Estructuras Algebraicas - Entrega 2

Julia Romero, Pablo Salas y Victoria Torroja

27/10/2025

Ejercicio 1. Demostrar que $U(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^*$ si y solo si $p \geq 2$ es primo. Deducir que $\mathbb{Z}_p^*$ es un grupo si y solo si $p \geq 2$ es primo.

Solución 1. En primer lugar, demostremos que $U(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^*$ si y solo si $p \geq 2$ es primo:

(i) Supongamos que $p \geq 2$ no es primo. Entonces, existe $1 < k < p$, es decir, $k \in \mathbb{Z}_p^*$, tal que $k|p$, por lo que $\operatorname{mcd}(p,k) = k \neq 1$ y $k \notin U(\mathbb{Z}_p)$. En consecuencia, tenemos que $\mathbb{Z}_p^* \neq U(\mathbb{Z}_p)$.

(ii) Supongamos que $p \geq 2$ es primo. Es trivial que $U(\mathbb{Z}_p) \subset \mathbb{Z}_p^*$. Ahora, si $k \in \mathbb{Z}_p^*$, tenemos que $1 \leq k < p$, por lo que debe ser que $\operatorname{mcd}(k,p) = 1$, por ser p primo. Así, tenemos que $k \in U(\mathbb{Z}_p)$, por lo que $U(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^*$.

Ahora demostramos que $\mathbb{Z}_p^*$ es un grupo si y solo si $p \geq 2$ es primo.

(i) Si $p \geq 2$ no es primo, tenemos que existe $1 < k < p$ tal que $k|p$. Así, tenemos que $k \notin U(\mathbb{Z}_p)$, por lo que k no tiene inverso multiplicativo en $\mathbb{Z}_p^*$ (en un resultado de clase vimos que los elementos de $\mathbb{Z}_p^*$ tenían inverso multiplicativo si y solo si estaban en $U(\mathbb{Z}_p)$). Por tanto, $\mathbb{Z}_p^*$ no es un grupo.

(ii) Si $p \geq 2$ es primo, acabamos de ver que $\mathbb{Z}_p^* = U(\mathbb{Z}_p)$ y por un resultado de clase tenemos que $U(\mathbb{Z}_p)$ es un grupo, por lo que $\mathbb{Z}_p^*$ es un grupo. En efecto, por el resultado visto en clase se cumple la existencia de los inversos. La existencia del elemento neutro es trivial, puesto que $[1]_m \in \mathbb{Z}_p^*$ es el elemento neutro. La operación claramente es asociativa, falta ver que se trata de una operación interna. Supongamos que $[a]_m, [b]_m \in U(\mathbb{Z}_p)$. Como $\operatorname{mcd}(a,p) = \operatorname{mcd}(b,p) = 1$, por la identidad de Bézout existen $\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathbb{Z}$ tales que

$$1 = \lambda a + \mu p = \lambda' b + \mu' p.$$

Así, tenemos que

$$1 = (\lambda a + \mu p)(\lambda' b + \mu' p) = \lambda\lambda' ab + (\lambda\mu' a + \lambda'\mu b + \mu\mu' p)\, p.$$

Así, tenemos que si $d = \operatorname{mcd}(ab,p)$, entonces $d|1$, por lo que debe ser que $d = 1$ y $ab \in U(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^*$. Por tanto, $\mathbb{Z}_p^*$ es un grupo.

Ejercicio 2. Sea $G = D_6$. Encuentra una serie normal

$$\{e\} \triangleleft H_1 \triangleleft H_2 \triangleleft G$$

tal que cada cociente H_{i+1}/H_i sea abeliano.

Solución 2. Consideremos $H_1 = \left\langle \sigma^3 \right\rangle$ y $H_2 = \langle \sigma \rangle$. Como $|H_2| = 6$ tenemos que $[G : H_2] = \dfrac{|G|}{|H_2|} = 2$, por lo que $H_2 \lhd G$. Por ser H_2 cíclico tenemos que es abeliano, por lo que cualquier subgrupo suyo será subgrupo normal. En particular, tenemos que $\left\langle \sigma^3 \right\rangle \leq \langle \sigma \rangle$, por lo que $H_1 \lhd H_2$. Así, tenemos que, por ser $\{e\}$ un subgrupo normal trivial,

$$\{e\} \lhd H_1 \lhd H_2 \lhd G.$$

Falta ver que $H_1/\{e\}$, H_2/H_1 y G/H_2 son abelianos. Tenemos que

$$H_1/\{e\} = \left\{[e], [\sigma^3]\right\}, \quad H_2/H_1 = \left\{[e], [\sigma], [\sigma^2]\right\}, \quad G/H_2 = \{[e], [\tau]\}.$$

