

# Cálculo Diferencial

Victoria Torroja Rubio

8/9/2025

# Índice general

<b>1. Espacios métricos</b>	<b>3</b>
1.1. Espacios normados . . . . .	4
1.2. Bolas en un espacio métrico . . . . .	7
1.3. Conceptos topológicos . . . . .	9
1.4. Conjuntos abiertos y cerrados relativos . . . . .	15
1.5. Sucesiones en espacios métricos . . . . .	16
1.6. Completitud . . . . .	19
1.7. Compacidad y recubrimientos . . . . .	22
<b>2. Continuidad</b>	<b>26</b>
2.1. Continuidad global . . . . .	29
2.2. Continuidad y restricciones . . . . .	30
2.3. Conexión . . . . .	33
2.4. Continuidad uniforme . . . . .	38
2.5. Teorema del punto fijo de Banach . . . . .	41
<b>3. Límites en <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>43</b>
3.1. Coordenadas polares . . . . .	46

**Profesor:** Jesús Jaramillo

**Despacho:** 305-E

**Correo:** jaramil@mat.ucm.es

**Contenido:**

- Topología de los espacios métricos (Cap 1-5) - Aprox: 6'5 semanas
- Cálculo diferencial en varias variables (Cap 6-11) - Resto

**Bibliografía:**

- Marsden-Hoffman (sirve para las dos partes): 'Análisis clásico elemental'
- K. Smith (la parte de integración es más avanzada): 'Primer of modern analysis'

**Materiales Campus:**

- Apuntes de Victor Sánchez (apuntes muy condensados)
- Manual de Ansemil-Ponte (versión extendida de Marsden-Hoffman)
- Curso de Daniel Azagra

# Capítulo 1

## Espacios métricos

**Definición 1.1 (Espacio métrico).** Un **espacio métrico** es un par  $(X, d)$  donde  $X$  es un conjunto no vacío y  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  es una función que se llama **distancia** o **métrica**, tal que:

1.  $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$ .
2.  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ .
3.  $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$ .
4. (Propiedad triangular)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$ .

**Ejemplo.** Algunos ejemplos de espacios métricos son:

1. Consideremos  $(\mathbb{R}, d)$  donde  $d(x, y) = |x - y|$ .
2. La distancia euclídea en  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ :

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

3. La 'métrica del taxi' en  $\mathbb{R}^2$  con distancia:

$$d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

4. Distancias geodésicas: el camino más corto (por ejemplo, en una superficie esférica el camino más corto entre dos puntos es un arco de circunferencia).
5. Distancias en  $\mathbb{R}^n$ . Si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , consideramos la distancia euclídea

$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

También podemos generalizar la 'métrica del taxi':

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|.$$

También se puede considerar la métrica

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\}.$$

**Definición 1.2 (Espacio discreto).** Sea  $X \neq \emptyset$  un conjunto cualquiera, y definimos  $\forall x, y \in X$

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y \\ 1, & \text{si } x \neq y \end{cases}.$$

Se dice que  $d$  es la **métrica discreta** y  $(X, d)$  el **espacio métrico discreto**.

**Definición 1.3 (Subespacio métrico).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $Y \subset X$ . Se define la **métrica relativa** (o **restringida**) a  $Y$  como  $d_Y(y, y') = d(y, y')$ ,  $\forall y, y' \in Y$ . Entonces,  $(Y, d_Y)$  es un espacio métrico que llamaremos **subespacio** de  $X$ .

## 1.1. Espacios normados

**Definición 1.4 (Espacio normado).** Un **espacio normado** es un par  $(E, \|\cdot\|)$  donde  $E$  es un espacio vectorial y  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$  es una función que se llama **norma** tal que:

1.  $\|x\| \geq 0$ ,  $\forall x \in E$ .
2.  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ .
3.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E$ <sup>a</sup>.
4.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ,  $\forall x, y \in E$ .

<sup>a</sup>En este curso  $\mathbb{K}$  va a ser principalmente  $\mathbb{R}$ .

**Proposición 1.1.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio normado. Si definimos

$$d(x, y) = \|x - y\|, \forall x, y \in E,$$

se obtiene que  $d$  es una distancia en  $E$ , que se llama **asociada** a la norma.

*Demostración.* Demostremos todas las propiedades de las métricas:

1. Tenemos que  $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ ,  $\forall x, y \in E$ .
2.  $d(x, y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$ .
3.  $d(x, y) = \|y - x\| = |-1| \|x - y\| = \|x - y\| = d(x, y)$ .

$$4. d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y).$$

□

**Observación.** En  $\mathbb{R}^n$ , dado  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  se definen:

$$(\text{Norma euclídea}) \quad \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

$$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|.$$

$$\|x\|_\infty = \max \{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}.$$

**Proposición 1.2** (Relación entre las normas en  $\mathbb{R}^n$ ).  $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

*Demostración.* Supongamos que  $|x_{i_0}| = \|x\|_\infty$ . Entonces, tenemos que

$$|x_{i_0}|^2 \leq |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2.$$

Dado que la función de la raíz es creciente, tenemos que

$$\|x\|_\infty = |x_{i_0}| \leq \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} = \|x\|_2.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\|x\|_1^2 = (|x_1| + \dots + |x_n|)^2 = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 + C^1 \geq |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 = \|x\|_2^2.$$

Finalmente, tenemos que

$$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n| \leq |x_{i_0}| + \dots + |x_{i_0}| = n|x_{i_0}| = n\|x\|_\infty.$$

□

**Definición 1.5.** Dos normas  $\|\cdot\|$  y  $\|\cdot\|'$  en un mismo espacio vectorial  $E$  son **equivalentes** cuando existen  $m, M > 0$  tales que

$$m\|x\|' \leq \|x\| \leq M\|x\|', \quad \forall x \in E.$$

**Observación.** Hemos visto en la proposición anterior que  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  y  $\|\cdot\|_\infty$  son equivalentes en  $\mathbb{R}^n$ .

---

<sup>1</sup> $C \geq 0$ .

**Definición 1.6 (Producto escalar).** Sea  $E$  un espacio vectorial real. Un **producto escalar** en  $E$  es una forma bilineal, simétrica y definida positiva. Es decir, una aplicación  $\langle, \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

1.  $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$
2.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in E.$
3.  $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$  y  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$

**Observación.** En este caso, denotaremos  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$

**Teorema 1.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz).** Sea  $E$  un espacio vectorial dotado de un producto escalar  $\langle, \rangle$ . Entonces

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \forall x, y \in E.$$

*Demostración.* **Caso 1.** Si  $x = 0$  o  $y = 0$ , obtenemos la igualdad.

**Caso 2.** Si  $y \neq 0$ , tenemos que  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$0 \leq \langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle = \langle x, x \rangle + \alpha \langle x, y \rangle + \alpha \langle y, x \rangle + \alpha^2 \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\alpha \langle x, y \rangle + \alpha^2 \|y\|^2.$$

Tomamos  $\alpha = -\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$ . Así, tenemos que

$$0 \leq \|x\|^2 - \frac{2\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} + \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^4} \|y\|^2 = \|x\|^2 - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2}.$$

Así, tenemos que  $\frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} \leq \|x\|^2$ , por lo que  $\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$  y tenemos que  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$

□

**Proposición 1.3.** Sea  $E$  un espacio vectorial dotado de un producto escalar  $\langle, \rangle$ . Entonces,  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ , es una norma en  $E$ , que se dice asociada a  $\langle, \rangle$ .

*Demostración.* Comprobamos que se cumplen las propiedades de las normas:

1. Tenemos que claramente  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0, \forall x \in E.$
2.  $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$
3.  $\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle = \lambda^2 \|x\|^2.$  Tomando la raíz cuadrada,  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$

4. Si  $x, y \in E$ ,

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

Tomando raíces, tenemos que se verifica la propiedad triangular:  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

□

## 1.2. Bolas en un espacio métrico

**Definición 1.7.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y consideramos  $a \in X$ ,  $r > 0$ . Se definen como **bola abierta** de centro  $a$  y radio  $r$  al conjunto

$$B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}.$$

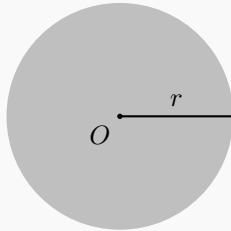
Similarmente, se llama **bola cerrada** de centro  $a$  y radio  $r$  al conjunto

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}.$$

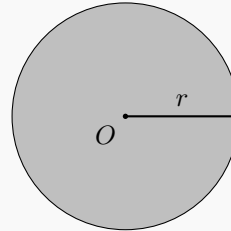
**Ejemplo.** Consideremos bolas en  $\mathbb{R}^2$  de distintas normas.

1. Consideremos bolas abiertas y cerradas con la métrica euclídea:

$$B_2((0, 0), r) = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} < r\}, \quad \overline{B}_2((0, 0), r) = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq r\}.$$



$B_2((0, 0), r)$

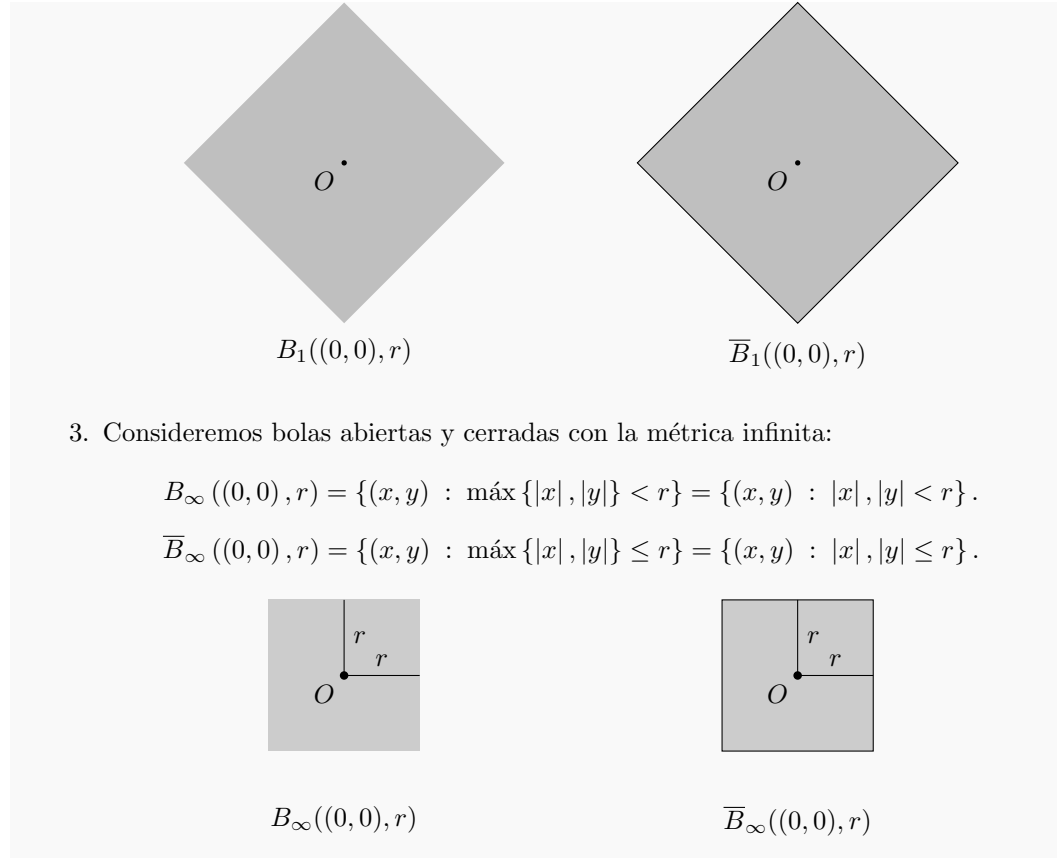


$\overline{B}_2((0, 0), r)$

2. Consideremos bolas abiertas y cerradas con la métrica 'del taxi':

$$B_1((0, 0), r) = \{(x, y) : |x| + |y| < r\}, \quad \overline{B}_1((0, 0), r) = \{(x, y) : |x| + |y| \leq r\}.$$






---

**Observación.** En  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  se tiene que  $B(0, r) = (-r, r)$  y  $\overline{B}(0, r) = [-r, r]$ . Similarmente, tenemos que  $B(a, r) = (a - r, a + r)$  y  $\overline{B}(a, r) = [a - r, a + r]$ .

---

**Observación (Relación de las bolas en  $\mathbb{R}^n$ ).** Sabemos que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

Por tanto, tenemos que

$$B_1(a, r) \subset B_2(a, r) \subset B_\infty(a, r) \subset B_1(a, nr)^a.$$

En efecto, si  $x \in B_1(a, r)$ , tenemos que  $\|x - a\|_1 < r$ . Por tanto, es fácil ver que  $\|x - a\|_2 \leq \|x - a\|_1 < r$ , por lo que  $x \in B_2(a, r)$ . El resto de inclusiones se deducen de forma análoga.

---

<sup>a</sup>También se puede escribir  $B_\infty(a, nr) \subset B_1(a, r) \subset B_2(a, r) \subset B_\infty(a, nr)$ .

---

**Definición 1.8.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subset X$ . Se define el **diámetro** de  $A$  como

$$\text{diam}(A) = \sup \{d(x, y) : x, y \in A\} \in [0, \infty).$$

Se dice que  $A$  es **acotado** si  $\text{diam}(A) < \infty$ .

**Proposición 1.4.** Dado un espacio métrico  $(X, d)$  con  $A \subset X$ , tenemos que  $A$  está acotado si y solo si  $A$  está contenido en alguna bola.

*Demostración.* (i) Supongamos que  $A$  está acotado, entonces  $\text{diam}(A) = r < \infty$ . Así, tenemos que si  $x \in A$ , entonces  $\forall a \in A$  se tiene que  $d(a, x) \leq r$ , por lo que  $A \subset \overline{B}(a, r)$ . También podemos ver que lo contiene una bola abierta:  $A \subset \overline{B}(a, r) \subset B(a, r+1)$ .

