

# Análisis de Variable Real

Victoria Torroja Rubio

9/10/2024 -

# Índice general

0.1. Introducción . . . . .	3
0.2. Cardinalidad . . . . .	5
0.2.1. Números algebraicos . . . . .	8
0.3. Funciones de variable real . . . . .	9
0.3.1. Estudio de funciones . . . . .	9
0.3.2. Métodos para generar funciones . . . . .	10
<b>1. El cuerpo de los números reales</b>	<b>11</b>
1.1. El cuerpo de los números reales. . . . .	11
1.2. Completitud de $\mathbb{R}$ . . . . .	21
1.3. Expresión decimal de los números reales . . . . .	30
1.4. Números Complejos . . . . .	32
1.4.1. Representación polar . . . . .	33
<b>2. Sucesiones y límites</b>	<b>34</b>
2.1. Criterios de Convergencia . . . . .	42
2.2. Subsucesiones y Teorema de Bolzano-Weiestrass . . . . .	48
2.3. Sucesiones Cauchy . . . . .	51
2.4. Otros teoremas . . . . .	53
2.5. Series numéricas . . . . .	56
2.6. Exponentes reales. . . . .	66
<b>3. Límites de funciones</b>	<b>68</b>
<b>4. Funciones continuas</b>	<b>82</b>
4.1. Discontinuidad de funciones . . . . .	84
4.2. Propiedades de las funciones continuas . . . . .	86
4.3. Continuidad Uniforme . . . . .	88
<b>5. La Derivada</b>	<b>92</b>
<b>A. Productos infinitos</b>	<b>93</b>
<b>B. Reordenamiento de series</b>	<b>95</b>
<b>C. Series de potencias</b>	<b>96</b>

<b>D. Función logarítmica</b>	<b>97</b>
<b>E. Construcción de <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>100</b>

**Profesor:** Javier Soria  
**Oficina:** 437  
**Correo:** javier.soria@ucm.es

**Ayudante:** Fernando Ballesta Yague  
**Oficina:** 224  
**Correo:** ferballe@ucm.es

**Exámenes:** Parcial 1 (16/1/2025)

- 20 % evaluación continua + examen a finales de noviembre (solo sube no baja)
- 80 % exámenes parciales

Si apruebas los parciales no hay que hacer el final.

#### Recomendaciones de libros

- Primer libro de la bibliografía
- El de Ortega
- 5000 problemas de análisis (para practicar)

## 0.1. Introducción

**Definición 0.1** (Producto cartesiano). Se define

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Una relación  $\mathcal{R}$  es un conjunto  $\mathcal{R} \subset A \times A$ . Si  $(a, b) \in \mathcal{R}$  se dice que  $a\mathcal{R}b$ .

**Definición 0.2** (Relación de equivalencia). Una relación  $\mathcal{R}$  es de equivalencia si cumple las siguientes propiedades.

**Reflexiva.**  $\forall a \in A, a\mathcal{R}a$ .

**Simétrica.**  $a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$ .

**Transitiva.**  $(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \Rightarrow a\mathcal{R}c$ .

**Definición 0.3** (Relación de orden). Una relación  $\mathcal{R}$  es de orden si cumple las siguientes propiedades.

**Reflexiva.**  $\forall a \in A, a\mathcal{R}a$ .

**Antisimétrica.**  $(aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b$ .

**Transitiva.**  $(aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$ .

**Notación 0.1.** En una relación de orden, si  $aRb$ , podemos escribir  $a \leq b$ . Además, el par ordenado  $(A, \leq)$  es un conjunto ordenado. Se dice que es **totalmente ordenado** si  $\forall a, b \in A, a \leq b$  o  $b \leq a$ .

**Definición 0.4.** Dado  $(A, \leq)$  y  $C \subset A$ :

- (i) Se dice que  $C$  está **acotado superiormente** si existe  $M \in A$  tal que  $\forall c \in C, c \leq M$ . Se dice que  $M$  es una **cota superior**.
- (ii) Se dice que  $C$  está **acotado inferiormente** si existe  $m \in A$  tal que  $\forall c \in C, m \leq c$ . Se dice que  $m$  es una **cota inferior**.
- (iii)  $C$  tiene **supremo** si tiene una cota superior mínima. Es decir, si  $\alpha = \sup(C)$  si  $\forall c \in C, \alpha \geq c$  y si  $m$  es una cota superior,  $\alpha \leq m$ .
- (iv) La definición del **ínfimo** es análoga.

**Ejemplo 0.1.** Tenemos que el conjunto  $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$  está acotado superiormente por 2. Sin embargo, no tiene supremo en  $\mathbb{Q}$ , pero sí lo tiene en  $\mathbb{R}$ .

**Ejemplo 0.2.** Sea  $\mathbb{R}^2$  y sea  $C \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$  rectas del plano. Sean  $r_1, r_2 \in C$  con  $r_1 R r_2 \iff r_1$  y  $r_2$  son paralelas. Esto claramente es una relación de equivalencia.

**Definición 0.5** (Aplicación). Dado  $C \subset A \times B$ , se dice que  $C$  es una **aplicación** si  $(a, b), (a, c) \in C \Rightarrow b = c$ .

**Notación 0.2.** Normalmente se escribe  $f : A \rightarrow B$  con  $a \rightarrow f(a)$ .

**Definición 0.6.** Si  $f : A \rightarrow B$ ,

**Dominio.**  $\text{dom}(f) = \{x \in A : \exists f(x)\}$ .

**Imagen.**  $\text{Im}(f) = \{b \in B : \exists a \in A, f(a) = b\} \subset B$ .

**Notación 0.3.** En las funciones de variable real se denomina gráfico de  $f$  al conjunto  $\text{Gra}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \text{dom}(f)\}$ .

**Ejemplo 0.3.** Consideremos la aplicación  $f(x) = a \in \mathbb{R}$ , la función constante. Tenemos que  $\text{dom}(f) = \text{Im}(f) = \mathbb{R}$ .

**Definición 0.7.** Dada  $f : A \rightarrow B$ ,

(a) Se dice que  $f$  es **inyectiva** si  $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ .

(b) Se dice que  $f$  es **suprayectiva** si  $\forall b \in B, \exists a \in A$  tal que  $f(a) = b$ .

(c) Se dice que  $f$  es **biyectiva** si es inyectiva y suprayectiva.

**Notación 0.4.** Dada  $f : A \rightarrow B$  y  $C \subset A$ , se denomina restricción de  $f$  en  $C$  a la aplicación  $f|_C : C \rightarrow B$ . Así, tenemos que  $f(C) = \text{Im}(f|_C) = \{b \in B : \exists c \in C, f(c) = b\}$ . De manera similar,  $f(A) = \text{Im}(f)$ .

**Notación 0.5.** Si  $f : A \rightarrow B$  y  $D \subset B$ , se define  $f^{-1}(D) = \{a \in A : f(a) \in D\}$ .

**Ejemplo 0.4.** Consideramos la aplicación  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 2, & x \in (0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{x-1} + 2, & x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

Tenemos que  $f$  es biyectiva. Comprobamos la inyectividad.

$$\frac{1}{x} - 2 = \frac{1}{y} - 2 \iff x = y.$$

$$\frac{1}{x-1} + 2 = \frac{1}{y-1} + 2 \iff x = y.$$

Ahora comprobamos la suprayectividad. Si  $a = 0$ , cogemos  $x = \frac{1}{2}$ . Si  $a < 0$ , cogemos  $x = \frac{1}{a-2} \in (0, 1)$ . Si  $a > 0$ , cogemos  $x = \frac{1}{a+2} \in (0, \frac{1}{2})$ . Así, la aplicación es biyectiva.

**Definición 0.8** (Inversa). Dada  $f : A \rightarrow \text{Im}(f)$ , si  $f$  es inyectiva tenemos que  $f$  es biyección y  $\exists f^{-1} : \text{Im}(f) \subset B \rightarrow A$  tal que  $b \rightarrow f^{-1}(b) = a$ .

**Ejemplo 0.5.** Consideremos  $f : \mathbb{R}/\{0\} \rightarrow \mathbb{R}/\{0\}$  tal que  $f(x) = \frac{1}{x}$ , entonces  $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ .

## 0.2. Cardinalidad

**Definición 0.9** (Equipotencia). Dos conjuntos  $A$  y  $B$  son **equipotentes** si existe una biyección  $f : A \rightarrow B$ .

**Proposición 0.1.** La relación de equipotencia es una relación de equivalencia.

*Demostración.* (i) Comprobamos la propiedad reflexiva. Tenemos que la identidad  $i : A \rightarrow A$  con  $a \rightarrow a$  es una biyección.

(ii) Comprobamos la propiedad simétrica. Dada una biyección, su inversa también es una biyección.

(iii) Comprobamos la propiedad transitiva. La composición de biyecciones es una biyección.

□

**Definición 0.10** (Cardinal). Se llama **cardinal** de un conjunto a la clase de equivalencia a la que pertenece por la relación de equipotencia.

**Definición 0.11.** Dados  $A$  y  $B$ , tenemos que  $|A| \leq |B|$  si  $\exists f : A \rightarrow B$  inyectiva.

**Proposición 0.2.** La relación anterior es una relación de orden total.

*Demostración.* (i) La identidad es inyectiva.

(ii) Por el teorema de Cantor-Bernstein, si  $f : A \rightarrow B$  inyectiva y  $g : B \rightarrow A$  inyectiva,  $\exists h : A \rightarrow B$  biyectiva.

(iii) Si  $f : A \rightarrow B$  inyectiva y  $f : B \rightarrow C$  inyectiva, tenemos que  $g \circ f : A \rightarrow C$  es inyectiva.

(iv) Existe un teorema que dice que si  $A$  y  $B$  son conjuntos, o bien existe  $f : A \rightarrow B$  inyectiva o bien existe  $g : B \rightarrow A$  inyectiva. □

**Definición 0.12.** Un conjunto  $A$  es **finito** si no existe  $C \subsetneq A$  tal que  $\exists g : C \rightarrow A$  biyectiva. Se dice que es **infinito** si no es finito, es decir,  $\exists C \subsetneq A, \exists g : C \rightarrow A$  biyectiva.

**Ejemplo 0.6.** Tenemos que  $\mathbb{N}$  es infinito puesto que  $\mathbb{N}$  tiene el mismo cardinal que el conjunto de los números pares. Similarmente, antes hemos visto que  $\exists f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  biyectiva.

**Proposición 0.3.** (a) Sea  $X$  finito e  $Y \subset X$ , entonces  $Y$  es finito.

(b) Si  $X$  es finito y  $|X| = |Y|$ , entonces  $Y$  es finito.

(c) Si  $X$  es infinito y  $|X| = |Y|$ , entonces  $Y$  es infinito.

*Demostración.* (a) Si  $Y = X$  es trivial. Consideremos el caso  $Y \subsetneq X$ . Asumimos que  $X$  es finito e  $Y$  es infinito. Como  $Y$  es infinito,  $\exists Z \subsetneq Y$  y  $\exists f : Z \rightarrow Y$  biyección. Tenemos que  $X/Y \neq \emptyset$ . Consideremos la aplicación  $g : Z \cup (X/Y) \rightarrow X$  tal que

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in Z \\ x, & x \in X/Y \end{cases}$$

Tenemos que  $Z \cap (X/Y) = \emptyset$ . Así,  $x \neq y$  y  $x, y \in Z$  tenemos que  $f(x) \neq f(y)$ . Si  $x \in Z$  e  $y \in X/Y$ , tenemos que  $f(x) \in Y \Rightarrow f(x) \notin X/Y$ , así,  $f(x) \neq y$ , por lo que es inyectiva. Ahora comprobamos la sobreyectividad. Si  $x \in X$ , tenemos que  $x \in Y$  o  $x \in X/Y$ . Si  $x \in X/Y$ , cogemos  $x = g(x)$ . Si  $x \in Y$ , como  $f$  es biyectiva,  $\exists z \in Z$  tal que  $f(z) = x$ . Así, como  $Z \cup (X/Y) \subsetneq X$  y hemos encontrado una biyección  $g$  entre estos dos conjuntos, tenemos que  $X$  es infinito. Esto es una contradicción.

- (b) Asumimos que  $Y$  es infinito. El resto es análogo a la demostración (c).
- (c) Dado que  $X$  es infinito, tenemos que  $\exists Z \subsetneq X$  y  $f : Z \rightarrow X$  biyectiva. Como  $|X| = |Y|$ ,  $\exists T : X \rightarrow Y$  biyectiva. Así, tenemos que  $T(Z) \subsetneq Y$ . Definimos  $g = T \circ f \circ T^{-1} : T(Z) \rightarrow Y$ , que es una biyección, puesto que es una composición de biyecciones. Así,  $Y$  es infinito.  $\square$

**Observación 0.1.** Tenemos que  $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$ , puesto que  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(n) = n$  es inyectiva.

**Proposición 0.4.** Si  $X$  es infinito, entonces  $|\mathbb{N}| \leq |X|$ .

*Demostración.* Si  $X$  es infinito,  $\exists a_1 \in X$ . Cogemos  $f(1) = a_1$ . Similarmente cogemos  $f(2) = a_2 \in X/\{a_1\}$ . Por inducción,  $f(n) = a_n \in X/\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ . Tenemos que  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$  es una inyección.  $\square$

**Proposición 0.5.**

$$|X| < |\mathcal{P}(X)|.$$

*Demostración.* (i) Si  $X$  es finito,  $|X| = n < 2^n = |\mathcal{P}(X)|$ .

- (ii) Si  $X$  es infinito, tenemos que  $h : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  con  $a \rightarrow \{a\}$  es inyectiva. Así,  $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$ . Vamos a asumir que existe una biyección  $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ . Definimos

$$Z = \{a \in X : a \notin f(a)\} \subset X.$$

Si  $Z = \emptyset$ , tenemos que  $\forall a \in X$ ,  $a \in f(a)$ , por lo que  $\emptyset \notin \text{Im}(f)$ , así  $f$  no es sobreyectiva. Si  $Z \neq \emptyset$ , tenemos que  $\exists a \in Z$ . Similarmente, como  $Z \subset X$ ,  $\exists a \in X$  con  $Z = f(a)$ . De esta manera, tenemos que si  $a \in Z$ , entonces  $a \notin Z$ , por lo que tenemos una contradicción. Similarmente, si  $a \notin Z$ , tenemos que  $a \in Z$ .  $\square$

**Proposición 0.6.**

$$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|.$$

*Demostración.* Sabemos que  $\exists \varphi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  biyectiva. Así, vamos a buscar una biyección  $g : \mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$ . Sea  $B = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} : a_n \in \{0, 1\}, \exists a_{n_0} = 0, \exists a_{n_1} = 1, \forall m, \exists m' > m, a_{m'} = 1 \right\} \subset (0, 1)$ . Definimos  $g : \mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$  biyectiva tal que

$$g(k) = r_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{k,n}}{2^n}.$$



Vamos a construir  $r \in (0, 1)$  tal que  $\forall k \in \mathbb{N}, r \neq r_k$ . Sea  $a_{n_1} = 1$ , así, cogemos  $a_{n_1} = 0$ . Similarmente, si  $a_{2, n_2} = 1$ , con  $n_2 > n_1$ , y decimos que  $a_{n_2} = 0$ . En general, si  $a_{k, n_k} = 1$ ,  $a_{n_k} = 0$ . En el resto de coordenadas intermedias le ponemos un 1. Así, definimos

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} \neq r_k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

1

□

**Teorema 0.1.**

$$|\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}|.$$

*Demostración.* Vamos a ver que  $|(0, 1)| = |(0, 1) \times (0, 1)|$ . Cogemos  $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1) \times (0, 1)$  tal que  $r \rightarrow (r, a)$ . Así, está claro que  $|(0, 1)| \leq |(0, 1) \times (0, 1)|$ . Ahora, cogemos  $g : (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow (0, 1)$  tal que

$$(r, s) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n} \right) \rightarrow g(r, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{2n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^{n+1}} \in (0, 1).$$

Tenemos que demostrar que esto es una inyección.

□

**0.2.1. Números algebraicos**

Sea  $\mathbb{K}$  un cuerpo y  $\mathbb{K}[x] = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n\}$ .

**Proposición 0.7.** Si  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ , tenemos que existe  $p(x) \in \mathbb{R}[x]$  tal que  $p(z) = 0$ .

*Demostración.* Cogemos el polinomio

$$(x - z)(x + z) = x^2 - z^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 \in \mathbb{R}[x].$$

□

Entonces se dice que los números complejos son algebraicos sobre  $\mathbb{R}$ . Tenemos que  $\mathbb{R}$  no es algebraico sobre  $\mathbb{Q}$ . Considera, por ejemplo  $\pi$ . Tenemos que

$$\mathbb{Q}[x] = \{\text{polinomios de grado } 1\} \cup \{\text{polinomios de grado } 2\} \cup \dots \cup \{\text{polinomios de grado } n\} \cup \dots.$$

Podemos ver que las raíces de todos los polinomios de  $\mathbb{Q}[x]$  son tantas como  $|\mathbb{N}|$ . Por tanto, tiene que haber números reales que no son algebraicos.

<sup>1</sup>Si hay un número que tiene infinitos ceros, cogemos representación decimal por la derecha.

## 0.3. Funciones de variable real

### 0.3.1. Estudio de funciones

Las funciones pueden tener propiedades variadas. Un ejemplo es ser inyectiva, sobreyectiva (suprayectiva) o biyectiva.

**Ejemplo 0.7.** Consideremos  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ . Tenemos que  $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$ . Calculamos la imagen. Tenemos que

$$-1 < \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1.$$

Si  $a = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ , tenemos que

$$a^2 = \frac{x^2}{x^2+1} \iff a^2x^2 + a^2 = x^2 \iff x = \pm \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Así,  $\text{Im}(-1, 1)$ . Así,  $f: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$  es biyectiva.

También se puede estudiar el signo de una función:

- $f^+ = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\}$ .
- $f^- = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < 0\}$ .

**Definición 0.13** (Paridad).  $f$  se dice **par** si se verifica que  $f(x) = f(-x)$ ,  $\forall x \in \text{dom}(f)$ . Se dice que  $f$  es **impar** si  $\forall x \in \text{dom}(f)$ ,  $f(-x) = -f(x)$ .

**Definición 0.14** (Monotonía). Se dice que  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es **monótona creciente** si  $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ . Similarmente, se dice que es **monótona decreciente** si  $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ .

**Definición 0.15** (Convexidad). Se dice que  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es **convexa** si  $\forall a, b \in \text{dom}(f)$  y  $\alpha \in [0, 1]$  se cumple que

$$f(\alpha a + (1 - \alpha)b) \leq \alpha f(a) + (1 - \alpha)f(b).$$

Unas propiedades importantes de las funciones son sus límites. Si  $a$  está en la 'frontera' de  $\text{dom}(f)$ , tenemos que  $a = \pm\infty$  o  $a \notin \text{dom}(f)$  pero existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

**Definición 0.16** (Continuidad). Dada  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a \in \text{dom}(f)$ , se dice que  $f$  es **continua** en  $a$  si existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

**Definición 0.17** (Continuidad). Se dice que  $f$  es **continua** en  $a \in \text{dom}(f)$  si  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que si  $0 \leq |x - a| < \delta$  se tiene que  $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ .

**Definición 0.18** (Continuidad). Se dice que  $f$  es **continua** en  $a \in \text{dom}(f)$  si  $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow a$  se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ .

**Ejemplo 0.8.** ■ Dado  $f = a$  tenemos que es continua en todo  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

- Consideremos la función  $f(x) = x$ . Cogemos  $\delta = \epsilon$ , entonces si  $0 \leq |x - x_0| < \delta$ , tenemos que  $|x - x_0| < \epsilon$ . Así, esta función es continua en todo  $\mathbb{R}$ .

### 0.3.2. Métodos para generar funciones

Dadas  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\text{dom}(f) \cap \text{dom}(g) \neq \emptyset$ , tenemos que si  $x \in \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$ ,

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ .
- $(fg)(x) = f(x)g(x)$ .
- Si  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda f(x)$ .
- Si  $x \in \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$  y  $g(x) \neq 0$ ,  $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ .

**Observación 0.2.** Podemos observar que los polinomios se forman a través de estas transformaciones elementales.

Similarmente, las funciones racionales se forman a partir de polinomios y de su división.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_0}.$$

Cuando una función es **inyectiva**, podemos definir su inversa. Esta es otra forma de generar funciones. Dada una función inyectiva, se define su inversa  $f^{-1}$  por

$$\begin{aligned} f^{-1} : \text{Im}(f) &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\rightarrow f^{-1}(y) = x. \end{aligned}$$

donde  $x \in \text{dom}(f)$  es el único elemento en  $\text{dom}(f)$  tal que  $f(x) = y$ .

**Ejemplo 0.9.** La función  $f(x) = \sqrt{x}$  se genera a partir de la inversa de  $f(x) = x^2$ .

Dadas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\text{Im}(f) \subset \text{dom}(g)$ , se define  $f$  compuesta con  $g$  así:  $g \circ f : \text{Im}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ . Más adelante demostraremos que la composición de funciones conserva la continuidad. También podemos definir funciones con series de potencias.

**Ejemplo 0.10.** Dada  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3x^n}{n!}$ . El dominio son los valores  $x \in \mathbb{R}$  tales que la serie es convergente.

# Capítulo 1

## El cuerpo de los números reales

### 1.1. El cuerpo de los números reales.

**Definición 1.1** (Cuerpo). Se define  $\mathbb{R}$  como un **cuerpo abeliano**:

(i) Existen dos operaciones en  $\mathbb{R}$ :  $+$  (suma) y  $\cdot$  (producto).

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow x + y$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow x \cdot y.$$

(ii) La suma es conmutativa:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y = y + x.$$

(iii) La suma es asociativa:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x + y) + z = x + (y + z).$$

(iv) Existencia del elemento neutro de la suma <sup>a</sup> :

$$\exists 0 \in \mathbb{R}, 0 + x = x + 0 = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

(v) Existencia del elemento opuesto:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists -x^b \in \mathbb{R}, x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

(vi) El producto es conmutativo:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \cdot y = y \cdot x.$$

(vii) La multiplicación es asociativa:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

(viii) Existencia del elemento neutro del producto:

$$\exists 1 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, 1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$$

(ix) Existencia del opuesto en el producto:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists \frac{1}{x}^c \in \mathbb{R}, x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1.$$

(x) El producto es distributivo respecto a la suma <sup>d</sup>:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

<sup>a</sup>no estamos afirmando que sea único

<sup>b</sup>el menos no significa nada, no sabemos lo que es restar todavía

<sup>c</sup>Como en a, esto es notación, no sabemos dividir

<sup>d</sup>no hay que especificar distributiva por la izquierda y por la derecha por la propiedad de conmutatividad del producto

Los racionales ( $\mathbb{Q}$ ) cumplen estos requisitos por lo que son un cuerpo, sin embargo  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{N}$  no lo son porque no cumplen con todos los requisitos. Algunos cuerpos interesantes son las clases de equivalencia de la forma  $\mathbb{Z}_n$ .  $\mathbb{R}$  también tiene la propiedad de que existe un orden como en  $\mathbb{Q}$ .

**Teorema 1.1.** En  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ :

(a) El elemento neutro de la suma es único.

(b) El elemento neutro del producto es único.

(c)  $\forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 0 = 0$ .

*Demostración.* (a) Suponemos que existe otro elemento  $0' \in \mathbb{R}$ , además de  $0 \in \mathbb{R}$  que cumple que es el elemento neutro de la suma. Tenemos que

$$0 + 0' \underset{(iv)}{=} 0' \underset{(ii)}{=} 0' + 0 \underset{(iii)}{=} 0.$$

Por tanto,  $0 = 0'$ .

(b) Suponemos que existen  $1, 1' \in \mathbb{R}$  que son elementos neutros para el producto. Aplicamos lo mismo que en la demostración anterior.

$$1 \cdot 1' = 1' = 1' \cdot 1 = 1.$$

Por tanto,  $1 = 1'$ .

(c)

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0.$$

Sumamos el opuesto a ambos lados:

$$x \cdot 0 + (-x \cdot 0) = (-x \cdot 0) + x \cdot 0 + x \cdot 0$$

$$0 = 0 + x \cdot 0$$

$$0 = x \cdot 0.$$

También se puede demostrar de la siguiente forma:

$$a + a \cdot 0 = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a \cdot (1 + 0) = a \cdot 1 = a.$$

Si sumamos  $-a$  en ambos lados tenemos que  $a \cdot 0 = 0$ .

□

**Lema 1.1.**  $\forall x \in \mathbb{R}$ , se cumple que

$$(-x) = (-1) \cdot x.$$

*Demostración.* Aplicamos la parte (c) del teorema anterior.

$$(-1) \cdot x + x = (-1) \cdot x + 1 \cdot x = ((-1) + 1) \cdot x = 0 \cdot x = 0.$$

□

**Teorema 1.2.** (a)  $x \neq 0$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,  $x \cdot y = 1$ , entonces  $y = \frac{1}{x}$ .

(b) Si  $x \cdot y = 0$  entonces  $x = 0$  o  $y = 0$ .

*Demostración.* (a)

$$y = 1 \cdot y = \frac{1}{x} \cdot x \cdot y = \frac{1}{x} \cdot (x \cdot y) = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}.$$

(b) Si  $x = 0$  hemos ganado. Si  $x \neq 0$ ,

$$x \cdot y = 0.$$

Multiplicamos ambos lados por el inverso,

$$\frac{1}{x} \cdot x \cdot y = \frac{1}{x} \cdot 0 = 0 \Rightarrow 1 \cdot y = 0 \Rightarrow y = 0.$$

□

**Notaciones:**  $x, y \in \mathbb{R}$

■ Definimos resta como:  $x - y = x + (-y)$

- Si  $y \neq 0$ , definimos la división como

$$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}.$$

- Si  $x \neq 0$ ,  $x^0 = 1$ .
- $x^1 = x$ .
- Si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x^n = x \cdot x^{n-1}$ .
- Si  $x \neq 0$ ,  $x^{-1} = \frac{1}{x}$ .
- $x^{-2} = x^{-1} \cdot x^{-1} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot 1$ .
- Si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x^{-n} = x^{-1} \cdot x^{-(n-1)}$ .

Definimos los naturales como la suma de la unidad (elemento neutro del producto) y los enteros negativos como la suma del opuesto de la unidad.

**Definición 1.2.** Si  $n, m \in \mathbb{Z}$  y  $m \neq 0$ , definimos  $\mathbb{Q}$  como

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}.$$

Definimos el complementario de los números racionales como los números irracionales:

$$\mathbb{R}/\mathbb{Q}.$$

Sabemos que  $\mathbb{R}/\mathbb{Q} \neq \emptyset$  porque sabemos que existe  $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$  tal que  $x^2 = 2$ .

**Definición 1.3** (Grupo). Un grupo es un conjunto con una operación  $(+)$  que cumple las condiciones de la suma.

**Definición 1.4** (Anillo). Un anillo es un conjunto con dos operaciones  $(+, \cdot)$  que cumple todas las condiciones menos la existencia de la inversa en el producto.

**Ejemplo 1.1.**  $\mathbb{Z}$  es un anillo.

**Definición 1.5** (Propiedades de cuerpo ordenado de  $\mathbb{R}$ ). Asumimos que existe  $P \subset \mathbb{R}$  (**números reales positivos**), con  $P \neq \emptyset$ , tal que

- (i) Conjunto cerrado por la suma:

$$\forall x, y \in P, x + y \in P.$$

<sup>1</sup>No hemos demostrado que  $x^{-2} = \left(\frac{1}{x}\right)^2$

(ii) Conjunto cerrado por el producto:

$$\forall x, y \in P, x \cdot y \in P.$$

(iii)  $\forall x \in \mathbb{R}$  se cumple sólo una de las siguientes cosas:

$$x \in P, \text{ o } x = 0 \text{ o } -x \in P.$$

A los números tales que  $-x \in P$  los llamaremos **números negativos**.

#### Notaciones

- Si  $x \in P$ , decimos que  $x > 0$ .
- Si  $x > 0$  o  $x = 0$ , decimos que  $x \geq 0$ .
- Si  $-x \in P$ , decimos que  $-x > 0$  o  $x < 0$ .
- Si  $x < 0$  o  $x = 0$  decimos que  $x \leq 0$ .

**Definición 1.6.**  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ,

(i)  $x > y$  o  $y < x$  si  $x - y > 0$ .

(ii)  $x \geq y$  o  $y \leq x$  si  $x > y$  o  $x = y$ .

Tenemos que  $\mathbb{Q}$  también es un cuerpo ordenado.

**Teorema 1.3.** Si  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .

(a) **Propiedad transitiva:** Si  $x > y$  y  $y > z$ , entonces  $x > z$ .

(b) Si  $x > y$ , entonces  $x + z > y + z$ .

(c) Si  $x > y$  y  $z > 0$ , entonces  $x \cdot z > y \cdot z$ .

*Demostración.* (a) Si  $x > y$  entonces  $x - y > 0$ . Similarmente,  $y - z > 0$ . Por tanto,  $x - y \in P$  y  $y - z \in P$ . Por las propiedades de  $P$  tenemos que:

$$(x - y) + (y - z) \in P \Rightarrow x - z \in P.$$

Consecuentemente,  $x - z > 0$  y  $x > z$ .

(b)

$$(x + z) - (y + z) = x - y \in P.$$

(c)

$$x \cdot z - y \cdot z = (x - y) \cdot z.$$

Como  $x - y \in P$  y  $z \in P$ , tenemos que  $(x - y) \cdot z \in P$ .

□



**Teorema 1.4.** (a) Si  $x \in \mathbb{R}$  y  $x \neq 0$ , entonces  $x^2 > 0$ .

(b)  $1 > 0$ .

(c) Los números naturales son positivos.

*Demostración.* (a) Si  $x \neq 0$ ,  $x$  puede ser positivo o negativo. Si  $x > 0$ ,  $x \in P$  y  $x \cdot x = x^2 \in P$ . Si  $x < 0$ ,  $-x \in P$ , por tanto  $(-x) \cdot (-x) \in P$ . Además,

$$(-x)(-x) = (-1)^2 x^2 > 0.$$

Tenemos que demostrar que  $(-1)^2$  es 1. Sabemos que

$$(-1)(-1) = -(-1).$$

Además,

$$(-1) + 1 = 0 \Rightarrow -(-1) + (-1) + 1 = -(-1) + 0 \Rightarrow -(-1) = 1.$$

Por tanto,

$$1 \cdot x^2 = x^2 > 0.$$

(b) Sabemos que  $1 \neq 0$ . Aplicamos lo demostrado en (a):

$$1 = 1 \cdot 1 = 1^2 > 0.$$

(c) Definimos un número natural  $n$  como la suma de 1,  $n$  veces. Tenemos que

$$1 = 1.$$

Además,

$$1 + 1 = 2.$$

Sabemos que  $2 > 1$  porque  $1 + 1 - 1 = 1 > 0$ . Asumimos que esto se sostiene para  $n = k$ , entonces

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_k > \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{k-1}.$$

Entonces, si  $n = k + 1$ ,

$$k + 1 = \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_k + 1.$$

Por tanto, para obtener  $k + 1$  estamos sumando 1 un total de  $k + 1$  veces. De manera similar, tenemos que

$$k + 1 - k = 1 > 0.$$

Además, por hipótesis de inducción

$$k + 1 - 1 = k > 0.$$

Por lo que, dado que  $k \geq 1$  tenemos que  $k \in P$  (por la propiedad transitiva).

□

**Ejemplo 1.2.** Consideramos el conjunto  $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ . Tenemos que

$$1 + 2 \pmod 3 = 3 \pmod 3 = 0.$$

Tenemos que este conjunto no es un cuerpo ordenado, pues si  $1 > 0$ , tenemos que  $1 \in P$  y, consecuentemente,  $1 + 1 \in P$ . Sin embargo,

$$1 + 1 = 2 = -1.$$

Como  $1 \in P$ , tenemos que  $-1 < 0$ .

**Lema 1.2.** Si  $x \in \mathbb{R}$  y  $x > 0$ , entonces  $\frac{1}{x} > 0$ .

*Demostración.* Si  $\frac{1}{x}$  no es mayor que 0, tenemos que o bien, es 0 o es negativo. No puede ser 0, porque cualquier cosa por 0 es 0. Por tanto, ha de ser negativo. Entonces, el opuesto del inverso ha de ser positivo:

$$-\frac{1}{x} > 0 \Rightarrow x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) > 0.$$

Consecuentemente,  $-1 > 0$ , que es una contradicción (en un teorema anterior quedó demostrado que  $1 > 0$ ).  $\square$

**Lema 1.3.**

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

*Demostración.* Decimos que

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \iff 2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \iff 2 - 1 = (1 + 1) - 1 = 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

$\square$

**Teorema 1.5** (Aproximación). Si  $x \in \mathbb{R}$ , satisface que  $0 \leq x < \epsilon$ ,  $\forall \epsilon > 0$ , entonces,  $x = 0$ .

*Demostración.* Suponemos que  $x \neq 0$ . Sabemos, por hipótesis, que es positivo, i.e.  $x > 0$ . Tomamos  $\epsilon = \frac{x}{2} > 0$  (por el lema anterior). Entonces

$$x < \frac{x}{2} \iff x - \frac{x}{2} < 0 \iff x \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = x \cdot \frac{1}{2} < 0.$$

Esto nos da una contradicción.

Otra posible demostración es decir  $\epsilon = x$  (contradicción porque es imposible que  $x < x$ , pues daría que 0 es un número negativo).  $\square$

**Definición 1.7** (Valor absoluto). Sea  $x \in \mathbb{R}$ , se define  $|x|$  de la siguiente manera

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

**Proposición 1.1.** (i)  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(ii)  $|x|^2 = x^2$

(iii) Si  $y \geq 0$ :

$$|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y.$$

(iv)  $-|x| \leq x \leq |x|$

*Demostración.* (i) Si  $x \cdot y > 0$ , entonces  $|x \cdot y| = x \cdot y$ . Además,  $x \cdot y > 0 \iff x > 0 \wedge y > 0$  o  $x < 0 \wedge y < 0$ . Si los dos son positivos

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| = x \cdot y.$$

Si los dos son negativos,

$$|x| \cdot |y| = (-x) \cdot (-y) = x \cdot y.$$

Por tanto,

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$$

Si  $x \cdot y < 0$ , sin pérdida de generalidad, sea  $x < 0$ . Entonces  $|x| = -x$  y  $|y| = y$ . Además,

$$|x \cdot y| = -x \cdot y.$$

Por otro lado,

$$|x| \cdot |y| = -x \cdot y.$$

Si  $x \cdot y = 0$ , o  $x = 0$  o  $y = 0$ . Sin pérdida de generalidad, sea  $x = 0$ , entonces  $|x| = 0$  y  $|x \cdot y| = 0$ . Además,

$$|x| \cdot |y| = 0 \cdot |y| = 0.$$

(ii) Sabemos que  $\forall x \in \mathbb{R}$  se cumple que  $x^2 \geq 0$ . Entonces, tenemos que

$$x^2 = |x^2| = |x| \cdot |x| = |x|^2.$$

(iii) Cogemos  $y \in \mathbb{R}^*$  y  $|x| \leq y$ . Analizamos todos los casos. Si  $x < 0$ ,  $|x| = -x$  y  $-x > 0$ . Por tanto,  $x < 0 \leq y$ . Por tanto,

$$x < y \Rightarrow x \leq y.$$

Por tanto,

$$|x| \leq y \Rightarrow -x \leq y \Rightarrow -y \leq x.$$

Si  $x = 0$  tenemos que  $|x| = 0$ . Además,  $0 \leq y$  y  $-y < 0$ . Si  $x > 0$ , tenemos que  $|x| = x \leq y$ . Además,

$$-y \leq 0 < x \Rightarrow -y \leq x.$$

(iv) Lo podemos demostrar de dos formas. En primer lugar, podemos considerar los posibles valores de  $x$ . Si  $x = 0$  es trivial. Si  $x > 0$ , tenemos que  $|x| = x$ . Por tanto,  $x \leq |x|$ . Además,  $-|x| = -x < 0$  y, por tanto,

$$-x < 0 \leq x \leq |x| \Rightarrow -|x| \leq x \leq |x|.$$

Si  $x < 0$  tenemos que  $|x| = -x$ . Entonces,  $-|x| = x \leq x$  y  $|x| > 0$ , por tanto,

$$-|x| \leq x \leq |x|.$$

Otra manera de hacerlo es utilizando el apartado anterior y afirmar que  $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq x$ . □

**Teorema 1.6** (Desigualdad triangular). Para  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

*Demostración.* Utilizamos el apartado (iii) del teorema anterior. Tenemos que:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \iff -|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

Utilizando (iv), sabemos que  $-|x| \leq x \leq |x|$  y, similarmente,  $-|y| \leq y \leq |y|$ . Por tanto, al sumar estas igualdades obtenemos que

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

Esto es lo que queríamos demostrar. □

**Corolario 1.1** (Desigualdad triangular al revés). Para  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$|x - y| \geq ||x| - |y||.$$

*Demostración.* Este enunciado es equivalente a (utilizando (iii))

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|.$$

Además,

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \iff |y| \leq |x - y| + |x|.$$

Entonces, utilizando el teorema anterior

$$|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x| = |x - y| + |x|.$$

Por el otro lado, tenemos que

$$|x| - |y| \leq |x - y| \iff |x| \leq |x - y| + |y|.$$

Por tanto, sabemos que

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|.$$

Por lo que

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y| \iff |x - y| \geq ||x| - |y||.$$

□

**Definición 1.8** (Distancia Euclídea). La distancia en  $\mathbb{R}$  se define como

$$d(x, y) = |x - y|.$$

**Nota.** A  $\mathbb{R}$  se le llama **espacio euclídeo** de dimensión 1.

**Proposición 1.2.** (i)  $d(x, y) \geq 0 \wedge d(x, y) = 0 \iff x = y$

(ii)  $d(x, y) = d(y, x)$

(iii)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

*Demostración.* (i) Trivial

(ii) Trivial

(iii) Utilizamos la desigualdad triangular.

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y).$$

□

**Definición 1.9.** Dado  $x \in \mathbb{R}$  y  $\epsilon > 0$ , definimos el **entorno de  $x$**  con radio  $\epsilon$

$${}^aB(x, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < \epsilon\} = (x - \epsilon, x + \epsilon).$$

<sup>a</sup>También se usa la  $V$

**Observación.**  $|x - y| < \epsilon \iff -\epsilon < x - y < \epsilon \iff x - \epsilon < y < x + \epsilon \iff y - \epsilon < x < y + \epsilon.$

**Notaciones.** Si  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $a < b$ ,

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

**Corolario 1.2.**  $x = a \iff \forall \epsilon > 0, x \in B(a, \epsilon)$

*Demostración.* Sabemos que  $y = 0 \iff 0 \leq y < \epsilon, \forall \epsilon > 0$ . Sea  $y = |x - a|$ . Ya sabemos que  $|x - a| \geq 0$ . La hipótesis me dice que

$$\forall \epsilon > 0, |x - a| < \epsilon \Rightarrow |x - a| = 0 \iff x = a.$$

Por el otro lado, es trivial que si  $x = a, \forall \epsilon > 0, x \in B(a, \epsilon).$

□

**Corolario 1.3.** Para  $\forall a \in \mathbb{R}$ ,

$$\bigcap_{\epsilon > 0} B(a, \epsilon) = \{a\}.$$

$a$

<sup>a</sup>Este corolario significa lo mismo que el anterior.

## 1.2. Completitud de $\mathbb{R}$

Sabemos que  $\forall x \in \mathbb{Q}, x^2 \neq 2$ .

De momento sabemos que  $\mathbb{R}$  es un cuerpo abeliano totalmente ordenado.  $\mathbb{C}$  no tiene un orden porque no se cumple la condición de que si  $z \in \mathbb{C}$  entonces  $z^2 \geq 0$ .

**Definición 1.10.** Sea  $S \subset \mathbb{R}$  con  $S \neq \emptyset$ . Se dice que  $a \in \mathbb{R}$  es una **cota superior** de  $S$  si

$$\forall s \in S, s \leq a.$$

Decimos que  $S$  está **acotado superiormente** si tiene una cota superior.

Similarmente, se dice que  $a \in \mathbb{R}$  es una **cota inferior** de  $S$  si

$$\forall s \in S, a \leq s.$$

Si tiene una cota inferior decimos que  $S$  está **acotado inferiormente**.

Si está acotado superiormente e inferiormente decimos que está acotado.

**Ejemplo 1.3.** (i) El conjunto  $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$  está acotado superiormente pero no inferiormente, por lo que no es un conjunto acotado.

(ii)  $S$  está acotado si y solo si  $\exists c > 0$  tal que  $\forall s \in S, |s| \leq c$ . Es decir,

$$\exists c > 0, \forall s \in S, -c \leq s \leq c.$$

**Nota.** Podemos asumir que el conjunto vacío está acotado (no tenemos nada que comprobar).

**Definición 1.11.** Sea  $S \neq \emptyset$ . Se dice que  $u \in \mathbb{R}$  es el **supremo** de  $S$  si

(i)  $u$  es cota superior de  $S$ . Es decir,  $\forall s \in S, u \geq s$ .

(ii) Si  $v \geq s, \forall s \in S$  entonces  $v \geq u$ . Es decir, es la menor cota superior.

Análogamente, se dice que  $u \in \mathbb{R}$  es el **ínfimo** de  $S$  si

(i)  $\forall s \in S, u \leq s$ .

(ii) Si  $\forall s \in S, v \leq s$ , entonces  $v \leq u$ . Es decir, es la mayor cota inferior.

**Definición 1.12.** Si  $u = \sup(S)$  y  $u \in S$ , diremos que  $u$  es el **máximo** de  $S$ .

Similarmente, si  $u = \inf(S)$  y  $u \in S$ , diremos que  $u$  es el **mínimo** de  $S$ .

**Ejemplo 1.4.** (i) Si  $S = (0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$ . Tenemos que  $1 = \sup(S)$  y como  $1 \in S$ , 1 ha de ser el máximo. Además,  $\inf(S) = 0$  y como  $0 \notin S$ , no existe el mínimo en  $S$ .

(ii) Considera el conjunto  $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$ . Tenemos que  $\sup(S) = 1$  y como  $1 \notin S$  tenemos que  $S$  no tiene máximo. Además, no tiene cotas inferiores, por lo que el ínfimo no existe. Si no existe lo denotamos de la siguiente manera:  $\inf = -\infty$ .

**Axioma 1** (Axioma del supremo). Para todo conjunto  $S \subset \mathbb{R}$  con  $S \neq \emptyset$ , si  $S$  está acotado superiormente, entonces existe  $\sup(S)$ .

**Observaciones.** Tenemos que  $\mathbb{Q}$  es un cuerpo abeliano ordenado, pero no se cumple el axioma del supremo. Considera el conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}.$$

Este conjunto está acotado superiormente pero no tiene supremo ( $\sup(S) \notin \mathbb{Q}$ ) porque no existe  $x \in \mathbb{Q}$  tal que  $x^2 = 2$ .

**Notación.** Si se satisface el axioma del supremo diremos que el cuerpo abeliano, totalmente ordenado, es **completo**<sup>2</sup>.

**Teorema 1.7.** Sea  $S \subset \mathbb{R}$  con  $S \neq \emptyset$ . Supongamos que  $S$  está acotado inferiormente. Sea  $-S = \{-s : s \in S\}$ . Entonces  $-S$  está acotado superiormente y, por el axioma del supremo, tiene supremo. Entonces,

$$\sup(-S) = -\inf(S).$$

Es decir, el ínfimo existe y es el opuesto del supremo de  $-S$ .

*Demostración.* Sea  $v \leq s, \forall s \in S$ . Sabemos que  $v$  existe por la hipótesis del teorema. Entonces,  $\forall s \in S, -s \leq -v$ . Por tanto,  $-v$  es una cota superior de  $-S$ . Por el axioma del supremo, tenemos que  $\exists u = \sup(-S)$ .

(i) Demostramos que  $-u$  es una cota inferior. Sabemos que  $u \geq -s, \forall s \in S$ . Consecuentemente,  $-u \leq s, \forall s \in S$ .

(ii) Si  $\forall s \in S, v \leq s$ . Entonces,  $-s \leq -v$ , por lo que  $-v$  es cota superior de  $-S$ . Por tanto,  $u \leq -v$  y, consecuentemente,  $-u \geq v$ .

□

<sup>2</sup>No es completo en el sentido algebraico, pues no hay  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $x^2 = -1$ , es completo en el sentido de que no tiene agujeros

**Proposición 1.3.** Sea  $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}$ .

(i) Si  $S$  está acotado superiormente

$$u = \sup(S) \iff (\forall s \in S, u \geq s) \wedge (\forall \epsilon > 0, \exists s \in S, u - \epsilon < s).$$

(ii) Si  $S$  está acotado inferiormente,

$$u = \inf(S) \iff (\forall s \in S, u \leq s) \wedge (\forall \epsilon > 0, \exists s \in S, s < u + \epsilon).$$

*Demostración.* (i) Sea  $u = \sup S$ , entonces  $\forall s \in S, u \geq s$ . Sea  $\epsilon > 0$  y consideremos el punto  $u - \epsilon$ . Si  $u - \epsilon \geq s, \forall s \in S$ . Entonces  $u - \epsilon$  es cota superior de  $S$ . Además, tenemos que  $u - \epsilon < u$ , pero como  $\sup S = u$  tenemos que  $u \leq u - \epsilon$ . Esto es una contradicción.

(ii) Recíprocamente, si  $u$  es una cota superior y  $\forall \epsilon > 0, \exists s \in S, u - \epsilon < s$ . Si  $u$  no fuera supremo, existe  $v \geq s, \forall s \in S$  tal que  $v < u$ . Si tomamos  $\epsilon = u - v > 0$ , tenemos que existe  $s \in S$  tal que  $s > u - \epsilon$ , entonces,

$$u - \epsilon = v < s.$$

Esto es una contradicción. □

**Proposición 1.4.** Si  $A, B \subset \mathbb{R}$  con  $A, B \neq \emptyset$ , tales que  $\forall a \in A, \forall b \in B$  se verifica que  $a \leq b$ , entonces,  $\sup A \leq \inf B$  (existen  $\sup A$  y  $\inf B$ ).

*Demostración.* Tenemos que  $\forall b \in B, \forall a \in A, b \geq a$ . Por tanto,  $A$  está acotado superiormente y, por el axioma de completitud, existe  $\sup A$  y que  $\sup A \leq b, \forall b \in B$ . Por tanto,  $\sup A$  es una cota inferior de  $B$  y, por tanto,

$$\sup A \leq \inf B.$$

□

**Teorema 1.8** (Propiedad Arquimediana de  $\mathbb{R}$ ). Para todo  $x \in \mathbb{R}, \exists n_x \in \mathbb{N}$  tal que  $x < n_x$ .

*Demostración.* Asumimos que  $\exists x \in \mathbb{R}$  tal que  $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq x$ . Por lo que  $\mathbb{N}$  está acotado superiormente. Entonces, por el axioma de completitud tenemos que  $\exists \sup \mathbb{N} \leq x$ . Sabemos que  $u = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$ . Como  $u - 1 < u$ , tenemos que  $\exists m \in \mathbb{N}$  tal que  $u - 1 < m \leq u$ . Entonces,  $u < m + 1$ . Sin embargo,  $m + 1 \in \mathbb{N}$  y tenemos que hay un número natural mayor que el supremo de todos los números naturales. Esto es una contradicción. □

**Corolario 1.4.**

$$\inf \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0.$$



*Demostración.* Sea  $S = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ . Como el inverso de un número positivo es positivo, tenemos que el conjunto está acotado inferiormente por 0. Dado  $\epsilon > 0$ . Como  $\mathbb{N}$  no está acotado superiormente, si tomamos  $x = \frac{1}{\epsilon}$ , podemos encontrar  $n_\epsilon \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{1}{\epsilon} < n_\epsilon.$$

Por tanto,

$$0 \leq \inf S \leq \frac{1}{n_\epsilon} < \epsilon.$$

Por tanto, como  $\forall \epsilon > 0, 0 \leq \inf S < \epsilon$ , tenemos que  $\inf S = 0$ . □

**Corolario 1.5.**  $\forall a > 0$ ,

$$\inf \left\{ \frac{a}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0.$$

**Observación.**  $\mathbb{R}$  es el cuerpo abeliano, ordenado, completo y arquimediano. Es el único conjunto que satisface esto (si hay otro conjunto que también lo cumple, es esencialmente el mismo).

**Lema 1.4.** Si  $a, b > 0$  entonces

$$a < b \iff a^2 < b^2.$$

*Demostración.*

$$a^2 < b^2 \iff b^2 - a^2 > 0 \iff (b + a)(b - a) > 0.$$

Sabemos que  $a, b > 0$ , por tanto  $b + a > 0$ , por tanto  $b - a$  tiene que ser positivo y, por tanto,  $b > a$ . □

**Teorema 1.9.** Existe  $x \in \mathbb{R}$ , tal que  $x^2 = 2$ .

*Demostración.* Sea  $S = \{s \in \mathbb{R} : 0 \leq s \wedge s^2 < 2\}$ . Sabemos que  $S \neq \emptyset$  porque  $1 \in S$ . Demostramos que está acotado superiormente. Si  $s \in S$ , entonces,  $s^2 < 2 < 4$ . Por el lema anterior,

$$s < 2.$$

Por tanto,  $S$  está acotado superiormente por 2. Por el axioma de la completitud,  $\exists u = \sup S$ . Sabemos que

$$1 \leq u \leq 2.$$

Supongamos que  $u^2 \neq 2$ :

(i) Si  $u^2 < 2$ , sea  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \left(u + \frac{1}{n}\right)^2 &= u^2 + \frac{2u}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &< u^2 + \frac{2u}{n} + \frac{1}{n} \\ &= u^2 + \frac{2u+1}{n}. \end{aligned}$$

Para demostrar que  $u^2 + \frac{2u+1}{n} < 2$  tenemos que demostrar que  $\frac{2u+1}{n} < 2 - u^2$ . Como  $2u+1 > 0$ , tenemos que por el colorario anterior que,

$$\inf \left\{ \frac{2u+1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0.$$

Por tanto,  $\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{2u+1}{n_\epsilon} < \epsilon$ <sup>3</sup>. Si tomamos  $\epsilon = 2 - u^2$ ,  $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{2u+1}{n_\epsilon} < 2 - u^2 = \epsilon \iff \left(u + \frac{1}{n_\epsilon}\right)^2 < u^2 + \frac{2u+1}{n_\epsilon} < 2 - u^2 + u^2 = 2.$$

Por tanto,  $u = \sup S < u + \frac{1}{n_\epsilon} \in S$ . Esto es una contradicción.

(ii) Si  $u^2 > 2$ , sea  $m \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} \left(u - \frac{1}{m}\right)^2 &= u^2 - \frac{2u}{m} + \frac{1}{m^2} \\ &> u^2 - \frac{2u}{m}. \end{aligned}$$

Queremos decir que  $u^2 - \frac{2u}{m} > 2$ . Cogemos  $\epsilon = u^2 - 2 > \frac{2u}{m}$ . Usamos el colorario de la propiedad arquimediana. Tenemos que  $2u > 0$ . Además,

$$\inf \left\{ \frac{2u}{m} : m \in \mathbb{N} \right\} = 0.$$

Por tanto,  $\exists m_\epsilon \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{2u}{m_\epsilon} < \epsilon$ .

$$u^2 - \frac{2u}{m_\epsilon} > u^2 - \epsilon = u^2 - (u^2 - 2) = 2.$$

Así, hemos llegado a la conclusión de que  $\left(u - \frac{1}{m_\epsilon}\right)^2 > 2 > s^2, \forall s \in S$ . Por el lema anterior,

$$u - \frac{1}{m_\epsilon} > s, \forall s \in S.$$

---

<sup>3</sup>En este paso puedes utilizar directamente la propiedad arquimediana y decir que puedes encontrar un  $n \in \mathbb{N}$  lo suficientemente grande.

Entonces,  $u - \frac{1}{m_\epsilon}$  es una cota superior de  $S$  que a su vez es menor que  $u = \sup S$ . Es decir

$$u - \frac{1}{m_\epsilon} < u \quad \text{y} \quad u - \frac{1}{m_\epsilon} \geq u.$$

Esto es una contradicción.

Por tanto, no puede ser que  $u^2 > 2$  ni  $u^2 < 2$ . Por tanto, debe ser que  $u^2 = 2$ .  $\square$

**Corolario 1.6.** Para todo  $a > 0$ , y para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $x > 0$  tal que

$$x^n = a.$$

**Notación.** En las condiciones del corolario,

$$x = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

**Definición 1.13.** Si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a > 0$ ,

$$a^{-\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}.$$

**Definición 1.14.**  $a > 0$ ,  $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ,

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m.$$

**Proposición 1.5** (Principio de la buena ordenación). Si  $A \subset \mathbb{N}$  con  $A \neq \emptyset$ , entonces existe  $n \in A$  tal que

$$\forall m \in A, n \leq m.$$

**Definición 1.15.** Un conjunto  $A$  con un orden  $\leq$  se dice que está **bien ordenado** si contiene un primer elemento:

$$\exists x \in A, \forall y < x \Rightarrow y \notin A.$$

**Ejemplo 1.5.** (i) Todo conjunto finito de  $\mathbb{R}$  está bien ordenado.

(ii) El intervalo  $[0, \infty)$  está bien ordenado.

**Teorema 1.10.** Sea  $A \subset \mathbb{N}$  con  $A \neq \emptyset$ , entonces  $A$  está bien ordenado.

*Demostración.* Suponemos lo contrario, es decir, existe  $\exists A \subset \mathbb{N}$  que no tiene un primer elemento. Queremos ver que  $\forall n \in \mathbb{N}$ , el conjunto  $\{1, \dots, n\} \cap A = \emptyset$ . Si  $n = 1$ ,  $\{1\} \cap A = \emptyset$ , porque sino 1 sería el primer elemento.

Asumimos que  $\{1, 2, \dots, n\} \cap A = \emptyset$ . Entonces tenemos que en el caso de  $n + 1$ :

$$\{1, \dots, n + 1\} \cap A = (\{1, \dots, n\} \cup \{n + 1\}) \cap A = (\{1, \dots, n\} \cap A) \cup (\{n + 1\} \cap A) = \{n + 1\} \cap A.$$

Esto puede ser vacío, o que  $\{n + 1\} \cap A = \{n + 1\}$ . Si pasase esto último,  $n + 1$  sería el menor elemento de  $A$ , que romple con nuestra hipótesis inicial. Por lo tanto, tenemos que  $A = \emptyset$ . Esto rompe con nuestra hipótesis del teorema.  $\square$

**Corolario 1.7.** Si  $x \geq 0$ , entonces  $\exists n \in \mathbb{N}$  tal que  $n - 1 \leq x < n$ .

*Demostración.* Sea  $A = \{m \in \mathbb{N} : m > x\} \neq \emptyset$  (por la propiedad arquimediana). Sea  $n$  el primer elemento de  $A$ . Tenemos que como  $n \in A$ ,  $n > x$ . Además,  $n - 1 \notin A$ , por lo que  $n - 1 \leq x$ . Por tanto:

$$n - 1 \leq x < n.$$

4

 $\square$ 

**Notación.**  $\lfloor x \rfloor$  es la parte entera de  $x$  tal que  $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

**Teorema 1.11** (Densidad de  $\mathbb{Q}$  en  $\mathbb{R}$ ). Si  $x, y \in \mathbb{R}$  con  $x < y$ , entonces existe  $r \in \mathbb{Q}$  tal que  $x < r < y$ .

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, suponemos que  $0 \leq x < y$ <sup>5</sup>. Sabemos, entonces, que  $y - x > 0$ . Por tanto, podemos encontrar un  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande tal que

$$y - x > \frac{1}{n} > 0.$$

Entonces, sabemos que

$$ny > nx \geq 0.$$

Por el corolario anterior,  $\exists m \in \mathbb{N}$  tal que

$$m - 1 \leq nx < m.$$

<sup>4</sup>En el caso de números negativos, coges que  $-x > 0$  y repites la demostración.

<sup>5</sup>Si fuesen negativos, cambiamos el signo y repetimos la demostración.

Entonces, tenemos que  $x < \frac{m}{n} = r \in \mathbb{Q}$ . Combinando las ecuaciones anteriores:

$$ny > n \left( \frac{1}{n} + x \right) = 1 + xn \geq 1 + m - 1 = m \Rightarrow y > \frac{m}{n} = r > x.$$

Por tanto,

$$x < r < y.$$

□

**Notación.** Los intervalos no acotados los definimos de la siguiente manera:

- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$
- $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

**Teorema 1.12.** Sea  $S \subset \mathbb{R}$  con  $S \neq \emptyset$ , tal que  $\forall x, y \in S$ ,  $x < y$  se verifica que  $[x, y] \subset S$ . Entonces,  $S$  es un **intervalo**<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Es uno de los casos de intervalos que hemos visto anteriormente (acotado y no acotado).

*Demostración.* (i) Supongamos que  $S$  está acotado, sea  $a = \inf S$  y  $b = \sup S$ . Si consideramos el intervalo  $[a, b]$  tenemos que como  $a = \inf S$ ,  $\forall s \in S$ ,  $s \geq a$ . Por el mismo razonamiento,  $\forall s \in S$ ,  $b \geq s$ . Por tanto,

$$\forall s \in S, a \leq s \leq b \Rightarrow S \subset [a, b].$$

Sea  $z \in (a, b)$ , queremos decir que  $z \in S$ . Como  $a = \inf S$ , tenemos que  $\exists s \in S$  tal que  $a < s < z$ . Similarmente, como  $b = \sup S$ ,  $\exists s' \in S$  tal que  $z < s' < b$ . Por tanto, por la hipótesis del teorema tenemos que  $s < s'$ , por lo que  $[s, s'] \subset S$  y  $z \in [s, s']$  por lo que  $z \in S$ .

$$\therefore (a, b) \subset S.$$

Ahora hay que valorar los posibles casos de si  $a, b \in S$ , para determinar de qué tipo de intervalo acotado se trata.

(ii) Supongamos que  $S$  está acotado inferiormente pero no superiormente. Entonces tenemos que si  $x \in S$  y  $a = \inf S$ ,  $a \leq s, \forall s \in S$ . Por tanto,

$$\forall s \in S, a \leq s \Rightarrow S \subset [a, \infty).$$

Si  $z \in (a, \infty)$ , tenemos que  $a < z$ . Si cogemos  $\epsilon > 0$  tal que  $a + \epsilon = z$ , podemos encontrar  $s \in S$  tal que

$$a \leq s < z.$$

Dado que  $S$  no está acotado superiormente, podemos encontrar  $s'$  tal que  $s < z < s'$ . Por tanto,  $s < s'$  y por hipótesis,  $[s, s'] \subset S$ , por lo que  $z \in [s, s']$  y  $z \in S$ .

$$\therefore (a, \infty) \subset S.$$

- (iii) El caso en el que  $S$  está acotado superiormente pero no inferiormente se demuestra igual.
- (iv) Si  $S$  no está acotado, tenemos que  $S \subset \mathbb{R}$ . Si  $z \in \mathbb{R}$ , como  $S$  no está acotado, podemos encontrar  $s, s' \in S$  tales que  $s < z < s'$ . Por tanto,  $[s, s'] \subset S$  y  $z \in [s, s']$ , por lo que  $z \in S$ . De esta manera,

$$(S \subset \mathbb{R}) \wedge (\mathbb{R} \subset S) \Rightarrow S = \mathbb{R} = (-\infty, \infty).$$

□

**Teorema 1.13** (Teorema de los intervalos encajados). Sean  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ , con  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$ . Sea  $I_n = [a_n, b_n]$ . Esto no puede ser un punto, porque  $a_n < b_n$ . Entonces  $I_{n+1} \subset I_n$ . Entonces,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset.$$

*a*

---

<sup>a</sup>Si el intervalo estuviera abierto, este teorema no tiene por qué cumplirse.

*Demostración.* Sean  $m, n \in \mathbb{N}$ , tenemos que  $a_m < b_n$ . En efecto, si  $m \leq n$ , entonces,  $a_m \leq a_n < b_n \leq b_m$ . Si  $m > n$ ,

$$a_m < b_m \leq b_n.$$

Así, demostramos que todos los  $a_i$  están a la izquierda y los  $b_i$  a la derecha. Entonces,  $b_n$  es una cota superior de  $a_m$ , y existe  $a = \sup \{a_m : m \in \mathbb{N}\} \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . Similarmente,  $a \leq \inf \{b_n : n \in \mathbb{N}\} = b$ . Entonces

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n.$$

Por lo que  $[a, b] \subset I_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . Consecuentemente,

$$\emptyset \neq [a, b] \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n.$$

□

**Corolario 1.8.** En las condiciones del teorema de los intervalos encajados, si  $\inf \{b_n - a_n\} = 0$  entonces  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$  se reduce a un punto.

*Demostración.* Si  $\inf \{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$ , entonces para  $\forall \epsilon > 0$  existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que

$$0 \leq b - a \leq b_m - a_m < \epsilon.$$

Como esto se cumple para todo  $\epsilon > 0$ , tenemos que  $b - a = 0$  y, por tanto,  $b = a \in I_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . □

**Teorema 1.14.**  $\mathbb{R}$  no es numerable.

*Demostración.* Basta probar que el intervalo  $I = [0, 1]$  no es numerable <sup>6</sup>. Supongamos que es numerable, es decir,  $\exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$  biyectiva. Así,  $\forall x \in [0, 1], \exists ! n \in \mathbb{N}, \varphi(n) = x$ . Sea  $x_n = \varphi(n)$ . Entonces,  $I = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Sea  $n = 1$  y  $x_1 \in [0, 1]$ . Sea  $I_1 \subset [0, 1]$  tal que  $x_1 \notin I_1$ . Si  $x_2 \in I_1$ , sea  $I_2 \subset I_1$  tal que  $x_2 \notin I_2$ . Iterando, sean  $I_1, \dots, I_n$  intervalos cerrados y encajados tales que  $x_n \notin I_n$  <sup>7</sup>.

$$I \subset I_1 \subset \dots \subset I_n.$$

Por el teorema de los intervalos encajados, podemos asegurar que

$$\emptyset \neq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \subset I = [0, 1].$$

Sea  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ . Entonces,  $x \neq x_1$ , pues  $x \in I_1$ . Por la misma razón,  $x \neq x_2$ , y  $x \neq x_n$ . Por tanto,  $\forall n \in \mathbb{N}, x \neq x_n$ , por lo que  $x \notin I$ , lo que es una contradicción. Por tanto,  $I$  no es numerable y, consecuentemente,  $\mathbb{R}$  tampoco lo es.  $\square$

**Corolario 1.9.** Los números irracionales,  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$  no es un conjunto numerable.

*Demostración.* Asumimos que  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$  es numerable. Entonces, tenemos que

$$(\mathbb{R}/\mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}.$$

Sabemos que la unión de dos conjuntos numerables será numerable, pero  $\mathbb{R}$  no es numerable, esto es una contradicción. Por tanto, debe ser que  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$  no es numerable.  $\square$

### 1.3. Expresión decimal de los números reales

Expresión en base  $m \in \mathbb{N}$  con  $m \geq 2$  de los números reales.

Sea  $m = 2$  y sea  $x \in \mathbb{R}$ . Definimos

$$\lfloor x \rfloor = \max \{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$$

parte entero. Sea  $a = x - \lfloor x \rfloor$ , claramente tenemos que  $a \in [0, 1)$ . Tenemos que  $a$  es la parte decimal.

- (i) Tomamos como convenio que el intervalo que tomamos está cerrado por la izquierda. Vamos a dividir el intervalo  $[0, 1)$  en  $m$  partes iguales (en este caso  $m = 2$ ). El primer intervalo desde la izquierda lo denominamos 0 y el segundo 1 (en el caso  $m$  lo hacemos desde 0 hasta  $m - 1$ ). Si  $a$  está en el primer intervalo tomamos  $j_1 = 0$ , si estuviera en el segundo tomaríamos  $j_1 = 1$ . Definimos  $a_1 = j_1$ . Tenemos que

$$\frac{j_1}{2} \leq a < \frac{j_1 + 1}{2} \Rightarrow a \in \left[ \frac{j_1}{2}, \frac{j_1 + 1}{2} \right).$$

<sup>6</sup>Hay que tener en cuenta que existe una biyección entre  $\mathbb{R}$  y  $[0, 1]$ .

<sup>7</sup>Estamos asumiendo que estos intervalos cumplen con los requisitos del teorema de los intervalos encajados, es decir, son intervalos cerrados.

- (ii) Repetimos el caso anterior pero con este último intervalo, por lo que lo dividimos en  $m$  trozos. El punto medio será

$$\frac{j_1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2j_1 + 1}{4}.$$

El primer grupo lo denominamos 0 y el segundo 1 (en el caso  $m$  iría de 0 a  $m - 1$ ). Entonces,  $j_2 \in \{0, 1\}$ . Tenemos que  $a_2 = j_2$ . Así pues,

$$\frac{j_1}{2} + \frac{j_2}{4} \leq a < \frac{j_1}{2} + \frac{j_2 + 1}{4}.$$

- (iii) Paso  $n$ -ésimo. Repetimos el mismo procedimiento hasta elegir  $j_m \in \{0, 1\}$  (en el caso  $m = 2$ ) para obtener

$$\underbrace{\frac{j_1}{2} + \frac{j_2}{2^2} + \cdots + \frac{j_n}{2^n}}_{i_n} \leq a < \underbrace{\frac{j_1}{2} + \frac{j_2}{2^2} + \cdots + \frac{j_n + 1}{2^n}}_{s_n}.$$

Tenemos que  $a \in [i_n, s_n)$  y

$$0 \leq \inf \{s_n - i_n\} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} = 0.$$

Por tanto,  $a_n = j_n$ .

**Notación 1.1.** Sea  $m \geq 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

$$x = \lfloor x \rfloor + a = \lfloor x \rfloor + (\cdot a_1 a_2 \cdots a_n \cdots)_m.$$

**Ejemplo 1.6.** (i) Sea  $m = 10$  y  $x = \pi$ .

$$\lfloor x \rfloor = 3.$$

Tenemos que  $a = \pi - 3$ .  $a$  tendrá una expresión de la forma  $a = (\cdot 1415 \cdots)_{10}$ .<sup>8</sup>

- (ii) Sea  $m = 2$  y  $x = \frac{1}{2}$ . Tenemos que  $\lfloor x \rfloor = 0$ , por lo que  $a = x$ . Tenemos que en el primer paso, está en el intervalo de la derecha. Por tanto,  $a_1 = 1$ . En el segundo paso se encuentra en la izquierda, por tanto,  $a_2 = 0$ . Desde aquí, siempre va a estar en el lado izquierdo, por tanto  $a_n = 0, n \geq 2$ .

$$\therefore \frac{1}{2} = (\cdot 10 \cdots 0 \cdots)_2.$$

- (iii) Cómo escribir 13 en base 2:

$$13 = 8 + 4 + 1 = 2^3 + 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 2^0 \Rightarrow (13)_{10} = (1101)_2.$$

- (iv) En general, si  $a_j \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$ ,

$$(a_n \cdots a_1)_m = a_n m^{n-1} + \cdots + a_2 m^1 + a_1 m^0.$$

<sup>8</sup>Ambos puntos y comas en los decimales son aceptados.



**Observación 1.1.** Tenemos que  $x \in \mathbb{Q}$  si y solo si la parte decimal es periódica. La segunda implicación se puede demostrar utilizando una sucesión geométrica. Recíprocamente, tomamos el caso  $p < q$ . Si  $x = \frac{p}{q}$ , tenemos que los restos de dividir  $p$  entre  $q$  están entre 0 y  $q - 1$  y, por tanto, después de como mucho  $q$  pasos, algún resto se va a volver a repetir. En este punto, los dígitos del cociente empezarán a repetirse en ciclos y, consecuentemente, la representación decimal será periódica.

Expresión decimal en base  $m \geq 2$ .

$$\forall x \in [0, 1], \exists a_1, a_2, \dots, a_j, \dots \in \{0, 1, \dots, m-1\}$$

tales que

$$\frac{a_1}{m} + \frac{a_2}{m^2} + \dots + \frac{a_j}{m^j} \leq x < \frac{a_1}{m} + \dots + \frac{a_j + 1}{m^j}.$$

Recíprocamente, dadas  $a_1, \dots, a_j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$  por el teorema de los intervalos encajados,  $\exists! x \in [0, 1]$  tal que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \frac{a_1}{m} + \frac{a_2}{m^2} + \dots + \frac{a_j}{m^j} \leq x < \frac{a_1}{m} + \dots + \frac{a_j + 1}{m^j}.$$

**Observación 1.2.** Representamos  $\mathbb{R}$  como una recta infinita sin huecos.

## 1.4. Números Complejos

Sabemos que  $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ , es decir, si  $(x, y) \in \mathbb{C}$  tenemos que  $x, y \in \mathbb{R}$ . Definimos  $i = (0, 1)$  y si  $x \in \mathbb{C}$  podemos expresar  $x$  de la siguiente manera:

$$(x, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1).$$

**Definición 1.16.** En  $\mathbb{C}$  se definen la suma y el producto:

(a) Suma.

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

(b) Producto.

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

**Teorema 1.15.**  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  es un cuerpo abeliano.

**Observación 1.3.** Tenemos que, según nuestra definición de producto:

$$i^2 = -1.$$

Es decir, en este cuerpo abeliano no existe un orden total.<sup>9</sup>

<sup>9</sup>Para que el orden sea total, el cuadrado de cualquier número debe ser positivo.

**Observación 1.4.** Existe una inyección de  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\rightarrow x + i \cdot 0.\end{aligned}$$

Decimos que  $\mathbb{R}$  hereda de  $\mathbb{C}$  las propiedades de la suma, producto, etc. Además,  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

**Teorema 1.16** (Teorema Fundamental del Álgebra). Si  $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$ , con  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ .  $P(z)$  es un polinomio de grado  $n \in \mathbb{N}$  con  $a_j \in \mathbb{C}$ . Entonces, existe  $w \in \mathbb{C}$  tal que  $P(w) = 0$ . En particular, podemos encontrar  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{N}$  ( $1 \leq m \leq n$ ) y existen  $w_1, \dots, w_m \in \mathbb{C}$  tales que

$$P(z) = (z - w_1)^{\alpha_1} \cdots (z - w_m)^{\alpha_m}, \quad \alpha_1 + \cdots + \alpha_m = n.$$

<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Este teorema nos dice que  $\mathbb{C}$  es algebraicamente completo.

**Ejemplo 1.7.** Sea  $P(z) = z^4 + 2z^2 + 1$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Tenemos que:

$$P(z) = (z^2 + 1)^2 = (z + i)^2 (z - i)^2.$$

### 1.4.1. Representación polar

**Definición 1.17.** Norma de  $z = x + iy$  es:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

**Teorema 1.17.** Si  $z \in \mathbb{C}^*$ ,

$$\left| \frac{z}{|z|} \right| = \frac{|z|}{|z|} = 1.$$

**Definición 1.18.** Podemos representar  $z \in \mathbb{C}$  como:

$$z = |z|_\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Si  $x, y > 0$  tenemos que:

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}.$$

## Capítulo 2

# Sucesiones y límites

**Definición 2.1.** Se dice que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una **sucesión** de números reales si existe una función

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\rightarrow \varphi(n) = x_n.\end{aligned}$$

**Ejemplo 2.1.** (i)  $\varphi(n) = \frac{1}{n}$ .

(ii) Sucesión de Fibonacci.

$$\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 1, \varphi(n) = \varphi(n-1) + \varphi(n-2).$$

**Definición 2.2.** Se dice que una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  **converge** a  $x \in \mathbb{R}$ , y lo escribiremos de esta manera

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x,$$

si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, |x - x_n| < \epsilon, \forall n \geq n_0.$$

**Proposición 2.1.** Si  $x_n = \frac{1}{n}$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

*Demostración.* Sea  $\epsilon > 0$ , tomamos  $x = 0$ , tenemos que

$$|x - x_n| = \left| 0 - \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}.$$

Entonces, queremos probar que

$$\frac{1}{n} < \epsilon, \quad n \geq n_0.$$

Como sabemos que  $\inf \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$ , tenemos que  $\forall \epsilon > 0$

$$0 \leq \frac{1}{n_0} < 0 + \epsilon,$$

para algún  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Si  $n \geq n_0$ , tenemos que

$$n \geq n_0 \iff \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon.$$

Por tanto, hemos encontrado  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$ ,

$$|x - x_n| \leq \epsilon.$$

□

**Ejemplo 2.2.** (i) Cogemos  $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ . Vamos a ver que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , mientras que  $\sup x_n \neq \inf x_n \neq 0$ .

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n}.$$

$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tales que  $\forall n \geq n_0$ ,

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Por lo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

(ii)  $x_n = (-1)^n$ . Esta sucesión no converge, pues oscila. Tenemos que ver que  $\forall x, \exists \epsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0$  tal que  $|x - x_n| \geq \epsilon$ . Supongamos que  $x > 1$  y tomamos  $\epsilon = 2$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Sea  $n \geq n_0$  impar. Entonces

$$|x_n - x| = |-1 - x| = 2 + x - 1 = 1 + x > 2 = \epsilon.$$

Si  $x < -1$ , tenemos que  $-x > 1$ . Tomamos  $\epsilon = 2$ . Podemos encontrar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq n_0$  y  $n$  es par.

$$|x - 1| = 2 + (-1 - x) = 1 - x \geq 2 = \epsilon.$$

Finalmente, si  $-1 \leq x \leq 1$ , tomamos  $\epsilon = 1$ . Si  $x = 0$ , tenemos que

$$|1 - 0| = |0 - 1| = 1 \geq 1 = \epsilon.$$

Si  $x > 0$ , tenemos que si  $n_0 \in \mathbb{N}$  podemos encontrar  $n \geq n_0$  impar, tal que

$$|x - (-1)| = x + 1 \geq 1 = \epsilon.$$

Similarmente, si  $x < 0$  ( $-x > 0$ ) y  $n_0 \in \mathbb{N}$  podemos encontrar tal que  $n$  sea par:

$$|1 - x| = 1 - x \geq 1 = \epsilon.$$

**Proposición 2.2.** Si una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge, entonces el límite es único.

*Demostración.* Supongamos que existen  $x, x' \in \mathbb{R}$  con  $x \neq x'$  tales que  $\forall \epsilon > 0, \exists n_0, n'_0 \in \mathbb{N}$  tales que si  $n \geq n_0$  y  $n \geq n'_0$ ,  $|x_n - x| < \epsilon$  y  $|x_n - x'| < \epsilon$ . Sea  $\epsilon = \frac{|x - x'|}{3}$ . Entonces, podemos encontrar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - x| < \epsilon$  si  $n \geq n_0$ . Lo mismo sucede con  $n'_0 \in \mathbb{N}$ . Tenemos que  $|x - x'| = 3\epsilon$ . Sea  $n \geq \max\{n_0, n'_0\}$ ,

$$3\epsilon = |x - x_n + x_n - x'| \leq |x - x_n| + |x_n - x'| < 2\epsilon.$$

Esto es una contradicción, por lo que  $x = x'$ .

Otra demostración consiste en asumir que existen dos límites de la sucesión,  $x$  y  $x'$ . Tenemos que si  $\epsilon > 0$ , existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_1$

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Similarmente, existe  $n_2 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_2$ , entonces

$$|x_n - x'| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Entonces, si cogemos  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  y  $n \geq n_0$ , tenemos que

$$|x - x'| = |x - x_n + x_n - x'| \leq |x - x_n| + |x_n - x'| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por tanto,  $x' = x$ . □

**Definición 2.3.** Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ .

(i) Diremos que la sucesión diverge a  $\infty$ , es decir,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ , si

$$\forall c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, x_n \geq c.$$

(ii) Diremos que la sucesión diverge a  $-\infty$ , es decir,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$  si

$$\forall c < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, x_n \leq c.$$

**Observación 2.1.** Existen sucesiones que convergen y las que no convergen. Dentro de las que no convergen están las que divergen (a  $\infty$  y  $-\infty$ ) y las que no divergen  $((-1)^n)$ .

**Ejemplo 2.3.** Tenemos que  $x_n = n$  satisface que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ .

**Ejemplo 2.4.** Consideremos  $x_n = \frac{2n}{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Demostramos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ .

Queremos decir que  $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |x_n - 2| < \epsilon$ . Tenemos que

$$\left| \frac{2n}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2n - 2}{n+1} \right| = \frac{2}{n+1}.$$

$$\frac{2}{n_0 + 1} < \epsilon \iff \frac{2}{\epsilon} - 1 < n_0.$$

Por la propiedad arquimediana, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Si  $n \geq n_0$ , tenemos que

$$\frac{2}{n + 1} < \epsilon.$$

**Proposición 2.3.** Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  y sea  $m \in \mathbb{N}$ . Sea  $y_n = x_{n+m}$ . Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \iff \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x.$$

*Demostración.* (i) Asumimos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Entonces tenemos que

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |x - x_n| < \epsilon.$$

Como  $m \in \mathbb{N}$ , tenemos que  $m + n_0 > n_0$ , por lo que, si  $n \geq n_0$ ,  $|x - x_{m+n}| < \epsilon$ . Es decir,

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |x - y_n| < \epsilon.$$

(ii) Recíprocamente, si  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$ , tenemos que

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |x - y_n| < \epsilon.$$

Es decir,

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 + m \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |x - x_{m+n}| < \epsilon.$$

Si cogemos  $n'_0 = m + n_0$ , tenemos que

$$\forall \epsilon > 0, \exists n'_0, \forall n \geq n'_0, |x - x_n| < \epsilon.$$

□

**Teorema 2.1** (Regla del bocadillo). Sean  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  con

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n \leq z_n \leq x_n.$$

Supongamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Entonces,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x$ .

*Demostración.* Sea  $\epsilon > 0$ . Cogemos  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_1$

$$|y_n - x| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Similarmente, sea  $n_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_2$ ,

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{6}.$$

Sea  $n_0 = \max \{n_1, n_2\}$ . Sea  $n \geq n_0$ ,

$$\begin{aligned} |z_n - x| &= |z_n - y_n + y_n - x_n + x_n - x| \\ &\leq |z_n - y_n| + |y_n - x_n| + |x_n - x| \\ &= z_n - y_n + x_n - y_n + |x_n - x| \\ &\leq x_n - y_n + x_n - y_n + |x_n - x| \\ &= 2(x_n - y_n) + |x_n - x|. \end{aligned}$$

**Observación 2.2.** Tenemos que

$$|x_n - y_n| = |x_n - x + x - y_n| \leq |x_n - x| + |y_n - x|.$$

Por tanto,

$$2(x_n - y_n) + |x_n - x| \leq 3|x_n - x| + 2|x - y_n| < 3 \cdot \frac{\epsilon}{6} + 2 \cdot \frac{\epsilon}{4} = \epsilon.$$

Una demostración alternativa es decir que existen  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tales que si  $\epsilon > 0$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_1, |x_n - x| < \epsilon &\iff -\epsilon < x_n - x < \epsilon \iff -\epsilon + x < x_n < \epsilon + x \\ \forall n \geq n_2, |y_n - x| < \epsilon &\iff -\epsilon < y_n - x < \epsilon \iff -\epsilon + x < y_n < \epsilon + x. \end{aligned}$$

Sea  $n > \max \{n_1, n_2\}$ , por hipótesis tenemos que

$$-\epsilon + x < x_n < z_n < y_n < \epsilon + x.$$

$$\therefore |z_n - x| < \epsilon.$$

□

**Ejemplo 2.5.** (i)  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0.$$

Como  $n^k \geq n$ , tenemos que  $n^{k-1} \geq 1$ . Además, podemos deducir que

$$0 \leq \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n}.$$

La primera sucesión converge a 0 y la segunda también converge a 0 (propiedad arquimediana), por lo que  $\frac{1}{n^k} \rightarrow 0$ .

(ii) Si  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n^k}.$$

Tenemos que

$$0 \leq \left| \frac{\sin n}{n^k} \right| \leq \frac{1}{n^k}.$$

Como  $0 \rightarrow 0$  y  $\frac{1}{n^k} \rightarrow 0$ , tenemos que  $\frac{\sin n}{n^k} \rightarrow 0$ .

**Observación 2.3.** En la regla del bocado, basta que las estimaciones sean ciertas a partir de un cierto valor. Es decir, si  $y_n \leq z_n \leq x_n$ ,  $n \geq n_0$ , si  $y_n, x_n \rightarrow x$ , tenemos que  $z_n \rightarrow x$ .

**Ejemplo 2.6.** La sucesión  $\frac{n}{2^n} \rightarrow 0$ . Esto lo demostramos diciendo que  $\frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$ . En el caso  $n = 3$  esto no se cumple, porque se cumple en  $n \geq 4$ .

**Definición 2.4.** Se dice que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  está acotada si existe  $c > 0$ , tal que

$$|x_n| \leq c, \forall n \in \mathbb{N}.$$

<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Es decir,  $-c \leq x_n \leq c$ , o sea, está acotado superior e inferiormente.

**Teorema 2.2.** Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  converge, entonces está acotada.

*Demostración.* Sea  $\epsilon = 1$ , entonces existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para  $n \geq n_0$

$$|x_n - x| < 1.$$

Además,  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Tenemos que si  $n \geq n_0$ :

$$\begin{aligned} |x_n| &= |x_n - x + x| \\ &\leq |x_n - x| + |x| \\ &\leq 1 + |x|. \end{aligned}$$

Sea  $c = \max\{1 + |x|, |x_n| : n \leq n_0\}$ . Entonces tenemos que

$$|x_n| \leq c, \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

**Observación 2.4.** El recíproco del teorema anterior no es cierto en general. Considera  $(-1)^n$  que está acotada por 1 pero no converge.

**Ejemplo 2.7.** Si  $x \in \mathbb{R}$ , existe  $a_0 \in \mathbb{Z}$  y existen  $a_n \in \{0, \dots, 9\}$  tales que

$$\underbrace{a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n}}_{x_n} \leq x \leq a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n + 1}{10^n}.$$

Vamos a demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . En efecto,

$$x_n \leq x < x_n + \frac{1}{10^n}.$$

Entonces, tenemos que

$$0 \leq |x - x_n| \leq \frac{1}{10^n}.$$

Tenemos que  $0 \rightarrow 0$  y  $\frac{1}{10^n} \rightarrow 0$ , por lo que  $|x - x_n| \rightarrow 0$ , por lo que  $x_n \rightarrow x$ .



**Teorema 2.3.** Sean  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ , tales que  $x_n \rightarrow x$  y  $y_n \rightarrow y$ .

(i)  $x_n + y_n \rightarrow x + y \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$

(ii)  $x_n y_n \rightarrow xy \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right).$

(iii) Si  $y_n \neq 0, y \neq 0$ ,

$$\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{x}{y} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$$

(iv)  $|x - x_n| \rightarrow 0.$

*Demostración.* (i) Si  $\epsilon > 0$ ,  $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, |x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ . Similarmente, existe  $n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$ . Tomamos  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ .

$$|x_n + y_n - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

(ii)

$$|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| = |x_n (y_n - y) + y (x_n - x)| \leq |x_n| |y_n - y| + |y| |x_n - x|.$$

Cogemos  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_1, |x_n - x| < |x|$ ,

$$|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| < 2|x|.$$

Así,

$$|x_n y_n - xy| \leq 2|x| |y_n - y| + |y| |x_n - x|.$$

Cogemos  $n_2, n_3 \in \mathbb{N}$  tales que  $\forall n \geq n_2$  y  $\forall n \geq n_3$ ,

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2|y|} \quad \text{y} \quad |y_n - y| < \frac{\epsilon}{4|x|}.$$

Entonces, si cogemos  $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ , tenemos que  $\forall n \geq n_0$ ,

$$|x_n y_n - xy| \leq 2|x| |y_n - y| + |y| |x_n - x| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

(iii)

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y} \right| &= \left| \frac{x_n y - x y_n}{y_n y} \right| = \left| \frac{y(x_n - x) - x(y_n - y)}{y_n y} \right| \\ &\leq \frac{1}{|y_n|} |x_n - x| + \frac{1}{|y_n|} \left| \frac{x}{y} \right| |y_n - y|. \end{aligned}$$

Si cogemos  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_1, |y_n - y| < \frac{|y|}{2}$ . Entonces tenemos que

$$|y_n| = |y_n - y + y| \geq |y| - |y_n - y| > \frac{|y|}{2}.$$

Entonces,

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y} \right| \leq \frac{1}{|y_n|} |x_n - x| + \frac{1}{|y_n|} \left| \frac{x}{y} \right| |y_n - y| < \frac{2}{|y|} |x_n - x| + \left| \frac{2x}{y^2} \right| |y_n - y|.$$

Cogemos  $n_2, n_3 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_2$  y  $\forall n \geq n_3$  tenemos que

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon |y|}{4} \quad \text{y} \quad |y_n - y| < \epsilon \left| \frac{y^2}{4x} \right|.$$

Si cogemos  $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ , tenemos que  $\forall n \geq n_0$ ,

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y} \right| \leq \frac{1}{|y_n|} |x_n - x| + \frac{1}{|y_n|} \left| \frac{x}{y} \right| |y_n - y| < \frac{2}{|y|} |x_n - x| + \left| \frac{2x}{y^2} \right| |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

(iv) Decir que  $|x - x_n| \rightarrow 0$  es lo mismo que decir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . En efecto, si  $|x - x_n| \rightarrow 0$ , tenemos que

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |x_n - x| < \epsilon.$$

Esta es la definición de  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

□

**Corolario 2.1.** (i) Si cada una de estas sucesiones converge <sup>a</sup> :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n + \cdots + z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} z_n.$$

(ii) Si  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^k.$$

<sup>a</sup>Si la suma converge, las sucesiones individuales no tienen por qué converger. Considera  $x_n = n$  y  $y_n = -n$ .

**Teorema 2.4.** Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ , con  $x_n \geq 0$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , entonces,  $x \geq 0$ .

*Demostración.* Supongamos que  $x < 0$ . Sea  $\epsilon = \frac{|x|}{2} > 0$ . Sea  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$ ,  $|x_n - x| < \epsilon$ . Tenemos que

$$|x_n - x| = x_n - x < \epsilon = \frac{|x|}{2} = \frac{-x}{2} \Rightarrow x_n < \frac{x}{2} \iff x_n < \frac{x}{2} < 0 \iff x_n < 0, \forall n \geq n_0.$$

Esto es una contradicción.

□

**Corolario 2.2.** Si  $x_n \leq y_n$ ,  $x_n \rightarrow x$  y  $y_n \rightarrow y$ . Entonces,  $x \leq y$ .

*Demostración.* Si  $y_n - x_n \geq 0$ , entonces  $y_n - x_n \rightarrow y - x$ . Por el teorema anterior tenemos que

$$y - x \geq 0 \iff y \geq x.$$

□

**Corolario 2.3.** Si  $x_n \rightarrow x$ . Entonces,  $|x_n| \rightarrow |x|$ .<sup>a</sup>

<sup>a</sup>El recíproco no se cumple, comprueba  $(-1)^n$ .

*Demostración.* Tenemos que

$$0 \leq ||x_n| - |x|| \leq \underbrace{|x_n - x|}_{\rightarrow 0}.$$

Entonces,  $||x_n| - |x|| \rightarrow 0$ .

□

**Teorema 2.5.** Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{+a}$ , y supongamos que  $x_n \rightarrow x$  y  $x > 0$ . Sea  $m \in \mathbb{N}$ , entonces

$$x_n^{\frac{1}{m}} \rightarrow x^{\frac{1}{m}} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{\frac{1}{m}} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)^{\frac{1}{m}}.$$

<sup>b</sup>

<sup>a</sup> $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ .

<sup>b</sup>Si aplicamos esta propiedad junto a la del exponente, lo podemos demostrar para  $q \in \mathbb{Q}$ .

*Demostración.* Sea  $a = x^{\frac{1}{m}} \iff a^m = x$  y  $a_n = x_n^{\frac{1}{m}} \iff a_n^m = x_n$ . Sabemos que

$$\begin{aligned} a^m - a_n^m &= (a - a_n)(a^{m-1} + \dots + a_n^{m-1}). \\ \Rightarrow \frac{a^m - a_n^m}{a^{m-1} + \dots + a_n^{m-1}} &= a - a_n. \end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$\frac{|a^m - a_n^m|}{a^{m-1}} \geq \frac{|a^m - a_n^m|}{|a^{m-1} + \dots + a_n^{m-1}|} = |a - a_n|.$$

Por tanto,

$$0 \leq \left| x^{\frac{1}{m}} - x_n^{\frac{1}{m}} \right| \leq \underbrace{\frac{1}{a^{m-1}} |x - x_n|}_{\rightarrow 0}.$$

Entonces,  $\left| x^{\frac{1}{m}} - x_n^{\frac{1}{m}} \right| \rightarrow 0$ .

□

## 2.1. Criterios de Convergencia

**Proposición 2.4.** Si  $0 < r < 1$ , entonces  $r^n \rightarrow 0$ .

*Demostración.* Sea  $R = \frac{1}{r} > 1$ . Queremos ver que  $R^n \rightarrow \infty$ . Como  $R > 0$ , por la desigualdad de Bernoulli tenemos que

$$R^n = (1+x)^n \geq 1+nx.$$

Por tanto,

$$0 < r^n = \frac{1}{R^n} = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{1+nx} < \frac{1}{nx}.$$

Como  $\frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{x}$  y  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ , tenemos que  $\frac{1}{nx} \rightarrow 0$ . Entonces,  $r^n \rightarrow 0$ . □

**Observación 2.5.** En la demostración anterior hemos dicho que  $r^n \rightarrow 0$  es equivalente a decir que  $R^n \rightarrow \infty$ . Esto es porque la definición de la segunda será:

$$\forall c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, R^n > c.$$

Si  $R^n > c$  tenemos que

$$\frac{1}{r^n} > c \iff r^n < \frac{1}{c}.$$

Por tanto, se trata de la misma definición, solo que cambiamos  $\epsilon$  por  $c$ .

**Ejemplo 2.8. (i)** Si  $c > 0$ , tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} c^{\frac{1}{n}} = 1$ . Si  $c = 1$  el resultado es trivial. Si  $c > 1$ , tenemos que,  $c^{\frac{1}{n}} > 1$  (problema 18 de la hoja 2). Entonces, podemos encontrar  $x_n \in \mathbb{R}$  tal que

$$c^{\frac{1}{n}} = 1 + x_n \iff x_n = c^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Entonces, utilizando la desigualdad de Bernoulli:

$$c = (1+x_n)^n \geq 1+nx_n \iff x_n \leq \frac{c-1}{n}.$$

Por tanto, tenemos que

$$0 < \left| c^{\frac{1}{n}} - 1 \right| = x_n \leq \frac{c-1}{n}.$$

Como  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  y  $c-1 \rightarrow c-1$ , por el teorema 2.3 tenemos que  $\frac{c-1}{n} \rightarrow 0$ . Entonces,

$$\left| c^{\frac{1}{n}} - 1 \right| \rightarrow 0 \iff c^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1.$$

Si  $0 < c < 1$ , tenemos que  $c^{\frac{1}{n}} < 1$ . Entonces existe  $x_n \in \mathbb{R}$  tal que

$$c^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+x_n}.$$

Utilizando la identidad de Bernoulli:

$$c = \frac{1}{(1+x_n)^n} \leq \frac{1}{1+nx_n} < \frac{1}{nx_n}.$$

Entonces tenemos que,

$$\left| c^{\frac{1}{n}} - 1 \right| = \frac{x_n}{1 + x_n} < x_n < \left( \frac{1}{c} \right) \frac{1}{n}.$$

Utilizando el teorema 2.3, tenemos que  $\frac{1}{nc} \rightarrow 0$  y, consecuentemente,  $c^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ .

- (ii) Similarmente, se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ . Sabemos que  $n^{\frac{1}{n}} > 1$  para  $n > 1$ . Entonces podemos escribir

$$n^{\frac{1}{n}} = 1 + x_n.$$

Entonces, aplicando el teorema del binomio tenemos que

$$n = (1 + x_n)^n = 1 + nx_n + \frac{1}{2}n(n-1)x_n^2 + \cdots \geq 1 + \frac{1}{2}n(n-1)x_n^2.$$

Por tanto, tenemos que  $x_n^2 \leq \frac{2}{n}$ . Entonces podemos decir que

$$0 < \left| n^{\frac{1}{n}} - 1 \right| = x_n \leq \left( \frac{2}{n} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por el teorema 2.5 tenemos que  $\left( \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0^{\frac{1}{2}} = 0$ . Entonces,  $\left( \frac{2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$  y  $n^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ .

**Teorema 2.6** (Regla del cociente). Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$  y existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ . Entonces,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

*Demostración.* Sea  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ . Como se trata de una sucesión de términos positivos, tenemos que  $l \in [0, 1)$ <sup>1</sup>. Sea  $\epsilon > 0$ , entonces existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} - l \right| < \epsilon \iff -\epsilon + l < \frac{x_{n+1}}{x_n} < \epsilon + l.$$

Por lo tanto,

$$x_{n+1} < (l + \epsilon) x_n.$$

Consecuentemente,

$$x_{n+1} < (l + \epsilon) x_n < (l + \epsilon)^2 x_{n-1} < \cdots < (l + \epsilon)^{n+1-n_0} x_{n_0}.$$

Sea  $\epsilon > 0$  tal que  $l + \epsilon < 1$ , por ejemplo, cogemos  $\epsilon = \frac{1-l}{2}$ . Tomamos  $r = l + \epsilon < 1$  y obtenemos que si  $n \geq n_0$

$$x_{n+1} < r^{n+1-n_0} x_{n_0}.$$

Por la proposición 2.4 tenemos que  $r^{n+1} \rightarrow 0$ , por lo que  $x_{n+1} \rightarrow 0$  (aplicando la regla del bocado). □

---

<sup>1</sup>Los límites no conservan estrictamente las desigualdades. Considera la sucesión  $x_n = \frac{1}{n}$ . Tenemos que cada elemento es mayor que 0 pero el límite es 0.

**Observación 2.6.** Si  $l = 1$  el resultado puede ser falso, considera el caso  $x_n = n$ . Tenemos que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1,$$

pero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty.$$

**Ejemplo 2.9.** Consideramos la sucesión  $x_n = \frac{n}{2^n}$ . Aplicamos la regla del cociente.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} < 1.$$

Entonces,  $x_n \rightarrow 0$ .

**Definición 2.5** (Monotonía). Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ . Se dice que

- (i)  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es **creciente** si  $x_n \leq x_{n+1}$  <sup>a</sup>.
- (ii)  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es **decreciente** si  $x_n \geq x_{n+1}$ .
- (iii)  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es **monótona** si es creciente o decreciente.

<sup>a</sup>Es estrictamente creciente si  $x_n < x_{n+1}$ . También funciona así si es estrictamente decreciente.

**Teorema 2.7.** Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ .

- (i) Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es creciente y está acotada superiormente, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

- (ii) Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es decreciente y está acotada inferiormente, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Lo importante de este teorema es que si una sucesión está acotada y es monótona, entonces existe el límite.

*Demostración.* (i) Sea  $s = \sup \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} < \infty$ . Sea  $\epsilon > 0$ , queremos ver que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $s - x_n < \epsilon, \forall n \geq n_0$ . Como  $s = \sup \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$s - \epsilon < x_{n_0}.$$

Además, como se trata de una sucesión creciente, tenemos que si  $n \geq n_0$ ,

$$x_n \geq x_{n_0} > s - \epsilon \iff s - x_n < \epsilon.$$

- (ii) Se puede demostrar de dos formas: una es similar a la anterior, mientras que la otra se parece a la demostración de la existencia del ínfimo en casos de la existencia de una cota inferior. Comenzamos con la primera. Sea  $i = \inf \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Como  $i$  es el ínfimo, sabemos que si  $\epsilon > 0$ , existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$x_{n_0} < i + \epsilon.$$

Además, como la sucesión es decreciente tenemos que si  $n \geq 0$

$$x_n < x_{n_0} < i + \epsilon.$$

Entonces, si  $n \geq n_0$  tenemos que

$$x_n - i < \epsilon.$$

Por tanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

La otra demostración comienza diciendo que si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión decreciente acotada inferiormente, entonces la sucesión  $\{-x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión creciente acotada superiormente. Por un teorema que vimos en el capítulo anterior, sabemos que  $\sup \{-x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = -\inf \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Aplicando el apartado anterior tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = \inf \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

□

**Ejemplo 2.10.** (i)

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}.$$

Esta sucesión decrece. Además,  $1 + \frac{1}{n} \geq 1$ , es decir, está acotada inferiormente. Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \inf \left\{1 + \frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}} = 1 + \inf \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}} = 1.$$

- (ii)  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{2^n}$ ,  $n \geq 2$ . La sucesión va a ser de la forma

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \dots$$

Tenemos que el término general será  $x_n = \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \rightarrow 1$ , pues  $\frac{1}{2^{n+1}} \rightarrow 0$ .

**Observación 2.7.** Si  $r > 0$  y  $m > n$ ,

$$\sum_{j=n}^m r^j = \frac{r^n - r^{m+1}}{1 - r}.$$

- (iii)  $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ . Esta serie diverge. Sabemos que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es creciente. Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  existe, entonces estaría acotada superiormente. Nos vamos a fijar en los términos  $x_{2^n}$ . Tenemos que

$$x_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1} + 1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right).$$

Tenemos que en el último paréntesis hay  $2^n - (2^{n-1} + 1) + 1 = 2^{n-1}$  elementos. Entonces tenemos que

$$x_{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2} \rightarrow \infty.$$

Entonces, esta sucesión diverge y, por tanto,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no puede estar acotada superiormente. Entonces, la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es divergente.

- (iv) Número de Euler.

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Vamos a demostrar que es creciente y que está acotada superiormente. En efecto,

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{1}{n^i}.$$

**Observación 2.8.**

$$\begin{aligned} \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} &= \frac{n(n-1) \cdots 1}{i!(n-i)!n^i} = \frac{n(n-1) \cdots (n-i+1)}{i!n^i} = \frac{1}{i!} \cdot 1 \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-i+1}{n} \\ &= \frac{1}{i!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{i-1}{n}\right). \end{aligned}$$

A partir de la observación 2.8, podemos ver que

$$\binom{n}{i} \frac{1}{n^i} = \frac{1}{i!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) < \frac{1}{i!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{i-1}{n+1}\right).$$

Por lo tanto,

$$e_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \frac{1}{(n+1)^i} = \sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} \frac{1}{(n+1)^i} + \frac{1}{(n+1)^{n+1}} > \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} = e_n.$$

Por tanto,  $e_n < e_{n+1}$ , por lo que la sucesión  $e_n$  es creciente. Ahora tenemos que ver que está acotada, en concreto, que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $e_n \leq 3$ . Usamos que  $2^{j-1} \leq j!$ . Partiendo de la observación 2.8, tenemos que

$$\binom{n}{i} \frac{1}{n^i} < \frac{1}{i!} \leq \frac{1}{2^{i-1}}.$$



De esta manera,

$$e_n \leq 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{i-1}} = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} \leq 1 + 2 = 3.$$

Por tanto, la sucesión va a converger a  $e$ , es decir,

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

**Ejemplo 2.11.** Si  $r > 0$  y  $x_n = r^{\frac{1}{n}}$  entonces  $x_n \rightarrow 1$ . Consideramos varios casos. Si  $r = 1$ , es trivial. Si  $r > 1$ , entonces vamos a ver si es creciente o decreciente. Tenemos que

$$r > 1 \iff r^{n+1} > r^n \iff r^{\frac{1}{n}} > r^{\frac{1}{n+1}}.$$

Es decir, la sucesión decrece y, por tanto, decrece. Como  $r > 1$ , entonces,  $x_n = r^{\frac{1}{n}} > 1$ . Entonces la sucesión decreciente  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada inferiormente por 1. Consecuentemente, la sucesión converge. Vamos a demostrar que el límite es 1. Sea  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{n}}$ . Como,  $x_n > 1$ , tenemos que  $x \geq 1$ . Supongamos que  $x > 1$ . Tenemos que

$$x_n = r^{\frac{1}{n}} \geq x \Rightarrow r \geq x^n.$$

Si  $n \rightarrow \infty$  tenemos que  $x^n$  diverge, por lo que  $r = \infty$ . Esto es una contradicción, por lo que debe ser que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ . Ahora, supongamos que  $0 < r < 1$ .

## 2.2. Subsucesiones y Teorema de Bolzano-Weiestrass

**Definición 2.6.** Dada una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  y una sucesión creciente estrictamente de números naturales:  $n_1 < n_2 < \dots < n_j < n_{j+1} < \dots$ . Se dice que  $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  es una **subsucesión** (o **parcial**) de  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Ejemplo 2.12.** Si  $x_n = (-1)^n$ . Una subsucesión sería  $x_{2n} = 1$  y otra sería  $x_{2n-1} = -1$ .

**Teorema 2.8.** Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  sucesión convergente con  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , y  $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  es una subsucesión, entonces  $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = x$ .

*Demostración.* Sea  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$  entonces  $|x_n - x| < \epsilon$ . Si  $n_j \geq n_0$  entonces  $|x_{n_j} - x| < \epsilon$ . □

**Observación 2.9.** El teorema anterior sirve para ver que algo no converge.

**Ejemplo 2.13.**

$$x_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ n, & n \text{ impar} \end{cases}.$$

Tenemos que  $x_{2n-1} = 2n - 1$  no converge, por lo que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no converge.

**Teorema 2.9.** Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ . Son equivalentes:

- (i)  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no converge a  $x$ .
- (ii)  $\exists \epsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, |x_n - x| \geq \epsilon$ .
- (iii)  $\exists \epsilon > 0$  y  $\exists \{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $|x_{n_j} - x| \geq \epsilon, \forall j \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* (i) Tenemos que (i)  $\iff$  (ii) son equivalentes por definición.

