

# Álgebra Lineal

Victoria Torroja Rubio

9/10/2024 -

# Índice general

0.1. Introducción . . . . .	2
<b>1. Espacios Vectoriales</b>	<b>7</b>
1.1. Subespacios vectoriales . . . . .	8
1.2. Bases de un espacio vectorial . . . . .	11
1.3. Suma directa de subespacios. . . . .	16
1.4. Espacio vectorial cociente . . . . .	21
<b>2. Aplicaciones Lineales</b>	<b>24</b>
2.1. Ejemplos de aplicaciones lineales . . . . .	34
2.1.1. Formas Lineales . . . . .	34
2.1.2. Homotecias vectoriales . . . . .	35
2.1.3. Proyecciones . . . . .	36
2.1.4. Simetrías vectoriales . . . . .	38
2.2. Espacio vectorial dual . . . . .	39
2.2.1. Anulador de un subespacio . . . . .	43
<b>3. Matrices</b>	<b>49</b>
3.1. Matriz asociada a una aplicación lineal . . . . .	49
3.2. Producto de matrices . . . . .	51
3.3. Permutaciones . . . . .	53
3.4. Estructura de álgebra . . . . .	57
3.5. Determinantes . . . . .	60
3.6. Sistemas de Cramer . . . . .	65

## 0.1. Introducción

El cuerpo de los números reales cumple los siguientes requisitos:

$(\mathbb{R}, +)$  es un grupo abeliano:

Definimos suma y producto como

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\rightarrow a + b \\ \cdot : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\rightarrow a \cdot b. \end{aligned}$$

1. La suma es asociativa

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a + b) + c = a + (b + c).$$

2. Existe un elemento neutro

$$\exists! 0 \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, 0 + a = a + 0 = a.$$

3. Existe el opuesto

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists -a \in \mathbb{R}, a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

4. La suma es conmutativa

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b = b + a.$$

5. El producto es asociativo,

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

6. El producto es distributivo con respecto a la suma (distributivo por la izquierda y por la derecha),

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

7. Existe la unidad,

$$\exists! 1 \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, 1 \cdot a = a \cdot 1 = a.$$

8. Existe la inversa,

$$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}^1, \exists a^{-1} \in \mathbb{R}, a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

**Definición 0.1** (Anillo). Se denomina **anillo** a un conjunto y dos operaciones  $(R, +, \cdot)$  que verifica las propiedades (1)-(6). Si se verifica también (7), se llama **anillo con unidad**.

---

<sup>1</sup>Utilizamos la notación  $\mathbb{R}^*$  por sencillez para denotar  $\mathbb{R} - \{0\}$

**Definición 0.2** (Cuerpo). Se denomina **cuerpo** a un conjunto con al menos dos elementos ( $1 \neq 0$ ) y dos operaciones  $(R, +, \cdot)$  que cumple las propiedades (1)-(8). Si también se verifica que la multiplicación es conmutativa, decimos que se trata de un **cuerpo abeliano**.

**Definición 0.3.** Un conjunto  $V \neq \emptyset$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial si existen dos operaciones

$$\begin{aligned} + : V \times V &\rightarrow V, (\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \vec{x} + \vec{y} \\ \cdot : \mathbb{R} \times V &\rightarrow V, (a, \vec{x}) \rightarrow a \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

que verifican que

(i)  $(V, +)$  es un grupo abeliano.

(ii) Se cumple la propiedad distributiva,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in V, a(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}.$$

(iii) Se cumple otra propiedad distributiva,

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \vec{x} \in V, (a + b)\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x}.$$

(iv) Se cumple la propiedad asociativa,

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \vec{x} \in V, a(b\vec{x}) = (a \cdot b)\vec{x}.$$

(v)  $\exists 1 \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in V, 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ .

**Definición 0.4.** Se define  $\mathbb{R}^n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , como

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}.$$

**Definición 0.5.** Se define la suma  $+$  en  $\mathbb{R}^n$  de la siguiente manera:

$$\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

Utilizamos las propiedades de  $\mathbb{R}$  como cuerpo abeliano para justificar que  $(\mathbb{R}^n, +)$  es un grupo abeliano.

**Definición 0.6.** Definimos el producto escalar en  $\mathbb{R}^n$  de la siguiente manera,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, a \cdot \vec{x} = (a \cdot x_1, a \cdot x_2, \dots, a \cdot x_n).$$

Una consecuencia clara de esto es que para todo  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  se cumple que

$$0 \cdot \vec{x} = \vec{0}.$$

Al igual que antes, podemos utilizar las propiedades de  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  como cuerpo abeliano para justificar que  $\mathbb{R}^n$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial.

Por las definiciones anteriores tenemos que para todo  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, x_n) \\ &= x_1 (1, 0, \dots, 0) + x_2 (0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n (0, \dots, 1) .. \end{aligned}$$

Además, podemos concluir que si

$$x_1 (1, \dots, 0) + x_2 (0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n (0, \dots, 1) = y_1 (1, \dots, 0) + y_2 (0, 1, \dots, 0) + \dots + y_n (0, \dots, 1),$$

entonces  $\forall i, 1 \leq i \leq n, x_i = y_i$ .

**Definición 0.7** (Sistema de ecuaciones homogéneo). Sea  $H$  un sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\begin{aligned} a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \dots + a_n^1 x_n &= 0 \\ \vdots \\ a_1^m x_1 + a_2^m x_2 + \dots + a_n^m x_n &= 0. \end{aligned}$$

donde  $m, n \in \mathbb{N}$  y  $a_i^j \in \mathbb{R}$ . Definimos  $L$  como el conjunto de soluciones de  $H$ :

$$L = \{ (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) : x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n \text{ es solución de } H \} \subset \mathbb{R}^n.$$

<sup>a</sup>

<sup>a</sup> $a_j^i$  no es exponente sino una forma de numeración.

**Teorema 0.1.** Si  $\vec{x}_0, \vec{y}_0 \in L$ , se cumple que

$$\vec{x}_0 + \vec{y}_0 \in L.$$

*Demostración.* Tenemos que  $\forall i, 1 \leq i \leq m$ ,

$$\begin{aligned}
 & a_1^i (x_0^1 + y_0^1) + \cdots + a_n^i (x_0^n + y_0^n) \\
 &= a_1^i x_0^1 + a_1^i y_0^1 + \cdots + a_n^i x_0^n + a_n^i y_0^n \\
 &= \underbrace{(a_1^i x_0^1 + a_2^i x_0^2 + \cdots + a_n^i x_0^n)}_0 + \underbrace{(a_1^i y_0^1 + a_2^i y_0^2 + \cdots + a_n^i y_0^n)}_0 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

□

**Teorema 0.2.** Si  $\vec{x}_0 \in L$  y  $a \in \mathbb{R}$ , se cumple que

$$a\vec{x}_0 = (ax_0^1, ax_0^2, \dots, ax_0^n) \in L.$$

*Demostración.* Tenemos que para  $\forall i, 1 \leq i \leq m$ ,

$$\begin{aligned}
 & a_1^i (ax_0^1) + a_2^i (ax_0^2) + \cdots + a_n^i (ax_0^n) \\
 &= a \underbrace{(a_1^i x_0^1 + a_2^i x_0^2 + \cdots + a_n^i x_0^n)}_0 \\
 &= a \cdot 0 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

□

**Teorema 0.3.** Por lo visto anteriormente,  $L \subset \mathbb{R}^n$  es un **subespacio vectorial** sobre  $\mathbb{R}$ .

*Demostración.* Muchas de las propiedades de un espacio vectorial automáticamente se heredan a un subespacio vectorial. Las únicas excepciones son la definición de la suma, del producto y la existencia del elemento neutro 0. En este caso, hemos comprobado que la suma está definida en  $L$  y que existe la multiplicación  $\cdot : \mathbb{R} \times L \rightarrow L$  definida en  $L$ . Además,  $\vec{0} \in L$  es una solución trivial. □

Consideramos un sistema de ecuaciones no homogéneo  $S$ :

$$\begin{aligned}
 & a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \cdots + a_n^1 x_n = b^1 \\
 & \vdots \\
 & a_1^m x_1 + a_2^m x_2 + \cdots + a_n^m x_n = b^m.
 \end{aligned}$$

Consideramos que  $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$  es el conjunto de las soluciones.

$$\mathcal{L} = \{ (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) : x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n \text{ es solución de } S \}.$$

Entonces, ya no se cumple necesariamente que la suma de dos soluciones también es solución.  
Si  $\vec{x}_0, \vec{y}_0 \in \mathcal{L}$ ,  $\forall j$ ,  $1 \leq j \leq m$ ,

$$\begin{aligned} & a_1^j (x_0^1 + y_0^1) + a_2^j (x_0^2 + y_0^2) + \cdots + a_n^j (x_0^n + y_0^n) \\ &= \left( a_1^j x_0^1 + a_2^j x_0^2 + \cdots + a_n^j x_0^n \right) + \left( a_1^j y_0^1 + a_2^j y_0^2 + \cdots + a_n^j y_0^n \right) \\ &= b^j + b^j = 2b^j \neq b^j. \end{aligned}$$

Si  $\vec{X}_0 \in L$  y  $\vec{x}_0 \in \mathcal{L}$ , tenemos que

$$\vec{X}_0 + \vec{x}_0 = b^j \in \mathcal{L}.$$

# Capítulo 1

## Espacios Vectoriales

Consideramos un cuerpo conmutativo con característica distinta de 2, es decir,  $1 + 1 \neq 0$ . A este cuerpo lo llamaremos  $\mathbb{K}$ .

**Definición 1.1** ( $\mathbb{K}$ -Espacio vectorial). Un conjunto  $V \neq \emptyset$  es un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial si se tienen definidas dos aplicaciones

$$\begin{aligned} + : V \times V &\rightarrow V \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\rightarrow \vec{x} + \vec{y} \\ \cdot : \mathbb{K} \times V &\rightarrow V \\ (a, \vec{x}) &\rightarrow a \cdot \vec{x}, \end{aligned}$$

tales que verifican que

(1)  $(V, +)$  es un cuerpo abeliano.

[Commutatividad.]  $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ .

[Asociatividad.]  $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V, (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ .

[Existencia del elemento neutro.]  $\exists \vec{0} \in V, \forall \vec{x} \in V, \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$ .

[Existencia del opuesto.]  $\forall \vec{x} \in V, \exists -\vec{x} \in V, \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$ .<sup>a</sup>

(2)  $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \forall a \in \mathbb{K}, a \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{y}$ .

(3)  $\forall \vec{x} \in V, \forall a, b \in \mathbb{K}, (a + b) \cdot \vec{x} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{x}$ .

(4)  $\forall \vec{x} \in V, \forall a, b \in \mathbb{K}, (a \cdot b) \cdot \vec{x} = a \cdot (b \cdot \vec{x})$ .

(5)  $\forall \vec{x} \in V, 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ .

<sup>a</sup>En la propiedad del elemento neutro y del opuesto, como la conmutatividad es un requisito no hay que especificar que el elemento neutro funciona por ambos lados, al igual que el opuesto.

Si considero a  $\mathbb{R}$  como un cuerpo, tenemos que  $\mathbb{C}$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial (dimensión 2) y un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial (dimensión 1).



**Teorema 1.1.** Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial, entonces se verifica que:

(a)  $\forall \vec{x} \in V, 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$ .

(b)  $\forall \vec{x} \in V, \forall a \in \mathbb{K}, (-a) \cdot \vec{x} = -a \cdot \vec{x}$ .

(c)  $\forall a \in \mathbb{K}, a \cdot \vec{0} = \vec{0}$ .

(d)  $a \cdot \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0} \vee a = 0$ .

*Demostración.* (a)

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (1 + 0) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} = \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} \\ \iff -\vec{x} + \vec{x} &= -\vec{x} + \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} \\ \iff 0 &= 0 \cdot \vec{x}. \end{aligned}$$

Se puede hacer de otra manera:

$$0 \cdot \vec{x} = (0 + 0) \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} \iff 0 = 0 \cdot \vec{x}.$$

(b)

$$\begin{aligned} 0 \cdot \vec{x} &= (a + (-a)) \cdot \vec{x} = a \cdot \vec{x} + (-a) \cdot \vec{x} \\ \iff -a \cdot \vec{x} &= -a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{x} + (-a) \cdot \vec{x} \\ \iff -a \cdot \vec{x} &= (-a) \cdot \vec{x}. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} a \cdot \vec{x} &= a \cdot (\vec{x} + \vec{0}) = a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{0} \iff -a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{x} = -a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{0}. \\ \therefore \vec{0} &= a \cdot \vec{0}. \end{aligned}$$

También se puede hacer de la siguiente manera:

$$a \cdot \vec{0} = a \cdot (\vec{0} + \vec{0}) = a \cdot \vec{0} + a \cdot \vec{0} \iff 0 = a \cdot \vec{0}.$$

(d) Si  $a = 0$ , hemos ganado. Si  $a \neq 0$ ,  $\exists \frac{1}{a} \in \mathbb{K}$ . Por tanto,

$$\vec{0} = \frac{1}{a} \cdot \vec{0} = \frac{1}{a} \cdot (a \cdot \vec{x}) = \left( \frac{1}{a} \cdot a \right) \cdot \vec{x} = \vec{x}.$$

□

## 1.1. Subespacios vectoriales

**Definición 1.2** (Subespacio vectorial). Un conjunto  $L \neq \emptyset$  y  $L \subset V$  es **parte estable** si

- (i)  $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L, \vec{x} + \vec{y} \in L$ .
- (ii)  $\forall a \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in V, a \cdot \vec{x} \in L$ .

**Teorema 1.2.** Sea  $L \neq \emptyset$  y  $L \subset V$ , entonces  $L$  es parte estable si y sólo si  $L$  es subespacio vectorial.

*Demostración.* (i) Si  $L$  es un subespacio vectorial es trivial.

- (ii) Si  $L$  es parte estable, tenemos que para  $\vec{x} \in L$  se verifica la propiedad conmutativa, asociativa, etc, dado que  $L \subset V$ . Además, dado que  $\cdot : \mathbb{K} \cdot L \rightarrow L$  y  $(-1) \cdot \vec{x} = -\vec{x}$ , tenemos que si  $\vec{x} \in L$  entonces  $-\vec{x} \in L$ . Además,  $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0} \in L$ . El resto de propiedades se derivan de que  $L \subset V$ .

□

**Definición 1.3** (Combinación lineal).  $\vec{x} \in V$  es la **combinación lineal** de  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p$  con coeficientes  $a^1, a^2, \dots, a^p$  si existen  $\vec{x}_i \in V$  y  $a^i \in \mathbb{K}$ , con  $p \in \mathbb{N}$  ( $1 \leq i \leq p$ ) tales que:

$$\vec{x} = a^1 \cdot \vec{x}_1 + a^2 \cdot \vec{x}_2 + \dots + a^p \cdot \vec{x}_p.$$

<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Los  $a^i$  no denotan exponente sino que se trata de una forma de numeración.

**Nota.** Podemos apreciar que, dadas las condiciones del subespacio vectorial, cualquier combinación lineal de vectores  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p \in L$  es un vector de  $L$ .

**Teorema 1.3.** Sea  $H \subset V$  con  $H \neq \emptyset$ . Definimos  $L(H)$  como el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de  $H$ , es decir:

$$L(H) = \{a^1 \vec{x}_1 + a^2 \vec{x}_2 + \dots + a^p \vec{x}_p : p \in \mathbb{N}, \vec{x}_i \in H, a^i \in \mathbb{K}\}.$$

Se verifica que

- (1)  $H \subset L(H)$ .
- (2)  $L(H)$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$ .
- (3)  $L(H)$  es el menor subespacio vectorial que contiene a  $H$ . Es decir, si  $L$  es un subespacio vectorial y  $H \subset L$ , entonces  $L(H) \subset L$ .

*Demostración.* (1) Tenemos que si  $\vec{x} \in H$  entonces

$$\vec{x} = \underbrace{1 \cdot \vec{x}}_{\text{combinación lineal}} \in L(H).$$

- (2) Sean  $\vec{x}, \vec{y} \in L(H)$ , queremos ver que  $\vec{x} + \vec{y} \in L(H)$ . Dado que  $\vec{x}, \vec{y} \in L(H)$ , se pueden expresar como combinación lineal de otros vectores en  $H$ .

$$\exists p \in \mathbb{N}, \exists \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p \in H, \exists a^1, a^2, \dots, a^p \in \mathbb{K},$$

tales que

$$\vec{x} = a^1 \vec{x}_1 + a^2 \vec{x}_2 + \dots + a^p \vec{x}_p.$$

De manera similar, como  $\vec{y} \in L(H)$ ,

$$\exists q \in \mathbb{N}, \exists \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_q \in H, \exists b^1, b^2, \dots, b^q \in \mathbb{K},$$

tales que

$$\vec{y} = b^1 \vec{y}_1 + b^2 \vec{y}_2 + \dots + b^q \vec{y}_q.$$

Entonces,

$$\vec{x} + \vec{y} = (a^1 \vec{x}_1 + a^2 \vec{x}_2 + \dots + a^p \vec{x}_p) + (b^1 \vec{y}_1 + b^2 \vec{y}_2 + \dots + b^q \vec{y}_q).$$

Como  $\forall \vec{x}_i, \vec{y}_i \in H$ , tenemos que  $\vec{x} + \vec{y} \in L(H)$ .

A continuación, demostramos que si  $\vec{x} \in L(H)$  entonces  $a \cdot \vec{x} \in L(H)$ . Como  $\vec{x} \in L(H)$ ,

$$\exists p \in \mathbb{N}, \exists \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p \in H, \exists a^1, a^2, \dots, a^p \in \mathbb{K},$$

tales que

$$\vec{x} = a^1 \vec{x}_1 + a^2 \vec{x}_2 + \dots + a^p \vec{x}_p.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} a \cdot \vec{x} &= a \cdot (a^1 \vec{x}_1 + a^2 \vec{x}_2 + \dots + a^p \vec{x}_p) \\ &= a \cdot (a^1 \vec{x}_1) + a \cdot (a^2 \vec{x}_2) + \dots + a \cdot (a^p \vec{x}_p) \\ &= (a \cdot a^1) \cdot \vec{x}_1 + (a \cdot a^2) \cdot \vec{x}_2 + \dots + (a \cdot a^p) \cdot \vec{x}_p. \end{aligned}$$

Aprovechamos las propiedades de  $V$  como espacio vectorial y el hecho de que  $H \subset V$  (hemos utilizado la propiedad distributiva). Como  $\forall a \cdot a^i \in \mathbb{K}$  y  $\vec{x}_i \in H$ ,  $a \cdot \vec{x}$  se trata de una combinación lineal y, por tanto,  $a \cdot \vec{x} \in L(H)$ .

- (3) Si  $\vec{x} \in L(H)$ , tenemos que  $\exists p \in \mathbb{N}, \exists \vec{x}_i \in H, \exists a^i \in \mathbb{K}$  con  $1 \leq i \leq p$ , tales que

$$\vec{x} = a^1 \vec{x}_1 + a^2 \vec{x}_2 + \dots + a^p \vec{x}_p.$$

Como  $H \subset L$ ,  $x_i \in L$  y, como  $L$  es un subespacio vectorial, tenemos que  $a^1 \vec{x}_1 + a^2 \vec{x}_2 + \dots + a^p \vec{x}_p \in L$ , por lo que  $\vec{x} \in L$ . □

**Definición 1.4.**  $L(H)$  es el subespacio generado por  $H$  o  $H$  es un sistema de generadores de  $L(H)$ . Si  $L(H) = V$  diremos que  $H$  es sistema de generadores.

## 1.2. Bases de un espacio vectorial

**Definición 1.5.**  $V$  es **finito generado** si existe un sistema de generadores formado por un número finito de vectores. Es decir, si  $\exists \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\} = H$  tal que  $V = L(H)$ , es decir,  $\exists \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\} \subset V$  tales que  $\forall \vec{x} \in V, \exists a^1, a^2, \dots, a^p \in \mathbb{K}$  tales que

$$\vec{x} = a^1 \vec{x}_1 + a^2 \vec{x}_2 + \dots + a^p \vec{x}_p.$$

**Definición 1.6.** Una familia de vectores  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$  es **linealmente dependiente** si uno de ellos es combinación lineal de los otros.

$$\exists i = 1, 2, \dots, p, \vec{x}_i \in L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}).$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \exists i = 1, 2, \dots, p, \exists a^1, a^2, \dots, a^{i-1}, a^{i+1}, \dots, a^p \in \mathbb{K} \\ \vec{x}_i = a^1 \vec{x}_1 + \dots + a^{i-1} \vec{x}_{i-1} + a^{i+1} \vec{x}_{i+1} + \dots + a^p \vec{x}_p. \end{aligned}$$

Es decir, si  $\vec{x}_j = \vec{0}$ ,  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$  es dependiente, pues

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{x}_1 + \dots + 0 \cdot \vec{x}_{j-1} + 0 \cdot \vec{x}_{j+1} + \dots + 0 \cdot \vec{x}_p.$$

**Teorema 1.4.** Sea  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\} \subset V$ . Son linealmente dependientes si y solo si  $\exists a^1, a^2, \dots, a^p \in \mathbb{K}$  no todos nulos tales que

$$\vec{0} = a^1 \vec{x}_1 + a^2 \vec{x}_2 + \dots + a^p \vec{x}_p.$$

*Demostración.* (i) Supongamos que la familia es linealmente dependiente. Por tanto,  $\exists i = 1, \dots, p$  tal que  $\vec{x}_i \in L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_p\})$ . Por tanto, existen  $a^i \in \mathbb{K}$  tales que

$$\vec{x}_i = a^1 \vec{x}_1 + \dots + a^{i-1} \vec{x}_{i-1} + a^{i+1} \vec{x}_{i+1} + \dots + a^p \vec{x}_p.$$

Si sumamos el opuesto a ambos lados tenemos que

$$\vec{0} = \vec{x}_i - \vec{x}_i = a^1 \vec{x}_1 + \dots + a^{i-1} \vec{x}_{i-1} + (-1) \vec{x}_i + a^{i+1} \vec{x}_{i+1} + \dots + a^p \vec{x}_p.$$

(ii) Suponemos que  $\exists a^1, a^2, \dots, a^p \in \mathbb{K}$  no todos nulos tales que

$$a^1 \vec{x}_1 + a^2 \vec{x}_2 + \dots + a^p \vec{x}_p = \vec{0}.$$

Como no todos los escalares son nulos, podemos encontrar  $a^i \neq 0$ , y  $a^i$  tiene inversa.

$$\therefore (-1) a^i \vec{x}_i = a^1 \vec{x}_1 + a^2 \vec{x}_2 + \dots + a^{i-1} \vec{x}_{i-1} + a^{i+1} \vec{x}_{i+1} + \dots + a^p \vec{x}_p.$$

Aprovechando las propiedades:

$$\vec{x}_i = \frac{-a^1}{a^i} \vec{x}_1 + \cdots + \frac{-a^{i-1}}{a^i} \vec{x}_{i-1} + \frac{-a^{i+1}}{a^i} \vec{x}_{i+1} + \cdots + \frac{-a^p}{a^i} \vec{x}_p.$$

□

**Corolario 1.1.** La familia de vectores  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\} \subset V$  es **linealmente independiente** si y solamente si

$$a^1 \vec{x}_1 + a^2 \vec{x}_2 + \cdots + a^p \vec{x}_p = \vec{0} \Rightarrow a^1 = a^2 = \cdots = a^p = 0.$$

**Teorema 1.5.** Una familia de vectores  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$  es linealmente independiente si y solamente si  $\forall \vec{x} \in L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}), \exists! a^1, a^2, \dots, a^p \in \mathbb{K}$  tales que

$$\vec{x} = a^1 \vec{x}_1 + a^2 \vec{x}_2 + \cdots + a^p \vec{x}_p.$$

*Demostración.* (i) Si  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$  es linealmente independiente y sea  $\vec{x} \in L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\})$ . Supongamos que existen otros escalares  $b^1, b^2, \dots, b^p \in \mathbb{K}$  tales que

$$\vec{x} = b^1 \vec{x}_1 + \cdots + b^p \vec{x}_p.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \vec{x} - \vec{x} = (a^1 \vec{x}_1 + \cdots + a^p \vec{x}_p) - (b^1 \vec{x}_1 + \cdots + b^p \vec{x}_p) \\ &= (a^1 - b^1) \vec{x}_1 + \cdots + (a^p - b^p) \vec{x}_p. \end{aligned}$$

Como se trata de una familia linealmente independiente, tenemos que  $\forall i, 1 \leq i \leq p$ ,

$$a^i - b^i = 0 \iff a^i = b^i.$$

(ii) Recíprocamente, tenemos que si  $a^1, a^2, \dots, a^p \in \mathbb{K}$  tales que

$$a^1 \vec{x}_1 + \cdots + a^p \vec{x}_p = \vec{0}.$$

Esto puede pasar si  $a^1 = a^2 = \cdots = a^p = 0$ . Como  $a^i$  son únicos, tenemos que si hay alguno no nulo, la combinación lineal no va a ser nula. Por tanto, será linealmente independiente. □

**Definición 1.7** (Base). Una **base** de un espacio vectorial  $V$  es un sistema de generadores linealmente independientes.