(ii) Si  $A$  está contenido en una bola, tenemos que existe  $x \in X$  y  $\frac{r}{2} > 0$  tal que  $A \subset B(x, \frac{r}{2})$ . De esta manera, si  $a, b \in A$  se tiene que

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Así, se tiene que  $\forall a, b \in A$ ,  $d(a, b) < r$ , por lo que  $\text{diam}(A) \leq r < \infty$ , por lo que  $A$  está acotado. □

### 1.3. Conceptos topológicos

**Definición 1.9 (Conjunto abierto).** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subset X$ . Se dice que  $A$  es un **conjunto abierto** si  $\forall a \in A, \exists r > 0$  tal que  $B(a, r) \subset A$ .

**Proposición 1.5.** Toda bola abierta es un conjunto abierto.

*Demostración.* Tomemos  $A = B(a, R)$  y  $x \in B(a, R)$ . Sea  $\delta = d(x, a) < R$  y  $r = R - \delta > 0$ <sup>2</sup>. Sea  $y \in B(x, r)$ , tenemos que  $d(x, y) < r$ . Así,

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < r + \delta = R.$$

Así,  $y \in B(a, R)$ , por lo que  $B(x, r) \subset B(a, R)$ . □

**Ejemplo.** En  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ .

1. Consideremos  $A = \{(x, y) : 0 < x < 1\}$ . Vamos a ver que es abierto. Si  $a \in A$ , sea  $a = (x, y)$  y consideramos  $r = \min\{x, 1 - x\}$ . Entonces, tenemos que  $B_2(a, r) \subset A$ .

<sup>2</sup>No hace falta de escribir  $r = \min\{R - \delta, \delta\}$  al tratarse de una bola.

$A$ , en efecto, si  $(x', y') \in B_2(a, r)$ :

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} < r \Rightarrow |x - x'| < r \Rightarrow 0 < x' < 1.$$

Así, tenemos que  $(x', y') \in A$ .

2. Consideremos  $A = \{(x, y) : 0 < x \leq 1\}$ . Vamos a ver que no es abierto. En efecto, si tomamos  $a = (1, 0)$  y  $r > 0$ , tenemos que  $(1 + \frac{r}{2}, 0) \in B_2(a, r)$  pero  $(1 + \frac{r}{2}, 0) \notin A$ .

**Proposición 1.6.** En  $\mathbb{R}^n$  los conjuntos abiertos coinciden para  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  y  $\|\cdot\|_\infty$ .

*Demostración.* Como se vio en una observación anterior, sabemos que

$$B_1(a, r) \subset B_2(a, r) \subset B_\infty(a, r) \subset B_1(a, nr).$$

- Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Si  $A$  es abierto con la norma  $\|\cdot\|_2$ , tenemos que  $\forall a \in A, \exists r > 0$  tal que  $B_2(a, r) \subset A$ . Por la observación, como  $B_1(a, r) \subset B_2(a, r) \subset A$ , tenemos que también es abierto para la norma  $\|\cdot\|_1$ .
- Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Si  $A$  es abierto con la norma  $\|\cdot\|_\infty$ , entonces  $\forall a \in A, \exists r > 0$  tal que  $B_\infty(a, r) \subset A$ . Por la observación anterior, tenemos que  $B_2(a, r) \subset B_\infty(a, r) \subset A$ , por lo que  $A$  es abierto respecto a la norma  $\|\cdot\|_2$ .
- Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Si  $A$  es abierto respecto de  $\|\cdot\|_1$ , tenemos que  $\forall a \in A, \exists r > 0$  tal que  $B_1(a, r) \subset A$ . Sea  $r' = \frac{r}{n} > 0$ ,

$$B_\infty(a, r') \subset B_1(a, nr') = B_1(a, r) \subset A.$$

Por tanto,  $A$  es abierto respecto de la norma  $\|\cdot\|_\infty$ .

□

**Teorema 1.2 (Propiedades de los abiertos).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico.

1.  $X$  y  $\emptyset$  son abiertos.
2. La unión arbitraria de abiertos es abierto.
3. La intersección finita de abiertos es abierto.

*Demostración.* 1. Es trivial que  $\emptyset$  es abierto. Por otro lado, si  $a \in X$ , tenemos que  $\forall r > 0$ ,  $B(a, r) \subset X$ . Así,  $X$  está abierto.

2. Supongamos que  $\{A_i\}_{i \in I}$  es una familia de conjuntos abiertos y sea  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ . Si  $a \in A$ , tenemos que  $a \in A_i$  para algún  $i \in I$ . Así, existe  $r > 0$  tal que  $B(a, r) \subset A_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ . Por tanto,  $B(a, r) \subset A$  y  $A$  es abierto.

3. Sean  $A_1, \dots, A_m$  conjuntos abiertos y sea  $A = A_1 \cap \dots \cap A_m$ . Si  $a \in A$ , tenemos que  $a \in A_i$  para  $1 \leq i \leq m$ . Así, existe  $r_i > 0$  tal que  $B(a, r_i) \subset A_i$ . Si tomamos  $r = \min \{r_i : 1 \leq i \leq m\}$ , tenemos que  $B(a, r) \subset B(a, r_i)$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$ . Por tanto,  $B(a, r) \subset A$  y  $A$  es abierto.

□

**Observación.** La intersección infinita de conjuntos abiertos puede no ser abierto. Por ejemplo, consideremos en  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$  consideramos  $A_m = B_2\left((0, 0), \frac{1}{m}\right)$ , que es abierto  $\forall m \in \mathbb{N}$ . Sin embargo,  $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m = \{(0, 0)\}$ , que no es abierto.

**Definición 1.10 (Conjunto cerrado).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Se dice que un conjunto  $C \subset X$  es **cerrado** si  $X/C$  es abierto.

**Proposición 1.7.** Toda bola cerrada es un conjunto cerrado.

*Demostración.* En efecto, sea  $C = \overline{B}(p, R) = \{x \in X : d(x, p) \leq R\}$  y sea  $A = X/C = \{x \in X : d(x, p) > R\}$ . Si  $a \in A$ , tenemos que  $d(a, p) = \delta > R$ . Así, tomando  $r = \delta - R > 0$ , si  $x \in B(a, r)$ , tenemos que

$$d(x, p) \geq d(p, a) - d(x, a) > \delta - r = R.$$

Así, tenemos que  $x \in A$ , por lo que  $B(a, r) \subset A$  y  $X/C$  es abierto, por lo que  $C$  es cerrado. □

**Observación.** Es fácil ver que en  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ :

- $(a, b)$  es abierto.
- $[a, b]$  es cerrado.
- $(a, b]$  y  $[a, b)$  no son ni abiertos ni cerrados.

**Teorema 1.3 (Propiedades de los cerrados).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico.

1. Los conjuntos  $X$  y  $\emptyset$  son cerrados.
2. La intersección arbitraria de cerrados es cerrado.
3. La unión finita de cerrados es cerrado.

*Demostración.* 1. Dado que  $\emptyset = X/X$  y  $X = X/\emptyset$ , del teorema anterior se sigue que son cerrados.

2. Sean  $\{C_i\}_{i \in I}$  cerrados. Entonces,  $\forall i \in I$  tenemos que  $X/C_i$  es abierto, así,

$$X/\bigcap_{i \in I} C_i = \bigcup_{i \in I} (X/C_i),$$

que es abierto, por lo que  $\bigcap_{i \in I} C_i$  es cerrado.

3. Sean  $C_1, \dots, C_m$  cerrados. Entonces,  $\forall i = 1, \dots, m$ , tenemos que  $X/C_i$  es abierto. Así,

$$X/\bigcup_{i=1}^m C_i = \bigcap_{i=1}^m (X/C_i),$$

es abierto, por lo que  $\bigcup_{i=1}^m C_i$  es cerrado.

□

**Definición 1.11 (Punto interior).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subset X$ . Se dice que  $a \in A$  es un **punto interior** de  $A$  si existe  $r > 0$  tal que  $B(a, r) \subset A$ . Denotamos  $\text{Int}(A)$  al conjunto de puntos interiores de  $A$ .

**Observación.** Es trivial ver que  $\text{Int}(A) \subset A$ .

**Proposición 1.8.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subset X$ .

1. El conjunto  $\text{Int}(A)$  es el mayor abierto contenido en  $A$ .
2.  $A$  es abierto si y solo si  $A = \text{Int}(A)$ .

*Demostración.* 1. Sea  $U = \text{Int}(A)$ . Vamos a ver que es abierto. Dado  $x \in U$ , tenemos que existe  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \subset A$ . Si  $y \in B(x, r)$ , por tratarse de una bola abierta existe  $r' > 0$  tal que  $B(y, r') \subset B(x, r) \subset A$ , por lo que  $y \in \text{Int}(A) = U$ . Por tanto,  $B(x, r) \subset U$  y  $U$  es abierto.

Ahora tenemos que ver que es el mayor abierto. Supongamos que  $V$  es abierto y  $V \subset A$ . Sea  $x \in V$ , tenemos que existe  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \subset V \subset A$ . Por tanto,  $x \in \text{Int}(A) = U$  y  $V \subset U$ .

2. Si  $A = \text{Int}(A)$  está claro que  $A$  es abierto. Recíprocamente, si  $A$  es abierto, tenemos que como  $A$  es el mayor abierto contenido en  $A$ ,  $A = \text{Int}(A)$ .

□

**Ejemplo.** En  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ , sea  $A = (0, 2]$ . Tenemos que  $\text{Int}(A) = (0, 2)$ . En efecto,

- (i) Si  $x \in (0, 2)$ , entonces existe  $r > 0$  tal que  $(x - r, x + r) \subset (0, 2) \subset (0, 2]$ , por lo que  $x \in \text{Int}(A)$ .
- (ii) Recíprocamente, tenemos que  $2 \notin \text{Int}(A)$ , puesto que  $\forall r > 0$  tenemos que  $(2 - r, 2 + r)$

no es subconjunto de  $(0, 2]$ .

**Definición 1.12 (Punto adherente).** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subset X$ . Se dice que  $x \in X$  es **punto adherente** a  $A$  (o también **punto clausura**) si  $\forall r > 0$ ,  $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$ . Denotamos  $\overline{A}$  o  $Adh(A)$  al conjunto de puntos adherentes de  $A$ .

**Observación.** Se ve trivialmente que  $A \subset \overline{A}$ .

**Ejemplo.** En  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  sea  $A = (0, 2]$ . Tenemos que  $\overline{A} = [0, 2]$ . En efecto:

- (i) Tenemos que  $0 \in \overline{A}$ , puesto que  $\forall r > 0$  tenemos que  $(-r, r) \cap A \neq \emptyset$ . Así, tenemos que  $[0, 2] \subset \overline{A}$ .
- (ii) Recíprocamente, si  $x > 2$ , tenemos que existe  $r > 0$  suficientemente pequeño tal que  $x - r > 2$ , por tanto  $x \notin \overline{A}$ . Similarmente, podemos demostrar que  $0 \notin \overline{A}$ .

**Lema 1.1.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subset X$ . Entonces,  $\overline{A} = X / \text{Int}(X/A)$ .

*Demostración.* (i) Sea  $x \in \overline{A}$ . Tenemos que  $\forall r > 0$ ,  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ , por lo que  $B(x, r) \not\subset X/A$ , por lo que  $x \notin \text{Int}(X/A)$ , por lo que  $x \in X / \text{Int}(X/A)$ .

(ii) Sea  $x \in X / \text{Int}(X/A)$ , entonces  $x \notin \text{Int}(X/A)$ , es decir,  $\forall r > 0$  tenemos que  $B(x, r) \not\subset X/A$ . Así, debe ser que  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ , por lo que  $x \in \overline{A}$ . □

**Proposición 1.9.** 1.  $\overline{A}$  es el menor cerrado que contiene a  $A$ .

2. Un conjunto  $A \subset X$  es cerrado si y solo si  $A = \overline{A}$ .

*Demostración.* 1. Tenemos que  $\overline{A} = X / \text{Int}(X/A)$ , por lo que su complementario es abierto y él es cerrado. Ahora vamos a ver que es el menor cerrado que contiene a  $A$ . Sea  $C \subset X$  cerrado con  $A \subset C$ . Tenemos que  $X/C \subset X/A$ , por lo que  $X/C \subset \text{Int}(X/A)$  y tenemos que  $C \supset X / \text{Int}(X/A) = \overline{A}$ .

2. Si  $A = \overline{A}$ ,  $A$  es cerrado. Por otro lado, si  $A$  es cerrado, entonces su complementario,  $X/A$  es abierto, por lo que  $X/A = \text{Int}(X/A)$ , por lo que  $\overline{A} = X / \text{Int}(X/A) = X / (X/A) = A$ . □

**Definición 1.13 (Punto frontera).** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subset X$ . Se dice que  $x \in X$  es un **punto frontera** de  $A$  si  $\forall r > 0$ ,  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$  y  $B(x, r) \cap (X/A) \neq \emptyset$ . Denotamos  $Fr(A)$  o  $\partial A$  el conjunto de puntos frontera de  $A$ .

---

**Observación.** Tenemos que  $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X/A}$  y en particular  $Fr(A)$  es cerrado.

---

**Ejemplo.** En  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$  sea  $A = \{(x, y) : 0 < x \leq 1\}$ . Tenemos que

$$Fr(A) = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \cup \{(1, y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

En efecto:

- (i) Sea  $P = (0, y)$ . Tenemos que  $\forall r > 0$ ,  $B(P, r) \cap A \neq \emptyset$  y  $B(P, r) \cap (X/A) \neq \emptyset$ . Así,  $P \in Fr(A)$ . De forma análoga, se puede demostrar que  $P = (1, y) \in Fr(A)$ .
- (ii) El recíproco lo demostramos típicamente por contrapositiva. Sea  $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  con  $x \neq 0$  y  $x \neq 1$ . Hay tres posibilidades a considerar:  $x \in (-\infty, 0)$ ,  $x \in (0, 1)$  o  $x \in (1, \infty)$ . Si  $x \in (-\infty, 0)$ ,  $\exists r > 0$  tal que  $B(P, r) \cap A = \emptyset$ . El resto de los casos se demuestran de forma análoga.

