Cálculo Diferencial

Victoria Torroja Rubio

8/9/2025

Índice general

Profesor: Jesús Jaramillo

Despacho: 305-E

Correo: jaramil@mat.ucm.es

Contenido:

- Topología de los espacios métricos (Cap 1-5) - Aprox: 6'5 semanas
- Cálculo diferencial en varias variables (Cap 6-11) - Resto

Bibliografía:

- Marsdem-Hoffman (sirve para las dos partes): 'Análisis clásico elemental'
- K. Smith (la parte de integración es más avanzada): 'Primer of modern analysis'

Materiales Campus:

- Apuntes de Victor Sánchez (apuntes muy condensados)
- Manual de Ansemil-Ponte (versión extendida de Marsden-Hoffman)
- Curso de Daniel Azagra

Capítulo 1

Espacios métricos

Definición 1.1 (Espacio métrico). Un **espacio métrico** es un par (X, d) donde X es un conjunto no vacío y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una función que se llama **distancia** o **métrica**, tal que:

1. $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$.
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in X$.
4. (Propiedad triangular) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $\forall x, y, z \in X$.

Ejemplo. Algunos ejemplos de espacios métricos son:

1. Consideremos $(\mathbb{R}, d)$ donde $d(x, y) = |x - y|$.
2. La distancia euclídea en $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$:
$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$
3. La 'métrica del taxi' en $\mathbb{R}^2$ con distancia:
$$d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$
4. Distancias geodésicas: el camino más corto (por ejemplo, en una superficie esférica el camino más corto entre dos puntos es un arco de circunferencia).
5. Distancias en $\mathbb{R}^n$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, consideramos la distancia euclídea
$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

También podemos generalizar la 'métrica del taxi':

$$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|.$$

También se puede considerar la métrica

$$d_\infty(x,y) = \text{máx}\{|x_i - y_i| \ : \ 1 \leq i \leq n\}.$$

Definición 1.2 (Espacio discreto)**.** Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto cualquiera, y definimos $\forall x, y \in X$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y \\ 1, & \text{si } x \neq y \end{cases}.$$

Se dice que d es la **métrica discrecta** y (X,d) el **espacio métrico discreto**.

Definición 1.3 (Subespacio métrico)**.** Sea (X,d) un espacio métrico y sea $Y \subset X$. Se define la **métrica relativa** (o **restringida**) a Y como $d_Y(y,y') = d(y,y')$, $\forall y, y' \in Y$. Entonces, (Y, d_Y) es un espacio métrico que llamaremos **subespacio** de X.

1.1. Espacios normados

Definición 1.4 (Espacio normado)**.** Un **espacio normado** es un par $(E, \|\cdot\|)$ donde E es un espacio vectorial y $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ es una función que se llama **norma** tal que:

1. $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in E$.
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E$ [a].
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in E$.

[a] En este curso $\mathbb{K}$ va a ser principalmente $\mathbb{R}$.

Proposición 1.1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Si definimos

$$d(x,y) = \|x - y\|, \forall x, y \in E,$$

se obtene que d es una distancia en E, que se llama **asociada** a la norma.

Demostración. Demostremos todas las propiedades de las métricas:

1. Tenemos que $d(x,y) = \|x - y\| \geq 0$, $\forall x, y \in E$.
2. $d(x,y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$.
3. $d(x,y) = \|y - x\| = |-1| \, \|x - y\| = \|x - y\| = d(x,y)$.

4. $d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y)$.

□

Observación. En $\mathbb{R}^n$, dado $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se definen:

$$\text{(Norma euclídea)} \quad \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|.$$

$$\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_i| \ : \ 1 \leq i \leq n\}.$$

Proposición 1.2 (Relación entre las normas en $\mathbb{R}^n$)**.** $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

Demostración. Supongamos que $|x_{i_0}| = \|x\|_\infty$. Entonces, tenemos que

$$|x_{i_0}|^2 \leq |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2.$$

Dado que la función de la raíz es creciente, tenemos que

$$\|x\|_\infty = |x_{i_0}| \leq \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} = \|x\|_2.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\|x\|_1^2 = (|x_1| + \cdots + |x_n|)^2 = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 + C^1 \geq |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 = \|x\|_2^2.$$

Finalmente, tenemos que

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n| \leq |x_{i_0}| + \cdots + |x_{i_0}| = n\,|x_{i_0}| = n\|x\|_\infty.$$

□

Definición 1.5. Dos normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ en un mismo espacio vectorial E son **equivalentes** cuando existen $m, M > 0$ tales que

$$m\|x\|' \leq \|x\| \leq M\|x\|', \ \forall x \in E.$$

Observación. Hemos visto en la proposición anterior que $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ son equivalentes en $\mathbb{R}^n$.

---

[1] $C \geq 0$.

Definición 1.6 (Producto escalar). Sea E un espacio vectorial real. Un **producto escalar** en E es una forma bilineal, simétrica y definida positiva. Es decir, una aplicación $\langle , \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ tal que

1. $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$, $\forall x, y, z \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\forall x, y \in E$.
3. $\forall x \in E$, $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

Observación. En este caso, denotaremos $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Teorema 1.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Sea E un espacio vectorial dotado de un producto escalar $\langle , \rangle$. Entonces

$$| \langle x, y \rangle | \leq \|x\| \cdot \|y\|, \ \forall x, y \in E.$$

Demostración. **Caso 1.** Si $x = 0$ o $y = 0$, obtenemos la igualdad.

Caso 2. Si $y \neq 0$, tenemos que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle = \langle x, x \rangle + \alpha \langle x, y \rangle + \alpha \langle y, x \rangle + \alpha^2 \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\alpha \langle x, y \rangle + \alpha^2 \|y\|^2.$$

Tomamos $\alpha = -\dfrac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$. Así, tenemos que

$$0 \leq \|x\|^2 - \frac{2 \langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} + \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^4} \|y\|^2 = \|x\|^2 - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2}.$$

Así, tenemos que $\dfrac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} \leq \|x\|^2$, por lo que $\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$ y tenemos que $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

$\square$

Proposición 1.3. Sea E un espacio vectorial dotado de un producto escalar $\langle , \rangle$. Entonces, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, es una norma en E, que se dice asociada a $\langle , \rangle$.

Demostración. Comprobamos que se cumplen las propiedades de las normas:

1. Tenemos que claramente $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$, $\forall x \in E$.
2. $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.
3. $\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle = \lambda^2 \|x\|^2$. Tomando la raíz cuadrada, $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.

