Álgebra Lineal

Victoria Torroja Rubio

9/10/2024 -

Índice general

0.1. Introducción

El cuerpo de los números reales cumple los siguientes requisitos:

$(\mathbb{R},+)$ es un grupo abeliano:
Definimos suma y producto como

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (a,b) &\to a+b \\ \cdot : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (a,b) &\to a \cdot b. \end{aligned}$$

1. La suma es asociativa
$$\forall a,b,c \in \mathbb{R},\ (a+b)+c = a+(b+c)\,.$$

2. Existe un elemento neutro
$$\exists! 0 \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R},\ 0+a = a+0 = a.$$

3. Existe el opuesto
$$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists -a \in \mathbb{R},\ a+(-a) = (-a)+a = 0.$$

4. La suma es conmutativa
$$\forall a,b \in \mathbb{R},\ a+b = b+a.$$

5. El producto es asociativo,
$$\forall a,b,c \in \mathbb{R},\ a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c.$$

6. El producto es distributivo con respecto a la suma (distributivo por la izquierda y por la derecha),
$$\forall a,b,c \in \mathbb{R},\ a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c.$$

7. Existe la unidad,
$$\exists! 1 \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, 1\cdot a = a\cdot 1 = a.$$

8. Existe la inversa,
$$\forall a \in \mathbb{R}-\{0\}^1, \exists a^{-1} \in \mathbb{R}, a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = 1.$$

Definición 0.1 (Anillo)**.** Se denomina **anillo** a un conjunto y dos operaciones $(R,+,\cdot)$ que verifica las propiedades (1)-(6). Si se verifica también (7), se llama **anillo con unidad**.

[1] Utilizamos la notación $\mathbb{R}^*$ por sencillez para denotar $\mathbb{R}-\{0\}$

Definición 0.2 (Cuerpo)**.** Se denomina **cuerpo** a un conjunto con al menos dos elementos ($1 \neq 0$) y dos operaciones $(R, +, \cdot)$ que cumple las propiedades (1)-(8). Si también se verifica que la multiplicación es commutativa, decimos que se trata de un **cuerpo abeliano**.

Definición 0.3. Un conjunto $V \neq \emptyset$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial si existen dos operaciones

$$+ : V \times V \to V,\ (\vec{x}, \vec{y}) \to \vec{x} + \vec{y}$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V,\ (a, \vec{x}) \to a \cdot \vec{x}$$

que verifican que

(i) $(V, +)$ es un grupo abeliano.

(ii) Se cumple la propiedad distributiva,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in V,\ a\,(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}.$$

(iii) Se cumple otra propiedad distributiva,

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \vec{x} \in V,\ (a + b)\,\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x}.$$

(iv) Se cumple la propiedad asociativa,

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \vec{x} \in V,\ a\,(b\vec{x}) = (a \cdot b)\,\vec{x}.$$

(v) $\exists 1 \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in V,\ 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}.$

Definición 0.4. Se define $\mathbb{R}^n$, con $n \in \mathbb{N}$, como

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) :\ x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Definición 0.5. Se define la suma $+$ en $\mathbb{R}^n$ de la siguiente manera:

$$\forall \vec{x}, \vec{y},\ \vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

Utilizamos las propiedades de $\mathbb{R}$ como cuerpo abeliano para justificar que $(\mathbb{R}^n, +)$ es un grupo abeliano.

Definición 0.6. Definimos el producto escalar en $\mathbb{R}^n$ de la siguiente manera,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ a \cdot \vec{x} = (a \cdot x_1, a \cdot x_2, \dots, a \cdot x_n).$$

Una consecuencia clara de esto es que para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$0 \cdot \vec{x} = \vec{0}.$$

Al igual que antes, podemos utilizar las propiedades de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ como cuerpo abeliano para justificar que $\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Por las definiciones anteriores tenemos que para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\vec{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_n)\\ &= (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, x_n)\\ &= x_1 (1, 0, \dots, 0) + x_2 (0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n (0, \dots, 1)..\end{aligned}$$

Además, podemos concluir que si

$$x_1 (1, \dots, 0) + x_2 (0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n (0, \dots, 1) = y_1 (1, \dots, 0) + y_2 (0, 1, \dots, 0) + \dots + y_n (0, \dots, 1),$$

entonces $\forall i, 1 \leq i \leq n$, $x_i = y_i$.

Definición 0.7 (Sistema de ecuaciones homogéneo)**.** Sea H un sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\begin{aligned}&a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \dots + a_n^1 x_n = 0\\ &\vdots\\ &a_1^m x_1 + a_2^m + \dots + a_n^m x^n = 0.\end{aligned}$$

donde $m, n \in \mathbb{N}$ y $a_i^j \in \mathbb{R}$. Definimos L como el conjunto de soluciones de H:

$$L = \left\{ \left(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n\right) \ :\ x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n \text{ es solución de } H \ \right\} \subset \mathbb{R}^n.$$

[a]

[a] a_j^i no es exponente sino una forma de numeración.

Teorema 0.1. Si $\vec{x_0}, \vec{y_0} \in L$, se cumple que

$$\vec{x_0} + \vec{y_0} \in L.$$

Demostración. Tenemos que $\forall i,\ 1 \leq i \leq m$,

$$\begin{aligned}
&a_1^i\left(x_0^1+y_0^1\right)+\cdots+a_n^i\left(x_0^n+y_0^n\right)\\
=&a_1^ix_0^1+a_1^iy_0^1+\cdots+a_n^ix_0^n+a_n^iy_0^n\\
=&\underbrace{\left(a_1^ix_0^1+a_2^ix_0^2+\cdots+a_n^ix_0^n\right)}_{0}+\underbrace{\left(a_1^iy_0^1+a_2^iy_0^2+\cdots+a_n^iy_0^n\right)}_{0}\\
=&0.
\end{aligned}$$

□

Teorema 0.2. Si $\vec{x_0} \in L$ y $a \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$a\vec{x_0}=\left(ax_0^1,ax_0^2,\ldots,ax_0^n\right)\in L.$$

Demostración. Tenemos que para $\forall i,\ 1 \leq i \leq m$,

$$\begin{aligned}
&a_1^i\left(ax_0^1\right)+a_2^i\left(ax_0^2\right)+\cdots+a_n^i\left(ax_0^n\right)\\
=&a\underbrace{\left(a_1^ix_0^1+a_2^ix_0^2+\cdots+a_n^ix_0^n\right)}_{0}\\
=&a\cdot 0\\
=&0.
\end{aligned}$$

□

Teorema 0.3. Por lo visto anteriormente, $L \subset \mathbb{R}^n$ es un **subespacio vectorial** sobre $\mathbb{R}$.

Demostración. Muchas de las propiedades de un espacio vectorial automáticamente se heredan a un subespacio vectorial. Las únicas excepciones son la definición de la suma, del producto y la existencia del elemento neutro 0. En este caso, hemos comprobado que la suma está definida en L y que existe la multiplicación $\cdot : \mathbb{R} \times L \to L$ definida en L. Además, $\vec{0} \in L$ es una solución trivial. □

Consideramos un sistema de ecuaciones no homogéneo S:

$$\begin{aligned}
&a_1^1x_1+a_2^1x_2+\cdots+a_n^1x_n=b^1\\
&\vdots\\
&a_1^mx_1+a_2^m+\cdots+a_n^mx^n=b^m.
\end{aligned}$$

Consideramos que $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$ es el conjunto de las soluciones.

$$\mathcal{L}=\left\{\left(x_0^1,x_0^2,\ldots,x_0^n\right)\ :\ x_0^1,x_0^2,\ldots,x_0^n \text{ es solución de } S\ \right\}.$$

Entonces, ya no se cumple necesariamente que la suma de dos soluciones también es solución. Si $\vec{x_0}, \vec{y_0} \in \mathcal{L}$, $\forall j,\ 1 \leq j \leq m$,

$$\begin{aligned}
&a_1^j \left(x_0^1 + y_0^1\right) + a_2^j \left(x_0^2 + y_0^2\right) + \cdots + a_0^j \left(x_0^n + y_0^n\right) \\
=&\left(a_1^j x_0^1 + a_2^j x_0^2 + \cdots + a_n^j x_0^n\right) + \left(a_1^j y_0^1 + a_2^j y_0^2 + \cdots + a_n^j y_0^n\right) \\
=&b^j + b^j = 2b^j \neq b^j.
\end{aligned}$$

Si $\vec{X_0} \in L$ y $\vec{x_0} \in \mathcal{L}$, tenemos que

$$\vec{X_0} + \vec{x_0} = b^j \in \mathcal{L}.$$

Capítulo 1

Espacios Vectoriales

Consideramos un cuerpo conmutativo con característica distinta de 2, es decir, $1+1 \neq 0$. A este cuerpo lo llamaremos $\mathbb{K}$.

Definición 1.1 ($\mathbb{K}$-Espacio vectorial)**.** Un conjunto $V \neq \emptyset$ es un $\mathbb{K}$-**espacio vectorial** si se tienen definidas dos aplicaciones

$$\begin{aligned} + : V \times V &\to V \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\to \vec{x} + \vec{y} \\ \cdot : \mathbb{K} \times V &\to V \\ (a, \vec{x}) &\to a \cdot \vec{x}, \end{aligned}$$

tales que verifican que

(1) $(V, +)$ es un cuerpo abeliano.

[Commutatividad.] $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V,\ \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$.

[Asociatividad.] $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V,\ (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$.

[Existencia del elemento neutro.] $\exists \vec{0} \in V, \forall \vec{x} \in V,\ \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$.

[Existencia del opuesto.] $\forall \vec{x} \in V, \exists -\vec{x} \in V,\ \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$. [a]

(2) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \forall a \in \mathbb{K},\ a \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{y}$.

(3) $\forall \vec{x} \in V, \forall a, b \in \mathbb{K},\ (a + b) \cdot \vec{x} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{x}$.

(4) $\forall \vec{x} \in V, \forall a, b \in \mathbb{K},\ (a \cdot b) \cdot \vec{x} = a \cdot (b \cdot \vec{x})$.

(5) $\forall \vec{x} \in V,\ 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

[a] En la propiedad del elemento neutro y del opuesto, como la conmutatividad es un requisito no hay que especificar que el elemento neutro funciona por ambos lados, al igual que el opuesto.

Si considero a $\mathbb{R}$ como un cuerpo, tenemos que $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial (dimensión 2) y un $\mathbb{C}$-espacio vectorial (dimensión 1).

Teorema 1.1. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, entonces se verifica que:

(a) $\forall \vec{x} \in V,\ 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

(b) $\forall \vec{x} \in V, \forall a \in \mathbb{K},\ (-a) \cdot \vec{x} = -a \cdot \vec{x}$.

(c) $\forall a \in \mathbb{K},\ a \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

(d) $a \cdot \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0} \vee a = 0$.

Demostración. **(a)**

$$\begin{aligned} &\vec{x} = (1+0) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} = \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} \\ \iff &-\vec{x} + \vec{x} = -\vec{x} + \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} \\ \iff &0 = 0 \cdot \vec{x}. \end{aligned}$$

Se puede hacer de otra manera:

$$0 \cdot \vec{x} = (0+0) \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} \iff 0 = 0 \cdot \vec{x}.$$

(b)

$$\begin{aligned} &0 \cdot \vec{x} = (a + (-a)) \cdot \vec{x} = a \cdot \vec{x} + (-a) \cdot \vec{x} \\ \iff &-a \cdot \vec{x} = -a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{x} + (-a) \cdot \vec{x} \\ \iff &-a \cdot \vec{x} = (-a) \cdot x. \end{aligned}$$

(c)

$$a \cdot \vec{x} = a \cdot \left(\vec{x} + \vec{0}\right) = a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{0} \iff -a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{x} = -a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{0}.$$

$$\therefore \vec{0} = a \cdot \vec{0}.$$

También se puede hacer de la siguiente manera:

$$a \cdot \vec{0} = a \cdot \left(\vec{0} + \vec{0}\right) = a \cdot \vec{0} + a \cdot \vec{0} \iff 0 = a \cdot \vec{0}.$$

(d) Si $a = 0$, hemos ganado. Si $a \neq 0$, $\exists \dfrac{1}{a} \in \mathbb{K}$. Por tanto,

$$\vec{0} = \frac{1}{a} \cdot \vec{0} = \frac{1}{a} \cdot (a \cdot \vec{x}) = \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot \vec{x} = \vec{x}.$$

□

1.1. Subespacios vectoriales

Definición 1.2 (Subespacio vectorial)**.** Un conjunto $L \neq \emptyset$ y $L \subset V$ es **parte estable** si

(i) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L,\ \vec{x} + \vec{y} \in L.$

(ii) $\forall a \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in V,\ a \cdot \vec{x} \in L.$

Teorema 1.2. Sea $L \neq \emptyset$ y $L \subset V$, entonces L es parte estable si y sólo si L es subespacio vectorial.

Demostración. **(i)** Si L es un subespacio vectorial es trivial.

(ii) Si L es parte estable, tenemos que para $\vec{x} \in L$ se verifica la propiedad conmutativa, asociativa, etc, dado que $L \subset V$. Además, dado que $\cdot : \mathbb{K} \cdot L \to L$ y $(-1) \cdot \vec{x} = -\vec{x}$, tenemos que si $\vec{x} \in L$ entonces $-\vec{x} \in L$. Además, $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0} \in L$. El resto de propiedades se derivan de que $L \subset V$.

□

Definición 1.3 (Combinación lineal)**.** $\vec{x} \in V$ es la **combinación lineal** de $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p$ con coeficientes $a^1, a^2, \ldots, a^p$ si existen $\vec{x}_i \in V$ y $a^i \in \mathbb{K}$, con $p \in \mathbb{N}$ $(1 \leq i \leq p)$ tales que:

$$\vec{x} = a^1 \cdot \vec{x}_1 + a^2 \cdot \vec{x}_2 + \cdots + a^p \cdot \vec{x}_p.$$

[a]

[a] Los a^i no denotan exponente sino que se trata de una forma de numeración.

Nota. Podemos apreciar que, dadas las condiciones del subespacio vectorial, cualquier combinación lineal de vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p \in L$ es un vector de L.

Teorema 1.3. Sea $H \subset V$ con $H \neq \emptyset$. Definimos $L(H)$ como el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de H, es decir:

$$L(H) = \left\{ a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p \ : \ p \in \mathbb{N}, \vec{x}_i \in H, a^i \in \mathbb{K} \right\}.$$

Se verifica que

(1) $H \subset L(H)$.

(2) $L(H)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

(3) $L(H)$ es el menor subespacio vectorial que contiene a H. Es decir, si L es un subespacio vectorial y $H \subset L$, entonces $L(H) \subset L$.

