Álgebra Lineal

Victoria Torroja Rubio

9/10/2024 -

Índice general

0.1. Introducción

El cuerpo de los números reales cumple los siguientes requisitos:

$(\mathbb{R}, +)$ es un grupo abeliano:
Definimos suma y producto como

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (a, b) &\to a + b \\ \cdot : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (a, b) &\to a \cdot b. \end{aligned}$$

1. La suma es asociativa
$$\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ (a + b) + c = a + (b + c)\,.$$

2. Existe un elemento neutro
$$\exists ! 0 \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R},\ 0 + a = a + 0 = a.$$

3. Existe el opuesto
$$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists - a \in \mathbb{R},\ a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

4. La suma es conmutativa
$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a + b = b + a.$$

5. El producto es asociativo,
$$\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

6. El producto es distributivo con respecto a la suma (distributivo por la izquierda y por la derecha),
$$\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

7. Existe la unidad,
$$\exists ! 1 \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, 1 \cdot a = a \cdot 1 = a.$$

8. Existe la inversa,
$$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}^1, \exists a^{-1} \in \mathbb{R}, a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

Definición 0.1 (Anillo)**.** Se denomina **anillo** a un conjunto y dos operaciones $(R, +, \cdot)$ que verifica las propiedades (1)-(6). Si se verifica también (7), se llama **anillo con unidad**.

[1] Utilizamos la notación $\mathbb{R}^*$ por sencillez para denotar $\mathbb{R} - \{0\}$

Definición 0.2 (Cuerpo)**.** Se denomina **cuerpo** a un conjunto con al menos dos elementos ($1 \neq 0$) y dos operaciones $(R, +, \cdot)$ que cumple las propiedades (1)-(8). Si también se verifica que la multiplicación es commutativa, decimos que se trata de un **cuerpo abeliano**.

Definición 0.3. Un conjunto $V \neq \emptyset$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial si existen dos operaciones

$$+ : V \times V \to V,\ (\vec{x}, \vec{y}) \to \vec{x} + \vec{y}$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V,\ (a, \vec{x}) \to a \cdot \vec{x}$$

que verifican que

(i) $(V, +)$ es un grupo abeliano.

(ii) Se cumple la propiedad distributiva,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in V,\ a\,(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}.$$

(iii) Se cumple otra propiedad distributiva,

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \vec{x} \in V,\ (a + b)\,\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x}.$$

(iv) Se cumple la propiedad asociativa,

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \vec{x} \in V,\ a\,(b\vec{x}) = (a \cdot b)\,\vec{x}.$$

(v) $\exists 1 \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in V,\ 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Definición 0.4. Se define $\mathbb{R}^n$, con $n \in \mathbb{N}$, como

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) :\ x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Definición 0.5. Se define la suma $+$ en $\mathbb{R}^n$ de la siguiente manera:

$$\forall \vec{x}, \vec{y},\ \vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

Utilizamos las propiedades de $\mathbb{R}$ como cuerpo abeliano para justificar que $(\mathbb{R}^n, +)$ es un grupo abeliano.

Definición 0.6. Definimos el producto escalar en $\mathbb{R}^n$ de la siguiente manera,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ a \cdot \vec{x} = (a \cdot x_1, a \cdot x_2, \ldots, a \cdot x_n).$$

Una consecuencia clara de esto es que para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$0 \cdot \vec{x} = \vec{0}.$$

Al igual que antes, podemos utilizar las propiedades de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ como cuerpo abeliano para justificar que $\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Por las definiciones anteriores tenemos que para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\vec{x} &= (x_1, x_2, \ldots, x_n)\\ &= (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, \ldots, 0) + \cdots + (0, \ldots, x_n)\\ &= x_1 (1, 0, \ldots, 0) + x_2 (0, 1, \ldots, 0) + \cdots + x_n (0, \ldots, 1)\,..\end{aligned}$$

Además, podemos concluir que si

$$x_1 (1, \ldots, 0) + x_2 (0, 1, \ldots, 0) + \cdots + x_n (0, \ldots, 1) = y_1 (1, \ldots, 0) + y_2 (0, 1, \ldots, 0) + \cdots + y_n (0, \ldots, 1),$$

entonces $\forall i, 1 \leq i \leq n$, $x_i = y_i$.

Definición 0.7 (Sistema de ecuaciones homogéneo)**.** Sea H un sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\begin{aligned}&a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \cdots + a_n^1 x_n = 0\\ &\vdots\\ &a_1^m x_1 + a_2^m + \cdots + a_n^m x^n = 0.\end{aligned}$$

donde $m, n \in \mathbb{N}$ y $a_i^j \in \mathbb{R}$. Definimos L como el conjunto de soluciones de H:

$$L = \left\{ \left(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n\right) \ :\ x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n \text{ es solución de } H \ \right\} \subset \mathbb{R}^n.$$

[a]

[a] a_j^i no es exponente sino una forma de numeración.

Teorema 0.1. Si $\vec{x_0}, \vec{y_0} \in L$, se cumple que

$$\vec{x_0} + \vec{y_0} \in L.$$

Demostración. Tenemos que $\forall i,\ 1 \leq i \leq m$,

$$\begin{aligned}
&a_1^i\left(x_0^1 + y_0^1\right) + \cdots + a_n^i\left(x_0^n + y_0^n\right)\\
=&a_1^i x_0^1 + a_1^i y_0^1 + \cdots + a_n^i x_0^n + a_n^i y_0^n\\
=&\underbrace{\left(a_1^i x_0^1 + a_2^i x_0^2 + \cdots + a_n^i x_0^n\right)}_{0} + \underbrace{\left(a_1^i y_0^1 + a_2^i y_0^2 + \cdots + a_n^i y_0^n\right)}_{0}\\
=&0.
\end{aligned}$$

□

Teorema 0.2. Si $\vec{x_0} \in L$ y $a \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$a\vec{x_0} = \left(ax_0^1, ax_0^2, \ldots, ax_0^n\right) \in L.$$

Demostración. Tenemos que para $\forall i,\ 1 \leq i \leq m$,

$$\begin{aligned}
&a_1^i\left(ax_0^1\right) + a_2^i\left(ax_0^2\right) + \cdots + a_n^i\left(ax_0^n\right)\\
=&a\underbrace{\left(a_1^i x_0^1 + a_2^i x_0^2 + \cdots + a_n^i x_0^n\right)}_{0}\\
=&a \cdot 0\\
=&0.
\end{aligned}$$

□

Teorema 0.3. Por lo visto anteriormente, $L \subset \mathbb{R}^n$ es un **subespacio vectorial** sobre $\mathbb{R}$.

Demostración. Muchas de las propiedades de un espacio vectorial automáticamente se heredan a un subespacio vectorial. Las únicas excepciones son la definición de la suma, del producto y la existencia del elemento neutro 0. En este caso, hemos comprobado que la suma está definida en L y que existe la multiplicación $\cdot : \mathbb{R} \times L \to L$ definida en L. Además, $\vec{0} \in L$ es una solución trivial. □

Consideramos un sistema de ecuaciones no homogéneo S:

$$\begin{aligned}
&a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \cdots + a_n^1 x_n = b^1\\
&\vdots\\
&a_1^m x_1 + a_2^m + \cdots + a_n^m x^n = b^m.
\end{aligned}$$

Consideramos que $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$ es el conjunto de las soluciones.

$$\mathcal{L} = \left\{\left(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n\right)\ :\ x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n \text{ es solución de } S\ \right\}.$$

Entonces, ya no se cumple necesariamente que la suma de dos soluciones también es solución. Si $\vec{x_0}, \vec{y_0} \in \mathcal{L}$, $\forall j,\ 1 \leq j \leq m$,

$$\begin{aligned} & a_1^j \left(x_0^1 + y_0^1\right) + a_2^j \left(x_0^2 + y_0^2\right) + \cdots + a_0^j \left(x_0^n + y_0^n\right) \\ = & \left(a_1^j x_0^1 + a_2^j x_0^2 + \cdots + a_n^j x_0^n\right) + \left(a_1^j y_0^1 + a_2^j y_0^2 + \cdots + a_n^j y_0^n\right) \\ = & b^j + b^j = 2b^j \neq b^j. \end{aligned}$$

Si $\vec{X_0} \in L$ y $\vec{x_0} \in \mathcal{L}$, tenemos que

$$\vec{X_0} + \vec{x_0} = b^j \in \mathcal{L}.$$

Capítulo 1

Espacios Vectoriales

Consideramos un cuerpo conmutativo con característica distinta de 2, es decir, $1+1 \neq 0$. A este cuerpo lo llamaremos $\mathbb{K}$.

Definición 1.1 ($\mathbb{K}$-Espacio vectorial)**.** Un conjunto $V \neq \emptyset$ es un $\mathbb{K}$-**espacio vectorial** si se tienen definidas dos aplicaciones

$$\begin{aligned} + : V \times V &\to V \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\to \vec{x} + \vec{y} \\ \cdot : \mathbb{K} \times V &\to V \\ (a, \vec{x}) &\to a \cdot \vec{x}, \end{aligned}$$

tales que verifican que

(1) $(V, +)$ es un cuerpo abeliano.

[Commutatividad.] $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V,\ \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$.

[Asociatividad.] $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V,\ (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$.

[Existencia del elemento neutro.] $\exists \vec{0} \in V, \forall \vec{x} \in V,\ \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$.

[Existencia del opuesto.] $\forall \vec{x} \in V, \exists - \vec{x} \in V,\ \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$. [a]

(2) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \forall a \in \mathbb{K},\ a \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{y}$.

(3) $\forall \vec{x} \in V, \forall a, b \in \mathbb{K},\ (a + b) \cdot \vec{x} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{x}$.

(4) $\forall \vec{x} \in V, \forall a, b \in \mathbb{K},\ (a \cdot b) \cdot \vec{x} = a \cdot (b \cdot \vec{x})$.

(5) $\forall \vec{x} \in V,\ 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

[a] En la propiedad del elemento neutro y del opuesto, como la conmutatividad es un requisito no hay que especificar que el elemento neutro funciona por ambos lados, al igual que el opuesto.

Si considero a $\mathbb{R}$ como un cuerpo, tenemos que $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial (dimensión 2) y un $\mathbb{C}$-espacio vectorial (dimensión 1).

Teorema 1.1. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, entonces se verifica que:

(a) $\forall \vec{x} \in V,\ 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

(b) $\forall \vec{x} \in V, \forall a \in \mathbb{K},\ (-a) \cdot \vec{x} = -a \cdot \vec{x}$.

(c) $\forall a \in \mathbb{K},\ a \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

(d) $a \cdot \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0} \vee a = 0$.

Demostración. **(a)**

$$\begin{aligned} &\vec{x} = (1+0) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} = \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} \\ \iff &-\vec{x} + \vec{x} = -\vec{x} + \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} \\ \iff &0 = 0 \cdot \vec{x}. \end{aligned}$$

Se puede hacer de otra manera:

$$0 \cdot \vec{x} = (0+0) \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} \iff 0 = 0 \cdot \vec{x}.$$

(b)

$$\begin{aligned} &0 \cdot \vec{x} = (a + (-a)) \cdot \vec{x} = a \cdot \vec{x} + (-a) \cdot \vec{x} \\ \iff &-a \cdot \vec{x} = -a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{x} + (-a) \cdot \vec{x} \\ \iff &-a \cdot \vec{x} = (-a) \cdot x. \end{aligned}$$

(c)

$$a \cdot \vec{x} = a \cdot \left(\vec{x} + \vec{0}\right) = a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{0} \iff -a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{x} = -a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{0}.$$

$$\therefore \vec{0} = a \cdot \vec{0}.$$

También se puede hacer de la siguiente manera:

$$a \cdot \vec{0} = a \cdot \left(\vec{0} + \vec{0}\right) = a \cdot \vec{0} + a \cdot \vec{0} \iff 0 = a \cdot \vec{0}.$$

(d) Si $a = 0$, hemos ganado. Si $a \neq 0$, $\exists \dfrac{1}{a} \in \mathbb{K}$. Por tanto,

$$\vec{0} = \frac{1}{a} \cdot \vec{0} = \frac{1}{a} \cdot (a \cdot \vec{x}) = \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot \vec{x} = \vec{x}.$$

□

1.1. Subespacios vectoriales

Definición 1.2 (Subespacio vectorial)**.** Un conjunto $L \neq \emptyset$ y $L \subset V$ es **parte estable** si

(i) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L,\ \vec{x} + \vec{y} \in L$.

(ii) $\forall a \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in V,\ a \cdot \vec{x} \in L$.

Teorema 1.2. Sea $L \neq \emptyset$ y $L \subset V$, entonces L es parte estable si y sólo si L es subespacio vectorial.

Demostración. **(i)** Si L es un subespacio vectorial es trivial.

(ii) Si L es parte estable, tenemos que para $\vec{x} \in L$ se verifica la propiedad conmutativa, asociativa, etc, dado que $L \subset V$. Además, dado que $\cdot : \mathbb{K} \cdot L \to L$ y $(-1) \cdot \vec{x} = -\vec{x}$, tenemos que si $\vec{x} \in L$ entonces $-\vec{x} \in L$. Además, $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0} \in L$. El resto de propiedades se derivan de que $L \subset V$.

□

Definición 1.3 (Combinación lineal)**.** $\vec{x} \in V$ es la **combinación lineal** de $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p$ con coeficientes $a^1, a^2, \ldots, a^p$ si existen $\vec{x}_i \in V$ y $a^i \in \mathbb{K}$, con $p \in \mathbb{N}$ $(1 \leq i \leq p)$ tales que:

$$\vec{x} = a^1 \cdot \vec{x}_1 + a^2 \cdot \vec{x}_2 + \cdots + a^p \cdot \vec{x}_p.$$

[a]

[a] Los a^i no denotan exponente sino que se trata de una forma de numeración.

Nota. Podemos apreciar que, dadas las condiciones del subespacio vectorial, cualquier combinación lineal de vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p \in L$ es un vector de L.

Teorema 1.3. Sea $H \subset V$ con $H \neq \emptyset$. Definimos $L(H)$ como el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de H, es decir:

$$L(H) = \left\{ a^1 \vec{x}_1 + a^2 \vec{x}_2 + \cdots + a^p \vec{x}_p \ : \ p \in \mathbb{N}, \vec{x}_i \in H, a^i \in \mathbb{K} \right\}.$$

Se verifica que

(1) $H \subset L(H)$.

(2) $L(H)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

(3) $L(H)$ es el menor subespacio vectorial que contiene a H. Es decir, si L es un subespacio vectorial y $H \subset L$, entonces $L(H) \subset L$.

Demostración. **(1)** Tenemos que si $\vec{x} \in H$ entonces

$$\vec{x} = \underbrace{1 \cdot \vec{x}}_{\text{combinación lineal}} \in L(H).$$

(2) Sean $\vec{x}, \vec{y} \in L(H)$, queremos ver que $\vec{x}+\vec{y} \in L(H)$. Dado que $\vec{x}, \vec{y} \in L(H)$, se pueden expresar como combinación lineal de otros vectores en H.

$$\exists p \in \mathbb{N},\ \exists \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p \in H,\ \exists a^1, a^2, \ldots, a^p \in \mathbb{K},$$

tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

De manera similar, como $\vec{y} \in L(H)$,

$$\exists q \in \mathbb{N},\ \exists \vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_q \in H,\ \exists b^1, b^2, \ldots, b^p \in \mathbb{K},$$

tales que

$$\vec{y} = b^1\vec{y}_1 + b^2\vec{y}_2 + \cdots + b^q\vec{y}_q.$$

Entonces,

$$\vec{x} + \vec{y} = \left(a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p\right) + \left(b^1\vec{y}_1 + b^2\vec{y}_2 + \cdots + b^q\vec{y}_q\right).$$

Como $\forall \vec{x}_i, \vec{y}_i \in H$, tenemos que $\vec{x}+\vec{y} \in L(H)$.

A continuación, demostramos que si $\vec{x} \in L(H)$ entonces $a \cdot \vec{x} \in L(H)$. Como $\vec{x} \in L(H)$,

$$\exists p \in \mathbb{N},\ \exists \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p \in H,\ \exists a^1, a^2, \ldots, a^p \in \mathbb{K},$$

tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} a \cdot \vec{x} =& a \cdot \left(a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p\right) \\ =& a \cdot \left(a^1\vec{x}_1\right) + a \cdot \left(a^2\vec{x}_2\right) + \cdots + a \cdot \left(a^p\vec{x}_p\right) \\ =& \left(a \cdot a^1\right) \cdot \vec{x}_1 + \left(a \cdot a^2\right) \cdot \vec{x}_2 + \cdots + \left(a \cdot a^p\right) \cdot \vec{x}_p. \end{aligned}$$

Aprovechamos las propiedades de V como espacio vectorial y el hecho de que $H \subset V$ (hemos utilizado la propiedad distributiva). Como $\forall a \cdot a^i \in \mathbb{K}$ y $\vec{x}_i \in H$, $a \cdot \vec{x}$ se trata de una combinación lineal y, por tanto, $a \cdot \vec{x} \in L(H)$.

(3) Si $\vec{x} \in L(H)$, tenemos que $\exists p \in \mathbb{N}$, $\exists \vec{x}_i \in H$, $\exists a^i \in \mathbb{K}$ con $1 \leq i \leq p$, tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Como $H \subset L$, $x_i \in L$ y, como L es un subespacio vectorial, tenemos que $a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p \in L$, por lo que $\vec{x} \in L$.

□

Definición 1.4. $L(H)$ es el subespacio generado por H o H es un sistema de generadores de de $L(H)$. Si $L(H) = V$ diremos que H es sistema de generadores.

1.2. Bases de un espacio vectorial

Definición 1.5. V es **finito generado** si existe un sistema de generadores formado por un número finito de vectores. Es decir, si $\exists \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\} = H$ tal que $V = L(H)$, es decir, $\exists\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\} \subset V$ tales que $\forall \vec{x} \in V, \exists a^1, a^2, \ldots, a^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Definición 1.6. Una familia de vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ es **linealmente dependiente** si uno de ellos es combinación lineal de los otros.

$$\exists i = 1, 2, \ldots, p,\ \vec{x}_L \in L\left(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}\right).$$

Es decir,

$$\begin{aligned} &\exists i = 1, 2, \ldots, p,\ \exists a^1, a^2, \ldots, a^{i-1}, a^{i+1}, \ldots, a^p \in \mathbb{K} \\ &\vec{x}_i = a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^{i-1}\vec{x}_{i-1} + a^{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + a^p\vec{x}_p.. \end{aligned}$$

Es decir, si $\vec{x}_j = \vec{0}$, $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ es dependiente, pues

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + 0 \cdot \vec{x}_{j-1} + 0 \cdot \vec{x}_{j+1} + \cdots + 0 \cdot \vec{x}_p.$$

Teorema 1.4. Sea $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\} \subset V$. Son linealmente dependientes si y solo si $\exists a^1, a^2, \ldots, a^p \in \mathbb{K}$ no todos nulos tales que

$$\vec{0} = a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Demostración. **(i)** Supongamos que la familia es linealmente dependiente. Por tanto, $\exists i = 1, \ldots, p$ tal que $\vec{x}_i \in L\left(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_{i+1}, \ldots, \vec{x}_p\}\right)$. Por tanto, existen $a^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x}_i = a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^{i-1}\vec{x}_{i-1} + a^{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Si sumamos el opuesto a ambos lados tenemos que

$$\vec{0} = \vec{x}_i - \vec{x}_i = a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^{i-1}\vec{x}_{i-1} + (-1)\,\vec{x}_1 + a^{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

(ii) Suponemos que $\exists a^1, a^2, \ldots, a^p \in \mathbb{K}$ no todos nulos tales que

$$a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p = \vec{0}.$$

Como no todos los escalares son nulos, podemos encontrar $a^i \neq 0$, y a^i tiene inversa.

$$\therefore (-1)\,a^i\vec{x}_i = a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^{i-1}\vec{x}_{i-1} + a^{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Aprovechando las propiedades:

$$\vec{x}_i = \frac{-a^1}{a^i}\vec{x}_1 + \cdots + \frac{-a^{i-1}}{a^i}\vec{x}_{i-1} + \frac{-a^{i+1}}{a^i}\vec{x}_{i+1} + \cdots + \frac{-a^p}{a^i}\vec{x}_p.$$

□

Corolario 1.1. La familia de vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\} \subset V$ es **linealmente independiente** si y solamente si

$$a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p = \vec{0} \Rightarrow a^1 = a^2 = \cdots = a^p = 0.$$

Teorema 1.5. Una familia de vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ es linealmente independiente si y solamente si $\forall \vec{x} \in L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}), \exists! a^1, a^2, \ldots, a^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Demostración. **(i)** Si $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ es linealmente independiente y sea $\vec{x} \in L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\})$. Supongamos que existen otros escalares $b^1, b^2, \ldots, b^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = b^1\vec{x}_1 + \cdots + b^p\vec{x}_p.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}\vec{0} =& \vec{x} - \vec{x} = \left(a^1\vec{x}_1 + \cdots a^p\vec{x}_p\right) - \left(b^1 + \cdots + b^p\vec{x}_p\right) \\ =& \left(a^1 - b^1\right)\vec{x}_1 + \cdots + \left(a^p - b^p\right)\vec{x}_p.\end{aligned}$$

Como se trata de una familia linealmente independiente, tenemos que $\forall i,\ 1 \leq i \leq p$,

$$a^i - b^i = 0 \iff a^i = b^i.$$

(ii) Recíprocamente, tenemos que si $a^1, a^2, \ldots, a^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^p\vec{x}_p = \vec{0}.$$

Esto puede pasar si $a^1 = a^2 = \cdots = a^p = 0$. Como a^i son únicos, tenemos que si hay alguno no nulo, la combinación lineal no va a ser nula. Por tanto, será linealmente independiente.

□

Definición 1.7 (Base)**.** Una **base** de un espacio vectorial V es un sistema de generadores linealmente independientes.

Corolario 1.2. Una familia de vectores $B \subset V$ es una base de E si y solo si $\forall \vec{x} \in V$ se expresa de manera única como combinación lineal de elementos de B.

Teorema 1.6. Si $V \neq \{0\}$, es finitamente generado, entonces $\exists \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ es base de V. Es decir, todo espacio vectorial $V \neq \{0\}$ generado por un número finito de vectores tiene una base finita.

Demostración. Sea $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ un sistema de generadores de V. Si $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ son linealmente independientes, forman una base (hemos ganado). Sino, uno se puede expresar como combinación lineal de los otros, por lo que $\exists i = 1, 2, \dots, p$ tal que $\vec{x}_i \in L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_p\})$, por lo que $\exists b^1, b^2, \dots, b^p \in \mathbb{K}$

$$\vec{x}_i = b^1\vec{x}_1 + b^2\vec{x}_2 + \cdots + b^{i-1}\vec{x}_{i-1} + b^{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + b^p\vec{x}_p.$$

Dado que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ es un sistema de generadores de V, $\forall \vec{x} \in V, \exists a^1, a^2, \dots, a^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\begin{aligned}\vec{x} =& a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p \\ =& a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^{i-1}\vec{x}_{i-1} + a^i\left(b^1\vec{x}_1 + b^2\vec{x}_2 + \cdots + b^{i-1}\vec{x}_{i-1} + b^{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + b^p\vec{x}_p\right) + a^{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + a^p\vec{x}_p \\ =& \left(a^1 + a^ib^1\right)\vec{x}_1 + \cdots + \left(a^{i-1} + a^ib^{i-1}\right)\vec{x}_{i-1} + \left(a^ib^{i+1} + a^{i+1}\right)\vec{x}_{i+1} + \cdots + \left(a^ib^p + a^p\right)\vec{x}_p.\end{aligned}$$

Por tanto, el conjunto $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\} - \{x_i\}$ también es un sistema de generadores de V. Si $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_{i+1}, \vec{x}_p\}$ es linealmente independiente, es un sistema de generadores de V. Si es linealmente dependiente repetimos el proceso hasta tener $\{\vec{x}_i\}$, que no puede ser $\vec{0}$, porque $V \neq 0$, y $\{\vec{x}_i\}$ es linealmente independiente. $\square$

Observación. De esto podemos concluir que todo sistema de generadores contiene una base.

Teorema 1.7 (Teorema de Steinitz)**.** Sea $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_p\} \subset V$ una base de V y sea $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q\} \subset V$ linealmente independiente, entonces $q \leq p$ y se puede obtener una nueva base sustituyendo q de los vectores $\vec{y}_i$ por $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$.

Demostración. Se trata de introducir uno por uno los vectores $\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_p\}$ por los vectores de la base dada. Sea $\vec{x}_1 \in V$, entonces $\exists a^1, a^2, \dots, a^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x}_1 = a^1\vec{y}_1 + a^2\vec{y}_2 + \cdots + a^p\vec{y}_p = \sum_{i=1}^{p} a^i\vec{y}_i.$$

Existe al menos un $a^i \neq 0$ (porque $\vec{x}_1$ no es nulo). Sea $a^1 \neq 0$.

$$\vec{y}_1 = \left(a^1\right)^{-1}\vec{x}_1 - \sum_{i=2}^{p}\left(a^1\right)^{-1}a^i\vec{y}_i$$

Entonces, $\forall x \in V, \exists b^1, b^2, \ldots, b^p \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}\vec{x} =& b^1\vec{y}_1 + b^2\vec{y}_2 + \cdots b^p\vec{y}_p \\ =& b^1\left(\frac{1}{a^1}\vec{x}_1 + \left(-\frac{a^2}{a^1}\right)\vec{y}_2 + \cdots + \left(-\frac{a^p}{a^1}\right)\vec{y}_p\right) + b^2\vec{y}_2 + \cdots + b^p\vec{y}_p \\ =& \frac{b^1}{a^1}\vec{x}_1 + \left(b^1\left(-\frac{a^2}{b^1}\right) + b^2\right)\vec{y}_2 + \cdots + \left(b^1\left(-\frac{a^p}{a^1}\right) + b^p\right)\vec{y}_p.\end{aligned}$$

Hemos llegado a la conclusión de que $\{\vec{x}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_p\}$ forman un sistema de generadores de V. Además, son linealmente independientes, pues

$$\vec{0} = b^1\vec{x}_1 + b^2\vec{y}_2 + \cdots + b^p\vec{y}_p \Rightarrow b^1\left(\sum_{i=1}^{p} a^i\vec{y}_i\right) + b^2\vec{y}_2 + \cdots + b^p\vec{y}_p = \vec{0}$$

$$b^1a^1\vec{y}_1 + \sum_{i=2}^{p}\left(b^1a^i + b^i\right)\vec{y}_i = \vec{0}$$

$$\Rightarrow b^1a^1 = 0,\ b^1a^i + b^i = 0,\ i \geq 2.$$

pues $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_p\}$ son una base. Como $a^1 \neq 0$, tenemos que $b^1 = b^i = 0$. Por tanto, $\{\vec{x}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_p\}$ es una base de V.

Supongamos que $i < \text{mín}\,(p, q)$ y que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_i, \vec{y}_{i+1}, \ldots, \vec{y}_p\}$ es sistema de generadores. Entonces, $\exists c^1, c^2, \ldots, c^i, d^{i+1}, \ldots, d^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x}_{i+1} = c^1\vec{x}_1 + c^2\vec{x}_2 + \cdots + c^i\vec{x}_i + d^{i+1}\vec{y}_{i+1} + \cdots + d^p\vec{y}_p = \sum_{j=1}^{i} c^j\vec{x}_j + \sum_{j=i+1}^{p} d^j\vec{y}_j.$$

El procedimiento anterior nos asegura que podemos sustituir $\vec{x}_{i+1}$ por cualquier vector con coeficiente no nulo. Por tanto, tenemos que demostrar que existe un coeficiente del segundo sumatorio no nulo. Si fueran todos nulos, tendríamos que $\vec{x}_{i+1}$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$, esto contradice que sean linealmente independientes. □

Corolario 1.3. Si el espacio vectorial V tiene una base finita, todas las bases de V tienen el mismo número de vectores.

Demostración. Sean $B_1 = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ y $B_2 = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_q\}$ dos bases de V. Como B_1 es una base y B_2 es un conjunto de vectores linealmente independientes, tenemos que todas las bases de V han de ser finitas. Entonces, como B_1 y B_2 son bases y, consecuentemente, linealmente independientes, tenemos que $p \leq q$ y $q \leq p$, por lo que $p = q$. □

Definición 1.8 (Dimensión)**.** La **dimensión** de un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es el número de elementos de sus bases, si son finitas. Si no lo son, diremos que V es de dimensión infinita.

Corolario 1.4. La dimensión de un espacio vectorial coincide con el número máximo de elementos linealmente independientes, y también con el número mínimo de generadores.

Corolario 1.5. Todo conjunto de vectores linealmente independientes puede completarse hasta obtener una base.

Lema 1.1. Si $S \subset V$ es linealmente independiente y $\vec{x} \in V$ y $\vec{x} \notin L(S)$, tenemos que la familia $S \cup \{\vec{x}\}$ es linealmente independiente.

Demostración. Sean $a, a^i \in \mathbb{K}$ y

$$a\vec{x} + a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^p\vec{x}_p = \vec{0}.$$

Si $a \neq 0$, entonces $\vec{x}$ se puede expresar como combinación lineal de S, pero por hipótesis esto no es posible. Por tanto, debe ser que $a = 0$ y, consecuentemente, $\forall a^i = 0$, pues S es linealmente independiente. Por tanto, $S \cup \{\vec{x}\}$ también es linealmente independiente. □

Proposición 1.1. Si V es finitamente generado y L es subespacio vectorial de V, entonces L es finitamente generado y

$$\dim L \leq \dim V.$$

Además,

$$\dim L = \dim V \iff L = V.$$

Demostración. Si $L = \{0\}$ no hay nada que probar (no tiene bases). En caso contrario, existe $\vec{x}_1 \in L$. Si $L = L(\{\vec{x}_1\})$, tenemos que $\vec{x}_1$ es una base. En caso contrario, existe $\vec{x}_2 \in L$ con $\vec{x}_2 \notin L(\{\vec{x}_1\})$. Si $L = L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\})$, $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ forman una base. Sabemos que son linealmente independientes por el lema anterior. En algún momento llegaremos a que $L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\})$ forman una base, pues un corolario anterior nos dice que hay un número máximo de vectores linealmente independientes.

Además, si $\dim L = n$ y $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ es una base de L, por el teorema de Steinitz, también es una base de V. Por tanto,

$$L = L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}) = V.$$

□

Teorema 1.8 (Teorema de apliación de base)**.** Sea L un subespacio vectorial de V y sea $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ una base de L. Entonces existe $\{\vec{u}_{p+1}, \vec{u}_{p+2}, \dots, \vec{u}_n\} \subset V$ tales que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p, \vec{u}_{p+1}, \vec{u}_{p+2}, \dots, \vec{u}_n\}$ son base de V.

Demostración. Si $\dim V = n$ tenemos que existe un número finito de generadores que forman una base de V, y consideramos que los vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ forman una base de L. Entonces, $p \leq n$ y, por el teorema de Steinitz, se puede obtener una nueva base sustituyendo $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ por p vectores de $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$. □

1.3. Suma directa de subespacios.

Notación.

$$\mathcal{P}(V) = \{A \ : \ A \subset V\}.$$

$$\mathcal{L}(V) = \{L \in \mathcal{P}(V) \ : \ L \text{ es subespacio vectorial de } V\}.$$

Por tanto,

$$\mathcal{L}(V) \subset \mathcal{P}(V).$$

Teorema 1.9. $\forall I$ conjunto, $\forall i \in I$, si $L_i \in \mathcal{L}(V)$ entonces

$$\bigcap_{i \in I} L_i \in \mathcal{L}(V).$$

Es decir, la intersección de espacios vectoriales es un espacio vectorial.

Demostración. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \bigcap_{i \in I} L_i$ implica que $\vec{x}, \vec{y} \in L_i, \forall i \in I$.Como L_i son subespacios vectoriales:

$$\vec{x} + \vec{y} \in L_i, \forall i \in I \ \Rightarrow \ \vec{x} + \vec{y} \in \bigcap_{i \in I} L_i.$$

Similarmente, si $\vec{x} \in \bigcap_{i \in I} L_i$ y $a \in \mathbb{K}$, tenemos que $\vec{x} \in L_i, \forall i \in I$. Como L_i son subespacios vectoriales, son parte estable, por lo que

$$a \cdot \vec{x} \in L_i, \forall i \in I \ \Rightarrow \ a \cdot \vec{x} \in \bigcap_{i \in I} L_i.$$

□

Observación. Sin embargo, no tiene que cumplirse necesariamente que $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}(V)$ si $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$.

Ejemplo 1.1. Sean $\{\vec{u}, \vec{v}\} \subset V$ linealmente independientes y $L_1 = L(\{\vec{u}\})$ y $L_2 = L(\{\vec{v}\})$ las rectas que generan. Asumamos que $\vec{u} + \vec{v} \in L_1 \cup L_2$. Sin pérdida de generalidad, $\vec{u} + \vec{v} \in L_1$. Por tanto, $\exists a \in \mathbb{K}$ tal que $\vec{u} + \vec{v} = a\vec{u}$. De esta manera,

$$(a - 1)\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}.$$

Esto es absurdo, pues hemos dicho que estos vectores son linealmente independientes.

Definición 1.9. Si $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$, definimos $L_1 + L_2$ al menor subespacio vectorial generado por la unión.

$$L_1 + L_2 = L(L_1 \cup L_2).$$

Teorema 1.10. Sean $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ y sea $L' = \{\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \,:\, \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2\}$. Tenemos que $L' = L_1 + L_2$.

Demostración. Si $\vec{x}_1 \in L_1$, tenemos que $\vec{x}_1 = \vec{x}_1 + \vec{0} \in L'$, pues $\vec{x}_1 \in L_1$ y $\vec{0} \in L_2$. Por tanto, $L_1 \subset L'$. Similarmente, $L_2 \subset L'$. Consecuentemente, $L_1 \cup L_2 \subset L'$.

Además, tenemos que $L' \in \mathcal{L}(V)$, pues $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L'$ tenemos que $\exists \vec{x}_1, \vec{y}_1 \in L_1$ y $\exists \vec{x}_2, \vec{y}_2 \in L_2$.

$$\vec{x} + \vec{y} = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + (\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \underbrace{(\vec{x}_1 + \vec{y}_1)}_{\in L_1} + \underbrace{(\vec{x}_2 + \vec{y}_2)}_{\in L_2}.$$

Por tanto, $\vec{x} + \vec{y} \in L'$. Similarmente, si $a \in \mathbb{K}$ y $\vec{x} \in L'$ tenemos que existen $\vec{x}_1 \in L_1$ y $\vec{x}_2 \in L_2$ tales que

$$a \cdot \vec{x} = a \cdot (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \underbrace{a\vec{x}_1}_{\in L_1} + \underbrace{a\vec{x}_2}_{\in L_2}.$$

Por tanto, $a \cdot \vec{x} \in L'$. Por tanto, $L' \in \mathcal{L}(V)$.

A continuación demostramos que si $L \in \mathcal{L}(V)$ y $L_1 \cup L_2 \subset L$, entonces $L' \subset L$. Tenemos que $\forall \vec{x} \in L'$ existen $\vec{x}_1 \in L_1$ y $\vec{x}_2 \in L_2$ tales que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$. Por tanto, $\vec{x} \in L$.

$$\therefore L' \subset L.$$

Por todo ello, $L' = L_1 + L_2$. $\square$

Teorema 1.11 (Fórmula de Grassmann)**.** Supongamos que V es de dimensión finita, por lo que todos los conjuntos que vamos a tratar a continuación son de dimensión finita.

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

Demostración. Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\}$ una base de $L_1 \cap L_2$, y sea $v = \dim(L_1 \cap L_2)$. Podemos ampliar esta base hasta obtener una base de L_1 y L_2. Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m, \vec{u}_{m+1} \ldots, \vec{u}_r\}$ una base de L_1. Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m, \vec{v}_{m+1}, \ldots, \vec{v}_s\}$ base de L_2 . Queremos ver que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m, \ldots, \vec{u}_{m+1}, \ldots, \vec{u}_r, \vec{v}_{m+1}, \ldots, \vec{v}_s\}$ es base de $L_1 + L_2$. Primero queremos ver que es sistema de generadores. Sea $\vec{x} \in L_1 + L_2$. Entonces, existen $\vec{x}_1 \in L_1$ y $\vec{x}_2 \in L_2$ tales que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$. Como anteriormente hemos definido bases para L_1 y L_2, tenemos que existen $a^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x}_1 = a^1\vec{u}_1 + a^2\vec{u}_2 + \cdots + a^r\vec{u}_r.$$

Similarmente, existen $b^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x}_2 = b^1\vec{u}_1 + \cdots + b^m\vec{u}_m + b^{r+1}\vec{v}_{r+1} + \cdots + b^s\vec{v}_s.$$

Por tanto, tenemos que $\vec{x}$ se puede expresar como combinación lineal de $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m, \vec{u}_{m+1}, \ldots, \vec{u}_r, \vec{v}_{m+1}, \ldots, \vec{v}_s\}$.

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \sum_{i=1}^{r} a^i\vec{u}_i + \sum_{i=1}^{m} b^1\vec{u}_i + \sum_{i=m+1}^{s} b^i\vec{v}_i.$$

Por tanto, es sistema de generadores, ahora tenemos que ver que son linealmente independientes. Sean $a^i, b^j \in \mathbb{K}$ tales que

$$a^1\vec{u}_1 + a^2\vec{u}_2 + \cdots + a^m\vec{u}_m + \cdots + a^r\vec{u}_{r+1} + \cdots + \cdots + b^{m+1}\vec{v}_{m+1} + \cdots + b^s\vec{v}_s = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{r} a^i\vec{u}_i + \sum_{i=m+1}^{s} b^i\vec{v}_i = \vec{0}.$$

Sea $\vec{y} = \sum_{i=1}^{r} a^i\vec{u}_i$ por lo que $\vec{y} \in L_1$. Entonces,

$$-\vec{y} = \sum_{i=m+1}^{s} b^i\vec{v}_i \in L_2.$$

Por tanto, $\vec{y} \in L_1 \cap L_2$. Entonces, $\vec{y}$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base de la intersección. Es decir, existen $c^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{y} = c^1\vec{u}_1 + c^2\vec{u}_2 + \cdots + c^m\vec{u}_m.$$

Entonces,

$$\vec{0} = \vec{y} - \vec{y} = \sum_{j=1}^{m} c^j\vec{u}_j + \sum_{i=m+1}^{s} b^i\vec{v}_i = \vec{0}.$$

Como la base de L_2 es linealmente independiente (porque es una base), tenemos que $c^1 = c^2 = \cdots = c^r = b^1 = \cdots = b^q = 0$. Consecuentemente, $\sum_{i=1}^{r} a^i\vec{u}_i = \vec{0}$ y, dado que $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\}$ es base de L_1, tenemos que $a^i = 0, \forall i = 1, \ldots, r$. Por tanto, hemos visto que el conjunto que estábamos estudiando es base.

Esta base tiene dimensión $r + s = r + (s + m) - m$. □

Si $L_1 \cap L_2 = \left\{\vec{0}\right\}$, tenemos que $\dim L_1 + \dim L_2 = \dim (L_1 + L_2)$.

Definición 1.10. Sean $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ su suma es directa si $L_1 \cap L_2 = \left\{\vec{0}\right\}$ y se escribe de la siguiente manera:

$$L_1 \oplus L_2.$$

Proposición 1.2. Sean $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$. Entonces

$$L_1 \oplus L_2 \iff \forall \vec{x} \in L_1 + L_2,\ \exists! \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2,\ \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2.$$

Demostración. **(i)** Supongamos que $L_1 \oplus L_2$. Asumimos que existen, $\vec{x}_1, \vec{y}_1 \in L_1$ y $\vec{x}_2, \vec{y}_2 \in L_2$ tales que si $\vec{x} \in L_1 + L_2$ tenemos que

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \vec{y}_1 + \vec{y}_2.$$

Entonces,

$$\vec{0} = (\vec{x}_1 - \vec{y}_1) + (\vec{x}_2 - \vec{y}_2).$$
$$\Rightarrow \vec{x}_1 - \vec{y}_1 = \vec{y}_2 - \vec{x}_2$$

Consecuentemente, $\vec{x}_1 - \vec{y}_1, \vec{y}_2 - \vec{x}_2 \in L_1 \cap L_2$, por tanto, $\vec{x}_1 - \vec{y}_1 = \vec{0} \iff \vec{x}_1 = \vec{y}_1$. Similarmente, $\vec{y}_2 = \vec{x}_2$.

(ii) Suponemos que $\forall \vec{x} \in L_1 + L_2$, $\exists! \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2$, $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$. Queremos ver que $L_1 \cap L_2 = \left\{\vec{0}\right\}$. Sea $\vec{x} \in L_1 \cap L_2$. Tenemos que $\vec{x} = \vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x}$. Tenemos que $\vec{0} \in L_1 \cap L_2$. Como la expresión de $\vec{x}$ ha de ser única, tenemos que $\vec{x} = \vec{0}$, por lo que $L_1 \cap L_2 = \left\{\vec{0}\right\}$.

□

Tenemos que si $L_1, L_2, \ldots, L_k \in \mathcal{L}(V)$,

$$(L_1 + L_2) + L_3 = \{(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + \vec{x}_3 \ : \ \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2, \vec{x}_3 \in L_3\} = L_1 + (L_2 + L_3).$$

Generalmente, esta suma es asociativa, es decir se puede escribir

$$L_1 + L_2 + \cdots + L_k = \{\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_k \ : \ \vec{x}_i \in L_i\}.$$

Definición 1.11. Diremos que la suma $L_1 + L_2 + \cdots + L_k$ es directa si $\forall \vec{x} \in L_1 + L_2 + \cdots + L_k, \exists! \vec{x}_i \in L_i$ tales que $\vec{x} = \sum_{i=1}^{k} \vec{x}_i$. Esto se denotará de la siguiente manera:

$$L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_k.$$

Proposición 1.3. Si $L_1, \ldots, L_k$, entonces $L_1 \oplus \cdots \oplus L_k$ si y solo si $\forall i = 1, \ldots, k$,

$$L_i \cap (L_1 + L_2 + \cdots + L_{i-1} + L_{i+1} + \cdots + L_k) = \left\{\vec{0}\right\}.$$

Demostración. **(i)** Demostramos la primera implicación. Supongamos que $\forall i = 1, \ldots, k$, y sea $\vec{x} \in L_i \cap (L_1 + \cdots + L_{i-1} + L_{i+1} + \cdots + L_k)$. Queremos decir que $\vec{x} = \vec{0}$. Tenemos que, dado que $\vec{x} \in L_i$:

$$\vec{x} = \vec{0} + \cdots + \vec{0} + \vec{x}_i + \vec{0} + \cdots + \vec{0}.$$

Como $\vec{x} \in L_i \cap (L_1 + \cdots + L_{i-1} + L_{i+1} + \cdots + L_k)$, tenemos que $\vec{x} \in L_1 + \cdots + L_{i-1} + L_{i+1} + \cdots + L_k$:

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_{i-1} + \vec{x}_{i+1} + \cdots + \vec{x}_k.$$

Como $L_1 \oplus \cdots \oplus L_k$, tenemos que la expresión de $\vec{x}$ es única, por lo que $\vec{x} = \vec{0}$.

(ii) Demostramos la siguiente implicación. Asumimos que

$$\forall i = 1, \dots, k;\ L_i \cap (L_1 + L_2 + \cdots + L_{i-1} + L_{i+1} + \cdots + L_k) = \left\{\vec{0}\right\}.$$

Sea

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{k} \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{k} \vec{y}_i.$$

Con $\vec{x}_i, \vec{y}_i \in L_i$, tenemos que

$$\vec{0} = (\vec{x}_1 - \vec{y}_1) + \cdots + (\vec{x}_i + \vec{y}_i) + \cdots + (\vec{x}_k + \vec{y}_k).$$

$$\therefore \vec{y}_i - \vec{x}_i = (\vec{x}_1 - \vec{y}_1) + \cdots + (\vec{x}_{i-1} - \vec{y}_{i-1}) + (\vec{x}_{i+1} - \vec{y}_{i+1}) + \cdots + (\vec{x}_k - \vec{y}_k).$$

Por lo que $\vec{y}_i - \vec{x}_i = \vec{0}, \forall i = 1, \dots, k$. Si esto no fuera cierto para algún $\vec{x}_j - \vec{y}_j$, podríamos despejarlo y tendríamos que está en la intersección pero a la vez no es $\vec{0}$, lo cual contradice nuestra hipótesis.

□

Definición 1.12. $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ son **complementarios** si $L_1 \oplus L_2$ y $V = L_1 \oplus L_2$.

$$L_1 \oplus L_2 = V \iff \forall \vec{x} \in V, \exists! \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2,\ \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2.$$

Teorema 1.12. Sea $L \in \mathcal{L}(V)$, entonces existe $L' \in \mathcal{L}(V)$ tal que $L \oplus L' = V$.

Demostración. Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$ una base de L y sea $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \vec{u}_{r+1}, \dots, \vec{u}_n\}$ base de V. La manera de ampliar una base no es única. Sea L' el subespacio generado por los vectores que he añadido a la base de L para formar la base de V, es decir,

$$L' = L(\{\vec{u}_{r+1}, \dots, \vec{u}_n\}).$$

Tenemos que $\forall \vec{x} \in V$, existen $a^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^r\vec{u}_r + a^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + a^n\vec{u}_n.$$

Sea $\vec{x}_1 = a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^r\vec{u}_r \in L$ y $\vec{x}_2 = a^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + a^n \in L'$. Vamos a ver que $L \cap L' = \left\{\vec{0}\right\}$. Sabemos que $\left\{\vec{0}\right\} \subset L \cap L'$. Si $\vec{x} \in L \cap L'$. Entonces existen $a^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^r\vec{u}_r.$$

Como $\vec{x} \in L'$, existen $a^j \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = a^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + a^n\vec{u}_n.$$

Entonces,

$$\vec{0} = \left(a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^r\vec{u}_r\right) - \left(a^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + a^n\vec{u}_n\right).$$

Esto es una combinación lineal de los elementos de una base que me da el vector nulo. Como las bases son linealmente independientes, tenemos que

$$a^1 = \cdots = a^r = a^{r+1} = \cdots = a^n = 0.$$

Por tanto, $\vec{x} = \vec{0}$. Consecuentemente, la suma es directa. □

1.4. Espacio vectorial cociente

Definición 1.13. Definimos la relación de equivalencia:

$$\vec{x}\mathcal{R}\vec{y} \iff \vec{y}-\vec{x} \in L.$$

Si $\vec{x} \in V$,

$$[\vec{x}] = \{\vec{y} \in V \ : \ \vec{y}-\vec{x} \in L\} = \left\{\vec{y} \in V \ : \ \vec{y}-\vec{x} = \vec{l}\right\} = \left\{\vec{x}+\vec{l} \ : \ \vec{l} \in L\right\} = \vec{x}+L$$

Teorema 1.13. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Si $\vec{x}, \vec{y} \in V$ decimos que $\vec{x}R\vec{y}$ si $\vec{x}-\vec{y} \in L$, donde $L \in \mathcal{L}(V)$. Tenemos que R es una relación de equivalencia en V.

Demostración. **(i)** Reflexiva. Si $\vec{x} \in V$, tenemos que

$$\vec{x}-\vec{x} \in \vec{0} \in L.$$

(ii) Simétrica. Si $\vec{x}, \vec{y} \in V$ tal que $\vec{x}R\vec{y}$, tenemos que

$$\vec{x}-\vec{y} \in L \iff \vec{y}-\vec{x} \in L.$$

Pues $\vec{y}-\vec{x} = (-1)(\vec{x}-\vec{y}) \in L$.

(iii) Transitiva. Si $\vec{x}R\vec{y}$ y $\vec{y}R\vec{z}$, tenemos que $\vec{x}-\vec{y} \in L$ y $\vec{y}-\vec{z} \in L$. Como L es espacio vectorial tenemos que:

$$(\vec{x}-\vec{y})+(\vec{y}-\vec{z}) = \vec{x}-\vec{z} \in L.$$

□

Si $\vec{x} \in V$, tenemos que

$$[\vec{x}] = \{\vec{y} \in V \ : \ \vec{y}R\vec{x}\} = \{\vec{y} \in V \ : \ \vec{y}-\vec{x} \in L\} = \left\{\vec{y} \in V \ : \ \exists \vec{l} \in L, \ \vec{y}-\vec{x} = \vec{l}\right\} = \left\{\vec{x}+\vec{l} \ : \ \vec{l} \in L\right\} = \vec{x}+L.$$

Definición 1.14 (Espacio cociente)**.**

$$V/R = V/L = \{\vec{x}+L \ : \ \vec{x} \in V\}.$$

En V/L defino una suma y un producto por escalares:

$$\begin{aligned} + :&V/L \times V/L \to V/L \\ &(\vec{x}+L, \vec{y}+L) \to (\vec{x}+L)+(\vec{y}+L) = (\vec{x}+\vec{y})+L. \end{aligned}$$

Si $\vec{x}+L=\vec{x'}+L$ y $\vec{y}+L=\vec{y'}+L$. Tenemos que ver que si $\vec{x}+L=\vec{y}+L$, entonces $\vec{x'}+L=\vec{y'}+L$. [1] Tenemos que

$$\vec{x'}=\vec{x}+\vec{l} \quad \text{y} \quad \vec{y'}=\vec{y}+\vec{l'}, \quad \text{con } \vec{l},\vec{l'}\in L.$$

$$\vec{x'}+\vec{y'}=\left(\vec{x}+\vec{l}\right)+\left(\vec{y}+\vec{l'}\right)=(\vec{x}+\vec{y})+\left(\vec{l}+\vec{l'}\right).$$

Entonces,

$$\left(\vec{x'}+\vec{y'}\right)-(\vec{x}+\vec{y})=\vec{l}+\vec{l'}\in L.$$

Entonces, $(\vec{x}+\vec{y})\,R\left(\vec{x'}+\vec{y'}\right)$, por lo que sus clases de equivalencia son iguales.

Teorema 1.14. $(V/L,+)$ es un grupo abeliano.

Demostración. **(i)** $\forall \vec{x},\vec{y}\in V$,

$$(\vec{x}+L)+(\vec{y}+L)=(\vec{x}+\vec{y})+L=(\vec{y}+\vec{x})+L.$$

(ii) $\forall \vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V$,

$$((\vec{x}+L)+(\vec{y}+L))+(\vec{z}+L)=((\vec{x}+\vec{y})+L)+(\vec{z}+L)=((\vec{x}+\vec{y})+\vec{z})+L=(\vec{x}+L)+((\vec{y}+L)+(\vec{z}+L)).$$

(iii) Si consideramos la clase $\vec{0}+L$, tenemos que $\forall \vec{x}\in V$,

$$\left(\vec{0}+L\right)+(\vec{x}+L)=\left(\vec{0}+\vec{x}\right)+L=\vec{x}+L.$$

(iv) Si $\vec{x}\in V$, el opuesto será, $-(\vec{x}+L)=(-\vec{x})+L$.

$$(\vec{x}+L)+(-(\vec{x}+L))=(\vec{x}+L)+((-\vec{x})+L)=(\vec{x}-\vec{x})+L=\vec{0}+L.$$

□

El producto por escalares está definido así:

$$\cdot\mathbb{K}\times V/L\to V/L$$
$$\forall a\in\mathbb{K},\forall\vec{x}\in V a\cdot(\vec{x}+L)=(a\vec{x})+L.$$

Queremos ver que se trata de una aplicación. Si $\vec{x'}+L=\vec{x}+L$, queremos ver que $\left(a\vec{x'}\right)+L=(a\vec{x})+L$. Tenemos que $\vec{x'}-\vec{x}\in L$, por lo que $a\vec{x}'-a\vec{x}\in L$. Por tanto,

$$(a\vec{x})+L=\left(a\vec{x'}\right)+L.$$

Observación. Estas operaciones hacen V/L un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

[1] El objetivo, tanto en la suma como en el producto por escalares, es ver que realmente se trata de una aplicación, es decir, si cojo $[\vec{x}]=[\vec{x'}]$ y $[\vec{y}]=[\vec{y'}]$, me tiene que dar que $[\vec{x}+\vec{y}]=[\vec{x'}+\vec{y'}]$.

Teorema 1.15. La dimensión del espacio vectorial V/L se puede expresar como:

$$\dim(V/L) = \dim(V) - \dim(L).$$

Demostración. Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\}$ base de L y sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \ldots, \vec{u}_n\}$ una base de V. Si $i = 1, \ldots, r$, tenemos que

$$\vec{u}_i = \vec{u}_i - \vec{0} \in L \Rightarrow \vec{u}_i + L = \vec{0} + L.$$

Vamos a demostrar que $\{\vec{u}_{r+1} + L, \ldots, \vec{u}_n + L\}$ base de V/L. Primero vemos que es un sistema de generadores. Si $\vec{x} \in V$, queremos ver que la clase de $\vec{x}$ se puede expresar como combinación lineal de estas clases. Existen $a^j \in \mathbb{K}$ tales que:

$$\vec{x} = \underbrace{a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^r\vec{u}_r}_{\in L} + a^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + a^n\vec{u}_n.$$

Entonces, $\vec{x}$ está relacionado con $a^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + a^n\vec{u}_n$. Por tanto,

$$\vec{x} + L = \left(a^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + a^n\vec{u}_n\right) + L = a^{r+1}\left(\vec{u}_{r+1} + L\right) + \cdots + a^n\left(\vec{u}_n + L\right).$$

Por tanto, $\{\vec{u}_{r+1} + L, \ldots, \vec{u}_n + L\}$ es un sistema de generadores de V/L. Ahora tenemos que ver que son linealmente independientes.

$$b^{r+1}\left(\vec{u}_{r+1} + L\right) + \cdots + b^n\left(\vec{u}_n + L\right) = \vec{0} + L.$$

Tenemos que

$$\left(b^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + b^n\vec{u}_n\right) + L = \vec{0} + L.$$

Entonces,

$$b^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + b^n\vec{u}_n - \vec{0} \in L.$$

Entonces, podemos escribir la expresión anterior como combinación lineal de la base de L:

$$b^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + b^n\vec{u}_n = b^1\vec{u}_1 + \cdots + b^r\vec{u}_r.$$

$$\Rightarrow \left(-b^1\right)\vec{u}_1 + \left(-b^2\right)\vec{u}_2 + \cdots + \left(-b^r\right)\vec{u}_r + \cdots + b^n\vec{u}_n = \vec{0}.$$

Dado que $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \ldots, \vec{u}_n\}$ es una base de V , $b^1 = b^2 = \cdots = b^r = \cdots = b^n = 0$. $\square$

Observación. Podemos formar la base de un espacio cociente V/L a partir de la expansión de la base de L para obtener una base de V.

Capítulo 2

Aplicaciones Lineales

Definición 2.1 (Aplicación Lineal)**.** Sean V y V' son espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$.Una aplicación $f : V \to V'$ es lineal si

(a) $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})\,,\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in V$.

(b) $f(a\vec{x}) = af(\vec{x})\,,\ \forall a \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in V$.

Definición 2.2. Un **monomorfismo** de V en V' es una aplicación lineal inyectiva. Un **epimorfismo** es una aplicación lineal sobreyectiva. Un **isomorfismo** es una aplicación lineal biyectiva (es homomorfismo y epimorfismo a la vez).

Ejemplo 2.1. **(a)** Tenemos que $L \in \mathcal{L}(V)$,

$$\begin{aligned} i : L &\to V \\ \vec{x} &\to \vec{x}. \end{aligned}$$

Esta aplicación es un monomorfismo.

(b) Si $L \in \mathcal{L}(V)$, la aplicación

$$\begin{aligned} p : V &\to V/L \\ \vec{x} &\to \vec{x} + L \end{aligned}$$

Es un epimorfismo.

(c) Sean $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ una base de V, la aplicación

$$\begin{aligned} f : V &\to \mathbb{K}^n \\ \vec{x} &\to \left(a^1, \ldots, a^n\right). \end{aligned}$$

Donde, $\vec{x} = a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^n\vec{u}_n$. Entonces f es un isomorfismo.

Proposición 2.1. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal.

(a) Si $L \in \mathcal{L}(V)$

$$f(L) = \{f(\vec{x}) \in V' \ : \ \vec{x} \in L\} \in \mathcal{L}(V').$$

(b) $f\left(\vec{0}\right) = \vec{0}$ y $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$.

(c) Si $L' \in \mathcal{L}(V')$,

$$f^{-1}(L') = \{\vec{x} \in V \ : \ f(\vec{x}) \in L'\} \in \mathcal{L}(V).$$

(d) $0 : V \to V'$ tal que $\vec{x} \to \vec{0}$ es una aplicación lineal.

Demostración. **(a)** Queremos ver que $\forall \vec{x'}, \vec{y'} \in f(L) \Rightarrow \exists \vec{x}, \vec{y} \in L,\ f(\vec{x}) = \vec{x'}$ y $f(\vec{y}) = \vec{y'}$. Tenemos que ver que la suma y el producto por escalares está bien definidas.

$$\vec{x'} + \vec{y'} = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = f(\vec{x} + \vec{y}) \in f(L).$$

Similarmente, para el producto por escalares, si $a \in \mathbb{K}$,

$$a\vec{x'} = af(\vec{x}) = f(a\vec{x}) \in f(L).$$

(b) Tenemos que $f\left(\vec{0}\right) = f(0 \cdot \vec{x}) = 0f(\vec{x}) = \vec{0}$. Similarmente,

$$f(-\vec{x}) = f((-1)\vec{x}) = -f(\vec{x}).$$

Otra demostración es:

$$f(\vec{x}) + f(-\vec{x}) = f(\vec{x} + (-\vec{x})) = f\left(\vec{0}\right) = \vec{0}.$$

(c) Sean $\vec{x}, \vec{y} \in f^{-1}(L')$, entonces $f(\vec{x}), f(\vec{y}) \in L'$. Como L' es subespacio vectorial,

$$f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \in L'.$$

Por tanto,

$$f(\vec{x} + \vec{y}) \in L' \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in f^{-1}(L').$$

Para el producto por escalares, si $a \in \mathbb{K}$, $\vec{x} \in f^{-1}(L')$,

$$f(\vec{x}) \in L' \Rightarrow af(\vec{x}) = f(a\vec{x}) \in L' \Rightarrow a\vec{x} \in f^{-1}(L).$$

□

Corolario 2.1. **(a)** Imagen. $\mathrm{Im}(f) = f(V) = \{f(\vec{x}) \ : \ \vec{x} \in V\} \in \mathcal{L}(V')$.

