

# Geometría Lineal

Victoria Torroja Rubio

8/9/2025

# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| <b>0. Preliminares</b>   | <b>4</b>  |
| 0.1. Partición de $\mathbb{Z}$ definida por $n\mathbb{Z}$ . . . . .      | 5         |
| <b>1. Geometría sintética</b>  | <b>7</b>  |
| 1.1. Planos afines sintéticos . . . . .                                  | 7         |
| 1.1.1. Independencia de los axiomas . . . . .                            | 9         |
| 1.1.2. Algunos teoremas . . . . .  | 9         |
| 1.1.3. Planos afines finitos . . . . .                                   | 12        |
| 1.2. Planos proyectivos sintéticos . . . . .                             | 13        |
| 1.2.1. Independencia de los axiomas . . . . .                            | 14        |
| 1.2.2. Algunos teoremas . . . . .  | 14        |
| 1.2.3. Construcción de planos proyectivos desde planos afines . . . . .  | 16        |
| 1.2.4. Construcción de un plano afín desde un plano proyectivo . . . . . | 18        |
| 1.2.5. Dualidad . . . . .  | 19        |
| 1.3. Independencia del teorema de Desargues . . . . .                    | 21        |
| <b>2. Geometría afín y proyectiva lineal</b>                             | <b>24</b> |
| 2.1. Espacios proyectivos y afines . . . . .                             | 24        |
| 2.1.1. Sistemas de referencia . . . . .                                  | 27        |
| 2.1.2. Cambio de coordenadas cartesianas . . . . .                       | 33        |
| 2.1.3. Cambio de coordenadas baricéntricas . . . . .                     | 34        |
| 2.1.4. Cambios de coordenadas homogéneas en $\mathbb{P}$ . . . . .       | 34        |
| 2.2. Aplicaciones afines . . . . .                                       | 36        |
| 2.3. Aplicaciones proyectivas . . . . .                                  | 42        |
| 2.4. Variedades . . . . .  | 47        |
| 2.4.1. Variedades afines . . . . .                                       | 47        |
| 2.4.2. Ecuaciones de variedades afines . . . . .                         | 52        |
| 2.4.3. Variedades proyectivas . . . . .                                  | 54        |
| <b>3. Dualidad</b>   | <b>59</b> |
| 3.1. Repaso del espacio dual . . . . .                                   | 59        |
| 3.2. Dualidad en espacios proyectivos . . . . .                          | 62        |
| 3.3. Coordenadas y dualidad . . . . .                                    | 63        |
| 3.4. Aplicaciones duales . . . . .                                       | 66        |
| 3.5. Variedades invariantes por homografías . . . . .                    | 67        |
| 3.6. Espacios afines en espacios proyectivos . . . . .                   | 73        |
| 3.7. Completaciones proyectivas . . . . .                                | 76        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>4. Cónicas y cuádricas</b>                         | <b>81</b> |
| 4.1. Clasificación de cuádricas proyectivas . . . . . | 81        |
| 4.2. Clasificación de cuádricas afines . . . . .      | 87        |

**Información útil en el Campus Virtual.**

**Bibliografía:** El libro que más sigue es el tercero de la bibliografía, aunque no incluye la primera parte de geometría sintética.

**Evaluación:** será el máximo entre

- Final
- 75 % Final + 15 % Parcial + 10 % Entrega ejercicios

**Fechas:**

- Parcial individual en el aula: 27 de octubre
- Entrega de ejercicios en grupo: 1 de diciembre

# Capítulo 0

## Preliminares

**Definición 0.1 (Cuerpo).** Un **cuerpo** es un conjunto  $\mathbb{K}$  con dos operaciones  $+$  y  $\cdot$  tales que:

- $(\mathbb{K}, +)$  es un grupo abeliano.
- $(\mathbb{K}/\{0\}, \cdot)$  es un grupo abeliano.
- Se cumple la propiedad distributiva.

**Definición 0.2 (Espacio vectorial).** Un **espacio vectorial**  $V$  sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$ , es un grupo abeliano  $(V, +)$  con una función  $\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$  tal que:

- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{v} \in V, \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{v}.$
- $\forall \vec{v} \in V, 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}.$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \lambda (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v}.$
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{v} \in V, \lambda \vec{v} + \mu \vec{v}.$

**Observación.** Dado  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial, si  $\dim(V) = n < \infty$ , entonces se tiene que  $V \cong \mathbb{K}^n$ .

**Definición 0.3 (Relación de equivalencia).** Una relación  $\mathcal{R}$  en un conjunto  $X$  es de **equivalencia** si cumple:

**Reflexiva.**  $\forall x \in X, x \mathcal{R} x.$

**Simétrica.**  $\forall x, y \in X, x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x.$

**Transitiva.**  $\forall x, y, z \in X, (x \mathcal{R} y) \wedge (y \mathcal{R} z) \Rightarrow (x \mathcal{R} z).$

Recordamos los conjuntos de **clase de equivalencia** de un elemento  $x \in X$ :

$$[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in X : y \mathcal{R} x\}.$$

Similarmente, tenemos que el **conjunto cociente** de una relación de equivalencia es

$$X/\mathcal{R} = \{[x]_{\mathcal{R}} : x \in X\}.$$

Una **partición** de  $X$  es una familia de subconjuntos de  $X$ , disjuntos dos a dos, cuya unión es  $X$ .

## 0.1. Partición de $\mathbb{Z}$ definida por $n\mathbb{Z}$

Para  $A, B \subset \mathbb{Z}$ , definimos las operaciones

- $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ .
- $A \cdot B = \{a \cdot b : a \in A, b \in B\}$ .
- $n\mathbb{Z} := \{n\} \cdot \mathbb{Z}$ .
- $a + n\mathbb{Z} := \{a\} + \{n\}\mathbb{Z}$ .

**Teorema 0.1** (**Algoritmo de la división**). Para todo  $x \in \mathbb{Z}$  existe un único  $q \in \mathbb{Z}$  y  $r \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$  tal que  $x = r + qn$ . Por tanto,

$$\{n\mathbb{Z}, 1 + n\mathbb{Z}, \dots, (n - 1) + n\mathbb{Z}\},$$

es una partición de  $\mathbb{Z}$  que denotamos por  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

**Observación.** La partición anterior se corresponde con la relación de equivalencia

$$a\mathcal{R}_n b \iff a - b \in n\mathbb{Z}.$$

**Teorema 0.2.** El par  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  es un grupo, con la suma definida de la siguiente forma:

$$(a + n\mathbb{Z}) + (b + n\mathbb{Z}) = (a + b) + n\mathbb{Z} = r + n\mathbb{Z},$$

donde  $a + b = r + qn$  con  $r \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$ .

*Demostración.* Primero vamos a ver que la aplicación está bien definida. Para ello, vamos a ver que no depende del representante. Es decir, supongamos que  $x_1, x_2 \in [x]_{\mathcal{R}}$  e  $y_1, y_2 \in [y]_{\mathcal{R}}$ . Tenemos que  $x_2 = x_1 + \lambda n$  e  $y_2 = y_1 + \mu n$ , así tenemos que

$$y_2 + x_2 = y_1 + \mu n + x_1 + \lambda n = (y_1 + x_1) + (\mu + \lambda) n.$$

Así, tenemos que  $y_2 + x_2 \mathcal{R}_n y_1 + x_1$ , por lo que  $y_2 + x_2 \in [y_1 + x_1]_{\mathcal{R}_n}$ . Así, hemos visto que está bien definida y, por la definición, se puede ver que es una operación binaria en  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Ahora tenemos que ver que es asociativa:

$$\begin{aligned} [(a + n\mathbb{Z}) + (b + n\mathbb{Z})] + (c + n\mathbb{Z}) &= [(a + b) + n\mathbb{Z}] + (c + n\mathbb{Z}) \\ &= (a + b + c) + n\mathbb{Z} \\ &= (a + n\mathbb{Z}) + [(b + c) + n\mathbb{Z}] \\ &= (a + n\mathbb{Z}) + [(b + n\mathbb{Z}) + (c + n\mathbb{Z})]. \end{aligned}$$

Ahora vamos a ver que existen el elemento neutro y los inversos. Por un lado, tenemos que el elemento neutro es claramente  $0 + n\mathbb{Z}$ . En efecto,  $\forall a \in \mathbb{Z}$ ,

$$(0 + n\mathbb{Z}) + (a + n\mathbb{Z}) = (0 + a) + n\mathbb{Z} = a + n\mathbb{Z}.$$

Así, tenemos que  $0$  es el elemento neutro. En cuanto al inverso, si  $a \in \mathbb{Z}$ , tenemos que  $-a + n\mathbb{Z}$  es su inverso:

$$(a + n\mathbb{Z}) + (-a + n\mathbb{Z}) = (a - a) + n\mathbb{Z} = 0 + n\mathbb{Z}.$$

□

**Observación.** Además, se tiene que dado que la suma en  $\mathbb{Z}$  es conmutativa, la suma definida en  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  también lo es.

**Proposición 0.1.** Para  $\forall a, b \in \mathbb{Z}$  se tiene que

(i)  $(a + n\mathbb{Z}) \cdot (b + n\mathbb{Z}) \neq \emptyset$ .

(ii)  $(a + n\mathbb{Z}) \cdot (b + n\mathbb{Z}) \subset (a \cdot b) + n\mathbb{Z} = r + n\mathbb{Z}$ , donde  $a \cdot b = r + qn$  con  $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ .

*Demuestra.* (i) Dado que  $a, b \in \mathbb{Z}$ , tenemos que  $a + n\mathbb{Z}, b + n\mathbb{Z} \neq \emptyset$ . Así, por nuestra definición del producto de conjuntos, tenemos que  $(a + n\mathbb{Z}) \cdot (b + n\mathbb{Z}) \neq \emptyset$ .

(ii) Si  $x \in (a + n\mathbb{Z}) \cdot (b + n\mathbb{Z})$ , tenemos que  $x = y \cdot z$  para  $y \in a + n\mathbb{Z}$  y  $z \in b + n\mathbb{Z}$ . Así,  $y = a + \lambda n$  y  $z = b + \mu n$ , con  $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ . Así, queda que

$$x = y \cdot z = (a + \lambda n) \cdot (b + \mu n) = ab + (a\mu + \lambda b + \lambda\mu n)n.$$

Así, está claro que  $x \in (a \cdot b) + n\mathbb{Z}$ .

□

**Observación.** En cuanto a la parte (ii) de la proposición anterior, la igualdad no tiene por qué darse. En efecto, consideremos como ejemplo

Definimos la operación  $* : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  como

$$(a + n\mathbb{Z}) * (b + n\mathbb{Z}) = (c + n\mathbb{Z}) \iff (a + n\mathbb{Z}) \cdot (b + n\mathbb{Z}) \subset c + n\mathbb{Z}.$$

# Capítulo 1

## Geometría sintética

### 1.1. Planos afines sintéticos

**Definición 1.1 (Plano afín).** Un **plano afín** es un par  $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$  donde  $\mathcal{P}$  es un conjunto no vacío cuyos elementos llamamos **puntos**, y  $\mathcal{R}$  es un conjunto de subconjuntos de  $\mathcal{P}$  cuyos elementos llamamos **rectas**, que satisfacen lo siguiente:

- A1.** Sean  $P, Q \in \mathcal{P}$  con  $P \neq Q$ . Existe una única recta  $l \in \mathcal{R}$  tal que  $P, Q \in l$  (escribimos  $l = l(PQ)$ ).
- A2.**  $\forall l \in \mathcal{R}, \forall P \in \mathcal{P}, P \notin l$ , existe una única recta  $m \in \mathcal{R}$  tal que  $P \in m$  y  $m \cap l = \emptyset$ .
- A3.** Toda recta tiene al menos dos puntos y hay al menos dos rectas.

**Observación.** El tercer axioma asegura que se trata de algo dimensional.

**Definición 1.2 (Rectas paralelas).** Si  $l, m \in \mathcal{R}$  tales que  $l \cap m = \emptyset$ , diremos que  $l$  y  $m$  son **paralelas** y escribimos  $l \parallel m$ .

**Ejemplo (Plano cartesiano).** El plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$  es un plano afín. Tenemos que

$$\mathcal{P} = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

$$\mathcal{R} : l = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : ax_1 + bx_2 = 0, a, b, c \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0)\} := \{ax_1 + bx_2 = c\}.$$

Vamos a ver que verifica los axiomas. Comprobamos **A1**. Si tomamos  $P = (a_1, a_2)$  y  $Q = (b_1, b_2)$ , tenemos que la ecuación de una recta que pasa por  $P$  y  $Q$  será

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \iff (b_2 - b_1)x_1 + (a_1 - a_2)x_2 = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Así, existe una única recta que contiene a  $P$  y  $Q$ . Sabemos que la recta es única porque

el sistema

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = c \\ a'x_1 + b'x_2 = c \end{cases},$$

tiene dos soluciones (porque  $P \neq Q$ ), por lo que tiene infinitas soluciones. Ahora comprobamos el axioma **A2**. Supongamos que  $l = \{ax_1 + bx_2 = c\}$ ,  $P = (a_1, b_1) \notin l$ , es decir,

$$aa_1 + bb_1 \neq c.$$

Tomamos la recta  $m = \{ax_1 + bx_2 = aa_1 + bb_1\}$ . Tenemos que  $P \in m$ . Por otro lado, calculamos  $m \cap l$ :

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = c \\ ax_1 + bx_2 = aa_1 + bb_1 \end{cases}.$$

Se trata de un sistema incompatible puesto que  $\text{ran} \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} < \text{ran} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & aa_1 + bb_1 \end{pmatrix}$ .

Así, tenemos que  $l \cap m = \emptyset$ . La unicidad se deduce de un argumento similar al anterior. En cuanto a **A3**, tenemos que existe dos rectas  $\{x_1 = 0\}$  y  $\{x_2 = 0\}$ , y los puntos  $\left(0, \frac{c}{b}\right), \left(\frac{c}{a}, 0\right) \in l = \{ax_1 + bx_2 = c\}$ . Si  $a = 0$  o  $b = 0$  tenemos que **A3** se sigue cumpliendo:

$$\left(\frac{c}{a}, 0\right), \left(\frac{c}{a}, 1\right) \in \{ax_1 = c\}, \quad \left(0, \frac{c}{b}\right), \left(1, \frac{c}{b}\right) \in \{bx_2 = c\}.$$

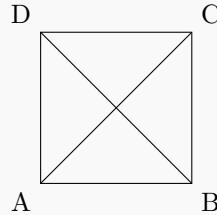
**Observación.** Una recta tiene más de una ecuación asociada. En efecto,

$$l = \{ax_1 + bx_2 = c\} = \{\lambda ax_1 + \lambda bx_2 = \lambda c\}, \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

**Ejemplo.** Consideremos  $\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}$  y

$$\mathcal{R} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}.$$

Tenemos que este plano se corresponde con el gráfico siguiente:



Se puede ver claramente que **A1** y **A2** se cumplen. Es trivial que **A3** se cumple.