**Definición 1.14 (Punto de acumulación).** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subset X$ . Se dice que  $x \in X$  es un **punto de acumulación** de  $A$  si  $\forall r > 0$  se tiene que  $A \cap (B(x, r) / \{x\}) \neq \emptyset$ . Denotamos  $A'$  el conjunto de los puntos de acumulación de  $A$ .

---

**Observación.** Tenemos que  $A' \subset \overline{A}$ . En efecto, si  $x \in A'$ , tenemos que  $\forall r > 0$  se cumple que  $A \cap (B(x, r) / \{x\}) \neq \emptyset$ , es decir,  $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$ , por lo que  $x \in \overline{A}$ .

---

**Ejemplo.** Consideremos  $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \subset (\mathbb{R}^2, d_2)$ . Tenemos que

- $\text{Int}(A) = \emptyset$ . En efecto, tenemos que  $\forall r > 0$ , si  $n_0 = (n, n) \in \mathbb{N}^2$ , existe  $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$  tal que  $n < x < n + r$ , por lo que  $(x, x) \in B(n, r)$  pero  $(x, x) \notin \mathbb{N}^2$ .
- $\overline{A} = A$ . En efecto, si  $x \notin A$ , tenemos que podemos encontrar  $r > 0$  suficientemente pequeño tal que  $B(x, r) \cap A = \emptyset$ .
- $\partial A = A$ . Dado que  $A = \overline{A}$  y  $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X/A}$ , tenemos que  $A \subset \partial A$ . Por otro lado, si  $x \notin A$ , tenemos que existe un  $r > 0$  suficientemente pequeño tal que  $B(x, r) \cap A = \emptyset$ , como hemos visto anteriormente, por lo que  $x \notin \partial A$ .
- $A' = \emptyset$ . Si cogemos  $r < 1$  y  $n \in \mathbb{N}^2$ , está claro que  $(B(n, r) / \{n\}) \cap A = \emptyset$ , por lo que  $n$  no puede ser un punto de acumulación. Si  $x \notin A$ , hacemos un argumento similar al del apartado anterior.

**Definición 1.15 (Punto aislado).** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subset X$ . Se dice que  $x \in A$  es un **punto aislado** de  $A$  si existe  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \cap A = \{x\}$ . Denotaremos  $\text{Ais}(A)$  al conjunto de los puntos aislados de  $A$ .

**Proposición 1.10.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subset X$ . Entonces, se cumple que  $\overline{A} = A' \cup \text{Ais}(A)$ .

*Demostración.* (i) Sea  $x \in \overline{A}$ . Supongamos que  $x \notin A'$ , entonces existe  $r > 0$  tal que  $A \cap (B(x, r) \setminus \{x\}) = \emptyset$ . Sin embargo, sabemos que  $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$  al ser  $x \in \overline{A}$ , por tanto debe ser que  $A \cap B(x, r) = \{x\}$ , es decir,  $x \in \text{Ais}(A)$ .

(ii) Está claro que  $\text{Ais}(A) \subset A \subset \overline{A}$  y  $A' \subset \overline{A}$ , por lo que  $A' \cup \text{Ais}(A) \subset \overline{A}$ . □

**Corolario 1.1.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subset X$ . Entonces,  $A$  es cerrado si y solo si  $A$  contiene todos sus puntos de acumulación.

*Demostración.* (i) Tenemos que  $A = \overline{A} = A' \cup \text{Ais}(A)$ , por lo que  $A' \subset A$ .

(ii) Tenemos que  $\text{Ais}(A) \subset A$  y  $A' \subset A$ , por lo que  $\overline{A} = \text{Ais}(A) \cup A' \subset A$ , así,  $\overline{A} = A$ . □

**Definición 1.16.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico,  $A \subset X$  y  $x \in X$ . Se define la **distancia** de  $x$  a  $A$  como:

$$d(x, A) = \inf \{d(x, a) : a \in A\}.$$

**Proposición 1.11.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subset X$ . Entonces,

$$\overline{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}.$$

*Demostración.* (i) Sea  $x \in \overline{A}$ , entonces existe  $r > 0$  tal que  $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$ . Por tanto, existe  $a_r \in A \cap B(x, r)$ , por tanto  $d(x, a_r) < r$ . Así, tenemos que

$$d(x, A) \leq d(x, a_r) < r, \quad \forall r > 0.$$

Por tanto,  $d(x, A) = 0$ .

(ii) Tenemos que  $\forall r > 0$ ,  $d(x, A) < r$ , por lo que existe  $a_r \in A$  tal que  $d(x, a_r) < r$ . Por tanto,  $a_r \in A \cap B(x, r) \neq \emptyset$  y podemos concluir que  $x \in \overline{A}$ . □

## 1.4. Conjuntos abiertos y cerrados relativos

**Observación.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico e  $Y \subset X$ . Sabemos que  $(Y, d_Y)$  es un subespacio métrico de  $(X, d)$  donde  $d_Y(y_1, y_2) = d(y_1, y_2)$ . Dado  $y_0 \in Y$  y  $r > 0$ , la bola  $B_Y(y_0, r) = \{y \in Y : d(y, y_0) < r\} = B(y_0, r) \cap Y$ . Es decir, la forma de las bolas cambia.



**Observación.** En un espacio métrico  $(X, d)$ , todo conjunto abierto es unión de bolas abiertas. En efecto, si  $A$  es abierto, entonces  $\forall a \in A$ , existe  $r_a > 0$  tal que  $B(a, r_a) \subset A$ , por lo que  $A = \bigcup_{a \in A} B(a, r_a)$ <sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Esta observación se puede reformular diciendo que un subconjunto  $A \subset X$  es abierto si y solo si es unión de bolas abiertas.

**Proposición 1.12.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico e  $Y \subset X$ .

(a)  $A \subset Y$  es  $d_Y$ -abierto si y solo si existe  $U \subset X$  abierto tal que  $A = U \cap Y$ .

(b)  $C \subset Y$  es  $d_Y$ -cerrado si y solo si existe  $H \subset X$  cerrado tal que  $C = H \cap Y$ .

Estos conjuntos se llaman **abiertos y cerrados relativos** de  $Y$ , respectivamente.

*Demostración.* (a) Sea  $Y \subset X$ .

- (i) Tenemos que  $\forall y \in A$ , existe  $r_y > 0$  tal que  $B_Y(y, r_y) \subset A$ . Definimos  $U = \bigcup_{y \in A} B(y, r_y)$ , que es abierto en  $(X, d)$  por ser unión de bolas abiertas. Veamos que  $A = U \cap Y$ . Tenemos que si  $y \in A$ , entonces  $y \in B(y, r_y) \subset A \subset U$  (puesto que  $B_Y(y, r_y) \subset B(y, r_y)$ ). Recíprocamente, sea  $z \in Y \cap U$ , entonces existe  $y \in Y$  tal que  $z \in B(y, r_y) \cap Y = B_Y(y, r_y) \subset A$ . Por tanto,  $Y \cap U \subset A$ .
- (ii) Dado  $y_0 \in A = U \cap Y$ , como  $U$  es abierto<sup>3</sup>, existe  $r > 0$  tal que  $B(y_0, r) \subset U$ . Por tanto, tenemos que  $B_Y(y_0, r) = B(y_0, r) \cap Y \subset U \cap Y = A$ . Así, hemos visto que  $A$  es  $d_Y$ -abierto.

(b) Sea  $Y \subset X$ .

- (i) Sea  $C \subset Y$   $d_Y$ -cerrado, entonces tenemos que  $Y/C$  es  $d_Y$ -abierto. Así, existe  $U \subset X$  abierto tal que  $Y/C = U \cap Y$ . Sea  $H = X/U$ , que es cerrado. Veamos que  $C = H \cap Y$ :

$$C = Y/(Y/C) = Y/(U \cap Y) = Y/U = Y \cap (X/U) = Y \cap H.$$

- (ii) Si  $C = H \cap Y$  con  $H$  cerrado en  $X$ , entonces  $X/H$  es abierto. Tenemos que

$$Y/C = Y/(H \cap Y) = Y \cap (X/H).$$

Dado que  $X/H$  es abierto, por (a) tenemos que  $Y/C$  es  $d_Y$ -abierto, por lo que  $C$  es  $d_Y$ -cerrado.

□

## 1.5. Sucesiones en espacios métricos

<sup>3</sup>Cuando escribimos abierto y  $B(x, r)$  queremos decir que es  $d$ -abierto y es la bola en  $X$ , respectivamente.

**Definición 1.17 (Sucesión y convergencia).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Una **sucesión** es una aplicación  $S : \mathbb{N} \rightarrow X$ . Si  $S(n) = x_n \in X$ , denotamos la sucesión por  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Se dice que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  **converge** a  $x_0 \in X$  cuando  $d(x_n, x_0)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$

**Observación.** Recordamos que  $x_n \rightarrow x_0$  si y solo si (ambas definiciones son equivalentes):

- $\forall \varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$  se tiene que  $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ .
- $\forall \varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$  se tiene que  $x_n \in B(x_0, \varepsilon)$ .

**Proposición 1.13.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Si la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge, el límite es único.

*Demostración.* Supongamos que  $l_1, l_2 \in X$  son límites de la sucesión, entonces tenemos que si  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$  se cumple que

$$d(l_1, l_2) \leq d(l_1, x_n) + d(x_n, l_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como esto es cierto para todo  $\varepsilon > 0$ , debe ser que  $d(l_1, l_2) = 0$ , por lo que  $l_1 = l_2$ .  $\square$

**Proposición 1.14.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subset X$ . Entonces,  $x \in \bar{A}$  si y solo si existe una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  tal que  $x_n \rightarrow x$ .

*Demostración.* (i) Tenemos que si  $x \in \bar{A}$ , entonces para todo  $\varepsilon > 0$  se tiene que  $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ , es decir. Así, podemos coger una sucesión tal que para  $\varepsilon = \frac{1}{n}$  se tiene que  $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A$ . Vamos a ver que la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $x$ .

$$0 \leq d(x_n, x) < \frac{1}{n} \Rightarrow d(x_n, x) \rightarrow 0 \iff x_n \rightarrow x.$$

(ii) Si existe  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  tal que  $x_n \rightarrow x$ , tenemos que si  $r > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0, x_n \in B(x, r)$ , es decir,  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ , por lo que  $x \in \bar{A}$ .  $\square$

**Proposición 1.15.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subset X$ . Entonces  $x \in A'$  si y solo si existe una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de términos distintos con  $x_n \rightarrow x$ .

*Demostración.* (i) Si  $x \in A'$ , tenemos que  $\forall r > 0, A \cap (B(x, r) \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ .

- Para  $n = 1$ , tomamos  $x_1$  tal que  $x_1 \in A \cap (B(x, 1) \setminus \{x\})$ .

- Para  $n = 2$ , tomamos  $\varepsilon = \min \left\{ \frac{1}{2}, d(x_1, x) \right\}$ , y tomamos  $x_2$  tal que  $x_2 \in A \cap (B(x, \varepsilon) / \{x\})$ .
- Asumimos que tenemos  $\{x_1, \dots, x_n\}$  distintos como los hemos descrito anteriormente. Ahora, en el caso  $n + 1$ , cogemos  $\varepsilon = \min \left\{ \frac{1}{n+1}, d(x_i, x) \right\}$  para  $i = 1, \dots, n$ . Así, cogemos  $x_{n+1} \in A \cap (B(x, \varepsilon) / \{x\})$ . Obtenemos que

$$0 < d(x_{n+1}, x) < \frac{1}{n+1} < d(x_i, x), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Así, está claro que  $x_{n+1} \neq x_i$  para  $1 \leq i \leq n$ .

Así, hemos construido la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que buscábamos. Tenemos que ver que la sucesión converge a  $x$ . En efecto, si  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$ ,  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ , por lo que  $d(x_n, x) < \frac{1}{n} < \varepsilon$ .

- (ii) Puesto que los elementos de la sucesión no se repiten, existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq m$ ,  $x_n \neq x$ . Como la sucesión converge, si  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \geq m$  tal que  $\forall n \geq n_0$ ,  $A \cap (B(x_n, x) / \{x\}) \neq \emptyset$ , por lo que  $x \in A'$ . □

**Observación.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio normado. Tenemos que una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a un punto  $x \in E$  si y solo si  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ .

**Proposición 1.16.** En  $\mathbb{R}^n$  consideremos las normas  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  y  $\|\cdot\|_\infty$ . Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de  $\mathbb{R}^n$  tal que

$$x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n),$$

y  $x_n \rightarrow x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ . Entonces, la sucesión converge coordenada a coordenada, es decir,  $x_k^i \rightarrow x^i$  para  $1 \leq i \leq n$ .

*Demostración.* Recordamos que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

Así, tenemos que si  $x_k \rightarrow x$ ,

$$\|x_k - x\|_\infty \leq \|x_k - x\|_2 \leq \|x_k - x\|_1 \leq n\|x_k - x\|_\infty.$$

Por tanto, la convergencia no depende de la norma que escojamos. Así, para  $1 \leq i \leq n$  tenemos que

$$|x_k^i - x^i| \leq \|x_k - x\|_2 \leq |x_k^1 - x^1| + \dots + |x_k^n - x^n| \rightarrow 0,$$

por lo que  $x_k^i \rightarrow x^i$ . □

**Definición 1.18 (Subsucesión).** Sea sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ , donde  $(X, d)$  es un espacio métrico. Una **subsucesión** es otra sucesión de la forma  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $n_k$  es estrictamente creciente.

**Proposición 1.17.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Entonces, toda subsucesión converge a  $x$ .

*Demostración.* Sea  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Tenemos que si  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$  se tiene que  $d(x_n, x) < \varepsilon$ . Como  $n_k \rightarrow \infty$ , podemos encontrar  $n_{k_0} \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n_k \geq n_{k_0}$  se tenga que  $n_k \geq n_0$ , por lo que  $\forall k \geq k_0$ , tenemos que  $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$ . Así, hemos visto que la subsucesión converge al mismo límite.  $\square$

## 1.6. Completitud

**Definición 1.19 (Sucesión de Cauchy).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Se dice que una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $X$  es una **sucesión de Cauchy** si  $\forall \varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall m, n \geq n_0$ ,  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ .

**Proposición 1.18.** Toda sucesión convergente es de Cauchy.

*Demostración.* Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  una sucesión convergente a  $x_0 \in X$ . Así, si  $\varepsilon > 0$ , tenemos que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$ ,  $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Si  $n, m \geq n_0$ ,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

**Definición 1.20 (Espacio completo).** Se dice que un espacio métrico  $(X, d)$  es **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente en  $(X, d)$ .

**Teorema 1.4.** El espacio  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  es completo.

**Ejemplo.** Consideramos  $X = \mathbb{Q}$  con la distancia usual. Entonces,  $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$  no es completo. Hay sucesiones  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$  de Cauchy tales que  $q_n \rightarrow x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ . Entonces la sucesión  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no converge en  $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ . Como ejemplo se puede tomar la sucesión de los decimales de  $\sqrt{2}$ .

**Corolario 1.2.** El espacio  $\mathbb{R}^n$  con la norma  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  y con  $\|\cdot\|_\infty$  también es completo.

*Demostración.* Recordamos que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

Por tanto una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$  es de Cauchy para  $\|\cdot\|_\infty$  si y solo si lo es para  $\|\cdot\|_2$ , si y solo si lo es para  $\|\cdot\|_1$ . Por ejemplo, para  $\|\cdot\|_2$ , si  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$  es de Cauchy, entonces  $\forall \varepsilon > 0$  existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall k, j \geq k_0$ ,

$$|x_k^i - x_j^i| \leq \|x_k - x_j\|_2 < \varepsilon, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Donde  $x_m = (x_m^1, \dots, x_m^n)$ . Por tanto, cada componente  $\{x_k^i\}_{k \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy en  $\mathbb{R}$ , por lo que cada componente es convergente en  $\mathbb{R}$  y la sucesión es convergente en  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Ejemplo.** Sea  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Consideramos el siguiente espacio normado:

$$X = \mathcal{C}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ continua en } [a, b]\}.$$

$$\|f\|_\infty = \sup \{|f(t)| : t \in [a, b]\} = \max \{|f(t)| : t \in [a, b]\}.$$

Por ser  $f$  continua, la norma está bien definida. Se trata de una norma, puesto que:

- $\|f\|_\infty \geq 0$ .
- $\|f\|_\infty = 0$  si y solo si  $|f(t)| = 0, \forall t \in [a, b]$ , es decir,  $f = 0$ .
- $\|\lambda f\|_\infty = \sup \{|\lambda f(t)| : t \in [a, b]\} = |\lambda| \sup \{|f(t)| : t \in [a, b]\} = |\lambda| \|f\|_\infty$ .
- Comprobamos la propiedad triangular:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_\infty &= \sup \{|f(t) + g(t)| : t \in [a, b]\} \\ &\leq \sup \{|f(t)| : t \in [a, b]\} + \sup \{|g(t)| : t \in [a, b]\} = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Podemos observar que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow f$  en  $\|\cdot\|_\infty$  si y solo si  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ . Es decir, si  $\forall \varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$ :  $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ . Esto es cierto si y solo si  $\forall \varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$  se tiene que  $|f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon, \forall t \in [a, b]$ . Es decir, si  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente en  $[a, b]$  a  $f$ .

Otra observación que podemos hacer es que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy con  $\|\cdot\|_\infty$  si y solo si  $\forall \varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n, m \geq n_0$  se tiene que  $\|f_m - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$ , si y solo si  $\forall \varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n, m \geq n_0, |f_n(t) - f_m(t)| \leq \varepsilon, \forall t \in [a, b]$ . Así, podemos decir que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es **uniformemente de Cauchy**.

**Teorema 1.5.** El espacio  $(\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_\infty)$  es completo.

*Demostración.* Sea  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de Cauchy para  $\|\cdot\|_\infty$ . Tenemos que

$$\forall t \in [a, b], |f_n(t) - f_m(t)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty.$$

Luego,  $\forall t \in [a, b]$ ,  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy en  $\mathbb{R}$ , por lo que existe  $a_t \in \mathbb{R}$  tal que  $\{f_n(t)\} \rightarrow a_t$ . Definimos la función

$$\begin{aligned} f : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow a_t. \end{aligned}$$

Vamos a ver que  $f_n \rightarrow f$  en  $\|\cdot\|_\infty$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n, m \geq n_0$ , tenemos que

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [a, b].$$

Si cogemos  $m \rightarrow \infty$ , tenemos que

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [a, b], \forall n \geq n_0.$$

Así, tenemos que  $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ ,  $\forall n \geq n_0$ . Por tanto,  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $f$  uniformemente en  $[a, b]$ . Como el límite de una sucesión de funciones continuas es una función continua, tenemos que  $f \in \mathcal{C}[a, b]$ .  $\square$

**Proposición 1.19.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo y sea  $Y \subset X$ . Entonces,  $(Y, d_Y)$  es completo si y solo si  $Y$  es cerrado en  $X$ .

*Demostración.* (i) Sea  $(Y, d_Y)$  completo. Vamos a ver que  $Y$  es cerrado. Sea  $x \in \bar{Y}$ , por lo que  $\exists \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$  tal que  $y_n \rightarrow x$ . Por tanto,  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy en  $X$  e  $Y$ . Luego, existe  $y_0 = x = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in Y$ , por lo que  $x \in Y$ . Así, tenemos que  $\bar{Y} \subset Y$  y por tanto  $Y$  es cerrado.

(ii) Supongamos que  $Y$  es cerrado en  $X$ . Sea  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (Y, d_Y)$  sucesión de Cauchy. Entonces,  $\forall \varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n, m \geq n_0$   $d_Y(y_n, y_m) < \varepsilon$ . Por ser de Cauchy en  $(X, d)$ , existe  $x \in X$  tal que  $y_n \rightarrow x$ . Por tanto, tenemos que  $x \in \bar{Y} = Y$ , por lo que  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente en  $Y$ .  $\square$

**Lema 1.2.** En un espacio métrico  $(X, d)$ , toda sucesión de Cauchy está acotada.

*Demostración.* Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de Cauchy. Entonces, si cogemos  $\varepsilon = 1$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$  se tiene que  $d(x_n, x_{n_0}) < 1$ . Podemos tomar

$$R = \max\{1, d(x_n, x_m) : n, m \leq n_0\}^4.$$

Entonces, tenemos que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B(x_{n_0}, R)$ .  $\square$

**Lema 1.3.** Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sucesión de Cauchy en un espacio métrico  $(X, d)$ . Si existe una subsucesión  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  convergente a  $x \in X$ , entonces toda la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $x$ .

<sup>4</sup>En clase tomé  $R = \max\{d(x_1, x_{n_0}), d(x_2, x_{n_0}), \dots, d(x_{n_0-1}, x_{n_0}), 1\}$ .

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n, m \geq n_0, d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ . También existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall k \geq k_0, d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Sea  $n_0 = \max\{n_1, n_{k_0}\}$  y sea  $n \geq n_0$ ,

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

## 1.7. Compacidad y recubrimientos

**Teorema 1.6 (Teorema de Bolzano-Weierstrass).** Toda sucesión acotada en  $\mathbb{R}$  admite una subsucesión convergente.

**Corolario 1.3.** En  $\mathbb{R}^n$ <sup>a</sup>, toda sucesión acotada admite una subsucesión convergente.

<sup>a</sup>Con las normas  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  o  $\|\cdot\|_\infty$ .

*Demostración.* El caso general es un poco tedioso, por lo que solo haremos la demostración cuando  $n = 2$ .

Sea  $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$  acotada, por lo que existe  $R > 0$  tal que  $|x_n|, |y_n| \leq R, \forall n \in \mathbb{N}$ . Como  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  está acotada, existe  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  convergente a  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Consideramos  $\{y_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  está acotada, existe  $\{y_{n_{k_j}}\}_{j \in \mathbb{N}}$  convergente a  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Así, tenemos que  $(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$  es una subsucesión de  $(x_n, y_n)$  y  $(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) \rightarrow (x_0, y_0)$ . □

**Definición 1.21 (Conjunto compacto).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $K \subset X$ . Se dice que  $K$  es **compacto** si toda sucesión en  $K$  admite una subsucesión convergente en  $K$ .

**Lema 1.4.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $K \subset X$  compacto. Entonces  $K$  es cerrado y acotado en  $(X, d)$ .

*Demostración.* (i) Supongamos que  $K$  no es acotado. Si fijamos  $x_0 \in X$  y sabemos que  $\forall n \in \mathbb{N}, K \not\subset B(x_0, n)$ . Por tanto, existe  $x_n \in K$  tal que  $d(x_n, x_0) \geq n$ . Por tanto, la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$  y  $d(x_n, x_0) = \infty$ , por lo que la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no es acotada. Además, para toda subsucesión  $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ , se tiene que  $d(x_{n_j}, x_0) = \infty$ , por lo que  $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  no es acotada, por lo que no es convergente. Por tanto,  $K$  no es compacto.

(ii) Supongamos que  $K$  no es cerrado. Es decir, existe  $x \in \overline{K} \setminus K$ . Así, existe una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$  con  $x_n \rightarrow x \notin K$ . Además, para toda subsucesión  $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  se tiene que  $x_{n_j} \rightarrow x \notin K$ . Es decir, todas las subsucesiones de  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergen fuera de  $K$ , por lo que  $K$  no es compacto. □

**Teorema 1.7.** En  $\mathbb{R}^n$  (con  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  o  $\|\cdot\|_\infty$ ) un subconjunto  $K \subset \mathbb{R}^n$  es compacto si y solo si  $K$  es cerrado y acotado.

*Demostración.* (i) Es trivial a partir del lema anterior.

(ii) Sea  $K \subset \mathbb{R}^n$  cerrado y acotado. Sea  $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $K$ . Entonces,  $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  está acotada y por tanto existe una subsucesión  $\{x_{n_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$  convergente a  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Entonces,  $x_0 \in \overline{K} = K$  puesto que  $K$  es cerrado. Entonces,  $K$  es compacto.  $\square$

**Ejemplo.** El recíproco del lema anterior no es cierto. Consideremos por ejemplo  $(X, d)$  donde  $X = \mathbb{N}$  y  $d$  es la métrica discreta. El conjunto de todos los números naturales es cerrado y acotado (tal y como lo hemos definido). Sin embargo, no es compacto.

Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergente a  $x \in \mathbb{N}$ . Entonces, tenemos que  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n \geq n_0$ ,  $d(x_n, x) < \varepsilon$ . Esto solo sucede si existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$ ,  $x_n = x$ .

Por tanto, la sucesión  $\{n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  está acotada pero no es convergente (puesto que no cumple la condición de convergencia que hemos visto anteriormente) y no tiene subsucesiones convergentes.

**Definición 1.22 (Recubrimiento).** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $M \subset X$ .

- (a) Un **recubrimiento** de  $M$  es una familia  $\{U_i\}_{i \in I}$  de subconjuntos de  $X$  que **recubre**  $M$  en el sentido de que  $M \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ . Se dice que el recubrimiento es **abierto** si cada  $U_i$  es un conjunto abierto en  $X$ .
- (b) Un **sub-recubrimiento** de  $\{U_i\}_{i \in I}$  es un recubrimiento de la forma  $\{U_j\}_{j \in J}$  donde  $J \subset I$  y tal que  $M \subset \bigcup_{j \in J} U_j$ .

**Teorema 1.8.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $K \subset X$ . Entonces  $K$  es compacto si y solo si todo recubrimiento abierto de  $K$  admite un subrecubrimiento finito.

*Demostración.* Por simplicidad, vamos a ver la demostración en el caso particular  $X = \mathbb{R}^n$  con la norma euclídea.

(i) Sea  $K \subset \mathbb{R}^n$  compacto y sea  $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$  un recubrimiento abierto de  $K$ . Consideremos la familia auxiliar  $\mathcal{B}$  de todas las bolas abiertas de la forma  $B(q, r)$ , donde  $q \in \mathbb{Q}^n$  y  $r \in \mathbb{Q}^+$ , tales que  $B(q, r)$  esté contenida en algún  $U_i$ . Como  $\mathbb{Q}$  es numerable,  $\mathbb{Q}^n$  también lo es, por lo que  $\mathcal{B}$  es numerable y se puede escribir  $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ .

En primer lugar, veamos que  $K \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$ . En efecto, dado  $x \in K$ , existe  $i \in I$



tal que  $x \in U_i$ , que es abierto, por lo que existe  $r' > 0$  tal que  $B(x, r') \subset U_i$ . Tomamos  $r \in \mathbb{Q}$  tal que  $0 < r < \frac{r'}{2}$  y, como  $\mathbb{Q}^n$  es denso en  $\mathbb{R}^n$  se tiene que  $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$ , por lo que podemos elegir  $q \in \mathbb{Q}^n \cap B(x, r)$ . Entonces,

$$x \in B(q, r) \subset B(x, r') \subset U_i.$$

Por tanto  $B(q, r) \in \mathcal{B}$  y  $K \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$ .

Ahora, veamos que  $\mathcal{B}$  admite un subrecubrimiento finito de  $K$ . Procedamos por reducción al absurdo. Si no fuera así, tendríamos que

- $K \not\subset B_1$ , luego existe  $x_1 \in K$  tal que  $x_1 \notin B_1$ .
- $K \not\subset B_1 \cup B_2$ , luego existe  $x_2 \in K$  con  $x_2 \notin B_1 \cup B_2$ .
- $\forall m \in \mathbb{N}$ ,  $K \not\subset B_1 \cup \dots \cup B_m$ , por lo que existe  $x_m \in K$  con  $x_m \notin B_1 \cup \dots \cup B_m$ .

