Estructuras Algebraicas - Entrega 3

Irene García, Julia Romero, Pablo Salas y Victoria Torroja

24 de noviembre de 2025

Ejercicio 1. Determina si los siguientes pares de grupos son isomorfos o no. Justifica tu respuesta.

(a) $\mathbb{Z}_{100} \times \mathbb{Z}_{36}$ y $\mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{60}$.

(b) $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{18}$ y $\mathbb{Z}_{6} \times \mathbb{Z}_{36}$.

(c) $\mathbb{Z}_{2} \times \mathbb{Z}_{2} \times \mathbb{Z}_{4}$ y $\mathbb{Z}_{4} \times \mathbb{Z}_{4}$.

Solución 1. Recordamos que los coeficientes de torsión de un grupo finito abeliano son únicos, por lo que para ver si los grupos dados son isomorfos o no basta con ver si coinciden sus coeficientes de torsión.

(a) Los coeficientes de torsión de $\mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{60}$ son $(60, 60)$. Ahora calculemos los de $\mathbb{Z}_{100} \times \mathbb{Z}_{36}$. Como $100 = 2^2 \cdot 5^2$ y $36 = 2^2 \cdot 3^2$ tenemos que

$$\mathbb{Z}_{100} \times \mathbb{Z}_{36} \cong \mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_{5^2} \times \mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_{3^2} \cong \mathbb{Z}_{2^2 \cdot 5^2 \cdot 3^2} \times \mathbb{Z}_{2^2}.$$

Así, los coeficientes de torsión de $\mathbb{Z}_{100} \times \mathbb{Z}_{36}$ son $(900, 4)$, que no coinciden con los de $\mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{60}$, por lo que los dos grupos no son isomorfos.

(b) Como $12 = 2^2 \cdot 3$ y $18 = 2 \cdot 3^2$ tenemos que

$$\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{18} \cong \mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_{3} \times \mathbb{Z}_{2} \times \mathbb{Z}_{3^2} \cong \mathbb{Z}_{2^2 \cdot 3^2} \times \mathbb{Z}_{2 \cdot 3} = \mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{6} \cong \mathbb{Z}_{6} \times \mathbb{Z}_{36}.$$

Por tanto, los dos grupos son isomorfos.

(c) No son isomorfos puesto que no coinciden los coeficientes de torsión. En efecto, los coeficientes de torsión de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ son $(4, 2, 2)$, mientras que los de $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ son $(4, 4)$. Otra forma de verlo es que en $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ hay más elementos de orden 2 que en $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$. En efecto, tenemos que los elementos de orden 2 de $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ son

$$([0]_4, [2]_4), \quad ([2]_4, [0]_4), \quad ([2]_4, [2]_4).$$

Sin embargo, algunos de los elementos de orden dos de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ son

$$([0]_4, [0]_2, [2]_4), \quad ([0]_2, [1]_2, [2]_4), \quad ([0]_2, [0]_2, [2]_4), \quad ([0]_2, [1]_2, [0]_4),$$

que ya superan en cantidad a los de $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$.

Ejercicio 2. Sea $G = \mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{45} \times \mathbb{Z}_{12}$.

(a) Calcula el exponente del grupo G.

(b) Encuentra el número de elementos de orden 10 en el grupo $H = \mathbb{Z}_{100} \times \mathbb{Z}_{25}$.

(c) Encuentra el número de subgrupos de orden 9 en el grupo $K = \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$.

Solución 2. **(a)** Calculemos los coeficientes de torsión de G. Tenemos que $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $45 = 3^2 \cdot 5$ y $12 = 2^2 \cdot 3$. Así, tenemos que

$$\mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{45} \times \mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{3^2} \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} \times \mathbb{Z}_{5 \cdot 3 \cdot 2^2} \times \mathbb{Z}_3.$$

Como en los grupos finitos abelianos el exponente coincide con el mayor coeficiente de torsión, tendremos que $\exp(G) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$.

