Análisis - Final 2025

30/5/2025

1. Parcial 1

Ejercicio 1. Demuestra el *Teorema de los intervalos encajados de Cantor*:
Si $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ es una sucesión encajada (i.e., $I_{n+1} \subset I_n$) de intervalos cerrados y acotados, entonces existe un número $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $\xi \in I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (es decir, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$).

Solución 1. Primero vamos a ver que $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_m$. Si $n < m$, tenemos que

$$a_n \leq a_m < b_m \leq b_n \Rightarrow a_n < b_m.$$

Similarmente, si $n > m$ se tiene que

$$a_m \leq a_n < b_n \leq b_m \Rightarrow a_n < b_m.$$

Así, hemos visto que cualquier b_n sirve de cota superior para el conjunto $A = \{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$, por lo que este conjunto está acotado y, por el axioma del supremo, existe $\alpha = \sup(A)$. Además, se tiene que, como α es supremo y cada b_n es una cota superior, $\alpha \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Es decir, tenemos que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \leq \alpha \leq b_n.$$

Es decir, $\alpha \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$, por lo que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.

Ejercicio 2. Demuestra que la siguiente sucesión es monótona creciente y acotada superiormente:

$$x_1 = 8, \quad x_{n+1} = \sqrt{9 + 8x_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Justifica que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge y calcula su límite.

Solución 2. Primero demostramos que es monótona creciente por inducción. Tenemos que

$$x_2 = \sqrt{9 + 8 \cdot 8} = \sqrt{73} \geq \sqrt{64} = 8.$$

Ahora, asumimos que $x_n \geq x_{n-1}$, entonces tenemos que

$$x_{n+1} = \sqrt{9 + 8x_n} \geq \sqrt{9 + 8x_{n-1}} = x_n.$$

Así, hemos visto que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq x_{n-1}$, por lo que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente. Ahora vamos a demostrar que está acotada superiormente. Para encontrar una cota superior, asumimos que converge para calcular su posible límite. Si $\lim_{n\to\infty} x_n = l$,

$$l = \sqrt{9+8l} \iff l^2 - 8l - 9 = (l-9)(l+1) = 0 \iff l \in \{-1, 9\}.$$

Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y $x_1 = 8$, tendremos que $l = 9$. Vamos a demostrar que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada superiormente por 9. Es cierto para $n = 1$, puesto que $x_1 = 8 \leq 9$. Asumimos que es cierto para $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$x_{n+1} = \sqrt{9+8x_n} \leq \sqrt{9+8\cdot 9} = 9.$$

Así, hemos visto que para $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq 9$, por lo que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada superiormente por 9. Dado que se trata de una sucesión monótona creciente que está acotada superiormente, converge, y el límite, como hemos calculado anteriormente, es $l = 9$.

Ejercicio 3. Calcula los siguientes límites:

$$(a)\ \lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}, \quad (b)\ \lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right).$$

Solución 3.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} &= \lim_{x\to 2} \frac{\left(4-x^2\right)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}{9-x^2-5} = \lim_{x\to 2} \frac{\left(4-x^2\right)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}{4-x^2} \\ &= \lim_{x\to 2}\left(3+\sqrt{x^2+5}\right) = 6.\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 4. Demuestra que, si $a > e$, la siguiente serie es convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{a}\right)^n.$$

Solución 4. Dado que $\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{a}\right)^n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, podemos aplicar el criterio del cociente:

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{n+1}{a}\right)^{n+1} \cdot n!\left(\frac{a}{n}\right)^n = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{a}\right)\left(\frac{n+1}{a}\cdot\frac{a}{n}\right)^n = \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{e}{a} < 1.$$

Por el criterio del cociente, la serie converge (para deducir que el límite cuando $n \to \infty$ es menor que 1 hemos aplicado que $a > e$).