**Teorema 1.1.** Si  $\mathbb{K}$  es un cuerpo, entonces  $\mathbb{K}^2$  es un plano afín con puntos  $\mathbb{K}^2$  y rectas las ecuaciones lineales.

*Demostración.* Adaptar la demostración del ejemplo del plano cartesiano. □

**Ejemplo.** Consideremos el cuerpo  $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$  con la suma módulo 2 y el producto también módulo 2. Tenemos, por el teorema anterior, el plano afín  $\mathbb{F}_2^2$  de la forma:

$$\mathbb{F}_2^2 = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}.$$

$$\mathcal{R} = \{\{x_1 = 0\}, \{x_2 = 0\}, \{x_1 = 1\}, \{x_2 = 1\}, \{x_1 + x_2 = 1\}\}.$$

Gráficamente podemos ver que es igual al ejemplo anterior. En este caso, decimos que existe una colineación entre ellos.

### 1.1.1. Independencia de los axiomas

En primer lugar, estudiamos la independencia de **A3**. Consideremos un ejemplo que satisface **A1** y **A2**:  $\mathcal{P} = \mathbb{R}$  y  $\mathcal{R} = \{l = \mathbb{R}\}$ . Así, tenemos que **A3** es independiente de los otros dos axiomas.

Ahora vamos a ver la independencia de **A2** respecto de **A1** y **A3**. Para ello eplearemos el ejemplo del plano de Fano (Gino Fano, 1892):

$$\mathcal{P} = \{A, B, C, D, E, F, G\}.$$

$$\mathcal{R} = \{\{A, B, C\}, \{C, D, E\}, \{E, F, A\}, \{A, G, D\}, \{B, G, E\}, \{C, G, F\}, \{F, B, D\}\}.$$

Tenemos que  $|\mathcal{P}| = |\mathcal{R}| = 7$ . Está claro que se verifica **A3**, puesto que  $|\mathcal{R}| = 7$  y  $\forall l \in \mathcal{R}, |l| = 3$ . Se puede ver gráficamente que se cumple **A1** y no se cumple **A2**, pues cualquier par de rectas se interseca y por tanto no existen rectas paralelas: Este es el plano proyectivo más pequeño.

Ahora tenemos que estudiar la independencia de **A1** respecto de **A2** y **A3**. Consideremos

$$\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}.$$

$$\mathcal{R} = \{\{A, B\}, \{C, D\}\}.$$

Tenemos que **A3** se verifica, pues  $|\mathcal{R}| = 2$  y  $|\{A, B\}| = |\{C, D\}| = 2$ . Por otro lado, si  $P \notin \{A, B\}$ , tenemos que  $P \in \{C, D\}$ , por lo que  $\{C, D\} \parallel \{A, B\}$ . Lo mismo podemos decir si  $P \notin \{C, D\}$ . Así, tenemos que se verifica **A2**. Sin embargo, no se cumple **A1** porque no existe ninguna recta que contenga a  $A$  y  $C$ .

### 1.1.2. Algunos teoremas

**Lema 1.1 (Tricotomía).** Sea  $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$  un plano afín. Sean  $l, m \in \mathcal{R}$ . Se cumple una y solo una de las siguientes afirmaciones:

1.  $l = m$ .
2.  $l \parallel m$ .
3.  $l \cap m$  es un punto.

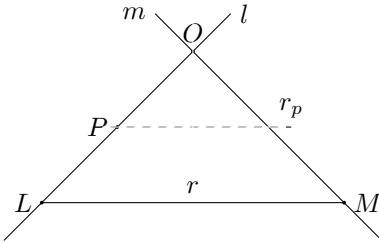
*Demostración.* Si  $l$  no es paralela a  $m$ , tenemos que  $l \cap m \neq \emptyset$ . Si  $|l \cap m| = 1$ , tenemos que es un punto y se cumple **3**. Si  $|l \cap m| \geq 2$ , tenemos que existen  $P, Q \in l \cap m$ . Por **A1**, dado que por dos puntos pasa una única recta, debe ser que  $m = l$ .  $\square$

**Teorema 1.2 (Rectas equipotentes).** Sea  $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$  un plano afín. Todo par de rectas están en biyección.

*Demostración.* Sean  $l, m \in \mathcal{R}$ .

**Caso 1.** Si  $l = m$ , es trivial que  $l$  y  $m$  son equipotentes.

**Caso 2.** Supongamos  $l \cap m = O$ , donde  $O \in \mathcal{P}$ . Por **A3**, tenemos que existen  $L \in l, M \in m$  tales que  $M, L \neq O$ . Por **A1**, existe una única  $r \in \mathcal{R}$  tal que  $L, M \in r$ . Si  $P \in l / \{L\}$ , tenemos que existe una única  $r_p \parallel r$  tal que  $P \in r_p$ .



Podemos hacer un par de observaciones:

**Observación 1.** Vamos a ver que  $\forall P \in l / \{L\}$  tenemos que  $P \notin r$ , queremos ver que  $r_p$  existe. Si  $P \in l \cap r$ , tenemos que  $L, P \in l \cap r$ , por lo que  $l = r$ , por lo que  $M \in l$  y  $O, M \in l$  y  $l = m$ , que es una contradicción. Por tanto, podemos afirmar que  $\forall P \in l, P \neq L, \exists r_p$  recta paralela a  $r$  y  $P \in r_p$ .

**Observación 2.** Tenemos que ver que  $r_p \cap m$  es un punto. Si  $r_p \parallel m$ , como  $r_p \parallel r$ ,  $M \in m$  y  $M \in r$ , se tiene que  $m = r$ , por lo que  $L \in r = m$  y  $O \in m$ , por lo que  $m = l$ , lo que es una contradicción. Por otro lado, si  $r_p = m$ ,  $P \in l$  y  $P \in r_p = m$  y  $O \in m, l$ , por lo que  $m = l$ , que es una contradicción. Por tanto, debe ser que  $r_p \cap m$  es un punto.

De esta manera, podemos definir la función

$$\begin{aligned} f : l / \{L\} &\rightarrow m / \{M\} \\ P &\rightarrow r_p \cap m. \end{aligned}$$

Para ver que  $f$  es biyectiva, vamos a ver que existe su inversa. En efecto, tenemos que  $\forall Q \in m / \{M\}$ ,  $Q \notin r$  y  $r_Q \cap l$  es un punto. Así, tenemos una función

$$\begin{aligned} g : m / \{M\} &\rightarrow l / \{L\} \\ Q &\rightarrow r_Q \cap l. \end{aligned}$$

Para ver que  $g = f^{-1}$  tenemos que ver que  $g \circ f = id$  y que  $f \circ g = id$ :

$$(g \circ f)(P) = g(f(P)) = g(r_p \cap m).$$

Tenemos que  $r_{f(P)} = r_{r_p \cap m} \parallel r$  y  $r_{f(P)}$  pasa por  $r_p \cap m$ . Pero  $r_p \parallel r$  y  $r_p$  pasa por  $r_p \cap m$ . Por **A2**, tenemos que  $r_{f(P)} = r_p$ . Así, tenemos que

$$g(r_p \cap m) = r_{f(P)} \cap l = r_p \cap l = P.$$

**Caso 3.** Si  $m \parallel l$  y  $M \in m$ ,  $L \in l$ , tenemos que existe una recta  $r$  tal que  $M, L \in r$ . Así, tenemos que  $r \cap m$  y  $r \cap l$  es un punto y por lo aplicado en el caso anterior, tenemos que existe una biyección entre  $r$  y  $m$  y entre  $r$  y  $l$ .

□

**Lema 1.2.** Sea  $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$  un plano afín. Ponemos  $l \sim m$ ,  $l, m \in \mathcal{R}$ , si  $l = m$  o  $l \parallel m$ . Entonces,  $\sim$  es una relación de equivalencia.

*Demuestra.* (i) Está claro que si  $l \in \mathcal{R}$  se tiene que  $l = l$ , por lo que se cumple la propiedad reflexiva.

- (ii) Sean  $l, m \in \mathcal{R}$ . Si  $l = m$  es trivial que se cumple la propiedad simétrica. Si  $l \sim m$  y  $l \parallel m$ , tenemos que  $l \cap m = m \cap l = \emptyset$ , por lo que  $m \sim l$ . Así, hemos verificado la propiedad simétrica.
- (iii) Sean  $l, m, r \in \mathcal{R}$  con  $l \sim m$  y  $m \sim r$ . Hay que valorar varios casos:

**Caso 1.** Si  $l = m$  y  $m = r$ , está claro que  $l = r$  y, por tanto,  $l \sim r$ .

**Caso 2.** Si  $l = m$  y  $m \parallel r$ , está claro que  $l \cap r = m \cap r = \emptyset$ , por lo que  $l \sim r$ .

**Caso 3.** Si  $l \parallel m$  y  $m = r$ , tenemos que  $l \cap r = l \cap m = \emptyset$ , por lo que  $l \sim r$ .

**Caso 4.** Si  $l \parallel m$  y  $m \parallel r$ , supongamos que  $l \cap r = \{P\}$ . Así,  $P \notin m$  y por **A2** existe una única recta paralela a  $m$  que pase por  $P$ . Como  $l$  y  $r$  cumplen esto debe ser que  $l = r$ , lo que es una contradicción, por lo que debe ser que  $l = r$  o  $l \parallel r$ . En cualquier caso  $l \sim r$ .

Así, queda demostrada la propiedad transitiva.

□

**Definición 1.3 (Haz de rectas).** Un **haz de rectas paralelas** es una clase de equivalencia de  $\sim$ . Entonces,  $\mathcal{H} \subset \mathcal{R}$  es un **haz** si y solo si  $\exists l \in \mathcal{R}$  tal que

$$\mathcal{H} = [l]_\sim = \{m \mid m = l \text{ o } m \parallel l\}.$$

**Proposición 1.1.** Sea  $\mathcal{H}$  un haz y  $l \in \mathcal{R}$  con  $l \notin \mathcal{H}$ , entonces  $f : \mathcal{H} \rightarrow l : m \rightarrow l \cap m$  es una biyección.

*Demostración.* (i) Primero vamos a ver que la función está bien definida. Como  $l \notin \mathcal{H}$ ,  $\forall m \in \mathcal{H}$  tenemos que  $l$  no es paralelo a  $m$  y  $l \neq m$ . Por el lema de la tricotomía, debe ser que  $l \cap m$  es un punto. Así, la función está bien definida.

- (ii) Veamos que la función es inyectiva. Consideremos  $m_1, m_2 \in \mathcal{H}$  tales que  $m_1 \cap l = m_2 \cap l \neq \emptyset$ , por lo que  $m_1 \cap m_2 \neq \emptyset$ . Dado que  $m_1, m_2 \in \mathcal{H}$ , tenemos que  $m_1 \sim m_2$  y como  $m_1$  no es paralela a  $m_2$ , debe ser que  $m_1 = m_2$ .
- (iii) Comprobemos que la aplicación es sobreyectiva. Supongamos que  $P \in l$ ,  $m \in \mathcal{H}$ . Si  $P \in m$ , tenemos que  $m \cap l = P$ , por lo que hemos ganado. Si  $P \notin m$ , por **A2** tenemos que existe  $m_1 \in \mathcal{H}$  (es decir, paralela a  $m$ ) tal que  $P \in m_1$ , por lo que  $P = m_1 \cap l$ .

□

**Proposición 1.2.** Si  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  son dos haces distintos, tenemos que  $\forall P \in \mathcal{P}$ ,  $\exists!l \in \mathcal{H}_1, \exists!m \in \mathcal{H}_2$  tales que  $P = l \cap m$ . En particular, la aplicación  $f : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{P} : (l, m) \rightarrow l \cap m$  es una biyección.

*Demostración.* Supongamos que

$$\mathcal{H}_1 = [l]_{\sim} = \{l' \mid l' = l \text{ o } l' \parallel l\}.$$

$$\mathcal{H}_2 = [m]_{\sim} = \{m' \mid m' = m \text{ o } m' \parallel m\}.$$

Tenemos que dado que  $\mathcal{H}_1 \neq \mathcal{H}_2$ , tenemos que  $l \neq m$  y  $l$  no es paralelo a  $m$ , por lo que  $l \cap m$  es un punto. Así, hemos visto que la aplicación está bien definida.

Sea  $P \in \mathcal{P}$ :

**Caso 1.** Si  $P \in l$  hemos terminado.

**Caso 2.** Si  $P \notin l$ , por **A2** existe una única recta  $l' \in \mathcal{H}_1$  tal que  $P \in l'$ .

En ambos casos, tenemos que  $\exists!l_1 \in \mathcal{H}_1$  tal que  $P \in l_1$ . Así, simétricamente existe una única  $m_1 \in \mathcal{H}_2$  tal que  $P \in m_1$ .

□

### 1.1.3. Planos afines finitos

**Definición 1.4.** Un plano afín tiene **orden**  $n$  si todas sus rectas tienen  $n$  elementos.

**Observación.** La definición tiene sentido dado que todas las rectas tienen el mismo número de puntos.

**Teorema 1.3.** Sea  $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$  una plano afín de orden  $n$ .

- (i) Cada haz de rectas tiene  $n$  elementos.
- (ii)  $|\mathcal{P}| = n^2$ .
- (iii) Cada punto está en  $n + 1$  rectas.
- (iv) Hay  $n + 1$  haces de rectas.
- (v) Hay  $n(n + 1)$  rectas.

*Demostración.* Sea  $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$  un plano afín de orden  $n$ .

- (i) Sea  $\mathcal{H}$  un haz de rectas. Por **A3**, existe  $l_1, l_2 \in \mathcal{R}$  con  $l_1 \neq l_2$ . Si existe  $l \notin \mathcal{H}$  hemos ganado. Si  $l_1, l_2 \in \mathcal{H}$ , sea  $P \in l_1$  y  $Q \in l_2$ , tenemos que  $l(P, Q) \notin \mathcal{H}$  por lo que existe  $l \notin \mathcal{H}$ . Por una proposición anterior, tenemos que existe una biyección entre  $\mathcal{H}$  y  $l$ , por lo que  $|\mathcal{H}| = |l| = n$ .
- (ii) Por el argumento del apartado anterior, existen  $l, m \in \mathcal{R}$  con  $l \neq m$  y que no son paralelas entre sí, tales que  $\mathcal{H}_1 = [l]_\sim$  y  $\mathcal{H}_2 = [m]_\sim$ . Por la proposición anterior, tenemos que  $|\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2| = |\mathcal{P}|$ . Por la primera propiedad, nos queda que  $|\mathcal{P}| = |\mathcal{H}_1| \cdot |\mathcal{H}_2| = n^2$ .
- (iii) Sea  $P \in \mathcal{P}$ . Por **A3** es fácil deducir que existe una recta  $l \in \mathcal{R}$  tal que  $P \notin l$ . Tenemos que  $l = \{A_1, \dots, A_n\}$ , por lo que  $P \in l(P, A_1), \dots, l(P, A_n)$ . Por **A2**, existe una única paralela  $m$  a  $l$  tal que  $P \in m$ , por lo que  $P$  está en  $n+1$  rectas. En efecto, todas las rectas anteriores son distintas porque de no serlo tendríamos que

$$l(P, A_i) = l(P, A_j) \Rightarrow l(P, A_i) = l(A_i, A_j) = l \Rightarrow P \in l.$$

Si  $r \in \mathcal{R}$  tal que  $P \in r$ , por **A2** se sigue que  $r \cap l = \emptyset$ , por lo que  $r = m$ ; o  $r \cap l = A_i$ , por lo que  $r = l(P, A_i)$ .

- (iv) Por (iii), dado  $P \in \mathcal{P}$ , existen  $l_1, \dots, l_{n+1} \in \mathcal{R}$  con  $P \in l_i, \forall i = 1, \dots, n+1$ . Como  $l_i \cap l_j = P$ , tenemos que  $[l_i]_\sim \neq [l_j]_\sim$  si  $i \neq j$ . Por tanto hay al menos  $n+1$  haces. Sea  $r \in \mathcal{R}$ ,
  - Si  $P \in r$ , tenemos que  $r = l_i$  para algún  $1 \leq i \leq n+1$ .
  - Si  $P \notin r$ , por **A2** tenemos que existe una única  $l_i$  tal que  $r \parallel l_i$ , por lo que  $P \in l_i$ .
En ambos casos tenemos que  $r \in [l_i]_\sim$  para algún  $i$ .

- (v) Los haces son disjuntos dos a dos, por ser una relación de equivalencia. Por tanto,

$$|\mathcal{R}| = \left| \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{H}_i \right| = \sum_{i=1}^{n+1} |\mathcal{H}_i| = \sum_{i=1}^{n+1} n = n(n+1).$$

□

**Observación.** Para todo primo  $p$  y todo  $k \geq 1$ , existe un cuerpo  $\mathbb{K}$  con  $p^k$  elementos. Entonces,  $\forall p$  primo y  $\forall k \geq 1$ , existe un plano afín de orden  $p^k$ , porque  $\mathbb{K}^2$  es un plano afín.

## 1.2. Planos proyectivos sintéticos

**Definición 1.5 (Plano proyectivo).** Un **plano proyectivo** es un par  $(\overline{\mathcal{P}}, \overline{\mathcal{R}})$  donde  $\overline{\mathcal{P}}$  es un conjunto no vacío cuyos elementos se llaman **puntos** y  $\overline{\mathcal{R}}$  es un conjunto de subconjuntos de  $\overline{\mathcal{P}}$  cuyos elementos se llaman **rectas**. Se cumplen los axiomas:

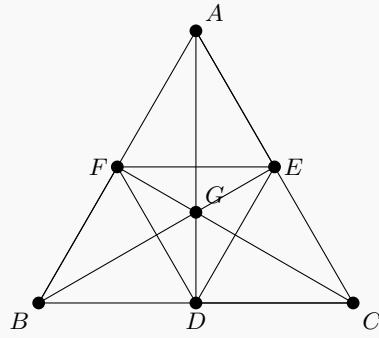
- P1.** Para cada par de puntos distintos existe una única recta que los contiene.
- P2.** Todo par de rectas tiene intersección no vacía.
- P3.** Toda recta tiene al menos tres puntos y hay al menos dos rectas.

En primer lugar, vamos a comprobar la consistencia de la definición, es decir, que hemos definido algo que existe.

**Ejemplo (Plano de Fano).** Consideremos los conjuntos

$$\overline{\mathcal{P}} = \{A, B, C, D, E, F, G\}.$$

$$\overline{\mathcal{R}} = \{\{A, B, C\}, \{C, D, E\}, \{E, F, A\}, \{B, G, F\}, \{A, G, D\}, \{F, G, C\}, \{F, D, B\}\}.$$



Es fácil comprobar que se trata de un plano proyectivo.

**Observación.** Este es el plano proyectivo más pequeño, es decir, que tiene menos puntos.

### 1.2.1. Independencia de los axiomas

- Comprobamos la independencia de **P3** respecto de **P2** y **P1**. Consideremos el ejemplo  $\overline{\mathcal{P}} = \mathbb{R}$  y  $\overline{\mathcal{R}} = \{\mathbb{R}\}$ . Está claro que se cumplen **P1** y **P2** pero no se cumple **P3**.
- Comprobamos la independencia de **P2** respecto de **P1** y **P3**. Consideremos como ejemplo el plano afín  $\mathbb{R}^2$ . Tenemos que **A1** es igual que **P1**, hay rectas paralelas, por lo que **P2** no se cumple y está claro que se cumple **P3** puesto que  $|\overline{\mathcal{R}}| = \infty, \forall \bar{l} \in \overline{\mathcal{R}}, |\bar{l}| = \infty$ .
- Comprobamos la independencia de **P1** respecto de **P2** y **P3**. Consideremos por ejemplo:

$$\overline{\mathcal{P}} = \{A, B, C, D, E\}.$$

$$\overline{\mathcal{R}} = \{\{A, B, C\}, \{C, D, E\}\}.$$

Claramente se cumple **P3** y se cumple **P2** porque hay dos rectas y las dos se intersecan. No se cumple **P1** puesto que no existe  $\bar{l} \in \overline{\mathcal{R}}$  tal que  $A, D \in \bar{l}$ .

### 1.2.2. Algunos teoremas

**Teorema 1.4.** Sea  $\mathbb{K}$  es un cuerpo y  $\mathbb{K}^3$  un espacio vectorial. Sean

$$\overline{\mathcal{P}} = \{U \subset \mathbb{K}^3 : U \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3), \dim_{\mathbb{K}} U = 1\}.$$

$$\overline{\mathcal{R}} = \{W \subset \mathbb{K}^3 : W \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3), \dim_{\mathbb{K}} W = 2\}.$$

Entonces,  $(\overline{\mathcal{P}}, \overline{\mathcal{R}})$  es un plano proyectivo <sup>a</sup>.

<sup>a</sup>La definición de  $\overline{\mathcal{R}}$  es más bien el conjunto de los conjuntos de rectas que son contenidas por un plano, así se puede hacer una correspondencia biyectiva entre  $\overline{\mathcal{R}}$  y la descripción que le hemos dado. Así, decimos que un punto  $\overline{P} \in \overline{\mathcal{P}}$  está en una recta  $\overline{l} \in \overline{\mathcal{R}}$  si  $\overline{P}$  está contenido en el plano que caracteriza a  $\overline{l}$ .

*Demuestra*ción. (i) Vamos a ver que se cumple **P1**. Si  $P, Q \in \overline{\mathcal{P}}$  con  $P \neq Q$ , existen  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{K}^3$  linealmente independientes tales que  $P = L(\{\vec{v}_1\})$  y  $Q = L(\{\vec{v}_2\})$ . Así, existe  $r \in \overline{\mathcal{R}}$  tal que  $r = L(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\})$  que cumple que  $P, Q \subset r$ . En concreto, tenemos que  $r = P \oplus Q$ .

Sea  $r_2 \in \overline{\mathcal{R}}$  tales que  $P, Q \subset r_2$ , entonces tenemos que  $P \oplus Q \subset r_2$  y  $\dim(P \oplus Q) = \dim r_2$ , por lo que  $r_2 = r$ .

(ii) Vamos a ver que se cumple **P2**. Sean  $l, m \in \overline{\mathcal{R}}$ , tenemos que

$$\underbrace{\dim(l \cap m)}_{\leq 3} = \underbrace{\dim l}_{2} + \underbrace{\dim m}_{2} - \underbrace{\dim(l \cap m)}_{\geq 1}.$$

Por tanto,  $\dim(l \cap m) \geq 1$ , por lo que  $l \cap m \neq \emptyset$ .

(iii) Vamos a ver que se cumple **P3**. Sea  $\mathbb{K}^3 = L(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\})$ , sean  $r_1 = L(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\})$  y  $r_2 = L(\{\vec{u}_1, \vec{u}_3\})$  dos rectas. Así, hemos visto que hay al menos dos rectas. Ahora, dada una recta  $r = L(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\})$  tenemos que  $P_1 = L(\{\vec{v}_1\})$ ,  $P_2 = L(\{\vec{v}_2\})$  y  $P_3 = L(\{\vec{v}_1 + \vec{v}_2\})$  son puntos de la recta. Así, hemos visto que cada recta tiene al menos tres puntos.

□

**Definición 1.6.** Sea  $\mathbb{K}$  un cuerpo. Al plano proyectivo construido en el teorema anterior lo llamamos **proyectivizado de  $\mathbb{K}^3$**  y lo denotamos por  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^3)$ .

**Notación.** Dado  $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^3$  denotamos por  $[a_0 : a_1 : a_2]$  al punto  $L(\{(a_0, a_1, a_2)\})$ . Observamos que

$$[a_0 : a_1 : a_2] = [b_0 : b_1 : b_2] \iff L(\{(a_0, a_1, a_2)\}) = L(\{(b_0, b_1, b_2)\}).$$

Esto es cierto si y solo si existe  $\lambda \in \mathbb{K}/\{0\}$  tal que  $(a_0, a_1, a_2) = \lambda(b_0, b_1, b_2)$ . Así, tenemos que esta notación está bien definida salvo proporcionalidad. Así, tenemos que los puntos de  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^3)$  son

$$\{[a_0 : a_1 : a_2] : (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^3/\{0\}\}.$$

Por otro lado, si  $u \in \mathbb{K}^3$  tal que  $\dim(u) = 2$ , podemos describir  $u$  con una ecuación implícita homogénea:

$$u = \{(x_0, x_1, x_2) : ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0\}.$$

Así, definimos  $\bar{l}$  de la siguiente forma:

$$\bar{l} = \{[x_0 : x_1 : x_2] : ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0\}, (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

Tenemos que si  $(u_0, u_1, u_2) \in \bar{l}$ , entonces  $(\lambda u_0, \lambda u_1, \lambda u_2) \in \bar{l}$ . En efecto,

$$au_0 + bu_1 + cu_2 = 0 \Rightarrow a\lambda u_0 + b\lambda u_1 + c\lambda u_2 = 0.$$

Así hemos visto que  $[u_0 : u_1 : u_2] \in \bar{l}$  si y solo si  $au_0 + bu_1 + cu_2 = 0$ , por lo que  $[u_0 : u_1 : u_2] \in \bar{l}$  está bien definido. Definimos  $\bar{\mathcal{P}}(\mathbb{K}^3)$  de la siguiente forma,

$$\bar{\mathcal{P}} = \{[a_0 : a_1 : a_2] : a_i \in \mathbb{K}/\{0\}\}.$$

$$\bar{\mathcal{R}} = \{ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0\}^1.$$

Podemos observar que si  $P = [a_0 : a_1 : a_2]$  y  $Q = [b_0 : b_1 : b_2]$  con  $P \neq Q$ , se cumple que

$$\bar{l}(P, Q) = \left\{ \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \right\}.$$

### 1.2.3. Construcción de planos proyectivos desde planos afines

Sea  $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$  un plano afín.

- Para cada haz de rectas  $\mathcal{H}$  creamos un punto  $P_{\mathcal{H}}$ <sup>2</sup>.
- Cogemos  $\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \cup \{P_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \text{ haz de rectas}\}$ .
- Dado  $l \in \mathcal{R}$  con  $l \in \mathcal{H}$ , ponemos  $\bar{l} = l \cup \{P_{\mathcal{H}}\}$ .
- Ponemos  $\bar{l}_{\infty} = \{P_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \text{ haz de rectas}\}$ .
- Tomamos  $\bar{\mathcal{R}} = \{\bar{l} : l \in \mathcal{R}\} \cup \{\bar{l}_{\infty}\}$ .

**Observación.** Se tiene que  $\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \cup \bar{l}_{\infty}$ .

**Ejemplo.** Consideremos el plano afín  $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$  tal que

$$\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}.$$

$$\mathcal{R} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}.$$

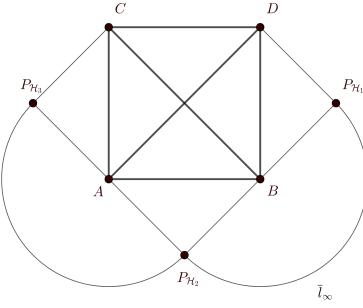
Tomamos los haces de rectas:

$$\mathcal{H}_1 = \{\{A, B\}, \{C, D\}\}, \quad \mathcal{H}_2 = \{\{A, C\}, \{B, D\}\}, \quad \mathcal{H}_3 = \{\{A, D\}, \{C, B\}\}.$$

Gráficamente queda así:

<sup>1</sup>Claramente  $a$ ,  $b$  y  $c$  no son 0 simultáneamente.

<sup>2</sup>Este punto es distinto para cada haz de rectas.



**Teorema 1.5.** Con esta construcción,  $(\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{R}})$  es un plano proyectivo.

*Demostración.* Comprobamos que se cumplen los axiomas.

**P1.** Sean  $P, Q \in \bar{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \cup \bar{l}_\infty$ . Entonces, tenemos los casos:

**Caso 1.** Si  $P, Q \in \mathcal{P}$ , por **A1** existe una única  $l \in \mathcal{R}$  tal que  $P, Q \in l$ . Así, tenemos que  $P, Q \in \bar{l} = l \cup P_{\mathcal{H}} \in \bar{\mathcal{R}}$ .

**Caso 2.** Si  $P, Q \in \bar{l}_\infty$  tenemos que  $P$  y  $Q$  están en una recta y  $\bar{l}_\infty$  es la única recta con más de un punto que no está en  $\mathcal{P}$ .

**Caso 3.** Si  $P \in \mathcal{P}$  y  $Q \in \bar{l}_\infty$ , tenemos que  $Q = P_{\mathcal{H}}$ , siendo  $\mathcal{H}$  un haz de rectas. Por **A2**, existe  $l \in \mathcal{H}$  tal que  $P \in l$ , por lo que  $P, Q \in \bar{l} = l \cup \{P_{\mathcal{H}}\}$ . La unicidad se deduce por construcción.

**P2.** Sean  $\bar{l}, \bar{m} \in \bar{\mathcal{R}}$ .

**Caso 1.** Si  $\bar{l} = \bar{l}_\infty$ , tenemos que  $\bar{l} \cap \bar{m}$  contiene un punto del infinito por construcción, por lo que  $\bar{l} \cap \bar{m} \neq \emptyset$ .

**Caso 2.** Si  $\bar{l} \neq \bar{l}_\infty \neq \bar{m}$ , tenemos que  $\bar{l} = l \cup \{P_{\mathcal{H}_1}\}$  y  $\bar{m} = m \cup \{P_{\mathcal{H}_2}\}$ . Si  $l \parallel m$ , tenemos que  $P_{\mathcal{H}_1} = P_{\mathcal{H}_2}$ , por lo que  $\bar{l} \cap \bar{m} \neq \emptyset$ . Por otro lado, si  $l = m$  está claro que  $\bar{l} = \bar{m}$ . Finalmente, tenemos que si  $l \cap m$  es un punto, entonces  $\bar{l} \cap \bar{m} \neq \emptyset$ .

**P3.** Por **A3** se tiene que  $|\mathcal{R}| \geq 2$ , por lo que  $|\bar{\mathcal{R}}| \geq 2$ . Similarmente, por **A3** tenemos que  $|l| \geq 2$ ,  $\forall l \in \mathcal{R}$ . Por tanto,

$$|\bar{l}| = |l \cup \{P_{\mathcal{H}}\}| \geq 3.$$

□

**Ejemplo (Complejación proyectiva de  $\mathbb{K}^2$ ).** Sea  $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$  un plano afín sobre  $\mathbb{K}^3$ . Consideramos  $\mathcal{P} = \{(u_1, u_2) : u_i \in \mathbb{K}\}$ . Construimos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^2 &\rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{K}^3) \\ (u_1, u_2) &\rightarrow [1 : u_1 : u_2]. \end{aligned}$$

Vamos a ver que es inyectiva. Si  $(u_1, u_2) \neq (u'_1, u'_2)$ , no existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tal que  $[1 : u_1 : u_2] = \lambda[1 : u'_1 : u'_2]$ .

Sabemos que las rectas de  $\mathbb{K}^2$  son de la forma  $l = \{ax_1 + bx_2 = c\}$ . Vemos que

$$(u_1, u_2) \in l \iff [1 : u_1 : u_2] \in \bar{l} = \{ax_1 + bx_2 = cx_0\}.$$

Por ahora todo ha sido notación. Vamos a ver la construcción. Tenemos que  $l = \{ax_1 + bx_2 = c\}$  es paralela a  $m = \{a'x_1 + b'x_2 = c'\}$  si y solo si existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tal que  $(a, b) = \lambda(a', b')$ . Consideremos  $\mathcal{H} = \{\{ax_1 + bx_2 = d\} : d \in \mathbb{K}\}$  y tomamos  $P_{\mathcal{H}} = [0 : b : -a]$ .

Podemos hacer un par de observaciones:

- $[0 : b : -a] \in \bar{l} = \{ax_1 + bx_2 = cx_0\}$ .
- $\bar{l} = l \cup \{[0 : b : -a]\}$ .
- $\bar{l}_{\infty} = \{[0 : u_1 : u_2] : u_i \in \mathbb{K}\}$ .

Ahora ya podemos construir  $\bar{\mathcal{P}}$  y  $\bar{\mathcal{R}}$ :

$$\bar{\mathcal{P}} = P \cup \bar{l}_{\infty} = \{[1 : u_1 : u_2] : u_i \in \mathbb{K}\} \cup \{[0 : u_1 : u_2] : u_i \in \mathbb{K}\} = \mathbb{P}(\mathbb{K}^3).$$

$$\bar{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cup \{\bar{l}_{\infty}\} = \{\bar{l} = \{ax_1 + bx_2 = cx_0 : (a, b) \neq (0, 0)\}\} \cup \{x_0 = 0\}.$$

#### 1.2.4. Construcción de un plano afín desde un plano proyectivo

Sea  $(\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{R}})$  un plano proyectivo y sea  $\bar{l}_{\infty} \in \bar{\mathcal{P}}$  una recta cualquiera<sup>3</sup>. Tomamos

$$\mathcal{P} = \bar{\mathcal{P}} - \bar{l}_{\infty}.$$

$$\bar{\mathcal{R}} = \{l = \bar{l} - (\bar{l} \cap \bar{l}_{\infty}) : \bar{l} \in \bar{\mathcal{R}} - \{\bar{l}_{\infty}\}\}.$$

**Teorema 1.6.** El par  $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$  construido anteriormente es un plano afín.

*Demostración.* Comprobemos que se cumplen los axiomas.

**A1.** Dados  $P, Q \in \mathcal{P} \subset \bar{\mathcal{P}}$  con  $P \neq Q$ , por **P1** tenemos que existe una única  $\bar{l} \in \bar{\mathcal{R}}$  tal que  $P, Q \in \bar{l}$ . Como  $P, Q \notin \bar{l}_{\infty}$ , tenemos que  $P, Q \in \bar{l} - (\bar{l} \cap \bar{l}_{\infty}) = l \in \mathcal{R}$ . La unicidad de  $l$  es por construcción de  $\mathcal{R}$ .

**A2.** Sea  $l \in \mathcal{R}$ , por lo que  $l = \bar{l} - \{Q\}$  donde  $\bar{l} \in \bar{\mathcal{R}}$  y  $Q \in \bar{l}_{\infty}$ . Sea  $P \in \mathcal{P}$  tal que  $P \notin l$ . Por **P1** tenemos que existe una única  $\bar{m} \in \bar{\mathcal{R}}$  que une  $P$  y  $Q$ . Por tanto

$$m = \bar{m} - (\bar{m} \cap \bar{l}_{\infty}) = \bar{m} - \{Q\}.$$

Si  $m \cap l \neq \emptyset$ , existe  $Q_2 \in \mathcal{P}$  tal que  $Q_2 \in m \cap l \subset \bar{m} \cap \bar{l}$  y  $Q \in \bar{m} \cap \bar{l}$ . Así, tenemos que  $\bar{m} = \bar{l}$ , y como  $P \notin \bar{l}$  y  $P \in \bar{m}$ , obtenemos una contradicción. Así, debe ser que  $m \parallel l$ . La unicidad se deduce por construcción.

<sup>3</sup>Realmente es una recta cualquiera, lo que pasa es que la vamos a tratar como la recta infinita.

**A3.** Por **P3**, tenemos que  $|\bar{l}| \geq 3$ ,  $\forall \bar{l} \in \bar{\mathcal{R}}$ . Tenemos entonces que si  $l \in \mathcal{R}$

$$|l| = |\bar{l} - (\bar{l} \cap \bar{l}_\infty)| \geq 2.$$

Por lo que se vio en uno de los ejercicios, tenemos que  $|\bar{\mathcal{R}}| \geq 3$ , por lo que

$$|\mathcal{R}| = |\bar{\mathcal{R}} - \{\bar{l}_\infty\}| = |\bar{\mathcal{R}}| - 1 \geq 2.$$

□

**Corolario 1.1.** Todo par de rectas de  $(\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{R}})$  están en biyección.

*Demostración.* Habíamos demostrado que todo par de rectas de un plano afín están en biyección. Sean  $\bar{l}, \bar{m} \in \bar{\mathcal{R}}$ . Existe  $\bar{r} \in \bar{\mathcal{R}}$  tal que  $\bar{r} \neq \bar{l}, \bar{m}$ . Tomamos  $\bar{l}_\infty = \bar{r}$  y construimos un plano afín  $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ . Así, tenemos que

$$l = \bar{l} - (\bar{l}_\infty \cap \bar{l}), \quad m = \bar{m} - (\bar{l}_\infty \cap \bar{m}) \in \mathcal{R}.$$

Como  $l$  y  $m$  están en biyección y  $|\bar{l}_\infty \cap \bar{l}| = |\bar{l}_\infty \cap \bar{m}| = 1$ , es fácil ver que  $\bar{l}$  y  $\bar{m}$  están en biyección. □

### 1.2.5. Dualidad

**Proposición 1.3.** Sea  $(\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{R}})$  un plano proyectivo. Se cumplen:

**P1'.** Si  $P$  y  $Q$  son puntos distintos de  $\bar{\mathcal{P}}$ , entonces existe una única  $\bar{l} \in \bar{\mathcal{R}}$  tal que  $P, Q \in \bar{l}$ .

**P2'.** Si  $\bar{l}$  y  $\bar{m}$  son rectas distintas de  $\bar{\mathcal{R}}$ , entonces existe un único  $P \in \bar{\mathcal{P}}$  tal que  $\bar{l}$  y  $\bar{m}$  contienen a  $P$ .

**P3'.** Cada recta contiene al menos tres puntos y cada punto está contenido en al menos tres rectas.

*Demostración.* **P1'.** Como **P1'** y **P1** son lo mismo, es trivial que se cumple.

**P2'.** Por **P2** sabemos que  $\bar{l} \cap \bar{m} \neq \emptyset$ . Por **P1**, si  $|\bar{l} \cap \bar{m}| \geq 2$ , tenemos que  $\bar{l} = \bar{m}$ . Así, debe ser que si  $\bar{l} \neq \bar{m}$ , entonces  $|\bar{l} \cap \bar{m}| = 1$ .

**P3'.** Por **P3** cada recta contiene al menos tres puntos. Por un ejercicio de la hoja, tenemos que  $|\bar{\mathcal{R}}| \geq 3$ , por lo que si  $\bar{l}, \bar{m}, \bar{r} \in \bar{\mathcal{R}}$  son distintas, y  $P \in \bar{\mathcal{P}}$  con  $P \in \bar{l} \cap \bar{m} \cap \bar{r}$ , tenemos que  $P$  está en tres rectas. Si  $P \notin \bar{l}$ , existen  $A_1, A_2, A_3 \in \bar{l}$  y existen  $\bar{l}(P, A_1), \bar{l}(P, A_2), \bar{l}(P, A_3) \in \bar{\mathcal{R}}$  tres rectas distintas. □

**Teorema 1.7.** Sea  $\bar{\mathcal{P}}$  un conjunto no vacío y sea  $\bar{\mathcal{R}}$  una colección de subconjuntos de  $\bar{\mathcal{P}}$ . Entonces, son equivalentes

- $(\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{R}})$  es un plano proyectivo.
- $(\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{R}})$  cumple **P1'**, **P2'** y **P3'**.

Es decir, podríamos haber tomado **P1'**, **P2'** y **P3'** como axiomas.

*Demostración.* (i) Es trivial a partir de la proposición anterior.

(ii) Tenemos que **P1'** es igual que **P1**, **P2'** implica **P2** y **P3'** implica **P3**. □

**Observación.** En los nuevos axiomas, si cambiamos la palabra 'punto' por 'recta' y 'está contenido' por 'contiene', obtenemos los mismos axiomas. En efecto, **P1'** se convierte en **P2'**, **P2'** se convierte en **P1'** y **P3'** cambia el orden de las oraciones.

En particular, toda afirmación cierta usando **P1**, **P2** y **P3** tendrá una afirmación (llamada afirmación dual) que también será cierta y se obtiene haciendo el cambio indicado anteriormente.

**Corolario 1.2.** En un plano proyectivo cada par de puntos está contenido en el mismo número de rectas. <sup>a</sup>

<sup>a</sup>Esta es la afirmación dual del corolario anterior.

**Ejemplo.** Consideremos la afirmación:

$$\forall \bar{l}_1, \bar{l}_2 \in \bar{\mathcal{R}}, \bar{l}_1 \neq \bar{l}_2, \exists P \in \bar{\mathcal{P}}, P \notin \bar{l}_1 \cup \bar{l}_2.$$

La afirmación dual será:

$$\forall P_1, P_2 \in \bar{\mathcal{P}}, P_1 \neq P_2, \exists \bar{l} \in \bar{\mathcal{R}}, \bar{l} \not\ni \{P_1, P_2\}.$$

Demostración de la primera afirmación:

- Por **P2'** tenemos que existe un único  $Q \in \bar{l}_1 \cap \bar{l}_2$  con  $Q \in \bar{\mathcal{P}}$ .
- Por **P3'** existe  $\bar{r} \in \bar{\mathcal{R}}$  tal que  $\bar{r} \neq \bar{l}_1, \bar{l}_2$  y  $Q \in \bar{r}$ .
- Por **P3'** existe  $A \in \bar{r}$  tal que  $A \neq Q$  y  $A \in \bar{\mathcal{P}}$ .
- Tenemos que si  $A \in \bar{l}_1$  se tiene que  $A, Q \in \bar{r} \cap \bar{l}_1$  y por **P2'** se tiene que  $A = Q$ , que es una contradicción. Por tanto,  $A \notin \bar{l}_1 \cup \bar{l}_2$ . □

Demostramos la afirmación dual:

- Por **P1'** tenemos que existe una única  $\bar{l} \in \bar{\mathcal{R}}$  con  $P_1, P_2 \in \bar{l}$ .
- Por **P3'** tenemos que existe  $Q \in \bar{l}$  tal que  $Q \neq P_1, P_2$ .

- Por **P3'**, existe  $\bar{r} \in \bar{\mathcal{R}}$  con  $\bar{r} \neq \bar{l}$ .
- Si  $P_1 \in \bar{r}$ , tenemos que  $P_1, Q \in \bar{r}$ , por lo que  $\bar{r} = \bar{l}$ , que es una contradicción, por lo que  $P_1, P_2 \notin \bar{r}$ .  $\square$

### 1.3. Independencia del teorema de Desargues

**Teorema 1.8 (Desargues proyectivo).** Sean  $A, B, C, A', B', C'$  puntos dos a dos distintos y ningún triple alineado <sup>a</sup>. Si  $\bar{l}(A, A') \cap \bar{l}(B, B') \cap \bar{l}(C, C') = O \in \bar{\mathcal{P}}$ , entonces  $\bar{l}(A, B) \cap \bar{l}(A', B')$ ,  $\bar{l}(A, C) \cap \bar{l}(A', C')$  y  $\bar{l}(B, C) \cap \bar{l}(B', C')$  están alineados.

<sup>a</sup>Buscamos poder tener dos triángulos:  $ABC$  y  $A'B'C'$ .

**Lema 1.3.** Sean  $A, B, C, D \in \mathbb{P}(\mathbb{K}^3)$  distintos dos a dos y ninguna terna alineada. Existe una base  $\mathcal{B} = \{v_0, v_1, v_2\}$  de  $\mathbb{K}^3$  tal que  $A = L(\{v_0\})$ ,  $B = L(\{v_1\})$ ,  $C = L(\{v_2\})$  y  $D = L(\{v_0 + v_1 + v_2\})$ .

*Demuestra*ción. Sean  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{K}^3$  tales que  $A = L(\vec{a})$ ,  $B = L(\vec{b})$ ,  $C = L(\vec{c})$  y  $D = L(\vec{d})$ . Si  $A \neq B$ , tenemos que  $\{\vec{a}, \vec{b}\}$  son linealmente independientes. Como  $C$  no está alineado con  $A$  y  $B$ , debe ser que  $\vec{c} \notin L(\vec{a}, \vec{b})$ . Por tanto, tenemos que  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  son linealmente independientes. Así, tenemos que

$$\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}.$$

Si  $\alpha = 0$ , tenemos que  $\vec{d} \in L(\vec{b}, \vec{c})$ , por lo que  $D \in \bar{l}(B, C)$ , lo que es una contradicción, por lo que  $\alpha \neq 0$ . De análoga demostramos que  $\beta, \gamma \neq 0$ . Tomamos  $v_0 = \alpha \vec{a}$ ,  $v_1 = \beta \vec{b}$  y  $v_2 = \gamma \vec{c}$ , de forma que nos queda que  $\vec{d} = v_0 + v_1 + v_2$ .  $\square$

**Teorema 1.9.** Sea  $\mathbb{K}$  un cuerpo. Entonces, el teorema de Desargues se cumple en  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^3)$ .

*Demuestra*ción. En primer lugar, veamos que se cumplen las hipótesis del lema anterior.

- Veamos que  $O = \bar{l}(A, A') \cap \bar{l}(B, B') \cap \bar{l}(C, C')$ , no está alineado con  $A$  y  $B$ . Si  $O \in \bar{l}(A, B)$ , tenemos que  $O \in \bar{l}(O, B)$ , por lo que  $\bar{l}(A, B) = \bar{l}(O, B)$ . Sin embargo, tenemos que  $B' \in \bar{l}(O, B)$ , por lo que  $A, B$  y  $B'$  están alineados, que es una contradicción.
- Debe ser que  $O \neq A$ , puesto que si  $O = A$  tendríamos que  $A \in \bar{l}(B, B')$  y  $A, B$  y  $B'$  estarían alineados.

De forma análoga tenemos que  $O \neq B, C$  y  $O \notin \bar{l}(B, C), \bar{l}(A, C)$ . Podemos usar el lema con  $A, B, C$  y  $O$ . En la base apropiada, tenemos que

$$A = [1 : 0 : 0], \quad B = [0 : 1 : 0], \quad C = [0 : 0 : 1], \quad D = [1 : 1 : 1].$$

Tenemos que

$$A' \in \bar{l}(A, O) = \left\{ \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \right\} = \{x_1 = x_2\}.$$

De esta manera, tenemos que  $A' = [\alpha : \beta : \beta]$ . Como  $A \neq A'$ , tenemos que  $\beta \neq 0$ . Así, podemos definir  $A' = \left[ \frac{\alpha}{\beta} : 1 : 1 \right] = [1 + a : 1 : 1]$ , para algún  $a \in \mathbb{K}/\{0\}$ . De forma similar, deducimos que  $B' = [1 : 1 + b : 1]$  y  $C' = [1 : 1 : 1 + c]$  con  $b, c \neq 0$ . Calculamos  $\bar{l}(A, B) \cap \bar{l}(A', B')$ :

$$\bar{l}(A, B) = \left\{ \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \right\} = \{x_2 = 0\}.$$

$$\bar{l}(A', B') = \left\{ \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \end{vmatrix} = 0 \right\} = \{-bx_0 - ax_1 + ((1+a)(1+b) - 1)x_2 = 0\}.$$

Así, tenemos que  $\bar{l}(A, B) \cap \bar{l}(A', B') = [a : -b : 0]$ . De forma similar, tenemos que  $\bar{l}(B, C) \cap \bar{l}(B', C') = [0 : b : -c]$  y  $\bar{l}(A, C) \cap \bar{l}(A', C') = [a : 0 : -c]$ . Para ver que estos tres puntos están alineados vamos a ver que el determinante se anula:

$$\begin{vmatrix} a & -b & 0 \\ 0 & b & -c \\ a & 0 & -c \end{vmatrix} = -abc + abc = 0.$$

Otra forma de hacerlo es calcular la recta de dos cualesquiera de ellos y ver si el tercero pertenece a esa recta.  $\square$

**Proposición 1.4.** Supongamos que  $(\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{R}})$  es un plano proyectivo que cumple el teorema de Desargues. Sea  $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$  un plano afín obtenido de  $(\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{R}})$  quitando una recta. Entonces, dados  $A, A', B, B', C, C'$  puntos dos a dos distintos de  $\mathcal{P}$ , ningún triple aliñado, tales que  $l(A, A') \parallel l(B, B') \parallel l(C, C')$ ,  $l(A, B) \parallel l(A', B')$  y  $l(A, C) \parallel l(A', C')$ . Entonces,  $l(B, C) \parallel l(B', C')$ .

*Demostración.* Si  $\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \cup \bar{l}_\infty$ , tenemos que

$$l(A, A') \parallel l(B, B') \parallel l(C, C') \Rightarrow \bar{l}(A, A') \cap \bar{l}(B, B') \cap \bar{l}(C, C') = O \in \bar{l}_\infty.$$

De forma similar, como  $l(A, B) \parallel l(A', B')$  y  $l(A, C) \parallel l(A', C')$ , se tiene que  $\bar{l}(A, B) \cap \bar{l}(A', B'), \bar{l}(A, C) \cap \bar{l}(A', C') \in \bar{l}_\infty$ . Como se cumple el teorema de Desargues, tenemos que  $\bar{l}(B, C) \cap \bar{l}(B', C') \in \bar{l}_\infty$ , entonces  $l(B, C) \parallel l(B', C')$ .  $\square$

Vamos a probar que existen planos proyectivos que no cumplen el teorema de Desargues viendo un plano afín que no cumple la proposición anterior.

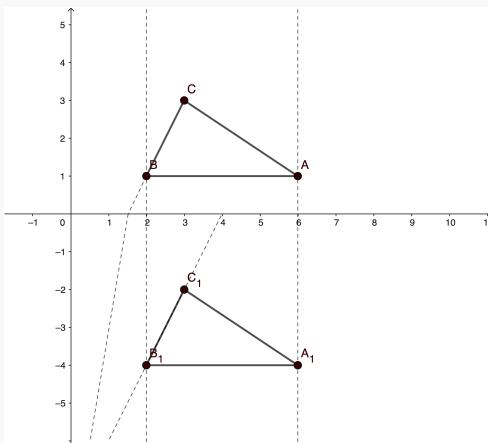
**Ejemplo (Plano de Moulton).** Consideremos el plano afín  $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$  y tenemos que  $\mathcal{R}$  es el conjunto de:

- Rectas horizontales,  $x_2 = k$ .
- Rectas verticales,  $x_1 = k$ .
- Rectas de pendiente negativa, es decir,  $x_2 = \lambda x_1 + c$ ,  $\lambda < 0$ .
- Rectas quebradas de la forma

$$x_2 = \begin{cases} 2\lambda(x_1 - c), & x_1 \leq c \\ \lambda(x_1 - c), & x_1 \geq c \end{cases}$$

con  $\lambda > 0$ .

Vamos a ver que el plano de Moulton no cumple la proposición.



Tenemos que

$$l(A, A') \parallel l(B, B') \parallel l(C, C')$$

son verticales y  $l(A, B)$  y  $l(A, B')$  son horizontales y paralelas. Las rectas  $l(A, C)$  y  $l(A', C')$  son paralelas y de pendiente negativa. Sin embargo, por construcción tenemos que  $l(B, C)$  y  $l(B', C')$  no son paralelas. Este es el primer ejemplo de un plano afín que no viene de un espacio vectorial.

## Capítulo 2

# Geometría afín y proyectiva lineal

### 2.1. Espacios proyectivos y afines

**Definición 2.1** (**Espacio afín**). Sea  $\mathbb{K}$  un cuerpo. Un  $\mathbb{K}$ -**espacio afín** de dimensión  $n < \infty$  es una terna  $(\mathbb{A}, \vec{\mathbb{A}}, \vec{\cdot})$  donde  $\mathbb{A}$  es un conjunto no vacío,  $\vec{\mathbb{A}}$  es un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  y

$$\begin{aligned}\vec{\cdot} : \mathbb{A} \times \mathbb{A} &\rightarrow \vec{\mathbb{A}} \\ (A, B) &\rightarrow \overrightarrow{AB},\end{aligned}$$

que cumple

1.  $\forall A \in \mathbb{A}, \forall v \in \vec{\mathbb{A}}, \exists! B \in \mathbb{A}$  tal que  $\overrightarrow{AB} = v$ .
2.  $\forall A, B, C \in \mathbb{A}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

**Ejemplo.** Dado un espacio vectorial  $\mathbb{K}^n$ , siempre podemos dotar a  $\mathbb{K}^n$  de una estructura afín. En efecto, tomamos  $\mathbb{A} := \mathbb{K}^n$ ,  $\vec{\mathbb{A}} := \mathbb{K}^n$  y

$$\vec{\cdot} : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n : (A, B) \rightarrow B - A.$$

Si tenemos una base podemos expresar la aplicación anterior de la forma

$$\overrightarrow{(a_1, \dots, a_n)(b_1, \dots, b_n)} = (b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n).$$

**Notación.** Si  $\overrightarrow{AB} = v$  escribimos  $A + v = B$ .

**Observación.** ■  $\forall A \in \mathbb{A}$  la función  $\vec{\cdot}_A : \mathbb{A} \rightarrow \vec{\mathbb{A}} : B \rightarrow \overrightarrow{AB}$  es una biyección. Esto se deduce directamente de (1). De forma similar, si  $v \in \vec{\mathbb{A}}$ , la aplicación  $+v : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A} : A \rightarrow A + v$  también es biyectiva.

- $\overrightarrow{AB} = 0 \iff A = B$ . En efecto, por (2) se tiene que

$$\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA} \iff \overrightarrow{AA} = 0.$$

Como la aplicación  $\vec{\cdot}A$  es biyectiva, si  $\overrightarrow{AB} = 0$  debe ser que  $A = B$ .

- $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ . En efecto, tenemos que

$$0 = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \iff \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.$$

- Se cumple la **ley del paralelogramo**. Es decir, tenemos que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ .

En efecto,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}.$$

**Definición 2.2** (Proyectivizado de un espacio vectorial). Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de  $\dim_{\mathbb{K}} V = n$ . El **proyectivizado** de  $V$ , denotado  $\mathbb{P}(V)$ , es el conjunto de los subespacios vectoriales de  $V$  de dimensión 1. La dimensión de  $\mathbb{P}(V)$ , denotada  $\dim \mathbb{P}(V)$ , es igual a  $\dim_{\mathbb{K}}(V) - 1$ .

**Observación.**  $\mathbb{P}(V) = (V - \{0\}) / \sim$ , donde  $\sim$  denota la relación

$$u \sim v \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, u = \lambda v.$$

Si  $v = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ , usamos  $[v]$ ,  $[v]_n$  o  $[a_1 : a_2 : \dots : a_n]$  para denotar al punto  $L(v)$  de  $\mathbb{P}(V)$ .

**Ejemplo.**

1. Sea  $V = \{0\}$  el espacio vectorial trivial. Tenemos que  $\mathbb{P}(V) = \emptyset$ . Así, tenemos que el conjunto vacío es un espacio proyectivo con  $\dim \mathbb{P}(V) = -1$ .
2. Si  $V = \mathbb{K}$ , tenemos que  $\mathbb{P}(V) = \{*\}$  es un punto, por lo que  $\dim(\mathbb{P}(\mathbb{K})) = 0$ .
3. Si  $V = \mathbb{R}^2$ , tenemos que  $\dim \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) = 1$ . Hay una biyección  $[0, \pi) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) : \theta \rightarrow [(\cos \theta, \sin \theta)]$ . Tenemos que  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{S}^1$ , que es una circunferencia.

**Proposición 2.1.** Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de  $\dim_{\mathbb{K}} V \geq 1$ . Sea  $f : V \rightarrow \mathbb{K}$  una aplicación lineal sobreyectiva. Tenemos que  $\mathcal{U} = \text{Ker}(f) \subset V$  es un subespacio vectorial de  $V$ . Entonces,  $(\mathbb{P}(V) / \mathbb{P}(\mathcal{U}), \vec{\cdot}, \vec{\cdot})$  es un espacio afín donde  $\overrightarrow{[u][v]} = \frac{v}{f(v)} - \frac{u}{f(u)}$ .

*Demostración.* Primero comprobamos que la definición de  $\vec{\cdot}$  no depende de los representantes. Sea  $u' = \lambda u$  y  $v' = \mu v$  con  $\lambda, \mu \neq 0$ . Tenemos que

$$\frac{v'}{f(v')} - \frac{u'}{f(u')} = \frac{\lambda v}{f(\lambda v)} - \frac{\mu u}{f(\mu u)} = \frac{\lambda v}{\lambda f(v)} - \frac{\mu u}{\mu f(u)} = \frac{v}{f(v)} - \frac{u}{f(u)}.$$

Comprobamos que  $\forall [v_1], [v_2] \in \mathbb{P}(V) / \mathbb{P}(\mathcal{U})$ ,  $\overrightarrow{[v_1][v_2]} \in \mathcal{U}$ . Tenemos que

$$\overrightarrow{[v_1][v_2]} = \frac{v_2}{f(v_2)} - \frac{v_1}{f(v_1)} \Rightarrow f\left(\frac{v_2}{f(v_2)} - \frac{v_1}{f(v_1)}\right) = \frac{f(v_2)}{f(v_2)} - \frac{f(v_1)}{f(v_1)} = 0.$$

Así, tenemos que  $\overrightarrow{[v_1][v_2]} \in \mathcal{U}$ .

Demostremos que cumple los axiomas.

1. Demostremos primero la existencia. Sea  $A \in \mathbb{P}(V)/\mathbb{P}(\mathcal{U})$ , por lo que  $A = [w]$  con  $f(w) \neq 0$ . Sea  $v \in \mathcal{U}$ . Tomamos  $B = \left[ \frac{w}{f(w)} + v \right]$ . Comprobemos que  $B \in \mathbb{P}(V)/\mathbb{P}(\mathcal{U})$ :

$$f\left(\frac{w}{f(w)} + v\right) = f\left(\frac{w}{f(w)}\right) + f(v) = \frac{f(w)}{f(w)} + f(v) = 1 \neq 0 \Rightarrow B \in \mathbb{P}(V)/\mathbb{P}(\mathcal{U}).$$

Así, tenemos que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{[w]\left[\frac{w}{f(w)} + v\right]} = \frac{\frac{w}{f(w)} + v}{f\left(\frac{w}{f(w)} + v\right)} - \frac{w}{f(w)} = v.$$

Demostramos ahora la unicidad. Sea  $B' \in \mathbb{P}(V)/\mathbb{P}(\mathcal{U})$  tal que  $\overrightarrow{AB'} = v = \overrightarrow{AB}$ . Tenemos que  $B' = [z]$  con  $f(z) \neq 0$ . Así,

$$\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{[w][z]} = \frac{z}{f(z)} - \frac{w}{f(w)} = v \Rightarrow z = \left( v + \frac{w}{f(w)} \right) f(z) \Rightarrow z = \lambda \left( \frac{w}{f(w)} + v \right), \lambda \in \mathbb{K}^*.$$

Por tanto, tenemos que  $[z] = \left[ \frac{w}{f(w)} + v \right]$ , por lo que  $B = B'$  y queda demostrada la unicidad.

2. Sean  $A, B, C \in \mathbb{P}(V)/\mathbb{P}(\mathcal{U})$  tales que  $A = [a]$ ,  $B = [b]$  y  $C = [c]$  con  $f(a), f(b), f(c) \neq 0$ . Tenemos que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \left( \frac{b}{f(b)} - \frac{a}{f(a)} \right) + \left( \frac{c}{f(c)} - \frac{b}{f(b)} \right) = \frac{c}{f(c)} - \frac{a}{f(a)} = \overrightarrow{AC}.$$

□

**Ejemplo.** Sean  $V = \mathbb{K}^3$  y  $f : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K} : (x_0, x_1, x_2) \mapsto x_0$ . Entonces,  $\mathcal{U} = \text{Ker}(f) = \{x_0 = 0\}$ . Tenemos que

$$\mathbb{P}(V)/\mathbb{P}(\mathcal{U}) = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}(V) : x_0 \neq 0\} = \{[1 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}(V)\}.$$

Tenemos que  $\mathbb{P}(V)/\mathbb{P}(\mathcal{U})$  es un plano afín con espacio vectorial asociado  $\mathcal{U}^a$ . En este caso podemos observar que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{[x_0 : x_1 : x_2][y_0 : y_1 : y_2]} &= \frac{(1, y_1, y_2)}{f(1, y_1, y_2)} - \frac{(1, x_1, x_2)}{f(1, x_1, x_2)} \\ &= (1, y_1, y_2) - (1, x_1, x_2) = (0, y_1 - x_1, y_2 - x_2). \end{aligned}$$

Consideremos ahora  $\mathbb{P}(\mathcal{U}) = \{[0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}(V)\}$ . Podemos considerar la aplicación  $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{K} : (0, x_1, x_2) \mapsto x_1$ . Sea  $W = \text{Ker}(g)$ , entonces  $\mathbb{P}(\mathcal{U})/\mathbb{P}(W)$  es un espacio afín asociado a  $W$  con  $\dim_{\mathbb{K}}(W) = 1$ . Así, tenemos que

$$\mathbb{P}(\mathcal{U})/\mathbb{P}(W) = \{[0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}(V) : x_1 \neq 0\} = \{[0 : 1 : x_2] \in \mathbb{P}(V)\}.$$

Si realizamos el cálculo anterior

$$\begin{aligned}\overrightarrow{[0:1:x_2][0:1:y_2]} &= \frac{(0, 1, y_2)}{g(0, 1, y_2)} - \frac{(0, 1, x_2)}{g(0, 1, x_2)} \\ &= (0, 1, y_2) - (0, 1, x_2) = (0, 0, y_2 - x_2).\end{aligned}$$

Tenemos que  $\mathbb{P}(W) = \{[0:0:x_2] \in \mathbb{P}(V)\} = \{[0:0:1]\}$ . Podríamos seguir hasta obtener el conjunto vacío.

<sup>a</sup>Esto se parece mucho a nuestro intento de construir un plano afín desde el espacio proyectivo  $\mathbb{K}^3$ .

**Observación.** Tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathbb{K}^3) &= \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(V)/\mathbb{P}(\mathcal{U}) \sqcup \mathbb{P}(\mathcal{U}) \\ &= \underbrace{\mathbb{P}(V)/\mathbb{P}(\mathcal{U})}_{\text{plano afín}} \sqcup \underbrace{\mathbb{P}(\mathcal{U})/\mathbb{P}(W)}_{\text{recta afín}} \sqcup \underbrace{\mathbb{P}(W)}_{\text{punto}}.\end{aligned}$$

### 2.1.1. Sistemas de referencia

**Definición 2.3 (Referencia cartesiana).** Sea  $\mathbb{A}$  un espacio afín. Una **referencia cartesiana** es un par  $\mathcal{R}_C = (O, \mathcal{B})$  donde  $O \in \mathbb{A}$  y  $\mathcal{B}$  es una base de  $\mathbb{A}$ . Las coordenadas de  $A \in \mathbb{A}$  en  $\mathcal{R}_C$  son las coordenadas de  $\overrightarrow{OA}$  en la base  $\mathcal{B}$ .

**Ejemplo.** Consideremos  $\mathbb{A} = \mathbb{R}^2$  y la siguiente referencia cartesiana:

$$\mathcal{R}_C = (O = (1, 0), \mathcal{B} = \{(1, 1), (1, -1)\}).$$

Consideremos  $A = (3, 2) \in \mathbb{A}$  y calculemos sus coordenadas en  $\mathcal{R}_C$ :

$$\overrightarrow{OA} = (3, 2) - (1, 0) = (2, 2) = 2e_1.$$

Por tanto,  $\overrightarrow{OA} = (2, 0)$   $\mathcal{B}$  y  $A = (2, 0)_{\mathcal{R}_C}$ .

A continuación introduciremos las coordenadas baricéntricas. Para ello, necesitamos primero:

**Proposición 2.2.** Consideremos  $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{A}$  y  $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  tales que  $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ . Entonces,  $\forall s, t = 0, \dots, n$  se tiene que

$$P_s + \sum_{i=0, i \neq s}^n \lambda_i \overrightarrow{P_s P_i} = P_t + \sum_{i=0, i \neq t}^n \lambda_i \overrightarrow{P_t P_i}.$$

*Demostración.* Está claro que

$$\begin{aligned} P_s + \sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{P_s P_i} &= P_t + \overrightarrow{P_t P_s} + \sum_{i=0}^n \lambda_i (\overrightarrow{P_s P_t} + \overrightarrow{P_t P_i}) = P_t + \overrightarrow{P_t P_s} + \sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{P_s P_t} + \sum_{i=0}^n \overrightarrow{P_t P_i} \\ &= P_t + \overrightarrow{P_t P_s} + \overrightarrow{P_s P_t} + \sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{P_t P_i} = P_t + \sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{P_t P_i}. \end{aligned}$$

□

**Definición 2.4 (Combinación afín).** Una **combinación afín** de  $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{A}$  es un punto de la forma  $P_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{P_0 P_i}$  con  $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ . Usamos  $\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i$  para denotar a  $P_t + \sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{P_t P_i}$  con  $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ .

**Observación.** La proposición anterior nos permite ver que la notación que hemos empleado en la definición anterior tiene sentido.

**Definición 2.5.** Una colección  $\{P_0, \dots, P_n\} \subset \mathbb{A}$  es

- **afinmente generadora** si  $\forall P \in \mathbb{A}$  existen  $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  tales que  $\sum \lambda_i = 1$  y  $P = \sum \lambda_i P_i$  (todo punto es combinación afín de  $P_0, \dots, P_n$ ).
- **afinmente dependiente** si existe  $i \in \{0, \dots, n\}$  tal que  $P_i$  es combinación afín de los demás.
- **afinmente independiente** si no es afinmente dependiente.

**Definición 2.6 (Referencia afín).** Una **referencia afín** de  $\mathbb{A}$  es una colección ordenada de puntos  $\mathcal{R}_A = \{P_0, \dots, P_n\}$  que es afinmente generadora y afinmente independiente. Las **coordenadas baricéntricas** de  $A \in \mathbb{A}$  son  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$  si  $\sum \lambda_i = 1$  y  $\sum \lambda_i P_i = A$ .

**Proposición 2.3.** Las coordenadas baricéntricas de  $A$  en  $\mathcal{R}_A$  existen y son únicas.

*Demostración.* Como  $\mathcal{R}_A$  es afinmente generador, tenemos que existen  $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  tales que  $\sum \lambda_i = 1$  y  $A = \sum \lambda_i P_i$ . Demostremos ahora la unicidad. Supongamos que

$$A = \sum \lambda_i P_i = \sum \mu_i P_i, \quad \sum \mu_i = 1.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} P_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{P_0 P_i} &= P_0 + \sum_{i=1}^n \mu_i \overrightarrow{P_0 P_i} \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{P_0 P_i} &= \sum_{i=1}^n \mu_i \overrightarrow{P_0 P_i} = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i) \overrightarrow{P_0 P_i} = 0. \end{aligned}$$

Hay dos posibles casos:

- Si  $\lambda_i - \mu_i = 0, \forall i = 1, \dots, n$ , tenemos que

$$\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 - \sum_{i=1}^n \mu_i = \mu_0.$$

Así, nos queda que  $\lambda_i = \mu_i$  para  $i = 0, \dots, n$ .

- Supongamos que existe algún  $i \in \{0, \dots, n\}$  tal que  $\lambda_i - \mu_i \neq 0$ . Entonces, tendríamos que

$$(\lambda_i - \mu_i) \overrightarrow{P_0 P_i} = \sum_{j=0, j \neq i}^n -(\lambda_j - \mu_j) \overrightarrow{P_0 P_j} \Rightarrow \overrightarrow{P_0 P_i} = \sum_{j=0, j \neq i}^n \alpha_j \overrightarrow{P_0 P_j},$$

donde  $\alpha_j = -\frac{\lambda_j - \mu_j}{\lambda_i - \mu_i}$ . Así, nos queda que

$$P_i = P_0 + \overrightarrow{P_0 P_i} = P_0 + \sum_{j=0, j \neq i}^n \alpha_j \overrightarrow{P_0 P_j}.$$

Por tanto,  $P_i$  es una combinación afín de  $P_0, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_n$ <sup>1</sup> que contradice que  $\mathcal{R}_A$  sea afinamente independiente.

□

**Lema 2.1.**  $\mathcal{R}_A = \{P_0, \dots, P_n\}$  es una referencia afín si y solo si  $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n}\}$  es una base de  $\vec{\mathbb{A}}$ . En particular,  $|\mathcal{R}_A| = \dim \mathbb{A} + 1$ .

*Demostración.* (i) Vamos a ver que  $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n}\}$  genera  $\vec{\mathbb{A}}$ . Sea  $v \in \vec{\mathbb{A}}$ . Tenemos que  $P_0 + v \in \mathbb{A}$  y  $P_0 + v = (\lambda_0, \dots, \lambda_n)_{\mathcal{R}_A}$ . Así, tenemos que

$$P_0 + v = P_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{P_0 P_i}.$$

Por tanto, debe ser que  $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{P_0 P_i}$ , por lo que  $\mathcal{B}$  genera a  $\vec{\mathbb{A}}$ . Veamos que son linealmente independientes:

$$\alpha_1 \overrightarrow{P_0 P_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{P_0 P_n} = 0,$$

---

<sup>1</sup>Es fácil comprobar que  $\sum_{j=0, j \neq i}^n \alpha_j = 1$ .

con  $\alpha_0 = 1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_n$ . Así, nos queda que

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i P_i = P_0 + \alpha_1 \overrightarrow{P_0 P_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{P_0 P_n} = P_0 + 0 = P_0.$$

Así, tenemos que  $P_0 = (1, 0, \dots, 0)_{\mathcal{R}_A}$  y  $P_0 = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)_{\mathcal{R}_A}$ , por lo que  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ . Así, hemos visto que  $\mathcal{B}$  son linealmente independientes.

- (ii) Supongamos que  $\mathcal{B}$  es una base de  $\vec{\mathbb{A}}$ . Veamos que  $\mathcal{R}_A$  es afinamente generadora. Sea  $P \in \mathbb{A}$ , está claro que  $P = P_0 + \overrightarrow{P_0 P}$ . Como  $\overrightarrow{P_0 P} \in \vec{\mathbb{A}}$ , tenemos que existen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  tales que

$$\overrightarrow{P_0 P} = \lambda_1 \overrightarrow{P_0 P_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{P_0 P_n}.$$

Si tomamos  $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i$ , tenemos que  $P = P_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{P_0 P_i}$ , por lo que  $P$  es una combinación afín de  $\mathcal{R}_A$  y  $\mathcal{R}_A$  es afinamente generadora. Veamos que  $\mathcal{R}_A$  es afinamente independiente. Supongamos que  $P_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j P_j$  con  $\sum_{j \neq i} \alpha_j = 1$  para  $i \neq 0$  (si  $i = 0$

para lo que continua tomamos otro punto). Tenemos que  $P_i = P_0 + \overrightarrow{P_0 P_i}$  y además

$$P_i = P_0 + \sum_{j=0, j \neq i}^n \alpha_j \overrightarrow{P_0 P_j} \Rightarrow \overrightarrow{P_0 P_i} = \sum_{j=0, j \neq i}^n \alpha_j \overrightarrow{P_0 P_j}.$$

Esto contradice que  $\mathcal{B}$  sea linealmente independiente. □

**Ejemplo.** Consideremos  $\mathbb{A} = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) / \{x_0 + 2x_1 = 0\} = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) / \mathbb{P}(U)$  donde  $U = \text{Ker}(f)$  y  $f(x_0, x_1) = x_0 + 2x_1$ .

- Probemos que  $P_0 = [1 : 1]$  y  $P_1 = [1 : 0]$  forman una referencia afín de  $\mathbb{A}$ . Por lo visto anteriormente,  $\mathcal{R}_A = \{P_0, P_1\}$  es una referencia afín si y solo si  $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{P_0 P_1}\}$  es una base de  $\vec{\mathbb{A}}$ . En este caso, tenemos que  $\vec{\mathbb{A}} = U$  y  $\dim U = 1$ . Tenemos que

$$\overrightarrow{P_0 P_1} = \frac{(1, 0)}{f(1, 0)} - \frac{(1, 1)}{f(1, 1)} = (1, 0) - \frac{1}{3}(1, 1) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Como  $\overrightarrow{P_0 P_1} \neq 0$ , tenemos que  $\mathcal{B}$  es una base de  $\vec{\mathbb{A}}$ .

- Calculemos las coordenadas baricéntricas de  $[5 : -2]$  en la referencia afín. Queremos que existan  $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$  tales que  $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$  y

$$[5 : -2] = (\lambda_0, \lambda_1)_{\mathcal{R}_A}.$$

Además,

$$[5 : -2] = [1 : 1] + \lambda_1 \overrightarrow{P_0 P_1} = [1 : 1] + \lambda_1 \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \iff \overrightarrow{[1 : 1][5 : -2]} = \lambda_1 \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Así, nos queda que

$$\left(\frac{14}{3}, -\frac{7}{3}\right) = \lambda_1 \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Nos queda que  $\lambda_1 = 7$  y  $\lambda_0 = -6$ . Así, las coordenadas baricéntricas de  $[5 : -2]$  son  $(-6, 7)_{\mathcal{R}_A}$ .

Ahora vamos a introducir referencias en el espacio proyectivo.

**Definición 2.7.** Una familia de puntos  $[v_0], \dots, [v_n] \in \mathbb{P}(V)$  es **independiente** si  $v_0, \dots, v_n$  es linealmente independiente.

**Lema 2.2.** Ser independiente no depende de los representantes.

*Demostración.* Sean  $[v_0], \dots, [v_n] \in \mathbb{P}(V)$  y supongamos que  $v_0, \dots, v_n$  son linealmente independientes. Sean  $[v'_0] = [v_0], \dots, [v'_n] = [v_n]$ . Así, para  $i = 1, \dots, n$  existe  $\lambda_i \in \mathbb{K}^*$  tal que  $v'_i = \lambda_i v_i$ . Tenemos que demostrar que  $v'_0, \dots, v'_n$  son linealmente independientes. Si  $\mu_0, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$ ,

$$0 = \mu_0 v'_0 + \dots + \mu_n v'_n = \mu_0 \lambda_0 v_0 + \dots + \mu_n \lambda_n v_n.$$

Como  $v_0, \dots, v_n$  son linealmente independientes, debe ser que  $\mu_i \lambda_i = 0, \forall i = 0, \dots, n$ . Como  $\lambda_i \neq 0$  debe ser que  $\mu_i = 0$  y  $v'_0, \dots, v'_n$  son linealmente independientes.  $\square$

**Observación.** Observamos que si  $\dim(V) = n + 1$ , entonces toda familia independiente de  $\mathbb{P}(V)$  tiene a lo sumo  $n + 1$  elementos.

**Definición 2.8.**  $P_0, \dots, P_r \in \mathbb{P}(V)$  están en **posición general** si cualquier subconjunto de tamaño  $\dim(V)$  contiene elementos independientes.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>En el caso de que  $r+1 < \dim(V)$  basta con que los elementos de  $\{P_0, \dots, P_r\}$  sean independientes.

**Ejemplo.**  $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$  están en posición general si ninguna terna está alineada.

**Definición 2.9 (Referencia proyectiva).** Sea  $n = \dim \mathbb{P}(V)$  ( $\dim_{\mathbb{K}} V = n + 1$ ). Una **referencia proyectiva** de  $\mathbb{P}(V)$  es una colección ordenada de  $n + 2$  puntos en posición general

$$\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \dots, P_n; P_{n+1}\}.$$

A  $P_{n+1}$  se le llama **punto de medida** o **punto de unidad**. Diremos que una base de  $V$ ,  $\mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_n\}$ , es una **base asociada** a  $\mathcal{R}$  si  $P_i = [v_i]$  para  $i = 0, \dots, n$  y  $P_{n+1} = [v_0 + v_1 + \dots + v_n]$ . Las **coordenadas homogéneas** de  $P \in \mathbb{P}(V)$  son  $[\lambda_0 : \lambda_1 : \dots : \lambda_n]$  si  $P = [\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n] = [(\lambda_0, \dots, \lambda_n)_{\mathcal{B}}]$ .

**Lema 2.3.** Las bases asociadas a una referencia proyectiva son proporcionales entre ellas. En particular, las coordenadas homogéneas respecto a una referencia proyectiva son únicas, salvo proporcionalidad.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{R} = \{P_0, \dots, P_n; P_{n+1}\}$  una referencia proyectiva de  $\mathbb{P}(V)$  y sean  $\mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_n\}$  y  $\mathcal{B}' = \{v'_0, \dots, v'_n\}$  bases asociadas tales que  $P_i = [v_i] = [v'_i]$  para  $i = 0, \dots, n$  y  $P_{n+1} = [v_0 + \dots + v_n] = [v'_0 + \dots + v'_n]$ . Así, existe  $\lambda_i \in \mathbb{K}$  para  $i = 0, \dots, n$  tal que  $v'_i = \lambda_i v_i$  con  $\lambda_i \neq 0$ . Similarmente, existe  $\lambda \neq 0$  tal que

$$v'_0 + \dots + v'_n = \lambda(v_0 + \dots + v_n).$$

Así, tenemos que

$$v'_0 + \dots + v'_n = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n = \lambda v_0 + \dots + \lambda v_n.$$

Por ser  $\mathcal{B}$  base de  $V$ , tenemos que  $\lambda_i = \lambda$ ,  $\forall i = 0, \dots, n$  y nos queda que  $\mathcal{B}' = \{\lambda v_0, \dots, \lambda v_n\}$ . Explicamos el 'en particular': si  $P = [a_0 v_0 + \dots + a_n v_n]$ , entonces

$$P = [a_0 : \dots : a_n] = \left[ \frac{a_0}{\lambda} (\lambda v_0) + \dots + \left( \frac{a_n}{\lambda} \right) (\lambda v_n) \right] \Rightarrow P = \left[ \frac{a_0}{\lambda} : \dots : \frac{a_n}{\lambda} \right].$$

□

**Ejemplo.** La referencia proyectiva estándar es

$$\mathcal{R} = \{[1 : 0 : \dots : 0], [0 : 1 : \dots : 0], \dots, [0 : 0 : \dots : 1]; [1 : 1 : \dots : 1]\}.$$

Así, tenemos que la base asociada es la base estándar

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\}.$$

**Ejemplo.** Consideremos los puntos

$$P_0 = [1 : 2 : 3], \quad P_1 = [2 : -3 : 4], \quad P_2 = [4 : 5 : -6], \quad P_3 = [11 : 9 : -5].$$

Veamos que  $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, P_2; P_3\}$  es una referencia proyectiva y buscamos la base asociada.

Consideremos

$$v_0 = (1, 2, 3), \quad v_1 = (2, -3, 4), \quad v_2 = (4, 5, -6), \quad v_3 = (11, 9, -5).$$

Tenemos que  $\mathcal{R}$  es una referencia proyectiva si y solo si están en posición general, es decir, si toda colección de tres vectores de  $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$  son linealmente independientes. Esto es equivalente a que  $\{v_0, v_1, v_2\}$  sean linealmente independientes y que  $\alpha v_0 + \beta v_1 + \gamma v_2 = v_3$  implica que  $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ . Tenemos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 120 \neq 0.$$

Por tanto,  $\{v_0, v_1, v_2\}$  son linealmente independientes. Veamos la segunda parte:

$$\alpha(1, 2, 3) + \beta(2, -3, 4) + \gamma(4, 5, -6) = (11, 9, -5).$$

Así, nos queda el sistema

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 4\gamma = 11 \\ 2\alpha - 3\beta + 5\gamma = 9 \\ 3\alpha + 4\beta - 6\gamma = -5 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 1, \gamma = 2.$$

Por tanto,  $P_0, P_1, P_2, P_3$  están en posición general y  $\mathcal{R}$  es una referencia proyectiva. Busquemos la base asociada  $\mathcal{B} = \{u_0, u_1, u_2\}$  tal que  $P_i = [u_i]$  con  $i = 0, 1, 2$  y  $P_3 = [u_0 + u_1 + u_2]$ . Tendremos que

$$\mathcal{B} = \{u_0, u_1, u_2\} = \{\alpha v_0, \beta v_1, \gamma v_2\} = \{v_0, v_1, 2v_2\}.$$

### 2.1.2. Cambio de coordenadas cartesianas

Estudiemos primero el caso de las coordenadas cartesianas en  $\mathbb{A}$ .

Sean  $\mathcal{R}_C = \{O, \mathcal{B}\}$  y  $\mathcal{R}'_C = \{O', \mathcal{B}'\}$  referencias cartesianas de  $\mathbb{A}$ . Si  $A \in \mathbb{A}$  tenemos que

$$A = O + \sum_{i=1}^n x_i v_i = O' + \sum_{i=1}^n y_i v'_i.$$

De aquí deducimos que

$$\overrightarrow{O'A} = \sum_{i=1}^n y_i v'_i = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'O} + \sum_{i=1}^n x_i v_i.$$

Tenemos que  $\overrightarrow{O'O} = (a_0, \dots, a_n)_{\mathcal{B}'}$  con  $O = (a_0, \dots, a_n)_{\mathcal{R}'_C}$ . Así, nos queda que

$$\sum_{i=1}^n y_i v'_i = \sum_{i=1}^n a_i v'_i = \sum_{i=1}^n x_i v_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n (y_i - a_i) v'_i = \sum_{i=1}^n x_i v_i.$$

Sea  $C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$  la matriz de cambio de base de la base  $\mathcal{B}$  a la base  $\mathcal{B}'$ . Así, tenemos que

$$\begin{pmatrix} y_1 - a_1 \\ \vdots \\ y_n - a_n \end{pmatrix} = C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Para que quede elegante ponemos

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & & & \\ \vdots & & C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} & \\ a_n & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

La matriz de cambio de  $\mathcal{R}_C$  a  $\mathcal{R}'_C$  es

$$C_{\mathcal{R}_C \mathcal{R}'_C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & & & \\ \vdots & & C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} & \\ a_n & & & \end{pmatrix}.$$

### 2.1.3. Cambio de coordenadas baricéntricas

Sean  $\mathcal{R}_A = \{P_0, \dots, P_n\}$  y  $\mathcal{R}'_A = \{Q_0, \dots, Q_n\}$  referencias afines de  $\mathbb{A}$ . Sea  $A \in \mathbb{A}$  con  $A = (\lambda_0, \dots, \lambda_n)_{\mathcal{R}_A} = (\mu_0, \dots, \mu_n)_{\mathcal{R}'_A}$ . Supongamos que  $P_j = (a_{0j}, \dots, a_{nj})_{\mathcal{R}'_A}$ . Tenemos que

$$A = \sum_{j=0}^n \lambda_j P_j = \sum_{j=0}^n \lambda_j \sum_{i=0}^n a_{ij} Q_i = \sum_{i=0}^n \left( \sum_{j=0}^n \lambda_j a_{ij} \right) Q_i = \sum_{j=0}^n \mu_j Q_j.$$

Así, tenemos que  $\mu_i = \sum_{j=0}^n a_{ij} \lambda_j$ . Matricialmente obtenemos la expresión

$$\begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{C_{\mathcal{R}_A \mathcal{R}'_A}} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Tenemos que  $C_{\mathcal{R}_A \mathcal{R}'_A}$  es la matriz de cambio de  $\mathcal{R}_A$  a  $\mathcal{R}'_A$ . Podemos observar que las columnas de  $C_{\mathcal{R}_A \mathcal{R}'_A}$  son las coordenadas baricéntricas de  $P_i$  en la referencia  $\mathcal{R}'_A$ .

### 2.1.4. Cambios de coordenadas homogéneas en $\mathbb{P}$

Sean  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{R}'$  referencias proyectivas y sean  $\mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_n\}$  y  $\mathcal{B}' = \{v'_0, \dots, v'_n\}$  sus bases asociadas, respectivamente. Sea  $P \in \mathbb{P}$  con  $P = [a_0 : \dots : a_n]_{\mathcal{R}} = [a_0 v_0 + \dots + a_n v_n] = [a'_0 v'_0 + \dots + a'_n v'_n]$ . Supongamos que  $v_i = b_{i0} v'_0 + \dots + b_{in} v'_n$ . Así, nos queda que

$$\begin{aligned} (a_0, \dots, a_n)_{\mathcal{B}} &= a_0 (b_{00} v'_0 + \dots + b_{0n} v'_n) + \dots + a_n (b_{n0} v'_0 + \dots + b_{nn} v'_n) \\ &= (a_0 b_{00} + \dots + a_n b_{n0}) v'_0 + \dots + (a_0 b_{0n} + \dots + a_n b_{nn}) v'_n \\ &= (a_0 b_{00} + \dots + a_n b_{n0}, \dots, a_0 b_{0n} + \dots + a_n b_{nn})_{\mathcal{B}'} . \end{aligned}$$

Matricialmente nos queda que

$$\begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_{00} & b_{10} & \cdots & b_{n0} \\ b_{01} & b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{0n} & b_{1n} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}}_{C_{\mathcal{B} \mathcal{B}'}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} .$$

Cada una de las columnas de  $C_{\mathcal{B} \mathcal{B}'}$  es  $v_i$  en la base  $\mathcal{B}'$ . Podemos observar que  $P = [a_0 : \dots : a_n] = [\lambda a_0 : \dots : \lambda a_n]$  con  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ . En particular

$$\begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} = \lambda C_{\mathcal{B} \mathcal{B}'} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

también nos sirve para cambiar de coordenadas homogéneas de  $\mathcal{R}$  en  $\mathcal{R}'$ . Por tanto, no buscamos una matriz para cambiar de una referencia a otra, sino una clase de equivalencia de matrices de cambio de referencias:

$$[C_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}] = \{\lambda C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} : \lambda \in \mathbb{K}^*\}.$$