Demostración. **(1)** Tenemos que si $\vec{x} \in H$ entonces

$$\vec{x} = \underbrace{1 \cdot \vec{x}}_{\text{combinación lineal}} \in L(H).$$

(2) Sean $\vec{x}, \vec{y} \in L(H)$, queremos ver que $\vec{x}+\vec{y} \in L(H)$. Dado que $\vec{x}, \vec{y} \in L(H)$, se pueden expresar como combinación lineal de otros vectores en H.

$$\exists p \in \mathbb{N},\ \exists \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p \in H,\ \exists a^1, a^2, \ldots, a^p \in \mathbb{K},$$

tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

De manera similar, como $\vec{y} \in L(H)$,

$$\exists q \in \mathbb{N},\ \exists \vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_q \in H,\ \exists b^1, b^2, \ldots, b^p \in \mathbb{K},$$

tales que

$$\vec{y} = b^1\vec{y}_1 + b^2\vec{y}_2 + \cdots + b^q\vec{y}_q.$$

Entonces,

$$\vec{x}+\vec{y} = \left(a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p\right) + \left(b^1\vec{y}_1 + b^2\vec{y}_2 + \cdots + b^q\vec{y}_q\right).$$

Como $\forall \vec{x}_i, \vec{y}_i \in H$, tenemos que $\vec{x}+\vec{y} \in L(H)$.

A continuación, demostramos que si $\vec{x} \in L(H)$ entonces $a \cdot \vec{x} \in L(H)$. Como $\vec{x} \in L(H)$,

$$\exists p \in \mathbb{N},\ \exists \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p \in H,\ \exists a^1, a^2, \ldots, a^p \in \mathbb{K},$$

tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} a \cdot \vec{x} =& a \cdot \left(a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p\right) \\ =& a \cdot \left(a^1\vec{x}_1\right) + a \cdot \left(a^2\vec{x}_2\right) + \cdots + a \cdot \left(a^p\vec{x}_p\right) \\ =& \left(a \cdot a^1\right) \cdot \vec{x}_1 + \left(a \cdot a^2\right) \cdot \vec{x}_2 + \cdots + \left(a \cdot a^p\right) \cdot \vec{x}_p. \end{aligned}$$

Aprovechamos las propiedades de V como espacio vectorial y el hecho de que $H \subset V$ (hemos utilizado la propiedad distributiva). Como $\forall a \cdot a^i \in \mathbb{K}$ y $\vec{x}_i \in H$, $a \cdot \vec{x}$ se trata de una combinación lineal y, por tanto, $a \cdot \vec{x} \in L(H)$.

(3) Si $\vec{x} \in L(H)$, tenemos que $\exists p \in \mathbb{N}$, $\exists \vec{x}_i \in H$, $\exists a^i \in \mathbb{K}$ con $1 \leq i \leq p$, tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Como $H \subset L$, $x_i \in L$ y, como L es un subespacio vectorial, tenemos que $a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p \in L$, por lo que $\vec{x} \in L$.

□

Definición 1.4. $L(H)$ es el subespacio generado por H o H es un sistema de generadores de de $L(H)$. Si $L(H) = V$ diremos que H es sistema de generadores.

1.2. Bases de un espacio vectorial

Definición 1.5. V es **finito generado** si existe un sistema de generadores formado por un número finito de vectores. Es decir, si $\exists\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\} = H$ tal que $V = L(H)$, es decir, $\exists\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\} \subset V$ tales que $\forall \vec{x} \in V, \exists a^1, a^2, \ldots, a^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Definición 1.6. Una familia de vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ es **linealmente dependiente** si uno de ellos es combinación lineal de los otros.

$$\exists i = 1, 2, \ldots, p,\ \vec{x}_L \in L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}).$$

Es decir,

$$\begin{aligned}&\exists i = 1, 2, \ldots, p,\ \exists a^1, a^2, \ldots, a^{i-1}, a^{i+1}, \ldots, a^p \in \mathbb{K}\\ &\vec{x}_i = a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^{i-1}\vec{x}_{i-1} + a^{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + a^p\vec{x}_p..\end{aligned}$$

Es decir, si $\vec{x}_j = \vec{0}$, $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ es dependiente, pues

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + 0 \cdot \vec{x}_{j-1} + 0 \cdot \vec{x}_{j+1} + \cdots + 0 \cdot \vec{x}_p.$$

Teorema 1.4. Sea $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\} \subset V$. Son linealmente dependientes si y solo si $\exists a^1, a^2, \ldots, a^p \in \mathbb{K}$ no todos nulos tales que

$$\vec{0} = a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Demostración. **(i)** Supongamos que la familia es linealmente dependiente. Por tanto, $\exists i = 1, \ldots, p$ tal que $\vec{x}_i \in L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_{i+1}, \ldots, \vec{x}_p\})$. Por tanto, existen $a^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x}_i = a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^{i-1}\vec{x}_{i-1} + a^{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Si sumamos el opuesto a ambos lados tenemos que

$$\vec{0} = \vec{x}_i - \vec{x}_i = a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^{i-1}\vec{x}_{i-1} + (-1)\,\vec{x}_1 + a^{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

(ii) Suponemos que $\exists a^1, a^2, \ldots, a^p \in \mathbb{K}$ no todos nulos tales que

$$a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p = \vec{0}.$$

Como no todos los escalares son nulos, podemos encontrar $a^i \neq 0$, y a^i tiene inversa.

$$\therefore (-1)\,a^i\vec{x}_i = a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^{i-1}\vec{x}_{i-1} + a^{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Aprovechando las propiedades:

$$\vec{x}_i = \frac{-a^1}{a^i}\vec{x}_1 + \cdots + \frac{-a^{i-1}}{a^i}\vec{x}_{i-1} + \frac{-a^{i+1}}{a^i}\vec{x}_{i+1} + \cdots + \frac{-a^p}{a^i}\vec{x}_p.$$

□

Corolario 1.1. La familia de vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\} \subset V$ es **linealmente independiente** si y solamente si

$$a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p = \vec{0} \Rightarrow a^1 = a^2 = \cdots = a^p = 0.$$

Teorema 1.5. Una familia de vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ es linealmente independiente si y solamente si $\forall \vec{x} \in L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}), \exists! a^1, a^2, \ldots, a^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Demostración. **(i)** Si $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ es linealmente independiente y sea $\vec{x} \in L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\})$. Supongamos que existen otros escalares $b^1, b^2, \ldots, b^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = b^1\vec{x}_1 + \cdots + b^p\vec{x}_p.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}\vec{0} =& \vec{x} - \vec{x} = \left(a^1\vec{x}_1 + \cdots a^p\vec{x}_p\right) - \left(b^1 + \cdots + b^p\vec{x}_p\right) \\ =& \left(a^1 - b^1\right)\vec{x}_1 + \cdots + \left(a^p - b^p\right)\vec{x}_p.\end{aligned}$$

Como se trata de una familia linealmente independiente, tenemos que $\forall i,\ 1 \leq i \leq p$,

$$a^i - b^i = 0 \iff a^i = b^i.$$

(ii) Recíprocamente, tenemos que si $a^1, a^2, \ldots, a^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^p\vec{x}_p = \vec{0}.$$

Esto puede pasar si $a^1 = a^2 = \cdots = a^p = 0$. Como a^i son únicos, tenemos que si hay alguno no nulo, la combinación lineal no va a ser nula. Por tanto, será linealmente independiente.

□

Definición 1.7 (Base)**.** Una **base** de un espacio vectorial V es un sistema de generadores linealmente independientes.

Corolario 1.2. Una familia de vectores $B \subset V$ es una base de E si y solo si $\forall \vec{x} \in V$ se expresa de manera única como combinación lineal de elementos de B.

Teorema 1.6. Si $V \neq \{0\}$, es finitamente generado, entonces $\exists \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ es base de V. Es decir, todo espacio vectorial $V \neq \{0\}$ generado por un número finito de vectores tiene una base finita.

Demostración. Sea $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ un sistema de generadores de V. Si $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ son linealmente independientes, forman una base (hemos ganado). Sino, uno se puede expresar como combinación lineal de los otros, por lo que $\exists i = 1, 2, \ldots, p$ tal que $\vec{x}_i \in L\left(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_{i+1}, \ldots, \vec{x}_p\}\right)$, por lo que $\exists b^1, b^2, \ldots, b^p \in \mathbb{K}$

$$\vec{x}_i = b^1\vec{x}_1 + b^2\vec{x}_2 + \cdots + b^{i-1}\vec{x}_{i-1} + b^{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + b^p\vec{x}_p.$$

Dado que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ es un sistema de generadores de V, $\forall \vec{x} \in V, \exists a^1, a^2, \ldots, a^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\begin{aligned}
\vec{x} =& a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p \\
=& a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^{i-1}\vec{x}_{i-1} + a^i\left(b^1\vec{x}_1 + b^2\vec{x}_2 + \cdots + b^{i-1}\vec{x}_{i-1} + b^{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + b^p\vec{x}_p\right) + a^{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + a^p\vec{x}_p \\
=& \left(a^1 + a^ib^1\right)\vec{x}_1 + \cdots + \left(a^{i-1} + a^ib^{i-1}\right)\vec{x}_{i-1} + \left(a^ib^{i+1} + a^{i+1}\right)\vec{x}_{i+1} + \cdots + \left(a^ib^p + a^p\right)\vec{x}_p.
\end{aligned}$$

Por tanto, el conjunto $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\} - \{x_i\}$ también es un sistema de generadores de V. Si $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_{i+1}, \vec{x}_p\}$ es linealmente independiente, es un sistema de generadores de V. Si es linealmente dependiente repetimos el proceso hasta tener $\{\vec{x}_i\}$, que no puede ser 0, porque $V \neq 0$, y $\{x_i\}$ es linealmente independiente. □

Observación. De esto podemos concluir que todo sistema de generadores contiene una base.

Teorema 1.7 (Teorema de Steinitz)**.** Sea $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_p\} \subset V$ una base de V y sea $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_q\} \subset V$ linealmente independiente, entonces $q \leq p$ y se puede obtener una nueva base sustituyendo q de los vectores $\vec{y}_i$ por $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$.

Demostración. Se trata de introducir uno por uno los vectores $\{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_p\}$ por los vectores de la base dada. Sea $\vec{x}_1 \in V$, entonces $\exists a^1, a^2, \ldots, a^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x}_1 = a^1\vec{y}_1 + a^2\vec{y}_2 + \cdots + a^p\vec{y}_p = \sum_{i=1}^{p} a^i\vec{y}_i.$$

Existe al menos un $a^i \neq 0$ (porque $\vec{x}_1$ no es nulo). Sea $a^1 \neq 0$.

$$\vec{y}_1 = \left(a^1\right)^{-1}\vec{x}_1 - \sum_{i=2}^{p}\left(a^1\right)^{-1}a^i\vec{y}_i$$

Entonces, $\forall x \in V, \exists b^1, b^2, \ldots, b^p \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}\vec{x} =& b^1\vec{y}_1 + b^2\vec{y}_2 + \cdots b^p\vec{y}_p \\ =& b^1\left(\frac{1}{a^1}\vec{x}_1 + \left(-\frac{a^2}{a^1}\right)\vec{y}_2 + \cdots + \left(-\frac{a^p}{a^1}\right)\vec{y}_p\right) + b^2\vec{y}_2 + \cdots + b^p\vec{y}_p \\ =& \frac{b^1}{a^1}\vec{x}_1 + \left(b^1\left(-\frac{a^2}{b^1}\right) + b^2\right)\vec{y}_2 + \cdots + \left(b^1\left(-\frac{a^p}{a^1}\right) + b^p\right)\vec{y}_p.\end{aligned}$$

Hemos llegado a la conclusión de que $\{\vec{x}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_p\}$ forman un sistema de generadores de V. Además, son linealmente independientes, pues

$$\vec{0} = b^1\vec{x}_1 + b^2\vec{y}_2 + \cdots + b^p\vec{y}_p \Rightarrow b^1\left(\sum_{i=1}^{p} a^i\vec{y}_i\right) + b^2\vec{y}_2 + \cdots + b^p\vec{y}_p = \vec{0}$$

$$b^1a^1\vec{y}_1 + \sum_{i=2}^{p}\left(b^1a^i + b^i\right)\vec{y}_i = \vec{0}$$

$$\Rightarrow b^1a^1 = 0,\ b^1a^i + b^i = 0,\ i \geq 2.$$

pues $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_p\}$ son una base. Como $a^1 \neq 0$, tenemos que $b^1 = b^i = 0$. Por tanto, $\{\vec{x}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_p\}$ es una base de V.

Supongamos que $i < \min(p, q)$ y que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_i, \vec{y}_{i+1}, \ldots, \vec{y}_p\}$ es sistema de generadores. Entonces, $\exists c^1, c^2, \ldots, c^i, d^{i+1}, \ldots, d^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x}_{i+1} = c^1\vec{x}_1 + c^2\vec{x}_2 + \cdots + c^i\vec{x}_i + d^{i+1}\vec{y}_{i+1} + \cdots + d^p\vec{y}_p = \sum_{j=1}^{i} c^j\vec{x}_j + \sum_{j=i+1}^{p} d^j\vec{y}_j.$$

El procedimiento anterior nos asegura que podemos sustituir $\vec{x}_{i+1}$ por cualquier vector con coeficiente no nulo. Por tanto, tenemos que demostrar que existe un coeficiente del segundo sumatorio no nulo. Si fueran todos nulos, tendríamos que $\vec{x}_{i+1}$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$, esto contradice que sean linealmente independientes. □

Corolario 1.3. Si el espacio vectorial V tiene una base finita, todas las bases de V tienen el mismo número de vectores.

Demostración. Sean $B_1 = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ y $B_2 = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_q\}$ dos bases de V. Como B_1 es una base y B_2 es un conjunto de vectores linealmente independientes, tenemos que todas las bases de V han de ser finitas. Entonces, como B_1 y B_2 son bases y, consecuentemente, linealmente independientes, tenemos que $p \leq q$ y $q \leq p$, por lo que $p = q$. □

Definición 1.8 (Dimensión)**.** La **dimensión** de un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es el número de elementos de sus bases, si son finitas. Si no lo son, diremos que V es de dimensión infinita.

Corolario 1.4. La dimensión de un espacio vectorial coincide con el número máximo de elementos linealmente independientes, y también con el número mínimo de generadores.

Corolario 1.5. Todo conjunto de vectores linealmente independientes puede completarse hasta obtener una base.

Lema 1.1. Si $S \subset V$ es linealmente independiente y $\vec{x} \in V$ y $\vec{x} \notin L(S)$, tenemos que la familia $S \cup \{\vec{x}\}$ es linealmente independiente.