(b) Núcleo. $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}\left(\{\vec{0}\}\right) = \left\{\vec{x} \in V \ : \ f(\vec{x}) = \vec{0}\right\} \in \mathcal{L}(V)$.

Demostración. Como V y $\left\{\vec{0}\right\}$ son subespacios vectoriales su imagen y preimagen, respectivamente, también serán subespacios vectoriales por la proposición 2.1. □

Proposición 2.2. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal, entonces:

(a) f es epimorfismo $\iff$ $\operatorname{Im}(f) = V'$.

(b) f es monomorfismo $\iff$ $\operatorname{Ker}(f) = \left\{\vec{0}\right\}$.

Demostración. **(a)** Es la definición de sobreyectividad.

(b) Primera implicación. Tenemos que $f\left(\vec{0}\right) = \vec{0}$. Si $f(\vec{x}) = \vec{0}$, tenemos que $\vec{x} = \vec{0}$ (porque f es inyectiva). Segunda implicación. Supongo que $\operatorname{Ker}(f) = \left\{\vec{0}\right\}$, entonces

$$f(\vec{x}) = f(\vec{y}) \Rightarrow f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = f(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} - \vec{y} \in \operatorname{Ker}(f) \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}.$$

□

Proposición 2.3. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal y sea $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\}$ un sistema de generadores de $L \in \mathcal{L}(V)$. Entonces $\{f(\vec{x}_1), \dots, f(\vec{x}_p)\}$ es un sistema de generadores de $f(L)$. [a]

[a] La independencia lineal no se conserva en una aplicación lineal en general.

Demostración. Sea $\vec{x'} \in f(L)$, existe $\vec{x} \in L$ tal que $f(\vec{x}) = \vec{x'}$. Como $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\}$ es un sistema de generadores de L, existen $a^i \in \mathbb{K}$ escalares tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Entonces,

$$\vec{x'} = f\left(a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^p\vec{x}_p\right) = a^1 f(\vec{x}_1) + \cdots + a^p f(\vec{x}_p).$$

□

Teorema 2.1. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal. Entonces, f es un monomorfismo si y solo si $\forall p \in \mathbb{N}, \forall \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\} \subset V$ linealmente independientes, implica que $\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_p)\}$ son linealmente independientes.

Demostración. **(i)** Si f es un monomorfismo y sea $p \in \mathbb{N}$, con $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\} \subset V$ linealmente independientes. Cogemos $a^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$a^1 f(\vec{u}_1) + \cdots + a^p f(\vec{u}_p) = \vec{0}.$$

Como f es una aplicación lineal,

$$\begin{aligned}&a^1 f(\vec{u}_1) + \cdots + a^p f(\vec{u}_p)\\ =&f\left(a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^p\vec{u}_p\right)\\ =&\vec{0}.\end{aligned}$$

Como f es monomorfismo, tenemos que

$$a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^p\vec{u}_p = \vec{0}.$$

Como estos vectores forman una base, tenemos que $a^1 = \cdots = a^p = 0$.

(ii) Lo hacemos por contraposición. Suponemos que f no es inyectiva (no es monomorfismo), por lo que existe $\vec{x} \neq \vec{0}$ tal que $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(f)$. Entonces, $\{\vec{x}\}$ es linealmente independiente y $\{f(\vec{x})\} = \left\{\vec{0}\right\}$ es linealmente dependiente.

□

Teorema 2.2. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal. Entonces f es epimorfismo si y solo si para cada sistema de generadores $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ de V, $\{f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_n)\}$ es sistema de generadores de V'.

Demostración. Sabemos que si $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ es sistema de generadores en V, entonces $\{f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_n)\}$ será sistema de generadores de $\operatorname{Im}(f)$. Si f es epimorfismo, entonces será base de V' y, si es base de V' es porque $\operatorname{Im}(f) = V'$, por lo que es epimorfismo. □

Proposición 2.4. Sean $f : V \to V'$ y $g : V' \to V''$ aplicaciones lineales. Entonces, la composición $g \circ f$ también es lineal.

Demostración. Sean $\vec{x}, \vec{y} \in V$, tenemos que

$$g(f(\vec{x}+\vec{y})) = g(f(\vec{x}+\vec{y})) = g(f(\vec{x}) + f(\vec{y})) = g(f(\vec{x})) + g(f(\vec{y})).$$

Entonces, $g \circ f$ es lineal respecto a la suma. Similarmente, si $a \in \mathbb{K}, \vec{x} \in V$ tenemos que

$$g(f(a\vec{x})) = g(af(\vec{x})) = ag(f(\vec{x})).$$

Por tanto, $g \circ f$ es una aplicación lineal. □

Proposición 2.5. Sea $f : V \to V'$ un isomorfismo (lineal y biyectiva) [a] . Sabemos que existe $f^{-1} : V' \to V$. Entonces, f^{-1} es isomorfismo.

[a] Una función es biyectiva si y sólo si tiene inversa.

Demostración. Solo tenemos que demostrar que es aplicación lineal, porque inversa de una biyección también es biyección. Si $\forall \vec{x'}, \vec{y'} \in V'$, como f es biyectiva, $\exists! \vec{x}, \vec{y} \in V$ tales que $\vec{x'} = f(\vec{x}) \iff \vec{x} = f^{-1}\left(\vec{x'}\right)$ y $\vec{y'} = f(\vec{y}) \iff \vec{y} = f^{-1}\left(\vec{y'}\right)$. Entonces,

$$f^{-1}\left(\vec{x'} + \vec{y'}\right) = f^{-1}\left(f(\vec{x}) + f(\vec{y})\right) = f^{-1}\left(f(\vec{x} + \vec{y})\right) = \vec{x} + \vec{y} = f^{-1}\left(\vec{x'}\right) + f^{-1}\left(\vec{y'}\right).$$

Similarmente, si $a \in \mathbb{K}$ y $\vec{x'} \in V'$, $\exists! \vec{x} \in V$ tal que $f(\vec{x}) = \vec{x'} \iff f^{-1}\left(\vec{x'}\right) = \vec{x}$. Entonces tenemos que,

$$f^{-1}\left(a\vec{x'}\right) = f^{-1}\left(af(\vec{x})\right) = f^{-1}\left(f(a\vec{x})\right) = a\vec{x} = af^{-1}\left(\vec{x'}\right).$$

□

Teorema 2.3. Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ una base de V y sean $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\} \subset V'$. Entonces, $\exists! f : V \to V'$ lineal tal que $f(\vec{u}_i) = \vec{v}_i$.

Demostración. **(i)** Primero demostramos la unicidad, es decir, asumimos que existe y demostramos que debe única. Entonces, asumimos que existe $f : V \to V'$ linal tal que $f(\vec{u}_i) = \vec{v}_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Sea $\vec{x} \in V$, entonces existen $a^i \in \mathbb{K}$ únicos tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^n\vec{u}_n.$$

Entonces,

$$f(\vec{x}) = f\left(a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^n\vec{u}_n\right) = a^1 f(\vec{u}_1) + \cdots + a^n f(\vec{u}_n) = a^1\vec{v}_1 + \cdots + a^n\vec{v}_n.$$

Si exsistese otra función $g : V \to V'$ tal que $g(\vec{u}_i) = \vec{v}_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$, tendríamos que $f(\vec{x}) = g(\vec{x})$, $\forall \vec{x} \in V$.

(ii) Ahora demostramos la existencia. Sea $f : V \to V'$ la aplicación $f(\vec{x}) = x^1\vec{v}_1 + \cdots + x^n\vec{v}_n$, donde $\vec{x} = x^1\vec{u}_n + \cdots + x^n\vec{u}_n$. Tenemos que demostrar que esta aplicación es lineal. Si $\vec{x}, \vec{y} \in V$ queremos ver que $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
f(\vec{x} + \vec{y}) =& f\left(\left(x^1\vec{u}_n + \cdots + x^n\vec{u}_n\right) + \left(y^1\vec{u}_n + \cdots + y^n\vec{u}_n\right)\right)\\
=& f\left(\left(x^1 + y^1\right)\vec{u}_1 + \cdots + (x^n + y^n)\vec{u}_n\right)\\
=& \left(x^1 + y^1\right)\vec{v}_1 + \cdots + (x^n + y^n)\vec{v}_n\\
=& \left(x^1\vec{v}_1 + \cdots + x^n\vec{v}_n\right) + \left(y^1\vec{v}_1 + \cdots + y^n\vec{v}_n\right)\\
=& f(\vec{x}) + f(\vec{y}).
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$f(a\vec{x}) = f\left(a\left(x^1\vec{u}_n + \cdots + x^n\vec{u}_n\right)\right) = f\left(ax^1\vec{u}_1 + \cdots + ax^n\vec{u}_n\right) = af(\vec{x}).$$

□

Podemos ver que

$$f(\vec{u}_i) = f(0\cdot\vec{u}_1 + \cdots + 0\cdot\vec{u}_{i-1} + 1\cdot\vec{u}_i + 0\cdot\vec{u}_{i+1} + \cdots + 0\cdot\vec{u}_n) = 0\cdot\vec{v}_1 + \cdots + 1\cdot\vec{v}_i + \cdots + 0\cdot\vec{v}_n = \vec{v}_i.$$

Corolario 2.2. Sea $f : V \to V'$ lineal y $f(\vec{u}_i) = g(\vec{u}_i), \forall i = 1, \ldots, n$ donde $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ es base, entonces $f = g$.

Definición 2.3. Dos espacios vectoriales V y V' son isomorfos si existe $f : V \to V'$ isomorfismo. Lo expresaremos como $V \approx V'$.

Teorema 2.4. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal. Entonces son equivalentes:

(a) f es isomorfismo.

(b) $\forall \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ base de V, $\{f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_n)\}$ es base de V'.

(c) $\exists \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V tal que $\{f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_n)\}$ es base de V' .

Demostración. Vamos a ver que (a) $\Rightarrow$ (b), que (b) $\Rightarrow$ (c) y que (c) $\Rightarrow$ (a).

(a) $\Rightarrow$ (b) Suponemos que f es un isomorfismo y sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V. Entonces este conjunto es sistema de generadores y son linealmente independientes. Entonces $\{f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_n)\}$ es sistema de generadores de V'. Además, como son linealmente independientes, $\{f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_n)\}$ también son linealmente independientes.

(b) $\Rightarrow$ (c) Evidente.

(c) $\Rightarrow$ (a) Sea $f : V \to V'$ lineal, entonces $\exists \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V, entonces tenemos que $\{f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_n)\}$ es base de V'. Sea $g : V' \to V$, tal que $g = f^{-1}$, la única aplicación lineal tal que $g(f(\vec{u}_i)) = \vec{u}_i, \forall i = 1, \ldots, n$. Entonces, tenemos que f tiene inversa, por lo que es biyectiva y, además, como es aplicación lineal, es isomorfismo.

□

Corolario 2.3. $V \approx V' \iff \dim V = \dim V'$

Demostración. **(i)** Si $V \approx V'$, existe un isomorfismo entre ellos, y podemos encontrar una base con el mismo número de elementos en V' .

(ii) Supongamos que $\dim V = \dim V'$. Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V y $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ base de V' y $f : V \to V'$ la única aplicación lineal tal que $f(\vec{u}_i) = \vec{v}_i, \forall i = 1, \ldots, n$. Como es una aplicación lineal que lleva bases en bases es un isomorfismo.

□

Observación. Si consideramos la relación de equivalencia de que dos espacios vectoriales sean isomorfos, tenemos que el conjunto cociente tiene tantos elementos como biyecciones.

Teorema 2.5.
$$\dim V = \dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Im}(f).$$

Demostración. Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\}$ base de $\operatorname{Ker}(f)$ y sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \vec{u}_{r+1}, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V. Entonces $\dim V = n$ y $\dim \operatorname{Ker}(f) = r$. Vamos a ver que $\{f(\vec{u}_{r+1}), \ldots, f(\vec{u}_n)\}$ es base de $\operatorname{Im}(f)$. Primero tenemos que ver que son sistema de generadores. Sea $\vec{x'} \in \operatorname{Im}(f)$, entonces existe $\vec{x} \in V$ tal que $f(\vec{x}) = \vec{x'}$. Como $\vec{x} \in V$, existen $a^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^n\vec{u}_n.$$

Entonces tenemos que

$$\vec{x'} = f(\vec{x}) = f\left(a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^n\vec{u}_n\right) = fa^1(\vec{u}_1) + \cdots + a^r f(\vec{u}_r) + a^{r+1}f(\vec{u}_{r+1}) + \cdots + a^n f(\vec{u}_n).$$

Tenemos que como $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\}$ es una base de $\operatorname{Ker}(f)$, $f(\vec{u}_i) = \vec{0}, \forall i = 1, \ldots, r$:

$$\vec{x'} = a^{r+1}f(\vec{u}_{r+1}) + \cdots + a^n f(\vec{u}_n).$$

Entonces, $\{f(\vec{u}_{r+1}), \ldots, f(\vec{u}_n)\}$ es sistema de generadores. Ahora vamos a ver que son linealmente independientes. Sean $b^i \in \mathbb{K}$ tal es que

$$b^{r+1}f(\vec{u}_{r+1}) + \cdots + b^n f(\vec{u}_n) = \vec{0}$$
$$\therefore f\left(b^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + b^n\vec{u}_n\right) = \vec{0}$$

Por tanto, $b^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + b^n\vec{u}_n \in \operatorname{Ker}(f)$ y lo podemos poner como combinación lineal de su base (existen $b^i \in \mathbb{K}$ tales que):

$$b^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + b^n\vec{u}_n = b^1\vec{u}_1 + \cdots + b^r\vec{u}_r.$$

$$\therefore -b^1\vec{u}_1 - \cdots - b^r\vec{u}_r + b^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + b^n\vec{u}_n = \vec{0}.$$

Como se trata de una base de V, tenemos que son linealmente independientes y $b^1 = \cdots = b^{r+1} = \cdots = b^n = 0$. Por lo que todos los coeficientes son nulos, $\{f(\vec{u}_{r+1}), \ldots, f(\vec{u}_n)\}$ son linealmente independientes y forman una base de $\operatorname{Im}(f)$. $\square$

Observación. Si $\dim V = \dim V'$ entonces, f es monomorfismo por lo que $\dim \operatorname{Ker}(f) = \vec{0}$. Entonces, $\dim V = \dim V' = \dim \operatorname{Im}(f) \iff \operatorname{Im}(f) = V'$. Es decir, monomorfismo si y solo si epimorfismo si y solo si isomorfismo, es decir, para demostrar que es un isomorfismo solo hay que demostrar que es un monomorfismo!

Definición 2.4 (Endomorfismo)**.** Un **endomorfismo** de V es una aplicación lineal $f : V \to V$.

Definición 2.5 (Automorfismo)**.** Un **automorfismo** de V es un endomorfismo biyectivo de V.

Teorema 2.6. Sea $f : V \to V'$ lineal, entonces $p : V \to V/\operatorname{Ker}(f)$ tal que $\vec{x} \to \vec{x} + \operatorname{Ker}(f)$ es un epimorfismo. Sea $i : \operatorname{Im}(f) \to V'$ tal que $\vec{x'} \to \vec{x'}$ es monomorfismo. Entonces, $\exists! b : V/\operatorname{Ker}(f) \to \operatorname{Im}(f)$ tal que

$$i \circ b \circ p = f : V \to V'.$$

Además, b es isomorfismo.

Demostración. Definimos $b(\vec{x} + \operatorname{Ker}(f)) = f(\vec{x})$.

Unicidad. Suponemos que existe b, $\forall \vec{x} \in V$ tal que $b(\vec{x} + \operatorname{Ker}(f)) = f(\vec{x})$.

Vemos que b está bien definida. Si $\vec{y} \in V$, con $\vec{x} + \operatorname{Ker}(f) = \vec{y} + \operatorname{Ker}(f)$, tenemos que

$$\vec{x} - \vec{y} \in \operatorname{Ker}(f) \Rightarrow f(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}.$$

Entonces,

$$f(\vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = \vec{0} \iff f(\vec{x}) = f(\vec{y}).$$

Entonces,

$$b(\vec{x} + \operatorname{Ker}(f)) = b(\vec{y} + \operatorname{Ker}(f)).$$

Comprobamos que b es lineal. Comenzamos con la suma. Si $\vec{x}, \vec{y} \in V$,

$$\begin{aligned} b((\vec{x} + \operatorname{Ker}(f)) + (\vec{y} + \operatorname{Ker}(f))) =& b((\vec{x} + \vec{y}) + \operatorname{Ker}(f)) \\ =& f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \\ =& b(\vec{x} + \operatorname{Ker}(f)) + b(\vec{y} + \operatorname{Ker}(f)). \end{aligned}$$

Ahora comprobamos el producto por escalares. Sea $a \in \mathbb{K}$ y $\vec{x} \in V$,

$$\begin{aligned} b(a(\vec{x} + \operatorname{Ker}(f))) =& b(a\vec{x} + \operatorname{Ker}(f)) \\ =& f(a\vec{x}) = af(\vec{x}) = a(b(\vec{x} + \operatorname{Ker}(f))). \end{aligned}$$

Comprobamos que b es un epimorfismo.

$$\forall \vec{x'} \in \operatorname{Im}(f) \Rightarrow \exists \vec{x} \in V,\ f(\vec{x}) = \vec{x'}.$$

Por tanto, $f(\vec{x}) = b(\vec{x} + \operatorname{Ker}(f)) = \vec{x'}$. Entonces, $\vec{x'} \in \operatorname{Im}(b)$.

Comprobamos que b es un monomorfismo. Sea $\vec{x} + \operatorname{Ker}(f) \in \operatorname{Ker}(b)$, entonces $f(\vec{x}) = \vec{0}$ por lo que $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(f)$. Concluimos que

$$\vec{x} + \operatorname{Ker}(f) = \vec{0} + \operatorname{Ker}(f).$$

□

Observación. Lo que nos interesa concluir con este teorema es que si $f : V \to V'$ es lineal, entonces

$$\operatorname{Im}(f) \approx V/\operatorname{Ker}(f).$$

Proposición 2.6. Sea L el complementario vectorial de $\operatorname{Ker}(f)$ en V, es decir,

$$L \oplus \operatorname{Ker}(f) = V \Rightarrow \dim L + \dim \operatorname{Ker}(f) = \dim V.$$

La aplicación

$$\begin{aligned} f_L : L &\to \operatorname{Im}(f) \\ \vec{x} &\to f(\vec{x}), \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Demostración. Tenemos que f_L es lineal. Además,

$$\operatorname{Ker}(f_L) = \left\{\vec{x} \in L \ : \ f(\vec{x}) = \vec{0}\right\} = L \cap \operatorname{Ker}(f) = \left\{\vec{0}\right\}.$$

Entonces tenemos que es monomorfismo. Por otro lado queremos ver que,

$$\operatorname{Im}(f_L) = \operatorname{Im}(f).$$

Si $\vec{x'} \in \operatorname{Im}(f)$, existe $\vec{x} \in V$ tal que $\vec{x'} = f(\vec{x})$. Como $\vec{x} \in V$, $\exists \vec{y} \in \operatorname{Ker}(f)$ y $\vec{z} \in L$ tales que

$$\vec{x'} \in \operatorname{Im}(f_L).$$

Es decir,

$$\vec{x'} = f(\vec{x}) = f(\vec{y} + \vec{z}) = f(\vec{y}) + f(\vec{z}) = f(\vec{z}) = f_L(\vec{z}).$$

Es trivial ver que $\operatorname{Im}(f_L) \subset \operatorname{Im}(f)$. Por tanto es epimorfismo y, consecuentemente, isomorfismo. □

Corolario 2.4. Si $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$,

$$(L_1 + L_2)/L_1 \approx L_2/L_1 \cap L_2.$$

Demostración. Si $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$,

$$\dim(L_1 + L_2) - \dim L_1 = \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

Entonces tenemos que,

$$\dim(L_1 + L_2)/L_1 = \dim L_2/L_1 \cap L_2.$$

□

Corolario 2.5. Si $L_1 \subset L_2 \in \mathcal{L}(V)$, entonces

$$(V/L_1)/(L_2/L_1) \approx V/L_2.$$

Teorema 2.7. $\mathrm{Hom}(V,V')$ tiene una estructura de $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Demostración. Sea $\mathrm{Hom}(V,V') = \{f : V \to V' \ : \ f \text{ lineal}\}$. En $\mathrm{Hom}(V,V')$ definimos la suma de la siguiente manera. Si $f,g \in \mathrm{Hom}(V,V')$ definimos

$$\begin{aligned} &f+g : V \to V' \\ &(f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}). \end{aligned}$$

Vamos a ver que $f+g$ es aplicación lineal. Si $\vec{x},\vec{y} \in V$,

$$(f+g)(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}+\vec{y}) + g(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) + g(\vec{x}) + g(\vec{y}) = (f+g)(\vec{x}) + (f+g)(\vec{y}).$$

Si $a \in \mathbb{K}$ y $\vec{x} \in V$,

$$(f+g)(a\vec{x}) = f(a\vec{x}) + g(a\vec{x}) = af(\vec{x}) + ag(\vec{x}) = a(f+g)(\vec{x}).$$

Entonces, $f+g$ es aplicación lineal. Así, vamos a comprobar que $(\mathrm{Hom}(V,V'),+)$ es grupo abeliano. Comprobamos la conmutatividad. Si $\vec{x} \in V$,

$$(f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}) = g(\vec{x}) + f(\vec{x}) = (g+f)(\vec{x}).$$

Aplicamos la conmutatividad en V' como espacio vectorial. Comprobamos la asociatividad. Si $f,g,h \in \mathrm{Hom}(V,V')$,

$$((f+g)+h)(\vec{x}) = (f+g)(\vec{x}) + h(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}) + h(\vec{x}) = f(\vec{x}) + (g+h)(\vec{x}) = (f+(g+h))(\vec{x}).$$

Vamos a ver que $0 \in \mathrm{Hom}(V,V')$, definida por $0(\vec{x}) = \vec{0}, \forall \vec{x} \in V$. Tenemos que si $\vec{x},\vec{y} \in V$,

$$0(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{0} = 0(\vec{x}) + 0(\vec{y}).$$

Si $a \in \mathbb{K}, \vec{x} \in V$,

$$0(a\vec{x}) = \vec{0} = a \cdot 0(\vec{x}) = a \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

Si $f \in \mathrm{Hom}(V,V')$, $\forall \vec{x} \in V$,

$$(f+0)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + 0(\vec{x}) = f(\vec{x}).$$

Entonces, existe el elemento neutro. Vamos a ver la existencia del opuesto. Si $f \in \mathrm{Hom}(V,V')$, tomamos $-f$ tal que $-f(\vec{x}) = (-f)(\vec{x})$. Entonces tenemos que

$$(f+(-f))(\vec{x}) = f(\vec{x}) + (-f)(\vec{x}) = f(\vec{x}) - f(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Entonces,

$$(f+(-f))(\vec{x}) = 0(\vec{x}).$$

Producto por escalares. Si $a \in \mathbb{K}$ y $f \in \mathrm{Hom}(V,V')$, defino $(af)(\vec{x}) = af(\vec{x})$. Vamos a ver que $af \in \mathrm{Hom}(V,V')$.

$$(af)(\vec{x}+\vec{y}) = af(\vec{x}+\vec{y}) = af(\vec{x}) + af(\vec{y}) = (af)(\vec{x}) + (af)(\vec{y}).$$

Similarmente,

Si $b \in \mathbb{K}$ y $\vec{x} \in V$,

$$(af)(b\vec{x}) = af(b\vec{x}) = abf(\vec{x}) = b(af(\vec{x})) = b(f(a\vec{x})).$$

Si $a \in \mathbb{K}$ y $f, g \in \mathrm{Hom}(V, V')$, si $\vec{x} \in V$,

$$(a(f+g))(\vec{x}) = a(f+g)(\vec{x}) = af(\vec{x}) + ag(\vec{x}) = (af)(\vec{x}) + (ag)(\vec{x}) = (af + ag)(\vec{x}).$$

Además,

$$(1f)(\vec{x}) = 1f(\vec{x}) = f(\vec{x}).$$

□

2.1. Ejemplos de aplicaciones lineales

2.1.1. Formas Lineales

Definición 2.6 (Forma lineal)**.** Una **formal lineal** definida en V es una aplicación lineal $\lambda : V \to \mathbb{K}$ [a] .

[a] $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial sobre sí mismo de dimensión 1.

Teorema 2.8. Si λ es una forma lineal no nula, entonces λ es sobreyectiva (epimorfismo).

Demostración. Sea $a \in \mathbb{K}$. Sabemos que $\lambda \neq 0$, por lo que existe $\vec{x}_0 \in V$ tal que $\lambda(\vec{x}_0) = b \neq 0$. Consideramos $\vec{x} = \dfrac{a}{b}\vec{x}_0 \in V$, entonces

$$\lambda(\vec{x}) = \frac{a}{b}\lambda(\vec{x}_0) = a.$$

□

Definición 2.7. Una **recta vectorial** de V es un subespacio vectorial de dimensión 1. Análogamente, un **plano vectorial** de V es un subespacio vectorial de dimensión 2. Un **hiperplano vectorial** de V es un subespacio vectorial de dimensión $\dim V - 1$.

Observación. Los complementarios vectoriales de los hiperplanos son rectas y viceversa.

Si $\lambda : V \to \mathbb{K}$ lineal no nula,

$$\dim \mathrm{Im}(\lambda) = 1.$$

Por tanto, la imagen de λ es una recta en $\mathbb{K}$. Además,

$$\dim V = \dim \mathrm{Im}(\lambda) + \dim \mathrm{Ker}(\lambda).$$

Si $\lambda \neq 0$, tenemos que $\mathrm{Ker}(\lambda)$ es un hiperplano vectorial.

Proposición 2.7. Si $L \in \mathcal{L}(V)$ es un hiperplano vectorial, existe $\lambda : V \to \mathbb{K}$ lineal no nula, tal que $L = \operatorname{Ker}(\lambda)$ [a] .

[a] Esto nos sirve para definir los hiperplanos en dimensión infinita.

Demostración. Sea $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-1}\}$ base de L y sea $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ base de V. Definimos $\lambda : V \to \mathbb{K}$ la única aplicación lineal tal que $\lambda(\vec{u}_i) = 0, \forall i = 1, \dots n-1$, y cogemos $\lambda(\vec{u}_n) = 1$[1]. Entonces $\operatorname{Ker}(\lambda) = L$, pues su núcleo va a ser un hiperplano vectorial y este contiene a la base de L. Un hiperplano vectorial contenido en otro hiperplano vectorial es el mismo. □

2.1.2. Homotecias vectoriales

Definición 2.8 (Homotecia vectorial)**.** Sea $\alpha \in \mathbb{K} - \left\{\vec{0}\right\}$. La **homotecia vectorial** de razón α es la aplicación $h_\alpha : V \to V$ tal que $\vec{x} \to \alpha\vec{x}$.

Teorema 2.9. **(i)** Todas las homotecias vectoriales son automorfismos. Es decir,

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} - \left\{\vec{0}\right\}, h_\alpha \in \operatorname{Aut}(V).$$

(ii) La aplicación $\mathbb{K} - \left\{\vec{0}\right\} \to H(V)$ donde $H(V) = \left\{h_\alpha : \alpha \in \mathbb{K} - \left\{\vec{0}\right\}\right\}$ con $\alpha \to h_\alpha$, es biyectiva.

(iii) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}^*$,

$$h_{\alpha\beta} = h_\alpha \circ h_\beta.$$

Demostración. **(i)** Tenemos que demostrar que es aplicación lineal, pues está claro que es biyectiva.

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, h_\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y} = h_\alpha(\vec{x}) + h_\alpha(\vec{y}).$$

Si $a \in \mathbb{K}$,

$$h_\alpha(a\vec{x}) = \alpha(a\vec{x}) = a h_\alpha(\vec{x}).$$

(ii) Está claro que la aplicación es sobreyectiva, tenemos que comprobar que es inyectiva: Si $h_\alpha = h_\beta$, tenemos que $\forall \vec{x} \in V$,

$$\alpha\vec{x} = \beta\vec{x}.$$

Si V no es nulo, podemos deducir que,

$$\exists \vec{x} \neq \vec{0},\ (\alpha - \beta)\vec{x} = \vec{0} \ \Rightarrow\ \alpha = \beta.$$

Por lo que esta aplicación es inyectiva.

(iii)

$$\forall \vec{x} \in V,\ h_\beta \circ h_\alpha(\vec{x}) = h_\beta(\alpha\vec{x}) = \beta\alpha\vec{x} = h_{\beta\alpha}(\vec{x}).$$

□

[1] Vale cualquier escalar no nulo.

Teorema 2.10. Sea $f : V \to V$ lineal. Entonces f es una homotecia vectorial si y solo si $\forall L \in \mathcal{L}(V)$ recta vectorial $f(L) = L$.

Demostración. **(i)** Si $\alpha \in \mathbb{K}^*$ [2] tal que $f = h_\alpha$, sea $L \in \mathcal{L}(V)$ una recta vectorial. Entonces, existe $\vec{x}_0 \in L^*$ tal que $\{\vec{x}_0\}$ es base de L. Entonces, $L = \{a\vec{x}_0 \ : \ a \in \mathbb{K}\}$. Además, tenemos que

$$h_\alpha(L) = \{\alpha a\vec{x}_0 \ : \ a \in \mathbb{K}\} = L.$$

(ii) Si $\vec{x} \in V^*$, entonces $L(\{\vec{x}\})$ es una recta vectorial. Tenemos que

$$f(L(\{\vec{x}\})) = L(\{\vec{x}\}).$$

Si $\vec{x} \in L(\{\vec{x}\})$,

$$f(\vec{x}) \in L(\{\vec{x}\}) \Rightarrow \exists \alpha_{\vec{x}} \in \mathbb{K},\ f(\vec{x}) = \alpha_{\vec{x}}\vec{x}.$$

Tenemos que ver que α es único. Si $\vec{x}, \vec{y} \in V^*$, tenemos que ver si son linealmente dependientes o linealmente independientes. Si son linealmente dependientes, $\exists a \in \mathbb{K}^*$ tal que

$$\vec{x} = a\vec{y}.$$

Entonces, $f(\vec{x}) = af(\vec{y}) = f(a\vec{y}) = \alpha_{\vec{y}}a\vec{y} = \alpha_{\vec{y}}\vec{x}$. Tenemos que

$$(\alpha_{\vec{x}} - \alpha_{\vec{y}})(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow \alpha_{\vec{x}} = \alpha_{\vec{y}}.$$

Si son linealmente independientes, $\vec{x} + \vec{y} \neq 0$,

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = \alpha_{\vec{x}+\vec{y}}(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha_{\vec{x}+\vec{y}}\vec{x} + \alpha_{\vec{x}+\vec{y}}\vec{y} = \alpha_{\vec{x}}\vec{x} + \alpha_{\vec{y}}\vec{y}.$$

Entonces tenemos que

$$(\alpha_{\vec{x}+\vec{y}} - \alpha_{\vec{x}})\vec{x} = (\alpha_y - \alpha_{\vec{x}+\vec{y}})\vec{y} \Rightarrow \alpha_{\vec{x}} = \alpha_{\vec{x}+\vec{y}} = \alpha_{\vec{y}}.$$

Sea $\alpha = \alpha_{\vec{x}}$, con $\vec{x} \in V^*$. Entonces si $\vec{y} \in V^*$ tenemos que $f(\vec{y}) = \alpha\vec{y}$ y $\vec{0} = \alpha\vec{0}$. Por tanto, se trata de una homotecia lineal.

□

2.1.3. Proyecciones

Supongamos que $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ y seam $L_1 \oplus L_2 = V$. $\forall \vec{x} \in V, \exists \vec{x}_1 \in L_1, \exists \vec{x}_2 \in L_2$, $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$.

Definición 2.9 (Proyección)**.** La **proyección** de base L_1 (respecto a la base L_2) y dirección L_2 (respecto a L_1) es la aplicación

$$\begin{aligned} p_1 &: V \to V \\ \vec{x} &= \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \to \vec{x}_1. \end{aligned}$$

Respecto a $p_2 : V \to V$ tal que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \to \vec{x}_2$.

[2] A lo largo de esta demostración, se utila el símbolo * para denotar que se excluye el 0.

Teorema 2.11. **(i)** $p_1 + p_2 = id_V$.

(ii) $p_1 \circ p_2 = 0$ y $p_2 \circ p_1 = 0$.

(iii) p_1 y p_2 son lineales.

(iv) $p_1 \circ p_1 = p_1$ y $p_2 \circ p_2 = p_2$.

Demostración. **(i)** $\forall \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2$,

$$(p_1 + p_2)(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = p_1(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + p_2(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \vec{x}_1 + \vec{x}_2.$$

(ii)

$$p_1 \circ p_2(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = p_1(\vec{x}_2) = p_1\left(\vec{0} + \vec{x}_2\right) = \vec{0}.$$

(iii)

$$p_1(\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{y}_1 + \vec{y}_2) = p_1((\vec{x}_1 + \vec{y}_1) + (\vec{x}_2 + \vec{y}_2)) = p_1(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + p_1(\vec{y}_1 + \vec{y}_2).$$
$$p_1(a\vec{x}) = p_1(a(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)) = p_1(a\vec{x}_1 + a\vec{x}_2) = a\vec{x}_1 = ap_1(\vec{x}_1 + \vec{x}_2).$$

(iv) Si $\vec{x} \in V$,

$$p_1 \circ p_1(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = p_1(\vec{x}_1) = \vec{x}_1.$$

□

Definición 2.10. Un endomorfismo $p : V \to V$ es un proyector si $p^2 = p$.

Teorema 2.12. Sea p un proyector definido en V, entonces $(id_V - p)$ es un proyector y $V = L_1 \oplus L_2$ donde $L_1 = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - id_V)$ y $L_2 = \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(p - id_V)$.

Demostración. $\forall \vec{x} \in V$,

$$(id_V - p)^2(\vec{x}) = (id_V - p)(\vec{x} - p(\vec{x})) = \vec{x} - p(\vec{x}) - p(\vec{x}) + p^2(\vec{x}) = \vec{x} - p(\vec{x}) = (id_V - p)(\vec{x}).$$

Vamos a ver que $V = L_1 \oplus L_2$ donde $L_1 = \mathrm{Im}(p)$ y $L_2 = \mathrm{Ker}(p)$.

$$\forall \vec{x} \in V,\ \vec{x} = p(\vec{x}) + \vec{x} - p(\vec{x}),\ p(\vec{x} - p(\vec{x})) = p(\vec{x}) - p^2(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Tenemos que $p(\vec{x}) \in \mathrm{Im}(p)$ y $(id_V - p)(\vec{x}) \in \mathrm{Ker}(p)$. Entonces $V = L_1 \oplus L_2$.

Si $\vec{x} \in L_1 \cap L_2$, existe $\vec{y} \in V$ tal que $p(\vec{y}) = \vec{x}$ y $p(\vec{x}) = \vec{0}$. Entonces,

$$p(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow p^2(\vec{y}) = \vec{0}.$$

Por tanto, $\vec{x} = \vec{0}$ y $p(\vec{y}) = \vec{x}$.

Vamos a comprobar que

$$\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - id_V).$$

(i) $\vec{x} \in \operatorname{Im}(p)$, entonces $\exists \vec{y} \in V$ tal que $p(\vec{y}) = \vec{x}$.

$$(p - id_V)(\vec{x}) = (p - id_V)(p(\vec{y})) = \underbrace{p^2(\vec{y})}_{p} - p(\vec{y}) = \vec{0}.$$

Por tanto, $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(p - id_V)$.

(ii) Si $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(p - id_V)$, tenemos que

$$(p - id_V)(\vec{x}) = p(\vec{x}) - \vec{x} = \vec{0}.$$

Por tanto, $\vec{x} = p(\vec{x})$ y, consecuentemente, $\vec{x} \in \operatorname{Im}(p)$.

La proposición $\operatorname{Ker}(p) = \operatorname{Im}(p - id_V)$ se demuestra igual. □

2.1.4. Simetrías vectoriales

Asumimos que el cuerpo $\mathbb{K}$ es de característica distinta de 2.

Definición 2.11. Un endomorfimos s de V es involutivo si $s^2 = id_V$ ($\iff \exists s^{-1}$ y $s^{-1} = s$).

Definición 2.12. s es la simetría vectorial de base L_1 y dirección L_2.

Teorema 2.13. Sea $s : V \to V$ un endomorfismo involutivo. Sea $L_1 = \operatorname{Im}(s + id_V)$ y $L_2 = \operatorname{Im}(id_V - s)$. Entonces, $L_1 \oplus L_2 = V$ y $s = p_1 - p_2$ (p_1, p_2 son proyecciones). Diremos que s es la simetría de base L_1 y dirección L_2.

$$\operatorname{Im}(s - id_V) = \operatorname{Ker}(s + id_V) \quad \text{y} \quad \operatorname{Im}(s + id_V) = \operatorname{Ker}(s - id_V).$$

Demostración. Sea $L_1 = \operatorname{Im}(s + id_V)$ y $L_2 = \operatorname{Im}(id_V - s)$.

$$\forall \vec{x} \in V,\ \vec{x} = \frac{\vec{x} - s(\vec{x})}{2} + \frac{\vec{x} + s(\vec{x})}{2} = (id_V - s)\left(\frac{\vec{x}}{2}\right) + (id_V + s)\left(\frac{\vec{x}}{2}\right).$$

Sea $\vec{x} \in L_1 \cap L_2$,

$\vec{x} \in L_1,\ \exists \vec{y} \in V,\ (s + id_V)(\vec{y}) = \vec{x} \Rightarrow s(\vec{x}) = s((s + id_V)(\vec{y})) = s(s(\vec{y}) + \vec{y}) = s^2(\vec{y}) + s(\vec{y}) = \vec{y} + s(\vec{y}) = \vec{x}$.

$\vec{x} \in L_2,\ \exists \vec{z} \in V,\ (id_V - s)(\vec{z}) = \vec{x} \Rightarrow s(\vec{x}) = s((id_V - s)(\vec{z})) = s(\vec{z}) - s^2(\vec{z}) = s(\vec{z}) - \vec{z} = -\vec{x}$.

Entonces, si $\vec{x} \in L_1 \cap L_2$,

$$s(\vec{x}) = \vec{x} \quad \text{y} \quad s(\vec{x}) = -\vec{x} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}.$$

□

Observación. Tenemos que $p_1(\vec{x}) = (id_V + s)\left(\frac{\vec{x}}{2}\right)$, y $p_2(\vec{x}) = (id_V - s)\left(\frac{\vec{x}}{2}\right)$. Entonces, $s = p_1 - p_2$. Además, diremos que $L_1 = \operatorname{Ker}(s - id_V)$ y $L_2 = \operatorname{Ker}(s + id_V)$. Esto se puede demostrar con ambas implicaciones: $L_1 \subset \operatorname{Ker}(id_V - s)$ y viceversa.

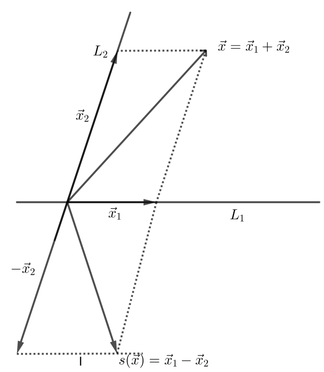

Figura 2.1: Ejemplo de simetrías vectoriales

2.2. Espacio vectorial dual

Definición 2.13 (Espacio dual)**.** Llamaremos **espacio dual** de V y lo representaremos por $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$.

Teorema 2.14. Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V, entonces las formas lineales $\{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$ definidas por ser las únicas formas lineales tales que

$$\omega^i(\vec{u}_j) = \begin{cases} 1, \text{ si } i = j \\ 0, \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

que llamaremos base dual de $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$.

Demostración. Tenemos que ver que $\{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$ son linealmente independientes. Sean $a_i \in \mathbb{K}$ tales que

$$a_1\omega^1 + \cdots + a_n\omega^n = 0 \in V^*.$$

Tenemos que $\forall i = 1, \ldots, n$,

$$0(\vec{u}_i) = 0 = \left(a_1\omega^1 + \cdots + a_n\omega^n\right)(\vec{u}_i) = a_1\omega^1(\vec{u}_i) + \cdots + a_i\omega^i(\vec{u}_i) + \cdots + a_n\omega^n(\vec{u}_n) = a_i.$$

Por tanto, $a_i = 0, \ \forall i = 1, \ldots, n$.

Ahora vamos a ver que son sistema de generadores. Si $\lambda \in V^*$, $\forall i = 1, \ldots, n$,

$$\left(\lambda(\vec{u}_1)\omega^1 + \lambda(\vec{u}_2)\omega^2 + \cdots + \lambda(\vec{u}_n)\omega^n\right)(\vec{u}_i) = \lambda(\vec{u}_i).$$

Es decir, tenemos que
$$\lambda = \lambda\left(\vec{u}_1\right)\omega^1 + \cdots + \lambda\left(\vec{u}_n\right)\omega^n.$$
□

Observación.

$\vec{x} = a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^n\vec{u}_n$

$\forall i = 1, \ldots, n,\ w^i\left(\vec{x}\right) = w^i\left(a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^n\vec{u}_n\right) = a^1 w^i\left(\vec{u}_1\right) + \cdots + a^n w^i\left(\vec{u}_n\right) = a^i.$

Corolario 2.6. $\dim V = \dim V^*$.

Observación. $\left(V^*\right)^* = V^{**}$ bidual. $\forall \vec{x} \in V$,
$$\begin{aligned}\theta_{\vec{x}} :& V^* \to \mathbb{K}\\ & \lambda \to \theta_{\vec{x}}\left(\lambda\right) = \lambda\left(\vec{x}\right), \forall \lambda \in V^*.\end{aligned}$$
Tenemos que, $\theta_{\vec{x}} \in V^{**}$, además, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in V^*$,
$$\theta_{\vec{x}}\left(\lambda_1 + \lambda_2\right) = \left(\lambda_1 + \lambda_2\right)\left(\vec{x}\right) = \left(\lambda_1 + \lambda_2\right)\left(\vec{x}\right) = \lambda_1\left(\vec{x}\right) + \lambda_2\left(\vec{x}\right) = \theta_{\vec{x}}\left(\lambda_1\right) + \theta_{\vec{x}}\left(\lambda_2\right).$$
Además, si $a \in \mathbb{K}$, $\forall \lambda \in V^*$,
$$\theta_{\vec{x}}\left(a\lambda\right) = \left(a\lambda\right)\left(\vec{x}\right) = a\lambda\left(\vec{x}\right) = a\theta_{\vec{x}}\left(\vec{\lambda}\right).$$
Entonces tenemos que $\theta_{\vec{x}}$ es una aplicación lineal y, por tanto, $\theta_{\vec{x}} \in V^{**}$.

Teorema 2.15. La aplicación
$$\begin{aligned}\theta :& V \to V^{**}\\ & \vec{x} \to \theta_{\vec{x}},\end{aligned}$$
es lineal.

Demostración. Tenemos que $\forall \lambda \in V^*$,
$$\theta_{\vec{x}+\vec{y}}\left(\lambda\right) = \lambda\left(\vec{x} + \vec{y}\right) = \lambda\left(\vec{x}\right) + \lambda\left(\vec{y}\right) = \theta_{\vec{x}}\left(\lambda\right) + \theta_{\vec{y}}\left(\lambda\right) = \left(\theta_{\vec{x}} + \theta_{\vec{y}}\right)\left(\lambda\right).$$
Entonces tenemos que
$$\theta_{\vec{x}+\vec{y}} = \theta_{\vec{x}} + \theta_{\vec{y}} \iff \theta\left(\vec{x} + \vec{y}\right) = \theta\left(\vec{x}\right) + \theta\left(\vec{y}\right).$$
Además, si $a \in \mathbb{K}$ y $\vec{x} \in V$:
$$\theta\left(a\vec{x}\right) = \theta_{a\vec{x}} = a\theta_{\vec{x}} = a\theta\left(\vec{x}\right).$$
Entonces, $\forall \lambda \in V^*$,
$$\theta_{a\vec{x}}\left(\lambda\right) = \lambda\left(a\vec{x}\right) = a\lambda\left(\vec{x}\right) = \left(a\theta_{\vec{x}}\right)\left(\lambda\right).$$
Por tanto,
$$\theta_{a\vec{x}} = a\theta_{\vec{x}} \iff \theta\left(a\vec{x}\right) = a\theta\left(\vec{x}\right).$$
□

Definición 2.14. Sea $V^{**} = \mathrm{Hom}\left(V^*, \mathbb{K}\right)$ el espacio dual de V^*. Entonces es el espacio **bidual** de V. Además,

$$\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V.$$

Teorema 2.16. θ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración. Como tienen la misma dimensión, nos basta con demostrar que es inyectiva. Sea $\vec{x} \in \mathrm{Ker}\left(\theta\right)$, queremos ver que $\vec{x} = \vec{0}$. Tenemos que $\forall \lambda \in V^*$,

$$\theta_{\vec{x}}\left(\lambda\right) = \lambda\left(\vec{x}\right) = \vec{0}.$$

Por tanto, tenemos que $\vec{x} = \vec{0}$ (porque todas las formas lineales devuelven 0 si insertas 0) y, consecuentemente, θ es isomorfismo. □

Teorema 2.17. Sea $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ base de V y sea $\left\{\omega^1, \dots, \omega^n\right\}$ su dual. Tenemos que $\{\theta_{\vec{u}_1}, \dots, \theta_{\vec{u}_n}\}$ es base de V^{**}. Además, $\forall i, j = 1, \dots, n$,

$$\theta_{\vec{u}_i}\left(\omega^j\right) = \omega^j\left(\vec{u}_i\right) = \begin{cases} 1, \text{ si } i = j \\ 0, \text{ si } i \neq j \end{cases}.$$

Es decir, tenemos que $\{\theta_{\vec{u}_1}, \dots, \theta_{\vec{u}_n}\}$ es la base dual de $\left\{\omega^1, \dots, \omega^n\right\}$.

Observación. Si $f : V \to V'$ lineal y $\lambda' \in V^{'*}$, tenemos que

$$\lambda' \circ f : V \to \mathbb{K},\ \lambda' \circ f \in V^*.$$

Se tiene definida una aplicación (la aplicación dual de f)

$$\begin{aligned} f^* :& V^{'*} \to V^* \\ & \lambda' \to f^*\left(\lambda'\right) = \lambda' \circ f \end{aligned}$$

Proposición 2.8. f^* es lineal.

Demostración. Tenemos que $\forall \lambda_1', \lambda_2' \in V'^*$,

$$f^*\left(\lambda_1' + \lambda_2'\right) = \left(\lambda_1' + \lambda_2'\right) \circ f.$$

Además, $\forall \vec{x} \in V$,

$$\begin{aligned} \left(\left(\lambda_1 + \lambda_2'\right) \circ f\right)\left(\vec{x}\right) =& \left(\lambda_1' + \lambda_2'\right)\left(f\left(\vec{x}\right)\right) = \lambda_1'\left(f\left(\vec{x}\right)\right) + \lambda_2'\left(f\left(\vec{x}\right)\right) = \left(\lambda_1' \circ f\right)\left(\vec{x}\right) + \left(\lambda_2' \circ f\right)\left(\vec{x}\right) \\ =& f^*\left(\lambda_1'\right)\left(\vec{x}\right) + f^*\left(\lambda_2'\right)\left(\vec{x}\right) = \left(f^*\left(\lambda_1'\right) + f^*\left(\lambda_2'\right)\right)\left(\vec{x}\right). \end{aligned}$$

Además, $\forall a \in \mathbb{K}, \forall \lambda' \in V'^{*}$, tenemos que

$$f^{*}(a\lambda') = (a\lambda') \circ f = af^{*}(\lambda').$$

Tenemos que $\forall \vec{x} \in V$,

$$(a\lambda') \circ f(\vec{x}) = a(\lambda' \circ f)(\vec{x}) = af^{*}(\lambda')(\vec{x}).$$

□

Teorema 2.18. Se tiene definida una aplicación

$$\begin{aligned} * : \mathrm{Hom}(V, V') &\to \mathrm{Hom}(V'^{*}, V^{*}) \\ f &\to f^{*}. \end{aligned}$$

Tenemos que $*$ es lineal.

Demostración. Si $f, g \in \mathrm{Hom}(V, V')$, tenemos que $\forall \lambda' \in V'^{*}$,

$$(f+g)^{*}(\lambda') = \lambda' \circ (f+g) = f^{*}(\lambda') + g^{*}(\lambda') = (f^{*} + g^{*})(\lambda').$$

Entonces tenemos que $\forall \vec{x} \in V$,

$$\lambda' \circ (f+g)(\vec{x}) = \lambda'(f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = (f^{*}(\lambda') + g^{*}(\lambda'))(\vec{x}).$$

Si $a \in \mathbb{K}$ y $f \in \mathrm{Hom}(V, V')$, queremos ver que

$$*(af) = (af)^{*} = af^{*}.$$

Tenemos que $\forall \lambda' \in V'^{*}$,

$$(af)^{*}(\lambda') = \lambda' \circ (af) = af^{*}(\lambda').$$

Entonces, $\forall \vec{x} \in V$,

$$(\lambda' \circ (af))(\vec{x}) = \lambda'(af(\vec{x})) = a\lambda'(f)(\vec{x}) = af^{*}(\lambda')(\vec{x}).$$

□

Proposición 2.9. Sea $f \in \mathrm{Hom}(V, V')$ y $g \in \mathrm{Hom}(V', V'')$. Se cumple que

$$(g \circ f)^{*} = f^{*} \circ g^{*}.$$

Demostración. Tenemos que $\forall \lambda'' \in V''^{*}$,

$$(g \circ f)^{*}(\lambda'') = \lambda'' \circ (g \circ f) = (\lambda'' \circ g) \circ f = (g^{*}(\lambda'')) \circ f = f^{*}(g^{*}(\lambda'')) = (f^{*} \circ g^{*})(\lambda'').$$

□

Proposición 2.10.
$$(id_V)^* = id_{V^*}.$$

Demostración. Tenemos que $\forall \lambda \in V^*$,
$$(id_V)^* (\lambda) = \lambda \circ id_V = id_{V^*} (\lambda) .$$
□

Proposición 2.11. Si $f : V \to V'$ isomorfismo, f^* isomorfismo y $\left(f^{-1}\right)^* = (f^*)^{-1}$.

Demostración. Existe $f^{-1} : V' \to V$ tal que $f^{-1} \circ f = id_V$ y $f \circ f^{-1} = id_{V'}$. Entonces tenemos que
$$f^* \circ \left(f^{-1}\right)^* = \left(f^{-1} \circ f\right)^* = (id_V)^* = id_{V^*}.$$
Similarmente,
$$\left(f^{-1}\right)^* \circ f^* = \left(f \circ f^{-1}\right)^* = (id_{V'})^* = id_{V'^*}.$$
□

Si $f \in \operatorname{Hom}(V, V')$, tenemos que $(f^*)^* = f^{**} \in \operatorname{Hom}(V^{**}, V'^{**})$. Tenemos que $\forall \vec{x} \in V, \theta_{\vec{x}} \in V^{**}$, entonces
$$f^{**} (\theta_{\vec{x}}) = \theta_{\vec{x}} \circ f^* = \theta \circ f.$$
$$\forall \lambda' \in V'^*, \theta_{\vec{x}} \circ f^* (\lambda') = \theta_{\vec{x}} (\lambda' \circ f) = \lambda' \circ f (\vec{x}) = \lambda' (f (\vec{x})) = \theta_{f(\vec{x})} (\lambda') .$$
Queremos ver que
$$\theta^{-1} f^{**} \theta_{\vec{x}} = f.$$

2.2.1. Anulador de un subespacio

Definición 2.15 (Ortogonal y anulador)**.** Si $\emptyset \neq A \subset V$. Llamaremos **ortogonal** a A y la expresaremos por:
$$A^{\perp} = \left\{\lambda \in V^* \ : \ \lambda (\vec{x}) = \vec{0}, \forall \vec{x} \in A\right\} = \{\lambda \in V^* \ : \ A \subset \operatorname{Ker} (\lambda)\} .$$

Proposición 2.12.
$$A^{\perp} \in \mathcal{L} (V^*) .$$

Demostración. Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in A^{\perp}$, vamos a ver que $\lambda_1 + \lambda_2 \in A^{\perp}$:
$$\forall \vec{x} \in A, \ (\lambda_1 + \lambda_2) (\vec{x}) = \lambda_1 (\vec{x}) + \lambda_2 (\vec{x}) = 0.$$
Por lo que, $\lambda_1 + \lambda_2 \in A^{\perp}$. Similarmente, si $\lambda \in A^{\perp}$ y $a \in \mathbb{K}$, vamos a ver que $a\lambda \in A^{\perp}$:
$$\forall \vec{x} \in A, (a\lambda) (\vec{x}) = a\lambda (\vec{x}) = a \cdot 0 = 0.$$
Por lo que $a\lambda \in A^{\perp}$. □

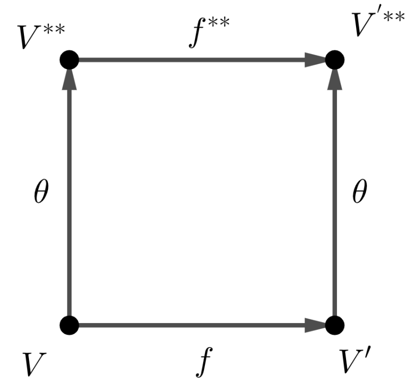

Figura 2.2: Resumen del espacio dual

Proposición 2.13. Si $\emptyset \neq A \subset B \subset V$, entonces $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.

Demostración. Si $\lambda \in B^{\perp}$, tenemos que $\forall \vec{x} \in B$, $\lambda(\vec{x}) = 0$. Como $A \subset B$, tenemos que $\forall \vec{x} \in A$, $\lambda(\vec{x}) = 0$, por lo que $\lambda \in A^{\perp}$. $\square$

Proposición 2.14.

$$A^{\perp} = L(A)^{\perp}.$$

Demostración. Si $A \subset L(A)$ tenemos que $L(A)^{\perp} \subset A^{\perp}$. Sea $\lambda \in A^{\perp}$,

$$\forall \vec{x} \in L(A), \exists p \in \mathbb{N}, \exists a^1, \ldots, a^p \in \mathbb{K}, \exists \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p \in A.$$

$$\vec{x} = a^1 \vec{x}_1 + \cdots + a^p \vec{x}_p.$$

Entonces,

$$\lambda(\vec{x}) = \lambda\left(a^1 \vec{x}_1 + \cdots + a^p \vec{x}_p\right) = a^1 \lambda(\vec{x}_1) + \cdots + a^p \lambda(\vec{x}_p) = 0.$$

$\square$

Proposición 2.15. Sean $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$, entonces tenemos que $(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$ y $(L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$.

Demostración. **(1.1)** Tenemos que $L_1 \subset L_1 + L_2$ y $L_2 \subset L_1 + L_2$. Entonces sabemos que $(L_1 + L_2)^{\perp} \subset L_1^{\perp}$ y $(L_1 + L_2)^{\perp} \subset L_2^{\perp}$. Por tanto

$$(L_1 + L_2)^{\perp} \subset L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}.$$

(1.2) Si $\lambda \in L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$, tenemos que

$$\forall \vec{x} \in L_1^{\perp}, \lambda(\vec{x}) = \vec{0}$$
$$\forall \vec{y} \in L_2^{\perp}, \lambda(\vec{y}) = \vec{0}.$$

Tenemos que

$$\forall \vec{x} \in L_1 + L_2, \exists \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2, \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2.$$

Entonces tenemos que

$$\lambda(\vec{x}) = \lambda(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \lambda(\vec{x}_1) + \lambda(\vec{x}_2) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.$$

Por tanto, $\lambda \in (L_1 + L_2)^{\perp}$, por lo que

$$L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp} \subset (L_1 + L_2)^{\perp}.$$

(2.1) Tenemos que $L_1 \cap L_2 \subset L_1, L_2$, por lo que

$$L_1^{\perp} \subset (L_1 \cap L_2)^{\perp} \in \mathcal{L}(V^*)$$
$$L_2^{\perp} \subset (L_1 \cap L_2)^{\perp} \in \mathcal{L}(V^*).$$

Entonces,

$$L_1^{\perp} + L_2^{\perp} \subset (L_1 \cap L_2)^{\perp}.$$

(2.2) Vamos a ver que $(L_1 \cap L_2)^{\perp} \subset L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$. Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\}$ base de $L_1 \cap L_2$ y sean $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{r+p}\}$ y $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \vec{w}_{r+1}, \ldots, \vec{w}_{r+q}\}$ bases de L_1 y L_2, respectivamente. Sea

$$\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{r+p}, \vec{w}_{r+1}, \ldots, \vec{w}_{r+q}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\},$$

base de V. Si $\lambda \in (L_1 \cap L_2)^{\perp}$, tenemos que ver que existen $\lambda_1 \in L_1^{\perp}, \lambda_2 \in L_2^{\perp}$ tales que $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Para $\forall i = 1, \ldots, r$ defino

$$\lambda_1(\vec{u}_i) = 0 \quad \text{y} \quad \lambda_2(\vec{u}_i) = 0.$$

De esta manera, $(\lambda_1 + \lambda_2)(\vec{u}_i) = 0$. Para $i = r+1, \ldots, r+p$ y $\vec{u}_i \in L_1$ defino

$$\lambda(\vec{u}_i) \in \mathbb{K}, \ \lambda_1(\vec{u}_i) = 0, \ \lambda_2(\vec{u}_i) = \lambda(\vec{u}_i).$$

Similarmente, para $i = r+1, \ldots, r+q$,

$$\lambda(\vec{w}_i) \in \mathbb{K}, \ \lambda_1(\vec{w}_i) = \lambda(\vec{w}_i), \ \lambda_2(\vec{w}_i) = 0.$$

□

Teorema 2.19. Sea $L \in \mathcal{L}(V)$, entonces

$$\dim L^{\perp} = \dim V - \dim L.$$

Observación. Tenemos que

$$\left(L^{\perp}\right)^{\perp} = \theta\left(L\right).$$

Demostración. Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\}$ base de L, $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V y $\left\{\omega^1, \ldots, \omega^n\right\}$ su base dual. Entonces tenemos ya que $\left\{\omega^{r+1}, \ldots, \omega^n\right\}$ son linealmente independientes. Vamos a ver que son sistema de generadores,

$$\forall \lambda \in L^{\perp} \in \mathcal{L}\left(V\right), \exists a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}, .$$

$$\lambda = a_1\omega^1 + \cdots + a_n\omega^n.$$

Tenemos que $\forall i = 1, \ldots, r$,

$$0 = \lambda\left(\vec{u}_i\right) = a_1\omega^1\left(\vec{u}_i\right) + \cdots + a_i\omega^i\left(\vec{u}_i\right) + \cdots + a_r\omega^r\left(\vec{u}_i\right) + \cdots + a_n\omega^n\left(\vec{u}_i\right) = a_i.$$

Así,

$$\lambda = a_{r+1}\omega^{r+1} + \cdots + a_n\omega^n.$$

□

Observación. Tenemos que

$$\dim L = \dim\theta\left(L\right) = \dim\left(L^{\perp}\right)^{\perp}.$$

Lema 2.1. Sea $L_1, L_2 \in \mathcal{L}\left(V\right)$ tales que $V = L_1 \oplus L_2$ y sea $f_1 : L_1 \to V'$ y $f_2 : L_2 \to V'$ aplicaciones lineales. Entonces, existe una única $f : V \to V'$ tal que

$$f|_{L_1} = f_1 \quad \text{y} \quad f|_{L_2} = f_2.$$

[a]

[a] $f|_L$ es f restringida por L, es decir, solo está definida para los vectores de L.