4. Si $x, y \in E$,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle &= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 .\end{aligned}$$

Tomando raíces, tenemos que se verifica la propiedad triangular: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$\square$

1.2. Bolas en un espacio métrico

Definición 1.7. Sea (X, d) un espacio métrico y consideramos $a \in X$, $r > 0$. Se definen como **bola abierta** de centro a y radio r al conjunto

$$B(a, r) = \{x \in X \ : \ d(x, a) < r\} .$$

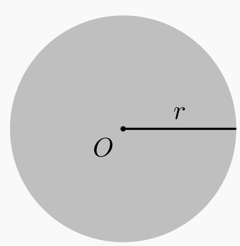
Similarmente, se llama **bola cerrada** de centro a y radio r al conjunto

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in X \ : \ d(x, a) \leq r\} .$$

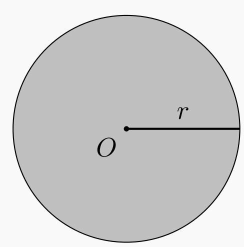
Ejemplo. Considermos bolas en $\mathbb{R}^2$ de distintas normas.

1. Consideremos bolas abiertas y cerradas con la métrica euclídea:

$$B_2((0,0), r) = \left\{(x, y) \ : \ \sqrt{x^2+y^2} < r\right\}, \ \overline{B}_2((0,0), r) = \left\{(x, y) \ : \ \sqrt{x^2+y^2} \leq r\right\}.$$



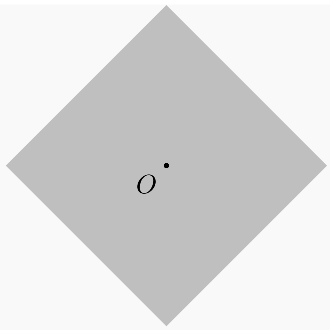
$B_2((0,0), r)$



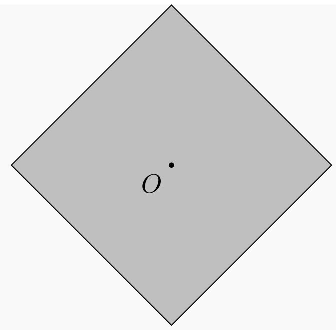
$\overline{B}_2((0,0), r)$

2. Consideremos bolas abiertas y cerradas con la métrica 'del taxi':

$$B_1((0,0), r) = \{(x, y) \ : \ |x| + |y| < r\}, \ \overline{B}_1((0,0), r) = \{(x, y) \ : \ |x| + |y| \leq r\}.$$



$B_1((0,0),r)$

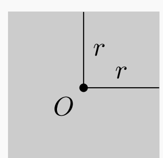


$\overline{B}_1((0,0),r)$

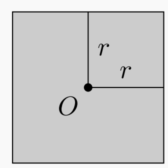
3. Consideremos bolas abiertas y cerradas con la métrica infinita:

$$B_\infty\left((0,0)\,,r\right) = \{(x,y)\ :\ \text{máx}\{|x|\,,|y|\} < r\} = \{(x,y)\ :\ |x|\,,|y| < r\}\,.$$

$$\overline{B}_\infty\left((0,0)\,,r\right) = \{(x,y)\ :\ \text{máx}\{|x|\,,|y|\} \leq r\} = \{(x,y)\ :\ |x|\,,|y| \leq r\}\,.$$



$B_\infty((0,0),r)$



$\overline{B}_\infty((0,0),r)$

Observación. En $(\mathbb{R},|\cdot|)$ se tiene que $B\left(0,r\right) = (-r,r)$ y $\overline{B}\left(0,r\right) = [-r,r]$. Similarmente, tenemos que $B\left(a,r\right) = (a-r,a+r)$ y $\overline{B}\left(a,r\right) = [a-r,a+r]$.

Observación (Relación de las bolas en $\mathbb{R}^n$). Sabemos que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

Por tanto, tenemos que

$$B_1\left(a,r\right) \subset B_2\left(a,r\right) \subset B_\infty\left(a,r\right) \subset B_1\left(a,nr\right)\,^a.$$

En efecto, si $x \in B_1\left(a,r\right)$, tenemos que $\|x-a\|_1 < r$. Por tanto, es fácil ver que $\|x-a\|_2 \leq \|x-a\|_1 < r$, por lo que $x \in B_2\left(a,r\right)$. El resto de inclusiones se deducen de forma análoga.

[a] También se puede escribir $B_\infty\left(a,nr\right) \subset B_1\left(a,r\right) \subset B_2\left(a,r\right) \subset B_\infty\left(a,nr\right)$.

Definición 1.8. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se define el **diámetro** de A como

$$diam\,(A) = \sup\{d\,(x, y)\ :\ x, y \in A\} \in [0, \infty).$$

Se dice que A es **acotado** si $diam\,(A) < \infty$.

Proposición 1.4. Dado un espacio métrico (X, d) con $A \subset X$, tenemos que A está acotado si y solo si A está contenido en alguna bola.

Demostración. **(i)** Supongamos que A está acotado, entonces $diam\,(A) = r < \infty$. Así, tenemos que si $x \in A$, etonces $\forall a \in A$ se tiene que $d\,(a, x) \leq r$, por lo que $A \subset \overline{B}\,(a, r)$. También podemos ver que lo contiene una bola abierta: $A \subset \overline{B}\,(a, r) \subset B\,(a, r+1)$.

(ii) Si A está contenido en una bola, tenemos que existe $x \in X$ y $\frac{r}{2} > 0$ tal que $A \subset B\left(x, \frac{r}{2}\right)$. De esta manera, si $a, b \in A$ se tiene que

$$d\,(a, b) \leq d\,(a, x) + d\,(x, b) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Así, se tiene que $\forall a, b \in A$, $d\,(a, b) < r$, por lo que $diam\,(A) \leq r < \infty$, por lo que A está acotado.

□

1.3. Conceptos topológicos

Definición 1.9 (Conjunto abierto)**.** Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que A es un **conjunto abierto** si $\forall a \in A, \exists r > 0$ tal que $B\,(a, r) \subset A$.

Proposición 1.5. Toda bola abierta es un conjunto abierto.

Demostración. Tomemos $A = B\,(a, R)$ y $x \in B\,(a, R)$. Sea $\delta = d\,(x, a) < R$ y $r = R - \delta > 0$ [2]. Sea $y \in B\,(x, r)$, tenemos que $d\,(x, y) < r$. Así,

$$d\,(y, a) \leq d\,(y, x) + d\,(x, a) < r + \delta = R.$$

Así, $y \in B\,(a, R)$, por lo que $B\,(x, r) \subset B\,(a, R)$. □

Ejemplo. En $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\right)$.