Claramente, G/H_2 es abeliano por tener únicamente dos elementos, uno de los cuales es el elemento neutro. Por la misma razón, $H_1/\{e\}$ es abeliano. Finalmente, está claro que H_2/H_1 es abeliano puesto que los representantes pertenecen a $\langle \sigma \rangle$, que es abeliano.

Ejercicio 3. Sea

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

con la multiplicación matricial usual.

(a) Muestra que H es finitamente generado.

(b) Da un conjunto de generadores mínimos.

(c) ¿Es abeliano?

Solución 3. **(a)** Consideremos las matrices

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H.$$

Si calculamos las inversas obtenemos

$$h_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H.$$

Tenemos que

$$\langle h_1 \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ \lambda \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \langle h_2 \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ \lambda \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \langle h_3 \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ \lambda \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Esto es fácil de demostrar por inducción. Demostramos sólamente el caso de h_1 puesto que los otros dos son análogos:

- Si $n = 2$, tenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Asumiendo que es cierto para $n-1$, tenemos que

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}1 & n-1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & n & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

  Análogamente,

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}1 & -(n-1) & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -n & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Así, dado

$$h = \begin{pmatrix}1 & a & c\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \in H,$$

tenemos que

$$\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \in \langle h_1 \rangle, \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & c\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \in \langle h_2 \rangle, \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \in \langle h_3 \rangle.$$

Si tomamos $d = c - ab$,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^a \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^b \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^d &= \begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & d\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & a & ab\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & d\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & a & d+ab\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & a & c\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Así, tenemos que cualquier elemento de H se puede expresar como una combinación de h_1, h_2 y h_3, por lo que $H = \langle h_1, h_2, h_3 \rangle$ y H es finitamente generado.

(b) Hemos encontrado un grupo de tres generadores. Para ver que no podemos reducir este conjunto veamos que ninguno se puede expresar como una combinación de los otros dos.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \beta\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & \alpha\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & \alpha\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \beta\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & \alpha\\ 0 & 1 & \beta\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \neq h_1,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{pmatrix}1 & \alpha & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \beta\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \alpha & \alpha+\beta\\ 0 & 1 & \beta\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \neq h_2,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \beta\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \alpha & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \alpha & 0\\ 0 & 1 & \beta\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \neq h_2,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq h_3, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}.$$

Así, acabamos de comprobar que ningún elemento de $\{h_1, h_2, h_3\}$ se puede expresar como combinación de los otros dos por lo que debe ser que es un conjunto de generadores mínimos.

(c) El grupo H no es abeliano. En efecto, sean

$$h = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h' = \begin{pmatrix} 1 & -11 & -13 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$h \cdot h' = \begin{pmatrix} 1 & -15 & -37 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & -15 & -50 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = h' \cdot h.$$

Ejercicio 4. Demuestre o refute cada una de las siguientes proposiciones.

(a) Todos los generadores de $\mathbb{Z}_{60}$ son primos.

(b) U_8 es cíclico.

(c) $\mathbb{Q}$ es cíclico.

(d) Si todo subgrupo propio de un grupo G es cíclico, entonces G es un grupo cíclico.

(e) Un grupo con un número finito de subgrupos es finito.

Solución 4. (a) No es cierto, puesto que $\mathbb{Z}_{60} = \langle 49 \rangle$. En efecto, tenemos que

$$60 | 49k \iff 60 | k.$$

Por tanto, tenemos que $o(49) = 60$ y en consecuencia $\mathbb{Z}_{60} = \langle 49 \rangle$.