2. Parcial 2

Ejercicio 5. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en todo $[a,b]$. Prueba que existe $m \in \mathbb{R}$ de modo que

$$m \leq f(x) \quad \text{para todo} \quad x \in [a,b].$$

Solución 5. Supongamos que f no está acotada inferiormente. Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in [a,b]$ tal que $f(x_n) < n$. Así, tenemos la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [a,b]$. Por estar acotada, el **Teorema de Bolzano-Weirstrass** nos dice que existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergente, es decir, $x_{n_j} \to l \in [a,b]$. Por ser f continua en $[a,b]$ se tiene que $\lim\limits_{j\to\infty} f\left(x_{n_j}\right) = f(l)$, pero también tenemos que, por construcción de nuestra sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{j\to\infty} f\left(x_{n_j}\right) = -\infty$. Esto es una contradicción, por lo que debe ser que existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

Ejercicio 6. Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ tal que existe f'' en (a,b) y es cóncava en (a,b). Sea $x_0 \in (a,b)$, prueba que

$$f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad \text{para todo} \quad x \in (a,b).$$

Solución 6. Dado que f es cóncava, tenemos que $f'' \leq 0$, $\forall x \in (a,b)$, por lo que f' es decreciente en (a,b). Sean $x_0, x \in (a,b)$. Dado que f es derivable en (x_0, x) (respectivamente (x, x_0)) y continua en $[x_0, x]$ (respectivamente $[x, x_0]$), por el **Teorema del Valor Medio**, $\exists \xi \in (x_0, x)$ (respectivamente (x, x_0)) tal que

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0).$$

Dado que f' es decreciente, si $x > x_0$, como $\xi > x_0$, se tiene que $f'(\xi) \leq f'(x_0)$, por lo que

$$f(x) = f'(\xi)(x - x_0) + f(x_0) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Por otro lado, si $x < x_0$ tenemos que $\xi < x_0$, por lo que $f'(\xi) > f'(x_0)$. Como $x - x_0 < 0$ tenemos que

$$f(x) = f'(\xi)(x - x_0) + f(x_0) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Así, hemos demostrado que dado $x_0 \in (a,b)$, $\forall x \in (a,b)$ se tiene que

$$f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Ejercicio 7. Calcula la serie de Taylor centrada en cero de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$. Para qué valores de $\mathbb{R}$ converge la serie de Taylor? Justifica tu respuesta.

Solución 7. Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^3+1} =& \frac{x^3+1-x^3}{x^3+1} = 1 - \frac{x^3+x^6-x^6}{x^3+1} = 1 - x^3 + \frac{x^6+x^9-x^9}{x^3+1} \\ =& 1 - x^3 + x^6 - \cdots + \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{x^3+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{3k} + \frac{(-1)^{n+1} x^{3n+1}}{x^3+1}.\end{aligned}$$

Vamos a demostrar que $P_{0,3n}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k x^{3k}$ es el polinomio de Taylor de grado $3n$ centrado en cero de f:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P_{0,3n}(x)}{(x-0)^{3n}} = \lim_{x\to 0} \frac{(-1)^{n+1} x^{3n+1}}{x^{3n}(x^3+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{(-1)^{n+1} x}{x^3+1} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 0}{0^3+1} = 0.$$

Como f y $P_{3n,0}$ son iguales hasta el grado $3n$, tenemos que $P_{3n,0}$ es el polinomio de Taylor de grado $3n$ centrado en cero de f. Así, la serie de Taylor de f centrada en cero será:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n}.$$

Para que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{3n}$ se tiene que cumplir que $\lim_{n\to\infty} R_{n,0}(x) = 0$. Como hemos visto antes, $R_{3n,0}(x) = \frac{(-1)^{n+1} x^{3n+1}}{x^3+1}$. Dado que la serie de Taylor es una serie de potencias, aplicamos el criterio del cociente para calcular el radio de convergencia:

$$\left| \frac{x^{3n+1}}{x^{3n}} \right| = |x| < 1.$$

Está claro que si $x \in \{-1, 1\}$ su serie de Taylor no converge. Así, tenemos que el radio de convergencia es 1, y si $x \in (-1, 1)$:

$$|R_{3n+1,0}(x)| = \left| \frac{x^{3n+1}}{x^3+1} \right| \leq |x|^{3n+1} \to 0.$$

Así, tenemos que en el intervalo $(-1, 1)$ la serie de Taylor converge a f.