1. Consideremos $A = \{(x, y)\ :\ 0 < x < 1\}$. Vamos a ver que es abierto. Si $a \in A$, sea $a = (x, y)$ y consideramos $r = \text{mín}\{x, 1 - x\}$. Entonces, tenemos que $B_2\,(a, r) \subset$

[2] No hace falta de escribir $r = \text{mín}\{R - \delta, \delta\}$ al tratarse de una bola.

A, en efecto, si $(x', y') \in B_2(a, r)$:

$$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} < r \Rightarrow |x - x'| < r \Rightarrow 0 < x' < 1.$$

Así, tenemos que $(x', y') \in A$.

2. Consideremos $A = \{(x, y) \ : \ 0 < x \leq 1\}$. Vamos a ver que no es abierto. En efecto, si tomamos $a = (1, 0)$ y $r > 0$, tenemos que $\left(1 + \frac{r}{2}, 0\right) \in B_2(a, r)$ pero $\left(1 + \frac{r}{2}, 0\right) \notin A$.

Proposición 1.6. En $\mathbb{R}^n$ los conjuntos abiertos coinciden para $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$.

Demostración. Como se vio en una observación anterior, sabemos que

$$B_1(a, r) \subset B_2(a, r) \subset B_\infty(a, r) \subset B_1(a, nr).$$

- Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Si A es abierto con la norma $\|\cdot\|_2$, tenemos que $\forall a \in A, \exists r > 0$ tal que $B_2(a, r) \subset A$. Por la observación, como $B_1(a, r) \subset B_2(a, r) \subset A$, tenemos que también es abierto para la norma $\|\cdot\|_1$.
- Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Si A es abierto con la norma $\|\cdot\|_\infty$, entonces $\forall a \in A, \exists r > 0$ tal que $B_\infty(a, r) \subset A$. Por la observación anterior, tenemos que $B_2(a, r) \subset B_\infty(a, r) \subset A$, por lo que A es abierto respecto a la norma $\|\cdot\|_2$.
- Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Si A es abierto respecto de $\|\cdot\|_1$, tenemos que $\forall a \in A, \exists r > 0$ tal que $B_1(a, r) \subset A$. Sea $r' = \frac{r}{n} > 0$,

$$B_\infty(a, r') \subset B_1(a, nr') = B_1(a, r) \subset A.$$

Por tanto, A es abierto respecto de la norma $\|\cdot\|_\infty$.

□

Teorema 1.2 (Propiedades de los abiertos)**.** Sea (X, d) un espacio métrico.

1. X y $\emptyset$ son abiertos.
2. La unión arbitraria de abiertos es abierto.
3. La intersección finita de abiertos es abierto.

Demostración.

1. Es trivial que $\emptyset$ es abierto. Por otro lado, si $a \in X$, tenemos que $\forall r > 0$, $B(x, r) \subset X$. Así, X está abierto.
2. Supongamos que $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos abiertos y sea $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Si $a \in A$, tenemos que $a \in A_i$ para algún $i \in I$. Así, existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i$. Por tanto, $B(a, r) \subset A$ y A es abierto.

3. Sean $A_1, \dots, A_m$ conjuntos abiertos y sea $A = A_1 \cap \cdots \cap A_m$. Si $a \in A$, tenemos que $a \in A_i$ para $1 \leq i \leq m$. Así, existe $r_i > 0$ tal que $B(a, r_i) \subset A_i$. Si tomamos $r = \text{mín}\{r_i : 1 \leq i \leq m\}$, tenemos que $B(a, r) \subset B(a, r_i)$, $\forall i = 1, \dots, m$. Por tanto, $B(a, r) \subset A$ y A es abierto.

$\square$

Observación. La intersección infinita de conjuntos abiertos puede no ser abierto. Por ejemplo, consideremos en $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ consideramos $A_m = B_2\left((0,0), \frac{1}{m}\right)$, que es abierto $\forall m \in M$. Sin embargo, $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m = \{(0,0)\}$, que no es abierto.

Definición 1.10 (Conjunto cerrado). Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que un conjunto $C \subset X$ es **cerrado** si X/C es abierto.

Proposición 1.7. Toda bola cerrada es un conjunto cerrado.

Demostración. En efecto, sea $C = \overline{B}(p, R) = \{x \in X : d(x,p) \leq R\}$ y sea $A = X/C = \{x \in X : d(x,p) > R\}$. Si $a \in A$, tenemos que $d(a,p) = \delta > R$. Así, tomando $r = \delta - R > 0$, si $x \in B(a, r)$, tenemos que

$$d(x,p) \geq d(p,a) - d(x,a) > \delta - r = R.$$

Así, tenemos que $x \in A$, por lo que $B(a, r) \subset A$ y X/C es abierto, por lo que C es cerrado. $\square$

Observación. Es fácil ver que en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$:

- (a, b) es abierto.
- $[a, b]$ es cerrado.
- $(a, b]$ y $[a, b)$ no son ni abiertos ni cerrados.

Teorema 1.3 (Propiedades de los cerrados). Sea $(X, \emptyset)$ un espacio métrico.

1. Los conjuntos X y $\emptyset$ son cerrados.
2. La intersección arbitraria de cerrados es cerrado.
3. La unión finita de cerrados es cerrado.

Demostración. 1. Dado que $\emptyset = X/X$ y $X = X/\emptyset$, del teorema anterior se sigue que son cerrados.

2. Sean $\{C_i\}_{i\in I}$ cerrados. Entonces, $\forall i \in I$ tenemos que X/C_i es abierto, así,
$$X/\bigcap_{i\in I} C_i = \bigcup_{i\in I} (X/C_i)\,,$$
que es abierto, por lo que $\bigcap_{i\in I} C_i$ es cerrado.

3. Sean $C_1, \ldots, C_m$ cerrados. Entonces, $\forall i = 1, \ldots, m$, tenemos que X/C_i es abierto. Así,
$$X/\bigcup_{i=1}^{m} C_i = \bigcap_{i=1}^{m} (X/C_i)\,,$$
es abierto, por lo que $\bigcup_{i=1}^{m} C_i$ es cerrado.

□

Definición 1.11 (Punto interior). Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que $a \in A$ es un **punto interior** de A si existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A$. Denotamos $\operatorname{Int}(A)$ al conjunto de puntos interiores de A.

Observación. Es trivial ver que $\operatorname{Int}(A) \subset A$.

Proposición 1.8. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$.

1. El conjunto $\operatorname{Int}(A)$ es el mayor abierto contenido en A.

2. A es abierto si y solo si $A = \operatorname{Int}(A)$.

Demostración. 1. Sea $U = \operatorname{Int}(A)$. Vamos a ver que es abierto. Dado $x \in U$, tenemos que existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$. Si $y \in B(x, r)$, por tratarse de una bola abierta existe $r' > 0$ tal que $B(y, r') \subset B(x, r) \subset A$, por lo que $y \in \operatorname{Int}(A) = U$. Por tanto, $B(x, r) \subset U$ y U es abierto.
Ahora tenemos que ver que es el mayor abierto. Supongamos que V es abierto y $V \subset A$. Sea $x \in V$, tenemos que existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset V \subset A$. Por tanto, $x \in \operatorname{Int}(A) = U$ y $V \subset U$.

2. Si $A = Int(A)$ está claro que A es abierto. Recíprocamente, si A es abierto, tenemos que como A es el mayor abierto contenido en A, $A = Int(A)$.

□

Ejemplo. En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, sea $A = (0, 2]$. Tenemos que $\operatorname{Int}(A) = (0, 2)$. En efecto,

(i) Si $x \in (0, 2)$, entonces existe $r > 0$ tal que $(x - r, x + r) \subset (0, 2) \subset (0, 2]$, por lo que $x \in \operatorname{Int}(A)$.

(ii) Recíprocamente, tenemos que $2 \notin \operatorname{Int}(A)$, puesto que $\forall r > 0$ tenemos que $(2 - r, 2 + r)$

no es subconjunto de $(0,2]$.

Definición 1.12 (Punto adherente)**.** Sean (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que $x \in X$ es **punto adherente** a A (o también **punto clausura**) si $\forall r > 0$, $A \cap B(x,r) \neq \emptyset$. Denotamos $\overline{A}$ o $Adh(A)$ al conjunto de puntos adherentes de A.

Observación. Se ve trivialmente que $A \subset \overline{A}$.

Ejemplo. En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sea $A = (0,2]$. Tenemos que $\overline{A} = [0,2]$. En efecto:

(i) Tenemos que $0 \in \overline{A}$, puesto que $\forall r > 0$ tenemos que $(-r,r) \cap A \neq \emptyset$. Así, tenemos que $[0,2] \subset \overline{A}$.

(ii) Recíprocamente, si $x > 2$, tenemos que existe $r > 0$ suficientemente pequeño tal que $x - r > 2$, por tanto $x \notin \overline{A}$. Similarmente, podemos demostrar que $0 \notin \overline{A}$.

Lema 1.1. Sean (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entcones, $\overline{A} = X / \operatorname{Int}(X/A)$.

Demostración. **(i)** Sea $x \in \overline{A}$. Tenemos que $\forall r > 0$, $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$, por lo que $B(x,r) \not\subset X/A$, por lo que $x \notin \operatorname{Int}(X/A)$, por lo que $x \in X/\operatorname{Int}(X/A)$.

(ii) Sea $x \in X/\operatorname{Int}(X/A)$, entonces $x \notin \operatorname{Int}(X/A)$, es decir, $\forall r > 0$ tenemos que $B(x,r) \not\subset X/A$. Así, debe ser que $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$, por lo que $x \in \overline{A}$.

□

Proposición 1.9.

1. $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A.
2. Un conjunto $A \subset X$ es cerrado si y solo si $A = \overline{A}$.

Demostración.

1. Tenemos que $\overline{A} = X/\operatorname{Int}(X/A)$, por lo que su complementario es abierto y él es cerrado. Ahora vamos a ver que es el menor cerrado que contiene a A. Sea $C \subset X$ cerrado con $A \subset C$. Tenemos que $X/C \subset X/A$, por lo que $X/C \subset \operatorname{Int}(X/A)$ y tenemos que $C \supset X/\operatorname{Int}(X/A) = \overline{A}$.
2. Si $A = \overline{A}$, A es cerrado. Por otro lado, si A es cerrado, entonces su complementario, X/A es abierto, por lo que $X/A = \operatorname{Int}(X/A)$, por lo que $\overline{A} = X/\operatorname{Int}(X/A) = X/(X/A) = A$.

□

Definición 1.13 (Punto frontera)**.** Sean (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que $x \in X$ es un **punto frontera** de A si $\forall r > 0$, $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ y $B(x,r) \cap (X/A) \neq \emptyset$. Denotamos $Fr(A)$ o ∂A el conjunto de puntos frontera de A.

Observación. Tenemos que $Fr\,(A) = \overline{A} \cap \overline{X/A}$ y en particular $Fr\,(A)$ es cerrado.

Ejemplo. En $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\right)$ sea $A = \{(x,y)\ :\ 0 < x \leq 1\}$.Tenemos que

$$Fr\,(A) = \{(0,y)\ :\ y \in \mathbb{R}\} \cup \{(1,y)\ :\ y \in \mathbb{R}\}\,.$$

En efecto:

(i) Sea $P = (0,y)$. Tenemos que $\forall r > 0$, $B\,(P,r) \cap A \neq \emptyset$ y $B\,(P,r) \cap (X/A) \neq \emptyset$. Así, $P \in Fr\,(A)$. De forma análoga, se puede demostrar que $P = (1,y) \in Fr\,(A)$.

(ii) El recíproco lo demostramos típicamente por contrapositiva. Sea $P = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ con $x \neq 0$ y $x \neq 1$. Hay tres posibilidades a considerar: $x \in (-\infty, 0)$, $x \in (0,1)$ o $x \in (1,\infty)$. Si $x \in (-\infty, 0)$, $\exists r > 0$ tal que $B\,(P,r) \cap A = \emptyset$. El resto de los casos se demuestran de forma análoga.

Definición 1.14 (Punto de acumulación)**.** Sean (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que $x \in X$ es un **punto de acumulación** de A si $\forall r > 0$ se tiene que $A \cap (B\,(x,r) \,/\, \{x\}) \neq \emptyset$. Denotamos A' el conjunto de los puntos de acumulación de A.

Observación. Tenemos que $A' \subset \overline{A}$. En efecto, si $x \in A'$, tenemos que $\forall r > 0$ se cumple que $A \cap (B\,(x,r) \,/\, \{x\}) \neq \emptyset$, es decir, $A \cap B\,(x,r) \neq \emptyset$, por lo que $x \in \overline{A}$.

Ejemplo. Consideremos $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \subset \left(\mathbb{R}^2, d_2\right)$. Tenemos que

- $\text{Int}\,(A) = \emptyset$. En efecto, tenemos que $\forall r > 0$, si $n_0 = (n,n) \in \mathbb{N}^2$, existe $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ tal que $n < x < n + r$, por lo que $(x,x) \in B\,(n,r)$ pero $(x,x) \notin \mathbb{N}^2$.
- $\overline{A} = A$. En efecto, si $x \notin A$, tenemos que podemos encontrar $r > 0$ suficientemente pequeño tal que $B\,(x,r) \cap A = \emptyset$.
- $\partial A = A$. Dado que $A = \overline{A}$ y $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X/A}$, tenemos que $A \subset \partial A$. Por otro lado, si $x \notin A$, tenemos que existe un $r > 0$ suficientemente pequeño tal que $B\,(x,r) \cap A = \emptyset$, como hemos visto anteriormente, por lo que $x \notin \partial A$.
- $A' = \emptyset$. Si cogemos $r < 1$ y $n \in \mathbb{N}^2$, está claro que $(B\,(n,r) \,/\, \{n\}) \cap A = \emptyset$, por lo que n no puede ser un punto de acumulación. Si $x \notin A$, hacemos un argumento similar al del apartado anterior.