Demostración. Tenemos que $\forall \vec{x} \in V$, $\exists! \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2$ tales que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$. Queremos que $f\left(\vec{x}\right) = f\left(\vec{x}_1\right) + f\left(\vec{x}_2\right)$:

$$f\left(\vec{x}\right) = f\left(\vec{x}_1\right) + f\left(\vec{x}_2\right) = f|_{L_1}\left(\vec{x}_1\right) + f|_{L_2}\left(\vec{x}_2\right) = f_1\left(\vec{x}_1\right) + f_2\left(\vec{x}_2\right).$$

Sea $f : V \to V'$ la aplicación definida de esta manera:

$$f\left(\vec{x}_1 + \vec{x}_2\right) = f_1\left(\vec{x}_1\right) + f_2\left(\vec{x}_2\right).$$

Queremos ver que f es lineal:

$$\begin{aligned}
\forall \vec{x}, \vec{y} \in V,\ f\left(\vec{x} + \vec{y}\right) &= f\left(\left(\vec{x}_1 + \vec{x}_2\right) + \left(\vec{y}_1 + \vec{y}_2\right)\right) \\
&= f\left(\left(\vec{x}_1 + \vec{y}_1\right) + \left(\vec{x}_2 + \vec{y}_2\right)\right) \\
&= f_1\left(\vec{x}_1 + \vec{y}_1\right) + f_2\left(\vec{x}_2 + \vec{y}_2\right) \\
&= f_1\left(\vec{x}_1\right) + f_2\left(\vec{x}_2\right) + f_1\left(\vec{y}_1\right) + f_2\left(\vec{y}_2\right) \\
&= f\left(\vec{x}_1 + \vec{x}_2\right) + f\left(\vec{y}_1 + \vec{y}_2\right) \\
&= f\left(\vec{x}\right) + f\left(\vec{y}\right).
\end{aligned}$$

Similarmente, sea $a \in \mathbb{K}$ y $\vec{x} \in V$,

$$\begin{aligned} f(a\vec{x}) =& f(a(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)) = f(a\vec{x}_1 + a\vec{x}_2) = f_1(a\vec{x}_1) + f_2(a\vec{x}_2) \\ =& a f_1(\vec{x}_1) + a f_2(\vec{x}_2) = a(f_1(\vec{x}_1) + f_2(\vec{x}_2)) \\ =& a f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = a f(\vec{x}). \end{aligned}$$

Si $\vec{x}_1 \in L_1$, tenemos que

$$f|_{L_1}(\vec{x}_1) = f\left(\vec{x}_1 + \vec{0}\right) = f_1(\vec{x}_1) + f_2\left(\vec{0}\right) = f_1(\vec{x}_1).$$

□

Teorema 2.20. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal. Entonces,

(a) $\operatorname{Ker}(f^*) = \operatorname{Im}(f)^{\perp}$.

(b) $\operatorname{Im}(f^*) = \operatorname{Ker}(f)^{\perp}$.

(c) f inyectiva $\iff$ f^* sobreyectiva.

(d) f sobreyectiva $\iff$ f^* inyectiva.

(e) $\dim \operatorname{Im}(f) = \dim \operatorname{Im}(f^*)$.

Demostración. **(a)** Tenemos que $\forall \lambda' \in \operatorname{Ker}(f^*)$, tenemos que

$$\forall \vec{x} \in V,\ \lambda' \circ f(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Similarmente,

$$f^*(\lambda') = \lambda' \circ f = 0.$$

En la otra dirección,

$$\lambda' \in \operatorname{Im}(f)^{\perp} \Rightarrow \forall \vec{x} \in V, \lambda'(f(\vec{x})) = f^*(\lambda')(\vec{x}) = 0.$$

Por tanto, $f^*(\lambda') = 0$ y $\lambda' \in \operatorname{Ker}(f^*)$.

(b) Si $\lambda \in \operatorname{Im}(f^*)$. Entonces, existe $\lambda' \in V'^*$ tal que $\lambda = f^*(\lambda') = \lambda' \circ f$. Así, $\forall \vec{x} \in \operatorname{Ker}(f)$, $\lambda(\vec{x}) = \lambda' \circ f(\vec{x}) = \lambda'\left(\vec{0}\right) = 0$.

En la otra dirección, si $\lambda \in \operatorname{Ker}(f)^{\perp}$, buscamos $\lambda' \in V'^*$ tal que $f^*(\lambda') = \lambda' \circ f = \lambda$. Sea $L' \in \mathcal{L}(V')$ tal que $\operatorname{Im}(f) \oplus L' = V'$ y buscamos $\lambda'|_{L'} = 0$. Si $\vec{x'} \in \operatorname{Im}(f)$, existe un $\vec{x} \in V$ tal que $f(\vec{x}) = \vec{x'}$. Defino $\lambda'\left(\vec{x'}\right) = f(\vec{x})$. Como $\lambda \in \operatorname{Ker}(f)^{\perp}$ [3], tenemos que si $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$,

$$f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = f(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} - \vec{y} \in \operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(\lambda).$$

Asi, definimos que $\lambda'\left(\vec{x'}\right) = \vec{x}$ con $\vec{x} \in V$ tal que $f(\vec{x}) = \vec{x'}$.

[3] Ortogonal del núcleo, que no el núcleo del ortogonal.

(c) Tenemos que f es inyectiva si y solo si $\operatorname{Ker}(f) = \left\{\vec{0}\right\}$. Esto es equivalente a que $\operatorname{Ker}(f)^{\perp} = \operatorname{Im}(f^*) = V^*$, que es equivalente a que f^* es sobreyectiva.

(d) Tenemos que f es sobreyectiva si y solo si $\operatorname{Im}(f) = V'$. Esto es equivalente a decir que $\operatorname{Im}(f)^{\perp} = \operatorname{Ker}(f^*) = \left\{\vec{0}\right\}$, que es equivalente a decir que f^* sea inyectiva.

(e)

$$\dim \operatorname{Im}(f) = \dim V' - \dim \operatorname{Im}\left(f^{\perp}\right) = \dim V' - \dim \operatorname{Ker}(f^*) = \dim V'^* - \dim \operatorname{Ker}(f^*) = \dim \operatorname{Im}(f^*).$$

$\square$

Definición 2.16. Si $f : V \to V'$ es lineal llamaremos $\operatorname{ran}(f)$ a $\dim \operatorname{Im}(f)$.

2.2.2. Matriz de f^*

Teorema 2.21.

$$\mathcal{M}_{\{\sigma^j\}\{\omega^i\}}(f^*) = \left(\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}(f)\right)^t.$$

Demostración. Sea $f : V \to V'$ lineal y $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ una base de V y $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ una base de V'. Entonces, tenemos que $\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}(f) = A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es la matriz asociada a f. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

Así, la dual de f está definida de la siguiente manera

$$\begin{aligned} f^* : V'^* &\to V^* \\ \lambda &\to \lambda \circ f. \end{aligned}$$

Así, si $\left\{\omega^1, \ldots, \omega^n\right\}$ es la base dual de $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ y $\left\{\sigma^1, \ldots, \sigma^m\right\}$ es la base dual de $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$, entonces $\mathcal{M}_{\{\vec{\sigma}^i\}\{\vec{\omega}^j\}}(f^*) = B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ es la matriz que corresponde a f^*. Las columnas de B son las coordenadas de $f^*\left(\sigma^j\right)$ en la base $\left\{\omega^1, \ldots, \omega^n\right\}$. Así,

$$f^*\left(\sigma^j\right)(\vec{u}_i) = \sigma^j\left(f(\vec{u}_i)\right) = \sigma^j\left(a_i^1\vec{v}_i + \cdots + a_i^j\vec{v}_j + \cdots + a_i^m\vec{v}_m\right) = a_i^j.$$

Así, $B = A^t$. $\square$

Capítulo 3

Matrices

3.1. Matriz asociada a una aplicación lineal

Definición 3.1 (Matriz)**.** Una matriz A con coeficientes $\mathbb{K}$ de $m \in \mathbb{N}$ filas y $n \in \mathbb{N}$ columnas es una tabla

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

con $a_i^j \in \mathbb{K}$, $\forall i = 1, \ldots, n$, $\forall j = 1, \ldots, m$.

Sean V, V' espacios vectoriales con $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ y $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ bases de V y V', respectivamente. Si $f \in \operatorname{Hom}(V, V')$, entonces $f(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) \in V'$ y existen $a_i^j \in \mathbb{K}$ tales que

$$\begin{aligned} f(\vec{u}_1) &= a_1^1 \vec{v}_1 + \cdots + a_1^m \vec{v}_m \\ f(\vec{u}_2) &= a_2^1 \vec{v}_1 + \cdots + a_2^m \vec{v}_m \\ &\vdots \\ f(\vec{u}_n) &= a_n^1 \vec{v}_1 + \cdots + a_n^m \vec{v}_m. \end{aligned}$$

Entonces, a f le podemos asignar la matriz A tal que

$$f \to A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

Teorema 3.1. Sea $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) = \{A \,:\, A \text{ matriz } m \times n\}$. Definimos

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}} : \mathrm{Hom}\,(V, V') &\to \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \\ f &\to A.\end{aligned}$$

Tenemos que $\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}$ es biyectiva.

Demostración. Tenemos que si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, entonces existen unos únicos $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n \in V'$ tales que

$$\begin{aligned}\vec{w}_1 =& a_1^1\vec{v}_1 + \cdots + a_1^n\vec{v}_m \\ &\vdots \\ \vec{w}_n =& a_m^1\vec{v}_1 + \cdots + a_m^n\vec{v}_m.\end{aligned}$$

Para estos existe una única $f \in \mathrm{Hom}\,(V, V')$ tal que $f(\vec{u}_1) = \vec{w}_1, \ldots, f(\vec{u}_n) = \vec{w}_n$. □

Teorema 3.2. $\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}$ es isomorfismo.

Demostración. Sabemos que es biyectiva, ahora tenemos que ver que es una aplicación lineal. Para ello, definimos la suma de matrices de la siguiente forma: si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$,

$$A + B = \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}\left(\mathcal{M}^{-1}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}(A) + \mathcal{M}^{-1}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}(B)\right).$$

Definimos el producto por escalares. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $a \in \mathbb{K}$,

$$a \cdot A = \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}\left(a \cdot \mathcal{M}^{-1}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}(A)\right).$$

La demostración se puede completar con la demostración del siguiente teorema. □

Teorema 3.3. $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Demostración. Tenemos las siguientes equivalencias

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \iff f \in \mathrm{Hom}\,(V, V') \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & b_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_1^m & \cdots & b_n^m \end{pmatrix} \iff g \in \mathrm{Hom}\,(V, V').$$

Así, $A + B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \iff f + g \in \mathrm{Hom}\,(V, V')$. Tenemos que

$$\begin{aligned}f(\vec{u}_i) =& a_i^1\vec{v}_i + \cdots + a_i^m\vec{v}_m,\ \forall i = 1, \ldots, n \\ g(\vec{u}_i) =& b_i^1\vec{v}_i + \cdots + b_i^m\vec{v}_m,\ \forall i = 1, \ldots, n.\end{aligned}$$

Entonces, tenemos que

$$(f+g)(\vec{u}_i) = f(\vec{u}_i) + g(\vec{u}_i) = \left(a_i^1 + b_i^1\right)\vec{v}_1 + \cdots + \left(a_i^m + b_i^m\right)\vec{v}_m.$$

Es decir,

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1^1 + b_1^1 & \cdots & a_n^1 + b_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m + b_1^m & \cdots & a_n^m + b_n^m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}).$$

Hacemos lo mismo con el producto por escalares. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $a \in \mathbb{K}$, tenemos que $af \in \operatorname{Hom}(V, V') \iff a \cdot A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Tenemos que

$$af(\vec{u}_i) = aa_i^1\vec{v}_1 + \cdots + aa_i^m\vec{v}_m.$$

Es decir,

$$a \cdot A = \begin{pmatrix} aa_1^1 & \cdots & aa_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ aa_1^m & \cdots & aa_n^m \end{pmatrix}.$$

Tenemos que existe la matriz 0, pues $0 \in \operatorname{Hom}(V, V')$, por lo que

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Similarmente, la matriz opuesta se puede definir así:

$$-A = (-1) \cdot A = \begin{pmatrix} -a_1^1 & \cdots & -a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ -a_1^m & \cdots & -a_n^m \end{pmatrix}.$$

□

3.2. Producto de matrices

Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V, $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ base de V' y $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_p\}$ base de V''. Entonces, podemos encontrar aplicaciones lineales tales que

$$f \in \operatorname{Hom}(V, V') \to A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \quad \text{y} \quad g \in \operatorname{Hom}(V', V'') \to B \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{K}).$$

Tenemos que $g \circ f \in \operatorname{Hom}(V, V'')$. Definimos el producto de matrices tal que

$$g \circ f \to B \cdot A \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K}).$$

Es decir,

$$B \cdot A = \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{w}_k\}}(g \circ f).$$

Tenemos que la expresión de A y B será:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & b_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_1^m & \cdots & b_n^m \end{pmatrix}.$$

Entonces, $\forall i = 1, \dots, m$ y $\forall j = 1, \dots, p$,

$$\begin{aligned} f(\vec{u}_i) =& a_i^1 \vec{v}_1 + \cdots + a_i^m \vec{v}_m \\ g(\vec{v}_j) =& b_j^1 \vec{w}_1 + \cdots + b_j^p \vec{w}_p. \end{aligned}$$

Tenemos que $g \circ f$ será:

$$\begin{aligned} g(f(\vec{u}_i)) =& g\left(a_i^1 \vec{v}_1 + \cdots + a_i^m \vec{v}_m\right) \\ =& a_i^1 \left(b_1^1 \vec{w}_1 + \cdots + b_1^p \vec{w}_p\right) + \cdots + a_i^m \left(b_p^1 \vec{w}_1 + \cdots + b_m^p \vec{w}_p\right) \\ =& \left(a_i^1 b_1^1 + \cdots + a_i^m b_m^i\right) \vec{w}_1 + \cdots + \left(a_i^1 b_1^p + \cdots + a_i^m b_m^p\right) \vec{w}_p. \end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_1^j b_j^1 & \cdots & \sum_{j=1}^m a_n^j b_j^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_1^j b_j^p & \cdots & \sum_{j=1}^m a_n^j b_j^p \end{pmatrix}.$$

Ahora vamos a ver como utilizamos la matriz de una transformación lineal para calcular $f(\vec{x})$.

Sea $f : V \to V'$ lineal. Si $\vec{x} \in V$, entonces existen únicos $x^1, \dots, x^n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = x^1 \vec{u}_1 + \cdots + x^n \vec{u}_n.$$

Entonces tenemos que $f(\vec{x}) \in V'$, por lo que $\exists! x'^1, \dots, x'^m \in \mathbb{K}$ tales que

$$f(\vec{x}) = x'^1 \vec{v}_1 + \cdots + x'^m \vec{v}_m.$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) =& f\left(x^1 \vec{u}_1 + \cdots + x^n \vec{u}_n\right) = x^1 f(\vec{u}_1) + \cdots + x^n f(\vec{u}_n) \\ =& x^1 \left(a_1^1 \vec{v}_1 + \cdots + a_1^m \vec{v}_m\right) + \cdots + x^n \left(a_n^1 \vec{v}_1 + \cdots + a_n^m \vec{v}_m\right) \\ =& \left(x^1 a_1^1 + \cdots + x^1 a_n^1\right) \vec{v}_1 + \cdots + \left(x^1 a_1^m + \cdots + x^n a_n^m\right) \vec{v}_m. \end{aligned}$$

Así, tenemos que las coordenadas de $f(\vec{x})$ serán:

$$\begin{cases} x'^1 = x^1 a_1^1 + \cdots + x^1 a_n^1 \\ \vdots \\ x'^m = x^1 a_1^m + \cdots + x^n a_n^m \end{cases}.$$

En forma matricial tenemos que

$$A \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ \vdots \\ x'^m \end{pmatrix}.$$

A continuación, vamos a estudiar la matriz de cambio de base. Sea $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ y $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ bases de V. Tenemos que

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 =& a_1^1\vec{u}_1 + \cdots + a_1^n\vec{u}_n\\ &\vdots\\ \vec{v}_n =& a_n^1\vec{u}_1 + \cdots + a_n^n\vec{u}_n.\end{aligned}$$

Así, si $\vec{x} \in V$ existen unos únicos $x^1, \dots, x^n \in \mathbb{K}$ tales que $\vec{x} = x^1\vec{u}_1 + \cdots + x^n\vec{u}_n$ y existen unos únicos $x'^1, \dots, x'^n \in \mathbb{K}$ tales que $\vec{x} = x'^1\vec{v}_1 + \cdots + x'^n\vec{v}_n$. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}\vec{x} =& x'^1\vec{v}_1 + \cdots + x'^n\vec{v}_n\\ =& x'^1\left(a_1^1\vec{u}_1 + \cdots + a_1^n\vec{u}_n\right) + \cdots + x'^n\left(a_n^1\vec{u}_1 + \cdots + a_n^n\vec{u}_n\right)\\ =& \left(x'^1a_1^1 + \cdots + x'^na_n^1\right)\vec{u}_1 + \cdots + \left(x'^1a_1^n + \cdots + x'^na_n^n\right)\vec{u}_n.\end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$\begin{cases} x^1 = x'^1a_1^1 + \cdots + x'^na_n^1\\ \vdots\\ x^n = x'^1a_1^n + \cdots + x'^na_n^n\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1\\ \vdots & & \vdots\\ a_1^n & \cdots & a_n^n\end{pmatrix}}_{\text{Matriz cambio de base}} \begin{pmatrix} x'^1\\ \vdots\\ x'^n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix}.$$

Ejemplo 3.1. $id_V : V_{\{\vec{v}_i\}} \to V_{\{\vec{u}_i\}}$. Queremos calcular la matriz $\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_i\}}\left(id_V\right)$. Tenemos que

$$id_V\left(\vec{v}_i\right) = \vec{v}_i = a_i^1\vec{u}_1 + \cdots + a_i^n\vec{u}_n.$$

Por tanto,

$$\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_i\}}\left(id_V\right) = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1\\ \vdots & & \vdots\\ a_1^n & \cdots & a_n^n\end{pmatrix}.$$

3.3. Permutaciones

Definición 3.2 (Permutación)**.** Sea $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Una **permutación** de X es una aplicación biyectiva $\sigma : X \to X$.

Normalmente se escriben de la siguiente forma:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n)\end{bmatrix}.$$

Teorema 3.4. Sea $\mathcal{S}_n = \{\sigma \ : \ \sigma \text{ permutación de } X\}$ y $\circ : \mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n$ sea la operación de composición entre permutaciones. Entonces, $(\mathcal{S}_n, \circ)$ es un grupo.

Demostración. Tenemos que la composición de funciones biyectivas es una operación cerrada. Además, tenemos que es asociativa, existe el elemento neutro (i.e. id_X) y el opuesto (i.e. σ^{-1}, el inverso, que también es biyección). ☐

Definición 3.3. Sean $\{a_1, \ldots, a_r\} \subset X$ distintos 2 a 2. El **r-ciclo** $(a_1, \ldots, a_r)$ es la permutación $(a_1, \ldots, a_r)$ tal que

$$\begin{aligned} a_1 &\to a_2 \\ a_2 &\to a_3 \\ &\vdots \\ a_r &\to a_1. \end{aligned}$$

Proposición 3.1. Toda permutación es composición de r-ciclos.

Demostración. Sea $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Si $\forall a \in X$, $\sigma(a) = a$, entonces $\sigma = id_X$, que es un 1-ciclo. Si $\exists a_1 \in X$ tal que $\sigma(a_1) = a_2 \neq a_1$, defino

$$\begin{aligned} a_3 &= \sigma^2(a_1) = \sigma(a_2) \in X \\ &\vdots \\ a_k &= \sigma^{k-1}(a_1) = \sigma(a_{k-1}) \in X. \end{aligned}$$

Sea $r \in \mathbb{N}$ el primer natural tal que $a_r \in \{a_1, \ldots, a_{r-1}\}$. Entonces, $\sigma(a_r) = a_1$. Así, tenemos que $a_r = \sigma^{r-1}(a_1)$ y $\sigma(a_r) = \sigma^h(a_1)$, con $h < r$. De esta manera, $a^{r-h} = \sigma^{r-1-h}(a_1) = a_1$. Si $\forall b \in X - \{a_1, \ldots, a_r\}$ tenemos que $\sigma(b) = b$ ya hemos terminado. En cambio, si existe $b_1 \in X - \{a_1, \ldots, a_r\}$ tal que $\sigma(b_1) = b_2 \neq b_1$, hacemos el mismo procedimiento de antes:

$$\begin{aligned} b_3 &= \sigma(b_2) = \sigma^2(b_1) \\ &\vdots \\ b_k &= \sigma(b_{k-1}) = \sigma^{k-1}(b_1). \end{aligned}$$

Sea s el primer natural tal que $\sigma(b_s) \in \{b_1, \ldots, b_{s-1}\}$. Entonces, $\sigma(b_s) = b_1$. Así, tenemos que $\sigma = (b_1, \ldots, b_s) \circ (a_1, \ldots, a_r)$. Repetimos este proceso hasta que se agoten los elementos de X. ☐

Ejemplo 3.2. Consideremos

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 8 & 10 & 2 & 1 & 3 & 4 & 6 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 5 & 2 & 8 & 6 & 3 & 10 & 7 & 4 \\ 9 & 5 & 1 & 8 & 6 & 3 & 10 & 7 & 4 & 2 \end{bmatrix} \\ &= (1, 9, 5) \circ (2, 8, 6, 3, 10, 7, 4) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.3.

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 5 & 6 & 1 & 2 & 7 & 3 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 & 2 & 5 & 3 & 6 & 7 & 9 & 10 \\ 8 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6 & 7 & 3 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$
$$= (1,8,4) \circ (2,5) \circ (3,6,7) \circ (9,10)\,.$$

Definición 3.4. Los 2-ciclos los llamaremos **trasposiciones**.

Proposición 3.2. Todo ciclo es producto de trasposiciones.

Demostración. Tenemos que

$$(a_1, \ldots, a_m) = (a_1, a_2)\,(a_2, a_3) \cdots (a_{m-1}, a_m)\,.$$

□

Definimos

$$\nabla = \prod_{1 \le i < j \le n} (\vec{x}_i - \vec{x}_j) = (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)\,(\vec{x}_1 - \vec{x}_3) \cdots (\vec{x}_1 - \vec{x}_n)\,(\vec{x}_2 - \vec{x}_3) \cdots (\vec{x}_2 - \vec{x}_n) \cdots (\vec{x}_{n-1} - \vec{x}_n)\,.$$

De esta manera, si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, definimos

$$\nabla\sigma = \prod_{1 \le i < j \le n} \vec{x}_{\sigma(i)} - \vec{x}_{\sigma(j)}.$$

Una permutación de σ es un par $i < j$ tal que $\sigma(i) < \sigma(j)$. Una inversión de σ es un par $i < j$ tal que $\sigma(j) < \sigma(i)$. Entonces, el número de factores de ∇ y $\nabla\sigma$ es el mismo. Así, tenemos que

$$\nabla\sigma = (-1)^{\text{número de inversiones}}\,\nabla.$$

El valor de -1 elevado al número de inversiones de σ lo llamaremos índice o signo de σ y se escribirá $\operatorname{ind}(\sigma)$ o $\operatorname{sig}(\sigma)$ [1] . Entonces,

$$\nabla\sigma = \operatorname{sig}(\sigma)\,\nabla.$$

Sea $\tau \in \mathcal{S}_n$, entonces

$$\underbrace{\nabla\sigma \circ \tau}_{\operatorname{sig}(\sigma\circ\tau)\nabla} = \operatorname{sig}(\sigma)\,\nabla\tau = \operatorname{sig}(\sigma)\operatorname{sig}(\tau)\,\nabla.$$

Definimos,

$$\begin{aligned} \operatorname{sig} : \mathcal{S}_n &\to \{-1, 1\} \\ \sigma &\to \operatorname{sig}(\sigma)\,. \end{aligned}$$

[1] También se corresponde con el número de trasposiciones en las que se puede componer σ.

Proposición 3.3. La trasposición $(1,2)$ tiene signo negativo.

Demostración. Tenemos que

$$\nabla(1,2) = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\cdots(x_2 - x_n)(x_1 - x_3)\cdots(x_1 - x_n)\cdots(x_{n-1} - x_n).$$

Como podemos ver respecto a la primera definición de ∇, tenemos que todo es igual menos el primer factor, que es de signo opuesto. Así, $\operatorname{sig}(1,2) = -1$. □

Proposición 3.4. La trasposición $(1,a)$ es negativa para $a \geq 2$.

Demostración. Tenemos que $(1,a) = (2,a) \circ (1,2) \circ (2,a)$.

$$\begin{aligned} &1 \to 1 \to 2 \to a \\ &2 \to a \to a \to 2 \\ &a \to 2 \to 1 \to 1. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\operatorname{sig}(1,a) = \operatorname{sig}(2,a)(-1)(\operatorname{sig}(2,a)) = (\operatorname{sig}(2,a))^2(-1) = -1.$$

□

Proposición 3.5. $\operatorname{sig}(a,b) = -1$.

Demostración. Tenemos que $(a,b) = (1,b) \circ (1,a) \circ (1,b)$. Así, $a \to b$ y $b \to a$, por lo que

$$\begin{aligned} &1 \to b \to b \to b \\ &a \to a \to 1 \to b \\ &b \to 1 \to a \to a. \end{aligned}$$

Entonces, $\operatorname{sig}((a,b)) = \operatorname{sig}(1,b)^2 \cdot \operatorname{sig}(1,a) = -1$. □

Proposición 3.6. $\operatorname{sig}((a_1,\ldots,a_r)) = (-1)^{r-1}$.

Demostración. Tenemos que

$$(a_1,a_r) \circ (a_1 a_{r-1}) \cdots (a_1 a_3)(a_1 a_2).$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} &a_1 \to a_2 \to a_2 \to \cdots \to a_2 \to a_2 \\ &a_2 \to a_1 \to a_3 \to \cdots \to a_3 \to a_3 \\ &\vdots \\ &a_{r-1} \to a_{r-1} \to a_{r-1} \to \cdots \to a_1 \to a_r \\ &a_r \to a_{r-1} \to a_r \to \cdots \to a_r \to a_r. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.4. Sea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 7 & 2 & 1 & 3 & 8 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (1, 10, 5) \circ (2, 9, 6, 3, 7, 8, 4)\,.$$

Por tanto,

$$\operatorname{sig}(\sigma) = \operatorname{sig}(1, 10, 5) \cdot \operatorname{sig}(2, 9, 6, 3, 7, 8, 4) = (-1)^2 \cdot (-1)^6 = 1.$$

3.4. Estructura de álgebra

Sean $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$, $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ y $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_p\}$ bases de V, V' y V'' respectivamente. Si $f \in \operatorname{Hom}(V, V')$, tenemos que

$$\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{v_j\}}(f) = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} = A,$$

donde $f(\vec{u}_i) = a_i^1 \vec{v}_1 + \cdots + a_i^m \vec{v}_m$. Similarmente, si $g \in \operatorname{Hom}(V, V')$,

$$\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}(g) = \begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & b_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_1^m & \cdots & b_n^m \end{pmatrix} = B.$$

Recordamos que

$$A + B = \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}(f + g) = \begin{pmatrix} a^1 + b^1 & \cdots & a_n^1 + b_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m + b_1^m & \cdots & a_n^m + b_n^m \end{pmatrix}.$$

Similarmente, si $a \in \mathbb{K}$,

$$a \cdot A = \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}(a \cdot f) = \begin{pmatrix} aa_1^1 & \cdots & aa_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ aa_1^m & \cdots & aa_n^m \end{pmatrix}.$$

Proposición 3.7. El producto de matrices es distributivo por la izquierda y por la derecha.

Si $f \in \operatorname{Hom}(V, V')$ y $g \in \operatorname{Hom}(V', V'')$, tenemos que $\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}(f) = A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})\,,\ \mathcal{M}_{\{\vec{v}_j\}\{\vec{w}_k\}}(g) = B \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{K})$. Definíamos el producto de matrices de la siguiente forma,

$$B \cdot A = \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{w}_k\}}(g \circ f)\,.$$

Si $f \in \operatorname{Hom}(V, V')$, $g \in \operatorname{Hom}(V', V'')$ y $h \in \operatorname{Hom}(V'', V''')$, tenemos que

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Así, como $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{K})$ y $C \in \mathcal{M}_{q\times p}$, tenemos que el producto de matrices es asociativo:

$$C \cdot (B \cdot A) = (C \cdot B) \cdot A \in \mathcal{M}_{q\times n}(\mathbb{K}).$$

Si $f, g \in \operatorname{Hom}(V, V')$, $h \in \operatorname{Hom}(V', V'')$, tenemos que $\forall \vec{x} \in V$,

$$h \circ (f+g)(\vec{x}) = h \circ (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = h(f(x)) + h(g(x)) = (h \circ f + h \circ g)(\vec{x}).$$

Así, $h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g$. Entonces, hemos demostrado que el producto de matrices es distributivo por la izquierda. Entonces, $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{K})$,

$$C \cdot (A+B) = C \cdot A + C \cdot B.$$

Sea $f \in \operatorname{Hom}(V, V')$ y $g, h \in \operatorname{Hom}(V', V'')$. Tenemos que $\forall \vec{x} \in V$,

$$((g+h) \circ f)(\vec{x}) = (g+h)(f(\vec{x})) = g(f(\vec{x})) + h(f(\vec{x})) = g \circ f(\vec{x}) + h \circ f(\vec{x}) = (g \circ f + h \circ f)(\vec{x}).$$

Así, concluimos que $(g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f$. Por lo que el producto de matrices es distributivo por la derecha. Es decir, sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B, C \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{K})$,

$$(B+C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A.$$

Proposición 3.8. El producto de matrices no es conmutativo.

Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{K})$. Entonces $B \cdot A \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$, pero $A \cdot B$ no está definido. Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, tenemos que $A \cdot B, B \cdot A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, pero no tienen por qué ser iguales. En efecto, sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .Entonces

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposición 3.9. Existe un elemento identidad en el producto de matrices

Tenemos que Observando las imágenes, tenemos que

$$A \cdot I_{n\times n} = A \quad \text{y} \quad I_{m\times m} A = A.$$

Entonces, si consideramos la aplicación

$$id_V : V_{\{\vec{u}_i\}} \to V_{\{\vec{u}_i\}},$$

tal que $\forall i = 1, \ldots, n$, $id_V(\vec{u}_i) = \vec{u}_i$, tenemos que su matriz será

$$\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{u}_i\}}(id_V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_{n\times n}.$$

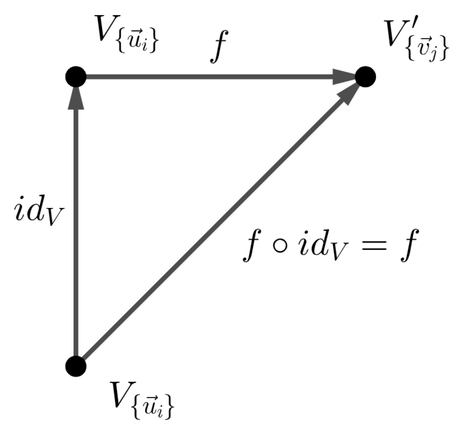

Figura 3.1: Matriz inversa respecto a V

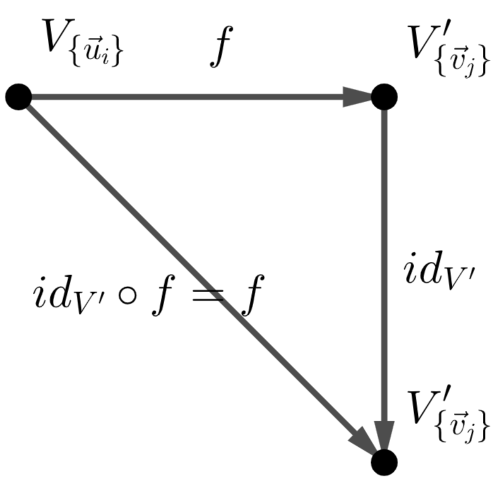

Figura 3.2: Matriz inversa respecto a V'

Consideremos la función,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{u}_i\}} : \operatorname{End}(V) &\to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \\ f &\to \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{u}_i\}}(f). \end{aligned}$$

Proposición 3.10. Por lo demostrado anteriormente, tenemos que $(\operatorname{End}(V), +, \cdot_{\mathbb{K}})$ y $(\mathcal{M}_{n\times n}, +, \cdot_{\mathbb{K}})$ son $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Similarmente, $(\operatorname{End}(V), +, \circ)$ y $(\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ son anillos con unidad.

Definición 3.5. Diremos que $\operatorname{End}(V)$ y $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ son **álgebras** con unidad.

Tenemos que

$$\operatorname{Aut}(V) = \{f \in \operatorname{End}(V) \ : \ f \text{ invertible}\} = \left\{f \in \operatorname{End}(V) \ : \ \exists f^{-1}\right\}.$$

Así, $(\operatorname{Aut}(V), \cdot)$ es un grupo. En general, la suma de automorfismos no es autormorfismo. Por ejemplo, $id_V - id_V = 0 \notin \operatorname{Aut}(V)$. Definimos

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \left\{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \ : \ \exists A^{-1}\right\}.$$

Para estudiar este conjunto, introduciremos la noción de determinante.

3.5. Determinantes

Definición 3.6. Una r-**forma multilineal** definida en V es una aplicación $t : \underbrace{V \times V \cdots \times V}_{r \text{ veces}} \to \mathbb{K}$ tal que

(a) $\forall i = 1, \dots, r$, $\forall \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r, \vec{x'}_i \in V$,

$$t\left(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i + \vec{x'}_i, \dots, \vec{x}_r\right) = t(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_r) + t\left(\vec{x}_1, \dots, \vec{x'}_i, \dots, \vec{x}_r\right).$$

(b) $\forall i = 1, \dots, r$, $\forall \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r \in V$, $\forall a \in \mathbb{K}$,

$$t(x_1, \dots, a\vec{x}_i, \dots, \vec{x}_r) = a t(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_r).$$

Definición 3.7. Una r-forma multilineal es **alternada** si $\forall \sigma \in \mathcal{S}_r$,

$$t\left(\vec{x}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{x}_{\sigma(r)}\right) = \operatorname{sig}(\sigma)\, t(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r), \ \forall \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r \in V.$$

Proposición 3.11. Si t es una r-forma multilineal, $\forall \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r \in V$,

$$t\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{0}, \ldots, \vec{x}_r\right) = 0.$$

Demostración. Tenemos que $\vec{0} = 0 \cdot \vec{x}_i$, así,

$$t\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{0}, \ldots, \vec{x}_r\right) = 0 \cdot t\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_r\right) = 0.$$

□

Proposición 3.12. Sea t una r-forma multilineal alternada. Entonces $\forall \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r \in V$,

$$t\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_r\right) = -t\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_r\right).$$

Demostración. Tenemos que $\operatorname{sig}(i, j) = -1$. □

Proposición 3.13. Si $\vec{x}_i = \vec{x}_j$ y t es una forma multilineal alternada,

$$t\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_r\right) = 0,\ i \neq j.$$

Demostración. Tenemos que

$$t\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_r\right) = -t\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_r\right).$$

Esto implica que $t\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_r\right) = 0$. □

Proposición 3.14.

$$t\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, a\vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_r\right) = 0.$$

Demostración. Por la proposición anterior,

$$t\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, a\vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_r\right) = at\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_r\right) = a \cdot 0 = 0.$$

□

Proposición 3.15.

$$t\left(\vec{x}_1, \ldots, \sum_{j=1}^{r} a^j \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_r\right) = 0,\ j \neq i.$$

Demostración. Tenemos que

$$\sum_{j=1}^{r} a^j t\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_r\right) = 0.$$

□

Proposición 3.16.

$$t\left(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i+\sum_{j=1}^{r}a^j\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_r\right)=t\left(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_r\right),\ j\neq i.$$

Sea $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ base de V, t multilineal alternada

$$\begin{aligned}
\vec{x}_1 =& a_1^1\vec{u}_1+\cdots+a_1^n\vec{u}_n=\sum_{j=1}^{n}a_1^j\vec{u}_j\\
\vdots&\\
\vec{x}_i =& a_i^1\vec{u}_1+\cdots+a_i^n\vec{u}_n=\sum_{j=1}^{n}a_i^j\vec{u}_j\\
\vdots&\\
\vec{x}_r =& a_r^1\vec{u}_1+\cdots+a_r^n\vec{u}_n=\sum_{j=1}^{n}a_r^j\vec{u}_j.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
t\left(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_r\right) =& t\left(\sum_{j=1}^{n}a_1^j\vec{u}_j,\dots,\sum_{j=1}^{n}a_r^j\vec{u}_j\right)\\
=& \sum_{(j_1,\dots,j_r)}a_1^{j_1}\cdots a_r^{j_r}t\left(\vec{u}_{j_1},\dots,\vec{u}_{j_r}\right).
\end{aligned}$$

Se trata de r-variaciones con repetición. Tenemos que si $j_i=j_h$, entonces el término $t\left(\vec{u}_{j_1},\dots,\vec{u}_{j_r}\right)$ se va a anular, por lo que realmente se trata de variaciones n-arias sin repetición. Sea $\dim(V)=n$ y sea t una n-forma multilineal alternada. Si $\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n\}\subset V$,

$$\begin{pmatrix}\vec{u}_1 & \cdots & \vec{u}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1^1 & \cdots & a_n^1\\ \vdots & & \vdots\\ a_1^n & \cdots & a_n^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{x}_1 & \cdots & \vec{x}_n\end{pmatrix}.$$

Son variaciones n-arias sin repetición de $(1,2,\dots,n)$.

$$\begin{aligned}
t\left(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_r\right) =& \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}a_1^{\sigma(1)}a_2^{\sigma(2)}\cdots a_n^{\sigma(n)}t\left(\vec{u}_{\sigma(1)},\dots,\vec{u}_{\sigma(n)}\right)\\
=& \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}a_1^{\sigma(1)}\cdots a_n^{\sigma(n)}\operatorname{sig}(\sigma)\,t\left(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\right).
\end{aligned}$$

Definición 3.8 (Determinante)**.** Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, el determinante de $A_{\sigma\in\mathcal{S}_n}$ es

$$\det A = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \operatorname{sig}(\sigma)\, a_1^{\sigma(1)} \cdots a_n^{\sigma(n)}.$$

Definición 3.9 (Traspuesta)**.** Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, llamaremos **traspuesta** de A a la matriz $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ que tiene por filas las columnas de A.

Teorema 3.5.

$$\det A^t = \det A.$$

Demostración. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, entonces

$$\det A^t = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \operatorname{sig}(\sigma)\, a^1_{\sigma(1)} \cdots a^n_{\sigma(n)} = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \operatorname{sig}\left(\sigma^{-1}\right) a_1^{\sigma^{-1}(1)} \cdots a_n^{\sigma^{-1}(n)} = \sum_{\Pi\in\mathcal{S}_n} \operatorname{sig}(\Pi)\, a_1^{\Pi(1)} \cdots a_n^{\Pi(n)} = \det A.$$

□

Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V tal que $t(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) = 1$. Entonces, $t(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = \det A$ y

$$\begin{pmatrix}\vec{x}_1 & \cdots & \vec{x}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{u}_1 & \cdots & \vec{u}_n\end{pmatrix} A.$$

Observación.

.

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_i^1 + b_i^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_i^n + b_i^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} =& t(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i + \vec{y}_i, \ldots \vec{x}_n) \\
=& t(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_n) + t(\vec{x}_1, \ldots, \vec{y}_i, \ldots, \vec{x}_n) \\
=& \det\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_i^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_i^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & b_i^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & b_i^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Observación.

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & aa_i^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & aa_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} =& t(\vec{x}_1, \ldots, a\vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_n) \\
=& at(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_n) \\
=& a\det\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_i^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Observación. En el caso anteriro, si $a = 0$, el determinante de la matriz es 0.

Observación.

$$\det\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_j^1 & \cdots & a_i^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_j^n & \cdots & a_i^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} = t\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_n\right) = -t\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_n\right).$$

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}\left(\mathbb{K}\right).$$

Tenemos que

$$\det\left(A\right) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \operatorname{sig}\left(\sigma\right) a_1^{\sigma(1)} \cdots a_n^{\sigma(n)}.$$

Vamos a ver como calcular el determinante de una matriz aislando una única fila o columna. Seleccionamos el elemento a_1^1 y calculamos la suma de todos los sumandos donde interviene a_1^1:

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n,\ \sigma(1)=1} \operatorname{sig}\left(\sigma\right) a_1^1 a_2^{\sigma(2)} \cdots a_n^{\sigma(n)} = \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{n-1}} \operatorname{sig}\left(\sigma\right) a_2^{\sigma(2)} \cdots a_n^{\sigma(n)}\right) \cdot a_1^1 = a_1^1 \det\begin{pmatrix} a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Este mismo procedimiento se puede hacer para un elemento cualquiera a_j^i.

Definición 3.10 (Adjunto)**.** El menor complementario α_j^i es el determinante de la matriz $(n-1)\times(n-1)$ que se obtiene A suprimiendo la fila i y la columna j, y llamaremos **adjunto** a $A_j^i = \left(-1\right)^{i+j} \alpha_j^i$.

Si cogemos la fija j, vamos a tener que

$$\det\left(A\right) = a_j^1 A_j^1 + a_j^2 A_j^2 + \cdots + a_j^n A_j^n = a_1^i A_1^i + a_2^i A_2^i + \cdots + a_n^i A_n^i.$$

Proposición 3.17. Si $i \neq k$ tenemos que

$$a_i^1 A_k^1 + a_i^2 A_k^2 + \cdots + a_i^n A_k^n = 0.$$

Similarmente, si $j \neq k$,

$$a_1^j A_1^k + a_2^j A_2^k + \cdots + a_n^j A_n^k = 0.$$

Demostración. Sea $\overline{A}$ una matriz con las mismas columnas que A, salvo la columna k, donde vuelve a aparecer la columna i. Claramente tenemos que $\det\left(\overline{A}\right) = 0$. Ahora, si desarrollamos $\overline{A}$ por los términos de la columna k, tenemos que

$$0 = \det\left(\overline{A}\right) = \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_k^j \overline{A}_k^j.$$

Sin embargo, tal y como hemos definido $\overline{A}$, tenemos que $\overline{a}_k^j = a_i^j$ y $\overline{A}_k^j = A_k^j$. $\square$

Tenemos que

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \cdots & \vec{u}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \cdots & \vec{u}_n \end{pmatrix} I_{n\times n}.$$

Por tanto, tenemos que

$$1 = t\left(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\right) = \underbrace{t\left(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\right)}_{1} \det\left(I_{n\times n}\right) \Rightarrow \det\left(I_{n\times n}\right) = 1.$$

Recordamos que $\operatorname{Aut}(V) = \left\{f \in \operatorname{End}(V) \ : \ \exists f^{-1}\right\}$ y $\operatorname{GL}(n, \mathbb{K}) = \left\{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \ : \ \exists A^{-1}\right\}$.

Teorema 3.6. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Entonces, $A \in \operatorname{GL}(n, \mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$.

Demostración. **(i)** Si $A \in \operatorname{GL}(n, \mathbb{K})$, $\exists A^{-1}$ tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_{n\times n}$. Así,

$$1 = \det\left(I_{n\times n}\right) = \det\left(A \cdot A^{-1}\right) = \det(A) \cdot \det\left(A^{-1}\right).$$

Por tanto, tenemos que si $\det(A) \neq 0$, $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)} \neq 0$. Estrictamente tenemos que tener que $\det(A), \det\left(A^{-1}\right) \neq 0$.

(ii) Si $\det(A) \neq 0$. Vamos a comprobar que $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \left(\operatorname{Adj}(A)\right)^t$. Tenemos que

$$\begin{pmatrix} \frac{A_1^1}{|A|} & \cdots & \frac{A_1^n}{|A|} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{A_n^1}{|A|} & \cdots & \frac{A_n^n}{|A|} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_1^1 a_1^1 + \cdots + a_1^n A_1^n & \cdots & A_n^1 a_n^1 + \cdots + A_1^n a_n^n \\ \vdots & & \vdots \\ \cdots & A_j^1 a_j^1 + \cdots + A_j^n a_j^n & \cdots \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}.$$

Tenemos que $\forall i, j = 1, \ldots, n$ el coeficiente de la fila j y la columna i de la matriz producto. Tenemos que

$$\frac{\sum_{k=1}^n A_k^i a_k^j}{|A|} = \begin{cases} \frac{\det(A)}{\det(A)} = 1, \ \text{si } j = i \\ 0, \ \text{si } j \neq i \end{cases}.$$

Es decir, el producto de las dos matrices anteriores es la identidad.

$\square$

3.6. Sistemas de Cramer

Definición 3.11 (Sistemas de Cramer)**.** Un **sistema de Cramer** es un sistema de ecuaciones lineales

$$(S)\begin{cases} a_1^1x^1+\cdots+a_n^1x^n=b^1\\ \vdots \\ a_1^nx^1+\cdots+a_n^nx^n=b^n \end{cases} \qquad \text{donde } a_i^j\in\mathbb{K},\ b^j\in\mathbb{K},\ \forall i,j=1,\ldots,n.$$

Además,

$$\det\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1\\ \vdots & & \vdots\\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}\neq 0.$$

Teorema 3.7. Todo sistema de cramer tiene solución única.

Demostración. Primero vemos la **unicidad**. Si $\left(x_0^1,\ldots,x_0^n\right)$ es solución de (S),

$$(S)\begin{cases} a_1^1x_0^1+\cdots+a_n^1x_0^n=b^1\\ \vdots \\ a_1^nx_0^1+\cdots+a_n^nx_0^n=b^n \end{cases} \qquad \text{donde } a_i^j\in\mathbb{K},\ b^j\in\mathbb{K},\ \forall i,j=1,\ldots,n.$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1\\ \vdots & & \vdots\\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0^1\\ \vdots\\ x_0^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b^1\\ \vdots\\ b^n \end{pmatrix}.$$

Como $\det(A)\neq 0$, tenemos que $\exists! A^{-1}$. Entonces,

$$A^{-1}A\begin{pmatrix} x_0^1\\ \vdots\\ x_0^n \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} b^1\\ \vdots\\ b^n \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} x_0^1\\ \vdots\\ x_0^n \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} b^1\\ \vdots\\ b^n \end{pmatrix}.$$

Ahora vamos a ver la **existencia**. Vamos a ver que el producto $A^{-1}\begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}$ es solución de S.

$$A^{-1}\begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} A_1^1 & \cdots & A_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ A_n^1 & \cdots & A_n^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} A_1^1 b^1 + \cdots + A_1^n b^n \\ \vdots \\ A_n^1 b^1 + \cdots + A_n^n b^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\det\begin{pmatrix} b^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}}{\det(A)} \\ \vdots \\ \frac{\det\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_{i-1}^1 & b^1 & a_{i+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ a_1^n & \cdots & a_{i-1}^n & b^n & a_{i+1}^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}}{\det(A)} \\ \vdots \\ \frac{\det\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & b^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & b^n \end{pmatrix}}{\det(A)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{A_1^1}{|A|} & \cdots & \frac{A_1^n}{|A|} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{A_n^1}{|A|} & \cdots & \frac{A_n^n}{|A|} \end{pmatrix}.$$

□

Definición 3.12 (Menor)**.** Un **menor** de orden r de A, $r \leq \min\{m, n\}$, es el determinante de una matriz $r \times r$ que se obtiene de A suprimiendo $(m-r)$ filas y $(n-r)$ columnas.

Definición 3.13 (Rango)**.** Decimos que el **rango** de A es r si existe un menor de orden r de A no nulo y todos los de orden $r+1$ son nulos.

Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V y sean $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m\} \subset V$, tales que

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= a_1^1\vec{u}_1 + \cdots + a_1^n\vec{u}_n \\ &\vdots \\ \vec{x}_m &= a_m^1\vec{u}_1 + \cdots + a_m^n\vec{u}_n. \end{aligned}$$

Entonces, en función de estos valores definimos,

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_m^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_m^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K}).$$

Teorema 3.8.

$$\operatorname{ran}(A) = \dim\left(L\left(\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m\}\right)\right).$$

Demostración. Sea $r = \operatorname{ran}(A)$ y $\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{vmatrix} \neq 0.$

(1) Vamos a ver que $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r\}$ son linealmente independientes.
Sean $a^1, \ldots, a^r \in \mathbb{K}$. Si

$$a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^r\vec{x}_r = \vec{0}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} &a^1\left(a_1^1\vec{u}_1 + \cdots + a_1^r\vec{u}_r + \cdots + a_1^n\vec{u}_n\right) + \cdots + a^r\left(a_r^1\vec{u}_1 + \cdots + a_r^r\vec{u}_r + \cdots + a_r^n\vec{u}_n\right) \\ &= \left(a^1a_1^1 + \cdots + a^ra_r^1\right)\vec{u}_1 + \cdots + \left(a^1a_1^r + \cdots + a^ra_r^r\right)\vec{u}_r + \cdots + \left(a^1a_1^n + \cdots + a^ra_r^n\right)\vec{u}_n = \vec{0}. \end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} a^1a_1^1 + \cdots + a^ra_r^1 &= 0 \\ &\vdots \\ a^1a_1^r + \cdots + a^ra_r^r &= 0 \\ &\vdots \\ a^1a_1^n + \cdots + a^ra_r^n &= 0. \end{aligned}$$

Entonces, $\left(a^1, \ldots, a^r\right)$ es solución del sistema

$$\begin{cases} a_1^1x^1 + \cdots + a_r^1x^r = 0 \\ \vdots \\ a_1^rx^1 + \cdots + a_r^rx^r = 0 \end{cases}.$$

Como es un sistema de Cramer homogéneo, tenemos que $a^1 = \cdots = a^r = 0$.

(2) Vamos a ver que $\forall i = 1, \ldots, m-r$, $\vec{x}_{r+i}$ es linealmente dependiente de $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r\}$.
Sea $i = 1, \ldots, m-r$, queremos ver que $\vec{x}_{r+i} \in L\left(\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r\}\right)$. Queremos llegar al siguiente sistema, respecto a las coordenadas de $\vec{x}_{r+i}$, que es un sistema de Cramer:

$$(S) = \begin{cases} a_1^1x^1 + \cdots + a_r^1x^r = x_{r+i}^1 \\ \vdots \\ a_1^rx^1 + \cdots + a_r^rx^r = x_{r+i}^r \end{cases}.$$

Al ser un sistema de Cramer, tenemos que $\exists!\left(a^1,\ldots,a^r\right)$ solución de S. Tenemos que

$$
\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_{r+i}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_{r+i}^r \\ a_1^{r+j} & \cdots & a_r^{r+j} & a_{r+i}^{r+j} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_{r+i}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_{r+i}^r \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r+i}^{r+j} - a^1 a_{r+i}^1 - \cdots - a^r a_{r+i}^r \end{vmatrix}. \\
&= \begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{vmatrix} \left(a_{r+i}^{r+j} - a^1 a_{r+i}^1 - \cdots - a_{r+i}^r\right)
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$a_{r+i}^{r+j} = a^1 a_{r+i}^1 + \cdots + a^r a_{r+i}^r.$$

□

Dado el sistema

$$(S)\begin{cases} a_1^1 x^1 + \cdots + a_n^1 x^n = b^1 \\ \vdots \\ a_1^m x^1 + \cdots + a_n^m x^n = b^m \end{cases}$$

Definimos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), \quad B = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 & b^1 \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m & b^m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times(n+1)}(\mathbb{K}).$$

Tenemos que $\operatorname{ran}(A) \leq \operatorname{ran}(B) \leq \operatorname{ran}(A) + 1$.

Teorema 3.9 (Teorema de Rouché-Fröbenius)**.** (S) tiene solución si y solo si $\operatorname{ran}(A) = \operatorname{ran}(B)$.

Demostración. **(i)** Si el sistema (S) tiene solución, existe $\left(x_0^1,\ldots,x_0^n\right) \in \mathbb{K}^n$ tal que

$$\begin{cases} a_1^1 x_0^1 + \cdots + a_n^1 x_0^n = b^1 \\ \vdots \\ a_1^m x_0^1 + \cdots + a_n^m x_0^n = b^n \end{cases}.$$

Como la última columna de la matriz B depende linealmente de A, tenemos que $\operatorname{ran}(A) = \operatorname{ran}(B)$.

(ii) Supongamos que $\operatorname{ran}(A) = \operatorname{ran}(B) = r$ y que $\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{vmatrix} \neq 0$. Consideramos el sistema (P) el sistema en el que intervienen las primeras r ecuaciones:

$$(P) \begin{cases} a_1^1 x^1 + \cdots + a_r^1 x^r + \cdots + a_n^1 x^n = b^1 \\ \vdots \\ a_1^r x^1 + \cdots + a_r^r x^r + \cdots + a_n^r x^n = b^r \end{cases}.$$

Tenemos que toda solución de (S) es solución de (P). Vamos a ver que toda solución de (P) es solución de (S). Sea $\left(x_0^1, \ldots, x_0^r, \ldots, x_0^n\right)$ solución de (P). Entonces,

$$\begin{aligned} a_1^1 x_0^1 + \cdots + a_r^1 x_0^r + \cdots + a_n^1 x_0^n &= b^1 \\ &\vdots \\ a_1^r x_0^1 + \cdots + a_r^r x_0^r + \cdots + a_n^r x_0^n &= b^r. \end{aligned}$$

Si $i > 1, \ldots, m - r$, queremos ver que

$$a_1^{r+i} x_0^1 + \cdots + a_r^{r+i} x_0^r + \cdots + a_n^r x_0^n = b^{r+i}.$$

Tenemos que existen $l_1, \ldots, l_r \in \mathbb{K}$ tales que

$$\begin{aligned} l_1 a_1^1 + \cdots + l_r a_1^r &= a_1^{r+i} \\ &\vdots \\ l_1 a_r^1 + \cdots + l_r a_r^r &= a_r^{r+i} \\ &\vdots \\ l_1 a_n^1 + \cdots + l_r a_n^r &= a_n^{r+i} \\ l_1 b^1 + \cdots + l_r b^r &= b^{r+i} \end{aligned}.$$

Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} a^{r+i} 1 x_0^1 + \cdots + a_r^{r+i} x_0^r + \cdots + a_n^{r+i} x_0^n = & \left(l_1 a_1^1 + \cdots + l_r a_1^r\right) x_0^1 + \cdots + \left(l_1 a_n^1 + \cdots + l_r a_n^r\right) x_0^n \\ = & l_1 \left(a_1^1 x_0^1 + \cdots + a_n^1 x_0^n\right) + \cdots + l_r \left(a_1^r x_0^1 + \cdots + a_n^r x_0^n\right) \\ = & l_1 b^1 + \cdots + l_r b^r = b^{r+i}. \end{aligned}$$

Entonces, tenemos que el sistema (P')

$$(P') \begin{cases} a_1^1 x^1 + \cdots + a_r^1 x^r = b^1 - a_{r+1}^1 x^{r+1} - \cdots - a_n^1 x^n \\ \vdots \\ a_1^r x^1 + \cdots + a_r^r x^r = b^r - a_{r+1}^r x^{r+1} - \cdots - a_n^r x^n \end{cases}.$$

Claramente, el sistema (P') es equivalente al sistema (P). Si fijo $\left(x_0^{r+1}, \ldots, x_0^n\right) \in \mathbb{K}^{n-r}$, tenemos que el sistema

$$(P_1)\begin{cases} a_1^1 x^1 + \cdots + a_r^1 x^r = b^1 - a_{r+1}^1 x_0^{r+1} - \cdots - a_n^1 x_0^n \\ \vdots \\ a_1^r x^1 + \cdots + a_r^r x^r = b^r - a_{r+1}^r x_0^{r+1} - \cdots - a_n^r x_0^n \end{cases}.$$

Al tratarse de un sistema de Cramer, existe una única solución $\left(x_0^1, \ldots, x_0^r\right)$ de (P_1). Entonces, $\left(x_0^1, \ldots, x_0^r, x_0^{r+1}, \ldots, x_0^n\right)$ es solución de (P). Si $\left(y_0^{r+1}, \ldots, y_0^n\right) \in \mathbb{K}^{n-r}$. Consideremos el sistema (P_2),

$$(P_2)\begin{cases} a_1^1 x^1 + \cdots + a_r^1 x^r = b^1 - a_{r+1}^1 y_0^{r+1} - \cdots - a_n^1 y_0^n \\ \vdots \\ a_1^r x^1 + \cdots + a_r^r x^r = b^r - a_{r+1}^r y_0^{r+1} - \cdots - a_n^r y_0^n \end{cases}.$$

Como es sistema de Cramer, $\exists!\left(y_0^1, \ldots, y_0^r\right)$ solución de (P_2). Por tanto, $\left(y_0^1, \ldots, y_0^r, y_0^{r+1}, \ldots, y_0^n\right)$ es solución de (P).