**Corolario 1.2.** Una familia de vectores  $B \subset V$  es una base de  $E$  si y solo si  $\forall \vec{x} \in V$  se expresa de manera única como combinación lineal de elementos de  $B$ .

**Teorema 1.6.** Si  $V \neq \{0\}$ , es finitamente generado, entonces  $\exists \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$  es base de  $V$ . Es decir, todo espacio vectorial  $V \neq \{0\}$  generado por un número finito de vectores tiene una base finita.

*Demostración.* Sea  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$  un sistema de generadores de  $V$ . Si  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$  son linealmente independientes, forman una base (hemos ganado). Sino, uno se puede expresar como combinación lineal de los otros, por lo que  $\exists i = 1, 2, \dots, p$  tal que  $\vec{x}_i \in L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_p\})$ , por lo que  $\exists b^1, b^2, \dots, b^p \in \mathbb{K}$

$$\vec{x}_i = b^1 \vec{x}_1 + b^2 \vec{x}_2 + \dots + b^{i-1} \vec{x}_{i-1} + b^{i+1} \vec{x}_{i+1} + \dots + b^p \vec{x}_p.$$

Dado que  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$  es un sistema de generadores de  $V$ ,  $\forall \vec{x} \in V, \exists a^1, a^2, \dots, a^p \in \mathbb{K}$  tales que

$$\begin{aligned} \vec{x} &= a^1 \vec{x}_1 + a^2 \vec{x}_2 + \dots + a^p \vec{x}_p \\ &= a^1 \vec{x}_1 + \dots + a^{i-1} \vec{x}_{i-1} + a^i (b^1 \vec{x}_1 + b^2 \vec{x}_2 + \dots + b^{i-1} \vec{x}_{i-1} + b^{i+1} \vec{x}_{i+1} + \dots + b^p \vec{x}_p) + a^{i+1} \vec{x}_{i+1} + \dots + a^p \vec{x}_p \\ &= (a^1 + a^i b^1) \vec{x}_1 + \dots + (a^{i-1} + a^i b^{i-1}) \vec{x}_{i-1} + (a^i b^{i+1} + a^{i+1}) \vec{x}_{i+1} + \dots + (a^i b^p + a^p) \vec{x}_p. \end{aligned}$$

Por tanto, el conjunto  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\} - \{\vec{x}_i\}$  también es un sistema de generadores de  $V$ . Si  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_{i+1}, \vec{x}_p\}$  es linealmente independiente, es un sistema de generadores de  $V$ . Si es linealmente dependiente repetimos el proceso hasta tener  $\{\vec{x}_i\}$ , que no puede ser 0, porque  $V \neq 0$ , y  $\{\vec{x}_i\}$  es linealmente independiente.  $\square$

**Observación.** De esto podemos concluir que todo sistema de generadores contiene una base.

**Teorema 1.7** (Teorema de Steinitz). Sea  $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_p\} \subset V$  una base de  $V$  y sea  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q\} \subset V$  linealmente independiente, entonces  $q \leq p$  y se puede obtener una nueva base sustituyendo  $q$  de los vectores  $\vec{y}_i$  por  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q\}$ .

*Demostración.* Se trata de introducir uno por uno los vectores  $\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_p\}$  por los vectores de la base dada. Sea  $\vec{x}_1 \in V$ , entonces  $\exists a^1, a^2, \dots, a^p \in \mathbb{K}$  tales que

$$\vec{x}_1 = a^1 \vec{y}_1 + a^2 \vec{y}_2 + \dots + a^p \vec{y}_p = \sum_{i=1}^p a^i \vec{y}_i.$$

Existe al menos un  $a^i \neq 0$  (porque  $\vec{x}_1$  no es nulo). Sea  $a^1 \neq 0$ .

$$\vec{y}_1 = (a^1)^{-1} \vec{x}_1 - \sum_{i=2}^p (a^1)^{-1} a^i \vec{y}_i$$

Entonces,  $\forall x \in V, \exists b^1, b^2, \dots, b^p \in \mathbb{K}$ ,

$$\begin{aligned}\vec{x} &= b^1 \vec{y}_1 + b^2 \vec{y}_2 + \dots + b^p \vec{y}_p \\ &= b^1 \left( \frac{1}{a^1} \vec{x}_1 + \left( -\frac{a^2}{a^1} \right) \vec{y}_2 + \dots + \left( -\frac{a^p}{a^1} \right) \vec{y}_p \right) + b^2 \vec{y}_2 + \dots + b^p \vec{y}_p \\ &= \frac{b^1}{a^1} \vec{x}_1 + \left( b^1 \left( -\frac{a^2}{a^1} \right) + b^2 \right) \vec{y}_2 + \dots + \left( b^1 \left( -\frac{a^p}{a^1} \right) + b^p \right) \vec{y}_p.\end{aligned}$$

Hemos llegado a la conclusión de que  $\{\vec{x}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_p\}$  forman un sistema de generadores de  $V$ . Además, son linealmente independientes, pues

$$\begin{aligned}\vec{0} &= b^1 \vec{x}_1 + b^2 \vec{y}_2 + \dots + b^p \vec{y}_p \Rightarrow b^1 \left( \sum_{i=1}^p a^i \vec{y}_i \right) + b^2 \vec{y}_2 + \dots + b^p \vec{y}_p = \vec{0} \\ &= b^1 a^1 \vec{y}_1 + \sum_{i=2}^p (b^1 a^i + b^i) \vec{y}_i = \vec{0} \\ &\Rightarrow b^1 a^1 = 0, \quad b^1 a^i + b^i = 0, \quad i \geq 2.\end{aligned}$$

pues  $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_p\}$  son una base. Como  $a^1 \neq 0$ , tenemos que  $b^1 = b^i = 0$ . Por tanto,  $\{\vec{x}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_p\}$  es una base de  $V$ .

Supongamos que  $i < \min(p, q)$  y que  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_i, \vec{y}_{i+1}, \dots, \vec{y}_p\}$  es sistema de generadores. Entonces,  $\exists c^1, c^2, \dots, c^i, d^{i+1}, \dots, d^p \in \mathbb{K}$  tales que

$$\vec{x}_{i+1} = c^1 \vec{x}_1 + c^2 \vec{x}_2 + \dots + c^i \vec{x}_i + d^{i+1} \vec{y}_{i+1} + \dots + d^p \vec{y}_p = \sum_{j=1}^i c^j \vec{x}_j + \sum_{j=i+1}^p d^j \vec{y}_j.$$

El procedimiento anterior nos asegura que podemos sustituir  $\vec{x}_{i+1}$  por cualquier vector con coeficiente no nulo. Por tanto, tenemos que demostrar que existe un coeficiente del segundo sumatorio no nulo. Si fueran todos nulos, tendríamos que  $\vec{x}_{i+1}$  se puede expresar como combinación lineal de los vectores  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ , esto contradice que sean linealmente independientes.  $\square$

**Corolario 1.3.** Si el espacio vectorial  $V$  tiene una base finita, todas las bases de  $V$  tienen el mismo número de vectores.

*Demostración.* Sean  $B_1 = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$  y  $B_2 = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_q\}$  dos bases de  $V$ . Como  $B_1$  es una base y  $B_2$  es un conjunto de vectores linealmente independientes, tenemos que todas las bases de  $V$  han de ser finitas. Entonces, como  $B_1$  y  $B_2$  son bases y, consecuentemente, linealmente independientes, tenemos que  $p \leq q$  y  $q \leq p$ , por lo que  $p = q$ .  $\square$

**Definición 1.8** (Dimensión). La **dimensión** de un espacio vectorial  $V$  sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$  es el número de elementos de sus bases, si son finitas. Si no lo son, diremos que  $V$  es de dimensión infinita.

**Corolario 1.4.** La dimensión de un espacio vectorial coincide con el número máximo de elementos linealmente independientes, y también con el número mínimo de generadores.

**Corolario 1.5.** Todo conjunto de vectores linealmente independientes puede completarse hasta obtener una base.

**Lema 1.1.** Si  $S \subset V$  es linealmente independiente y  $\vec{x} \in V$  y  $\vec{x} \notin L(S)$ , tenemos que la familia  $S \cup \{\vec{x}\}$  es linealmente independiente.

*Demostración.* Sean  $a, a^i \in \mathbb{K}$  y

$$a\vec{x} + a^1\vec{x}_1 + \dots + a^p\vec{x}_p = \vec{0}.$$

Si  $a \neq 0$ , entonces  $\vec{x}$  se puede expresar como combinación lineal de  $S$ , pero por hipótesis esto no es posible. Por tanto, debe ser que  $a = 0$  y, consecuentemente,  $\forall a^i = 0$ , pues  $S$  es linealmente independiente. Por tanto,  $S \cup \{\vec{x}\}$  también es linealmente independiente.  $\square$

**Proposición 1.1.** Si  $V$  es finitamente generado y  $L$  es subespacio vectorial de  $V$ , entonces  $L$  es finitamente generado y

$$\dim L \leq \dim V.$$

Además,

$$\dim L = \dim V \iff L = V.$$

*Demostración.* Si  $L = \{0\}$  no hay nada que probar (no tiene bases). En caso contrario, existe  $\vec{x}_1 \in L$ . Si  $L = L(\{\vec{x}_1\})$ , tenemos que  $\vec{x}_1$  es una base. En caso contrario, existe  $\vec{x}_2 \in L$  con  $\vec{x}_2 \notin L(\{\vec{x}_1\})$ . Si  $L = L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\})$ ,  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$  forman una base. Sabemos que son linealmente independientes por el lema anterior. En algún momento llegaremos a que  $L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\})$  forman una base, pues un corolario anterior nos dice que hay un número máximo de vectores linealmente independientes.

Además, si  $\dim L = n$  y  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$  es una base de  $L$ , por el teorema de Steinitz, también es una base de  $V$ . Por tanto,

$$L = L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}) = V.$$

$\square$

**Teorema 1.8** (Teorema de aplicación de base). Sea  $L$  un subespacio vectorial de  $V$  y sea  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$  una base de  $L$ . Entonces existe  $\{\vec{u}_{p+1}, \vec{u}_{p+2}, \dots, \vec{u}_n\} \subset V$  tales que  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p, \vec{u}_{p+1}, \vec{u}_{p+2}, \dots, \vec{u}_n\}$  son base de  $V$ .

*Demostración.* Si  $\dim V = n$  tenemos que existe un número finito de generadores que forman una base de  $V$ , y consideramos que los vectores  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$  forman una base de  $L$ . Entonces,  $p \leq n$  y, por el teorema de Steinitz, se puede obtener una nueva base sustituyendo  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$  por  $p$  vectores de  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ .  $\square$



### 1.3. Suma directa de subespacios.

**Notación.**

$$\mathcal{P}(V) = \{A : A \subset V\}.$$

$$\mathcal{L}(V) = \{L \in \mathcal{P}(V) : L \text{ es subespacio vectorial de } V\}.$$

Por tanto,

$$\mathcal{L}(V) \subset \mathcal{P}(V).$$

**Teorema 1.9.**  $\forall I$  conjunto,  $\forall i \in I$ , si  $L_i \in \mathcal{L}(V)$  entonces

$$\bigcap_{i \in I} L_i \in \mathcal{L}(V).$$

Es decir, la intersección de espacios vectoriales es un espacio vectorial.

*Demostración.*  $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \bigcap_{i \in I} L_i$  implica que  $\vec{x}, \vec{y} \in L_i, \forall i \in I$ . Como  $L_i$  son subespacios vectoriales:

$$\vec{x} + \vec{y} \in L_i, \forall i \in I \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in \bigcap_{i \in I} L_i.$$

Similarmente, si  $\vec{x} \in \bigcap_{i \in I} L_i$  y  $a \in \mathbb{K}$ , tenemos que  $\vec{x} \in L_i, \forall i \in I$ . Como  $L_i$  son subespacios vectoriales, son parte estable, por lo que

$$a \cdot \vec{x} \in L_i, \forall i \in I \Rightarrow a \cdot \vec{x} \in \bigcap_{i \in I} L_i.$$

□

**Observación.** Sin embargo, no tiene que cumplirse necesariamente que  $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}(V)$  si  $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ .

**Ejemplo 1.1.** Sean  $\{\vec{u}, \vec{v}\} \subset V$  linealmente independientes y  $L_1 = L(\{\vec{u}\})$  y  $L_2 = L(\{\vec{v}\})$  las rectas que generan. Asumamos que  $\vec{u} + \vec{v} \in L_1 \cup L_2$ . Sin pérdida de generalidad,  $\vec{u} + \vec{v} \in L_1$ . Por tanto,  $\exists a \in \mathbb{K}$  tal que  $\vec{u} + \vec{v} = a\vec{u}$ . De esta manera,

$$(a - 1)\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}.$$

Esto es absurdo, pues hemos dicho que estos vectores son linealmente independientes.

**Definición 1.9.** Si  $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ , definimos  $L_1 + L_2$  al menor subespacio vectorial generado por la unión.

$$L_1 + L_2 = L(L_1 \cup L_2).$$

**Teorema 1.10.** Sean  $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$  y sea  $L' = \{\vec{x}_1 + \vec{x}_2 : \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2\}$ . Tenemos que  $L' = L_1 + L_2$ .

*Demostración.* Si  $\vec{x}_1 \in L_1$ , tenemos que  $\vec{x}_1 = \vec{x}_1 + \vec{0} \in L'$ , pues  $\vec{x}_1 \in L_1$  y  $\vec{0} \in L_2$ . Por tanto,  $L_1 \subset L'$ . Similarmente,  $L_2 \subset L'$ . Consecuentemente,  $L_1 \cup L_2 \subset L'$ .

Además, tenemos que  $L' \in \mathcal{L}(V)$ , pues  $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L'$  tenemos que  $\exists \vec{x}_1, \vec{y}_1 \in L_1$  y  $\exists \vec{x}_2, \vec{y}_2 \in L_2$ .

$$\vec{x} + \vec{y} = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + (\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \underbrace{(\vec{x}_1 + \vec{y}_1)}_{\in L_1} + \underbrace{(\vec{x}_2 + \vec{y}_2)}_{\in L_2}.$$

Por tanto,  $\vec{x} + \vec{y} \in L'$ . Similarmente, si  $a \in \mathbb{K}$  y  $\vec{x} \in L'$  tenemos que existen  $\vec{x}_1 \in L_1$  y  $\vec{x}_2 \in L_2$  tales que

$$a \cdot \vec{x} = a \cdot (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \underbrace{a\vec{x}_1}_{\in L_1} + \underbrace{a\vec{x}_2}_{\in L_2}.$$

Por tanto,  $a \cdot \vec{x} \in L'$ . Por tanto,  $L' \in \mathcal{L}(V)$ .

A continuación demostramos que si  $L \in \mathcal{L}(V)$  y  $L_1 \cup L_2 \subset L$ , entonces  $L' \subset L$ . Tenemos que  $\forall \vec{x} \in L'$  existen  $\vec{x}_1 \in L_1$  y  $\vec{x}_2 \in L_2$  tales que  $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ . Por tanto,  $\vec{x} \in L$ .

$$\therefore L' \subset L.$$

Por todo ello,  $L' = L_1 + L_2$ . □

**Teorema 1.11** (Fórmula de Grassmann). Supongamos que  $V$  es de dimensión finita, por lo que todos los conjuntos que vamos a tratar a continuación son de dimensión finita.

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

*Demostración.* Sea  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$  una base de  $L_1 \cap L_2$ , y sea  $v = \dim(L_1 \cap L_2)$ . Podemos ampliar esta base hasta obtener una base de  $L_1$  y  $L_2$ . Sea  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m, \vec{u}_{m+1}, \dots, \vec{u}_r\}$  una base de  $L_1$ . Sea  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m, \vec{v}_{m+1}, \dots, \vec{v}_s\}$  base de  $L_2$ . Queremos ver que  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m, \dots, \vec{u}_{m+1}, \dots, \vec{u}_r, \vec{v}_{m+1}, \dots, \vec{v}_s\}$  es base de  $L_1 + L_2$ . Primero queremos ver que es sistema de generadores. Sea  $\vec{x} \in L_1 + L_2$ . Entonces, existen  $\vec{x}_1 \in L_1$  y  $\vec{x}_2 \in L_2$  tales que  $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ . Como anteriormente hemos definido bases para  $L_1$  y  $L_2$ , tenemos que existen  $a^i \in \mathbb{K}$  tales que

$$\vec{x}_1 = a^1 \vec{u}_1 + a^2 \vec{u}_2 + \dots + a^r \vec{u}_r.$$

Similarmente, existen  $b^i \in \mathbb{K}$  tales que

$$\vec{x}_2 = b^1 \vec{u}_1 + \dots + b^m \vec{u}_m + b^{r+1} \vec{v}_{r+1} + \dots + b^s \vec{v}_s.$$

Por tanto, tenemos que  $\vec{x}$  se puede expresar como combinación lineal de  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m, \vec{u}_{m+1}, \dots, \vec{u}_r, \vec{v}_{m+1}, \dots, \vec{v}_s\}$ .

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \sum_{i=1}^r a^i \vec{u}_i + \sum_{i=1}^m b^i \vec{u}_i + \sum_{i=m+1}^s b^i \vec{v}_i.$$

Por tanto, es sistema de generadores, ahora tenemos que ver que son linealmente independientes. Sean  $a^i, b^j \in \mathbb{K}$  tales que

$$a^1 \vec{u}_1 + a^2 \vec{u}_2 + \cdots + a^m \vec{u}_m + \cdots + a^r \vec{u}_{r+1} + \cdots + \cdots + b^{m+1} \vec{v}_{m+1} + \cdots + b^s \vec{v}_s = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^r a^i \vec{u}_i + \sum_{i=m+1}^s b^i \vec{v}_i = \vec{0}.$$

Sea  $\vec{y} = \sum_{i=1}^r a^i \vec{u}_i$  por lo que  $\vec{y} \in L_1$ . Entonces,

$$-\vec{y} = \sum_{i=m+1}^s b^i \vec{v}_i \in L_2.$$

Por tanto,  $\vec{y} \in L_1 \cap L_2$ . Entonces,  $\vec{y}$  se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base de la intersección. Es decir, existen  $c^i \in \mathbb{K}$  tales que

$$\vec{y} = c^1 \vec{u}_1 + c^2 \vec{u}_2 + \cdots + c^m \vec{u}_m.$$

Entonces,

$$\vec{0} = \vec{y} - \vec{y} = \sum_{j=1}^m c^j \vec{u}_j + \sum_{i=m+1}^s b^i \vec{v}_i = \vec{0}.$$

Como la base de  $L_2$  es linealmente independiente (porque es una base), tenemos que  $c^1 = c^2 = \cdots = c^r = b^1 = \cdots = b^q = 0$ . Consecuentemente,  $\sum_{i=1}^r a^i \vec{u}_i = \vec{0}$  y, dado que  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r\}$  es base de  $L_1$ , tenemos que  $a^i = 0, \forall i = 1, \dots, r$ . Por tanto, hemos visto que el conjunto que estábamos estudiando es base.

Esta base tiene dimensión  $r + s = r + (s + m) - m$ . □

Si  $L_1 \cap L_2 = \{\vec{0}\}$ , tenemos que  $\dim L_1 + \dim L_2 = \dim (L_1 + L_2)$ .

**Definición 1.10.** Sean  $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$  su suma es directa si  $L_1 \cap L_2 = \{\vec{0}\}$  y se escribe de la siguiente manera:

$$L_1 \oplus L_2.$$

**Proposición 1.2.** Sean  $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ . Entonces

$$L_1 \oplus L_2 \iff \forall \vec{x} \in L_1 + L_2, \exists! \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2, \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2.$$

*Demostración.* (i) Supongamos que  $L_1 \oplus L_2$ . Asumimos que existen,  $\vec{x}_1, \vec{y}_1 \in L_1$  y  $\vec{x}_2, \vec{y}_2 \in L_2$  tales que si  $\vec{x} \in L_1 + L_2$  tenemos que

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \vec{y}_1 + \vec{y}_2.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\vec{0} &= (\vec{x}_1 - \vec{y}_1) + (\vec{x}_2 - \vec{y}_2). \\ \Rightarrow \vec{x}_1 - \vec{y}_1 &= \vec{y}_2 - \vec{x}_2\end{aligned}$$

Consecuentemente,  $\vec{x}_1 - \vec{y}_1, \vec{y}_2 - \vec{x}_2 \in L_1 \cap L_2$ , por tanto,  $\vec{x}_1 - \vec{y}_1 = \vec{0} \iff \vec{x}_1 = \vec{y}_1$ . Similarmente,  $\vec{y}_2 = \vec{x}_2$ .

(ii) Suponemos que  $\forall \vec{x} \in L_1 + L_2, \exists! \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2, \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ . Queremos ver que  $L_1 \cap L_2 = \{\vec{0}\}$ . Sea  $\vec{x} \in L_1 \cap L_2$ . Tenemos que  $\vec{x} = \vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x}$ . Tenemos que  $\vec{0} \in L_1 \cap L_2$ . Como la expresión de  $\vec{x}$  ha de ser única, tenemos que  $\vec{x} = \vec{0}$ , por lo que  $L_1 \cap L_2 = \{\vec{0}\}$ .  $\square$

Tenemos que si  $L_1, L_2, \dots, L_k \in \mathcal{L}(V)$ ,

$$(L_1 + L_2) + L_3 = \{(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + \vec{x}_3 : \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2, \vec{x}_3 \in L_3\} = L_1 + (L_2 + L_3).$$

Generalmente, esta suma es asociativa, es decir se puede escribir

$$L_1 + L_2 + \dots + L_k = \{\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_k : \vec{x}_i \in L_i\}.$$

**Definición 1.11.** Diremos que la suma  $L_1 + L_2 + \dots + L_k$  es directa si  $\forall \vec{x} \in L_1 + L_2 + \dots + L_k, \exists! \vec{x}_i \in L_i$  tales que  $\vec{x} = \sum_{i=1}^k \vec{x}_i$ . Esto se denotará de la siguiente manera:

$$L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_k.$$

**Proposición 1.3.** Si  $L_1, \dots, L_k$ , entonces  $L_1 \oplus \dots \oplus L_k$  si y solo si  $\forall i = 1, \dots, k$ ,

$$L_i \cap (L_1 + L_2 + \dots + L_{i-1} + L_{i+1} + \dots + L_k) = \{\vec{0}\}.$$

*Demostración.* (i) Demostramos la primera implicación. Supongamos que  $\forall i = 1, \dots, k$ , y sea  $\vec{x} \in L_i \cap (L_1 + \dots + L_{i-1} + L_{i+1} + \dots + L_k)$ . Queremos decir que  $\vec{x} = \vec{0}$ . Tenemos que, dado que  $\vec{x} \in L_i$ :

$$\vec{x} = \vec{0} + \dots + \vec{0} + \vec{x}_i + \vec{0} + \dots + \vec{0}.$$

Como  $\vec{x} \in L_i \cap (L_1 + \dots + L_{i-1} + L_{i+1} + \dots + L_k)$ , tenemos que  $\vec{x} \in L_1 + \dots + L_{i-1} + L_{i+1} + \dots + L_k$ :

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_{i-1} + \vec{x}_{i+1} + \dots + \vec{x}_k.$$

Como  $L_1 \oplus \dots \oplus L_k$ , tenemos que la expresión de  $\vec{x}$  es única, por lo que  $\vec{x} = \vec{0}$ .