Demostración. Sean $a, a^i \in \mathbb{K}$ y

$$a\vec{x} + a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^p\vec{x}_p = \vec{0}.$$

Si $a \neq 0$, entonces $\vec{x}$ se puede expresar como combinación lineal de S, pero por hipótesis esto no es posible. Por tanto, debe ser que $a = 0$ y, consecuentemente, $\forall a^i = 0$, pues S es linealmente independiente. Por tanto, $S \cup \{\vec{x}\}$ también es linealmente independiente. □

Proposición 1.1. Si V es finitamente generado y L es subespacio vectorial de V, entonces L es finitamente generado y

$$\dim L \leq \dim V.$$

Además,

$$\dim L = \dim V \iff L = V.$$

Demostración. Si $L = \{0\}$ no hay nada que probar (no tiene bases). En caso contrario, existe $\vec{x}_1 \in L$. Si $L = L(\{\vec{x}_1\})$, tenemos que $\vec{x}_1$ es una base. En caso contrario, existe $\vec{x}_2 \in L$ con $\vec{x}_2 \notin L(\{\vec{x}_1\})$. Si $L = L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\})$, $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ forman una base. Sabemos que son linealmente independientes por el lema anterior. En algún momento llegaremos a que $L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\})$ forman una base, pues un corolario anterior nos dice que hay un número máximo de vectores linealmente independientes.

Además, si $\dim L = n$ y $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ es una base de L, por el teorema de Steinitz, también es una base de V. Por tanto,

$$L = L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}) = V.$$

□

Teorema 1.8 (Teorema de apliación de base)**.** Sea L un subespacio vectorial de V y sea $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ una base de L. Entonces existe $\{\vec{u}_{p+1}, \vec{u}_{p+2}, \ldots, \vec{u}_n\} \subset V$ tales que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p, \vec{u}_{p+1}, \vec{u}_{p+2}, \ldots, \vec{u}_n\}$ son base de V.

Demostración. Si $\dim V = n$ tenemos que existe un número finito de generadores que forman una base de V, y consideramos que los vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ forman una base de L. Entonces, $p \leq n$ y, por el teorema de Steinitz, se puede obtener una nueva base sustituyendo $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ por p vectores de $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$. □

1.3. Suma directa de subespacios.

Notación.

$$\mathcal{P}(V) = \{A \ : \ A \subset V\}.$$

$$\mathcal{L}(V) = \{L \in \mathcal{P}(V) \ : \ L \text{ es subespacio vectorial de } V \ \}.$$

Por tanto,

$$\mathcal{L}(V) \subset \mathcal{P}(V).$$

Teorema 1.9. $\forall I$ conjunto, $\forall i \in I$, si $L_i \in \mathcal{L}(V)$ entonces

$$\bigcap_{i \in I} L_i \in \mathcal{L}(V).$$

Es decir, la intersección de espacios vectoriales es un espacio vectorial.

Demostración. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \bigcap_{i \in I} L_i$ implica que $\vec{x}, \vec{y} \in L_i, \forall i \in I$.Como L_i son subespacios vectoriales:

$$\vec{x} + \vec{y} \in L_i, \forall i \in I \ \Rightarrow \ \vec{x} + \vec{y} \in \bigcap_{i \in I} L_i.$$

Similarmente, si $\vec{x} \in \bigcap_{i \in I} L_i$ y $a \in \mathbb{K}$, tenemos que $\vec{x} \in L_i, \forall i \in I$. Como L_i son subespacios vectoriales, son parte estable, por lo que

$$a \cdot \vec{x} \in L_i, \forall i \in I \ \Rightarrow \ a \cdot \vec{x} \in \bigcap_{i \in I} L_i.$$

□

Observación. Sin embargo, no tiene que cumplirse necesariamente que $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}(V)$ si $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$.

Ejemplo 1.1. Sean $\{\vec{u}, \vec{v}\} \subset V$ linealmente independientes y $L_1 = L(\{\vec{u}\})$ y $L_2 = L(\{\vec{v}\})$ las rectas que generan. Asumamos que $\vec{u} + \vec{v} \in L_1 \cup L_2$. Sin pérdida de generalidad, $\vec{u} + \vec{v} \in L_1$. Por tanto, $\exists a \in \mathbb{K}$ tal que $\vec{u} + \vec{v} = a\vec{u}$. De esta manera,

$$(a-1)\,\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}.$$

Esto es absurdo, pues hemos dicho que estos vectores son linealmente independientes.

Definición 1.9. Si $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$, definimos $L_1 + L_2$ al menor subespacio vectorial generado por la unión.

$$L_1 + L_2 = L(L_1 \cup L_2).$$

Teorema 1.10. Sean $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ y sea $L' = \{\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \ : \ \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2\}$. Tenemos que $L' = L_1 + L_2$.

Demostración. Si $\vec{x}_1 \in L_1$, tenemos que $\vec{x}_1 = \vec{x}_1 + \vec{0} \in L'$, pues $\vec{x}_1 \in L_1$ y $\vec{0} \in L_2$. Por tanto, $L_1 \subset L'$. Similarmente, $L_2 \subset L'$. Consecuentemente, $L_1 \cup L_2 \subset L'$.

Además, tenemos que $L' \in \mathcal{L}(V)$, pues $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L'$ tenemos que $\exists \vec{x}_1, \vec{y}_1 \in L_1$ y $\exists \vec{x}_2, \vec{y}_2 \in L_2$.

$$\vec{x} + \vec{y} = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + (\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \underbrace{(\vec{x}_1 + \vec{y}_1)}_{\in L_1} + \underbrace{(\vec{x}_2 + \vec{y}_2)}_{\in L_2}.$$

Por tanto, $\vec{x} + \vec{y} \in L'$. Similarmente, si $a \in \mathbb{K}$ y $\vec{x} \in L'$ tenemos que existen $\vec{x}_1 \in L_1$ y $\vec{x}_2 \in L_2$ tales que

$$a \cdot \vec{x} = a \cdot (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \underbrace{a\vec{x}_1}_{\in L_1} + \underbrace{a\vec{x}_2}_{\in L_2}.$$

Por tanto, $a \cdot \vec{x} \in L'$. Por tanto, $L' \in \mathcal{L}(V)$.

A continuación demostramos que si $L \in \mathcal{L}(V)$ y $L_1 \cup L_2 \subset L$, entonces $L' \subset L$. Tenemos que $\forall \vec{x} \in L'$ existen $\vec{x}_1 \in L_1$ y $\vec{x}_2 \in L_2$ tales que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$. Por tanto, $\vec{x} \in L$.

$$\therefore L' \subset L.$$

Por todo ello, $L' = L_1 + L_2$. $\square$

Teorema 1.11 (Fórmula de Grassmann)**.** Supongamos que V es de dimensión finita, por lo que todos los conjuntos que vamos a tratar a continuación son de dimensión finita.

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

Demostración. Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$ una base de $L_1 \cap L_2$, y sea $v = \dim(L_1 \cap L_2)$. Podemos ampliar esta base hasta obtener una base de L_1 y L_2. Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m, \vec{u}_{m+1} \dots, \vec{u}_r\}$ una base de L_1. Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m, \vec{v}_{m+1}, \dots, \vec{v}_s\}$ base de L_2 . Queremos ver que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m, \dots, \vec{u}_{m+1}, \dots, \vec{u}_r, \vec{v}_{m+1}, \dots, \vec{v}_s\}$ es base de $L_1 + L_2$. Primero queremos ver que es sistema de generadores. Sea $\vec{x} \in L_1 + L_2$. Entonces, existen $\vec{x}_1 \in L_1$ y $\vec{x}_2 \in L_2$ tales que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$. Como anteriormente hemos definido bases para L_1 y L_2, tenemos que existen $a^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x}_1 = a^1\vec{u}_1 + a^2\vec{u}_2 + \cdots + a^r\vec{u}_r.$$

Similarmente, existen $b^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x}_2 = b^1\vec{u}_1 + \cdots + b^m\vec{u}_m + b^{r+1}\vec{v}_{r+1} + \cdots + b^s\vec{v}_s.$$

Por tanto, tenemos que $\vec{x}$ se puede expresar como combinación lineal de $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m, \vec{u}_{m+1}, \dots, \vec{u}_r, \vec{v}_{m+1}, \dots, \vec{v}_s\}$.

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \sum_{i=1}^{r} a^i\vec{u}_i + \sum_{i=1}^{m} b^1\vec{u}_i + \sum_{i=m+1}^{s} b^i\vec{v}_i.$$

Por tanto, es sistema de generadores, ahora tenemos que ver que son linealmente independientes. Sean $a^i, b^j \in \mathbb{K}$ tales que

$$a^1\vec{u}_1 + a^2\vec{u}_2 + \cdots + a^m\vec{u}_m + \cdots + a^r\vec{u}_{r+1} + \cdots + \cdots + b^{m+1}\vec{v}_{m+1} + \cdots + b^s\vec{v}_s = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{r} a^i\vec{u}_i + \sum_{i=m+1}^{s} b^i\vec{v}_i = \vec{0}.$$

Sea $\vec{y} = \sum_{i=1}^{r} a^i\vec{u}_i$ por lo que $\vec{y} \in L_1$. Entonces,

$$-\vec{y} = \sum_{i=m+1}^{s} b^i\vec{v}_i \in L_2.$$

Por tanto, $\vec{y} \in L_1 \cap L_2$. Entonces, $\vec{y}$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base de la intersección. Es decir, existen $c^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{y} = c^1\vec{u}_1 + c^2\vec{u}_2 + \cdots + c^m\vec{u}_m.$$

Entonces,

$$\vec{0} = \vec{y} - \vec{y} = \sum_{j=1}^{m} c^j\vec{u}_j + \sum_{i=m+1}^{s} b^i\vec{v}_i = \vec{0}.$$

Como la base de L_2 es linealmente independiente (porque es una base), tenemos que $c^1 = c^2 = \cdots = c^r = b^1 = \cdots = b^q = 0$. Consecuentemente, $\sum_{i=1}^{r} a^i\vec{u}_i = \vec{0}$ y, dado que $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\}$ es base de L_1, tenemos que $a^i = 0, \forall i = 1, \ldots, r$. Por tanto, hemos visto que el conjunto que estábamos estudiando es base.

Esta base tiene dimensión $r + s = r + (s + m) - m$. $\square$

Si $L_1 \cap L_2 = \left\{\vec{0}\right\}$, tenemos que $\dim L_1 + \dim L_2 = \dim\left(L_1 + L_2\right)$.

Definición 1.10. Sean $L_1, L_2 \in \mathcal{L}\left(V\right)$ su suma es directa si $L_1 \cap L_2 = \left\{\vec{0}\right\}$ y se escribe de la siguiente manera:

$$L_1 \oplus L_2.$$

Proposición 1.2. Sean $L_1, L_2 \in \mathcal{L}\left(V\right)$. Entonces

$$L_1 \oplus L_2 \iff \forall\vec{x} \in L_1 + L_2,\ \exists!\vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2,\ \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2.$$

Demostración. **(i)** Supongamos que $L_1 \oplus L_2$. Asumimos que existen, $\vec{x}_1, \vec{y}_1 \in L_1$ y $\vec{x}_2, \vec{y}_2 \in L_2$ tales que si $\vec{x} \in L_1 + L_2$ tenemos que

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \vec{y}_1 + \vec{y}_2.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \vec{0} &= (\vec{x}_1 - \vec{y}_1) + (\vec{x}_2 - \vec{y}_2). \\ \Rightarrow \vec{x}_1 - \vec{y}_1 &= \vec{y}_2 - \vec{x}_2 \end{aligned}$$

Consecuentemente, $\vec{x}_1 - \vec{y}_1, \vec{y}_2 - \vec{x}_2 \in L_1 \cap L_2$, por tanto, $\vec{x}_1 - \vec{y}_1 = \vec{0} \iff \vec{x}_1 = \vec{y}_1$. Similarmente, $\vec{y}_2 = \vec{x}_2$.

(ii) Suponemos que $\forall \vec{x} \in L_1 + L_2$, $\exists! \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2$, $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$. Queremos ver que $L_1 \cap L_2 = \left\{\vec{0}\right\}$. Sea $\vec{x} \in L_1 \cap L_2$. Tenemos que $\vec{x} = \vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x}$. Tenemos que $\vec{0} \in L_1 \cap L_2$. Como la expresión de $\vec{x}$ ha de ser única, tenemos que $\vec{x} = \vec{0}$, por lo que $L_1 \cap L_2 = \left\{\vec{0}\right\}$.

□

Tenemos que si $L_1, L_2, \ldots, L_k \in \mathcal{L}(V)$,

$$(L_1 + L_2) + L_3 = \{(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + \vec{x}_3 \ : \ \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2, \vec{x}_3 \in L_3\} = L_1 + (L_2 + L_3).$$

Generalmente, esta suma es asociativa, es decir se puede escribir

$$L_1 + L_2 + \cdots + L_k = \{\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_k \ : \ \vec{x}_i \in L_i\}.$$

Definición 1.11. Diremos que la suma $L_1 + L_2 + \cdots + L_k$ es directa si $\forall \vec{x} \in L_1 + L_2 + \cdots + L_k, \exists! \vec{x}_i \in L_i$ tales que $\vec{x} = \sum_{i=1}^{k} \vec{x}_i$. Esto se denotará de la siguiente manera:

$$L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_k.$$

Proposición 1.3. Si $L_1, \ldots, L_k$, entonces $L_1 \oplus \cdots \oplus L_k$ si y solo si $\forall i = 1, \ldots, k$,

$$L_i \cap (L_1 + L_2 + \cdots + L_{i-1} + L_{i+1} + \cdots + L_k) = \left\{\vec{0}\right\}.$$

Demostración. **(i)** Demostramos la primera implicación. Supongamos que $\forall i = 1, \ldots, k$, y sea $\vec{x} \in L_i \cap (L_1 + \cdots + L_{i-1} + L_{i+1} + \cdots + L_k)$. Queremos decir que $\vec{x} = \vec{0}$. Tenemos que, dado que $\vec{x} \in L_i$:

$$\vec{x} = \vec{0} + \cdots + \vec{0} + \vec{x}_i + \vec{0} + \cdots + \vec{0}.$$

Como $\vec{x} \in L_i \cap (L_1 + \cdots + L_{i-1} + L_{i+1} + \cdots + L_k)$, tenemos que $\vec{x} \in L_1 + \cdots + L_{i-1} + L_{i+1} + \cdots + L_k$:

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_{i-1} + \vec{x}_{i+1} + \cdots + \vec{x}_k.$$

Como $L_1 \oplus \cdots \oplus L_k$, tenemos que la expresión de $\vec{x}$ es única, por lo que $\vec{x} = \vec{0}$.

(ii) Demostramos la siguiente implicación. Asumimos que

$$\forall i = 1, \ldots, k;\ L_i \cap (L_1 + L_2 + \cdots + L_{i-1} + L_{i+1} + \cdots + L_k) = \left\{\vec{0}\right\}.$$

Sea

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{k} \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{k} \vec{y}_i.$$

Con $\vec{x}_i, \vec{y}_i \in L_i$, tenemos que

$$\vec{0} = (\vec{x}_1 - \vec{y}_1) + \cdots + (\vec{x}_i + \vec{y}_i) + \cdots + (\vec{x}_k + \vec{y}_k).$$

$$\therefore \vec{y}_i - \vec{x}_i = (\vec{x}_1 - \vec{y}_1) + \cdots + (\vec{x}_{i-1} - \vec{y}_{i-1}) + (\vec{x}_{i+1} - \vec{y}_{i+1}) + \cdots + (\vec{x}_k - \vec{y}_k).$$

Por lo que $\vec{y}_i - \vec{x}_i = \vec{0}, \forall i = 1, \ldots, k$. Si esto no fuera cierto para algún $\vec{x}_j - \vec{y}_j$, podríamos despejarlo y tendríamos que está en la intersección pero a la vez no es $\vec{0}$, lo cual contradice nuestra hipótesis.

□

Definición 1.12. $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ son **complementarios** si $L_1 \oplus L_2$ y $V = L_1 \oplus L_2$.

$$L_1 \oplus L_2 = V \iff \forall \vec{x} \in V, \exists! \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2,\ \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2.$$

Teorema 1.12. Sea $L \in \mathcal{L}(V)$, entonces existe $L' \in \mathcal{L}(V)$ tal que $L \oplus L' = V$.

Demostración. Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r\}$ una base de L y sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \vec{u}_{r+1}, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V. La manera de ampliar una base no es única. Sea L' el subespacio generado por los vectores que he añadido a la base de L para formar la base de V, es decir,

$$L' = L(\{\vec{u}_{r+1}, \ldots, \vec{u}_n\}).$$

Tenemos que $\forall \vec{x} \in V$, existen $a^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = a^1 \vec{u}_1 + \cdots + a^r \vec{u}_r + a^{r+1} \vec{u}_{r+1} + \cdots + a^n \vec{u}_n.$$

Sea $\vec{x}_1 = a^1 \vec{u}_1 + \cdots + a^r \vec{u}_r \in L$ y $\vec{x}_2 = a^{r+1} \vec{u}_{r+1} + \cdots + a^n \in L'$. Vamos a ver que $L \cap L' = \left\{\vec{0}\right\}$. Sabemos que $\left\{\vec{0}\right\} \subset L \cap L'$. Si $\vec{x} \in L \cap L'$. Entonces existen $a^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = a^1 \vec{u}_1 + \cdots + a^r \vec{u}_r.$$

Como $\vec{x} \in L'$, existen $a^j \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = a^{r+1} \vec{u}_{r+1} + \cdots + a^n \vec{u}_n.$$

Entonces,

$$\vec{0} = \left(a^1 \vec{u}_1 + \cdots + a^r \vec{u}_r\right) - \left(a^{r+1} \vec{u}_{r+1} + \cdots + a^n \vec{u}_n\right).$$

Esto es una combinación lineal de los elementos de una base que me da el vector nulo. Como las bases son linealmente independientes, tenemos que

$$a^1 = \cdots = a^r = a^{r+1} = \cdots = a^n = 0.$$

Por tanto, $\vec{x} = \vec{0}$. Consecuentemente, la suma es directa. □

1.4. Espacio vectorial cociente

Definición 1.13. Definimos la relación de equivalencia:

$$\vec{x}\mathcal{R}\vec{y} \iff \vec{y} - \vec{x} \in L.$$

Si $\vec{x} \in V$,

$$[\vec{x}] = \{\vec{y} \in V \ : \ \vec{y} - \vec{x} \in L\} = \left\{\vec{y} \in V \ : \ \vec{y} - \vec{x} = \vec{l}\right\} = \left\{\vec{x} + \vec{l} \ : \ \vec{l} \in L\right\} = \vec{x} + L$$

Teorema 1.13. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Si $\vec{x}, \vec{y} \in V$ decimos que $\vec{x}R\vec{y}$ si $\vec{x} - \vec{y} \in L$, donde $L \in \mathcal{L}(V)$. Tenemos que R es una relación de equivalencia en V.

Demostración. **(i)** Reflexiva. Si $\vec{x} \in V$, tenemos que

$$\vec{x} - \vec{x} \in \vec{0} \in L.$$

(ii) Simétrica. Si $\vec{x}, \vec{y} \in V$ tal que $\vec{x}R\vec{y}$, tenemos que

$$\vec{x} - \vec{y} \in L \iff \vec{y} - \vec{x} \in L.$$

Pues $\vec{y} - \vec{x} = (-1)(\vec{x} - \vec{y}) \in L$.

(iii) Transitiva. Si $\vec{x}R\vec{y}$ y $\vec{y}R\vec{z}$, tenemos que $\vec{x} - \vec{y} \in L$ y $\vec{y} - \vec{z} \in L$. Como L es espacio vectorial tenemos que:

$$(\vec{x} - \vec{y}) + (\vec{y} - \vec{z}) = \vec{x} - \vec{z} \in L.$$

□

Si $\vec{x} \in V$, tenemos que

$$[\vec{x}] = \{\vec{y} \in V \ : \ \vec{y}R\vec{x}\} = \{\vec{y} \in V \ : \ \vec{y} - \vec{x} \in L\} = \left\{\vec{y} \in V \ : \ \exists \vec{l} \in L, \ \vec{y} - \vec{x} = \vec{l}\right\} = \left\{\vec{x} + \vec{l} \ : \ \vec{l} \in L\right\} = \vec{x} + L.$$

Definición 1.14 (Espacio cociente)**.**

$$V/R = V/L = \{\vec{x} + L \ : \ \vec{x} \in V\}.$$

En V/L defino una suma y un producto por escalares:

$$\begin{aligned} + : & V/L \times V/L \to V/L \\ & (\vec{x} + L, \vec{y} + L) \to (\vec{x} + L) + (\vec{y} + L) = (\vec{x} + \vec{y}) + L. \end{aligned}$$

Si $\vec{x}+L=\vec{x'}+L$ y $\vec{y}+L=\vec{y'}+L$. Tenemos que ver que si $\vec{x}+L=\vec{y}+L$, entonces $\vec{x'}+L=\vec{y'}+L$. [1] Tenemos que

$$\vec{x'}=\vec{x}+\vec{l} \quad \text{y} \quad \vec{y'}=\vec{y}+\vec{l'}, \quad \text{con } \vec{l},\vec{l'}\in L.$$

$$\vec{x'}+\vec{y'}=\left(\vec{x}+\vec{l}\right)+\left(\vec{y}+\vec{l'}\right)=(\vec{x}+\vec{y})+\left(\vec{l}+\vec{l'}\right).$$

Entonces,

$$\left(\vec{x'}+\vec{y'}\right)-(\vec{x}+\vec{y})=\vec{l}+\vec{l'}\in L.$$

Entonces, $(\vec{x}+\vec{y})\,R\left(\vec{x'}+\vec{y'}\right)$, por lo que sus clases de equivalencia son iguales.

Teorema 1.14. $(V/L,+)$ es un grupo abeliano.

Demostración. **(i)** $\forall \vec{x},\vec{y}\in V$,

$$(\vec{x}+L)+(\vec{y}+L)=(\vec{x}+\vec{y})+L=(\vec{y}+\vec{x})+L.$$

(ii) $\forall \vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V$,

$$((\vec{x}+L)+(\vec{y}+L))+(\vec{z}+L)=((\vec{x}+\vec{y})+L)+(\vec{z}+L)=((\vec{x}+\vec{y})+\vec{z})+L=(\vec{x}+L)+((\vec{y}+L)+(\vec{z}+L)).$$

(iii) Si consideramos la clase $\vec{0}+L$, tenemos que $\forall \vec{x}\in V$,

$$\left(\vec{0}+L\right)+(\vec{x}+L)=\left(\vec{0}+\vec{x}\right)+L=\vec{x}+L.$$

(iv) Si $\vec{x}\in V$, el opuesto será, $-(\vec{x}+L)=(-\vec{x})+L$.

$$(\vec{x}+L)+(-(\vec{x}+L))=(\vec{x}+L)+((-\vec{x})+L)=(\vec{x}-\vec{x})+L=\vec{0}+L.$$

□

El producto por escalares está definido así:

$$\cdot \mathbb{K}\times V/L\to V/L$$
$$\forall a\in\mathbb{K},\forall\vec{x}\in V a\cdot(\vec{x}+L)=(a\vec{x})+L.$$

Queremos ver que se trata de una aplicación. Si $\vec{x'}+L=\vec{x}+L$, queremos ver que $\left(a\vec{x'}\right)+L=(a\vec{x})+L$. Tenemos que $\vec{x'}-\vec{x}\in L$, por lo que $a\vec{x}'-a\vec{x}\in L$. Por tanto,

$$(a\vec{x})+L=\left(a\vec{x'}\right)+L.$$

Observación 1.1. Estas operaciones hacen V/L un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

[1] El objetivo, tanto en la suma como en el producto por escalares, es ver que realmente se trata de una aplicación, es decir, si cojo $[\vec{x}]=[\vec{x'}]$ y $[\vec{y}]=[\vec{y'}]$, me tiene que dar que $[\vec{x}+\vec{y}]=[\vec{x'}+\vec{y'}]$.

Teorema 1.15. La dimensión del espacio vectorial V/L se puede expresar como:

$$\dim(V/L) = \dim(V) - \dim(L).$$

Demostración. Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\}$ base de L y sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \ldots, \vec{u}_n\}$ una base de V. Si $i = 1, \ldots, r$, tenemos que

$$\vec{u}_i = \vec{u}_i - \vec{0} \in L \Rightarrow \vec{u}_i + L = \vec{0} + L.$$

Vamos a demostrar que $\{\vec{u}_{r+1} + L, \ldots, \vec{u}_n + L\}$ base de V/L. Primero vemos que es un sistema de generadores. Si $\vec{x} \in V$, queremos ver que la clase de $\vec{x}$ se puede expresar como combinación lineal de estas clases. Existen $a^j \in \mathbb{K}$ tales que:

$$\vec{x} = \underbrace{a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^r\vec{u}_r}_{\in L} + a^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + a^n\vec{u}_n.$$

Entonces, $\vec{x}$ está relacionado con $a^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + a^n\vec{u}_n$. Por tanto,

$$\vec{x} + L = \left(a^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + a^n\vec{u}_n\right) + L = a^{r+1}\left(\vec{u}_{r+1} + L\right) + \cdots + a^n\left(\vec{u}_n + L\right).$$

Por tanto, $\{\vec{u}_{r+1} + L, \ldots, \vec{u}_n + L\}$ es un sistema de generadores de V/L. Ahora tenemos que ver que son linealmente independientes.

$$b^{r+1}\left(\vec{u}_{r+1} + L\right) + \cdots + b^n\left(\vec{u}_n + L\right) = \vec{0} + L.$$

Tenemos que

$$\left(b^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + b^n\vec{u}_n\right) + L = \vec{0} + L.$$

Entonces,

$$b^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + b^n\vec{u}_n - \vec{0} \in L.$$

Entonces, podemos escribir la expresión anterior como combinación lineal de la base de L:

$$b^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + b^n\vec{u}_n = b^1\vec{u}_1 + \cdots + b^r\vec{u}_r.$$

$$\Rightarrow \left(-b^1\right)\vec{u}_1 + \left(-b^2\right)\vec{u}_2 + \cdots + \left(-b^r\right)\vec{u}_r + \cdots + b^n\vec{u}_n = \vec{0}.$$

Dado que $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \ldots, \vec{u}_n\}$ es una base de V , $b^1 = b^2 = \cdots = b^r = \cdots = b^n = 0$. □

Observación 1.2. Podemos formar la base de un espacio cociente V/L a partir de la expansión de la base de L para obtener una base de V.

Capítulo 2

Aplicaciones Lineales

Definición 2.1 (Aplicación Lineal)**.** Sean V y V' son espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$.Una aplicación $f : V \to V'$ es lineal si

(a) $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}), \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in V.$

(b) $f(a\vec{x}) = af(\vec{x}), \ \forall a \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in V.$

Definición 2.2. Un **monomorfismo** de V en V' es una aplicación lineal inyectiva. Un **epimorfismo** es una aplicación lineal sobreyectiva. Un **isomorfismo** es una aplicación lineal biyectiva (es homomorfismo y epimorfismo a la vez).

Ejemplo 2.1. **(a)** Tenemos que $L \in \mathcal{L}(V)$,

$$\begin{aligned} i : L &\to V \\ \vec{x} &\to \vec{x}. \end{aligned}$$

Esta aplicación es un monomorfismo.

(b) Si $L \in \mathcal{L}(V)$, la aplicación

$$\begin{aligned} p : V &\to V/L \\ \vec{x} &\to \vec{x} + L \end{aligned}$$

Es un epimorfismo.

(c) Sean $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ una base de V, la aplicación

$$\begin{aligned} f : V &\to \mathbb{K}^n \\ \vec{x} &\to \left(a^1, \dots, a^n\right). \end{aligned}$$

Donde, $\vec{x} = a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^n\vec{u}_n$. Entonces f es un isomorfismo.

Proposición 2.1. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal.

(a) Si $L \in \mathcal{L}(V)$
$$f(L) = \{f(\vec{x}) \in V' \ : \ \vec{x} \in L\} \in \mathcal{L}(V').$$

(b) $f\left(\vec{0}\right) = \vec{0}$ y $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$.

(c) Si $L' \in \mathcal{L}(V')$,
$$f^{-1}(L') = \{\vec{x} \in V \ : \ f(\vec{x}) \in L'\} \in \mathcal{L}(V).$$

(d) $0 : V \to V'$ tal que $\vec{x} \to \vec{0}$ es una aplicación lineal.

Demostración. **(a)** Queremos ver que $\forall \vec{x'}, \vec{y'} \in f(L) \Rightarrow \exists \vec{x}, \vec{y} \in L,\ f(\vec{x}) = \vec{x'}$ y $f(\vec{y}) = \vec{y'}$. Tenemos que ver que la suma y el producto por escalares está bien definidas.
$$\vec{x'} + \vec{y'} = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = f(\vec{x} + \vec{y}) \in f(L).$$
Similarmente, para el producto por escalares, si $a \in \mathbb{K}$,
$$a\vec{x'} = af(\vec{x}) = f(a\vec{x}) \in f(L).$$

(b) Tenemos que $f\left(\vec{0}\right) = f(0 \cdot \vec{x}) = 0f(\vec{x}) = \vec{0}$. Similarmente,
$$f(-\vec{x}) = f((-1)\vec{x}) = -f(\vec{x}).$$
Otra demostración es:
$$f(\vec{x}) + f(-\vec{x}) = f(\vec{x} + (-\vec{x})) = f\left(\vec{0}\right) = \vec{0}.$$

(c) Sean $\vec{x}, \vec{y} \in f^{-1}(L')$, entonces $f(\vec{x}), f(\vec{y}) \in L'$. Como L' es subespacio vectorial,
$$f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \in L'.$$
Por tanto,
$$f(\vec{x} + \vec{y}) \in L' \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in f^{-1}(L').$$
Para el producto por escalares, si $a \in \mathbb{K}$, $\vec{x} \in f^{-1}(L')$,
$$f(\vec{x}) \in L' \Rightarrow af(\vec{x}) = f(a\vec{x}) \in L' \Rightarrow a\vec{x} \in f^{-1}(L).$$

□

Corolario 2.1. **(a)** Imagen. $\mathrm{Im}(f) = f(V) = \{f(\vec{x}) \ : \ \vec{x} \in V\} \in \mathcal{L}(V')$.

(b) Núcleo. $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}\left(\{\vec{0}\}\right) = \left\{\vec{x} \in V \ : \ f(\vec{x}) = \vec{0}\right\} \in \mathcal{L}(V)$.

Demostración. Como V y $\left\{\vec{0}\right\}$ son subespacios vectoriales su imagen y preimagen, respectivamente, también serán subespacios vectoriales por la proposición 2.1. □

Proposición 2.2. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal, entonces:

(a) f es epimorfismo $\iff \operatorname{Im}(f) = V'$.

(b) f es monomorfismo $\iff \operatorname{Ker}(f) = \left\{\vec{0}\right\}$.

Demostración. **(a)** Es la definición de sobreyectividad.

(b) Primera implicación. Tenemos que $f\left(\vec{0}\right) = \vec{0}$. Si $f(\vec{x}) = \vec{0}$, tenemos que $\vec{x} = \vec{0}$ (porque f es inyectiva). Segunda implicación. Supongo que $\operatorname{Ker}(f) = \left\{\vec{0}\right\}$, entonces

$$f(\vec{x}) = f(\vec{y}) \Rightarrow f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = f(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} - \vec{y} \in \operatorname{Ker}(f) \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}.$$

□

Proposición 2.3. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal y sea $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\}$ un sistema de generadores de $L \in \mathcal{L}(V)$. Entonces $\{f(\vec{x}_1), \ldots, f(\vec{x}_p)\}$ es un sistema de generadores de $f(L)$. [a]

[a] La independencia lineal no se conserva en una aplicación lineal en general.

Demostración. Sea $\vec{x'} \in f(L)$, existe $\vec{x} \in L$ tal que $f(\vec{x}) = \vec{x'}$. Como $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\}$ es un sistema de generadores de L, existen $a^i \in \mathbb{K}$ escalares tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Entonces,

$$\vec{x'} = f\left(a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^p\vec{x}_p\right) = a^1 f(\vec{x}_1) + \cdots + a^p f(\vec{x}_p).$$

□

Teorema 2.1. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal. Entonces, f es un monomorfismo si y solo si $\forall p \in \mathbb{N}, \forall \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\} \subset V$ linealmente independientes, implica que $\{f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_p)\}$ son linealmente independientes.

Demostración. **(i)** Si f es un monomorfismo y sea $p \in \mathbb{N}$, con $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\} \subset V$ linealmente independientes. Cogemos $a^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$a^1 f(\vec{u}_1) + \cdots + a^p f(\vec{u}_p) = \vec{0}.$$

Como f es una aplicación lineal,

$$\begin{aligned}&a^1 f(\vec{u}_1) + \cdots + a^p f(\vec{u}_p)\\ =&f\left(a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^p\vec{u}_p\right)\\ =&\vec{0}.\end{aligned}$$

Como f es monomorfismo, tenemos que

$$a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^p\vec{u}_p = \vec{0}.$$

Como estos vectores forman una base, tenemos que $a^1 = \cdots = a^p = 0$.

(ii) Lo hacemos por contraposición. Suponemos que f no es inyectiva (no es monomorfismo), por lo que existe $\vec{x} \neq \vec{0}$ tal que $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f)$. Entonces, $\{\vec{x}\}$ es linealmente independiente y $\{f(\vec{x})\} = \left\{\vec{0}\right\}$ es linealmente dependiente.

$\square$

Teorema 2.2. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal. Entonces f es epimorfismo si y solo si para cada sistema de generadores $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ de V, $\{f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_n)\}$ es sistema de generadores de V'.

Demostración. Sabemos que si $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ es sistema de generadores en V, entonces $\{f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_n)\}$ será sistema de generadores de $\mathrm{Im}(f)$. Si f es epimorfismo, entonces será base de V' y, si es base de V' es porque $\mathrm{Im}(f) = V'$, por lo que es epimorfismo. $\square$

Proposición 2.4. Sean $f : V \to V'$ y $g : V' \to V''$ aplicaciones lineales. Entonces, la composición $g \circ f$ también es lineal.

Demostración. Sean $\vec{x}, \vec{y} \in V$, tenemos que

$$g(f(\vec{x}+\vec{y})) = g(f(\vec{x}+\vec{y})) = g(f(\vec{x}) + f(\vec{y})) = g(f(\vec{x})) + g(f(\vec{y})).$$

Entonces, $g \circ f$ es lineal respecto a la suma. Similarmente, si $a \in \mathbb{K}, \vec{x} \in V$ tenemos que

$$g(f(a\vec{x})) = g(af(\vec{x})) = ag(f(\vec{x})).$$

Por tanto, $g \circ f$ es una aplicación lineal. $\square$

Proposición 2.5. Sea $f : V \to V'$ un isomorfismo (lineal y biyectiva) [a] . Sabemos que existe $f^{-1} : V' \to V$. Entonces, f^{-1} es isomorfismo.

[a] Una función es biyectiva si y sólo si tiene inversa.

Demostración. Solo tenemos que demostrar que es aplicación lineal, porque inversa de una biyección también es biyección. Si $\forall \vec{x'}, \vec{y'} \in V'$, como f es biyectiva, $\exists! \vec{x}, \vec{y} \in V$ tales que $\vec{x'} = f(\vec{x}) \iff \vec{x} = f^{-1}\left(\vec{x'}\right)$ y $\vec{y'} = f(\vec{y}) \iff \vec{y} = f^{-1}\left(\vec{y'}\right)$. Entonces,

$$f^{-1}\left(\vec{x'} + \vec{y'}\right) = f^{-1}\left(f(\vec{x}) + f(\vec{y})\right) = f^{-1}\left(f(\vec{x} + \vec{y})\right) = \vec{x} + \vec{y} = f^{-1}\left(\vec{x'}\right) + f^{-1}\left(\vec{y'}\right).$$

Similarmente, si $a \in \mathbb{K}$ y $\vec{x'} \in V'$, $\exists! \vec{x} \in V$ tal que $f(\vec{x}) = \vec{x'} \iff f^{-1}\left(\vec{x'}\right) = \vec{x}$. Entonces tenemos que,

$$f^{-1}\left(a\vec{x'}\right) = f^{-1}\left(af(\vec{x})\right) = f^{-1}\left(f(a\vec{x})\right) = a\vec{x} = af^{-1}\left(\vec{x'}\right).$$

□

Teorema 2.3. Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ una base de V y sean $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\} \subset V'$. Entonces, $\exists! f : V \to V'$ lineal tal que $f(\vec{u}_i) = \vec{v}_i$.

Demostración. **(i)** Primero demostramos la unicidad, es decir, asumimos que existe y demostramos que debe única. Entonces, asumimos que existe $f : V \to V'$ linal tal que $f(\vec{u}_i) = \vec{v}_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Sea $\vec{x} \in V$, entonces existen $a^i \in \mathbb{K}$ únicos tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^n\vec{u}_n.$$

Entonces,

$$f(\vec{x}) = f\left(a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^n\vec{u}_n\right) = a^1f(\vec{u}_1) + \cdots + a^nf(\vec{u}_n) = a^1\vec{v}_1 + \cdots + a^n\vec{v}_n.$$

Si exsistese otra función $g : V \to V'$ tal que $g(\vec{u}_i) = \vec{v}_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$, tendríamos que $f(\vec{x}) = g(\vec{x})$, $\forall \vec{x} \in V$.

(ii) Ahora demostramos la existencia. Sea $f : V \to V'$ la aplicación $f(\vec{x}) = x^1\vec{v}_1 + \cdots + x^n\vec{v}_n$, donde $\vec{x} = x^1\vec{u}_n + \cdots + x^n\vec{u}_n$. Tenemos que demostrar que esta aplicación es lineal. Si $\vec{x}, \vec{y} \in V$ queremos ver que $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
f(\vec{x} + \vec{y}) =& f\left(\left(x^1\vec{u}_n + \cdots + x^n\vec{u}_n\right) + \left(y^1\vec{u}_n + \cdots + y^n\vec{u}_n\right)\right) \\
=& f\left(\left(x^1 + y^1\right)\vec{u}_1 + \cdots + (x^n + y^n)\vec{u}_n\right) \\
=& \left(x^1 + y^1\right)\vec{v}_1 + \cdots + (x^n + y^n)\vec{v}_n \\
=& \left(x^1\vec{v}_1 + \cdots + x^n\vec{v}_n\right) + \left(y^1\vec{v}_1 + \cdots + y^n\vec{v}_n\right) \\
=& f(\vec{x}) + f(\vec{y}).
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$f(a\vec{x}) = f\left(a\left(x^1\vec{u}_n + \cdots + x^n\vec{u}_n\right)\right) = f\left(ax^1\vec{u}_1 + \cdots + ax^n\vec{u}_n\right) = af(\vec{x}).$$

□

Podemos ver que

$$f(\vec{u}_i) = f(0 \cdot \vec{u}_1 + \cdots + 0 \cdot \vec{u}_{i-1} + +1 \cdot \vec{u}_i + 0 \cdot \vec{u}_{i+1} + \cdots + 0 \cdot \vec{u}_n) = 0 \cdot \vec{v}_1 + \cdots + 1 \cdot \vec{v}_i + \cdots + 0 \cdot \vec{v}_n = \vec{v}_i.$$

Corolario 2.2. Sea $f : V \to V'$ lineal y $f(\vec{u}_i) = g(\vec{u}_i), \forall i = 1, \ldots, n$ donde $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ es base, entonces $f = g$.

Definición 2.3. Dos espacios vectoriales V y V' son isomorfos si existe $f : V \to V'$ isomorfismo. Lo expresaremos como $V \approx V'$.

Teorema 2.4. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal. Entonces son equivalentes:

(a) f es isomorfismo.

(b) $\forall \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ base de V, $\{f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_n)\}$ es base de V'.

(c) $\exists \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V tal que $\{f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_n)\}$ es base de V' .

Demostración. Vamos a ver que (a) $\Rightarrow$ (b), que (b) $\Rightarrow$ (c) y que (c) $\Rightarrow$ (a).

(a) $\Rightarrow$ (b) Suponemos que f es un isomorfismo y sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V. Entonces este conjunto es sistema de generadores y son linealmente independientes. Entonces $\{f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_n)\}$ es sistema de generadores de V'. Además, como son linealmente independientes, $\{f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_n)\}$ también son linealmente independientes.

(b) $\Rightarrow$ (c) Evidente.

(c) $\Rightarrow$ (a) Sea $f : V \to V'$ lineal, entonces $\exists \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V, entonces tenemos que $\{f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_n)\}$ es base de V'. Sea $g : V' \to V$, tal que $g = f^{-1}$, la única aplicación lineal tal que $g(f(\vec{u}_i)) = \vec{u}_i, \forall i = 1, \ldots, n$. Entonces, tenemos que f tiene inversa, por lo que es biyectiva y, además, como es aplicación lineal, es isomorfismo.

□

Corolario 2.3. $V \approx V' \iff \dim V = \dim V'$

Demostración. **(i)** Si $V \approx V'$, existe un isomorfismo entre ellos, y podemos encontrar una base con el mismo número de elementos en V' .

(ii) Supongamos que $\dim V = \dim V'$. Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V y $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ base de V' y $f : V \to V'$ la única aplicación lineal tal que $f(\vec{u}_i) = \vec{v}_i, \forall i = 1, \ldots, n$. Como es una aplicación lineal que lleva bases en bases es un isomorfismo.

□

Observación 2.1. Si consideramos la relación de equivalencia de que dos espacios vectoriales sean isomorfos, tenemos que el conjunto cociente tiene tantos elementos como biyecciones.

Teorema 2.5.
$$\dim V = \dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Im}(f).$$

Demostración. Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\}$ base de $\operatorname{Ker}(f)$ y sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \vec{u}_{r+1}, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V. Entonces $\dim V = n$ y $\dim \operatorname{Ker}(f) = r$. Vamos a ver que $\{f(\vec{u}_{r+1}), \ldots, f(\vec{u}_n)\}$ es base de $\operatorname{Im}(f)$. Primero tenemos que ver que son sistema de generadores. Sea $\vec{x'} \in \operatorname{Im}(f)$, entonces existe $\vec{x} \in V$ tal que $f(\vec{x}) = \vec{x'}$. Como $\vec{x} \in V$, existen $a^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^n\vec{u}_n.$$

Entonces tenemos que

$$\vec{x'} = f(\vec{x}) = f\left(a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^n\vec{u}_n\right) = fa^1(\vec{u}_1) + \cdots + a^r f(\vec{u}_r) + a^{r+1}f(\vec{u}_{r+1}) + \cdots + a^n f(\vec{u}_n).$$

Tenemos que como $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\}$ es una base de $\operatorname{Ker}(f)$, $f(\vec{u}_i) = \vec{0}, \forall i = 1, \ldots, r$:

$$\vec{x'} = a^{r+1} f(\vec{u}_{r+1}) + \cdots + a^n f(\vec{u}_n).$$

Entonces, $\{\vec{u}_{r+1}, \ldots, \vec{u}_n\}$ es sistema de generadores. Ahora vamos a ver que son linealmente independientes. Sean $b^i \in \mathbb{K}$ tal es que

$$b^{r+1} f(\vec{u}_{r+1}) + \cdots + b^n f(\vec{u}_n) = \vec{0}$$
$$\therefore f\left(b^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + b^n\vec{u}_n\right) = \vec{0}$$

Por tanto, $b^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + b^n\vec{u}_n \in \operatorname{Ker}(f)$ y lo podemos poner como combinación lineal de su base (existen $b^i \in \mathbb{K}$ tales que):

$$b^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + b^n\vec{u}_n = b^1\vec{u}_1 + \cdots + b^r\vec{u}_r.$$

$$\therefore -b^1\vec{u}_1 - \cdots - b^r\vec{u}_r + b^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + b^n\vec{u}_n = \vec{0}.$$

Como se trata de una base de V, tenemos que son linealmente independientes y $b^1 = \cdots = b^{r+1} = \cdots = b^n = 0$. Por lo que todos los coeficientes son nulos, $\{f(\vec{u}_{r+1}), \ldots, f(\vec{u}_n)\}$ son linealmente independientes y forman una base de $\operatorname{Im}(f)$. ☐

Observación 2.2. Si $\dim V = \dim V'$ entonces, f es monomorfismo por lo que $\dim \operatorname{Ker}(f) = \vec{0}$. Entonces, $\dim V = \dim V' = \dim \operatorname{Im}(f) \iff \operatorname{Im}(f) = V'$. Es decir, monomorfismo si y solo si epimorfismo si y solo si isomorfismo, es decir, para demostrar que es un isomorfismo solo hay que demostrar que es un monomorfismo!

Definición 2.4 (Endomorfismo)**.** Un **endomorfismo** de V es una aplicación lineal $f : V \to V$.

Definición 2.5 (Automorfismo)**.** Un **automorfismo** de V es un endomorfismo biyectivo de V.

Teorema 2.6. Sea $f : V \to V'$ lineal, entonces $p : V \to V/\operatorname{Ker}(f)$ tal que $\vec{x} \to \vec{x} + \operatorname{Ker}(f)$ es un epimorfismo. Sea $i : \operatorname{Im}(f) \to V'$ tal que $\vec{x'} \to \vec{x'}$ es monomorfismo. Entonces, $\exists! b : V/\operatorname{Ker}(f) \to \operatorname{Im}(f)$ tal que

$$i \circ b \circ p = f : V \to V'.$$

Además, b es isomorfismo.

Demostración. Definimos $b(\vec{x} + \operatorname{Ker}(f)) = f(\vec{x})$.

Unicidad. Suponemos que existe b, $\forall \vec{x} \in V$ tal que $b(\vec{x} + \operatorname{Ker}(f)) = f(\vec{x})$.

Vemos que b está bien definida. Si $\vec{y} \in V$, con $\vec{x} + \operatorname{Ker}(f) = \vec{y} + \operatorname{Ker}(f)$, tenemos que

$$\vec{x} - \vec{y} \in \operatorname{Ker}(f) \Rightarrow f(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}.$$

Entonces,

$$f(\vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = \vec{0} \iff f(\vec{x}) = f(\vec{y}).$$

Entonces,

$$b(\vec{x} + \operatorname{Ker}(f)) = b(\vec{y} + \operatorname{Ker}(f)).$$

Comprobamos que b es lineal. Comenzamos con la suma. Si $\vec{x}, \vec{y} \in V$,

$$\begin{aligned} b((\vec{x} + \operatorname{Ker}(f)) + (\vec{y} + \operatorname{Ker}(f))) =& b((\vec{x} + \vec{y}) + \operatorname{Ker}(f)) \\ =& f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \\ =& b(\vec{x} + \operatorname{Ker}(f)) + b(\vec{y} + \operatorname{Ker}(f)). \end{aligned}$$

Ahora comprobamos el producto por escalares. Sea $a \in \mathbb{K}$ y $\vec{x} \in V$,

$$\begin{aligned} b(a(\vec{x} + \operatorname{Ker}(f))) =& b(a\vec{x} + \operatorname{Ker}(f)) \\ =& f(a\vec{x}) = af(\vec{x}) = a(b(\vec{x} + \operatorname{Ker}(f))). \end{aligned}$$

Comprobamos que b es un epimorfismo.

$$\forall \vec{x'} \in \operatorname{Im}(f) \Rightarrow \exists \vec{x} \in V,\ f(\vec{x}) = \vec{x'}.$$

Por tanto, $f(\vec{x}) = b(\vec{x} + \operatorname{Ker}(f)) = \vec{x'}$. Entonces, $\vec{x'} \in \operatorname{Im}(b)$.

Comprobamos que b es un monomorfismo. Sea $\vec{x} + \operatorname{Ker}(f) \in \operatorname{Ker}(b)$, entonces $f(\vec{x}) = \vec{0}$ por lo que $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(f)$. Concluimos que

$$\vec{x} + \operatorname{Ker}(f) = \vec{0} + \operatorname{Ker}(f).$$

□

Observación 2.3. Lo que nos interesa concluir con este teorema es que si $f : V \to V'$ es lineal, entonces

$$\operatorname{Im}(f) \approx V/\operatorname{Ker}(f).$$

Proposición 2.6. Sea L el complementario vectorial de $\operatorname{Ker}(f)$ en V, es decir,

$$L \oplus \operatorname{Ker}(f) = V \Rightarrow \dim L + \dim \operatorname{Ker}(f) = \dim V.$$

La aplicación

$$\begin{aligned} f_L : L &\to \operatorname{Im}(f) \\ \vec{x} &\to f(\vec{x}), \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Demostración. Tenemos que f_L es lineal. Además,

$$\operatorname{Ker}(f_L) = \left\{ \vec{x} \in L \ : \ f(\vec{x}) = \vec{0} \right\} = L \cap \operatorname{Ker}(f) = \left\{ \vec{0} \right\}.$$

Entonces tenemos que es monomorfismo. Por otro lado queremos ver que,

$$\operatorname{Im}(f_L) = \operatorname{Im}(f).$$

Si $\vec{x'} \in \operatorname{Im}(f)$, existe $\vec{x} \in V$ tal que $\vec{x'} = f(\vec{x})$. Como $\vec{x} \in V$, $\exists \vec{y} \in \operatorname{Ker}(f)$ y $\vec{z} \in L$ tales que

$$\vec{x'} \in \operatorname{Im}(f_L).$$

Es decir,

$$\vec{x'} = f(\vec{x}) = f(\vec{y} + \vec{z}) = f(\vec{y}) + f(\vec{z}) = f(\vec{z}) = f_L(\vec{z}).$$

Es trivial ver que $\operatorname{Im}(f_L) \subset \operatorname{Im}(f)$. Por tanto es epimorfismo y, consecuentemente, isomorfismo. □

Corolario 2.4. Si $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$,

$$(L_1 + L_2)/L_1 \approx L_2/L_1 \cap L_2.$$

Demostración. Si $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$,

$$\dim (L_1 + L_2) - \dim L_1 = \dim L_2 - \dim (L_1 \cap L_2).$$

Entonces tenemos que,

$$\dim (L_1 + L_2)/L_1 = \dim L_2/L_1 \cap L_2.$$

□

Corolario 2.5. Si $L_1 \subset L_2 \in \mathcal{L}(V)$, entonces

$$(V/L_1)/(L_2/L_1) \approx V/L_2.$$

Teorema 2.7. $\mathrm{Hom}(V, V')$ tiene una estructura de $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Demostración. Sea $\mathrm{Hom}(V, V') = \{f : V \to V' \ : \ f \text{ lineal}\}$. En $\mathrm{Hom}(V, V')$ definimos la suma de la siguiente manera. Si $f, g \in \mathrm{Hom}(V, V')$ definimos

$$\begin{aligned} &f + g : V \to V' \\ &(f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}). \end{aligned}$$

Vamos a ver que $f+g$ es aplicación lineal. Si $\vec{x}, \vec{y} \in V$,

$$(f+g)(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}+\vec{y}) + g(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) + g(\vec{x}) + g(\vec{y}) = (f+g)(\vec{x}) + (f+g)(\vec{y}).$$

Si $a \in \mathbb{K}$ y $\vec{x} \in V$,

$$(f+g)(a\vec{x}) = f(a\vec{x}) + g(a\vec{x}) = af(\vec{x}) + ag(\vec{x}) = a(f+g)(\vec{x}).$$

Entonces, $f+g$ es aplicación lineal. Así, vamos a comprobar que $(\mathrm{Hom}(V, V'), +)$ es grupo abeliano. Comprobamos la conmutatividad. Si $\vec{x} \in V$,

$$(f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}) = g(\vec{x}) + f(\vec{x}) = (g+f)(\vec{x}).$$

Aplicamos la conmutatividad en V' como espacio vectorial. Comprobamos la asociatividad. Si $f, g, h \in \mathrm{Hom}(V, V')$,

$$((f+g)+h)(\vec{x}) = (f+g)(\vec{x}) + h(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}) + h(\vec{x}) = f(\vec{x}) + (g+h)(\vec{x}) = (f+(g+h))(\vec{x}).$$

Vamos a ver que $0 \in \mathrm{Hom}(V, V')$, definida por $0(\vec{x}) = \vec{0}, \forall \vec{x} \in V$. Tenemos que si $\vec{x}, \vec{y} \in V$,

$$0(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{0} = 0(\vec{x}) + 0(\vec{y}).$$

Si $a \in \mathbb{K}, \vec{x} \in V$,

$$0(a\vec{x}) = \vec{0} = a \cdot 0(\vec{x}) = a \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

Si $f \in \mathrm{Hom}(V, V')$, $\forall \vec{x} \in V$,

$$(f+0)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + 0(\vec{x}) = f(\vec{x}).$$

Entonces, existe el elemento neutro. Vamos a ver la existencia del opuesto. Si $f \in \mathrm{Hom}(V, V')$, tomamos $-f$ tal que $-f(\vec{x}) = (-f)(\vec{x})$. Entonces tenemos que

$$(f+(-f))(\vec{x}) = f(\vec{x}) + (-f)(\vec{x}) = f(\vec{x}) - f(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Entonces,

$$(f+(-f))(\vec{x}) = 0(\vec{x}).$$

Producto por escalares. Si $a \in \mathbb{K}$ y $f \in \mathrm{Hom}(V, V')$, defino $(af)(\vec{x}) = af(\vec{x})$. Vamos a ver que $af \in \mathrm{Hom}(V, V')$.

$$(af)(\vec{x}+\vec{y}) = af(\vec{x}+\vec{y}) = af(\vec{x}) + af(\vec{y}) = (af)(\vec{x}) + (af)(\vec{y}).$$

Similarmente,

Si $b \in \mathbb{K}$ y $\vec{x} \in V$,

$$(af)(b\vec{x}) = af(b\vec{x}) = abf(\vec{x}) = b(af(\vec{x})) = b(f(a\vec{x})).$$

Si $a \in \mathbb{K}$ y $f, g \in \operatorname{Hom}(V, V')$, si $\vec{x} \in V$,

$$(a(f+g))(\vec{x}) = a(f+g)(\vec{x}) = af(\vec{x}) + ag(\vec{x}) = (af)(\vec{x}) + (ag)(\vec{x}) = (af+ag)(\vec{x}).$$

Además,

$$(1f)(\vec{x}) = 1f(\vec{x}) = f(\vec{x}).$$

□

2.1. Ejemplos de aplicaciones lineales

2.1.1. Formas Lineales

Definición 2.6 (Forma lineal)**.** Una **formal lineal** definida en V es una aplicación lineal $\lambda : V \to \mathbb{K}$ [a] .

[a] $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial sobre sí mismo de dimensión 1.

Teorema 2.8. Si λ es una forma lineal no nula, entonces λ es sobreyectiva (epimorfismo).

Demostración. Sea $a \in \mathbb{K}$. Sabemos que $\lambda \neq 0$, por lo que existe $\vec{x}_0 \in V$ tal que $\lambda(\vec{x}_0) = b \neq 0$. Consideramos $\vec{x} = \dfrac{a}{b}\vec{x}_0 \in V$, entonces

$$\lambda(\vec{x}) = \frac{a}{b}\lambda(\vec{x}_0) = a.$$

□

Definición 2.7. Una **recta vectorial** de V es un subespacio vectorial de dimensión 1. Análogamente, un **plano vectorial** de V es un subespacio vectorial de dimensión 2. Un **hiperplano vectorial** de V es un subespacio vectorial de dimensión $\dim V - 1$.

Observación 2.4. Los complementarios vectoriales de los hiperplanos son rectas y viceversa.

Si $\lambda : V \to \mathbb{K}$ lineal no nula,

$$\dim \operatorname{Im}(\lambda) = 1.$$

Por tanto, la imagen de λ es una recta en $\mathbb{K}$. Además,

$$\dim V = \dim \operatorname{Im}(\lambda) + \dim \operatorname{Ker}(\lambda).$$

Si $\lambda \neq 0$, tenemos que $\operatorname{Ker}(\lambda)$ es un hiperplano vectorial.

Proposición 2.7. Si $L \in \mathcal{L}(V)$ es un hiperplano vectorial, existe $\lambda : V \to \mathbb{K}$ lineal no nula, tal que $L = \operatorname{Ker}(\lambda)$ [a] .

[a]Esto nos sirve para definir los hiperplanos en dimensión infinita.

Demostración. Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n-1}\}$ base de L y sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V. Definimos $\lambda : V \to \mathbb{K}$ la única aplicación lineal tal que $\lambda(\vec{u}_i) = 0, \forall i = 1, \ldots n-1$, y cogemos $\lambda(\vec{u}_n) = 1$[1]. Entonces $\operatorname{Ker}(\lambda) = L$, pues su núcleo va a ser un hiperplano vectorial y este contiene a la base de L. Un hiperplano vectorial contenido en otro hiperplano vectorial es el mismo. □

2.1.2. Homotecias vectoriales

Definición 2.8 (Homotecia vectorial)**.** Sea $\alpha \in \mathbb{K} - \left\{\vec{0}\right\}$. La **homotecia vectorial** de razón α es la aplicación $h_\alpha : V \to V$ tal que $\vec{x} \to \alpha\vec{x}$.

Teorema 2.9. **(i)** Todas las homotecias vectoriales son automorfismos. Es decir,

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} - \left\{\vec{0}\right\}, h_\alpha \in \operatorname{Aut}(V).$$

(ii) La aplicación $\mathbb{K} - \left\{\vec{0}\right\} \to H(V)$ donde $H(V) = \left\{h_\alpha : \alpha \in \mathbb{K} - \left\{\vec{0}\right\}\right\}$ con $\alpha \to h_\alpha$, es biyectiva.

(iii) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}^*$,

$$h_{\alpha\beta} = h_\alpha \circ h_\beta.$$

Demostración. **(i)** Tenemos que demostrar que es aplicación lineal, pues está claro que es biyectiva.

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, h_\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y} = h_\alpha(\vec{x}) + h_\alpha(\vec{y}).$$

Si $a \in \mathbb{K}$,

$$h_\alpha(a\vec{x}) = \alpha(a\vec{x}) = a h_\alpha(\vec{x}).$$

(ii) Está claro que la aplicación es sobreyectiva, tenemos que comprobar que es inyectiva: Si $h_\alpha = h_\beta$, tenemos que $\forall \vec{x} \in V$,

$$\alpha\vec{x} = \beta\vec{x}.$$

Si V no es nulo, podemos deducir que,

$$\exists \vec{x} \neq \vec{0},\ (\alpha - \beta)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta.$$

Por lo que esta aplicación es inyectiva.

(iii)

$$\forall \vec{x} \in V,\ h_\beta \circ h_\alpha(\vec{x}) = h_\beta(\alpha\vec{x}) = \beta\alpha\vec{x} = h_{\beta\alpha}(\vec{x}).$$

□

[1]Vale cualquier escalar no nulo.

Teorema 2.10. Sea $f : V \to V$ lineal. Entonces f es una homotecia vectorial si y solo si $\forall L \in \mathcal{L}(V)$ recta vectorial $f(L) = L$.

Demostración. **(i)** Si $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tal que $f = h_\alpha$, sea $L \in \mathcal{L}(V)$ una recta vectorial. Entonces, existe $\vec{x}_0 \in L^*$ tal que $\{\vec{x}_0\}$ es base de L. Entonces, $L = \{a\vec{x}_0 \ : \ a \in \mathbb{K}\}$. Además, tenemos que

$$h_\alpha(L) = \{\alpha a\vec{x}_0 \ : \ a \in \mathbb{K}\} = L.$$

(ii) Si $\vec{x} \in V^*$, entonces $L(\{\vec{x}\})$ es una recta vectorial. Tenemos que

$$f(L(\{\vec{x}\})) = L(\{\vec{x}\}).$$

Si $\vec{x} \in L(\{\vec{x}\})$,

$$f(\vec{x}) \in L(\{\vec{x}\}) \Rightarrow \exists\alpha_{\vec{x}} \in \mathbb{K},\ f(\vec{x}) = \alpha_{\vec{x}}\vec{x}.$$

Tenemos que ver que α es único. Si $\vec{x}, \vec{y} \in V^*$, tenemos que ver si son linealmente dependientes o linealmente independientes. Si son linealmente dependientes, $\exists a \in \mathbb{K}^*$ tal que

$$\vec{x} = a\vec{y}.$$

Entonces, $f(\vec{x}) = af(\vec{y}) = f(a\vec{y}) = \alpha_{\vec{y}}a\vec{y} = \alpha_{\vec{y}}\vec{x}$. Tenemos que

$$(\alpha_{\vec{x}} - \alpha_{\vec{y}})(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow \alpha_{\vec{x}} = \alpha_{\vec{y}}.$$

Si son linealmente independientes, $\vec{x} + \vec{y} \neq 0$,

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = \alpha_{\vec{x}+\vec{y}}(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha_{\vec{x}+\vec{y}}\vec{x} + \alpha_{\vec{x}+\vec{y}}\vec{y} = \alpha_{\vec{x}}\vec{x} + \alpha_{\vec{y}}\vec{y}.$$

Entonces tenemos que

$$(\alpha_{\vec{x}+\vec{y}} - \alpha_{\vec{x}})\vec{x} = (\alpha_y - \alpha_{\vec{x}+\vec{y}})\vec{y} \Rightarrow \alpha_{\vec{x}} = \alpha_{\vec{x}+\vec{y}} = \alpha_{\vec{y}}.$$

Sea $\alpha = \alpha_{\vec{x}}$, con $\vec{x} \in V^*$. Entonces si $\vec{y} \in V^*$ tenemos que $f(\vec{y}) = \alpha\vec{y}$ y $\vec{0} = \alpha\vec{0}$. Por tanto, se trata de una homotecia lineal.

□

2.1.3. Proyecciones

Supongamos que $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ y seam $L_1 \oplus L_2 = V$. $\forall\vec{x} \in V, \exists\vec{x}_1 \in L_1, \exists\vec{x}_2 \in L_2$, $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$.

Definición 2.9 (Proyección)**.** La **proyección** de base L_1 (respecto a la base L_2) y dirección L_2 (respecto a L_1) es la aplicación

$$\begin{aligned} p_1 &: V \to V \\ \vec{x} &= \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \to \vec{x}_1. \end{aligned}$$

Respecto a $p_2 : V \to V$ tal que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \to \vec{x}_2$.

Teorema 2.11. **(i)** $p_1 + p_2 = id_V$.

(ii) $p_1 \circ p_2 = 0$ y $p_2 \circ p_1 = 0$.

(iii) p_1 y p_2 son lineales.

(iv) $p_1 \circ p_1 = p_1$ y $p_2 \circ p_2 = p_2$.

Demostración. **(i)** $\forall \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2$,

$$(p_1 + p_2)(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = p_1(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + p_2(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \vec{x}_1 + \vec{x}_2.$$

(ii)

$$p_1 \circ p_2(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = p_1(\vec{x}_2) = p_1\left(\vec{0} + \vec{x}_2\right) = \vec{0}.$$

(iii)

$$p_1(\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{y}_1 + \vec{y}_2) = p_1((\vec{x}_1 + \vec{y}_1) + (\vec{x}_2 + \vec{y}_2)) = p_1(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + p_1(\vec{y}_1 + \vec{y}_2).$$
$$p_1(a\vec{x}) = p_1(a(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)) = p_1(a\vec{x}_1 + a\vec{x}_2) = a\vec{x}_1 = ap_1(\vec{x}_1 + \vec{x}_2).$$

(iv) Si $\vec{x} \in V$,

$$p_1 \circ p_1(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = p_1(\vec{x}_1) = \vec{x}_1.$$

□

Definición 2.10. Un endomorfismo $p : V \to V$ es un proyector si $p^2 = p$.

Teorema 2.12. Sea p un proyector definido en V, entonces $(id_V - p)$ es un proyector y $V = L_1 \oplus L_2$ donde $L_1 = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - id_V)$ y $L_2 = \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(p - id_V)$.

Demostración. $\forall \vec{x} \in V$,

$$(id_V - p)^2(\vec{x}) = (id_V - p)(\vec{x} - p(\vec{x})) = \vec{x} - p(\vec{x}) - p(\vec{x}) + p^2(\vec{x}) = \vec{x} - p(\vec{x}) = (id_V - p)(\vec{x}).$$

Vamos a ver que $V = L_1 \oplus L_2$ donde $L_1 = \mathrm{Im}(p)$ y $L_2 = \mathrm{Ker}(p)$.

$$\forall \vec{x} \in V,\ \vec{x} = p(\vec{x}) + \vec{x} - p(\vec{x}),\ p(\vec{x} - p(\vec{x})) = p(\vec{x}) - p^2(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Tenemos que $p(\vec{x}) \in \mathrm{Im}(p)$ y $(id_V - p)(\vec{x}) \in \mathrm{Ker}(p)$. Entonces $V = L_1 \oplus L_2$.

Si $\vec{x} \in L_1 \cap L_2$, existe $\vec{y} \in V$ tal que $p(\vec{y}) = \vec{x}$ y $p(\vec{x}) = \vec{0}$. Entonces,

$$p(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow p^2(\vec{y}) = \vec{0}.$$

Por tanto, $\vec{x} = \vec{0}$ y $p(\vec{y}) = \vec{x}$.

Vamos a comprobar que

$$\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - id_V).$$

(i) $\vec{x} \in \operatorname{Im}(p)$, entonces $\exists \vec{y} \in V$ tal que $p(\vec{y}) = \vec{x}$.

$$(p - id_V)(\vec{x}) = (p - id_V)(p(\vec{y})) = \underbrace{p^2(\vec{y})}_{p} - p(\vec{y}) = \vec{0}.$$

Por tanto, $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(p - id_V)$.

(ii) Si $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(p - id_V)$, tenemos que

$$(p - id_V)(\vec{x}) = p(\vec{x}) - \vec{x} = \vec{0}.$$

Por tanto, $\vec{x} = p(\vec{x})$ y, consecuentemente, $\vec{x} \in \operatorname{Im}(p)$.

La proposición $\operatorname{Ker}(p) = \operatorname{Im}(p - id_V)$ se demuestra igual. $\square$

2.1.4. Simetrías vectoriales

Asumimos que el cuerpo $\mathbb{K}$ es de característica distinta de 2.

Definición 2.11. Un endomorfimos s de V es involutivo si $s^2 = id_V$ ($\iff \exists s^{-1}$ y $s^{-1} = s$).

Definición 2.12. s es la simetría vectorial de base L_1 y dirección L_2.

Teorema 2.13. Sea $s : V \to V$ un endomorfismo involutivo. Sea $L_1 = \operatorname{Im}(s + id_V)$ y $L_2 = \operatorname{Im}(id_V - s)$. Entonces, $L_1 \oplus L_2 = V$ y $s = p_1 - p_2$ (p_1, p_2 son proyecciones). Diremos que s es la simetría de base L_1 y dirección L_2.

$$\operatorname{Im}(s - id_V) = \operatorname{Ker}(s + id_V) \quad \text{y} \quad \operatorname{Im}(s + id_V) = \operatorname{Ker}(s - id_V).$$

Demostración. Sea $L_1 = \operatorname{Im}(s + id_V)$ y $L_2 = \operatorname{Im}(id_V - s)$.

$$\forall \vec{x} \in V,\ \vec{x} = \frac{\vec{x} - s(\vec{x})}{2} + \frac{\vec{x} + s(\vec{x})}{2} = (id_V - s)\left(\frac{\vec{x}}{2}\right) + (id_V + s)\left(\frac{\vec{x}}{2}\right).$$

Sea $\vec{x} \in L_1 \cap L_2$,

$\vec{x} \in L_1,\ \exists \vec{y} \in V,\ (s + id_V)(\vec{y}) = \vec{x} \Rightarrow s(\vec{x}) = s((s + id_V)(\vec{y})) = s(s(\vec{y}) + \vec{y}) = s^2(\vec{y}) + s(\vec{y}) = \vec{y} + s(\vec{y}) = \vec{x}.$

$\vec{x} \in L_2,\ \exists \vec{z} \in V,\ (id_V - s)(\vec{z}) = \vec{x} \Rightarrow s(\vec{x}) = s((id_V - s)(\vec{z})) = s(\vec{z}) - s^2(\vec{z}) = s(\vec{z}) - \vec{z} = -\vec{x}.$

Entonces, si $\vec{x} \in L_1 \cap L_2$,

$$s(\vec{x}) = \vec{x} \quad \text{y} \quad s(\vec{x}) = -\vec{x} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}.$$

$\square$

Observación 2.5. Tenemos que $p_1(\vec{x}) = (id_V + s)\left(\frac{\vec{x}}{2}\right)$, y $p_2(\vec{x}) = (id_V - s)\left(\frac{\vec{x}}{2}\right)$. Entonces, $s = p_1 - p_2$. Además, diremos que $L_1 = \operatorname{Ker}(s - id_V)$ y $L_2 = \operatorname{Ker}(s + id_V)$. Esto se puede demostrar con ambas implicaciones: $L_1 \subset \operatorname{Ker}(id_V - s)$ y viceversa.

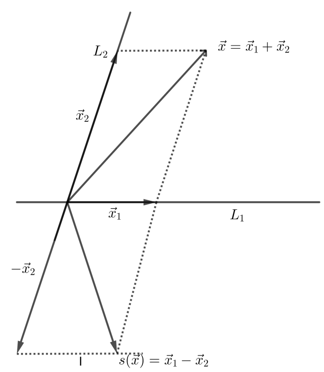

Figura 2.1: Ejemplo de simetrías vectoriales

2.2. Espacio vectorial dual

Definición 2.13 (Espacio dual)**.** Llamaremos **espacio dual** de V y lo representaremos por $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$.

Teorema 2.14. Sea $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ base de V, entonces las formas lineales $\left\{\omega^1, \dots, \omega^n\right\}$ definidas por ser las únicas formas lineales tales que

$$\omega^i(\vec{u}_j) = \begin{cases} 1, \text{ si } i = j \\ 0, \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

que llamaremos base dual de $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$.

Demostración. Tenemos que ver que $\left\{\omega^1, \dots, \omega^n\right\}$ son linealmente independientes. Sean $a_i \in \mathbb{K}$ tales que

$$a_1\omega^1 + \cdots + a_n\omega^n = 0 \in V^*.$$

Tenemos que $\forall i = 1, \dots, n$,

$$0(\vec{u}_i) = 0 = \left(a_1\omega^1 + \cdots + a_n\omega^n\right)(\vec{u}_i) = a_1\omega^1(\vec{u}_i) + \cdots + a_i\omega^i(\vec{u}_i) + \cdots + a_n\omega^n(\vec{u}_n) = a_i.$$

Por tanto, $a_i = 0,\ \forall i = 1, \dots, n$.

Ahora vamos a ver que son sistema de generadores. Si $\lambda \in V^*$, $\forall i = 1, \dots, n$,

$$\left(\lambda(\vec{u}_1)\,\omega^1 + \lambda(\vec{u}_2)\,\omega^2 + \cdots + \lambda(\vec{u}_n)\,\omega^n\right)(\vec{u}_i) = \lambda(\vec{u}_i).$$

Es decir, tenemos que

$$\lambda = \lambda\left(\vec{u}_1\right)\omega^1 + \cdots + \lambda\left(\vec{u}_n\right)\omega^n.$$

□

Observación 2.6.

$\vec{x} = a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^n\vec{u}_n$

$\forall i = 1, \ldots, n,\ w^i\left(\vec{x}\right) = w^i\left(a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^n\vec{u}_n\right) = a^1 w^i\left(\vec{u}_1\right) + \cdots + a^n w^i\left(\vec{u}_n\right) = a^i.$

Corolario 2.6. $\dim V = \dim V^*$.

Observación 2.7. $\left(V^*\right)^* = V^{**}$ bidual. $\forall \vec{x} \in V$,

$$\begin{aligned} \theta_{\vec{x}} :& V^* \to \mathbb{K} \\ & \lambda \to \theta_{\vec{x}}\left(\lambda\right) = \lambda\left(\vec{x}\right), \forall \lambda \in V^*. \end{aligned}$$

Tenemos que, $\theta_{\vec{x}} \in V^{**}$, además, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in V^*$,

$$\theta_{\vec{x}}\left(\lambda_1 + \lambda_2\right) = \left(\lambda_1 + \lambda_2\right)\left(\vec{x}\right) = \left(\lambda_1 + \lambda_2\right)\left(\vec{x}\right) = \lambda_1\left(\vec{x}\right) + \lambda_2\left(\vec{x}\right) = \theta_{\vec{x}}\left(\lambda_1\right) + \theta_{\vec{x}}\left(\lambda_2\right).$$

Además, si $a \in \mathbb{K}$, $\forall \lambda \in V^*$,

$$\theta_{\vec{x}}\left(a\lambda\right) = \left(a\lambda\right)\left(\vec{x}\right) = a\lambda\left(\vec{x}\right) = a\theta_{\vec{x}}\left(\vec{\lambda}\right).$$

Entonces tenemos que $\theta_{\vec{x}}$ es una aplicación lineal y, por tanto, $\theta_{\vec{x}} \in V^{**}$.

Teorema 2.15. La aplicación

$$\begin{aligned} \theta :& V \to V^{**} \\ & \vec{x} \to \theta_{\vec{x}}, \end{aligned}$$

es lineal.