Así, obtenemos la sucesión  $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset K$ . Por ser  $K$  compacto, existe  $\{x_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $x_{m_k} \rightarrow x \in K \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$ . Por tanto, existe  $j_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in B_{j_0}$  bola abierta, por lo que existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  con  $x_{m_k} \in B_{j_0}$ ,  $\forall k \geq k_0$ . Tomamos ahora  $k \in \mathbb{N}$  con  $k \geq k_0$  y  $m_k > j_0$ . Entonces, tenemos que  $x_{m_k} \in B_{j_0}$  y  $x_{m_k} \notin B_1 \cup \dots \cup B_{m_k}$ , en particular  $x_{m_k} \notin B_{j_0}$ , que es una contradicción. Por tanto, existe  $l \in \mathbb{N}$  tal que

$$K \subset B_1 \cup \dots \cup B_l.$$

Anteriormente vimos que  $B(q, r) \subset U_i$ , por lo que tenemos que para cada  $j = 1, \dots, l$ , existe  $i_j \in I$  tal que  $B_j \subset U_{i_j}$ . Entonces,

$$K \subset B_1 \cup \dots \cup B_l \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_l}.$$

Así, hemos encontrado un recubrimiento finito de  $K$ .

- (ii) Veamos que si  $K \subset \mathbb{R}^n$  no es compacto, entonces existe algún recubrimiento abierto de  $K$  que no admite un subrecubrimiento finito. Existen dos posibles casos:

**Caso 1.** Supongamos que  $K$  no es acotado. Tenemos que  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B(0, j)$ , luego

$K \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B(0, j)$ . Tenemos que  $\mathcal{U} = \{B(0, j)\}_{j \in \mathbb{N}}$  es un recubrimiento abierto de  $K$ , que no admite ningún subrecubrimiento finito, puesto que  $B(0, 1) \cup \dots \cup B(0, k)$  es acotado.

**Caso 2.** Supongamos que  $K$  no es cerrado. Tenemos que existe  $x_0 \in \overline{K} \setminus K$ . Consideremos  $U_j = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}\left(x_0, \frac{1}{j}\right)$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}$ . Tenemos que

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j = \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}.$$

Luego,  $K \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j$  que es un recubrimiento abierto de  $K$ , pero no admite ningún subrecubrimiento finito,

$$K \not\subset U_1 \cup \dots \cup U_k = \mathbb{R}^n / \overline{B} \left( x_0, \frac{1}{k} \right),$$

porque  $x_0 \in \overline{K}$  y entonces  $K \cap B \left( x_0, \frac{1}{k} \right) \neq \emptyset$ .

□

---

**Observación** (Propiedad de Lindelöf). Esta demostración prueba que todo conjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$  (compacto o no) verifica que todo recubrimiento abierto de  $M$  admite un subrecubrimiento numerable.

---

## Capítulo 2

# Continuidad

**Definición 2.1 (Continuidad).** Sea  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  una función entre dos espacios métricos y  $x_0 \in X$ . Se dice que  $f$  es **continua** en  $x_0$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

. Decimos que  $f$  es continua en un subconjunto  $M \subset X$  si es continua en  $x_0, \forall x_0 \in M$ .

**Observación.** Una definición equivalente es

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x \in (B_X(x_0, \delta)) \Rightarrow f(x) \in B_Y(f(x_0), \varepsilon).$$

Es decir,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon).$$

**Proposición 2.1.** Sea  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  y  $x_0 \in X$ . Son equivalentes:

1.  $f$  es continua en  $x_0$ .
2.  $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  con  $x_n \rightarrow x_0$  en  $X$ , entonces la sucesión  $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $f(x_0)$  en  $Y$ .

*Demostración.* (i) Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  una sucesión cualquiera con  $x_n \rightarrow x_0$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , sabemos que existe  $\delta > 0$  tal que si  $d_X(x, x_0) < \delta$ , entonces  $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ . Tenemos que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$  se tiene que  $d_X(x_n, x_0) < \delta$ . Por tanto,  $\forall n \geq n_0$  se tiene que  $d_Y(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ .

(ii) Supongamos que  $f$  no es continua en  $x_0$ . Así, existe un  $\varepsilon > 0$  tal que  $\forall \delta > 0$  existe  $x_\delta \in X$  tal que  $d_X(x_\delta, x_0) < \delta$  y  $d_Y(f(x_\delta), f(x_0)) \geq \varepsilon$ . Si  $n \in \mathbb{N}$  podemos tomar  $x_n \in X$  tal que  $d_X(x_n, x_0) < \delta = \frac{1}{n}$  y  $d_Y(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$ . Por tanto, tenemos que  $x_n \rightarrow x_0$  en  $X$ , pero  $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$  en  $Y$ .

□

**Observación.** Si  $f$  no es continua en  $x_0$ , tenemos que existe una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  tal que

$$d_Y(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto,  $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$  y ninguna subsucesión suya converge a  $f(x_0)$ .

**Proposición 2.2.** Las funciones  $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow x + y$  y  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow x \cdot y$ , son continuas en  $\mathbb{R}^2$  (con las normas  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ ).

*Demostración.* Sea  $\{z_n = (x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $z_n \rightarrow (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . Tenemos que  $x_n \rightarrow x_0$  e  $y_n \rightarrow y_0$  en  $\mathbb{R}$ . Ahora,

$$s(x_n, y_n) = x_n + y_n \rightarrow x_0 + y_0 = s(x_0, y_0).$$

De forma similar,

$$p(x_n, y_n) = x_n \cdot y_n \rightarrow x_0 \cdot y_0 = p(x_0, y_0).$$

Así, tenemos que  $s$  y  $p$  son continuas. □

**Proposición 2.3.** Sean  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  y  $g : (Y, d_Y) \rightarrow (Z, d_Z)$ . Supongamos que  $f$  es continua en  $x_0$  y  $g$  es continua en  $f(x_0)$ . Entonces  $g \circ f : (X, d_X) \rightarrow (Z, d_Z)$  es continua en  $x_0$ .

*Demostración.* Dado  $\varepsilon > 0$ , tenemos que existe  $\delta_1 > 0$  tal que si  $d_Y(y, f(x_0)) < \delta_1$ , entonces  $d_Z(g(y), g(f(x_0))) < \varepsilon$ . Así, existe  $\delta > 0$  tal que si  $d_X(x, x_0) < \delta$  entonces  $d_Y(f(x), f(x_0)) < \delta_1$ . Por tanto, si  $d_X(x, x_0) < \delta$ , tenemos que  $d_Z(g(f(x)), g(f(x_0))) < \varepsilon$ . □

**Ejemplo.** Las funciones siguientes son continuas:  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

- $f(x, y) = \cos(xy)$ .
- $g(x, y) = \sin(x + y)^3$ .

**Proposición 2.4.** Sea  $f : (X, d_X) \rightarrow \mathbb{R}^n$  (con  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  o  $\|\cdot\|_\infty$ ). Entonces,  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ . Por tanto,  $f$  es continua en  $x_0 \in X$  si y solo si  $f_1, \dots, f_n$  son continuas en  $x_0$ .

*Demostración.* (i) Supongamos que  $f$  es continua en  $x_0$ . Sea  $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset X$  tal que  $x_j \rightarrow x_0$  en  $(X, d_X)$ . Entonces, tenemos que

$$f(x_j) = (f_1(x_j), \dots, f_n(x_j)) \rightarrow f(x_0) = (f_1(x_0), \dots, f_n(x_0)).$$

Así, tenemos que  $\forall i = 1, \dots, n$ ,  $f_i(x_j) \rightarrow f_i(x_0)$ , por lo que  $\forall i = 1, \dots, n$  se tiene que  $f_i$  es continua.

- (ii) Sea  $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset X$  tal que  $x_j \rightarrow x_0$  en  $(X, d_X)$ . Tenemos que  $\forall i = 1, \dots, n$ ,  $f_i(x_j) \rightarrow f_i(x_0)$ , por lo que  $f(x_j) \rightarrow f(x_0)$  en  $\mathbb{R}^n$  y  $f$  es continua en  $x_0$ . □

**Corolario 2.1.** Sean  $f, g : (X, d_X) \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  y  $g$  son continuas en  $x_0$ , entonces  $f + g$  y  $f \cdot g$  también son continuas en  $x_0$ .

*Demostración.* Consideremos  $h = (f, g) : (X, d_X) \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $h(x) = (f(x), g(x))$ . Tenemos que  $h$  es continua en  $x_0$  por la proposición anterior. Además,

$$\begin{aligned} f + g : (X, d_X) &\xrightarrow{h} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{s} \mathbb{R} \\ x &\rightarrow (f(x), g(x)) \rightarrow f(x) + g(x), \end{aligned}$$

que es continua en  $x_0$ . Similarmente,

$$\begin{aligned} f \cdot g : (X, d_X) &\xrightarrow{h} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{R} \\ x &\rightarrow (f(x), g(x)) \rightarrow f(x) \cdot g(x), \end{aligned}$$

que también es continua en  $x_0$ . □

**Ejemplo.** ■ La función  $u(x, y) = \sin(x + y)^3 + \cos(xy)$  es continua en  $\mathbb{R}^2$ .

■ La función  $w(x, y, z) = \sin(x + y + z)^3 + \cos(xyz + 2xy)$  es continua en  $\mathbb{R}^3$ .

■ La función  $v(x, y, z) = \log(1 + x^2 + y^2)$  es continua en  $\mathbb{R}^3$ .

---

**Observación.** Las proyecciones  $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ , son continuas en  $\mathbb{R}^n$  para  $\forall i = 1, \dots, n$ . En efecto, tenemos que la identidad es continua y sus componentes son  $(\pi_1, \dots, \pi_n)$ ,

$$id(x) = id(x_1, \dots, x_n) = (\pi_1(x), \dots, \pi_n(x)) = (x_1, \dots, x_n).$$


---

**Observación.** Toda aplicación lineal  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es continua (con  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  y  $\|\cdot\|_\infty$ ). En efecto, tenemos que  $T(x) = (T_1(x), \dots, T_m(x)) \in \mathbb{R}^m$  y existe  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$  tal que

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1(x) \\ \vdots \\ T_m(x) \end{pmatrix}.$$

Así, tenemos que  $T_i(x) = \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k$ , que es continua  $\forall i = 1, \dots, m$ . Como las coordenadas son continuas tenemos que  $T$  es continua.

---

---

**Observación.** Veremos que  $\mathcal{M}_{n \times m} \cong \mathbb{R}^{n \cdot m}$ .

---

## 2.1. Continuidad global

---

**Notación.** Sea  $f : X \rightarrow Y$ .

- Para  $y \in Y$  definimos  $f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X : f(x) = y\}$ .
  - Para  $M \subset Y$  definimos  $f^{-1}(M) = \{x \in X : f(x) \in M\}$ .
- 

**Teorema 2.1.** Sea  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ . Son equivalentes:

1.  $f$  es continua en  $X$ .
2.  $\forall V \subset Y$  abierto,  $f^{-1}(V)$  es abierto en  $X$ .
3.  $\forall H \subset Y$  cerrado,  $f^{-1}(H)$  es cerrado en  $X$ .

*Demostración.* **(1)  $\Rightarrow$  (2)** Sea  $V \subset Y$  abierto y  $x_0 \in f^{-1}(V)$ . Tenemos que  $f(x_0) \in V$ , que es abierto en  $Y$ , por lo que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subset V$ . Por ser  $f$  continua en  $X$  existe  $\delta > 0$  tal que  $f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subset V$ , por lo que  $B_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(V)$ .

**(2)  $\Rightarrow$  (1)** Sea  $x_0 \in X$ . Dado  $\varepsilon > 0$  podemos considerar  $V = B_Y(f(x_0), \varepsilon)$ , que es abierto en  $Y$ . Por hipótesis tenemos que  $f^{-1}(V)$  es abierto en  $X$ , por lo que existe  $\delta > 0$  tal que  $B_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(V)$ . Así, nos queda que

$$f(B_X(x_0, \delta)) \subset V = B_Y(f(x_0), \varepsilon).$$

Es decir,  $f$  es continua en  $x_0$ .

**(2)  $\Rightarrow$  (3)** Sea  $H \subset Y$  cerrado, por lo que  $V = Y/H$  es abierto. Así, tenemos que  $f^{-1}(V)$  es abierto en  $X$ , por lo que

$$f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \notin H\} = X/f^{-1}(H).$$

Por tanto,  $f^{-1}(H)$  es cerrado en  $X$ .

**(3)  $\Rightarrow$  (2)** Sea  $V \subset Y$  abierto. Consideramos  $H = Y/V$  cerrado. Tenemos que  $f^{-1}(H)$  es cerrado en  $X$ . Como

$$f^{-1}(H) = \{x \in X : f(x) \notin V\} = X/f^{-1}(V),$$

se sigue que  $f^{-1}(V)$  es abierto en  $X$ . □

- Ejemplo.** 1. Sea  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < 1 + y^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 - 1 < 0\}$ . Sea  $f(x, y) = x^2 - y^2 - 1$ , que es continua en  $\mathbb{R}^2$ . Podemos decir que  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \in (-\infty, 0)\} = f^{-1}((-\infty, 0))$ . Como  $(-\infty, 0)$  es abierto en  $\mathbb{R}$ , tenemos que  $A$  es abierto en  $\mathbb{R}^2$ .
2. Sea  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 + z^2\}$ . Podemos considerar  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \rightarrow x^2 + y^2 - z^2 - 1$ , que es continua. Tenemos, pues que  $B = g^{-1}((-\infty, 0])$  que es cerrado, por lo que  $B$  es cerrado en  $\mathbb{R}^3$ .
3. Sea  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$ . Podemos tomar  $h(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$ , que es continua. Así, tenemos que  $C = h^{-1}(\{0\})$  y como  $\{0\}$  es cerrado en  $\mathbb{R}$ , tenemos que  $C$  es cerrado.

## 2.2. Continuidad y restricciones

**Proposición 2.5.** Sea  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  es continua en  $X$  y sea  $M \subset X$ . Entonces la restricción de  $f$  a  $M$  <sup>a</sup> es continua en  $M$ .