Definición 1.15 (Punto aislado)**.** Sean (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que $x \in A$ es un **punto aislado** de A si existe $r > 0$ tal que $B\,(x,r) \cap A = \{x\}$. Denotaremos $Ais\,(A)$ al conjunto de los puntos aislados de A.

Proposición 1.10. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces, se cumple que $\overline{A} = A' \cup Ais\,(A)$.

Demostración. **(i)** Sea $x \in \overline{A}$. Supongamos que $x \notin A'$, entonces existe $r > 0$ tal que $A \cap (B\,(x, r) \,/\, \{x\}) = \emptyset$. Sin embargo, sabemos que $A \cap B\,(x, r) \neq \emptyset$ al ser $x \in \overline{A}$, por tanto debe ser que $A \cap B\,(x, r) = \{x\}$, es decir, $x \in Ais\,(A)$.

(ii) Está claro que $Ais\,(A) \subset A \subset \overline{A}$ y $A' \subset \overline{A}$, por lo que $A' \cup Ais\,(A) \subset \overline{A}$.

□

Corolario 1.1. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces, A es cerrado si y solo si A contiene todos sus puntos de acumulación.

Demostración. **(i)** Tenemos que $A = \overline{A} = A' \cup Ais\,(A)$, por lo que $A' \subset A$.

(ii) Tenemos que $Ais\,(A) \subset A$ y $A' \subset A$, por lo que $\overline{A} = Ais\,(A) \cup A' \subset A$, así, $\overline{A} = A$.

□

Definición 1.16. Sean (x, d) un espacio métrico, $A \subset X$ y $x \in X$. Se define la **distancia** de x a A como:

$$d\,(x, A) = \inf \{d\,(x, a) \;:\; a \in A\}\,.$$

Proposición 1.11. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces,

$$\overline{A} = \{x \in X \;:\; d\,(x, A) = 0\}\,.$$

Demostración. **(i)** Sea $x \in \overline{A}$, entonces existe $r > 0$ tal que $A \cap B\,(x, r) \neq \emptyset$. Por tanto, existe $a_r \in A \cap B\,(x, r)$, por tanto $d\,(x, a_r) < r$. Así, tenemos que

$$d\,(x, A) \leq d\,(x, a_r) < r, \; \forall r > 0.$$

Por tanto, $d\,(x, A) = 0$.

(ii) Tenemos que $\forall r > 0$, $d\,(x, A) < r$, por lo que existe $a_r \in A$ tal que $d\,(x, a_r) < r$. Por tanto, $a_r \in A \cap B\,(x, r) \neq \emptyset$ y podemos concluir que $x \in \overline{A}$.

□

1.4. Conjuntos abiertos y cerrados relativos

Observación. Sean (X, d) un espacio métrico e $Y \subset X$. Sabemos que (Y, d_Y) es un subespacio métrico de (X, d) donde $d_Y\,(y_1, y_2) = d\,(y_1, y_2)$. Dado $y_0 \in Y$ y $r > 0$, la bola $B_Y\,(y_0, r) = \{y \in Y \;:\; d\,(y, y_0) < r\} = B\,(y_0, r) \cap Y$. Es decir, la forma de las bolas cambia.

Observación. En un espacio métrico (X, d), todo conjunto abierto es unión de bolas abiertas. En efecto, si A es abierto, entonces $\forall a \in A$, existe $r_a > 0$ tal que $B(a, r_a) \subset A$, por lo que $A = \bigcup_{a \in A} B(a, r_a)$ [a].

[a] Esta observación se puede reformular diciendo que un subconjunto $A \subset X$ es abierto si y solo si es unión de bolas abiertas.

Proposición 1.12. Sean (X, d) un espacio métrico e $Y \subset X$.

(a) $A \subset Y$ es d_Y-abierto si y solo si existe $U \subset X$ abierto tal que $A = U \cap Y$.

(b) $C \subset Y$ es d_Y-cerrado si y solo si existe $H \subset X$ cerrado tal que $C = H \cap Y$.

Estos conjuntos se llaman **abiertos y cerrados relativos** de Y, respectivamente.

Demostración. **(a)** Sea $Y \subset X$,

(i) Tenemos que $\forall y \in A$, existe $r_y > 0$ tal que $B_Y(y, r_y) \subset A$. Definimos $U = \bigcup_{y \in A} B(y, r_y)$, que es abierto en (X, d) por ser unión de bolas abiertas. Veamos que $A = U \cap Y$. Tenemos que si $y \in A$, entonces $y \in B(y, r_y) \subset A \subset U$ (puesto que $B_Y(y, r_y) \subset B(y, r_y)$). Recíprocamente, sea $z \in Y \cap U$, entonces existe $y \in Y$ tal que $z \in B(y, r_y) \cap Y = B_Y(y, r_y) \subset A$. Por tanto, $Y \cap U \subset A$.

(ii) Dado $y_0 \in A = U \cap Y$, como U es abierto [3], existe $r > 0$ tal que $B(y_0, r) \subset U$. Por tanto, tenemos que $B_Y(y_0, r) = B(y_0, r) \cap Y \subset U \cap Y = A$. Así, hemos visto que A es d_Y-abierto.

(b) Sea $Y \subset X$.

(i) Sea $C \subset Y$ d_Y-cerrado, entonces tenemos que Y/C es d_Y-abierto. Así, existe $U \subset X$ abierto tal que $Y/C = U \cap Y$. Sea $H = X/U$, que es cerrado. Veamos que $C = H \cap Y$:

$$C = Y/(Y/C) = Y/(U \cap Y) = Y/U = Y \cap (X/U) = Y \cap H.$$

(ii) Si $C = H \cap Y$ con H cerrado en X, entonces X/H es abierto. Tenemos que

$$Y/C = Y/(H \cap Y) = Y \cap (X/H).$$

Dado que X/H es abierto, por **(a)** tenemos que Y/C es d_Y-abierto, por lo que C es d_Y-cerrado.

□

1.5. Sucesiones en espacios métricos

[3] Cuando escribimos abierto y $B(x, r)$ queremos decir que es d-abierto y es la bola en X, respectivamente.

