Matemáticas Básicas - Deberes 4

Victoria Eugenia Torroja Rubio

2/10/24

Ejercicio 1. Encontrar dos números complejos cuyo cuadrado sea

$$z_0 := -8 + 6i.$$

Solución 1. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^2 = z_0$, entonces:

$$z = \sqrt{z_0} = \sqrt{-8+6i} = \sqrt{10_{\arctan \frac{6}{-8}}}.$$

Existen dos posibles soluciones:

$$\sqrt{10}_{\arctan \frac{6}{-8} \cdot \frac{1}{2}} = 1 + 3i$$
$$\sqrt{10}_{\arctan \frac{6}{-8} \cdot \frac{1}{2} + 180} = -1 - 3i$$

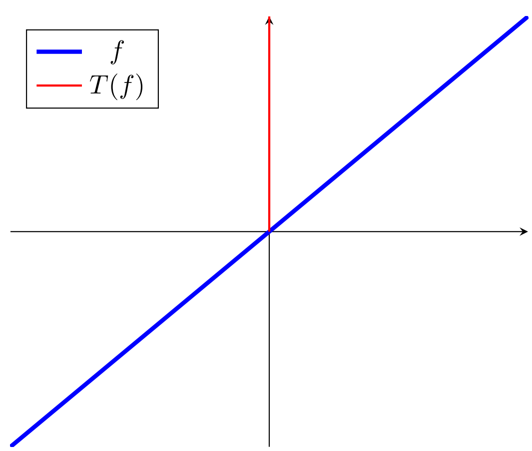
Ejercicio 2. Se define la transformación $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como $T(z) = z^2$. Calcula la imagen por T de las rectas $y = x$, $y = -x$ y $x = 1$. Representa gráficamente las rectas anteriores y sus imágenes por T. Encuentra un subconjunto de $\mathbb{C}$ cuya imagen sea una circunferencia.

Solución 2. Sea $f \subset \mathbb{C}$ la recta $y = x$. Consideramos la recta $y = x$ y $z \in \mathbb{C}$ perteneciente a esta recta. Tenemos que $z = x + xi$, por tanto:

$$T(z) = (x + xi)^2 = 2x^2 i.$$

Dado que $x^2 \geq 0$, la imagen de esta recta es el conjunto $\{z \ : \ z = xi, \ x \geq 0\}$.

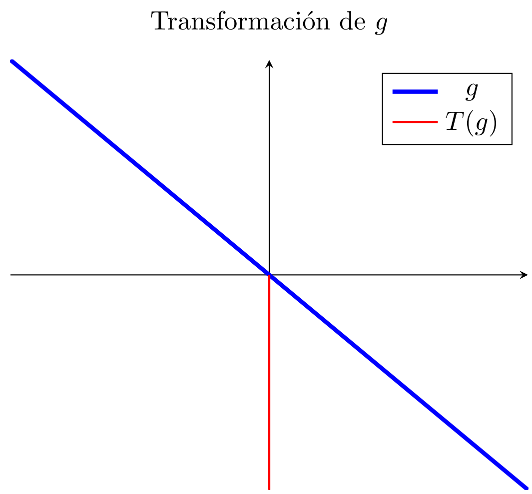
Transformación de f



Sea $g \subset \mathbb{C}$ la recta $y = -x$. Consideramos la recta $y = -x$, entonces tenemos $z \in \mathbb{C}$ tal que $z = x - xi$, por tanto

$$T(z) = z^2 = (x - xi)^2 = -2x^2 i.$$

Como $x^2 \geq 0$, tenemos que la imagen de la recta $y = -x$ será el conjunto $\{z \in \mathbb{C} \,:\, z = xi,\ x \leq 0\}$.



A continuación, sea $h \subset \mathbb{C}$ la recta $x = 1$. Consideramos la recta $x = 1$ y $z \in \mathbb{C}$ tal que z pertenece a la recta mencionada. Por tanto, $z = 1 + yi$ y

$$T(z) = (1 + yi)^2 = \left(1 - y^2\right) + 2yi.$$

Si w pertenece a la transformación de $x = 1$, tenemos que $w = a + bi = \left(1 - y^2\right) + 2yi$. Por todo ello,

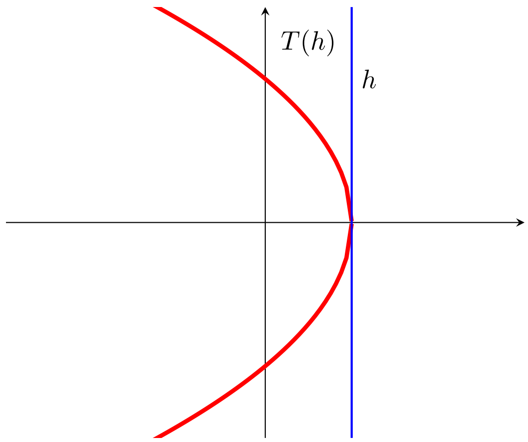
$$\begin{aligned} a &= 1 - y^2 \\ b &= 2y. \end{aligned}$$

De esto concluimos que:

$$\begin{aligned} a &= 1 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ \therefore b &= 2\sqrt{1 - a}. \end{aligned}$$

Como $a, b \in \mathbb{R}$, tenemos que $a \leq 1$.

Transformación de h



En cuanto al último apartado, consideremos el conjunto $S = \left\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = a \ (a \in \mathbb{R}^+)\right\} \subset \mathbb{C}$. Si $w \in S$, tenemos que su transformación será:

$$T(w) = w^2 = \left(|w|_\theta\right)^2 = |w|_{2\theta}^2 = a_{2\theta}^2.$$

Como $\theta \in [0, 2\pi]$, tenemos que $2\theta \in [0, 2\pi]$ (los ángulos superiores a 2π los reducimos a otros que estén en el intervalo $[0, 2\pi]$). Por tanto, la imagen de S será la circunferencia con centro $(0, 0)$ y radio $a^2 \in \mathbb{R}$.