$\square$

Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ una base de V. Sea $L \in \mathcal{L}(V)$ tal que $\dim(L) = r$ y sea $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ una base de L. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 =& a_1^1 \vec{u}_1 + \cdots + a_1^n \vec{u}_n \\ &\vdots \\ \vec{v}_r =& a_r^1 \vec{u}_1 + \cdots + a_r^n \vec{u}_n. \end{aligned}$$

Entonces, si $\vec{x} \in V$ con $\vec{x} = x^1 \vec{u}_1 + \cdots + x^n \vec{u}_n$. Tenemos que $\vec{x} \in L$ si y solo si existen $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$ tales que $\vec{x} = \lambda^1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda^r \vec{v}_r$ (ecuaciones paramétricas). Esto es, si y solo si

$$\begin{aligned} x^1 \vec{u}_1 + \cdots + x^n \vec{u}_n =& \lambda^1\left(a_1^1 \vec{u}_1 + \cdots + a_1^n \vec{u}_n\right) + \cdots + \lambda^r\left(a_r^1 \vec{u}_1 + \cdots + a_r^n \vec{u}_n\right) \\ =& \left(\lambda^1 a_1^1 + \cdots + \lambda^r a_r^1\right) \vec{u}_1 + \cdots + \left(\lambda^1 a_1^n + \cdots + \lambda^r a_r^n\right) \vec{u}_n. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} x^1 =& \lambda^1 a_1^1 + \cdots + \lambda^r a_r^1 \\ &\vdots \\ x^n =& \lambda^1 a_1^n + \cdots + \lambda^r a_r^n. \end{aligned}$$

Es decir, si y solo si el sistema anterior tiene solución. Es decir,

$$r = \operatorname{ran}\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} = \operatorname{ran}\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 & x^1 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n & x^n \end{pmatrix}.$$

Así obtenemos las ecuaciones implícitas de L. Supongamos que

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{vmatrix} = \nabla \neq 0.$$

Entonces, tenemos que los menores de orden $r+1$ de la matriz de coeficientes que contienen al menor anterior son nulos.

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & x^1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & x^r \\ a_1^{r+1} & \cdots & a_r^{r+1} & x^{r+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Similarmente, $\forall i = 1, \dots, n-r$,

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & x^1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & x^r \\ a_1^{r+i} & \cdots & a_r^{r+i} & x^{r+i} \end{vmatrix} = 0.$$

Si desarrollamos este determinante por adjuntos:

$$x^1 b_1^1 + x^2 b_2^1 + \cdots + x^r b_r^1 x^{r+1} \nabla = 0.$$

Tenemos que $\forall i = 1, \dots, n-r$,

$$x^1 b_1^1 + \cdots + x^r b_r^1 + x^{r+i} \nabla = 0.$$

Tenemos $n-r$ ecuaciones donde la matriz de coeficientes será

$$\operatorname{ran} \begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & b_r^1 & \nabla & 0 & \cdots & 0 \\ b_1^2 & \cdots & b_r^2 & 0 & \nabla & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_1^{n-r} & \cdots & b_r^{n-r} & 0 & \cdots & 0 & \nabla \end{pmatrix} = n-r.$$

Con esto hemos demostrado que todo subespacio vectorial es el conjunto de las soluciones de un sistema homogéneo. Ahora consideremos el recíproco. Consideremos el sistema homogéneo (H):

$$(H) \begin{cases} c_1^1 x^1 + \cdots + c_n^1 x^n = 0 \\ \vdots \\ c_1^{n-r} x^1 + \cdots + c_n^{n-r} x^n = 0 \end{cases}.$$

Sea $L = \left\{ x_0^1 \vec{u}_1 + \cdots + x_0^n \vec{u}_n \ : \ \left(x_0^1, \dots, x_0^n \right) \text{ solución de } (H) \right\} \in \mathcal{L}(V)$ tales que $\dim(L) = r$. Supongamos que

$$\operatorname{ran} \begin{pmatrix} c_1^1 & \cdots & c_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ c_1^{n-r} & \cdots & c_n^{n-r} \end{pmatrix} = n-r.$$

En la introducción está demostrado que L es un subespacio vectorial. Supongamos que

$$\begin{vmatrix} c_1^1 & \cdots & c_{n-r}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ c_1^{n-r} & \cdots & c_{n-r}^{n-r} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Entonces

$$\begin{cases} c_1^1 x^1 + \cdots + c_{n-r}^1 x^{n-r} = -c_{(n-r)+1}^1 x^{(n-r)+1} - \cdots - c_n^1 x^n \\ \vdots \\ c_1^{n-r} x^1 + \cdots + c_{n-r}^{n-r} x^{n-r} = -c_{(n-r)+1}^{n-r} x^{(n-r)+1} - \cdots c_n^{n-r} x^n \end{cases}.$$

Supongamos que las siguientes tuplas son soluciones de (H):

$$\begin{cases} \left(d_1^1, \ldots, d_1^{n-r}, 1, 0 \ldots, 0\right) \\ \left(d_2^1, \ldots, d_2^{n-r}, 0, 1, \ldots, 0\right) \\ \vdots \\ \left(d_r^1, \ldots, d_r^{n-r}, 0, \ldots, 0, 1\right) \end{cases}.$$

Sean

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 =& d_1^1 \vec{u}_1 + \cdots + d_1^{n-r} \vec{u}_{n-r} + \vec{u}_{n-r+1} \in L \\ &\vdots \\ \vec{v}_r =& d_r^1 \vec{u}_1 + \cdots + d_r^{n-r} \vec{u}_{n-r} + \vec{u}_{n-r+1} \in L \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \vec{x}_0 =& x_0^1 \vec{u}_1 + \cdots + x_0^{n-r} \vec{u}_{n-r} + \cdots + x_0^n \vec{u}_n \in L \\ \vec{z}_0 =& \vec{x}_0 - x_0^{n-r+1} \vec{x}_1 - x_0^{n-r+2} \vec{v}_2 - \cdots - x_0^n \vec{v}_r = z_0^1 \vec{u}_1 + \cdots + z_0^{n-r} \vec{u}_{n-r} + 0 \cdot \vec{u}_{n-r+1} + \cdots + 0 \cdot \vec{u}_n \in L. \end{aligned}$$

Entonces tenemos que $\left(z_0^1, \ldots, z_0^{n-r}, 0, \ldots, 0\right)$ son solución de (H). Entonces, $\left(z_0^1, \ldots, z_0^{n-r}\right)$ es solución del sistema de Cramer.

$$\begin{cases} c_1^1 x^1 + \cdots + c_{n-r}^1 x^{n-r} = 0 \\ \vdots \\ c_1^{n-r} x^1 + \cdots + c_{n-r}^{n-r} x^{n-r} = 0 \end{cases}.$$

Así, $\vec{z}_0 = \vec{0}$ y

$$\vec{x}_0 = x_0^{n-r+1} \vec{v}_1 + x_0^n \vec{v}_r \Rightarrow L = L\left(\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}\right).$$

Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V y $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r\} \subset V$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_r^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times r}(\mathbb{K}).$$

Tenemos que $\dim\left(L\left(\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r\}\right)\right) = \operatorname{ran}(A)$.

Proposición 3.18.

$$L\left(\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_r\}\right)=L\left(\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_r\}\right).$$

Proposición 3.19. Sea $a\in\mathbb{K}/\{0\}$,

$$L\left(\{\vec{x}_1,\dots,a\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_r\}\right).=L\left(\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_r\}\right)$$

Proposición 3.20. Si $a\in\mathbb{K}$,

$$L\left(\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_j+a\vec{x}_i\dots,\vec{x}_r\}\right)=L\left(\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_r\}\right).$$

Si $a_1^1\neq 0$, a la segunda fila le resto la primera multiplicada por $\dfrac{a_1^2}{a_1^1}$. Para $i=2,\dots,n$ a la fila i le resto la primera multiplicada por $\dfrac{a_1^i}{a_1^1}$.

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_r^1\\ 0 & a_2^2 & \cdots & a_r'^2\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & a_2'^r & \cdots & a_r'^r \end{pmatrix}.$$

Si $a_1^1=0$ y $\exists a_1^i\neq 0$, permutamos las filas 1 e i. Supongo por hipótesis de inducción que después de i etapas.

$$\begin{pmatrix} b_1^1 & * & \cdots & *\\ 0 & b_1^2 & \cdots & *\\ 0 & \cdots & b_1^i & *\\ 0 & \cdots & 0 & D \end{pmatrix},$$

donde

$$D=\begin{pmatrix} d_1^1 & \cdots & d_t^1\\ \vdots & & \vdots\\ d_1^s & \cdots & d_r^t \end{pmatrix}.$$

El método anterior consiste en una forma de calcular el rango de una matriz usando Gauss. La forma de calcular la inversa de una matriz $A\in\mathrm{GL}\left(n,\mathbb{K}\right)$ consiste en utilizar combinaciones lineales hasta obtener la identidad. Si hacemos las mismas trasformaciones con $I_{n\times n}$, obtenemos A^{-1}.

Capítulo 4

Reducción de Endomorfismos

Sea $f : V \to V'$ lineal. Si $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ y $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ son bases de V y V', respectivamente, tenemos que $A = \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}(f) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Si $\left\{\vec{u'}_1, \dots, \vec{u'}_n\right\}$, $\left\{\vec{v'}_1, \dots, \vec{v'}_m\right\}$ son bases de V y V', respectivamente, con $B = \mathcal{M}_{\{\vec{u'}_i\}\{\vec{v'}_j\}}(f)$, tenemos que

$$\begin{pmatrix}\vec{u'}_1 & \dots & \vec{u'}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{u}_1 & \dots & \vec{u}_n\end{pmatrix} C,\ C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$$
$$\begin{pmatrix}\vec{v'}_1 & \dots & \vec{v'}_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_m\end{pmatrix} D,\ D \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{K}).$$

Entonces, tenemos el siguiente diagrama. De aquí se deduce que $f = id_{V'} \circ f \circ id_V$, que es lo mismo que

$$B = D^{-1}AC.$$

Definición 4.1. Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ son **equivalentes** si existe $C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, $D \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{K})$ tales que $D^{-1}AC = B$.

Observación. Esta es una relación de equivalencia en el cojunto de matrices $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. En concreto las matrices equivalentes tienen el mismo rango.

Observación. Revisar el último ejercicio de aplicaciones lineales.

Observación. Si $f \in \mathrm{End}(V)$, tenemos que $C = D$, por lo que $B = C^{-1}AC$.

Definición 4.2. Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ son **semejantes** si existe $C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ tal que $B = C^{-1}AC$.

Definición 4.3. El vector $\vec{x} \in V$ es un **vector propio** de $f \in \mathrm{End}(V)$ si existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$. Similarmente, se dice que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un **valor propio** de f si $\exists \vec{x} \in V / \left\{\vec{0}\right\}$ tal que

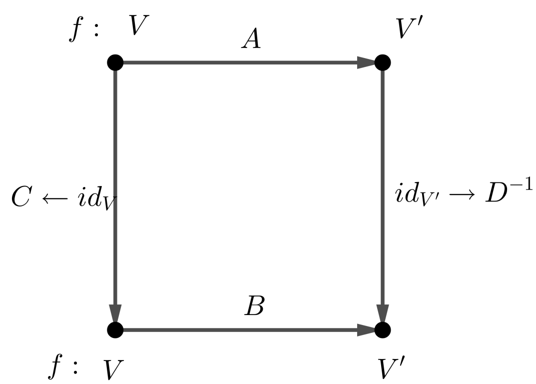

Figura 4.1: Semejanza de matrices

$f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.

Si $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ es base de V formada por vectores propios de f

$$f(\vec{x}_i) = \lambda_i \vec{x}_i.$$

Ejemplo 4.1. No siempre existen los valores propios. Por ejemplo, consideremos la aplicación dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A partir de un sistema de ecuaciones obtenemos que $\lambda^2 = -1$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, esta aplicación no tendría valores propios. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, sí que los tendría.

4.1. Polinomios

Definición 4.4. Una **sucesión** definida en $\mathbb{K}$ es una aplicación $a(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tal que $n \to a_n$. Diremos que $a(x) = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$. Un **polinomio** con coeficientes en $\mathbb{K}$ es una sucesión $a(x) = (a_0, \ldots, a_n, \ldots)$ tal que existe $a_m \neq 0$ y $a_k = 0$, $\forall k > m$. Diremos que m es el **grado** del polinomio $a(x)$.

Observación. Por esta definición, el polinomio $0 = (0, \ldots, 0, \ldots)$ no tiene grado.

Sea $\mathbb{K}[x] = \{a(x) \ : \ a(x) \text{ polinomio con coeficientes en } \mathbb{K}\}$. Así, definimos la suma de polinomios

$$a(x) + b(x) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n, \ldots).$$

Observación. Tenemos que con esta suma, $\mathbb{K}[x]$ es un grupo abeliano.

Ahora definimos el producto de polinomios:

$$a(x) \cdot b(x) = \left(\underbrace{a_0 b_0}_{c_0}, \underbrace{a_1 b_0 + a_0 b_1}_{c_1}, \ldots, c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j, \ldots \right).$$

Observación. Tenemos que con este producto, $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad. La unidad será $(1, 0, \ldots, 0, \ldots)$.

Observación. Se deduce fácilmente que

- $\operatorname{grad}(a(x) + b(x)) \leq \operatorname{máx}(\operatorname{grad}(a(x)), \operatorname{grad}(b(x)))$
- $\operatorname{grad}(a(x) \cdot b(x)) = \operatorname{grad}(a(x)) + \operatorname{grad}(b(x))$.

Proposición 4.1. A partir de la segunda igualdad tenemos que

(a) Si $a(x) \cdot b(x) = 0$, $a(x) = 0$ o $b(x) = 0$.

(b) Si $a(x) \cdot b(x) = a(x) \cdot c(x) \neq 0$, entonces $b(x) = c(x)$.

(c) Los únicos elementos invertibles de $\mathbb{K}[x]$ son los de grado 0.

Podemos definir el producto por escalares:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}[x] &\to \mathbb{K}[x] \\ (a, (a_0, \ldots, a_n, \ldots)) &\to (aa_0, \ldots, aa_n, \ldots). \end{aligned}$$

Observación. Así, $\mathbb{K}[x]$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Esto nos permite escribir

$$\begin{aligned} a(x) =& (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) \\ =& a_0 (1, 0, \ldots, 0, \ldots) + a_1 (0, 1, \ldots, 0, \ldots) + \cdots + a_n (0, \ldots, 1, \ldots) + \cdots. \end{aligned}$$

Así, definimos

$$\begin{aligned} x &= (0, 1, \ldots, 0, \ldots) \\ x^2 &= (0, 0, 1, \ldots, 0, \ldots) \\ x^3 &= (0, 1, \ldots, 0, \ldots) \cdot (0, 0, 1, \ldots, 0, \ldots) = (0, 0, 0, 1, \ldots, 0, \ldots) \end{aligned}$$

Supongamos que $x^{k-1} = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0, \ldots)$. Así, para x^k,

$$x^k = (0, 1, \ldots, 0, \ldots) \cdot (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0, \ldots).$$

Así, tenemos que si $a(x) \in \mathbb{K}[x]$,

$$a(x) = (a_0, 0, \ldots, 0, \ldots) + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Si a cada $a \in \mathbb{K}$ le hacemos corresponder el polinomio $(a, 0, \ldots, 0, \ldots)$, obtenemos una aplicación inyectiva $\mathbb{K} \to \mathbb{K}[x]$ que conserva las operaciones anteriores. Así, podemos sustituir $(a_0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ por a_0.

Teorema 4.1. Sean $a(x), b(x) \in \mathbb{K}[x]/\{0\}$, entonces $\exists! p(x), r(x) \in \mathbb{K}[x]$ tales que $a(x) = b(x)p(x) + r(x)$. Además, $\operatorname{grad}(r(x)) < \operatorname{grad}(b(x))$ o $r(x) = 0$.

Demostración. Si $\operatorname{grad}(a(x)) < \operatorname{grad}(b(x))$ tomamos $p(x) = 0$ y $r(x) = a(x)$. Supongamos que $\operatorname{grad}(a(x)) \geq \operatorname{grad}(b(x))$, entonces

$$\begin{aligned} a(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,\ a_n \neq 0 \\ b(x) &= b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m,\ b_m \neq 0. \end{aligned}$$

Tenemos que

$$a(x) - b(x) \frac{a_n}{b_m} \left(x^{n-m}\right) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n_1} x^{n_1},\ n_1 \geq n.$$

Si $n_1 < m$,

$$a(x) = b(x) \underbrace{\left(\frac{a_m}{b_m} \left(x^{m-n}\right)\right)}_{p(x)} + \underbrace{c(x)}_{r(x)}.$$

Si $n_1 \geq m$,

$$c(x) - \frac{c_{n_1}}{b_m}\left(x^{n_1-m}\right) = d_0 + d_1 x + \cdots d_{n_2} x^{n_2},\ n_2 < n_1 < n.$$

Si $n_2 < m$,

$$a(x) = b(x)\left(\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{c_{n_1}}{b_m} x^{n_1-m}\right) + d_{n_2} x^{n_2}.$$

Si $n_2 \geq m$, $n_2 < n_1 < n$ y repetimos el paso anterior. Después de un número finito de pasos, obtendremos un polinomio resto que tenga grado 0 o cuyo grado sea menor que m. Ahora demostramos la unicidad, $a(x) = b(x)p(x) + r(x)$ con $\operatorname{grad}(r(x)) < \operatorname{grad}(b(x))$ o $r(x) = 0$ y $a(x) = b(x)p'(x) + r'(x)$ con $\operatorname{grad}(r'(x)) < \operatorname{grad}(b(x))$ o $r'(x) = 0$. Tenemos que

$$b(x)(p(x) - p'(x)) = r'(x) - r(x).$$

Si $r(x) \neq r'(x)$, entonces $\operatorname{grad}(r(x) - r'(x)) < \operatorname{grad}(b(x))$. Así, $\operatorname{grad}(b(x)(p(x) - p'(x))) < \operatorname{grad}(b(x))$. Sin embargo, tenemos que $\operatorname{grad}(b(x)(p(x) - p'(x))) \geq \operatorname{grad}(b(x))$. Esto es una contradicción, por lo que debe ser que $p(x) = p'(x)$ y $r(x) = r'(x)$. □

Definición 4.5. Decimos que $p(x)$ es el **cociente** de la división de $a(x)$ entre $b(x)$ y $r(x)$ es el **resto**.

Definición 4.6. Si $r(x) = 0$, decimos que $a(x)$ es múltiplo de $b(x)$ o que $b(x)$ divide a $a(x)$. Esto se escribe $b(x)|a(x)$.

Definición 4.7 (Ideal)**.** Un **ideal** I de $\mathbb{K}[x]$ es un conjunto $I \neq \emptyset$ y $I \subset \mathbb{K}[x]$, que verifica que

(a) Si $a(x), b(x) \in I$, $a(x) + b(x) \in I$.

(b) Si $a(x) \in I$ y $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, tenemos que $p(x)a(x) \in I$.

Observación. Dado $b(x) \in \mathbb{K}[x]$ y sea $(b(x)) = \{p(x)b(x) : p(x) \in \mathbb{K}[x]\}$. Tenemos que este conjunto es un ideal.

Proposición 4.2. Sea $I \subset \mathbb{K}[x]$ un ideal. Entonces, $\exists! b(x) \in I$ mónico, tal que $I = (b(x))$.

Demostración. Si $I = \{0\}$, entonces $(0) = I$. Si $I \neq \{0\}$, sea $b(x) \in I$ un polinomio de menor grado entre los polinomios de I. Tenemos que $(b(x)) \subset I$ por las propiedades del ideal. Si $a(x) \in I$, tenemos que existen $p(x), r(x) \in \mathbb{K}[x]$ tales que

$$a(x) = b(x)p(x) + r(x).$$

Entonces, $r(x) = a(x) - b(x)p(x) \in I$. Como $\operatorname{grad}(r(x)) < \operatorname{grad}(b(x))$ y $r(x) \in I$, tenemos que $r(x) = 0$. Así, tenemos que $I \subset (b(x))$, por lo que tenemos que $I = (b(x))$. □

Definición 4.8. Se dice que $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ es **mónico** si su coeficiente de mayor grado es 1.

Observación. (i) $\forall k \in \mathbb{K}/\{0\}$, $(b(x)) = (kb(x))$.

(ii) $a(x) \in (a(x)) \subset (b(x)) \iff b(x)\,|a(x)$.

(iii) Si $(a(x)) = (b(x))$, entonces $a(x) = kb(x)$ con $k \in \mathbb{K}$.

Proposición 4.3. Sean $I_1, \ldots, I_i$ ideales de $\mathbb{K}[x]$ donde $i \in X$, entonces $\bigcap_{i\in X} I_i$ también es ideal.

Demostración. Si $a(x), b(x) \in \bigcap_{i\in X} I_i$, entonces $\forall i \in X$, $a(x), b(x) \in I_i$. Así, $\forall i \in X$, $a(x)+b(x) \in I_i$, de esta manera $a(x)+b(x) \in \bigcap_{i\in X} I_i$ Similarmente, si $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ y $a(x) \in \bigcap_{i\in X} I_i$, tenemos que $\forall i \in X$, $p(x)\,a(x) \in I_i$. Así, $p(x)\,a(x) \in \bigcap_{i\in X} I_i$. □

Sean $a_1(x), \ldots, a_p(x) \in \mathbb{K}[x]$. Entonces tenemos que

$$(a_1(x)) \cap (a_2(x)) \cap \cdots \cap (a_p(x)),$$

es un ideal. Por tanto, $\exists!\,(m(x))$ mónico tal que $(a_1(x)) \cap (a_2(x)) \cap \cdots \cap (a_p(x)) = (m(x))$.

Definición 4.9 (Mínimo común múltiplo)**.** Decimos que $m(x)$ es **mínimo común múltiplo** de $a_1(x), \ldots, a_p(x)$.

Dados $a_1(x), \ldots, a_q(x) \in \mathbb{K}[x]$, sea

$$I = \{p_1(x)\,a_1(x) + \cdots + p_q(x)\,a_q(x) \ : \ p_1(x), \ldots, p_q(x) \in \mathbb{K}[x]\}.$$

Tenemos que I es un ideal de $\mathbb{K}[x]$. Así, $\exists! d(x) \in \mathbb{K}[x]$ mónico tal que $I = (d(x))$. Así, $(a_1(x)), \ldots, (a_q(x)) \subset (d(x))$. De esta manera tenemos que $\forall i = 1, \ldots, q$, $d(x)\,|a_i(x)$. Si $q(x) \in \mathbb{K}[x]$ tal que $\forall i = 1, \ldots, q$, $q(x)\,|a_i(x)$, tenemos que $q(x)\,|d(x)$.

Definición 4.10 (Máximo común divisor)**.** Se dice que $d(x)$ es el **máximo común divisor**.

Definición 4.11. Si $a(x), b(x) \in \mathbb{K}[x]$ son **primos entre sí** si su máximo común divisor es 1.

Teorema 4.2. Si $\operatorname{mcd}(a(x), b(x)) = 1$ y $a(x) | c(x) b(x)$, entonces $a(x) | c(x)$.

Demostración. Tenemos que $\exists p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x]$ tales que $1 = p(x) a(x) + q(x) b(x)$. Así,

$$c(x) = c(x) p(x) a(x) + c(x) q(x) b(x) \subset (a(x)).$$

□

Definición 4.12. Un polinomio $a(x) \in \mathbb{K}[x]$ es **irreducible** si sus únicos divisores sean k o $ka(x)$, donde $k \in \mathbb{K}/\{0\}$.

Teorema 4.3. Todo polinomio de grado mayor o igual que 1 es producto de polinomios irreducibles.

Demostración. Sea $a(x) \in \mathbb{K}[x]$. Si $a(x)$ es irreducible, tenemos que $a(x) = a(x) \cdot 1$. Si $a(x)$ no es irreducible, tenemos que $\exists p_1(x) \in \mathbb{K}[x]$ tal que $p_1(x) | a(x)$ de grado mínimo entre los divisores de $a(x)$. Así, $a(x) = p_1(x) a_1(x)$. Tenemos que $p_1(x)$ es irreducible. Si $a_1(x)$ es irreducible, hemos ganado. Si $a_1(x)$ no es irreducible, tenemos que $\exists p_2(x) \in \mathbb{K}[x]$ tal que $p_2(x) | a_1(x)$ de grado mínimo entre los polinomios que dividen $a_1(x)$. Tenemos que $p_2(x)$ es irreducible. Así, $a_1(x) = p_2(x) a_2(x)$, así $a(x) = p_1(x) p_2(x) a_2(x)$. Después de n etapas, tenemos que $a(x) = p_1(x) p_2(x) \cdots p_n(x) a_n(x)$, donde $a_n(x)$ será irreducible. □

Proposición 4.4. Sea $p(x) = p_1(x) \cdots p_n(x) = q_1(x) \cdots q_m(x)$, donde $p_i(x), q_j(x)$ son irreducibles. Entonces, tenemos que $n = m$ y los polinomios $p_i(x), q_j(x)$ coinciden salvo en orden y factores escalares.

Demostración. Si $n = 1$, tenemos que $p_1 = q_1(x) q_2(x) \cdots q_m(x)$. Entonces, si $m \neq 1$, tenemos que $p_1(x)$ no es irreducible, lo cual es una contradicción. Por tanto, debe ser que $m = 1$ y $p_1(x) = q_1(x)$. Ahora, asumimos que es cierto para $n - 1$. Tenemos que

$$p_1(x) \cdots p_n(x) = q_1(x) \cdots q_m(x).$$

Así, $p_n(x) | q_1(x) \cdots q_m(x)$. Así, tenemos que $p_n(x) | q_1(x)$ o $p_n(x) | q_2(x) \cdots q_m(x)$.

- En el primer caso, tenemos que $\exists k \in \mathbb{K}/\{0\}$ tal que $p_n(x) = kq_1(x)$. Así, $p_1(x) \cdots p_{n-1}(x) = \frac{1}{k}(q_1(x) \cdots q_{m-1}(x))$. Por hipótesis, tenemos que $n-1 = m-1$ y $p_i(x) = q_j(x)$ salvo escalares no nulos.
- En el segundo caso, tenemos que $p_n(x) | q_2 \cdots q_m$, donde podemos iterar el paso anterior.

Llegaremos a un $q_j(x)$ tal que $p_n(x) = kq_j(x)$. Así, solo nos quedan $n - 1$ factores, que podemos reducir a la hipótesis de inducción, y se concluye que $n - 1 = m - 1$, por lo que $n = m$. □

Si $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, definimos la aplicación

$$\begin{aligned} p : \mathbb{K} &\to \mathbb{K} \\ k &\to p(k) = a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + \cdots + a_n k^n. \end{aligned}$$

Definición 4.13. Se dice que $k \in \mathbb{K}$ es una **raíz** de $p(x)$ si $p(k) = 0$.

Proposición 4.5. Sea $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ de grado mayor o igual que 1, entonces $k \in \mathbb{K}$ es una raíz de $p(x)$ sí y sólo si $(x-k) | p(x)$.

Demostración. **(i)** Sean $p(x) = q(x)(x-k) + r(x)$, donde $\operatorname{grad}(r(x)) < 1$ o $r(x) = 0$. Así, tenemos que si $p(k) = 0 = q(k)(k-k) + r(x)$, entonces $(x-k) | p(x)$.

(ii) Recíprocamente, si $p(x) = q(x)(x-k)$, tenemos que $p(k) = 0$.

□

Definición 4.14. Sea k una raíz de $p(x) \in \mathbb{K}[x]$. Diremos que k es una raíz de $p(x)$ de orden r si $(x-k)^r | p(x)$ y $(x-k)^{r+1} \not| p(x)$.

Observación. La suma de las multiplicidades de las raíces de un polinomio de grado n es menor o igual que n.

4.2. Vectores y valores propios

Sea $f \in \operatorname{End}(V)$. Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V. Tenemos que $\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{u}_i\}}(f) = A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Si $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ es otra base de V. Sea $\mathcal{M}_{\{\vec{v}_i\}\{\vec{v}_i\}}(f) = B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Tenemos que

$$(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) C, \; C \in \operatorname{GL}(n, \mathbb{K}).$$

Así, tenemos que $B = C^{-1} A C$.

Definición 4.15. Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ son **semejantes** si existe $C \in \operatorname{GL}(n, \mathbb{K})$ tal que $B = C^{-1} A C$.

Sea $f \in \operatorname{End}(V)$ (o $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$).

Definición 4.16. Un vector $\vec{x} \in V$ es un **vector propio** o **autovector** de f si existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$. Similarmente, se dice que un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ es un **valor propio** o **autovalor** de f si existe $\vec{x} \in V / \left\{\vec{0}\right\}$ tal que $f(x) = \lambda \vec{x}$.

Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ y sea $L_\lambda = \{\vec{x} \in V \ : \ f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\} = \operatorname{Ker}(f - \lambda id_V) \in \mathcal{L}(V)$. Si λ no es valor propio de f, tenemos que $L_\lambda = \left\{\vec{0}\right\}$.

Observación. En las simetrías los únicos autovalores son $\{-1, 1\}$. En efecto, tenemos que $V = \operatorname{Ker}(s + id_V) \oplus \operatorname{Ker}(s - id_V)$.

Teorema 4.4. Sea $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ valores propios de f distintos 2 a 2, y sean $\vec{x}_i \in L_{\lambda_i} / \left\{\vec{0}\right\}, \forall i = 1, \ldots, p$. Entonces, $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\}$ son linealmente independientes.

Demostración. Si $p = 1$, tenemos que $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$, por lo que $\{\vec{x}_1\}$ es linealmente independiente. Ahora, consideremos el caso de $p = 2$. Sean $a^1, a^2 \in \mathbb{K}$ tales que $a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 = \vec{0}$. Así, tenemos que

$$\vec{0} = f\left(\vec{0}\right) = f\left(a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2\right) = a^1 f(\vec{x}_1) + a^2 f(\vec{x}_2) = a^1\lambda_1\vec{x}_1 + a^2\lambda_2\vec{x}_2.$$

Así, tenemos que

$$\lambda_1 \cdot \vec{0} = \lambda_1\left(a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2\right) = a^1\lambda_1\vec{x}_1 + a^2\lambda_1\vec{x}_2.$$

Así, restando las dos ecuaciones anteriores tenemos que

$$\vec{0} = \left(a^1\lambda_1 - a^1\lambda_1\right)\vec{x}_1 + \left(a^2\lambda_2 - a^2\lambda_1\right)\vec{x}_2 \Rightarrow \vec{0} = a^2(\lambda_2 - \lambda_1)\vec{x}_2 \Rightarrow a^2 = 0.$$

Así, como $a^1\vec{x}_1 = \vec{0}$, tenemos que $a^1 = 0$. Ahora, asumimos que es cierto para $p - 1$. En el caso de p, sean $\left\{a^1, \ldots, a^p\right\} \subset \mathbb{K}$ tales que $a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^p\vec{x}_p = \vec{0}$. Tenemos que

$$\vec{0} = \lambda_1\vec{0} = \lambda_1 a^1\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_1 a^p\vec{x}_p.$$

Por otro lado tenemos que

$$\vec{0} = f\left(\vec{0}\right) = a^1\lambda_1\vec{x}_1 + \cdots + a^p\lambda_p\vec{x}_p \Rightarrow a^2(\lambda_2 - \lambda_1)\vec{x}_2 + \cdots + a^p(\lambda_p - \lambda_1)\vec{x}_p.$$

Por hipótesis de inducción tenemos que

$$a^2(\lambda_2 - \lambda_1) = a^3(\lambda_3 - \lambda_1) = \cdots = a^p(\lambda_p - \lambda_1) = 0.$$

Por tanto, $a^2 = a^3 = \cdots = a^p = 0$ y, consecuentemente $a^1\vec{x}_1 = \vec{0} \Rightarrow a^1 = 0$. □

Observación. Una consecuencia de este teorema es que

$$L_{\lambda_1} \oplus L_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus L_{\lambda_p}.$$

Observación. Otra consecuencia interesante es que si $\dim(V) = n$ y $f \in \operatorname{End}(V)$, entonces no puede haber más de n valores propios.

4.3. Polinomio característico

Tenemos que $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}[x] \subset \mathbb{K}(x)$, donde $\mathbb{K}(x)$ denota el cuerpo de las fracciones racionales. Podemos definir la relación de divisibilidad, que es una relación de equivalencia:

$$\forall p(x), p'(x) \in \mathbb{K}[x],\ (p(x), q(x))\, \mathcal{R}\, (p'(x), q'(x)) \iff p(x)\, q'(x) = q(x)\, p'(x).$$

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, tenemos que

$$\det(A - xI_{n\times n}) = \begin{vmatrix} a_1^1 - x & a_2^1 & \cdots & a_j^1 & \cdots & a_i^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 - x & \cdots & a_j^2 & \cdots & a_i^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^j & a_2^j & \cdots & a_j^j - x & \cdots & a_i^j & \cdots & a_n^j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^i & a_2^i & \cdots & a_j^i & \cdots & a_i^i - x & \cdots & a_n^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_j^n & \cdots & a_i^n & \cdots & a_n^n - x \end{vmatrix}.$$

Así, tenemos que el valor del determinante será:

$$\det(A - xI_{n\times n}) = \left(a_1^1 - x\right)\cdots(a_n^n - x) + q(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}\left(a_1^1 + \cdots + a_n^n\right) x^{n-1} + q(x),\ \operatorname{grad}(q(x)) \leq n-2.$$

Dado que el término independiente será $\det(A)$,

$$\det(A - xI_{n\times n}) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}\left(a_1^1 + \cdots + a_n^n\right) x^{n-1} + \cdots + \det(A).$$

Sea $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ semejante a $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Entonces, existe $C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ tal que $B = C^{-1}AC$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} \det(B - xI_{n\times n}) &= \det\left(C^{-1}AC - xC^{-1}C\right) = \det\left(C^{-1}AC - C^{-1}xC\right) = \det\left(C^{-1}(A - xI_{n\times n})\, C\right) \\ &= \det\left(C^{-1}\right)\det(A - xI_{n\times n})\det(C) = \det(A - xI_{n\times n}). \end{aligned}$$

Definición 4.17 (Polinomio característico)**.** Decimos que $\det(A - xI_{n\times n})$ es el **polinomio característico** de A. Si $f \in \operatorname{End}(V)$, el polinomio característico de f es el polinomio característico de A, donde A es la matriz de f en una base. [a].

[a]Normalmente se designa como P_{cf} o $P_{cf}(x)$.

Observación. Dado que el polinomio característico no depende de la base, la suma de los elementos de la diagonal principal de la matriz de un endomorfismo es invariante.

Definición 4.18. Llamaremos **traza** de f a $a_1^1 + \cdots + a_n^n = \operatorname{traz}(f)$

Observación. Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{traz} : \mathrm{End}\,(V) &\to \mathbb{K} \\ f &\to \mathrm{traz}\,(f)\,, \end{aligned}$$

es lineal. Además, $\mathrm{traz}\,(f \circ g) = \mathrm{traz}\,(g \circ f)$.

Observación. Tenemos que si $\lambda \in \mathbb{K}$ es valor propio de f, $\det\,(A - xI_{n\times n}) = 0$.

Teorema 4.5. $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio de f si y solo si λ es raíz de $P_{cf}\,(x)$. Además, si λ es un valor propio, $\dim\,(L_\lambda)$ es menor o igual que la multiplicidad de λ como raíz de $P_{cf}\,(x)$.

Demostración. Tenemos que λ es valor propio de f si y solo si existe $\vec{x} \in V/\left\{\vec{0}\right\}$ tal que $(f - \lambda id_V)\,(\vec{x}) = \vec{0}$, si y solo si $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda id_V) \neq \left\{\vec{0}\right\}$, si y solo si $f - \lambda id_V$ no es inyectiva, si y solo si $\det\,(A - \lambda I_{n\times n}) = 0$, si y solo si λ es raíz de $P_{cf}\,(x)$. Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ valor propio de f y $L_\lambda = \{\vec{x} \in V \ : \ f\,(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\}$. Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}$ base de L_λ y $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V. Tenemos que $\forall i = 1, \ldots, k$, $f\,(\vec{u}_i) = \lambda\vec{u}_i$. Así,

$$\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{u}_i\}}\,(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & A \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & A_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & A_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{pmatrix}.$$

Tenemos que A está formada por los componentes de las imágenes de los restantes vectores de la base. Si formásemos la matriz de la ecuación característica y desarrollásemos el determinante, está claro que en el polinomio característico aparece un factor de $(\lambda - x)^k$, por lo que k no supera la multiplicidad de la raíz λ en el polinomio característico. También se puede ver de la siguiente forma:

$$P_{cf}\,(x) = \left|\begin{array}{ccccc} \lambda - x & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \lambda - x & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & A_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda - x & \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & A_2 - xI_{(n-k)\times(n-k)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right| = (\lambda - x)^k \left|A_2 - xI_{(n-k)\times(n-k)}\right|.$$

$\square$

Definición 4.19. Sea λ un valor propio de f. La **multiplicidad geométrica** de λ como valor propio de f es $\dim\,(L_\lambda)$. Similarmente, la **multiplicidad algebraica** de λ como valor propio de f es la multiplicidad de λ como raíz de $P_{cf}(x)$. Entonces

$$m.g(\lambda) \leq m.a(\lambda).$$

4.4. Endomorfismos diagonalizables y triangulables

Definición 4.20. Un endomorfismo f de V es **diagonalizable** si existe $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V formada por vectores propios de f.

Teorema 4.6. Un endomorfismo f es diagonalizable si y solo si $P_{cf}(x)$ se descompone en factores lineales en $\mathbb{K}[x]$ y $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ valor propio de f, $m.g(\lambda) = m.a(\lambda)$.

Demostración. **(i)** Si $\exists \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V formada por vectores propios de f, entonces

$$\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Por lo que

$$P_{cf}(x) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)\cdots(\lambda_n - x).$$

En efecto,

$$P_{cf}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n - \lambda \end{pmatrix}.$$

Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ valores propios de f, donde $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Entonces, tenemos que $L_{\lambda_1} \oplus L_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus L_{\lambda_k}$. Entonces, tenemos que existen $r_1, r_2, \ldots, r_k \geq 1$, con $r_1 + \cdots + r_k = n$, tales que

$$P_{cf}(x) = (x - \lambda_1)^{r_1} \cdots (x - \lambda_k)^{r_k}.$$

Entonces, tenemos que

$$\dim(V) \leq \dim(L_{\lambda_1}) + \cdots + \dim(L_{\lambda_k}) \leq r_1 + \cdots + r_k = n.$$

Así, $\dim(L_{\lambda_i}) = r_i$, $\forall i = 1, \ldots, k$. Así, hemos obtenido que $L_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus L_{\lambda_k} = V$.

(ii) Si $P_{cf}(x)$ se descompone en factores lineales de forma que

$$P_{cf}(x) = (\lambda_1 - x)^{r_1} \cdots (\lambda_k - x)^{r_k}.$$

Entonces, tenemos que las raíces del polinomio son valores propios de f, por lo que existen $L_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus L_{\lambda_k}$. Además, como $\dim(L_{\lambda_i}) = r_i$ para $i = 1, \ldots, k$, tenemos que $L_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus$

$L_{\lambda_k} = V$, por lo que existe una base de V formada por vectores propios y f es diagonalizable. En efecto, sea $\left\{\vec{u^i}_1, \ldots, \vec{u^i}_{r_i}\right\}$ base de L_{λ_i} con $i = 1, \ldots, k$. Entonces, tenemos que $\bigcup\limits_{i=1,\ldots,k} \left\{\vec{u^i}_1, \ldots, \vec{u^i}_{r_i}\right\}$ es base de V. Así, la matriz de f en esta base será

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

□

Observación. Para ver si un endofmorfismo es diagonalizable, hay que resolver el polinomio característico lo que da unas raíces $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ y lo primero que hay que comprobar es si la suma de las multiplicidades coincide con la dimensión de V.

Definición 4.21. Sea $f \in \mathrm{End}\,(V)$ es **triangulable** si $\exists \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V tal que

$$\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{u}_i\}}(f) = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ 0 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ 0 & 0 & \cdots & a_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Observación. Tenemos que $P_{cf}(x) = \det(A - xI_{n\times n}) = (-1)^n \left(x - a_1^1\right) \cdots (x - a_n^n)$.

Teorema 4.7. f es triangulable si y solo si $P_{cf}(x)$ se descompone en factores lineales en $\mathbb{K}[x]$.

Demostración. **(i)** Evidente.

(ii) Consideremos el caso $n = 2$. Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ un vector propio de f y $\vec{x}_1 \in L_\lambda / \left\{\vec{0}\right\}$. Entonces tenemos que $f(\vec{x}_1) = \lambda \vec{x}_1$. Si $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ es base de V, tenemos que

$$\mathcal{M}_{\{\vec{x}_i\}\{\vec{x}_i\}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Asumimos que es cierto para $n-1$. Sea $\lambda_1 \in \mathbb{K}$ un valor propio de f y sea $\vec{x}_1 \in L_{\lambda_1} / \left\{\vec{0}\right\}$. Sea $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ base de V y sea $L = L(\{\vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\})$. Tenemos que $L \oplus L(\{\vec{x}_1\}) = V$. Sea p la proyección vectorial de base L y dirección $L(\{\vec{x}_1\})$, y sea $p \circ f \in \mathrm{End}\,(L)$. Tenemos que $\dim(L) = n - 1$. Además

$$\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{u}_i\}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ 0 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Similarmente, sabemos que,

$$p \circ f\left(\vec{x}_i\right) = p\left(a_i^1 \vec{x}_1 + \cdots + a_i^n \vec{x}_n\right) = a_i^2 \vec{x}_2 + \cdots + a_i^n \vec{x}_n.$$

Entonces, tenemos que [1]

$$p \circ f \to \begin{pmatrix} a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \Rightarrow P_{cf}\left(x\right) = -\left(x-\lambda_1\right) P_{c,p\circ f}\left(x\right).$$

Por hipótesis de inducción, existe $\{\vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de L tal que $\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{u}_i\}}\left(p \circ f\right) = \begin{pmatrix} \lambda_2 & b_2^2 & \cdots & b_n^2 \\ 0 & \lambda_3 & \cdots & b_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Así, en la base $\{\vec{x}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$, la matriz de f es

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & a_2^1 & a_3^1 & \cdots & a_n^1 \\ 0 & \lambda_2 & b_3^2 & \cdots & b_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$\square$

Observación. Si p' es la proyección de base $L\left(\{\vec{x}_1\}\right)$ y dirección L, tenemos que $id_V = p + p'$. Otra forma de decir que f es triangulable, es decir que existe una sucesión de subespacios de V: $\left\{\vec{0}\right\} \subset L_1 \subset \cdots \subset L_n = V$ tales que $f\left(L_i\right) \subset L_i$ para $i = 1, \ldots, n$.

Definición 4.22. Un endomorfismo f de V es **nilpotente** si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m = 0$ y $f^{m-1} \neq 0$.

Observación. Si $\vec{x}$ es un vector propio de f, tenemos que $f\left(\vec{x}\right) = \lambda\vec{x}$, $\ldots$, $f^{m-1}\left(\vec{x}\right) = \lambda^{m-1}\vec{x}$ y $f^m\left(\vec{x}\right) = \lambda^m \vec{x} = \vec{0}$. Es decir, si es nilpotente, el único posible valor propio es el 0. Es decir, en este caso la matriz triangular tiene diagonal nula.

4.5. Teorema de Cayley-Hamilton

Tenemos que $P_{cf}\left(f\right) \in \operatorname{End}\left(V\right)$. Si A es la matriz de f, tenemos que $P_{cA}\left(A\right) \in \mathcal{M}_{n\times n}\left(\mathbb{K}\right)$. Si $p\left(x\right), q\left(x\right) \in \mathbb{K}[x]$, tenemos definidas las operaciones

$$p\left(x\right) + q\left(x\right) = \left(p+q\right)\left(x\right) = \left(q+p\right)\left(x\right) = q\left(x\right) + p\left(x\right).$$

$$p\left(x\right) q\left(x\right) = q\left(x\right) p\left(x\right).$$

[1]Esta matriz se corresponde más bien con la restricción de $p \circ f$ a L.

Similarmente,

$$(p(x)+q(x))(f)=p(f)+q(f).$$
$$(p(x)\,q(x))(f)=p(f)\circ q(f).$$

Entonces, tenemos que

$$p(A)=\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\},\{\vec{u}_i\}}(p(f)).$$

Observación. Si $p(x)\in\mathbb{K}[x]$ tal que $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, y $f\in\operatorname{End}(V)$, se define

$$p(f)=a_0+a_1f+\cdots+a_nf^n\in\operatorname{End}(V).$$

Teorema 4.8 (Teorema de Cayley-Hamilton)**.**

$$P_{cf}(f)=0\in\operatorname{End}(V),\ P_{CA}(A)=0.$$

Demostración. Sea $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, entonces $P_{cf}(x)=(-1)^n(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$. Según el teorema 4.7, tenemos que existe una base de V, $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ tal que

$$\begin{aligned}
f(\vec{u}_1)&=\lambda_1\vec{u}_1\\
f(\vec{u}_2)&=a_2^1\vec{u}_1+\lambda_2\vec{u}_2\\
&\vdots\\
f(\vec{u}_n)&=a_n^1\vec{u}_1+\cdots+a_n^{n-1}\vec{u}_{n-1}+\lambda_n\vec{u}_n.
\end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$P_{cf}(f)=(-1)^n(f-\lambda_1id_V)\circ\cdots\circ(f-\lambda_nid_V).$$

Para ver que $P_{cf}(f)$ es el endomorfismo nulo, tenemos que ver que se anula sobre la base anterior. Así, $(f-\lambda_1id_V)(\vec{u}_1)=\vec{0}$. Dado que $(f-\lambda_1id_V)\circ(f-\lambda_2id_V)=(f-\lambda_2id_V)\circ(f-\lambda_1id_V)$, tenemos que $(f-\lambda_2id_V)\circ(f-\lambda_1id_V)(\vec{u}_1)=\vec{0}$. También tenemos que

$$(f-\lambda_1id_V)\circ(f-\lambda_2id_V)(\vec{u}_2)=(f-\lambda_1id_V)\circ(f-\lambda_2id_V)\left(a_2^1\vec{u}_1+\lambda_1\vec{u}_2\right)=\vec{0}.$$

Se deja como ejercicio para el lector que esto definitivamente es cierto. Suponemos que es cierto para $i\le n$. Tenemos que $(f-\lambda_{i-1}id_V)(\vec{u}_j)=\vec{0}$ para $j=1,\dots,i-1$. Además,

$$(f-\lambda_iid_V)\circ(f-\lambda_1id_V)\circ\cdots\circ(f-\lambda_{i-1}id_V)=(f-\lambda_1id_V)\circ\cdots\circ(f-\lambda_iid_V).$$

Así, por hipótesis tenemos que para $j=1,\dots,i-1$,

$$(f-\lambda_1id_V)\circ\cdots\circ(f-\lambda_iid_V)(\vec{u}_j)=(f-\lambda_iid_V)\circ(f-\lambda_1id_V)\circ\cdots\circ(f-\lambda_{i-1}id_V)(\vec{u}_j)=\vec{0}.$$

En el caso de $\vec{u}_i$, tenemos que $(f-\lambda_iid_V)(\vec{u}_i)=f(\vec{u}_i)-\lambda_i\vec{u}_i=a_i^1\vec{u}_1+\cdots+a_i^{i-1}\vec{u}_{i-1}$. Si aplicamos $(f-\lambda_1id_V)\circ\cdots\circ(f-\lambda_{i-1}id_V)$ sobre el resultado anterior, obtendremos el vactor nulo, por lo que

$$(f-\lambda_1id_V)\circ\cdots\circ(f-\lambda_{i-1}id_V)(f-\lambda_iid_V)(\vec{u}_i)=\vec{0}.$$

□

Observación. Aunque lo hemos demostrado solo para $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, este teorema es cierto también para $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ (mirar los apuntes colgados en el CV).

4.6. Forma reducida de Jordan

Recordamos que $P_{cf}(x) = \det(A - xI_{n\times n})$, donde $f \in \operatorname{End}(V)$ y A es la matriz asociada a f. Sea $I = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \,:\, p(f) = 0\}$. Sabemos que $I \neq \emptyset$. Tenemos que I es un ideal. En efecto, si $p(x), q(x) \in I$,

$$(p(x) + q(x))(f) = p(f) + q(f) = 0.$$

Similarmente, si $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ y $q(x) \in I$, entonces $p(f) \in \operatorname{End}(V)$ y $q(f) = 0$, por lo que $p(f) \circ q(f) = 0$.

Entonces, existe $P_{mf}(x) \in \mathbb{K}[x]$ mónico tal que $I = (P_{mf}(x))$.

Definición 4.23. A $P_{mf}(x)$ lo llamamos **polinomio mínimo** de f. Se dice que $p(x)$ es un **polinomio anulador** de f si $p(x) \in I$.

Definición 4.24. Un subespacio vectorial L de V es **invariante** por f si $f(L) \subset L$.

Observación. Si $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_k$ con $L_i \in \mathcal{L}(V)$ ivariante por f para $i = 1, \ldots, k$:

$$f|_{L_i} : L_i \to L_i.$$

Si $\left\{\vec{u}_1^i, \ldots, \vec{u}_k^i\right\}$ base de L_i para $i = 1, \ldots, k$, entonces

$$\left\{\vec{u}_1^1, \ldots, \vec{u}_k^1, \ldots, \vec{u}_1^k, \ldots, \vec{u}_k^k\right\},$$

es base de V. Así, tenemos que

$$\mathcal{M}_{\left\{\vec{u}_i^j\right\}\left\{\vec{u}_i^j\right\}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{pmatrix}.$$

Donde $A_j = \mathcal{M}_{\left\{\vec{u}_i^j\right\}\left\{\vec{u}_i^j\right\}}\left(f|_{L_j}\right)$.

Proposición 4.6. Sea $p(x) \in \mathbb{K}[x]$.

(a) $\operatorname{Ker}(p(f))$ es un subespacio vectorial invariante por f.

(b) $\operatorname{Im}(p(f)) \in \mathcal{L}(V)$ es un subespacio vectorial invariante por f.

Demostración. **(a)** Tenemos que $p(x) \cdot x = x \cdot p(x)$. Así, si $p(f)(\vec{x}) = \vec{0}$,

$$p(f)(f(\vec{x})) = ((p(x) \cdot x)(f))(\vec{x}) = f \circ p(f)(\vec{x}) = f\left(\vec{0}\right) = \vec{0}.$$

(b) Si $\vec{x} \in \operatorname{Im}(p(f))$, entonces existe $\vec{y} \in V$ tal que $p(f(\vec{y})) = \vec{x}$. Así,

$$f(\vec{x}) = f(p(f(\vec{y}))) = (f \circ p(f))(\vec{y}) = p(f) \circ f(\vec{y}) = p(f)(f(\vec{y})) \in \operatorname{Im}(p(f)).$$

□

Teorema 4.9. Sea $p(x)$ un polinomio anulador de f y sea $p(x) = a_1(x) \cdot a_2(x)$, con $a_1(x)$ y $a_2(x)$ primos entre sí. Entonces, $V = \operatorname{Ker}(a_1(f)) \oplus \operatorname{Ker}(a_2(f))$.

Demostración. Tenemos que $\operatorname{mcd}(a_1(x), a_2(x)) = 1$, por lo que existen $p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{K}[x]$ tales que

$$1 = p_1(x) a_1(x) + p_2(x) a_2(x).$$

Así, $\forall \vec{x} \in V$,

$$id_V(\vec{x}) = ((p_1(x) a_1(x)) f)(\vec{x}) + ((p_2(x) a_2(x)) f)(\vec{x}).$$

Así,

$$\vec{x} = \underbrace{(p_1(f) \circ a_1(f))(\vec{x})}_{\in \operatorname{Ker}(a_2(f))} + \underbrace{(p_2(f) \circ a_2(f))(\vec{x})}_{\in \operatorname{Ker}(a_1(f))}.$$

En efecto, tenemos que

$$a_2(f) \circ (p_1(f) \circ a_1(f)))(\vec{x}) = p_1(f) \circ \underbrace{(a_1(f) \circ a_2(f))}_{p(f)}(\vec{x}) = \vec{0}$$

$$a_1(f) \circ (p_2(f) \circ a_2(f))(\vec{x}) = p_2(f) \circ \underbrace{(a_1(f) \circ a_2(f))}_{p(f)}(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Finalmente, si $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(a_1(f)) \cap \operatorname{Ker}(a_2(f))$, tenemos que

$$\vec{x} = (p_1(f) \circ a_1(f))(\vec{x}) + (p_2(f) \circ a_2(f))(\vec{x}) = p_1(f)\left(\vec{0}\right) + p_2(f)\left(\vec{0}\right) = \vec{0}.$$

□

Proposición 4.7. Si $p(x) = p_1(x)^{r_1} \cdots p_k(x)^{r_k}$ es la descomposición en factores irreducibles de un polinomio anulador de f, entonces

$$V = \operatorname{Ker}(p_1(f)^{r_1}) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(p_k(f)^{r_k}).$$

Demostración. La demostración se realiza por inducción sobre k.

(i) Si $k = 2$, queda demostrado por el resultado anterior.

(ii) Asumimos que el resultado es cierto para $k-1$. Tenemos que los polinomios $p_1(x)^{r_1}, \ldots, p_k(x)^{r_k}$ son primos entre si. Entonces, tenemos que

$$V = \operatorname{Ker}(p_1(f)^{r_1}) \oplus \operatorname{Ker}(p_2(f)^{r_2} \circ \cdots \circ p_k(f)^{r_k}).$$

Por hipótesis de inducción, tenemos que $V = \operatorname{Ker}(p_1(f)^{r_1}) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(p_k(f)^{r_k})$.

□

Proposición 4.8. Sea $P_{mf}(x) = p_1(x)\, p_2(x)$ con $p_1(x)$ y $p_2(x)$ primos entre si. Entonces, $V = \operatorname{Ker}(p_1(f)) \oplus \operatorname{Ker}(p_2(f))$. Además, $p_1(x) = P_{m,f|_{\operatorname{Ker}(p_1(f))}}$ y $p_2(x) = P_{m,f|_{\operatorname{Ker}(p_2(f))}}$, salvo por factores escalares.

Demostración. Lo único que hay que demostrar es la última afirmación. Tenemos que $p_1(x)$ es un polinomio anulador de $f|_{\operatorname{Ker}(p_1(f))}$ y lo mismo sucede para $p_2(x)$. Dado que son primos entre si, también lo son los polinomios mínimos $p_1'(x)$ y $p_2'(x)$. Similarmente, $p_1(x)\, p_2(x)$ es anulador de f, por lo que es producto del polinomio mínimo de f. Sin embargo, tenemos que el producto $p_1'(x)p_2'(x)$ es el polinomio mínimo de f, puesto que si un polinomio anula a f, anula a la restricción de f a $\operatorname{Ker}(p_1(f))$ y a $\operatorname{Ker}(p_2(f))$. Por tanto, es múltiplo de $p_1'(x)$ y $p_2'(x)$ a la vez. Luego, debe ser que $p_1(x)\, p_2(x) = p_1'(x)\, p_2'(x)$. Por tanto, $p_1(x) = p_1'(x)$ y $p_2(x) = p_2'(x)$, salvo por factores escalares. □

Proposición 4.9. Sea $P_{mf} = p_1(x)^{r_1} \cdots p_k(x)^{r_k}$ la descomposición en factores irreducibles del polinomio mínimo de f. Entonces, tenemos que $V = \operatorname{Ker}(p_1(f)^{r_1}) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(p_k(f)^{r_k})$.

Observación. Si cogemos la base de los subespacios anteriores, la matriz de f en esta base se nos quedará de la forma

$$f \to \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{pmatrix}.$$

Donde $A_i = \mathcal{M}\left(f|_{\operatorname{Ker}(p_i(f)^{r_i})}\right)$, para $i = 1, \ldots, k$. Además, tenemos que,

$$P_{m,f|_{\operatorname{Ker}\left(p_i(f)^{r_i}\right)}}(x) = p_i(x)^{r_i}.$$

Definición 4.25. Un endomorfismo $f \in \operatorname{End}(V)$ es **nilpotente** si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m = 0$ pero $f^{m-1} \neq 0$.

Observación. Tenemos que $p_i(f)^{r_i}(x) = P_{m,f|\operatorname{Ker}(p_i(f)^{r_i})}(x)$. Si $P_{mf}(x) = p_1(x)$ se descompone en factores lineales en $\mathbb{K}[x]$ y $p_1(x) = x - \lambda_1$, entonces $p_1(f) = f - \lambda_1$. El problema de la reducción de endomorfismos queda reducida al caso en el que el polinomio mínimo admita solo un único divisor primo, p^α. En este caso, tenemos que el endomorfismo $p(f)$ es nilpotente, que nos va a ayudar a reducir el endomorfismo.