(b) Sea $h = (a, b) \in H$. Si $o(h) = 10$ tenemos que

$$(a, b)^{10} = \left(a^{10}, b^{10}\right) = e.$$

Entonces, $10 = \operatorname{mcm}(o(a), o(b))$. En general, tenemos que los posibles órdenes para que a y b cumplan con la ecuación anterior son

$$o(a) \in \{1, 2, 5, 10\}, \quad o(b) \in \{1, 5\}.$$

Podemos descartar que $o(a) = 1$, puesto que ningún elemento de $\mathbb{Z}_{25}$ tiene orden 10. Análogamente, podemos descartar que $o(a) = 5$, puesto que ningún elemento de $\mathbb{Z}_{25}$ tiene orden 2. Así, tenemos los siguientes casos:

- Supongamos que $o(a) = 10$. Por ser $\mathbb{Z}_{100}$ cíclico sabemos que hay un único grupo de orden 10, por tanto el número de elementos de orden 10 en $\mathbb{Z}_{100}$ será el número de generadores que tiene este grupo:

  $$\varphi(10) = \varphi(2 \cdot 5) = \varphi(2) \cdot \varphi(5) = 1 \cdot 4 = 4.$$

  Por otro lado, podemos tener que el orden de b sea 1 o 5. Haciendo un cálculo similar obtenemos que en $\mathbb{Z}_{25}$ hay 1 elemento de orden 1 y 4 elementos de orden 5. Así, tendremos que el número de pares que podemos encontrar en este caso son $4 \cdot (1 + 4) = 20$.
- Supongamos que $o(a) = 2$, entonces debe ser que $o(b) = 5$. Haciendo un cálculo parecido al del primer caso obtenemos que en $\mathbb{Z}_{100}$ hay un elemento de orden 2 y en $\mathbb{Z}_{25}$ hay 4 elementos de orden 5, por lo que el número de pares posibles en este caso es $1 \cdot 4 = 4$.

Haciendo la suma de los posibles casos obtenemos que el número de elementos de orden 10 en H es $20 + 4 = 24$.

(c) Cualquier subgrupo de orden 9 de K es un grupo finito abeliano de orden9, por lo que será isomorfo a $\mathbb{Z}_9$ o a $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.
En primer lugar, calculemos el número de subgrupos cíclicos de orden 9. Para ello, primero calculamos el número de elementos de K de orden 9. Sea $h = (a, b) \in \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$. Si $o(h) = 9$ debe ser que

$$(a, b)^9 = \left(a^9, b^9\right) = (e, e).$$

Es decir, $9 = \operatorname{mcm}(o(a), o(b))$. Así, necesariamente debe ser que $o(a) = 9$ y $o(b) \in \{1, 3\}$. Podemos ver que $o(b) \neq 9$, puesto que $b \in \mathbb{Z}_3$. Por tanto, necesariamente debe ser que $o(a) = 9$. Tenemos que en $\mathbb{Z}_9$ hay

$$\varphi(9) = \varphi\left(3^2\right) = 2 \cdot 3 = 6,$$

elementos de orden 9. En $\mathbb{Z}_3$ hay dos elementos de orden 3 y un elemento de orden 1. Así, el número de elementos de orden 9 en $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$ será $6 \cdot (1+2) = 18$, sin embargo, no se generan 18 subgrupos distintos. Cada subgrupo tiene $\varphi(9) = 6$ generadores, por lo que hay $\dfrac{18}{6} = 3$ subgrupos distintos.
Ahora calculemos el número de subgrupos de K isomorfos a $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Podemos observar que ningún elemento de estos subgrupos tendrá orden 9. Como $|\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3| = 27$, los posibles órdenes de los elementos de los subgrupos de K que buscamos son 1 y 3. Calculemos el número de elementos de orden 3 que hay en K. Para que $h = (a, b) \in K$ cumpla que $o(h) = 3$, debe ser que:

- $o(a) = 1$ y $o(b) = 3$, para lo cual hay 2 casos posibles.
- $o(a) = 3$ y $o(b) = 1$, para lo cual hay 2 casos posibles.
- $o(a) = 3$ y $o(b) = 3$, para lo cual hay $2 \cdot 2 = 4$ casos posibles.

Así, en K hay 8 elementos de orden 3 y uno de 1, lo que significa que hay 9 elementos que no tienen orden 9. Si denotamos

$$\mathbb{Z}_9 := \left\{e, a, a^2, \ldots, a^8\right\} \quad \text{y} \quad \mathbb{Z}_3 := \left\{e, b, b^2\right\},$$

este conjunto será

$$\left\{(e,e), (e,b), \left(e,b^2\right), \left(a^3,e\right), \left(a^6,e\right), \left(a^3,b\right), \left(a^3,b^2\right), \left(a^6,b\right), \left(a^6,b^2\right)\right\} = \left\{a^{3l} \,:\, l \in \mathbb{Z}\right\} \times \mathbb{Z}_3.$$

Como $\left\{a^{3l} \,:\, l \in \mathbb{Z}\right\} \cong \mathbb{Z}_3$, claramente tenemos que $\left\{a^{3l} \,:\, l \in \mathbb{Z}\right\} \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \leq K$. Como estos eran todos los elementos de K que no tenían orden 9, no podemos encontrar otro subgrupo de K isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Así, el número de subgrupos de K con orden 9 es $3+1 = 4$.

Ejercicio 3. Sean las permutaciones $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_8$:

$$\sigma = (1,3,5)(2,8,6) \quad \text{y} \quad \tau = (1,2,7,4)(3,5,8).$$

(a) Escribe $\sigma\tau$ y $\tau\sigma$ en su descomposición de ciclos disjuntos.

(b) Calcula el orden de σ, τ y $\sigma\tau$.

(c) Calcula el signo (par o impar) de σ, τ y $\sigma\tau$.

(d) Calcula σ^{-1}.

Solución 3. Tomamos la notación $\sigma \cdot \tau = \tau \circ \sigma$, es decir, al realizar las operaciones con las permutaciones nos movemos de izquierda a derecha.

(a) Si nos movemos de izquierda a derecha como acabamos de mencionar:

$$\sigma \cdot \tau = (1,3,5)\,(2,8,6)\,(1,2,7,4)\,(3,5,8) = (1,5,2,3,8,6,7,4)\,.$$

$$\tau \cdot \sigma = (1,2,7,4)\,(3,5,8)\,(1,3,5)\,(2,8,6) = (1,8,5,6,2,7,4,3)\,.$$

(b) Como σ y τ son productos de 3-ciclos disjuntos, tenemos que $o\,(\sigma) = \text{mcm}\,(3,3) = 3$ y $o\,(\tau) = \text{mcm}\,(4,3) = 12$. Como $\sigma\tau$ es un 8-ciclo, tenemos que $o\,(\sigma\tau) = 8$.

(c) Para calcular la paridad necesitamos ver si son producto de un número par o impar de trasposiciones:

$$\sigma = (1,3,5)\,(2,8,6) = (3,1)\,(5,1)\,(8,2)\,(6,2)\,.$$

$$\tau = (1,2,7,4)\,(3,5,8) = (1,4)\,(2,4)\,(7,4)\,(3,8)\,(5,8)\,.$$

$$\sigma\tau = (1,5,2,3,8,6,7,4) = (1,4)\,(5,4)\,(2,4)\,(3,4)\,(8,4)\,(6,4)\,(7,4)\,.$$

Así, tenemos que σ es par, τ es impar y $\sigma\tau$ es impar.

(d) Recordamos que dado un ciclo $(i_1, \ldots, i_k)$, su inverso es $(i_k, i_{k-1}, \ldots, i_1)$. De esta manera,

$$\sigma^{-1} = (2,8,6)^{-1}\,(1,3,5)^{-1} = (6,8,2)\,(5,3,1)\,.$$

Ejercicio 4. (a) Demuestra que $\alpha = (1,2,3)\,(4,5)$ y $\beta = (1,4,2)\,(3,5)$ son conjugados en $\mathcal{S}_5$. Encuentra explícitamente una permutación $\gamma \in \mathcal{S}_5$ tal que $\gamma\alpha\gamma^{-1} = \beta$.

(b) ¿Son α y β conjugadas en el grupo alternado $\mathcal{A}_5$?

(c) Determina cuántas clases de conjugación tiene $\mathcal{S}_4$ y cuántas tiene $\mathcal{A}_4$.

Solución 4. En lo que procede, utilizaremos la notación $\sigma\tau = \tau \circ \sigma$. Es decir, a la hora de componer permutaciones lo hacemos de izquierda a derecha. En el apartado (a) hemos calculado una permutación γ tal que $\gamma^{-1}\alpha\gamma = \beta$. Si se desea buscar una permutación $\sigma \in \mathcal{S}_5$ tal que $\sigma\alpha\sigma^{-1} = \beta$ basta con considerar $\sigma = \gamma^{-1}$, que en este caso es el 3-ciclo $(3,4,2)$.