(ii) Demostramos la siguiente implicación. Asumimos que

$$\forall i = 1, \dots, k; L_i \cap (L_1 + L_2 + \dots + L_{i-1} + L_{i+1} + \dots + L_k) = \{\vec{0}\}.$$

Sea

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^k \vec{x}_i = \sum_{i=1}^k \vec{y}_i.$$

Con  $\vec{x}_i, \vec{y}_i \in L_i$ , tenemos que

$$\vec{0} = (\vec{x}_1 - \vec{y}_1) + \dots + (\vec{x}_i + \vec{y}_i) + \dots + (\vec{x}_k + \vec{y}_k).$$

$$\therefore \vec{y}_i - \vec{x}_i = (\vec{x}_1 - \vec{y}_1) + \dots + (\vec{x}_{i-1} - \vec{y}_{i-1}) + (\vec{x}_{i+1} - \vec{y}_{i+1}) + \dots + (\vec{x}_k - \vec{y}_k).$$

Por lo que  $\vec{y}_i - \vec{x}_i = \vec{0}, \forall i = 1, \dots, k$ . Si esto no fuera cierto para algún  $\vec{x}_j - \vec{y}_j$ , podríamos despejarlo y tendríamos que está en la intersección pero a la vez no es  $\vec{0}$ , lo cual contradice nuestra hipótesis. □

**Definición 1.12.**  $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$  son **complementarios** si  $L_1 \oplus L_2$  y  $V = L_1 \oplus L_2$ .

$$L_1 \oplus L_2 = V \iff \forall \vec{x} \in V, \exists! \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2, \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2.$$

**Teorema 1.12.** Sea  $L \in \mathcal{L}(V)$ , entonces existe  $L' \in \mathcal{L}(V)$  tal que  $L \oplus L' = V$ .

*Demostración.* Sea  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$  una base de  $L$  y sea  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \vec{u}_{r+1}, \dots, \vec{u}_n\}$  base de  $V$ . La manera de ampliar una base no es única. Sea  $L'$  el subespacio generado por los vectores que he añadido a la base de  $L$  para formar la base de  $V$ , es decir,

$$L' = L(\{\vec{u}_{r+1}, \dots, \vec{u}_n\}).$$

Tenemos que  $\forall \vec{x} \in V$ , existen  $a^i \in \mathbb{K}$  tales que

$$\vec{x} = a^1 \vec{u}_1 + \dots + a^r \vec{u}_r + a^{r+1} \vec{u}_{r+1} + \dots + a^n \vec{u}_n.$$

Sea  $\vec{x}_1 = a^1 \vec{u}_1 + \dots + a^r \vec{u}_r \in L$  y  $\vec{x}_2 = a^{r+1} \vec{u}_{r+1} + \dots + a^n \vec{u}_n \in L'$ . Vamos a ver que  $L \cap L' = \{\vec{0}\}$ .

Sabemos que  $\{\vec{0}\} \subset L \cap L'$ . Si  $\vec{x} \in L \cap L'$ . Entonces existen  $a^i \in \mathbb{K}$  tales que

$$\vec{x} = a^1 \vec{u}_1 + \dots + a^r \vec{u}_r.$$

Como  $\vec{x} \in L'$ , existen  $a^j \in \mathbb{K}$  tales que

$$\vec{x} = a^{r+1} \vec{u}_{r+1} + \dots + a^n \vec{u}_n.$$

Entonces,

$$\vec{0} = (a^1 \vec{u}_1 + \dots + a^r \vec{u}_r) - (a^{r+1} \vec{u}_{r+1} + \dots + a^n \vec{u}_n).$$

Esto es una combinación lineal de los elementos de una base que me da el vector nulo. Como las bases son linealmente independientes, tenemos que

$$a^1 = \dots = a^r = a^{r+1} = \dots = a^n = 0.$$

Por tanto,  $\vec{x} = \vec{0}$ . Consecuentemente, la suma es directa. □

## 1.4. Espacio vectorial cociente

**Definición 1.13.** Definimos la relación de equivalencia:

$$\vec{x}R\vec{y} \iff \vec{y} - \vec{x} \in L.$$

Si  $\vec{x} \in V$ ,

$$[\vec{x}] = \{\vec{y} \in V : \vec{y} - \vec{x} \in L\} = \{\vec{y} \in V : \vec{y} - \vec{x} = \vec{l}\} = \{\vec{x} + \vec{l} : \vec{l} \in L\} = \vec{x} + L$$

**Teorema 1.13.** Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial. Si  $\vec{x}, \vec{y} \in V$  decimos que  $\vec{x}R\vec{y}$  si  $\vec{x} - \vec{y} \in L$ , donde  $L \in \mathcal{L}(V)$ . Tenemos que  $R$  es una relación de equivalencia en  $V$ .

*Demostración.* (i) Reflexiva. Si  $\vec{x} \in V$ , tenemos que

$$\vec{x} - \vec{x} \in \vec{0} \in L.$$

(ii) Simétrica. Si  $\vec{x}, \vec{y} \in V$  tal que  $\vec{x}R\vec{y}$ , tenemos que

$$\vec{x} - \vec{y} \in L \iff \vec{y} - \vec{x} \in L.$$

Pues  $\vec{y} - \vec{x} = (-1)(\vec{x} - \vec{y}) \in L$ .

(iii) Transitiva. Si  $\vec{x}R\vec{y}$  y  $\vec{y}R\vec{z}$ , tenemos que  $\vec{x} - \vec{y} \in L$  y  $\vec{y} - \vec{z} \in L$ . Como  $L$  es espacio vectorial tenemos que:

$$(\vec{x} - \vec{y}) + (\vec{y} - \vec{z}) = \vec{x} - \vec{z} \in L.$$

□

Si  $\vec{x} \in V$ , tenemos que

$$[\vec{x}] = \{\vec{y} \in V : \vec{y}R\vec{x}\} = \{\vec{y} \in V : \vec{y} - \vec{x} \in L\} = \{\vec{y} \in V : \exists \vec{l} \in L, \vec{y} - \vec{x} = \vec{l}\} = \{\vec{x} + \vec{l} : \vec{l} \in L\} = \vec{x} + L.$$

**Definición 1.14** (Espacio cociente).

$$V/R = V/L = \{\vec{x} + L : \vec{x} \in V\}.$$

En  $V/L$  defino una suma y un producto por escalares:

$$\begin{aligned} + : V/L \times V/L &\rightarrow V/L \\ (\vec{x} + L, \vec{y} + L) &\rightarrow (\vec{x} + L) + (\vec{y} + L) = (\vec{x} + \vec{y}) + L. \end{aligned}$$

Si  $\vec{x} + L = \vec{x}' + L$  y  $\vec{y} + L = \vec{y}' + L$ . Tenemos que ver que si  $\vec{x} + L = \vec{y} + L$ , entonces  $\vec{x}' + L = \vec{y}' + L$ .

<sup>1</sup> Tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \vec{x} + \vec{l} \quad \text{y} \quad \vec{y}' = \vec{y} + \vec{l}', \quad \text{con } \vec{l}, \vec{l}' \in L. \\ \vec{x}' + \vec{y}' &= (\vec{x} + \vec{l}) + (\vec{y} + \vec{l}') = (\vec{x} + \vec{y}) + (\vec{l} + \vec{l}'). \end{aligned}$$

Entonces,

$$(\vec{x}' + \vec{y}') - (\vec{x} + \vec{y}) = \vec{l} + \vec{l}' \in L.$$

Entonces,  $(\vec{x} + \vec{y}) R (\vec{x}' + \vec{y}')$ , por lo que sus clases de equivalencia son iguales.

**Teorema 1.14.**  $(V/L, +)$  es un grupo abeliano.

*Demostración.* (i)  $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$ ,

$$(\vec{x} + L) + (\vec{y} + L) = (\vec{x} + \vec{y}) + L = (\vec{y} + \vec{x}) + L.$$

(ii)  $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ ,

$$((\vec{x} + L) + (\vec{y} + L)) + (\vec{z} + L) = ((\vec{x} + \vec{y}) + L) + (\vec{z} + L) = ((\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}) + L = (\vec{x} + L) + ((\vec{y} + L) + (\vec{z} + L)).$$

(iii) Si consideramos la clase  $\vec{0} + L$ , tenemos que  $\forall \vec{x} \in V$ ,

$$(\vec{0} + L) + (\vec{x} + L) = (\vec{0} + \vec{x}) + L = \vec{x} + L.$$

(iv) Si  $\vec{x} \in V$ , el opuesto será,  $-(\vec{x} + L) = (-\vec{x}) + L$ .

$$(\vec{x} + L) + (-\vec{x} + L) = (\vec{x} + L) + ((-\vec{x}) + L) = (\vec{x} - \vec{x}) + L = \vec{0} + L.$$

□

El producto por escalares está definido así:

$$\begin{aligned} \cdot \mathbb{K} \times V/L &\rightarrow V/L \\ \forall a \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in V &a \cdot (\vec{x} + L) = (a\vec{x}) + L. \end{aligned}$$

Queremos ver que se trata de una aplicación. Si  $\vec{x}' + L = \vec{x} + L$ , queremos ver que  $(a\vec{x}') + L = (a\vec{x}) + L$ . Tenemos que  $\vec{x}' - \vec{x} \in L$ , por lo que  $a\vec{x}' - a\vec{x} \in L$ . Por tanto,

$$(a\vec{x}) + L = (a\vec{x}') + L.$$

**Observación 1.1.** Estas operaciones hacen  $V/L$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$ .

---

<sup>1</sup>El objetivo, tanto en la suma como en el producto por escalares, es ver que realmente se trata de una aplicación, es decir, si cojo  $[\vec{x}] = [\vec{x}']$  y  $[\vec{y}] = [\vec{y}']$ , me tiene que dar que  $[\vec{x} + \vec{y}] = [\vec{x}' + \vec{y}']$ .

**Teorema 1.15.** La dimensión del espacio vectorial  $V/L$  se puede expresar como:

$$\dim(V/L) = \dim(V) - \dim(L).$$

*Demostración.* Sea  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r\}$  base de  $L$  y sea  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \dots, \vec{u}_n\}$  una base de  $V$ . Si  $i = 1, \dots, r$ , tenemos que

$$\vec{u}_i = \vec{u}_i - \vec{0} \in L \Rightarrow \vec{u}_i + L = \vec{0} + L.$$

Vamos a demostrar que  $\{\vec{u}_{r+1} + L, \dots, \vec{u}_n + L\}$  base de  $V/L$ . Primero vemos que es un sistema de generadores. Si  $\vec{x} \in V$ , queremos ver que la clase de  $\vec{x}$  se puede expresar como combinación lineal de estas clases. Existen  $a^j \in \mathbb{K}$  tales que:

$$\vec{x} = \underbrace{a^1 \vec{u}_1 + \dots + a^r \vec{u}_r}_{\in L} + a^{r+1} \vec{u}_{r+1} + \dots + a^n \vec{u}_n.$$

Entonces,  $\vec{x}$  está relacionado con  $a^{r+1} \vec{u}_{r+1} + \dots + a^n \vec{u}_n$ . Por tanto,

$$\vec{x} + L = (a^{r+1} \vec{u}_{r+1} + \dots + a^n \vec{u}_n) + L = a^{r+1} (\vec{u}_{r+1} + L) + \dots + a^n (\vec{u}_n + L).$$

Por tanto,  $\{\vec{u}_{r+1} + L, \dots, \vec{u}_n + L\}$  es un sistema de generadores de  $V/L$ . Ahora tenemos que ver que son linealmente independientes.

$$b^{r+1} (\vec{u}_{r+1} + L) + \dots + b^n (\vec{u}_n + L) = \vec{0} + L.$$

Tenemos que

$$(b^{r+1} \vec{u}_{r+1} + \dots + b^n \vec{u}_n) + L = \vec{0} + L.$$

Entonces,

$$b^{r+1} \vec{u}_{r+1} + \dots + b^n \vec{u}_n - \vec{0} \in L.$$

Entonces, podemos escribir la expresión anterior como combinación lineal de la base de  $L$ :

$$\begin{aligned} b^{r+1} \vec{u}_{r+1} + \dots + b^n \vec{u}_n &= b^1 \vec{u}_1 + \dots + b^r \vec{u}_r. \\ \Rightarrow (-b^1) \vec{u}_1 + (-b^2) \vec{u}_2 + \dots + (-b^r) \vec{u}_r + \dots + b^n \vec{u}_n &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Dado que  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \dots, \vec{u}_n\}$  es una base de  $V$ ,  $b^1 = b^2 = \dots = b^r = \dots = b^n = 0$ .  $\square$

**Observación 1.2.** Podemos formar la base de un espacio cociente  $V/L$  a partir de la expansión de la base de  $L$  para obtener una base de  $V$ .



## Capítulo 2

# Aplicaciones Lineales

**Definición 2.1** (Aplicación Lineal). Sean  $V$  y  $V'$  son espacios vectoriales sobre  $\mathbb{K}$ . Una aplicación  $f : V \rightarrow V'$  es lineal si

(a)  $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}), \forall \vec{x}, \vec{y} \in V.$

(b)  $f(a\vec{x}) = af(\vec{x}), \forall a \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in V.$

**Definición 2.2.** Un **monomorfismo** de  $V$  en  $V'$  es una aplicación lineal inyectiva. Un **epimorfismo** es una aplicación lineal sobreyectiva. Un **isomorfismo** es una aplicación lineal biyectiva (es homomorfismo y epimorfismo a la vez).

**Ejemplo 2.1.** (a) Tenemos que  $L \in \mathcal{L}(V),$

$$\begin{aligned} i : L &\rightarrow V \\ \vec{x} &\rightarrow \vec{x}. \end{aligned}$$

Esta aplicación es un monomorfismo.

(b) Si  $L \in \mathcal{L}(V),$  la aplicación

$$\begin{aligned} p : V &\rightarrow V/L \\ \vec{x} &\rightarrow \vec{x} + L \end{aligned}$$

Es un epimorfismo.

(c) Sean  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  una base de  $V$ , la aplicación

$$\begin{aligned} f : V &\rightarrow \mathbb{K}^n \\ \vec{x} &\rightarrow (a^1, \dots, a^n). \end{aligned}$$

Donde,  $\vec{x} = a^1\vec{u}_1 + \dots + a^n\vec{u}_n$ . Entonces  $f$  es un isomorfismo.

**Proposición 2.1.** Sea  $f : V \rightarrow V'$  una aplicación lineal.

(a) Si  $L \in \mathcal{L}(V)$

$$f(L) = \{f(\vec{x}) \in V' : \vec{x} \in L\} \in \mathcal{L}(V').$$

(b)  $f(\vec{0}) = \vec{0}$  y  $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$ .

(c) Si  $L' \in \mathcal{L}(V')$ ,

$$f^{-1}(L') = \{\vec{x} \in V : f(\vec{x}) \in L'\} \in \mathcal{L}(V).$$

(d)  $0 : V \rightarrow V'$  tal que  $\vec{x} \rightarrow \vec{0}$  es una aplicación lineal.

*Demostración.* (a) Queremos ver que  $\forall \vec{x}', \vec{y}' \in f(L) \Rightarrow \exists \vec{x}, \vec{y} \in L, f(\vec{x}) = \vec{x}'$  y  $f(\vec{y}) = \vec{y}'$ . Tenemos que ver que la suma y el producto por escalares está bien definidas.

$$\vec{x}' + \vec{y}' = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = f(\vec{x} + \vec{y}) \in f(L).$$

Similarmente, para el producto por escalares, si  $a \in \mathbb{K}$ ,

$$a\vec{x}' = af(\vec{x}) = f(a\vec{x}) \in f(L).$$

(b) Tenemos que  $f(\vec{0}) = f(0 \cdot \vec{x}) = 0f(\vec{x}) = \vec{0}$ . Similarmente,

$$f(-\vec{x}) = f((-1)\vec{x}) = -f(\vec{x}).$$

Otra demostración es:

$$f(\vec{x}) + f(-\vec{x}) = f(\vec{x} + (-\vec{x})) = f(\vec{0}) = \vec{0}.$$

(c) Sean  $\vec{x}, \vec{y} \in f^{-1}(L')$ , entonces  $f(\vec{x}), f(\vec{y}) \in L'$ . Como  $L'$  es subespacio vectorial,

$$f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \in L'.$$

Por tanto,

$$f(\vec{x} + \vec{y}) \in L' \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in f^{-1}(L').$$

Para el producto por escalares, si  $a \in \mathbb{K}, \vec{x} \in f^{-1}(L')$ ,

$$f(\vec{x}) \in L' \Rightarrow af(\vec{x}) = f(a\vec{x}) \in L' \Rightarrow a\vec{x} \in f^{-1}(L').$$

□

**Corolario 2.1.** (a) Imagen.  $\text{Im}(f) = f(V) = \{f(\vec{x}) : \vec{x} \in V\} \in \mathcal{L}(V')$ .

(b) Núcleo.  $\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{\vec{0}\}) = \{\vec{x} \in V : f(\vec{x}) = \vec{0}\} \in \mathcal{L}(V)$ .

*Demostración.* Como  $V$  y  $\{\vec{0}\}$  son subespacios vectoriales su imagen y preimagen, respectivamente, también serán subespacios vectoriales por la proposición 2.1.  $\square$

**Proposición 2.2.** Sea  $f : V \rightarrow V'$  una aplicación lineal, entonces:

(a)  $f$  es epimorfismo  $\iff \text{Im}(f) = V'$ .

(b)  $f$  es monomorfismo  $\iff \text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$ .

*Demostración.* (a) Es la definición de sobreyectividad.

(b) Primera implicación. Tenemos que  $f(\vec{0}) = \vec{0}$ . Si  $f(\vec{x}) = \vec{0}$ , tenemos que  $\vec{x} = \vec{0}$  (porque  $f$  es inyectiva). Segunda implicación. Supongo que  $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$ , entonces

$$f(\vec{x}) = f(\vec{y}) \Rightarrow f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = f(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} - \vec{y} \in \text{Ker}(f) \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}.$$

$\square$

**Proposición 2.3.** Sea  $f : V \rightarrow V'$  una aplicación lineal y sea  $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\}$  un sistema de generadores de  $L \in \mathcal{L}(V)$ . Entonces  $\{f(\vec{x}_1), \dots, f(\vec{x}_p)\}$  es un sistema de generadores de  $f(L)$ .<sup>a</sup>

<sup>a</sup>La independencia lineal no se conserva en una aplicación lineal en general.

*Demostración.* Sea  $\vec{x}' \in f(L)$ , existe  $\vec{x} \in L$  tal que  $f(\vec{x}) = \vec{x}'$ . Como  $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\}$  es un sistema de generadores de  $L$ , existen  $a^i \in \mathbb{K}$  escalares tales que

$$\vec{x} = a^1 \vec{x}_1 + \dots + a^p \vec{x}_p.$$

Entonces,

$$\vec{x}' = f(a^1 \vec{x}_1 + \dots + a^p \vec{x}_p) = a^1 f(\vec{x}_1) + \dots + a^p f(\vec{x}_p).$$

$\square$

**Teorema 2.1.** Sea  $f : V \rightarrow V'$  una aplicación lineal. Entonces,  $f$  es un monomorfismo si y solo si  $\forall p \in \mathbb{N}, \forall \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\} \subset V$  linealmente independientes, implica que  $\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_p)\}$  son linealmente independientes.

*Demostración.* (i) Si  $f$  es un monomorfismo y sea  $p \in \mathbb{N}$ , con  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\} \subset V$  linealmente independientes. Cogemos  $a^i \in \mathbb{K}$  tales que

$$a^1 f(\vec{u}_1) + \dots + a^p f(\vec{u}_p) = \vec{0}.$$

Como  $f$  es una aplicación lineal,

$$\begin{aligned} & a^1 f(\vec{u}_1) + \cdots + a^p f(\vec{u}_p) \\ &= f(a^1 \vec{u}_1 + \cdots + a^p \vec{u}_p) \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Como  $f$  es monomorfismo, tenemos que

$$a^1 \vec{u}_1 + \cdots + a^p \vec{u}_p = \vec{0}.$$

Como estos vectores forman una base, tenemos que  $a^1 = \cdots = a^p = 0$ .

- (ii) Lo hacemos por contraposición. Suponemos que  $f$  no es inyectiva (no es monomorfismo), por lo que existe  $\vec{x} \neq \vec{0}$  tal que  $\vec{x} \in \text{Ker}(f)$ . Entonces,  $\{\vec{x}\}$  es linealmente independiente y  $\{f(\vec{x})\} = \{\vec{0}\}$  es linealmente dependiente. □

**Teorema 2.2.** Sea  $f : V \rightarrow V'$  una aplicación lineal. Entonces  $f$  es epimorfismo si y solo si para cada sistema de generadores  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  de  $V$ ,  $\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)\}$  es sistema de generadores de  $V'$ .

*Demostración.* Sabemos que si  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  es sistema de generadores en  $V$ , entonces  $\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)\}$  será sistema de generadores de  $\text{Im}(f)$ . Si  $f$  es epimorfismo, entonces será base de  $V'$  y, si es base de  $V'$  es porque  $\text{Im}(f) = V'$ , por lo que es epimorfismo. □

**Proposición 2.4.** Sean  $f : V \rightarrow V'$  y  $g : V' \rightarrow V''$  aplicaciones lineales. Entonces, la composición  $g \circ f$  también es lineal.

*Demostración.* Sean  $\vec{x}, \vec{y} \in V$ , tenemos que

$$g(f(\vec{x} + \vec{y})) = g(f(\vec{x}) + f(\vec{y})) = g(f(\vec{x})) + g(f(\vec{y})).$$

Entonces,  $g \circ f$  es lineal respecto a la suma. Similarmente, si  $a \in \mathbb{K}, \vec{x} \in V$  tenemos que

$$g(f(a\vec{x})) = g(af(\vec{x})) = ag(f(\vec{x})).$$

Por tanto,  $g \circ f$  es una aplicación lineal. □

**Proposición 2.5.** Sea  $f : V \rightarrow V'$  un isomorfismo (lineal y biyectiva) <sup>a</sup>. Sabemos que existe  $f^{-1} : V' \rightarrow V$ . Entonces,  $f^{-1}$  es isomorfismo.

<sup>a</sup>Una función es biyectiva si y sólo si tiene inversa.