Ejercicio 8. Calcula $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x + \cos^2 x \sin x}{\cos^2 +1}\, dx$.

Solución 8. Cogemos $u = \cos x$ por lo que $du = -\sin x dx$. Así, nos queda:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x \cos x + \cos^2 x \sin x}{\cos^2 x + 1}\, dx &= \int \frac{\sin x \left(\cos x + \cos^2 x\right)}{\cos^2 x + 1}\, dx = \int -\frac{u + u^2}{u^2+1}\, du \\
&= -\int \frac{u^2 + 1 + u - 1}{u^2 + 1}\, du = -\int 1 + \frac{u-1}{u^2+1}\, du \\
&= -u - \frac{1}{2} \ln\left(u^2+1\right) + \arctan u \\
&= -\cos x - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \cos^2 x\right) + \arctan \cos x
\end{aligned}$$

Ejercicio 9. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uniformemente continua en $[0, \infty)$. Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)\, x^2}{1 + \sin^2 x} = 0$, existe $\int_0^{\infty} f(x)\, dx$? Justifica tu respuesta.

Solución 9. Tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)\, x^2}{1+\sin^2 x} = 0 \iff \lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|\, x^2}{1+\sin^2 x} = 0.$$

Así, si $\epsilon > 0$, $\exists M > 0$ tal que $\forall x > M$ se tiene que

$$\left| \frac{|f(x)|\, x^2}{1+\sin^2 x} \right| = \frac{|f(x)|\, x^2}{1+\sin^2 x} < \epsilon \Rightarrow |f(x)| < \epsilon \frac{1+\sin^2 x}{x^2}.$$

Como

$$\int_M^\infty \frac{1+\sin^2 x}{x^2}\ dx < \int_1^\infty \frac{2}{x^2}\ dx < \infty.$$

Por el criterio de comparación tenemos que $\displaystyle\int_M^\infty |f(x)|\ dx < \int_M^\infty \frac{1+\sin^2 x}{x^2}\ dx < \infty$, por tanto,

$$\int_0^\infty |f(x)|\ dx = \int_0^M |f(x)|\ dx + \int_M^\infty |f(x)|\ dx.$$

La primera integral converge porque f es uniformemente continua en $[0, M]$, y por tanto continua e integrable. Así, como $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\ dx$ converge absolutamente, converge.

Ejercicio 10. Se considera

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad x < -2n \\ -\frac{1}{n^2}(-2n-x)^2 + 1 \quad \text{si} \quad x \in [-2n, n] \\ \frac{2x^2-2n^2}{-1-n^2} \quad \text{si} \quad x \in [-n, n] \\ -\frac{1}{n^2}(2n-x)^2 + 1 \quad \text{si} \quad x \in [n, 2n] \\ 1 \quad \text{si} \quad x > 2n \end{cases}$$

para $n \in \mathbb{N}$.

(a) Calcula su límite puntual.

(b) Converge uniformemente en $[-M, M]$, para $M > 0$? Justifica tu respuesta.

(c) Converge uniformemente en todo $\mathbb{R}$? Justifica tu respuesta.

Solución 10. (a) Calculamos el límite puntual:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 2.$$

En efecto, si $x \in \mathbb{R}$ cogemos $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $x \in [-n_0, n_0]$. Así, $\forall n \geq n_0$ tenemos que $x \in [-n, n]$, por lo que

$$\left|\frac{2x^2-2n^2}{-1-n^2} - 2\right| = \left|\frac{2x^2-2n^2+2+2n^2}{-1-n^2}\right| = \left|\frac{2x^2+2}{1+n^2}\right| \to 0.$$

(b) Estudiemos la convergencia uniforme en el intervalo $[-M, M]$ con $M > 0$,

$$\left|\frac{2x^2-2n^2}{-1-n^2} - 2\right| = \left|\frac{2x^2+2}{1+n^2}\right| \leq \frac{2M^2+2}{1+n^2} \to 0.$$

Por tanto, la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en $[-M, M]$ para cada $M > 0$.

(c) La sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}$, puesto que si $x = n$ tenemos que

$$|f_n(x) - 2| = |0 - 2| \geq 2.$$

Por tanto, la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}$.