(a) En clase vimos que si dos permutaciones eran parecidas, es decir, tenían el mismo número de ciclos de la misma longitud, entonces pertenecían a la misma clase de conjugación. Como α y β ambas tienen un 3-ciclo y un 2-ciclo, tienen la misma estructura y por tanto son conjugados. En efecto, podemos encontrar $\gamma \in \mathcal{S}_5$ tal que $\gamma^{-1}\alpha\gamma = \beta$. Definimos

$$\alpha_1 := (1,2,3)\,, \quad \alpha_2 := (4,5)\,, \quad \beta_1 := (1,4,2) \quad \text{y} \quad \beta_2 := (3,5)\,.$$

En primer lugar construimos la permutación $\gamma_{\alpha_1\beta_1}$ que cumple que $\gamma_{\alpha_1\beta_1}^{-1}\alpha_1\gamma_{\alpha_1\beta_1} = \beta_1$:

$$\gamma_{\alpha_1\beta_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & * & * \end{pmatrix}.$$

Análogamente, construimos la permutación $\gamma_{\alpha_2\beta_2}$ que cumple que $\gamma_{\alpha_2\beta_2}^{-1}\alpha_2\gamma_{\alpha_2\beta_2} = \beta_2$:

$$\gamma_{\alpha_2\beta_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ * & * & * & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Así, la permutación γ que buscamos nos queda de la forma:

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = (2,4,3)\,.$$

(b) Dado que la permutación $\gamma \in \mathcal{S}_5$ que cumple $\gamma^{-1}\alpha\gamma = \beta$ es un 3-ciclo, es una permutación par por lo que pertenece a $\mathcal{A}_5$. Así, tenemos que α y β son conjugadas en $\mathcal{A}_5$.

(c) Como hemos visto en el apartado **(a)**, calcular el número de clases de conjugación que hay en $\mathcal{S}_4$ realmente es equivalente a calcular el número de descomposiciones en ciclos disjuntos.
En $\mathcal{S}_4$ podemos encontrar las siguientes descomposiciones: la identidad (que es producto de cuatro 1-ciclos disjuntos), 2-ciclos, 3-ciclos, 4-ciclos y 2 2-ciclos, es decir, permutaciones que se descomponen en producto de dos 2-ciclos disjuntos. No hay más descomposiciones puesto que, la estar en $\mathcal{S}_4$ estamos tratando con biyecciones de $X_4 = \{1, 2, 3, 4\}$, por lo que no contamos con suficientes elementos como para tener productos de 2-ciclos por 3-ciclos ni ciclos de orden mayor a los ya vistos. Así, en $\mathcal{S}_4$ hay 5 clases de conjugación.

Por otro lado, sabemos que los elementos de $\mathcal{A}_4$ son las permutaciones pares de $\mathcal{S}_4$, es decir, la identidad, los productos de 2-ciclos disjuntos y los 3-ciclos. Sabemos que dos permutaciones sólo pueden estar conjugadas si tienen una estructura parecida, por lo que un producto de 2-ciclos disjuntos no puede estar conjugado con un 3-ciclo. Así, sabemos que habrá al menos tres clases de conjugación. Podemos considerar la acción de conjugación de $\mathcal{A}_4$ sobre sí mismo:

$$\mathcal{A}_4 \to \text{Biy}\left(\mathcal{A}_4\right) : \sigma \to \tilde{\sigma},$$

$$\tilde{\sigma} : \mathcal{A}_4 \to \mathcal{A}_4 : \tau \to \sigma^{-1}\tau\sigma.$$

Tendremos que las clases de conjugación son las distintas órbitas correspondientes a esta acción. Como $|\mathcal{A}_4| = \dfrac{4!}{2} = 12$, para $\sigma \in \mathcal{A}_4$, tenemos que

$$|O_\sigma| = [\mathcal{A}_4 : G_\sigma] = \frac{|\mathcal{A}_4|}{|G_\sigma|} = \frac{12}{|G_\sigma|}.$$

Claramente, la identidad constituye su propia clase de conjugación y además $|O_{id}| = |\{id\}| = 1$. Por otro lado, consideremos el 3-ciclo $\sigma_1 = (1, 2, 3)$. Tenemos que

$$G_{\sigma_1} = \{id, (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}.$$

Por tanto, tenemos que $|O_\sigma| = \dfrac{12}{3} = 4$. Análogamente, tenemos que si $\sigma_2 = (1, 3, 2)$, entonces $G_{\sigma_2} = \{id, (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$, por lo que $|O_{\sigma_2}| = \dfrac{12}{3} = 4$. No hemos indicado los pasos a seguir para calcular el estabilizador de σ_1 y σ_2 puesto que el procedimiento es análogo al del apartado (b) del ejercicio 6 (con la excepción de que sólo nos quedamos con las permutaciones que pertenecan a $\mathcal{A}_4$). Veamos que σ_1 y σ_2 no están conjugadas en $\mathcal{A}_4$. Si $\gamma \in \mathcal{S}_4$ con $\gamma^{-1}\sigma_1\gamma = \sigma_2$, tenemos que

$$\gamma^{-1}\sigma_1\gamma = \sigma_2 \iff \begin{cases} (\gamma(1), \gamma(2), \gamma(3)) = (1, 3, 2) \\ (\gamma(2), \gamma(3), \gamma(1)) = (1, 3, 2) \\ (\gamma(3), \gamma(1), \gamma(2)) = (1, 3, 2) \end{cases}.$$

Así, nos encontramos ante tres casos:

- En el primer caso tendremos que

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (2,3) \notin \mathcal{A}_4.$$

- En el segundo caso tendremos que

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1,2) \notin \mathcal{A}_4.$$

- En el tercer caso tendremos que

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1,3) \notin \mathcal{A}_4.$$

Así, tenemos que σ_1 y σ_2 no son conjugadas en $\mathcal{A}_4$, por lo que debe ser que $O_{\sigma_1} \cap O_{\sigma_2} = \emptyset$. Por otro lado, tenemos que si $\sigma_3 = (1,2)(3,4)$, entonces

$$G_{\sigma_3} = \{id, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}.$$

Así, tendremos que $|O_{\sigma_3}| = \frac{12}{4} = 3$. Como σ_3 no es conjugada con id, σ_1 o σ_2, tenemos que O_{id}, O_{σ_1}, O_{σ_2} y O_{σ_3} son disjuntas dos a dos, y

$$|O_{id}| + |O_{\sigma_1}| + |O_{\sigma_2}| + |O_{\sigma_3}| = 1 + 4 + 4 + 3 = 12 = |\mathcal{A}_4|.$$

Por tanto, no puede haber más clases de conjugación y podemos concluir que en $\mathcal{A}_4$ hay 4 clases de conjugación.

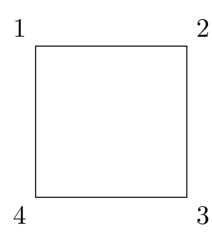
Ejercicio 5. Sea $G = \mathcal{D}_4$, el grupo de simetrías de un cuadrado (el grupo diédrico de orden 8). Sea $V = \{1,2,3,4\}$ el conjunto de los vértices del cuadrado. G actúa sobre V.

(a) Elige un vértice $x \in V$. Calcula su órbita y su estabilizador.

(b) Verifica que $|G| = |O_x| \cdot |G_x|$ con el vértice elegido en el apartado (a).

Solución 5. Consideramos $\mathcal{D}_4 = \left\{id, \tau, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \tau\sigma^3\right\}$, donde σ es la rotación de 90 grados en el sentido de las agujas del reloj y τ es la simetría respecto a la recta que pasa por el centro y por el vértice 2. Además, asumimos que si $x, y \in \mathcal{D}_4$, $xy = x \circ y$.

(a) Cogemos por ejemplo el vértice $x = 1 \in V$, que se corresponde gráficamente con el de la imagen:



Es fácil ver que

$$O_1 = \{\tilde{g}(1) \in V \ : \ g \in \mathcal{D}_4\} = \{1,2,3,4\} = V.$$

En efecto, tenemos que podemos generar V simplemente con las rotaciones:

$$1 = id(1), \ 2 = \sigma(1), \ 3 = \sigma^2(1), \ 4 = \sigma^3(1).$$

Por otro lado, recordamos que el estabilizador de $1 \in V$ es:

$$G_1 = \{g \in \mathcal{D}_4 \ : \ \tilde{g}(1) = 1\}.$$

Para calcularlo podemos ver la imagen de 1 por cada uno de los elementos de $\mathcal{D}_4$:

$$\begin{aligned} id(1) = 1, \quad \sigma(1) = 2 \\ \sigma^2(1) = 3, \quad \sigma^3(1) = 4 \\ \tau(1) = 3, \quad \tau\sigma(1) = 2 \\ \tau\sigma^2(1) = 1, \quad \tau\sigma^3(1) = 4. \end{aligned}$$

Así, obtenemos que $G_1 = \left\{id, \tau\sigma^2\right\}$.

(b) Tenemos que $|G| = |\mathcal{D}_4| = 8$, $|O_1| = 4$ y $|G_1| = 2$, por tanto, se verifica que

$$8 = |G| = |O_1| \cdot |G_1| = 4 \cdot 2.$$

Ejercicio 6. Sea $G = \mathcal{S}_4$ actuando sobre sí mismo por conjugación.