<sup>a</sup>Se define la función de  $f$  restringida a  $M$  como  $f|_M : (M, d_X|_M) \rightarrow (Y, d_Y)$

*Demostración.* Sea  $z_0 \in M \subset X$  y sea  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M$  con  $x_k \rightarrow z_0$  en  $d_X|_M$ , por lo que  $x_k \rightarrow z_0$  en  $d_X$ . Como  $f$  es continua tenemos que  $f(x_k) \rightarrow f(z_0)$ , por lo que  $f|_M$  es continua en  $z_0$ .  $\square$

**Proposición 2.6.** Supongamos que  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  y sea  $A \subset X$  abierto. Si  $f|_A : (A, d_X|_A) \rightarrow (Y, d_Y)$  es continua en  $A$ , entonces  $f$  es continua en  $A$ .

*Demostración.* Sea  $x_0 \in A$  y  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$  con  $x_k \rightarrow x_0$ . Como  $A$  es abierto, existe  $r > 0$  tal que  $B_X(x_0, r) \subset A$ . Por otro lado, existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall k \geq k_0, x_k \in B_X(x_0, r)$ . Así, como  $\{x_k\}_{k \geq k_0} \subset A$ , tenemos que  $x_k \rightarrow x_0$  por lo que  $f(x_k) \rightarrow f(x_0)$  <sup>1</sup>. Por tanto,  $f$  es continua en  $x_0$ .  $\square$

**Ejemplo.** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Consideremos  $A = \mathbb{R}^2 / \{(0, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$ , que es abierto en  $\mathbb{R}^2$ . Tenemos que  $f|_A(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  es continua en  $A$ . Por la proposición anterior tenemos que  $f$  es continua en todos los puntos de  $A$ . Veamos si es continua en  $(0, 0)$ . Dado  $\lambda \in \mathbb{R}$  consideramos  $M_\lambda = \{(x, y) : y = \lambda x\}$ .

<sup>1</sup>Hemos usado que el límite de dos sucesiones que difieren en un número finito de términos es el mismo.

Tenemos que

$$f|_{M_\lambda}(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{\lambda x^2}{x^2 + \lambda^2 x^2} = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}.$$

Como  $f|_{M_\lambda}$  es constante en  $M_\lambda$ , tenemos que  $f|_{M_\lambda}$  es continua. Sin embargo, tenemos que  $f$  no es continua en  $(0, 0)$ , puesto que adopta valores distintos para cada  $M_\lambda$ .

**Lema 2.1 (Lema de pegado).** Sea  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ . Supongamos que  $X = F_1 \cup \dots \cup F_m$  es una unión finita de cerrados tales que  $f|_{F_i} : (F_i, d_X|_{F_i}) \rightarrow (Y, d_Y)$  es continua  $\forall i = 1, \dots, m$ . Entonces,  $f$  es continua en  $X$ .

*Demostración.* Sea  $H \subset Y$  cerrado. Tenemos que

$$f^{-1}(H) = \{x \in X : f(x) \in H\} = \bigcup_{1 \leq i \leq m} \{x \in F_i : f(x) \in H\} = \bigcup_{1 \leq i \leq m} (f|_{F_i})^{-1}(H).$$

Tenemos que  $(f|_{F_i})^{-1}(H)$  es cerrado relativo en  $(F_i, d_X|_{F_i})$  y que  $F_i$  es cerrado en  $X$ . Por tanto,  $(f|_{F_i})^{-1}(H)$  es cerrado en  $X$ <sup>2</sup> y  $f$  es continua en  $X$ .  $\square$

**Ejemplo.** 1. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  con

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, & \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 1 \end{cases}.$$

Podemos considerar

$$F_1 = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 1\} \text{ y } F_2 = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 1\},$$

que son cerrados. Tenemos que  $\mathbb{R}^3 = F_1 \cup F_2$  pero  $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ . Tenemos que  $f|_{F_1}$  y  $f|_{F_2}$  son continuas, por lo que  $f$  es continua en  $\mathbb{R}^3$ .

2. Veamos que  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow \max\{x, y\}$  es continua. Podemos considerar los conjuntos cerrados

$$F_1 = \{(x, y) : y \geq x\} \text{ y } F_2 = \{(x, y) : y \leq x\}.$$

Tenemos que  $f|_{F_1}(x, y) = y$  y  $f|_{F_2}(x, y) = x$ , que son continuas por lo que  $f$  es continua en  $\mathbb{R}^2$ .

**Teorema 2.2.** Sea  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  continua en  $X$ <sup>a</sup>. Si  $K \subset X$  es compacto, entonces  $f(K)$  es compacto en  $Y$ .

<sup>a</sup>Bastaría con que fuese continua en  $K$ .

*Demostración.* Sea  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset f(K)$  una sucesión cualquiera. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , como  $y_n \in f(K)$ , existe  $x_n \in K$  tal que  $f(x_n) = y_n$ . Así, tenemos la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ .

<sup>2</sup>Hemos usado que  $C$  es cerrado relativo en  $(Z, d_Z)$  si y solo si existe  $F$  cerrado en  $X$  tal que  $C = Z \cap F$ .



Como  $K$  es compacto, existe  $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $x_{n_j} \rightarrow x_0 \in \mathbb{K}$ . Por ser  $f$  continua, tenemos que  $f(x_{n_j}) = y_{n_j} \rightarrow f(x_0) \in f(K)$ . Así, hemos visto que la sucesión  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene una subsucesión convergente en  $f(K)$ .  $\square$

**Corolario 2.2.** Sean  $(X, d_X)$  un espacio métrico y  $f : (X, d_X) \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $X$ . Si  $K \subset X$  es compacto,  $f$  alcanza un valor máximo y un valor mínimo en  $K$ , es decir,  $\exists x_m, x_M \in K$  tales que  $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ ,  $\forall x \in K$ .

*Demostración.* Como  $K \subset X$  es compacto, tenemos que  $f(K)$  es compacto en  $\mathbb{R}$ , por lo que  $f(K)$  es cerrado y acotado. Por ser  $f(K)$  acotado en  $\mathbb{R}$  existen  $\alpha = \inf(f(K))$  y  $\beta = \sup(f(K))$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Tenemos que  $\alpha, \beta \in \overline{f(K)} = f(K)$  puesto que  $f(K)$  es cerrado. Así, existen  $x_m, x_M \in K$  tales que  $\alpha = f(x_m)$  y  $\beta = f(x_M)$ .  $\square$

**Observación.** Si  $M \subset \mathbb{R}$  es acotado, entonces  $\alpha = \inf(M)$  y  $\beta = \sup(M)$  son puntos adherentes a  $M$ , puesto que  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists x \in M$  tal que

$$x \in M \cap (\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon) = M \cap B(\beta, \varepsilon) \neq \emptyset.$$

**Teorema 2.3 (Normas equivalentes).** En  $\mathbb{R}^n$  todas las normas son equivalentes.

*Demostración.* Sea  $\|\cdot\|$  una norma en  $\mathbb{R}^n$ . Vamos a demostrar que  $\|\cdot\|$  es equivalente a  $\|\cdot\|_\infty$ .

1. Consideramos  $\{e_i\}_{i=1}^n$  la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $M = \sum_{i=1}^n \|e_i\|$ . Tenemos que si

$$x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \leq \sum_{i=1}^n \|x\|_\infty \|e_i\| = M \|x\|_\infty.$$

2. Consideramos  $f : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \|x\|$ . Veamos que  $f$  es continua en  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$  con  $x_k \rightarrow x_0$  en  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ . Vamos a ver que  $f(x_k) \rightarrow f(x_0)$ :

$$|f(x_k) - f(x_0)| = |\|x_k\| - \|x_0\|| \leq \|x_k - x_0\| \leq M \|x_k - x_0\|_\infty \rightarrow 0.$$

3. El conjunto  $S_{\|\cdot\|_\infty} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = 1\}$  es compacto en  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$  puesto que es cerrado y acotado. Por tanto,  $f$  alcanza un valor mínimo en  $S_{\|\cdot\|_\infty}$ :

$$\exists u_m \in S_{\|\cdot\|_\infty}, 0 < \alpha = f(u_m) = \|u_m\| \leq \|u\|, \forall u \in S_{\|\cdot\|_\infty}.$$

Tenemos que  $\|u\| \geq \alpha > 0$ ,  $\forall u \in \mathbb{R}^n$  con  $\|u\|_\infty = 1$ . Por tanto,  $\forall x \neq 0$ ,

$$\|x\| = \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \cdot \|x\|_\infty \right\| = \|x\|_\infty \cdot \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| \geq \|x\|_\infty \cdot \alpha.$$

Así, nos queda que  $\alpha \cdot \|x\|_\infty \leq \|x\|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Corolario 2.3.** En un espacio vectorial real de dimensión finita todas las normas son equivalentes.

*Demostración.* Sea  $E$  con  $\dim(E) = n$ , entonces  $E$  es linealmente isomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Ejemplo.** En el espacio  $\mathcal{M}_{n \times m}$  de matrices  $n \times m$ , todas las normas son equivalentes.

## 2.3. Conexión

**Definición 2.2 (Intervalo).** Un conjunto  $I \subset \mathbb{R}$  es un **intervalo** si  $\forall x, y \in I$  con  $x < y$  y  $\forall z \in \mathbb{R}$  con  $x < z < y$ , entonces  $z \in I$ .

**Teorema 2.4 (Teorema de Bolzano).** Sean  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo y sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Si  $f$  toma dos valores, entonces toma los valores intermedios. Es decir, si  $\exists x, y \in I$  con  $f(x) = u, f(y) = v$  y  $u < w < v$ , entonces existe  $z \in I$  tal que  $f(z) = w$ .

**Corolario 2.4.** Sea  $M \subset \mathbb{R}$ . Son equivalentes:

1.  $M$  es un intervalo.
2. No existe ninguna función continua  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(M) = \{0, 1\}$ .
3. Para toda función continua  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(M) \subset \{0, 1\}$ , se tiene que  $f$  es constante.

*Demostración.* (1)  $\Rightarrow$  (2) Es trivial a partir del teorema de Bolzano.

(2)  $\Rightarrow$  (1) Supongamos que  $M$  no es un intervalo. Por tanto, existen  $x, y \in M$  con  $x < y$  y existe  $z \in \mathbb{R}$  con  $x < z < y$  con  $z \notin M$ . Definimos  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < z \\ 1, & t > z \end{cases}.$$

Está claro que  $f(M) = \{0, 1\}$  y que  $f$  es continua en  $M$ .

(2)  $\Longleftrightarrow$  (3) Trivial.  $\square$

**Definición 2.3 (Conjunto conexo).** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $M \subset X$ .

- (a) Diremos que  $M$  es **conexo** cuando  $\forall f : M \rightarrow \mathbb{R}$  continua con  $f(M) \subset \{0, 1\}$ , entonces  $f$  es constante.
- (b) Diremos que  $M$  es **desconexo** cuando no es conexo, es decir, existe alguna  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $f(M) = \{0, 1\}$ .

**Teorema 2.5.** Sea  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  una función continua entre espacios métricos. Si  $M \subset X$  es conexo, entonces  $f(M)$  es conexo.

*Demostración.* Sea  $h : f(M) \rightarrow \mathbb{R}$  continua con  $h(f(M)) \subset \{0, 1\}$ . Tenemos que  $h \circ f|_M$  es continua y  $h \circ f|_M(M) \subset \{0, 1\}$ . Por ser  $M$  conexo, tenemos que  $h \circ f|_M$  es constante, por lo que  $h$  es constante.  $\square$

**Lema 2.2.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subset X$ . Consideramos  $\chi_A : X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & x \in X/A \\ 1, & x \in A \end{cases}.$$

Entonces  $\chi_A$  es continua en  $X$  si y solo si  $A$  es abierto y cerrado a la vez.

*Demostración.* (i) Como  $\chi_A$  es continua, hemos visto anteriormente que el siguiente conjunto es cerrado:

$$A = \{x \in X : \chi_A(x) = 1\} = \chi_A^{-1}(\{1\}).$$

Tenemos que

$$X/A = \{x \in X : \chi_A(x) = 0\} = \chi_A^{-1}(\{0\}).$$

De esta última igualdad obtenemos que  $A$  es abierto, por lo que podemos concluir que  $A$  es abierto y cerrado a la vez.

(ii) Sea  $U \subset \mathbb{R}$  abierto.

- Si  $0, 1 \in U$ , entonces  $\chi_A^{-1}(U) = X$ , que es abierto.
- Si  $0, 1 \notin U$ , entonces  $\chi_A^{-1}(U) = \emptyset$ , que es abierto.
- Si  $1 \in U$  y  $0 \notin U$ , tenemos que  $\chi_A^{-1}(U) = A$ , que es abierto.
- Si  $1 \notin U$  y  $0 \in U$ , tenemos que  $\chi_A^{-1}(U) = X/A$  que es abierto.

$\square$

**Ejemplo.** Consideremos  $X = \mathbb{R}$  y  $M = \mathbb{R}/\{z\}$ . Tenemos que

$$A = (-\infty, z) = (-\infty, z] \cap M,$$

por lo que  $A$  es abierto y cerrado relativo en  $M$ .

**Teorema 2.6.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $M \subset X$ . Son equivalentes:

1.  $M$  es desconexo.
2.  $M = A \sqcup B$  donde  $A$  y  $B$  son abiertos relativos y no vacíos de  $(M, d|_M)$ .
3. Existe  $A \subset M$  con  $\emptyset \neq A \neq M$  tal que  $A$  es abierto y cerrado relativo en  $(M, d|_M)$ .

*Demostración.* **(1)  $\Rightarrow$  (2)** Si  $M$  es desconexo, existe  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $f(M) = \{0, 1\}$ . Consideramos  $A = f^{-1}(\{0\})$  y  $B = f^{-1}(\{1\})$ . Es fácil ver que  $A$  y  $B$  son cerrados relativos en  $(M, d|_M)$  y que  $A \cap B = \emptyset$ . Además,  $A = M/B$  y  $B = M/A$ , por lo que  $A$  y  $B$  son a la vez abiertos y cerrados relativos en  $(M, d|_M)$ .