Demostración. Tenemos que $\forall \lambda \in V^*$,

$$\theta_{\vec{x}+\vec{y}}\left(\lambda\right) = \lambda\left(\vec{x}+\vec{y}\right) = \lambda\left(\vec{x}\right) + \lambda\left(\vec{y}\right) = \theta_{\vec{x}}\left(\lambda\right) + \theta_{\vec{y}}\left(\lambda\right) = \left(\theta_{\vec{x}} + \theta_{\vec{y}}\right)\left(\lambda\right).$$

Entonces tenemos que

$$\theta_{\vec{x}+\vec{y}} = \theta_{\vec{x}} + \theta_{\vec{y}} \iff \theta\left(\vec{x}+\vec{y}\right) = \theta\left(\vec{x}\right) + \theta\left(\vec{y}\right).$$

Además, si $a \in \mathbb{K}$ y $\vec{x} \in V$:

$$\theta\left(a\vec{x}\right) = \theta_{a\vec{x}} = a\theta_{\vec{x}} = a\theta\left(\vec{x}\right).$$

Entonces, $\forall \lambda \in V^*$,

$$\theta_{a\vec{x}}\left(\lambda\right) = \lambda\left(a\vec{x}\right) = a\lambda\left(\vec{x}\right) = \left(a\theta_{\vec{x}}\right)\left(\lambda\right).$$

Por tanto,

$$\theta_{a\vec{x}} = a\theta_{\vec{x}} \iff \theta\left(a\vec{x}\right) = a\theta\left(\vec{x}\right).$$

□

Definición 2.14. Sea $V^{**} = \mathrm{Hom}\,(V^*, \mathbb{K})$ el espacio dual de V^*. Entonces es el espacio **bidual** de V. Además,

$$\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V.$$

Teorema 2.16. θ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración. Como tienen la misma dimensión, nos basta con demostrar que es inyectiva. Sea $\vec{x} \in \mathrm{Ker}\,(\theta)$, queremos ver que $\vec{x} = \vec{0}$. Tenemos que $\forall \lambda \in V^*$,

$$\theta_{\vec{x}}\,(\lambda) = \lambda\,(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Por tanto, tenemos que $\vec{x} = \vec{0}$ (porque todas las formas lineales devuelven 0 si insertas 0) y, consecuentemente, θ es isomorfismo. □

Teorema 2.17. Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V y sea $\left\{\omega^1, \ldots, \omega^n\right\}$ su dual. Tenemos que $\{\theta_{\vec{u}_1}, \ldots, \theta_{\vec{u}_n}\}$ es base de V^{**}. Además, $\forall i, j = 1, \ldots, n$,

$$\theta_{\vec{u}_i}\left(\omega^j\right) = \omega^j\,(\vec{u}_i) = \begin{cases} 1, \text{ si } i = j \\ 0, \text{ si } i \neq j \end{cases}.$$

Es decir, tenemos que $\{\theta_{\vec{u}_1}, \ldots, \theta_{\vec{u}_n}\}$ es la base dual de $\left\{\omega^1, \ldots, \omega^n\right\}$.

Observación 2.8. Si $f : V \to V'$ lineal y $\lambda' \in V^{'*}$, tenemos que

$$\lambda' \circ f : V \to \mathbb{K},\ \lambda' \circ f \in V^*.$$

Se tiene definida una aplicación (la aplicación dual de f)

$$\begin{aligned} f^* :& V^{'*} \to V^* \\ & \lambda' \to f^*\,(\lambda') = \lambda' \circ f \end{aligned}$$

Proposición 2.8. f^* es lineal.

Demostración. Tenemos que $\forall \lambda_1', \lambda_2' \in V'^*$,

$$f^*\,(\lambda_1' + \lambda_2') = (\lambda_1' + \lambda_2') \circ f.$$

Además, $\forall \vec{x} \in V$,

$$\begin{aligned} ((\lambda_1 + \lambda_2') \circ f)\,(\vec{x}) =& (\lambda_1' + \lambda_2')\,(f\,(\vec{x})) = \lambda_1'\,(f\,(\vec{x})) + \lambda_2'\,(f\,(\vec{x})) = (\lambda_1' \circ f)\,(\vec{x}) + (\lambda_2' \circ f)\,(\vec{x}) \\ =& f^*\,(\lambda_1')\,(\vec{x}) + f^*\,(\lambda_2')\,(\vec{x}) = (f^*\,(\lambda_1') + f^*\,(\lambda_2'))\,(\vec{x})\,. \end{aligned}$$

Además, $\forall a \in \mathbb{K}, \forall \lambda' \in V'^*$, tenemos que

$$f^*(a\lambda') = (a\lambda') \circ f = af^*(\lambda').$$

Tenemos que $\forall \vec{x} \in V$,

$$(a\lambda') \circ f(\vec{x}) = a(\lambda' \circ f)(\vec{x}) = af^*(\lambda')(\vec{x}).$$

□

Teorema 2.18. Se tiene definida una aplicación

$$\begin{aligned} * : \operatorname{Hom}(V, V') &\to \operatorname{Hom}(V'^*, V^*) \\ f &\to f^*. \end{aligned}$$

Tenemos que $*$ es lineal.

Demostración. Si $f, g \in \operatorname{Hom}(V, V')$, tenemos que $\forall \lambda' \in V'^*$,

$$(f+g)^*(\lambda') = \lambda' \circ (f+g) = f^*(\lambda') + g^*(\lambda') = (f^* + g^*)(\lambda').$$

Entonces tenemos que $\forall \vec{x} \in V$,

$$\lambda' \circ (f+g)(\vec{x}) = \lambda'(f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = (f^*(\lambda') + g^*(\lambda'))(\vec{x}).$$

Si $a \in \mathbb{K}$ y $f \in \operatorname{Hom}(V, V')$, queremos ver que

$$*(af) = (af)^* = af^*.$$

Tenemos que $\forall \lambda' \in V'^*$,

$$(af)^*(\lambda') = \lambda' \circ (af) = af^*(\lambda').$$

Entonces, $\forall \vec{x} \in V$,

$$(\lambda' \circ (af))(\vec{x}) = \lambda'(af(\vec{x})) = a\lambda'(f)(\vec{x}) = af^*(\lambda')(\vec{x}).$$

□

Proposición 2.9. Sea $f \in \operatorname{Hom}(V, V')$ y $g \in \operatorname{Hom}(V', V'')$. Se cumple que

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

Demostración. Tenemos que $\forall \lambda'' \in V''^*$,

$$(g \circ f)^*(\lambda'') = \lambda'' \circ (g \circ f) = (\lambda'' \circ g) \circ f = (g^*(\lambda'')) \circ f = f^*(g^*(\lambda'')) = (f^* \circ g^*)(\lambda'').$$

□

Proposición 2.10.
$$(id_V)^* = id_{V^*}.$$

Demostración. Tenemos que $\forall \lambda \in V^*$,
$$(id_V)^* (\lambda) = \lambda \circ id_V = id_{V^*} (\lambda) .$$
□

Proposición 2.11. Si $f : V \to V'$ isomorfismo, f^* isomorfismo y $\left(f^{-1}\right)^* = (f^*)^{-1}$.

Demostración. Existe $f^{-1} : V' \to V$ tal que $f^{-1} \circ f = id_V$ y $f \circ f^{-1} = id_{V'}$. Entonces tenemos que
$$f^* \circ \left(f^{-1}\right)^* = \left(f^{-1} \circ f\right)^* = (id_V)^* = id_{V^*}.$$
Similarmente,
$$\left(f^{-1}\right)^* \circ f^* = \left(f \circ f^{-1}\right)^* = (id_{V'})^* = id_{V'^*}.$$
□

Si $f \in \mathrm{Hom}\,(V, V')$, tenemos que $(f^*)^* = f^{**} \in \mathrm{Hom}\,(V^{**}, V'^{**})$. Tenemos que $\forall \vec{x} \in V, \theta_{\vec{x}} \in V^{**}$, entonces
$$f^{**} (\theta_{\vec{x}}) = \theta_{\vec{x}} \circ f^* = \theta \circ f.$$
$$\forall \lambda' \in V'^*, \theta_{\vec{x}} \circ f^* (\lambda') = \theta_{\vec{x}} (\lambda' \circ f) = \lambda' \circ f (\vec{x}) = \lambda' (f (\vec{x})) = \theta_{f(\vec{x})} (\lambda') .$$
Queremos ver que
$$\theta^{-1} f^{**} \theta_{\vec{x}} = f.$$

2.2.1. Anulador de un subespacio

Definición 2.15 (Ortogonal y anulador)**.** Si $\emptyset \neq A \subset V$. Llamaremos **ortogonal** a A y la expresaremos por:
$$A^\perp = \left\{\lambda \in V^* \ : \ \lambda (\vec{x}) = \vec{0}, \forall \vec{x} \in A\right\} = \{\lambda \in V^* \ : \ A \subset \mathrm{Ker}\,(\lambda)\} .$$

Proposición 2.12.
$$A^\perp \in \mathcal{L} (V^*) .$$

Demostración. Sean $\lambda_{1,2} \in A^\perp$, vamos a ver que $\lambda_1 + \lambda_2 \in A^\perp$:
$$\forall \vec{x} \in A,\ (\lambda_1 + \lambda_2) (\vec{x}) = \lambda_1 (\vec{x}) + \lambda_2 (\vec{x}) = \vec{0}.$$
Por lo que, $\lambda_1 + \lambda_2 \in A^\perp$. Similarmente, si $\lambda \in A^\perp$ y $a \in \mathbb{K}$, vamos a ver que $a\lambda \in A^\perp$:
$$\forall \vec{x} \in A, (a\lambda) (\vec{x}) = a\lambda (\vec{x}) = a \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$
Por lo que $a\lambda \in A^\perp$. □

$$
\begin{tikzcd}
V^{**} \arrow[r, "f^{**}"] & V^{'**} \\
V \arrow[u, "\theta"] \arrow[r, "f"'] & V' \arrow[u, "\theta"']
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.2: Resumen del espacio dual

Proposición 2.13. Si $\emptyset \neq A \subset B \subset V$, entonces $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.

Proposición 2.14.

$$A^{\perp} = L\left(A\right)^{\perp}.$$

Demostración. Si $A \subset L\left(A\right)$ tenemos que $L\left(A\right)^{\perp} \subset A^{\perp}$. Sea $\lambda \in A^{\perp}$,

$$\forall \vec{x} \in L\left(A\right), \exists p \in \mathbb{N}, \exists a^1, \ldots, a^p \in \mathbb{K}, \exists \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p \in A.$$

$$\vec{x} = a^1 \vec{x}_1 + \cdots + a^p \vec{x}_p.$$

Entonces,

$$\lambda\left(\vec{x}\right) = \lambda\left(a^1 \vec{x}_1 + \cdots + a^p \vec{x}_p\right) = a^1 \lambda\left(\vec{x}_1\right) + \cdots + a^p \lambda\left(\vec{x}_p\right) = \vec{0}.$$

$\square$

Proposición 2.15. Sean $L_1, L_2 \in \mathcal{L}\left(V\right)$, entonces tenemos que $\left(L_1 + L_2\right)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$ y $\left(L_1 \cap L_2\right)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$.

Demostración. **(1.1)** Tenemos que $L_1 \subset L_1 + L_2$ y $L_2 \subset L_1 + L_2$. Entonces sabemos que $\left(L_1 + L_2\right)^{\perp} \subset L_1^{\perp}$ y $\left(L_1 + L_2\right)^{\perp} \subset L_2^{\perp}$. Por tanto

$$\left(L_1 + L_2\right)^{\perp} \subset L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}.$$

(1.2) Si $\lambda \in L_1^\perp \cap L_2^\perp$, tenemos que

$$\forall \vec{x} \in L_1^\perp, \lambda(\vec{x}) = \vec{0}$$
$$\forall \vec{y} \in L_2^\perp, \lambda(\vec{y}) = \vec{0}.$$

Tenemos que

$$\forall \vec{x} \in L_1 + L_2, \exists \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2, \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2.$$

Entonces tenemos que

$$\lambda(\vec{x}) = \lambda(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \lambda(\vec{x}_1) + \lambda(\vec{x}_2) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.$$

Por tanto, $\lambda \in (L_1 + L_2)^\perp$, por lo que

$$L_1^\perp \cap L_2^\perp \subset (L_1 + L_2)^\perp.$$

(2.1) Tenemos que $L_1 \cap L_2 \subset L_1, L_2$, por lo que

$$L_1^\perp \subset (L_1 \cap L_2)^\perp \in \mathcal{L}(V^*)$$
$$L_2^\perp \subset (L_1 \cap L_2)^\perp \in \mathcal{L}(V^*).$$

Entonces,

$$L_1^\perp + L_2^\perp \subset (L_1 \cap L_2)^\perp.$$

(2.2) Vamos a ver que $(L_1 \cap L_2)^\perp \subset L_1^\perp + L_2^\perp$. Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\}$ base de $L_1 \cap L_2$ y sean $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{r+p}\}$ y $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \vec{w}_{r+1}, \ldots, \vec{w}_{r+q}\}$ bases de L_1 y L_2, respectivamente. Sea

$$\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{r+p}, \vec{w}_{r+1}, \ldots, \vec{w}_{r+q}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\},$$

base de V. Si $\lambda \in (L_1 \cap L_2)^\perp$, tenemos que ver que existen $\lambda_1 \in L_1^\perp, \lambda_2 \in L_2^\perp$ tales que $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Para $\forall i = 1, \ldots, r$ defino

$$\lambda_1(\vec{u}_i) = 0 \quad \text{y} \quad \lambda_2(\vec{u}_i) = 0.$$

De esta manera, $(\lambda_1 + \lambda_2)(\vec{u}_i) = 0$. Para $L = r+1, \ldots, r+p$ y $\vec{u}_L \in L_1$ defino

$$\lambda(\vec{u}_L) \in \mathbb{K},\ \lambda_1(\vec{u}_L) = 0,\ \lambda_2(\vec{u}_L) = \lambda(\vec{u}_L).$$

Similarmente, para $L = r+1, \ldots, r+q$,

$$\lambda(\vec{w}_L) \in \mathbb{K},\ \lambda_1(\vec{w}_L) = \lambda(\vec{w}_L),\ \lambda_2(\vec{w}_L) = 0.$$

□

Teorema 2.19. Sea $L \in \mathcal{L}(V)$, entonces

$$\dim L^\perp = \dim V - \dim L.$$

Observación 2.9. Tenemos que

$$\left(L^{\perp}\right)^{\perp} = \theta\left(L\right).$$

Demostración. Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\}$ base de L, $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V y $\left\{\omega^1, \ldots, \omega^n\right\}$ su base dual. Entonces tenemos ya que $\left\{\omega^{r+1}, \ldots, \omega^n\right\}$ son linealmente independientes. Vamos a ver que son sistema de generadores,

$$\forall \lambda \in L^{\perp} \in \mathcal{L}\left(V\right), \exists a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}, .$$

$$\lambda = a_1\omega^1 + \cdots + a_n + \omega^n.$$

Tenemos que $\forall i = 1, \ldots, r$,

$$0 = \lambda\left(\vec{u}_i\right) = a_1\omega^1\left(\vec{u}_i\right) + \cdots + a_i\omega^i\left(\vec{u}_i\right) + \cdots + a_r\omega^r\left(\vec{u}_i\right) + \cdots + a_n\omega^n\left(\vec{u}_i\right) = a_i.$$

Así,

$$\lambda = a_{r+1}\omega^{r+1} + \cdots + a_n\omega^n.$$

□

Observación 2.10. Tenemos que

$$\dim L = \dim \theta\left(L\right) = \dim\left(L^{\perp}\right)^{\perp}.$$