Álgebra Lineal - Mayo 2025

14/5/2025

Ejercicio 1. En $\mathbb{R}^9$ se considera un endomorfismo f con un único valor propio λ que verifica

$$\dim \operatorname{Ker} (f - \lambda id)^5 = 8.$$

Determinar las posibles formas canónicas de Jordan de f.

Solución 1. Dado que $\operatorname{Ker} (f - \lambda id)^5 \subsetneq \operatorname{Ker} (f - \lambda id)^6$, tenemos que

$$\dim \operatorname{Ker} (f - id)^5 = 8 < \dim \operatorname{Ker} (f - \lambda id)^6 \leq 9,$$

por lo que $\dim \operatorname{Ker} (f - \lambda id)^6 = 9$. Tenemos que el límite de nilpotencia de $f - \lambda id$ es 6. Así, sabemos que habrá un bloque de orden 6. Las posibilidades restantes son:

- Un bloque de orden 3.

$$f \to \begin{pmatrix} \lambda & & & & & & & & \\ 1 & \lambda & & & & & & & \\ & 1 & \lambda & & & & & & \\ & & 1 & \lambda & & & & & \\ & & & 1 & \lambda & & & & \\ & & & & 1 & \lambda & & & \\ & & & & & & \lambda & & \\ & & & & & & 1 & \lambda & \\ & & & & & & & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

- Un bloque de orden 2 y uno de 1.

$$f \to \begin{pmatrix} \lambda & & & & & & & & \\ 1 & \lambda & & & & & & & \\ & 1 & \lambda & & & & & & \\ & & 1 & \lambda & & & & & \\ & & & 1 & \lambda & & & & \\ & & & & 1 & \lambda & & & \\ & & & & & & \lambda & & \\ & & & & & & 1 & \lambda & \\ & & & & & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

- Tres bloques de orden 1.

$$f \to \begin{pmatrix} \lambda & & & & & & & & \\ 1 & \lambda & & & & & & & \\ & 1 & \lambda & & & & & & \\ & & 1 & \lambda & & & & & \\ & & & 1 & \lambda & & & & \\ & & & & 1 & \lambda & & & \\ & & & & & & \lambda & & \\ & & & & & & & \lambda & \\ & & & & & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2. En $\mathbb{R}^4$ se considera la forma bilineal β que respecto de la base canónica tiene por matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcular una base de $\mathbb{R}^4$ ortogonal para β y obtener los posibles índices y coíndices.

Solución 2. Sea $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ la base canónica. Dado que $\beta \neq 0$, tenemos que existe $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ tal que $\beta(\vec{x}, \vec{x}) \neq 0$. En efecto, tenemos que $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ no es isótropo:

$$\beta(\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_1 + \vec{u}_2) = 2\beta(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 2 \neq 0.$$

Calculamos $\{\vec{v}_1\}_\beta^\perp$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \boxed{x + y + 2z + 2t = 0}.$$

Tenemos que $\vec{v}_2 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 \in \{\vec{v}_1\}_\beta^\perp$ y no es isótropo:

$$\beta(\vec{u}_1 - \vec{u}_2, \vec{u}_1 - \vec{u}_2) = -\beta(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = -2 \neq 0.$$

Calculamos $\{\vec{v}_2\}_\beta^\perp$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \boxed{-x + y = 0}.$$

Tenemos que $\vec{v}_3 = \vec{u}_3 - \vec{u}_4 \in \{\vec{v}_1\}_\beta^\perp \cap \{\vec{v}_2\}_\beta^\perp$ y no es isótropo:

$$\beta(\vec{u}_3 - \vec{u}_4, \vec{u}_3 - \vec{u}_4) = -\beta(\vec{u}_3, \vec{u}_4) = -2 \neq 0.$$

Calculamos $\{\vec{v}_3\}_\beta^\perp$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \boxed{-z+t=0}.$$

Tenemos que $\vec{v}_4 = (-2,-2,1,1) \in \{\vec{v}_1\}_\beta^\perp \cap \{\vec{v}_2\}_\beta^\perp \cap \{\vec{v}_3\}_\beta^\perp$ y

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -6 < 0.$$

Así, la base ortogonal que buscamos es $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ y, como hemos visto tenemos que el índice es 3 y el coíndice es 1.