**(2)  $\Rightarrow$  (3)** Si  $\emptyset \neq A \neq M$ , entonces  $A$  es abierto y  $B = M/A$  es abierto por lo que  $A$  también es cerrado.

**(3)  $\Rightarrow$  (1)** Basta considerar  $f = \chi_A : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in M/A \\ 1, & x \in M/B \end{cases}.$$

Por el lema tenemos que  $f$  es continua en  $M$  y  $f(M) = \{0, 1\}$ . □

**Definición 2.4 (Separación).** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $M \subset X$ . Una **separación** de  $M$  en  $X$  es un par  $(U, V)$  donde:

1.  $U$  y  $V$  son conjuntos abiertos en  $X$ .
2.  $M \subset U \cup V$ .
3.  $M \cap U, M \cap V \neq \emptyset$ .
4.  $M \cap U \cap V = \emptyset$ .

**Teorema 2.7.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $M \subset X$ . Entonces  $M$  es desconexo si y solo si  $M$  admite una separación en  $X$ .

*Demostración.* **(i)** Si  $M$  es desconexo, existen  $A, B \subset X$  abiertos relativos en  $M$  tales que  $M = A \sqcup B$ . Por ser abiertos relativos, existen  $U, V \subset X$  abiertos tales que  $A = U \cap M$  y  $B = V \cap M$ . Es fácil comprobar que  $(U, V)$  es una separación.

**(ii)** Si  $M$  admite una separación tenemos que  $M \subset (U \cap M) \sqcup (V \cap M)$ , que son abiertos relativos en  $M$ , por lo que se cumple **(2)** del teorema anterior y  $M$  es desconexo. □

**Ejemplo.** Sea  $M = \mathbb{Q}$  subespacio de  $X = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ .

**(a)** Un ejemplo de abierto y cerrado relativo en  $M$  es

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : \pi < x < \pi + 1\} = \mathbb{Q} \cap (\pi, \pi + 1).$$

Está claro que  $A$  es abierto relativo en  $\mathbb{Q}$  por ser la intersección de un abierto en  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{Q}$ . Además, tenemos que

$$A = \mathbb{Q} \cap [\pi, \pi + 1].$$

Por la misma razón,  $A$  es también cerrado relativo en  $\mathbb{Q}$ , por lo que  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  es desconexo.

(b) Sea  $C \subset \mathbb{Q}$  conexo. Nos preguntamos, cuántos elementos puede contener  $C$ ?

**Lema 2.3 (Lema del pivote).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $\{M_i\}_{i \in I}$  una familia de subconjuntos conexos de  $X$ . Supongamos que  $\bigcap_{i \in I} M_i \neq \emptyset$ . Entonces,  $\bigcup_{i \in I} M_i$  es conexo.

*Demostración.* Sea  $x_0 \in \bigcap_{i \in I} M_i \neq \emptyset$  y sea  $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ . Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  continua con  $f(M) \subset \{0, 1\}$ . Supongamos que  $f(x_0) = 0$ . Como  $M_i$  es conexo  $\forall i \in I$ , tenemos que  $f|_{M_i}$  es constante y por tener  $x_0 \in \bigcap_{i \in I} M_i$ ,  $f|_{M_i} \equiv 0$ . Luego,  $f \equiv 0$  en  $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ .  $\square$

**Lema 2.4 (Lema de la percha).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $\{M_i\}_{i \in I}$  una familia de subconjuntos conexos de  $X$ . Supongamos que existe  $M_0 \subset X$  conexo tal que  $M_i \cap M_0 \neq \emptyset$ ,  $\forall i \in I$ . Entonces,  $M_0 \cup \left( \bigcup_{i \in I} M_i \right)$  es conexo.

*Demostración.* Sean  $M = M_0 \cup \left( \bigcup_{i \in I} M_i \right)$  y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  continua con  $f(M) \subset \{0, 1\}$ .

- Como  $M_0$  es conexo, tenemos que  $f|_{M_0}$  es constante. Por ejemplo, supongamos que  $f|_{M_0} \equiv 0$ .
- Tenemos que  $\forall i \in I$ ,  $f|_{M_i}$  es constante y  $M_i \cap M_0 \neq \emptyset$ , por lo que  $f|_{M_i} \equiv 0$ .

$\square$

**Observación.** La unión de dos conjuntos no tiene por qué se conexas. En efecto, podemos considerar en  $\mathbb{R}$  el conjunto  $M = (0, 1) \cup (3, 4)$ , que claramente no es conexo.

**Teorema 2.8.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $M \subset X$ . Si  $M$  es conexo y  $M \subset A \subset \overline{M}$ , entonces  $A$  es conexo. En particular, si  $M$  es conexo,  $\overline{M}$  también lo es.

*Demostración.* Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  continua con  $f(A) \subset \{0, 1\}$ . Tenemos que  $f|_M$  es constante y ponemos que  $f|_M \equiv 0$ . Sea  $x \in A \subset \overline{M}$ . Tenemos que existe  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Por ser  $f$  continua, tenemos que  $f(x_n) \rightarrow f(x) = 0$ , puesto que  $f(x_n) = 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Así, hemos demostrado que  $f|_A$  es constante.  $\square$

**Definición 2.5 (Camino).** Un **camino** en un espacio métrico  $(X, d)$  es una función continua  $\sigma : [a, b] \rightarrow X$ .

**Ejemplo.** En  $\mathbb{R}^n$ , dados  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , tenemos que el segmento que los une  $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n : t \rightarrow (1 - t)x + ty$  es un camino.

**Definición 2.6 (Conexión por caminos).** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $M \subset X$ . Se dice que  $M$  es **conexo por caminos** si  $\forall x, y \in M$  existe  $\sigma : [a, b] \rightarrow X$  camino tal que  $\text{Im}(\sigma) \subset M$ ,  $\sigma(a) = x$  y  $\sigma(b) = y$ <sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Es decir, cada par de puntos en  $M$  se puede unir mediante un camino en  $M$ .

**Definición 2.7 (Convexidad).** Un conjunto  $C \subset \mathbb{R}^n$  es **convexo** si  $\forall x, y \in C$  el segmento  $\sigma(t) = (1 - t)x + ty$ ,  $t \in [0, 1]$ , está contenido en  $C$ .

**Observación.** Está claro que si un conjunto es convexo, es conexo por caminos. Puede darse que sea conexo por caminos pero que no sea convexo.

**Teorema 2.9.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Si  $M \subset X$  es conexo por caminos, entonces  $M$  es conexo.

*Demostración.* Sea  $M$  conexo por caminos y sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  continua con  $f(M) \subset \{0, 1\}$ . Dados  $x, y \in M$ , existe  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  camino. Tenemos que  $f \circ \sigma$  es continua y  $f \circ \sigma([a, b]) \subset \{0, 1\}$ . Por ser  $[a, b]$  conexo, tenemos que  $f \circ \sigma$  es constante en  $[a, b]$ , es decir,  $f(\sigma(a)) = f(\sigma(b))$  y  $f(x) = f(y)$ , por lo que  $f|_M$  es constante.  $\square$

**Teorema 2.10.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y conexo. Entonces,  $U$  es conexo por caminos.

*Demostración.* Fijamos  $x_0 \in U$ . Dado  $x \in U$  veamos que existe un camino de  $x$  a  $x_0$ . Consideremos

$$A = \{x \in U : \exists \text{ camino en } U \text{ de } x_0 \text{ a } x\}.$$

- Está claro que  $A \neq \emptyset$ , puesto que  $x_0 \in A$ .
- Veamos que  $A$  es abierto relativo en  $U$ . Si  $x \in A \subset U$ , tenemos que existe  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \subset U$ . Tenemos que  $\forall y \in B(x, r)$  podemos conectar  $x$  con  $y$  mediante un segmento, por lo que existe un camino en  $U$  de  $x_0$  a  $x$  y de  $x$  a  $y$ , luego existe uno de  $x_0$  a  $y$ . Así,  $B(x, r) \subset A$ .
- Veamos que  $A$  es cerrado relativo en  $U$ . Para ello, veamos que  $U/A$  es abierto. Dado  $x \in U/A$  existe  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \subset U$ . Tenemos que  $\forall y \in B(x, r)$ , no existe camino en  $U$  de  $x_0$  a  $y$ . Si existiera, existiría un camino en  $U$  de  $x_0$  a  $x$ , que es una contradicción. Por tanto,  $B(x, r) \subset U/A$ , por lo que  $A$  es cerrado relativo en  $U$ .
- Por ser  $U$  conexo y  $A \neq \emptyset$ , debe ser que  $A = U$ .

$\square$

**Ejemplo.** En general, conexo no implica conexo por caminos. En efecto, podemos considerar  $M = \{(0,0)\} \cup \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x}\right) : 0 < x \leq 1 \right\} \subset \mathbb{R}^2$ . Si  $f : (0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(x) = \left(x, \sin \frac{1}{x}\right)$ , tenemos que

- $f$  es continua en  $(0,1]$ .
- $(0,1]$  es convexo.
- Si  $G_f(x)$  es la segunda parte de la unión, entonces  $G_f = f((0,1])$  es convexo.
- $(0,0) \in \overline{G_f}$ .
- $(0,0) \cup G_f = M$  es conexo.

Sin embargo, gráficamente se puede ver que no podemos conectar los puntos  $(1, \sin 1)$  y  $(0,0)$  por un camino contenido en  $M$ .

## 2.4. Continuidad uniforme

**Definición 2.8 (Continuidad uniforme).** Sean  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  y  $M \subset X$ . Se dice que  $f$  es **uniformemente continua** en  $M$  si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que si  $x, x' \in M$  con  $d_X(x, x') < \delta$ , entonces  $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ .

**Observación.** ■  $f : X \rightarrow Y$  es continua en  $X$  si y solo si  $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que  $d_X(x, x') < \delta$  implica que  $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ .

- $f : X \rightarrow Y$  es uniformemente continua en  $X$  si y solo si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que si  $x, x' \in X$  con  $d_X(x, x') < \delta$  entonces  $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ .

**Observación.** Si  $f$  es uniformemente continua en  $M$ , entonces  $f|_M$  es continua en  $M$ .

**Teorema 2.11.** Sean  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  y  $M \subset X$ . Son equivalentes:

1.  $f$  es uniformemente continua en  $M$ .
2.  $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$  con  $d_X(x_n, y_n) \rightarrow 0$ , entonces  $d_Y(f(x_n), f(y_n)) \rightarrow 0$ .

**Demostración.** **(1)  $\Rightarrow$  (2)** Sean  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$  con  $d_X(x_n, y_n) \rightarrow 0$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , por la continuidad uniforme existe  $\delta > 0$  tal que si  $d_X(x, x') < \delta$  entonces  $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ . Existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$  se tiene que  $d_X(x_n, y_n) < \delta$ , por lo que  $d_Y(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$ .

**(2)  $\Rightarrow$  (1)** Supongamos que  $f$  no es uniformemente continua en  $M$ . Así, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\forall \delta > 0$  existen  $x_\delta, x'_\delta \in M$  con  $d_X(x_\delta, x'_\delta) < \delta$  pero  $d_Y(f(x_\delta), f(x'_\delta)) \geq \varepsilon$ . En

concreto, si tomamos  $\delta = \frac{1}{n}$  tenemos que existen  $x_n, y_n \in M$  tal que

$$d_X(x_n, y_n) < \frac{1}{n}, \quad d_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon.$$

Así, tenemos dos sucesiones  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$  tal que  $d_X(x_n, y_n) \rightarrow 0$  pero  $d_Y(f(x_n), f(y_n)) \not\rightarrow 0$ . □

**Teorema 2.12.** Sea  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  y  $K \subset X$  compacto. Si  $f$  es continua en  $K$ , entonces  $f$  es uniformemente continua en  $K$ .

*Demostración.* Sean  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$  tales que  $d_X(x_n, y_n) \rightarrow 0$ . Como  $K$  es compacto, existe  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  subsucesión con  $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in K$ . Consideramos ahora  $\{y_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ , que tiene una subsucesión  $\{y_{n_{k_j}}\}_{j \in \mathbb{N}}$  tal que  $x_{n_{k_j}} \rightarrow x'_0 \in K$ . Tenemos que

$$d_X(x_0, x'_0) \leq d_X(x_0, x_{n_{k_j}}) + d_X(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) + d_X(y_{n_{k_j}}, x'_0) \rightarrow 0.$$

Así, tenemos que  $x_0 = x'_0$ . Como  $f$  es continua en  $x_0 \in X$ , tenemos que

$$d_Y(f(x_{n_{k_j}}), f(y_{n_{k_j}})) \leq d_Y(f(x_{n_{k_j}}), f(x_0)) + d_Y(f(x_0), f(y_{n_{k_j}})) \rightarrow 0.$$

Si suponemos que  $f$  no es uniformemente continua en  $K$ , existe  $\varepsilon > 0$  y existen  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$  tales que  $d_X(x_n, y_n) \rightarrow 0$  pero  $d_Y(f(x_n), f(y_n)) \not\rightarrow 0$ . Esto supone una contradicción con lo que hemos visto anteriormente. □

**Ejemplo.** La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(x) = x^2$  es continua pero no es uniformemente continua en  $\mathbb{R}$ . En efecto, si  $\delta > 0$  tenemos que si  $x \rightarrow \infty$ ,

$$|f(x) - f(x + \delta)| = |x^2 - (x + \delta)^2| = 2x\delta + \delta^2 \rightarrow \infty.$$

Otra forma de verlo es tomar  $x_n = n$  e  $y_n = n + \frac{1}{n}$ . Tenemos que

$$d(x_n, y_n) = \left| n + \frac{1}{n} - n \right| = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Sin embargo, nos queda que

$$d(f(x_n), f(y_n)) = \left| n^2 - \left( n + \frac{1}{n} \right)^2 \right| = 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2 \not\rightarrow 0.$$

**Definición 2.9 (Función Lipschitz).** Se dice que  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  es **Lipschitz** si existe  $K \geq 0$  tal que

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq K \cdot d_X(x, x'), \quad \forall x, x' \in X.$$



**Observación.** Es fácil ver que si  $f$  es de Lipschitz entonces  $f$  es uniformemente continua.

**Proposición 2.7.** Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo y supongamos que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable con derivada acotada en  $I$ . Entonces,  $f$  es Lipschitz en  $I$  y por tanto uniformemente continua.