Sea f un endomorfismo de índice de nilpotencia $m \in \mathbb{N}$. Sea $\vec{x} \in V$ tal que $f^{m-1}(\vec{x}) \neq \vec{0}$. Sea $L = L\left(\left\{\vec{x}, f(\vec{x}), \ldots, f^{m-1}(\vec{x})\right\}\right)$. Tenemos que $\left\{\vec{x}, f(\vec{x}), \ldots, f^{m-1}(\vec{x})\right\}$ son linealmente independientes. En efecto, si $a_0, \ldots, a_{m-1} \in \mathbb{K}$,

$$a_0\vec{x} + a_1 f(\vec{x}) + \cdots + a_{m-1} f^{m-1}(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Por tanto,

$$f\left(a_0\vec{x} + a_1 f(\vec{x}) + \cdots + a_{m-1} f^{m-1}(\vec{x})\right) = a_0 f(\vec{x}) + \cdots a_{m-2} f^{m-1}(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Iterando, tenemos que $a_0 f^{m-1}(\vec{x}) = \vec{0}$. Como $\vec{x} \notin \operatorname{Ker}\left(f^{m-1}\right)$, tenemos que $a_0 = 0$. Supongamos que $a_0 = a_1 = \cdots = a_i = 0$, con $i < m$. Entonces, tenemos que

$$a_i f^i(\vec{x}) + a_{i+1} f^{i+1}(\vec{x}) + \cdots + a_{m-1} f^{m-1}(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Aplicando f^{m-i-1}, tenemos que

$$\vec{0} = a^i f^{m-1}(\vec{x}).$$

Como vimos anteriormente, $a_i = 0$. Así, concluimos que $a_i = 0$ para $i = 0, 1, \ldots, m-1$.

Observación. Tenemos que L es de dimensión m y $f(L) \subset L$. Además, la matriz de $f|_L$ en la base anterior será de la forma:

$$f|_L \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teorema 4.10. Existe $L' \in \mathcal{L}(V)$ invariante por f tal que $L \oplus L' = V$.

Demostración. Consideremos f^*, que es nilpotente de índice de nilpotencia m. Esto se deduce de que $(f^*)^i = \left(f^i\right)^*$. Dado que $f^{m-1} \neq 0$, para algún $\vec{x} \in V$ se tiene que $f^{m-1}(\vec{x}) \neq \vec{0}$. De manera similar, deducimos que existe $\alpha \in V^*$ tal que $\alpha\left(f^{m-1}(\vec{x})\right) \neq \vec{0}$. Así, $\left\{\alpha, f^*(\alpha), \ldots, (f^*)^{m-1}(\alpha)\right\}$ son linealmente independientes. Sea $a_0, \ldots, a_{m-1} \in \mathbb{K}$ tales que

$$a_0\alpha + a_1 f^*(\alpha) + \cdots + a_{m-1}(f^*)^{m-1}(\alpha) = 0.$$

Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 =& \left(a_0\alpha + a_1 f^*(\alpha) + \cdots + a_{m-1}(f^*)^{m-1}(\alpha)\right)\left(f^{m-1}(\vec{x})\right) \\ =& a_0\alpha\left(f^{m-1}(\vec{x})\right) + a_1\alpha\left(f^m(\vec{x})\right) + \cdots + a_{m-1}\alpha\left(f^{2m-2}(\vec{x})\right) \Rightarrow a_0 = 0. \end{aligned}$$

Supongamos que $a_0 = a_1 = \cdots = a_{i-1} = 0$ para $i < m$. Entonces, tenemos que

$$a_i (f^*)^i(\alpha) + \cdots + a_{m-1}(f^*)^{m-1}(\alpha) = 0.$$

Componiendo, obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 =& \left(a_i (f^*)^i \alpha\left(f^{m-i-1}(\vec{x})\right) + \cdots + a_{m-1}(f^*)^{m-1}\alpha\left(f^{m-i-1}(\vec{x})\right)\right) \\ =& a_i\alpha\left(f^{m-1}(\vec{x})\right) + \cdots + a_{m-1}\alpha\left(f^{2m-i-2}(\vec{x})\right) \Rightarrow a_i = 0. \end{aligned}$$

Sea $W = L\left(\left\{\alpha, f^*(\alpha), \cdots, (f^*)^{m-1}(\alpha)\right\}\right)$. Tenems que $\dim(W) = m$. Sea $L' = W^\perp$, entonces $\dim(L') = \dim\left(W^\perp\right) = n - m$. Si $\vec{y} \in L \cap L'$, entonces

$$\vec{y} = a_0\vec{x} + a_1 f(\vec{x}) + \cdots + a_{m-1} f^{m-1}(\vec{x}),$$

y también tenemos que

$$\vec{0} = (f^*)^{m-1}(\alpha)(\vec{y}) = \alpha\left(a_0 f^{m-1}(\vec{x}) + a_1 f^m(\vec{x}) + \cdots + a_{m-1} f^{2m-2}(\vec{x})\right) = a_0\alpha\left(f^{m-1}\right)(\vec{x}) \Rightarrow a_0 = 0.$$

Supongamos que $a_0 = a_1 = \cdots = a_{i-1} = 0$ con $i < m$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} a_i f^i(\vec{x}) + \cdots + a_{m-1} f^{m-1}(\vec{x}) = \vec{0} \\ \vec{y} = a_i f^i(\vec{x}) + \cdots + a_{m-1} f^{m-1}(\vec{x}) \end{aligned}$$

$$\vec{0} = (f^*)^{m-i-1}(\alpha)\left(a_i f^i(\vec{x}) + \cdots + a_{m-1} f^{m-1}(\vec{x})\right) = \alpha\left(a_i f^{m-1}(\vec{x}) + a_{m-1} f^{2m-i-1}(\vec{x})\right) \Rightarrow a_i = 0.$$

Así, tenemos que $a_i = 0$ para $i = 0, 1, \ldots, m-1$, por lo que $V = L \oplus L'$. □

Observación. Supongamos que $P_{cf}(x) = (-1)^n (x-\lambda_1)^{r_1} \cdots (x-\lambda_k)^{r_k}$. Dado que el polinomio característico es múltiplo del polinomio anulador y se descompone en factores lineales, ambos polinomios tienen los mismos factores irreducibles pero diferentes exponentes. Entonces, tenemos que $V = \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 id_V)^{r_1} \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(f - \lambda_k id_V)^{r_k}$. Tenemos que $f - \lambda_i id_V$ es nilpotente con índice de nilpotencia menor o igual que r_i, pues el límite de nilpotencia coincide con el exponente en el polinomio mínimo.

Observación. Un endomorfismo f es diagonalizable cuando el exponente de todos los factores del mínimo sea 1, es decir, un endomorfismo es diagonalizable si y solo si todas las raices del polinomio mínimo son simples.

Consideremos $f \in \operatorname{End}(f)$ tal que $f^m = 0$ pero $f^{m-1} \neq 0$. Sea $\operatorname{Ker}\left(f^{m-1}\right) \subsetneq \operatorname{Ker}(f^m)$, sea $L \in \mathcal{L}(V)$ tal que $L \oplus \operatorname{Ker}\left(f^{m-1}\right) = \operatorname{Ker}(f^m)$ y sea $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r\}$ base de L. Entonces, la familia de vectores

$$\left\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r, f(\vec{x}_1), \ldots, f(\vec{x}_r), \ldots, f^{m-1}(\vec{x}_1), \ldots, f^{m-1} f(\vec{x}_r)\right\}$$

es linealmente independiente. En efecto, si $c_j^i \in \mathbb{K}$, para $i = 1, \ldots, r$ y $j = 0, \ldots, m-1$, tenemos la combinación lineal

$$\sum_{i=1, j=0}^{r, m-1} c_j^i f^j(\vec{x}_i) = \vec{0}.$$

Tenemos que si aplicamos f^{m-1},

$$\begin{aligned} \vec{0} = f^{m-1}\left(\sum_{i=1,j=0}^{r,m-1} c_j^i f^j(\vec{x}_i)\right) &= \sum_{i=0,j=0}^{r,m-1} c_j^i f^{j+m-1}(\vec{x}_i) = \sum_{i=1}^{r} c_1^i f^{m-1}(\vec{x}_i) = c_1^1 f^{m-1}(\vec{x}_1) + \cdots + c_1^r f^{m-1}(\vec{x}_r) \\ &= f^{m-1}\left(c_1^1 \vec{x}_1 + \cdots + c_1^r \vec{x}_r\right). \end{aligned}$$

Entonces, tenemos que $c_1^1 \vec{x}_1 + \cdots + c_1^r \vec{x}_r \in L \cap \operatorname{Ker}\left(f^{m-1}\right)$, por lo que

$$c_1^1 \vec{x}_1 + \cdots + c_1^r \vec{x}_r = \vec{0}.$$

Al ser linealmente independientes, tenemos que $c_1^i = 0$ para $i = 1, \ldots, r$. Repitiendo este cálculo, llegamos a que $c_j^i = 0$ para $i = 1, \ldots, r$ y $j = 0, \ldots, m-1$.

A continuación, tenemos que $\operatorname{Ker}\left(f^{m-2}\right) \subsetneq \operatorname{Ker}\left(f^{m-1}\right)$, ampliamos la base de $\operatorname{Ker}\left(f^{m-2}\right)$ hasta obtener una base de $\operatorname{Ker}\left(f^{m-1}\right)$. Hacemos esto con todos los núcleos.

Observación. El número de bloques de Jordan de orden mayor o igual que i es la dimensión del núcleo de f^i menos la dimensión del núcleo de f^{i-1}.

Dado $f \in \mathrm{End}(V)$, si existe canónica de f, tenemos que el polinomio característico tendrá la forma: $P_{cf}(x) = (x-\lambda_1)^{r_1} \cdots (x-\lambda_k)^{r_k}$. Entonces, tenemos que $V = L_1 \oplus \cdots \oplus L_k$, donde $L_i = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_i id_V)^{r_i}$ con $i = 1, \ldots, k$. Así, si $\dim(L_i) = r_i$,

$$P_{mf}(x) = (x-\lambda_1)^{s_1} \cdots (x-\lambda_k)^{s_k}\,,\ s_i \leq r_i.$$

tenemos que $f|_{L_i} \in \mathrm{End}(L_i)$, $f - \lambda_i id_V$ es nilpotente de límite de nilpotencia s_i. Además, tenemos que $\mathrm{Ker}\,(f-\lambda_i id_V) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{Ker}\,(f-\lambda_i id_V)^{s_i-1} \subsetneq \mathrm{Ker}\,(f-\lambda_i id_V)^{s_i}$.

Obtención de la forma de Jordan de una matriz

Consideremos $\dim(V) = n$ y $f \in \mathrm{End}(V)$ cuya matriz es A.

1. Comenzamos calculando los autovalores de f, sean estos $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ con multiplicida des algebraicas $r_1, \ldots, r_m$ tal que $r_1 + \cdots + r_m = n$.

2. Para cada autovalor λ_i se calcula la cadena de subespacios formada por los núcleos de las potencias sucesivas de $f - \lambda_i id_V$.

$$\mathrm{Ker}\,(f-\lambda_i id_V) \subsetneq \mathrm{Ker}\,(f-\lambda_i id_V)^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{Ker}\,(f-\lambda_i id_V)^p\,.$$

   La cadena se estabiliza después de p pasos, por ser $(x-\lambda_i)^p$ su polinomio mínimo.

3. Tomamos una base del subespacio $\mathrm{Ker}\,(f-\lambda_i id_V)^p \,/\, \mathrm{Ker}\,(f-\lambda_i id_V)^{p-1}$. Para cada uno de los vectores de esta base encontramos sus imágenes generadas por las sucesivas potencias de $f - \lambda_i id_V$.

4. Se repite este proceso con el subespacio $\mathrm{Ker}\,(f-\lambda_i id_V)^{p-1} \,/\, \mathrm{Ker}\,(f-\lambda_i id_V)^{p-2}$ y con el resto hasta llegar a $\mathrm{Ker}\,(f-\lambda_i id_V)$, donde se eligen los vectores necesarios para que junto con todos los vectores elegidos anteriormente se forme una base de $\mathrm{Ker}\,(f-\lambda_i id_V)^p$.

5. Repitiendo estos pasos para cada autovalor, es fácil obtener la matriz de cambio de base y, a partir de esta, obtener la matriz de Jordan del endomorfismo original.

Ejemplo 4.2. Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Tenemos que $P_{cA}(x) = -(x-1)^3$. Calculamos la dimensión de $\mathrm{Ker}\,(f - id_V)$,

$$A - I = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ (A-I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, tenemos que $\dim(\mathrm{Ker}\,(f - id_V)) = 1$ y $\dim\left(\mathrm{Ker}\,(f-id_V)^2\right) = 2$. Así, debe ser que $(A-I)^3 = 0$. Tenemos que la ecuación de $\mathrm{Ker}\,(f-id_V)^2$ será $x + 2y - z = 0$. Ahora, vamos a encontrar un vector que pertenezca a $\text{Ker}\,(f - id_V)^3$ y no pertenezca a $\text{Ker}\,(f - id_V)^2$. Cogemos cogemos $\vec{u}_1 = (1, 0, 0)$. Por tanto, tomamos

$$\vec{u}_2 = (A - I)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = (A - I)^2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Entonces, tenemos que la matriz cambio de base será

$$C = \begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\0 & -2 & -1\\0 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Y la forma de Jordan será

$$A_J = C^{-1}AC = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.3. Consideremos $B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & 0 & -1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}$. Entonces, $P_{cB} = -(x-1)^2(x+1)$. En primer lugar, estudiamos el autovalor $\lambda = 1$.

$$B - I = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\-1 & -1 & -1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}, \quad (B - I)^2 = \begin{pmatrix}0 & -2 & -2\\0 & 1 & 1\\0 & 3 & 3\end{pmatrix}.$$

Tenemos que $\dim(\text{Ker}\,(f - id_V)) = 1$, por lo que $\dim\left(\text{Ker}\,(f - id_V)^2\right) = 2$. Tomamos $\vec{u}_1$ perteneciente a $\text{Ker}\,(f - id_V)^2$ pero no perteneciente a $\text{Ker}\,(f - id_V)$. Cogemos $\vec{u}_1 = (0, 0, 1)$, por lo que

$$\vec{u}_2 = (B - I)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

Ahora, estudiamos el autovalor $\lambda = -1$. Para encontrar $\vec{u}_3$ pasta con encontrar una base de $\text{Ker}\,(f + id_V)$. Así, $\vec{u}_3 = (2, -1, -3)$. Así, en la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$,

$$B_J = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Capítulo 5

Formas Bilineales Simétricas

Definición 5.1 (Forma bilineal)**.** Una **forma bilineal** definida en V es una aplicación $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ que verifica que

(a) $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V,\ \beta(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = \beta(\vec{x}, \vec{z}) + \beta(\vec{y}, \vec{z})$.

(b) $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V,\ \beta(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = \beta(\vec{x}, \vec{y}) + \beta(\vec{x}, \vec{z})$.

(c) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \forall a \in \mathbb{K},\ \beta(a\vec{x}, \vec{y}) = \beta(\vec{x}, a\vec{y}) = a\beta(\vec{x}, \vec{y})$.

Observación. Resulta trivial que $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V,\ \beta\left(\vec{0}, \vec{y}\right) = \beta\left(\vec{x}, \vec{0}\right) = 0$. En efecto,

$$\beta\left(\vec{x}, \vec{0}\right) = \beta(\vec{x}, 0 \cdot \vec{y}) = 0 \cdot \beta(\vec{x}, \vec{y}) = 0.$$

Teorema 5.1. Sea $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ una base de V, y sean $a_{ij} \in \mathbb{K}$ con $i, j = 1, \dots, n$. Entonces, $\exists! \beta : V \times V \to \mathbb{K}$ tal que $\beta(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = a_{ij}$.

Demostración. **Unicidad.** Supongamos que existe. Sean $\vec{x}, \vec{y} \in V$ tales que

$$\vec{x} = x^1\vec{u}_1 + \dots + x^n\vec{u}_n$$
$$\vec{y} = y^1\vec{u}_1 + \dots + y^n\vec{u}_n.$$

Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}\beta(\vec{x}, \vec{y}) =& \beta\left(x^1\vec{u}_1 + \dots + x^n\vec{u}_n, \vec{y}\right) = x^1\beta(\vec{u}_1, \vec{y}) + \dots + x^n\beta(\vec{u}_n, \vec{y}) \\ =& \sum_{i,j=1}^{n} x^i y^j \beta(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x^i y^j a_{ij}.\end{aligned}$$

Matricialmente, lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$\beta(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} x^1 & \cdots & x^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}.$$

Existencia. Defino $\beta(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} x^i y^j a_{ij}$. Vamos a ver que es bilineal. Tenemos que

$$\begin{aligned}\beta(\vec{x}+\vec{y},\vec{z}) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(x^i + z^i\right) y^j a_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} \left(x^i y^j + z^i y^j\right) a_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} x^i y^j a_{ij} + \sum_{i,j=1}^{n} z^i y^j a_{ij} \\ = \beta(\vec{x},\vec{z}) + \beta(\vec{y},\vec{z}).\end{aligned}$$

Las propiedades **(b)** y **(c)** se deduce de forma análoga.

□

Entonces, tenemos que la matriz de β en la base $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n\}$ será

$$\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}}(\beta) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta(\vec{u}_1,\vec{u}_1) & \cdots & \beta(\vec{u}_1,\vec{u}_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \beta(\vec{u}_n,\vec{u}_1) & \cdots & \beta(\vec{u}_n,\vec{u}_n) \end{pmatrix}.$$

Observación. La correspondencia entre matrices y formas bilineales es biyectiva. Así, podemos definir como hicimos anteriormente la suma y el producto de matrices de forma bilineales. En efecto, se trata de un isomorfismo entre el espacio vectorial de las formas bilineales definidas en $V \times V$ y el espacio de las matrices $n \times n$ sobre $\mathbb{K}$.

Definición 5.2. Una forma bilineal $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ es **simétrica** si $\beta(\vec{x},\vec{y}) = \beta(\vec{y},\vec{x})$, $\forall \vec{x},\vec{y} \in V$.

Observación. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ es simétrica ($A = A^t$), entonces $\beta(\vec{x},\vec{y}) = \begin{pmatrix} x^1 & \cdots & x^n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$.

Entonces tenemos que

$$\beta(\vec{x},\vec{y})^t = \left(\begin{pmatrix} x^1 & \cdots & x^n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} \right)^t = \begin{pmatrix} y^1 & \cdots & y^n \end{pmatrix} \underbrace{A^t}_{A} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \beta(\vec{y},\vec{x}).$$

Por tanto, β es simétrica.

5.1. Ortogonalidad

Definición 5.3 (Ortogonal)**.** Sea β una forma bilineal simétrica. Diremos que los vectores $\vec{x},\vec{y} \in V$ son **ortogonales** respecto de β si $\beta(\vec{x},\vec{y}) = 0$. Si $\emptyset \neq A \subset V$, llamaremos **ortogonal** a A respecto de β y escribiremos $A_\beta^\perp = \{\vec{x} \in V \ : \ \beta(\vec{x},\vec{y}) = 0, \ \forall \vec{y} \in A\}$.

Proposición 5.1. Si $A, B \subset V$:

(i) Si $A \subset B$, $B_\beta^\perp \subset A_\beta^\perp$.

(ii) $A_\beta^\perp = (L(A))_\beta^\perp$.

Demostración. **(i)** Si $\vec{x} \in B_\beta^\perp$, tenemos que $\beta(\vec{x}, \vec{y}) = 0$, $\forall \vec{y} \in B$. Por tanto, $\beta(\vec{x}, \vec{y}) = 0$, $\forall \vec{y} \in A$.

(ii) Tenemos que $A \subset L(A)$, por lo que $L(A)^\perp \subset A^\perp$. Ahora, sea $\vec{x} \in A_\beta^\perp$. Si $\vec{y} \in L(A)$, tenemos que existen $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p \in A$ tales que

$$\vec{y} = a^1 \vec{x}_1 + \cdots + a^p \vec{x}_p.$$

Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} \beta(\vec{x}, \vec{y}) =& \beta\left(\vec{x}, a^1 \vec{x}_1 + \cdots + a^p \vec{x}_p\right) \\ =& a^1 \beta(\vec{x}, \vec{x}_1) + \cdots + a^p \beta(\vec{x}, \vec{x}_p) = 0. \end{aligned}$$

Así, tenemos que $A^\perp \subset L(A)_\beta^\perp$.

□

Sea $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ otra base de V. Entonces, tenemos que

$$\begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \cdots & \vec{u}_n \end{pmatrix} C,\ C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}).$$

En efecto, si $\vec{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^n x^i \vec{u}_i = \sum_{i=1}^n x'^i \vec{v}_i$. Así:

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Recordamos que, si β es simétrica,

$$\beta(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} x'^1 & \cdots & x'^n \end{pmatrix} \mathcal{M}_{\{\vec{v}_i\}}(\beta) \begin{pmatrix} y'^1 \\ \vdots \\ y'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 & \cdots & x^n \end{pmatrix} \underbrace{C^t \mathcal{M}_{\{\vec{v}_i\}}(\beta)\, C}_{\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}}(\beta)} \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}.$$

Definición 5.4. Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ son **congruentes** si $\exists C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ tal que $B = C^t A C$.

Observación. Tenemos que β es simétrica si y solo si $\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}}(\beta) = \left(\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}}(\beta)\right)^t$.

Si $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ son congruentes, tenemos que

$$\det(A) = \det\left(C^t B C\right) = \det\left(C^t\right) \det(B) \det(C) = \det(C)^2 \det(B).$$

Definición 5.5 (Discriminante)**.** Llamaremos **discriminante** de β respecto de la base $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ al $\det\left(\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}}(\beta)\right)$, donde β es una forma bilineal simétrica.

Observación. Por lo visto en el cálculo anterior, al cambiar de base cambia el discriminante pero simplemente queda multiplicado por un cuadrado no nulo. Es decir, el hecho de ser una forma bilineal de discriminante nulo o no nulo no depende de la base considerada.

Definición 5.6 (Radical)**.** Llamaremos **radical** de β a $V_\beta^\perp$ $(\operatorname{rad}(\beta))$.

Definición 5.7 (Isótropo)**.** Un vector $\vec{x} \in V$ es **isótropo** si $\beta(\vec{x}, \vec{x}) = 0$, es decir, es ortogonal a sí mismo.

Definición 5.8. Se dice que β es **no degenerada** si $\operatorname{rad}(\beta) = \left\{\vec{0}\right\}$.

Observación. Si $\operatorname{rad}(\beta) = \left\{\vec{0}\right\}$ y $\beta(\vec{x}, \vec{y}) = 0$, $\forall \vec{y} \in V$, tenemos que $\vec{x} = \vec{0}$.

Observación. Si $\forall \vec{x} \in V,\ \beta(\vec{x}, \vec{x}) = 0$, tenemos que $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V,\ \beta(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = 0$. Entonces se puede deducir que

$$0 = \beta(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = \beta(\vec{x}, \vec{x}) + \beta(\vec{y}, \vec{y}) + 2\beta(\vec{x}, \vec{y}) \iff \beta(\vec{x}, \vec{y}) = 0.$$

Entonces tenemos que $\beta = 0$.

Sea $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal simétrica.

Teorema 5.2. *β es no degenerada si y solo si el discrimintante de β respecto de una base es no nulo. Además, β induce una $\overline{\beta} : V/\operatorname{rad}(\beta) \times V/\operatorname{rad}(\beta) \to \mathbb{K}$ bilineal simétrica no degenerada.*

Demostración. Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ una base de V. Entonces, tenemos que $\operatorname{rad}(\beta) = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}_\beta^\perp$. Tenemos que

$$\vec{x} = x^1\vec{u}_1 + \cdots + x^n\vec{u}_n \in \operatorname{rad}(\beta) \iff \beta(\vec{x}, \vec{u}_i) = 0,\ i = 1, \ldots, n.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} 0 = \beta(\vec{x}, \vec{u}_1) &= x^1\beta(\vec{u}_1, \vec{u}_1) + \cdots + x^n\beta(\vec{u}_n, \vec{u}_1) \\ &\vdots \\ 0 = \beta(\vec{x}, \vec{u}_n) &= x^1\beta(\vec{u}_1, \vec{u}_n) + \cdots + x^n\beta(\vec{u}_n, \vec{u}_n). \end{aligned}$$

Nos encontramos ante un sistema de ecuaciones lineales homogéneo. Si β fuera no degenerada, tendríamos que el sistema obtenido no tiene solución no trivial, lo que solo se verifica si la matriz

de β admite inversa. Es decir, si el discriminante respecto de esa base es no nulo. Recíprocamente, si el discriminante no fuera nulo, el sistema sólo tendría la solución trivial, por lo que β sería no degenerado.
Supongamos que $\operatorname{rad}(\beta)$ es no nulo. Sea $\overline{\beta} : V/\operatorname{rad}(\beta)\times V/\operatorname{rad}(\beta) \to \mathbb{K}$, definida por $\overline{\beta}(\vec{x}+\operatorname{rad}(\beta), \vec{y}+\operatorname{rad}(\beta)) = \beta(\vec{x},\vec{y})$. Vamos a ver que la aplicación está bien definida. Sean $\vec{x}', \vec{y}'$ tales que $\vec{x}' + \operatorname{rad}(\beta) = \vec{x}+\operatorname{rad}(\beta)$ y $\vec{y}'+\operatorname{rad}(\beta) = \vec{y}+\operatorname{rad}(\beta)$. Entonces, tenemos que $\vec{x}-\vec{x}', \vec{y}-\vec{y}' \in \operatorname{rad}(\beta)$. Ahora, sean $\vec{u}, \vec{v} \in \operatorname{rad}(\beta)$ tales que $\vec{x} = \vec{x}' - \vec{u}$ y $\vec{y} = \vec{y}' - \vec{v}$. Entonces, tenemos que

$$\beta(\vec{x}', \vec{y}') = \beta(\vec{x}+\vec{u}, \vec{y}+\vec{v}) = \beta(\vec{x},\vec{y}) + \beta(\vec{x},\vec{v}) + \beta(\vec{u},\vec{y}) + \beta(\vec{u},\vec{v}) = \beta(\vec{x},\vec{y}).$$

El hecho de que $\overline{\beta}$ es bilineal es consecuencia de su definición a partir de la bilineabilidad de β. Finalmente, queda ver que $\overline{\beta}$ es no degenerada. Si $\vec{x}+\operatorname{rad}(\beta) \in \operatorname{rad}(\overline{\beta})$, tenemos que $\forall \vec{y} \in V$,

$$\beta(\vec{x}+\operatorname{rad}(\beta), \vec{y}+\operatorname{rad}(\beta)) = 0 \Rightarrow \beta(\vec{x},\vec{y}) = 0,\ \forall \vec{y} \in V.$$

Entonces, tenemos que $\vec{x} \in \operatorname{rad}(\beta)$, por lo que $\vec{x}+\operatorname{rad}(\beta) = \vec{0}+\operatorname{rad}(\beta)$. □

Supongamos que $\operatorname{rad}(\beta) \neq \left\{\vec{0}\right\}$. Sea $L \in \mathcal{L}(V)$ tal que $\operatorname{rad}(\beta) \oplus L = V$. Consideremos la aplicación lineal

$$\begin{aligned} p : L &\to V/\operatorname{rad}(\beta) \\ \vec{x} &\to \vec{x}+\operatorname{rad}(\beta). \end{aligned}$$

Tenemos que si $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(p)$, entonces $\vec{x}+\operatorname{rad}(\beta) = \vec{0}+\operatorname{rad}(\beta)$, por lo que $\vec{x} = \vec{x}-\vec{0} \in L\cap \operatorname{rad}(\beta) = \left\{\vec{0}\right\}$. Entonces, p es un isomorfismo (es trivial que es sobreyectiva). Tenemos que

$$\overline{\beta}(p(\vec{x}), p(\vec{y})) = \beta(\vec{x},\vec{y}) = \beta_L(\vec{x},\vec{y}),$$

donde $\beta_L = \beta|_{L\times L}$. Es decir, β_L es no degenerada. Si $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n-r}\}$ es base de L y $\{\vec{u}_{n-r+1}, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de $\operatorname{rad}(\beta)$. Entonces tenemos que la matriz de β respecto de esta base será:

$$\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}}(\beta) = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}}(\beta_L) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea $L \in \mathcal{L}(V)$ y sea $\beta_L = \beta|_{L\times L}$. Tenemos que

$$\operatorname{rad}(\beta_L) = \{\vec{x} \in L \ : \ \beta_L(\vec{x},\vec{y}) = 0,\ \forall \vec{y} \in L\} = L \cap L^{\perp}_{\beta}.$$

Esto será no degenerado cuando $L \cap L^{\perp}_{\beta} = \left\{\vec{0}\right\}$.

Observación. De esto podmos concluir que se pueden tener formas bilineales degeneradas que su restricción a un subespacio vectorial sea no degenerada, así como una forma bilineal no degenerada cuya restricción a un subespacio vectorial sea degenerada.

Ejemplo 5.1. Consideremos la forma no degenerada

$$\beta \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que su restricción al suespacio $L(\{(1,0)\})$ es degenerada:

$$\beta_{L(\{(1,0)\})} \to \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}.$$

Sea β una forma bilineal simétrica. Se define una aplicación

$$\begin{aligned} \theta : V &\to V^* \\ \vec{x} &\to \theta(\vec{x}) = \beta_{\vec{x}}. \end{aligned}$$

Donde, $\beta_{\vec{x}} : V \to \mathbb{K}$ tal que $\vec{y} \to \beta_{\vec{x}}(\vec{y}) = \beta(\vec{x}, \vec{y})$. Tenemos que $\beta_{\vec{x}}$ es lineal para $\forall \vec{x} \in V$. En efecto, si $\vec{y}, \vec{z} \in V$,

$$\beta_x(\vec{y} + \vec{z}) = \beta(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = \beta(\vec{x}, \vec{y}) + \beta(\vec{x}, \vec{z}) = \beta_{\vec{x}}(\vec{y}) + \beta_{\vec{x}}(\vec{z}).$$

Por tanto, tenemos que $\forall \vec{x} \in V$, $\beta_{\vec{x}} \in V^*$. Ahora vamos a ver que θ es lineal. En efecto, $\forall \vec{z} \in V$

$$\theta(\vec{x} + \vec{y}) = \beta_{\vec{x}+\vec{y}}.$$

$$\beta_{\vec{x}+\vec{y}}(\vec{z}) = \beta(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = \beta_{\vec{x}}(\vec{z}) + \beta_{\vec{y}}(\vec{z}) = \theta(\vec{x})(\vec{z}) + \theta(\vec{y})(\vec{z}).$$

Análogamente, si $a \in \mathbb{K}$ y $\vec{x} \in V$, tenemos que $\forall \vec{y} \in V$, $\theta(a\vec{x}) = \beta_{a\vec{x}}$, así

$$\beta_{a\vec{x}}(\vec{y}) = \beta(a\vec{x}, \vec{y}) = a\beta(\vec{x}, \vec{y}) = a\beta_{\vec{x}}(\vec{y}) = a\theta(\vec{x})(\vec{y}).$$

Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V y $\left\{\omega^1, \ldots, \omega^n\right\}$ su dual. Vamos a calcular la matriz de

$$\theta : V_{\{\vec{u}_i\}} \to V^*_{\{\omega^i\}}.$$

Tenemos que $\beta_{\vec{u}_i} \in V^*$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Si estudiamos la columna i de $\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\omega^i\}}(\theta)$ deducimos que

$$\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\omega^i\}}(\theta) = \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}}(\beta).$$

En efecto, $\beta_{\vec{u}_i}(\vec{u}_j) = \beta(\vec{u}_i, \vec{u}_j)$. Tenemos que

$$\operatorname{Ker}(\theta) = \{\vec{x} \in V \ : \ \beta_{\vec{x}} = 0\} = \{\vec{x} \in V \ : \ \beta_{\vec{x}}(\vec{y}) = 0, \forall \vec{y} \in V\} = \operatorname{rad}(\beta).$$

Definición 5.9 (Rango)**.** Llamaremos **rango** de β al rango de θ.

Observación. Tenemos que $\operatorname{ran}(\beta) = n - \dim(\operatorname{rad}(\beta))$.

Observación. Tenemos que si β es no degenerada, la aplicación θ es un isomorfismo. En efecto, tendríamos que $\operatorname{Ker}(\theta) = \operatorname{rad}(\beta) = \left\{\vec{0}\right\}$, por lo que θ es inyectiva. Dado que $\dim(V) = \dim(V^*)$, por ser θ inyectiva, tenemos que es isomorfismo.

Teorema 5.3. Sea $L \in \mathcal{L}(V)$, β_L es no degenerada, entonces $V = L \oplus L^{\perp}_{\beta}$. En particular, si $\vec{x} \in V$ es no isótropo, $\{\vec{x}\}^{\perp}_{\beta}$ es un hiperplano vectorial.

Demostración. Dado que β_L es no degenerada, tenemos que $\operatorname{rad}(\beta_L) = L \cap L^{\perp}_{\beta} = \left\{\vec{0}\right\}$.
Ahora, sea $\vec{x} \in V$. Tenemos que $\beta_{\vec{x}}|_L \in L^*$. Dado que β_L es no degenerada, tenemos que existe $\vec{z} \in L$ tal que $\beta_L(\vec{z}, \vec{y}) = \beta_{\vec{x}}(\vec{y})$, $\forall \vec{y} \in L$. Es decir,

$$\forall \vec{y} \in L,\ \beta(\vec{z}, \vec{y}) = \beta(\vec{x}, \vec{y}) \Rightarrow \beta(\vec{z} - \vec{x}, \vec{y}) = 0 \Rightarrow \vec{z} - \vec{x} \in L^{\perp}_{\beta}.$$

Así, tenemos que
$$\vec{x} = \underbrace{\vec{z}}_{\in L} + \underbrace{\vec{x} - \vec{z}}_{\in L_\beta^\perp}.$$

Así, queda demostrado que $V = L \oplus L_\beta^\perp$.
Finalmente, si $\vec{x} \in V$ es no isótropo, tenemos que $\dim L(\{\vec{x}\}) = 1$ y, por consecuencia de lo visto anteriormente, $\dim (L(\{\vec{x}\}))_\beta^\perp = \dim V - 1$. □

Teorema 5.4. Sea β una forma bilineal no degenerada y sea $L \in \mathcal{L}(V)$. Entonces, $\dim\left(L_\beta^\perp\right) = \dim(V) - \dim(L)$ y $\left(L_\beta^\perp\right)_\beta^\perp = L$.

Demostración. Por ser β no degenerada, tenemos que θ es un isomorfismo. Sea $\vec{x} \in L_\beta^\perp$, entonces $\theta(\vec{x}) = \beta_{\vec{x}} = 0$. Así,
$$\theta\left(L_\beta^\perp\right) \subset L^\perp = \{\lambda \in V^* \;:\; \lambda(\vec{y}) = 0, \forall \vec{y} \in L\}.$$
Si $\lambda \in L^*$, existe $\vec{z} \in V$ tal que $\lambda = \beta_{\vec{z}}$. Así, $\forall \vec{y} \in V$, tenemos que
$$\beta_{\vec{z}} = \beta(\vec{z}, \vec{y}) = \lambda(\vec{y}) = 0,\ \vec{z} \in L.$$
Así, tenemos que $\theta\left(L_\beta^\perp\right) = L^\perp$, por lo que
$$\dim\left(L_\beta^\perp\right) = \dim\left(\theta\left(L_\beta^\perp\right)\right) = \dim\left(L^\perp\right) = \dim(V) - \dim(L).$$
Si $\vec{x} \in L$, $\forall \vec{y} \in L_\beta^\perp$ tenemos que $\beta(\vec{x}, \vec{y}) = 0$, por lo que $L \subset \left(L_\beta^\perp\right)_\beta^\perp$. Aplicando lo demostrado anteriormente, tenemos que
$$\dim\left(L_\beta^\perp\right)_\beta^\perp = \dim(V) - \dim\left(L_\beta^\perp\right) = \dim(L).$$
Así, queda demostrado que $L = \left(L_\beta^\perp\right)_\beta^\perp$. □

Corolario 5.1. β_L es no degenerada si y solo si $\beta_{L_\beta^\perp}$ es no degenerada.

Demostración. Tenemos que $\operatorname{rad}(\beta_L) = L \cap L_\beta^\perp$. De esta forma,
$$\operatorname{rad}\left(\beta_{L_\beta^\perp}\right) = L_\beta^\perp \cap \left(L_\beta^\perp\right)_\beta^\perp = \operatorname{rad}(\beta_L).$$
□

5.2. Bases ortogonales

Definición 5.10. Una base $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ de V es **ortogonal** para β si para $i \neq j$, $\beta(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = 0$.

Teorema 5.5. Si β es una forma bilineal simétrica, entonces existe $B = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V ortogonal para β. Además, $\operatorname{rad}(\beta) = L(\{\vec{u}_i \in B \ : \ \beta(\vec{u}_i, \vec{u}_i) = 0\})$. [a]

[a] Es fundamental que estemos trabajando con un cuerpo de característica distinta de 2.

Demostración. **(i)** Si $n = 1$, no hay nada que demostrar. Si $n = 2$ y $\beta \neq 0$ (no todos los vectores de la base son isótropos), cogemos $\vec{u}_1 \in V$ tal que $\beta(\vec{u}_1, \vec{u}_1) \neq 0$. Entonces tenemos que $\{\vec{u}_1\}^{\perp}_{\beta}$ es una recta tal que $L\left(\{\vec{u}_1\}^{\perp}_{\beta}\right) \oplus L(\{\vec{u}_i\}) = V$.

(ii) Supongamos que es cierto para $n-1$. Sea $\beta \neq 0$ y $\vec{u}_1 \in V$ tal que $\beta(\vec{u}_1, \vec{u}_1) \neq 0$. Tenemos que $\{\vec{u}_1\}^{\perp}_{\beta}$ es un hiperplano vectorial de V. Por hipótesis de inducción, tenemos que existe $\{\vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ base ortogonal para $\beta_{\{\vec{u}_1\}^{\perp}_{\beta}}$. Así, $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ es una base de V ortogonal para β. En efecto, para $i \geq 2$,

$$\beta(\vec{u}_1, \vec{u}_i) = 0.$$

Si $i \neq j$ $(i, j \geq 2)$, tenemos que $\beta(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = \beta_{\{\vec{u}_i\}^{\perp}_{\beta}} = 0$.

Ahora vamos a ver que $\operatorname{rad}(\beta) = L(\{\vec{u}_i \in B \ : \ \beta(\vec{u}_i, \vec{u}_i) = 0\})$. Si $\vec{x} \in \operatorname{rad}(\beta)$, tenemos que si $\vec{u}_i \in B$ no es isótropo, $\beta(\vec{x}, \vec{u}_i) = x^i \beta(\vec{u}_i, \vec{u}_i) = 0$, por lo que $x^i = 0$. Así, tenemos que los únicos coeficientes que no se anulan son aquellos que corresponden a los vectores isótropos de la base de B. Así, $\vec{x} \in L(\{\vec{u}_i \in B \ : \ \beta(\vec{u}_i, \vec{u}_i) = 0\})$. Recíprocamente, si $\vec{x} \in L(\{\vec{u}_i \in B \ : \ \beta(\vec{u}_i, \vec{u}_i) = 0\})$ tenemos que si $\vec{y} \in V$

$$\beta(\vec{x}, \vec{y}) = x^1 y^1 \beta(\vec{u}_1, \vec{u}_1) + \cdots + x^n y^n \beta(\vec{u}_n, \vec{u}_n).$$

Dado que $\vec{x}$ es una combinación lineal de los vectores isótropos de B, los coeficientes asociados a vectores no isótropos son nulos y la expresión que queda se anulará puesto que consistirá de β actuando sobre vectores isótropos, por lo que $\vec{x} \in \operatorname{rad}(\beta)$. □

Observación. Otra forma de enunciar este teorema es decir que toda matriz simétrica es congruente con una matriz diagonal. En efecto si $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ es una base ortogonal de V, la matriz de β en esta base será:

$$\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}}(\beta) = \begin{pmatrix} \beta(\vec{u}_1, \vec{u}_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta(\vec{u}_2, \vec{u}_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta(\vec{u}_n, \vec{u}_n) \end{pmatrix}.$$

Observación. Esto solo funciona en un cuerpo de característica distinta de dos.

Ejemplo 5.2. Aplicamos la demostración del teorema anterior para calcular bases ortogonales. Consideremos en $\mathbb{R}^3$ la forma bilineal β cuya matriz sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que $\det(A) = -2$, por lo que β es no degenerada y ningún elemento de la base ortogonal va a ser isótropo. Así, podemos considererar $\vec{u}_1 = (1,0,0)$ el primer vector de la base que buscamos. En efecto, tenemos que $\beta(\vec{u}_1, \vec{u}_1) = 2$. A continuación, los otros dos vectores que buscamos formarán la base de $\{\vec{u}_1\}_\beta^\perp$. Sacamos las ecuaciones de este subespacio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Así, nos sale que la ecuación de $\{\vec{u}_1\}_\beta^\perp$ será $2x + y = 0$. Por tanto, si $\vec{x} = (x,y,z) \in \{\vec{u}_1\}_\beta^\perp$, tenemos que

$$\vec{x} = (x,y,z) = (x,-2x,z) = x(1,-2,0) + z(0,0,1).$$

Así, tenemos que la base ortogonal que buscamos es $\{(1,0,0),(1,-2,0),(0,0,1)\}$.

Ejemplo 5.3. Consideremos la forma bilineal simétrica dada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

No podemos usar la base canónica como en el anterior, puesto que en este caso el determinante es 0. Buscamos una base de $\operatorname{rad}(\beta)$:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Es decir,

$$xy + y(x+z) + zy = 0 \iff y(x+z) = -y(x+z) \Rightarrow y(x+z) = 0.$$

Tenemos que $y = 0$ o $x + z = 0$. Entre los tres casos, podemos reunir estas posibles bases:

$$\{(1,0,0),(0,0,1)\}, \ \{(1,0,-1)\}, \ \{(1,0,-1),(0,1,0)\}.$$

Cogemos $\vec{u}_1 = (1,1,1)$, que sabemos que no pertenece a ninguno de los subespacios anteriores, por lo que no es isótropo. Ahora, encontramos una base de $\{\vec{u}_1\}_\beta^\perp$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x + 2y + z = 0.$$

Con esta ecuación, tenemos que una base será $\{(1,0,-1),(0,1,-2)\}$. Así, la base ortogonal de V que buscamos era $\{(1,1,1),(1,0,-1),(0,1,-2)\}$.

Sea $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y sea $\beta : V \times V \to \mathbb{C}$ bilineal simétrica. Tenemos que existe una base ortogonal $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \vec{u}_{r+1}, \ldots, \vec{u}_n\}$ tal que

$$\beta(\vec{u}_i, \vec{u}_i) = a_i \neq 0, \ i \leq r.$$

$$\beta(\vec{u}_i, \vec{u}_i) = 0,\ r+1 \leq i \leq n.$$

Sea $b_i \neq 0$ una raíz cuadrada de a_i para $i = 1, \ldots, n$, definimos

$$\left\{\vec{v}_1 = \frac{1}{b_1}\vec{u}_1, \ldots, \vec{v}_r = \frac{1}{b_r}\vec{u}_r, \vec{v}_{r+1} = \vec{u}_{r+1}, \ldots, \vec{v}_n = \vec{u}_n\right\}.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
&\beta(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = 0,\ i \neq j \\
&\beta(\vec{v}_i, \vec{v}_i) = \beta(\lambda_i \vec{u}_i, \lambda_i \vec{u}_i) = \frac{1}{b_i^2} a_i = 1,\ i = 1, \ldots, r.
\end{aligned}$$

Observación. Así, tenemos que existe $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ base ortogonal tal que $\beta(\vec{v}_i, \vec{v}_i) = 1$ si $i = 1, \ldots, r$ y $\beta(\vec{v}_i, \vec{v}_i) = 0$ si $i = r+1, \ldots, n$.

Ahora, consideremos el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y la forma $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineal simétrica. Tenemos que existe $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ una base ortogonal tal que:

$$\begin{aligned}
&\beta(\vec{u}_i, \vec{u}_i) = a_i > 0,\ i = 1, \ldots, p \\
&\beta(\vec{u}_i, \vec{u}_i) = b_i < 0,\ i = p+1, \ldots, q \\
&\beta(\vec{u}_i, \vec{u}_i) = 0,\ i \geq p+q+1.
\end{aligned}$$

Sea c_i una raíz cuadrada de a_i para $i = 1, \ldots, p$ y sea d_i una raíz cuadrada de $-b_i$ para $i = p+1, \ldots, p+q$. Definimos

$$\left\{\vec{v}_1 = \frac{1}{c_1}\vec{u}_1, \ldots, \vec{v}_{p+1} = \frac{1}{d_{p+1}}\vec{u}_{p+1}, \ldots, \vec{v}_n = \vec{u}_n\right\}.$$

Así, tenemos que

$$\beta(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = \beta(\lambda_i \vec{u}_i, \lambda_j \vec{u}_j) = \lambda_i \lambda_j \beta(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = 0,\ i \neq j.$$

Por tanto, se trata de una base ortogonal. Si $i = 1, \ldots, p$:

$$\beta(\vec{v}_i, \vec{v}_i) = \beta\left(\frac{1}{c_i}\vec{u}_i, \frac{1}{c_i}\vec{u}_i\right) = \left(\frac{1}{c_i}\right)^2 \beta(\vec{u}_i, \vec{u}_i) = 1.$$

Similarmente, si $i = p+1, \ldots, p+q$:

$$\beta(\vec{v}_i, \vec{v}_i) = \left(\frac{1}{d_i}\right)^2 \beta(\vec{u}_i, \vec{u}_i) = -1.$$

Finalmente, si $i = p+q+1, \ldots, n$, tenemos que $\beta(\vec{v}_i, \vec{v}_i) = \beta(\vec{u}_i, \vec{u}_i) = 0$.

Observación. Así, tenemos que existe $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ base ortogonal tal que $\beta(\vec{v}_i, \vec{v}_i) \in \{0, 1, -1\}$.

Definición 5.11. Sea β una forma bilineal simétrica real.

(a) Se dice que β es **definida positiva** si $\beta(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$, $\forall \vec{x} \in V$, y $\beta(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$.

(b) Se dice que β es **definida negativa** si $\beta(\vec{x}, \vec{x}) \leq 0$, $\forall \vec{x} \in V$, y $\beta(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$.

(c) Se dice que β es **positiva** si $\beta(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$, $\forall \vec{x} \in V$.

(d) Se dice que β es **negativa** si $\beta(\vec{x},\vec{x}) \leq 0$, $\forall \vec{x} \in V$.

Consideremos $L_1 = L(\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\})$. Así, tenemos que $\forall \vec{x} \in L_1$,

$$\vec{x} = x^1\vec{u}_1 + \cdots + x^p\vec{u}_p.$$

Así, tenemos que

$$\beta_{L_1}(\vec{x},\vec{x}) = \beta(\vec{x},\vec{x}) = \left(x^1\right)^2 \beta(\vec{u}_1,\vec{u}_1) + \cdots + (x^p)^2 \beta(\vec{u}_p,\vec{u}_p) \geq 0.$$

Además, tenemos que $\beta_{L_1}(\vec{x},\vec{x}) = 0$ si y solo si $\vec{x} = \vec{0}$. Es decir, β_{L_1} es un subespacio definido positivo.

Observación. Si $L \in \mathcal{L}(V)$ tal que $L_1 \subsetneq L$, entonces β_L no es definida positiva y L_1 es un espacio definido positivo maximal. En efecto, tenemos que $\exists \vec{x} \in L$ con $\vec{x} \notin L_1$. Entonces, tenemos que este vector se puede expresar de la forma

$$\vec{x} = x^1\vec{u}_1 + \cdots + x^{p+q}\vec{u}_{p+q} + 0\vec{u}_{p+q+1} + \cdots + 0\vec{u}_n.$$

Entonces, tenemos que $\vec{x} - \left(x^1\vec{u}_1 + \cdots + x^p\vec{u}_p\right) \in L$. Consideremos el vector

$$\vec{y} = x^{p+1}\vec{u}_{p+1} + \cdots + x^n\vec{u}_n \in L.$$

Tenemos que

$$\beta(\vec{y},\vec{y}) = \left(x^{p+1}\right)^2 b_{p+1} + \cdots + \left(x^{p+q}\right)^2 b_{p+q} \leq 0.$$

Definición 5.12. Si $L \in \mathcal{L}(V)$, se dice que L es **definido positivo maximal** cuando no está contenido en otro subespacio definido positivo.

Teorema 5.6. Todos los subespacios definidos positivos maximales tienen la misma dimensión.

Demostración. Sean $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ tales que β_{L_1} y β_{L_2} sean definidos positivos maximales. Tenemos que $L_{1,\beta}^{\perp}$ es negativo. En efecto, si $\vec{x} \in L_{1\beta}^{\perp}$ y $\beta(\vec{x},\vec{x}) > 0$ tenemos que $L_1 \subset L_1 + L(\{\vec{x}\}) \in \mathcal{L}(V)$, lo cual es absurdo porque hemos dicho que L_1 es definido positivo maximal. También tenemos que $L_{1\beta}^{\perp} \cap L_2 = \left\{\vec{0}\right\}$. Por tanto, debe ser que L_2 está contenido en algún suplementario de $L_{1\beta}^{\perp}$. Por tanto,

$$\dim L_2 \leq \dim(V) - \dim\left(L_{1\beta}^{\perp}\right) = \dim(L_1).$$

Análogamente, como $L_1 \cap L_{2\beta}^{\perp} = \left\{\vec{0}\right\}$,

$$\dim(L_1) \leq \dim(V) - \dim\left(L_{2\beta}^{\perp}\right) = \dim(L_2).$$

Por tanto, debe ser que $\dim(L_1) = \dim(L_2)$. □

Definición 5.13 (Índice y coíndice)**.** Se llama **coíndice** de β al número de vectores $\vec{x}$ de una base ortogonal tales que $\beta(\vec{x},\vec{x}) > 0$. Se llama **índice** de β al número de vectores $\vec{x}$ de una base ortogonal tales que $\beta(\vec{x},\vec{x}) < 0$.

Observación. Como se vio en un cálculo al principio del capítulo, el signo del determinante de una forma bilineal no depende de la base escogida. Dado las formas bilineales simétricas son diagonalizables (siempre podemos encontrar una base ortogonal), podemos usar este dato para encontrar el índice y coíndice con facilidad.

Observación. Si β es una forma bilineal simétrica de coíndice p e índice q. Tenemos que existe $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_p,\dots,\vec{v}_{p+q},\dots,\vec{v}_n\}$ tal que

$$\mathcal{M}_{\{\vec{v}_i\}}(\beta) = \begin{pmatrix} I_{p\times p} & 0 & 0 \\ 0 & -I_{q\times q} & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}\beta(\vec{x},\vec{y}) =& \beta\left(\sum_{i=1}^{n} x^i\vec{v}_i, \sum_{i=1}^{n} y^i\vec{v}_i\right) = \begin{pmatrix} x^1 & \cdots & x^n \end{pmatrix} \mathcal{M}_{\{\vec{v}_i\}}(\beta) \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} \\ =& x^1y^1 + \cdots + x^py^p - x^{p+1}y^{p+1} - \cdots - x^{p+q}y^{p+q}.\end{aligned}$$

Una consecuencia de esto es que

$$\beta(\vec{x},\vec{x}) = \left(x^1\right)^2 + \cdots + (x^p)^2 - \left(x^{p+1}\right)^2 - \cdots - \left(x^{p+q}\right)^2.$$

5.3. Adjunto de un endomorfismo

Definición 5.14. Sea $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ una base de V. Se dice que es una base **ortonormal** para β si

$$\beta(\vec{u}_i,\vec{u}_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

Observación. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ existe si β es no degenerada. En el caso de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, estas bases existen si β es no degenerada, tiene índice nulo y coíndice máximo.

Recordamos que si β es una forma bilineal simétrica no degenerada, la aplicación $\theta : V \to V^*$, con $\theta(\vec{x}) = \beta_{\vec{x}}$, es un isomorfismo. Si $f : V \to V$ es lineal, tenemos que la aplicación $\theta^{-1} \circ f^* \circ \theta : V \to V$ es lineal.

Definición 5.15 (Adjunto)**.** Llamaremos **adjunto** de f a la aplicación

$$\operatorname{ad}(f) = \theta^{-1} \circ f^* \circ \theta.$$

Observación. La aplicación $\operatorname{ad}(f)$ es lineal.

Tenemos que $\forall \vec{x} \in V$,

$$\operatorname{ad}(f)(\vec{x}) = \theta^{-1}(\beta_{\vec{x}} \circ f).$$

Así, tenemos que $\forall \vec{y} \in V$,

$$\beta(\operatorname{ad}(f)(\vec{x}), \vec{y}) = \beta_{\theta^{-1}(\beta_{\vec{x}} \circ f)}(\vec{y}) = \beta_{\vec{x}} \circ f(\vec{y}) = \beta_{\vec{x}}(f(\vec{y})) = \beta(\vec{x}, f(\vec{y})).$$

Proposición 5.2. Si $f : V \to V$ es lineal, $\exists! g : V \to V$ tal que $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$, $\beta(g(\vec{x}), \vec{y}) = \beta(\vec{x}, f(\vec{y}))$.

Demostración. **Unicidad.** Supogamos que existen $g, g' : V \to V$ tales que

$$\begin{aligned} \forall \vec{x}, \vec{y} \in V,\ \beta(g(\vec{x}), \vec{y}) &= \beta(\vec{x}, f(\vec{y})) \\ \beta(g'(\vec{x}), \vec{y}) &= \beta(\vec{x}, f(\vec{y})). \end{aligned}$$

Así, tenemos que $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$,

$$\beta(g(\vec{x}), \vec{y}) = \beta(g'(\vec{x}), \vec{y}) \Rightarrow \beta(g(\vec{x}) - g'(\vec{x}), \vec{y}) = 0, \forall \vec{y} \in V.$$

Así, tenemos que $(g - g')(\vec{x}) = g(\vec{x}) - g'(\vec{x}) \in \operatorname{rad}(\beta) = \left\{\vec{0}\right\}$. Por tanto, tenemos que $\forall \vec{x} \in V$, $g(\vec{x}) = g'(\vec{x})$, por lo que $g = g'$.

Existencia. Tenemos que existe, puesto que la aplicación $\operatorname{ad}(f)$ cumple las hipótesis de la proposición.

□

Observación. Así, hemos demostrado que la aplicación adjunta es única.

Si existe $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base ortonormal, consideremos $A = \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}}(f)$ y $B = \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}}(\operatorname{ad}(f))$. Vamos a ver como podemos relacionar estas matrices. Tenemos que

$$f(\vec{u}_i) = a_i^1 \vec{u}_1 + \cdots + a_i^n \vec{u}_n$$

$$\operatorname{ad}(f)(\vec{u}_j) = b_j^1 \vec{u}_1 + \cdots + b_j^n \vec{u}_n.$$

Así, por la proposición anterior, $\beta(f(\vec{u}_i), \vec{u}_j) = \beta(\vec{u}_i, \operatorname{ad}(f)(\vec{u}_j))$. Tenemos que

$$\beta(f(\vec{u}_i), \vec{u}_j) = \beta\left(a_i^1 \vec{u}_1 + \cdots + a_i^n \vec{u}_n, \vec{u}_j\right) = a_i^j.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\beta(\vec{u}_i, \operatorname{ad}(f)(\vec{u}_j)) = \beta\left(\vec{u}_i, b_j^1 \vec{u}_1 + \cdots + b_j^n \vec{u}_n\right) = b_j^i.$$

Por lo visto en la proposición anterior, tenemos que $a_i^j = b_j^i$.

Observación. Así, tenemos que $B = A^t$.

Observación. El adjunto del adjunto es el original, es decir, $\mathrm{ad}\left(\mathrm{ad}\left(f\right)\right) = f$.

En efecto,

$$\beta\left(\mathrm{ad}\left(\mathrm{ad}\left(f\right)\right)\left(\vec{x}\right), \vec{y}\right) = \beta\left(\mathrm{ad}\left(f\right)\left(\vec{x}\right), \mathrm{ad}\left(f\right)\left(\vec{y}\right)\right) = \beta\left(\vec{x}, \mathrm{ad}\left(f\right)\left(\vec{y}\right)\right) = \beta\left(f\left(\vec{x}\right), \vec{y}\right).$$

Así, tenemos que $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$, $\beta\left(\mathrm{ad}\left(\mathrm{ad}\left(f\right)\right)\left(\vec{x}\right) - f\left(\vec{x}\right), \vec{y}\right) = 0$, por lo que $\mathrm{ad}\left(\mathrm{ad}\left(f\right)\right)\left(\vec{x}\right) - f\left(\vec{x}\right) \in \mathrm{rad}\left(\beta\right) = \left\{\vec{0}\right\}$, que es equivalente a decir que $\mathrm{ad}\left(\mathrm{ad}\left(f\right)\right) = f$.

Definición 5.16. Se dice que una aplicación lineal $f : V \to V$ es **simétrica** si $\mathrm{ad}\left(f\right) = f$.

5.4. Grupo ortogonal

Consideremos que β es una forma bilineal simétrica no degenerada.

Definición 5.17. Un endomorfismo f de V es **ortogonal** si $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$, $\beta\left(f\left(\vec{x}\right), f\left(\vec{y}\right)\right) = \beta\left(\vec{x}, \vec{y}\right)$.

Proposición 5.3. Si $f \in \mathrm{End}\left(V\right)$ es ortogonal, entonces f es un automorfismo.

Demostración. Dado que f es un endomorfismo, basta con demostrar que es inyectiva. Si $\vec{x} \in \mathrm{Ker}\left(f\right)$, tenemos que $\forall \vec{y} \in V$, $\beta\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = \beta\left(f\left(\vec{x}\right), f\left(\vec{y}\right)\right) = 0$, por lo que $\vec{x} \in \mathrm{rad}\left(\beta\right) = \left\{\vec{0}\right\}$ y $\vec{x} = 0$. □

Proposición 5.4. Si $f \in \mathrm{End}\left(V\right)$ es ortogonal, f^{-1} es ortogonal.