(b) Es cierto. En efecto, en clase vimos que

$$U_n = \{z \in \mathbb{C} \ : \ z^n = 1\},$$

es un grupo $\forall n \in \mathbb{N}$, en particular es cierto para $n = 8$. Veamos ahora que $U_8 = \left\langle e^{i\frac{2\pi}{8}} \right\rangle$. Tenemos que

$$U_8 = \left\{ e^{i\frac{2\pi}{8}k} \ : \ 0 \leq k \leq 7 \right\}.$$

Así, si $x = e^{i\frac{2\pi}{8}k}$ con $k \in \{0, \ldots, 7\}$, tenemos que

$$x = e^{i\frac{2\pi}{8}k} = \left(e^{i\frac{2\pi}{8}} \right)^k \in \left\langle e^{i\frac{2\pi}{8}} \right\rangle.$$

Así, está claro que U_8 es cíclico.

(c) No es cierto que $\mathbb{Q}$ es cíclico. En efecto, está claro que $\mathbb{Q} \neq \langle 0 \rangle$. Ahora, supongamos que $\mathbb{Q} = \langle x \rangle$ con $x = \dfrac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Podemos encontrar $m \in \mathbb{Z}$ tal que $\operatorname{mcd}(m, b) = 1$, de esta forma tenemos que $\dfrac{1}{m} \in \mathbb{Q}$ pero $\dfrac{1}{m} \notin \langle x \rangle$. En efecto, si $\dfrac{1}{m} \in \langle x \rangle$ tendríamos que existe $k \in \mathbb{Z}^*$ tal que

$$\frac{1}{m} = \frac{a}{b}k \iff b = mak.$$

Esto último es una contradicción puesto que $\operatorname{mcd}(b, m) = 1$. Así, tenemos que no puede ser que $\mathbb{Q} = \langle x \rangle$, $\forall x \in \mathbb{Q}$, por lo que $\mathbb{Q}$ no es cíclico.

(d) No es cierto. Consideremos el grupo $G = C_2 \times C_2$. Tenemos que $|G| = 2^2$. El grupo G no es cíclico puesto que todos los elementos de G tienen orden 2, es decir, no pueden generar G que tiene orden 4.
Por otro lado, tenemos que si G tiene orden p^2 con p primo, entonces todo subgrupo propio debe tener orden p (puesto que el orden del subgrupo debe dividir al orden del grupo). En particular, como $C_2 \times C_2$ no es cíclico debe ser que el orden de todos los elementos es p. Así, dado $H < C_2 \times C_2$, debe ser que $|H| = p$, pero existe $g \in H$ con $g \neq e$, y como hemos visto antes tenemos que $o(g) = p$, por lo que $H = \langle g \rangle$ y H es cíclico. Así, tenemos que todos los subgrupos propios de $C_2 \times C_2$ son cíclicos pero $C_2 \times C_2$ no es cíclico.

(e) Esto es verdadero. En efecto, supongamos que G es un grupo infinito que tiene un número finito de subgrupos. Entonces, tenemos que el conjunto de todos los subgrupos cíclicos es finito. Tenemos que

$$G = \bigcup_{g \in G} \langle g \rangle .$$

Por tanto, si todos los subgrupos cíclicos son finitos, G es la unión de un número finito de grupos finitos, por lo que G es finito, lo cual es una contradicción. Así, debe existir algún $g \in G$ tal que $\langle g \rangle$ es infinito. Así, tenemos que $\langle g \rangle \cong \mathbb{Z}$, puesto que podemos considerar el isomorfismo

$$\langle g \rangle \to \mathbb{Z} : g^i \to i.$$

Sin embargo, tenemos que $\mathbb{Z}$ tiene infinitos subgrupos, por ejemplo, $n\mathbb{Z}$ para $n = 1, 2, \ldots$. Como $\langle g \rangle$ y $\mathbb{Z}$ son isomorfos, tenemos que $\langle g \rangle$ también tiene infinitos subgrupos, que son a su vez subgrupos de G, por lo que G tiene infinitos subgrupos, que es una contradicción. Así, debe ser que G tiene infinitos subgrupos.

Ejercicio 5. Sea $G = \left\langle R, S / R^4 = S^4 = (RS)^2 = \left(R^{-1}S\right)^2 = 1 \right\rangle$ un grupo finito.

(a) ¿Qué orden tiene el grupo G?

(b) ¿Cuál es el exponente de G?

(c) ¿Qué orden tiene el elemento $R^2SRS^3RS^2$?

Solución 5. Consideremos que $o(R) = o(S) = 4$ y que $1 \neq R \neq S \neq 1$. De los datos del enunciado podemos deducir algunas igualdades:

$$RS = S^{-1}R^{-1}, \quad R^{-1}S = S^{-1}R.$$

(a) A priori, parece que tenemos que

$$\left\{1, R, R^2, R^3, S, S^2, S^3\right\} \subset G.$$

Sin embargo, tenemos que ver que $R^i \neq S^j$ para $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

- Si $R = S^2$, tenemos que $R^2 = 1$, lo que contradice que $o\,(R) = 4$, por lo que debe ser que $R \neq S^2$ y $S \neq R^2$.
- Si $R = S^3$ tenemos que $RS = 1$, por lo que $R = S^{-1}$ y $o\,(RS) = 1$, que contradice que $o\,(RS) = 2$. Por tanto, debe ser que $R \neq S^3$ y $S \neq R^3$.
- Si $R^2 = S^3$ tenemos que $S^{-1} = R^2$, por lo que $S^{-2} = S^2 = 1$, que contradice que $o\,(S) = 4$. De esta forma, tenemos que $R^2 \neq S^3$ y $S^2 \neq R^3$.
- Si $R^3 = S^3$ tenemos que $1 = RS^{-1}$ por lo que $R = S$, que contradice nuestras hipótesis, por lo que debe ser que $R^3 \neq S^3$.
- Finalmente, habría que comprobar que $R^2 \neq S^2$. Bajo las condiciones dadas en el enunciado no podríamos afirmar que $R^2 = S^2$ ni el contrario, puesto que hay ejemplos de grupos en los que se cumplen ambas condiciones. En lo que nos afecta, asumiremos que $R^2 \neq S^2$.

Así, hemos visto que en general, $S^i \neq R^j$ para $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Por otro lado, tenemos que

$$\boxed{RS = S^3R^3} \iff RS = (RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1} = S^3R^3.$$

$$\boxed{R^3S^3 = SR} \iff S\,(RS)\,S^3 = S\left(S^3R^3\right)S^3.$$

De forma análoga se demuestran todas las siguientes igualdades:

$$\begin{pmatrix} RS & RS^2 & RS^3 \\ R^2S & R^2S^2 & R^2S^3 \\ R^3S & R^3S^2 & R^3S^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^3R^3 & S^2R & SR^3 \\ SR^2 & S^2R^2 & S^3R^2 \\ S^3R & S^2R^3 & SR \end{pmatrix}.$$

Así, tenemos que $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $R^aS^b = S^{b'}R^{a'}$. Es decir, todas las cadenas de más de dos elementos podrán reducirse dejando las S a la derecha y las R a la izquierda. Así, tenemos que

$$G = \left\{1, R, R^2, R^3, S, S^2, S^3, RS, RS^2, RS^3, R^2S, R^2S^2, R^2S^3, R^3S, R^3S^2, R^3S^3\right\}.$$

Así, tenemos que $7 \leq |G| \leq 16$. Para calcular el orden veamos que ninguno de los elementos se repiten del conjunto que hemos descrito anteriormente. Sabemos que $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$ $R^iS^j \neq 1$. En efecto, si $R^iS^j = 1$, tendríamos que $R^i = S^{-j}$, que contradice el análisis que hemos hecho anteriormente. De forma análoga,

$$R^iS^j = R^mS^n \iff R^{i-m} = S^{n-j} \iff i = m \text{ y } n = j.$$

Así, tenemos que todos los elementos que hemos puesto en el conjunto anterior no se repiten, por lo que $|G| = 16$.

(b) Para calcular el exponente basta con calcular los órdenes de todos los elementos y calcular el mínimo común múltiplo:

x	1	R	R^2	R^3	S	S^2	S^3	RS	RS^2	RS^3	R^2S	R^2S^2	R^2S^3	R^3S	R^3S^2	R^3S^3
$o(x)$	1	4	2	4	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2

Así, tenemos $\exp(G) = \operatorname{mcm}(1, 2, 4) = 4$.

(c) Para calcular el orden de $R^2SRS^3RS^2$ buscamos la forma reducida de este elemento y buscamos su orden en la tabla calculada en el apartado anterior. Tenemos que

$$R^2SRS^3RS^2 = R^2SR\left(S^3R\right)S^2 = R^2SR\left(R^3S\right)S^2 = R^2SSS^2 = R^2.$$

Así, tenemos que $o\left(R^2SRS^3RS^2\right) = o\left(R^2\right) = 2$.