Definición 1.17 (Sucesión y convergencia). Sea (X, d) un espacio métrico. Una **sucesión** es una aplicación $S : \mathbb{N} \to X$. Si $S(n) = x_n \in X$, denotamos la sucesión por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** a $x_0 \in X$ cuando $d(x_n, x_0)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$

Observación. Recordamos que $x_n \to x_0$ si y solo si (ambas definiciones son equivalentes):

- $\forall\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene que $d(x_n, x_0) < \varepsilon$.
- $\forall\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene que $x_n \in B(x_0, \varepsilon)$.

Proposición 1.13. Sea (X, d) un espacio métrico. Si la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, el límite es único.

Demostración. Supongamos que $l_1, l_2 \in X$ son límites de la sucesión, entonces tenemos que si $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se cumple que

$$d(l_1, l_2) \leq d(l_1, x_n) + d(x_n, l_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, debe ser que $d(l_1, l_2) = 0$, por lo que $l_1 = l_2$. □

Proposición 1.14. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces, $x \in \overline{A}$ si y solo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $x_n \to x$.

Demostración. **(i)** Tenemos que si $x \in \overline{A}$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, es decir. Así, podemos coger una sucesión tal que para $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ se tiene que $x_n \in B\left(x, \dfrac{1}{n}\right) \cap A$. Vamos a ver que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.

$$0 \leq d(x_n, x) < \frac{1}{n} \Rightarrow d(x_n, x) \to 0 \iff x_n \to x.$$

(ii) Si existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $x_n \to x$, tenemos que si $r > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, $x_n \in B(x, r)$, es decir, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$, por lo que $x \in \overline{A}$.

□

Proposición 1.15. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces $x \in A'$ si y solo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de términos distintos con $x_n \to x$.

Demostración. **(i)** Si $x \in A'$, tenemos que $\forall r > 0$, $A \cap (B(x, r) / \{x\}) \neq \emptyset$.

- Para $n = 1$, tomamos x_1 tal que $x_1 \in A \cap (B(x, 1) / \{x\})$.

- Para $n = 2$, tomamos $\varepsilon = \text{mín}\left\{\frac{1}{2}, d(x_1, x)\right\}$, y tomamos x_2 tal que $x_2 \in A \cap (B(x,\varepsilon) / \{x\})$.
- Asumimos que tenemos $\{x_1, \ldots, x_n\}$ distintos como los hemos descrito anteriormente. Ahora, en el caso $n+1$, cogemos $\varepsilon = \text{mín}\left\{\frac{1}{n+1}, d(x_i, x)\right\}$ para $i = 1, \ldots, n$. Así, cogemos $x_{n+1} \in A \cap (B(x,\varepsilon) / \{x\})$. Obtenemos que

$$0 < d(x_{n+1}, x) < \frac{1}{n+1} < d(x_i, x), \ 1 \leq i \leq n.$$

  Así, está claro que $x_{n+1} \neq x_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Así, hemos construido la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que buscábamos. Tenemos que ver que la sucesión converge a x. En efecto, si $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, $\frac{1}{n} < \varepsilon$, por lo que $d(x_n, x) < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

(ii) Puesto que los elementos de la sucesión no se repiten, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq m$, $x_n \neq x$. Como la sucesión converge, si $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \geq m$ tal que $\forall n \geq n_0$, $A \cap (B(x_n, x) / \{x\}) \neq \emptyset$, por lo que $x \in A'$.

$\square$

Observación. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Tenemos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $x \in E$ si y solo si $\|x_n - x\| \to 0$.

Proposición 1.16. En $\mathbb{R}^n$ consideremos las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$x_k = \left(x_k^1 \ , \ \ldots \ , \ x_k^n\right),$$

y $x_n \to x = \left(x^1, \ldots, x^n\right) \in \mathbb{R}^n$. Entonces, la sucesión converge coordenada a coordenada, es decir, $x_k^i \to x^i$ para $1 \leq i \leq n$.

Demostración. Recordamos que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 < n\|x\|_\infty.$$

Así, tenemos que si $x_k \to x$,

$$\|x_k - x\|_\infty \leq \|x_k - x\|_2 \leq \|x_k - x\|_1 \leq n\|x_k - x\|_\infty.$$

Por tanto, la convergencia no depende de la métrica que escojamos. Así, para $1 \leq i \leq n$ tenemos que

$$\left|x_k^i - x^i\right| \leq \|x_k - x\|_2 \leq \left|x_k^1 - x^1\right| + \cdots + \left|x_k^n - x^n\right| \to 0.$$

$\square$

Definición 1.18 (Subsucesión). Sea sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, donde (X,d) es un espacio métrico. Una **subsucesión** es otra sucesión de la forma $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que n_k es estrictamente creciente.

Proposición 1.17. Sea (X,d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \to x$. Entonces, toda subsucesión converge a x.

Demostración. Sea $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Tenemos que si $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene que $d(x_n, x) < \varepsilon$. Como $n_k \to \infty$, podemos encontrar $n_{k_0} \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n_k \geq n_{k_0}$ se tenga que $n_k \geq n_0$, por lo que $\forall k \geq k_0$, tenemos que $d(x_k, x)$. Así, hemos visto que la subsucesión converge al mismo límite. ☐

1.6. Completitud

Definición 1.19 (Sucesión de Cauchy). Sea (X,d) un espacio métrico. Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X es una **sucesión de Cauchy** si $\forall\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m,n \geq n_0$, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Proposición 1.18. Toda sucesión convergente es de Cauchy.

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una sucesión convergente a $x_0 \in X$. Así, si $\varepsilon > 0$, tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Si $n, m \geq n_0$,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

☐

Definición 1.20 (Espacio completo). Se dice que un espacio métrico (X,d) es **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente en (X,d).

Teorema 1.4. El espacio $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es completo.

Ejemplo. Consideramos $X = \mathbb{Q}$ con la distancia usual. Entonces, $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ no es completo. Hay sucesiones $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ de Cauchy tales que $q_n \to x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Entonces la sucesión $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge en $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$. Como ejemplo se puede tomar la sucesión de los decimales de $\sqrt{2}$.

Corolario 1.2. El espacio $\mathbb{R}^n$ con la norma $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y con $\|\cdot\|_\infty$ también es completo.

Demostración. Recordamos que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

Por tanto una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ es de Cauchy para $\|\cdot\|_\infty$ si y solo si lo es para $\|\cdot\|_2$, si y solo si lo es para $\|\cdot\|_1$. Por ejemplo, para $\|\cdot\|_2$, si $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ es de Cauchy, entoces $\forall\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k, j \geq k_0$,

$$\left|x_k^i - x_j^i\right| \leq \|x_k - x_j\|_2 < \varepsilon, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Donde $x_m = \left(x_m^1, \ldots, x_m^n\right)$. Por tanto, cada componente $\left\{x_k^i\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, por lo que cada componente es convergente en $\mathbb{R}$ y la sucesión es convergente en $\mathbb{R}^n$. □

Ejemplo. Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Consideramos el siguiente espacio normado:

$$X = \mathcal{C}[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ continua en } [a, b]\}.$$

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| \ : \ t \in [a, b]\} = \text{máx}\{|f(t)| \ : \ t \in [a, b]\}.$$

Por ser f continua, la norma está bien definida. Se trata de una norma, puesto que:

- $\|f\|_\infty \geq 0$.
- $\|f\|_\infty = 0$ si y solo si $|f(t)| = 0, \forall t \in [a, b]$, es decir, $f = 0$.
- $\|\lambda f\|_\infty = \sup\{|\lambda f(t)| \ : \ t \in [a, b]\} = |\lambda| \sup\{|f(t)| \ : \ t \in [a, b]\} = |\lambda| \, \|f\|_\infty$.
- Comprobamos la propiedad triangular:

$$\begin{aligned}\|f + g\|_\infty &= \sup\{|f(t) + g(t)| \ : \ t \in [a, b]\} \\ &\leq \sup\{|f(t)| \ : \ t \in [a, b]\} + \sup\{|g(t)| \ : \ t \in [a, b]\} = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.\end{aligned}$$

Podemos observar que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to f$ en $\|\cdot\|_\infty$ si y solo si $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Es decir, si $\forall\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$: $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$. Esto es cierto si y solo si $\forall\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene que $|f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon$, $\forall t \in [a, b]$. Es decir, si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en $[a, b]$ a f.

Otra observación que podemos hacer es que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy con $\|\cdot\|_\infty$ si y solo si $\forall\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq n_0$ se tiene que $\|f_m - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$, si y solo si $\forall\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq n_0$, $|f_n(t) - f_m(t)| \leq \varepsilon$, $\forall t \in [a, b]$. Así, podemos decir que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es **uniformemente de Cauchy**.

Teorema 1.5. El espacio $(\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ es completo.

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy para $\|\cdot\|_\infty$. Tenemos que

$$\forall t \in [a, b], \ |f_n(t) - f_m(t)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty.$$

Luego, $\forall t \in [a,b]$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, por lo que existe $a_t \in \mathbb{R}$ tal que $\{f_n(t)\} \to a_t$. Definimos la función

$$\begin{aligned} f : [a,b] &\to \mathbb{R} \\ t &\to a_t. \end{aligned}$$

Vamos a ver que $f_n \to f$ en $\|\cdot\|_\infty$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n,m \geq n_0$, tenemos que

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \varepsilon, \ \forall t \in [a,b].$$

Si cogemos $m \to \infty$, tenemos que

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon, \ \forall t \in [a,b], \forall n \geq n_0.$$

Así, tenemos que $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$. Por tanto, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f uniformemente en $[a,b]$. Como el límite de una sucesión de funciones continuas es una función continua, tenemos que $f \in \mathcal{C}[a,b]$. □

Proposición 1.19. Sea (X,d) un espacio métrico completo y sea $Y \subset X$. Entonces, (Y,d_Y) es completo si y solo si Y es cerrado en X.

Demostración. **(i)** Sea (Y,d_Y) completo. Vamos a ver que Y es cerrado. Sea $x \in \overline{Y}$, por lo que $\exists \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ tal que $y_n \to x$. Por tanto, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en X e Y. Luego, existe $y_0 = x = \lim\limits_{n\to\infty} y_n \in Y$, por lo que $x \in Y$. Así, tenemos que $\overline{Y} \subset Y$ y por tanto Y es cerrado.

(ii) Supongamos que Y es cerrado en X. Sea $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (Y,d_Y)$ sucesión de Cauchy. Entonces, $\forall\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n,m \geq n_0$ $d_Y(y_n,y_m) < \varepsilon$. Por ser de Cauchy en (X,d), existe $x \in X$ tal que $y_n \to x$. Por tanto, tenemos que $x \in \overline{Y} = Y$, por lo que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en Y.

□

Lema 1.2. En un espacio métrico (X,d), toda sucesión de Cauchy está acotada.

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. Entonces, si cogemos $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene que $d(x_n, x_{n_0}) < 1$. Podemos tomar

$$R = \max\{d(x_1,x_{n_0}), d(x_2,x_{n_0}), \ldots, d(x_{n_0-1},x_{n_0}), 1\}.$$

Entonces, tenemos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B(x_{n_0}, R)$. □

Lema 1.3. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de Cauchy en un espacio métrico (X,d). Si existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a $x \in X$, entonces toda la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq n_0$, $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. También existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \geq k_0$, $d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $n_0 = \max\{n_0, n_{k_0}\}$ y sea $n \geq n_0$,

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

1.7. Compacidad y recubrimientos

Teorema 1.6 (Teorema de Bolzano-Weierstrass)**.** Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}$ admite una subsucesión convergente.

Corolario 1.3. En $\mathbb{R}^n$ [a] , toda sucesión acotada admite una subsucesión convergente.

[a] Con las normas $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ o $\|\cdot\|_\infty$.

Demostración. El caso general es un poco tedioso, por lo que solo haremos la demostración cuando $n = 2$.
Sea $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ acotada, por lo que existe $R > 0$ tal que $|x_n|, |y_n| \leq R$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ está acotada, existe $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a $x_0 \in \mathbb{R}$. Consideramos $\{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ está acotada, existe $\{y_{n_{k_j}}\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergente a $y_0 \in \mathbb{R}$. Así, tenemos que $(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de (x_n, y_n) y $(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) \to (x_0, y_0)$. □

Definición 1.21 (Conjunto compacto)**.** Sea (X, d) un espacio métrico y sea $K \subset X$. Se dice que K es **compacto** si toda sucesión en K admite una subsucesión convergente en K.

Lema 1.4. Sean (X, d) un espacio métrico y $K \subset X$ compacto. Entonces K es cerrado y acotado en (X, d).

Demostración. **(i)** Supongamos que K no es acotado. Si fijamos $x_0 \in X$ y sabemos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $K \not\subset B(x_0, n)$. Por tanto, existe $x_n \in K$ tal que $d(x_n, x_0) \geq n$. Por tanto, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ y $d(x_n, x_0) = \infty$, por lo que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada. Además, para toda subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$, se tiene que $d\left(x_{n_j}, x_0\right) = \infty$, por lo que $\left\{x_{n_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ no es acotada, por lo que no es convergente. Por tanto, K no es compacto.

(ii) Supongamos que K no es cerrado. Es decir, existe $x \in \overline{K}/K$. Así, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ con $x_n \to x \notin K$. Además, para toda subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ se tiene que $x_{n_j} \to x \notin K$. Es decir, todas las subsucesiones de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen fuera de K, por lo que K no es compacto.

□

Teorema 1.7. En $\mathbb{R}^n$ (con $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ o $\|\cdot\|_\infty$) un subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y solo si K es cerrado y acotado.

Demostración. **(i)** Es trivial a partir del lema anterior.

(ii) Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y acotado. Sea $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión en K. Entonces, $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ está acotada y por tanto existe una subsucesión $\{x_{n_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ convergente a $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Entonces, $x_0 \in \overline{K} = K$ puesto que K es cerrado. Entonces, K es compacto.

□

Ejemplo. El recíproco del lema anterior no es cierto. Consideremos por ejemplo (X, d) donde $X = \mathbb{N}$ y d es la métrica discreta. El conjunto de todos los números naturales es cerrado y acotado (tal y como lo hemos definido). Sin embargo, no es compacto.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a $x \in \mathbb{N}$. Entonces, tenemos que $\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$, $d(x_n, x) < \varepsilon$. Esto solo sucede si existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, $x_n = x$.

Por tanto, la sucesión $\{n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ está acotada pero no es convergente (puesto que no cumple la condición de convergencia que hemos visto anteriormente) y no tiene subsucesiones convergentes.

Definición 1.22 (Recubrimiento)**.** Sean (X, d) un espacio métrico y $M \subset X$.

(a) Un **recubrimiento** de M es una familia $\{U_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X que **recubre** M en el sentido de que $M \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Se dice que el recubrimiento es **abierto** si cada U_i es un conjunto abierto en X.

(b) Un **sub-recubrimiento** de $\{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de la forma $\{U_j\}_{j\in J}$ donde $J \subset I$ y tal que $M \subset \bigcup_{j\in J} U_j$.

Teorema 1.8. Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subset X$. Entonces K es compacto si y solo si todo recubrimiento abierto de K admite un subrecubrimiento finito.

Demostración. Por simplicidad, vamos a ver la demostración en el caso particular $X = \mathbb{R}^n$ con la norma euclídea.

(i) Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto y sea $U = \{U_i : i \in I\}$ un recubrimiento abierto de K. Consideremos la familia auxiliar $\mathcal{B}$ de todas las bolas abiertas de la forma $B(q, r)$, donde $q \in \mathbb{Q}^n$ y $r \in \mathbb{Q}^+$, tales que $B(q, r)$ esté contenida en alún U_i. Como $\mathbb{Q}$ es numerable, $\mathbb{Q}^n$ también lo es, por lo que $\mathcal{B}$ es numerable y se puede escribir $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$.

En primer lugar, veamos que $K \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$. En efecto, dado $x \in K$, existe $i \in I$

tal que $x \in U_i$, que es abierto, por lo que existe $r' > 0$ tal que $B(x, r') \subset U_i$. Tomamos $r \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < r < \dfrac{r'}{2}$ y, como $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$ se tiene que $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$, por lo que podemos elegir $q \in \mathbb{Q}^n \cap B(x, r)$. Entonces, $x \in B(q, r) \subset B(x, r') \subset U_i$. Por tanto $B(q, r) \in \mathcal{B}$ y $K \subset \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} B_j$.

Ahora, veamos $\mathcal{B}$ admite un subrecubrimiento finito de K. Procedamos por reducción al absurdo. Si no fuera así, tendríamos que

- $K \not\subset B_1$, luego existe $x_1 \in K$ tal que $x_1 \notin B_1$.
- $K \not\subset B_1 \cup B_2$, luego existe $x_2 \in K$ con $x_2 \notin B_1 \cup B_2$.
- $\forall m \in \mathbb{N}$, $K \not\subset B_1 \cup \cdots \cup B_m$, por lo que existe $x_m \in K$ con $x_m \notin B_1 \cup \cdots \cup B_m$.

Así, obtenemos la sucesión $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset K$. Por ser K compacto, existe $\{x_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $x_{m_k} \to x \in K \subset \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} B_j$. Por tanto, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_{j_0}$ bola abierta, por lo que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ con $x_{m_k} \in B_{j_0}$, $\forall k \geq k_0$. Tomamos ahora $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq k_0$ y $m_k > j_0$. Entonces, tenemos que $x_{m_k} \in B_{j_0}$ y $x_{m_k} \notin B_1 \cup \cdots \cup B_{m_k}$, en particular $x_{m_k} \notin B_{j_0}$, que es una contradicción. Por tanto, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que

$$K \subset B_1 \cup \cdots \cup B_l.$$

Anteriormente vimos que $B(q, r) \subset U_i$, por lo que tenemos que para cada $j = 1, \ldots, l$, existe $i_j \in I$ tal que $B_j \subset U_{i_j}$. Entonces,

$$K \subset B_1 \cup \cdots \cup B_l \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_l}.$$

Así, hemos encontrado un recubrimiento finito.

(ii) Veamos que si $K \subset \mathbb{R}^n$ no es compacto, entonces existe algún recubrimiento abierto de K que no admite un subrecubrimiento finito. Existen dos posibles casos:

Caso 1. Supongamos que K no es acotado. Tenemos que $\mathbb{R}^n = \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} B(0, j)$, luego $K \subset \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} B(0, j)$. Tenemos que $U = \{B(0, j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ es un recubrimiento abierto de K, que no admite ninún subrecubrimiento finito, puesto que $B(0, 1) \cup \cdots \cup B(0, k)$ es acotado.

Caso 2. Supongamos que K no es cerrado. Tenemos que existe $x_0 \in \overline{K}/K$. Consideremos $U_j = \mathbb{R}^n / \overline{B}\left(x_0, \dfrac{1}{j}\right)$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Tenemos que

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j = \mathbb{R}^n / \{x_0\}.$$

Luego, $K \subset \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} U_j$ que es un recubrimiento abierto de K, pero no admite ningún subrecubrimiento finito,

$$K \not\subset U_1 \cup \cdots \cup U_k = \mathbb{R}^n / \overline{B}\left(x_0, \frac{1}{k}\right),$$

porque $x_0 \in \overline{K}$ y entonces $K \cap B\left(x_0, \dfrac{1}{k}\right) \neq \emptyset$.

$\square$

Observación (Propiedad de Lindelöf)**.** Esta demostración prueba que todo conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ (compacto o no) verifica que todo recubrimiento abierto de M admite un subrecubrimiento numerable.