Demostración. Sabemos que f^{-1} existe por la proposición anterior. Si $\vec{x}, \vec{y} \in V$, tenemos que por ser f ortogonal

$$\beta\left(f^{-1}\left(\vec{x}\right), f^{-1}\left(\vec{y}\right)\right) = \beta\left(f\left(f^{-1}\left(\vec{x}\right)\right), f\left(f^{-1}\right)\left(\vec{y}\right)\right) = \beta\left(\vec{x}, \vec{y}\right).$$

□

Proposición 5.5. $f \in \mathrm{End}\left(V\right)$ es ortogonal si y solo si $\mathrm{ad}\left(f\right) = f^{-1}$.

Demostración. **(i)** Tenemos que $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$,

$$\beta\left(f\left(\vec{x}\right), \vec{y}\right) = \beta\left(f^{-1}\left(f\left(\vec{x}\right)\right), f^{-1}\left(\vec{y}\right)\right) = \beta\left(\vec{x}, f^{-1}\left(\vec{y}\right)\right).$$

Por tanto, $\mathrm{ad}\left(f\right) = f^{-1}$.

(ii) Tenemos que $\forall \vec{x}, \vec{y}$, $\beta(f(\vec{x}), \vec{y}) = \beta\left(\vec{x}, f^{-1}(\vec{y})\right)$. De aquí se deduce que $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$,

$$\beta(f(\vec{x}), f(\vec{y})) = \beta\left(\vec{x}, f^{-1}(f(\vec{y}))\right) = \beta(\vec{x}, \vec{y}).$$

Por tanto f es ortogonal.

$\square$

Observación. Si $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base ortonormal, sea $A = \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{u}_i\}}(f)$, existe A^{-1} y $A^{-1} = A^t$. También es cierto que, asumiendo la existencia de una base ortonormal, si la matriz de f respecto de esta base es ortogonal, entonces f es ortogonal respecto de β.

Proposición 5.6. Si $f, g \in \mathrm{End}(V)$ son ortogonales, $g \circ f$ es ortogonal.

Demostración. Tenemos que $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$

$$\beta(g \circ f(\vec{y}), g \circ f(\vec{x})) = \beta(g(f(\vec{x})), g(f(\vec{y}))) = \beta(f(\vec{x}), f(\vec{y})) = \beta(\vec{x}, \vec{y}).$$

$\square$

Ejemplo 5.4. Tenemos que la identidad es ortogonal.

Observación. El conjunto

$$O_n(\mathbb{K}, \beta) = \{f \in \mathrm{Aut}(V) \ : \ f \text{ ortogonal}\},$$

es un grupo con la operación de composición. Es decir, $(O_n(\mathbb{K}, \beta), \circ)$ es un grupo.

Si $f \in O_n(\mathbb{K}, \beta)$, tenemos que

$$\det(f) = \det(\mathrm{ad}(f)) = \det\left(f^{-1}\right) = \frac{1}{\det(f)}.$$

Por tanto, $\det(f) = \pm 1$. Así, definimos $O_n^+(\mathbb{K}, \beta) = \{f \in \mathrm{Aut}(V) \ : \ \det(f) = 1\}$, que es un subgrupo de $O_n(\mathbb{K}, \beta)$. A los elementos de $O_n^+(\mathbb{K}, \beta)$ los llamaremos **rotaciones vectoriales**.

5.5. Formas cuadráticas

Sea β bilineal y simétrica. Si $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ es base de V, tenemos que

$$\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}}(\beta) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Así, tenemos que si $\vec{x} = x^1 \vec{u}_1 + \cdots + x^n \vec{u}_n$,

$$\beta(\vec{x}, \vec{x}) = \begin{pmatrix} x^1 & \cdots & x^n \end{pmatrix} \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}}(\beta) \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x^i x^j.$$

Si $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ es una base ortogonal tenemos que

$$\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}}(\beta) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Así, tenemos que

$$\beta(\vec{x}, \vec{x}) = \begin{pmatrix} x^1 & \cdots & x^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \lambda_1 \left(x^1\right)^2 + \cdots + \lambda_n \left(x^n\right)^2.$$

Definición 5.18 (Forma cuadrática)**.** Una **forma cuadrática** es un polinomio homogéneo de grado 2 de n variables $q\left(x^1, \ldots, x^n\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x^i x^j$ donde $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $\forall i, j = 1, \ldots, n$.

Observación. Una forma cuadrática es una aplicación $q : V \to \mathbb{K}$ tal que $q(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x^i x^j$, donde $\vec{x} = x^1 \vec{u}_1 + \cdots + x^n \vec{u}_n$.

Si β es una forma bilineal simétrica, se define $q_\beta : V \to \mathbb{K}$ con $q_\beta(\vec{x}) = \beta(\vec{x}, \vec{x})$. Esta es una forma cuadrática definida en V. En efecto, se tiene que

$$\beta(\vec{x}, \vec{x}) = \begin{pmatrix} x^1 & \cdots & x^n \end{pmatrix} \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}}(\beta) \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x^i x^j.$$

Proposición 5.7. Si q es una forma cuadrática definida en V, defino [a]

$$\beta_q(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}\left(q(\vec{x} + \vec{y}) - q(\vec{x}) - q(\vec{y})\right).$$

Entonces, β_q es bilineal simétrica.

[a] Tenemos que $q : V \to \mathbb{K}$ tal que $q(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x^i x^j$, donde q actúa sobre una base $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ de V.

Demostración. El que sea simétrica es trivial. Vamos a demostrar que es una forma bilineal.

$$\begin{aligned}\beta_q\left(\sum_{i=1}^n x^i\vec{u}_i, \sum_{j=1}^n y^j\vec{u}_j\right) =&\frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\left(x^i+y^i\right)\left(x^j+y^j\right) - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x^ix^j - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}y^iy^j\right)\\ =&\frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\left(x^ix^j+y^ix^j+x^iy^j+y^iy^j\right) - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x^ix^j - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}y^iy^j\right)\\ =&\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\left(y^ix^j+x^iy^j\right).\end{aligned}$$

A partir de aquí es fácil demostrar que β_q cumple con las propiedades de una forma bilineal simétrica.
□

Sea $Q(V) = \{q : V \to \mathbb{K} \ : \ q$ forma cuadrática definida en $V\}$ y $\operatorname{Bil}(V) = \{\beta \ : \ \beta$ forma bilineal simétrica definida en V
Se definen las aplicaciones:

$$\varphi : Q(V) \to \operatorname{Bil}(V), \ q \to \beta_q$$
$$\psi : \operatorname{Bil}(V) \to Q(V), \ \beta \to q_\beta.$$

Teorema 5.7.
$$\psi \circ \varphi = id_{Q(V)}, \quad \varphi \circ \psi = id_{\operatorname{Bil}(V)}.$$

Demostración. Si $q(\vec{x}) \in Q(V)$, se tiene que

$$\varphi(q)(\vec{x}) = \beta_q(\vec{x}, \vec{x}).$$

Así,
$$\psi(\varphi(q))(\vec{x}) = \frac{1}{2}\left(q(2\vec{x}) - q(\vec{x}) - q(\vec{x})\right) = \frac{1}{2}\left(4q(\vec{x}) - 2q(\vec{x})\right) = q(\vec{x}).$$

Por otro lado, tenemos que

$$(\varphi \circ \psi)(\beta)(\vec{x}, \vec{y}) = \varphi(q_\beta)(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}\left(\beta(\vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}) - \beta(\vec{x}, \vec{x}) - \beta(\vec{y}, \vec{y})\right) = \beta(\vec{x}, \vec{y}).$$

□

Observación. Así, se puede ver que las formas bilineales simétricas vienen caracterizadas por su forma cuadrática y viceversa. Por tanto, clasificar las formas cuadráticas es lo mismo que clasificar las formas bilineales simétricas. Se puede afirmar que para cada forma bilineal simétrica existe una única forma cuadrática y viceversa.

Definición 5.19. Si $q \in Q(V)$, llamaremos **rango** de q al rango de β_q. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, se llama **índice** de q al índice de β_q y **coíndice** de q al coíndice de β_q.

Ejemplo 5.5. Consideremos la forma cuadrática

$$q(\vec{x}) = 2\left(x^1\right)^2 + 3\left(x^2\right)^2 + 7\left(x^3\right)^2 + 4x^1x^2 + 6x^1x^3 + 9x^2x^3.$$

Tenemos que la expresión matricial de β_q será

$$\beta_q \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \frac{9}{2} \\ 3 & \frac{9}{2} & 7 \end{pmatrix}.$$

Puede resultar útil recordar que $q(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x^ix^j$, donde $a_{ij} = \beta(\vec{u}_i, \vec{u}_j)$ para una base $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ de V.

El método de Lagrange

Sea q una forma cuadrática, vamos a intentar expresarla como suma de cuadrados. Si q es una forma cuadrática, tenemos que

$$q(\vec{x}) = a_{11}\left(x^1\right)^2 + 2\sum_{i=2}^{n} a_{ii}x^1x^i + \sum_{i=2}^{n} a_{ii}\left(x^i\right)^2 + 2\sum_{2\leq i<j\leq n} a_{ij}x^ix^j.$$

Si $a_{11} \neq 0$, tenemos que $\exists\lambda \in V^*$ y $q_1\left(x^2, \ldots, x^n\right)$ tal que

$$\begin{aligned} q(\vec{x}) =& \frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}^2\left(x^1\right)^2 + 2a_{11}x^1\left(\sum_{i=2}^{n} a_{1i}x^1x^i\right) + \left(\sum_{i=2}^{n} a_{1i}x^1x^i\right)^2\right) - \frac{1}{a_{11}}\left(\sum_{i=2}^{n} a_{1i}x^i\right)^2 \\ &+ \sum_{i=2}^{n} a_{ii}\left(x^i\right)^2 + 2\sum_{2\leq i<j\leq n} a_{ij}x^ix^j \\ =& \frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}x^1 + \sum_{i=2}^{n} a_{1i}x^1x^i\right)^2 + q_1\left(x^2, \ldots, x^n\right) = \frac{1}{a_{11}}\left(\lambda(\vec{x})\right)^2 + q_1\left(x^2, \ldots, x^n\right). \end{aligned}$$

Donde $\lambda(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}x^1x^i = \frac{1}{2}\frac{\partial q(\vec{x})}{\partial x^1}$. En efecto, tenemos que

$$\frac{1}{2}\frac{\partial q(\vec{x})}{\partial x^1} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\left(a_{11}x^1\right)^2 + 2x^1\left(a_{12}x^2 + \cdots + a_{1n}x^n\right) + \left(a_{12}x^2 + \cdots + a_{1n}x^n\right)^2\right) = \lambda(\vec{x}).$$

Ejemplo 5.6. Consideremos la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Tenemos que

$$q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 2\left(x^1\right)^2 - \left(x^2\right)^2 + 2\left(x^3\right)^2 + 2x^1x^2 + 4x^1x^3 + 2x^2x^3.$$

Vamos a expresarla como suma de cuadrados utilizando el método anterior:

$$\lambda\left(\vec{x}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial x^1}=\frac{1}{2}\left(4x^1+2x^2+4x^3\right)=2x^1+x^2+2x^3.$$

Así, tenemos que

$$q_1\left(x^2,x^3\right)=q\left(\vec{x}\right)-\frac{1}{a_{11}}\lambda\left(\vec{x}\right)^2=2\left(x^1\right)^2+\frac{1}{2}\left(x^2\right)^2+2\left(x^3\right)^2+2x^1x^2+4x^1x^3+2x^2x^3.$$

Así, podemos obtener la expresión de q como suma de cuadrados:

$$q\left(\vec{x}\right)=\frac{1}{2}\left(2x^1+x^2+2x^3\right)^2+2\left(x^1\right)^2+\frac{1}{2}\left(x^2\right)^2+2\left(x^3\right)^2+2x^1x^2+4x^1x^3+2x^2x^3.$$

Ahora, repetiríamos el mismo procedimiento con $q_1\left(x^2,x^3\right)$ y, si fuere necesario, hasta otra vez, con el objetivo de expresar $q\left(\vec{x}\right)$ como suma de cuadrados.

Capítulo 6

Espacios vectoriales euclídeos

Sea E un espacio vectorial y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definición 6.1 (Producto escalar)**.** Un **producto escalar** definido en E es una forma bilineal simétrica $\langle , \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ y definida positiva [a]. Si $\langle , \rangle$ es un producto escalar definido en E, el par $(E, \langle , \rangle)$ es un **espacio vectorial euclídeo**.

[a] $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \iff \vec{x} = 0$.

Proposición 6.1. Si $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\} \subset V / \left\{\vec{0}\right\}$ son ortogonales dos a dos, entonces son linealmente independientes.

Demostración. Sean $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$ tales que $a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^p\vec{u}_p = \vec{0}$. Tenemos que $\forall i = 1, \ldots, p$,

$$\langle a_1\vec{u}_1 + \cdots + a_p\vec{u}_p, \vec{u}_i \rangle = a_1\langle \vec{u}_1, \vec{u}_i \rangle + \cdots + a_i\langle \vec{u}_i, \vec{u}_i \rangle + \cdots + a_p\langle \vec{u}_p, \vec{u}_i \rangle = a_i\langle \vec{u}_i, \vec{u}_i \rangle = 0 \Rightarrow a_i = 0.$$

□

Observación. En un producto escalar, dado que es definido positivo, el índice es 0.

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Entonces (V, β) es un espacio vectorial euclídeo. En efecto, tenemos que existe $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base ortonormal de V.

Observación. Se considera $(E, \langle , \rangle)$. Sean $\{\vec{x}, \vec{y}\} \subset V$ linealmente independientes y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{x} + \lambda\vec{y} \neq \vec{0}$.

(i) $\langle \vec{x} + \lambda\vec{y}, \vec{x} + \lambda\vec{y} \rangle > 0 \Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + 2\lambda\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \lambda^2\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle > 0$. La ecuación dada por $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + 2\lambda\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \lambda^2\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = 0$, no tiene raíces reales, por lo que $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle < \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$.

(ii) Si $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ son linealmente dependientes, entonces $\exists!\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{x} + \lambda\vec{y} = \vec{0}$. La ecuación anterior tiene una única solición real, esta es $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$.

Observación. Una importante conclusión es la desigualdad Cauchy-Schwartz:

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|^2 \leq \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle.$$

Definición 6.2 (Norma)**.** Si $\vec{x} \in E$ llamamos **norma** de $\vec{x}$ y la escribimos $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$.

Proposición 6.2. **(i)** $\|\vec{x}\| \geq 0$ y $\|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = 0$.

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in E$, $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \, \|\vec{x}\|$.

(iii) Desigualdad triangular: $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

Demostración. Las demostraciones de **(i)** y **(ii)** son triviales. Demostraremos, pues, únicamente la desigualdad triangular.

$$\begin{aligned}\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 =& \langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \leq \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle + 2\left|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle\right| \\ =& \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| = \left(\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|\right)^2.\end{aligned}$$

Así, tenemos que $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 \leq \left(\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|\right)^2$, por lo que $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$. □

Teorema 6.1 (Teorema de Gram-Schmidt)**.** Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ una base de E y para $i = 1, \ldots, n$, sea $L_i = L\left(\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_i\}\right)$. Entonces existe $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ base ortonormal [a] de E para $\langle , \rangle$ tal que $L_i = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i\}$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

[a] Se puede obtener primero la base ortogonal y obtener la ortonormal dividiendo cada vector entre su norma.

Demostración. Se define $\vec{v}_1 = \dfrac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}$. Ahora, tomamos $\vec{v'}_2 = \vec{u}_2 + \lambda \vec{v}_1$. Así, se tiene que

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v'}_2 \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{u}_2 \rangle + \lambda \underbrace{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle}_{1} = 0.$$

Si $\lambda = -\langle \vec{v}_1, \vec{u}_2 \rangle$, tenemos que $\vec{v}_1$ y $\vec{v'}_2$ son ortogonales. Ahora tomo $\vec{v}_2 = \dfrac{\vec{v'}_2}{\|\vec{v'}_2\|}$. Tenemos que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es una base ortonormal de L_2. Supongamos que están definidmos $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i\}$ base ortonormal de L_i con $i < n$. Así, tomamos

$$\vec{v'}_{i+1} = \vec{u}_{i+1} - \langle \vec{u}_{i+1}, \vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1 - \langle \vec{u}_{i+1}, \vec{v}_2 \rangle \vec{v}_2 - \cdots - \langle \vec{u}_{i+1}, \vec{v}_i \rangle \vec{v}_1.$$

Así, tenemos que $\forall j = 1, \ldots, i$,

$$\begin{aligned}\langle \vec{v'}_{i+1}, \vec{v}_j \rangle =& \langle \vec{u}_{i+1}, \vec{v}_j \rangle - \langle \vec{u}_{i+1}, \vec{v}_i \rangle \langle \vec{u}_{i+1}, \vec{v}_1 \rangle - \langle \vec{u}_{i+1}, \vec{v}_2 \rangle \langle \vec{v}_2, \vec{v}_j \rangle - \cdots - \langle \vec{u}_{i+1}, \vec{v}_j \rangle \langle \vec{v}_j, \vec{v}_j \rangle - \cdots - \langle \vec{u}_{i+1}, \vec{v}_i \rangle \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle \\ =& \langle \vec{u}_{i+1}, \vec{v}_j \rangle - \langle \vec{u}_{i+1}, \vec{v}_j \rangle = 0.\end{aligned}$$

Tomando $\vec{v}_{i+1} = \dfrac{\vec{v'}_{i+1}}{\|\vec{v'}_{i+1}\|}$, tenemos que $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i+1}\}$ es una base ortonormal de L_{i+1}. □

Criterio de Sylvester

Sea $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$, donde V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, una forma bilineal simétrica. Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V. Tenemos que la matriz de β respecto de esta base será:

$$\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}}(\beta) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\ a_{ij} = a_{ji}.$$

Definimos

$$\Delta_1 = |a_{11}|,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}.$$

Así, tenemos que $\Delta_n = \det\left(\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}}(\beta)\right)$.

Teorema 6.2 (Criterio de Sylvester)**.** Tenemos que β es un producto escalar si y solo si $\Delta_i > 0$ para $i = 1, \ldots, n$.

Demostración. **(i)** Si β es producto escalar, tenemos que β_{L_i} es producto escalar en L_i. Otra forma de verlo es por inducción. Dado que β es un producto escalar, se tiene que es definida positiva. Así, si $n = 1$, tenemos que $\{\vec{u}_1\}$ es una base de V. Por tanto,

$$\beta(\vec{u}_1, \vec{u}_1) = a_{11}^2 > 0.$$

Asumimos que es cierto para $n-1$. Queda ver que $\Delta_n > 0$. Como β es definida positiva, existe una base $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ ortonormal, es decir, $\mathcal{M}_{\{\vec{v}_i\}}(\beta) = I_{n\times n}$. Así, existe $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ tal que

$$I_{n\times n} = P^t \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}}(\beta) P \Rightarrow 1 = \det\left(P^t\right)\det\left(\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}}\right)\det(P) \iff \Delta_n = \frac{1}{(\det(P))^2} > 0.$$

(ii) Sea $\beta(\vec{u}_1, \vec{u}_1) = a_{11} > 0$. Cogemos $\vec{v}_1 = \dfrac{\vec{u}_1}{\sqrt{a_{11}}}$. Es fácil ver que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es base de L_2 y $\{\vec{v}_1, \vec{u}_2\}$ también es base de L_2. Además tenemos que $\det\left(\mathcal{M}_{\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}}(\beta_{L_2})\right) = \Delta_2 > 0$. Por tanto

$$\det\left(\mathcal{M}_{\{\vec{v}_1,\vec{u}_2\}}\right) = \begin{vmatrix} 1 & \beta(\vec{v}_1, \vec{u}_2) \\ \beta(\vec{v}_1, \vec{u}_2) & \beta(\vec{u}_2, \vec{u}_2) \end{vmatrix} = \beta(\vec{u}_2, \vec{u}_2) - \beta(\vec{v}_1, \vec{u}_2)^2 = \beta(\vec{u}_2, \vec{u}_2) > 0.$$

Cogemos $\vec{v'}_2 = \vec{u}_2 + \lambda\vec{v}_1$. Entonces tenemos que

$$\beta\left(\vec{v'}_2, \vec{v}_1\right) = \beta(\vec{u}_2, \vec{v}_1) + \lambda\underbrace{\beta(\vec{v}_1, \vec{v}_1)}_{1}.$$

Tomando $\lambda = -\beta(\vec{u}_2, \vec{v}_1)$, tenemos que $\beta\left(\vec{v'}_2, \vec{v}_1\right) = 0$. Así, definimos $\vec{v}_2 = \dfrac{\vec{v'}_2}{\beta\left(\vec{v'}_2, \vec{v'}_2\right)}$ y vemos que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es base ortonormal de L_2. Supongamos que es cierto para $i < n$. Tenemos que

$$\beta\left(\vec{v}_k, \vec{v}_h\right) = \begin{cases} 1, & k = h \\ 0, & k \neq h \end{cases}.$$

Es decir, supongamos definidos $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ base de L_r con $r < n$. Definimos

$$\vec{v'}_{r+1} = \vec{u}_{r+1} + \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_r \vec{v}_r.$$

Entonces, para $i = 1, \ldots, r$ se tiene que

$$\begin{aligned}\beta\left(\vec{v'}_{r+1}, \vec{v}_i\right) =& \beta\left(\vec{u}_{r+1}, \vec{v}_i\right) + \lambda_1 \beta\left(\vec{v}_1, \vec{v}_i\right) + \cdots + \lambda_i \beta\left(\vec{v}_i, \vec{v}_i\right) + \cdots + \lambda_r \beta\left(\vec{v}_r, \vec{v}_i\right) \\ =& \beta\left(\vec{u}_{r+1}, \vec{v}_i\right) + \lambda_i = 0.\end{aligned}$$

Tomando $\lambda_i = -\beta\left(\vec{u}_{r+1}, \vec{v}_i\right)$, tenemos que $\vec{v'}_{r+1}$ es ortogonal a $\vec{v}_i$ para $i = 1, \ldots, r$. Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned}\beta\left(\vec{v'}_{r+1}, \vec{v'}_{r+1}\right) =& \beta\left(\vec{u}_{r+1}, \vec{u}_{r+1}\right) + 2\sum_{i=1}^{r} -\beta\left(\vec{u}_{r+1}, \vec{v}_r\right)^2 + \sum_{i,j=1}^{r} \beta\left(-\beta\left(\vec{u}_{r+1}, \vec{v}_i\right)\vec{v}_i, -\beta\left(\vec{u}_{r+1}, \vec{v}_j\right)\vec{v'}_j\right) \\ =& \beta\left(\vec{u}_{r+1}, \vec{u}_{r+1}\right) - \sum_{i=1}^{r} \beta\left(\vec{u}_{r+1}, \vec{v}_i\right)^2 > 0.\end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$\mathcal{M}_{\{\vec{v}_i, \vec{u}_{r+1}\}}\left(\beta_{L_{r+1}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \beta\left(\vec{u}_{r+1}, \vec{v}_1\right) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \beta\left(\vec{u}_{r+1}, \vec{v}_2\right) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \beta\left(\vec{u}_{r+1}, \vec{v}_r\right) \\ \beta\left(\vec{u}_{r+1}, \vec{v}_1\right) & \beta\left(\vec{u}_{r+1}, \vec{v}_2\right) & \cdots & \beta\left(\vec{u}_r, \vec{v}_r\right) & \beta\left(\vec{u}_{r+1}, \vec{v}_{r+1}\right) \end{pmatrix}.$$

Así, tomamos $\vec{v}_{r+1} = \dfrac{\vec{v'}_{r+1}}{\sqrt{\beta\left(\vec{v'}_{r+1}, \vec{v'}_{r+1}\right)}}$

□

Observación. Si $L_i = L\left(\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_i\}\right)$, tenemos que $\beta : L_i \times L_i \to \mathbb{R}$ es un producto escalar. En efecto,

$$\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}}\left(\beta_{L_i}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix}.$$

Dado un espacio vectorial euclídeo V y un producto escalar $\langle , \rangle$, podemos definimor el isomorfismo

$$\begin{aligned}\theta : V \to& V^* \\ \vec{x} \to& \langle , \rangle_{\vec{x}}.\end{aligned}$$

Donde, $\langle,\rangle_{\vec{x}} : V \to \mathbb{K}$ con $\vec{y} \to \langle,\rangle_{\vec{x}}(\vec{y}) = \langle\vec{x},\vec{y}\rangle$. Si $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n\}$ es base de V , tenemos que $\{\theta(\vec{u}_1),\ldots,\theta(\vec{u}_n)\}$ es base de V^*. Consideremos $\left\{\omega^1,\ldots,\omega^n\right\}$ la base dual de $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n\}$. Si $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n\}$ es base ortonormal, tenemos que

$$\theta_{\vec{u}_i}(\vec{u}_j) = \omega^i(\vec{u}_j) = \langle\vec{u}_i,\vec{u}_j\rangle = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}.$$

Así, se tiene que $\forall j=1,\ldots,n$, $\theta_{\vec{u}_i}(\vec{u}_j) = \omega^i(\vec{u}_j)$, es decir, $\theta_{\vec{u}_i} = \omega^i$.

Observación. Si $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n\}$ es base ortonormal y $\vec{x},\vec{y} \in V$ con

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i\vec{u}_i, \quad \vec{y} = \sum_{i=0}^{n} y^i\vec{u}_i,$$

se tiene que

$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \begin{pmatrix} x^1 & \cdots & x^n \end{pmatrix} I_{n\times n} \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = x^1y^1 + \cdots + x^ny^n.$$

Sea $\emptyset \neq A \subset E$, tenemos que $A^{\perp}_{\langle,\rangle} = \{\vec{x}\in E : \langle\vec{x},\vec{y}\rangle = 0, \forall\vec{y}\in A\} \in \mathcal{L}(V)$. Recordando del tema anterior, tenemos que Si $L \in \mathcal{L}(V)$, se tiene que $L \oplus L^{\perp}_{\langle,\rangle} = E$ y $\left(L^{\perp}_{\langle,\rangle}\right)^{\perp}_{\langle,\rangle} = L$.

Consideremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $(E_1, \langle,\rangle_1)$, $(E_2, \langle,\rangle_2)$.

6.1. Aplicaciones ortogonales

Definición 6.3 (Aplicación ortogonal)**.** Una aplicación lineal $f : E_1 \to E_2$ es **ortogonal** si $\forall\vec{x},\vec{y}\in E_1$, $\langle f(\vec{x}), f(\vec{y})\rangle_2 = \langle\vec{x},\vec{y}\rangle_1$.

Teorema 6.3. Sea $f : E_1 \to E_2$ una aplicación. Entonces, son equivalentes:

(a) f es ortogonal.

(b) f es lineal y $\forall\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n\}$ base ortonormal de E_1, $\{f(\vec{u}_1),\ldots,f(\vec{u}_n)\}$ es una familia ortonormal de E_2.

(c) f es lineal y $\exists\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n\}$ base ortonormal de E_1 tal que $\{f(\vec{u}_1),\ldots,f(\vec{u}_n)\}$ es familia ortonormal de E_2.

(d) f es lineal y $\|f(\vec{x})\|_2 = \|\vec{x}\|_1$.

Demostración. **(a)** $\Rightarrow$ **(b)** Por hipótesis, f conserva el producto escalar. Demostremos que f es lineal. Tenemos que $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_1$

$$\begin{aligned}
\| f(\vec{x}+\vec{y}) - f(\vec{x}) - f(\vec{y}) \|_2^2 =& \langle f(\vec{x}+\vec{y}), f(\vec{x}+\vec{y})\rangle_2 + \langle f(\vec{x}), f(\vec{x})\rangle_2 + \langle f(\vec{y}), f(\vec{y})\rangle_2 \\
& -2\langle f(\vec{x}+\vec{y}), f(\vec{x})\rangle_2 - 2\langle f(\vec{x}+\vec{y}), f(\vec{y})\rangle_2 + 2\langle f(\vec{x}), f(\vec{y})\rangle_2 \\
=& \|\vec{x}+\vec{y}\|_1 + \|\vec{x}\|_1^2 + \|\vec{y}\|_1^2 - 2\langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}\rangle_1 - 2\langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{y}\rangle_1 + 2\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle_1 \\
=& \|\vec{x}\|_1^2 + \|\vec{y}\|_1^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle_1 + \|\vec{x}\|_1^2 + \|\vec{y}\|_1^2 - 2\|\vec{x}\|_1^2 - 2\langle \vec{y}, \vec{x}\rangle_1 \\
& -2\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle_1 - 2\|\vec{y}\|_1^2 + 2\left\langle \vec{x}, \vec{y}\right\rangle_1 \\
=& 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, $f(x+y) = f(x) - f(y)$. Ahora, sea $a \in \mathbb{R}$ y $\vec{x} \in E_1$,

$$\begin{aligned}
\| f(a\vec{x}) - af(\vec{x}) \|_2^2 =& \| f(a\vec{x}) \|_2^2 - 2a\langle f(a\vec{x}), f(\vec{x})\rangle_2 + a^2 \| f(\vec{x}) \|_2^2 \\
=& \langle f(a\vec{x}), f(a\vec{x})\rangle_2 - 2a\langle f(a\vec{x}), f(\vec{x})\rangle_2 + a^2\langle f(\vec{x}), f(\vec{x})\rangle_2 \\
=& \langle a\vec{x}, a\vec{x}\rangle_1 - 2a\langle a\vec{x}, \vec{x}\rangle_1 + a^2\langle \vec{x}, \vec{x}\rangle_1 \\
=& a\langle \vec{x}, \vec{x}\rangle_1 - 2a^2\langle \vec{x}, \vec{x}\rangle_1 + a^2\left\langle \vec{x}, \vec{x}\right\rangle_1 \\
=& 0.
\end{aligned}$$

Si $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ es una base ortonormal de E_1 se tiene que

$$\langle f(\vec{u}_i), f(\vec{u}_j)\rangle_2 = \langle \vec{u}_i, \vec{u}_j\rangle_1 = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} .$$

(b) ⇒ (c) Es trivial.

(c) ⇒ (d) Sea $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ una base ortonormal de E_1 y sea $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \vec{u}_i$, por lo que $f(\vec{x}) = \sum_{i=0}^{n} x^i f(\vec{u}_i)$.

$$\|\vec{x}\|_1^2 = \begin{pmatrix} x^1 & \cdots & x^n \end{pmatrix} I_{n\times n} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \left(x^1\right)^2 + \cdots + \left(x^n\right)^2 .$$

.

$$\begin{aligned}
\| f(\vec{x}) \|_2^2 =& \langle f(\vec{x}), f(\vec{x})\rangle_2 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x^i f(\vec{u}_i), \sum_{i=1}^{n} x^i f(\vec{u}_i) \right\rangle_2 = \sum_{i,j=1}^{n} x^i x^j \langle f(\vec{u}_i), f(\vec{u}_j)\rangle_2 = \sum_{i=1}^{n} \left(x^i\right)^2 \\
=& \|\vec{x}\|_1^2.
\end{aligned}$$

(d) ⇒ (a) Tenemos que $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_1$,

$$\begin{aligned}
\langle f(\vec{x}), f(\vec{y})\rangle_2 =& \frac{1}{2}\left(\underbrace{\| f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \|_2^2}_{f(\vec{x}+\vec{y})} + \| f(\vec{x}) \|_2^2 + \| f(\vec{y}) \|_2^2 \right) \\
=& \frac{1}{2}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|_1^2 + \|\vec{x}\|_1^2 + \|\vec{y}\|_1^2 \right) = \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle_1.
\end{aligned}$$

□

Proposición 6.3. Si $f : E_1 \to E_2$ es ortogonal, entonces es inyectiva.

Demostración. Sea $f : E_1 \to E_2$ ortogonal y $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(f)$. Tenemos que

$$\|\vec{x}\|_1 = \|f(\vec{x})\|_2 = \|\vec{0}\|_2 = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}.$$

□

Definición 6.4. Una aplicación ortogonal $f : E_1 \to E_2$ es un isomorfismo de espacios vectoriales euclídeos si $\exists g : E_2 \to E_1$ ortogonal tal que $g \circ f = id_{E_1}$ y $f \circ g = id_{E_2}$.

Teorema 6.4. Sea $f : E_1 \to E_2$ una aplicación ortogonal. Entonces, son equivalentes:

(a) f es un isomorfismo de espacios vectoriales euclídeos.

(b) f es biyectiva.

(c) $\dim(E_1) = \dim(E_2)$.

Demostración. **(a)** $\Rightarrow$ **(b)** $\Rightarrow$ **(c)** Trivial.

(c) $\Rightarrow$ **(a)** Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ una base ortonormal de E_1. Entonces, $\{f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_n)\}$ son linealmente independientes y, por tanto, son base ortonormal de E_2. Sea $g : E_2 \to E_1$ la única aplicación lineal tal que $g(f(\vec{u}_i)) = \vec{u}_i$ con $i = 1, \ldots, n$. Entonces, tenemos que para $i = 1, \ldots, n$, $g(f(\vec{u}_i)) = \vec{u}_i = id_{E_1}(\vec{u}_i)$ y $f(g(f(\vec{u}_i))) = f(\vec{u}_i) = id_{E_2}$.

□

6.2. Grupo ortogonal

Observación. Tenemos que

$$O_n(E) = O_n(\mathbb{R}) = \{f : E \to E \ : \ f \text{ ortogonal}\}.$$

Tenemos que $(O_n(\mathbb{R}), \circ)$ es un grupo, y se le denomina **grupo ortogonal** .

Si $f \in O_n(\mathbb{R})$, tenemos que $\det(f) = \pm 1$. Definimos el conjunto

$$O_n^+(\mathbb{R}) = \{f \in O_n(\mathbb{R}) \ : \ \det(f) = 1\}.$$

Este es un subgrupo de $O_n(\mathbb{R})$. Similarmente, definimos

$$O_n^-(\mathbb{R}) = \{f \in O_n(\mathbb{R}) \ : \ \det(f) = -1\}.$$

Si $f_1, \ldots, f_k \in O_n^-(\mathbb{R})$. Tenemos que

$$f_k \circ \cdots \circ f_1 \in \begin{cases} O_n^+(\mathbb{R}), \ k \text{ par} \\ O_n^-(\mathbb{R}), \ k \text{ impar} \end{cases}.$$

Así, tenemos que $O_n^+(\mathbb{R}) \cup O_n^-(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R})$.

Observación. Tenemos que $O_n(\mathbb{R}) \subset \operatorname{Aut}(E)$.

Proposición 6.4. Sean $\emptyset \neq A, B \subset E$ ortogonales, entonces si $f \in O_n(\mathbb{R})$, $f(A)$ y $f(B)$ son ortogonales.

Demostración. Tenemos que $\forall \vec{x} \in A, \vec{y} \in B$, se tiene que

$$\langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0.$$

□

Supongamos que $L \in \mathcal{L}(E)$.

Proposición 6.5. Si $f \in O_n(\mathbb{R})$ tal que $f(L) \subset L$ ($\iff f(L) = L$), entonces $f\left(L^{\perp}_{\langle,\rangle}\right) \subset L^{\perp}_{\langle,\rangle}$, $f|_L \in O(L)$ y $f|_{L^{\perp}_{\langle,\rangle}} \in O\left(L^{\perp}_{\langle,\rangle}\right)$.

Demostración. Sea $\vec{x} \in L^{\perp}_{\langle,\rangle}$, por lo que $f(\vec{x}) \in f\left(L^{\perp}_{\langle,\rangle}\right)$. Tenemos que $\forall \vec{y} \in L$, existe $\vec{z} \in L$ tal que $\vec{y} = f(\vec{z})$. Así, se tiene que

$$\langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle f(\vec{x}), f(\vec{z}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = 0.$$

Así, tenemos que $f(\vec{x}) \in L^{\perp}_{\langle,\rangle}$, por lo que queda demostrado que $f\left(L^{\perp}_{\langle,\rangle}\right) \subset L^{\perp}_{\langle,\rangle}$.
Por otro lado, es fácil ver que $f|_L \in O(L)$. En efecto, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L$, se tiene que $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$. Es decir,

$$\langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L .$$

Finalmente, dado que $f\left(L^{\perp}_{\langle,\rangle}\right) \subset L^{\perp}_{\langle,\rangle}$ y f es ortogonal, tenemos que $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L^{\perp}_{\langle,\rangle}$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{L^{\perp}_{\langle,\rangle}} = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \left\langle f|_{L^{\perp}_{\langle,\rangle}}(\vec{x}), f|_{L^{\perp}_{\langle,\rangle}}(\vec{y}) \right\rangle.$$

Por tanto, $f|_{L^{\perp}_{\langle,\rangle}} \in O\left(L^{\perp}_{\langle,\rangle}\right)$. □

Si $f \in \mathrm{End}(E)$, tenemos que $\mathrm{ad}(f) \in \mathrm{End}(E)$. Recordamos que $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$,

$$\langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \mathrm{ad}(f)(\vec{y}) \rangle .$$

Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ es una base ortonormal y $A = \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{u}_i\}}(f)$. Tenemos que $\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{u}_i\}}(\mathrm{ad}(f)) = A^t$. Decíamos que f es simétrica si $f = \mathrm{ad}(f)$, es decir, si y solo si en una base ortonormal $A = A^t$.

Lema 6.1. Sea $f \in \mathrm{End}(E)$ simétrica y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ con $\lambda \neq \mu$. Entonces L_λ y L_μ son ortogonales [a] .

[a] $L_\lambda = \{\vec{x} \in E \,:\, f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\}$ y $L_\mu = \{\vec{x} \in E \,:\, f(\vec{x}) = \mu\vec{x}\}$.

Demostración. Sea $\vec{x} \in L_\lambda$ e $\vec{y} \in L_\mu$. Tenemos que

$$\langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, f(\vec{y}) \rangle \Rightarrow \langle \lambda\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \mu\vec{y} \rangle \Rightarrow (\lambda - \mu) \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0.$$

Como $\lambda \neq \mu$ se tiene que $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$. □

Teorema 6.5 (Teorema espectral). Si $f : E \to E$ es simétrica, entonces f es diagonalizable y existe $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base ortonormal de E formada por vectores propios.

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ un valor propio de f. Si $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(f - \lambda id_E)^2$ tenemos que

$$\langle (f - \lambda id_E)(\vec{x}), (f - \lambda id_E)(\vec{x}) \rangle = \left\langle \vec{x}, (f - \lambda id_E)^2 (\vec{x}) \right\rangle = 0.$$

Así, tenemos que $(f - \lambda id_E)(\vec{x}) = 0$, por lo que tenemos que $\operatorname{Ker}(f - \lambda id_E) = \operatorname{Ker}(f - \lambda id_E)^2$. Así, la multiplicidad geométrica es 1 y es diagonalizable. Ahora vamos a ver que no hay autovalores complejos. Si $\vec{x} \in \operatorname{Ker}\left(f^2 + 2af + b\right)$ con $a^2 - b < 0$, vamos a ver que $\vec{x} = \vec{0}$. Asumimos que $\vec{x} \neq \vec{0}$.

$$0 \leq \langle (f + a id_E)(\vec{x}), \vec{x} \rangle = \left(a^2 - b\right) \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \leq 0.$$

Por tanto, tenemos que $\left(a^2 - b\right) \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$, por lo que $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$, por lo que $\vec{x} = \vec{0}$.

Finalmente, por el lema anterior si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ son autovalores con $\lambda_i \neq \lambda_j$ con $i \neq j$, tenemos que

$$L_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus L_{\lambda_k}.$$

□

Observación. Sea $f \in O_n(E)$, por lo que $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$ se tiene que $\langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$. Si $f(\vec{x}) = \vec{0}$ se tiene que $\forall \vec{y} \in E$, $\langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$. Además, tenemos que $\left\langle f^{-1}(\vec{x}), f^{-1}(\vec{y}) \right\rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$. También tenemos que $\left\langle f^{-1}(\vec{x}), \vec{y} \right\rangle = \langle \vec{x}, f(\vec{y}) \rangle$, por lo que $f^{-1} = \operatorname{ad}(f)$. Así, en una base ortonormal $A^{-1} = A^t$.

Observación. Sean $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ y $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ bases ortonormales. Se tiene que

$$\begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \cdots & \vec{u}_n \end{pmatrix} C, \; C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}).$$

Vamos a ver qué podemos deducir de C. Sea $f \in \operatorname{End}(E)$ la única aplicación lineal tal que $f(\vec{u}_i) = \vec{v}_i$ con $i = 1, \ldots, n$. Tenemos que $\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{u}_i\}}(f) = C$. También se verifica que si $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \vec{u}_i$ e $\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} y^i \vec{u}_i$, entonces

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x^i y^j \beta(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = x^1 y^1 + \cdots + x^n y^n.$$

Tenemos que

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x^i f(\vec{u}_i) = \sum_{i=1}^{n} x^i \vec{v}_i, \quad f(\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} y^i f(\vec{u}_i) = \sum_{i=1}^{n} y^i \vec{v}_i.$$

Así, tenemos que $\langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$, por lo que $\exists C^{-1} = C^t$, es decir, C es ortogonal.

Observación. Esto nos va a permitir diagonalizar matrices simétricas por semejanza y por congruencia.

Tenemos que

$$O_n(\mathbb{R}) = O(E) = \{f \in \operatorname{Aut}(E) \;:\; f \text{ ortogonal}\}.$$

6.3. Transformaciones ortogonales

6.3.1. Simetrías vectoriales ortogonales

Definición 6.5 (Simetría vectorial ortogonal)**.** Sea $L \in \mathcal{L}(E)$, llamamos **simetría vectorial ortogonal** respecto de L a la simetría vectorial de base L y dirección $L^{\perp}_{\langle,\rangle}$.

Observación. Tenemos que $\forall \vec{x} \in L$, $\exists! \vec{x}_1 \in L$, $\vec{x}_2 \in L^{\perp}_{\langle,\rangle}$ tal que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$. La simetría de la que hablamos es $s(\vec{x}) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$.

Teorema 6.6. Las simetrías ortogonales son los endomorfimos ortogonales involutivos.

Demostración. Si f es una simetría vectorial, entonces f es involutiva. Tenemos que $\forall \vec{x} \in E$, $\exists! \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L^{\perp}_{\langle,\rangle}$ tal que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$. Tenemos además que $s(\vec{x}) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$, por lo que

$$\|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \rangle = \|\vec{x}_1\|^2 + \|\vec{x}_2\|^2 + 2\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle = \|\vec{x}_1\|^2 + \|\vec{x}_2\|^2.$$

$$\|f(\vec{x})\|^2 = \langle \vec{x}_1 - \vec{x}_2, \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \rangle = \|\vec{x}_1\|^2 + \|\vec{x}_2\|^2.$$

Así, hemos visto que f es ortogonal.
Recíprocamente, si f es un endomorfismo ortogonal involutivo tenemos que $\exists L_1, L_2 \in \mathcal{L}(E)$ tal que $E = L_1 \oplus L_2$. Tenemos que $\forall \vec{x}_1 \in L_1$, $\vec{x}_2 \in L_2$, se cumple que $f(\vec{x}_1) = \vec{x}_1$ y $f(\vec{x}_2) = -\vec{x}_2$. Así,

$$\begin{aligned} \langle f(\vec{x}_1), f(\vec{x}_2) \rangle &= \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle \\ &= \langle \vec{x}_1, -\vec{x}_2 \rangle = -\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle. \end{aligned}$$

Entonces debe ser que $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle = 0$, por lo que L_2 y L_1 son dos subespacios complementarios y ortogonales. Así, $L_2 \subset L^{\perp}_{1,\langle,\rangle}$, por lo que $L_2 = L^{\perp}_{1,\langle,\rangle}$. Consecuentemente, f es la simetría vectorial ortogonal de base L_1. □

Observación. Sean $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\}$ base de L y $\{\vec{u}_{r+1}, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de $L^{\perp}_{\langle,\rangle}$. Entonces tenemos que $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ es base de E. Si f es la simetría vectorial ortogonal de base L:

$$\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{u}_i\}}(f) = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & -I_{(n-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}.$$

Tenemos que $\det(f) = (-1)^{n-r}$. Tenemos que $f \in O_n^+(\mathbb{R})$ si y solo si $n-r$ es par, y $f \in O_n^-(\mathbb{R})$ si y solo si $n-r$ es impar. En particular, las simetrías vectoriales ortogonales respecto de hiperplanos vectoriales de E son negativos.

Teorema 6.7. Sean $\vec{u}, \vec{v} \in E$ tales que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ y $\vec{u} \neq \vec{v}$. Entonces existe una única simetría vectorial ortogonal de base un hiperplano vectorial tal que $s(\vec{u}) = \vec{v}$ ($\iff$ $s(\vec{v}) = \vec{u}$).

Demostración. **Unicidad.** Sea $\vec{u}-\vec{v}=\vec{x}$. Tenemos que

$$s(\vec{u}-\vec{v})=s(\vec{u})-s(\vec{v})=\vec{v}-\vec{u}=-\vec{x}.$$

Entonces, tenemos que $s(\vec{x})=-\vec{x}$, por lo que $\vec{x}$ pertenece a la dirección de la simetría. Por tanto, el hiperplano base de s es $H=\{\vec{x}\}^{\perp}_{\langle,\rangle}$, de donde resulta la unicidad de la solución.

Exitencia. Sea s la simetría vectorial ortogonal de base el hiperplano $H=\{\vec{x}=\vec{u}-\vec{v}\}^{\perp}_{\langle,\rangle}$. Tenemos que $\vec{u}=\vec{u}_1+\alpha\vec{x}$ y $\vec{v}=\vec{v}_1+\beta\vec{x}$, con $\vec{u}_1,\vec{v}_1\in H$ y $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Tenemos que

$$\vec{x}=\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}_1+\alpha\vec{x}-(\vec{v}_1+\beta\vec{x})=\vec{u}_1-\vec{v}_1+(\alpha-\beta)\,\vec{x}.$$

Por tanto

$$\vec{u}_1-\vec{v}_1=(1-\alpha+\beta)\,\vec{x}\in L(\{\vec{x}\})\cap H\Rightarrow\vec{u}_1=\vec{v}_1.$$

También tenemos que, $1-\alpha+\beta=0$. Por tanto, tenemos que $\|\vec{u}_1\|=\|\vec{v}_1\|$:

$$\|\vec{u}\|=\|\vec{u}_1+\alpha\vec{x}\|=\|\vec{u}_1\|+\alpha^2\|\vec{x}\|=\|\vec{u}_1\|+\beta^2\|\vec{x}\|.$$

Por tanto, se tiene que $\left(\alpha^2-\beta^2\right)\|\vec{x}\|=0$, por lo que $\alpha^2-\beta^2=0$ y $\alpha=\pm\beta$. Como $\vec{u}\neq\vec{v}$, debe ser que $\beta=-\alpha$, por lo que

$$\alpha=1+\beta=1-\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{1}{2},\ \beta=-\frac{1}{2}.$$

Así obtenemos el resultado que buscábamos:

$$s(\vec{u})=s\left(\vec{u}_1+\frac{1}{2}\vec{x}\right)=s(\vec{u}_1)+\frac{1}{2}s(\vec{x})=\vec{u}_1-\frac{1}{2}\vec{x}=\vec{v}_1-\frac{1}{2}\vec{x}=\vec{v}.$$

□

Teorema 6.8. Sea $f\in O_n(\mathbb{R})=O_n(E)$ y sea $L=\{\vec{u}\in E\ :\ f(\vec{u})=\vec{u}\}$. Sea $r=\dim(L)$. Entonces existen $n-r$ simetrías ortogonales $(s_1,s_2,\ldots,s_{n-r})$ de hiperplanos vectoriales tales que $f=s_{n-r}\circ\cdots\circ s_1$.

Demostración. Lo demostramos por inducción a lo largo de las siguientes secciones.

□

6.3.2. Transformaciones ortogonales en $O_1(\mathbb{R})$

Teorema 6.9. Los elementos de $O_1(E)$ son $\pm id_E$.

Demostración. Si $\vec{x}\in E/\left\{\vec{0}\right\}$ tenemos que $E=L(\{\vec{x}\})$. Así, $\forall\vec{y}\in E$, $\exists\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $\vec{y}=\lambda\vec{x}$. Si $f(\vec{x})\in O_1(E)$, $\|f(\vec{x})\|=\|\vec{x}\|$. Así,

$$\|f(\vec{x})\|=\|\lambda\vec{x}\|=|\lambda|\,\|\vec{x}\|=\|\vec{x}\|\Rightarrow|\lambda|=1\Rightarrow\lambda=\pm1.$$

Si $\lambda=1$, tenemos que $f=id_E$. Por otro lado, si $\lambda=-1$, tenemos que $f=-id_E$. Por tanto, $O_1(\mathbb{R})=\{id_E,-id_E\}$, donde $id_E\in O_1^+(\mathbb{R})$ y $-id_E\in O_1^-(\mathbb{R})$. □

Observación. El teorema 6.8 está demostrado para $n=1$.

6.3.3. Transformaciones ortogonales de $O_2(\mathbb{R})$

Ahora, consideremos el caso $n = 2$. Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base ortonormal de E. Si f es un endomorfismo en $O_2^+(\mathbb{R})$ y $A = \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{u}_i\}}(f)$ se tiene que $\exists A^{-1} = A^t$. Además, $\det(A) = 1$. Por tanto, la matriz A será de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ a^2 + b^2 = 1$$

Ahora, si $f \in O_2^-(\mathbb{R})$, tenemos que $\det(A) = -1$ y la matriz A nos queda de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix},\ a^2 + b^2 = 1.$$

Estudio de $O_2^+(\mathbb{R})$

Teorema 6.10. Los únicos elementos involutivos de $O_2^+(\mathbb{R})$ son id_E y $-id_E$. Además, si $f \in O_2^+(\mathbb{R})$ con $f \neq \pm id_E$, entonces $L = \{\vec{u} \in E\ :\ f(\vec{u}) = \vec{u}\} = \left\{\vec{0}\right\}$.

Demostración. En primer lugar, si $f \in O_2^+(\mathbb{R})$ y $f^2 = id_E$, tenemos que la matriz de f debe cumplir que

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De aquí obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 2ab = 0 \\ a^2 - b^2 = 1 \end{cases}.$$

Las únicas soluciones son $b = 0$ y $a = \pm 1$. Es decir, o bien $f = id_E$ o bien $f = -id_E$.

Por otro lado, consideremos que $f \in O_2^+(\mathbb{R}) / \{\pm id_E\}$ y $x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 \in L$, por lo que

$$f(x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2) = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2.$$

Matricialmente tenemos que

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Obtenemos el sistema

$$\begin{cases} (a-1)x - by = 0 \\ bx + (a-1)y = 0 \end{cases}.$$

Tenemos que $\begin{vmatrix} a-1 & -b \\ b & a-1 \end{vmatrix} \neq 0$, salvo si $a = 1$ y $b = 0$, en cuyo caso $f = id_E$, que va contra nuestra hipótesis. Por tanto, debe ser que $x = y = 0$. $\square$

Teorema 6.11. Sea $\vec{n} \in E$ tal que $\|\vec{n}\| = 1$. Entonces $a = \langle \vec{n}, f(\vec{n}) \rangle$ y $b = \det_{\{\vec{u}_i\}} (\vec{n}, f(\vec{n}))$.

Demostración. Sea $\vec{n} = \alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2$ con $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Tenemos que

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha - b\beta \\ b\alpha + a\beta \end{pmatrix}.$$

Así,

$$f(\vec{n}) = (a\alpha - b\beta)\, \vec{u}_1 + (b\alpha + a\beta)\, \vec{u}_2.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \langle \vec{n}, f(\vec{n}) \rangle =& \langle \alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2, (a\alpha - b\beta)\, \vec{u}_1 + (b\alpha + a\beta)\, \vec{u}_2 \rangle \\ =& a\alpha^2 - b\alpha\beta + b\alpha\beta + a\beta^2 = a\left(\alpha^2 + \beta^2\right) = a. \end{aligned}$$

Similarmente

$$\det_{\{\vec{u}_i\}} (\vec{n}, f(\vec{n})) = \begin{vmatrix} \alpha & a\alpha - b\beta \\ \beta & b\alpha + a\beta \end{vmatrix} = b\alpha^2 + a\alpha\beta - a\beta + b\beta^2 = b\left(\alpha^2 + \beta^2\right) = b.$$

□

Observación. Sea $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ otra base ortonormal. Tenemos que

$$\det_{\{\vec{v}_i\}} (\vec{x}, \vec{y}) = \underbrace{\det_{\{\vec{v}_i\}} (\vec{u}_1, \vec{u}_2)}_{\pm 1} \det_{\{\vec{u}_i\}} (\vec{x}, \vec{y}).$$

Definición 6.6. Llamaremos **ángulo de rotación vectorial** de f al único $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\cos\theta = a$ y $\sin\theta = b$.

Teorema 6.12. Sea $\vec{u}, \vec{v} \in E$ tales que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \neq 0$. Entonces, $\exists! f \in O_2^+(\mathbb{R})$ tal que $f(\vec{u}) = \vec{v}$.

Demostración. **Unicidad.** Si $\exists f \in O_2^+(\mathbb{R})$ tal que $f(\vec{u}) = \vec{v}$, tenemos que

$$\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{u}_i\}}(f) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Por el teorema anterior, tenemos que estos valores son únicos.

Existencia. Sea $\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{u}_i\}}(f) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, tal que

$$a = \left\langle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\rangle, \quad b = \det_{\{\vec{u}_i\}} \left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{f(\vec{u})}{\|\vec{v}\|} \right).$$

Donde

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2, \quad \|\vec{u}\|^2 = \alpha^2 + \beta^2 \\ \vec{v} &= \gamma\vec{u}_1 + \delta\vec{u}_2, \quad \|\vec{v}\|^2 = \gamma^2 + \delta^2.\end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 =& \frac{\left(\langle \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2, \gamma\vec{u}_1 + \delta\vec{u}_2 \rangle\right)^2 + \left(\begin{vmatrix}\alpha & \gamma \\ \beta & \delta\end{vmatrix}\right)^2}{\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2} \\ =& \frac{(\alpha\gamma + \beta\delta)^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)} \\ =& \frac{\alpha^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2 + 2\alpha\gamma\beta\delta + \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma\delta}{(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)} \\ =& 1.\end{aligned}$$

Ahora vamos a ver que $f(\vec{u}) = \vec{v}$. Tenemos que

$$b = \det_{\{\vec{u}_i\}}\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right) = \det_{\{\vec{u}_i\}}\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{f(\vec{u})}{\|\vec{u}\|}\right).$$

Por tanto,

$$\det_{\{\vec{u}_i\}}(\vec{u}, \vec{v}) = \det_{\{\vec{u}_i\}}(\vec{u}, f(\vec{u})).$$

$$\therefore \det_{\{\vec{u}_i\}}(\vec{u}, \vec{v} - f(\vec{u})) = 0.$$

Por tanto, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} - f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}a =& \left\langle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\rangle = \left\langle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{f(\vec{u})}{\|\vec{u}\|} \right\rangle \\ \Rightarrow& \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, f(\vec{u}) \rangle \\ \Rightarrow& \langle \vec{u}, \vec{v} - f(\vec{u}) \rangle = \langle \vec{u}, \lambda\vec{u} \rangle = \lambda\|\vec{u}\|^2 = 0 \\ \Rightarrow& \lambda = 0.\end{aligned}$$

Por tanto, $\vec{v} = f(\vec{u})$.

□

Estudio de $O_2^-(\mathbb{R})$

Sea $f \in O_2^-(\mathbb{R})$, entonces $\det(f) = -1$. Se tiene que la representación matricial de f será

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Teorema 6.13. Sea $f \in O_2(E)$, entonces son equivalentes.

(a) $f \in O_2^-(E)$.

(b) f es involutivo pero no es $\pm id_E$.

(c) f es la simetría vectorial ortogonal respecto de una recta vectorial de E.

(d) $L = \{\vec{u} \in E \ : \ f(\vec{u}) = \vec{u}\}$ es una recta vectorial.

Demostración. **(a) $\Rightarrow$ (b)** Si $f \in O_2^-(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Está claro que $f \notin \{\pm id_E\}$, puesto que estas pertenecen a $O_2^+(\mathbb{R})$.

(b) $\Rightarrow$ (c) f es la simetría vectorial ortogonal respecto de un subespacio de E distinto de E y $\left\{\vec{0}\right\}$. En efecto, sabemos que f no puede ser la simetría vectorial ortogonal respecto de E porque entonces $f = id_E$, que es una contradicción. Similarmente, la base de la simetría no puede ser $\left\{\vec{0}\right\}$, puesto que entonces $f = -id_E$, que también es una contradicción.

(c) $\Rightarrow$ (d) Si f es la simetría ortogonal respecto de una recta de E, esta recta es $\{\vec{u} \in E \ : \ f(\vec{u}) = \vec{u}\}$.

(d) $\Rightarrow$ (a) Si $L = \{\vec{u} \in E \ : \ f(\vec{u}) = \vec{u}\}$ es una recta, entonces $f \notin O_2^+(\mathbb{R})$, como se ha visto en teoremas anteriores. En efecto supongamos que f es la transformación ortogonal que tiene como únicos elementos invariantes los elementos de la recta L. Sea la matriz de f:

$$\begin{pmatrix} a & -\lambda b \\ b & \lambda a \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si $\vec{x} \in L / \left\{\vec{0}\right\}$, con $\vec{x} = x^1\vec{u}_1 + x^2\vec{u}_2$, tenemos que

$$\begin{pmatrix} a & -\lambda b \\ b & \lambda a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

De aquí obtenemos el sistema

$$\begin{cases} (a-1)\,x^1 - \lambda b x^2 = 0 \\ b x^1 + (\lambda a - 1)\,x^2 = 0 \end{cases}.$$

Supongamos que $\lambda = 1$, se tiene entonces que el sistema no tiene otra solución salvo la trivial, salvo cuando $b = 0$, es decir, $f = id_E$, que va contra nuestra hipótesis. Por tanto, se tiene que $\lambda = -1$ y, por tanto, $f \in O_2^-(\mathbb{R})$.