*Demostración.* Solo tenemos que demostrar que es aplicación lineal, porque inversa de una biyección también es biyección. Si  $\forall \vec{x}', \vec{y}' \in V'$ , como  $f$  es biyectiva,  $\exists! \vec{x}, \vec{y} \in V$  tales que  $\vec{x}' = f(\vec{x}) \iff \vec{x} = f^{-1}(\vec{x}')$  y  $\vec{y}' = f(\vec{y}) \iff \vec{y} = f^{-1}(\vec{y}')$ . Entonces,

$$f^{-1}(\vec{x}' + \vec{y}') = f^{-1}(f(\vec{x}) + f(\vec{y})) = f^{-1}(f(\vec{x} + \vec{y})) = \vec{x} + \vec{y} = f^{-1}(\vec{x}') + f^{-1}(\vec{y}').$$

Similarmente, si  $a \in \mathbb{K}$  y  $\vec{x}' \in V'$ ,  $\exists! \vec{x} \in V$  tal que  $f(\vec{x}) = \vec{x}' \iff f^{-1}(\vec{x}') = \vec{x}$ . Entonces tenemos que,

$$f^{-1}(a\vec{x}') = f^{-1}(af(\vec{x})) = f^{-1}(f(a\vec{x})) = a\vec{x} = af^{-1}(\vec{x}').$$

□

**Teorema 2.3.** Sea  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  una base de  $V$  y sean  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \subset V'$ . Entonces,  $\exists! f : V \rightarrow V'$  lineal tal que  $f(\vec{u}_i) = \vec{v}_i$ .

*Demostración.* (i) Primero demostramos la unicidad, es decir, asumimos que existe y demostramos que debe ser única. Entonces, asumimos que existe  $f : V \rightarrow V'$  lineal tal que  $f(\vec{u}_i) = \vec{v}_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ . Sea  $\vec{x} \in V$ , entonces existen  $a^i \in \mathbb{K}$  únicos tales que

$$\vec{x} = a^1 \vec{u}_1 + \dots + a^n \vec{u}_n.$$

Entonces,

$$f(\vec{x}) = f(a^1 \vec{u}_1 + \dots + a^n \vec{u}_n) = a^1 f(\vec{u}_1) + \dots + a^n f(\vec{u}_n) = a^1 \vec{v}_1 + \dots + a^n \vec{v}_n.$$

Si existiese otra función  $g : V \rightarrow V'$  tal que  $g(\vec{u}_i) = \vec{v}_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , tendríamos que  $f(\vec{x}) = g(\vec{x})$ ,  $\forall \vec{x} \in V$ .

(ii) Ahora demostramos la existencia. Sea  $f : V \rightarrow V'$  la aplicación  $f(\vec{x}) = x^1 \vec{v}_1 + \dots + x^n \vec{v}_n$ , donde  $\vec{x} = x^1 \vec{u}_1 + \dots + x^n \vec{u}_n$ . Tenemos que demostrar que esta aplicación es lineal. Si  $\vec{x}, \vec{y} \in V$  queremos ver que  $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} f(\vec{x} + \vec{y}) &= f((x^1 \vec{u}_1 + \dots + x^n \vec{u}_n) + (y^1 \vec{u}_1 + \dots + y^n \vec{u}_n)) \\ &= f((x^1 + y^1) \vec{u}_1 + \dots + (x^n + y^n) \vec{u}_n) \\ &= (x^1 + y^1) \vec{v}_1 + \dots + (x^n + y^n) \vec{v}_n \\ &= (x^1 \vec{v}_1 + \dots + x^n \vec{v}_n) + (y^1 \vec{v}_1 + \dots + y^n \vec{v}_n) \\ &= f(\vec{x}) + f(\vec{y}). \end{aligned}$$

Similarmente,

$$f(a\vec{x}) = f(a(x^1 \vec{u}_1 + \dots + x^n \vec{u}_n)) = f(ax^1 \vec{u}_1 + \dots + ax^n \vec{u}_n) = af(\vec{x}).$$

□

Podemos ver que

$$f(\vec{u}_i) = f(0 \cdot \vec{u}_1 + \dots + 0 \cdot \vec{u}_{i-1} + 1 \cdot \vec{u}_i + 0 \cdot \vec{u}_{i+1} + \dots + 0 \cdot \vec{u}_n) = 0 \cdot \vec{v}_1 + \dots + 1 \cdot \vec{v}_i + \dots + 0 \cdot \vec{v}_n = \vec{v}_i.$$

**Corolario 2.2.** Sea  $f : V \rightarrow V'$  lineal y  $f(\vec{u}_i) = g(\vec{u}_i), \forall i = 1, \dots, n$  donde  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  es base, entonces  $f = g$ .

**Definición 2.3.** Dos espacios vectoriales  $V$  y  $V'$  son isomorfos si existe  $f : V \rightarrow V'$  isomorfismo. Lo expresaremos como  $V \approx V'$ .

**Teorema 2.4.** Sea  $f : V \rightarrow V'$  una aplicación lineal. Entonces son equivalentes:

- (a)  $f$  es isomorfismo.
- (b)  $\forall \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$  base de  $V$ ,  $\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)\}$  es base de  $V'$ .
- (c)  $\exists \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  base de  $V$  tal que  $\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)\}$  es base de  $V'$ .

*Demostración.* Vamos a ver que (a)  $\Rightarrow$  (b), que (b)  $\Rightarrow$  (c) y que (c)  $\Rightarrow$  (a).

(a)  $\Rightarrow$  (b) Suponemos que  $f$  es un isomorfismo y sea  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  base de  $V$ . Entonces este conjunto es sistema de generadores y son linealmente independientes. Entonces  $\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)\}$  es sistema de generadores de  $V'$ . Además, como son linealmente independientes,  $\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)\}$  también son linealmente independientes.

(b)  $\Rightarrow$  (c) Evidente.

(c)  $\Rightarrow$  (a) Sea  $f : V \rightarrow V'$  lineal, entonces  $\exists \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  base de  $V$ , entonces tenemos que  $\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)\}$  es base de  $V'$ . Sea  $g : V' \rightarrow V$ , tal que  $g = f^{-1}$ , la única aplicación lineal tal que  $g(f(\vec{u}_i)) = \vec{u}_i, \forall i = 1, \dots, n$ . Entonces, tenemos que  $f$  tiene inversa, por lo que es biyectiva y, además, como es aplicación lineal, es isomorfismo.

□

**Corolario 2.3.**  $V \approx V' \iff \dim V = \dim V'$

*Demostración.* (i) Si  $V \approx V'$ , existe un isomorfismo entre ellos, y podemos encontrar una base con el mismo número de elementos en  $V'$ .

(ii) Supongamos que  $\dim V = \dim V'$ . Sea  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  base de  $V$  y  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  base de  $V'$  y  $f : V \rightarrow V'$  la única aplicación lineal tal que  $f(\vec{u}_i) = \vec{v}_i, \forall i = 1, \dots, n$ . Como es una aplicación lineal que lleva bases en bases es un isomorfismo.

□

**Observación 2.1.** Si consideramos la relación de equivalencia de que dos espacios vectoriales sean isomorfos, tenemos que el conjunto cociente tiene tantos elementos como biyecciones.

**Teorema 2.5.**

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Im}(f).$$

*Demostración.* Sea  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r\}$  base de  $\operatorname{Ker}(f)$  y sea  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \vec{u}_{r+1}, \dots, \vec{u}_n\}$  base de  $V$ . Entonces  $\dim V = n$  y  $\dim \operatorname{Ker}(f) = r$ . Vamos a ver que  $\{f(\vec{u}_{r+1}), \dots, f(\vec{u}_n)\}$  es base de  $\operatorname{Im}(f)$ . Primero tenemos que ver que son sistema de generadores. Sea  $\vec{x}' \in \operatorname{Im}(f)$ , entonces existe  $\vec{x} \in V$  tal que  $f(\vec{x}) = \vec{x}'$ . Como  $\vec{x} \in V$ , existen  $a^i \in \mathbb{K}$  tales que

$$\vec{x} = a^1 \vec{u}_1 + \dots + a^n \vec{u}_n.$$

Entonces tenemos que

$$\vec{x}' = f(\vec{x}) = f(a^1 \vec{u}_1 + \dots + a^n \vec{u}_n) = f a^1(\vec{u}_1) + \dots + a^r f(\vec{u}_r) + a^{r+1} f(\vec{u}_{r+1}) + \dots + a^n f(\vec{u}_n).$$

Tenemos que como  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r\}$  es una base de  $\operatorname{Ker}(f)$ ,  $f(\vec{u}_i) = \vec{0}, \forall i = 1, \dots, r$ :

$$\vec{x}' = a^{r+1} f(\vec{u}_{r+1}) + \dots + a^n f(\vec{u}_n).$$

Entonces,  $\{f(\vec{u}_{r+1}), \dots, f(\vec{u}_n)\}$  es sistema de generadores. Ahora vamos a ver que son linealmente independientes. Sean  $b^i \in \mathbb{K}$  tal es que

$$\begin{aligned} b^{r+1} f(\vec{u}_{r+1}) + \dots + b^n f(\vec{u}_n) &= \vec{0} \\ \therefore f(b^{r+1} \vec{u}_{r+1} + \dots + b^n \vec{u}_n) &= \vec{0} \end{aligned}$$

Por tanto,  $b^{r+1} \vec{u}_{r+1} + \dots + b^n \vec{u}_n \in \operatorname{Ker}(f)$  y lo podemos poner como combinación lineal de su base (existen  $b^i \in \mathbb{K}$  tales que):

$$\begin{aligned} b^{r+1} \vec{u}_{r+1} + \dots + b^n \vec{u}_n &= b^1 \vec{u}_1 + \dots + b^r \vec{u}_r. \\ \therefore -b^1 \vec{u}_1 - \dots - b^r \vec{u}_r + b^{r+1} \vec{u}_{r+1} + \dots + b^n \vec{u}_n &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Como se trata de una base de  $V$ , tenemos que son linealmente independientes y  $b^1 = \dots = b^{r+1} = \dots = b^n = 0$ . Por lo que todos los coeficientes son nulos,  $\{f(\vec{u}_{r+1}), \dots, f(\vec{u}_n)\}$  son linealmente independientes y forman una base de  $\operatorname{Im}(f)$ .  $\square$

**Observación 2.2.** Si  $\dim V = \dim V'$  entonces,  $f$  es monomorfismo por lo que  $\dim \operatorname{Ker}(f) = \vec{0}$ . Entonces,  $\dim V = \dim V' = \dim \operatorname{Im}(f) \iff \operatorname{Im}(f) = V'$ . Es decir, monomorfismo si y solo si epimorfismo si y solo si isomorfismo, es decir, para demostrar que es un isomorfismo solo hay que demostrar que es un monomorfismo!

**Definición 2.4** (Endomorfismo). Un **endomorfismo** de  $V$  es una aplicación lineal  $f : V \rightarrow V$ .

**Definición 2.5** (Automorfismo). Un **automorfismo** de  $V$  es un endomorfismo biyectivo de  $V$ .

**Teorema 2.6.** Sea  $f : V \rightarrow V'$  lineal, entonces  $p : V \rightarrow V/\text{Ker}(f)$  tal que  $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \text{Ker}(f)$  es un epimorfismo. Sea  $i : \text{Im}(f) \rightarrow V'$  tal que  $\vec{x}' \rightarrow \vec{x}'$  es monomorfismo. Entonces,  $\exists! b : V/\text{Ker}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$  tal que

$$i \circ b \circ p = f : V \rightarrow V'.$$

Además,  $b$  es isomorfismo.

*Demostración.* Definimos  $b(\vec{x} + \text{Ker}(f)) = f(\vec{x})$ .

**Unicidad.** Suponemos que existe  $b$ ,  $\forall \vec{x} \in V$  tal que  $b(\vec{x} + \text{Ker}(f)) = f(\vec{x})$ .

**Vemos que  $b$  está bien definida.** Si  $\vec{y} \in V$ , con  $\vec{x} + \text{Ker}(f) = \vec{y} + \text{Ker}(f)$ , tenemos que

$$\vec{x} - \vec{y} \in \text{Ker}(f) \Rightarrow f(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}.$$

Entonces,

$$f(\vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = \vec{0} \iff f(\vec{x}) = f(\vec{y}).$$

Entonces,

$$b(\vec{x} + \text{Ker}(f)) = b(\vec{y} + \text{Ker}(f)).$$

**Comprobamos que  $b$  es lineal.** Comenzamos con la suma. Si  $\vec{x}, \vec{y} \in V$ ,

$$\begin{aligned} b((\vec{x} + \text{Ker}(f)) + (\vec{y} + \text{Ker}(f))) &= b((\vec{x} + \vec{y}) + \text{Ker}(f)) \\ &= f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \\ &= b(\vec{x} + \text{Ker}(f)) + b(\vec{y} + \text{Ker}(f)). \end{aligned}$$

Ahora comprobamos el producto por escalares. Sea  $a \in \mathbb{K}$  y  $\vec{x} \in V$ ,

$$\begin{aligned} b(a(\vec{x} + \text{Ker}(f))) &= b(a\vec{x} + \text{Ker}(f)) \\ &= f(a\vec{x}) = af(\vec{x}) = a(b(\vec{x} + \text{Ker}(f))). \end{aligned}$$

**Comprobamos que  $b$  es un epimorfismo.**

$$\forall \vec{x}' \in \text{Im}(f) \Rightarrow \exists \vec{x} \in V, f(\vec{x}) = \vec{x}'.$$

Por tanto,  $f(\vec{x}) = b(\vec{x} + \text{Ker}(f)) = \vec{x}'$ . Entonces,  $\vec{x}' \in \text{Im}(b)$ .

**Comprobamos que  $b$  es un monomorfismo.** Sea  $\vec{x} + \text{Ker}(f) \in \text{Ker}(b)$ , entonces  $f(\vec{x}) = \vec{0}$  por lo que  $\vec{x} \in \text{Ker}(f)$ . Concluimos que

$$\vec{x} + \text{Ker}(f) = \vec{0} + \text{Ker}(f).$$

□

**Observación 2.3.** Lo que nos interesa concluir con este teorema es que si  $f : V \rightarrow V'$  es lineal, entonces

$$\text{Im}(f) \approx V/\text{Ker}(f).$$



**Proposición 2.6.** Sea  $L$  el complementario vectorial de  $\text{Ker}(f)$  en  $V$ , es decir,

$$L \oplus \text{Ker}(f) = V \Rightarrow \dim L + \dim \text{Ker}(f) = \dim V.$$

La aplicación

$$\begin{aligned} f_L : L &\rightarrow \text{Im}(f) \\ \vec{x} &\rightarrow f(\vec{x}), \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

*Demostración.* Tenemos que  $f_L$  es lineal. Además,

$$\text{Ker}(f_L) = \{\vec{x} \in L : f(\vec{x}) = \vec{0}\} = L \cap \text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}.$$

Entonces tenemos que es monomorfismo. Por otro lado queremos ver que,

$$\text{Im}(f_L) = \text{Im}(f).$$

Si  $\vec{x}' \in \text{Im}(f)$ , existe  $\vec{x} \in V$  tal que  $\vec{x}' = f(\vec{x})$ . Como  $\vec{x} \in V$ ,  $\exists \vec{y} \in \text{Ker}(f)$  y  $\vec{z} \in L$  tales que

$$\vec{x}' \in \text{Im}(f_L).$$

Es decir,

$$\vec{x}' = f(\vec{x}) = f(\vec{y} + \vec{z}) = f(\vec{y}) + f(\vec{z}) = f(\vec{z}) = f_L(\vec{z}).$$

Es trivial ver que  $\text{Im}(f_L) \subset \text{Im}(f)$ . Por tanto es epimorfismo y, consecuentemente, isomorfismo.  $\square$

**Corolario 2.4.** Si  $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ ,

$$(L_1 + L_2) / L_1 \approx L_2 / L_1 \cap L_2.$$

*Demostración.* Si  $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ ,

$$\dim(L_1 + L_2) - \dim L_1 = \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

Entonces tenemos que,

$$\dim(L_1 + L_2) / L_1 = \dim L_2 / L_1 \cap L_2.$$

$\square$

**Corolario 2.5.** Si  $L_1 \subset L_2 \in \mathcal{L}(V)$ , entonces

$$(V / L_1) / (L_2 / L_1) \approx V / L_2.$$

**Teorema 2.7.**  $\text{Hom}(V, V')$  tiene una estructura de  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial.

*Demostración.* Sea  $\text{Hom}(V, V') = \{f : V \rightarrow V' : f \text{ lineal}\}$ . En  $\text{Hom}(V, V')$  definimos la suma de la siguiente manera. Si  $f, g \in \text{Hom}(V, V')$  definimos

$$\begin{aligned} f + g : V &\rightarrow V' \\ (f + g)(\vec{x}) &= f(\vec{x}) + g(\vec{x}). \end{aligned}$$

Vamos a ver que  $f + g$  es aplicación lineal. Si  $\vec{x}, \vec{y} \in V$ ,

$$(f + g)(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x} + \vec{y}) + g(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) + g(\vec{x}) + g(\vec{y}) = (f + g)(\vec{x}) + (f + g)(\vec{y}).$$

Si  $a \in \mathbb{K}$  y  $\vec{x} \in V$ ,

$$(f + g)(a\vec{x}) = f(a\vec{x}) + g(a\vec{x}) = af(\vec{x}) + ag(\vec{x}) = a(f + g)(\vec{x}).$$

Entonces,  $f + g$  es aplicación lineal. Así, vamos a comprobar que  $(\text{Hom}(V, V'), +)$  es grupo abeliano. Comprobamos la conmutatividad. Si  $\vec{x} \in V$ ,

$$(f + g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}) = g(\vec{x}) + f(\vec{x}) = (g + f)(\vec{x}).$$

Aplicamos la conmutatividad en  $V'$  como espacio vectorial. Comprobamos la asociatividad. Si  $f, g, h \in \text{Hom}(V, V')$ ,

$$((f + g) + h)(\vec{x}) = (f + g)(\vec{x}) + h(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}) + h(\vec{x}) = f(\vec{x}) + (g + h)(\vec{x}) = (f + (g + h))(\vec{x}).$$

Vamos a ver que  $0 \in \text{Hom}(V, V')$ , definida por  $0(\vec{x}) = \vec{0}, \forall \vec{x} \in V$ . Tenemos que si  $\vec{x}, \vec{y} \in V$ ,

$$0(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{0} = 0(\vec{x}) + 0(\vec{y}).$$

Si  $a \in \mathbb{K}, \vec{x} \in V$ ,

$$0(a\vec{x}) = \vec{0} = a \cdot 0(\vec{x}) = a \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

Si  $f \in \text{Hom}(V, V'), \forall \vec{x} \in V$ ,

$$(f + 0)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + 0(\vec{x}) = f(\vec{x}).$$

Entonces, existe el elemento neutro. Vamos a ver la existencia del opuesto. Si  $f \in \text{Hom}(V, V')$ , tomamos  $-f$  tal que  $-f(\vec{x}) = (-f)(\vec{x})$ . Entonces tenemos que

$$(f + (-f))(\vec{x}) = f(\vec{x}) + (-f)(\vec{x}) = f(\vec{x}) - f(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Entonces,

$$(f + (-f))(\vec{x}) = 0(\vec{x}).$$

Producto por escalares. Si  $a \in \mathbb{K}$  y  $f \in \text{Hom}(V, V')$ , defino  $(af)(\vec{x}) = af(\vec{x})$ . Vamos a ver que  $af \in \text{Hom}(V, V')$ .

$$(af)(\vec{x} + \vec{y}) = af(\vec{x} + \vec{y}) = af(\vec{x}) + af(\vec{y}) = (af)(\vec{x}) + (af)(\vec{y}).$$

Similarmente,

Si  $b \in \mathbb{K}$  y  $\vec{x} \in V$ ,

$$(af)(b\vec{x}) = af(b\vec{x}) = abf(\vec{x}) = b(af(\vec{x})) = b(f(a\vec{x})).$$

Si  $a \in \mathbb{K}$  y  $f, g \in \text{Hom}(V, V')$ , si  $\vec{x} \in V$ ,

$$(a(f+g))(\vec{x}) = a(f+g)(\vec{x}) = af(\vec{x}) + ag(\vec{x}) = (af)(\vec{x}) + (ag)(\vec{x}) = (af+ag)(\vec{x}).$$

Además,

$$(1f)(\vec{x}) = 1f(\vec{x}) = f(\vec{x}).$$

□

## 2.1. Ejemplos de aplicaciones lineales

### 2.1.1. Formas Lineales

**Definición 2.6** (Forma lineal). Una **forma lineal** definida en  $V$  es una aplicación lineal  $\lambda : V \rightarrow \mathbb{K}$ .

$^a\mathbb{K}$  es un espacio vectorial sobre sí mismo de dimensión 1.

**Teorema 2.8.** Si  $\lambda$  es una forma lineal no nula, entonces  $\lambda$  es sobreyectiva (epimorfismo).

*Demostración.* Sea  $a \in \mathbb{K}$ . Sabemos que  $\lambda \neq 0$ , por lo que existe  $\vec{x}_0 \in V$  tal que  $\lambda(\vec{x}_0) = b \neq 0$ . Consideramos  $\vec{x} = \frac{a}{b}\vec{x}_0 \in V$ , entonces

$$\lambda(\vec{x}) = \frac{a}{b}\lambda(\vec{x}_0) = a.$$

□

**Definición 2.7.** Una **recta vectorial** de  $V$  es un subespacio vectorial de dimensión 1. Análogamente, un **plano vectorial** de  $V$  es un subespacio vectorial de dimensión 2. Un **hiperplano vectorial** de  $V$  es un subespacio vectorial de dimensión  $\dim V - 1$ .

**Observación 2.4.** Los complementarios vectoriales de los hiperplanos son rectas y viceversa.

Si  $\lambda : V \rightarrow \mathbb{K}$  lineal no nula,

$$\dim \text{Im}(\lambda) = 1.$$

Por tanto, la imagen de  $\lambda$  es una recta en  $\mathbb{K}$ . Además,

$$\dim V = \dim \text{Im}(\lambda) + \dim \text{Ker}(\lambda).$$

Si  $\lambda \neq 0$ , tenemos que  $\text{Ker}(\lambda)$  es un hiperplano vectorial.

**Proposición 2.7.** Si  $L \in \mathcal{L}(V)$  es un hiperplano vectorial, existe  $\lambda : V \rightarrow \mathbb{K}$  lineal no nula, tal que  $L = \text{Ker}(\lambda)$ <sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Esto nos sirve para definir los hiperplanos en dimensión infinita.

*Demostración.* Sea  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-1}\}$  base de  $L$  y sea  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  base de  $V$ . Definimos  $\lambda : V \rightarrow \mathbb{K}$  la única aplicación lineal tal que  $\lambda(\vec{u}_i) = 0, \forall i = 1, \dots, n-1$ , y cogemos  $\lambda(\vec{u}_n) = 1$ <sup>1</sup>. Entonces  $\text{Ker}(\lambda) = L$ , pues su núcleo va a ser un hiperplano vectorial y este contiene a la base de  $L$ . Un hiperplano vectorial contenido en otro hiperplano vectorial es el mismo.  $\square$

### 2.1.2. Homotecias vectoriales

**Definición 2.8** (Homotecia vectorial). Sea  $\alpha \in \mathbb{K} - \{0\}$ . La **homotecia vectorial** de razón  $\alpha$  es la aplicación  $h_\alpha : V \rightarrow V$  tal que  $\vec{x} \rightarrow \alpha\vec{x}$ .

**Teorema 2.9.** (i) Todas las homotecias vectoriales son automorfismos. Es decir,

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} - \{0\}, h_\alpha \in \text{Aut}(V).$$

(ii) La aplicación  $\mathbb{K} - \{0\} \rightarrow H(V)$  donde  $H(V) = \{h_\alpha : \alpha \in \mathbb{K} - \{0\}\}$  con  $\alpha \rightarrow h_\alpha$ , es biyectiva.

(iii)  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}^*$ ,

$$h_{\alpha\beta} = h_\alpha \circ h_\beta.$$

*Demostración.* (i) Tenemos que demostrar que es aplicación lineal, pues está claro que es biyectiva.

