Si  $r = 1$ , es trivial. Si  $r > 1$ , entonces vamos a ver si es creciente o decreciente. Tenemos que

$$r > 1 \iff r^{n+1} > r^n \iff r^{\frac{1}{n}} > r^{\frac{1}{n+1}}.$$

Es decir, la sucesión decrece y, por tanto, decrece. Como  $r > 1$ , entonces,  $x_n = r^{\frac{1}{n}} > 1$ . Entonces la sucesión decreciente  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada inferiormente por 1. Consecuentemente, la sucesión converge. Vamos a demostrar que el límite es 1. Sea  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{n}}$ . Como,  $x_n > 1$ , tenemos que  $x \geq 1$ . Supongamos que  $x > 1$ . Tenemos que

$$x_n = r^{\frac{1}{n}} \geq x \Rightarrow r \geq x^n.$$

Si  $n \rightarrow \infty$  tenemos que  $x^n$  diverge, por lo que  $r = \infty$ . Esto es una contradicción, por lo que debe ser que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ . Ahora, supongamos que  $0 < r < 1$ .

## 2.2. Subsucesiones y Teorema de Bolzano-Weiestrass

**Definición 2.6.** Dada una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  y una sucesión creciente estrictamente de números naturales:  $n_1 < n_2 < \dots < n_j < n_{j+1} < \dots$ . Se dice que  $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  es una **subsucesión** (o **parcial**) de  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Ejemplo 2.12.** Si  $x_n = (-1)^n$ . Una subsucesión sería  $x_{2n} = 1$  y otra sería  $x_{2n-1} = -1$ .

**Teorema 2.8.** Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  sucesión convergente con  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , y  $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  es una subsucesión, entonces  $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = x$ .

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$  entonces  $|x_n - x| < \varepsilon$ . Si  $n_j \geq n_0$  entonces  $|x_{n_j} - x| < \varepsilon$ . □

**Observación.** El teorema anterior sirve para ver que algo no converge.

**Ejemplo 2.13.**

$$x_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ n, & n \text{ impar} \end{cases}.$$

Tenemos que  $x_{2n-1} = 2n - 1$  no converge, por lo que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no converge.

**Teorema 2.9.** Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ . Son equivalentes:

- (i)  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no converge a  $x$ .
- (ii)  $\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, |x_n - x| \geq \varepsilon$ .
- (iii)  $\exists \varepsilon > 0$  y  $\exists \{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $|x_{n_j} - x| \geq \varepsilon, \forall j \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* (i) Tenemos que (i)  $\iff$  (ii) son equivalentes por definición.

- (ii) Vamos a ver que (iii)  $\Rightarrow$  (i). Como  $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  no converge a  $x$ , tenemos que la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no converge a  $x$ .
- (iii) Vamos a ver que (ii)  $\Rightarrow$  (iii). Dado  $\varepsilon > 0$  de (ii), sea  $n_1 \geq n_0$  tal que  $|x_{n_1} - x| \geq \varepsilon$ . Tomamos ahora  $n_2 \geq n_1 + 1 > n_1$  tal que  $|x_{n_2} - x| \geq \varepsilon$ . Iterando, obtenemos una colección de índices estrictamente crecientes:  $n_1 < n_2 < \dots < n_j < \dots$ , de manera que,

$$|x_{n_j} - x| \geq \varepsilon.$$

□

**Ejemplo 2.14.** Sea  $x_n = \sin n$ . Vamos a demostrar que no existe el límite. Supongamos que  $x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} [2k\pi, (2k+1)\pi]$ . Entonces  $\sin x \geq 0$ . Como la longitud de los intervalos es mayor que uno, sabemos que hay un natural. Por tanto podemos decir que

$$n_k \in [2k\pi, (2k+1)\pi], \quad n_k \in \mathbb{N}.$$

Como los intervalos son disjuntos, tenemos que  $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ . Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n = l$ , existe  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sin n_k = l \geq 0$ . Ahora consideramos el caso  $x < 0$ , para ello, tomamos  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ . Sea  $I_\varepsilon = [\pi + \varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ . Si  $x \in I_\varepsilon$ , tenemos que

$$|\sin x| \geq |\sin(\pi + \varepsilon)| > 0.$$

Entonces, la longitud del intervalo es estrictamente mayor que 1. Por tanto,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists m_k \in [(2k+1)\pi - \varepsilon, (2k+2)\pi - \varepsilon]$$

tal que  $\sin m_k \leq \sin[(2k+1)\pi + \varepsilon]$ . Si  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$ , existe el límite de esta subsucesión, es decir,  $\exists l = \lim_{k \rightarrow \infty} \sin m_k \leq \sin(\varepsilon + \pi) < 0$ . Por tanto, tenemos que  $l \geq 0$  y  $l < 0$ . Esto es una contradicción.

**Teorema 2.10** (Teorema de la sucesión monótona). Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ . Entonces  $\exists \{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que es monótona.

*Demostración.* Diremos que  $x_m$  es un **pico** de la sucesión si  $x_m \geq x_n, \forall n \geq m$ . Supongamos que en  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  hay infinitos picos. Entonces podemos crear una subsucesión decreciente (monótona),  $\{x_{m_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  con los picos:

$$x_{m_1} > x_{m_2} > \cdots > x_{m_j} > \cdots .$$

Si hay un número finito de picos, podemos ir hasta el último pico tal que a partir de este no hay más picos. Supongamos que no hay picos. Es decir, sea  $x_{n_1} \in \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\forall n \geq n_1, x_n$  no es un pico. Por tanto,  $\exists n_2 > n_1$  tal que  $x_{n_2} > x_{n_1}$ . Iterando,

$$\exists n_1 < n_2 < \cdots < n_j < \cdots ,$$

tales que

$$x_{n_1} < x_{n_2} < \cdots < x_{n_j} < \cdots .$$

Por tanto, la subsucesión  $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  es creciente y, por tanto, monótona.  $\square$

**Teorema 2.11** (Teorema de Bolzano-Weiestrass). Dada  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  acotada entonces  $\exists \{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  subsucesión convergente.

*Demostración.* Por el teorema de la sucesión monótona, sabemos que existe  $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  subsucesión es monótona. Además, como la sucesión está acotada, la subsucesión también lo está y, por tanto,  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_j}$ .  $\square$

**Teorema 2.12.** Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  sucesión acotada y  $x \in \mathbb{R}$ . Si para toda  $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  subsucesión que converge, lo hace a  $x$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

*Demostración.* Sea  $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$  y supongamos que para esta sucesión no existe el límite (por lo que no es igual a  $x$ ). Así,  $\exists \varepsilon > 0$  tal que  $\exists \{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  con  $|x_{n_j} - x| \geq \varepsilon, \forall j \in \mathbb{N}$ . Por hipótesis esta subsucesión está acotada. Aplicando el teorema de Bolzano-Weiestrass,  $\exists \{y_l\}_{l \in \mathbb{N}} \subset \{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  subsucesión convergente. Entonces tenemos que esta subsucesión converge a  $x$ . Sin embargo, tenemos que

$$|y_l - x| \geq \varepsilon, l \geq l_0.$$

Esto implica que  $y_l$  no converge a  $x$ . Esto es una contradicción, por lo que debe ser que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .  $\square$

**Ejemplo 2.15.** Considera

$$x_n = \begin{cases} n, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases} .$$

Satisface que toda subsucesión convergente tiene como límite 0 pero la sucesión no converge (observamos que no es una sucesión acotada).

**Ejemplo 2.16.** Estudiamos la convergencia de  $x_n = n^{\frac{1}{n}}$ . Vamos a ver que es decreciente (monótona). Tenemos que

$$x_{n+1} = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} < x_n = n^{\frac{1}{n}} \iff (n+1)^n < n^{n+1} = n \cdot n^n \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n.$$

Tenemos que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e \leq 3.$$

Entonces tenemos que si  $n \geq 4$  (recordamos que no nos importan los primeros términos de la sucesión),

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n.$$

Por tanto, si  $n \geq 4$  la sucesión es decreciente. Además, tenemos que está acotada inferiormente por 1. Por tanto, la sucesión converge. Tenemos que

$$n^{\frac{1}{n}} \rightarrow l \geq 1.$$

Como esta sucesión converge, sabemos que todas las subsucesiones han de converger al mismo límite, por lo que basta con calcular la convergencia de una subsucesión. Vamos a ver que

$$x_{2n} = (2n)^{\frac{1}{2n}} \rightarrow 1.$$

Tenemos que

$$x_{2n} = (2n)^{\frac{1}{2n}} = 2^{\frac{1}{2n}} \cdot n^{\frac{1}{2n}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sabemos que  $\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$  y  $\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \sqrt{l}$ . Entonces tenemos que,

$$l = \sqrt{l} \iff l^2 = l \iff l \in \{0, 1\}.$$

Podemos descartar 0 porque  $l \geq 1$ , por tanto,  $l = 1$ .

## 2.3. Sucesiones Cauchy

**Definición 2.7** (Sucesión de Cauchy). Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ . Se dice que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de **Cauchy** si  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - x_m| < \varepsilon$ , con  $n, m \geq n_0$ .

**Proposición 2.5.** Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ .

- (i) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ , entonces  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy.
- (ii) Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy entonces es una sucesión acotada.

*Demostración.* (i) Sabemos que  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Así, cogemos  $m, n \geq n_0$ .

Entonces,

$$\begin{aligned} |x_n - l| &< \frac{\varepsilon}{2}. \\ |x_m - l| &< \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |x_n - l + x_m - l| \\ &\leq |x_n - l| + |l - x_m| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(ii) Cogemos  $\varepsilon = 1$ , entonces existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $m, n \geq n_0$ ,  $|x_n - x_m| < 1$ . Cogemos  $m = n_0$  y  $n \geq n_0$ . Tenemos que

$$|x_n - x_{n_0}| < 1.$$

Entonces,

$$|x_n| = |x_n - x_{n_0} + x_{n_0}| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < 1 + |x_{n_0}|.$$

Si  $n \geq n_0$ , la sucesión está acotada por  $1 + |x_{n_0}|$ , nos queda por acotar los  $n < n_0$ .

$$|x_n| \leq \max \{ \max \{ |x_k| : 1 \leq k \leq n_0 \}, 1 + |x_{n_0}| \}.$$

□

**Observación.** Vamos a concluir que ser de Cauchy es equivalente a converger. Esto se cumple en  $\mathbb{R}$  pero no en  $\mathbb{Q}$ ! Entonces, podemos pensar que este hecho está relacionado con el axioma de completitud.

**Teorema 2.13** (Criterio de convergencia de Cauchy). Una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  converge si y solo si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy.

*Demostración.* Basta probar que si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  es de Cauchy, entonces converge. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, como es una sucesión de Cauchy está acotada, por lo que existe  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergente a  $l$ . Sabemos que  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n, m \geq n_1$ ,

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Además,  $\exists n_2 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n_k \geq n_2$ ,

$$|x_{n_2} - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea  $n_0 = \max \{n_1, n_2\}$ , si  $n \geq n_0$ , queremos ver que

$$|x_n - l| < \varepsilon.$$

Sea  $n_k \geq n_0$  y  $n \geq n_0$ ,

$$|x_n - l| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - l| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

**Ejemplo 2.17.**  $x_1 = 1, x_2 = 2,$

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}, \quad n \geq 3.$$

Tenemos que la distancia entre dos puntos sucesivos será:

$$|x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} + \cdots + x_{n+1} + x_n| \\ &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &= \frac{1}{2^{m-2}} + \frac{1}{2^{m-3}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{m-1}}}{1 - \frac{1}{2}} \rightarrow 0, \text{ si } n, m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Así,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy. En efecto,  $x_n \rightarrow \frac{5}{3}$ .

## 2.4. Otros teoremas

**Observación.** Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ,

- Recordamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  si  $\forall c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$  tal que  $x_n > c$ .
- Si  $x_n \leq y_n$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ .
- Si  $x_n \leq y_n$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ .

**Corolario 2.4.** Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = L \in (0, \infty)$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ , entonces,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ .

*Demostración.* Dado  $\varepsilon = 1$ , tenemos que existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_1$

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - L \right| < 1.$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $x_n, y_n > 0$ . Entonces, tenemos que

$$-1 < \frac{x_n}{y_n} - L < 1 \iff -y_n < x_n - y_n L < y_n.$$

Así,  $x_n < y_n(1 + L)$ . Tenemos que  $x_n \rightarrow \infty$ , por lo que  $y_n(1 + L) \rightarrow \infty$  por lo que  $y_n \rightarrow \infty$ . □

**Ejemplo 2.18.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5n}{n^2 + 1} = 3.$$

Como  $n^2 + 1 \rightarrow \infty$  tenemos que  $3n^2 + 5n \rightarrow \infty$  y viceversa.

**Teorema 2.14** (Criterio de Stolz). Sean  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  tales que

$$b_1 < b_2 < \dots < b_n < \dots,$$

y supongamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ . Si existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l,$$

entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ .

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ , entonces existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$ ,

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} - l < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\iff \left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1} - b_n) < a_{n+1} - a_n < \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1} - b_n), \quad \forall n \geq n_0.$$

Así, para  $n_0$ ,

$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n_0+1} - b_{n_0}) < a_{n_0+1} - a_{n_0} < \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n_0+1} - b_{n_0}).$$

$\vdots$

$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n_0+m} - b_{n_0+m-1}) < a_{n_0+m} - a_{n_0+m-1} < \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n_0+m} - b_{n_0+m-1}), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Si sumamos todas las desigualdades y usando la propiedad telescópica,

$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n_0+m} - b_{n_0}) < a_{n_0+m} - a_{n_0} < \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n_0+m} - b_{n_0}).$$

Dividimos todo por  $b_{n_0+m} \neq 0$  ( $b_{n_0+m} > 0$ ),

$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(1 - \frac{b_{n_0}}{b_{n_0+m}}\right) < \frac{a_{n_0+m}}{b_{n_0+m}} - \frac{a_{n_0}}{b_{n_0+m}} < \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(1 - \frac{b_{n_0}}{b_{n_0+m}}\right).$$

Así, tenemos que

$$l - \frac{\varepsilon}{2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \inf \left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(1 - \frac{b_{n_0}}{b_{n_0+m}}\right) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \inf \frac{a_{n_0+m}}{b_{n_0+m}} - 0.$$

Además, tenemos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup \frac{a_{n_0+m}}{b_{n_0+m}} - 0 \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sup \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(1 - \frac{b_{n_0}}{b_{n_0+m}}\right) = l + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall m \in \mathbb{N}$ ,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_{n_0+m}}{b_{n_0+m}} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sup \frac{a_{n_0+m}}{b_{n_0+m}} \leq l + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo tanto,  $\forall \varepsilon > 0$ :

$$l - \frac{\varepsilon}{2} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \inf \frac{a_m}{b_m} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sup \frac{a_m}{b_m} \leq l + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo que

$$l \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \inf \frac{a_m}{b_m} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sup \frac{a_m}{b_m} \leq l.$$

Por tanto tenemos que  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{b_m} = l$ . □

**Observación.** (i) En el criterio de Stolz, si  $l = \pm\infty$ , entonces  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{b_m} = \pm\infty$ .

**Segundo criterio de Stolz.** Si tenemos  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  tales que  $a_n \rightarrow 0$  y  $b_n \rightarrow 0$  y  $b_n < b_{n+1}$ <sup>2</sup>, entonces, si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ .

**Observación.** Propiedades de los límites superiores e inferiores:

(i) Si  $x_n \leq y_n$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf y_n$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup y_n$ .

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n = l \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ .

(iii) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ , tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup (x_n + y_n) = l + \lim_{n \rightarrow \infty} \sup y_n.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf (x_n + y_n) = l + \lim_{n \rightarrow \infty} \inf y_n.$$

**Ejemplo 2.19.** Sea  $x_n = (-1)^n$  y  $y_n = (-1)^n + 1$ , tenemos que  $x_n \leq y_n$ . Además,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n = -1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf y_n = 0.$$

Similarmente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n = 1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup y_n = 2.$$

**Ejemplo 2.20.** Sabemos que si  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ , entonces  $a_n \rightarrow \infty$ . Veamos a qué tiende<sup>3</sup>

$$n \geq 2, \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\log n}.$$

<sup>2</sup>Realmente solo importa que sea monótona, no importa que sea creciente o decreciente.

<sup>3</sup>A partir de ahora  $\log = \ln$ , no es en base 10.



Por el criterio de Stolz, basta estudiar el límite,

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{\log(n+1) - \log n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{\frac{n+1}{n} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

Tenemos que  $\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \log e = 1$  y  $\frac{n+1}{n} \rightarrow 1$ , por lo que

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{\log(n+1) - \log(n)} \rightarrow 1.$$

Es decir, la serie armónica, en el infinito, se aproxima al logaritmo neperiano.

## 2.5. Series numéricas

**Definición 2.8** (Suma parcial). Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ . Sea llama **suma parcial n-ésima**

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n.$$

**Definición 2.9.** Dada la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , diremos que la **serie**  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  converge a  $S$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

**Ejemplo 2.21.** (i)  $a_n = 2^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Tenemos que

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}}.$$

De esta manera,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1.$$

(ii)  $a_n = (-1)^n$ . Tenemos que  $S_1 = -1$ ,  $S_2 = 0$ , entonces, no existe el límite de  $S_n$ . Por tanto, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$  no converge.

(iii)  $a_n = \frac{1}{n}$ . Tenemos que

$$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ , por lo que la serie armónica es divergente.

(iv)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$ . Tenemos que

$$\frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Entonces tenemos que,

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \\ S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\ &\vdots \\ S_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

De esta manera,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$ .

(v)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

**Teorema 2.15.** Si  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  y la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

*Demostración.* Sea  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ . Como  $S_n \rightarrow l$ , entonces  $S_{n-1} \rightarrow l$ . Así,  $S_n - S_{n-1} \rightarrow 0$ . Entonces tenemos que  $S_n - S_{n-1} = a_n \rightarrow 0$ . □

**Teorema 2.16.** Si  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ , entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge si y solo si  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada superiormente.

*Demostración.* Como los  $a_n \geq 0$ , tenemos que  $S_n \leq S_{n+1}$  (es monótona creciente). Así,  $S_n \rightarrow l \iff S_n$  está acotada superiormente. □

**Observación.** Si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$ , entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = a + b.$$

Es decir, podemos extrapolar todas las propiedades de los límites a las series.

**Teorema 2.17** (Criterio de comparación). Si  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$  tales que  $a_n \leq b_n$  para  $n \geq k$ . Si,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  converge, entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.

*Demostración.* Sea  $n \geq k$ , entonces

$$\sum_{k=1}^n a_k \leq \underbrace{a_1 + \cdots + a_{k-1}}_{a \in \mathbb{R}} + \sum_{j=k}^n b_j \leq a + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}_C < \infty.$$

Entonces, tenemos que  $S_n \leq C$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  y, por el teorema anterior,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge. □

**Ejemplo 2.22.** Vamos a demostrar que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  converge. Tenemos que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$n \leq n^2 \iff \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n^2 + n}.$$

Entonces, sea  $a_n = \frac{1}{n^2}$  y  $b_n = \frac{2}{n^2 + n}$ . Entonces tenemos que  $0 \leq a_n \leq b_n$ . De un ejemplo anterior deducimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2 \cdot 1 = 2.$$

Entonces, por el teorema anterior tenemos que <sup>4</sup>

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

**Ejemplo 2.23.** Si  $p \in \mathbb{R}$  y  $a_n = \frac{1}{n^p}$ :

- Si  $p \leq 0$ , tenemos que

$$a_n \rightarrow \begin{cases} \infty, & p \neq 0 \\ 1, & p = 0 \end{cases}.$$

Así, como  $a_n$  no tiende a 0, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \infty$ .

- Si  $0 \leq p \leq 1$ , tenemos que  $n^p \leq n$ . Por tanto,

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \infty.$$

---

<sup>4</sup>Si la sucesión es de términos positivos, entonces decir  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \infty$  es lo equivalente a decir que converge. Si no son términos positivos no lo podemos afirmar. Considera  $a_n = (-1)^n$ .

- Si  $p \geq 2$ , tenemos que  $n^p \geq n^2$ , por lo que  $\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2}$ . Como  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  converge, por el criterio de comparación tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty.$$

- Si  $1 < p < 2$ , tenemos que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty$  por el **criterio de la integral** (lo veremos en el segundo semestre).

**Observación.** Así, podemos concluir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1.$$

**Ejemplo 2.24.** Demostramos que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 2n + 1} < \infty$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3 + 2n + 1}} = 1.$$

Así pues,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 2n + 1} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty.$$

5

**Teorema 2.18.** Si  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l > 0$ , entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty.$$

*Demostración.* Sea  $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$ , entonces existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$ ,

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - l \right| < \varepsilon \iff l - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon + l \iff \frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3l}{2}.$$

Entonces, si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, tenemos que

$$\frac{l}{2} b_n < a_n,$$

---

<sup>5</sup>El símbolo  $\approx$  lo utilizamos para decir que cuando  $n \rightarrow \infty$  se comportan prácticamente igual.

por lo que  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  también converge. Recíprocamente, si  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$  tenemos que  $a_n < \frac{3l}{2} b_n$ , por lo que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ .  $\square$

**Teorema 2.19** (Criterio de la raíz). Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$  y supongamos que existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a \geq 0$ .

- Si  $a < 1$ , entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.
- Si  $a > 1$ , entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge.
- Si  $a = 1$ , entonces no sabemos.

*Demostración.* (i) Si  $a < 1$ , sea  $a < r < 1$ . Sea  $\varepsilon > 0$  tal que  $a - \varepsilon > 0$  y  $a + \varepsilon < r$ . Entonces, existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$ ,

$$a - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < a + \varepsilon < r.$$

Entonces tenemos que si  $n \geq n_0$ ,

$$(a - \varepsilon)^n < a_n < (a + \varepsilon)^n < r^n.$$

Por el criterio de comparación, como

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r} < \infty, \quad 0 \leq r < 1,$$

es convergente, tenemos que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  también es convergente.

(ii) Análogamente, si  $a > 1$ , tomamos  $1 < r < a$  y  $\varepsilon$  tal que  $r < a - \varepsilon$ . Así, existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$ ,

$$|\sqrt[n]{a_n} - a| < \varepsilon \iff r < -\varepsilon + a < \sqrt[n]{a_n} < \varepsilon + a.$$

Es decir, si  $n \geq n_0$ ,

$$r^n < a_n.$$

Como  $r > 1$ , tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r - r^{n+1}}{1-r} = \infty.$$

Por el criterio de comparación, como  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n > \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \infty$ , tenemos que la serie de  $a_n$  diverge.  $\square$

**Ejemplo 2.25.** Ejemplos del caso  $a = 1$ .

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

(ii) Considera  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  converge y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} \right)^2 = 1.$$

**Ejemplo 2.26. Ejercicio 76(f).**  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n^2} 3^{-n}$ . Llamamos  $a_n$  al término general. Entonces,

$$\sqrt[n]{a_n} = \left( \frac{n+1}{n} \right)^n 3^{-1}.$$

Si  $n \rightarrow \infty$ , tenemos que

$$\left( \frac{n+1}{n} \right)^n = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \rightarrow e.$$

Como  $0 < e < 3$ , tenemos que  $\frac{e}{3} < 1$ . Por el criterio de la raíz, la serie converge.

**Teorema 2.20** (Criterio del cociente). Si  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$  tal que existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$ , entonces:

- Si  $a < 1$ , tenemos que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.
- Si  $a > 1$ , tenemos que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge.
- Si  $a = 1$ , no sabemos.

*Demostración.* Una manera de demostrarlo es ver que este criterio implica el de la raíz. Otra manera de hacerlos es recurriendo a series geométricas.

(i) Si  $a < 1$ , tomamos  $\varepsilon > 0$  tal que si  $n \geq n_0$ , y tomamos  $a < r < 1$ ,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < a + \varepsilon < r.$$

Entonces tenemos que si  $n \geq n_0$ ,

$$a_{n+1} < r a_n < \dots < r^{n+1-n_0} a_{n_0} = r^{n+1} \frac{a_{n_0}}{r^{n_0}}.$$

Entonces, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} < \frac{a_{n_0}}{r^{n_0}} \sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1}.$$

Como  $r < 1$ , tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1} < \infty.$$

Por el criterio de comparación, tenemos que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.

(ii) Si  $a > 1$  es análogo.

□

**Ejemplo 2.27.** Ejemplos de  $a = 1$ .

(i) Sea  $a_n = \frac{1}{n}$ . Tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

(ii) Sea  $a_n = \frac{1}{n^2}$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2}{(n+1)^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 = 1.$$

(iii) Sea  $k \in \mathbb{N}$  y sea  $a_n = \frac{n^k}{2^n}$ . Usamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^k}{2^{n+1}}}{\frac{n^k}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} \left( \frac{n+1}{n} \right)^k = \frac{1}{2} < 1.$$

Por el criterio del cociente,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{2^n}$  converge.

**Teorema 2.21** (Criterio de Leibniz). Supongamos que  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$  decreciente, es decir,  $a_{n+1} \leq a_n$  y tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Entonces, la serie alternada converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \text{converge.}$$

**Ejemplo 2.28.** Considera  $a_n = \frac{1}{n}$ . Entonces tenemos que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  converge, mientras que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

**Definición 2.10.** Se dice que una serie es **absolutamente convergente** si  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ .

**Observación.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  no es absolutamente convergente.

**Teorema 2.22.** Si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es absolutamente convergente (i.e.  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ ), entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es convergente.

*Demostración.* Sea  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ . Queremos ver que  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión convergente. Sea  $S_n^* = \sum_{k=1}^n |a_k|$ . Sabemos que  $\{S_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Entonces, tenemos que  $|S_n| \leq S_n^*$ . Sabemos que  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente si y solo si es de Cauchy. Sea  $m > n$ ,

$$0 \leq |S_m - S_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| = S_m^* - S_n^*.$$

Si  $m, n \rightarrow \infty$ , tenemos que  $S_m^* - S_n^* \rightarrow 0$ . Entonces,  $|S_m - S_n| \rightarrow 0$ , por lo que es de Cauchy y, consecuentemente, converge.  $\square$

**Ejemplo 2.29.** Estudiar la convergencia de las siguientes series.

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ . Usamos el criterio del cociente.

$$\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{n+1}{(n+1) \left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1.$$

Por tanto, la serie converge, es decir,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} < \infty$ .

(ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^2}$ . Tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\theta|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Por el criterio de comparación,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\theta|}{n^2} < \infty$ . Es decir, la serie inicial converge absolutamente por lo que converge.



(iii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  con  $x \in \mathbb{R}$ . Tomamos la serie en valor absoluto para ver que converge absolutamente. Empleamos el criterio del cociente:

$$\frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0.$$

Como  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} < \infty$ , la serie inicial converge absolutamente, por lo que converge.

**Observación.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

**Teorema 2.23** (Sumación por partes de Abel). Sean  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ , sea  $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$  y sea  $m > n$ . Entonces,

$$\sum_{k=n+1}^m a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_m b_m - A_n b_{n+1}.$$

*Demostración.* Tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^m a_k b_k &= \sum_{k=n+1}^m (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=n+1}^m A_k b_k - \sum_{k=n}^{m-1} A_k b_{k+1} \\ &= A_m b_m - A_n b_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}). \end{aligned}$$

□

**Teorema 2.24** (Criterio de Dirichlet). Sean  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  tal que si  $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$  entonces  $|A_n| \leq M$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  y  $b_n$  decrece y converge a 0. Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ converge.}$$

*Demostración.* Vamos a ver que es sucesión de Cauchy, es decir,  $\sum_{k=n+1}^m a_k b_k \rightarrow 0$  si  $m \geq n+1$ , cuando  $n, m \rightarrow \infty$ . Utilizamos el teorema anterior:

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k b_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_m b_m - A_n b_{n+1} \right|.$$

Sea  $\varepsilon > 0$  y sea  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$ ,

$$|b_n| < \frac{\varepsilon}{3M},$$

y  $\forall m > n \geq n_0$  tal que

$$|b_m - b_n| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Seguimos con lo anterior:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^m a_k b_k \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_m b_m - A_n b_{n+1} \right| \\ &\leq M \sum_{k=n+1}^{m-1} |b_k - b_{k+1}| + M |b_m| + M |b_{n+1}| \\ &\leq M \sum_{k=n+1}^{m-1} (b_k - b_{k+1}) + M \frac{\varepsilon}{3M} + M \frac{\varepsilon}{3M} = M (b_{n+1} - b_m) + \frac{2\varepsilon}{3} \\ &= M \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

**Teorema 2.25** (Criterio de Leibniz). Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  decreciente que converge a 0, entonces la serie alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  converge.

*Demostración.* Tenemos que

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k = \begin{cases} -1, & n \text{ impar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}.$$

Entonces, las sumas parciales están acotadas superiormente por  $M = 1$ . Por el criterio de Dirichlet, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n,$$

converge <sup>6</sup>.

□

**Ejemplo 2.30.** (i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  converge.

(ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  converge.

(iii) Demostrar que (usar inducción)

$$\left| \sum_{n=1}^m \cos nx \right| = \left| \frac{\sin \left(m + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \right|.$$

---

<sup>6</sup>Este teorema es realmente un corolario del teorema anterior.

## 2.6. Exponentes reales.

Recordamos que si  $x > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$ :

$$x^{\frac{1}{n}} = \sup \{r \in \mathbb{Q} : r^n < x\}.$$

En general, si  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n < 0$ , definimos  $x^0 = 1$  y

$$x^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{n}}.$$

Pasamos al caso  $p = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ,

$$x^p = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m.$$

Queremos ver que pasa en el caso  $x^\alpha$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Lema 2.1.** Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|x^r - 1| < \varepsilon, \quad 0 < r < \frac{1}{n_0}, \quad r \in \mathbb{Q}.$$

*Demostración.* Sabemos que  $x^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$  si  $n \rightarrow \infty$ . Así, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$ ,

$$\left|x^{\frac{1}{n}} - 1\right| < \varepsilon.$$

Sea  $0 < r < \frac{1}{n_0}$ ,  $r \in \mathbb{Q}$ . Si  $x > 1$ , tenemos que  $0 < x^r - 1 < x^{\frac{1}{n_0}} - 1 < \varepsilon$ . Si  $0 < x < 1$ , tenemos que  $x^r > x^{\frac{1}{n_0}}$  por lo que  $0 < 1 - x^r < 1 - x^{\frac{1}{n_0}} < \varepsilon$ . El caso  $x = 1$  es trivial.  $\square$

**Corolario 2.5.** Si  $r_n \rightarrow 0$  y  $r_n \in \mathbb{Q}^+$ , con  $x > 0$ , entonces  $x^{r_n} \rightarrow 1$  si  $n \rightarrow \infty$ .

**Teorema 2.26.** Si  $x > 0$ , y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces

(i) Si  $r_n \in \mathbb{Q}$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \alpha$ , entonces  $\{x^{r_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

(ii) Si  $s_n \in \mathbb{Q}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \alpha$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{s_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{r_n}$ .

*Demostración.* (i) Tenemos  $r_n \in \mathbb{Q}$  con  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \alpha$ . Sin pérdida de generalidad tomamos  $\alpha > 0$ .

Vamos a demostrar que es de Cauchy. Como  $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge, entonces está acotada, por lo que existe  $K$  tal que  $0 \leq r_n < K \in \mathbb{N}$  (descartamos los primeros términos negativos). Hacemos primero el caso  $x > 1$  (el caso  $x < 1$  es análogo). Supongamos que  $r_m \geq r_n$ .

$$|x^{r_m} - x^{r_n}| = |x^{r_n} (x^{r_m - r_n} - 1)| \leq x^K |x^{r_m - r_n} - 1| \rightarrow 0.$$

En el paso anterior hemos utilizado el lema y corolario anterior. Así, tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{r_n}$  converge.

(ii) Si  $s_n \rightarrow \alpha$  y  $r_n \rightarrow \alpha$ , tenemos que  $s_n - r_n \rightarrow 0$ . Supongamos que  $r_n \geq s_n$ ,

$$x^{r_n} - x^{s_n} = x^{s_n} (x^{r_n - s_n} - 1).$$

Entonces, tenemos que

$$|x^{r_n} - x^{s_n}| \leq x^K |x^{r_n - s_n} - 1| \rightarrow 0.$$

Como la diferencia converge a 0, tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{s_n}$ .<sup>7</sup>

□

**Definición 2.11.** Dado  $x > 0$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$  se define  $x^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{r_n}$  donde  $r_n \in \mathbb{Q} \rightarrow \alpha$ .

**Proposición 2.6.** Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  con  $x_n, y_n > 0$ , con  $x_n \rightarrow x > 0$  y  $y_n \rightarrow y > 0$ , entonces

$$x_n^{y_n} \rightarrow x^y.$$

*Demostración.* Dado  $\varepsilon > 0$ , sea  $\varepsilon' = \left[ \left( \frac{\varepsilon}{x^y} + 1 \right)^{\frac{1}{y}} - 1 \right] \cdot x > 0$ . Entonces, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$ ,  $x_n < x + \varepsilon'$ . Así, tenemos que

$$x_n^{y_n} < (x + \varepsilon')^{y_n}.$$

Entonces, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n^{y_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup (x + \varepsilon')^{y_n} = (x + \varepsilon')^y = x^y + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$

Así, tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n^{y_n} \leq x^y$ . Ahora, dado  $\varepsilon > 0$ , tomamos  $\varepsilon'' = x - (x^y - \varepsilon)^{\frac{1}{y}} > 0$ . Así, obtenemos que para  $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $x - \varepsilon'' < x_n$ :

$$(x - \varepsilon'')^y = x^y - \varepsilon \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n^{y_n}, \forall \varepsilon > 0.$$

Así,  $x^y \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n^{y_n}$ .

□

---

<sup>7</sup>Esta afirmación solo la podemos hacer si las sucesiones convergen. Sino, no, considera  $x_n = n$  y  $y_n = n$ .

## Capítulo 3

# Límites de funciones

**Definición 3.1** (Punto de acumulación). Sea  $A \subset \mathbb{R}$ . Se dice que  $c$  es un **punto de acumulación** de  $A$  si  $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$  con  $x \neq c$  tal que  $|x - c| < \varepsilon$ .

**Ejemplo 3.1.** Sea  $A = (0, 1)$  y sea  $0 < c < 1$ . Tenemos que  $c$  es un punto de acumulación de  $A$ . Similarmente, 0 y 1 también son puntos de acumulación de  $A$ .

**Notación.**  $A' = \{c \in \mathbb{R} : c \text{ punto de acumulación de } A\}$ . Así, si  $A = (0, 1)$ , entonces  $A' = [0, 1]$ .

**Ejemplo 3.2.**  $A = \{0, 1\}$ . Tenemos que  $A' = \emptyset$ .

**Teorema 3.1.** Sea  $A \subset \mathbb{R}$ . Entonces,  $c \in A'$  si y solo si  $\exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  con  $x_n \neq c$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ .

*Demostración.* (i) Supongamos que  $A' \neq \emptyset$ . Si  $c \in A'$ , tomamos  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ , entonces  $\exists x_n \in A, x_n \neq c$  tal que  $|x_n - c| < \frac{1}{n}$ . Así,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A - \{c\}$  y  $|x_n - c| < \frac{1}{n} \rightarrow 0$ , por lo que  $x_n \rightarrow c$ .

(ii) Recíprocamente, si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A - \{c\}$  tal que  $x_n \rightarrow c$ . Sea  $\varepsilon > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - c| < \varepsilon$ . Así,  $x_n \in A - \{c\}$  y  $|x_n - c| < \varepsilon$ . Por lo que  $c \in A'$ . □

**Ejemplo 3.3.** (i) Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  tal que  $x_n \rightarrow c$  con  $x_n \neq c$  y sea  $A = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Entonces,  $A' = \{c\}$ . Por ejemplo, si  $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ , entonces  $A' = \{0\}$ .

(ii) Sea  $A = \mathbb{Q}$ , tenemos que  $A' = \mathbb{R}$ , pues  $\mathbb{Q}$  es denso en  $\mathbb{R}$ . Análogamente, si  $A = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ , tenemos que  $A' = \mathbb{R}$ .

**Definición 3.2** (Límite). Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $c \in A'$ . Se dice que  $l$  es el límite de  $f$  cuando  $x$  se aproxima a  $c$ <sup>a</sup>:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l,$$

si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que si  $x \in A - \{c\}$  y  $0 < |x - c| < \delta$ , entonces  $|f(x) - l| < \varepsilon$ .

<sup>a</sup>Por lo estudiado anteriormente, podemos calcular el límite sin que  $c \in A$ , es decir, sin que  $f$  esté definido en  $c$ .

**Ejemplo 3.4.** Sea  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \frac{x^2 + x}{x}$ . Si  $A = (0, 1]$ , tenemos que  $0 \in A' = [0, 1]$ . Queremos ver que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ . Sea  $\varepsilon > 0$ , quiero encontrar  $\delta > 0$  tal que si  $x \in (0, 1]$  y  $0 < x < \delta$ , entonces  $\left| \frac{x^2 + x}{x} - 1 \right| < \varepsilon$ . Tenemos que

$$\left| \frac{x^2 + x}{x} - 1 \right| = |x + 1 - 1| = x < \varepsilon.$$

Cogemos  $\delta = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ . También podemos tomar  $\delta = \varepsilon$ . Entonces si  $0 < x < \delta$ , tenemos que  $|f(x) - 1| < \varepsilon$ .

**Ejemplo 3.5.**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = x^2$ . Tenemos que  $0 \in \mathbb{R}' = \mathbb{R}$ . Vamos a ver que  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ . Vamos a ver que si  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |x - 0| < \delta$ , entonces  $|x^2 - 0| < \varepsilon$ .

$$|x^2| < \varepsilon \iff x^2 < \varepsilon.$$

Podemos tomar  $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ , pues entonces

$$x < \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow x^2 < (\sqrt{\varepsilon})^2 = \varepsilon.$$

**Teorema 3.2** (Caracterización del límite por convergencia de sucesiones). Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c \in A'$  y  $l \in \mathbb{R}$ . Entonces, son equivalentes los siguientes enunciados:

- (i)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$ .
- (ii)  $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A - \{c\}, x_n \rightarrow c$  si  $n \rightarrow \infty$ , entonces  $f(x_n) \rightarrow l$ .

*Demostración.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Queremos ver que  $\forall \varepsilon > 0$  existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$ ,  $|f(x_n) - l| < \varepsilon$ . Sabemos que dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $x \in A - \{c\}$  y  $0 < |x - c| < \delta$ , entonces  $|f(x) - l| < \varepsilon$ . Como  $x_n \rightarrow c$ , dado  $\delta > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0, |x_n - c| < \delta$ . Recordamos que  $x_n \neq c$ . Por tanto,  $|f(x_n) - l| < \varepsilon$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A - \{c\}$  y  $x_n \rightarrow c$ , entonces  $f(x_n) \rightarrow l$ . Quiero ver que  $\forall \varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |x - c| < \delta$  con  $x \in A - \{c\}$ , entonces  $|f(x) - l| < \varepsilon$ . Supongamos lo contrario. Es decir,  $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists 0 < |x - c| < \delta$  con  $x \in A$  tal que  $|f(x) - l| \geq \varepsilon$ . Tomamos  $\delta = \frac{1}{n}$ ,

entonces existe  $x_n$  tal que  $0 < |x_n - c| < \frac{1}{n}$ , con  $x_n \in A$  tal que  $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$ . Así,  $x_n \rightarrow c$ ,  $x_n \in A \setminus \{c\}$  pero tenemos que  $f(x_n)$  no tiende a  $l$ , que contradice nuestra hipótesis. Por tanto,  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$ .<sup>1</sup>

□

**Ejemplo 3.6.** Consideramos la función

$$f(x) = \operatorname{sig} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

Tenemos que  $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$  y  $f(x_n) = 1 \rightarrow 1$ , pero si tomamos  $y_n = -\frac{1}{n} \rightarrow 0$ , pero  $f(y_n) = -1 \rightarrow -1$ . Entonces, como  $-1 \neq 1$ , tenemos que no existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

**Ejemplo 3.7.** Vamos a ver que no existe el límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  si  $x > 0$ . Basta tomar  $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ , pero  $\frac{1}{x_n} = n$  diverge, por lo que no converge a un número real finito.

**Definición 3.3.** Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $x_0 \in A'$ . Diremos que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  si  $\forall C > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que  $0 < |x - x_0| < \delta$ ,  $x \in A$ , entonces  $f(x) > C$ .  
Análogamente, diremos que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$  si  $\forall C < 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $0 < |x - x_0| < \delta$ ,  $x \in A$ , entonces,  $f(x) < C$ .

**Ejemplo 3.8.** Sea  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Entonces,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ . En efecto, dada  $C > 0$  tomamos  $\delta < \frac{1}{C}$  y obtenemos que

$$0 < |x - 0| = x < \delta < \frac{1}{C} \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} > C.$$

**Ejemplo 3.9.** Sea  $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $g(x) = \frac{1}{x}$ . El límite  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  no existe.

**Definición 3.4.** Sea  $f : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  y sea  $l \in \mathbb{R}$ . Se dice que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$  si  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists C > 0$  tal que si  $x > C$  entonces  $|f(x) - l| < \varepsilon$ .  
Análogamente, si  $f : (-\infty, a) \rightarrow \mathbb{R}$   $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$  si  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists C < 0$  tal que si  $x < C$  entonces  $|f(x) - l| < \varepsilon$ .

<sup>1</sup>Cuando pasamos de sucesión a variable continua, lo solemos hacer por reducción al absurdo.

**Ejemplo 3.10.** Sea  $f(x) = \frac{x+1}{x}$ ,  $x > 0$ . Queremos ver que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = 1$ . Sea  $\varepsilon > 0$ ,

$$\left| \frac{x+1}{x} - 1 \right| = \left| \frac{x+1-x}{x} \right| = \frac{1}{x}.$$

Si  $C = \frac{1}{\varepsilon}$ , tenemos que si  $x > C$ ,

$$x > \frac{1}{\varepsilon} \iff \frac{1}{x} < \varepsilon.$$

**Definición 3.5.** Sea  $f : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Diremos que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  si  $\forall C > 0$ ,  $\exists D > 0$  tal que si  $x > D$ , con  $x \in (a, \infty)$ , entonces  $f(x) > C$ .

Análogamente,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$  si  $\forall C < 0$ ,  $\exists D > 0$  tal que si  $x > D$ , con  $x \in (a, \infty)$ , entonces  $f(x) < C$ .

Análogamente, sea  $f : (-\infty, a) \rightarrow \mathbb{R}$ . Tenemos que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$  si  $\forall C > 0$ ,  $\exists D < 0$  tal que si  $x < D$ , entonces  $f(x) > C$ . Finalmente,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  si  $\forall C < 0$ ,  $\exists D < 0$  tal que si  $x < D$  entonces  $f(x) < C$ .

**Observación.** Análogamente al criterio de existencia de límite por convergencia de sucesiones, se puede adaptar el mismo argumento en los restantes casos de límites. Por ejemplo, si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  y sea  $x_n \rightarrow \infty$  si  $n \rightarrow \infty$ . Entonces tenemos que  $f(x_n) \rightarrow \infty$ . Queremos ver que  $\forall C > 0$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$ , entonces  $f(x_n) > C$ . Sabemos que  $\forall C > 0$ , existe  $D > 0$  tal que si  $x > D$ , con  $x \in \text{dom } f$ , entonces  $f(x) > C$ . Como  $x_n \rightarrow \infty$ , para  $D > 0$ , tenemos que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$ , entonces  $x_n > D$ , por lo que  $f(x_n) > C$ .

**Ejemplo 3.11.** Sea  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ,  $x > 0$ . Queremos ver si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ . Queremos ver que  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists C > 0$  tal que si  $x > C$  entonces  $\left| \frac{\sin x}{x} \right| < \varepsilon$ . Tenemos que

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| = \frac{|\sin x|}{x} \leq \frac{1}{x} < \varepsilon.$$

Para que esto sea cierto, cogemos  $C = \frac{1}{\varepsilon}$ , así,  $x > C \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{C} = \varepsilon$ .

**Definición 3.6** (Localmente acotada). Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A'$ . Se dice que  $f$  está **localmente acotada** en  $x_0$  si  $\exists \delta > 0$  y  $\exists C > 0$  tal que si  $0 < |x - x_0| < \delta$ , con  $x \in A$ , entonces  $|f(x)| < C$ .<sup>a</sup>

<sup>a</sup>No es necesario que  $x_0$  sea punto de acumulación.

**Ejemplo 3.12.** Tenemos que  $f(x) = x^2$  está localmente acotada en todo  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Basta tomar  $\delta = 1$  y  $f(x_0 + \delta) = (x_0 + \delta)^2$  y  $f(x_0 - \delta) = (x_0 - \delta)^2$  y tomar  $C = \max\{f(x_0 + \delta), f(x_0 - \delta)\}$ . Tenemos que  $|f(x)| = x^2 \leq C$ ,  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ .



**Teorema 3.3.** Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A'$ ,  $l \in \mathbb{R}$  y  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ . Entonces,  $f$  está localmente acotada en  $x_0$ .

*Demostración.* Dado  $\varepsilon = 1$ , tenemos que existe  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |x - x_0| < \delta$ , entonces  $|f(x) - l| < 1$ . Entonces, tenemos que

$$|f(x)| = |f(x) - l + l| \leq |f(x) - l| + |l| < 1 + |l|.$$

Cogemos  $C = 1 + |l|$ . □

**Ejemplo 3.13.** El recíproco no funciona. Cogemos, por ejemplo  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  con  $x \neq 0$ . Tenemos que esta función está localmente acotada en 0 por 1, pero  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  no existe.

**Teorema 3.4.** Sean  $f, g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A'$ , sea  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  y  $m = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ . Entonces,

- (i)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = l + m$ .
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = l - m$ .
- (iii)  $\forall a \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow x_0} (af(x)) = a \cdot l$ .
- (iv)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = l \cdot m$ .
- (v) Si  $m \neq 0$ , y  $g(x) \neq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$ .

*Demostración.* (i) Sea  $\varepsilon > 0$  y sea  $\delta > 0$  tal que  $0 < |x - x_0| < \delta$ . Entonces

$$|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así,

$$|f(x) + g(x) - l - m| \leq |f(x) - l| + |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

si  $0 < |x - x_0| < \delta$ ,  $x \in A$ .

(ii) La demostración es análoga a (i).

(iii) Aplicamos el criterio del límite por sucesiones. Como  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , tenemos que si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{x_0\}$  con  $x_n \rightarrow x_0$ , entonces  $f(x_n) \rightarrow l$ . Queremos ver que  $(af)(x_n) \rightarrow al$ . Tenemos que

$$(af)(x_n) = af(x_n).$$

Aplicando las propiedades de los límites de sucesiones,  $a \rightarrow a$  y  $f(x_n) \rightarrow l$ . Por tanto,  $(af)(x_n) \rightarrow al$ .

- (iv) Por el criterio de límite por sucesiones, sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A/\{x_0\}$ , con  $x_n \rightarrow x_0$ . Queremos ver que  $(f \cdot g)(x_n) \rightarrow l \cdot m$ . Tenemos que

$$(f \cdot g)(x_n) = f(x_n)g(x_n).$$

Como  $f$  converge y  $x_n \rightarrow x_0$ , tenemos que  $f(x_n) \rightarrow l$  y  $g(x_n) \rightarrow m$ . Aplicando las propiedades de los límites de sucesiones,

$$(f \cdot g)(x_n) = f(x_n)g(x_n) \rightarrow l \cdot m.$$

- (v) Por el criterio del límite por sucesiones, sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A/\{x_0\}$  con  $x_n \rightarrow x_0$ . Vamos a ver que  $\left(\frac{f}{g}\right)(x_n) \rightarrow \frac{l}{m}$ . Tenemos que

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x_n) = \frac{f(x_n)}{g(x_n)}.$$

Tenemos que  $f(x_n) \rightarrow l$  y  $g(x_n) \rightarrow m$ , por lo que  $\left(\frac{f}{g}\right)(x_n) \rightarrow \frac{l}{m}$ .

□

**Ejemplo 3.14.** Calculamos  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 5)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 5) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 5 = \left(\lim_{x \rightarrow 2} x\right)^2 + 5 = 2^2 + 5 = 9.$$

**Teorema 3.5.** Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A'$  y supongamos que  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ . Si  $a \leq f(x) \leq b$ , entonces  $a \leq l \leq b$ .

*Demostración.* Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |x - x_0| < \delta$ , con  $x \in A$ , entonces  $|f(x) - l| < \varepsilon$ . Entonces, tenemos que

$$|f(x) - l| < \varepsilon \iff -\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon \iff f(x) - \varepsilon < l < \varepsilon + f(x).$$

Así, tenemos que

$$a - \varepsilon < l < \varepsilon + b, \forall \varepsilon > 0.$$

Entonces,  $a \leq l \leq b$  <sup>2</sup>.

□

**Teorema 3.6** (Regla del bocadillo). Si  $f, g, h : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A'$ . Si  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  y  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$ , entonces,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ .

<sup>2</sup>Esta demostración se puede hacer también utilizando la caracterización del límite por convergencia de sucesiones.

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ , buscamos un  $\delta > 0$  tal que si  $x \in A$  y  $0 < |x - x_0| < \delta$ , entonces  $|f(x) - l| < \varepsilon$ . Por hipótesis, sabemos que existe  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |x - x_0| < \delta$  con  $x \in A$ ,

$$|g(x) - l| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |h(x) - l| < \varepsilon.$$

Así, tenemos que

$$l - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < l + \varepsilon.$$

Así, tenemos que  $|f(x) - l| < \varepsilon$ . □

**Ejemplo 3.15.** Vamos a ver  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ . Geométricamente podemos ver que

$$\sin x \leq x \leq \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Como estamos viendo el intervalo  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Entonces, podemos hacer

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

Como  $1 \rightarrow 1$  y  $\frac{1}{\cos x} \rightarrow 1$ , tenemos que  $\frac{x}{\sin x} \rightarrow 1$  por la regla del bocadillo.

**Ejemplo 3.16. (i)** Sea  $A = (0, 1) \cup (1, \infty)$  y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x(x-1)^2}$ . Tenemos

que  $A' = [0, \infty)$ . Si  $x = 0$ , tenemos que  $x_n = \frac{1}{n} \in A$  y  $x_n \rightarrow 0$ , por lo que  $0 \in A'$ . Hacemos lo mismo con el 1 y la sucesión  $x_n = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$ . Si  $x < 0$ , no existe  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Por lo que  $x \notin A'$ . Vamos a ver que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ . Si  $x > 0$ ,

$$\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2(x+1)}{x(x-1)^2} = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}.$$

Queremos ver que  $\forall C > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $0 < |x - 0| < \delta$ ,  $x \in A$ , entonces  $f(x) > C$ . Tenemos que conseguir que

$$1 + \frac{1}{x} > C \iff \frac{1}{x} > C - 1.$$

Entonces, tomamos  $\delta = \min \left\{ \frac{1}{|C-1|}, 1 \right\}$ , así, si  $0 < x < \delta$ , entonces  $1 + \frac{1}{x} = f(x) > C$ .

Ahora demostramos que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ . Tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} 1 + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1 + 1 = 2.$$

Ahora demostramos que  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - x^2 - x + 1)}{\lim_{x \rightarrow 2} x(x-1)^2} = \frac{3}{2}.$$

Finalmente, demostramos que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ . Tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 1 + 0 = 1.$$

(ii) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ , y  $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l$ . Vamos a demostrar que  $l = 0$  y  $\forall c \in \mathbb{R}$ ,  $\exists \lim_{x \rightarrow c} f(x)$ .

Tenemos que  $0 = x + (-x)$ , por lo que  $f(0) = f(x) + f(-x)$ . Tenemos que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l$ . Ahora queremos ver que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(-x) = l$ . Sabemos que  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $0 < |x - 0| < \delta$ , entonces  $|f(x) - l| < \varepsilon$ . Queremos ver que  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $0 < |x - 0| < \delta$ , entonces  $|f(-x) - l| < \varepsilon$ . Tenemos que si  $0 < |x - 0| < \delta$ , entonces  $0 < |-x - 0| < \delta$ . Por tanto, tenemos que  $f(-x) \rightarrow l$  y  $f(0) = f(x) + f(-x) = 2l$ <sup>3</sup>. Tenemos que

$$x = 0 + x \Rightarrow f(x+0) = f(x) + f(0) = f(x) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow l = 0.$$

Ahora vamos a ver que  $\forall c \in \mathbb{R}$ ,  $\exists \lim_{x \rightarrow c} f(x)$ .

$$f(x) = f(x - c + c) = f(x - c) + f(c).$$

Vamos a ver que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x - c) = 0$ . Sea  $x - c = y$ . Entonces,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $0 < |y| < \delta$ , tenemos que  $|f(y)| < \varepsilon$ . Así,

$$f(x) = f(x - c + c) = f(x - c) + f(c) \rightarrow f(c).$$

Demostremos que  $f$  es lineal. Tenemos que

$$f(x) = f\left(\frac{x}{n} + \cdots + \frac{x}{n}\right) = nf\left(\frac{x}{n}\right).$$

Similarmente,

$$f(nx) = f(x + \cdots + x) = nf(x).$$

Así,

$$f\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q}f(x) \Rightarrow f(\lambda x) = \lambda x, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Este último paso se demuestra por continuidad y con sucesiones de racionales que tiendan a números reales (como la parte de exponentes reales). Ahora, podemos ver que  $f$  es lineal. Para que sea lineal, tenemos que  $f(x) = cx$ . Esto es fácil, pues tenemos que  $f(1) = c$ .

(iii) Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c \in A'$  y supongamos que  $\exists \lim_{x \rightarrow c} f(x) = l > 0$ . Entonces,  $\exists \delta > 0$  tal que  $\forall x \in (c - \delta, c + \delta) \cap A$ ,  $f(x) > 0$ .

Sabemos que  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $0 < |x - c| < \delta$ ,  $x \in A$ , entonces  $|f(x) - l| < \varepsilon$ .

Tomamos  $\varepsilon = \frac{l}{2}$ , tal que  $l - \varepsilon = \frac{l}{2} > 0$ . Entonces  $\exists \delta > 0$  tal que si  $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap A$ , con  $x \neq c$ , entonces:

$$|f(x) - l| < \varepsilon \iff -\frac{l}{2} < f(x) - l < \frac{l}{2} \Rightarrow 0 < \frac{l}{2} < f(x).$$

<sup>3</sup>Tenemos que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} f(-x)$ . Como  $f(0)$  es una constante, tenemos que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(0) = f(0)$ .

- (iv) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Vamos a ver si  $\exists \varepsilon > 0$ ,  $\forall \delta > 0$ ,  $|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$ .  
Sea  $x \in \mathbb{R}$  y sea  $\delta = 2|x - c| + 1 > 0$ . Entonces

$$|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon \iff f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon.$$

- (v) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . El enunciado  $\forall \delta > 0$ ,  $\exists \varepsilon > 0$  tal que si  $0 < |x - c| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \delta$  es equivalente a decir que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ .

- (vi) (a)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

- (b)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in \mathbb{R} / \{0\}$ .

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

**Definición 3.7** (Límites laterales). Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , y sea  $c$  un punto de acumulación de  $A \cap (c, \infty)$ . Sea  $l \in \mathbb{R}$ . Se dice que  $l$  es el **límite por la derecha** de  $f$  en  $c$ :

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l,$$

si  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $0 < x - c < \delta$  con  $x \in A$ , entonces  $|f(x) - l| < \varepsilon$ .  
Análogamente, si  $c$  es un punto de acumulación de  $A \cap (-\infty, c)$ . Decimos que

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l,$$

si  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $0 < c - x < \delta$ ,  $x \in A$ , entonces  $|f(x) - l| < \varepsilon$ .

**Definición 3.8.** Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $c \in (A \cap (c, \infty))'$ .

- $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty$  si  $\forall C > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $0 < x - c < \delta$ , con  $x \in A$ , entonces  $f(x) > C$ .
- $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$  si  $\forall C < 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $0 < x - c < \delta$  con  $x \in A$ , entonces  $f(x) < C$ .

Ahora consideramos  $c \in (A \cap (-\infty, c))'$ .

- $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \infty$  si  $\forall C > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $0 < c - x < \delta$  con  $x \in A$ , entonces  $f(x) > C$ .
- $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$  si  $\forall C < 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $0 < c - x < \delta$  con  $x \in A$ , entonces  $f(x) < C$ .

**Ejemplo 3.17.** En el ejemplo anterior, tenemos que si  $f(x) = \frac{1}{x}$  con  $x \in \mathbb{R}/\{0\}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty.$$

**Teorema 3.7.** Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $c \in (A \cap (c, \infty))' \cap (A \cap (-\infty, c))'$ . Entonces  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$  si y solo si

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l.$$

*Demostración.* (i) Sabemos que  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $0 < |x - c| < \delta$  con  $x \in A$ , entonces  $|f(x) - l| < \varepsilon$ . Vamos a ver que  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $0 < x - c < \delta$ , entonces  $|f(x) - l| < \varepsilon$ . Es trivial, pues basta tomar el mismo  $\delta$  de la definición de límite. El análogo para el límite por la izquierda es también trivial.

(ii) Dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_1 > 0$  tal que si  $0 < x - c < \delta_1$ ,  $x \in A$ , entonces  $|f(x) - l| < \varepsilon$ . Similarmente,  $\exists \delta_2 > 0$  tal que si  $0 < c - x < \delta_2$ , con  $x \in A$ , entonces  $|f(x) - l| < \varepsilon$ . Sea  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$  y tengo que  $0 < |x - c| < \delta$ , con  $x \in A$ . Si  $x > c$ ,

$$0 < x - c < \delta \leq \delta_1, \quad x \in A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Si  $x < c$ ,

$$0 < c - x < \delta \leq \delta_2, \quad x \in A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

□

**Ejemplo 3.18.** Sea  $f(x) = \text{sig}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1.$$

Por tanto, no existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

**Ejemplo 3.19.**  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Sea  $f(x) = x + 1$  y

$$g(x) = \begin{cases} 2, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}.$$

(a) Calcular  $(g \circ f)(x)$  y  $g\left(\lim_{x \rightarrow 1} f(x)\right)$ .

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

Tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 1} (g \circ f)(x) = 2.$$

Ahora, tenemos que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ , entonces

$$g\left(\lim_{x \rightarrow 1} f(x)\right) = g(2) = 2.$$

(b) Calcular  $(f \circ g)(x)$  y  $f\left(\lim_{x \rightarrow 1} g(x)\right)$ .

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 3, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

Tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (f \circ g)(x) = 3.$$

Ahora, tenemos que  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$ , entonces

$$f\left(\lim_{x \rightarrow 1} g(x)\right) = f(2) = 3.$$

**Ejemplo 3.20.** Consideremos el enunciado  $\forall \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0$  tal que  $|x_n - l| < \varepsilon$ . Vamos a ver si este enunciado es equivalente a que exista  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $x_{n_k} \rightarrow l$ .

(i) Sea  $\varepsilon = 1$ . Sea  $n_0 = 1$ , entonces  $\exists n_1 \geq 1$  tal que  $|x_{n_1} - l| < \varepsilon = 1$ . Sea  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  y  $n_0 = n_1 + 1$ . Entonces,  $\exists n_2 \geq n_0 > n_1$  tal que  $|x_{n_2} - l| < \frac{1}{2}$ . Si tenemos  $x_{n_1}, \dots, x_{n_k}$  estrictamente creciente, tal que  $|x_{n_j} - l| < \frac{1}{j}$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Ahora, sea  $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$  y  $n_0 = n_k + 1$ . Entonces,  $\exists n_{k+1} \geq n_0 > n_k$  tal que  $|x_{n_{k+1}} - l| < \frac{1}{k+1}$ . Por tanto, construimos  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que

$$|x_{n_k} - l| < \frac{1}{k}, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = l.$$

(ii) Tenemos que  $\forall \varepsilon > 0, \exists n'_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n_k \geq n'_0$ ,  $|x_{n_k} - l| < \varepsilon$ . Dado  $\varepsilon > 0$  y dado  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tenemos que ver que  $\exists n \geq n_0$  tal que  $|x_n - l| < \varepsilon$ . Sea  $n_k \geq \max\{n_0, n'_0\}$ , entonces

$$|x_{n_k} - l| < \varepsilon, n_k \geq n_0.$$

**Ejemplo 3.21.** Vamos a demostrar que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ . Sabemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ . Dado  $x \in \mathbb{R}$  con  $x \geq 1$ , entonces existen  $n_x = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$  y  $\alpha_x \in [0, \infty)$  tal que  $x = n_x + \alpha_x$ . Tenemos que  $\lim_{x \rightarrow \infty} n_x = \infty$ . Entonces, tenemos que

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 + \frac{1}{n_x + \alpha_x}\right)^{n_x + \alpha_x} = \left(1 + \frac{1}{n_x + \alpha_x}\right)^{n_x} \left(1 + \frac{1}{n_x + \alpha_x}\right)^{\alpha_x}.$$

Vamos a ver que  $\left(1 + \frac{1}{n_x + \alpha_x}\right)^{\alpha_x} \rightarrow 1$ . Tenemos que

$$1 \leq \left(1 + \frac{1}{n_x + \alpha_x}\right)^{\alpha_x} \leq \underbrace{1 + \frac{1}{n_x + \alpha_x}}_{\rightarrow 1}.$$

Ahora vamos a ver que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_x + \alpha_x}\right)^{n_x} = e$ . Tenemos que

$$\left(1 + \frac{1}{n_x + 1}\right)^{n_x} \leq \left(1 + \frac{1}{n_x + \alpha_x}\right)^{n_x} \leq \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n_x}\right)^{n_x}}_{\rightarrow e}.$$

El término de la izquierda lo cogemos y lo multiplicamos y dividimos por  $\left(1 + \frac{1}{n_x + 1}\right) \rightarrow 1$ . Así,

$$\left(1 + \frac{1}{n_x + 1}\right)^{n_x} = \left(1 + \frac{1}{n_x + 1}\right)^{n_x + 1} \left(1 + \frac{1}{n_x + 1}\right)^{-1} \rightarrow e.$$

Así,  $\left(1 + \frac{1}{n_x + \alpha_x}\right)^{n_x} \rightarrow e$ , por lo que el límite original converge a  $e$ .

**Ejemplo 3.22.** Si  $g(x) \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow \infty$  y  $f(x) \rightarrow l$  si  $x \rightarrow \infty$ , entonces  $(f \circ g)(x) \rightarrow l$ . Sabemos que  $\forall C > 0$ ,  $\exists K > 0$  tal que  $\forall x > K$ ,  $g(x) > C$ . Similarmente, tenemos que  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists K > 0$  tal que si  $x > K$  entonces  $|f(x) - l| < \varepsilon$ . Sea  $\varepsilon > 0$ , existe  $K > 0$  tal que cumpla los requisitos de la convergencia de  $f$ . Ahora, puedo encontrar  $K' > 0$  tal que si  $x > K'$ , entonces  $g(x) > K$ . Así,  $|f(g(x)) - l| < \varepsilon$ .

**Corolario 3.1.** Sea  $g(x) \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . Tenemos que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)} = e$ .

**Teorema 3.8.** Sea  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(a, \infty) \subset A$ . Supongamos que  $g(x) \neq 0$ ,  $\forall x > a$  y existe  $L \in \mathbb{R}$ ,  $L \neq 0$  tal que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ . Entonces

- Si  $L > 0$ : si  $x \rightarrow \infty$ ,  $f(x) \rightarrow \infty \iff g(x) \rightarrow \infty$ .
- Si  $L < 0$ : si  $x \rightarrow \infty$ ,  $f(x) \rightarrow \pm\infty \iff g(x) \rightarrow \mp\infty$ .

*Demostración.* Supongamos que  $L > 0$  y que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ . Queremos ver que  $\forall C > 0$ ,  $\exists K > 0$  tal que si  $x > K$  entonces  $f(x) > C$ . Sabemos que  $\forall C' > 0$ ,  $\exists K' > 0$  tal que si  $x > K'$  entonces  $f(x) > C'$ . Similarmente,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists K'' > 0$  tal que si  $x > K''$  entonces  $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \varepsilon$ . Entonces,

cogemos  $\varepsilon = \frac{L}{2}$ ,

$$\frac{L}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}Lg(x).$$

Sea  $C' = \frac{3CL}{2} > 0$ , entonces existe  $K' > 0$  tal que si  $x > K$ , entonces  $f(x) > C$ . Sea  $K = \max\{K', K''\}$ , entonces si  $x > K$

$$g(x) > \frac{2C'}{3L} = C.$$

□



**Ejemplo 3.23.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 + x + 1)$ . Tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + 1}{x^2} = 3 > 0.$$

Como  $x^2 \rightarrow \infty$ , tenemos que  $3x^2 + x + 1 \rightarrow \infty$ .

**Ejemplo 3.24.** Demostrar que existe  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\exists \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  y no existe  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ . Consideremos

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \in (-1, 0) \\ 0, & x \in [0, 1) \end{cases}.$$

Tenemos que el límite por la izquierda no existe pues podemos coger dos subsucesiones convergentes a 0 cuyas imágenes converjan a cosas distintas. Por ejemplo,

$$x_n = \frac{-1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad f(x_n) = 1 \rightarrow 1.$$

$$y_n = \frac{-1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad f(y_n) = -1 \rightarrow -1.$$

**Ejemplo 3.25.** Sea  $x_n > 0$  con  $x_n \rightarrow 0$ . Esta sucesión no tiene por qué ser decreciente pues puede dar saltitos. Considera la sucesión

$$x_n = \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \dots$$

**Proposición 3.1.** Tenemos que  $x_n \rightarrow l$  si y solo si la subsucesión de los pares y la de los impares convergen al mismo límite.

*Demostración.* (i) La primera implicación es trivial, pues si  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$  cualquier subsucesión converge al mismo límite.

(ii) Sea  $\varepsilon > 0$ , entonces existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_1$ ,  $|x_{2n} - l| < \varepsilon$ . Similarmente, existe  $n_2 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_2$ ,  $|x_{2n-1} - l| < \varepsilon$ . Sea  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ . Si  $n \geq n_0$ ,

$$\begin{aligned} |x_{2n} - l| &< \varepsilon \\ |x_{2n-1} - l| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Entonces,  $x_n \rightarrow l$ .

□

**Observación.** Este criterio se puede extender a cualquier partición de  $\mathbb{N}$ .

**Ejemplo 3.26.** Calcular  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{2^j}$ . Aplicando el criterio del cociente

$$\frac{j+1}{2^{n+1}} \frac{2^n}{j} \rightarrow \frac{1}{2} < 1.$$

Por lo que converge. Tenemos que

$$\sum_{j=1}^n \frac{j}{2^j} = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^j 1 \right) \frac{1}{2^j} = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=k}^n \frac{1}{2^j} \right) = \sum_{k=1}^n 2 \left( \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} - 2 \frac{n}{2^{n+1}} \rightarrow 2.$$

## Capítulo 4

# Funciones continuas

**Definición 4.1** (Continuidad). Dada  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , y  $c \in \text{dom}(f)$ , se dice que  $f$  es **continua** en  $c$  si se verifican los siguientes enunciados equivalentes:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que si  $0 \leq |x - c| < \delta$ , entonces  $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ .
- $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  con  $x_n \rightarrow c$  se tiene que  $f(x_n) \rightarrow f(c)$ .

1

**Observación.** Si  $c \in \text{dom}(f)$  es un punto de acumulación, la definición de continuidad es equivalente a que

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

Si  $c \in \text{dom}(f)$  no fuera un punto de acumulación, entonces resulta trivial que  $f$  es continua en  $c$ .

**Observación.** Vamos a asumir que si  $a \in \text{dom}(f)$  y  $f$  es continua en  $a$ , existe  $r > 0$  tal que  $(a - r, a + r) \subset \text{dom}(f)$ .

La continuidad es una propiedad local de las funciones, es decir, se debe comprobar punto a punto.

**Definición 4.2.** Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $B \subset A$ . Se dice que  $f$  es continua en  $B$  si es continua en todos los puntos de  $B$ .

**Ejemplo 4.1.** ■ La función constante  $f(x) = a$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ . Pues, cogemos  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ , se tiene que  $|f(x) - f(y)| = |a - a| = 0 < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$ .

- La función identidad  $f(x) = x$  también es continua en todo  $\mathbb{R}$ . En efecto, si tomamos  $\delta = \varepsilon$ , tenemos que si  $|x - c| < \delta$ ,  $|f(x) - f(c)| = |x - c| < \varepsilon$ .

---

<sup>1</sup>La equivalencia de estas definiciones fue demostrada en el capítulo anterior.

**Proposición 4.1.** Sea  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $a \in \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$ , siendo  $f$  y  $g$  continuas en  $a$ . Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- (i)  $f + g$  es continua en  $a$ .
- (ii)  $\lambda f$  es continua en  $a$ .
- (iii)  $f \cdot g$  es continua en  $a$ .
- (iv) Si  $g(a) \neq 0$ ,  $\frac{f}{g}$  es continua en  $a$ .

*Demostración.* (i) Tenemos que  $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a)$ .

(ii)-(iv) El resto de demostraciones son análogas. □

**Ejemplo 4.2.** ■ Por estas reglas podemos deducir que las funciones polinómicas, es decir, funciones de la forma  $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ , son continuas en todo  $\mathbb{R}$ .

■ Las funciones racionales, es decir, de la forma

$$h(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m},$$

son continuas en los puntos donde  $Q(x) \neq 0$ .

**Teorema 4.1.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\text{Im}(f) \subset \text{dom}(g)$  y tal que  $f$  es continua en  $a$  y  $g$  es continua en  $f(a) \in \text{Im}(f) \subset \text{dom}(g)$ . Entonces, tenemos que  $g \circ f$  es continua en  $a$ . <sup>a</sup>.

<sup>a</sup>El límite de una composición de funciones no tiene por qué ser las composiciones de los límites

*Demostración.* Dado que  $g$  es continua, sea  $\varepsilon > 0$  y  $\delta_1 > 0$  tal que si  $|y - f(a)| < \delta_1$  tenemos que  $|g(y) - g(f(a))| < \varepsilon$ . Como  $f$  es continua en  $a$  tenemos que  $\exists \delta_2 > 0$  tal que si  $|x - a| < \delta_2$ , entonces  $|f(x) - f(a)| < \delta_1$ . □

**Teorema 4.2.** Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  continua e inyectiva en  $(a, b)$ . Si  $x_0 \in (a, b)$ , entonces  $f^{-1} : \text{Im}(f) \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $f(x_0)$ .

*Demostración.* Se verá el miércoles. □

**Ejemplo 4.3.** Consideremos  $f(x) = x^2$  con  $x > 0$ . Tenemos que  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$  con  $x > 0$ . Así, concluimos que  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$  es continua en todo  $x > 0$ .

**Ejemplo 4.4.** Consideremos  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ . Tenemos que  $f$  es continua en su dominio pues es composición de dos funciones continuas.

**Ejemplo 4.5.** Otras funciones continuas son  $\sin x, \cos x, \tan x, e^x$  y  $\ln x$ .

## 4.1. Discontinuidad de funciones

**Definición 4.3.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- (a) Se dice que  $f$  tiene una **discontinuidad evitable** en  $a$  si  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  y  $l \neq f(a)$ .
- (b) Se dice que  $f$  tiene una **discontinuidad de salto** en  $a$  si  $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  y  $\exists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  pero no coinciden.
- (c) Se dice que  $f$  tiene una **discontinuidad esencial** en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$  o no existe, o  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$  o no existe.

**Ejemplo 4.6.** Consideremos la función  $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ . Tenemos que  $\text{dom}(f) = \mathbb{R}/\{-1, 1\}$ . Al ser racional, tenemos que  $f$  es continua en  $\text{dom}(f)$ . A continuación, estudiamos los límites y las discontinuidades.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{2}.$$

Como existe el límite pero la función no está definida en  $x = 1$ , tenemos que la función presenta una discontinuidad evitable en  $x = 1$ . Estudiamos el límite en  $x = -1$ :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} = \infty.$$

Por tanto, en  $x = -1$  tenemos una discontinuidad esencial. Podemos estudiar también los límites en el infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+1} = 0.$$

**Definición 4.4** (Asíntotas). Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- (a) Se dice que  $f$  tiene una **asíntota vertical** en  $a \in \mathbb{R}$  si  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$  o  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ .
- (b) Se dice que  $f$  tiene una **asíntota horizontal** en si  $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$  o  $\exists \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m \in \mathbb{R}$ .
- (c) Se dice que  $y = ax + b$  es una **asíntota oblicua** de  $f$  si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - (ax + b) = 0$  o bien si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ .

**Observación.** En el ejemplo anterior, tenemos que  $f$  tiene una asíntota vertical en  $x = -1$  y que  $y = 0$  es una asíntota horizontal.

**Observación.** La definición (c) es equivalente a que  $\exists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$  y  $\exists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - ax = b$ . En efecto, tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \frac{f(x)}{x} - a \right).$$

Debe darse, necesariamente que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - a = 0$ . Así, tenemos que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ . Además, está claro que  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$ .

## 4.2. Funciones continuas en intervalos

**Teorema 4.3** (Teorema de Bolzano). Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en el intervalo  $[a, b]$ <sup>a</sup>. Si  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ .

<sup>a</sup>Es continua en  $[a, b]$  si  $\forall c \in (a, b)$ ,  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$  y  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$  y  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ .

*Demostración.* **Ejercicio para casa:** Demostrar el caso  $f(a) > 0 > f(b)$ . **Puede entrar en el examen.**

Sin pérdida de generalidad, asumimos que  $f(a) < 0 < f(b)$ . Definimos el conjunto

$$A = \{r \in [a, b] : \forall x \in [a, r], f(x) < 0\} \neq \emptyset.$$

Tenemos que  $A \neq \emptyset$  puesto que  $a \in A$ . Tenemos que  $b \notin A$ , pues  $f(b) > 0$  y  $r \leq b$ ,  $\forall r \in A$ . Por el axioma de completitud, tenemos que  $\exists c = \sup(A)$ . Podemos observar que  $a \leq c \leq b$ . Vamos a ver que  $f(c) = 0$ .

- Si  $f(c) < 0$ , tenemos que existe  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, tal que  $f(c) + \varepsilon < 0$ . Dado que  $f$  es continua en  $[a, b]$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $|x - c| < \delta$ ,  $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ . De aquí se deduce que

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon \iff f(x) < f(c) + \varepsilon < 0.$$

Así,  $\exists r = c + \frac{\delta}{2}$  tal que si  $x \in \left[a, c + \frac{\delta}{2}\right]$ , entonces  $f(x) < 0$ . Es decir,  $r \in A$ , pero  $r > c$ , por lo que hemos obtenido una contradicción.

- Si  $f(c) > 0$ , tenemos que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(c) - \varepsilon > 0$ . Dado que  $f$  es continua en  $[a, b]$ , tenemos que  $\exists \delta > 0$  tal que si  $|x - c| < \delta$  entonces  $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ . De aquí se deduce que

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon \iff f(x) > f(c) - \varepsilon > 0.$$

Ya hemos obtenido la contradicción, pues se supone que, dado que  $c = \sup(A)$ ,  $\forall \delta > 0$ ,  $\exists a \in A$  tal que  $c - \varepsilon < a$ . Si embargo, hemos obtenido que para el  $\delta$  anterior, si  $x \in (c - \delta, c + \delta)$ , entonces  $f(x) > 0$ , por lo que  $x \notin A$ .

Por tanto, debe ser que  $f(c) = 0$ . □

*Demostración.* Asumimos que  $f(a) < 0 < f(b)$ . Sea  $a_0 = a$  y  $b_0 = b$ . Ahora, consideremos el punto medio  $r = \frac{a_0 + b_0}{2}$ . Tenemos dos posibilidades.

- Si  $f(r) \geq 0$ , tomamos  $a_1 = a_0$  y  $b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ .
- Si  $f(r) < 0$ , tomamos  $a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$  y  $b_1 = b_0$ .

Así, en cualquier caso obtenemos que  $a_1 < b_1$ ,  $f(a_1) < 0 \leq f(b_1)$  y que  $b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$ .

Repetimos el proceso tomando  $r = \frac{a_1 + b_1}{2}$ . Si seguimos repitiendo el proceso obtenemos dos sucesiones:  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Así, para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que

$$a_n < b_n, \quad f(a_n) < 0 \leq f(b_n), \quad b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \dots = \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

Por construcción, tenemos que  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es creciente, por lo que existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ . Similarmente,  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es decreciente, por lo que existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ . Además, como  $a_n < b_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos que  $\alpha \leq \beta$  y

$$\beta - \alpha \leq b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \rightarrow 0.$$

Así,  $\alpha = \beta = c \in (a, b)$ . Dado que  $f$  es continua en  $[a, b]$ , tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(c) \leq 0$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(c) \geq 0$ , por lo que  $f(c) = 0$ .  $\square$

**Ejemplo 4.7.** Consideremos la ecuación

$$\frac{x^{15} + 7x^2 - 12 - x^2 \ln x}{\ln x} = 0 \Rightarrow x^{15} + 7x^2 - 12 - x^2 \ln x = 0.$$

Tenemos que  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x = 0$ . Además,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ . Es continua en el resto de los puntos. Por el teorema de Bolzano, la ecuación tiene al menos una solución.

**Corolario 4.1** (Teorema de la conexión). Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y sea  $f(a) < \lambda < f(b)$  (o  $f(a) > \lambda > f(b)$ ) entonces,  $\exists c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = \lambda$ .

*Demostración.* Sea  $f(a) < \lambda < f(b)$  (el otro caso se deja como **ejercicio**) y  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(x) = f(x) - \lambda$ . Tenemos que  $g(a) = f(a) - \lambda < 0$  y  $g(b) = f(b) - \lambda > 0$ . Aplicando el teorema de Bolzano, tenemos que  $\exists c \in (a, b)$  tal que  $g(c) = f(c) - \lambda = 0$ , esto es,  $f(c) = \lambda$ .  $\square$

**Ejemplo 4.8.** Consideremos la función

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} = \begin{cases} > 0, & x > -1, x \neq 1 \\ < 0, & x < -1 \end{cases}.$$

**Observación.** El teorema de la conexión, nos dice que cuando pintamos una función continua no va a haber saltos.

### 4.3. Propiedades de las funciones continuas

**Definición 4.5.** Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- (a) Se dice que  $f$  se dice **acotada** en  $A$  si  $\exists M > 0$  tal que  $|f(x)| < M, \forall x \in A$ .
- (b) Se dice que  $x_0 \in A$  es un **máximo** de  $f$  si  $f(x_0) \geq f(x), \forall x \in A$ .
- (c) Se dice que  $x_0 \in A$  es un **mínimo** de  $f$  si  $f(x_0) \leq f(x), \forall x \in A$ .

**Ejemplo 4.9.** Consideremos la función  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Tenemos que  $\text{dom}(f) = (0, \infty)$  y  $f$  es continua en su dominio. Tenemos que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ . Además, se ve que  $f$  es decreciente. Esta función no está acotada superiormente, por lo que no tiene máximo. A pesar de estar acotada inferiormente, no tiene mínimo.

**Teorema 4.4.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[a, b]$ .

- (a)  $f$  está acotada.
- (b)  $f$  tiene al menos un máximo.
- (c)  $f$  tiene al menos un mínimo.

*Demostración.* (a) Supongamos que  $f$  no está acotada superiormente. Tenemos que  $\forall N \in \mathbb{N}$ ,  $\exists a_n \in [a, b]$  tal que  $f(a_n) > N$ . Cogemos la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [a, b]$ . Entonces, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, existe  $\{a_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergente a  $l \in [a, b]$ . Dado que  $f$  es continua en el intervalo  $[a, b]$ , tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_{n_j}) = f(l)$  pero a la vez  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_{n_j}) = \infty$ .

(b) Se hace de forma análoga a (c).

(c) Por (a),  $f$  está acotada. Consideramos el conjunto  $A = \{f(x) : x \in [a, b]\} \neq \emptyset$ , que está acotado por  $M > 0$ . Entonces, existe  $\beta = \inf(A)$ . Si  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos que  $\beta + \frac{1}{n}$  no es ínfimo, por lo que existe  $a_n \in [a, b]$  tal que  $\beta \leq f(a_n) < \beta + \frac{1}{n}$ . Así, por el teorema de Bolzano-Weierstrass,  $\exists \{a_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \rightarrow \alpha \in [a, b]$  y, por continuidad,

$$\beta \leq f(a_{n_j}) < \beta + \frac{1}{n_j} \Rightarrow \beta \leq f(\alpha) \leq \beta \Rightarrow f(\alpha) = \beta.$$

Así,  $\alpha$  es el mínimo que buscábamos. □

**Definición 4.6** (Monotonía). (a) Se dice que  $f$  es **monótona creciente** si  $\forall x < y, f(x) \leq f(y)$ . Se dice que es **estrictamente creciente** si  $f(x) < f(y)$ .



**(b)** Se dice que  $f$  es **monótona decreciente** si  $\forall x < y, f(x) \geq f(y)$ . Se dice que es **estrictamente decreciente** si  $f(x) > f(y)$ .

**Observación.** Si  $f$  es estrictamente monótona, entonces es inyectiva. En efecto, si  $x \neq y$ ,

$$\begin{aligned} x < y &\Rightarrow f(x) < f(y) \text{ o } f(x) > f(y) \\ x > y &\Rightarrow f(x) > f(y) \text{ o } f(x) < f(y) \end{aligned}$$

**Lema 4.1.** Si  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  es continua e inyectiva, entonces es monótona.

*Demostración.* Supongamos que no es monótona. Entonces, para  $x_1 < x_2 < x_3$  debe ocurrir una de las siguientes opciones:

- $f(x_1) < f(x_2)$  y  $f(x_3) < f(x_1)$ .
- $f(x_1) > f(x_2)$  y  $f(x_3) > f(x_2)$ .

En cualquier caso, si  $\lambda \in (\min\{f(x_1), f(x_2), f(x_3)\}, \max\{f(x_1), f(x_2), f(x_3)\})$ , por el teorema de la conexión, existe más de un punto  $x \in (x_1, x_2)$  tal que  $f(x) = \lambda$ .  $\square$

**Teorema 4.5** (Teorema de la función inversa). Sea una función  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  definida sobre todo un intervalo, inyectiva y continua en  $(a, b)$ . Su función inversa  $f^{-1}$  es continua en todo su dominio.

*Demostración.* Sea  $c \in (a, b)$  y consideremos  $f(c) \in \text{dom}(f^{-1})$ . Sea  $\varepsilon > 0$ . Podemos encontrar  $r > 0$  tal que

$$c - \varepsilon < c - r < c < c + r < c + \varepsilon \text{ y } (c - r, c + r) \subset (a, b).$$

Entonces, de la continuidad de  $f$  y por ser inyectiva tenemos que

$$f(c - r) < f(c) < f(c + r) \text{ o } f(c - r) > f(c) > f(c + r).$$

Consideremos el primer caso (el otro caso se demuestra de forma análoga). Cogemos

$$\delta = \min\{f(c) - f(c - r), f(c + r) - f(c)\} > 0.$$

Entonces, tenemos que si  $|y - f(c)| < \delta$ , existe  $x \in (c - r, c + r)$  tal que  $f(x) = y$ . Luego, por ser  $f^{-1}$  inyectiva, si  $|y - f(c)| < \delta$ , tenemos que

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(f(c))| = |x - c| < r < \varepsilon.$$

$\square$

## 4.4. Continuidad Uniforme

**Definición 4.7** (Continuidad uniforme). Sea una función  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Se dice que  $f$  es **uniformemente continua** en el conjunto  $A$  si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que si  $x, y \in A$  y  $|x - y| < \delta$ , entonces  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

**Observación.** ■ La continuidad uniforme se define sobre todo un conjunto, no es una propiedad local como la continuidad.

- Si  $f$  es uniformemente continua en  $I$  (intervalo o semirrecta), entonces  $f$  es continua en cada punto de  $I$ .

**Ejemplo 4.10.** Consideremos la función  $f = \frac{1}{x}$ ,  $x \in (0, 1)$ . Tenemos que  $f$  es continua en cada punto de  $(0, 1)$ , pero no es uniformemente continua en el intervalo. En efecto, sea  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  y sea  $\delta > 0$ . Sea  $x_n = \frac{1}{n}$  y sean  $n, m \in \mathbb{N}$  suficientemente grandes y distintas. Entonces, tenemos que

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| < \delta.$$

Sin embargo,  $\left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{m}\right) \right| = |n - m| \geq 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}$ .

**Ejemplo 4.11.** Consideremos la función  $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(x) = x^2$ . Sea  $\delta > 0$ . Tenemos que

$$|f(x) - f(x + \delta)| = |x^2 - (x^2 + 2\delta x + \delta^2)| \geq 2x\delta \rightarrow \infty.$$

Así,  $x^2$  no puede ser uniformemente continua en el intervalo  $(1, \infty)$ .

Resulta útil formular una condición equivalente para decir que  $f$  no es uniformemente continua en  $A$ .

**Proposición 4.2** (Criterios de continuidad no uniforme). Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces son equivalentes:

- (i)  $f$  no es uniformemente continua en  $A$ .
- (ii) Existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\forall \delta > 0$ , existen  $x, y \in A$  tales que si  $|x - y| < \delta$ , entonces  $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$ .
- (iii) Existe  $\varepsilon > 0$  y  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  tales que  $x_n - y_n \rightarrow 0$  pero  $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Ejemplo 4.12.** Vamos a demostrar que  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  no es uniformemente continua en el intervalo  $(0, \infty)$ . En efecto, podemos considerar las sucesiones  $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$  y  $y_n = \frac{1}{\pi n}$ , tales que  $x_n - y_n \rightarrow 0$  pero

$$f(x_n) - f(y_n) = 1 - 0 = 1 \geq 1.$$

**Teorema 4.6.** Sea una función  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , continua en el intervalo  $[a, b]$ . Entonces,  $f$  es uniformemente continua sobre  $[a, b]$ .

*Demostración.* Supongamos que  $f$  no es uniformemente continua. Entonces, podemos encontrar un  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $\frac{1}{n}$  existen  $x_n, y_n \in [a, b]$  tales que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Por el teorema de Bolzano-Weierstrass podemos encontrar dos subsucesiones (primero una y de ésta sacamos la segunda) de modo que  $x_{n_k} \rightarrow x$  y  $y_{n_k} \rightarrow y$ . Así, está claro que  $x_{n_k} \rightarrow x$  y que  $x, y \in [a, b]$ . También tenemos que  $x = y$ , pues

$$0 \leq |x - y| \leq |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - y_{n_k}| + |y_{n_k} - y| \leq |x - x_{n_k}| + \frac{1}{n_k} + |y_{n_k} - y| \rightarrow 0.$$

Ahora, de la continuidad de  $f$  se tiene que  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$  y  $f(y_{n_k}) \rightarrow f(y) = f(x)$ . Esto da una contradicción, pues también tenemos que,  $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$ . Esto es una contradicción.  $\square$

**Definición 4.8** (Función de Lipschitz). Se dice que una función  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una **función de Lipschitz** si existe  $K > 0$  tal que

$$|f(x) - f(y)| < K |x - y|, \quad \forall x, y \in A.$$

**Observación.** La condición de Lipschitz se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| < K, \quad x, y \in A, \quad x \neq y.$$

Es decir, una función es de Lipschitz si y solo si las pendientes de todos los segmentos de recta que unen dos puntos de la gráfica de  $y = f(x)$  están acotadas por algún número  $K$ .

**Teorema 4.7.** Si  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de Lipschitz, entonces es uniformemente continua en  $A$ .

*Demostración.* Dado que  $f$  satisface la condición de Lipschitz, tenemos que existe  $K > 0$  tal que  $\forall x, y \in A$

$$|f(x) - f(y)| < K |x - y|.$$

Sea  $\varepsilon > 0$ , cogemos  $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ , así si  $|x - y| < \delta$  tenemos que

$$|f(x) - f(y)| < K |x - y| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

$\square$

**Ejemplo 4.13.** ■ Consideremos la función  $f(x) = x^2$  definida en el intervalo  $A = [0, b]$ . Entonces  $f$  es de Lipschitz, en efecto

$$|f(x) - f(y)| = |x + y| |x - y| < 2b |x - y|.$$

Por tanto, es uniformemente continua en  $A$  (también podríamos haber llegado a esta conclusión con el teorema 4.6).

- No todas las funciones uniformemente continuas son de Lipschitz. En efecto, consideremos  $f(x) = \sqrt{x}$  en el intervalo  $I = [0, 2]$ . Dado que  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$ , se tiene que es uniformemente continua en  $I$ , sin embargo, no es de Lipschitz.
- En algunos casos es útil combinar el teorema de la continuidad uniforme y las funciones Lipschitz para demostrar la continuidad uniforme de una función en un conjunto. Por ejemplo, consideremos  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x \geq 0$ . Tenemos que  $f$  es uniformemente continua en el intervalo  $I = [0, 2]$  (por el ejemplo anterior). Además, en  $J = [1, \infty)$  tenemos que es de Lipschitz:

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2} |x - y|.$$

Dado que  $f$  es uniformemente continua en  $I$  y  $J$ , tomando  $\delta = \min\{1, \delta_I(\varepsilon), \delta_J(\varepsilon)\}$ , tenemos que  $f$  es uniformemente continua en  $\mathbb{R}^+$ .<sup>2</sup>

**Teorema 4.8.** Si  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es uniformemente continua en  $A$  y  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  es de Cauchy, entonces  $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy.

*Demostración.* Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  de Cauchy y sea  $\varepsilon > 0$ . Tenemos que dado que  $f$  es uniformemente continua,  $\exists \delta > 0$  tal que  $|x - y| < \delta$  implica que  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ . Así, como  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que  $\forall n, m \geq n_0$  se tiene que  $|x_n - x_m| < \delta$ . Así, se tiene que  $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ . □

**Teorema 4.9** (Teorema de la extensión continua). Una función  $f$  es uniformemente continua en el intervalo  $(a, b)$  si y solo si se puede definir en los puntos terminales  $a$  y  $b$  de tal modo que la función extendida es continua en  $[a, b]$ .

*Demostración.* ( $\Leftarrow$ ) Si podemos definir

$$F(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), & x = a \\ f(x), & x \in (a, b) \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), & x = b \end{cases},$$

con  $F$  continua, tenemos que  $F$  es uniformemente continua en  $[a, b]$  y por tanto lo es en  $(a, b)$ . Dado que  $f = F|_{(a, b)}$ , está claro que  $f$  es uniformemente continua en  $(a, b)$ .

<sup>2</sup>A la hora de demostrar que una función es uniformemente continua en un intervalo, si se va a hacer el procedimiento anterior, es útil no utilizar intervalos disjuntos, sino intentar crear solapamientos.

( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $f$  es uniformemente continua en  $(a, b)$ . Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (a, b)$  con  $x_n \rightarrow a$ , tenemos que es de Cauchy. Por ser  $f$  uniformemente continua,  $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  también es de Cauchy, por lo que converge a un valor  $l \in \mathbb{R}$ . Si  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con  $y_n \rightarrow a$ , tenemos que, por la continuidad uniforme de  $f$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 + l = l.$$

Así, por la caracterización del límite por sucesiones, se tiene que existe  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  y se puede definir  $F(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  como se hizo en el apartado anterior. El argumento para  $b$  es análogo. □

## 4.5. Funciones monótonas

**Teorema 4.10.** Sea  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $I$  es un intervalo o semirrecta y  $f$  es monótona en  $I$  y está acotada. Entonces, para cada  $x_0 \in I$  existen  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ .

*Demostración.* Supongamos que  $f$  es creciente (el caso decreciente se hace de forma análoga). Salvo en los extremos del intervalo, donde existen únicamente los límites laterales y donde se usa la acotación de  $f$ . Sea  $x_0 \in I$  tal que existe  $\delta > 0$  con  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$ <sup>3</sup>. Sea  $A = \{f(x) : x \in (x_0 - \delta, x_0)\}$ . Dado que  $f$  es monótona creciente, tenemos que

$$f(x) \leq f(x_0 + \delta), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0).$$

Sea  $B = \{f(x) : x \in (x_0, x_0 + \delta)\}$ . Así, tenemos que

$$f(x_0 - \delta) \leq f(x), \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

Entonces, por el axioma del supremo<sup>4</sup>, tenemos que existe  $\alpha = \sup(A)$  y  $\beta = \inf(B)$ . En concreto, tenemos que  $\alpha = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  y  $\beta = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ . En efecto, si  $\varepsilon > 0$ , existe  $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0)$  tal que  $\alpha - \varepsilon < f(x_1) \leq \alpha$ . Sea  $r = |x_0 - x_1| > 0$ . Si  $0 < x - x_0 < r$ , entonces,  $\alpha - \varepsilon < f(x_1) < f(x) < \alpha$ . Así,  $|\alpha - f(x)| < \varepsilon$ . Por definición de límite lateral,  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \alpha$ . En los límites del intervalo, solo se considera el conjunto  $A$  o  $B$  y se usa la hipótesis de acotación. □

**Teorema 4.11.** Sea  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $I$  es un intervalo o semirrecta. Sea  $f$  monótona en  $I$  y acotada, y sean  $x_1, x_2 \in I$ . Entonces, si  $x_1 < x_2$  y  $f$  es monótona creciente, entonces  $\lim_{x \rightarrow x_1^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_2^-} f(x)$ . Si  $f$  es monótona decreciente, entonces  $\lim_{x \rightarrow x_1^+} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_2^-} f(x)$ .

<sup>3</sup>Basta con que sea un punto de acumulación.

<sup>4</sup>Demstrar que  $A$  y  $B$  están acotados se puede hacer utilizando la hipótesis del teorema que dice que  $f$  está acotada.

*Demostración.* Supongamos que  $f$  es creciente (el otro caso se hace de forma análoga). Del teorema anterior tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow x_1^+} f(x) = \inf \{f(x) : x \in (x_1, x_1 + \delta)\} = \beta$$

$$\lim_{x \rightarrow x_2^-} f(x) = \sup \{f(x) : x \in (x_2 - \delta, x_2)\} = \alpha.$$

Podemos tomar el mismo  $\delta > 0$  en ambos casos tal que  $(x_1, x_1 + \delta) \cap (x_2 - \delta, x_2) = \emptyset$ . Dado que  $f$  es creciente, si  $y_1 \in (x_1, x_1 + \delta)$  y  $y_2 \in (x_2 - \delta, x_2)$ , por lo que  $y_1 < y_2$ , tenemos que  $f(y_1) \leq f(y_2)$  y, está claro que  $\beta \leq \alpha$ .  $\square$

**Observación.** De estos dos resultados, podemos concluir que las discontinuidades de las funciones monótonas acotadas son discontinuidades de salto.

**Teorema 4.12.** Si  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $I$  es un intervalo o semirrecta, y  $f$  es monótona y acotada, entonces si

$$E = \{x \in I : f \text{ no es continua en } x\},$$

tenemos que  $|E| \leq |\mathbb{N}|$ .

*Demostración.* Si  $f$  es monótona y  $f$  no es continua en  $x$ , debe ser que en  $x$  tiene una discontinuidad de salto. Supongamos que  $f$  es creciente. Sea  $y \in E$ . Por el teorema anterior tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow y^-} f(x) < r_y < \lim_{x \rightarrow y^+} f(x),$$

donde  $r \in \left( \lim_{x \rightarrow y^-} f(x), \lim_{x \rightarrow y^+} f(x) \right) \cap \mathbb{Q}$ . Consideremos la aplicación

$$T : E \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$y \rightarrow T(y) = r_y.$$

Vamos a ver que  $T$  es inyectiva. Sean  $y_1, y_2 \in E$ , con  $y_1 \neq y_2$  y  $y_1 < y_2$ . Entonces,

$$r_{y_1} < \lim_{x \rightarrow y_1^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow y_2^-} f(x) < r_{y_2}.$$

Así,  $T(y_1) = r_{y_1} \neq r_{y_2} = T(y_2)$ .  $\square$

**Ejemplo 4.14.** Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, 1) \cap \mathbb{Q} \\ 1, & x \in (0, 1) / \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Esta función no es continua en ningún punto de  $(0, 1)$ .

## Capítulo 5

# La Derivada

Recordamos que la ecuación de la recta que pasa por dos puntos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$  será

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1.$$

**Definición 5.1** (Derivada). Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $a \in \text{dom}(f)$  tal que  $\exists r > 0$  tal que  $(a - r, a + r) \subset \text{dom}(f)$ . Se dice que  $f$  es **derivable** en el punto  $x = a$  si existe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

Entonces, se dice que  $f$  es **derivable** en  $a$ .

**Observación.** Tenemos que la derivabilidad, al igual que la continuidad, es una propiedad local. Se dice que  $f$  es derivable en  $A \subset \text{dom}(f)$  si  $f$  es derivable en cada  $a \in A$ .

**Observación.** Se llama función derivada de  $f$  a la función

$$\begin{aligned} f' : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f'(x). \end{aligned}$$

Tenemos que  $\text{dom}(f') = \{x : f(x) \text{ derivable en } x\}$ .

**Ejemplo 5.1.** ■ Si consideramos  $f(x) = a \in \mathbb{R}$ , tenemos que

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a - a}{h} = 0.$$

■ Consideremos  $f(x) = x$ . Tenemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h} = 1.$$

- La función  $f(x) = |x|$  no es derivable en  $x = 0$ .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & h \rightarrow 0^+ \\ -1, & h \rightarrow 0^- \end{cases}.$$

**Observación.** Si  $x = x_0 + h$ , tenemos que  $h = x - x_0$ , así

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

**Definición 5.2** (Recta Tangente). Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivable en  $a \in A$ . Se llama **recta tangente** de la gráfica de  $f$  en el punto  $(a, f(a))$  a la recta

$$r(x) = f'(a)(x - a) + f(a).$$

**Teorema 5.1.** Sea  $r(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$  la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(a, f(a))$ . Entonces se cumple que:

(a) La recta  $r$  pasa por  $(a, f(a))$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - r(x)}{x - a} = 0.$

(c) Si  $s(x)$  es una recta que pasa por  $(a, f(a))$  y  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - s(x)}{x - a} = 0$ , entonces  $r(x) = s(x)$ .

(d)  $r'(a) = f'(a)$ .

*Demostración.* (a) Tenemos que  $r(a) = f(a)$ .

(b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - r(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (f'(a)(x - a) + f(a))}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \\ &= f'(a) - f'(a) = 0. \end{aligned}$$

1

(c) Sea  $s(x) = d(x - a) + f(a)$  y  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - s(x)}{x - a} = 0$ . Entonces,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - r(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - s(x) + s(x) - r(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{s(x) - r(x)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{d(x - a) + f(a) - f'(a)(x - a) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (d - f'(a)) = d - f'(a). \end{aligned}$$

Así,  $d = f'(a)$  y  $r(x) = s(x)$ .

<sup>1</sup>Esto significa que  $f(x) - r(x) \rightarrow 0$  mucho más rápido que  $x - a \rightarrow 0$ , lo que nos asegura que la tangente es una buena aproximación a la curva.



(d) Tenemos que

$$r'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x) - r(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(a)(x - a) + f(a) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

□

**Ejemplo 5.2.** Consideremos la función  $f(x) = x^3$ , que es continua en  $\mathbb{R}^3$  y monótona creciente. Sabemos que  $f(x) < 0$  si  $x < 0$  y  $f(x) > 0$  si  $x > 0$ . Tenemos que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ . Calculamos la derivada en un punto  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2.$$

Así, la ecuación de la tangente en un punto  $x_0 \in \mathbb{R}$  será

$$y = 3x_0^2(x - x_0) + x_0^3.$$

**Teorema 5.2.** Sea  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $I$  es un intervalo o semirrecta, y  $a \in I$ . Si existe  $f'(a)$ , entonces  $f$  es continua en  $a$ .

*Demostración.* Tenemos que  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \in \mathbb{R}$ . Tenemos que  $f$  es continua en  $a$  si  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , es decir, si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) = 0$ . Supongamos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) \neq 0$ . Entonces, existe  $\varepsilon > 0$  y  $x_n \rightarrow a$  tal que  $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ . Así,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = \pm\infty.$$

Esto es una contradicción, puesto que  $f'(a) \in \mathbb{R}$ .

□

**Ejemplo 5.3.** El recíproco no es cierto. Recordemos que  $f(x) = |x|$  es continua en  $x = 0$  pero no es derivable en este punto.

**Teorema 5.3.** Sea  $f, g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $I$  intervalo o semirrecta y  $a \in I$ , tales que existen  $f'(a)$  y  $g'(a)$ . Sea  $\lambda > 0$ .

(a)  $\exists (f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$

(b)  $\exists (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a).$

(c)  $\exists (f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$

(d) Si  $g(a) \neq 0$ ,  $\exists \left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}.$

(e) Si  $g(a) \neq 0$ ,  $\exists \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$

*Demostración.* (a) Tenemos que

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + g(x) - (f(a) + g(a))}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= f'(a) + g'(a).\end{aligned}$$

(b) Tenemos que

$$(\lambda f)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\lambda f(x) - \lambda f(a)}{x - a} = \lambda \left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = \lambda f'(a).$$

(c) Tenemos que

$$\begin{aligned}(f \cdot g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} g(x) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g(a)f'(a) + f(a)g'(a).\end{aligned}$$

(d) Tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g}\right)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x - a} \frac{g(a) - g(x)}{g(a)g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} -\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \cdot \frac{1}{g(x)g(a)} = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}.\end{aligned}$$

(e) Podemos aplicar (c) y (d) para deducirla.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a) \frac{1}{g(a)} + f(a) \left(-\frac{g'(a)}{g^2(a)}\right) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

□

**Ejemplo 5.4. Hoja 3 - Problema 7.** Si  $g(0) = g'(0) = 0$ , se define

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Vamos a ver si  $f$  es continua. Tenemos que (esto fue demostrado en un ejercicio de las hojas)

$$|f(x)| = \left| g(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |g(x)| \rightarrow 0.$$

Por tanto,  $|f(x)| \rightarrow 0$  y es continua en  $x = 0$ . Entonces, tenemos que

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

El límite anterior se deduce de que

$$\left| \frac{g(x)}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq \left| \frac{g(x)}{x} \right| \rightarrow 0.$$

**Teorema 5.4.** Sea  $f(x) = x^n$  con  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces, existe  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

*Demostración.* Se demuestra por inducción. Si  $n = 1$  es trivial. Suponemos que es cierto para  $n$ . Entonces, tenemos que si  $f(x) = x^{n+1} = x^n \cdot x$ ,

$$f'(x) = (x^n)' \cdot x + x^n (x)' = nx^{n-1} \cdot x + x^n = nx^n + x^n = (n+1)x^n.$$

□

**Corolario 5.1.** Sea  $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ , con  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces, si  $x \neq 0$ ,  $f'(x) = -nx^{-n-1}$ .

*Demostración.* Aplicando el apartado (c) del **Teorema 5.3**,

$$f'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{(n-1)-2n} = -nx^{-n-1}.$$

□

**Ejemplo 5.5.** Consideremos  $f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x^2 - 1}$ . Entonces, tenemos que si  $x \neq \pm 1$ ,

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 1)(x^2 - 1) - (x^3 + x + 1)(2x)}{(x^2 - 1)^2}.$$

**Teorema 5.5** (Regla de la cadena). Sea  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\text{Im}(f) \subset \text{dom}(g)$  y  $a \in \text{dom}(f)$ , tal que existe  $f'(a)$  y existe  $g'(f(a))$ . Entonces, existe  $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$ .

*Demostración.* Tenemos que

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{f(x) - f(a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \end{aligned}$$

Sea  $h = f(x) - f(a)$ , entonces  $h \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow a$ . Así,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(a) + h) - g(f(a))}{h} = g'(f(a)).$$

Por otro lado, es trivial que  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ . Así, hemos obtenido que  $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$ . □

**Ejemplo 5.6.** Consideremos la función  $f(x) = (x^2 - 3)^{27}$ . Aplicando el teorema anterior,

$$f'(x) = 27(x^2 - 3)^{26} \cdot 2x = 54x(x^2 - 3)^{26}.$$

**Teorema 5.6** (Teorema de la función inversa). Sea  $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  derivable en  $(\alpha, \beta)$  y  $f'$  es continua en  $(\alpha, \beta)$  y para  $a \in (\alpha, \beta)$ ,  $f'(a) \neq 0$ . Entonces, en un intervalo centrado en  $f(a)$  existe  $f^{-1}$ , que es derivable y  $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$ .

*Demostración.* Si  $f'(a) \neq 0$  tenemos que  $f'(a) > 0$  o  $f'(a) < 0$ . Sin pérdida de generalidad, asumamos que  $f'(a) > 0$  (como  $f'$  es continua, en un intervalo  $(a - \delta, a + \delta)$ ,  $f'(x) > 0$ ), entonces podemos demostrar que  $f$  es inyectiva en  $(a - \delta, a + \delta)$  (por el teorema del valor medio). Tenemos que  $f$  es continua (por ser derivable) e inyectiva, por lo que  $f$  es estrictamente monótona en  $(a - \delta, a + \delta)$  y, por tanto, existe  $f^{-1}$ . Consideremos la aplicación

$$f : (a - \delta, a + \delta) \rightarrow (f(a - \delta), f(a + \delta)).$$

Tenemos que  $f^{-1}$  es continua en  $(f(a - \delta), f(a + \delta))$ . Entonces, si  $y = f(a)$ ,  $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(a)) = a$ . Entonces, tenemos que

$$\lim_{y \rightarrow f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

□

**Observación.** Sea  $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$  con  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces,  $f^{-1}(x) = x^n$ . Así, tenemos que

$$f'(x) = \frac{1}{n \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

En general, si  $n, m \in \mathbb{N}$  y  $f(x) = x^{\frac{n}{m}} = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n$ , entonces aplicando la regla de la cadena,

$$f'(x) = n \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}.$$

**Ejemplo 5.7.** Consideremos la función  $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$ :

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}} \cdot \frac{(x+1)^2 - 2x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Consideremos ahora las funciones  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$  y  $\tan(x)$ . Más adelante se demostrarán la siguiente igualdad:

$$(\sin x)' = \cos x.$$

De esta se pueden deducir las otras derivadas. Tenemos que  $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ , por tanto, derivando a ambos lados:

$$(\cos x)' = \frac{-2 \sin x \cos x}{2\sqrt{1 - \sin^2 x}} = -\sin x.$$

Por definición, tenemos que  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , por tanto,

$$(\tan x)' = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Vamos a estudiar ahora las funciones inversas:  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\arctan x$ . Si  $f(x) = \arctan x$ , tenemos que  $f^{-1}(x) = \tan x$ . Aplicando el teorema de la función inversa,

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Sea  $f(x) = e^x$ . Más adelante se demostrará que  $f'(x) = e^x$ . Lo haremos introduciendo la función logarítmica, que es la inversa de la exponencial.

**Definición 5.3** (Funciones hiperbólicas). Sea llama **coseno hiperbólico** a la función  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ . Similarmente, se llama **seno hiperbólico** a la función  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ . Finalmente, se define **tangente hiperbólica** a la función  $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ .

Calculamos sus derivadas.

$$\begin{aligned} (\cosh x)' &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \\ (\sinh x)' &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \\ (\tanh x)' &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x. \end{aligned}$$

**Observación.** Podemos observar que

$$1 = \cosh^2 x - \sinh^2 x$$

Ahora podemos calcular las derivadas de sus inversas aplicando el teorema de la función inversa.

$$\begin{aligned} (\operatorname{arcsinh} x)' &= \frac{1}{\cosh(\operatorname{arcsinh} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(\operatorname{arcsinh} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \\ (\operatorname{arcosh} x)' &= \frac{1}{\sinh(\operatorname{arcosh} x)} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\operatorname{arcosh} x) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ (\operatorname{arctanh} x)' &= \frac{1}{1 - \tanh^2(\operatorname{arctanh} x)} = \frac{1}{1 - x^2}. \end{aligned}$$

**Definición 5.4** (Extremos relativos). Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- (a) Se dice que  $x_0$  es un **máximo relativo** si existe  $r > 0$  tal que  $(x_0 - r, x_0 + r) \subset A$ , y allí  $f(x_0) \geq f(x)$  para  $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ .
- (b) Se dice que  $x_0$  es un **mínimo relativo** si existe  $r > 0$  tal que  $(x_0 - r, x_0 + r) \subset A$ , y allí  $f(x_0) \leq f(x)$  para  $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ .

**Observación.** Los máximos y mínimos absolutos de una función definida en un intervalo o semirrecta abierta son automáticamente extremos relativos. Sin embargo, el recíproco no tiene por qué ser cierto.

**Ejemplo 5.8.** Si consideramos la función  $f(x) = |x|$  definida en  $[-1, 1]$ , tenemos que  $f$  tiene un mínimo relativo en  $x = 0$ , que también es un mínimo absoluto.

**Teorema 5.7.** Sea  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un intervalo o semirrecta, con  $f$  derivable en  $I$ . Sea  $x_0 \in I$  un extremo relativo. Entonces,  $f'(x_0) = 0$ .

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, se  $x_0$  un máximo local. Entonces existe  $r > 0$  tal que  $(x_0 - r, x_0 + r) \subset I$ .

- Si  $x > x_0$  tenemos que, dado que  $f$  es derivable en  $I$ ,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leq 0.$$

- Si  $x < x_0$ , tenemos que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0.$$

Así, como  $\exists f'(x_0)$ , debe ser que  $f'(x_0) = 0$ . □

**Ejemplo 5.9.** (i) Consideremos la función  $f(x) = |x|$  definida en  $(-1, 1)$ . Tiene un mínimo local en  $x = 0$  pero no es derivable en este punto.

(ii) El recíproco del teorema anterior no es cierto. En efecto, consideremos la función  $f(x) = x^3$  definida en  $(-1, 1)$ . Tenemos que  $f'(0) = 0$ , pero no tiene un extremo relativo en ese punto.

**Observación.** Para buscar máximos y mínimos de una función buscamos en:

- Los extremos del dominio.
- Los puntos donde no es continua o derivable.
- Los puntos en los que se anula la derivada.

**Teorema 5.8** (Teorema de Rolle). Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ . Si  $f(a) = f(b)$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .

*Demostración.* Si  $f$  es constante, es trivial puesto que  $\forall x \in (a, b)$  se tiene que  $f'(x) = 0$ . En caso contrario, dado que  $f$  es continua en  $[a, b]$  existe  $x_0 \in (a, b)$  máximo o mínimo local con  $f(x_0) > f(a)$  o  $f(x_0) < f(a)$ . Por el teorema anterior, dado que  $x_0$  es un extremo local y  $f$  es derivable en  $(a, b)$ , debe ser que  $f'(x_0) = 0$ .  $\square$

**Teorema 5.9** (Teorema del valor medio). Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[a, b]$  y derivable en el intervalo  $(a, b)$ . Entonces, existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

*Demostración.* Sea  $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$ . Tenemos que  $g$  es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ . Además, dado que  $g(a) = g(b) = 0$ , por el teorema de Rolle, existe  $c \in (a, b)$  tal que  $g'(c) = 0$ . Es decir,

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$\square$

**Corolario 5.2.** (a) Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f$  continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ . Si  $f'(x) = 0$ ,  $\forall x \in (a, b)$ , entonces  $f$  es constante.

(b) Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , ambas continuas en  $[a, b]$  y derivables en  $(a, b)$ . Si  $f'(x) = g'(x)$ ,  $\forall x \in (a, b)$ , entonces existe  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = g(x) + k$ ,  $\forall x \in [a, b]$ .

(c) Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$  tal que  $f'(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in (a, b)$ , entonces  $f$  es inyectiva <sup>a</sup>.

<sup>a</sup>El recíproco también es cierto.

*Demostración.* (a) Sean  $x, y \in [a, b]$ , entonces  $f$  es continua en  $[x, y]$  y derivable en  $(x, y)$ . Por el teorema del valor medio, existe  $c \in (x, y)$  con  $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y) = 0$ , así,  $f(x) = f(y)$ ,  $\forall x, y \in [a, b]$ .

(b) Consideremos la función  $h(x) = f(x) - g(x)$ . Entonces,  $h$  es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ . Además, como  $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ , tenemos, por (a), que  $h(x) = k \in \mathbb{R}$ , por lo que  $f(x) = g(x) + k$ .

(c) Si  $x, y \in [a, b]$  (con  $x \neq y$ ), entonces  $f : [x, y] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $[x, y]$  y derivable en  $(x, y)$ . Por el teorema del valor medio, existe  $c \in (x, y)$  con  $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y) \neq 0$ , por lo que debe ser que  $f(x) \neq f(y)$ .  $\square$

**Ejemplo 5.10.** El teorema del valor medio sirve para estimar errores. Consideremos  $f(x) = \sqrt{x}$  y que conocemos  $\sqrt{x}$  pero no conocemos  $\sqrt{y}$ . Podemos entonces, estimar el valor de  $\sqrt{y}$  con la distancia  $|\sqrt{x} - \sqrt{y}|$ . Sabemos que existe  $c \in (x, y)$  tal que

$$f'(c)(x - y) = f(x) - f(y).$$

Si  $x, y > 1$ , entonces tenemos que

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}} |x - y| \leq \frac{1}{2} |x - y|.$$

Este procedimiento también sirve para ver que esta función es uniformemente continua en  $(1, \infty)$ , puesto que acabamos de ver que es de Lipschitz.

## 5.1. Regla de L'Hôpital

**Definición 5.5** (Curvas paramétricas). Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuas en  $[a, b]$ . Se llama **curva paramétrica** a los puntos  $C = \{(f(t), g(t)) : t \in [a, b]\}$ .

**Observación.** Si  $f(t) = t$ , tenemos una gráfica (podemos definir una función, puesto que a cada valor de  $x$  se le asigna sólo uno de  $y$ ).

**Observación.** Con tres funciones  $f(t), g(t), h(t)$ , podemos definir curvas en el espacio.

Vamos a estudiar la tangente de una curva paramétrica. Si cogemos dos puntos,  $t_0$  y  $t$ , podemos calcular la ecuación de la recta que pasa por esos puntos:

$$y(t) = \frac{g(t) - g(t_0)}{f(t) - f(t_0)} (x - f(t_0)) + g(t_0).$$

Tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g(t) - g(t_0)}{f(t) - f(t_0)} = \lim_{t \rightarrow t_0} \left( \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} \cdot \frac{t - t_0}{f(t) - f(t_0)} \right) = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}.$$

Entonces, concluimos que si  $C$  es una curva del plano y  $\exists f'$  y  $g'$  entonces la pendiente de la recta tangente por el punto  $(f(t_0), g(t_0))$  será  $\frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}$ . Es decir, esta recta tiene como vector director  $(f'(t_0), g'(t_0))$ .

Si tenemos una curva  $C$  que empieza en  $(f(a), g(a))$  y termina en  $(f(b), g(b))$ , nos gustaría decir que si  $c \in (a, b)$ , entonces

$$\frac{g'(c)}{f'(c)} = \frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Esto se enuncia en el siguiente teorema.



**Teorema 5.10** (Teorema del valor medio de Cauchy). Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuas en  $[a, b]$  y derivables en  $(a, b)$ . Entonces, existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$\frac{g'(c)}{f'(c)} = \frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)}.$$

*Demostración.* Sea  $h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$ . Dado que  $f$  y  $g$  son continuas y derivables, tenemos que  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ . Tenemos que  $h(a) = h(b) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$ . Aplicando el teorema de Rolle, tenemos que existe  $c \in (a, b)$  tal que  $h'(c) = 0$ . Es decir,

$$h'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)) \iff f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$

□

**Observación.** Si  $f(b) \neq f(a)$  y  $f'(c) \neq 0$ , el teorema anterior es equivalente a decir que

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$

**Observación.** Podemos ver que el teorema del valor medio es un caso particular de este teorema. En efecto, si tenemos que  $f(t) = t$ , entonces obtenemos el teorema del valor medio.

**Teorema 5.11** (Regla de L'Hôpital). Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f'(x) \neq 0$ , continuas en  $[a, b] \setminus \{x_0\}$  y derivables en  $(a, b) \setminus \{x_0\}$ , tales que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ . Si existe

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)}, \text{ entonces existe } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)}.$$

<sup>a</sup>Cuando decimos  $\lim_{x \rightarrow x_0}$ , realmente vale también para  $x_0^-, x_0^+$  y  $x_0$ .

*Demostración.* Vamos a estudiar los límites laterales (para demostrar el límite, basta con comprobar que los límites laterales coinciden). Sin pérdida de generalidad, estudiamos  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{g(x)}{f(x)}$ . Definimos  $g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x)$  y  $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ . Entonces, tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{g(x) - g(x_0)}{f(x) - f(x_0)}.$$

Tenemos que  $f, g : [x_0, x] \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas en  $[x_0, x]$  y derivables en  $(x_0, x)$ . Aplicando el teorema del valor medio de Cauchy, tenemos que existe  $c_x \in (x_0, x)$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{g(x) - g(x_0)}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{g'(c_x)}{f'(c_x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{g'(x)}{f'(x)}.$$

En efecto, si  $x \rightarrow x_0^+$  tenemos que  $c_x \rightarrow x_0^+$ , por lo que, dado que existe  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{g'(x)}{f'(x)}$  tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{g'(c_x)}{f'(c_x)} = \lim_{y \rightarrow x_0^+} \frac{g'(y)}{f'(y)}.$$

□

*Demostración.* Esta es una demostración alternativa. Al igual que antes, definimos  $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

y  $g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x)$ . Dado que existe  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{g'(x)}{f'(x)} = l \in \mathbb{R}$ , si  $\varepsilon > 0$  tenemos que existe un  $\delta > 0$

tal que si  $0 < x - x_0 < \delta$  entonces  $\left| \frac{g'(x)}{f'(x)} - l \right| < \varepsilon$ . Tenemos que, dado que  $f$  y  $g$  son continuas en  $[x_0, x_0 + \delta]$  y derivables en  $(x_0, x_0 + \delta)$ , entonces para cada  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  existe  $c_x \in (x_0, x)$  tal que

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{f(x) - f(x_0)} = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g'(c_x)}{f'(c_x)}.$$

Dado que  $c_x \in (x_0, x_0 + \delta)$ , tenemos que

$$\left| \frac{g(x)}{f(x)} - l \right| = \left| \frac{g'(c_x)}{f'(c_x)} - l \right| < \varepsilon.$$

□

**Observación.** Si existieran  $f'(x_0) \neq 0$  y  $g'(x_0)$ , la prueba sería muy sencilla. En efecto, tendríamos que serían continuas en  $x_0$  y por tanto

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{g'(x_0)}{f'(x_0)}.$$

**Ejemplo 5.11.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1. \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{\sin x}{x}} = 0. \end{aligned}$$

En este segundo caso no podemos aplicar L'Hôpital, puesto que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{f'(x)}$  no existe.

**Teorema 5.12** (Regla de L'Hôpital general). Sean  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^a$  dos funciones derivables en  $(a, b)$  salvo quizás en  $x_0$ , donde  $x_0 \in (a, b)$ . Supongamos que  $f'(x) \neq 0$  si  $x \neq x_0$  y que existen

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0,$$

o bien <sup>b</sup>

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Si, existe  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)}$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)}.$$

<sup>a</sup>El intervalo  $(a, b)$  puede ser una semirrecta

<sup>b</sup>Cuando escribimos  $x_0$  en el límite, también podemos escribir  $x_0^+, x_0^-, \infty$  o  $-\infty$ .

*Demostración.* (i) Supongamos que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$ . Entonces, tenemos que,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Así, podemos aplicar la regla de L'Hôpital a estas funciones, de forma que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g'\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{f'\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g'\left(\frac{1}{x}\right)}{f'\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g'(x)}{f'(x)}.$$

(ii) Supongamos que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$  y existe  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{g'(x)}{f'(x)} = l \in \mathbb{R}$ . Sea  $\varepsilon > 0$ . Por hipótesis, tenemos que existe  $\delta > 0$  tal que si  $0 < x - x_0 < \delta$ , entonces

$$\left| \frac{g'(x)}{f'(x)} - l \right| < \varepsilon.$$

Cogemos  $x_1 \in (x_0, x_0 + \delta)$  y, dado que  $f$  tiene límite por la derecha infinito en  $x_0$ , podemos coger  $x_2 \in (x_0, x_1)$  tal que  $f(x) \neq f(x_1)$  si  $x \in (x_0, x_2)$ . Así, definimos la función

$$F(x) = \frac{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}}, \quad x \in (x_0, x_2).$$

Tenemos que  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = 1$ . Por tanto, existe  $x_3 \in (x_0, x_2)$  tal que si  $0 < x - x_0 < x - x_3$ ,

$$|F(x) - 1| < \varepsilon. \text{ Así, tenemos que si } \varepsilon < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{|F(x)|} < \frac{1}{1 - \varepsilon} < 2.$$

Entonces, tenemos que

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(x)}{f(x)} \cdot \frac{F(x)}{F(x)} = \frac{g(x) - g(x_1)}{f(x) - f(x_1)} \cdot \frac{1}{F(x)}.$$

Por el teorema del valor medio de Cauchy existe  $\xi \in (x_0, x_1)$  tal que

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g'(\xi)}{f'(\xi)} \cdot \frac{1}{F(x)}.$$

Así, si  $x_0 < x < x_3 < x_2 < x_1 < x_0 + \delta$ ,

$$\begin{aligned} \left| \frac{g(x)}{f(x)} - l \right| &= \left| \frac{g'(\xi)}{f'(\xi)} \cdot \frac{1}{F(x)} - l \right| = \left| \frac{g'(\xi)}{f'(\xi)} - lF(x) \right| \cdot \frac{1}{|F(x)|} \\ &\leq \left\{ \left| \frac{g'(\xi)}{f'(\xi)} - l \right| + |l - lF(x)| \right\} \cdot \frac{1}{|F(x)|} \\ &\leq (\varepsilon + |l|\varepsilon) 2 = (2(1 + |l|))\varepsilon. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 5.12.** Consideremos el límite  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ . Aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

## 5.2. Crecimiento y decrecimiento

**Notación.** ■ Se denomina  $f'(x^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , a la derivada por la derecha.

■ Se denomina  $f'(x^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , a la derivada por la izquierda.

**Observación.** Tenemos que existe  $f'(x_0)$  si  $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$ .

**Corolario 5.3.** Sea  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[a, b] / \{s\}$  y derivable en  $(a, b) / \{s\}$ . Si existe  $\lim_{x \rightarrow s^*} h(x) = r$  y existe  $\lim_{x \rightarrow s^*} h'(x)$ , entonces existe  $h'(s^*) = \lim_{x \rightarrow s^*} h'(x)$ .<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Aquí,  $s^*$  significa  $s, s^+$  o  $s^-$ .

*Demostración.* Sea  $g(x) = h(x) - r$  y  $f(x) = x - s$ . Entonces, tenemos que  $\lim_{x \rightarrow s} g(x) = \lim_{x \rightarrow s} (h(x) - r) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow s} f(x) = \lim_{x \rightarrow s} (x - s) = 0$ . Entonces tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow s} \frac{h(x) - r}{x - s} = \lim_{x \rightarrow s} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow s} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow s} \frac{h'(x)}{1}.$$

Este último término existe por hipótesis. □

**Observación.** Esto nos dice que la derivada de una función continua no puede tener discontinuidad de salto.

Dada  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  puede existir  $f'$  y puede existir  $(f')' = f''$ .

**Observación.** En física,  $f$  es un proceso,  $f'$  es la velocidad y  $f''$  es la aceleración. Por ejemplo, la segunda ley de Newton se puede expresar de la forma

$$F = mx''.$$

A través de  $f'$  y  $f''$  se pueden conocer propiedades de  $f$ .

**Teorema 5.13.** Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ .

- (a) ■ Si  $f'(c) > 0, \forall c \in (a, b)$ , entonces  $f$  es creciente en  $[a, b]$ .  
 ■ Si  $f$  es creciente en  $[a, b]$ , entonces  $f'(c) \geq 0, \forall c \in (a, b)$ .
- (b) ■ Si  $f'(c) < 0, \forall c \in (a, b)$ , entonces  $f$  es decreciente en  $[a, b]$ .

■ Si  $f$  es decreciente en  $[a, b]$ , entonces  $f'(c) \leq 0, \forall c \in (a, b)$ .

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, demostramos solo **(a)**, pues la demostración de **(b)** es análoga.

(i) Sean  $x, y \in [a, b]$  con  $x < y$ . Por el teorema del valor medio, existe  $c \in (x, y)$  tal que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Tenemos que  $f'(c) \geq 0$ , por lo que también tenemos que  $f(y) - f(x) \geq 0$ , es decir,  $f(y) \geq f(x)$ .

(ii) Sea  $c \in (a, b)$ . Si  $f$  es creciente, tenemos que si  $x > c$ ,

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Similarmente, si  $x < c$  tenemos que

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Por tanto, tenemos que  $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ .

□

**Teorema 5.14.** Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  derivable en  $(a, b)$ . Si existe  $x_1, x_2 \in (a, b)$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $f'(x_1) < \lambda < f'(x_2)$ , entonces existe  $x_0 \in (a, b)$  tal que  $f'(x_0) = \lambda$ .

*Demostración.* Sea  $g(x) = f(x) - \lambda x$ . Tenemos que  $g$  es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ . Además, tenemos que  $g'(x) = f'(x) - \lambda$ . Si  $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ , es decir,  $f'(x) \neq \lambda$ , entonces  $g$  es inyectiva, por lo que debe ser monótona.

■ Si  $g$  es creciente y  $g'(x) \neq 0$ , tenemos que  $g'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Entonces tenemos que

$$f'(x_1) - \lambda = g'(x_1) < 0.$$

■ Si  $g$  es decreciente y  $g'(x) \neq 0$ , tenemos que  $g'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Entonces tenemos que

$$f'(x_2) - \lambda = g'(x_2) > 0.$$

□

**Observación.** Recordamos que una función derivada no puede dar saltos.

**Ejemplo 5.13.** No todas las funciones derivadas son continuas. Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Tenemos que  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$ . En efecto,

$$\left| x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq x^2 \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0.$$

Sin embargo, no es derivable en  $x = 0$ :

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Dado que  $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ ,  $f'$  no es continua en  $x = 0$ .

### 5.3. Concavidad y convexidad

Procedemos a estudiar las derivadas segundas, con el objetivo de estudiar la convexidad y la concavidad.

**Lema 5.1.**

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : x = \alpha a + (1 - \alpha)b, \alpha \in [0, 1]\}.$$

*Demostración.* (i) Si  $x = \alpha a + (1 - \alpha)b = a + (1 - \alpha)(b - a) \geq a$ . Además,  $x = \alpha a + (1 - \alpha)b = b + \alpha(a - b) \leq b$ , por lo que  $x \in [a, b]$ .

(ii) Si  $c \in [a, b]$ , tenemos que

$$\frac{c - a}{b - a} \leq 1, \quad \frac{b - c}{b - a} \leq 1.$$

Tomamos  $\alpha = \frac{b - c}{b - a}$ . Entonces, tenemos que

$$c = \frac{b - c}{b - a}a + \frac{c - a}{b - a}b = \alpha a + (1 - \alpha)b.$$

□

**Observación.** A esta expresión se la llama **combinación convexa** de  $a$  y  $b$ .

**Definición 5.6.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , se dice que  $f$  es **convexa** en  $[a, b]$  si para  $\forall x, y \in [a, b]$ ,  $x < y$  se verifica que

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y), \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

**Observación.** Para entender la definición de convexidad

$$\begin{aligned}
 f(\alpha x + (1 - \alpha)y) &\leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) = \alpha(f(x) - f(y)) + f(y) \\
 &= \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \alpha(x - y) + f(y) \\
 &= \frac{f(x) - f(y)}{x - y} (\alpha(x - y) + y - y) + f(y) \\
 &= \frac{f(x) - f(y)}{x - y} ([\alpha x + (1 - \alpha)y] - y) + f(y) = r(\alpha x + (1 - \alpha)y).
 \end{aligned}$$

Donde  $r$  es la recta que une los puntos  $(x, f(x))$  e  $(y, f(y))$ . Es decir, la gráfica de  $f|_{[x,y]}$  queda por debajo de la gráfica de la recta que pasa por  $(x, f(x))$  e  $(y, f(y))$ .

**Definición 5.7.** Se dice que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es **cóncava** si  $\forall x, y \in [a, b], x < y$ , y  $\forall \alpha \in [0, 1]$ ,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

Es decir, la gráfica de  $f|_{[x,y]}$  queda por encima de la recta que pasa por los puntos  $(x, f(x))$  e  $(y, f(y))$ .

**Proposición 5.1.** Sea  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida sobre un intervalo o semirrecta. Son equivalentes:

(a)  $f$  es convexa sobre  $I$  si y solo si  $\forall a, b \in I, \forall x \in (a, b)$  se tiene que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \iff \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(b)  $f$  es cóncava sobre  $I$  si y solo si  $\forall a, b \in I, \forall x \in (a, b)$  se tiene que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \iff \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

*Demostración.* La demostración de (b) es análoga a (a). Tenemos que si  $f$  es convexa,

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a) = r(x).$$

Operando, obtenemos que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

El recíproco se demuestra haciendo las mismas cuentas al revés. □

**Proposición 5.2.** Sea  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función sobre un intervalo o semirrecta.

(a) Si  $f$  es convexa en  $I$  y derivable en  $I$ , entonces  $f'$  es creciente.

(b) Si  $f$  es cóncava en  $I$  y derivable en  $I$ , entonces  $f'$  es decreciente.

*Demostración.* La demostración de (b) es análoga a la de (a). Sea  $a \in I$  con  $a < b$ . Dada  $a, a+h_1$  y  $a+h_2$  con  $0 < h_1 < h_2$ , por la proposición anterior tenemos que, dado que son cocientes crecientes,

$$\frac{f(a+h_1) - f(a)}{h_1} \leq \frac{f(a+h_2) - f(a)}{h_2}.$$

Es decir, las pendientes  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ , decrecen cuando  $h > 0$  tiende a 0. Así, como  $f$  es derivable en  $a$  tenemos que

$$f'(a) = f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Por el otro lado, si  $h_2 < h_1 < 0$ , por la proposición anterior tenemos que

$$\frac{f(b) - f(b+h_2)}{h_2} \leq \frac{f(b) - f(b+h_1)}{h_1}.$$

Es decir, las pendientes  $\frac{f(b+h) - f(b)}{h}$  decrecen cuando  $h \rightarrow 0^-$ . Así, dado que  $f$  es derivable en  $b$  tenemos que

$$f'(b) = f'(b^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} \geq \frac{f(b+h) - f(b)}{h}.$$

Si  $a < x < b$ , por lo visto anteriormente tenemos que

$$f'(a) \leq \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b-x} \leq f'(b).$$

Por tanto,  $f'$  es creciente. □

**Corolario 5.4.** Sea  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $I$  es un intervalo o semirrecta y  $f$  es derivable dos veces en  $I$ .

(a) Si  $f$  es convexa,  $f'' \geq 0$ .

(b) Si  $f$  es cóncava,  $f'' \leq 0$ .

*Demostración.* La demostración de (b) es análoga a la de (a). Si  $f$  es convexa y como existe  $f''$ , tenemos que por la proposición anterior, si  $f'$  es creciente,  $f'' \geq 0$ . □



**Lema 5.2.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivable en  $[a, b]$  tal que  $f(a) = f(b)$ .

(a) Si  $f'$  es creciente, entonces  $f(x) \leq f(a)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ .

(b) Si  $f'$  es decreciente, entonces  $f(x) \geq f(a)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ .

*Demostración.* Supongamos que existe  $x \in [a, b]$  con  $f(x) > f(a)$ . Como  $f|_{[a,b]}$  es continua, existe  $x_0 \in (a, b)$  tal que  $f(x_0) \geq f(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , en concreto  $f(x_0) > f(a)$ , y además  $f'(x_0) = 0$ . Por el teorema del valor medio, existe  $x_1 \in (a, x_0)$  tal que

$$f'(x_1) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} > 0.$$

Entonces, tenemos que  $f'(x_1) > f'(x_0)$ , lo cual es una contradicción, pues habíamos dicho que la derivada era creciente.  $\square$

**Proposición 5.3.** Sea  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $I$  intervalo o semirrecta, y  $f$  derivable.

(a) Si  $f'$  es creciente, entonces  $f$  es convexa.

(b) Si  $f'$  es decreciente, entonces  $f$  es cóncava.

**Observación.** Si existe  $f''$ , entonces

(a)  $f'' \geq 0$  implica que  $f'$  es creciente, lo cual implica que  $f$  es convexa.

(b)  $f'' \leq 0$  implica que  $f'$  es decreciente, lo cual implica que  $f$  es cóncava.

*Demostración.* Sean  $a, b \in I$  y  $x \in (a, b)$ . Definimos la función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) - f(a).$$

Tenemos que  $g$  es derivable. En efecto:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dado que  $f'$  es creciente,  $g'$  es creciente. Tenemos que  $g(a) = g(b) = 0$ . Por el lema anterior sabemos que  $g(x) \leq g(a) = 0$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . Así, tenemos que

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a), \quad \forall x \in [a, b].$$

$\square$

Todo lo anterior prueba el siguiente teorema.

**Teorema 5.15.** Sea  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $I$  intervalo o semirrecta, con  $f$  derivable.

- (a)  $f$  es convexa en  $I$  si y solo si  $f'$  es creciente. Si existe  $f''$ , entonces  $f$  es convexa si y solo si  $f'' \geq 0$ .
- (b)  $f$  es cóncava en  $I$  si y solo si  $f'$  es decreciente. Si existe  $f''$ , entonces  $f$  es cóncava si y solo si  $f'' \leq 0$ .

## 5.4. Puntos críticos

**Definición 5.8** (Punto crítico). Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivable. Se dice que  $f$  tiene un **punto crítico** en  $a \in A$  si  $f'(a) = 0$ .<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Puede considerarse también punto crítico si  $f''(a) = 0$ , en el caso en el que exista  $f''$ .

**Observación.** Los puntos críticos de una función son candidatos a máximos y mínimos relativos de la función y, por tanto, puntos donde puede cambiar el crecimiento de una función. Por otro lado, los candidatos a puntos de inflexión son los puntos críticos de la función derivada.

**Teorema 5.16.** Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  derivable dos veces en  $(a, b)$  y sea  $x_0 \in (a, b)$  un punto crítico.

- (a) Si  $f'(x_0) = 0$  y  $f''(x_0) < 0$ , entonces  $x_0$  es un máximo local.
- (b) Si  $f'(x_0) = 0$  y  $f''(x_0) > 0$ , entonces  $x_0$  es un mínimo local.

*Demostración.* La demostración se verá en unas semanas. □

**Definición 5.9** (Punto de inflexión). Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . Se dice que  $x_0 \in (a, b)$  es un **punto de inflexión** si para  $\delta > 0$ , en  $(x_0 - \delta, x_0)$  es cóncava y en  $(x_0, x_0 + \delta)$  es convexa (o viceversa).

**Teorema 5.17.** Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\exists f''(x), \forall x \in (a, b)$ . Si  $x_0 \in (a, b)$  es un punto de inflexión, entonces  $f''(x_0) = 0$ .

*Demostración.* Sabemos que  $f'$  es continua, puesto que  $f''$  existe. Si  $f$  es convexa en  $(x_0 - \delta, x_0)$ , entonces  $f'$  es creciente y, al ser continua, tenemos que

$$f'(x_0) = \sup \{f'(x) : x \in (x_0 - \delta, x_0)\}.$$

Similarmente, si  $f$  es cóncava en  $(x_0, x_0 + \delta)$ , dado que  $f'$  es decreciente y es continua, tenemos que

$$f'(x_0) = \inf \{f'(x) : x \in (x_0, x_0 + \delta)\}.$$

Así, tenemos que  $f'$  tiene un máximo local en  $x_0$  y, dado que existe  $f''(x_0)$ , tiene que ser necesariamente que  $f''(x_0) = 0$ . □

**Ejemplo 5.14.** El recíproco no es cierto. Consideremos  $f(x) = x^4$ . Tenemos que  $f'(x) = 4x^3$  y  $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ . Tenemos que  $f''(x) = 0 \iff x = 0$ . Si embargo, la función no tiene un punto de inflexión en  $x = 0$ , sino que se trata de un mínimo.

**Ejemplo 5.15.** Consideremos  $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x}{x^2 - x}$ . Vamos a estudiar su gráfica. Tenemos que  $\text{dom}(f) = \mathbb{R}/\{0, 1\}$ . Tenemos que en  $x = 0$  tiene una discontinuidad evitable. Estudiamos los límites:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 1} = \infty.$$

También

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty.$$

Es decir,  $f$  tiene una asíntota vertical en  $x = 1$ . Además, también tiene una asíntota oblicua. En efecto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 1 - x(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x - 1}{x - 1} = -1.$$

Así, la ecuación de la asíntota oblicua será  $y = x - 1$ . Estudiamos la derivada. Si  $x \neq 0, 1$ ,

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x - 1)^2} = \frac{(x - 1)^2 + 3}{(x - 1)^2} \geq 0.$$

Por tanto, tenemos que la función es creciente.

# Capítulo 6

## La Integral

### 6.1. Definición de la integral

**Definición 6.1** (Partición). Sea  $[a, b]$  un intervalo cerrado de  $\mathbb{R}$ . Se llama **partición**  $P$  de  $[a, b]$  a todo subconjunto finito de  $[a, b]$  que contiene a  $a$  y  $b$ .

**Observación.** Las particiones tendrán la forma

$$P = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}, \quad t_i < t_{i+1}, \quad \forall i = 0, 1, \dots, n-1.$$

**Notación.** Se llama  $P([a, b]) = \{P \text{ partición de } [a, b]\}$ .

**Definición 6.2.** Dadas  $P, P' \in P([a, b])$ , decimos que  $P'$  es **más fina** que  $P$  si  $P \subsetneq P'$ .

**Ejemplo 6.1.** Consideremos el intervalo  $[1, 2]$  y las particiones  $P = \left\{1, \frac{3}{2}, 2\right\} \subsetneq P' = \left\{1, \sqrt{2}, \frac{3}{2}, 2\right\}$ .

**Definición 6.3.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  <sup>a</sup> acotada y sea  $P = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = b\}$  una partición. Se definen

$$M_i = \sup \{f(t) : t \in [t_i, t_{i+1}]\}, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

$$m_i = \inf \{f(t) : t \in [t_i, t_{i+1}]\}, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

<sup>b</sup>

<sup>a</sup>De momento estamos solo considerando funciones cuyas imágenes son positivas.

<sup>b</sup>Sabemos que existen (no tienen por qué alcanzarse) porque  $f$  está acotada.

**Definición 6.4.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada y sea  $P = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = b\}$  una partición. Se llama **suma superior** de  $f$  respecto de  $P$  y se escribe

$$S(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (t_{i+1} - t_i).$$

Similarmente, se llama **suma inferior** de  $f$  respecto de  $P$  a

$$I(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (t_{i+1} - t_i).$$

**Observación.** Tenemos que  $I(f, P) \leq S(f, P)$ , pues  $m_i \leq M_i, \forall i = 0, \dots, n-1$ .

**Lema 6.1.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada y sean  $P, P' \in P([a, b])$  con  $P'$  más fina que  $P$ . Entonces,

$$I(f, P) \leq I(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P).$$

*Demostración.* Supongamos que  $P' = P \cup \{u\}$ , donde  $t_i < u < t_{i+1}$ . Observemos que

$$m_i = \inf \{f(t) : t \in [t_i, t_{i+1}]\} \leq \min \{m_{[t_i, u]}, m_{[u, t_{i+1}]}\}.$$

$$M_i = \sup \{f(t) : t \in [t_i, t_{i+1}]\} \geq \max \{M_{[t_i, u]}, M_{[u, t_{i+1}]}\}.$$

Así, tenemos que

$$I(f, P) = \sum_{j=0}^{n-1} m_j (t_{j+1} - t_j) \leq \sum_{j=0, j \neq i}^{n-1} m_j (t_{j+1} - t_j) + m_{[t_i, u]} (u - t_i) + m_{[u, t_{i+1}]} (t_{i+1} - u) = I(f, P').$$

Similarmente, tenemos que

$$S(f, P') = \sum_{j=0, j \neq i}^{n-1} M_j (t_{j+1} - t_j) + M_{[t_i, u]} (u - t_i) + M_{[u, t_{i+1}]} (t_{i+1} - u) \leq \sum_{j=0}^{n-1} M_j (t_{j+1} - t_j) = S(f, P).$$

Así, tenemos que  $I(f, P) \leq I(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P)$ .<sup>1</sup> Repetimos el proceso hasta que  $P \cup \{u_1, \dots, u_k\} = P'$ .  $\square$

**Lema 6.2.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada y  $P, P' \in P([a, b])$ . Entonces,  $I(f, P) \leq S(f, P')$ .

*Demostración.* Cogemos  $P'' = P \cup P'$ , así  $P''$  es más fina que  $P$  y  $P'$ . Aplicando el lema anterior:

$$I(f, P) \leq I(f, P'') \leq S(f, P'') \leq S(f, P').$$

$\square$

<sup>1</sup>Las desigualdades anteriores se basan en que  $m_i (t_{i+1} - t_i) = m_i (u - t_i) + m_i (t_{i+1} - u) \leq m_{[u, t_{i+1}]} (t_{i+1} - u) + m_{[t_i, u]} (u - t_i)$ .

**Definición 6.5.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada.

(a) Se define la **integral inferior** de  $f$  en  $[a, b]$

$$\sup \{I(f, P) : P \in P([a, b])\} = \int_a^b f.$$

(b) Se define la **integral superior** de  $f$  en  $[a, b]$

$$\inf \{S(f, P) : P \in P([a, b])\} = \int_a^b f.$$

(c) Decimos que  $f$  es **integrable** en  $[a, b]$  si  $\int_a^b f = \int_a^b f$ . A este valor se le llama la integral de  $f$  en  $[a, b]$ :

$$\int_a^b f = \int_a^b f = \int_a^b f.$$

**Observación.** Tenemos que la integral inferior siempre es menor que la superior:  $\int_a^b f \leq \int_a^b f$ .

**Ejemplo 6.2.** Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0, 1] / \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Tenemos que  $I(f, P) = 0$  y  $S(f, P) = 1$ , por lo que

$$\int_0^1 f = 0 \neq 1 = \int_0^1 f.$$

Por tanto, la función de Dirichlet no es integrable.

**Definición 6.6** (Área). Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada y  $f \geq 0$ .

(a) Se llama **recinto por debajo de la gráfica de  $f$**  al subconjunto de  $\mathbb{R}^2$

$$A_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}.$$

(b) Si  $f$  es integrable en  $[a, b]$ , se define el **área** de  $A_f$

$$\text{Área } A_f = \int_a^b f.$$

## 6.2. Funciones integrables

**Teorema 6.1** (Criterio de integrabilidad de Riemann). Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada. Son equivalentes:

(a)  $f$  es integrable en  $[a, b]$ .

(b)  $\forall \varepsilon > 0, \exists P \in P([a, b])$  tal que  $S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon$ .

*Demostración.* (i) Sea  $\varepsilon > 0$ . Tenemos que existe  $P_1 \in P([a, b])$  tal que

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} < I(f, P_1).$$

Similarmente, existe  $P_2 \in P([a, b])$  tal que

$$\overline{\int_a^b f} + \frac{\varepsilon}{2} > S(f, P_2).$$

Sea  $P_3 = P_1 \cup P_2$ , por lo que  $P_3$  es más fina que  $P_1$  y  $P_2$ . Así, tenemos que

$$S(f, P_3) - I(f, P_3) \leq S(f, P_2) - I(f, P_1) \leq \overline{\int_a^b f} + \frac{\varepsilon}{2} - \left( \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} \right) = \varepsilon.$$

(ii) Sabemos que si  $\varepsilon > 0$  existe  $P \in P([a, b])$  tal que

$$\overline{\int_a^b f} - \int_a^b f \leq S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon.$$

Así, tenemos que  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$$\overline{\int_a^b f} - \int_a^b f < \varepsilon \iff \overline{\int_a^b f} = \int_a^b f.$$

□

**Proposición 6.1.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada. Sea

$$P_n = \left\{ a, a + \frac{b-a}{n}, a + \frac{2(b-a)}{n}, \dots, a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}, b \right\}.$$

Si existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} I(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n)$ , entonces  $f$  es integrable en  $[a, b]$  y

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n).$$

*Demostración.* Sea  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n)$ . Tenemos que existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_1$ ,  $|I(f, P_n) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$  y existe  $n_2 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_2$ ,  $|S(f, P_n) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Así, si  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ , para  $n \geq n_0$  tenemos que  $I(f, P_n), S(f, P_n) \in \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}, \alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ . Así, tenemos que

$$0 \leq S(f, P_n) - I(f, P_n) < \varepsilon.$$

Así, por el criterio de integrabilidad Riemann, tenemos que

$$\exists \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f, P_n).$$

En efecto, tenemos que

$$0 < S(f, P_n) - \int_a^b f \leq S(f, P_n) - I(f, P_n) \rightarrow 0.$$

□

**Observación.** En general, si  $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$  es una sucesión de particiones y  $\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n) - I(f, P_n) = 0$ , tenemos que  $f$  es integrable en  $[a, b]$  y  $\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n)$ .

**Ejemplo 6.3.** Calculamos el área de un triángulo. Sea  $f(x) = rx$  donde  $x \in [0, a]$ . Tenemos que el área será

$$S = \frac{ra^2}{2}.$$

Tomamos la partición  $P_n$  de la proposición anterior. Tenemos que

$$I(f, P_n) = \frac{ra^2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{ra^2}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \rightarrow \frac{ra^2}{2}.$$

$$S(f, P) = \frac{ra^2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) = \frac{ra^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \rightarrow \frac{ra^2}{2}.$$

Así,  $f$  es integrable y queda que

$$\int_0^a rx \, dx = \frac{ra^2}{2}.$$

**Teorema 6.2.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $[a, b]$ , entonces existe  $\int_a^b f$ .



*Demostración.* Sea  $b - a$  la distancia de  $a$  a  $b$ . Hacemos partes iguales de longitud  $\frac{b-a}{n}$ . Así, obtenemos la partición

$$P_n = \left\{ a, a + \frac{b-a}{n}, \dots, a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}, b \right\}.$$

Dado que  $f$  es continua en un intervalo cerrado, tenemos que es uniformemente continua en este mismo intervalo<sup>2</sup>. Así, si  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $|x - y| < \delta$ , entonces  $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ .

Además, como  $\frac{b-a}{n} \rightarrow 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$  tenemos que  $\frac{b-a}{n} < \delta$ . Así, tenemos que si  $n \geq n_0$

$$S(f, P_n) - I(f, P_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \leq \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon.$$

Por el criterio de integrabilidad tenemos que  $f$  es integrable en  $[a, b]$ . Además, tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n) - I(f, P_n) = 0$ . Por lo visto en la observación anterior, tenemos que

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f, P_n).$$

□

**Corolario 6.1.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y consideremos la partición

$$P_n = \left\{ a, a + \frac{b-a}{n}, \dots, a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}, b \right\}.$$

(a) Sea  $x_i \in \left[ a + \frac{i(b-a)}{n}, a + \frac{(i+1)(b-a)}{n} \right]$  con  $i = 1, \dots, n-1$ , entonces

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).$$

(b) En particular,

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right).$$

(c) En particular,

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{(i+1)(b-a)}{n}\right).$$

<sup>2</sup>Podemos aplicar la continuidad uniforme porque, dado que  $f$  es continua, tenemos que  $M_i, m_i \in \text{Im}(f)$  en cada intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$ .

(d) Si  $[a, b] = [0, 1]$ ,

$$\int_0^1 f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right).$$

*Demostración.* Demostramos solamente (d), pues el resto de casos son análogos. Por el teorema anterior tenemos que

$$\int_0^1 f = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} m_i \frac{1}{n}.$$

Dado que  $f$  es continua tenemos que existe  $x_i \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$  con  $f(x_i) = m_i$ . Dado que  $f$  es uniformemente continua si  $\varepsilon > 0$  tenemos que  $\exists \delta > 0$  tal que si  $|x - y| < \delta$  se tiene que  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ . Ahora, como  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ , cogemos  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$  se tenga que  $\frac{1}{n} < \delta$ :

$$0 \leq \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} - \sum_{i=0}^{n-1} m_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left[ f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x_i) \right] \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon = \varepsilon.$$

Así, hemos demostrado que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} m_i = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f.$$

□

**Ejemplo 6.4.** Vamos a calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \left( \sum_{k=1}^n (k+n)(k-n) \right)$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \left( \sum_{k=1}^n (k+n)(k-n) \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (k^2 - n^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} (k^2 - n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{k}{n} \right)^2 - 1 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{k}{n} \right)^2 + 1 \right) = \int_0^1 (x^2 - 1) dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 (x^2 - 1) dx. \end{aligned}$$

### 6.3. Propiedades de la integral

**Teorema 6.3.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrable y  $c \in (a, b)$ . Entonces, existen  $\int_a^c f$  y  $\int_c^b f$  y

además

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

*Demostración.* La parte de existencia se puede demostrar utilizando el criterio de integrabilidad. Sabemos que si  $\varepsilon > 0$ , existe  $P \in P([a, b])$  tal que  $S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon$ . Podemos suponer que  $c \in P$ , es decir, existe  $t_{k_0} = c$ . Si no ocurriese,  $P' = P \cup \{c\}$  sería más fina que  $P$  y

$$S(f, P') - I(f, P') \leq S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon.$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} S(f, P) &= \sum_{i=0}^{n-1} M_i(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{k_0-1} M_i(t_{i+1} - t_i) + \sum_{i=k_0}^{n-1} M_i(t_{i+1} - t_i). \\ I(f, P) &= \sum_{i=0}^{n-1} m_i(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{k_0-1} m_i(t_{i+1} - t_i) + \sum_{i=k_0}^{n-1} m_i(t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$

Definimos la partición  $P'' = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_{k_0} = c\}$ . Tenemos que

$$S(f, P'') - I(f, P'') \leq S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon.$$

Por tanto, existe  $\int_a^c f$ . Análogamente, se puede ver que existe  $\int_c^b f$ .

Ahora, vamos a demostrar la igualdad. Si  $\varepsilon > 0$ , tenemos que, si asumimos (sin pérdida de generalidad), que  $\int_a^b f \geq \int_a^c f + \int_c^b f$ ,

$$0 \leq \int_a^b f - \left( \int_a^c f + \int_c^b f \right) \leq S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon.$$

Por tanto, como esto es cierto  $\forall \varepsilon > 0$ , se tiene que

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

□

**Observación.** Si convenimos para que  $\int_a^b f = -\int_b^a f$ , tenemos que el teorema anterior es cierto para todo  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , siempre que las integrales que aparecen existan.

**Observación.** Es fácil ver que si  $f$  es integrable en  $[a, c]$  y  $[c, b]$ , también lo será en  $[a, b]$ . En efecto, si  $f$  es integrable en  $[a, c]$  y  $[c, b]$ , tenemos que si  $\varepsilon > 0$  existen  $P_1 \in P([a, c])$  y  $P_2 \in P([c, b])$  tales que

$$S(f, P_1) - I(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad S(f, P_2) - I(f, P_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así, si  $P_3 = P_1 \cup P_2$ , se tiene que

$$S(f, P_3) - I(f, P_3) = S(f, P_1) + S(f, P_2) - (I(f, P_1) + I(f, P_2)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

**Teorema 6.4.** Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones acotadas e integrables y sea  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Entonces,

$$(a) \quad \exists \int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

$$(b) \quad \exists \int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

*Demostración.* (a) Sea  $\varepsilon > 0$ , tenemos que existe  $P \in P([a, b])$  tal que

$$S(f, P) - I(f, P) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad S(g, P) - I(g, P) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tenemos que si  $f$  y  $g$  están acotadas,  $f + g$  también lo estará. Si  $|f| \leq M$  y  $|g| \leq M$ , tenemos que

$$|f + g| \leq |f| + |g| \leq 2M.$$

Así, tenemos que

$$M_{f+g,i} = \sup \{ (f + g)(t) : t \in [t_i, t_{i+1}] \} \leq M_{f,i} + M_{g,i}.$$

Similarmente, obtenemos que  $m_{f+g,i} \geq m_{f,i} + m_{g,i}$ . Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} S(f + g, P) - I(f + g, P) &= \sum_{i=0}^{n-1} M_{f+g,i} (t_{i+1} - t_i) + \sum_{i=0}^{n-1} m_{f+g,i} (t_{i+1} - t_i) \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} (M_{f,i} + M_{g,i}) (t_{i+1} - t_i) - \sum_{i=0}^{n-1} (m_{f,i} + m_{g,i}) (t_{i+1} - t_i) \\ &= S(f, P) - I(f, P) + S(g, P) - I(g, P) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Así, hemos demostrado que la integral existe. Ahora supongamos que (en el caso contrario se procede de forma análoga)

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_a^b f + g - \left( \int_a^b f + \int_a^b g \right) &\leq S(f + g, P) - (I(f, P) + I(g, P)) \\ &\leq S(f, P) + S(g, P) - I(f, P) - I(g, P) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(b) Si  $\lambda = 0$  es trivial. Consideremos que  $\lambda > 0$ , pues el caso  $\lambda < 0$  se hace de forma análoga. Tenemos que  $\sup(\text{Im}(\lambda f)) = \lambda \sup(\text{Im}(f))$  y  $\inf(\text{Im}(\lambda f)) = \lambda \inf(\text{Im}(f))$ . Dado que  $f$  es integrable, si  $\varepsilon > 0$ , tenemos que existe  $P \in P([a, b])$  tal que

$$S(f, P) - I(f, P) < \frac{\varepsilon}{2\lambda}.$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} S(\lambda f, P) - I(\lambda f, P) &= \sum_{i=0}^{n-1} M_{\lambda f, i}(t_{i+1} - t_i) - \sum_{i=0}^{n-1} m_{\lambda f, i}(t_{i+1} - t_i) \\ &= \lambda \left[ \sum_{i=0}^{n-1} M_{f, i}(t_{i+1} - t_i) - \sum_{i=0}^{n-1} m_{f, i}(t_{i+1} - t_i) \right] \\ &< \lambda \cdot \frac{\varepsilon}{\lambda} = \varepsilon. \end{aligned}$$

En el caso de  $\lambda < 0$ , ha de tenerse en cuenta que  $\sup(\lambda A) = \lambda \inf(A)$  y  $\inf(\lambda A) = \lambda \sup(A)$ . Así, tenemos que  $\forall P \in P([a, b])$ ,

$$S(\lambda f, P) = \lambda I(f, P) \quad \text{y} \quad I(\lambda f, P) = \lambda S(f, P).$$

□

**Observación.** Consideremos el conjunto  $\mathcal{C}[a, b]$ , que es conjunto de las funciones continuas en un intervalo. Tenemos que es un espacio vectorial. Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} T : \mathcal{C}[a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\rightarrow \int_a^b f. \end{aligned}$$

Tenemos que  $T$  es una aplicación lineal, en concreto es una forma lineal.

**Teorema 6.5.** Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrables.

(a) Si  $f \leq g$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , entonces

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

(b) Si  $m \leq f \leq M$  con  $m, M \in \mathbb{R}$ , entonces

$$(b-a)m \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

(c) La función  $|f|$  es integrable y además,

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

*Demostración.* (a) Si  $f \leq g$ , tenemos que  $M_{f, i} \leq M_{g, i}$  y  $m_{f, i} \leq m_{g, i}$ . Así  $\forall P \in P([a, b])$  se tiene que,

$$S(f, P) \leq S(g, P) \quad \text{y} \quad I(f, P) \leq I(g, P).$$

Por tanto,

$$\int_a^b f = \overline{\int_a^b f} \leq \overline{\int_a^b g} = \int_a^b g.$$

(b) Tomamos  $g = M$  y  $h = m$ . Dado que se tiene que  $h \leq f \leq g$ , por el apartado (a) se tiene que

$$\int_a^b h \leq \int_a^b f \leq \int_a^b g \iff (b-a)m \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

(c) Primero demostramos que  $|f|$  es integrable. Definimos

$$f^+ = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases}, \quad f^- = \begin{cases} 0, & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}.$$

Se ve fácilmente que  $f = f^+ - f^-$  y  $|f| = f^+ + f^-$ . Vamos a ver que  $f^+$  y  $f^-$  son integrables. Sin pérdida de generalidad, vamos a ver que  $f^+$  es integrable. Sea  $\varepsilon > 0$ , existe  $P \in P([a, b])$  tal que

$$\begin{aligned} S(f, P) - I(f, P) &= \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(t_{i+1} - t_i) \\ &= \left[ \sum_{i \in \{j : M_j > 0\}} M_i(t_{i+1} - t_i) - \sum_{i \in \{j : m_j > 0\}} m_i(t_{i+1} - t_i) \right] \\ &\quad + \left[ \sum_{i \in \{j : M_j \leq 0\}} M_i(t_{i+1} - t_i) - \sum_{i \in \{j : m_j \leq 0\}} m_i(t_{i+1} - t_i) \right] \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Tenemos que  $\{j : M_j \leq 0\} \subset \{j : m_j \leq 0\}$  y siempre se tiene que  $M_i - m_i \geq 0$ . Además, tenemos que

$$M_j - m_j \geq M_j, \quad M_j > 0, m_j \leq 0.$$

Similarmente, tenemos que  $\{j : m_j \geq 0\} \subset \{j : M_j \geq 0\}$ . Así, tenemos que

$$S(f^+, P) - I(f^+, P) = \left[ \sum_{i \in \{j : M_j > 0\}} M_i(t_{i+1} - t_i) - \sum_{i \in \{j : m_j > 0\}} m_i(t_{i+1} - t_i) \right] < \varepsilon.$$

Así, hemos visto que  $f^+$  es integrable, y  $f^-$ , de forma análoga también es integrable, por lo que  $|f|$  es integrable.

Una vez demostrado que  $|f|$  es integrable, tenemos que

$$\left| \int_a^b f \right| = \left| \int_a^b f^+ - f^- \right| = \left| \int_a^b f^+ - \int_a^b f^- \right| \leq \int_a^b f^+ + \int_a^b f^- = \int_a^b |f|.$$

□

## 6.4. Teorema Fundamental del Cálculo

**Definición 6.7.** Dada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrable, se define la función

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

**Ejemplo 6.5.** Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \frac{6}{5}, & x \in (\frac{1}{2}, 1] \\ \frac{3}{10}, & x \in (1, 2] \end{cases}.$$

Tenemos que  $f$  es integrable y

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \frac{1}{10} + (x - \frac{1}{2}) \cdot \frac{6}{5}, & x \in (\frac{1}{2}, 1] \\ \frac{7}{10} + (x - 1) \cdot \frac{3}{10}, & x \in (1, 2] \end{cases}.$$

**Teorema 6.6.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable, tenemos que  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  es continua en  $[a, b]$ .

*Demostración.* Sea  $c \in [a, b]$ . Tenemos que

$$F(c+h) - F(c) = \int_a^{c+h} f(t) dt - \int_a^c f(t) dt = \int_c^{c+h} f(t) dt.$$

Por ser  $f$  continua en  $[a, b]$  también está acotada, es decir, existe  $M > 0$  tal que  $\forall t \in [a, b]$ ,  $|f(t)| \leq M$ . Así, tenemos que

$$|F(c+h) - F(c)| = \left| \int_c^{c+h} f(t) dt \right| \leq \int_c^{c+h} |f(t)| dt \leq \int_c^{c+h} M = |h| M \rightarrow 0.$$

Por tanto, tenemos que  $\lim_{h \rightarrow 0} F(c+h) - F(c) = 0$ , por lo que  $\lim_{x \rightarrow c} F(x) = F(c)$ .  $\square$

**Teorema 6.7** (Teorema Fundamental del Cálculo). Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. La función  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  es derivable en  $c \in [a, b]$  y  $F'(c) = f(c)$ .

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $h > 0$ . Como hemos visto en la demostración anterior,

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(t) dt.$$

Sea  $m_h = \inf \{f(t) : t \in [c, c+h]\}$  y  $M_h = \sup \{f(t) : t \in [c, c+h]\}$ . Entonces, tenemos que

$$hm_h \leq \int_c^{c+h} f(t) dt \leq M_h h.$$

Por lo que tenemos que

$$m_h \leq \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f(t) dt = \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq M_h.$$

Dado que  $f$  es continua, tenemos que si  $h \rightarrow 0$ ,  $m_h, M_h \rightarrow f(c)$ , por lo que  $F'(c) = f(c)$ .  $\square$

**Observación.** Una demostración alternativa es la siguiente. Si  $f$  es continua en  $c \in [a, b]$  entonces si  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $|h| < \delta$  se tiene que  $|f(c+h) - f(c)| < \varepsilon$ . Así,

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f(t) dt - \frac{f(c)}{h} \int_c^{c+h} dt \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_c^{c+h} f(t) - f(c) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \int_c^{c+h} |f(t) - f(c)| dt < \frac{1}{|h|} \varepsilon |h| = \varepsilon. \end{aligned}$$

**Corolario 6.2** (Regla de Barrow). Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Si  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  verifica que  $g'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , entonces

$$\int_a^b f(t) dt = g(b) - g(a).$$

*Demostración.* Sea  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ . Por el teorema fundamental del cálculo, tenemos que  $F'(x) = f(x) = g'(x)$ . Así, tenemos que  $F$  y  $g$  tienen la misma derivada. Podemos recordar que, por el teorema del valor medio,  $F(x) = g(x) + K$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . En particular,

$$F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0 \Rightarrow g(a) + K = 0.$$

Por tanto, tenemos que  $F(x) = g(x) - g(a)$  y, por tanto,

$$F(b) = \int_a^b f(t) dt = g(b) - g(a).$$

$\square$

**Ejemplo 6.6.** Consideremos  $\int_0^a rx dx$ . Antes lo tuvimos que resolver mediante el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} r \frac{ia}{n}$ .

Esto se complica si consideramos, por ejemplo,  $f(x) = x^5$ . Con la regla de Barrow, los cálculos se simplifican considerablemente:

$$\int_0^1 x^5 dx = \left[ \frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$



**Ejemplo 6.7.** Sea  $F(x) = \int_{x^2}^{\ln(x+1)} \sqrt{1+t^2} dt$ . Vamos a calcular la derivada. Tenemos que  $f(t) = \sqrt{1+t^2}$  es continua en  $\mathbb{R}$ , por lo que es integrable. Podemos ver que

$$F(x) = \int_{x^2}^{\ln(x+1)} \sqrt{1+t^2} dt = - \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt + \int_0^{\ln(x+1)} \sqrt{1+t^2} dt.$$

Definimos  $G(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt$ , por lo que  $F(x) = G(\ln(x+1)) - G(x^2)$ . Así, tenemos que

$$F'(x) = -\sqrt{1+(x^2)^2} \cdot 2x + \sqrt{1+(\ln(x+1))^2} \frac{1}{x+1}.$$

**Teorema 6.8** (Regla de Barrow II). Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable y  $g'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , entonces

$$\int_a^b f(t) dt = g(b) - g(a).$$

*Demostración.* Sea  $P \in P([a, b])$ . Por el teorema del valor medio, tenemos que existe  $\xi_i \in (t_i, t_{i+1})$  tal que

$$m_i(t_{i+1} - t_i) \leq g(t_{i+1}) - g(t_i) = g'(\xi_i)(t_{i+1} - t_i) = f(\xi_i)(t_{i+1} - t_i) \leq M_i(t_{i+1} - t_i).$$

Así, tenemos que

$$I(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(t_{i+1} - t_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} g(t_{i+1}) - g(t_i) = g(b) - g(a) \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i(t_{i+1} - t_i) = S(f, P).$$

Así, tenemos que  $\forall P \in P([a, b])$ ,  $I(f, P) \leq g(b) - g(a) \leq S(f, P)$ . También tenemos que  $\forall P \in P([a, b])$  se cumple que

$$I(f, P) \leq \int_a^b f(t) dt \leq S(f, P).$$

Así, si  $\int_a^b f(t) dt \geq g(b) - g(a)$  (el otro caso es análogo) y  $\varepsilon > 0$ , existe  $P \in P([a, b])$  tal que,

$$0 \leq \int_a^b f(t) dt - (g(b) - g(a)) \leq S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon.$$

Por tanto, ha de ser que  $\int_a^b f(t) dt = g(b) - g(a)$ . □

**Observación.** Otra forma de demostrar la igualdad de este último teorema es deducir que, dado que

$$I(f, P) \leq g(b) - g(a) \leq S(f, P).$$

Por tanto, tenemos que  $g(b) - g(a) \leq \overline{\int_a^b f(t) dt}$  y  $\underline{\int_a^b f(t) dt} \leq g(b) - g(a)$ . Así, dado que  $f$  es integrable se tiene que

$$\int_a^b f(t) dt = \underline{\int_a^b f(t) dt} \leq g(b) - g(a) \leq \overline{\int_a^b f(t) dt} = \int_a^b f(t) dt.$$

Por tanto,  $\int_a^b f(t) dt = g(b) - g(a)$

**Ejemplo 6.8.** Consideremos la integral  $\int_0^\pi \sin x dx$ . Sabemos que  $-\cos x = (\sin x)'$ . Por tanto, tenemos que

$$\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = 2.$$

## 6.5. Función logarítmica y exponencial

**Ejemplo 6.9.** Sea  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(t) = \frac{1}{t}$ .

**Definición 6.8** (Logaritmo neperiano). Para  $x > 0$  se define **logaritmo neperiano** de  $x$  por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

**Observación.** Tenemos que por el teorema fundamental del cálculo,  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ . Similarmente, tenemos que  $\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0$ . Si  $x > 1$ , tenemos que

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dx > 0.$$

Si  $x < 1$  se tiene que

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt = -\int_x^1 \frac{1}{t} dt < 0.$$

Dado que la derivada es siempre positiva, tenemos que es una función creciente y, como  $(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$ , la función es cóncava. Vamos a calcular los límites.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{t} dt \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = \infty.$$

De este resultado y de que  $f$  es creciente, se deduce que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$ . Por otro lado, vamos a calcular  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{\frac{1}{n}} \frac{1}{t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} - \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{t} dt \leq \lim_{n \rightarrow \infty} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\frac{1}{k}} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = -\infty.$$

Dado que  $f$  es creciente, tenemos que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ .

**Teorema 6.9.**

$$\forall x, y > 0, \ln xy = \ln x + \ln y.$$

*Demostración.* Sea  $y$  fijo. Definimos  $g(x) = \ln xy$ . Tenemos que  $g'(x) = \frac{1}{yx} \cdot y = \frac{1}{x}$ . Como consecuencia del teorema del valor medio, tenemos que  $g(x) = \ln x + K$ . Tenemos que  $g(1) = \ln 1 + K$ , por lo que  $K = g(1) = \ln y$ . Así, tenemos que  $g(x) = \ln xy = \ln x + \ln y$ .  $\square$

**Proposición 6.2. (a)**  $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \ln x^n = n \ln x$ .

**(b)**  $\forall x > 0, \ln \frac{1}{x} = -\ln x$ .

**(c)**  $\forall x, y > 0, \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$ .

*Demostración.* **(a)** Tenemos que si  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\ln x^n = \ln (x + \cdots + x) = n \ln x.$$

**(b)**

$$0 = \ln \frac{x}{x} = \ln x + \ln \frac{1}{x} \iff \ln \frac{1}{x} = -\ln x.$$

**(c)**

$$\ln \frac{x}{y} = \ln x + \ln \frac{1}{y} = \ln x - \ln y.$$

$\square$

**Observación.** Tenemos que  $\ln x$  es monótona creciente y se tiene que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ . Así, tenemos que  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \exists x_0$  tal que  $\ln x_0 = \lambda$ . Como consecuencia del valor medio, dado que  $(\ln x)' > 0$ , se tiene que  $\ln x$  es inyectiva. Por tanto, cabe definir su inversa.

**Definición 6.9** (Función exponencial). Definimos la función

$$\begin{aligned}\exp : \mathbb{R} &\rightarrow (0, \infty) \\ x &\rightarrow \exp(x) = \ln^{-1} x.\end{aligned}$$

**Observación.** Es decir,  $\exp x = y \iff \ln y = x$ .

Por lo calculado anteriormente, tenemos que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp x = \infty$ . Además tenemos que

$$(\exp x)' = \frac{1}{\ln' \exp x} = \exp x > 0.$$

Por tanto, tenemos que es creciente y convexa.

**Teorema 6.10.**

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \exp(x + y) = \exp x \cdot \exp y.$$

*Demostración.* Sean  $x' = \exp x$  e  $y' = \exp y$ . Tenemos que  $\ln x' = x$  y  $\ln y' = y$ . Así, tenemos que

$$\exp(x + y) = \exp(\ln x' + \ln y') = \exp(\ln x'y') = x'y' = \exp x \cdot \exp y.$$

□

**Notación.** Se define  $e = \exp 1$ .

**Observación.** Por tanto, tenemos que  $\exp n = \exp(1 + \dots + 1) = e^n$ .

**Notación.** Se define  $\exp x = e^x$ .

**Teorema 6.11.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = 1.$$

*Demostración.*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}} = 1.$$

□

**Observación.** Por tanto, se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = 1$ . Dado que el logaritmo es continuo y monótono, se tiene que <sup>3</sup>

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = \exp 1 = e.$$

---

<sup>3</sup>Sabemos que este límite converge a  $l \in \mathbb{R}$  porque es monótono y está acotado superiormente. De aquí se deduce que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = \ln l = 1$ , y por ser el logaritmo inyectivo,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$ .

**Definición 6.10.** (a)  $\forall a > 0$  y  $\forall x \in \mathbb{R}$ , se define  $a^x = e^{x \ln a}$ .

(b) Si  $a > 0$  y  $a \neq 1$ , se denomina la inversa de  $a^y$  al  $\log_a x = (a^y)^{-1}$ .

**Proposición 6.3.** (a)  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $(a^b)^c = a^{bc}$ .

(b)  $\forall a \in \mathbb{R}$ ,  $a^1 = a$ .

(c)  $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ .

(d)  $\log_a = \frac{\log_x}{\log_a}$ .

(e)  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ .

*Demostración.* (a)

$$(a^b)^c = e^{c \ln a^b} = e^{c \ln e^{b \ln a}} = e^{cb \ln a} = a^{bc}.$$

(b)

$$a^1 = e^{\ln 1} = e^0 = 1.$$

(c)

$$a^{x+y} = e^{(x+y) \ln a} = e^{x \ln a + y \ln a} = e^{x \ln a} \cdot e^{y \ln a} = a^x a^y.$$

(d)

$$a^{\log_a x} = e^{\log_a x \cdot \ln a} = e^{\ln x} = x.$$

□

**Observación.** A partir de estas funciones se definen las funciones hiperbólicas y se pueden estudiar sus propiedades.

**Proposición 6.4.** (a) Sea una función tal que  $f'(x) = f(x)$ , entonces existe  $K \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = Ke^x$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty, \forall n \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* (a) Sea  $f(x)$  tal que  $f'(x) = f(x)$ . Sea  $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ . Tenemos que

$$g'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = 0.$$

Por tanto, tenemos que  $g(x) = K$ . Por tanto, se obtiene que  $f(x) = Ke^x$ .

(b) Aplicamos L'Hôpital  $n$  veces,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n x^{n-1}} = \cdots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n!} = \infty.$$

□

## 6.6. Criterio de integrabilidad de Lebesgue

**Definición 6.11** (Contenido cero). Se dice que  $A \subset \mathbb{R}$  tiene **contenido cero** si  $\forall \varepsilon > 0$ , existe una sucesión de intervalos abiertos <sup>a</sup>  $\{(a_n, b_n) : n \in \mathbb{N}\}$  tal que

$$A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n) \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) \leq \varepsilon.$$

<sup>a</sup>Se pueden repetir intervalos.

**Ejemplo 6.10.** Sea  $A = \{a\} \subset \mathbb{R}$ . Sea  $\varepsilon > 0$ , tenemos que  $A \subset \left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ . Así,  $a + \frac{\varepsilon}{2} - \left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$ . Tenemos que este conjunto tiene contenido cero <sup>4</sup>.

**Ejemplo 6.11.** Sea  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$  un conjunto finito de números reales. Vamos a ver que tiene contenido cero. Sea  $\varepsilon > 0$ . Sea  $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Cogemos la familia de intervalos,

$$\left\{ \left(x_i - \frac{\varepsilon}{2n}, x_i + \frac{\varepsilon}{2n}\right) : i = 1, \dots, n \right\}.$$

Así, tenemos que

$$\sum_{i=1}^n x_i + \frac{\varepsilon}{2n} - \left(x_i - \frac{\varepsilon}{2n}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

**Ejemplo 6.12.** Sea  $A = \{r_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ . Sea  $\varepsilon > 0$ , cogemos

$$(a_n, b_n) = \left(r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right).$$

Así, tenemos que  $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n)$ . Así, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ r_n + \frac{\varepsilon}{2} - \left(r_n - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right] = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon.$$

Así,  $A$  tiene contenido cero.

**Observación.** De estos ejemplos se deduce que cualquier conjunto finito o numerable de  $\mathbb{R}$  tiene contenido cero.

<sup>4</sup>En este caso, hemos cogido la sucesión de intervalos que contiene un intervalo abierto  $\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$  y el resto son el intervalo  $(a, a) = \emptyset$ .

**Teorema 6.12** (Teorema de integrabilidad de Lebesgue). Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Tenemos que  $f$  integrable en  $[a, b]$  si y solo si el conjunto de discontinuidades de  $f$  tiene contenido cero.

**Proposición 6.5.** Sea  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monótona. Entonces existe  $\int_a^b g(x) \, dx$ .

*Demostración.* Dado que el conjunto de discontinuidades de una función monótona es a lo más numerable, tenemos que tiene contenido cero, por lo que la función es integrable.  $\square$

**Teorema 6.13.** Sea  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua con  $g([a, b]) \subset \text{dom}(f)$ . Tenemos que  $f \circ g$  es integrable en  $[a, b]$ .

*Demostración.* Dado que  $g$  es integrable, tenemos que el conjunto de sus discontinuidades tiene contenido cero. Como  $f$  es continua,  $f \circ g$  es continua donde  $g$  es continua. Así, el conjunto de discontinuidades de  $g$  y de  $f \circ g$  es el mismo, por lo que el conjunto de discontinuidades de  $f \circ g$  tiene contenido cero y, por el teorema anterior se tiene que  $f \circ g$  es integrable.  $\square$

**Corolario 6.3.** Si  $f$  es integrable en  $[a, b]$ ,  $f^2$  también lo es.

*Demostración.* Si  $h(x) = x^2$ , se tiene que  $f^2 = h \circ f$ . Dado que  $h$  es continua y  $f$  es integrable, por la proposición anterior se tiene que  $f^2$  es integrable.  $\square$

**Corolario 6.4.** Si  $f$  y  $g$  son integrables, tenemos que  $fg$  es integrable.

*Demostración.* Si  $f$  y  $g$  son integrables, tenemos que  $f + g$  es integrable. Por el corolario anterior tenemos que  $(f + g)^2$  es integrable. Por tanto, tenemos que

$$fg = \frac{(f + g)^2 - f^2 - g^2}{2}.$$

Por lo que  $fg$  es integrable.  $\square$

**Ejemplo 6.13.** Consideremos una función  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(0) = 0$  y  $f(1) = 1$  tal que

$$f(x) = \frac{n^2}{2n+1} [(n+1)x - 1][(n+1)x + 1], \quad \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n}.$$

Si calculamos

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{n}} f(x) = 1.$$

Así, en todos los  $\frac{1}{n} \in [0, 1]$  tenemos que el límite tiende a 1. Además tenemos que

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0.$$

Entonces, tenemos que la función no es continua en los puntos donde  $x = \frac{1}{n}$ . Además, tenemos que

$$f(x) = \frac{n^2}{2n+1} \left[ (n+1)^2 x^2 - 1 \right].$$

Es decir, se parece a parábolas que tienden a 1 en los puntos de la forma  $\frac{1}{n}$ . Si fuera integrable, tendríamos que

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x) dx.$$

Vamos a demostrar que es integrable con el criterio de integrabilidad de Riemann. Sea  $\varepsilon > 0$  cogemos  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Entonces, tenemos que  $f|_{[\frac{1}{n_0}, 1]}$  es integrable porque contiene un número finito de discontinuidades. Entonces, existe  $P' \in P\left(\left[\frac{1}{n_0}, 1\right]\right)$ , tal que

$$S\left(f|_{[\frac{1}{n_0}, 1]}, P'\right) - I\left(f|_{[\frac{1}{n_0}, 1]}, P'\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora, consideremos la partición  $P = \{0\} \cup P'$ . Tenemos que

$$S(f, P) - I(f, P) = \frac{1}{n_0} + S(f, P') - (0 + I(f, P')) < \frac{1}{n_0} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

**Ejemplo 6.14.** Consideremos  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrable. Vamos a demostrar que  $\int_a^b f(t) dt = \int_{a+c}^{b+c} f(t-c) dt$ . Sea  $g(t) = f(t-c)$ , tenemos que  $\text{dom}(g) = [a+c, b+c]$ . Tenemos que  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists P \in P([a, b])$  tal que  $S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon$ . Tenemos que  $P = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_n = b\}$ . Ahora consideramos la partición

$$P' = \{t'_0, t'_1, \dots, t'_n\}, \quad t'_i = t_i + c, \quad \forall i = 0, \dots, n.$$

Así, tenemos que  $S(f, P) = S(g, P')$  y  $I(f, P) = I(g, P')$ . Por tanto,

$$S(g, P') - I(g, P') < \varepsilon.$$

Así, tenemos que  $f(t-c)$  es integrable. Ahora demostramos la igualdad:

$$I(g, P') \leq \int_a^b f(t) dt \leq S(g, P').$$

Por tanto,  $\int_a^b f(t) dt = \int_{a+c}^{b+c} f(t-c) dt$ .



**Ejemplo 6.15.** Consideremos  $f(x) = \log_{e^x}(\sin x)$ . Vamos a calcular su derivada. Tenemos que

$$f(x) = \log_{e^x}(\sin x) = \frac{\ln \sin x}{\ln e^x} = \frac{\ln \sin x}{x}.$$

Ahora resulta fácil ver que

$$f'(x) = \frac{x \frac{\cos x}{\sin x} - \ln \sin x}{x^2} = \frac{\cos x - \sin x \ln \sin x}{x^2 \sin x}.$$

**Ejemplo 6.16.** Calculemos el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{x^3}.$$

Aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{6} = 0.$$

**Ejemplo 6.17.** Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Tenemos que calcular  $f'$ ,  $f$  y  $f^{(n)}(0)$  y estudiar su continuidad. Empezamos por esto último. El único problema está en  $x = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Por tanto,  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$ . Para pintar la función puede resultar útil saber que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} = 1$ .

Ahora derivamos,

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = \begin{cases} < 0, & x < 0 \\ > 0, & x > 0 \end{cases}.$$

Calculamos la derivada en 0:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h^2}}}.$$

Sea  $y = \frac{1}{h}$ , si  $h \rightarrow 0$ ,  $y \rightarrow \infty$ , así,

$$f'(0) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{e^{y^2}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2ye^{y^2}} = 0.$$

Así, tenemos que

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Ahora calculamos la segunda derivada.

$$f''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{h^3} e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{h^4}}{e^{\frac{1}{h^2}}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{2y^4}{e^{y^2}} = 0.$$

Para  $x \neq 0$ ,

$$f'(x) = \left( -\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6} \right) e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Supongamos que

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Ahora consideremos el caso  $n+1$ . Vamos a calcular  $f^{(n+1)}$ . Si  $x \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= P'_n\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} + P_n\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{2}{x^3}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= e^{-\frac{1}{x^2}} P'_n\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) + P_n\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{2}{x^3}\right) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Ahora si  $x = 0$ ,

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_n\left(\frac{1}{h}\right) e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_n\left(\frac{1}{h}\right) \frac{1}{h}}{e^{-\frac{1}{h^2}}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{P_n(y) y}{e^{y^2}} = 0.$$

## Capítulo 7

# Cálculo de primitivas

Sabemos que si  $\exists \int_a^b f(t) dt$  y  $\exists g$  tal que  $g'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , entonces, por la regla de Barrow

$$\int_a^b f(t) dt = g(b) - g(a).$$

**Definición 7.1** (Primitiva). Dada  $f$ , se dice que  $g$  es una **primitiva** (o **integral**) de  $f$  si  $g' = f$ .

**Notación.** Se escribe  $g(x) = \int f(x) dx$ .

**Observación.** Por la regla de Barrow, el cálculo de integrales se reduce muchas veces al cálculo de primitivas.

**Ejemplo 7.1.** Consideremos  $\int_0^\pi \sin x dx$ . Tenemos que  $(-\cos x)' = \sin x$ , por lo que

$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = 2.$$

**Observación.** Por el teorema fundamental del cálculo, si  $f$  es continua en  $[a, b]$ , entonces  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  es la primitiva de  $f$ .

**Observación.** Si  $F(x) = \int f(x) dx$ , tenemos que  $G(x) = F(x) + K$ , con  $K \in \mathbb{R}$ , también es una primitiva de  $f$ .

Existen funciones que no admiten primitivas elementales, es decir, combinaciones algebraicas de funciones elementales (polinomios, funciones trigonométricas, exponenciales, logaritmos, etc.).

**Ejemplo 7.2.** Un caso típico es  $\int e^{-x^2} dx$ .

**Observación.** El cálculo de primitivas no es inmediato. En verdad, es bastante más complicado que la derivación.

## 7.1. Primitivas elementales

Si le damos la vuelta a la tabla de derivadas obtenemos las primitivas elementales:

$\int K dx = Kx$	$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, n \in \mathbb{Z}/\{-1\}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x$
$\int e^x dx = e^x$	$\int \sinh x dx = \cosh x$
$\int \sin x dx = -\cos x$	$\int \cosh x dx = \sinh x$
$\int \cos x dx = \sin x$	$\int \operatorname{sech}^2 x dx = \tanh x$
$\int \sec^2 x dx = \tan x$	$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arcsinh} x$

**Ejemplo 7.3.**

$$\int \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} dx = \int \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} dx = \int \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} dx = \frac{x^2}{x+1}.$$

**Ejemplo 7.4.**

$$\int 3 \cos x - 7 \sin x dx = 3 \sin x + 7 \cos x.$$

**Observación.** Dado que  $(f+g)' = f' + g'$  y  $(\lambda f)' = \lambda f'$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tenemos que

$$\int f + g = \int f + \int g, \quad \int \lambda f = \lambda \int f.$$

## 7.2. Integración por partes

**Teorema 7.1** (Regla de integración por partes). Si  $f$  y  $g$  son funciones continuas con  $g$  derivable y  $F = \int f$ , entonces se tiene que

$$\int f(x) g(x) dx = F(x) g(x) - \int F(x) g'(x) dx.$$

*Demostración.* Tenemos que

$$(Fg)'(x) = F'(x) g(x) + F(x) g'(x).$$

Dado que todas las funciones que aparecen son continuas, son integrables y, por tanto, tienen primitiva. Entonces, si integramos tenemos que

$$\int f(x) g(x) dx = \int (Fg)'(x) - F(x) g'(x) dx = F(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx.$$

□

**Ejemplo 7.5.**

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x.$$

**Ejemplo 7.6.**

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - \int 2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x.$$

Podemos comprobar que hemos obtenido el resultado correcto:

$$(x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x + 2 \cos x - 2x \sin x - 2 \cos x = x^2 \cos x.$$

**Ejemplo 7.7.**

$$\int \ln x dx = \int (x)' \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x.$$

**Ejemplo 7.8.**

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$$

Despejando, tenemos que

$$2 \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - e^x \cos x \Rightarrow \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x).$$

**Observación.** Podemos juntar la regla de Barrow con la regla de integración por partes:

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = [F(x) g(x)]_a^b - \int_a^b F(x) g'(x) dx.$$

Donde,  $F = \int f$ .

## 7.3. Cambio de variable

Recordamos que por la regla de la cadena se tiene que:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x).$$

**Corolario 7.1** (Fórmula de sustitución). Sean  $f$  y  $g'$  continuas.

(a) Sea  $F$  una primitiva de  $f$ , entonces

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F \circ g(x).$$

(b) Sea  $G$  una primitiva de  $f(g(x))g'(x)$ , entonces

$$\int f(x) dx = G \circ g^{-1}(x).$$

*Demostración.* (a) Por la regla de la cadena se tiene que

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

(b)

$$(G \circ g^{-1})'(x) = G'(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x) = f(g(g^{-1}(x)))g'(g^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = f(x).$$

□

**Ejemplo 7.9.** Consideremos

$$\int \cosh x \cdot \cosh(\sinh x) dx = \int \cosh u du = \sinh u = \sinh(\sinh x).$$

**Observación.** Usualmente cogemos el cambio de variable  $u = g(x)$  donde  $\frac{du}{g'(x)} = dx$ , es decir,  $du = g'(x) dx$ .

**Observación.** Otra opción es coger  $x = g(u)$  como cambio de variable y así  $dx = g'(u) du$ .

$$\int f(x) dx = \int f(g(u))g'(u) du = G(u) = G \circ g^{-1}(x).$$

**Ejemplo 7.10.** ■ Cogiendo  $u = -x^2$ , con  $du = -2xdx$ .

$$\int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int -2xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}.$$

■ Hacemos la sustitución  $x = \ln u$ , así tenemos que

$$\int \frac{1}{e^x + 1} dx = \int \frac{1}{e^{\ln u} + 1} \frac{1}{u} du = \int \frac{1}{u(u+1)} du = \int \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} du = \ln \left| \frac{u}{u+1} \right| = \ln \left( \frac{e^x}{1+e^x} \right).$$

■ Cogemos la sustitución  $u = \sqrt{x-1}$ , con  $du = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}dx$ ,

$$\int \tan(\sqrt{x-1}) \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = \int 2 \tan u du = -2 \int \frac{-\sin u}{\cos u} du = -2 \ln(\cos u) = -2 \ln(\cos(\sqrt{x-1})).$$

**Teorema 7.2** (Fórmula de sustitución o del cambio de variable). Si  $f$  y  $g'$  son funciones continuas en  $[a, b]$ ,

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_a^b (f \circ g)(x) g'(x) dx.$$

*Demostración.* Por ser  $f$  continua, tenemos que existe  $F = \int_a^x f$  continua. Por la regla de Barrow tenemos que

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Además, tenemos que  $\int f(g(x))g'(x) dx = F \circ g$ . Así, por la regla de Barrow,

$$\int_a^b (f \circ g)(x)g'(x) dx = F(g(b)) - F(g(a)).$$

□

## 7.4. Primitivas de funciones racionales

Vamos a estudiar cómo calcular la primitiva de una función racionales, es decir, una integral de la forma

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0} dx.$$

A veces es conveniente simplificar su expresión utilizando, por ejemplo, el método de descomposición en fracciones simples.

**Ejemplo 7.11.**

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{u^2 + u} du &= \int \frac{1}{u} \frac{1}{u+1} du = \int \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} du. \\ \int \frac{1}{(ax+b)^n} dx &= \frac{1}{a} \int \frac{a}{(ax+b)^n} dx = \begin{cases} \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{-n+1}}{-n+1}, & n \neq 1 \\ \frac{1}{a} \ln(ax+b), & n = 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Ahora vamos a estudiar las primitivas de la forma  $\int \frac{rx+k}{(x^2+ax+b)^n} dx$  donde el polinomio del denominador no tiene raíces reales. Si las tuviera, el problema se reduciría al anterior de descomposición en fracciones simples. Operando, obtenemos

$$\int \frac{rx+k}{(x^2+ax+b)^n} dx = \frac{r}{2} \int \frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^n} + \frac{\frac{2k}{r}-a}{(x^2+ax+b)^n} dx.$$

Aquí podemos distinguir dos tipos de integrales:

- En el primero tenemos que el numerador es la derivada de la base del denominador. Por tanto, aplicando el cambio de variable  $u = x^2 + ax + b$  pasamos a la primitiva  $\int \frac{1}{u^n} du$ , que sabemos resolver.
- El caso difícil es la segunda integral que nos queda.

**Lema 7.1.** Dada la integral  $\int \frac{1}{(x^2 + ax + b)^n} dx$  con denominador irreducible, existe un cambio de variable que transforma la integral en  $\int \frac{K}{(u^2 + 1)^n} du$ , con  $K \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Vamos a transformar el polinomio de segundo grado completando cuadrados:

$$x^2 + ax + b = x^2 + 2\frac{a}{2}x + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4} = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \beta^2, \quad \beta = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}.$$

Así, tenemos que

$$x^2 + ax + b = \beta^2 \left[ \frac{1}{\beta^2} \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + 1 \right].$$

Haciendo el cambio de variable  $u = \frac{x + \frac{a}{2}}{\beta}$ , con  $du = \frac{1}{\beta} dx$ , obtenemos la integral

$$\frac{1}{\beta^{2n-1}} \int \frac{1}{(u^2 + 1)^n} du.$$

□

Así, hemos reducido nuestro problema a dos situaciones posibles:

- Si  $n = 1$ , entonces  $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan x$ .
- Si  $n > 1$ , entonces a la integral  $\int \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx$  se le aplica la fórmula de reducción

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx = \frac{1}{2n-2} \frac{x}{(x^2 + 1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{1}{(x^2 + 1)^{n-1}} dx.$$

**Ejemplo 7.12.**

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx.$$

Tenemos que el polinomio del denominador no tiene soluciones y es irreducible. Tenemos que transformar la función en algo del tipo  $\frac{1}{x^2 + 1}$ . Completando cuadrados:

$$x^2 + 2x + 5 = 4 \left( \left( \frac{x+1}{2} \right)^2 + 1 \right).$$

Así, se tiene que

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{2 \left( \frac{x+1}{2} \right)^2 + 1} dx.$$

Haciendo el cambio de variable  $u = \frac{x+1}{2}$  con  $du = \frac{1}{2} dx$  tenemos la integral

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \frac{1}{2} \arctan u = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{x+1}{2} \right).$$



A continuación, vamos a estudiar formalmente las primitivas de funciones racionales. Dada una integral de la forma  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ , primero dividimos  $P$  entre  $Q$ , de modo que  $P(x) = q(x)Q(x) + r(x)$ , donde  $r$  tiene grado menor que  $Q$ . Así, tenemos que

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{q(x)Q(x) + r(x)}{Q(x)} dx = \int q(x) + \frac{r(x)}{Q(x)} dx.$$

Nuestro problema queda reducido a resolver la segunda integral.

**Teorema 7.3.** Dados dos polinomios  $P, Q \in \mathbb{R}[x]$  con grado  $P$  menor que  $Q$  y donde tenemos la descomposición

$$Q(x) = (x - \alpha_1)^{r_1} \cdots (x - \alpha_i)^{r_i} (x^2 - 2a_1x + a_1^2 + b_1^2)^{s_1} \cdots (x^2 - 2a_jx + a_j^2 + b_j^2)^{s_j},$$

entonces se pueden encontrar  $c_{n,m}$ ,  $d_{n,m}$  y  $k_{n,m}$  tales que

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \left[ \frac{c_{1,1}}{(x - \alpha_1)} + \cdots + \frac{c_{1,r_1}}{(x - \alpha_1)^{r_1}} \right] \\ & + \cdots + \left[ \frac{c_{i,1}}{(x - \alpha_i)} + \cdots + \frac{c_{i,r_i}}{(x - \alpha_i)^{r_i}} \right] \\ & + \left[ \frac{d_{1,1}x + k_{1,1}}{x^2 - 2a_1x + a_1^2 + b_1^2} + \cdots + \frac{d_{1,s_1}x + k_{1,s_1}}{(x^2 - 2a_1x + a_1^2 + b_1^2)^{s_1}} \right] \\ & + \cdots + \left[ \frac{d_{j,1}x + k_{j,1}}{x^2 - 2a_jx + a_j^2 + b_j^2} + \cdots + \frac{d_{j,s_j}x + k_{j,s_j}}{(x^2 - 2a_jx + a_j^2 + b_j^2)^{s_j}} \right]. \end{aligned}$$

Así, nuestra integral inicial queda reducida a una suma de integrales como las que hemos resuelto anteriormente.

**Ejemplo 7.13.** Consideremos la integral  $\int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx$ . En primero lugar, dividimos el polinomio del numerador entre el del denominador:

$$\int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx = \int 1 + \frac{1}{x(x^2 + 1)} dx = x + \int \frac{1}{x(x^2 + 1)} dx.$$

Por el teorema anterior, podemos hacer

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{c}{x} + \frac{dx + k}{x^2 + 1}.$$

Así, obtenemos que  $c = 1$ ,  $d = -1$  y  $k = 0$ . Así,

$$\int \frac{1}{x(x^2 + 1)} dx = \int \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} dx = \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1).$$

Así, volviendo a la integral original,

$$\int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx = x + \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1).$$

## 7.5. Otras técnicas

Es conveniente conocer las relaciones trigonométricas:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x.$$

**Ejemplo 7.14.** Aplicando las propiedades anteriores:

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) = \frac{2x + \sin 2x}{4}.$$

También se puede calcular por partes:

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \int \cos x \cos x \, dx = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \sin x \cos x + \int 1 - \cos^2 x \, dx \\ &= \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx. \end{aligned}$$

Así, obtenemos que

$$\therefore \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} (\sin x \cos x + x) = \frac{\sin 2x + 2x}{4}.$$

Ahora vamos a estudiar las integrales de la forma

$$\int \sin^n x \cos^m x \, dx, \quad n, m \text{ pares.}$$

Consideramos  $m = 2k$ ,

$$\begin{aligned} \int \sin^n x \cos^m x \, dx &= \int \sin^n x \cos^{2k} x \, dx = \int \sin^n x (1 - \sin^2 x)^k \, dx \\ &= \int \sin^n x \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} (-1)^j \sin^{2j} x \, dx = \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} (-1)^j \int \sin^{n+2j} x \, dx. \end{aligned}$$

Este tipo de integrales las podemos resolver con uno de los ejercicios de la práctica, que nos dice que si  $n$  es par y  $n > 2$ :

$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx.$$

Si  $n$  o  $m$  es par y la otra impar, es fácil ver que basta utilizar propiedades elementales de la trigonometría y hacer un cambio de variable. A continuación, vamos a estudiar las integrales de la forma

$$\int \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)} \, dx,$$

donde  $P$  y  $Q$  son polinomios de dos variables.

**Ejemplo 7.15.**

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin x} dx.$$

Es útil utilizar el cambio  $u = \tan x$  o, el que siempre funciona,  $u = \tan \frac{x}{2}$ . En este caso es fácil ver que se puede hacer la sustitución  $u = \sin x$ .

Si cogemos  $u = \tan x$ , tenemos que  $x = \arctan u$ . También podemos escribir:

$$u = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{\sin(\arctan u)}{\sqrt{1 - \sin^2(\arctan u)}}.$$

Sea  $A = \sin x = \sin(\arctan u)$ . Tenemos que

$$u = \frac{A}{\sqrt{1 - A^2}} \Rightarrow u^2 = \frac{A^2}{1 - A^2} \iff u^2 = A^2(1 + u^2) \iff A = \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}.$$

Así, es fácil de ver que

$$\cos x = \sqrt{1 - A^2} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{1 + u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}.$$

Así, tenemos que  $du = (1 + \tan^2 x) dx = (1 + u^2) dx$ .

**Proposición 7.1.** Sea  $u = \tan \frac{x}{2}$ , entonces  $\sin x = \frac{2u}{1 + u^2}$  y  $\cos x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$ , donde  $du = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) dx = \frac{1 + u^2}{2} dx$ .

*Demostración.* Si  $u = \tan \frac{x}{2}$ , tenemos que  $x = 2 \arctan u$ .

$$\sin x = \sin(2 \arctan u) = 2 \cos(\arctan u) \sin(\arctan u) = \frac{2}{\sqrt{1 + u^2}} \cdot \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{2u}{1 + u^2}.$$

Así, se tiene que

$$\cos x = \cos(2 \arctan u) = \cos^2(\arctan u) - \sin^2(\arctan u) = \frac{1}{1 + u^2} - \frac{u^2}{1 + u^2} = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}.$$

□

**Ejemplo 7.16.** Utilizamos el cambio de variable  $u = \tan \frac{x}{2}$ <sup>1</sup>,

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{1}{\frac{1 - u^2}{1 + u^2}} \cdot \frac{2}{1 + u^2} du = 2 \int \frac{1}{1 - u^2} du = \int \left( \frac{1}{u + 1} + \frac{1}{1 - u} \right) du = \ln \frac{1 + u}{1 - u} = \ln \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}}.$$

<sup>1</sup>También se puede utilizar el cambio  $u = \sin x$ .

**Ejemplo 7.17.** Utilizamos el cambio de variable  $u = \tan \frac{x}{2}$ ,

$$\int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \int \frac{1}{\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^3} \frac{2}{1+u^2} du = \int \frac{2(1+u^2)^2}{(1-u^2)^3} du = \int \frac{2(1+u^2)^2}{(1-u)^3(1+u)^3} du.$$

Esto se puede resolver por el método de fracciones simples. Una forma más sencilla es tomar el cambio de variable  $u = \sin x$ :

$$\int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\cos x}{(1 - \sin^2 x)^2} dx = \int \frac{1}{(1 - u^2)^2} du.$$

## 7.6. Funciones hiperbólicas

De la tabla de derivadas se deduce fácilmente que

$$\int \sinh x dx = \cosh x, \quad \int \cosh x dx = \sinh x.$$

Nos resultarán útiles algunas propiedades:

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\ \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\ \sinh(x+y) &= \cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y. \end{aligned}$$

De estas dos últimas propiedades se deduce que

$$\begin{aligned} \cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\ \sinh 2x &= 2 \cosh x \sinh x. \end{aligned}$$

**Ejemplo 7.18.** Tenemos que  $\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$ . Así, es fácil calcular

$$\int \cosh^2 x dx = \frac{1}{2} \int \cosh 2x + 1 dx = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \sinh 2x + x \right).$$

Otra forma de hacerlo es con la definición de las funciones hiperbólicas, es decir, usar que  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ , que será fácil de calcular al tratarse de funciones exponenciales.

**Ejemplo 7.19.** Tomamos  $y = \sqrt{\sqrt{x} + 1}$  con  $dx = 2(y^2 - 1)2y dy$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x} + 1}} dx = \int \frac{1}{y} 2(y^2 - 1)2y dy = 4 \int y^2 - 1 dy.$$

**Ejemplo 7.20.** Tomamos  $u = F(x) = \int_0^x \sin t dt$ , con  $du = \sin x dx$

$$\int \left( \sin x \int_0^x \sin t dt \right) dx = \int u du = \frac{u^2}{2} = \frac{1}{2} \left( \int_0^x \sin t dt \right)^2.$$

Esta integral también se podría haber hecho por partes.

## Apéndice A

# Productos infinitos

Sea  $\{b_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$  y sea  $B_n = \prod_{j=1}^n b_j$ . Se dice que el producto infinito converge si

$$\prod_{j=1}^{\infty} b_j = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = l > 0.$$

**Ejemplo A.1.** (i) Sea  $b_j = \frac{1}{j} > 0$ . Entonces,

$$B_n = \prod_{j=1}^n \frac{1}{j} = \frac{1}{n!} \rightarrow 0.$$

No converge.

(ii) Sea  $b_j = 1 - \frac{1}{j^2}$ ,  $j \geq 2$ . Tenemos que

$$b_j = 1 - \frac{1}{j^2} = \frac{j^2 - 1}{j^2} = \frac{(j+1)(j-1)}{j^2}.$$

Tenemos que,

$$\begin{aligned} B_3 &= \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{2 \cdot 3} \\ B_4 &= \frac{4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} = \frac{5}{2 \cdot 4} \\ &\vdots \\ B_n &= \frac{n+1}{2n} \rightarrow \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(iii) Calcular  $\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{j^2}\right)$ .

**Teorema A.1.** Sea  $b_j = 1 + a_j$ ,  $a_j > 0$ . Entonces,  $\prod_{j=1}^{\infty} b_j$  converge si y solo si  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j < \infty$ . En particular, si  $\prod_{j=1}^{\infty} b_j$  converge, entonces  $b_j \rightarrow 1$ .

*Demostración.* Por continuidad del logaritmo, si  $\log \left( \prod_{j=1}^{\infty} b_j \right)$ , lo de dentro también debe converger. Así, tenemos que

$$\log \left( \prod_{j=1}^n b_j \right) = \sum_{j=1}^n \log (1 + a_j) .$$

Sabemos que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log (1+x)}{x} = 1$ . Así,

$$\frac{\log (1+a_j)}{a_j} \rightarrow 1.$$

Por comparación,  $\sum_{j=1}^{\infty} \log (1+a_j) < \infty \iff \sum_{j=1}^{\infty} a_j < \infty$ . □

**Ejemplo A.2.** Así, tenemos que  $\prod_{j=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{j^2} \right)$  converge pues  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \infty$ .

## Apéndice B

# Reordenamiento de series

Sea  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  biyectiva. Dada una serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , qué pasa con la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ ?

**Teorema B.1.** Si  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ , entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Sin embargo, Riemann probó que si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  no converge absolutamente y tomamos  $c \in \mathbb{R}$ , entonces existe  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  biyectiva tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = c$ .

**Ejemplo B.1.** Considera  $a_n = (-1)^n$ , sabemos que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  no converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots = 0 + 0 + \cdots .$$

Similarmente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + (1 + -1) + (-1 + 1) + \cdots = -1.$$

## Apéndice C

# Series de potencias

Anteriormente, hemos visto series numéricas, es decir,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , con  $a_n \in \mathbb{R}$ . Ahora, queremos estudiar  $f_n : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ,  $x \in I$ . En particular, nos interesan funciones del tipo  $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$ ,  $x_0 \in I$ . Queremos ver si una  $f$  cualquiera la puedo reescribir de la manera:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Esta es su serie de Taylor si  $f \in \mathcal{C}^{\infty}(I)$  (se puede derivar infinitas veces) y decimos que  $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ .

**Ejemplo C.1.** (i)  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ .

(ii)  $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ .

(iii)  $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ .



## Apéndice D

# Función logarítmica

Sea  $f(x) = e^x$  con  $x \in \mathbb{R}$ . Como  $e > 1$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ . Similarmente, sabemos que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  y  $f(0) = 1$ . Tenemos que  $f$  es inyectiva, pues si  $f(x) = f(y)$ , entonces

$$e^{x-y} = 1 \Rightarrow x - y = 0 \iff x = y.$$

Además, si  $x < y$ ,

$$e^x = e^{x-y+y} = e^{x-y} e^y < e^y.$$

Así,  $f$  es estrictamente creciente y  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  es exhaustiva. Entonces,  $\forall y \in (0, \infty)$ ,  $\exists! x \in \mathbb{R}$  tal que  $e^x = y$ . Entonces, podemos concluir que  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  es biyectiva. Por lo tanto, podemos definir la función inversa de  $e^x$ , que denotaremos como  $\log x = \ln x$ <sup>1</sup>. Entonces

$$\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \log(e^x) = x \iff e^{\log x} = x.$$

**Observación.** En general, si  $a > 0$  y  $a \neq 1$ , se define

$$\log_a x = y \iff a^y = x.$$

**Ejemplo D.1.** Si  $a = \frac{1}{2}$ , tenemos que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$ . Similarmente,  $\lim_{x \rightarrow 0} \log_{\frac{1}{2}} x = \infty$ .

**Proposición D.1.** (i)  $\log xy = \log x + \log y$ , con  $x, y > 0$ .

(ii)  $\log x^a = a \log x$  con  $x > 0$  y  $a \in \mathbb{R}$ .

(iii) Cambio de base. Sean  $a, b > 0$  con  $a, b \neq 1$  y  $x > 0$ . Tenemos que

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

---

<sup>1</sup>Vamos a considerar que  $\log$  no está en base 10 sino en base  $e$ .

(iv) Si  $a > 0$  con  $a \neq 1$ , y  $x, y > 0$ ,

$$x^{\log_a y} = y^{\log_a x}.$$

*Demostración.* (i) Tenemos que si  $\log xy = a$ ,  $e^a = xy$ . Sea  $a_1 = \log x$  y  $a_2 = \log y$ . Entonces,  $x = e^{a_1}$  e  $y = e^{a_2}$ . Entonces, tenemos que

$$e^a = xy = e^{a_1} e^{a_2} = e^{a_1 + a_2} \Rightarrow a = a_1 + a_2.$$

Entonces,  $\log xy = \log x + \log y$ .

(ii) Sea  $\log x^a = b$ . Entonces,  $x^a = e^b$ . Si  $a_1 = \log x$ ,  $e^{a_1} = x$ . Así,

$$(e^{a_1})^a = e^{aa_1} = e^b.$$

Por tanto,  $b = aa_1$  y  $\log x^a = a \log x$ .

(iii) Tenemos que

$$\log_a b \cdot \log_b x = \log_a b^{\log_b x} = \log_a x.$$

(iv) Sea  $x \neq 1$ ,

$$\log_a y = \log_x y^{\log_a x} = \log_a x \log_x y = \log_a x \frac{\log_a y}{\log_a x}.$$

□

**Observación.** Queremos ver que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ . Tenemos que

$$\frac{\log(1+x)}{x} = \frac{1}{x} \log(1+x) = \log(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Sea  $y = \frac{1}{x}$ , si  $x \rightarrow 0$ ,  $y \rightarrow \infty$ . Así,

$$\log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y.$$

Así,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \log\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = \log e = 1.$$

**Ejemplo D.2.** Sean  $a, b > 0$  y sea  $x_n = \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ . Tenemos que

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{\frac{b}{a}}}{2}\right)^n = a \left(\frac{1 + \sqrt[n]{\frac{b}{a}}}{2}\right)^n.$$

Sea  $r = \frac{b}{a}$ ,

$$\begin{aligned} \left( \frac{1 + \sqrt[n]{\frac{b}{a}}}{2} \right)^n &= \left( \frac{1 + \sqrt[n]{r}}{2} \right)^n = \left( 1 - 1 + \frac{1 + \sqrt[n]{r}}{2} \right)^n = \left( 1 + \frac{\sqrt[n]{r} - 1}{2} \right)^n = \left( 1 + \frac{1}{\frac{2}{\sqrt[n]{r} - 1}} \right)^n \\ &= \left( 1 + \frac{1}{\frac{2}{\sqrt[n]{r} - 1}} \right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{r} - 1} \frac{\sqrt[n]{r} - 1}{2} n}. \end{aligned}$$

Entonces, tenemos que calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\sqrt[n]{r} - 1}{2}$ . Tenemos que

$$n \frac{\sqrt[n]{r} - 1}{2} = \frac{n}{2} \underbrace{\frac{\sqrt[n]{r} - 1}{\log \sqrt[n]{r}}}_1 \log \sqrt[n]{r} \rightarrow \frac{1}{2} \log r.$$

Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{2}{\sqrt[n]{r} - 1}} \right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{r} - 1} \frac{\sqrt[n]{r} - 1}{2} n} = e^{\frac{1}{2} \log r} = \sqrt{r}.$$

Así,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n = a \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{ab}.$$

**Observación.** Sabemos que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\log(x+1)} = 1$ . Por lo tanto, si  $x_n > 0$ , con  $x_n \rightarrow 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\log(x_n + 1)} = 1.$$

Tomando,  $x_n = \sqrt[n]{r} - 1 \rightarrow 0$ .

**Ejemplo D.3.** Consideremos  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{\sin x} = 1$ , pues

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1)}{\sin x} = \frac{\log(1+x)}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

## Apéndice E

# Construcción de $\mathbb{R}$

Sabemos qué son los números naturales,  $\mathbb{N}$ . Con ellos definimos los números enteros,  $\mathbb{Z}$ , y a partir de estos se introduce  $\mathbb{Q}$ , el cuerpo de los números racionales. A partir de aquí, existen diversas construcciones de los números reales  $\mathbb{R}$ . Veamos una que está basada en la siguiente idea: vamos a interpretar un número real como una sucesión de Cauchy.

Sea  $\mathcal{C} = \{\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q} : \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ es de Cauchy}\}$ . Es decir,  $\forall \varepsilon > 0$  con  $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $m, n \geq n_0$ ,  $|x_n - x_m| < \varepsilon$ . En  $\mathcal{C}$  se define la siguiente relación de equivalencia  $\mathcal{R}$ :

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R} \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0.$$

A partir de esto, definimos

$$\mathbb{R} := \mathcal{C} / \mathcal{R} = \{[\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}] : \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}\}.$$

En  $\mathbb{R}$  definimos la suma:

$$[\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}] + [\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}] = [\{x_n + y_n\}_{n \in \mathbb{N}}].$$

Esta definición es coherente con  $\mathcal{R}$ , pues si  $\{x'_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in [\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}]$  y  $\{y'_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in [\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}]$ . Entonces tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n + y'_n - (x_n + y_n)) = 0 \iff [\{x'_n + y'_n\}] = [\{x_n + y_n\}].$$

Análogamente, definimos el producto de la siguiente manera:

$$[\{x_n\}] \cdot [\{y_n\}] = [\{x_n y_n\}].$$

Primero vamos a ver que el producto de sucesiones de Cauchy también es sucesión de Cauchy, para poder hablar de su clase de equivalencia.

$$x_n y_n - x_m y_m = x_n y_n - x_m y_n + x_m y_n - x_m y_m = x_n (y_n - y_m) + y_m (x_n - x_m) \rightarrow 0.$$

Si  $\{x'_n\} \in [\{x_n\}]$  y  $\{y'_n\} \in [\{y_n\}]$ . Queremos ver que  $[\{x'_n y'_n\}] = [\{x_n y_n\}]$ .

$$x'_n y'_n - x_n y_n = x'_n y'_n - x_n y'_n + x_n y'_n - x_n y_n = y'_n (x'_n - x_n) + x_n (y'_n - y_n) \rightarrow 0.$$

Por tanto, el producto está bien definido.

**Definición E.1.** Tenemos que  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  tal que si  $x \in \mathbb{Q}$ , entonces  $x \rightarrow [\{x\}]$ , donde

$$\{x\}_{n \in \mathbb{N}} = \{x, x, \dots, x, \dots\}.$$

Así, definimos  $0 = [\{0\}]$  y  $1 = [\{1\}]$ . Si  $x \in \mathbb{R}$ , con  $x = [\{x_n\}]$ , definimos

$$-x = [\{-x_n\}].$$

Así, hemos definido el elemento neutro de la suma y del producto, así como el inverso de la suma. Ahora tenemos que encontrar el inverso del producto. Veamos que existe  $\{x'_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in [\{x_n\}] \in \mathbb{R} / \{0\}$  tal que para algún  $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ ,  $\varepsilon > 0$ , o bien  $x'_n > \varepsilon$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  o  $x'_n < -\varepsilon$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . En efecto, como  $x_n$  no tiende a 0, existe  $\varepsilon > 0$  con  $\varepsilon \in \mathbb{Q}$  tal que  $\forall n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $\exists n \geq n_0$  tal que  $|x_n| > 2\varepsilon$ . Tomando  $k \in \mathbb{N}$ , existet  $n_k \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_{n_k}| > 2\varepsilon$ . Como la sucesión es de Cauchy, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $j \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall m, n \geq j$ ,  $|x_n - x_m| < \varepsilon$ . Sea  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $n_k \geq j$ . Por tanto,  $\forall m \geq j$ ,  $|x_{n_k} - x_m| < \varepsilon$ , por lo que  $x_m > \varepsilon$ . Definimos ahora

$$x'_n = \begin{cases} 1, & 1 \leq n \leq j \\ x_n, & n > j \end{cases}.$$

Así,  $[\{x'_n\}] = [\{x_n\}]$  y ahora podemos definir

$$[\{x_n\}]^{-1} = \frac{1}{[\{x_n\}]} = \left[ \left\{ \frac{1}{x'_n} \right\} \right].$$

Entonces, claramente se cumple que  $[\{x_n\}] \cdot [\{x_n\}]^{-1} = 1$ . Sólomente queda ver que  $[\{x_n\}]^{-1}$  es sucesión de Cauchy. Así, podemos probar que  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  es un cuerpo abeliano.

**Definición E.2.**  $[\{x_n\}] > 0$  si y solo si existe  $\varepsilon > 0$  con  $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ , para el que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$ ,

$$\begin{cases} x_n > \varepsilon, & \forall n \geq n_0 \\ \text{o} \\ x_n < -\varepsilon, & \forall n \geq n_0. \end{cases}$$

Así, tenemos que  $(\mathbb{R}, +, \cdot, >)$  es un cuerpo abeliano totalmente ordenado y arquimediano.