□

Lema 6.2. Sea $f \in O_2^+(\mathbb{R})$ y $\sigma \in O_2^-(\mathbb{R})$, entonces $f \circ \sigma, \sigma \circ f \in O_2^-(\mathbb{R})$.

Demostración. Tenemos que $\det(f) = 1$ y $\det(\sigma) = -1$, por lo que

$$\det(f \circ \sigma) = \det(\sigma \circ f) = \det(f) \cdot \det(\sigma) = -1.$$

Por tanto, $f \circ \sigma, \sigma \circ f \in O_2^-(\mathbb{R})$. □

Corolario 6.1. Si $f \in O_2^+(\mathbb{R})$ entonces f es composición de 2 simetrías vectoriales ortogonales respecto de rectas (hiperplanos) vectoriales, pudiendo elegir uno de ellos arbitrariamente.

Demostración. Sea $L \in \mathcal{L}(E)$ tal que $\dim(L) = 1$ y sea σ la simetría vectorial ortogonal respecto de L. Tenemos que

$$f = f \circ id_E = f \circ \sigma \circ \sigma = \underbrace{(f \circ \sigma)}_{\in O_2^-(\mathbb{R})} \circ \underbrace{\sigma}_{\in O_2^-(\mathbb{R})}.$$

Similarmente, tenemos que $f = id_E \circ f = \sigma \circ (\sigma \circ f)$. □

Observación. Así, el teorema 6.8 está demostrado para $n = 2$.

Conclusión

Observación. Sea $f \in O_2(\mathbb{R})$ y $L = \{\vec{u} \in E \ : \ f(\vec{u}) = \vec{u}\} \in \mathcal{L}(E)$.

(a) Si $\dim(L) = 2$, entonces $f = id_E \in O_2^+(\mathbb{R})$ y $f \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tenemos que f es composición de cero simetrías vectoriales ortogonales respecto de de rectas.

(b) Si $\dim(L) = 1$, entonces $f \in O_2^-(\mathbb{R})$ y f es la simetría vectorial ortogonal de base la recta L.

(c) Si $\dim(L) = 0$, entonces $f \in O_2^+(\mathbb{R}) / \{-id_E\}$ es una composición de dos simetrías ortogonales respecto de rectas (hiperplanos) vectoriales [1] .

6.3.4. Transformaciones ortogonales de $O_3(\mathbb{R})$

Sea $f \in O_3(\mathbb{R})$ y sea $L = \{\vec{u} \in E \ : \ f(\vec{u}) = \vec{u}\} \in \mathcal{L}(E)$.

Caso 1. Si $\dim L = 3$, entonces $L = E$, por lo que $f = id_E \in O_3^+(\mathbb{R})$.

Caso 2. Si $\dim L = 2$:

- $L^{\perp}_{\langle,\rangle}$ es una recta vectorial.
- $\forall \vec{x} \in L$, $f(\vec{x}) = \vec{x}$, por lo que $f(\vec{x}) \in L$ y $L = f(L)$.
- $f|_L \in O(L)$ y $f|_{L^{\perp}_{\langle,\rangle}} \in O\left(L^{\perp}_{\langle,\rangle}\right) = \left\{id_{L^{\perp}_{\langle,\rangle}}, -id_{L^{\perp}_{\langle,\rangle}}\right\}$.

[1] Es una rotación vectorial. Puede darse también que $f = -id_E$.

Sin embargo, $f|_{L^{\perp}_{\langle,\rangle}} \neq id_{L^{\perp}_{\langle,\rangle}}$ pues tendríamos que $f = id_E$, por lo que debe ser que $f|_{L^{\perp}_{\langle,\rangle}} = -id_{L^{\perp}_{\langle,\rangle}}$. En efecto, $\forall \vec{x} \in E$, $\exists! \vec{x}_1 \in L, \vec{x}_2 \in L^{\perp}_{\langle,\rangle}$ tales que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$. Así

$$f(\vec{x}) = s(\vec{x}_1) + s(\vec{x}_2) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2.$$

- Por tanto, f es la simetría vectorial ortogonal respecto del hiperplano L.
- Recíprocamente, si f es la simetría vectorial ortogonal de base un plano vectorial L', entonces $f \in O_3(E)$ y tiene por base $L' = \{\vec{x} \in E \ : \ f(\vec{x}) = \vec{x}\}$.

Teorema 6.14. L es un plano si y solo si f es la simetría ortogonal de base L [a]. Además $f \in O_3^-(\mathbb{R})$.

[a]Otra forma de enunciar este teorema es: *Una transformación ortogonal de $O_3(\mathbb{R})$ es una simetría ortogonal respecto de un plano vectorial si y solo si el subespacio de los vectores invariantes por ella es de dimensión 2.*

Caso 3. Si $\dim L = 1$, se tiene que $\forall \vec{x} \in L$, $f(\vec{x}) = \vec{x}$, po lo que $f(L) = L$ y $f|_L \in O(L)$ y $f|_{L^{\perp}_{\langle,\rangle}} \in O\left(L^{\perp}_{\langle,\rangle}\right)$. Tenemos también que

$$\left\{\vec{x} \in L^{\perp}_{\langle,\rangle} \ : \ f(\vec{x}) = \vec{x}\right\} = L^{\perp}_{\langle,\rangle} \cap L = \left\{\vec{0}\right\}.$$

Así, $f|_{L^{\perp}_{\langle,\rangle}} \in O_2^+\left(L^{\perp}_{\langle,\rangle}\right) / \left\{id_{L^{\perp}_{\langle,\rangle}}\right\}$. Por tanto, $f|_{L^{\perp}_{\langle,\rangle}}$ es una rotación vectorial.

Definición 6.7 (Rotación vectorial)**.** Diremos que $f \in O_3(\mathbb{R})$ es una **rotación vectorial** si $f = id_E$ o si $\dim\{\vec{x} \in E \ : \ f(\vec{x}) = \vec{x}\} = 1$.

Teorema 6.15. f es composición de dos simetrías vectoriales ortogonales respecto de hiperplanos vectoriales que contienen a L pudiendo elegir arbitrariamente uno de los dos.

Demostración. Sea P un plano tal que $L \subset P$ y sea s la simetría vectorial ortogonal de base P. Se tiene que $\forall \vec{x} \in L$, $s(\vec{x}) = \vec{x}$ y $s(L) = L$ y $f|_{L^{\perp}_{\langle,\rangle}} \in O\left(L^{\perp}_{\langle,\rangle}\right)$. Además

$$\left\{\vec{x} \in L^{\perp}_{\langle,\rangle} \ : \ f|_{L^{\perp}_{\langle,\rangle}}(\vec{x}) = \vec{x}\right\} = L^{\perp}_{\langle,\rangle} \cap L = \left\{\vec{0}\right\}.$$

Existen R_1, R_2 rectas de $L^{\perp}_{\langle,\rangle}$ tales que si σ_1, σ_2 son las simetrías vectoriales ortogonales respecto de R_1 y R_2, respectivamente, entonces $f|_{L^{\perp}_{\langle,\rangle}} = \sigma_2 \circ \sigma_1$ y una de las rectas base se puede elegir arbitrariamente.
Así, cogemos $R_1 = P \cap L^{\perp}_{\langle,\rangle}$ y R_2 la recta de $L^{\perp}_{\langle,\rangle}$ formada por los vectores invariantes de σ_2.
Así, cogemos $P' = L \oplus R_2$ [2].

[2]Se trata de una suma directa porque son ortogonales.

Sean s_1 y s_2 las simetrías ortogonales respecto de los planos vectoriales P y P', respectivamente. Entonces, $f = s_2 \circ s_1$. En efecto,

$$\forall \vec{x} \in L,\ f(\vec{x}) = \vec{x},\ s_1(\vec{x}) = \vec{x},\ s_2(\vec{x}) = \vec{x}.$$

Así, se tiene que $f(\vec{x}) = (s_2 \circ s_1)(\vec{x})$, $\forall \vec{x} \in L$. Además, $\forall \vec{x} \in L^{\perp}_{\langle,\rangle}$,

$$f|_{L^{\perp}_{\langle,\rangle}}(\vec{x}) = \sigma_2 \circ \sigma_1(\vec{x}) = s_2 \circ \sigma_1(\vec{x}) = \sigma_2 \circ s_1(\vec{x}) = s_2 \circ s_1(\vec{x}).$$

□

Observación. Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base ortonormal tal que $\vec{u}_1 \in L$. Tenemos que $\forall \vec{x} \in L$, $f(\vec{x}) = \vec{x}$, por lo que $f(L) = L$ y $f|_{L^{\perp}_{\langle,\rangle}} \in O\left(L^{\perp}_{\langle,\rangle}\right)$. Tenemos que la matriz de f en esta base será

$$\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{u}_i\}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix},\ a^2 + b^2 = 1.$$

Caso 4. Consideremos que $\dim L = 0$.

Teorema 6.16. *f es composición de tres simetrías vectoriales ortogonales respecto de hiperplanos vectoriales y, por tanto, $f \in O_3^-(\mathbb{R})$.*

Demostración. Sea $\vec{x} \in E/\left\{\vec{0}\right\}$. Por ser f ortogonal, tenemos que $\|\vec{x}\| = \|f(\vec{x})\|$. Existe una única σ simetría vectorial ortogonal respecto de un plano $P = \{\vec{x} - f(\vec{x})\}^{\perp}_{\langle,\rangle}$ tal que

$$\sigma(\vec{x}) = f(\vec{x}) \iff \sigma(f(\vec{x})) = \vec{x}.$$

Así, tenemos que $\sigma \circ f \in O_3(\mathbb{R})$ con $\dim\{\vec{u} \in E\ :\ \sigma \circ f(\vec{u}) = \vec{u}\} \geq 1$. Comencemos a descartar casos:

- No puede ser que $\dim\{\vec{u} \in E\ :\ \sigma \circ f(\vec{u}) = \vec{u}\} = 2$, pues entonces $\sigma \circ f = s$, donde s es una simetría vectorial ortogonal respecto de un plano vectorial, pues tendríamos que $f = \sigma \circ (\sigma \circ f) = \sigma \circ s$, por lo que $f \in O_3^+(\mathbb{R})$.
- No puede ser que $\dim\{\vec{u} \in E\ :\ \sigma \circ f(\vec{u}) = \vec{u}\} = 3$, porque entonces tendríamos que $\sigma \circ f = id_E$, es decir, $f = s$ y f sería una simetría vectorial ortogonal respecto de un plano (contradice nuestra hipótsis de que $\dim L = 0$).

Así, tenemos que $f \circ \sigma$ es una rotación vectorial distinta de la identidad. Por tanto, existen P_1 y P_2 planos tales que si s_1 y s_2 son las simetrías vectoriales ortogonales respecto de P_1 y P_2, entonces

$$\sigma \circ f = s_2 \circ s_1 \Rightarrow f = s \circ s_2 \circ s_1.$$

□

Observación. Si $f \in O_3^-(\mathbb{R})$, tenemos que $f^2 \in O_3^+(\mathbb{R})$. Si $f^2 = id_E$, tendríamos que $f = -id_E$.

Sea $f \in O_3(\mathbb{R})$ tal que $L = \{\vec{u} \in E\ :\ f(\vec{u}) = \vec{u}\} = \left\{\vec{0}\right\}$ y $f \neq -id_E$.

Teorema 6.17. f se descompone de manera única como una rotación de eje una recta vectorial R y la simetría vectorial ortogonal respecto del plano vectorial $R^{\perp}_{\langle,\rangle}$. Además, la simetría y la rotación conmutan.

Demostración. **Conmutación.** Sea R una recta vectorial y $\vec{u}_1 \in R$ tal que $\|\vec{u}_1\| = 1$. Tenemos que $R = L(\{\vec{u}_1\})$ y sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base ortonormal. Tenemos que $R^{\perp}_{\langle,\rangle} = L(\{\vec{u}_2, \vec{u}_3\})$. Sea ρ una rotación de eje R y s la simetría vectorial ortogonal respecto de $R^{\perp}_{\langle,\rangle}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \rho \circ s(\vec{u}_1) &= \rho(-\vec{u}_1) = -\vec{u}_1 \\ \rho \circ s(\vec{u}_2) &= \rho(\vec{u}_2) \\ \rho \circ s(\vec{u}_3) &= \rho(\vec{u}_3). \end{aligned}$$

Por otro lado, como $\rho(\vec{u}_2), \rho(\vec{u}_3) \in R^{\perp}_{\langle,\rangle}$,

$$\begin{aligned} s \circ \rho(\vec{u}_1) &= s(\vec{u}_1) = -\vec{u}_1 \\ s \circ \rho(\vec{u}_2) &= s(\vec{u}_2) = \rho(\vec{u}_2) \\ s \circ \rho(\vec{u}_3) &= s(\vec{u}_3) = \rho(\vec{u}_3). \end{aligned}$$

Así, hemos demostrado que la simetría y la rotación conmutan.

Unicidad. Como $\rho(\vec{x}) = \vec{x}$, $\forall \vec{x} \in R$, tenemos que $f\left(R^{\perp}_{\langle,\rangle}\right) = R^{\perp}_{\langle,\rangle}$.

Ahora demostramos la unicidad. Supongamos que $f = \rho \circ s = s \circ \rho$. Tenemos que $f^2 \in O_3^+(\mathbb{R})$ y $f^2 \neq id_E$. Sea F el eje de la rotación ρ y sea $\vec{x} \in F$. Tenemos que

$$f(\vec{x}) = s \circ \rho(\vec{x}) = s(\rho(\vec{x})) = s(\vec{x}) = -\vec{x}.$$

Así, tenemos que $f^2(\vec{x}) = f(-\vec{x}) = \vec{x}$, por lo que el vector $\vec{x}$ pertenece al eje de la rotación f^2. Así, queda demostrada la unicidad de $F^{\perp}_{\langle,\rangle}$ y por tanto la de σ. Como $\rho = \sigma \circ f$, también queda demostrada la unicidad de ρ.

Existencia. Ahora demostramos la existencia. Sea $\vec{x}$ perteneciente al eje de la rotación f^2. Tenemos que $\vec{0} \neq \vec{x} \neq f(\vec{x})$ y $\|\vec{x}\| = \|f(\vec{x})\|$. Existe una única simetría vectorial ortogonal respecto al plano vectorial $\{\vec{x} - f(\vec{x})\}^{\perp}_{\langle,\rangle}$ tal que $s(\vec{x}) = f(\vec{x})$ ($\iff$ $s(f(\vec{x})) = \vec{x}$). Tenemos que $f \circ s \in O_3^+(\mathbb{R})$, es decir, $f \circ s = \rho$ es una rotación vectorial. Además,

$$\begin{aligned} f \circ s(\vec{x}) &= f^2(\vec{x}) = \vec{x} \\ f \circ s(f(\vec{x})) &= f(\vec{x}). \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que $\vec{x}$ y $f(\vec{x})$ pertenecen al eje de la rotación, por lo que $\vec{x} - f(\vec{x})$ pertenece también a este. Por tanto, s es la simetría vectorial ortogonal respecto del plano $\{\vec{x} - f(\vec{x})\}^{\perp}_{\langle,\rangle}$ y ρ es la rotación vectorial de eje $L(\{\vec{x} - f(\vec{x})\})$, y cumplen que $f = \rho \circ s$.

□

Conclusión

Sea $f \in O_3(\mathbb{R})$ y $L = \{\vec{u} \in E \ : \ f(\vec{u}) = \vec{u}\}$.

(1) Si $\dim(L) = 3$, $f = id_E \in O_3^+(\mathbb{R})$ y f es composición de cero simetrías vectoriales ortogonales respecto de planos vectoriales.

(2) Si $\dim(L) = 2$, $f \in O_3^-(\mathbb{R})$ y f es la simetría vectorial ortogonal respecto del plano vectorial L. Si $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es base ortonormal tal que $\{\vec{u}_2, \vec{u}_3\} \subset L$,

$$f \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Si $\dim(L) = 1$, $f \in O_3^+(\mathbb{R})$ es composición de dos simetrías ortogonales respecto de planos vectoriales que contienen a L. Si $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es una base ortonormal tal que $\vec{u}_1 \in L$,

$$f \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}, \ a^2 + b^2 = 1.$$

(4) Si $\dim(L) = 0$, $f \in O_3^-(\mathbb{R})$. Tenemos que $f = -id_E \circ f$ se descompone de manera única como producto de una rotación ρ y la simetría vectorial ortogonal respecto del plano ortogonal al eje de la rotación.

6.4. Producto vectorial

Sea E un espacio vectorial euclídeo de dimensión 3, que tiene un producto escalar. Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base ortonormal de E. Consideremos

$$\vec{x} = x^1\vec{u}_1 + x^2\vec{u}_2 + x^3\vec{u}_3, \quad \vec{y} = y^1\vec{u}_1 + y^2\vec{u}_2 + y^3\vec{u}_3, \quad \vec{z} = z^1\vec{u}_1 + z^2\vec{u}_2 + z^3\vec{u}_3.$$

Tenemos que

$$\det_{\{\vec{u}_i\}} = \begin{vmatrix} x^1 & y^1 & z^1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}.$$

Tenemos que podemos definir la siguiente aplicación:

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \ \det_{\{\vec{u}_i\}}(\vec{u}, \vec{v}, \cdot) : E \to \mathbb{R}$$
$$\vec{x} \to \det_{\{\vec{u}_i\}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}).$$

Tenemos que $\det_{\{\vec{u}_i\}} \in E^*$. Además, $\exists! \vec{u} \wedge \vec{v}$ tal que $\langle , \rangle_{\vec{u}\wedge\vec{v}} = \det_{\{\vec{u}_i\}}(\vec{u}, \vec{v}, \cdot)$. Tenemos que $\forall \vec{x} \in E$,

$$\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{x} \rangle = \det_{\{\vec{u}_i\}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}).$$

Al vector $\vec{u} \wedge \vec{v}$ lo llamamos producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Proposición 6.6. **(1)** $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

(2) $\forall a \in \mathbb{R}$, $(a\vec{u}) \wedge \vec{v} = a\vec{u} \wedge \vec{v}$.

(3) $\vec{u} \wedge (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{u} \wedge \vec{v}_1 + \vec{u} \wedge \vec{v}_2$.

(4) $\vec{u} \wedge \vec{v} \in \{\vec{u}\}^{\perp}_{\langle,\rangle} \cap \{\vec{v}\}^{\perp}_{\langle,\rangle}$.

(5) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ son linealmente independientes si y solo si $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$.

(6) Si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ son linealmente independientes, entonces $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}\}$ son base de E que define la misma orientación que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

$$0 < \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \det_{\{\vec{u}_i\}} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) \, .$$

(7) $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \vec{u}_3 = -\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_1$. $\forall \vec{u} = a^1\vec{u}_1 + a^2\vec{u}_2 + a^3\vec{u}_3$,

$$\begin{aligned} a^1 &= \langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle \, , \quad \langle \vec{u}_1 \wedge \vec{v}_2, \vec{u}_1 \rangle = 0 \\ a^2 &= \langle \vec{u}_2, \vec{u}_2 \rangle \, , \quad \langle \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2, \vec{u}_2 \rangle = 0 \\ a^3 &= \langle \vec{u}_3, \vec{u}_3 \rangle \, , \quad \langle \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle = \det_{\{\vec{u}_i\}} (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = 1. \end{aligned}$$

Demostración. **(5)** Si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ son linealmente independientes, existe $\vec{z} \in E$ tal que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}\}$ es base de E.

$$\det_{\{\vec{u}_i\}} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}) = \langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{z} \rangle \neq 0 \Rightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}.$$

Recíprocamente, si $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$, tenemos que existe $\vec{z} \in E$ tal que

$$\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{z} \rangle = \det_{\{\vec{u}_i\}} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}) \neq 0.$$

Por tanto, $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ son linealmente independientes.

□

Observación. De **(1)** se deduce que $\det_{\{\vec{u}_i\}} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}) = -\det_{\{\vec{u}_i\}} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{x})$, $\forall \vec{x} \in E$, por lo que $\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{x} \rangle = -\langle \vec{v} \wedge \vec{u}, \vec{x} \rangle$.

Observación. Continuamos después de la **(7)**:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 &= \vec{u}_3 = -\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3 &= \vec{u}_1 = -\vec{u}_3 \wedge \vec{u}_2 \\ \vec{u}_3 \wedge \vec{u}_1 &= \vec{u}_2 = -\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_3. \end{aligned}$$

Observación. Sean $\vec{x} = x^1\vec{u}_1 + x^2\vec{u}_2 + x^3\vec{u}_3$ e $\vec{y} = y^1\vec{u}_1 + y^2\vec{u}_2 + y^3\vec{u}_3$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\vec{x}\wedge\vec{y} =& x^1y^1\left(\vec{u}_1\wedge\vec{u}_1\right) + x^1y^2\left(\vec{u}_1\wedge\vec{u}_2\right) + x^1y^3\left(\vec{u}_1\wedge\vec{u}_3\right) + x^2y^1\left(\vec{u}_2\wedge\vec{u}_1\right) + x^3y^2\left(\vec{u}_3\wedge\vec{u}_2\right) + x^3y^3\left(\vec{u}_3\wedge\vec{u}_3\right)\\ =& x^1y^2\vec{u}_3 - x^1y^3\vec{u}_2 - x^2y^1\vec{u}_3 + x^3y^1\vec{u}_1 + x^3y^1\vec{u}_2 - x^3y^2\vec{u}_1\\ =& \left(x^2y^3 - x^3y^2\right)\vec{u}_1 + \left(x^3y^1 - x^1y^3\right)\vec{u}_2 + \left(x^1y^2 - x^2y^1\right)\vec{u}_3\\ =& \begin{vmatrix}\vec{u}_1 & x^1 & y^1\\ \vec{u}_2 & x^2 & y^2\\ \vec{u}_3 & x^3 & y^3\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Proposición 6.7. Si $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in E$, $(\vec{x}\wedge\vec{y})\wedge\vec{z} = \langle\vec{x},\vec{z}\rangle\,\vec{y} - \langle\vec{y},\vec{z}\rangle\,\vec{x}$.

Demostración. Tenemos que

$$\langle\vec{x},\vec{z}\rangle = x^1z^1 + x^2z^2 + x^3z^3.$$
$$\langle\vec{y},\vec{z}\rangle = y^1z^1 + y^2z^2 + y^3z^3.$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned}(\vec{x}\wedge\vec{y})\wedge\vec{z} =& \left(\left(x^1z^1 + x^2z^2 + x^3z^3\right)y^1 - \left(y^1z^1 + y^2z^2 + y^3z^3\right)x^1\right)\vec{u}_1\\ &+ completarencasa.\end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, la primera coordenada de $(\vec{x}\wedge\vec{y})\wedge\vec{z}$ será:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & x^2y^3 - x^3y^2 & z^1\\ \vec{u}_2 & x^3y^1 - x^1y^3 & z^2\\ \vec{u}_3 & x^1y^2 - x^2y^1 & z^3\end{vmatrix} =& \begin{vmatrix}x^3y^1 - x^1y^3 & z^2\\ x^1y^2 - x^2y^1 & z^3\end{vmatrix}\vec{u}_1 - \begin{vmatrix}x^2y^3 - x^3y^2 & z^1\\ x^1y^2 - x^2y^1 & z^3\end{vmatrix}\vec{u}_2 + \begin{vmatrix}x^2y^3 - x^3y^2 & z^1\\ x^2y^1 - x^1y^3 & z^2\end{vmatrix}\\ =& \left(x^3y^1z^3 - x^1y^3z^3 - x^1y^2z^2 + x^2y^1z^2\right)\vec{u}_1.\end{aligned}$$

□

Teorema 6.18. Si $\vec{x},\vec{y},\vec{z},\vec{w}\in E$, entonces $\langle\vec{x}\wedge\vec{y},\vec{z}\wedge\vec{w}\rangle = \langle\vec{x},\vec{z}\rangle\langle\vec{y},\vec{w}\rangle - \langle\vec{x},\vec{w}\rangle\langle\vec{y},\vec{z}\rangle$.

Demostración.

$$\begin{aligned}\langle\vec{x}\wedge\vec{y},\vec{z}\wedge\vec{w}\rangle =& \det_{\{\vec{u}_i\}}\left(\vec{z},\vec{w},\vec{x}\wedge\vec{y}\right) = \det_{\{\vec{u}_i\}}\left(\vec{x}\wedge\vec{y},\vec{z},\vec{w}\right) = \langle(\vec{x}\wedge\vec{y})\wedge\vec{z},\vec{w}\rangle = \langle\langle\vec{x},\vec{z}\rangle\,\vec{y} - \langle\vec{y},\vec{z}\rangle\,\vec{x},\vec{w}\rangle\\ =& \langle\vec{x},\vec{z}\rangle\langle\vec{w},\vec{y}\rangle - \langle\vec{y},\vec{z}\rangle\langle\vec{x},\vec{w}\rangle.\end{aligned}$$

□

Corolario 6.2. Si $\vec{x},\vec{y}\in E$, $\|\vec{x}\wedge\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 - \langle\vec{x},\vec{y}\rangle^2$.

Demostración.

$$\frac{\|\vec{x}\wedge\vec{y}\|^2}{\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2} = 1 - \frac{\langle\vec{x},\vec{y}\rangle^2}{\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2}.$$

□

Definición 6.8 (Ángulo entre dos vectores)**.** Si $\vec{x}, \vec{y} \in E / \left\{\vec{0}\right\}$, tenemos que

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2, \quad \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2}{\|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2} \leq 1.$$

Llamaremos **ángulo** entre $\vec{x}$ e $\vec{y}$ el único $\theta \in [0, \pi]$, tal que

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}, \quad \cos^2\theta = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2}{\|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2}.$$

Capítulo 7

Espacios afines

Definición 7.1 (Espacio afín)**.** Un conjunto $\mathcal{A} \neq \emptyset$ tiene una estructura de **espacio afín** asociado a V si se tiene definida una aplicación

$$\begin{aligned} + : \mathcal{A} \times V &\to \mathcal{A} \\ (A, \vec{u}) &\to A + \vec{u} \end{aligned}$$

que cumple las siguientes propiedades:

(1) $\forall A \in \mathcal{A}$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$, $(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v})$.

(2) $\forall A \in \mathcal{A}$, $A + \vec{0} = A$.

(3) $\forall A, B \in \mathcal{A}$, $\exists! \overrightarrow{AB} \in V$ tal que $A + \overrightarrow{AB} = B$.

Observación. Si $\mathcal{A}$ es un espacio afín asociado a V, $\forall \vec{u} \in V$, la traslación de vector $\vec{u}$ es la aplicación

$$\begin{aligned} \tau_{\vec{u}} : \mathcal{A} &\to \mathcal{A} \\ A &\to A + \vec{u}. \end{aligned}$$

Proposición 7.1. **(a)** $\tau_{\vec{0}} = id_{\mathcal{A}}$.

(b) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$, $\tau_{\vec{u}} \circ \tau_{\vec{v}} = \tau_{\vec{u}+\vec{v}}$.

(c) Las traslaciones son biyectivas.

(d) **Identidad de Chasles:** $\forall A, B, C \in \mathcal{A}$,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}.$$

(e) $\forall A \in \mathcal{A}$, $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$.

(f) $\forall A, B \in \mathcal{A}$, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

(g) $\forall A, B \in \mathcal{A}$, $\forall \vec{u} \in V$, $\overrightarrow{A(B+\vec{u})} = \overrightarrow{AB} + \vec{u}$. Similarmente, $\overrightarrow{A\left(\overrightarrow{AB}+\vec{u}\right)} = B + \vec{u}$.

(h) $\overrightarrow{(A+\vec{u})(B+\vec{v})} = \overrightarrow{AB} + (\vec{v} - \vec{u})$.

(i) $\forall A, B, C, D \in \mathcal{A}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Demostración. **(a)** Trivial.

(b) Se deduce directamente de la condición **(1)** de la definición anterior.

(c) Se deduce fácilmente de la condición **(3)** de la definición anterior.

(d)

$$\left(A + \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{CB} = C + \overrightarrow{CB} = B.$$

(e) Basta ver que $A + \vec{0} = A$.

(f)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

□

Observación. De **(b)** obtenemos que $\tau_{\vec{u}} \circ \tau_{-\vec{u}} = \tau_{\vec{0}} = id_{\mathcal{A}}$.

Sea $O \in \mathcal{A}$, definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_O : V &\to \mathcal{A} \\ \vec{u} &\to O + \vec{u}. \end{aligned}$$

Proposición 7.2. φ_O es biyectiva.

Observación. Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \psi_O : \mathcal{A} &\to V \\ A &\to \overrightarrow{OA}. \end{aligned}$$

Tenemos que $\varphi_O \circ \psi_O = id_{\mathcal{A}}$ y $\psi_O \circ \varphi_O = id_V$.

Demostración. $\forall A \in \mathcal{A}$, se tiene que

$$\varphi_O \circ \psi_O (A) = \varphi_O \left(\overrightarrow{OA}\right) = O + \overrightarrow{OA} = A = id_{\mathcal{A}} (A).$$

Similarmente, $\forall \vec{u} \in V$,

$$\psi_O \circ \varphi_O (\vec{u}) = \psi_O (O + \vec{u}) = \overrightarrow{OO} + \vec{u} = \vec{u} = id_V (\vec{u}).$$

□

Consideremos el par $\{O, \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}\}$. Si $\vec{x} = x^1\vec{u}_1 + \cdots + x^n\vec{u}_n$, tenemos que la aplicación

$$\begin{aligned} f : V \to & \mathbb{K}^n \\ \vec{x} \to & \left(x^1, \dots, x^n\right) \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Observación. Tenemos que

$$\begin{aligned} f \circ \psi_O : \mathcal{A} \to & \mathbb{K}^n \\ A \to & \left(x^1, \dots, x^n\right), \end{aligned}$$

donde $\overrightarrow{OA} = x^1\vec{u}_1 + \cdots + x^n\vec{u}_n$.

Definición 7.2 (Sistema de coordenadas cartesianas)**.** El par $(O, \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\})$ siendo $O \in \mathcal{A}$ y $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ base de V, lo llamaremos **sistema de coordenadas cartesianas**.

Observación. Sean $(O, \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\})$ y $(O', \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\})$ dos sistemas de referencia cartesianos. Supongamos que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OO'} =& a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^n\vec{u}_n \\ \vec{v}_1 =& a_1^1\vec{u}_1 + \cdots + a_1^n\vec{u}_n \\ &\vdots \\ \vec{v}_n =& a_n^1\vec{u}_1 + \cdots + a_n^n\vec{u}_n. \end{aligned}$$

Si $X \in \mathcal{A}$, supongamos que

$$\overrightarrow{OX} = x^1\vec{u}_1 + \cdots + x^n\vec{u}_n, \quad \overrightarrow{O'X} = x'^1\vec{v}_1 + \cdots + x'^n\vec{v}_n.$$

Vamos a estudiar cómo cambiar de un sistema de referencia a otro.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O'X} =& x'^1\vec{v}_1 + \cdots x'^n\vec{v}_n \\ =& x'^1\left(a_1^1\vec{u}_1 + \cdots + a_1^n\vec{u}_n\right) + \cdots + x'^n\left(a_n^1\vec{u}_1 + a_n^n\vec{u}_n\right) \\ =& \left(x'^1a_1^1 + \cdots + x'^na_n^1\right)\vec{u}_1 + \cdots + \left(x'^1a_1^n + \cdots + x'^na_n^n\right)\vec{u}_n \\ =& \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OO'}. \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OX} =& x^1\vec{u}_n + \cdots + x^n\vec{u}_n \\ =& \left(a^1 + x'^1a_1^1 + \cdots + x'^na_n^1\right)\vec{u}_1 + \cdots + \left(a^n + x'^1a_1^n + \cdots + x'^na_n^n\right)\vec{u}_n. \end{aligned}$$

Así, matricialmente obtenemos que

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix}.$$

Otra forma de escribirlo es,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a^1 & a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^n & a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix}.$$

7.1. Subespacios afines

Definición 7.3 (Subespacios afines)**.** Un subconjunto $\mathcal{L}$ de $\mathcal{A}$ es un **subespacio afín** si $\mathcal{L} = \emptyset$ o $\exists L \in \mathcal{L}(V)$ tal que $\forall A \in \mathcal{L}$, $\forall \vec{u} \in L$, $A + \vec{u} \in \mathcal{L}$ es decir, si $(\mathcal{L}, +|_{\mathcal{L}\times L})$ es un espacio afín asociado a L.

Observación. Si $\mathcal{L} \neq \emptyset$ es un subespacio afín y $A \in \mathcal{L}$, es fácil ver que $B \in \mathcal{L} \iff \overrightarrow{AB} \in L$.

Definición 7.4 (Variedad lineal afín)**.** Se dice que $\mathcal{L} = A + L = \{A + \vec{u} \ : \ \vec{u} \in L\}$ con $L \in \mathcal{L}(V)$ es una **variedad lineal afín**.

Observación. La variedad lineal afín que pasa por A y tiene por dirección $L \in \mathcal{L}(V)$ es $A + L$.

$$\mathcal{L} = A + L = \{A + \vec{u} \ : \ \vec{u} \in L\}.$$

Observación. Las variedades lineales afines son subespacios afines. Por tanto, se tiene que $B \in A + L \iff \overrightarrow{AB} \in L$.

Proposición 7.3. *$B \in A + L \Rightarrow A + L = B + L$.*

Demostración. Si $B \in A + L$ se tiene que $\overrightarrow{AB} \in L$. Así,

$$C \in A + L \iff \overrightarrow{AC} \in L \iff \overrightarrow{BC} = \underbrace{\overrightarrow{BA}}_{\in L} + \underbrace{\overrightarrow{AC}}_{\in L} \iff C \in B + L.$$

$\square$

Observación. Si $\mathcal{L} = A+L$ es una variedad lineal afín y $P, Q \in A+L$, entonces $L = \left\{\overrightarrow{PQ} \ : \ P, Q \in \mathcal{L}\right\}$. En efecto, si $P, Q \in A + L$, podemos considerar $A + L = P + L$. Además, dado $\vec{u} \in L$, existe un único $Q \in \mathcal{L}$ tal que $P + \vec{u} = Q$, por lo que $Q \in \mathcal{L}$.

Definición 7.5 (Dimensión de una variedad afín)**.** Si $\mathcal{L} \neq \emptyset$ es una variedad lineal afín de dirección $L \in \mathcal{L}(V)$ diremos que $\dim(\mathcal{L}) = \dim(L)$.

Teorema 7.1. Sean $\mathcal{L}_1 = A + L_1$ y $\mathcal{L}_2 = B + L_2$. Entonces, $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \neq \emptyset \iff \overrightarrow{AB} \in L_1 + L_2$.

Demostración. **(i)** Si $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \neq \emptyset$, tenemos que $\exists C \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Así, $\overrightarrow{AC} \in L_1$ y $\overrightarrow{BC} \in L_2$. Así, tenemos que

$$\overrightarrow{AB} = \underbrace{\overrightarrow{AC}}_{\in L_1} + \underbrace{\overrightarrow{CB}}_{\in L_2}.$$

Así, $\overrightarrow{AB} \in L_1 + L_2$.

(ii) Si $\overrightarrow{AB} \in L_1 + L_2$, $\exists \vec{v}_1 \in L_1, \vec{v}_2 \in L_2$ tal que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Tenemos que $A + \vec{v}_1 \in \mathcal{L}_1$. Así,

$$\overrightarrow{(A + \vec{v}_1)\, B} = \overrightarrow{AB} - \vec{v}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2 \in L_2.$$

Por tanto, $A + \vec{v}_1 \in B + L_2 = \mathcal{L}_2$. Por tanto, $A + \vec{v}_1 \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$.

□

Proposición 7.4. Sean $\mathcal{L}_i = A + L_i$ para $i \in I$. Entonces, $\bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{L}_i$ es una variedad lineal afín que, si no es vacío, tiene por dirección $\bigcap\limits_{i \in I} L_i \in \mathcal{L}(V)$.

Demostración. Supongamos que $\bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{L}_i \neq \emptyset$ y sea $A \in \bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{L}_i$. Entonces $\forall i \in I$ se tiene que $\mathcal{L}_i = A + L_i$. Tenemos que

$$B \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{L}_i \iff B \in \mathcal{L}_i = A + L_i,\ \forall i \in I \iff \overrightarrow{AB} \in L_i,\ \forall i \in I \iff \overrightarrow{AB} \in \bigcap_{i \in I} L_i.$$

Así, hemos visto que $\bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{L}_i = A + \bigcap\limits_{i \in I} L_i$. □

Definición 7.6. Dos variedades lineales afines $\mathcal{L}_1 = A + L_1$ y $\mathcal{L}_2 = B + L_2$ son **complementarias** si lo son sus direcciones, es decir, si $L_1 \oplus L_2 = V$.

Ejemplo 7.1. Consideremos en $\mathbb{R}^4$ los planos ρ_1 y ρ_2. Tenemos que $\rho_1 = A + P_1$ y $\rho_2 = B + P_2$ donde $P_1 = L(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\})$ y $P_2 = L(\{\vec{u}_3, \vec{u}_4\})$, donde $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $\{\vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ son linealmente independientes.

- Si $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ son linealmente independientes, tenemos que $P_1 \oplus P_2 = \mathbb{R}^4$, por lo que ρ_1 y ρ_1 son complementarios. Tenemos que $\rho_1 \cap \rho_2 \neq \emptyset$, puesto que $P_1 + P_2 = \mathbb{R}^4$ y $\overrightarrow{AB} \in \mathbb{R}^4$. Así, ρ_1 y ρ_2 se cortan en un solo punto.
- Supongamos que $\dim(L(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\})) = 3$ (con $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ linealmente independientes) y que $\dim\left(L\left(\left\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \overrightarrow{AB}\right\}\right)\right) = 4$. Entonces, tenemos que $\rho_1 \cap \rho_2 = \emptyset$.

Observación. Si $A \in \mathcal{A}$ y $L \in \mathcal{L}(V)$, la variedad lineal afín que pasa por A y tiene por dirección L es $\mathcal{L} = A + L = \{A + \vec{u} \ :\ \vec{u} \in L\}$. Diremos que $\dim(\mathcal{L}) = \dim(L)$.

Definición 7.7. Dos variedades lineales afines $\mathcal{L}_1 = A + L_1$ y $\mathcal{L}_2 = B + L_2$ son **paralelas** si $L_1 \subset L_2$ o $L_2 \subset L_1$.

Proposición 7.5. Si $\mathcal{L}_1 = A + L_1$ y $\mathcal{L}_2 = A + L_2$ son paralelas, entonces $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset$ o una de ellas está contenida en la otra.

Demostración. Si $\exists C \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ supongamos sin pérdida de generalidad que $L_1 \subset L_2$, entonces tenemos que

$$\mathcal{L}_1 = C + L_1,\ \mathcal{L}_2 = C + L_2.$$

Así, tenemos que $\forall A \in \mathcal{L}_1$, $\exists \vec{u} \in L_1$ tal que $A = C + \vec{u} \in \mathcal{L}_1$. Dado que $L_1 \subset L_2$, tenemos que $C + \vec{u} \in C + L_2 = \mathcal{L}_2$. Por tanto, $A \in \mathcal{L}_2$. □

Definición 7.8 (Variedad lineal afín suma)**.** Sean $\mathcal{L}_1 = A + L_1$ y $\mathcal{L}_2 = B + L_2$. Llamaremos **variedad lineal afín suma** de $\mathcal{L}_1$ mas $\mathcal{L}_2$ a la variedad lineal $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ más pequeña que contiene a $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$.

Observación. Supongamos que $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = A + L' = B + L'$, entonces $\overrightarrow{AB} \in L'$. Si $\vec{u} \in L_1$ tenemos que $A + \vec{u} \in \mathcal{L}_1$ por lo que $\vec{u} \in L'$. Similarmente, si $\vec{v} \in L_2$, entonces $B + \vec{v} \in \mathcal{L}_2$ y $\vec{v} \in L'$. Así, $L\left(\left\{\overrightarrow{AB}\right\}\right) + L_1 + L_2 \subset L'$. Así, $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = A + \left(L_1 + L_2 + L\left(\left\{\overrightarrow{AB}\right\}\right)\right)$.

Teorema 7.2 (Fórmula de Grassman)**.** Sean $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ variedades lineales afines. Entonces

(a) Si $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \neq \emptyset$, $\dim(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) = \dim(\mathcal{L}_1) + \dim(\mathcal{L}_2) - \dim(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2)$.

(b) Si $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset$, $\dim(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) = \dim(\mathcal{L}_1) + \dim(\mathcal{L}_2) - \dim(L_1 \cap L_2) + 1$.

Demostración. Tenemos que $\dim(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) = \dim\left(L_1 + L_2 + L\left(\left\{\overrightarrow{AB}\right\}\right)\right)$.

(a) Si $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \neq \emptyset$, tenemos que $L\left(\left\{\overrightarrow{AB}\right\}\right) \subset L_1 + L_2$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned}\dim\left(L_1 + L_2 + L\left(\left\{\overrightarrow{AB}\right\}\right)\right) &= \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2)\\ &= \dim(\mathcal{L}_1) + \dim(\mathcal{L}_2) - \dim(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2)\,..\end{aligned}$$

(b) Si $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset$, tenemos que $\overrightarrow{AB} \notin L_1 + L_2$, por lo que

$$\dim\left((L_1 + L_2) + L\left(\left\{\overrightarrow{AB}\right\}\right)\right) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2) + 1.$$

Si $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset$, tenemos que

$$\dim(\mathcal{L}_1) + \dim(\mathcal{L}_2) - \dim(L_1 \cap L_2) + 1.$$

□

Ejemplo 7.2. En $\mathbb{R}^3$ consideramos $\rho_1 = A + R$ con $\dim(R) = 1$ y $\rho_2 = B + P$ con $P \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ y $\dim(P) = 2$.

- Si $\rho_1 \cap \rho_2 = \emptyset$, tenemos que $\dim(\rho_1 + \rho_2) = 4 - \dim(P \cap R)$, por tanto, $\dim(P \cap R) = 1$ y $R \subset P$.
- Si $\rho_1 \cap \rho_2 \neq \emptyset$, tenemos que $\dim(\rho_1 + \rho_2) = 2 + 1 - \dim(P \cap R)$.

Observación. Sean $\{A_0, A_1, \ldots, A_p\} \subset \mathcal{A}$. Tenemos que

$$\mathcal{L} = A_0 + L\left(\left\{\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_p}\right\}\right).$$

Proposición 7.6. Sean $\{A_0, A_1, \ldots, A_p\} \subset \mathcal{A}$. Los siguientes enunciados son equivalentes:

(a) $\left\{\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_p}\right\}$ son linealmente indepependientes.

(b) $\forall i = 0, \ldots, p$, $\left\{\overrightarrow{A_iA_0}, \ldots, \overrightarrow{A_iA_{i-1}}, \overrightarrow{A_iA_{i+1}}, \ldots, \overrightarrow{A_iA_p}\right\}$ son linealmente independientes.

(c) $\forall O \in \mathcal{A}$, si

$$\lambda^0\overrightarrow{OA_0} + \lambda^1\overrightarrow{OA_1} + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{OA_p} = \vec{0}.$$

$$\lambda^0 + \lambda^1 + \cdots + \lambda^p = 0.$$

Entonces, $\lambda^0 = \lambda^1 = \cdots = \lambda^p = 0$.

Demostración. **(a)** $\Rightarrow$ **(b)** Sea $i = 0, \ldots, p$ y

$$\lambda^0\overrightarrow{A_iA_0} + \cdots + \lambda^{i-1}\overrightarrow{A_iA_{i-1}} + \lambda^{i+1}\overrightarrow{A_iA_{i+1}} + \cdots + \lambda^p\overrightarrow{A_iA_p} = \vec{0}.$$

Así, tenemos que

$$-\lambda^0\overrightarrow{A_0A_i} + \lambda^1\left(\overrightarrow{A_0A_1} - \overrightarrow{A_0A_i}\right) + \cdots + \lambda^p\left(\overrightarrow{A_0A_p} - \overrightarrow{A_0A_i}\right) = \vec{0}.$$

Así, tenemos que

$$= -\sum_{i\neq j=0}^{p}\lambda^j\overrightarrow{A_0A_i} + \lambda^1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots + \lambda^{i-1}\overrightarrow{A_0A_{i-1}} + \lambda^{i+1}\overrightarrow{A_0A_{i+1}} + \cdots + \lambda^p\overrightarrow{A_0A_p} = \vec{0}.$$

Así, tenemos que $\lambda^j = 0$ si $i \neq j$, por lo que $\displaystyle\sum_{i\neq j=0}^{p}\lambda^j = 0$, por lo que $\lambda^i = 0$.

(b) $\Rightarrow$ **(a)** Trivial.

(a) $\Rightarrow$ **(c)** Sean $\lambda^0, \lambda^1, \ldots, \lambda^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\lambda^0\overrightarrow{OA_0} + \lambda^1\overrightarrow{OA_1} + \cdots + \lambda^p\overrightarrow{OA_p} = \vec{0}, \quad \lambda^0 + \lambda^1 + \cdots + \lambda^p = 0.$$

Por tanto, tenemos que

$$\lambda^0 = -\lambda^1 - \lambda^2 - \cdots - \lambda^p.$$

Así, tenemos que

$$\lambda^1\left(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_0}\right) + \lambda^2\left(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_0}\right) + \lambda^p\left(\overrightarrow{OA_p} - \overrightarrow{OA_0}\right) = \lambda^1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots + \lambda^p\overrightarrow{A_0A_p} = \vec{0}.$$

Así, tenemos que $\lambda^1 = \cdots = \lambda^p = 0$, por lo que $\lambda^0 = 0$.

(c) $\Rightarrow$ **(a)** Consideremos

$$\lambda^1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots + \lambda^p\overrightarrow{A_0A_p} = \vec{0}.$$

Sea $O \in \mathcal{A}$, tenemos que

$$\lambda^1\left(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_0}\right) + \lambda^2\left(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_0}\right) + \lambda^p\left(\overrightarrow{OA_p} - \overrightarrow{OA_0}\right) = \vec{0}.$$

Tenemos entonces que

$$\overrightarrow{OA_0}\left(-\lambda^1 - \cdots - \lambda^p\right) + \lambda^1\overrightarrow{OA_1} + \cdots + \lambda^p\overrightarrow{OA_p} = \vec{0}.$$

Así, tenemos que

$$\left(-\lambda^1 - \cdots - \lambda^p\right) + \lambda^1 + \lambda^2 + \cdots + \lambda^p = 0 \Rightarrow \lambda^i = 0,\ i = 0, \ldots, p.$$

□

Definición 7.9. Diremos que que $\{A_0, A_1, \ldots, A_p\} \subset \mathcal{A}$ son **afinmente independientes** si $\left\{\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_p}\right\}$ son linealmente independientes.

Proposición 7.7. Si $\{A_0, \ldots, A_p\} \subset \mathcal{A}$ son afinmente independientes, existen $A_{p+1}, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ tales que $\{A_0, A_1, \ldots, A_p, A_{p+1}, \ldots, A_n\}$ son afimente independientes.

Demostración. Sean $\left\{\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_p}\right\}$ linealmente independientes. Sea $\left\{\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_p}, \vec{u}_{p+1}, \ldots, \vec{u}_n\right\}$ base de V. Entonces tomamos $A_{p+1} = A_0 + \vec{u}_{p+1}$ y, en general, $A_i = A_0 + \vec{u}_i$. □

7.2. Ecuaciones cartesianas y paramétricas

Cálculo de las ecuaciones cartesianas y paramétricas de una variedad lineal afín

Sea $(O, \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\})$ un sistema de referencia cartesiano de $\mathcal{A}$ y sea $\mathcal{L} = A + L\left(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}\right)$ con $\dim(\mathcal{L}) = p$. Tenemos que existen $a^1, \dots, a^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\overrightarrow{OA} = a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^n\vec{u}_n.$$

Como $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\} \subset V$, se tiene que

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = a_1^1\vec{u}_1 + \cdots + a_1^n\vec{u}_n \\ \vdots \\ \vec{v}_p = a_p^1\vec{u}_1 + \cdots + a_p^n\vec{u}_n \end{cases}.$$

Si $X \in \mathcal{A}$, tenemos que existen $x^1, \dots, x^n \in \mathbb{K}$ tales que $\overrightarrow{OX} = x^1\vec{u}_1 + \cdots + x^n\vec{u}_n$. Ahora, tenemos que $X \in A + L\left(\{\vec{v}_1 + \cdots + \vec{v}_p\}\right) \iff \overrightarrow{AX} \in L\left(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}\right) \iff \exists \lambda^1, \dots, \lambda^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AX} = \lambda^1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda^p\vec{v}_p \iff & \left(x^1 - a^1\right)\vec{u}_1 + \cdots + \left(x^n - a^n\right)\vec{u}_n \\ &= \lambda^1\left(a_1^1\vec{u}_1 + \cdots + a_1^n\vec{u}_n\right) + \cdots + \lambda^p\left(a_p^1\vec{u}_1 + \cdots + a_p^n\vec{u}_n\right) \\ &= \left(\lambda^1 a_1^1 + \cdots + \lambda^2 a_p^1\right)\vec{u}_1 + \cdots + \left(\lambda^1 a_1^n + \cdots + \lambda^p a_p^n\right)\vec{u}_n. \end{aligned}$$

Así, nos quedan las **ecuaciones paramétricas** de la variedad lineal afín $A + L$:

$$\begin{cases} x^1 - a^1 = \lambda^1 a_1^1 + \cdots + \lambda^p a_p^1 \\ \vdots \\ x^n - a^n = \lambda^1 a_1^n + \cdots + \lambda^p a_p^n \end{cases}.$$

Por el teorema de Rouché-Fröbenius, esto es cierto si y solamente si

$$\operatorname{ran}\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_p^1 & x^1 - a^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_p^n & x^n - a^n \end{pmatrix} = \operatorname{ran}\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_p^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_p^n \end{pmatrix} = p.$$

Suponemos que $\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_p^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^p & \cdots & a_p^p \end{vmatrix} = \alpha \neq 0$. Lo visto anteriormente es cierto si y solo si

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_p^1 & x^1 - a^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^p & \cdots & a_p^p & x^p - a^p \\ a_1^{p+i} & \cdots & a_{p+i}^{p+i} & x^{p+i} - a^{p+i} \end{vmatrix} = 0, \ i = 1, \dots, n-p.$$

Así, tenemos que

$$\begin{cases} \left(x^1 - a^1\right) b_1^1 + \cdots + \left(x^n - a^n\right) b^n + \left(x^{p+1} - a^{p+1}\right) \alpha = 0 \\ \vdots \\ \left(x^1 - a^1\right) b_1^{n-p} + \cdots + \left(x^p - a^p\right) b^{n-p} + \left(x^n - a^n\right) \alpha = 0. \end{cases}.$$

Tenemos, pues, las **ecuaciones cartesianas** de la variedad lineal afín $A + L$:

$$\begin{cases} c_1^1 x^1 + \cdots + c_p^1 x^p + \alpha x^{p+1} = d^1 \\ \vdots \\ c_1^{n-p} x^1 + \cdots + c_p^{n-p} x^p + \alpha x^{p+1} = d^{n-p} \end{cases}.$$

Así, tenemos que $\det\left(\alpha\left(I_{(n-p)\times(n-p)}\right)\right) = \alpha^{n-p} \neq 0$.

Determinación de una variedad lineal afín a partir de sus ecuaciones

Ahora vamos a ver que los sistemas lineales definen variedades lineales afines. Consideremos el mismo sistema de referencia cartesiano, $(O, \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\})$ y el sistema de ecuaciones

$$(S) \begin{cases} a_1^1 x^1 + \cdots + a_n^1 x^n = b^1 \\ \vdots \\ a_1^n x^1 + \cdots + a_n^n x^n = b^n \end{cases}.$$

Ahora, consideremos $\mathcal{L} = \left\{C \in \mathcal{A} \ : \ \overrightarrow{OC} = c^1\vec{u}_1 + \cdots + c^n\vec{u}_n, \ \left(c^1, \ldots, c^n\right) \text{ solución de } (S)\right\}$. Consideremos ahora el sistema

$$(H) \begin{cases} a_1^1 x^1 + \cdots + a_p^1 x^p = 0 \\ \vdots \\ a_1^{n-p} x^1 + \cdots + a_p^{n-p} x^p = 0 \end{cases}.$$

Tomamos $L = \left\{\vec{x} = x^1\vec{u}_1 + \cdots + x^n\vec{u}_n \ : \ \left(x^1, \ldots, x^n\right) \text{ solución de } (H)\right\} \in \mathcal{L}(V)$. Si $\mathcal{L} = \emptyset$, es una variedad lineal afín. Ahora, si $A \in \mathcal{L}$, tenemos que $\forall B \in \mathcal{L}$, $B = A + \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AB} \in L$. Tenemos que $\dim(L) = n - (n-p) = p$. Supongamos que existe $A \in \mathcal{L}$ tal que $\mathcal{L} = A + L$.

7.3. Aplicaciones afines

Sean los $\mathbb{K}-$espacios vectoriales V_1 y V_2, y $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ sus espacios afines asociados, respectivamente.

Definición 7.10 (Aplicación afín)**.** Una aplicación $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ es **afín** si existe $\vec{f} : V \to V'$ lineal tal que $f(A + \vec{u}) = f(A) + \vec{f}(\vec{u})$, $\forall A \in \mathcal{A}, \forall \vec{u} \in V$. A $\vec{f}$ se la llama **aplicación lineal asociada** a f.

Proposición 7.8. La aplicación $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ es afín si y solo si existe $\vec{f} : V \to V'$ lineal tal que $\forall A, B \in \mathcal{A}$ se tiene que $\overrightarrow{f(A) f(B)} = \vec{f}\left(\overrightarrow{AB}\right)$.

Demostración. **(i)** Supongamos que f es afín. Sean $A, B \in \mathcal{A}$. Entonces, tenemos que $B = A + \overrightarrow{AB}$. Por tanto, tenemos que $f(B) = f(A) + \vec{f}\left(\overrightarrow{AB}\right)$, por lo que $\overrightarrow{f(A) f(B)} = \vec{f}\left(\overrightarrow{AB}\right)$.

(ii) Sean $A \in \mathcal{A}$, $\vec{u} \in V$, y $B = A + \vec{u}$. Tenemos que $\overrightarrow{f(A) f(B)} = \vec{f}\left(\overrightarrow{AB}\right)$, por tanto, $f(B) = f\left(A + \overrightarrow{AB}\right) = f(A) + \vec{f}\left(\overrightarrow{AB}\right) = f(A) + \vec{f}(\vec{u})$.

□

Teorema 7.3. Sea $l : V \to V'$ lineal y $A \in \mathcal{A}$ y $A' \in \mathcal{A}'$. Entonces, $\exists! f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ afín tal que $f(A) = A'$ y $\vec{f} = l$.

Demostración. **Unicidad.** Supognamos que existe f afín tal que $f(A) = A'$ y $\vec{f} = l$. Tenemos que $\forall B \in \mathcal{A}$,

$$f(B) = f\left(A + \overrightarrow{AB}\right) = f(A) + l\left(\overrightarrow{AB}\right) = A' + l\left(\overrightarrow{AB}\right).$$

Existencia. $\forall B \in \mathcal{A}$ defino $f(B) = A' + l\left(\overrightarrow{AB}\right)$. Así, si $C \in \mathcal{A}$ se tiene que $f(C) = A' + l\left(\overrightarrow{AC}\right)$. Por tanto,

$$\overrightarrow{f(B) f(C)} = \overrightarrow{\left(A' + l\left(\overrightarrow{AB}\right)\right)\left(A' + l\left(\overrightarrow{AC}\right)\right)} = \overrightarrow{A'A'} + l\left(\overrightarrow{AC}\right) - l\left(\overrightarrow{AB}\right) = l\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = l\left(\overrightarrow{BC}\right).$$

Además, $f(A) = A' + l\left(\overrightarrow{A'A'}\right) = A'$.

□

Corolario 7.1. Si $f, g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ son tales que $f(A) = g(A)$ para algún $A \in \mathcal{A}$ y $\vec{f} = \vec{g}$, entonces $f = g$.

Teorema 7.4. Sea $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ una aplicación afín y $\vec{f} : V \to V'$ su aplicación lineal asociada. Entonces,

(a) f es inyectiva $\iff$ $\vec{f}$ es inyectiva.

(b) f es sobreyectiva $\iff$ $\vec{f}$ es sobreyectiva.

(c) f es biyectiva $\iff$ $\vec{f}$ es biyectiva.

Demostración. **(a)** Supongamos que f es inyectiva, $\vec{u} \in \operatorname{Ker}\left(\vec{f}\right)$ y sea $B = A + \vec{u}$. Tenemos que

$$f(B) = f(A + \vec{u}) = f(A) + \vec{f}(\vec{u}) = f(A).$$

Si $\vec{u} \neq 0$, tenemos que $B \neq A$, por lo que f no es inyectiva, lo cual es una contradicción. Recíprocamente, supongamos que $\vec{f}$ es inyectiva y $f(A) = f(B)$ con $A, B \in \mathcal{A}$. Entonces tenemos que $\overrightarrow{f(A)\, f(B)} = \vec{f}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}$, por lo que $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ y $A = B$.

(b) Sea $A \in \mathcal{A}$ y $f(A) \in \mathcal{A}'$. Supongamos que f es sobreyectiva. Sea $\vec{u'} \in V'$. Entonces, $f(A) + \vec{u}' \in \mathcal{A}'$, por lo que existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $f(B) = f(A) + \vec{u}'$, por lo que $\vec{u}' = \overrightarrow{f(A)\, f(B)} = \vec{f}\left(\overrightarrow{AB}\right) \in V'$.
Recíprocamente, supongamos que $\vec{f}$ es sobreyectiva y sea $B' \in \mathcal{A}'$. Tenemos que $\overrightarrow{f(A)\, B'} \in V'$, por tanto $\exists \vec{u} \in V$ tal que $\vec{f}(\vec{u}) = \overrightarrow{f(A)\, B}$ y, por tanto, $B' = f(A) + \vec{f}(\vec{u}) = A' + \vec{f}(\vec{u})$.

(c) Trivial a partir de **(a)** y **(b)**.

□

Proposición 7.9. Sean $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ y $g : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ aplicaciones afines, entonces $g \circ f$ es afín y $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$.

Demostración. Tenemos que $\forall A, B \in \mathcal{A}$,

$$\overrightarrow{(g \circ f(A))\,(g \circ f(B))} = \overrightarrow{(g(f(A)))\,(g(f(B)))} = \vec{g}\left(\overrightarrow{f(A)\, f(B)}\right) = \vec{g}\left(\vec{f}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right) = \vec{g} \circ \vec{f}\left(\overrightarrow{AB}\right).$$

□

Definición 7.11 (Isomorfismo de espacios afines)**.** Sea $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ una aplicación afín. Diremos que f es un **isomorfismo** de espacios afines si existe $g : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ afín tal que $g \circ f = id_{\mathcal{A}}$ y $f \circ g = id_{\mathcal{A}'}$.

Proposición 7.10. Sea $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ una aplicación afín. Son equivalentes:

(a) f es isomorfismo de espacios afines.

(b) f es biyectiva.

(c) $\vec{f}$ es isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración. **(a)** $\Rightarrow$ **(b)** $\Rightarrow$ **(c)** Trivial (la última implicación es trivial por el último teorema).

(c) $\Rightarrow$ **(a)** Por el teorema anterior, tenemos que si $\vec{f}$ es biyectiva, entonces f también lo es. Por tanto, sabemos que existe $g = f^{-1}$, ahora tenemos que ver que g es afín. Sea $A \in \mathcal{A}$ y $f(A) = A' \in \mathcal{A}'$. Como hemos visto, $\exists \vec{f}^{-1} : V' \to V$ lineal. Sea $g : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ la única aplicación afín tal que $g(A') = A$ y $\vec{g} = \vec{f}^{-1}$. Entonces,

$$g \circ f(A) = g(f(A)) = g(A') = A = id_{\mathcal{A}}(A), \quad \overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f} = id_V.$$

$$f \circ g(A') = f(A) = A' = id_{\mathcal{A}'}(A'), \quad \overrightarrow{f \circ g} = \vec{f} \circ \vec{g} = id_{V'}.$$

□

Observación. Sea $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ afín con $\dim(\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{A}')$. Entonces, para ver que f es biyectiva basta con ver que f es inyectiva, es decir, basta con comprobar que $\vec{f}$ es inyectiva.

Proposición 7.11. Sea $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ una aplicación afín y $\vec{f} : V \to V'$ su aplicación lineal asociada.

(a) Si $\mathcal{L} = A + L$ es una variedad lineal afín de $\mathcal{A}$, entonces $f(\mathcal{L})$ es una variedad lineal afín.

(b) Si $\mathcal{L}' = A' + L'$ es una variedad lineal afín de $\mathcal{A}'$, entonces $f^{-1}(\mathcal{L}')$ es una variedad lineal afín que, si no es vacía [a] , tiene por dirección $\vec{f}^{-1}(L')$.

[a] La inversa no tiene por qué existir, porque f no tiene por qué ser biyectiva.

Demostración. **(a)** Si $\mathcal{L} = A + L = \{A + \vec{u} \ : \ \vec{u} \in L\}$. Tenemos que

$$f(\mathcal{L}) = \left\{ f(A + \vec{u}) = f(A) + \vec{f}(\vec{u}) \ : \ \vec{u} \in L \right\} = f(A) + \left\{ \vec{f}(\vec{u}) \ : \ \vec{u} \in L \right\} = f(A) + \vec{f}(L) \in \mathcal{L}(\mathcal{L}').$$

(b) Supongamos que $f^{-1}(\mathcal{L}') \neq \emptyset$ y sea $A \in f^{-1}(\mathcal{L}')$. Esto es cierto si y solo si $f(A) \in \mathcal{L}'$. Así, tenemos que

$$B \in f^{-1}(\mathcal{L}') \iff f(B) \in \mathcal{L}' = A + L' \iff \overrightarrow{f(A)\, f(B)} = \vec{f}\left(\overrightarrow{AB}\right) \in L' \iff \overrightarrow{AB} \in \vec{f}^{-1}(L').$$

Así, tenemos que $B \in A + \vec{f}^{-1}(L')$. Así, $f^{-1}(\mathcal{L}') = A + \vec{f}^{-1}(L')$ y $\vec{f}^{-1}(L') \in \mathcal{L}(V)$.

□

7.3.1. Traslaciones

Si $\vec{u} \in V$, se define la aplicación

$$\begin{aligned} \tau_{\vec{u}} : \mathcal{A} &\to \mathcal{A} \\ A &\to \tau_{\vec{u}}(A) = A + \vec{u}. \end{aligned}$$

Así, $\forall A, B \in \mathcal{A}$,

$$\overrightarrow{\tau_{\vec{u}}(A)\, \tau_{\vec{u}}(B)} = \overrightarrow{(A + \vec{u})(B + \vec{u})} = \overrightarrow{AB} + \vec{u} - \vec{u} = id_V\left(\overrightarrow{AB}\right).$$

Observación. Así, las traslaciones son aplicaciones afines que tienen como aplicación lineal asociada la identidad. Con el siguiente resultado estudiamos el recíproco.

Teorema 7.5. Sea $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ una aplicación lineal afín tal que $\vec{f} = id_V$, entonces existe $\vec{u} \in V$ tal que $f = \tau_{\vec{u}}$.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{A}$ y $\vec{u} = \overrightarrow{Af(A)}$. Tenemos que $\forall B \in \mathcal{A}$,

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = \vec{f}\left(\overrightarrow{AB}\right) = id_V\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AB}.$$

Así, tenemos que

$$f(B) = f(A) + \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{Bf(B)} = \overrightarrow{B\left(f(A) + \overrightarrow{AB}\right)} = \overrightarrow{Bf(A)} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{Af(A)} = \vec{u}.$$

□

7.3.2. Funciones afines

Definición 7.12 (Función afín)**.** Una **función afín** definida en $\mathcal{A}$ es una aplicación afín $f : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$.

Sea $f : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ una aplicación afín, tenemos que $\vec{f} \in V^*$, por lo que si $\vec{f} \neq 0$, se tiene que $\operatorname{Ker}\left(\vec{f}\right)$ es un hiperplano vectorial. Además, se tiene que $\forall \alpha \in \mathbb{K}$,

$$f^{-1}(\{\alpha\}) = \{A \in \mathcal{A} \ : \ f(A) = \alpha\} \neq \emptyset.$$

Si $\alpha \in \mathbb{K}$, $f^{-1}(\{\alpha\})$ es una variedad lineal afín no vacía de dirección $\vec{f}^{-1}(\{0\}) = \operatorname{Ker}\left(\vec{f}\right)$. Si $f : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $f^{-1}(\{\alpha\})$ es un hiperplano de $\mathcal{A}$. En efecto, el conjunto $\{\alpha\}$ es una variedad lineal de $\mathbb{K}$ de dirección $\left\{\vec{0}\right\}$, por lo que $f^{-1}(\{\alpha\})$ es una variedad afín de $\mathcal{A}$ de dirección $\vec{f}^{-1}\left(\left\{\vec{0}\right\}\right)$.

Proposición 7.12. Recíprocamente, si $\mathcal{H}$ es un hiperplano de dirección H, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\exists f : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ afín tal que $\mathcal{H} = f^{-1}(\{\alpha\})$.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{H}$ y $f : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ la única aplicación afín tal que $f(A) = \alpha$ y tiene por aplicación lineal asociada $l \in V^*$ con $\operatorname{Ker}(l) = H$. □

Proposición 7.13. Sea $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ una aplicación afín. Entonces $\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{A} \ : \ f(A) = A\}$ es una variedad lineal afín que, si no es vacía, tiene por dirección $L = \left\{\vec{u} \in V \ : \ \vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}\right\}$.

Demostración. Si $\mathcal{L} = \emptyset$, no hay nada que demostrar. Supongamos, entonces, que $\mathcal{L} \neq \emptyset$ y sea $A \in \mathcal{L}$. Tenemos que si $B \in \mathcal{A}$, entonces

$$B \in \mathcal{L} \iff f(B) = B \iff \overrightarrow{Af(B)} = \overrightarrow{AB} = \vec{f}\left(\overrightarrow{AB}\right) \iff \overrightarrow{AB} \in L.$$

Así, hemos visto que $\mathcal{L} = A + L$. □

7.3.3. Homotecias

Definición 7.13 (Homotecia)**.** Sea $\alpha \in \mathbb{K}/\{0,1\}$. Una aplicación afín $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es una **homotecia** si su aplicación lineal asociada es la homotecia vectorial de razón α.

Observación.

$$\begin{aligned} \vec{f} : V &\to V \\ \vec{x} &\to \alpha\vec{x}. \end{aligned}$$

Teorema 7.6. Sea f una homotecia de razón α ($\alpha \notin \{0,1\}$), entonces $\exists! C \in \mathcal{A}$ tal que $f(C) = C$.

Demostración. **Unicidad.** Supongamos que existe $C \in \mathcal{A}$ tal que $f(C) = C$. Tenemos que $\forall A \in \mathcal{A}$,

$$f(A) = f\left(C + \overrightarrow{CA}\right) = f(C) + \vec{f}\left(\overrightarrow{CA}\right) = C + \alpha\overrightarrow{CA}.$$

Entonces, tenemos que

$$\overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{A\left(C + \alpha\overrightarrow{CA}\right)} = \overrightarrow{AC} + \alpha\overrightarrow{CA} = (1-\alpha)\overrightarrow{AC}.$$

Por tanto, $\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{1-\alpha}\overrightarrow{Af(A)}$.

Existencia. Sea $A \in \mathcal{A}$ y sea $C = A + \dfrac{\overrightarrow{Af(A)}}{1-\alpha}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} f(C) =& f\left(A + \frac{\overrightarrow{Af(A)}}{1-\alpha}\right) = f(A) + \frac{1}{1-\alpha}\vec{f}\left(\overrightarrow{Af(A)}\right) = f(A) + \frac{\alpha}{1-\alpha}\overrightarrow{Af(A)} \\ =& A + \overrightarrow{Af(A)} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\overrightarrow{Af(A)} = A + \left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\overrightarrow{Af(A)} = A + \frac{1}{1-\alpha}\overrightarrow{Af(A)} = C. \end{aligned}$$

Así, la homotecia de centro C y razón $\alpha \in \mathbb{K}/\{0,1\}$ está definida por $f(A) = C + \alpha\overrightarrow{CA}$, $\forall A \in \mathcal{A}$.

□

Observación. El conjunto $\mathcal{H} = \{f : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \,:\, f \text{ homotecia o traslación}\}$ es un grupo que tiene como operación la comosición de funciones.

Observación. Una aplicación afín es una homotecia o traslación si y solo si su aplicación lineal asociada es una homotecia vectorial, esto es cierto si y solo si $\vec{f}$ deja invariante todas las rectas vectoriales, es decir, si para cualquier recta $\mathcal{R}$, $f(\mathcal{R})$ es una recta paralela a $\mathcal{R}$.

Definición 7.14 (Simetría)**.** Sea $C \in \mathcal{A}$. La **simetría** respecto de C es la homotecia de centro C y razón -1.

Proposición 7.14. Si f es la simetría respecto de C, f es involutiva ($f^2 = id_{\mathcal{A}}$).

Demostración. Si f es la simetría respecto de C, $f^2(C) = C = id_{\mathcal{A}}(C)$. Además, $\vec{f} = -id_V$, por lo que $\vec{f}^2 = id_V$. Por tanto tenemos que $f^2 = id_{\mathcal{A}}$. □

Observación. Si $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es una homotecia involutiva, entonces $f^2 = id_{\mathcal{A}}$ y $\vec{f}^2 = id_V$, por lo que $\alpha^2 = 1$ y $\alpha = -1$.

7.3.4. Proyecciones

Definición 7.15 (Proyección)**.** Una **proyección** es una aplicación afín $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tal que $f = f^2$.

Observación. Si f es una proyección, $\vec{f}$ será una proyección vectorial. En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} f(A + \vec{u}) &= f(A) + \vec{f}(\vec{u}) \\ f^2(A + \vec{u}) &= f\left(f(A) + \vec{f}(\vec{u})\right) = f^2(A) + \vec{f}^2(\vec{u}). \end{aligned}$$

Como $f(A) = f^2(A)$, es trivial que $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{f}^2(\vec{u})$. Así, tenemos que $\vec{f}^2 = \left(\vec{f}\right)^2 = \vec{f}$. El recíproco no es cierto.

Teorema 7.7. Una aplicación $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es una proyección si y solo si existen dos subespacios vectoriales suplementarios L_1 y L_2 con $L_1 \oplus L_2 = V$, y una variedad lineal afín $\mathcal{L}$ de dirección L_1 tal que

$$\{f(A)\} = \mathcal{L} \cap (A + L_2), \ \forall A \in \mathcal{A}.$$

Demostración. **(i)** Sabemos que si f es una proyección, entonces $\vec{f}$ es una proyección vectorial, por lo que existen $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ tales que $L_1 \oplus L_2 = V$, con $L_1 = \operatorname{Im}\left(\vec{f}\right)$ y $L_2 = \operatorname{Ker}\left(\vec{f}\right)$.

Tenemos que $\forall A \in \mathcal{A}$, $f^2(A) = f(A)$, por lo que todo punto de la imagen de f es invariante por f. Así, tenemos que la variedad lineal afín $\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{A} \ : \ f(A) = A\} \neq \emptyset$, por lo que tiene como dirección a L_1.

Ahora, tenemos que $\forall B \in \mathcal{A}$,

$$\vec{f}\left(\overrightarrow{Bf(B)}\right) = \overrightarrow{f(B)\,f^2(B)} = \vec{0}.$$

Por tanto, $\overrightarrow{Bf(B)} \in L_2$ y $f(B) \in B + L_2$. Como vimos antes, también tenemos que $f(B) \in \mathcal{L}$. Así, hemos obtenido que $f(B)$ es el único punto que pertenece a la intersección de las variedades lineales afines suplementarias $\mathcal{L}$[1] y $B + L_2$, es decir,

$$\{f(B)\} = \mathcal{L} \cap (B + L_2).$$

(ii) Consideremos una variedad lineal afín $\mathcal{L}$ de dirección L_1 y $L_1 \oplus L_2 = V$. Vamos a ver que la aplicación $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ definida por $\{f(B)\} = \mathcal{L} \cap \{B + L_2\}$, $\forall B \in \mathcal{A}$, es una proyección.
Primero vamos a ver que f es afín. Sea $p \in \operatorname{End}(V)$ la proyección vectorial de base L_1 y dirección L_2. Si $A, B \in \mathcal{A}$,

$$f(A) \in \mathcal{L},\ \overrightarrow{Af(A)} \in L_2$$
$$f(B) \in \mathcal{L},\ \overrightarrow{Bf(B)} \in L_2.$$

Así, tenemos que

$$B = A + \overrightarrow{AB} = A + \overrightarrow{Af(A)} + \overrightarrow{f(A)f(B)} + \overrightarrow{f(B)B}.$$

Como $\overrightarrow{Af(A)}, \overrightarrow{f(B)B} \in L_2$ y $\overrightarrow{f(A)f(B)} \in L_1$, se tiene que $p\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$. Así, f es una aplicación afín que tiene como aplicación lineal asociada a p.
Ahora vamos a ver que $f^2 = f$. En efecto, tenemos que $\forall A \in \mathcal{A}$, $f(A) \in \mathcal{L}$, y como todo punto de $\mathcal{L}$ es invariante, se tiene que $f(f(A)) = f(A)$.

$\square$

Definición 7.16. Diremos que f es la proyección de la **base** $\mathcal{L}$ y **dirección** L_2.

7.3.5. Simetrías

Definición 7.17 (Simetría)**.** Una aplicación afín $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es una simetría si $f^2 = id_{\mathcal{A}}$.

Observación. Si f es una simetría, $\vec{f}$ es una simetría vectorial (el recíproco no tiene por qué ser cierto). En efecto, $\left(\vec{f}\right)^2 = \vec{f^2} = id_V$.

Teorema 7.8. Una aplicación $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es una simetría si y solo si existen $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ tales que $L_1 \oplus L_2 = V$, y una variedad lineal afín $\mathcal{L}$ de dirección L_1, tales que

$$\forall A \in \mathcal{A},\ f(A) = A + 2\overrightarrow{AA_1},$$

donde A_1 es la proyección de A sobre $\mathcal{L}$ en la dirección L_2.

Demostración. **(i)** En primer lugar, vamos a ver que la variedad lineal afín de los puntos invariantes, $\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{A} : f(A) = A\}$, no es vacía. Sea $A \in \mathcal{A}$ y $M = P_m(A, f(A))$ el punto medio de A y $f(A)$, es decir,

$$M = P_m(A, f(A)) = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{Af(A)}.$$

[1] Es fácil comprobar que $\mathcal{L} = \operatorname{Im}(f)$.

Tenemos que $M \in \mathcal{L}$, en efecto:

$$\begin{aligned} f(M) =& f\left(A + \frac{1}{2}\overrightarrow{Af(A)}\right) = f(A) + \frac{1}{2}\vec{f}\left(\overrightarrow{Af(A)}\right) = f(A) + \frac{1}{2}\overrightarrow{f(A)A} \\ =& A + \overrightarrow{Af(A)} + \frac{1}{2}\overrightarrow{f(A)A} = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{Af(A)} = M. \end{aligned}$$

Así, hemos visto que $\mathcal{L} \neq \emptyset$. Por otro lado, por ser $\vec{f}$ una simetría, $\exists L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ tales que $L_1 \oplus L_2 = V$, con $L_1 = \operatorname{Ker}(f - id_V)$ y $L_2 = \operatorname{Ker}(f + id_V)$. Además, $\vec{f} = p_1 - p_2$. Así, tenemos que $\mathcal{L}$ tiene por dirección L_1.
Ahora, consideremos $A \in \mathcal{A}$ y sea A_1 la proyección de A sobre $\mathcal{L}$ en la dirección L_2. Tenemos que, como $\overrightarrow{AA_1} \in L_2$,

$$\overrightarrow{f(A)f(A_1)} = \vec{f}\left(\overrightarrow{AA_1}\right) = (p_1 - p_2)\left(\overrightarrow{AA_1}\right) = \overrightarrow{A_1A}.$$

Como $f(A_1) = A_1$, tenemos que $\overrightarrow{f(A)A_1} = \overrightarrow{A_1A}$, por lo que A_1 es el punto medio de A y $f(A)$, y podemos escribir que

$$f(A) = A + 2\overrightarrow{AA_1}.$$

(ii) Recíprocamente, consideremos la variedad lineal afín $\mathcal{L}$ de dirección L_1 y $L_2 \in \mathcal{L}(V)$ tal que $L_1 \oplus L_2 = V$. Vamos a ver que la aplicación definida por

$$f(A) = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1},\ \forall A \in \mathcal{A}.$$

donde A_1 es la proyección de A sobre $\mathcal{L}$ con dirección L_2, es una simetría.
En primer lugar, vamos a ver que f es afín. Sean $A, B \in \mathcal{A}$. Tenemos que ver que $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \vec{f}\left(\overrightarrow{AB}\right)$. Tenemos que

$$f(A) = A + 2\overrightarrow{AA_1}, \quad f(B) = B + 2\overrightarrow{BB_1}.$$

Podemos ver que si $A \in \mathcal{L} \cap (A + L_2)$, entonces $A = A_1$. Ahora, tenemos que [2]

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(A)f(B)} =& \overrightarrow{\left(A + 2\overrightarrow{AA_1}\right)\left(B + 2\overrightarrow{BB_1}\right)} = \overrightarrow{AB} + 2\left(\overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{AA_1}\right) \\ =& \overrightarrow{AB} + 2\left(\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BA_1}\right) = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{A_1B_1} \\ =& -\overrightarrow{AB} + 2p_1\left(\overrightarrow{AB}\right) = (-id_V + 2p_1)\left(\overrightarrow{AB}\right) = (-p_1 - p_2 + 2p_1)\left(\overrightarrow{AB}\right) = (p_1 - p_2)\left(\overrightarrow{AB}\right). \end{aligned}$$

Así, hemos visto que f es afín y que su aplicación lineal asociada es $p_1 - p_2$. Ahora vamos a ver que es involutiva. En efecto, tenemos que A y $f(A)$ tienen la misma proyección sobre $\mathcal{L}$ con dirección L_2, por lo que A_1 es el punto medio de A y $f(A)$ y de $f(A)$ y $f^2(A)$. Así, tenemos que $f^2(A) = A$, por lo que f es involutiva.

□

[2] Recordar que $id_V = p_1 + p_2$.

Definición 7.18. $\mathcal{L}$ es la **base** de f y L_2 su **dirección**.

7.4. Matriz de una aplicación afín

Sean $(O, \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\})$ y $(O', \{\vec{v}_1, \ldots, v_m\})$ un sistema de referencia cartesiana de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$, respectivamente. Sea $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ una aplicación afín y $\vec{f}$ su aplicación lineal asociada. Sabiendo que $f(O) \in \mathcal{A}'$,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{O' f(O)} =& a^1 \vec{v}_1 + \cdots + a^m \vec{v}_m \\
\vec{f}(\vec{u}_1) =& a_1^1 \vec{v}_1 + \cdots + a_1^m \vec{v}_m \\
&\vdots \\
\vec{f}(\vec{u}_n) =& a_n^1 \vec{v}_1 + \cdots + a_n^m \vec{v}_m.
\end{aligned}$$

Si $X \in \mathcal{A}$ tenemos que $f(X) \in \mathcal{A}'$, además si $\overrightarrow{OX} = x^1 \vec{u}_1 + \cdots + x^n \vec{u}_n$ tendremos que

$$\overrightarrow{O' f(X)} = x'^1 \vec{v}_1 + \cdots + x'^m \vec{v}_m.$$

Así, $X = O + \overrightarrow{OX}$ y $f(X) = f(O) + \vec{f}\left(\overrightarrow{OX}\right)$, por lo que $\overrightarrow{O' f(X)} = \overrightarrow{O' f(O)} + \vec{f}\left(\overrightarrow{OX}\right)$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned}
& x'^1 \vec{v}_1 + \cdots + x'^m \vec{v}_m \\
=& a^1 \vec{v}_1 + \cdots + a^m \vec{v}_m + \vec{f}\left(x^1 \vec{u}_1 + \cdots + x^n \vec{u}_n\right) \\
=& a^1 \vec{v}_1 + \cdots + a^m \vec{v}_m + x^1 \left(a_1^1 \vec{v}_1 + \cdots + a_1^m \vec{v}_m\right) + \cdots + x^n \left(a_n^1 \vec{v}_1 + \cdots + a_n^m \vec{v}_m\right) \\
=& \left(a^1 + x^1 a_1^1 + \cdots + x^n a_n^1\right) \vec{v}_1 + \cdots + \left(a^m + x^1 a_1^m + \cdots + x^n a_n^m\right) \vec{v}_m.
\end{aligned}$$

Así, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}
x'^1 = a^1 + x^1 a_1^1 + \cdots + x^n a_n^1 \\
\vdots \\
x'^m = a^m + x^1 a_1^m + \cdots + x^n a_n^m
\end{cases}.$$

Matricialmente, obtenemos la expresión

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix} + \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}(f) \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

También lo podemos expresar de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x'^1 \\ \vdots \\ x'^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a^1 & a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^m & a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

Capítulo 8

Espacio afín euclídeo

Definición 8.1 (Espacio afín euclídeo)**.** Un **espacio afín euclídeo** es un espacio afín $\mathcal{E}$ asociado a $(E, \langle , \rangle)$. Si $\mathcal{E}$ es un espacio afín euclídeo y $A, B, C \in \mathcal{E}$, llamaremos **distancia** entre A y B, $d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$.

Observación. La aplicación distancia está definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to & \mathbb{R} \\ (A,B) \to & \|\overrightarrow{AB}\|. \end{aligned}$$

Proposición 8.1. Sean $A, B, C \in \mathcal{E}$.

(a) $d(A,B) \geq 0$, $d(A,B) = 0 \iff \overrightarrow{AB} = \vec{0} \iff A = B$.

(b) $d(A,B) = d(B,A)$.

(c) $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$.

Demostración. Demostramos **(c)**, puesto que **(a)** y **(b)** son triviales. Si $A, B, C \in \mathcal{E}$, tenemos que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, así

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\| \leq \|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{CB}\|.$$

□

Teorema 8.1 (Teorema de Pitágoras)**.** $d(B,C)^2 = d(A,B)^2 + d(A,C)^2 \iff \left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right\rangle = 0.$

Demostración.

$$\begin{aligned} d(B,C)^2 =& \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|^2 = \left\langle \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \right\rangle = \|\overrightarrow{BA}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 + 2\left\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC} \right\rangle \\ =& d(A,B)^2 + d(A,C)^2 - \left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right\rangle. \end{aligned}$$

□

Observación. Sea $\mathcal{L} = A+L$ con $A \in \mathcal{E}$ y $L \in \mathcal{L}(E)$. Sea $M \in \mathcal{E}$, tenemos que $\{d(M,A) \,:\, A \in \mathcal{L}\} \subset \mathbb{R}$ y $\inf \{d(M,A) \,:\, A \in \mathcal{L}\} \geq 0$.

Definición 8.2 (Distancia de un punto a una variedad lineal)**.** Llamaremos **distancia** de un punto a una variedad lineal afín a

$$d(M,\mathcal{L}) = \inf \{d(M,A) \,:\, A \in \mathcal{L}\}.$$

Definición 8.3 (Proyección ortogonal)**.** Llamaremos **proyección ortogonal** sobre $\mathcal{L} = A+L$ a la proyección de base $\mathcal{L}$ y dirección $L^{\perp}_{\langle,\rangle}$.

Observación. Si $A \in \mathcal{L}$, tenemos que si M_1 es la proyección ortogonal de M sobre L,

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{M_1M}.$$

Además, tenemos que $\|\overrightarrow{AM}\|^2 = \|\overrightarrow{AM_1}\|^2 + \|\overrightarrow{MM_1}\|^2 \geq \|\overrightarrow{MM_1}\|^2$, $\forall A \in \mathcal{L}$. Así,

$$\inf \{d(M,A) \,:\, A \in \mathcal{L}\} = \|\overrightarrow{MM_1}\| = d(M,\mathcal{L}) = d(M,M_1).$$

Definición 8.4. Un sistema de referencia $(O, \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\})$ cartesiano de $\mathcal{E}$ es ortogonal (ortonormal) si lo es la base $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$.

Distancia entre dos puntos

Sea $(O, \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\})$ un sistema de referencia ortonormal y sea $A, B \in \mathcal{E}$. Consideremos que

$$\overrightarrow{OA} = a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^n\vec{u}_n, \quad \overrightarrow{OB} = b^1\vec{u}_1 + \cdots + b^n\vec{u}_n.$$

Así, tendremos que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \left(b^1 - a^1\right)\vec{u}_1 + \cdots + \left(b^n - a^n\right)\vec{u}_n.$$

Además,

$$d(A,B)^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = \begin{pmatrix} b^1 - a^1 & \cdots & b^n - a^n \end{pmatrix} I_{n\times n} \begin{pmatrix} b^1 - a^1 \\ \vdots \\ b^n - a^n \end{pmatrix} = \left(b^1 - a^1\right)^2 + \cdots + \left(b^n - a^n\right)^2.$$

Así, obtenemos que $d(A,B) = \sqrt{\left(b^1 - a^1\right)^2 + \cdots + \left(b^n - a^n\right)^2}$.

Distancia de un punto a un hiperplano

Supongamos que $(O, \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\})$ es un sistema de referencia cartesiano ortonormal. Sea H el hiperplano dado por $\mathcal{H} : a_1x^1 + \cdots + a_nx^n + b = 0$, con $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$. Así, tenemos que la ecuación de H será $a_1x^1 + \cdots + a_nx^n = 0$. Así, si $\vec{x} = x^1\vec{u}_1 + \cdots + x^n\vec{u}_n \in H$,

$$\left\langle a_1\vec{u}_1 + \cdots + a_n\vec{u}_n, x^1\vec{u}_1 + \cdots + x^n\vec{u}_n \right\rangle = 0.$$

$H = \{a_1\vec{u}_1 + \cdots + a_n\vec{u}_n\}^{\perp}_{\langle,\rangle}$. Podemos coger el vector unitario

$$\vec{n} = \frac{a_1\vec{u}_1 + \cdots + a_n\vec{u}_n}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}.$$

Sea $\overrightarrow{OM} = m^1\vec{u}_1 + \cdots + m^n\vec{u}_n$. Tenemos que $d(M, \mathcal{H}) = \|\overrightarrow{MM_1}\|$, siendo M_1 la proyección ortogonal de M sobre $\mathcal{H}$. En efecto, como $\overrightarrow{MM_1} = \lambda\vec{n}$,

$$d(M, \mathcal{H}) = \|\lambda\vec{n}\| = |\lambda| \, \|\vec{n}\| = |\lambda| .$$

Si $\overrightarrow{OM_1} = m_1^1\vec{u}_1 + \cdots + m_1^n\vec{u}_n$, entonces, por un lado, $\left\langle \overrightarrow{MM_1}, \vec{n} \right\rangle = \lambda \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = \lambda$, por otro

$$\overrightarrow{MM_1} = \left(m_1^1 - m^1\right)\vec{u}_1 + \cdots + \left(m_1^n - m^n\right)\vec{u}_n.$$

Así,

$$\therefore |\lambda| = \frac{\left|\left(m_1^1 - m^1\right)a_1 + \cdots + \left(m_1^n - m^n\right)a_n\right|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}} = \frac{\left|a_1m^1 + \cdots + a_nm^n + b\right|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}.$$

Distancia de un punto a una recta

Sean $A, B \in \mathcal{E}$ con $A \neq B$. Sea $\mathcal{R} = A + L\left(\left\{\overrightarrow{AB}\right\}\right)$ y sea $M \in \mathcal{E}$. Tenemos que si $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$,

$$\begin{aligned} d(M, \mathcal{R}) =& d(M, M_1) = \|\overrightarrow{MM_1}\| = \|\overrightarrow{MM_1} \wedge \vec{u}\| = \left\| \overrightarrow{MM_1} \wedge \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} \right\| \\ =& \left\| \frac{\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1B} \wedge \overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} \right\| = \frac{\|\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}. \end{aligned}$$

Distancia entre dos rectas que se cruzan

Sean $\mathcal{R}_1 = A + L(\{\vec{u}\})$ y $\mathcal{R}_2 = B + L(\{\vec{v}\})$ dos rectas que se cruzan. Tenemos entonces que $\left\{\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}\right\}$ son linealmente independientes. Buscamos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que

$$0 = \left\langle \overrightarrow{(A + \lambda\vec{u})(B + \mu\vec{v})}, \vec{u} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{(A + \lambda\vec{u})(B + \mu\vec{v})}, \vec{v} \right\rangle.$$

Resolvemos el sistema,

$$\begin{cases} \left\langle \overrightarrow{AB} + \mu\vec{v} - \lambda\vec{u}, \vec{u} \right\rangle = 0 \\ \left\langle \overrightarrow{AB} + \mu\vec{v} - \lambda\vec{u}, \vec{v} \right\rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left\langle \overrightarrow{AB}, \vec{u} \right\rangle + \mu \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle - \lambda \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \\ \left\langle \overrightarrow{AB}, \vec{v} \right\rangle + \mu \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle - \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0. \end{cases} .$$

Desarrollando el sistema obtenemos que

$$\begin{vmatrix} \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle & -\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \\ \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle & -\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \end{vmatrix} = -\left(\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 - \|\vec{v}\|^2 \|\vec{u}\|^2 \right) = -\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 \neq 0.$$

Así, tenemos que $\exists! \lambda_0, \mu_0 \in \mathbb{R}$ tales que $\overrightarrow{(A+\lambda_0 \vec{u})\,(B+\mu_0 \vec{v})} \in \{\vec{u}, \vec{v}\}^{\perp}_{\langle,\rangle}$. Así, $A_1 = A + \lambda_0 \vec{u}$ y $B_1 = B + \mu_0 \vec{v}$ son los puntos de la perpendicular común. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} d\,(A,B)^2 =& \|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1B}\|^2 \\ =& \| \underbrace{\overrightarrow{A_1B_1}}_{\in \{\vec{u},\vec{v}\}^{\perp}_{\langle,\rangle}} + \underbrace{\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{B_1B}}_{\in L(\{\vec{u},\vec{v}\})} \|^2 = \|\overrightarrow{A_1B_1}\|^2 + \|\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1}\|^2 \geq \|\overrightarrow{A_1B_1}\|^2. \end{aligned}$$

Así, dado que

$$d\,(A_1, B_1) = \text{ínf}\left\{ d\,(A,B) \ : \ A \in \mathcal{R}_1, B \in \mathcal{R}_2 \right\},$$

se cumple que $d\,(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \|\overrightarrow{A_1B_1}\|$. Por otro lado, tenemos que $\dfrac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} = \vec{w}$, con $\vec{w} \in \{\vec{u}, \vec{v}\}^{\perp}_{\langle,\rangle}$ y $\|\vec{w}\| = 1$. Finalmente, concluimos que si $\overrightarrow{AB} = \lambda_1 \vec{w}$,

$$\begin{aligned} d\,(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) =& \|\overrightarrow{A_1B_1}\| = |\lambda_1| = \|A_1\vec{B}_1\| \left\| \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} \right\| = \frac{\left| \left\langle \overrightarrow{A_1B_1}, \vec{u} \wedge \vec{v} \right\rangle \right|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} \\ =& \frac{\left| \left\langle \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1B}, \vec{u} \wedge \vec{v} \right\rangle \right|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} = \frac{\left| \left\langle \overrightarrow{AB}, \vec{u} \wedge \vec{v} \right\rangle \right|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} = \frac{\left| \det_{\{\vec{u}_i\}} \left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v} \right) \right|}{\sqrt{\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2}}. \end{aligned}$$

Observación. $\left\langle \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{B_1B}, \vec{u} \wedge \vec{v} \right\rangle = 0.$

Distancia de un punto a un plano

Sean $\{A, B, C\} \subset \mathcal{E}$ afinmente independientes y sea $\mathcal{P} = A + L\left(\left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}\right)$. Recordamos que si $M \in \mathcal{E}$ teníamos que

$$\begin{aligned} d\,(M, \mathcal{P})^2 =& d\left(\overrightarrow{MM_1}\right)^2 = \|\overrightarrow{MM_1}\|^2 = \left| \frac{\left\langle \overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\rangle}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|} \right|^2 = \frac{\left| \left\langle \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\rangle \right|^2}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|^2} \\ =& \frac{\left| \left\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\rangle \right|^2}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|^2} = \frac{\left| \det_{\{\vec{u}_i\}} \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right) \right|^2}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|^2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 8.1. En $\mathbb{R}^3$ consideremos el producto escalar dado por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcular la distancia del origen a la recta que viene dada por las ecuaciones

$$\mathcal{R}:\begin{cases}x+y=2\\ z=-2\end{cases}.$$

En primer lugar, identificamos el subespacio vectorial asociado a $\mathcal{R}$. Este viene dado por las ecuaciones

$$R:\begin{cases}x+y=0\\ z=0\end{cases}.$$

Así, tenemos que $R=L\left(\{(1,-1,0)\}\right)$. Calculamos $R^{\perp}_{\langle,\rangle}$:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=0 \Rightarrow x-y=0.$$

Así, la variedad lineal afín ortogonal a $\mathcal{R}$ que pasa por O viene dado por la ecuación $x-y=0$. Ahora, encontramos la proyección ortogonal de O sobre $\mathcal{R}$, que denominaremos P:

$$\begin{cases}x+y=2\\ z=-2\\ x-y=0\end{cases} \Rightarrow P=(1,1,-2)\,.$$

Así, tendremos que $\overrightarrow{OP}=(1,1,-2)$, por lo que

$$d\left(O,\mathcal{R}\right)=\|\overrightarrow{OP}\|=\|\left(1,1,-2\right)\|=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}=2.$$

8.1. Isometrías

Definición 8.5 (Isometría)**.** Una aplicación $f:\mathcal{E}_1\to\mathcal{E}_2$ es una **isometría** si $\forall A,B\in\mathcal{E}_1$, $d_1\left(A,B\right)=d_2\left(f\left(A\right),f\left(B\right)\right)$.

Teorema 8.2. Una aplicación $f:\mathcal{E}_1\to\mathcal{E}_2$ es una isometría si y solo si f es afín y $\vec{f}$ es una aplicación ortogonal.

Demostración. **(i)** Supongamos que f es una isometría y sea $A\in\mathcal{E}_1$. Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} l: E_1 &\to E_2\\ \vec{u} &\to l\left(\vec{u}\right)=\overrightarrow{f\left(A\right)f\left(A+\vec{u}\right)}.\end{aligned}$$

Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{E}_1$ y $f(A) = A'$. Cogemos $B = A + \vec{u}$ y $C = A + \vec{v}$ con $B' = f(B)$ y $C' = f(C)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} d_1(B,C)^2 =& \|\overrightarrow{BC}\|_1^2 = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|_1^2 = \left\langle \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \right\rangle_1 \\ =& \|\overrightarrow{BA}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 + 2\left\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC} \right\rangle_1 . \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned} d_2(B',C')^2 =& \|\overrightarrow{B'C'}\|_2^2 = \|\overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{A'C'}\|_2^2 = \left\langle \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{A'C'} \right\rangle_2 \\ =& \|\overrightarrow{B'A'}\|_2^2 + \|\overrightarrow{A'C'}\|_2^2 + 2\left\langle \overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{A'C'} \right\rangle_2 . \end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$\left\langle \underbrace{\overrightarrow{BA}}_{-\vec{u}}, \underbrace{\overrightarrow{AC}}_{\vec{v}} \right\rangle_1 = \left\langle \underbrace{\overrightarrow{B'A'}}_{-l(\vec{u})}, \underbrace{\overrightarrow{A'C'}}_{l(\vec{v})} \right\rangle_2 .$$

Por tanto, concluimos que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_1 = \langle l(\vec{u}), l(\vec{v}) \rangle_2$.

(ii) Recíprocamente, sea f una aplicación tal que $\vec{f}$ es ortogonal. Entonces, tenemos que $\forall A, B \in \mathcal{E}_1$,

$$d_2(f(A), f(B)) = \|\overrightarrow{f(A)f(B)}\|_2 = \|\vec{f}\left(\overrightarrow{AB}\right)\|_2 = \|\overrightarrow{AB}\|_1 .$$

□

Observación. Las isometrías son inyectivas. En efecto, como $\vec{f}$ es ortogonal, tendrenmos que $\vec{f}$ es inyectiva, por lo que f será inyectiva.

Proposición 8.2. Si $f : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ y $g : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_3$ son isometrías, entonces $g \circ f : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_3$ es isometría.

Demostración. Tenemos que $\forall A, B \in \mathcal{E}_1$,

$$d_3(g \circ f(A), g \circ f(B)) = d_3(g(f(A)), g(f(B))) = d_2(f(A), f(B)) = d_1(A, B) .$$

□

Definición 8.6. Una isometría $f : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ es un isomorfismo de espacios afines euclídeos si $\exists g : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_1$ isometría tal que $g \circ f = id_{\mathcal{E}_1}$ y $f \circ g = id_{\mathcal{E}_2}$.

Observación. Si $\dim(\mathcal{E}_1) = \dim(\mathcal{E}_2)$, tenemos que es un isomorfismo de espacios afines euclídeos.

Observación. El conjunto $Iso(\mathcal{E}) = \{f : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \ : \ f \text{ isometría}\}$ es un grupo con la operación de composición de funciones.

Observación. La aplicación

$$\begin{aligned} \to : Iso\left(\mathcal{E}\right) &\to O_n\left(\mathbb{R}\right) \\ f &\to \vec{f} \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos. Definimos $Iso^+\left(\mathcal{E}\right) = \left\{f \in Iso\left(\mathcal{E}\right) \;:\; \vec{f} \in O_n^+\left(\mathbb{R}\right)\right\}$ es un subgrupo de $Iso\left(\mathcal{E}\right)$. Análogamente, podemos definir $Iso^-\left(\mathcal{E}\right) = \left\{f \in Iso\left(\mathcal{E}\right) \;:\; \vec{f} \in O_n^-\left(\mathbb{R}\right)\right\}$. Si $f_1, f_2, \ldots, f_k \in Iso^-\left(\mathcal{E}\right)$, entonces

$$f_k \circ f_{k-1} \circ \cdots \circ f_1 \in \begin{cases} Iso^+\left(\mathcal{E}\right), & k \text{ par} \\ Iso^-\left(\mathcal{E}\right), & k \text{ impar} \end{cases}.$$

Observación. Tenemos que $\operatorname{Ker}\left(\to\right) = \left\{f \in Iso\left(\mathcal{E}\right) \;:\; \vec{f} = id_E\right\} = \left\{\tau_{\vec{u}} \;:\; \vec{u} \in E\right\}$.

Definición 8.7 (Simetría ortogonal)**.** Sea $\mathcal{L} = A + L$ con $A \in \mathcal{E}$ y $L \in \mathcal{L}\left(E\right)$. Llamaremos **simetría ortogonal** respecto de $\mathcal{L}$ a la simetría de base $\mathcal{L}$ y dirección $L^{\perp}_{\langle,\rangle}$.

Si $\dim\left(\mathcal{E}\right) = n$ y $l \in O_n\left(E\right)$ y y $L = \left\{\vec{u} \in E \;:\; l\left(\vec{u}\right) = \vec{u}\right\} \in \mathcal{L}\left(E\right)$ y $p = \dim\left(L\right)$, entonces existen $\sigma_1 \circ \cdots \sigma_{n-p}$ simetrías ortogonales respecto de hiperplanos vectoriales de E tales que $l = \sigma_{n-p} \circ \cdots \circ \sigma_1$. Si $f \in Iso\left(\mathcal{E}\right)$, $\mathcal{L} = \left\{A \in \mathcal{E} \;:\; f\left(A\right) = A\right\}$ es una variedad lineal afín que, si no es vacía, tiene por dirección L.

Teorema 8.3. Sea $M, N \in \mathcal{E}$ con $M \neq N$, entonces existe una única simetría de base un hiperplano, s, tal que $s\left(M\right) = N$ ($\iff$ $s\left(N\right) = M$).

Demostración. **Unicidad.** Sea P el punto medio entre M y N, entonces

$$P = M + \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}.$$

Así, tenemos que $s\left(P\right) = P$. Además, el hiperplano de base será $\mathcal{H} = P + \left\{\overrightarrow{MN}\right\}^{\perp}_{\langle,\rangle}$.

Existencia. Sea s la simetría ortogonal respecto de $\mathcal{H} = P + \left\{\overrightarrow{MN}\right\}^{\perp}_{\langle,\rangle}$. Tenemos que

$$s\left(M\right) = M + 2\overrightarrow{MP} = N + \overrightarrow{NM} + 2\overrightarrow{MP} = N.$$

$\square$

Si $f \in Iso\left(\mathcal{E}\right)$ tenemos que $\vec{f} \in O_n\left(E\right)$. Sea $\mathcal{L} = \left\{A \in \mathcal{E} \;:\; f\left(A\right) = A\right\}$ y sea $L = \left\{\vec{u} \in E \;:\; \vec{f}\left(\vec{u}\right) = \vec{u}\right\}$.

Observación. Si $\mathcal{L} \neq \emptyset$, sea $A \in \mathcal{E}$ y $f\left(A\right) \in \mathcal{E}$ con $A \neq f\left(A\right)$, existe una única simetría s tal que $s\left(A\right) = f\left(A\right)$ y $A = s\left(f\left(A\right)\right)$. Podemos considerar el conjunto

$$\left\{s \circ f \in Iso\left(\mathcal{E}\right) \;:\; M \in \mathcal{E}, s \circ f\left(M\right) \neq \emptyset\right\}.$$

8.2. Caso $n = 2$

- $\dim(\mathcal{L}) = 2$.
- $\dim(\mathcal{L}) = 1$. Tendremos que $f \in Iso^-(\mathcal{E})$ y f es la isometría ortogonal de base la recta $\mathcal{L}$.
- $\dim(\mathcal{L}) = 0$. Si $\mathcal{L} = \{C\}$, tenemos que $\{C, \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}\}$ es una referencia ortonormal, por lo que la matriz de f en esta referencia será

$$f \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}, \; a^2 + b^2 = 1.$$

- $\mathcal{L} = \emptyset$. Puede suceder que $f \in Iso^+(\mathcal{E})$, en cuyo caso tenemos que f es composición de dos simetrías ortogonales respecto de rectas paralelas, o es una traslación. Otro caso es que $f \in Iso^-(\mathcal{E})$, por lo que f es composición de tres simetrías ortogonales respecto de rectas que se cortan (deslizamiento). Existe $\mathcal{L}_1$ recta de dirección L_1 y $\vec{u} \in L_1$ tal que $f = \tau_{\vec{u}} \circ s_1 = s_1 \circ \tau_{\vec{u}}$.

8.3. Caso $n = 3$

- $\dim(\mathcal{L}) = 3$.
- $\dim(\mathcal{L}) = 2$.
- $\dim(\mathcal{L}) = 1$. Una rotación de eje la recta $\mathcal{L}$.
- $\dim(\mathcal{L}) = 0$.
- $\mathcal{L} = \emptyset$. O bien f es una traslación ($f \in Iso(\mathcal{E})^+$). Si $f \in Iso^-(\mathcal{E})$,

8.4. Cónicas y cuádricas

Sea $\mathcal{E}$ un espacio afín euclídeo bidimensional.

Definición 8.8 (Cónica)**.** Una **cónica** $\mathcal{C}$ definida en $\mathcal{E}$ es un conjunto de puntos de $\mathcal{E}$ cuyas coordenadas (x, y) respecto de un sistema de referencia ortonormal satisfacen la ecuación

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0,$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ y a_{12}, a_{22} y a_{11} no son simultáneamente nulos.

Observación. Si $a_{11} = a_{22} = a_{12} = 0$, tendríamos que

- $\mathcal{C}$ es una recta si a_{01} o a_{02} no son nulos.
- $\mathcal{C} = \emptyset$ si $a_{01} = a_{02} = 0$.
- $\mathcal{C} = \mathcal{E}$ si todos los coeficientes son nulos.

Observación. La ecuación de la definición se puede escribir matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Las matrices $A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $A_{00} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ son simétricas.

Sean $I = \operatorname{traz}(A_{00}) = a_{11} + a_{22}$, $J = \det(A_{00})$ y $k = \det(A)$. Como A_{00} es una matriz simétrica real, existe una matriz D ortogonal tal que

$$D^t A_{00} D = \begin{pmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{pmatrix}, \; J = a'_{11} a'_{22}, \; I = a'_{11} + a'_{22}.$$

Consideremos el cambio de sistema de referencia ortonormal dado por el isomorfismo de matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & D & \\ 0 & & \end{pmatrix}$. Así, la ecuación de la definición queda de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & x' & y' \end{pmatrix} A' \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = 0, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & D^t & \\ 0 & & \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & D & \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a'_{01} & a'_{02} \\ a'_{01} & a'_{11} & 0 \\ a'_{02} & 0 & a'_{22} \end{pmatrix},$$

y $k = \det(A')$. Ahora consideramos la traslación del vector (c_1, c_2), la cónica se transforma en

$$\begin{pmatrix} 1 & x'' & y'' \end{pmatrix} A'' \begin{pmatrix} 1 \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix},$$

donde

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & 1 & 0 \\ c_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a''_{00} & a'_{01} + c_1 a'_{11} & a'_{02} + c_2 a'_{22} \\ a'_{01} + c_1 a'_{01} & a'_{11} & 0 \\ a'_{02} + c_2 a'_{22} & 0 & a'_{22} \end{pmatrix},$$

donde $a''_{00} = a_{00} + 2c_1 a'_{01} + 2c_2 a'_{02} + c_1^2 a'_{11} + c_2^2 a'_{22}$. Así, si $a'_{11} \neq 0$ (respectivamente $a'_{22} \neq 0$) se puede elegir c_1 (respectivamente c_2) de manera que $a''_{01} = 0$ (respectivamente $a''_{02} = 0$).

Por otra parte, $k = \det(A'')$, $J = a'_{11} a'_{22}$ o $J = a'_{11} + a'_{22}$. De esta manera si, por ejemplo, $J \neq 0$ la ecuación de la cónica $\mathcal{C}$ queda:

$$a'_{11} x''^2 + a'_{22} y''^2 + a''_{00} = 0.$$

Entonces, dependiendo de la nulidad o no de a''_{00} y de los signos de a'_{11}, a'_{22} y a''_{00} se tienen las siguientes posibilidades.

Si $a''_{00} \neq 0$ ($\iff$ $k \neq 0$) y $\operatorname{sig}(a'_{11}) = \operatorname{sig}(a'_{22}) \neq \operatorname{sig}(a''_{00})$ ($\iff$ $J > 0$ y $\operatorname{sig}(k) \neq \operatorname{sig}(I)$), la ecuación anterior se puede poner como:

$$\underbrace{\left(\frac{a'_{11}}{-a''_{00}}\right)}_{>0} x''^2 + \underbrace{\left(\frac{a'_{22}}{-a''_{00}}\right)}_{>0} y''^2 = 1.$$

Si tomamos $\alpha^2 = \dfrac{-a'_{00}}{a'_{11}}$ y $\beta^2 = \dfrac{-a'_{00}}{a'_{22}}$ nos queda

$$\frac{x''^2}{\alpha^2} + \frac{y''^2}{\beta^2} = 1.$$

Analizando las distintas posibilidades según los valores de los invariantes I, J, k se llega a la siguiente clasificación de las cónicas:

- $J \neq 0$
  - Se denomina **irreducible** si $k \neq 0$
    - Si $J > 0$ se denomina **elipse**
      - Es una **elipse real** si $\operatorname{sig}(k) \neq \operatorname{sig}(I)$
      - Es una **elipse imaginaria** ($C = (0,0)$) si $\operatorname{sig}(k) = \operatorname{sig}(I)$
    - Si $J < 0$ se denomina **hipérbola** ($\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$)
  - Se denomina **degenerada** si $k = 0$
    - Si $J > 0$, se trata de un par de rectas imaginarias conjugadas que se cortan en un punto, $(0,0)$
    - Si $J < 0$, se trata de rectas que se cortan
- $J = 0$
  - Si $k \neq 0$ es **irreducible** y se trata de una parábola ($y^2 = 2kx$, $k > 0$)
  - Si $k = 0$ es **degenerada**
    - Si la signatura de β [1] es igual a 0, se trata de un par de rectas paralelas.
    - Si la signatura de β es igual a 2, se trata de un par de rectas paralelas imaginarias.
    - Si el rango de A es igual a 1, se trata de un par de rectas coincidentes.

Definición 8.9 (Cuadráticas)**.** Consideremos un espacio afín euclídeo tridimensional, $\mathcal{E}$. Una **cuadrática** $\mathcal{C}$ definida en $\mathcal{E}$ es el conjunto de puntos de $\mathcal{E}$ cuyas coordenadas respecto de un sistema de referencia ortonormal verifican

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{01}x + 2a_{02}y + 2a_{03}z + a_{00} = 0,$$

donde $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23} \in \mathbb{R}$ no son simultáneamente y $a_{01}, a_{02}, a_{03}, a_{00} \in \mathbb{R}$.

[1] β es la forma bilineal simétrica de matriz A.

Matricialmente, tenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Las matrices $A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ y $A_{00} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ son matrices reales simétricas, por lo que existe una matriz ortogonal D de orden 3 tal que

$$D^t A_{00} D = \begin{pmatrix} a'_{11} & 0 & 0 \\ 0a'_{22} & 0 & \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{pmatrix}.$$

Considerando el cambio de sistema de referencia dado por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & D & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, la ecuación de la definición queda

$$\begin{pmatrix} 1 & x' & y' & z' \end{pmatrix} A' \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0,$$

donde

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & D^t & \\ 0 & & & \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & D & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a'_{01} & a'_{02} & a'_{03} \\ a'_{01} & a'_{11} & 0 & 0 \\ a'_{02} & 0 & a'_{22} & 0 \\ a'_{03} & 0 & 0 & a'_{33} \end{pmatrix},$$

y $\det(A) = \det(A')$, $\det(A_{00}) = a'_{11}a'_{22}a'_{33}$ y $\operatorname{traz}(A_{00}) = a'_{11} + a'_{22} + a'_{33}$.

Si ahora consideramos la traslación de vector (c_1, c_2, c_3), la ecuación de $\mathcal{C}$ se transforma en

$$\begin{pmatrix} 1 & x'' & y'' & z'' \end{pmatrix} A'' \begin{pmatrix} 1 \\ x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = 0,$$

donde

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 1 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 1 & 0 \\ c_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a''_{00} & a'_{01} + c_1a'_{11} & a'_{02} + c_2a'_{22} & a'_{03} + c_3a'_{33} \\ a'_{01} + c_1a'_{11} & a'_{11} & 0 & 0 \\ a'_{02} + c_2a'_{22} & 0 & a'_{22} & 0 \\ a'_{03} + c_3a'_{33} & 0 & 0 & a'_{33} \end{pmatrix},$$

$$a''_{00} = a_{00} + 2c_1a'_{01} + 2c_2a'_{02} + 2c_3a'_{03} + c_1^2a'_{11} + c_2^2a'_{22} + c_3^2a'_{33}.$$

Un razonamiento análogo al realizado con las cónicas permite llegar a la siguiente clasificación de las cuádricas:

Caso 1: $a'_{11}a'_{22}a'_{33} \neq 0 \iff \det(A_{00}) \neq 0$

Notación. La expresión $\mathrm{sig}(i,j,k)$ significa que: i es el coíndice de β_0, j es el índice de β_0 y $k = 3-i-j = \dim \mathrm{rad}(\beta_0)$, donde β_0 es la forma bilineal simétrica de matriz A_{00}.

(a) Si $a''_{00} \neq 0 \iff \det(A) \neq 0$:

Elipsoide imaginario: $\mathrm{sig}(3,0,0)$ o $(0,3,0)$, y $\mathrm{sig}(a'_{00}) = \mathrm{sig}(a'_{11})$.

Elipsoide real: $\mathrm{sig}(3,0,0)$ o $(0,3,0)$, y $\mathrm{sig}(a'_{00}) = \mathrm{sig}(a'_{12})$.

$$\frac{x_1^2}{b_1^2} + \frac{x_2^2}{b_2^2} + \frac{x_3^2}{b_3^2} = 1.$$

Hiperboloide hiperbólico: $\mathrm{sig}(2,1,0)$ o $(1,2,0)$, y $\mathrm{sig}(a''_{00}) = \underbrace{\mathrm{sig}(a''_{11}) \neq \mathrm{sig}(a''_{22})}_{\iff \det(A)>0} = \mathrm{sig}(a''_{33})$.

$$\frac{-x_1^2}{b_1^2} + \frac{x_2^2}{b_2^2} + \frac{x_3^2}{b_3^2} = 1.$$

Hiperboloide elíptico: $\mathrm{sig}(2,1,0)$ o $(1,2,0)$, y $\mathrm{sig}(a''_{00}) = \underbrace{\mathrm{sig}(a''_{11}) = \mathrm{sig}(a''_{22})}_{\iff \det(A)<0} \neq \mathrm{sig}(a''_{33})$.

$$\frac{-x_1^2}{b_1^2} - \frac{x_2^2}{b_2^2} + \frac{x_3^2}{b_3^2} = 1.$$

(b) Si $a''_{00} = 0 \iff \det(A) = 0$:

Cono imaginario con vértice real: $\mathrm{sig}(3,0,0)$ o $(0,3,0)$.

$$a'_{11}x_1^2 + a'_{22}x_2^2 + a'_{33}x_3^2 = 0.$$

Cono real: $\mathrm{sig}(2,1,0)$ o $(1,2,0)$.

$$c_1^2x_1^2 + c_2^2x_2^2 - c_3^2x_3^2 = 0.$$

Caso 2: $\mathrm{ran}(A) = 2$, $a'_{11} \neq 0 \neq a'_{22}$, $a'_{33} = 0$

(a) Si $\det(A) \neq 0 \iff a''_{03} \neq 0$:

Paraboloide elíptico: $\mathrm{sig}(2,0,1)$ o $(0,2,1)$.

$$x_3 = \frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2}.$$

Paraboloide hiperbólico: $\mathrm{sig}(1,1,1)$.

(b) Si $\det(A) = 0 \iff a''_{03} = 0$:

(b1) Si $\mathrm{sig}(2,0,1)$ o $(0,2,1)$:

Cilindro elíptico imaginario: $\mathrm{sig}\,(a'_{00}) = \mathrm{sig}\,(a''_{11}) = \mathrm{sig}\,(a''_{22})$.
Cilindro elíptico: $\mathrm{sig}\,(a'_{00}) \neq \mathrm{sig}\,(a''_{11}) = \mathrm{sig}\,(a''_{22})$.

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1.$$

Par de planos imaginarios que se cortan en una recta real: $a'_{00} = 0$.

(b2) Si $\mathrm{sig}\,(1, 1, 1)$:

Cilindro hiperbólico: $a''_{00} \neq 0$.
Plar de planos que se cortan: $a''_{00} = 0$.

Caso 3: $\mathrm{ran}\,(A_{00}) = 1$, $a''_{22} = a''_{33} = 0$

Cilindro parabólico: $a''_{02} \neq 0$.

$$y^2 = 2px.$$

Si $a''_{02} = 0$:

Si $a''_{00} \neq 0$,

Par de planos imaginarios: $\mathrm{sig}\,(a'_{00}) = \mathrm{sig}\,(a'_{11})$.
Par de planos paralelos: $\mathrm{sig}\,(a''_{00}) \neq \mathrm{sig}\,(a''_{11})$.

Par de planos coincidentes: $a''_{00} = 0$.