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, h_\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y} = h_\alpha(\vec{x}) + h_\alpha(\vec{y}).$$

Si  $a \in \mathbb{K}$ ,

$$h_\alpha(a\vec{x}) = \alpha(a\vec{x}) = a h_\alpha(\vec{x}).$$

(ii) Está claro que la aplicación es sobreyectiva, tenemos que comprobar que es inyectiva: Si  $h_\alpha = h_\beta$ , tenemos que  $\forall \vec{x} \in V$ ,

$$\alpha\vec{x} = \beta\vec{x}.$$

Si  $V$  no es nulo, podemos deducir que,

$$\exists \vec{x} \neq \vec{0}, (\alpha - \beta)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta.$$

Por lo que esta aplicación es inyectiva.

(iii)

$$\forall \vec{x} \in V, h_\beta \circ h_\alpha(\vec{x}) = h_\beta(\alpha\vec{x}) = \beta\alpha\vec{x} = h_{\beta\alpha}(\vec{x}).$$

$\square$

<sup>1</sup>Vale cualquier escalar no nulo.

**Teorema 2.10.** Sea  $f : V \rightarrow V$  lineal. Entonces  $f$  es una homotecia vectorial si y solo si  $\forall L \in \mathcal{L}(V)$  recta vectorial  $f(L) = L$ .

*Demostración.* (i) Si  $\alpha \in \mathbb{K}^*$  tal que  $f = h_\alpha$ , sea  $L \in \mathcal{L}(V)$  una recta vectorial. Entonces, existe  $\vec{x}_0 \in L^*$  tal que  $\{\vec{x}_0\}$  es base de  $L$ . Entonces,  $L = \{a\vec{x}_0 : a \in \mathbb{K}\}$ . Además, tenemos que

$$h_\alpha(L) = \{\alpha a\vec{x}_0 : a \in \mathbb{K}\} = L.$$

(ii) Si  $\vec{x} \in V^*$ , entonces  $L(\{\vec{x}\})$  es una recta vectorial. Tenemos que

$$f(L(\{\vec{x}\})) = L(\{\vec{x}\}).$$

Si  $\vec{x} \in L(\{\vec{x}\})$ ,

$$f(\vec{x}) \in L(\{\vec{x}\}) \Rightarrow \exists \alpha_{\vec{x}} \in \mathbb{K}, f(\vec{x}) = \alpha_{\vec{x}}\vec{x}.$$

Tenemos que ver que  $\alpha$  es único. Si  $\vec{x}, \vec{y} \in V^*$ , tenemos que ver si son linealmente dependientes o linealmente independientes. Si son linealmente dependientes,  $\exists a \in \mathbb{K}^*$  tal que

$$\vec{x} = a\vec{y}.$$

Entonces,  $f(\vec{x}) = af(\vec{y}) = f(a\vec{y}) = \alpha_{a\vec{y}}a\vec{y} = \alpha_{\vec{y}}\vec{x}$ . Tenemos que

$$(\alpha_{\vec{x}} - \alpha_{\vec{y}})(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow \alpha_{\vec{x}} = \alpha_{\vec{y}}.$$

Si son linealmente independientes,  $\vec{x} + \vec{y} \neq 0$ ,

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = \alpha_{\vec{x} + \vec{y}}(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha_{\vec{x} + \vec{y}}\vec{x} + \alpha_{\vec{x} + \vec{y}}\vec{y} = \alpha_{\vec{x}}\vec{x} + \alpha_{\vec{y}}\vec{y}.$$

Entonces tenemos que

$$(\alpha_{\vec{x} + \vec{y}} - \alpha_{\vec{x}})\vec{x} = (\alpha_{\vec{x} + \vec{y}} - \alpha_{\vec{y}})\vec{y} \Rightarrow \alpha_{\vec{x}} = \alpha_{\vec{x} + \vec{y}} = \alpha_{\vec{y}}.$$

Sea  $\alpha = \alpha_{\vec{x}}$ , con  $\vec{x} \in V^*$ . Entonces si  $\vec{y} \in V^*$  tenemos que  $f(\vec{y}) = \alpha\vec{y}$  y  $\vec{0} = \alpha\vec{0}$ . Por tanto, se trata de una homotecia lineal. □

### 2.1.3. Proyecciones

Supongamos que  $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$  y seam  $L_1 \oplus L_2 = V$ .  $\forall \vec{x} \in V, \exists \vec{x}_1 \in L_1, \exists \vec{x}_2 \in L_2, \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ .

**Definición 2.9** (Proyección). La **proyección** de base  $L_1$  (respecto a la base  $L_2$ ) y dirección  $L_2$  (respecto a  $L_1$ ) es la aplicación

$$\begin{aligned} p_1 : V &\rightarrow V \\ \vec{x} &= \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \rightarrow \vec{x}_1. \end{aligned}$$

Respecto a  $p_2 : V \rightarrow V$  tal que  $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \rightarrow \vec{x}_2$ .

**Teorema 2.11.** (i)  $p_1 + p_2 = id_V$ .

(ii)  $p_1 \circ p_2 = 0$  y  $p_2 \circ p_1 = 0$ .

(iii)  $p_1$  y  $p_2$  son lineales.

(iv)  $p_1 \circ p_1 = p_1$  y  $p_2 \circ p_2 = p_2$ .

*Demostración.* (i)  $\forall \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2$ ,

$$(p_1 + p_2)(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = p_1(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + p_2(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \vec{x}_1 + \vec{x}_2.$$

(ii)

$$p_1 \circ p_2(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = p_1(\vec{x}_2) = p_1(\vec{0} + \vec{x}_2) = \vec{0}.$$

(iii)

$$p_1(\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{y}_1 + \vec{y}_2) = p_1((\vec{x}_1 + \vec{y}_1) + (\vec{x}_2 + \vec{y}_2)) = p_1(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + p_1(\vec{y}_1 + \vec{y}_2).$$

$$p_1(a\vec{x}) = p_1(a(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)) = p_1(a\vec{x}_1 + a\vec{x}_2) = a\vec{x}_1 = ap_1(\vec{x}_1 + \vec{x}_2).$$

(iv) Si  $\vec{x} \in V$ ,

$$p_1 \circ p_1(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = p_1(\vec{x}_1) = \vec{x}_1.$$

□

**Definición 2.10.** Un endomorfismo  $p : V \rightarrow V$  es un proyector si  $p^2 = p$ .

**Teorema 2.12.** Sea  $p$  un proyector definido en  $V$ , entonces  $(id_V - p)$  es un proyector y  $V = L_1 \oplus L_2$  donde  $L_1 = \text{Im}(p) = \text{Ker}(p - id_V)$  y  $L_2 = \text{Ker}(p) = \text{Im}(p - id_V)$ .

*Demostración.*  $\forall \vec{x} \in V$ ,

$$(id_V - p)^2(\vec{x}) = (id_V - p)(\vec{x} - p(\vec{x})) = \vec{x} - p(\vec{x}) - p(\vec{x}) + p^2(\vec{x}) = \vec{x} - p(\vec{x}) = (id_V - p)(\vec{x}).$$

Vamos a ver que  $V = L_1 \oplus L_2$  donde  $L_1 = \text{Im}(p)$  y  $L_2 = \text{Ker}(p)$ .

$$\forall \vec{x} \in V, \vec{x} = p(\vec{x}) + \vec{x} - p(\vec{x}), p(\vec{x} - p(\vec{x})) = p(\vec{x}) - p^2(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Tenemos que  $p(\vec{x}) \in \text{Im}(p)$  y  $(id_V - p)(\vec{x}) \in \text{Ker}(p)$ . Entonces  $V = L_1 \oplus L_2$ .

Si  $\vec{x} \in L_1 \cap L_2$ , existe  $\vec{y} \in V$  tal que  $p(\vec{y}) = \vec{x}$  y  $p(\vec{x}) = \vec{0}$ . Entonces,

$$p(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow p^2(\vec{y}) = \vec{0}.$$

Por tanto,  $\vec{x} = \vec{0}$  y  $p(\vec{y}) = \vec{x}$ .

Vamos a comprobar que

$$\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - id_V).$$

(i)  $\vec{x} \in \text{Im}(p)$ , entonces  $\exists \vec{y} \in V$  tal que  $p(\vec{y}) = \vec{x}$ .

$$(p - id_V)(\vec{x}) = (p - id_V)(p(\vec{y})) = \underbrace{p^2(\vec{y})}_p - p(\vec{y}) = \vec{0}.$$

Por tanto,  $\vec{x} \in \text{Ker}(p - id_V)$ .

(ii) Si  $\vec{x} \in \text{Ker}(p - id_V)$ , tenemos que

$$(p - id_V)(\vec{x}) = p(\vec{x}) - \vec{x} = \vec{0}.$$

Por tanto,  $\vec{x} = p(\vec{x})$  y, consecuentemente,  $\vec{x} \in \text{Im}(p)$ .

La proposición  $\text{Ker}(p) = \text{Im}(p - id_V)$  se demuestra igual.  $\square$

### 2.1.4. Simetrías vectoriales

Asumimos que el cuerpo  $\mathbb{K}$  es de característica distinta de 2.

**Definición 2.11.** Un endomorfismo  $s$  de  $V$  es involutivo si  $s^2 = id_V$  ( $\iff \exists s^{-1}$  y  $s^{-1} = s$ ).

**Definición 2.12.**  $s$  es la simetría vectorial de base  $L_1$  y dirección  $L_2$ .

**Teorema 2.13.** Sea  $s : V \rightarrow V$  un endomorfismo involutivo. Sea  $L_1 = \text{Im}(s + id_V)$  y  $L_2 = \text{Im}(id_V - s)$ . Entonces,  $L_1 \oplus L_2 = V$  y  $s = p_1 - p_2$  ( $p_1, p_2$  son proyecciones). Diremos que  $s$  es la simetría de base  $L_1$  y dirección  $L_2$ .

$$\text{Im}(s - id_V) = \text{Ker}(s + id_V) \quad \text{y} \quad \text{Im}(s + id_V) = \text{Ker}(s - id_V).$$

*Demostración.* Sea  $L_1 = \text{Im}(s + id_V)$  y  $L_2 = \text{Im}(id_V - s)$ .

$$\forall \vec{x} \in V, \vec{x} = \frac{\vec{x} - s(\vec{x})}{2} + \frac{\vec{x} + s(\vec{x})}{2} = (id_V - s)\left(\frac{\vec{x}}{2}\right) + (id_V + s)\left(\frac{\vec{x}}{2}\right).$$

Sea  $\vec{x} \in L_1 \cap L_2$ ,

$$\vec{x} \in L_1, \exists \vec{y} \in V, (s + id_V)(\vec{y}) = \vec{x} \Rightarrow s(\vec{x}) = s((s + id_V)(\vec{y})) = s(s(\vec{y}) + \vec{y}) = s^2(\vec{y}) + s(\vec{y}) = \vec{y} + s(\vec{y}) = \vec{x}.$$

$$\vec{x} \in L_2, \exists \vec{z} \in V, (id_V - s)(\vec{z}) = \vec{x} \Rightarrow s(\vec{x}) = s((id_V - s)(\vec{z})) = s(\vec{z}) - s^2(\vec{z}) = s(\vec{z}) - \vec{z} = -\vec{x}.$$

Entonces, si  $\vec{x} \in L_1 \cap L_2$ ,

$$s(\vec{x}) = \vec{x} \quad \text{y} \quad s(\vec{x}) = -\vec{x} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}.$$

$\square$

**Observación 2.5.** Tenemos que  $p_1(\vec{x}) = (id_V + s)\left(\frac{\vec{x}}{2}\right)$ , y  $p_2(\vec{x}) = (id_V - s)\left(\frac{\vec{x}}{2}\right)$ . Entonces,  $s = p_1 - p_2$ . Además, diremos que  $L_1 = \text{Ker}(s - id_V)$  y  $L_2 = \text{Ker}(s + id_V)$ . Esto se puede demostrar con ambas implicaciones:  $L_1 \subset \text{Ker}(id_V - s)$  y viceversa.

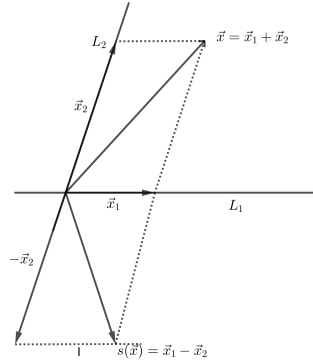


Figura 2.1: Ejemplo de simetrías vectoriales

## 2.2. Espacio vectorial dual

**Definición 2.13** (Espacio dual). Llamaremos **espacio dual** de  $V$  y lo representaremos por  $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{K})$ .

**Teorema 2.14.** Sea  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  base de  $V$ , entonces las formas lineales  $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$  definidas por ser las únicas formas lineales tales que

$$\omega^i(\vec{u}_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

que llamaremos base dual de  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ .

*Demostración.* Tenemos que ver que  $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$  son linealmente independientes. Sean  $a_i \in \mathbb{K}$  tales que

$$a_1\omega^1 + \dots + a_n\omega^n = 0 \in V^*.$$

Tenemos que  $\forall i = 1, \dots, n$ ,

$$0(\vec{u}_i) = 0 = (a_1\omega^1 + \dots + a_n\omega^n)(\vec{u}_i) = a_1\omega^1(\vec{u}_i) + \dots + a_i\omega^i(\vec{u}_i) + \dots + a_n\omega^n(\vec{u}_i) = a_i.$$

Por tanto,  $a_i = 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ .

Ahora vamos a ver que son sistema de generadores. Si  $\lambda \in V^*$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ ,

$$(\lambda(\vec{u}_1)\omega^1 + \lambda(\vec{u}_2)\omega^2 + \dots + \lambda(\vec{u}_n)\omega^n)(\vec{u}_i) = \lambda(\vec{u}_i).$$



Es decir, tenemos que

$$\lambda = \lambda(\vec{u}_1)\omega^1 + \cdots + \lambda(\vec{u}_n)\omega^n.$$

□

**Observación 2.6.**

$$\vec{x} = a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^n\vec{u}_n$$

$$\forall i = 1, \dots, n, w^i(\vec{x}) = w^i(a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^n\vec{u}_n) = a^1w^i(\vec{u}_1) + \cdots + a^nw^i(\vec{u}_n) = a^i.$$

**Corolario 2.6.**  $\dim V = \dim V^*$ .

**Observación 2.7.**  $(V^*)^* = V^{**}$  bidual.  $\forall \vec{x} \in V$ ,

$$\theta_{\vec{x}} : V^* \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\lambda \rightarrow \theta_{\vec{x}}(\lambda) = \lambda(\vec{x}), \forall \lambda \in V^*.$$

Tenemos que,  $\theta_{\vec{x}} \in V^{**}$ , además,  $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in V^*$ ,

$$\theta_{\vec{x}}(\lambda_1 + \lambda_2) = (\lambda_1 + \lambda_2)(\vec{x}) = (\lambda_1 + \lambda_2)(\vec{x}) = \lambda_1(\vec{x}) + \lambda_2(\vec{x}) = \theta_{\vec{x}}(\lambda_1) + \theta_{\vec{x}}(\lambda_2).$$

Además, si  $a \in \mathbb{K}$ ,  $\forall \lambda \in V^*$ ,

$$\theta_{\vec{x}}(a\lambda) = (a\lambda)(\vec{x}) = a\lambda(\vec{x}) = a\theta_{\vec{x}}(\vec{\lambda}).$$

Entonces tenemos que  $\theta_{\vec{x}}$  es una aplicación lineal y, por tanto,  $\theta_{\vec{x}} \in V^{**}$ .

**Teorema 2.15.** La aplicación

$$\theta : V \rightarrow V^{**}$$

$$\vec{x} \rightarrow \theta_{\vec{x}},$$

es lineal.

*Demostración.* Tenemos que  $\forall \lambda \in V^*$ ,

$$\theta_{\vec{x}+\vec{y}}(\lambda) = \lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda(\vec{x}) + \lambda(\vec{y}) = \theta_{\vec{x}}(\lambda) + \theta_{\vec{y}}(\lambda) = (\theta_{\vec{x}} + \theta_{\vec{y}})(\lambda).$$

Entonces tenemos que

$$\theta_{\vec{x}+\vec{y}} = \theta_{\vec{x}} + \theta_{\vec{y}} \iff \theta(\vec{x} + \vec{y}) = \theta(\vec{x}) + \theta(\vec{y}).$$

Además, si  $a \in \mathbb{K}$  y  $\vec{x} \in V$ :

$$\theta(a\vec{x}) = \theta_{a\vec{x}} = a\theta_{\vec{x}} = a\theta(\vec{x}).$$

Entonces,  $\forall \lambda \in V^*$ ,

$$\theta_{a\vec{x}}(\lambda) = \lambda(a\vec{x}) = a\lambda(\vec{x}) = (a\theta_{\vec{x}})(\lambda).$$

Por tanto,

$$\theta_{a\vec{x}} = a\theta_{\vec{x}} \iff \theta(a\vec{x}) = a\theta(\vec{x}).$$

□

**Definición 2.14.** Sea  $V^{**} = \text{Hom}(V^*, \mathbb{K})$  el espacio dual de  $V^*$ . Entonces es el espacio **bidual** de  $V$ . Además,

$$\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V.$$

**Teorema 2.16.**  $\theta$  es un isomorfismo de espacios vectoriales.

*Demostración.* Como tienen la misma dimensión, nos basta con demostrar que es inyectiva. Sea  $\vec{x} \in \text{Ker}(\theta)$ , queremos ver que  $\vec{x} = \vec{0}$ . Tenemos que  $\forall \lambda \in V^*$ ,

$$\theta_{\vec{x}}(\lambda) = \lambda(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Por tanto, tenemos que  $\vec{x} = \vec{0}$  (porque todas las formas lineales devuelven 0 si insertas 0) y, consecuentemente,  $\theta$  es isomorfismo.  $\square$

**Teorema 2.17.** Sea  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  base de  $V$  y sea  $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$  su dual. Tenemos que  $\{\theta_{\vec{u}_1}, \dots, \theta_{\vec{u}_n}\}$  es base de  $V^{**}$ . Además,  $\forall i, j = 1, \dots, n$ ,

$$\theta_{\vec{u}_i}(\omega^j) = \omega^j(\vec{u}_i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

Es decir, tenemos que  $\{\theta_{\vec{u}_1}, \dots, \theta_{\vec{u}_n}\}$  es la base dual de  $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ .

**Observación 2.8.** Si  $f : V \rightarrow V'$  lineal y  $\lambda' \in V'^*$ , tenemos que

$$\lambda' \circ f : V \rightarrow \mathbb{K}, \lambda' \circ f \in V^*.$$

Se tiene definida una aplicación (la aplicación dual de  $f$ )

$$\begin{aligned} f^* : V'^* &\rightarrow V^* \\ \lambda' &\rightarrow f^*(\lambda') = \lambda' \circ f \end{aligned}$$

**Proposición 2.8.**  $f^*$  es lineal.

*Demostración.* Tenemos que  $\forall \lambda'_1, \lambda'_2 \in V'^*$ ,

$$f^*(\lambda'_1 + \lambda'_2) = (\lambda'_1 + \lambda'_2) \circ f.$$

Además,  $\forall \vec{x} \in V$ ,

$$\begin{aligned} ((\lambda'_1 + \lambda'_2) \circ f)(\vec{x}) &= (\lambda'_1 + \lambda'_2)(f(\vec{x})) = \lambda'_1(f(\vec{x})) + \lambda'_2(f(\vec{x})) = (\lambda'_1 \circ f)(\vec{x}) + (\lambda'_2 \circ f)(\vec{x}) \\ &= f^*(\lambda'_1)(\vec{x}) + f^*(\lambda'_2)(\vec{x}) = (f^*(\lambda'_1) + f^*(\lambda'_2))(\vec{x}). \end{aligned}$$

Además,  $\forall a \in \mathbb{K}, \forall \lambda' \in V'^*$ , tenemos que

$$f^* (a\lambda') = (a\lambda') \circ f = af^* (\lambda').$$

Tenemos que  $\forall \vec{x} \in V$ ,

$$(a\lambda') \circ f (\vec{x}) = a (\lambda' \circ f) (\vec{x}) = af^* (\lambda') (\vec{x}).$$

□

**Teorema 2.18.** Se tiene definida una aplicación

$$\begin{aligned} * : \text{Hom} (V, V') &\rightarrow \text{Hom} (V'^*, V^*) \\ f &\rightarrow f^*. \end{aligned}$$

Tenemos que  $*$  es lineal.

*Demostración.* Si  $f, g \in \text{Hom} (V, V')$ , tenemos que  $\forall \lambda' \in V'^*$ ,

$$(f + g)^* (\lambda') = \lambda' \circ (f + g) = f^* (\lambda') + g^* (\lambda') = (f^* + g^*) (\lambda').$$

Entonces tenemos que  $\forall \vec{x} \in V$ ,

$$\lambda' \circ (f + g) (\vec{x}) = \lambda' (f (\vec{x}) + g (\vec{x})) = (f^* (\lambda') + g^* (\lambda')) (\vec{x}).$$

Si  $a \in \mathbb{K}$  y  $f \in \text{Hom} (V, V')$ , queremos ver que

$$* (af) = (af)^* = af^*.$$

Tenemos que  $\forall \lambda' \in V'^*$ ,

$$(af)^* (\lambda') = \lambda' \circ (af) = af^* (\lambda').$$

Entonces,  $\forall \vec{x} \in V$ ,

$$(\lambda' \circ (af)) (\vec{x}) = \lambda' (af (\vec{x})) = a\lambda' (f) (\vec{x}) = af^* (\lambda') (\vec{x}).$$

□

**Proposición 2.9.** Sea  $f \in \text{Hom} (V, V')$  y  $g \in \text{Hom} (V', V'')$ . Se cumple que

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

*Demostración.* Tenemos que  $\forall \lambda'' \in V''^*$ ,

$$(g \circ f)^* (\lambda'') = \lambda'' \circ (g \circ f) = (\lambda'' \circ g) \circ f = (g^* (\lambda'')) \circ f = f^* (g^* (\lambda'')) = (f^* \circ g^*) (\lambda'').$$

□

**Proposición 2.10.**

$$(id_V)^* = id_{V^*}.$$

*Demostración.* Tenemos que  $\forall \lambda \in V^*$ ,

$$(id_V)^*(\lambda) = \lambda \circ id_V = id_{V^*}(\lambda).$$

□

**Proposición 2.11.** Si  $f : V \rightarrow V'$  isomorfismo,  $f^*$  isomorfismo y  $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$ .

*Demostración.* Existe  $f^{-1} : V' \rightarrow V$  tal que  $f^{-1} \circ f = id_V$  y  $f \circ f^{-1} = id_{V'}$ . Entonces tenemos que

$$f^* \circ (f^{-1})^* = (f^{-1} \circ f)^* = (id_V)^* = id_{V^*}.$$

Similarmente,

$$(f^{-1})^* \circ f^* = (f \circ f^{-1})^* = (id_{V'})^* = id_{V'^*}.$$

□

Si  $f \in \text{Hom}(V, V')$ , tenemos que  $(f^*)^* = f^{**} \in \text{Hom}(V^{**}, V'^{**})$ . Tenemos que  $\forall \vec{x} \in V, \theta_{\vec{x}} \in V^{**}$ , entonces

$$f^{**}(\theta_{\vec{x}}) = \theta_{\vec{x}} \circ f^* = \theta \circ f.$$

$$\forall \lambda' \in V'^*, \theta_{\vec{x}} \circ f^*(\lambda') = \theta_{\vec{x}}(\lambda' \circ f) = \lambda' \circ f(\vec{x}) = \lambda'(f(\vec{x})) = \theta_{f(\vec{x})}(\lambda').$$

Queremos ver que

$$\theta^{-1} f^{**} \theta_{\vec{x}} = f.$$

**2.2.1. Anulador de un subespacio**

**Definición 2.15** (Ortogonal y anulador). Si  $\emptyset \neq A \subset V$ . Llamaremos **ortogonal** a  $A$  y la expresaremos por:

$$A^\perp = \left\{ \lambda \in V^* : \lambda(\vec{x}) = \vec{0}, \forall \vec{x} \in A \right\} = \{ \lambda \in V^* : A \subset \text{Ker}(\lambda) \}.$$

**Proposición 2.12.**

$$A^\perp \in \mathcal{L}(V^*).$$

*Demostración.* Sean  $\lambda_1, \lambda_2 \in A^\perp$ , vamos a ver que  $\lambda_1 + \lambda_2 \in A^\perp$ :

$$\forall \vec{x} \in A, (\lambda_1 + \lambda_2)(\vec{x}) = \lambda_1(\vec{x}) + \lambda_2(\vec{x}) = 0.$$

Por lo que,  $\lambda_1 + \lambda_2 \in A^\perp$ . Similarmente, si  $\lambda \in A^\perp$  y  $a \in \mathbb{K}$ , vamos a ver que  $a\lambda \in A^\perp$ :

$$\forall \vec{x} \in A, (a\lambda)(\vec{x}) = a\lambda(\vec{x}) = a \cdot 0 = 0.$$

Por lo que  $a\lambda \in A^\perp$ .