*Demostración.* Existe  $K \geq 0$  tal que  $|f'(t)| \leq K, \forall t \in I$ . Sean  $x, y \in I$ , por el Teorema del Valor Medio tenemos que existe  $\xi \in (x, y)$  tal que

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y).$$

Por tanto, tenemos que

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| |x - y| \leq K |x - y|, \forall x, y \in I.$$

□

**Ejemplo.** Sea  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ . Tenemos que  $f$  es uniformemente continua en  $[0, \infty)$ . En efecto, sabemos que para  $\varepsilon > 0$ , existe  $R > 0$  tal que si  $x > R$  entonces  $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ .

- Como  $[0, R]$  es compacto, existe  $\delta > 0$  tal que si  $x, y \in [0, R]$  con  $|x - y| < \delta$ , entonces  $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ .
- Si  $x, y \geq R$  tenemos que  $|f(x) - f(y)| < \frac{2\varepsilon}{3}$ .
- Si  $x \leq R < y$  con  $|x - y| < \delta$ , tenemos que  $|x - R| < \delta$ , por lo que

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(R)| + |f(R)| + |f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

**Lema 2.5.** Sea  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  uniformemente continua en  $X$ . Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  es de Cauchy, entonces  $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy.

*Demostración.* Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  una sucesión de Cauchy. Por ser  $f$  uniformemente continua, si  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $d_X(x, y) < \delta$ , entonces  $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ . Como  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n, m \geq n_0$ ,

$$d_X(x_n, x_m) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon.$$

□

**Teorema 2.13 (Teorema de extensión).** Sean  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  espacios métricos, siendo  $(Y, d_Y)$  completo. Sean  $M \subset X$  y  $f : M \rightarrow Y$  uniformemente continua en  $M$ . Entonces  $f$  admite una extensión  $\bar{f} : \bar{M} \rightarrow Y$  uniformemente continua en  $\bar{M}$  (es decir,  $\bar{f}$  es uniformemente continua en  $\bar{M}$  y  $\bar{f}|_M = f$ ).

*Demostración.* Sea  $x_0 \in \overline{M}$ , tenemos que existe  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$  con  $x_n \rightarrow x_0$ . Por tanto,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy. Por ser  $f$  uniformemente continua, es tenemos que  $f$  transforma sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy. Así,  $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy. Por ser  $Y$  completo, tenemos que existe  $y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \in Y$ . Definimos  $\bar{f}(x_0) = y_0$ . Veamos que hemos definido bien  $\bar{f}(x_0)$ , es decir, que si  $\{x'_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$  con  $x'_n \rightarrow x_0$ , entonces  $f(x'_n) \rightarrow y_0$ . En efecto

$$d_Y(f(x'_n), y_0) \leq d_Y(f(x'_n), f(x_n)) + d_Y(f(x_n), y_0) \rightarrow 0.$$

Hemos utilizado que  $d_Y(f(x'_n), f(x_n)) \rightarrow 0$  puesto que  $d_X(x'_n, x_n) \rightarrow 0$  por tender ambas sucesiones al mismo límite y ser  $f$  uniformemente continua en  $M$ . Está claro que  $\bar{f}|_M = f$  por definición. Veamos que  $\bar{f}$  es uniformemente continua en  $\overline{M}$ . Hay dos posibles casos:

- Si  $x, y \in M$ , como  $\bar{f}|_M = f$  es trivial que se cumple la condición de continuidad uniforme.
- Si  $x, y \in \overline{M}$  tomamos sucesiones  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$  con  $x_n \rightarrow x$  e  $y_n \rightarrow y$ . Así,  $\forall n \in \mathbb{N}$  se tiene que

$$d_Y(\bar{f}(x), \bar{f}(y)) \leq d_Y(\bar{f}(x), f(x_n)) + d_Y(f(x_n), f(y_n)) + d_Y(f(y_n), \bar{f}(y)).$$

Esta expresión tiende a 0 si  $d_X(x, y) \rightarrow 0$  por la convergencia de las sucesiones  $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}, \{f(y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  a  $\bar{f}(x)$  y  $\bar{f}(y)$ , respectivamente, y a la continuidad uniforme de  $\bar{f}$  en  $M$  por ser  $\bar{f}|_M = f$ .

□

**Ejemplo.** Consideremos  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ . Está claro que  $f$  es continua en  $(0, 1]$  pero no es uniformemente continua en este intervalo puesto que no admite ninguna extensión continua a  $[0, 1]$  porque no existe  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x}$ .

## 2.5. Teorema del punto fijo de Banach

**Definición 2.10 (Función contractiva).** Se dice que  $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$  es **contractiva** si existe  $0 \leq \alpha < 1$  tal que  $d(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y)$ ,  $\forall x, y \in X$ .

**Teorema 2.14 (Teorema del punto fijo de Banach).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo. Toda aplicación contractiva  $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$  tiene un único punto fijo, es decir, un único  $x \in X$  tal que  $f(x) = x$ . Además,  $\forall x_0 \in X$  la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  definida por  $x_{n+1} = f(x_n)$  verifica que  $x_n \rightarrow x_0$ .

*Demostración.* Sea  $x_0 \in X$  y  $\forall n \geq 1$  definimos  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Consideramos pues la sucesión  $\{f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots\}$ .

Veamos que la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy en  $(X, d)$ . Tenemos que

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq \alpha \cdot d(x_{n-1}, x_n) \leq \dots \leq \alpha^n \cdot d(x_0, x_1).$$

Sea  $m > n$ , haciendo un cálculo similar tenemos que

$$\begin{aligned}
 d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\
 &\leq \alpha^{m-1}d(x_1, x_0) + \alpha^{m-2}d(x_1, x_0) + \cdots + \alpha^n d(x_1, x_0) \\
 &= \alpha^n (1 + \alpha + \cdots + \alpha^{m-1-n}) d(x_1, x_0) \leq \alpha^n \left( \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \right) d(x_1, x_0) \\
 &= \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Así, está claro que la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy. Como  $(X, d)$  es completo, existe  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in X$ . Como  $f$  es continua, tenemos que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Veamos que el punto fijo que hemos calculado es único. Sea  $y \in X$  con  $y \neq x$ , por lo que  $d(y, x) > 0$ , y  $f(y) = y$ . Tenemos que

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) < d(x, y).$$

Esto es una contradicción, por lo que debe ser que  $x = y$ . □

## Capítulo 3

# Límites en $\mathbb{R}^n$

**Definición 3.1 (Límite).** Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$  y sea  $x_0 \in S'$ . Se dice que  $l \in \mathbb{R}^m$  es **límite** de  $f$  en  $x_0$  si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon.$$

Denotaremos  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  (o también  $l = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in S} f(x)$ ).

**Proposición 3.1.** En límite, si existe, es único.

*Demostración.* Si  $l, l' \in \mathbb{R}^m$  son posibles límites, tenemos que  $\forall \varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $0 < \|x - x_0\| < \delta$  entonces  $\|f(x) - l\|, \|f(x) - l'\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Así,

$$\|l - l'\| \leq \|l - f(x)\| + \|f(x) - l'\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como esto es cierto  $\forall \varepsilon > 0$ , debe ser que  $\|l - l'\| = 0$ , por lo que  $l = l'$ .  $\square$

**Proposición 3.2.** Para una función  $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $x_0 \in S'$ , son equivalentes

(i)  $l = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in S} f(x).$

(ii)  $\forall \{x_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset S / \{x_0\}$  con  $x_j \rightarrow x_0$ , se tiene que  $f(x_j) \rightarrow l.$

*Demostración.* (i) Sea  $\{x_j\}_j \in S / \{x_0\}$  con  $x_j \rightarrow x_0$ . Tenemos que  $\forall \varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $0 < \|x - x_0\| < \delta$ , entonces  $\|f(x) - l\| < \varepsilon$ . Como  $x_j \rightarrow x_0$ , tenemos que existe  $j_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall j \geq j_0$ ,  $0 < \|x_j - x_0\| < \delta$ , por lo que  $\|f(x_j) - l\| < \varepsilon$ .

(ii) Supongamos que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq l$ , es decir, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\forall \delta > 0$  existe  $x \in S$  con  $0 < \|x - x_0\| < \delta$  y  $\|f(x) - l\| \geq \varepsilon$ . Así, podemos tomar  $\delta = \frac{1}{j}$  y  $x_j \in S$  tal

que  $0 < \|x_j - x_0\| < \frac{1}{j}$  y  $\|f(x_j) - l\| \geq \varepsilon$ , para  $j \in \mathbb{N}$ . Tenemos que la sucesión  $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset S \setminus \{x_0\}$  converge a  $x_0$  pero su imagen no converge a  $l$ .  $\square$

**Proposición 3.3.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \in S'$  y  $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ . Supongamos que existen  $p = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  y  $q = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ . Entonces,

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = p + q$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) g(x)) = pq$ .
3. Si  $q \neq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p}{q}$ .

*Demostración.* Basta con tomar una sucesión  $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset S \setminus \{x_0\}$  con  $x_j \rightarrow x_0$  y aplicar las propiedades de las sucesiones en  $\mathbb{R}$ . Demostraremos únicamente la tercera afirmación.

Sea  $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset S'$  tal que  $x_j \rightarrow x_0$ . Sabemos que  $f(x_j) \rightarrow p$  y  $g(x_j) \rightarrow q$  en  $\mathbb{R}$ . Si  $q \neq 0$ , existe  $j_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall j \geq j_0$ ,  $g(x_j) \neq 0$ . Dado que  $\left\{ \frac{f(x_j)}{g(x_j)} \right\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  es una sucesión, podemos aplicar las propiedades de las sucesiones en  $\mathbb{R}$  y obtener el resultado deseado:

$$\frac{f(x_j)}{g(x_j)} \rightarrow \frac{p}{q}.$$

$\square$

**Proposición 3.4.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $x_0 \in U$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Son equivalentes:

- (i)  $f$  es continua en  $x_0$ .
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .
- (iii)  $\forall S \subset U$  con  $x_0 \in S'$  se tiene que  $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in S} f(x) = f(x_0)$ .

*Demostración.* Como  $x_0 \in U$ , que es abierto, tenemos que existe  $r > 0$  tal que  $B(x_0, r) \subset U$ , por lo que  $x_0 \in U'$ .

- (i)  $\Rightarrow$  (ii) Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $\|x - x_0\| < \delta$  entonces  $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ , por lo que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .
- (ii)  $\Rightarrow$  (iii) Si  $x \in S$  y  $0 < \|x - x_0\| < \delta$ , entonces  $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ . Por tanto, tenemos que  $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in S} f(x) = f(x_0)$ .
- (iii)  $\Rightarrow$  (ii) En particular, tomando  $S = U$  es trivial.
- (ii)  $\Rightarrow$  (i)  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $x \in U$  y  $0 < \|x - x_0\| < \delta$ , entonces  $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ .

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Si  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $0 < \|x - x_0\| < \delta$ <sup>1</sup> entonces  $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ , por lo que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Sea  $S \subset U$  con  $x_0 \in S'$ .

□

**Ejemplo.** 1. Consideremos la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \sin(x+y), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Podemos ver que  $h(x, y) = \sin(x+y)$  es continua en  $\mathbb{R}^2$  y  $g(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$  es continua en  $\mathbb{R}^2 / \{(0, 0)\} = U$ . Luego  $f$  es continua en  $\mathbb{R}^2 / \{(0, 0)\}$ . Estudiemos la continuidad en  $(0, 0)$ :

$$|f(x, y)| = \left| \frac{xy}{x^2+y^2} \right| |\sin(x+y)| \leq \frac{1}{2} |\sin(x+y)| \rightarrow 0.$$

Así, tenemos que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$  por lo que  $f$  es continua en  $(0, 0)$ .

2. Nos preguntamos si existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ . Dado  $\lambda \in \mathbb{R}$  podemos considerar  $S_\lambda = \{(x, y) : y = \lambda x\}$ . Tenemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), y=\lambda x} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), y=\lambda x} \frac{\lambda x^2}{(1+\lambda^2)x^2} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}.$$

Como depende de  $\lambda$ , debe ser que el límite no existe.

3. Calculemos  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4}{x^4+y^2}$ . Si tomamos el mismo conjunto que antes obtenemos que si  $\lambda \neq 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0, y=\lambda x} \frac{x^4}{x^4+\lambda^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2+\lambda^2} = 0.$$

Sin embargo, esto no nos asegura que exista el límite. En efecto, si tomamos  $y = \lambda x^2$  tenemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), y=\lambda x^2} \frac{x^4}{x^4+\lambda^2 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{(1+\lambda^2)x^4} = \frac{1}{1+\lambda^2}.$$

Lo que nos dice que el límite no existe.

<sup>1</sup>Podemos poner que esto es mayor estrictamente que 0 porque siempre van a haber puntos en cualquier entorno de  $x_0$  que no sean iguales a él.

### 3.1. Coordenadas polares

Como se puede deducir de la imagen, tenemos que  $x = r \cos \theta$  y  $y = r \sin \theta$ , donde  $r \geq 0$  y  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Así, por ejemplo, tenemos que

$$B((0, 0), R) = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\} = \{(r, \theta) : 0 \leq r < R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

El último igual no es un igual, estrictamente. Sin embargo dada  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , si podemos decir que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x) = l$  si y solo si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < r < \delta \Rightarrow |f(r \cos \theta, r \sin \theta) - l| < \varepsilon, \forall \theta \in [0, 2\pi].$$

Diremos que  $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = l$  uniformemente en  $\theta$ .

**Ejemplo.** Tenemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r |\cos \theta| \cdot r \sin \theta}{r} = r |\cos \theta \sin \theta| \leq r \rightarrow 0.$$

**Observación.** El objetivo del ejemplo anterior es hacer desaparecer el ángulo que se cumpla  $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ .