# Estructuras Algebraicas - Entrega 2

Victoria Eugenia Torroja Rubio

27/10/2025

**Ejercicio 1.** Demostrar que $U(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^*$ si y solo si $p \geq 2$ es primo. Deducir que $\mathbb{Z}_p^*$ es un grupo si y solo si $p \geq 2$ es primo.

**Ejercicio 2.** Sea $G = D_6$. Encuentra una serie normal

$$\{e\} \lhd H_1 \lhd H_2 \lhd G$$

tal que cada cociente $H_{i+1}/H_i$ sea abeliano.

**Ejercicio 3.** Sea

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

con la multiplicación matricial usual.

**(a)** Muestra que $H$ es finitamente generado.

**(b)** Da un conjunto de generadores mínimos.

**(c)** ¿Es abeliano?

**Solución 1. (c)** El grupo $H$ no es abeliano. En efecto, sean

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1 & -11 & -13 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$h_1 \cdot h_2 = \begin{pmatrix} 1 & -15 & -37 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & -15 & -50 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = h_2 \cdot h_1.$$

**Ejercicio 4.** Demuestre o refute cada una de las siguientes proposiciones.

**(a)** Todos los generadores de $\mathbb{Z}_{60}$ son primos.

**(b)** $U_8$ es cíclico.

**(c)** $\mathbb{Q}$ es cíclico.

**(d)** Si todo subgrupo propio de un grupo $G$ es cíclico, entonces $G$ es un grupo cíclico.

**(e)** Un grupo con un número finito de subgrupos es finito.

**Solución 2.** **(a)** No es cierto, puesto que $\mathbb{Z}_{60} = \langle 49 \rangle$. En efecto, tenemos que

$$60|49k \iff 60|k.$$

Por tanto, tenemos que $o\,(14) = 60$ y en consecuencia $\mathbb{Z}_{60} = \langle 49 \rangle$.

**(b)** Es cierto.

**(c)** No es cierto que $\mathbb{Q}$ es cíclico. En efecto, está claro que $\mathbb{Q} \neq \langle 0 \rangle$. Ahora, supongamos que $\mathbb{Q} = \langle x \rangle$ con $x = \dfrac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Podemos encontrar $m \in \mathbb{Z}$ tal que $\operatorname{mcd}(m, b) = 1$, de esta forma tenemos que $\dfrac{1}{m} \in \mathbb{Q}$ pero $\dfrac{1}{m} \in \langle x \rangle$. En efecto, si $\dfrac{1}{m} \in \langle x \rangle$ tendríamos que

$$\frac{1}{m} = \frac{a}{b} \iff b = ma.$$

Esto último es una contradicción puesto que $\operatorname{mcd}(b, m) = 1$. Así, tenemos que no puede ser que $\mathbb{Q} = \langle x \rangle$, $\forall x \in \mathbb{Q}$, por lo que $\mathbb{Q}$ no es cíclico.

**(d)** Supongamos que $\forall H < G$, $H$ es cíclico y $G$ no es cíclico. Así, como $G$ no es cíclico tenemos que $\forall g \in G$, $G \neq \langle g \rangle$. Así, tenemos que

**Ejercicio 5.** Sea $G = \left\langle R, S / R^4 = S^4 = (RS)^2 = \left(R^{-1}S\right)^2 = 1 \right\rangle$ un grupo finito.

**(a)** ¿Qué orden tiene el grupo $G$?

**(b)** ¿Cuál es el exponente de $G$?

**(c)** ¿Qué orden tiene el elemento $R^2SRS^3RS^2$?