□

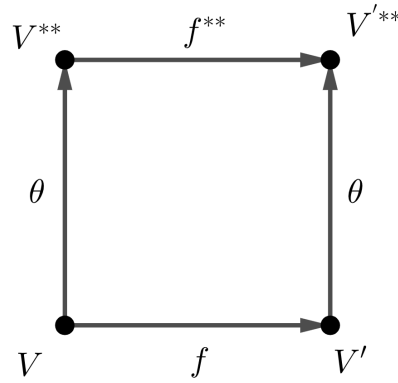


Figura 2.2: Resumen del espacio dual

**Proposición 2.13.** Si  $\emptyset \neq A \subset B \subset V$ , entonces  $B^\perp \subset A^\perp$ .

*Demostración.* Si  $\lambda \in B^\perp$ , tenemos que  $\forall \vec{x} \in B$ ,  $\lambda(\vec{x}) = 0$ . Como  $A \subset B$ , tenemos que  $\forall \vec{x} \in A$ ,  $\lambda(\vec{x}) = 0$ , por lo que  $\lambda \in A^\perp$ .  $\square$

**Proposición 2.14.**

$$A^\perp = L(A)^\perp.$$

*Demostración.* Si  $A \subset L(A)$  tenemos que  $L(A)^\perp \subset A^\perp$ . Sea  $\lambda \in A^\perp$ ,

$$\forall \vec{x} \in L(A), \exists p \in \mathbb{N}, \exists a^1, \dots, a^p \in \mathbb{K}, \exists \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p \in A.$$

$$\vec{x} = a^1 \vec{x}_1 + \dots + a^p \vec{x}_p.$$

Entonces,

$$\lambda(\vec{x}) = \lambda(a^1 \vec{x}_1 + \dots + a^p \vec{x}_p) = a^1 \lambda(\vec{x}_1) + \dots + a^p \lambda(\vec{x}_p) = 0.$$

$\square$

**Proposición 2.15.** Sean  $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ , entonces tenemos que  $(L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp$  y  $(L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp$ .

*Demostración.* **(1.1)** Tenemos que  $L_1 \subset L_1 + L_2$  y  $L_2 \subset L_1 + L_2$ . Entonces sabemos que  $(L_1 + L_2)^\perp \subset L_1^\perp$  y  $(L_1 + L_2)^\perp \subset L_2^\perp$ . Por tanto

$$(L_1 + L_2)^\perp \subset L_1^\perp \cap L_2^\perp.$$

(1.2) Si  $\lambda \in L_1^\perp \cap L_2^\perp$ , tenemos que

$$\begin{aligned}\forall \vec{x} \in L_1^\perp, \lambda(\vec{x}) &= \vec{0} \\ \forall \vec{y} \in L_2^\perp, \lambda(\vec{y}) &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Tenemos que

$$\forall \vec{x} \in L_1 + L_2, \exists \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2, \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2.$$

Entonces tenemos que

$$\lambda(\vec{x}) = \lambda(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \lambda(\vec{x}_1) + \lambda(\vec{x}_2) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.$$

Por tanto,  $\lambda \in (L_1 + L_2)^\perp$ , por lo que

$$L_1^\perp \cap L_2^\perp \subset (L_1 + L_2)^\perp.$$

(2.1) Tenemos que  $L_1 \cap L_2 \subset L_1, L_2$ , por lo que

$$\begin{aligned}L_1^\perp &\subset (L_1 \cap L_2)^\perp \in \mathcal{L}(V^*) \\ L_2^\perp &\subset (L_1 \cap L_2)^\perp \in \mathcal{L}(V^*).\end{aligned}$$

Entonces,

$$L_1^\perp + L_2^\perp \subset (L_1 \cap L_2)^\perp.$$

(2.2) Vamos a ver que  $(L_1 \cap L_2)^\perp \subset L_1^\perp + L_2^\perp$ . Sea  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r\}$  base de  $L_1 \cap L_2$  y sean  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{r+p}\}$  y  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \vec{w}_{r+1}, \dots, \vec{w}_{r+q}\}$  bases de  $L_1$  y  $L_2$ , respectivamente. Sea

$$\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{r+p}, \vec{w}_{r+1}, \dots, \vec{w}_{r+q}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\},$$

base de  $V$ . Si  $\lambda \in (L_1 \cap L_2)^\perp$ , tenemos que ver que existen  $\lambda_1 \in L_1^\perp, \lambda_2 \in L_2^\perp$  tales que  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ . Para  $\forall i = 1, \dots, r$  defino

$$\lambda_1(\vec{u}_i) = 0 \quad \text{y} \quad \lambda_2(\vec{u}_i) = 0.$$

De esta manera,  $(\lambda_1 + \lambda_2)(\vec{u}_i) = 0$ . Para  $i = r+1, \dots, r+p$  y  $\vec{u}_i \in L_1$  defino

$$\lambda(\vec{u}_i) \in \mathbb{K}, \lambda_1(\vec{u}_i) = 0, \lambda_2(\vec{u}_i) = \lambda(\vec{u}_i).$$

Similarmente, para  $i = r+1, \dots, r+q$ ,

$$\lambda(\vec{w}_i) \in \mathbb{K}, \lambda_1(\vec{w}_i) = \lambda(\vec{w}_i), \lambda_2(\vec{w}_i) = 0.$$

□

**Teorema 2.19.** Sea  $L \in \mathcal{L}(V)$ , entonces

$$\dim L^\perp = \dim V - \dim L.$$

**Observación 2.9.** Tenemos que

$$(L^\perp)^\perp = \theta(L).$$

*Demostración.* Sea  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r\}$  base de  $L$ ,  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \dots, \vec{u}_n\}$  base de  $V$  y  $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$  su base dual. Entonces tenemos ya que  $\{\omega^{r+1}, \dots, \omega^n\}$  son linealmente independientes. Vamos a ver que son sistema de generadores,

$$\forall \lambda \in L^\perp \in \mathcal{L}(V), \exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}, .$$

$$\lambda = a_1 \omega^1 + \dots + a_n \omega^n.$$

Tenemos que  $\forall i = 1, \dots, r$ ,

$$0 = \lambda(\vec{u}_i) = a_1 \omega^1(\vec{u}_i) + \dots + a_i \omega^i(\vec{u}_i) + \dots + a_r \omega^r(\vec{u}_i) + \dots + a_n \omega^n(\vec{u}_i) = a_i.$$

Así,

$$\lambda = a_{r+1} \omega^{r+1} + \dots + a_n \omega^n.$$

□

**Observación 2.10.** Tenemos que

$$\dim L = \dim \theta(L) = \dim (L^\perp)^\perp.$$

**Lema 2.1.** Sea  $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$  tales que  $V = L_1 \oplus L_2$  y sea  $f_1 : L_1 \rightarrow V'$  y  $f_2 : L_2 \rightarrow V'$  aplicaciones lineales. Entonces, existe una única  $f : V \rightarrow V'$  tal que

$$f|_{L_1} = f_1 \quad \text{y} \quad f|_{L_2} = f_2.$$

<sup>a</sup>

<sup>a</sup> $f|_L$  es  $f$  restringida por  $L$ , es decir, solo está definida para los vectores de  $L$ .

*Demostración.* Tenemos que  $\forall \vec{x} \in V$ ,  $\exists! \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2$  tales que  $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ . Queremos que  $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2)$ :

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2) = f|_{L_1}(\vec{x}_1) + f|_{L_2}(\vec{x}_2) = f_1(\vec{x}_1) + f_2(\vec{x}_2).$$

Sea  $f : V \rightarrow V'$  la aplicación definida de esta manera:

$$f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = f_1(\vec{x}_1) + f_2(\vec{x}_2).$$

Queremos ver que  $f$  es lineal:

$$\begin{aligned} \forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \quad f(\vec{x} + \vec{y}) &= f((\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + (\vec{y}_1 + \vec{y}_2)) \\ &= f((\vec{x}_1 + \vec{y}_1) + (\vec{x}_2 + \vec{y}_2)) \\ &= f_1(\vec{x}_1 + \vec{y}_1) + f_2(\vec{x}_2 + \vec{y}_2) \\ &= f_1(\vec{x}_1) + f_2(\vec{x}_2) + f_1(\vec{y}_1) + f_2(\vec{y}_2) \\ &= f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + f(\vec{y}_1 + \vec{y}_2) \\ &= f(\vec{x}) + f(\vec{y}). \end{aligned}$$

Similarmente, sea  $a \in \mathbb{K}$  y  $\vec{x} \in V$ ,

$$\begin{aligned} f(a\vec{x}) &= f(a(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)) = f(a\vec{x}_1 + a\vec{x}_2) = f_1(a\vec{x}_1) + f_2(a\vec{x}_2) \\ &= af_1(\vec{x}_1) + af_2(\vec{x}_2) = a(f_1(\vec{x}_1) + f_2(\vec{x}_2)) \\ &= af(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = af(\vec{x}). \end{aligned}$$

Si  $\vec{x}_1 \in L_1$ , tenemos que

$$f|_{L_1}(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_1 + \vec{0}) = f_1(\vec{x}_1) + f_2(\vec{0}) = f_1(\vec{x}_1).$$

□

**Teorema 2.20.** Sea  $f : V \rightarrow V'$  una aplicación lineal. Entonces,

- (a)  $\text{Ker}(f^*) = \text{Im}(f)^\perp$ .
- (b)  $\text{Im}(f^*) = \text{Ker}(f)^\perp$ .
- (c)  $f$  inyectiva  $\iff f^*$  sobreyectiva.
- (d)  $f$  sobreyectiva  $\iff f^*$  inyectiva.
- (e)  $\dim \text{Im}(f) = \dim \text{Im}(f^*)$ .

*Demostración.* (a) Tenemos que  $\forall \lambda' \in \text{Ker}(f^*)$ , tenemos que

$$\forall \vec{x} \in V, \lambda' \circ f(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Similarmente,

$$f^*(\lambda') = \lambda' \circ f = 0.$$

En la otra dirección,

$$\lambda' \in \text{Im}(f)^\perp \Rightarrow \forall \vec{x} \in V, \lambda'(f(\vec{x})) = f^*(\lambda')(\vec{x}) = 0.$$

Por tanto,  $f^*(\lambda') = 0$  y  $\lambda' \in \text{Ker}(f^*)$ .

- (b) Si  $\lambda \in \text{Im}(f^*)$ . Entonces, existe  $\lambda' \in V'^*$  tal que  $\lambda = f^*(\lambda') = \lambda' \circ f$ . Así,  $\forall \vec{x} \in \text{Ker}(f)$ ,  $\lambda(\vec{x}) = \lambda' \circ f(\vec{x}) = \lambda'(\vec{0}) = 0$ .

En la otra dirección, si  $\lambda \in \text{Ker}(f)^\perp$ , buscamos  $\lambda' \in V'^*$  tal que  $f^*(\lambda') = \lambda' \circ f = \lambda$ . Sea  $L' \in \mathcal{L}(V')$  tal que  $\text{Im}(f) \oplus L' = V'$  y buscamos  $\lambda'|_{L'} = 0$ . Si  $\vec{x}' \in \text{Im}(f)$ , existe un  $\vec{x} \in V$  tal que  $f(\vec{x}) = \vec{x}'$ . Defino  $\lambda'(\vec{x}') = \lambda(\vec{x})$ . Como  $\lambda \in \text{Ker}(f)^\perp$ <sup>2</sup>, tenemos que si  $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$ ,

$$f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = f(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} - \vec{y} \in \text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(\lambda).$$

Así, definimos que  $\lambda'(\vec{x}') = \lambda(\vec{x})$  con  $\vec{x} \in V$  tal que  $f(\vec{x}) = \vec{x}'$ .

<sup>2</sup>Ortogonal del núcleo, que no el núcleo del ortogonal.



- (c) Tenemos que  $f$  es inyectiva si y solo si  $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$ . Esto es equivalente a que  $\text{Ker}(f)^\perp = \text{Im}(f^*) = V^*$ , que es equivalente a que  $f^*$  es sobreyectiva.
- (d) Tenemos que  $f$  es sobreyectiva si y solo si  $\text{Im}(f) = V'$ . Esto es equivalente a decir que  $\text{Im}(f)^\perp = \text{Ker}(f^*) = \{\vec{0}\}$ , que es equivalente a decir que  $f^*$  sea inyectiva.
- (e)

$$\dim \text{Im}(f) = \dim V' - \dim \text{Im}(f^\perp) = \dim V' - \dim \text{Ker}(f^*) = \dim V'^* - \dim \text{Ker}(f^*) = \dim \text{Im}(f^*).$$

□

**Definición 2.16.** Si  $f : V \rightarrow V'$  es lineal llamaremos  $\text{ran}(f)$  a  $\dim \text{Im}(f)$ .

## Capítulo 3

# Matrices

### 3.1. Matriz asociada a una aplicación lineal

**Definición 3.1** (Matriz). Una matriz  $A$  con coeficientes  $\mathbb{K}$  de  $m \in \mathbb{N}$  filas y  $n \in \mathbb{N}$  columnas es una tabla

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

con  $a_i^j \in \mathbb{K}$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ ,  $\forall j = 1, \dots, m$ .

Sean  $V, V'$  espacios vectoriales con  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  y  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$  bases de  $V$  y  $V'$ , respectivamente. Si  $f \in \text{Hom}(V, V')$ , entonces  $f(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) \in V'$  y existen  $a_i^j \in \mathbb{K}$  tales que

$$\begin{aligned} f(\vec{u}_1) &= a_1^1 \vec{v}_1 + \cdots + a_1^m \vec{v}_m \\ f(\vec{u}_2) &= a_2^1 \vec{v}_1 + \cdots + a_2^m \vec{v}_m \\ &\vdots \\ f(\vec{u}_n) &= a_n^1 \vec{v}_1 + \cdots + a_n^m \vec{v}_m. \end{aligned}$$

Entonces, a  $f$  le podemos asignar la matriz  $A$  tal que

$$f \rightarrow A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

**Teorema 3.1.** Sea  $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) = \{A : A \text{ matriz } m \times n\}$ . Definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}} : \text{Hom}(V, V') &\rightarrow \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) \\ f &\rightarrow A. \end{aligned}$$

Tenemos que  $\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}$  es biyectiva.

*Demostración.* Tenemos que si  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ , entonces existen unos únicos  $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n \in V'$  tales que

$$\begin{aligned} \vec{w}_1 &= a_1^1 \vec{v}_1 + \dots + a_1^m \vec{v}_m \\ &\vdots \\ \vec{w}_n &= a_n^1 \vec{v}_1 + \dots + a_n^m \vec{v}_m. \end{aligned}$$

Para estos existe una única  $f \in \text{Hom}(V, V')$  tal que  $f(\vec{u}_1) = \vec{w}_1, \dots, f(\vec{u}_n) = \vec{w}_n$ .  $\square$

**Teorema 3.2.**  $\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}$  es isomorfismo.

*Demostración.* Sabemos que es biyectiva, ahora tenemos que ver que es una aplicación lineal. Para ello, definimos la suma de matrices de la siguiente forma: si  $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ ,

$$A + B = \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}} \left( \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}^{-1}(A) + \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}^{-1}(B) \right).$$

Definimos el producto por escalares. Sea  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  y  $a \in \mathbb{K}$ ,

$$a \cdot A = \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}} \left( a \cdot \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}^{-1}(A) \right).$$

La demostración se puede completar con la demostración del siguiente teorema.  $\square$

**Teorema 3.3.**  $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  es un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial.

*Demostración.* Tenemos las siguientes equivalencias

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} \iff f \in \text{Hom}(V, V') \quad y \quad B = \begin{pmatrix} b_1^1 & \dots & b_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_1^m & \dots & b_n^m \end{pmatrix} \iff g \in \text{Hom}(V, V').$$

Así,  $A + B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) \iff f + g \in \text{Hom}(V, V')$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} f(\vec{u}_i) &= a_i^1 \vec{v}_1 + \dots + a_i^m \vec{v}_m, \quad \forall i = 1, \dots, n \\ g(\vec{u}_i) &= b_i^1 \vec{v}_1 + \dots + b_i^m \vec{v}_m, \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Entonces, tenemos que

$$(f + g)(\vec{u}_i) = f(\vec{u}_i) + g(\vec{u}_i) = (a_i^1 + b_i^1)\vec{v}_1 + \cdots + (a_i^m + b_i^m)\vec{v}_m.$$

Es decir,

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1^1 + b_1^1 & \cdots & a_n^1 + b_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m + b_1^m & \cdots & a_n^m + b_n^m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}).$$

Hacemos lo mismo con el producto por escalares. Sea  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  y  $a \in \mathbb{K}$ , tenemos que  $af \in \text{Hom}(V, V') \iff a \cdot A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ . Tenemos que

$$af(\vec{u}_i) = aa_i^1\vec{v}_1 + \cdots + aa_i^m\vec{v}_m.$$

Es decir,

$$a \cdot A = \begin{pmatrix} aa_1^1 & \cdots & aa_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ aa_1^m & \cdots & aa_n^m \end{pmatrix}.$$

Tenemos que existe la matriz 0, pues  $0 \in \text{Hom}(V, V')$ , por lo que

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Similarmente, la matriz opuesta se puede definir así:

$$-A = (-1) \cdot A = \begin{pmatrix} -a_1^1 & \cdots & -a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ -a_1^m & \cdots & -a_n^m \end{pmatrix}.$$

□

### 3.2. Producto de matrices

Sea  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  base de  $V$ ,  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$  base de  $V'$  y  $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p\}$  base de  $V''$ . Entonces, podemos encontrar aplicaciones lineales tales que

$$f \in \text{Hom}(V, V') \rightarrow A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) \quad \text{y} \quad g \in \text{Hom}(V', V'') \rightarrow B \in \mathcal{M}_{p \times m}(\mathbb{K}).$$

Tenemos que  $g \circ f \in \text{Hom}(V, V'')$ . Definimos el producto de matrices tal que

$$g \circ f \rightarrow B \cdot A \in \mathcal{M}_{p \times n}(\mathbb{K}).$$

Es decir,

$$B \cdot A = \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{w}_k\}}(g \circ f).$$

Tenemos que la expresión de  $A$  y  $B$  será:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & b_p^1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_1^m & \cdots & b_p^m \end{pmatrix}.$$

Entonces,  $\forall i = 1, \dots, m$  y  $\forall j = 1, \dots, p$ ,

$$\begin{aligned} f(\vec{u}_i) &= a_i^1 \vec{v}_1 + \cdots + a_i^m \vec{v}_m \\ g(\vec{v}_j) &= b_j^1 \vec{w}_1 + \cdots + b_j^p \vec{w}_p. \end{aligned}$$

Tenemos que  $g \circ f$  será:

$$\begin{aligned} g(f(\vec{u}_i)) &= g(a_i^1 \vec{v}_1 + \cdots + a_i^m \vec{v}_m) \\ &= a_i^1 (b_1^1 \vec{w}_1 + \cdots + b_1^p \vec{w}_p) + \cdots + a_i^m (b_p^1 \vec{w}_1 + \cdots + b_p^m \vec{w}_p) \\ &= (a_i^1 b_1^1 + \cdots + a_i^m b_m^1) \vec{w}_1 + \cdots + (a_i^1 b_1^p + \cdots + a_i^m b_m^p) \vec{w}_p. \end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_j^1 b_j^1 & \cdots & \sum_{j=1}^m a_j^1 b_j^p \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_j^m b_j^1 & \cdots & \sum_{j=1}^m a_j^m b_j^p \end{pmatrix}.$$

Ahora vamos a ver como utilizamos la matriz de una transformación lineal para calcular  $f(\vec{x})$ .

Sea  $f: V \rightarrow V'$  lineal. Si  $\vec{x} \in V$ , entonces existen únicos  $x^1, \dots, x^n \in \mathbb{K}$  tales que

$$\vec{x} = x^1 \vec{u}_1 + \cdots + x^n \vec{u}_n.$$

Entonces tenemos que  $f(\vec{x}) \in V'$ , por lo que  $\exists! x'^1, \dots, x'^m \in \mathbb{K}$  tales que

$$f(\vec{x}) = x'^1 \vec{v}_1 + \cdots + x'^m \vec{v}_m.$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(x^1 \vec{u}_1 + \cdots + x^n \vec{u}_n) = x^1 f(\vec{u}_1) + \cdots + x^n f(\vec{u}_n) \\ &= x^1 (a_1^1 \vec{v}_1 + \cdots + a_1^m \vec{v}_m) + \cdots + x^n (a_n^1 \vec{v}_1 + \cdots + a_n^m \vec{v}_m) \\ &= (x^1 a_1^1 + \cdots + x^n a_n^1) \vec{v}_1 + \cdots + (x^1 a_1^m + \cdots + x^n a_n^m) \vec{v}_m. \end{aligned}$$

Así, tenemos que las coordenadas de  $f(\vec{x})$  serán:

$$\begin{cases} x'^1 = x^1 a_1^1 + \cdots + x^n a_n^1 \\ \vdots \\ x'^m = x^1 a_1^m + \cdots + x^n a_n^m \end{cases}.$$

En forma matricial tenemos que

$$A \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ \vdots \\ x'^m \end{pmatrix}.$$

A continuación, vamos a estudiar la matriz de cambio de base. Sea  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  y  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  bases de  $V$ . Tenemos que

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= a_1^1 \vec{u}_1 + \dots + a_1^n \vec{u}_n \\ &\vdots \\ \vec{v}_n &= a_n^1 \vec{u}_1 + \dots + a_n^n \vec{u}_n.\end{aligned}$$

Así, si  $\vec{x} \in V$  existen unos únicos  $x^1, \dots, x^n \in \mathbb{K}$  tales que  $\vec{x} = x^1 \vec{u}_1 + \dots + x^n \vec{u}_n$  y existen unos únicos  $x'^1, \dots, x'^n \in \mathbb{K}$  tales que  $\vec{x} = x'^1 \vec{v}_1 + \dots + x'^n \vec{v}_n$ . Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}\vec{x} &= x'^1 \vec{v}_1 + \dots + x'^n \vec{v}_n \\ &= x'^1 (a_1^1 \vec{u}_1 + \dots + a_1^n \vec{u}_n) + \dots + x'^n (a_n^1 \vec{u}_1 + \dots + a_n^n \vec{u}_n) \\ &= (x'^1 a_1^1 + \dots + x'^n a_n^1) \vec{u}_1 + \dots + (x'^1 a_1^n + \dots + x'^n a_n^n) \vec{u}_n.\end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$\begin{cases} x^1 = x'^1 a_1^1 + \dots + x'^n a_n^1 \\ \vdots \\ x^n = x'^1 a_1^n + \dots + x'^n a_n^n \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}}_{\text{Matriz cambio de base}} \begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo 3.1.**  $id_V : V_{\{\vec{v}_i\}} \rightarrow V_{\{\vec{u}_i\}}$ . Queremos calcular la matriz  $\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_i\}}(id_V)$ . Tenemos que

$$id_V(\vec{v}_i) = \vec{v}_i = a_i^1 \vec{u}_1 + \dots + a_i^n \vec{u}_n.$$

Por tanto,

$$\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_i\}}(id_V) = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

### 3.3. Permutaciones

**Definición 3.2** (Permutación). Sea  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ . Una **permutación** de  $X$  es una aplicación biyectiva  $\sigma : X \rightarrow X$ .