- (ii) Vamos a ver que (iii)  $\Rightarrow$  (i). Como  $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  no converge a  $x$ , tenemos que la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no converge a  $x$ .
- (iii) Vamos a ver que (ii)  $\Rightarrow$  (iii). Dado  $\epsilon > 0$  de (ii), sea  $n_1 \geq n_0$  tal que  $|x_{n_1} - x| \geq \epsilon$ . Tomamos ahora  $n_2 \geq n_1 + 1 > n_1$  tal que  $|x_{n_2} - x| \geq \epsilon$ . Iterando, obtenemos una colección de índices estrictamente crecientes:  $n_1 < n_2 < \dots < n_j < \dots$ , de manera que,

$$|x_{n_j} - x| \geq \epsilon.$$

□

**Ejemplo 2.14.** Sea  $x_n = \sin n$ . Vamos a demostrar que no existe el límite. Supongamos que  $x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} [2k\pi, (2k+1)\pi]$ . Entonces  $\sin x \geq 0$ . Como la longitud de los intervalos es mayor que uno, sabemos que hay un natural. Por tanto podemos decir que

$$n_k \in [2k\pi, (2k+1)\pi], \quad n_k \in \mathbb{N}.$$

Como los intervalos son disjuntos, tenemos que  $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ . Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n = l$ , existe  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sin n_k = l \geq 0$ . Ahora consideramos el caso  $x < 0$ , para ello, tomamos  $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ . Sea  $I_\epsilon = [\pi + \epsilon, 2\pi - \epsilon]$ . Si  $x \in I_\epsilon$ , tenemos que

$$|\sin x| \geq |\sin(\pi + \epsilon)| > 0.$$

Entonces, la longitud del intervalo es estrictamente mayor que 1. Por tanto,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists m_k \in [(2k+1)\pi - \epsilon, (2k+2)\pi - \epsilon]$$

tal que  $\sin m_k \leq \sin[(2k+1)\pi + \epsilon]$ . Si  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$ , existe el límite de esta subsucesión, es decir,  $\exists l = \lim_{k \rightarrow \infty} \sin m_k \leq \sin(\epsilon + \pi) < 0$ . Por tanto, tenemos que  $l \geq 0$  y  $l < 0$ . Esto es una contradicción.

**Teorema 2.10** (Teorema de la sucesión monótona). Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ . Entonces  $\exists \{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que es monótona.

*Demostración.* Diremos que  $x_m$  es un **pico** de la sucesión si  $x_m \geq x_n, \forall n \geq m$ . Supongamos que en  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  hay infinitos picos. Entonces podemos crear una subsucesión decreciente (monótona),  $\{x_{m_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  con los picos:

$$x_{m_1} > x_{m_2} > \cdots > x_{m_j} > \cdots .$$

Si hay un número finito de picos, podemos ir hasta el último pico tal que a partir de este no hay más picos. Supongamos que no hay picos. Es decir, sea  $x_{n_1} \in \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\forall n \geq n_1, x_n$  no es un pico. Por tanto,  $\exists n_2 > n_1$  tal que  $x_{n_2} > x_{n_1}$ . Iterando,

$$\exists n_1 < n_2 < \cdots < n_j < \cdots ,$$

tales que

$$x_{n_1} < x_{n_2} < \cdots < x_{n_j} < \cdots .$$

Por tanto, la subsucesión  $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  es creciente y, por tanto, monótona.  $\square$

**Teorema 2.11** (Teorema de Bolzano-Weiestrass). Dada  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  acotada entonces  $\exists \{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  subsucesión convergente.

*Demostración.* Por el teorema de la sucesión monótona, sabemos que existe  $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  subsucesión es monótona. Además, como la sucesión está acotada, la subsucesión también lo está y, por tanto,  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_j}$ .  $\square$

**Teorema 2.12.** Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  sucesión acotada y  $x \in \mathbb{R}$ . Si para toda  $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  subsucesión que converge, lo hace a  $x$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

*Demostración.* Sea  $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$  y supongamos que para esta sucesión no existe el límite (por lo que no es igual a  $x$ ). Así,  $\exists \epsilon > 0$  tal que  $\exists \{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  con  $|x_{n_j} - x| \geq \epsilon, \forall j \in \mathbb{N}$ . Por hipótesis esta subsucesión está acotada. Aplicando el teorema de Bolzano-Weiestrass,  $\exists \{y_l\}_{l \in \mathbb{N}} \subset \{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  subsucesión convergente. Entonces tenemos que esta subsucesión converge a  $x$ . Sin embargo, tenemos que

$$|y_l - x| \geq \epsilon, l \geq l_0.$$

Esto implica que  $y_l$  no converge a  $x$ . Esto es una contradicción, por lo que debe ser que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .  $\square$

**Ejemplo 2.15.** Considera

$$x_n = \begin{cases} n, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases} .$$

Satisface que toda subsucesión convergente tiene como límite 0 pero la sucesión no converge (observamos que no es una sucesión acotada).

**Ejemplo 2.16.** Estudiamos la convergencia de  $x_n = n^{\frac{1}{n}}$ . Vamos a ver que es decreciente (monótona). Tenemos que

$$x_{n+1} = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} < x_n = n^{\frac{1}{n}} \iff (n+1)^n < n^{n+1} = n \cdot n^n \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n.$$

Tenemos que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e \leq 3.$$

Entonces tenemos que si  $n \geq 4$  (recordamos que no nos importan los primeros términos de la sucesión),

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n.$$

Por tanto, si  $n \geq 4$  la sucesión es decreciente. Además, tenemos que está acotada inferiormente por 1. Por tanto, la sucesión converge. Tenemos que

$$n^{\frac{1}{n}} \rightarrow l \geq 1.$$

Como esta sucesión converge, sabemos que todas las subsucesiones han de converger al mismo límite, por lo que basta con calcular la convergencia de una subsucesión. Vamos a ver que

$$x_{2n} = (2n)^{\frac{1}{2n}} \rightarrow 1.$$

Tenemos que

$$x_{2n} = (2n)^{\frac{1}{2n}} = 2^{\frac{1}{2n}} \cdot n^{\frac{1}{2n}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sabemos que  $\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$  y  $\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \sqrt{l}$ . Entonces tenemos que,

$$l = \sqrt{l} \iff l^2 = l \iff l \in \{0, 1\}.$$

Podemos descartar 0 porque  $l \geq 1$ , por tanto,  $l = 1$ .

## 2.3. Sucesiones Cauchy

**Definición 2.7** (Sucesión de Cauchy). Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ . Se dice que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de **Cauchy** si  $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - x_m| < \epsilon$ , con  $n, m \geq n_0$ .

**Proposición 2.5.** Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ .

- (i) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ , entonces  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy.
- (ii) Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy entonces es una sucesión acotada.

*Demostración.* (i) Sabemos que  $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$ . Así, cogemos  $m, n \geq n_0$ .

Entonces,

$$\begin{aligned} |x_n - l| &< \frac{\epsilon}{2}. \\ |x_m - l| &< \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |x_n - l + x_m - l| \\ &\leq |x_n - l| + |l - x_m| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

(ii) Cogemos  $\epsilon = 1$ , entonces existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $m, n \geq n_0$ ,  $|x_n - x_m| < 1$ . Cogemos  $m = n_0$  y  $n \geq n_0$ . Tenemos que

$$|x_n - x_{n_0}| < 1.$$

Entonces,

$$|x_n| = |x_n - x_{n_0} + x_{n_0}| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < 1 + |x_{n_0}|.$$

Si  $n \geq n_0$ , la sucesión está acotada por  $1 + |x_{n_0}|$ , nos queda por acotar los  $n < n_0$ .

$$|x_n| \leq \max \{ \max \{ |x_k| : 1 \leq k \leq n_0 \}, 1 + |x_{n_0}| \}.$$

□

**Observación 2.10.** Vamos a concluir que ser de Cauchy es equivalente a converger. Esto se cumple en  $\mathbb{R}$  pero no en  $\mathbb{Q}$ ! Entonces, podemos pensar que este hecho está relacionado con el axioma de completitud.

**Teorema 2.13** (Criterio de convergencia de Cauchy). Una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  converge si y solo si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy.

*Demostración.* Basta probar que si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  es de Cauchy, entonces converge. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, como es una sucesión de Cauchy está acotada, por lo que existe  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergente a  $l$ . Sabemos que  $\forall \epsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n, m \geq n_1$ ,

$$|x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Además,  $\exists n_2 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n_k \geq n_2$ ,

$$|x_{n_2} - l| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea  $n_0 = \max \{n_1, n_2\}$ , si  $n \geq n_0$ , queremos ver que

$$|x_n - l| < \epsilon.$$

Sea  $n_k \geq n_0$  y  $n \geq n_0$ ,

$$|x_n - l| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - l| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - l| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

**Ejemplo 2.17.**  $x_1 = 1, x_2 = 2,$

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}, \quad n \geq 3.$$

Tenemos que la distancia entre dos puntos sucesivos será:

$$|x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} + \cdots + x_{n+1} + x_n| \\ &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &= \frac{1}{2^{m-2}} + \frac{1}{2^{m-3}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{m-1}}}{1 - \frac{1}{2}} \rightarrow 0, \text{ si } n, m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Así,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy. En efecto,  $x_n \rightarrow \frac{5}{3}$ .

## 2.4. Otros teoremas

**Observación 2.11.** Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ,

- Recordamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  si  $\forall c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$  tal que  $x_n > c$ .
- Si  $x_n \leq y_n$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ .
- Si  $x_n \leq y_n$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ .

**Corolario 2.4.** Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = L \in (0, \infty)$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ , entonces,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ .

*Demostración.* Dado  $\epsilon = 1$ , tenemos que existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_1$

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - L \right| < 1.$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $x_n, y_n > 0$ . Entonces, tenemos que

$$-1 < \frac{x_n}{y_n} - L < 1 \iff -y_n < x_n - y_n L < y_n.$$

Así,  $x_n < y_n(1 + L)$ . Tenemos que  $x_n \rightarrow \infty$ , por lo que  $y_n(1 + L) \rightarrow \infty$  por lo que  $y_n \rightarrow \infty$ . □

**Ejemplo 2.18.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5n}{n^2 + 1} = 3.$$

Como  $n^2 + 1 \rightarrow \infty$  tenemos que  $3n^2 + 5n \rightarrow \infty$  y viceversa.

**Teorema 2.14** (Criterio de Stolz). Sean  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  tales que

$$b_1 < b_2 < \dots < b_n < \dots,$$

y supongamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ . Si existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l,$$

entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ .

*Demostración.* Sea  $\epsilon > 0$ , entonces existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$ ,

$$-\frac{\epsilon}{2} < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} - l < \frac{\epsilon}{2}.$$

$$\iff \left(l - \frac{\epsilon}{2}\right)(b_{n+1} - b_n) < a_{n+1} - a_n < \left(l + \frac{\epsilon}{2}\right)(b_{n+1} - b_n), \forall n \geq n_0.$$

Así, para  $n_0$ ,

$$\left(l - \frac{\epsilon}{2}\right)(b_{n_0+1} - b_{n_0}) < a_{n_0+1} - a_{n_0} < \left(l + \frac{\epsilon}{2}\right)(b_{n_0+1} - b_{n_0}).$$

$\vdots$

$$\left(l - \frac{\epsilon}{2}\right)(b_{n_0+m} - b_{n_0+m-1}) < a_{n_0+m} - a_{n_0+m-1} < \left(l + \frac{\epsilon}{2}\right)(b_{n_0+m} - b_{n_0+m-1}), m \in \mathbb{N}.$$

Si sumamos todas las desigualdades y usando la propiedad telescópica,

$$\left(l - \frac{\epsilon}{2}\right)(b_{n_0+m} - b_{n_0}) < a_{n_0+m} - a_{n_0} < \left(l + \frac{\epsilon}{2}\right)(b_{n_0+m} - b_{n_0}).$$

Dividimos todo por  $b_{n_0+m} \neq 0$  ( $b_{n_0+m} > 0$ ),

$$\left(l - \frac{\epsilon}{2}\right) \left(1 - \frac{b_{n_0}}{b_{n_0+m}}\right) < \frac{a_{n_0+m}}{b_{n_0+m}} - \frac{a_{n_0}}{b_{n_0+m}} < \left(l + \frac{\epsilon}{2}\right) \left(1 - \frac{b_{n_0}}{b_{n_0+m}}\right).$$

Así, tenemos que

$$l - \frac{\epsilon}{2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \inf \left(l - \frac{\epsilon}{2}\right) \left(1 - \frac{b_{n_0}}{b_{n_0+m}}\right) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \inf \frac{a_{n_0+m}}{b_{n_0+m}} - 0.$$

Además, tenemos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup \frac{a_{n_0+m}}{b_{n_0+m}} - 0 \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sup \left(l + \frac{\epsilon}{2}\right) \left(1 - \frac{b_{n_0}}{b_{n_0+m}}\right) = l + \frac{\epsilon}{2}.$$

Así,  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall m \in \mathbb{N}$ ,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_{n_0+m}}{b_{n_0+m}} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sup \frac{a_{n_0+m}}{b_{n_0+m}} \leq l + \frac{\epsilon}{2}.$$

Por lo tanto,  $\forall \epsilon > 0$ :

$$l - \frac{\epsilon}{2} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \inf \frac{a_m}{b_m} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sup \frac{a_m}{b_m} \leq l + \frac{\epsilon}{2}.$$

Por lo que

$$l \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \inf \frac{a_m}{b_m} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sup \frac{a_m}{b_m} \leq l.$$

Por tanto tenemos que  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{b_m} = l$ . □

**Observación 2.12.** (i) En el criterio de Stolz, si  $l = \pm\infty$ , entonces  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{b_m} = \pm\infty$ .

**Segundo criterio de Stolz.** Si tenemos  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  tales que  $a_n \rightarrow 0$  y  $b_n \rightarrow 0$  y  $b_n < b_{n+1}$ <sup>2</sup>, entonces, si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ .

**Observación 2.13.** Propiedades de los límites superiores e inferiores:

(i) Si  $x_n \leq y_n$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf y_n$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup y_n$ .

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n = l \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ .

(iii) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ , tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup (x_n + y_n) = l + \lim_{n \rightarrow \infty} \sup y_n.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf (x_n + y_n) = l + \lim_{n \rightarrow \infty} \inf y_n.$$

**Ejemplo 2.19.** Sea  $x_n = (-1)^n$  y  $y_n = (-1)^n + 1$ , tenemos que  $x_n \leq y_n$ . Además,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n = -1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf y_n = 0.$$

Similarmente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n = 1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup y_n = 2.$$

**Ejemplo 2.20.** Sabemos que si  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ , entonces  $a_n \rightarrow \infty$ . Veamos a qué tiende<sup>3</sup>

$$n \geq 2, \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\log n}.$$

<sup>2</sup>Realmente solo importa que sea monotona, no importa que sea creciente o decreciente.

<sup>3</sup>A partir de ahora  $\log = \ln$ , no es en base 10.



Por el criterio de Stolz, basta estudiar el límite,

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{\log(n+1) - \log n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{\frac{n+1}{n} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}.$$

Tenemos que  $\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \log e = 1$  y  $\frac{n+1}{n} \rightarrow 1$ , por lo que

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{\log(n+1) - \log(n)} \rightarrow 1.$$

Es decir, la serie armónica, en el infinito, se aproxima al logaritmo neperiano.

## 2.5. Series numéricas

**Definición 2.8** (Suma parcial). Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ . Sea llama **suma parcial n-ésima**

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n.$$

**Definición 2.9.** Dada la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , diremos que la **serie**  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  converge a  $S$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

**Ejemplo 2.21.** (i)  $a_n = 2^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Tenemos que

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}}.$$

De esta manera,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1.$$

(ii)  $a_n = (-1)^n$ . Tenemos que  $S_1 = -1$ ,  $S_2 = 0$ , entonces, no existe el límite de  $S_n$ . Por tanto, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$  no converge.

(iii)  $a_n = \frac{1}{n}$ . Tenemos que

$$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ , por lo que la serie armónica es divergente.

(iv)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$ . Tenemos que

$$\frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Entonces tenemos que,

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \\ S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\ &\vdots \\ S_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

De esta manera,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$ .

(v)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

**Teorema 2.15.** Si  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  y la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

*Demostración.* Sea  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ . Como  $S_n \rightarrow l$ , entonces  $S_{n-1} \rightarrow l$ . Así,  $S_n - S_{n-1} \rightarrow 0$ . Entonces tenemos que  $S_n - S_{n-1} = a_n \rightarrow 0$ . □

**Teorema 2.16.** Si  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ , entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge si y solo si  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada superiormente.

*Demostración.* Como los  $a_n \geq 0$ , tenemos que  $S_n \leq S_{n+1}$  (es monótona creciente). Así,  $S_n \rightarrow l \iff S_n$  está acotada superiormente. □

**Observación 2.14.** Si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$ , entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = a + b.$$

Es decir, podemos extrapolar todas las propiedades de los límites a las series.

**Teorema 2.17** (Criterio de comparación). Si  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$  tales que  $a_n \leq b_n$  para  $n \geq k$ . Si,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  converge, entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.

*Demostración.* Sea  $n \geq k$ , entonces

$$\sum_{k=1}^n a_k \leq \underbrace{a_1 + \cdots + a_{k-1}}_{a \in \mathbb{R}} + \sum_{j=k}^n b_j \leq a + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}_C < \infty.$$

Entonces, tenemos que  $S_n \leq C$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  y, por el teorema anterior,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge. □

**Ejemplo 2.22.** Vamos a demostrar que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  converge. Tenemos que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$n \leq n^2 \iff \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n^2 + n}.$$

Entonces, sea  $a_n = \frac{1}{n^2}$  y  $b_n = \frac{2}{n^2 + n}$ . Entonces tenemos que  $0 \leq a_n \leq b_n$ . De un ejemplo anterior deducimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2 \cdot 1 = 2.$$

Entonces, por el teorema anterior tenemos que <sup>4</sup>

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

**Ejemplo 2.23.** Si  $p \in \mathbb{R}$  y  $a_n = \frac{1}{n^p}$ :

- Si  $p \leq 0$ , tenemos que

$$a_n \rightarrow \begin{cases} \infty, & p \neq 0 \\ 1, & p = 0 \end{cases}.$$

Así, como  $a_n$  no tiende a 0, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \infty$ .

- Si  $0 \leq p \leq 1$ , tenemos que  $n^p \leq n$ . Por tanto,

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \infty.$$

---

<sup>4</sup>Si la sucesión es de términos positivos, entonces decir  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \infty$  es lo equivalente a decir que converge. Si no son términos positivos no lo podemos afirmar. Considera  $a_n = (-1)^n$ .

- Si  $p \geq 2$ , tenemos que  $n^p \geq n^2$ , por lo que  $\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2}$ . Como  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  converge, por el criterio de comparación tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty.$$

- Si  $1 < p < 2$ , tenemos que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty$  por el **criterio de la integral** (lo veremos en el segundo semestre).

**Observación 2.15.** Así, podemos concluir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1.$$

**Ejemplo 2.24.** Demostramos que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 2n + 1} < \infty$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3 + 2n + 1}} = 1.$$

Así pues,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 2n + 1} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty.$$

5

**Teorema 2.18.** Si  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l > 0$ , entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty.$$

*Demostración.* Sea  $\epsilon = \frac{l}{2} > 0$ , entonces existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$ ,

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - l \right| < \epsilon \iff l - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < \epsilon + l \iff \frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3l}{2}.$$

Entonces, si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, tenemos que

$$\frac{l}{2} b_n < a_n,$$

---

<sup>5</sup>El símbolo  $\approx$  lo utilizamos para decir que cuando  $n \rightarrow \infty$  se comportan prácticamente igual.

por lo que  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  también converge. Recíprocamente, si  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$  tenemos que  $a_n < \frac{3l}{2}b_n$ , por lo que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ .  $\square$

**Teorema 2.19** (Criterio de la raíz). Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$  y supongamos que existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a \geq 0$ .

- Si  $a < 1$ , entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.
- Si  $a > 1$ , entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge.
- Si  $a = 1$ , entonces no sabemos.

*Demostración.* (i) Si  $a < 1$ , sea  $a < r < 1$ . Sea  $\epsilon > 0$  tal que  $a - \epsilon > 0$  y  $a + \epsilon < r$ . Entonces, existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$ ,

$$a - \epsilon < \sqrt[n]{a_n} < a + \epsilon < r.$$

Entonces tenemos que si  $n \geq n_0$ ,

$$(a - \epsilon)^n < a_n < (a + \epsilon)^n < r^n.$$

Por el criterio de comparación, como

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r} < \infty, \quad 0 \leq r < 1,$$

es convergente, tenemos que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  también es convergente.

(ii) Análogamente, si  $a > 1$ , tomamos  $1 < r < a$  y  $\epsilon$  tal que  $r < a - \epsilon$ . Así, existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$ ,

$$|\sqrt[n]{a_n} - a| < \epsilon \iff r < -\epsilon + a < \sqrt[n]{a_n} < \epsilon + a.$$

Es decir, si  $n \geq n_0$ ,

$$r^n < a_n.$$

Como  $r > 1$ , tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r - r^{n+1}}{1-r} = \infty.$$

Por el criterio de comparación, como  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n > \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \infty$ , tenemos que la serie de  $a_n$  diverge.  $\square$

**Ejemplo 2.25.** Ejemplos del caso  $a = 1$ .

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

(ii) Considera  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  converge y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} \right)^2 = 1.$$

**Ejemplo 2.26. Ejercicio 76(f).**  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n^2} 3^{-n}$ . Llamamos  $a_n$  al término general. Entonces,

$$\sqrt[n]{a_n} = \left( \frac{n+1}{n} \right)^n 3^{-1}.$$

Si  $n \rightarrow \infty$ , tenemos que

$$\left( \frac{n+1}{n} \right)^n = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \rightarrow e.$$

Como  $0 < e < 3$ , tenemos que  $\frac{e}{3} < 1$ . Por el criterio de la raíz, la serie converge.

**Teorema 2.20** (Criterio del cociente). Si  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$  tal que existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$ , entonces:

- Si  $a < 1$ , tenemos que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.
- Si  $a > 1$ , tenemos que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge.
- Si  $a = 1$ , no sabemos.

*Demostración.* Una manera de demostrarlo es ver que este criterio implica el de la raíz. Otra manera de hacerlos es recurriendo a series geométricas.

(i) Si  $a < 1$ , tomamos  $\epsilon > 0$  tal que si  $n \geq n_0$ , y tomamos  $a < r < 1$ ,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < a + \epsilon < r.$$

Entonces tenemos que si  $n \geq n_0$ ,

$$a_{n+1} < r a_n < \dots < r^{n+1-n_0} a_{n_0} = r^{n+1} \frac{a_{n_0}}{r^{n_0}}.$$

Entonces, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} < \frac{a_{n_0}}{r^{n_0}} \sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1}.$$

Como  $r < 1$ , tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1} < \infty.$$

Por el criterio de comparación, tenemos que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.

(ii) Si  $a > 1$  es análogo.

□

**Ejemplo 2.27.** Ejemplos de  $a = 1$ .

(i) Sea  $a_n = \frac{1}{n}$ . Tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

(ii) Sea  $a_n = \frac{1}{n^2}$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2}{(n+1)^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 = 1.$$

(iii) Sea  $k \in \mathbb{N}$  y sea  $a_n = \frac{n^k}{2^n}$ . Usamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^k}{2^{n+1}}}{\frac{n^k}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} \left( \frac{n+1}{n} \right)^k = \frac{1}{2} < 1.$$

Por el criterio del cociente,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{2^n}$  converge.

**Teorema 2.21** (Criterio de Leibniz). Supongamos que  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$  decreciente, es decir,  $a_{n+1} \leq a_n$  y tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Entonces, la serie alternada converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \text{converge.}$$

**Ejemplo 2.28.** Considera  $a_n = \frac{1}{n}$ . Entonces tenemos que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  converge, mientras que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

**Definición 2.10.** Se dice que una serie es **absolutamente convergente** si  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ .

**Observación 2.16.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  no es absolutamente convergente.

**Teorema 2.22.** Si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es absolutamente convergente (i.e.  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ ), entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es convergente.

*Demostración.* Sea  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ . Queremos ver que  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión convergente. Sea  $S_n^* = \sum_{k=1}^n |a_k|$ . Sabemos que  $\{S_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Entonces, tenemos que  $|S_n| \leq S_n^*$ . Sabemos que  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente si y solo si es de Cauchy. Sea  $m > n$ ,

$$0 \leq |S_m - S_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| = S_m^* - S_n^*.$$

Si  $m, n \rightarrow \infty$ , tenemos que  $S_m^* - S_n^* \rightarrow 0$ . Entonces,  $|S_m - S_n| \rightarrow 0$ , por lo que es de Cauchy y, consecuentemente, converge.  $\square$

**Ejemplo 2.29.** Estudiar la convergencia de las siguientes series.

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ . Usamos el criterio del cociente.

$$\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{n+1}{(n+1) \left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1.$$

Por tanto, la serie converge, es decir,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} < \infty$ .

(ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^2}$ . Tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\theta|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Por el criterio de comparación,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\theta|}{n^2} < \infty$ . Es decir, la serie inicial converge absolutamente por lo que converge.



(iii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  con  $x \in \mathbb{R}$ . Tomamos la serie en valor absoluto para ver que converge absolutamente. Empleamos el criterio del cociente:

$$\frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0.$$

Como  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} < \infty$ , la serie inicial converge absolutamente, por lo que converge.

**Observación 2.17.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

**Teorema 2.23** (Sumación por partes de Abel). Sean  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ , sea  $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$  y sea  $m > n$ . Entonces,

$$\sum_{k=n+1}^m a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_m b_m - A_n b_{n+1}.$$

*Demostración.* Tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^m a_k b_k &= \sum_{k=n+1}^m (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=n+1}^m A_k b_k - \sum_{k=n}^{m-1} A_k b_{k+1} \\ &= A_m b_m - A_n b_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}). \end{aligned}$$

□

**Teorema 2.24** (Criterio de Dirichlet). Sean  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  tal que si  $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$  entonces  $|A_n| \leq M$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  y  $b_n$  decrece y converge a 0. Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ converge.}$$

*Demostración.* Vamos a ver que es sucesión de Cauchy, es decir,  $\sum_{k=n+1}^m a_k b_k \rightarrow 0$  si  $m \geq n+1$ , cuando  $n, m \rightarrow \infty$ . Utilizamos el teorema anterior:

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k b_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_m b_m - A_n b_{n+1} \right|.$$

Sea  $\epsilon > 0$  y sea  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$ ,

$$|b_n| < \frac{\epsilon}{3M},$$

y  $\forall m > n \geq n_0$  tal que

$$|b_m - b_n| < \frac{\epsilon}{3M}.$$

Seguimos con lo anterior:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^m a_k b_k \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_m b_m - A_n b_{n+1} \right| \\ &\leq M \sum_{k=n+1}^{m-1} |b_k - b_{k+1}| + M |b_m| + M |b_{n+1}| \\ &\leq M \sum_{k=n+1}^{m-1} (b_k - b_{k+1}) + M \frac{\epsilon}{3M} + M \frac{\epsilon}{3M} = M (b_{n+1} - b_m) + \frac{2\epsilon}{3} \\ &= M \frac{\epsilon}{3M} + \frac{2\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

□

**Teorema 2.25** (Criterio de Leibniz). Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  decreciente que converge a 0, entonces la serie alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  converge.

*Demostración.* Tenemos que

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k = \begin{cases} -1, & n \text{ impar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}.$$

Entonces, las sumas parciales están acotadas superiormente por  $M = 1$ . Por el criterio de Dirichlet, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n,$$

converge <sup>6</sup>.

□

**Ejemplo 2.30.** (i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  converge.

(ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  converge.

(iii) Demostrar que (usar inducción)

$$\left| \sum_{n=1}^m \cos nx \right| = \left| \frac{\sin \left(m + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \right|.$$

---

<sup>6</sup>Este teorema es realmente un corolario del teorema anterior.

## 2.6. Exponentes reales.

Recordamos que si  $x > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$ :

$$x^{\frac{1}{n}} = \sup \{r \in \mathbb{Q} : r^n < x\}.$$

En general, si  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n < 0$ , definimos  $x^0 = 1$  y

$$x^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{n}}.$$

Pasamos al caso  $p = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ,

$$x^p = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m.$$

Queremos ver que pasa en el caso  $x^\alpha$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Lema 2.1.** Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|x^r - 1| < \epsilon, \quad 0 < r < \frac{1}{n_0}, \quad r \in \mathbb{Q}.$$

*Demostración.* Sabemos que  $x^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$  si  $n \rightarrow \infty$ . Así, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$ ,

$$\left|x^{\frac{1}{n}} - 1\right| < \epsilon.$$

Sea  $0 < r < \frac{1}{n_0}$ ,  $r \in \mathbb{Q}$ . Si  $x > 1$ , tenemos que  $0 < x^r - 1 < x^{\frac{1}{n_0}} - 1 < \epsilon$ . Si  $0 < x < 1$ , tenemos que  $x^r > x^{\frac{1}{n_0}}$  por lo que  $0 < 1 - x^r < 1 - x^{\frac{1}{n_0}} < \epsilon$ . El caso  $x = 1$  es trivial.  $\square$

**Corolario 2.5.** Si  $r_n \rightarrow 0$  y  $r_n \in \mathbb{Q}^+$ , con  $x > 0$ , entonces  $x^{r_n} \rightarrow 1$  si  $n \rightarrow \infty$ .

**Teorema 2.26.** Si  $x > 0$ , y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces

(i) Si  $r_n \in \mathbb{Q}$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \alpha$ , entonces  $\{x^{r_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

(ii) Si  $s_n \in \mathbb{Q}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \alpha$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{s_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{r_n}$ .

*Demostración.* (i) Tenemos  $r_n \in \mathbb{Q}$  con  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \alpha$ . Sin pérdida de generalidad tomamos  $\alpha > 0$ .

Vamos a demostrar que es de Cauchy. Como  $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge, entonces está acotada, por lo que existe  $K$  tal que  $0 \leq r_n < K \in \mathbb{N}$  (descartamos los primeros términos negativos). Hacemos primero el caso  $x > 1$  (el caso  $x < 1$  es análogo). Supongamos que  $r_m \geq r_n$ .

$$|x^{r_m} - x^{r_n}| = |x^{r_n} (x^{r_m - r_n} - 1)| \leq x^K |x^{r_m - r_n} - 1| \rightarrow 0.$$

En el paso anterior hemos utilizado el lema y corolario anterior. Así, tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{r_n}$  converge.

(ii) Si  $s_n \rightarrow \alpha$  y  $r_n \rightarrow \alpha$ , tenemos que  $s_n - r_n \rightarrow 0$ . Supongamos que  $r_n \geq s_n$ ,

$$x^{r_n} - x^{s_n} = x^{s_n} (x^{r_n - s_n} - 1).$$

Entonces, tenemos que

$$|x^{r_n} - x^{s_n}| \leq x^K |x^{r_n - s_n} - 1| \rightarrow 0.$$

Como la diferencia converge a 0, tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{s_n}$ .<sup>7</sup>

□

**Definición 2.11.** Dado  $x > 0$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$  se define  $x^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{r_n}$  donde  $r_n \in \mathbb{Q} \rightarrow \alpha$ .

**Proposición 2.6.** Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  con  $x_n, y_n > 0$ , con  $x_n \rightarrow x > 0$  y  $y_n \rightarrow y > 0$ , entonces

$$x_n^{y_n} \rightarrow x^y.$$

*Demostración.* Dado  $\epsilon > 0$ , sea  $\epsilon' = \left[ \left( \frac{\epsilon}{x^y} + 1 \right)^{\frac{1}{y}} - 1 \right] \cdot x > 0$ . Entonces, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$ ,  $x_n < x + \epsilon'$ . Así, tenemos que

$$x_n^{y_n} < (x + \epsilon')^{y_n}.$$

Entonces, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n^{y_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup (x + \epsilon')^{y_n} = (x + \epsilon')^y = x^y + \epsilon, \forall \epsilon > 0.$$

Así, tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n^{y_n} \leq x^y$ . Ahora, dado  $\epsilon > 0$ , tomamos  $\epsilon'' = x - (x^y - \epsilon)^{\frac{1}{y}} > 0$ . Así, obtenemos que para  $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $x - \epsilon'' < x_n$ :

$$(x - \epsilon'')^y = x^y - \epsilon \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n^{y_n}, \forall \epsilon > 0.$$

Así,  $x^y \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n^{y_n}$ .

□

---

<sup>7</sup>Esta afirmación solo la podemos hacer si las sucesiones convergen. Sino, no, considera  $x_n = n$  y  $y_n = n$ .

## Capítulo 3

# Límites de funciones

**Definición 3.1** (Punto de acumulación). Sea  $A \subset \mathbb{R}$ . Se dice que  $c$  es un **punto de acumulación** de  $A$  si  $\forall \epsilon > 0, \exists x \in A$  con  $x \neq c$  tal que  $|x - c| < \epsilon$ .

**Ejemplo 3.1.** Sea  $A = (0, 1)$  y sea  $0 < c < 1$ . Tenemos que  $c$  es un punto de acumulación de  $A$ . Similarmente, 0 y 1 también son puntos de acumulación de  $A$ .

**Notación 3.1.**  $A' = \{c \in \mathbb{R} : c \text{ punto de acumulación de } A\}$ . Así, si  $A = (0, 1)$ , entonces  $A' = [0, 1]$ .

**Ejemplo 3.2.**  $A = \{0, 1\}$ . Tenemos que  $A' = \emptyset$ .

**Teorema 3.1.** Sea  $A \subset \mathbb{R}$ . Entonces,  $c \in A'$  si y solo si  $\exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  con  $x_n \neq c$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ .

*Demostración.* (i) Supongamos que  $A' \neq \emptyset$ . Si  $c \in A'$ , tomamos  $\epsilon = \frac{1}{n}$ , entonces  $\exists x_n \in A$ ,  $x_n \neq c$  tal que  $|x_n - c| < \frac{1}{n}$ . Así,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A - \{c\}$  y  $|x_n - c| < \frac{1}{n} \rightarrow 0$ , por lo que  $x_n \rightarrow c$ .

(ii) Recíprocamente, si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A - \{c\}$  tal que  $x_n \rightarrow c$ . Sea  $\epsilon > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - c| < \epsilon$ . Así,  $x_n \in A - \{c\}$  y  $|x_n - c| < \epsilon$ . Por lo que  $c \in A'$ . □

**Ejemplo 3.3.** (i) Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  tal que  $x_n \rightarrow c$  con  $x_n \neq c$  y sea  $A = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Entonces,  $A' = \{c\}$ . Por ejemplo, si  $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ , entonces  $A' = \{0\}$ .

(ii) Sea  $A = \mathbb{Q}$ , tenemos que  $A' = \mathbb{R}$ , pues  $\mathbb{Q}$  es denso en  $\mathbb{R}$ . Análogamente, si  $A = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ , tenemos que  $A' = \mathbb{R}$ .

**Definición 3.2** (Límite). Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $c \in A'$ . Se dice que  $l$  es el límite de  $f$  cuando  $x$  se aproxima a  $c$ <sup>a</sup>:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l,$$

si  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que si  $x \in A - \{c\}$  y  $0 < |x - c| < \delta$ , entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ .

<sup>a</sup>Por lo estudiado anteriormente, podemos calcular el límite sin que  $c \in A$ , es decir, sin que  $f$  esté definido en  $c$ .

**Ejemplo 3.4.** Sea  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \frac{x^2 + x}{x}$ . Si  $A = (0, 1]$ , tenemos que  $0 \in A' = [0, 1]$ . Queremos ver que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ . Sea  $\epsilon > 0$ , quiero encontrar  $\delta > 0$  tal que si  $x \in (0, 1]$  y  $0 < x < \delta$ , entonces  $\left| \frac{x^2 + x}{x} - 1 \right| < \epsilon$ . Tenemos que

$$\left| \frac{x^2 + x}{x} - 1 \right| = |x + 1 - 1| = x < \epsilon.$$

Cogemos  $\delta = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$ . También podemos tomar  $\delta = \epsilon$ . Entonces si  $0 < x < \delta$ , tenemos que  $|f(x) - 1| < \epsilon$ .

**Ejemplo 3.5.**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = x^2$ . Tenemos que  $0 \in \mathbb{R}' = \mathbb{R}$ . Vamos a ver que  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ . Vamos a ver que si  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |x - 0| < \delta$ , entonces  $|x^2 - 0| < \epsilon$ .

$$|x^2| < \epsilon \iff x^2 < \epsilon.$$

Podemos tomar  $\delta = \sqrt{\epsilon}$ , pues entonces

$$x < \sqrt{\epsilon} \Rightarrow x^2 < (\sqrt{\epsilon})^2 = \epsilon.$$

**Teorema 3.2** (Caracterización del límite por convergencia de sucesiones). Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c \in A'$  y  $l \in \mathbb{R}$ . Entonces, son equivalentes los siguientes enunciados:

- (i)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$ .
- (ii)  $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A - \{c\}$ ,  $x_n \rightarrow c$  si  $n \rightarrow \infty$ , entonces  $f(x_n) \rightarrow l$ .

*Demostración.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Queremos ver que  $\forall \epsilon > 0$  existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$ ,  $|f(x_n) - l| < \epsilon$ . Sabemos que dado  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $x \in A - \{c\}$  y  $0 < |x - c| < \delta$ , entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ . Como  $x_n \rightarrow c$ , dado  $\delta > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$ ,  $|x_n - c| < \delta$ . Recordamos que  $x_n \neq c$ . Por tanto,  $|f(x_n) - l| < \epsilon$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A - \{c\}$  y  $x_n \rightarrow c$ , entonces  $f(x_n) \rightarrow l$ . Quiero ver que  $\forall \epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |x - c| < \delta$  con  $x \in A - \{c\}$ , entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ . Supongamos lo contrario. Es decir,  $\exists \epsilon > 0$ ,  $\forall \delta > 0, \exists 0 < |x - c| < \delta$  con  $x \in A$  tal que  $|f(x) - l| \geq \epsilon$ . Tomamos  $\delta = \frac{1}{n}$ ,

entonces existe  $x_n$  tal que  $0 < |x_n - c| < \frac{1}{n}$ , con  $x_n \in A$  tal que  $|f(x_n) - l| \geq \epsilon$ . Así,  $x_n \rightarrow c$ ,  $x_n \in A \setminus \{c\}$  pero tenemos que  $f(x_n)$  no tiende a  $l$ , que contradice nuestra hipótesis. Por tanto,  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$ .<sup>1</sup>

□

**Ejemplo 3.6.** Consideramos la función

$$f(x) = \text{sig } x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

Tenemos que  $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$  y  $f(x_n) = 1 \rightarrow 1$ , pero si tomamos  $y_n = -\frac{1}{n} \rightarrow 0$ , pero  $f(y_n) = -1 \rightarrow -1$ . Entonces, como  $-1 \neq 1$ , tenemos que no existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

**Ejemplo 3.7.** Vamos a ver que no existe el límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  si  $x > 0$ . Basta tomar  $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ , pero  $\frac{1}{x_n} = n$  diverge, por lo que no converge a un número real finito.

**Definición 3.3.** Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $x_0 \in A'$ . Diremos que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  si  $\forall C > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que  $0 < |x - x_0| < \delta$ ,  $x \in A$ , entonces  $f(x) > C$ .  
Análogamente, diremos que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$  si  $\forall C < 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $0 < |x - x_0| < \delta$ ,  $x \in A$ , entonces,  $f(x) < C$ .

**Ejemplo 3.8.** Sea  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Entonces,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ . En efecto, dada  $C > 0$  tomamos  $\delta < \frac{1}{C}$  y obtenemos que

$$0 < |x - 0| = x < \delta < \frac{1}{C} \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} > C.$$

**Ejemplo 3.9.** Sea  $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $g(x) = \frac{1}{x}$ . El límite  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  no existe.

**Definición 3.4.** Sea  $f : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  y sea  $l \in \mathbb{R}$ . Se dice que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$  si  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists C > 0$  tal que si  $x > C$  entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ .  
Análogamente, si  $f : (-\infty, a) \rightarrow \mathbb{R}$   $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$  si  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists C < 0$  tal que si  $x < C$  entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ .

<sup>1</sup>Cuando pasamos de sucesión a variable continua, lo solemos hacer por reducción al absurdo.

**Ejemplo 3.10.** Sea  $f(x) = \frac{x+1}{x}$ ,  $x > 0$ . Queremos ver que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = 1$ . Sea  $\epsilon > 0$ ,

$$\left| \frac{x+1}{x} - 1 \right| = \left| \frac{x+1-x}{x} \right| = \frac{1}{x}.$$

Si  $C = \frac{1}{\epsilon}$ , tenemos que si  $x > C$ ,

$$x > \frac{1}{\epsilon} \iff \frac{1}{x} < \epsilon.$$

**Definición 3.5.** Sea  $f : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Diremos que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  si  $\forall C > 0$ ,  $\exists D > 0$  tal que si  $x > D$ , con  $x \in (a, \infty)$ , entonces  $f(x) > C$ .

Análogamente,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$  si  $\forall C < 0$ ,  $\exists D > 0$  tal que si  $x > D$ , con  $x \in (a, \infty)$ , entonces  $f(x) < C$ .

Análogamente, sea  $f : (-\infty, a) \rightarrow \mathbb{R}$ . Tenemos que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$  si  $\forall C > 0$ ,  $\exists D < 0$  tal que si  $x < D$ , entonces  $f(x) > C$ . Finalmente,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  si  $\forall C < 0$ ,  $\exists D < 0$  tal que si  $x < D$  entonces  $f(x) < C$ .

**Observación 3.1.** Análogamente al criterio de existencia de límite por convergencia de sucesiones, se puede adaptar el mismo argumento en los restantes casos de límites. Por ejemplo, si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  y sea  $x_n \rightarrow \infty$  si  $n \rightarrow \infty$ . Entonces tenemos que  $f(x_n) \rightarrow \infty$ . Queremos ver que  $\forall C > 0$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$ , entonces  $f(x_n) > C$ . Sabemos que  $\forall C > 0$ , existe  $D > 0$  tal que si  $x > D$ , con  $x \in \text{dom } f$ , entonces  $f(x) > C$ . Como  $x_n \rightarrow \infty$ , para  $D > 0$ , tenemos que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$ , entonces  $x_n > D$ , por lo que  $f(x_n) > C$ .

**Ejemplo 3.11.** Sea  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ,  $x > 0$ . Queremos ver si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ . Queremos ver que  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists C > 0$  tal que si  $x > C$  entonces  $\left| \frac{\sin x}{x} \right| < \epsilon$ . Tenemos que

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| = \frac{|\sin x|}{x} \leq \frac{1}{x} < \epsilon.$$

Para que esto sea cierto, cogemos  $C = \frac{1}{\epsilon}$ , así,  $x > C \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{C} = \epsilon$ .

**Definición 3.6** (Localmente acotada). Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A'$ . Se dice que  $f$  está **localmente acotada** en  $x_0$  si  $\exists \delta > 0$  y  $\exists C > 0$  tal que si  $0 < |x - x_0| < \delta$ , con  $x \in A$ , entonces  $|f(x)| < C$ .<sup>a</sup>

<sup>a</sup>No es necesario que  $x_0$  sea punto de acumulación.

**Ejemplo 3.12.** Tenemos que  $f(x) = x^2$  está localmente acotada en todo  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Basta tomar  $\delta = 1$  y  $f(x_0 + \delta) = (x_0 + \delta)^2$  y  $f(x_0 - \delta) = (x_0 - \delta)^2$  y tomar  $C = \max\{f(x_0 + \delta), f(x_0 - \delta)\}$ . Tenemos que  $|f(x)| = x^2 \leq C$ ,  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ .



**Teorema 3.3.** Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A'$ ,  $l \in \mathbb{R}$  y  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ . Entonces,  $f$  está localmente acotada en  $x_0$ .

*Demostración.* Dado  $\epsilon = 1$ , tenemos que existe  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |x - x_0| < \delta$ , entonces  $|f(x) - l| < 1$ . Entonces, tenemos que

$$|f(x)| = |f(x) - l + l| \leq |f(x) - l| + |l| < 1 + |l|.$$

Cogemos  $C = 1 + |l|$ . □

**Ejemplo 3.13.** El recíproco no funciona. Cogemos, por ejemplo  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  con  $x \neq 0$ . Tenemos que esta función está localmente acotada en 0 por 1, pero  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  no existe.

**Teorema 3.4.** Sean  $f, g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A'$ , sea  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  y  $m = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ . Entonces,

- (i)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = l + m$ .
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = l - m$ .
- (iii)  $\forall a \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow x_0} (af(x)) = a \cdot l$ .
- (iv)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = l \cdot m$ .
- (v) Si  $m \neq 0$ , y  $g(x) \neq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$ .

*Demostración.* (i) Sea  $\epsilon > 0$  y sea  $\delta > 0$  tal que  $0 < |x - x_0| < \delta$ . Entonces

$$|f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad |g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Así,

$$|f(x) + g(x) - l - m| \leq |f(x) - l| + |g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

si  $0 < |x - x_0| < \delta$ ,  $x \in A$ .

(ii) La demostración es análoga a (i).

(iii) Aplicamos el criterio del límite por sucesiones. Como  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , tenemos que si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{x_0\}$  con  $x_n \rightarrow x_0$ , entonces  $f(x_n) \rightarrow l$ . Queremos ver que  $(af)(x_n) \rightarrow al$ . Tenemos que

$$(af)(x_n) = af(x_n).$$

Aplicando las propiedades de los límites de sucesiones,  $a \rightarrow a$  y  $f(x_n) \rightarrow l$ . Por tanto,  $(af)(x_n) \rightarrow al$ .

- (iv) Por el criterio de límite por sucesiones, sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A/\{x_0\}$ , con  $x_n \rightarrow x_0$ . Queremos ver que  $(f \cdot g)(x_n) \rightarrow l \cdot m$ . Tenemos que

$$(f \cdot g)(x_n) = f(x_n)g(x_n).$$

Como  $f$  converge y  $x_n \rightarrow x_0$ , tenemos que  $f(x_n) \rightarrow l$  y  $g(x_n) \rightarrow m$ . Aplicando las propiedades de los límites de sucesiones,

$$(f \cdot g)(x_n) = f(x_n)g(x_n) \rightarrow l \cdot m.$$

- (v) Por el criterio del límite por sucesiones, sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A/\{x_0\}$  con  $x_n \rightarrow x_0$ . Vamos a ver que  $\left(\frac{f}{g}\right)(x_n) \rightarrow \frac{l}{m}$ . Tenemos que

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x_n) = \frac{f(x_n)}{g(x_n)}.$$

Tenemos que  $f(x_n) \rightarrow l$  y  $g(x_n) \rightarrow m$ , por lo que  $\left(\frac{f}{g}\right)(x_n) \rightarrow \frac{l}{m}$ .

□

**Ejemplo 3.14.** Calculamos  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 5)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 5) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 5 = \left(\lim_{x \rightarrow 2} x\right)^2 + 5 = 2^2 + 5 = 9.$$

**Teorema 3.5.** Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A'$  y supongamos que  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ . Si  $a \leq f(x) \leq b$ , entonces  $a \leq l \leq b$ .

*Demostración.* Dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |x - x_0| < \delta$ , con  $x \in A$ , entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ . Entonces, tenemos que

$$|f(x) - l| < \epsilon \iff -\epsilon < f(x) - l < \epsilon \iff f(x) - \epsilon < l < \epsilon + f(x).$$

Así, tenemos que

$$a - \epsilon < l < \epsilon + b, \forall \epsilon > 0.$$

Entonces,  $a \leq l \leq b$ .<sup>2</sup>

□

**Teorema 3.6** (Regla del bocado). Si  $f, g, h : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A'$ . Si  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  y  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$ , entonces,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ .

<sup>2</sup>Esta demostración se puede hacer también utilizando la caracterización del límite por convergencia de sucesiones.

*Demostración.* Sea  $\epsilon > 0$ , buscamos un  $\delta > 0$  tal que si  $x \in A$  y  $0 < |x - x_0| < \delta$ , entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ . Por hipótesis, sabemos que existe  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |x - x_0| < \delta$  con  $x \in A$ ,

$$|g(x) - l| < \epsilon \quad \text{y} \quad |h(x) - l| < \epsilon.$$

Así, tenemos que

$$l - \epsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < l + \epsilon.$$

Así, tenemos que  $|f(x) - l| < \epsilon$ . □

**Ejemplo 3.15.** Vamos a ver  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ . Geométricamente podemos ver que

$$\sin x \leq x \leq \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Como estamos viendo el intervalo  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Entonces, podemos hacer

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

Como  $1 \rightarrow 1$  y  $\frac{1}{\cos x} \rightarrow 1$ , tenemos que  $\frac{x}{\sin x} \rightarrow 1$  por la regla del bocado.

**Ejemplo 3.16. (i)** Sea  $A = (0, 1) \cup (1, \infty)$  y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x(x-1)^2}$ . Tenemos

que  $A' = [0, \infty)$ . Si  $x = 0$ , tenemos que  $x_n = \frac{1}{n} \in A$  y  $x_n \rightarrow 0$ , por lo que  $0 \in A'$ . Hacemos lo mismo con el 1 y la sucesión  $x_n = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$ . Si  $x < 0$ , no existe  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Por lo que  $x \notin A'$ . Vamos a ver que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ . Si  $x > 0$ ,

$$\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2(x+1)}{x(x-1)^2} = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}.$$

Queremos ver que  $\forall C > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $0 < |x - 0| < \delta$ ,  $x \in A$ , entonces  $f(x) > C$ . Tenemos que conseguir que

$$1 + \frac{1}{x} > C \iff \frac{1}{x} > C - 1.$$

Entonces, tomamos  $\delta = \min \left\{ \frac{1}{|C-1|}, 1 \right\}$ , así, si  $0 < x < \delta$ , entonces  $1 + \frac{1}{x} = f(x) > C$ .

Ahora demostramos que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ . Tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} 1 + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1 + 1 = 2.$$

Ahora demostramos que  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - x^2 - x + 1)}{\lim_{x \rightarrow 2} x(x-1)^2} = \frac{3}{2}.$$

Finalmente, demostramos que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ . Tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 1 + 0 = 1.$$

(ii) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ , y  $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l$ . Vamos a demostrar que  $l = 0$  y  $\forall c \in \mathbb{R}$ ,  $\exists \lim_{x \rightarrow c} f(x)$ .

Tenemos que  $0 = x + (-x)$ , por lo que  $f(0) = f(x) + f(-x)$ . Tenemos que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l$ . Ahora queremos ver que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(-x) = l$ . Sabemos que  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $0 < |x - 0| < \delta$ , entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ . Queremos ver que  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $0 < |x - 0| < \delta$ , entonces  $|f(-x) - l| < \epsilon$ . Tenemos que si  $0 < |x - 0| < \delta$ , entonces  $0 < |-x - 0| < \delta$ . Por tanto, tenemos que  $f(-x) \rightarrow l$  y  $f(0) = f(x) + f(-x) = 2l$ <sup>3</sup>. Tenemos que

$$x = 0 + x \Rightarrow f(x+0) = f(x) + f(0) = f(x) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow l = 0.$$

Ahora vamos a ver que  $\forall c \in \mathbb{R}$ ,  $\exists \lim_{x \rightarrow c} f(x)$ .

$$f(x) = f(x - c + c) = f(x - c) + f(c).$$

Vamos a ver que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x - c) = 0$ . Sea  $x - c = y$ . Entonces,  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $0 < |y| < \delta$ , tenemos que  $|f(y)| < \epsilon$ . Así,

$$f(x) = f(x - c + c) = f(x - c) + f(c) \rightarrow f(c).$$

Demostremos que  $f$  es lineal. Tenemos que

$$f(x) = f\left(\frac{x}{n} + \cdots + \frac{x}{n}\right) = nf\left(\frac{x}{n}\right).$$

Similarmente,

$$f(nx) = f(x + \cdots + x) = nf(x).$$

Así,

$$f\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q}f(x) \Rightarrow f(\lambda x) = \lambda f(x), \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Este último paso se demuestra por continuidad y con sucesiones de racionales que tiendan a números reales (como la parte de exponentes reales). Ahora, podemos ver que  $f$  es lineal. Para que sea lineal, tenemos que  $f(x) = cx$ . Esto es fácil, pues tenemos que  $f(1) = c$ .