Ejercicio 3. Sea $(V_1, \langle,\rangle_1)$ un espacio vectorial euclídeo y V_2 un espacio vectorial real. Sea $f : V_2 \to V_1$ una aplicación lineal. En V_2 se considera la forma bilineal $\langle,\rangle_2$ definida por

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_2 = \langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle_1, \ \vec{x}, \vec{y} \in V_2.$$

Pruébese que $\langle,\rangle_2$ es un producto escalar en V_2 si y solo si f es inyectiva.

Solución 3. **(i)** Supongamos que $\langle,\rangle_2$ es un producto escalar. Si $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(f)$ tenemos que

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_2 = \langle f(\vec{x}), f(\vec{x}) \rangle_1 = \left\langle \vec{0}, \vec{0} \right\rangle_1 = 0.$$

Dado que $\langle,\rangle_2$ es un producto escalar, tenemos que $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_2 = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$, por lo que $\vec{x} = \vec{0}$ y $\operatorname{Ker}(f) = \left\{\vec{0}\right\}$, por lo que f es inyectiva.

(ii) Supongamos que f es inyectiva si $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_2 = 0$ tenemos que

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_2 = \langle f(\vec{x}), f(\vec{x}) \rangle_1 = 0.$$

Como $\langle,\rangle_1$ es un producto escalar, tenemos que $\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle_1 = 0 \iff \vec{y} = \vec{0}$, por lo que $f(\vec{x}) = \vec{0}$ y $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(f)$, por lo que $\vec{x} = \vec{0}$. Así, hemos visto que $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_2 = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$, por lo que $\langle,\rangle_2$ es un producto escalar.

Ejercicio 4. En un espacio afín de dimensión tres se considera una rotación f de eje una recta l y una traslación $\tau_{\vec{u}}$ de vector $\vec{u}$. Demostrar que $\tau_{\vec{u}} \circ f \circ \tau_{-\vec{u}}$ es una rotación. Determinar el eje de rotación en función de l y $\vec{u}$.

Solución 4. Tenemos que

$$\overrightarrow{\tau_{\vec{u}} \circ f \circ \tau_{-\vec{u}}} = \overrightarrow{\tau_{\vec{u}}} \circ \vec{f} \circ \overrightarrow{\tau_{-\vec{u}}} = id_V \circ \vec{f} \circ id_V = \vec{f}.$$

Para ver que se trata de una rotación vamos a ver que el conjunto de puntos invariantes es de dimensión 1. Sabemos que $\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{A} \ : \ f(A) = A\}$ es una variedad lineal afín que, si no es vacía, tiene como subespacio vectorial asociado a $L = \left\{\vec{x} \in V \ : \ \vec{f}(\vec{x}) = \vec{x}\right\}$. Tenemos que $A + \vec{u}$, si $A \in l$. En efecto

$$\tau_{\vec{u}} \circ f \circ \tau_{-\vec{u}} (A + \vec{u}) = \tau_{\vec{u}} (f (A)) = \tau_{\vec{u}} (A) = A + \vec{u}.$$

Así, tenemos que $\mathcal{L} \neq \emptyset$, por lo que su subespacio vectorial asociado será $L = \left\{\vec{x} \in V \ : \ \vec{f}(\vec{x}) = \vec{x}\right\}$. Dado que f es una rotación y el conjunto de sus puntos invariantes es 1, está claro que la dimensión de $\mathcal{L}$ será 1. Además, tenemos que

$$\mathcal{L} = \{A + \vec{u} \ : \ A \in l\} = l + \vec{u}.$$