(a) Describe la órbita del elemento $\sigma = (1,2)(3,4)$.

(b) Calcula el estabilizador de σ.

Solución 6. Tenemos que existe un homomorfismo

$$\alpha : \mathcal{S}_4 \to \text{Biy}(\mathcal{S}_4) : \tau \to \tilde{\tau},$$

con $\tilde{\tau} : \mathcal{S}_4 \to \mathcal{S}_4 : \sigma \to \tau^{-1}\sigma\tau$. En este ejercicio, si $x, y \in \mathcal{S}_4$, denotamos $xy = y \circ x$.
Denotamos $\sigma_1 := (1,2)$ y $\sigma_2 := (3,4)$, de forma que $\sigma = \sigma_1\sigma_2$.

(a) Calculemos la órbita de $\sigma = (1,2)(3,4)$:

$$O_\sigma = \left\{\tau^{-1}\sigma\tau \ : \ \tau \in \mathcal{S}_4\right\}.$$

Tenemos que la órbita de σ será el conjunto de permutaciones conjugadas con ella, es decir, las permutaciones que sean un producto de dos 2-ciclos disjuntos. Así, tenemos que

$$O_\sigma = \{(1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}.$$

(b) Recordamos que el estabilizador de σ es el conjunto

$$G_\sigma = \left\{\tau \in \mathcal{S}_4 \ : \ \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma\right\}.$$

Busquemos las permutaciones $\tau \in \mathcal{S}_4$ que cumplan esta condición. Necesitamos que

$$\tau^{-1}\sigma\tau = \tau^{-1}\sigma_1\sigma_2\tau = \left(\tau^{-1}\sigma_1\tau\right)\left(\tau^{-1}\sigma_2\tau\right) = \sigma.$$

Por un resultado visto en clase tendremos que

$$\tau^{-1}\sigma_1\tau = (\tau(1), \tau(2)) \quad \text{y} \quad \tau^{-1}\sigma_2\tau = (\tau(3), \tau(4)).$$

Así, tendremos que los dos ciclos son disjuntos (por ser τ biyectiva). Como la descomposición de σ en ciclos disjuntos es única salvo el orden de los productos tenemos que: o bien $\tau^{-1}\sigma_1\tau = \sigma_1$ y $\tau^{-1}\sigma_2\tau = \sigma_2$; o bien $\tau^{-1}\sigma_1\tau = \sigma_2$ y $\tau^{-1}\sigma_2\tau = \sigma_1$. Estudiemos cada caso por separado:

- Si $\tau^{-1}\sigma_1\tau = \sigma_1$ y $\tau^{-1}\sigma_2\tau = \sigma_2$, debe ser que

$$(\tau(1), \tau(2)) = (1,2) \quad \text{y} \quad (\tau(3), \tau(4)) = (3,4).$$

  Así, obtenemos que $\{id, (1,2), (3,4), (1,2)(3,4)\} \subset G_\sigma$.
- Si $\tau^{-1}\sigma_1\tau = \sigma_2$ y $\tau^{-1}\sigma_2\tau = \sigma_1$, debe ser que

$$(\tau(1), \tau(2)) = (3,4) \quad \text{y} \quad (\tau(3), \tau(4)) = (1,2).$$

  De aquí podemos distinguir varios casos:
  1. Si $\tau(1) = 3$, $\tau(2) = 4$, $\tau(3) = 1$ y $\tau(4) = 2$, tenemos que $\tau = (1,3)(2,4)$.
  2. Si $\tau(1) = 4$, $\tau(2) = 3$, $\tau(3) = 1$ y $\tau(4) = 2$, tenemos que $\tau = (1,4,2,3)$.
  3. Si $\tau(1) = 3$, $\tau(2) = 4$, $\tau(3) = 2$ y $\tau(4) = 1$, tenemos que $\tau = (1,3,2,4)$.
  4. Si $\tau(1) = 4$, $\tau(2) = 3$, $\tau(3) = 2$ y $\tau(4) = 1$, tenemos que $\tau = (1,4)(2,3)$.

Así, podemos concluir que

$$G_\sigma = \{id, (1,2), (3,4), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3), (1,4,2,3), (1,3,2,4)\}.$$

Hemos obtenido que $|G_\sigma| = 8$, lo cual tiene sentido puesto que

$$3 = |O_\sigma| = [G : G_\sigma] = \frac{24}{8}.$$