(iii) Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c \in A'$  y supongamos que  $\exists \lim_{x \rightarrow c} f(x) = l > 0$ . Entonces,  $\exists \delta > 0$  tal que  $\forall x \in (c - \delta, c + \delta) \cap A$ ,  $f(x) > 0$ .

Sabemos que  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $0 < |x - c| < \delta$ ,  $x \in A$ , entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ .

Tomamos  $\epsilon = \frac{l}{2}$ , tal que  $l - \epsilon = \frac{l}{2} > 0$ . Entonces  $\exists \delta > 0$  tal que si  $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap A$ , con  $x \neq c$ , entonces:

$$|f(x) - l| < \epsilon \iff -\frac{l}{2} < f(x) - l < \frac{l}{2} \Rightarrow 0 < \frac{l}{2} < f(x).$$

<sup>3</sup>Tenemos que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} f(-x)$ . Como  $f(0)$  es una constante, tenemos que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(0) = f(0)$ .

- (iv) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Vamos a ver si  $\exists \epsilon > 0$ ,  $\forall \delta > 0$ ,  $|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon$ .  
Sea  $x \in \mathbb{R}$  y sea  $\delta = 2|x - c| + 1 > 0$ . Entonces

$$|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon \iff f(c) - \epsilon < f(x) < f(c) + \epsilon.$$

- (v) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . El enunciado  $\forall \delta > 0$ ,  $\exists \epsilon > 0$  tal que si  $0 < |x - c| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \delta$  es equivalente a decir que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ .

- (vi) (a)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

- (b)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

**Definición 3.7** (Límites laterales). Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , y sea  $c$  un punto de acumulación de  $A \cap (c, \infty)$ . Sea  $l \in \mathbb{R}$ . Se dice que  $l$  es el **límite por la derecha** de  $f$  en  $c$ :

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l,$$

si  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $0 < x - c < \delta$  con  $x \in A$ , entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ .

Análogamente, si  $c$  es un punto de acumulación de  $A \cap (-\infty, c)$ . Decimos que

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l,$$

si  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $0 < c - x < \delta$ ,  $x \in A$ , entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ .

**Definición 3.8.** Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $c \in (A \cap (c, \infty))'$ .

- $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty$  si  $\forall C > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $0 < x - c < \delta$ , con  $x \in A$ , entonces  $f(x) > C$ .
- $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$  si  $\forall C < 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $0 < x - c < \delta$  con  $x \in A$ , entonces  $f(x) < C$ .

Ahora consideramos  $c \in (A \cap (-\infty, c))'$ .

- $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \infty$  si  $\forall C > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $0 < c - x < \delta$  con  $x \in A$ , entonces  $f(x) > C$ .
- $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$  si  $\forall C < 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $0 < c - x < \delta$  con  $x \in A$ , entonces  $f(x) < C$ .

**Ejemplo 3.17.** En el ejemplo anterior, tenemos que si  $f(x) = \frac{1}{x}$  con  $x \in \mathbb{R}/\{0\}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty.$$

**Teorema 3.7.** Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $c \in (A \cap (c, \infty))' \cap (A \cap (-\infty, c))'$ . Entonces  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$  si y solo si

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l.$$

*Demostración.* (i) Sabemos que  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $0 < |x - c| < \delta$  con  $x \in A$ , entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ . Vamos a ver que  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $0 < x - c < \delta$ , entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ . Es trivial, pues basta tomar el mismo  $\delta$  de la definición de límite. El análogo para el límite por la izquierda es también trivial.

(ii) Dado  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta_1 > 0$  tal que si  $0 < x - c < \delta_1$ ,  $x \in A$ , entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ . Similarmente,  $\exists \delta_2 > 0$  tal que si  $0 < c - x < \delta_2$ , con  $x \in A$ , entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ . Sea  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$  y tengo que  $0 < |x - c| < \delta$ , con  $x \in A$ . Si  $x > c$ ,

$$0 < x - c < \delta \leq \delta_1, \quad x \in A \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

Si  $x < c$ ,

$$0 < c - x < \delta \leq \delta_2, \quad x \in A \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

□

**Ejemplo 3.18.** Sea  $f(x) = \text{sig}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1.$$

Por tanto, no existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

**Ejemplo 3.19.**  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Sea  $f(x) = x + 1$  y

$$g(x) = \begin{cases} 2, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}.$$

(a) Calcular  $(g \circ f)(x)$  y  $g\left(\lim_{x \rightarrow 1} f(x)\right)$ .

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

Tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 1} (g \circ f)(x) = 2.$$

Ahora, tenemos que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ , entonces

$$g\left(\lim_{x \rightarrow 1} f(x)\right) = g(2) = 2.$$

(b) Calcular  $(f \circ g)(x)$  y  $f\left(\lim_{x \rightarrow 1} g(x)\right)$ .

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 3, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

Tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (f \circ g)(x) = 3.$$

Ahora, tenemos que  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$ , entonces

$$f\left(\lim_{x \rightarrow 1} g(x)\right) = f(2) = 3.$$

**Ejemplo 3.20.** Consideremos el enunciado  $\forall \epsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0$  tal que  $|x_n - l| < \epsilon$ . Vamos a ver si este enunciado es equivalente a que exista  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $x_{n_k} \rightarrow l$ .

(i) Sea  $\epsilon = 1$ . Sea  $n_0 = 1$ , entonces  $\exists n_1 \geq 1$  tal que  $|x_{n_1} - l| < \epsilon = 1$ . Sea  $\epsilon = \frac{1}{2}$  y  $n_0 = n_1 + 1$ . Entonces,  $\exists n_2 \geq n_0 > n_1$  tal que  $|x_{n_2} - l| < \frac{1}{2}$ . Si tenemos  $x_{n_1}, \dots, x_{n_k}$  estrictamente creciente, tal que  $|x_{n_j} - l| < \frac{1}{j}$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Ahora, sea  $\epsilon = \frac{1}{k+1}$  y  $n_0 = n_k + 1$ . Entonces,  $\exists n_{k+1} \geq n_0 > n_k$  tal que  $|x_{n_{k+1}} - l| < \frac{1}{k+1}$ . Por tanto, construimos  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que

$$|x_{n_k} - l| < \frac{1}{k}, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = l.$$

(ii) Tenemos que  $\forall \epsilon > 0, \exists n'_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n_k \geq n'_0$ ,  $|x_{n_k} - l| < \epsilon$ . Dado  $\epsilon > 0$  y dado  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tenemos que ver que  $\exists n \geq n_0$  tal que  $|x_n - l| < \epsilon$ . Sea  $n_k \geq \max\{n_0, n'_0\}$ , entonces

$$|x_{n_k} - l| < \epsilon, \quad n_k \geq n_0.$$

**Ejemplo 3.21.** Vamos a demostrar que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ . Sabemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ . Dado  $x \in \mathbb{R}$  con  $x \geq 1$ , entonces existen  $n_x = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$  y  $\alpha_x \in [0, \infty)$  tal que  $x = n_x + \alpha_x$ . Tenemos que  $\lim_{x \rightarrow \infty} n_x = \infty$ . Entonces, tenemos que

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 + \frac{1}{n_x + \alpha_x}\right)^{n_x + \alpha_x} = \left(1 + \frac{1}{n_x + \alpha_x}\right)^{n_x} \left(1 + \frac{1}{n_x + \alpha_x}\right)^{\alpha_x}.$$

Vamos a ver que  $\left(1 + \frac{1}{n_x + \alpha_x}\right)^{\alpha_x} \rightarrow 1$ . Tenemos que

$$1 \leq \left(1 + \frac{1}{n_x + \alpha_x}\right)^{\alpha_x} \leq \underbrace{1 + \frac{1}{n_x + \alpha_x}}_{\rightarrow 1}.$$

Ahora vamos a ver que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_x + \alpha_x}\right)^{n_x} = e$ . Tenemos que

$$\left(1 + \frac{1}{n_x + 1}\right)^{n_x} \leq \left(1 + \frac{1}{n_x + \alpha_x}\right)^{n_x} \leq \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n_x}\right)^{n_x}}_{\rightarrow e}.$$

El término de la izquierda lo cogemos y lo multiplicamos y dividimos por  $\left(1 + \frac{1}{n_x + 1}\right) \rightarrow 1$ . Así,

$$\left(1 + \frac{1}{n_x + 1}\right)^{n_x} = \left(1 + \frac{1}{n_x + 1}\right)^{n_x + 1} \left(1 + \frac{1}{n_x + 1}\right)^{-1} \rightarrow e.$$

Así,  $\left(1 + \frac{1}{n_x + \alpha_x}\right)^{n_x} \rightarrow e$ , por lo que el límite original converge a  $e$ .

**Ejemplo 3.22.** Si  $g(x) \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow \infty$  y  $f(x) \rightarrow l$  si  $x \rightarrow \infty$ , entonces  $(f \circ g)(x) \rightarrow l$ . Sabemos que  $\forall C > 0$ ,  $\exists K > 0$  tal que  $\forall x > K$ ,  $g(x) > C$ . Similarmente, tenemos que  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists K > 0$  tal que si  $x > K$  entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ . Sea  $\epsilon > 0$ , existe  $K > 0$  tal que cumpla los requisitos de la convergencia de  $f$ . Ahora, puedo encontrar  $K' > 0$  tal que si  $x > K'$ , entonces  $g(x) > K$ . Así,  $|f(g(x)) - l| < \epsilon$ .

**Corolario 3.1.** Sea  $g(x) \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . Tenemos que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)} = e$ .

**Teorema 3.8.** Sea  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(a, \infty) \subset A$ . Supongamos que  $g(x) \neq 0$ ,  $\forall x > a$  y existe  $L \in \mathbb{R}$ ,  $L \neq 0$  tal que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ . Entonces

- Si  $L > 0$ : si  $x \rightarrow \infty$ ,  $f(x) \rightarrow \infty \iff g(x) \rightarrow \infty$ .
- Si  $L < 0$ : si  $x \rightarrow \infty$ ,  $f(x) \rightarrow \pm\infty \iff g(x) \rightarrow \mp\infty$ .

*Demostración.* Supongamos que  $L > 0$  y que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ . Queremos ver que  $\forall C > 0$ ,  $\exists K > 0$  tal que si  $x > K$  entonces  $f(x) > C$ . Sabemos que  $\forall C' > 0$ ,  $\exists K' > 0$  tal que si  $x > K'$  entonces  $f(x) > C'$ . Similarmente,  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists K'' > 0$  tal que si  $x > K''$  entonces  $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \epsilon$ . Entonces,

cogemos  $\epsilon = \frac{L}{2}$ ,

$$\frac{L}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}Lg(x).$$

Sea  $C' = \frac{3CL}{2} > 0$ , entonces existe  $K' > 0$  tal que si  $x > K$ , entonces  $f(x) > C$ . Sea  $K = \max\{K', K''\}$ , entonces si  $x > K$

$$g(x) > \frac{2C'}{3L} = C.$$

□



**Ejemplo 3.23.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 + x + 1)$ . Tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + 1}{x^2} = 3 > 0.$$

Como  $x^2 \rightarrow \infty$ , tenemos que  $3x^2 + x + 1 \rightarrow \infty$ .

**Ejemplo 3.24.** Demostrar que existe  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\exists \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  y no existe  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ . Consideremos

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \in (-1, 0) \\ 0, & x \in [0, 1) \end{cases}.$$

Tenemos que el límite por la izquierda no existe pues podemos coger dos subsucesiones convergentes a 0 cuyas imágenes converjan a cosas distintas. Por ejemplo,

$$x_n = \frac{-1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad f(x_n) = 1 \rightarrow 1.$$

$$y_n = \frac{-1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad f(y_n) = -1 \rightarrow -1.$$

**Ejemplo 3.25.** Sea  $x_n > 0$  con  $x_n \rightarrow 0$ . Esta sucesión no tiene por qué ser decreciente pues puede dar saltitos. Considera la sucesión

$$x_n = \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \dots$$

**Proposición 3.1.** Tenemos que  $x_n \rightarrow l$  si y solo si la subsucesión de los pares y la de los impares convergen al mismo límite.

*Demostración.* (i) La primera implicación es trivial, pues si  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$  cualquier subsucesión converge al mismo límite.

(ii) Sea  $\epsilon > 0$ , entonces existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_1$ ,  $|x_{2n} - l| < \epsilon$ . Similarmente, existe  $n_2 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_2$ ,  $|x_{2n-1} - l| < \epsilon$ . Sea  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ . Si  $n \geq n_0$ ,

$$\begin{aligned} |x_{2n} - l| &< \epsilon \\ |x_{2n-1} - l| &< \epsilon. \end{aligned}$$

Entonces,  $x_n \rightarrow l$ .

□

**Observación 3.2.** Este criterio se puede extender a cualquier partición de  $\mathbb{N}$ .

**Ejemplo 3.26.** Calcular  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{2^j}$ . Aplicando el criterio del cociente

$$\frac{j+1}{2^{n+1}} \frac{2^n}{j} \rightarrow \frac{1}{2} < 1.$$

Por lo que converge. Tenemos que

$$\sum_{j=1}^n \frac{j}{2^j} = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^j 1 \right) \frac{1}{2^j} = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=k}^n \frac{1}{2^j} \right) = \sum_{k=1}^n 2 \left( \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} - 2 \frac{n}{2^{n+1}} \rightarrow 2.$$

## Capítulo 4

# Funciones continuas

**Definición 4.1** (Continuidad). Dada  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , y  $c \in \text{dom}(f)$ , se dice que  $f$  es **continua** en  $c$  si se verifican los siguientes enunciados equivalentes:

- $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que si  $0 \leq |x - c| < \delta$ , entonces  $|f(x) - f(c)| < \epsilon$ .
- $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  con  $x_n \rightarrow c$  se tiene que  $f(x_n) \rightarrow f(c)$ .

1

**Observación 4.1.** Si  $c \in \text{dom}(f)$  es un punto de acumulación, la definición de continuidad es equivalente a que

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

Si  $c \in \text{dom}(f)$  no fuera un punto de acumulación, entonces resulta trivial que  $f$  es continua en  $c$ .

**Observación 4.2.** Vamos a asumir que si  $a \in \text{dom}(f)$  y  $f$  es continua en  $a$ , existe  $r > 0$  tal que  $(a - r, a + r) \subset \text{dom}(f)$ .

La continuidad es una propiedad local de las funciones, es decir, se debe comprobar punto a punto.

**Definición 4.2.** Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $B \subset A$ . Se dice que  $f$  es continua en  $B$  si es continua en todos los puntos de  $B$ .

**Ejemplo 4.1.** ■ La función constante  $f(x) = a$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ . Pues, cogemos  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ , se tiene que  $|f(x) - f(y)| = |a - a| = 0 < \epsilon, \forall \epsilon > 0$ .

- La función identidad  $f(x) = x$  también es continua en todo  $\mathbb{R}$ . En efecto, si tomamos  $\delta = \epsilon$ , tenemos que si  $|x - c| < \delta$ ,  $|f(x) - f(c)| = |x - c| < \epsilon$ .

---

<sup>1</sup>La equivalencia de estas definiciones fue demostrada en el capítulo anterior.

**Proposición 4.1.** Sea  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $a \in \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$ , siendo  $f$  y  $g$  continuas en  $a$ . Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- (i)  $f + g$  es continua en  $a$ .
- (ii)  $\lambda f$  es continua en  $a$ .
- (iii)  $f \cdot g$  es continua en  $a$ .
- (iv) Si  $g(a) \neq 0$ ,  $\frac{f}{g}$  es continua en  $a$ .

*Demostración.* (i) Tenemos que  $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a)$ .

(ii)-(iv) El resto de demostraciones son análogas. □

**Ejemplo 4.2.** ■ Por estas reglas podemos deducir que las funciones polinómicas, es decir, funciones de la forma  $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ , son continuas en todo  $\mathbb{R}$ .

■ Las funciones racionales, es decir, de la forma

$$h(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m},$$

son continuas en los puntos donde  $Q(x) \neq 0$ .

**Teorema 4.1.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\text{Im}(f) \subset \text{dom}(g)$  y tal que  $f$  es continua en  $a$  y  $g$  es continua en  $f(a) \in \text{Im}(f) \subset \text{dom}(g)$ . Entonces, tenemos que  $g \circ f$  es continua en  $a$ . <sup>a</sup>.

<sup>a</sup>El límite de una composición de funciones no tiene por qué ser las composiciones de los límites

*Demostración.* Dado que  $g$  es continua, sea  $\epsilon > 0$  y  $\delta_1 > 0$  tal que si  $|y - f(a)| < \delta_1$  tenemos que  $|g(y) - g(f(a))| < \epsilon$ . Como  $f$  es continua en  $a$  tenemos que  $\exists \delta_2 > 0$  tal que si  $|x - a| < \delta_2$ , entonces  $|f(x) - f(a)| < \delta_1$ . □

**Teorema 4.2.** Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  continua e inyectiva en  $(a, b)$ . Si  $x_0 \in (a, b)$ , entonces  $f^{-1} : \text{Im}(f) \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $f(x_0)$ .

*Demostración.* Se verá el miércoles. □

**Ejemplo 4.3.** Consideremos  $f(x) = x^2$  con  $x > 0$ . Tenemos que  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$  con  $x > 0$ . Así, concluimos que  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$  es continua en todo  $x > 0$ .

**Ejemplo 4.4.** Consideremos  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ . Tenemos que  $f$  es continua en su dominio pues es composición de dos funciones continuas.

**Ejemplo 4.5.** Otras funciones continuas son  $\sin x, \cos x, \tan x, e^x$  y  $\ln x$ .

## 4.1. Discontinuidad de funciones

**Definición 4.3.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- (a) Se dice que  $f$  tiene una **discontinuidad evitable** en  $a$  si  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  y  $l \neq f(a)$ .
- (b) Se dice que  $f$  tiene una **discontinuidad de salto** en  $a$  si  $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  y  $\exists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  pero no coinciden.
- (c) Se dice que  $f$  tiene una **discontinuidad esencial** en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$  o no existe, o  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$  o no existe.

**Ejemplo 4.6.** Consideremos la función  $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ . Tenemos que  $\text{dom}(f) = \mathbb{R}/\{-1, 1\}$ . Al ser racional, tenemos que  $f$  es continua en  $\text{dom}(f)$ . A continuación, estudiamos los límites y las discontinuidades.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{2}.$$

Como existe el límite pero la función no está definida en  $x = 1$ , tenemos que la función presenta una discontinuidad evitable en  $x = 1$ . Estudiamos el límite en  $x = -1$ :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} = \infty.$$

Por tanto, en  $x = -1$  tenemos una discontinuidad esencial. Podemos estudiar también los límites en el infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+1} = 0.$$

**Definición 4.4** (Asíntotas). Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- (a) Se dice que  $f$  tiene una **asíntota vertical** en  $a \in \mathbb{R}$  si  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$  o  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ .
- (b) Se dice que  $f$  tiene una **asíntota horizontal** en si  $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$  o  $\exists \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m \in \mathbb{R}$ .
- (c) Se dice que  $y = ax + b$  es una **asíntota oblicua** de  $f$  si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - (ax + b) = 0$  o bien si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ .

**Observación 4.3.** En el ejemplo anterior, tenemos que  $f$  tiene una asíntota vertical en  $x = -1$  y que  $y = 0$  es una asíntota horizontal.

**Observación 4.4.** La definición (c) es equivalente a que  $\exists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$  y  $\exists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - ax = b$ . En efecto, tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \frac{f(x)}{x} - a \right).$$

Debe darse, necesariamente que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - a = 0$ . Así, tenemos que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ . Además, está claro que  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$ .

**Teorema 4.3** (Teorema de Bolzano). Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en el intervalo  $[a, b]$ <sup>a</sup>. Si  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ .

<sup>a</sup>Es continua en  $[a, b]$  si  $\forall c \in (a, b)$ ,  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$  y  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$  y  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ .

*Demostración.* **Ejercicio para casa:** Demostrar el caso  $f(a) > 0 > f(b)$ . **Puede entrar en el examen.**

Sin pérdida de generalidad, asumimos que  $f(a) < 0 < f(b)$ . Definimos el conjunto

$$A = \{r \in [a, b] : \forall x \in [a, r], f(x) < 0\} \neq \emptyset.$$

Tenemos que  $A \neq \emptyset$  puesto que  $a \in A$ . Tenemos que  $b \notin A$ , pues  $f(b) > 0$  y  $r \leq b$ ,  $\forall r \in A$ . Por el axioma de completitud, tenemos que  $\exists c = \sup(A)$ . Podemos observar que  $a \leq c \leq b$ . Vamos a ver que  $f(c) = 0$ .

- Si  $f(c) < 0$ , tenemos que existe  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, tal que  $f(c) + \epsilon < 0$ . Dado que  $f$  es continua en  $[a, b]$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $|x - c| < \delta$ ,  $|f(x) - f(c)| < \epsilon$ . De aquí se deduce que

$$|f(x) - f(c)| < \epsilon \iff f(x) < f(c) + \epsilon < 0.$$

Así,  $\exists r = c + \frac{\delta}{2}$  tal que si  $x \in \left[a, c + \frac{\delta}{2}\right]$ , entonces  $f(x) < 0$ . Es decir,  $r \in A$ , pero  $r > c$ , por lo que hemos obtenido una contradicción.

- Si  $f(c) > 0$ , tenemos que existe  $\epsilon > 0$  tal que  $f(c) - \epsilon > 0$ . Dado que  $f$  es continua en  $[a, b]$ , tenemos que  $\exists \delta > 0$  tal que si  $|x - c| < \delta$  entonces  $|f(x) - f(c)| < \epsilon$ . De aquí se deduce que

$$|f(x) - f(c)| < \epsilon \iff f(x) > f(c) - \epsilon > 0.$$

Ya hemos obtenido la contradicción, pues se supone que, dado que  $c = \sup(A)$ ,  $\forall \delta > 0$ ,  $\exists a \in A$  tal que  $c - \epsilon < a$ . Si embargo, hemos obtenido que para el  $\delta$  anterior, si  $x \in (c - \delta, c + \delta)$ , entonces  $f(x) > 0$ , por lo que  $x \notin A$ .

Por tanto, debe ser que  $f(c) = 0$ . □

*Demostración.* Asumimos que  $f(a) < 0 < f(b)$ . Sea  $a_0 = a$  y  $b_0 = b$ . Ahora, consideremos el punto medio  $r = \frac{a_0 + b_0}{2}$ . Tenemos dos posibilidades.

- Si  $f(r) \geq 0$ , tomamos  $a_1 = a_0$  y  $b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ .
- Si  $f(r) < 0$ , tomamos  $a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$  y  $b_1 = b_0$ .

Así, en cualquier caso obtenemos que  $a_1 < b_1$ ,  $f(a_1) < 0 \leq f(b_1)$  y que  $b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$ . Repetimos el proceso tomando  $r = \frac{a_1 + b_1}{2}$ . Si seguimos repitiendo el proceso obtenemos dos sucesiones:  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Así, para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que

$$a_n < b_n, \quad f(a_n) < 0 \leq f(b_n), \quad b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \dots = \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

Por construcción, tenemos que  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es creciente, por lo que existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ . Similarmente,  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es decreciente, por lo que existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ . Además, como  $a_n < b_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos que  $\alpha \leq \beta$  y

$$\beta - \alpha \leq b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \rightarrow 0.$$

Así,  $\alpha = \beta = c \in (a, b)$ . Dado que  $f$  es continua en  $[a, b]$ , tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(c) \leq 0$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(c) \geq 0$ , por lo que  $f(c) = 0$ .  $\square$

**Ejemplo 4.7.** Consideremos la ecuación

$$\frac{x^{15} + 7x^2 - 12 - x^2 \ln x}{\ln x} = 0 \Rightarrow x^{15} + 7x^2 - 12 - x^2 \ln x = 0.$$

Tenemos que  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x = 0$ . Además,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ . Es continua en el resto de los puntos. Por el teorema de Bolzano, la ecuación tiene al menos una solución.

**Corolario 4.1** (Teorema de la conexión). Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y sea  $f(a) < \lambda < f(b)$  (o  $f(a) > \lambda > f(b)$ ) entonces,  $\exists c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = \lambda$ .

*Demostración.* Sea  $f(a) < \lambda < f(b)$  (el otro caso se deja como **ejercicio**) y  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(x) = f(x) - \lambda$ . Tenemos que  $g(a) = f(a) - \lambda < 0$  y  $g(b) = f(b) - \lambda > 0$ . Aplicando el teorema de Bolzano, tenemos que  $\exists c \in (a, b)$  tal que  $g(c) = f(c) - \lambda = 0$ , esto es,  $f(c) = \lambda$ .  $\square$

**Ejemplo 4.8.** Consideremos la función

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} = \begin{cases} > 0, & x > -1, x \neq 1 \\ < 0, & x < -1 \end{cases}.$$

**Observación 4.5.** El teorema de la conexión, nos dice que cuando pintamos una función continua no va a haber saltos.

## 4.2. Propiedades de las funciones continuas

**Definición 4.5.** Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- (a) Se dice que  $f$  se dice **acotada** en  $A$  si  $\exists M > 0$  tal que  $|f(x)| < M$ ,  $\forall x \in A$ .
- (b) Se dice que  $x_0 \in A$  es un **máximo** de  $f$  si  $f(x_0) \geq f(x)$ ,  $\forall x \in A$ .
- (c) Se dice que  $x_0 \in A$  es un **mínimo** de  $f$  si  $f(x_0) \leq f(x)$ ,  $\forall x \in A$ .

**Ejemplo 4.9.** Consideremos la función  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Tenemos que  $\text{dom}(f) = (0, \infty)$  y  $f$  es continua en su dominio. Tenemos que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ . Además, se ve que  $f$  es decreciente. Esta función no está acotada superiormente, por lo que no tiene máximo. A pesar de estar acotada inferiormente, no tiene mínimo.