Normalmente se escriben de la siguiente forma:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{bmatrix}.$$

**Teorema 3.4.** Sea  $\mathcal{S}_n = \{\sigma : \sigma \text{ permutación de } X\}$  y  $\circ : \mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$  sea la operación de composición entre permutaciones. Entonces,  $(\mathcal{S}_n, \circ)$  es un grupo.

*Demostración.* Tenemos que la composición de funciones biyectivas es una operación cerrada. Además, tenemos que es asociativa, existe el elemento neutro (i.e.  $id_X$ ) y el opuesto (i.e.  $\sigma^{-1}$ , el inverso, que también es biyección).  $\square$

**Definición 3.3.** Sean  $\{a_1, \dots, a_r\} \subset X$  distintos 2 a 2. El  $r$ -ciclo  $(a_1, \dots, a_r)$  es la permutación  $(a_1, \dots, a_r)$  tal que

$$\begin{aligned} a_1 &\rightarrow a_2 \\ a_2 &\rightarrow a_3 \\ &\vdots \\ a_r &\rightarrow a_1. \end{aligned}$$

**Proposición 3.1.** Toda permutación es composición de  $r$ -ciclos.

*Demostración.* Sea  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ . Si  $\forall a \in X$ ,  $\sigma(a) = a$ , entonces  $\sigma = id_X$ , que es un 1-ciclo. Si  $\exists a_1 \in X$  tal que  $\sigma(a_1) = a_2 \neq a_1$ , defino

$$\begin{aligned} a_3 &= \sigma^2(a_1) = \sigma(a_2) \in X \\ &\vdots \\ a_k &= \sigma^{k-1}(a_1) = \sigma(a_{k-1}) \in X. \end{aligned}$$

Sea  $r \in \mathbb{N}$  el primer natural tal que  $a_r \in \{a_1, \dots, a_{r-1}\}$ . Entonces,  $\sigma(a_r) = a_1$ . Así, tenemos que  $a_r = \sigma^{r-1}(a_1)$  y  $\sigma(a_r) = \sigma^h(a_1)$ , con  $h < r$ . De esta manera,  $a^{r-h} = \sigma^{r-1-h}(a_1) = a_1$ . Si  $\forall b \in X - \{a_1, \dots, a_r\}$  tenemos que  $\sigma(b) = b$  ya hemos terminado. En cambio, si existe  $b_1 \in X - \{a_1, \dots, a_r\}$  tal que  $\sigma(b_1) = b_2 \neq b_1$ , hacemos el mismo procedimiento de antes:

$$\begin{aligned} b_3 &= \sigma(b_2) = \sigma^2(b_1) \\ &\vdots \\ b_k &= \sigma(b_{k-1}) = \sigma^{k-1}(b_1). \end{aligned}$$

Sea  $s$  el primer natural tal que  $\sigma(b_s) \in \{b_1, \dots, b_{s-1}\}$ . Entonces,  $\sigma(b_s) = b_1$ . Así, tenemos que  $\sigma = (b_1, \dots, b_s) \circ (a_1, \dots, a_r)$ . Repetimos este proceso hasta que se agoten los elementos de  $X$ .  $\square$

**Ejemplo 3.2.** Consideremos

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 8 & 10 & 2 & 1 & 3 & 4 & 6 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 5 & 2 & 8 & 6 & 3 & 10 & 7 & 4 \\ 9 & 5 & 1 & 8 & 6 & 3 & 10 & 7 & 4 & 2 \end{bmatrix} \\ &= (1, 9, 5) \circ (2, 8, 6, 3, 10, 7, 4) \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.3.**

$$\begin{aligned}\sigma &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 5 & 6 & 1 & 2 & 7 & 3 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 & 2 & 5 & 3 & 6 & 7 & 9 & 10 \\ 8 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6 & 7 & 3 & 10 & 9 \end{bmatrix} \\ &= (1, 8, 4) \circ (2, 5) \circ (3, 6, 7) \circ (9, 10).\end{aligned}$$

**Definición 3.4.** Los 2-ciclos los llamaremos **trasposiciones**.

**Proposición 3.2.** Todo ciclo es producto de trasposiciones.

*Demostración.* Tenemos que

$$(a_1, \dots, a_m) = (a_1, a_2)(a_2, a_3) \cdots (a_{m-1}, a_m).$$

□

Definimos

$$\nabla = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\vec{x}_i - \vec{x}_j) = (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)(\vec{x}_1 - \vec{x}_3) \cdots (\vec{x}_1 - \vec{x}_n)(\vec{x}_2 - \vec{x}_3) \cdots (\vec{x}_2 - \vec{x}_n) \cdots (\vec{x}_{n-1} - \vec{x}_n).$$

De esta manera, si  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ , definimos

$$\nabla\sigma = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \vec{x}_{\sigma(i)} - \vec{x}_{\sigma(j)}.$$

Una permutación de  $\sigma$  es un par  $i < j$  tal que  $\sigma(i) < \sigma(j)$ . Una inversión de  $\sigma$  es un par  $i < j$  tal que  $\sigma(j) < \sigma(i)$ . Entonces, el número de factores de  $\nabla$  y  $\nabla\sigma$  es el mismo. Así, tenemos que

$$\nabla\sigma = (-1)^{\text{número de inversiones}} \nabla.$$

El valor de  $-1$  elevado al número de inversiones de  $\sigma$  lo llamaremos índice o signo de  $\sigma$  y se escribirá  $\text{ind}(\sigma)$  o  $\text{sig}(\sigma)$ <sup>1</sup>. Entonces,

$$\nabla\sigma = \text{sig}(\sigma) \nabla.$$

Sea  $\tau \in \mathcal{S}_n$ , entonces

$$\underbrace{\nabla\sigma \circ \tau}_{\text{sig}(\sigma \circ \tau)\nabla} = \text{sig}(\sigma) \nabla\tau = \text{sig}(\sigma) \text{sig}(\tau) \nabla.$$

Definimos,

$$\begin{aligned}\text{sig} : \mathcal{S}_n &\rightarrow \{-1, 1\} \\ \sigma &\rightarrow \text{sig}(\sigma).\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>También se corresponde con el número de trasposiciones en las que se puede componer  $\sigma$ .



**Proposición 3.3.** La trasposición  $(1, 2)$  tiene signo negativo.

*Demostración.* Tenemos que

$$\nabla(1, 2) = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \cdots (x_2 - x_n)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n) \cdots (x_{n-1} - x_n).$$

Como podemos ver respecto a la primera definición de  $\nabla$ , tenemos que todo es igual menos el primer factor, que es de signo opuesto. Así,  $\text{sig}(1, 2) = -1$ .  $\square$

**Proposición 3.4.** La trasposición  $(1, a)$  es negativa para  $a \geq 2$ .

*Demostración.* Tenemos que  $(1, a) = (2, a) \circ (1, 2) \circ (2, a)$ .

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow a \\ 2 &\rightarrow a \rightarrow a \rightarrow 2 \\ a &\rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\text{sig}(1, a) = \text{sig}(2, a)(-1)(\text{sig}(2, a)) = (\text{sig}(2, a))^2(-1) = -1.$$

$\square$

**Proposición 3.5.**  $\text{sig}(a, b) = -1$ .

*Demostración.* Tenemos que  $(a, b) = (1, b) \circ (1, a) \circ (1, b)$ . Así,  $a \rightarrow b$  y  $b \rightarrow a$ , por lo que

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow b \rightarrow b \rightarrow b \\ a &\rightarrow a \rightarrow 1 \rightarrow b \\ b &\rightarrow 1 \rightarrow a \rightarrow a. \end{aligned}$$

Entonces,  $\text{sig}((a, b)) = \text{sig}(1, b)^2 \cdot \text{sig}(1, a) = -1$ .  $\square$

**Proposición 3.6.**  $\text{sig}((a_1, \dots, a_r)) = (-1)^{r-1}$ .

*Demostración.* Tenemos que

$$(a_1, a_r) \circ (a_1 a_{r-1}) \cdots (a_1 a_3)(a_1 a_2).$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} a_1 &\rightarrow a_2 \rightarrow a_2 \rightarrow \cdots \rightarrow a_2 \rightarrow a_2 \\ a_2 &\rightarrow a_1 \rightarrow a_3 \rightarrow \cdots \rightarrow a_3 \rightarrow a_3 \\ &\vdots \\ a_{r-1} &\rightarrow a_{r-1} \rightarrow a_{r-1} \rightarrow \cdots \rightarrow a_1 \rightarrow a_r \\ a_r &\rightarrow a_{r-1} \rightarrow a_r \rightarrow \cdots \rightarrow a_r \rightarrow a_r. \end{aligned}$$

$\square$

**Ejemplo 3.4.** Sea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 7 & 2 & 1 & 3 & 8 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (1, 10, 5) \circ (2, 9, 6, 3, 7, 8, 4).$$

Por tanto,

$$\text{sig}(\sigma) = \text{sig}(1, 10, 5) \cdot \text{sig}(2, 9, 6, 3, 7, 8, 4) = (-1)^2 \cdot (-1)^6 = 1.$$

### 3.4. Estructura de álgebra

Sean  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ ,  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$  y  $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p\}$  bases de  $V$ ,  $V'$  y  $V''$  respectivamente. Si  $f \in \text{Hom}(V, V')$ , tenemos que

$$\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}(f) = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} = A,$$

donde  $f(\vec{u}_i) = a_i^1 \vec{v}_1 + \cdots + a_i^m \vec{v}_m$ . Similarmente, si  $g \in \text{Hom}(V, V')$ ,

$$\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}(g) = \begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & b_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_1^m & \cdots & b_n^m \end{pmatrix} = B.$$

Recordamos que

$$A + B = \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}(f + g) = \begin{pmatrix} a_1^1 + b_1^1 & \cdots & a_n^1 + b_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m + b_1^m & \cdots & a_n^m + b_n^m \end{pmatrix}.$$

Similarmente, si  $a \in \mathbb{K}$ ,

$$a \cdot A = \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}(a \cdot f) = \begin{pmatrix} aa_1^1 & \cdots & aa_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ aa_1^m & \cdots & aa_n^m \end{pmatrix}.$$

**Proposición 3.7.** El producto de matrices es distributivo por la izquierda y por la derecha.

Si  $f \in \text{Hom}(V, V')$  y  $g \in \text{Hom}(V', V'')$ , tenemos que  $\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}(f) = A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ ,  $\mathcal{M}_{\{\vec{v}_j\}\{\vec{w}_k\}}(g) = B \in \mathcal{M}_{p \times m}(\mathbb{K})$ . Definíamos el producto de matrices de la siguiente forma,

$$B \cdot A = \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{w}_k\}}(g \circ f).$$

Si  $f \in \text{Hom}(V, V')$ ,  $g \in \text{Hom}(V', V'')$  y  $h \in \text{Hom}(V'', V''')$ , tenemos que

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Así, como  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{p \times m}(\mathbb{K})$  y  $C \in \mathcal{M}_{q \times p}$ , tenemos que el producto de matrices es asociativo:

$$C \cdot (B \cdot A) = (C \cdot B) \cdot A \in \mathcal{M}_{q \times n}(\mathbb{K}).$$

Si  $f, g \in \text{Hom}(V, V')$ ,  $h \in \text{Hom}(V', V'')$ , tenemos que  $\forall \vec{x} \in V$ ,

$$h \circ (f + g)(\vec{x}) = h \circ (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = h(f(\vec{x})) + h(g(\vec{x})) = (h \circ f + h \circ g)(\vec{x}).$$

Así,  $h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$ . Entonces, hemos demostrado que el producto de matrices es distributivo por la izquierda. Entonces,  $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ ,  $C \in \mathcal{M}_{p \times m}(\mathbb{K})$ ,

$$C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B.$$

Sea  $f \in \text{Hom}(V, V')$  y  $g, h \in \text{Hom}(V', V'')$ . Tenemos que  $\forall \vec{x} \in V$ ,

$$((g + h) \circ f)(\vec{x}) = (g + h)(f(\vec{x})) = g(f(\vec{x})) + h(f(\vec{x})) = g \circ f(\vec{x}) + h \circ f(\vec{x}) = (g \circ f + h \circ f)(\vec{x}).$$

Así, concluimos que  $(g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f$ . Por lo que el producto de matrices es distributivo por la derecha. Es decir, sean  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ ,  $B, C \in \mathcal{M}_{p \times m}(\mathbb{K})$ ,

$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A.$$

**Proposición 3.8.** El producto de matrices no es conmutativo.

Si  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  y  $B \in \mathcal{M}_{p \times m}(\mathbb{K})$ . Entonces  $B \cdot A \in \mathcal{M}_{p \times n}(\mathbb{K})$ , pero  $A \cdot B$  no está definido. Si  $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ , tenemos que  $A \cdot B, B \cdot A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ , pero no tienen por qué ser iguales. En efecto, sean  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Entonces

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Proposición 3.9.** Existe un elemento identidad en el producto de matrices

Tenemos que Observando las imágenes, tenemos que

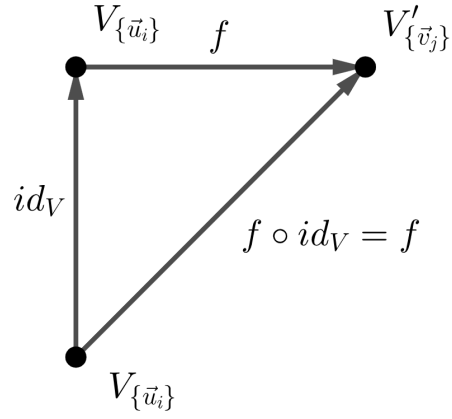
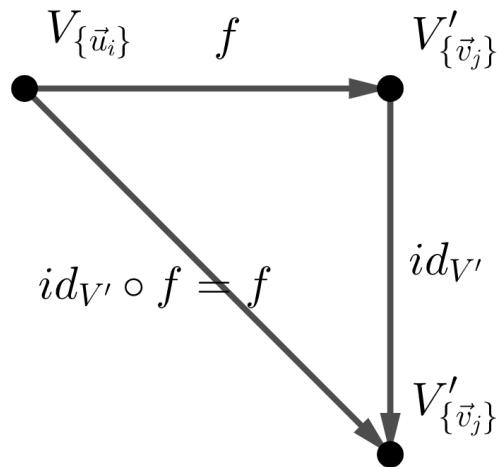
$$A \cdot I_{n \times n} = A \quad \text{y} \quad I_{m \times m} A = A.$$

Entonces, si consideramos la aplicación

$$id_V : V_{\{\vec{u}_i\}} \rightarrow V_{\{\vec{u}_i\}},$$

tal que  $\forall i = 1, \dots, n$ ,  $id_V(\vec{u}_i) = \vec{u}_i$ , tenemos que su matriz será

$$\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{u}_i\}}(id_V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_{n \times n}.$$

Figura 3.1: Matriz inversa respecto a  $V$ Figura 3.2: Matriz inversa respecto a  $V'$

Consideremos la función,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{u}_i\}} : \text{End}(V) &\rightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) \\ f &\rightarrow \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{u}_i\}}(f).\end{aligned}$$

**Proposición 3.10.** Por lo demostrado anteriormente, tenemos que  $(\text{End}(V), +, \cdot_{\mathbb{K}})$  y  $(\mathcal{M}_{n \times n}, +, \cdot_{\mathbb{K}})$  son  $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales. Similarmente,  $(\text{End}(V), +, \circ)$  y  $(\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$  son anillos con unidad.

**Definición 3.5.** Diremos que  $\text{End}(V)$  y  $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  son **álgebras** con unidad.

Tenemos que

$$\text{Aut}(V) = \{f \in \text{End}(V) : f \text{ invertible}\} = \{f \in \text{End}(V) : \exists f^{-1}\}.$$

Así,  $(\text{Aut}(V), \cdot)$  es un grupo. En general, la suma de automorfismos no es automorfismo. Por ejemplo,  $id_V - id_V = 0 \notin \text{Aut}(V)$ . Definimos

$$\text{GL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) : \exists A^{-1}\}.$$

Para estudiar este conjunto, introduciremos la noción de determinante.

### 3.5. Determinantes

**Definición 3.6.** Una  **$r$ -forma multilineal** definida en  $V$  es una aplicación  $t : \underbrace{V \times V \cdots \times V}_{r \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{K}$  tal que

(a)  $\forall i = 1, \dots, r, \forall \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r, \vec{x}'_i \in V,$

$$t(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i + \vec{x}'_i, \dots, \vec{x}_r) = t(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_r) + t(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}'_i, \dots, \vec{x}_r).$$

(b)  $\forall i = 1, \dots, r, \forall \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r \in V, \forall a \in \mathbb{K},$

$$t(x_1, \dots, a\vec{x}_i, \dots, \vec{x}_r) = at(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_r).$$

**Definición 3.7.** Una  $r$ -forma multilineal es alternada si  $\forall \sigma \in \mathcal{S}_r,$

$$t(\vec{x}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{x}_{\sigma(r)}) = \text{sig}(\sigma) t(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r), \forall \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r \in V.$$

**Proposición 3.11.** Si  $t$  es una  $r$ -forma multilinear,  $\forall \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r \in V$ ,

$$t(\vec{x}_1, \dots, \vec{0}, \dots, \vec{x}_r) = 0.$$

*Demostración.* Tenemos que  $\vec{0} = 0 \cdot \vec{x}_i$ , así,

$$t(\vec{x}_1, \dots, \vec{0}, \dots, \vec{x}_r) = 0 \cdot t(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_r) = 0.$$

□

**Proposición 3.12.** Sea  $t$  una  $r$ -forma multilinear alternada. Entonces  $\forall \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r \in V$ ,

$$t(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_r) = -t(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_r).$$

*Demostración.* Tenemos que  $\text{sig}(i, j) = -1$ .

□

**Proposición 3.13.** Si  $\vec{x}_i = \vec{x}_j$  y  $t$  es una forma multilinear alternada,

$$t(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_r) = 0, \quad i \neq j.$$

*Demostración.* Tenemos que

$$t(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_r) = -t(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_r).$$

Esto implica que  $t(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_r) = 0$ .

□

**Proposición 3.14.**

$$t(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, a\vec{x}_i, \dots, \vec{x}_r) = 0.$$

*Demostración.* Por la proposición anterior,

$$t(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, a\vec{x}_i, \dots, \vec{x}_r) = at(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_r) = a \cdot 0 = 0.$$

□

**Proposición 3.15.**

$$t\left(\vec{x}_1, \dots, \sum_{j=1}^r a^j \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_r\right) = 0, \quad j \neq i.$$

*Demostración.* Tenemos que

$$\sum_{j=1}^r a^j t(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_r) = 0.$$

□

**Proposición 3.16.**

$$t \left( \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i + \sum_{j=1}^r a^j \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_r \right) = t(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_r), \quad j \neq i.$$

Sea  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  base de  $V$ ,  $t$  multilinear alternada

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= a_1^1 \vec{u}_1 + \dots + a_1^n \vec{u}_n = \sum_{j=1}^n a_1^j \vec{u}_j \\ &\vdots \\ \vec{x}_i &= a_i^1 \vec{u}_1 + \dots + a_i^n \vec{u}_n = \sum_{j=1}^n a_i^j \vec{u}_j \\ &\vdots \\ \vec{x}_r &= a_r^1 \vec{u}_1 + \dots + a_r^n \vec{u}_n = \sum_{j=1}^n a_r^j \vec{u}_j. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} t(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r) &= t \left( \sum_{j=1}^n a_1^j \vec{u}_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_r^j \vec{u}_j \right) \\ &= \sum_{(j_1, \dots, j_r)} a_1^{j_1} \dots a_r^{j_r} t(\vec{u}_{j_1}, \dots, \vec{u}_{j_r}). \end{aligned}$$

Se trata de  $r$ -variaciones con repetición. Tenemos que si  $j_i = j_h$ , entonces el término  $t(\vec{u}_{j_1}, \dots, \vec{u}_{j_r})$  se va a anular, por lo que realmente se trata de variaciones  $n$ -arias sin repetición. Sea  $\dim(V) = n$  y sea  $t$  una  $n$ -forma multilinear alternada. Si  $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\} \subset V$ ,

$$(\vec{u}_1 \quad \dots \quad \vec{u}_n) \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} = (\vec{x}_1 \quad \dots \quad \vec{x}_n).$$

Son variaciones  $n$ -arias sin repetición de  $(1, 2, \dots, n)$ .

$$\begin{aligned} t(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_1^{\sigma(1)} a_2^{\sigma(2)} \dots a_n^{\sigma(n)} t(\vec{u}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{u}_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_1^{\sigma(1)} \dots a_n^{\sigma(n)} \text{sig}(\sigma) t(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n). \end{aligned}$$

**Definición 3.8** (Determinante). Si  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ , el determinante de  $A_{\sigma \in \mathcal{S}_n}$  es

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \text{sig}(\sigma) a_1^{\sigma(1)} \cdots a_n^{\sigma(n)}.$$

**Definición 3.9** (Traspuesta). Si  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ , llamaremos **traspuesta** de  $A$  a la matriz  $A^t \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$  que tiene por filas las columnas de  $A$ .

**Teorema 3.5.**

$$\det A^t = \det A.$$

*Demostración.* Si  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ , entonces

$$\det A^t = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \text{sig}(\sigma) a_{\sigma(1)}^1 \cdots a_{\sigma(n)}^n = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \text{sig}(\sigma^{-1}) a_1^{\sigma^{-1}(1)} \cdots a_n^{\sigma^{-1}(n)} = \sum_{\Pi \in \mathcal{S}_n} \text{sig}(\Pi) a_1^{\Pi(1)} \cdots a_n^{\Pi(n)} = \det A.$$

□

Sea  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  base de  $V$  tal que  $t(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) = 1$ . Entonces,  $t(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \det A$  y

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \cdots & \vec{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \cdots & \vec{u}_n \end{pmatrix} A.$$

**Observación 3.1.**

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_i^1 + b_i^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_i^n + b_i^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} &= t(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i + \vec{y}_i, \dots, \vec{x}_n) \\ &= t(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n) + t(\vec{x}_1, \dots, \vec{y}_i, \dots, \vec{x}_n) \\ &= \det \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_i^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_i^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & b_i^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & b_i^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Observación 3.2.**

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & aa_i^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & aa_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} &= t(\vec{x}_1, \dots, a\vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n) \\ &= at(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n) \\ &= a \det \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_i^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



**Observación 3.3.** En el caso anterior, si  $a = 0$ , el determinante de la matriz es 0.

**Observación 3.4.**

$$\det \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_j^1 & \cdots & a_i^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_j^n & \cdots & a_i^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} = t(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n) = -t(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_n).$$

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}).$$

Tenemos que

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \text{sig}(\sigma) a_1^{\sigma(1)} \cdots a_n^{\sigma(n)}.$$

Vamos a ver como calcular el determinante de una matriz aislando una única fila o columna. Seleccionamos el elemento  $a_1^1$  y calculamos la suma de todos los sumandos donde interviene  $a_1^1$ :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n, \sigma(1)=1} \text{sig}(\sigma) a_1^1 a_2^{\sigma(2)} \cdots a_n^{\sigma(n)} = \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n-1}} \text{sig}(\sigma) a_2^{\sigma(2)} \cdots a_n^{\sigma(n)} \right) \cdot a_1^1 = a_1^1 \det \begin{pmatrix} a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Este mismo procedimiento se puede hacer para un elemento cualquiera  $a_j^i$ .

**Definición 3.10** (Adjunto). El menor complementario  $\alpha_j^i$  es el determinante de la matriz  $(n-1) \times (n-1)$  que se obtiene  $A$  suprimiendo la fila  $i$  y la columna  $j$ , y llamaremos **adjunto** a  $A_j^i = (-1)^{i+j} \alpha_j^i$ .

Si cogemos la fila  $j$ , vamos a tener que

$$\det(A) = a_j^1 A_j^1 + a_j^2 A_j^2 + \cdots + a_j^n A_j^n = a_1^i A_1^i + a_2^i A_2^i + \cdots + a_n^i A_n^i.$$

Si  $i \neq k$  tenemos que

$$a_i^1 A_k^1 + a_i^2 A_k^2 + \cdots + a_i^n A_k^n = 0.$$

Similarmente, si  $j \neq k$ ,

$$a_1^j A_1^k + a_2^j A_2^k + \cdots + a_n^j A_n^k = 0.$$

Tenemos que

$$(\vec{u}_1 \quad \cdots \quad \vec{u}_n) = (\vec{u}_1 \quad \cdots \quad \vec{u}_n) I_{n \times n}.$$

Por tanto, tenemos que

$$1 = t(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) = \underbrace{t(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)}_1 \det(I_{n \times n}) \Rightarrow \det(I_{n \times n}) = 1.$$

Recordamos que  $\text{Aut}(V) = \{f \in \text{End}(V) : \exists f^{-1}\}$  y  $\text{GL}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) : \exists A^{-1}\}$ .

**Teorema 3.6.** Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ . Entonces,  $A \in \text{GL}(n, \mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$ .

*Demostración.* (i) Si  $A \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$ ,  $\exists A^{-1}$  tal que  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_{n \times n}$ . Así,

$$1 = \det(I_{n \times n}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}).$$

Por tanto, tenemos que si  $\det(A) \neq 0$ ,  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \neq 0$ . Estrictamente tenemos que tener que  $\det(A), \det(A^{-1}) \neq 0$ .

(ii) Si  $\det(A) \neq 0$ . Vamos a comprobar que  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Adj}(A^t)$ . Tenemos que

$$\begin{pmatrix} \frac{A_1^1}{|A|} & \cdots & \frac{A_1^n}{|A|} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{A_n^1}{|A|} & \cdots & \frac{A_n^n}{|A|} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_1^1 a_1^1 + \cdots + A_1^n a_n^1 & \cdots & A_n^1 a_1^1 + \cdots + A_n^n a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \cdots & A_j^1 a_j^1 + \cdots + A_j^n a_j^n & \cdots \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}.$$

Tenemos que  $\forall i, j = 1, \dots, n$  el coeficiente de la fila  $j$  y la columna  $i$  de la matriz producto. Tenemos que

$$\frac{\sum_{k=1}^n A_k^i a_k^j}{|A|} = \begin{cases} \frac{\det(A)}{\det(A)} = 1, & \text{si } j = i \\ 0, & \text{si } j \neq i \end{cases}.$$

Es decir, el producto de las dos matrices anteriores es la identidad. □

### 3.6. Sistemas de Cramer

**Definición 3.11** (Sistemas de Cramer). Un **sistema de Cramer** es un sistema de ecuaciones lineales

$$(S) \begin{cases} a_1^1 x^1 + \cdots + a_n^1 x^n = b^1 \\ \vdots \\ a_1^n x^1 + \cdots + a_n^n x^n = b^n \end{cases} \quad \text{donde } a_i^j \in \mathbb{K}, b^j \in \mathbb{K}, \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Además,

$$\det \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \neq 0.$$

**Teorema 3.7.** Todo sistema de cramer tiene solución única.

*Demostración.* Primero vemos la **unicidad**. Si  $(x_0^1, \dots, x_0^n)$  es solución de  $(S)$ ,

$$(S) \begin{cases} a_1^1 x_0^1 + \cdots + a_n^1 x_0^n = b^1 \\ \vdots \\ a_1^n x_0^1 + \cdots + a_n^n x_0^n = b^n \end{cases} \quad \text{donde } a_i^j \in \mathbb{K}, b^j \in \mathbb{K}, \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}.$$

Como  $\det(A) \neq 0$ , tenemos que  $\exists! A^{-1}$ . Entonces,

$$A^{-1} A \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}.$$

Ahora vamos a ver la **existencia**. Vamos a ver que el producto  $A^{-1} \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}$  es solución de  $S$ .

$$A^{-1} \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_1^1 & \cdots & A_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ A_n^1 & \cdots & A_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_1^1 b^1 + \cdots + A_1^n b^n \\ \vdots \\ A_n^1 b^1 + \cdots + A_n^n b^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\det \begin{pmatrix} b^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}}{\det(A)} \\ \vdots \\ \frac{\det \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_{i-1}^1 & b^1 & a_{i+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_{i-1}^n & b^n & a_{i+1}^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}}{\det(A)} \\ \vdots \\ \frac{\det \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & b^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & b^n \end{pmatrix}}{\det(A)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{A_1^1}{|A|} & \cdots & \frac{A_1^n}{|A|} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{A_n^1}{|A|} & \cdots & \frac{A_n^n}{|A|} \end{pmatrix}.$$

□

**Definición 3.12** (Menor). Un **menor** de orden  $r$  de  $A$ ,  $r \leq \min\{m, n\}$ , es el determinante de una matriz  $r \times r$  que se obtiene de  $A$  suprimiendo  $(m - r)$  filas y  $(n - r)$  columnas.

**Definición 3.13** (Rango). Decimos que el **rango** de  $A$  es  $r$  si existe un menor de orden  $r$  de  $A$  no nulo y todos los de orden  $r + 1$  son nulos.

Sea  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  base de un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $V$  y sean  $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m\} \subset V$ , tales que

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= a_1^1 \vec{u}_1 + \cdots + a_1^n \vec{u}_n \\ &\vdots \\ \vec{x}_m &= a_m^1 \vec{u}_1 + \cdots + a_m^n \vec{u}_n. \end{aligned}$$

Entonces, en función de estos valores definimos,

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_m^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_m^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K}).$$

**Teorema 3.8.**

$$\text{ran}(A) = \dim(L(\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m\})).$$

*Demostración.* Sea  $r = \text{ran}(A)$  y  $\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{vmatrix} \neq 0$ .

- (1) Vamos a ver que  $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r\}$  son linealmente independientes.

Sean  $a^1, \dots, a^r \in \mathbb{K}$ . Si

$$a^1 \vec{x}_1 + \cdots + a^r \vec{x}_r = \vec{0}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} & a^1 (a_1^1 \vec{u}_1 + \cdots + a_1^r \vec{u}_r + \cdots + a_1^n \vec{u}_n) + \cdots + a^r (a_r^1 \vec{u}_1 + \cdots + a_r^r \vec{u}_r + \cdots + a_r^n \vec{u}_n) \\ &= (a^1 a_1^1 + \cdots + a^r a_r^1) \vec{u}_1 + \cdots + (a^1 a_1^r + \cdots + a^r a_r^r) \vec{u}_r + \cdots + (a^1 a_1^n + \cdots + a^r a_r^n) \vec{u}_n = \vec{0}. \end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$a^1 a_1^1 + \cdots + a^r a_r^1 = 0$$

$$\vdots$$

$$a^1 a_1^r + \cdots + a^r a_r^r = 0$$

$$\vdots$$

$$a^1 a_1^n + \cdots + a^r a_r^n = 0.$$

Entonces,  $(a^1, \dots, a^r)$  es solución del sistema

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + \cdots + a_r^1 x^r = 0 \\ \vdots \\ a_1^r x^1 + \cdots + a_r^r x^r = 0 \end{cases}.$$

Como es un sistema de Cramer homogéneo, tenemos que  $a^1 = \cdots = a^r = 0$ .

- (2) Vamos a ver que  $\forall i = 1, \dots, m - r$ ,  $\vec{x}_{r+i}$  es linealmente dependiente de  $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r\}$ .

Sea  $i = 1, \dots, m - r$ , queremos ver que  $\vec{x}_{r+i} \in L(\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r\})$ . Queremos llegar al siguiente sistema, respecto a las coordenadas de  $\vec{x}_{r+i}$ , que es un sistema de Cramer:

$$(S) = \begin{cases} a_1^1 x^1 + \cdots + a_r^1 x^r = x_{r+i}^1 \\ \vdots \\ a_1^r x^1 + \cdots + a_r^r x^r = x_{r+i}^r \end{cases}.$$

Al ser un sistema de Cramer, tenemos que  $\exists! (a^1, \dots, a^r)$  solución de  $S$ . Tenemos que

$$\begin{aligned}
 0 &= \begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_{r+i}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_{r+i}^r \\ a_1^{r+j} & \cdots & a_r^{r+j} & a_{r+i}^{r+j} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & & a_{r+i}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & & a_{r+i}^r \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r+i}^{r+j} - a^1 a_{r+i}^1 - \cdots - a^r a_{r+i}^r & \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{vmatrix} \left( a_{r+i}^{r+j} - a^1 a_{r+i}^1 - \cdots - a^r a_{r+i}^r \right)
 \end{aligned}$$

Entonces,

$$a_{r+i}^{r+j} = a^1 a_{r+i}^1 + \cdots + a^r a_{r+i}^r.$$

□

Dado el sistema

$$(S) \begin{cases} a_1^1 x^1 + \cdots + a_n^1 x^n = b^1 \\ \vdots \\ a_1^m x^1 + \cdots + a_n^m x^n = b^m \end{cases}$$

Definimos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}), \quad B = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 & b^1 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m & b^m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times (n+1)}(\mathbb{K}).$$

Tenemos que  $\text{ran}(A) \leq \text{ran}(B) \leq \text{ran}(A) + 1$ .

**Teorema 3.9** (Teorema de Rouché-Fröbenius).  $(S)$  tiene solución si y solo si  $\text{ran}(A) = \text{ran}(B)$ .

*Demostración.* (i) Si el sistema  $(S)$  tiene solución, existe  $(x_0^1, \dots, x_0^n) \in \mathbb{K}^n$  tal que

$$\begin{cases} a_1^1 x_0^1 + \cdots + a_n^1 x_0^n = b^1 \\ \vdots \\ a_1^m x_0^1 + \cdots + a_n^m x_0^n = b^m \end{cases}$$

Como la última columna de la matriz  $B$  depende linealmente de  $A$ , tenemos que  $\text{ran}(A) = \text{ran}(B)$ .

(ii) Supongamos que  $\text{ran}(A) = \text{ran}(B) = r$  y que  $\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{vmatrix} \neq 0$ . Consideramos el sistema  $(P)$  el sistema en el que intervienen las primeras  $r$  ecuaciones:

$$(P) \begin{cases} a_1^1 x^1 + \cdots + a_r^1 x^r + \cdots + a_n^1 x^n = b^1 \\ \vdots \\ a_1^r x^1 + \cdots + a_r^r x^r + \cdots + a_n^r x^n = b^r \end{cases}.$$

Tenemos que toda solución de  $(S)$  es solución de  $(P)$ . Vamos a ver que toda solución de  $(P)$  es solución de  $(S)$ . Sea  $(x_0^1, \dots, x_0^r, \dots, x_0^n)$  solución de  $(P)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} a_1^1 x_0^1 + \cdots + a_r^1 x_0^r + \cdots + a_n^1 x_0^n &= b^1 \\ &\vdots \\ a_1^r x_0^1 + \cdots + a_r^r x_0^r + \cdots + a_n^r x_0^n &= b^r. \end{aligned}$$

Si  $i > 1, \dots, m - r$ , queremos ver que

$$a_1^{r+i} x_0^1 + \cdots + a_r^{r+i} x_0^r + \cdots + a_n^{r+i} x_0^n = b^{r+i}.$$

Tenemos que existen  $l_1, \dots, l_r \in \mathbb{K}$  tales que

$$\begin{aligned} l_1 a_1^1 + \cdots + l_r a_1^r &= a_1^{r+i} \\ &\vdots \\ l_1 a_r^1 + \cdots + l_r a_r^r &= a_r^{r+i} \\ &\vdots \\ l_1 a_n^1 + \cdots + l_r a_n^r &= a_n^{r+i} \\ l_1 b^1 + \cdots + l_r b^r &= b^{r+i} \end{aligned}.$$

Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} a_1^{r+i} x_0^1 + \cdots + a_r^{r+i} x_0^r + \cdots + a_n^{r+i} x_0^n &= (l_1 a_1^1 + \cdots + l_r a_1^r) x_0^1 + \cdots + (l_1 a_n^1 + \cdots + l_r a_n^r) x_0^n \\ &= l_1 (a_1^1 x_0^1 + \cdots + a_n^1 x_0^n) + \cdots + l_r (a_1^r x_0^1 + \cdots + a_n^r x_0^n) \\ &= l_1 b^1 + \cdots + l_r b^r = b^{r+i}. \end{aligned}$$

Entonces, tenemos que el sistema  $(P')$

$$(P') \begin{cases} a_1^1 x^1 + \cdots + a_r^1 x^r = b^1 - a_{r+1}^1 x^{r+1} - \cdots - a_n^1 x^n \\ \vdots \\ a_1^r x^1 + \cdots + a_r^r x^r = b^r - a_{r+1}^r x^{r+1} - \cdots - a_n^r x^n \end{cases}.$$

Claramente, el sistema  $(P')$  es equivalente al sistema  $(P)$ . Si fijo  $(x_0^{r+1}, \dots, x_0^n) \in \mathbb{K}^{n-r}$ , tenemos que el sistema

$$(P_1) \begin{cases} a_1^1 x^1 + \dots + a_r^1 x^r = b^1 - a_{r+1}^1 x_0^{r+1} - \dots - a_n^1 x_0^n \\ \vdots \\ a_1^r x^1 + \dots + a_r^r x^r = b^r - a_{r+1}^r x_0^{r+1} - \dots - a_n^r x_0^n \end{cases}.$$

Al tratarse de un sistema de Cramer, existe una única solución  $(x_0^1, \dots, x_0^r)$  de  $(P_1)$ . Entonces,  $(x_0^1, \dots, x_0^r, x_0^{r+1}, \dots, x_0^n)$  es solución de  $(P)$ . Si  $(y_0^{r+1}, \dots, y_0^n) \in \mathbb{K}^{n-r}$ . Consideremos el sistema  $(P_2)$ ,

$$(P_2) \begin{cases} a_1^1 x^1 + \dots + a_r^1 x^r = b^1 - a_{r+1}^1 y_0^{r+1} - \dots - a_n^1 y_0^n \\ \vdots \\ a_1^r x^1 + \dots + a_r^r x^r = b^r - a_{r+1}^r y_0^{r+1} - \dots - a_n^r y_0^n \end{cases}.$$

Como es sistema de Cramer,  $\exists!$   $(y_0^1, \dots, y_0^r)$  solución de  $(P_2)$ . Por tanto,  $(y_0^1, \dots, y_0^r, y_0^{r+1}, \dots, y_0^n)$  es solución de  $(P)$ . □

Sea  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  una base de  $V$ . Sea  $L \in \mathcal{L}(V)$  tal que  $\dim(L) = r$  y sea  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\}$  una base de  $L$ . Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= a_1^1 \vec{u}_1 + \dots + a_n^1 \vec{u}_n \\ &\vdots \\ \vec{v}_r &= a_r^1 \vec{u}_1 + \dots + a_n^r \vec{u}_n. \end{aligned}$$

Entonces, si  $\vec{x} \in V$  con  $\vec{x} = x^1 \vec{u}_1 + \dots + x^n \vec{u}_n$ . Tenemos que  $\vec{x} \in L$  si y solo si existen  $\lambda^1, \dots, \lambda^r \in \mathbb{K}$  tales que  $\vec{x} = \lambda^1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda^r \vec{v}_r$  (ecuaciones paramétricas). Esto es, si y solo si

$$\begin{aligned} x^1 \vec{u}_1 + \dots + x^n \vec{u}_n &= \lambda^1 (a_1^1 \vec{u}_1 + \dots + a_n^1 \vec{u}_n) + \dots + \lambda^r (a_r^1 \vec{u}_1 + \dots + a_n^r \vec{u}_n) \\ &= (\lambda^1 a_1^1 + \dots + \lambda^r a_r^1) \vec{u}_1 + \dots + (\lambda^1 a_1^n + \dots + \lambda^r a_r^n) \vec{u}_n. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} x^1 &= \lambda^1 a_1^1 + \dots + \lambda^r a_r^1 \\ &\vdots \\ x^n &= \lambda^1 a_1^n + \dots + \lambda^r a_r^n. \end{aligned}$$

Es decir, si y solo si el sistema anterior tiene solución. Es decir,

$$r = \text{ran} \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} = \text{ran} \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 & x^1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n & x^n \end{pmatrix}.$$



Así obtenemos las ecuaciones implícitas de  $L$ . Supongamos que

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{vmatrix} = \nabla \neq 0.$$

Entonces, tenemos que los menores de orden  $r+1$  de la matriz de coeficientes que contienen al menor anterior son nulos.

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & x^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & x^r \\ a_1^{r+1} & \cdots & a_r^{r+1} & x^{r+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Similarmente,  $\forall i = 1, \dots, n-r$ ,

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & x^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & x^r \\ a_1^{r+i} & \cdots & a_r^{r+i} & x^{r+i} \end{vmatrix} = 0.$$

Si desarrollamos este determinante por adjuntos:

$$x^1 b_1^1 + x^2 b_2^1 + \cdots + x^r b_r^1 x^{r+1} \nabla = 0.$$

Tenemos que  $\forall i = 1, \dots, n-r$ ,

$$x^1 b_1^1 + \cdots + x^r b_r^1 + x^{r+i} \nabla = 0.$$

Tenemos  $n-r$  ecuaciones donde la matriz de coeficientes será

$$\text{ran} \begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & b_r^1 & \nabla & 0 & \cdots & 0 \\ b_1^2 & \cdots & b_r^2 & 0 & \nabla & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_1^{n-r} & \cdots & b_r^{n-r} & 0 & \cdots & 0 & \nabla \end{pmatrix} = n-r.$$

Con esto hemos demostrado que todo subespacio vectorial es el conjunto de las soluciones de un sistema homogéneo. Ahora consideremos el recíproco. Consideremos el sistema homogéneo  $(H)$ :

$$(H) \begin{cases} c_1^1 x^1 + \cdots + c_n^1 x^n = 0 \\ \vdots \\ c_1^{n-r} x^1 + \cdots + c_n^{n-r} x^n = 0 \end{cases}.$$

Sea  $L = \{x_0^1 \vec{u}_1 + \cdots + x_0^n \vec{u}_n : (x_0^1, \dots, x_0^n) \text{ solución de } (H)\} \in \mathcal{L}(V)$  tales que  $\dim(L) = r$ . Supongamos que

$$\text{ran} \begin{pmatrix} c_1^1 & \cdots & c_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ c_1^{n-r} & \cdots & c_n^{n-r} \end{pmatrix} = n-r.$$

En la introducción está demostrado que  $L$  es un subespacio vectorial. Supongamos que

$$\begin{vmatrix} c_1^1 & \cdots & c_{n-r}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ c_1^{n-r} & \cdots & c_{n-r}^{n-r} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Entonces

$$\begin{cases} c_1^1 x^1 + \cdots + c_{n-r}^1 x^{n-r} = -c_{(n-r)+1}^1 x^{(n-r)+1} - \cdots - c_n^1 x^n \\ \vdots \\ c_1^{n-r} x^1 + \cdots + c_{n-r}^{n-r} x^{n-r} = -c_{(n-r)+1}^{n-r} x^{(n-r)+1} - \cdots - c_n^{n-r} x^n \end{cases}.$$

Supongamos que las siguientes tuplas son soluciones de  $(H)$ :

$$\begin{cases} (d_1^1, \dots, d_1^{n-r}, 1, 0, \dots, 0) \\ (d_2^1, \dots, d_2^{n-r}, 0, 1, \dots, 0) \\ \vdots \\ (d_r^1, \dots, d_r^{n-r}, 0, \dots, 0, 1) \end{cases}.$$

Sean

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= d_1^1 \vec{u}_1 + \cdots + d_1^{n-r} \vec{u}_{n-r} + \vec{u}_{n-r+1} \in L \\ &\vdots \\ \vec{v}_r &= d_r^1 \vec{u}_1 + \cdots + d_r^{n-r} \vec{u}_{n-r} + \vec{u}_{n-r+1} \in L \end{aligned}$$

Entonces,

$$\vec{x}_0 = x_0^1 \vec{u}_1 + \cdots + x_0^{n-r} \vec{u}_{n-r} + \cdots + x_0^n \vec{u}_n \in L$$

$$\vec{z}_0 = \vec{x}_0 - x_0^{n-r+1} \vec{x}_1 - x_0^{n-r+2} \vec{v}_2 - \cdots - x_0^n \vec{v}_r = z_0^1 \vec{u}_1 + \cdots + z_0^{n-r} \vec{u}_{n-r} + 0 \cdot \vec{u}_{n-r+1} + \cdots + 0 \cdot \vec{u}_n \in L.$$

Entonces tenemos que  $(z_0^1, \dots, z_0^{n-r}, 0, \dots, 0)$  son solución de  $(H)$ . Entonces,  $(z_0^1, \dots, z_0^{n-r})$  es solución del sistema de Cramer.

$$\begin{cases} c_1^1 x^1 + \cdots + c_{n-r}^1 x^{n-r} = 0 \\ \vdots \\ c_1^{n-r} x^1 + \cdots + c_{n-r}^{n-r} x^{n-r} = 0 \end{cases}.$$

Así,  $\vec{z}_0 = \vec{0}$  y

$$\vec{x}_0 = x_0^{n-r+1} \vec{v}_1 + x_0^n \vec{v}_r \Rightarrow L = L(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\}).$$

Sea  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  base de  $V$  y  $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r\} \subset V$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_r^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times r}(\mathbb{K}).$$

Tenemos que  $\dim(L(\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r\})) = \text{ran}(A)$ .

**Proposición 3.17.**

$$L(\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_r\}) = L(\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_r\}).$$

**Proposición 3.18.** Sea  $a \in \mathbb{K}/\{0\}$ ,

$$L(\{\vec{x}_1, \dots, a\vec{x}_i, \dots, \vec{x}_r\}) = L(\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_r\})$$

**Proposición 3.19.** Si  $a \in \mathbb{K}$ ,

$$L(\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j + a\vec{x}_i, \dots, \vec{x}_r\}) = L(\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_r\}).$$

Si  $a_1^1 \neq 0$ , a la segunda fila le resto la primera multiplicada por  $\frac{a_2^1}{a_1^1}$ . Para  $i = 2, \dots, n$  a la fila  $i$  le resto la primera multiplicada por  $\frac{a_i^1}{a_1^1}$ .

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_r^1 \\ 0 & a_2^2 & \cdots & a_r^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_2^r & \cdots & a_r^r \end{pmatrix}.$$

Si  $a_1^1 = 0$  y  $\exists a_1^i \neq 0$ , permutamos las filas 1 e  $i$ . Supongo por hipótesis de inducción que después de  $i$  etapas.

$$\begin{pmatrix} b_1^1 & * & \cdots & * \\ 0 & b_1^2 & \cdots & * \\ 0 & \cdots & b_1^i & * \\ 0 & \cdots & 0 & D \end{pmatrix},$$

donde

$$D = \begin{pmatrix} d_1^1 & \cdots & d_t^1 \\ \vdots & & \vdots \\ d_1^s & \cdots & d_r^t \end{pmatrix}.$$

El método anterior consiste en una forma de calcular el rango de una matriz usando Gauss. La forma de calcular la inversa de una matriz  $A \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$  consiste en utilizar combinaciones lineales hasta obtener la identidad. Si hacemos las mismas transformaciones con  $I_{n \times n}$ , obtenemos  $A^{-1}$ .