**Teorema 4.4.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[a, b]$ .

- (a)  $f$  está acotada.
- (b)  $f$  tiene al menos un máximo.
- (c)  $f$  tiene al menos un mínimo.

*Demostración.* (a) Supongamos que  $f$  no está acotada superiormente. Tenemos que  $\forall N \in \mathbb{N}$ ,  $\exists a_n \in [a, b]$  tal que  $f(a_n) > N$ . Cogemos la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [a, b]$ . Entonces, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, existe  $\{a_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergente a  $l \in [a, b]$ . Dado que  $f$  es continua en el intervalo  $[a, b]$ , tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_{n_j}) = f(l)$  pero a la vez  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_{n_j}) = \infty$ .

(b) Se hace de forma análoga a (c).

(c) Por (a),  $f$  está acotada. Consideramos el conjunto  $A = \{f(x) : x \in [a, b]\} \neq \emptyset$ , que está acotado por  $M > 0$ . Entonces, existe  $\beta = \inf(A)$ . Si  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos que  $\beta + \frac{1}{n}$  no es ínfimo, por lo que existe  $a_n \in [a, b]$  tal que  $\beta \leq f(a_n) < \beta + \frac{1}{n}$ . Así, por el teorema de Bolzano-Weierstrass,  $\exists \{a_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \rightarrow \alpha \in [a, b]$  y, por continuidad,

$$\beta \leq f(a_{n_j}) < \beta + \frac{1}{n_j} \Rightarrow \beta \leq f(\alpha) \leq \beta \Rightarrow f(\alpha) = \beta.$$

Así,  $\alpha$  es el mínimo que buscábamos.

□

**Definición 4.6** (Monotonía). (a) Se dice que  $f$  es **monótona creciente** si  $\forall x < y$ ,  $f(x) \leq f(y)$ . Se dice que es **estrictamente creciente** si  $f(x) < f(y)$ .



(b) Se dice que  $f$  es **monótona decreciente** si  $\forall x < y, f(x) \geq f(y)$ . Se dice que es **estrictamente decreciente** si  $f(x) > f(y)$ .

**Observación 4.6.** Si  $f$  es estrictamente monótona, entonces es inyectiva. En efecto, si  $x \neq y$ ,

$$\begin{aligned} x < y &\Rightarrow f(x) < f(y) \text{ o } f(x) > f(y) \\ x > y &\Rightarrow f(x) > f(y) \text{ o } f(x) < f(y) \end{aligned}$$

**Lema 4.1.** Si  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  es continua e inyectiva, entonces es monótona.

*Demostración.* Supongamos que no es monótona. Entonces, para  $x_1 < x_2 < x_3$  debe ocurrir una de las siguientes opciones:

- $f(x_1) < f(x_2)$  y  $f(x_3) < f(x_1)$ .
- $f(x_1) > f(x_2)$  y  $f(x_3) > f(x_2)$ .

En cualquier caso, si  $\lambda \in (\min\{f(x_1), f(x_2), f(x_3)\}, \max\{f(x_1), f(x_2), f(x_3)\})$ , por el teorema de la conexión, existe más de un punto  $x \in (x_1, x_2)$  tal que  $f(x) = \lambda$ .  $\square$

**Teorema 4.5** (Teorema de la función inversa). Sea una función  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  definida sobre todo un intervalo, inyectiva y continua en  $(a, b)$ . Su función inversa  $f^{-1}$  es continua en todo su dominio.

*Demostración.* Sea  $c \in (a, b)$  y consideremos  $f(c) \in \text{dom}(f^{-1})$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Podemos encontrar  $r > 0$  tal que

$$c - \epsilon < c - r < c < c + r < c + \epsilon \text{ y } (c - r, c + r) \subset (a, b).$$

Entonces, de la continuidad de  $f$  y por ser inyectiva tenemos que

$$f(c - r) < f(c) < f(c + r) \text{ o } f(c - r) > f(c) > f(c + r).$$

Consideremos el primer caso (el otro caso se demuestra de forma análoga). Cogemos

$$\delta = \min\{f(c) - f(c - r), f(c + r) - f(c)\} > 0.$$

Entonces, tenemos que si  $|y - f(c)| < \delta$ , existe  $x \in (c - r, c + r)$  tal que  $f(x) = y$ . Luego, por ser  $f^{-1}$  inyectiva, si  $|y - f(c)| < \delta$ , tenemos que

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(f(c))| = |x - c| < r < \epsilon.$$

$\square$

### 4.3. Continuidad Uniforme

**Definición 4.7** (Continuidad uniforme). Sea una función  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Se dice que  $f$  es **uniformemente continua** en el conjunto  $A$  si  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que si  $x, y \in A$  y  $|x - y| < \delta$ , entonces  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ .

**Observación 4.7.** ■ La continuidad uniforme se define sobre todo un conjunto, no es una propiedad local como la continuidad.

- Si  $f$  es uniformemente continua en  $I$  (intervalo o semirrecta), entonces  $f$  es continua en cada punto de  $I$ .

**Ejemplo 4.10.** Consideremos la función  $f = \frac{1}{x}$ ,  $x \in (0, 1)$ . Tenemos que  $f$  es continua en cada punto de  $(0, 1)$ , pero no es uniformemente continua en el intervalo. En efecto, sea  $\epsilon = \frac{1}{2}$  y sea  $\delta > 0$ . Sea  $x_n = \frac{1}{n}$  y sean  $n, m \in \mathbb{N}$  suficientemente grandes y distintas. Entonces, tenemos que

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| < \delta.$$

Sin embargo,  $\left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{m}\right) \right| = |n - m| \geq 1 > \epsilon = \frac{1}{2}$ .

**Ejemplo 4.11.** Consideremos la función  $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(x) = x^2$ . Sea  $\delta > 0$ . Tenemos que

$$|f(x) - f(x + \delta)| = |x^2 - (x^2 + 2\delta x + \delta^2)| \geq 2x\delta \rightarrow \infty.$$

Así,  $x^2$  no puede ser uniformemente continua en el intervalo  $(1, \infty)$ .

**Teorema 4.6.** Sea una función  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , continua en el intervalo  $[a, b]$ . Entonces,  $f$  es uniformemente continua sobre  $[a, b]$ .

*Demostración.* Supongamos que  $f$  no es uniformemente continua. Entonces, podemos encontrar un  $\epsilon > 0$  tal que para todo  $\frac{1}{n}$  existen  $x_n, y_n \in [a, b]$  tales que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon.$$

Por el teorema de Bolzano-Weierstrass podemos encontrar dos subsucesiones (primero una y de ésta sacamos la segunda) de modo que  $x_{n_k} \rightarrow x$  y  $y_{n_k} \rightarrow y$ . Así, está claro que  $x_{n_k} \rightarrow x$  y que  $x, y \in [a, b]$ . También tenemos que  $x = y$ , pues

$$0 \leq |x - y| \leq |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - y_{n_k}| + |y_{n_k} - y| \leq |x - x_{n_k}| + \frac{1}{n_k} + |y_{n_k} - y| \rightarrow 0.$$

Ahora, de la continuidad de  $f$  se tiene que  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$  y  $f(y_{n_k}) \rightarrow f(y) = f(x)$ . Esto da una contradicción, pues también tenemos que,  $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| < \epsilon$ . Esto es una contradicción.  $\square$

**Teorema 4.7.** Sea  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $I$  es un intervalo o semirrecta y  $f$  es monótona en  $I$  y está acotada. Entonces, para cada  $x_0 \in I$  existen  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ .

*Demostración.* Supongamos que  $f$  es creciente (el caso decreciente se hace de forma análoga). Salvo en los extremos del intervalo, donde existen únicamente los límites laterales y donde se usa la acotación de  $f$ . Sea  $x_0 \in I$  tal que existe  $\delta > 0$  con  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$ . Sea  $A = \{f(x) : x \in (x_0 - \delta, x_0)\}$ . Dado que  $f$  es monótona creciente, tenemos que

$$f(x) \leq f(x_0 + \delta), \forall x \in (x_0 - \delta, x_0).$$

Sea  $B = \{f(x) : x \in (x_0, x_0 + \delta)\}$ . Así, tenemos que

$$f(x_0 - \delta) \leq f(x), \forall x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

Entonces, por el axioma del supremo, tenemos que existe  $\alpha = \sup(A)$  y  $\beta = \inf(B)$ . En concreto, tenemos que  $\alpha = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  y  $\beta = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ . En efecto, si  $\epsilon > 0$ , existe  $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0)$  tal que  $\alpha - \epsilon < f(x_1) \leq \alpha$ . Sea  $r = |x_0 - x_1| > 0$ . Si  $0 < x - x_0 < r$ , entonces,  $\alpha - \epsilon < f(x_1) < f(x) < \alpha$ . Así,  $|\alpha - f(x)| < \epsilon$ . Por definición de límite lateral,  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \alpha$ . En los límites del intervalo, solo se considera el conjunto  $A$  o  $B$  y se usa la hipótesis de acotación.  $\square$

**Teorema 4.8.** Sea  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $I$  es un intervalo o semirrecta. Sea  $f$  monótona en  $I$  y sean  $x_1, x_2 \in I$ . Entonces, si  $x_1 < x_2$  y  $f$  es monótona creciente, entonces  $\lim_{x \rightarrow x_1^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_2^-} f(x)$ . Si  $f$  es monótona decreciente, entonces  $\lim_{x \rightarrow x_1^+} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_2^-} f(x)$ .

*Demostración.* Supongamos que  $f$  es creciente (el otro caso se hace de forma análoga). Del teorema anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_1^+} f(x) &= \inf \{f(x) : x \in (x_1, x_1 + \delta)\} = \beta \\ \lim_{x \rightarrow x_2^-} f(x) &= \sup \{f(x) : x \in (x_2 - \delta, x_2)\} = \alpha. \end{aligned}$$

Podemos tomar el mismo  $\delta > 0$  en ambos casos tal que  $(x_1, x_1 + \delta) \cap (x_2 - \delta, x_2) = \emptyset$ . Dado que  $f$  es creciente, si  $y_1 \in (x_1, x_1 + \delta)$  y  $y_2 \in (x_2 - \delta, x_2)$ , por lo que  $y_1 < y_2$ , tenemos que  $f(y_1) \leq f(y_2)$  y, está claro que  $\beta \leq \alpha$ .  $\square$

**Observación 4.8.** De estos dos resultados, podemos concluir que las discontinuidades de las funciones monótonas acotadas son discontinuidades de salto.

**Teorema 4.9.** Si  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $I$  es un intervalo o semirrecta, y  $f$  es monótona, entonces si

$$E = \{x \in I : f \text{ no es continua en } x\},$$

tenemos que  $|E| \leq |\mathbb{N}|$ .

*Demostración.* Si  $f$  es monótona y  $f$  no es continua en  $x$ , debe ser que en  $x$  tiene una discontinuidad de salto. Supongamos que  $f$  es creciente. Sea  $y \in E$ . Por el teorema anterior tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow y^-} f(x) < r_y < \lim_{x \rightarrow y^+} f(x),$$

donde  $r \in \left( \lim_{x \rightarrow y^-} f(x), \lim_{x \rightarrow y^+} f(x) \right) \cap \mathbb{Q}$ . Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} T : E &\rightarrow \mathbb{Q} \\ y &\mapsto T(y) = r_y. \end{aligned}$$

Vamos a ver que  $T$  es inyectiva. Sean  $y_1, y_2 \in E$ , con  $y_1 \neq y_2$  y  $y_1 < y_2$ . Entonces,

$$r_{y_1} < \lim_{x \rightarrow y_1^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow y_2^-} f(x) < r_{y_2}.$$

Así,  $T(y_1) = r_{y_1} \neq r_{y_2} = T(y_2)$ . □

**Ejemplo 4.12.** Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, 1) \cap \mathbb{Q} \\ 1, & x \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Esta función no es continua en ningún punto de  $(0, 1)$ .

## Capítulo 5

# La Derivada

## Apéndice A

# Productos infinitos

Sea  $\{b_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$  y sea  $B_n = \prod_{j=1}^n b_j$ . Se dice que el producto infinito converge si

$$\prod_{j=1}^{\infty} b_j = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = l > 0.$$

**Ejemplo A.1.** (i) Sea  $b_j = \frac{1}{j} > 0$ . Entonces,

$$B_n = \prod_{j=1}^n \frac{1}{j} = \frac{1}{n!} \rightarrow 0.$$

No converge.

(ii) Sea  $b_j = 1 - \frac{1}{j^2}$ ,  $j \geq 2$ . Tenemos que

$$b_j = 1 - \frac{1}{j^2} = \frac{j^2 - 1}{j^2} = \frac{(j+1)(j-1)}{j^2}.$$

Tenemos que,

$$\begin{aligned} B_3 &= \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{2 \cdot 3} \\ B_4 &= \frac{4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} = \frac{5}{2 \cdot 4} \\ &\vdots \\ B_n &= \frac{n+1}{2n} \rightarrow \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(iii) Calcular  $\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{j^2}\right)$ .

**Teorema A.1.** Sea  $b_j = 1 + a_j$ ,  $a_j > 0$ . Entonces,  $\prod_{j=1}^{\infty} b_j$  converge si y solo si  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j < \infty$ . En particular, si  $\prod_{j=1}^{\infty} b_j$  converge, entonces  $b_j \rightarrow 1$ .

*Demostración.* Por continuidad del logaritmo, si  $\log \left( \prod_{j=1}^{\infty} b_j \right)$ , lo de dentro también debe converger. Así, tenemos que

$$\log \left( \prod_{j=1}^n b_j \right) = \sum_{j=1}^n \log (1 + a_j) .$$

Sabemos que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log (1+x)}{x} = 1$ . Así,

$$\frac{\log (1+a_j)}{a_j} \rightarrow 1.$$

Por comparación,  $\sum_{j=1}^{\infty} \log (1+a_j) < \infty \iff \sum_{j=1}^{\infty} a_j < \infty$ . □

**Ejemplo A.2.** Así, tenemos que  $\prod_{j=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{j^2} \right)$  converge pues  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \infty$ .

## Apéndice B

# Reordenamiento de series

Sea  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  biyectiva. Dada una serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , qué pasa con la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ ?

**Teorema B.1.** Si  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ , entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Sin embargo, Riemann probó que si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  no converge absolutamente y tomamos  $c \in \mathbb{R}$ , entonces existe  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  biyectiva tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = c$ .

**Ejemplo B.1.** Considera  $a_n = (-1)^n$ , sabemos que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  no converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots = 0 + 0 + \cdots .$$

Similarmente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + (1 + -1) + (-1 + 1) + \cdots = -1.$$



## Apéndice C

# Series de potencias

Anteriormente, hemos visto series numéricas, es decir,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , con  $a_n \in \mathbb{R}$ . Ahora, queremos estudiar  $f_n : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ,  $x \in I$ . En particular, nos interesan funciones del tipo  $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$ ,  $x_0 \in I$ . Queremos ver si una  $f$  cualquiera la puedo reescribir de la manera:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Esta es su serie de Taylor si  $f \in \mathcal{C}^{\infty}(I)$  (se puede derivar infinitas veces) y decimos que  $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ .

**Ejemplo C.1.** (i)  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ .

(ii)  $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ .

(iii)  $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ .

## Apéndice D

# Función logarítmica

Sea  $f(x) = e^x$  con  $x \in \mathbb{R}$ . Como  $e > 1$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ . Similarmente, sabemos que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  y  $f(0) = 1$ . Tenemos que  $f$  es inyectiva, pues si  $f(x) = f(y)$ , entonces

$$e^{x-y} = 1 \Rightarrow x - y = 0 \iff x = y.$$

Además, si  $x < y$ ,

$$e^x = e^{x-y+y} = e^{x-y} e^y < e^y.$$

Así,  $f$  es estrictamente creciente y  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  es exhaustiva. Entonces,  $\forall y \in (0, \infty)$ ,  $\exists! x \in \mathbb{R}$  tal que  $e^x = y$ . Entonces, podemos concluir que  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  es biyectiva. Por lo tanto, podemos definir la función inversa de  $e^x$ , que denotaremos como  $\log x = \ln x$ <sup>1</sup>. Entonces

$$\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \log(e^x) = x \iff e^{\log x} = x.$$

**Observación D.1.** En general, si  $a > 0$  y  $a \neq 1$ , se define

$$\log_a x = y \iff a^y = x.$$

**Ejemplo D.1.** Si  $a = \frac{1}{2}$ , tenemos que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$ . Similarmente,  $\lim_{x \rightarrow 0} \log_{\frac{1}{2}} x = \infty$ .

**Proposición D.1.** (i)  $\log xy = \log x + \log y$ , con  $x, y > 0$ .

(ii)  $\log x^a = a \log x$  con  $x > 0$  y  $a \in \mathbb{R}$ .

(iii) Cambio de base. Sean  $a, b > 0$  con  $a, b \neq 1$  y  $x > 0$ . Tenemos que

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

---

<sup>1</sup>Vamos a considerar que  $\log$  no está en base 10 sino en base  $e$ .

(iv) Si  $a > 0$  con  $a \neq 1$ , y  $x, y > 0$ ,

$$x^{\log_a y} = y^{\log_a x}.$$

*Demostración.* (i) Tenemos que si  $\log xy = a$ ,  $e^a = xy$ . Sea  $a_1 = \log x$  y  $a_2 = \log y$ . Entonces,  $x = e^{a_1}$  e  $y = e^{a_2}$ . Entonces, tenemos que

$$e^a = xy = e^{a_1} e^{a_2} = e^{a_1 + a_2} \Rightarrow a = a_1 + a_2.$$

Entonces,  $\log xy = \log x + \log y$ .

(ii) Sea  $\log x^a = b$ . Entonces,  $x^a = e^b$ . Si  $a_1 = \log x$ ,  $e^{a_1} = x$ . Así,

$$(e^{a_1})^a = e^{aa_1} = e^b.$$

Por tanto,  $b = aa_1$  y  $\log x^a = a \log x$ .

(iii) Tenemos que

$$\log_a b \cdot \log_b x = \log_a b^{\log_b x} = \log_a x.$$

(iv) Sea  $x \neq 1$ ,

$$\log_a y = \log_x y^{\log_a x} = \log_a x \log_x y = \log_a x \frac{\log_a y}{\log_a x}.$$

□

**Observación D.2.** Queremos ver que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ . Tenemos que

$$\frac{\log(1+x)}{x} = \frac{1}{x} \log(1+x) = \log(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Sea  $y = \frac{1}{x}$ , si  $x \rightarrow 0$ ,  $y \rightarrow \infty$ . Así,

$$\log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y.$$

Así,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \log\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = \log e = 1.$$

**Ejemplo D.2.** Sean  $a, b > 0$  y sea  $x_n = \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ . Tenemos que

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{\frac{b}{a}}}{2}\right)^n = a \left(\frac{1 + \sqrt[n]{\frac{b}{a}}}{2}\right)^n.$$

Sea  $r = \frac{b}{a}$ ,

$$\begin{aligned} \left( \frac{1 + \sqrt[n]{\frac{b}{a}}}{2} \right)^n &= \left( \frac{1 + \sqrt[n]{r}}{2} \right)^n = \left( 1 - 1 + \frac{1 + \sqrt[n]{r}}{2} \right)^n = \left( 1 + \frac{\sqrt[n]{r} - 1}{2} \right)^n = \left( 1 + \frac{1}{\frac{2}{\sqrt[n]{r} - 1}} \right)^n \\ &= \left( 1 + \frac{1}{\frac{2}{\sqrt[n]{r} - 1}} \right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{r} - 1} \frac{\sqrt[n]{r} - 1}{2} n}. \end{aligned}$$

Entonces, tenemos que calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\sqrt[n]{r} - 1}{2}$ . Tenemos que

$$n \frac{\sqrt[n]{r} - 1}{2} = \frac{n}{2} \underbrace{\frac{\sqrt[n]{r} - 1}{\log \sqrt[n]{r}}}_1 \log \sqrt[n]{r} \rightarrow \frac{1}{2} \log r.$$

Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{2}{\sqrt[n]{r} - 1}} \right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{r} - 1} \frac{\sqrt[n]{r} - 1}{2} n} = e^{\frac{1}{2} \log r} = \sqrt{r}.$$

Así,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n = a \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{ab}.$$

**Observación D.3.** Sabemos que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\log(x+1)} = 1$ . Por lo tanto, si  $x_n > 0$ , con  $x_n \rightarrow 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\log(x_n + 1)} = 1.$$

Tomando,  $x_n = \sqrt[n]{r} - 1 \rightarrow 0$ .

**Ejemplo D.3.** Consideremos  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{\sin x} = 1$ , pues

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1)}{\sin x} = \frac{\log(1+x)}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

## Apéndice E

# Construcción de $\mathbb{R}$

Sabemos qué son los números naturales,  $\mathbb{N}$ . Con ellos definimos los números enteros,  $\mathbb{Z}$ , y a partir de estos se introduce  $\mathbb{Q}$ , el cuerpo de los números racionales. A partir de aquí, existen diversas construcciones de los números reales  $\mathbb{R}$ . Veamos una que está basada en la siguiente idea: vamos a interpretar un número real como una sucesión de Cauchy.

Sea  $\mathcal{C} = \{\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q} : \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ es de Cauchy}\}$ . Es decir,  $\forall \epsilon > 0$  con  $\epsilon \in \mathbb{Q}$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $m, n \geq n_0$ ,  $|x_n - x_m| < \epsilon$ . En  $\mathcal{C}$  se define la siguiente relación de equivalencia  $\mathcal{R}$ :

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R} \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0.$$

A partir de esto, definimos

$$\mathbb{R} := \mathcal{C} / \mathcal{R} = \{[\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}] : \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}\}.$$

En  $\mathbb{R}$  definimos la suma:

$$[\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}] + [\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}] = [\{x_n + y_n\}_{n \in \mathbb{N}}].$$

Esta definición es coherente con  $\mathcal{R}$ , pues si  $\{x'_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in [\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}]$  y  $\{y'_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in [\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}]$ . Entonces tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n + y'_n - (x_n + y_n)) = 0 \iff [\{x'_n + y'_n\}] = [\{x_n + y_n\}].$$

Análogamente, definimos el producto de la siguiente manera:

$$[\{x_n\}] \cdot [\{y_n\}] = [\{x_n y_n\}].$$

Primero vamos a ver que el producto de sucesiones de Cauchy también es sucesión de Cauchy, para poder hablar de su clase de equivalencia.

$$x_n y_n - x_m y_m = x_n y_n - x_m y_n + x_m y_n - x_m y_m = x_n (y_n - y_m) + y_m (x_n - x_m) \rightarrow 0.$$

Si  $\{x'_n\} \in [\{x_n\}]$  y  $\{y'_n\} \in [\{y_n\}]$ . Queremos ver que  $[\{x'_n y'_n\}] = [\{x_n y_n\}]$ .

$$x'_n y'_n - x_n y_n = x'_n y'_n - x_n y'_n + x_n y'_n - x_n y_n = y'_n (x'_n - x_n) + x_n (y'_n - y_n) \rightarrow 0.$$

Por tanto, el producto está bien definido.

**Definición E.1.** Tenemos que  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  tal que si  $x \in \mathbb{Q}$ , entonces  $x \rightarrow [\{x\}]$ , donde

$$\{x\}_{n \in \mathbb{N}} = \{x, x, \dots, x, \dots\}.$$

Así, definimos  $0 = [\{0\}]$  y  $1 = [\{1\}]$ . Si  $x \in \mathbb{R}$ , con  $x = [\{x_n\}]$ , definimos

$$-x = [\{-x_n\}].$$

Así, hemos definido el elemento neutro de la suma y del producto, así como el inverso de la suma. Ahora tenemos que encontrar el inverso del producto. Veamos que existe  $\{x'_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in [\{x_n\}] \in \mathbb{R} / \{0\}$  tal que para algún  $\epsilon \in \mathbb{Q}$ ,  $\epsilon > 0$ , o bien  $x'_n > \epsilon$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  o  $x'_n < -\epsilon$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . En efecto, como  $x_n$  no tiende a 0, existe  $\epsilon > 0$  con  $\epsilon \in \mathbb{Q}$  tal que  $\forall n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $\exists n \geq n_0$  tal que  $|x_n| > 2\epsilon$ . Tomando  $k \in \mathbb{N}$ , existet  $n_k \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_{n_k}| > 2\epsilon$ . Como la sucesión es de Cauchy, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $j \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall m, n \geq j$ ,  $|x_n - x_m| < \epsilon$ . Sea  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $n_k \geq j$ . Por tanto,  $\forall m \geq j$ ,  $|x_{n_k} - x_m| < \epsilon$ , por lo que  $x_m > \epsilon$ . Definimos ahora

$$x'_n = \begin{cases} 1, & 1 \leq n \leq j \\ x_n, & n > j \end{cases}.$$

Así,  $[\{x'_n\}] = [\{x_n\}]$  y ahora podemos definir

$$[\{x_n\}]^{-1} = \frac{1}{[\{x_n\}]} = \left[ \left\{ \frac{1}{x'_n} \right\} \right].$$

Entonces, claramente se cumple que  $[\{x_n\}] \cdot [\{x_n\}]^{-1} = 1$ . Sólomente queda ver que  $[\{x_n\}]^{-1}$  es sucesión de Cauchy. Así, podemos probar que  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  es un cuerpo abeliano.

**Definición E.2.**  $[\{x_n\}] > 0$  si y solo si existe  $\epsilon > 0$  con  $\epsilon \in \mathbb{Q}$ , para el que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$ ,

$$\begin{cases} x_n > \epsilon, & \forall n \geq n_0 \\ \text{o} \\ x_n < -\epsilon, & \forall n \geq n_0. \end{cases}$$

Así, tenemos que  $(\mathbb{R}, +, \cdot, >)$  es un cuerpo abeliano totalmente ordenado y arquimediano.