**Ejemplo.** Consideremos las referencias

$$\mathcal{R} = \{[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]; [1 : 1 : 1]\}.$$

$$\mathcal{R}' = \{[1 : 1 : 0], [-1 : 1 : 0], [1 : 0 : 1]; [1 : -2 : 1]\}.$$

Calculemos las posibles matrices de cambio de referencia. Tenemos que  $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  es la base asociada a  $\mathcal{R}$ . Calculemos la base asociada a  $\mathcal{R}'$ . Cogemos  $v_0 = (1, 1, 0)$ ,  $v_1 = (-1, 1, 0)$  y  $v_2 = (1, 0, 1)$ . Tenemos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Así,  $\{v_0, v_1, v_2\}$  son linealmente independientes. Encontremos  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$  tales que

$$\alpha v_0 + \beta v_1 + \gamma v_2 = (1, -2, 1).$$

Nos queda el sistema

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 1 \\ \alpha + \beta = 2 \\ \gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = -1, \gamma = 1.$$

Así, tenemos que  $\mathcal{B}' = \{(-1, -1, 0), (1, -1, 0), (1, 0, 1)\}$ . Para encontrar  $[C_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}]$  buscamos

$$C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = (C_{\mathcal{B}'\mathcal{B}})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, nos queda que

$$[C_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}] = \left[ \begin{pmatrix} -\lambda & -\lambda & \lambda \\ \lambda & -\lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{K}^* \right].$$

**Observación.** En los tres tipos de referencia tenemos que  $C_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}^{-1} = C_{\mathcal{R}'\mathcal{R}}$ . También es cierto que  $C_{\mathcal{R}'\mathcal{R}''} C_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} = C_{\mathcal{R}\mathcal{R}''}$ . Esto último es útil porque, en general, es más sencillo calcular  $C_{\mathcal{R}\mathcal{E}}$ , donde  $\mathcal{E}$  es la base canónica. Así, para cambiar de  $\mathcal{R}$  a  $\mathcal{R}'$  podemos hacer

$$C_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} = C_{\mathcal{R}'\mathcal{E}}^{-1} C_{\mathcal{R}\mathcal{E}}.$$

## 2.2. Aplicaciones afines

**Definición 2.10 (Aplicación afín).** Sean  $\mathbb{A}$  y  $\mathbb{A}'$  espacios afines. Una **aplicación afín** es una función  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  tal que  $\forall O \in \mathbb{A}$ ,

$$\vec{f}_O : \vec{\mathbb{A}} \rightarrow \vec{\mathbb{A}}' : \overrightarrow{OA} \rightarrow \overrightarrow{f(O)f(A)},$$

es lineal. Si  $f$  es biyectiva, diremos que  $f$  es una **afinidad**.

**Proposición 2.4.** Sea  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  una función. Son equivalentes:

(i)  $\forall O \in \mathbb{A}$ ,  $\vec{f}_O : \vec{\mathbb{A}} \rightarrow \vec{\mathbb{A}} : A \rightarrow \vec{f}_O(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{f(O)f(A)}$  es lineal.

(ii) Si  $\sum \lambda_i = 1$ ,  $f\left(\sum_{i=0}^r \lambda_i P_i\right) = \sum_{i=0}^r \lambda_i f(P_i)$ .

*Demostración.* (i) Sean  $P_0, \dots, P_r \in \mathbb{A}$  y  $\lambda_0, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$  con  $\sum \lambda_i = 1$ . Por definición de  $\vec{f}_O$  tenemos que  $\vec{f}_O\left(\overrightarrow{O \sum \lambda_i P_i}\right) = \overrightarrow{f(O)f\left(\sum \lambda_i P_i\right)}$ . Es decir,

$$f(O) + \vec{f}_O\left(\overrightarrow{O \sum \lambda_i P_i}\right) = f\left(\sum \lambda_i P_i\right).$$

Así, tenemos que

$$f\left(\sum_{i=0}^r \lambda_i P_i\right) = f(O) + \vec{f}_O\left(\overrightarrow{O \sum_{i=0}^r \lambda_i P_i}\right) = f(O) + \vec{f}_O\left(\sum_{i=0}^r \lambda_i \overrightarrow{OP_0}\right).$$

Esta última igualdad se debe a que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O \sum_{i=0}^r \lambda_i P_i} &= \overrightarrow{O \left( P_0 + \sum_{i=0}^r \lambda_i \overrightarrow{P_0 P_i} \right)} = \overrightarrow{OP_0} + \sum_{i=0}^r \lambda_i \overrightarrow{P_0 P_i} \\ &= \sum_{i=0}^r \overrightarrow{OP_0} + \sum_{i=0}^r \lambda_i \overrightarrow{P_0 P_i} = \sum_{i=0}^r \lambda_i \left( \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0 P_i} \right). \end{aligned}$$

Aplicando que  $\vec{f}_O$  es lineal, si volvemos a nuestro cálculo inicial tomando  $\lambda_{-1} = 0$  y  $f(P_{-1}) = O$ ,

$$= f(O) + \sum_{i=0}^r \lambda_i \vec{f}_O\left(\overrightarrow{OP_i}\right) = f(O) + \sum_{i=0}^r \lambda_i \overrightarrow{f(O)f(P_i)} = \sum_{i=-1}^r \lambda_i f(P_i) = \sum_{i=0}^r \lambda_i f(P_i).$$

(ii) Sean  $v_1, v_2 \in \vec{\mathbb{A}}$  y  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ . Supongamos que  $v_1 = \overrightarrow{OA}$  y  $v_2 = \overrightarrow{OB}$ . Tenemos que

$$\begin{aligned}\vec{f}_O(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= \vec{f}_O\left(\lambda_1 \overrightarrow{OA} + \lambda_2 \overrightarrow{OB}\right) = \overrightarrow{f(O)f(O + \lambda_1 \overrightarrow{OA} + \lambda_2 \overrightarrow{OB})} \\ &= \overrightarrow{f(O)f((1 - \lambda_1 - \lambda_2)O + \lambda_1 A + \lambda_2 B)} \\ &= \overrightarrow{f(O)((1 - \lambda_1 - \lambda_2)f(O) + \lambda_1 f(A) + \lambda_2 f(B))} \\ &= \overrightarrow{f(O)(f(O) + \lambda_1 \overrightarrow{f(O)f(A)} + \lambda_2 \overrightarrow{f(O)f(B)})} \\ &= \lambda_1 \overrightarrow{f(O)f(A)} + \lambda_2 \overrightarrow{f(O)f(B)} = \lambda_1 \vec{f}_O(\overrightarrow{OA}) + \lambda_2 \vec{f}_O(\overrightarrow{OB}) \\ &= \lambda_1 \vec{f}_O(v_1) + \lambda_2 \vec{f}_O(v_2).\end{aligned}$$

Por tanto,  $\vec{f}_O$  es lineal. □

**Proposición 2.5.** Sean  $\mathbb{A}$  y  $\mathbb{A}'$  dos espacios afines de dimensión  $n$ . Sean  $\mathcal{R}_A = \{P_0, \dots, P_n\}$  y  $\mathcal{R}'_A = \{Q_0, \dots, Q_n\}$  referencias afines de  $\mathbb{A}$  y  $\mathbb{A}'$ , respectivamente. Entonces existe una única afinidad

$$\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}', \quad \phi(P_i) = Q_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

*Demostración. Existencia.* Definimos  $\phi$  de la siguiente forma:

$$\phi\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i\right) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \phi(P_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i Q_i, \quad \sum \lambda_i = 1.$$

Vamos a ver que esto define una aplicación lineal  $\vec{\phi}_{P_0}$ . Por ser  $\mathcal{R}_A$  y  $\mathcal{R}'_A$  referencias afines, tenemos que  $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$  y  $\{\overrightarrow{Q_0Q_1}, \dots, \overrightarrow{Q_0Q_n}\}$  son bases de  $\vec{\mathbb{A}}$  y  $\vec{\mathbb{A}'}$ , respectivamente. Sea  $A = (a_0, \dots, a_n)_{\mathcal{R}_A} \in \mathbb{A}$ . Así, tenemos que

$$\overrightarrow{P_0A} = a_1 \overrightarrow{P_0P_1} + \dots + a_n \overrightarrow{P_0P_n}.$$

Ahora podemos calcular

$$\vec{\phi}_{P_0}(\overrightarrow{P_0A}) = \vec{\phi}_{P_0}\left(a_1 \overrightarrow{P_0P_1} + \dots + a_n \overrightarrow{P_0P_n}\right).$$

Por otro lado tenemos que esta expresión es igual a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\phi(P_0)\phi(A)} &= \overrightarrow{\phi(P_0)\left(\sum a_i P_i\right)} = \overrightarrow{Q_0 \sum a_i Q_i} = a_1 \overrightarrow{Q_0Q_1} + \dots + a_n \overrightarrow{Q_0Q_n} \\ &= a_1 \vec{\phi}_{P_0}(\overrightarrow{P_0P_1}) + \dots + a_n \vec{\phi}_{P_0}(\overrightarrow{P_0P_n}).\end{aligned}$$

Así, tenemos que  $\vec{\phi}_{P_0}$  es lineal y  $\phi$  es una afinidad.

**Unicidad.** Sea  $\psi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  una afinidad tal que  $\psi(P_i) = Q_i$ ,  $\forall i = 0, \dots, n$ . Entonces, tenemos que

$$\psi\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i\right) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \psi(P_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i Q_i = \sum_{i=0}^n \lambda_i \phi(P_i) = \phi\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i\right).$$

Como  $\phi$  y  $\psi$  coinciden en todo punto tenemos que  $\phi = \psi$ .

□

**Notación.** Dados  $\mathbb{A}$  y  $\mathbb{A}'$  espacios afines con referencias afines  $\mathcal{R}_A$  y  $\mathcal{R}'_A$ , respectivamente, y  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  afín, denotamos por  $M_{\mathcal{R}_A \mathcal{R}'_A}(f)$  a la matriz de la función  $f$  que cumple que

$$f \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'_A} = M_{\mathcal{R}_A \mathcal{R}'_A}(f) \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_A}.$$

**Ejemplo.** Sea  $\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  de dimensión 2 tal que

$$\phi(1, 1) = (2, 2), \phi(0, 1) = (-1, 1), \phi(2, -1) = (0, 1).$$

Tenemos que  $\mathcal{R}_A = \{(1, 1), (0, 1), (2, -1)\}$  y  $\mathcal{R}'_A = \{(2, 2), (-1, 1), (0, 1)\}$  son referencias afines de  $\mathbb{A}$ . Tenemos que en estas referencias

$$M_{\mathcal{R}_A \mathcal{R}'_A}(\phi) = I.$$

Calculemos la matriz de  $\phi$  esta vez con la referencia  $\mathcal{E} = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ , es decir, buscamos  $M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\phi)$ . Veremos que

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\phi) = C_{\mathcal{R}'_A \mathcal{E}} M_{\mathcal{R}_A \mathcal{R}'_A}(\phi) C_{\mathcal{E} \mathcal{R}_A}.$$

Tenemos que

$$C_{\mathcal{R}_A \mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{R}'_A \mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, nos queda que

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Proposición 2.6.** Sean  $\mathbb{A}$  y  $\mathbb{A}'$  espacios afines de dimensión  $n$ . Sean  $\mathcal{R}_C = \{O, \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}\}$  referencia de  $\mathbb{A}$  y  $\mathcal{R}'_C = \{O', \mathcal{B}' = \{v'_1, \dots, v'_n\}\}$  referencia de  $\mathbb{A}'$ . Entonces existe una única afinidad  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  tal que  $f(O) = O'$  y  $\vec{f}(v_i) = v'_i$ .

*Demostración.* Sean  $\mathcal{R}_A = \{O, O + v_1, \dots, O + v_n\}$  y  $\mathcal{R}'_A = \{O', O' + v'_1, \dots, O' + v'_n\}$  referencias afines de  $\mathbb{A}$  y  $\mathbb{A}'$ , respectivamente. Podemos poner  $v_0 = v'_0 = 0$ . Por la proposición

anterior, existe una única  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  afinidad tal que  $f(O + v_i) = O' + v'_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ . De esta forma, tenemos que

$$\vec{f}(v_i) = \vec{f}\left(\overrightarrow{O(O+v_i)}\right) = \overrightarrow{f(O)f(O+v_i)} = \overrightarrow{O'(O'+v'_i)} = v'_i.$$

□

**Observación.** Sabemos que

$$f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}' : O + \overrightarrow{OA} \rightarrow f(O) + \overrightarrow{f(OA)}.$$

La matriz de  $f$  en las referencias cartesianas  $\mathcal{R}_C$  y  $\mathcal{R}'_C$  cumple que

$$\begin{pmatrix} f \begin{pmatrix} 1 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'_C} \end{pmatrix} = M_{\mathcal{R}_C \mathcal{R}'_C}(f) \begin{pmatrix} 1 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_C} \end{pmatrix}.$$

Nos queda que

$$M_{\mathcal{R}_C \mathcal{R}'_C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f(O)_{\mathcal{R}_C} & M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\vec{f}) \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo.** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$f(1, 1) = (2, 2), \quad f(0, 1) = (-1, 1), \quad f(2, -1) = (0, 1).$$

Habíamos calculado  $M_{\mathcal{R}_A}(f)$  donde  $\mathcal{R}_A = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ . Ahora, buscamos  $M_{\mathcal{R}_C}(f)$  en la referencia  $\mathcal{R}_C = \{(0, 0), \mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}\}$ .

**Opción 1.** Sea

$$\mathcal{R}_1 = \left\{ (1, 1), \mathcal{B}_1 = \left\{ \overrightarrow{(1, 1)(0, 1)}, \overrightarrow{(1, 1)(2, -1)} \right\} \right\} = \{(1, 1), \mathcal{B}_1 = \{(-1, 0), (1, -2)\}\}.$$

Podemos tomar otra referencia

$$\mathcal{R}_2 = \left\{ (2, 2), \mathcal{B}_2 = \left\{ \overrightarrow{(2, 2)(-1, 1)}, \overrightarrow{(2, 2)(0, 1)} \right\} \right\} = \{(2, 2), \mathcal{B}_2 = \{(-3, -1), (-2, -1)\}\}.$$

Así, nos queda que

$$M_{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{R}_C}(f) &= C_{\mathcal{R}_2 \mathcal{R}_C} M_{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2} C_{\mathcal{R}_C \mathcal{R}_1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} I \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{2} & 3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Opción 2.** Buscamos  $\vec{f}(1, 0)$  y  $\vec{f}(0, 1)$ . Tenemos que

$$\begin{aligned}\vec{f}(1, 0) &= \vec{f}(-(-1, 0)) = -\vec{f}(\overrightarrow{(1, 1)(0, 1)}) = -\overrightarrow{f(1, 1)f(0, 1)} \\ &= -\overrightarrow{(2, 2)(-1, 1)} = (3, 1).\end{aligned}$$

De forma análoga, tenemos que

$$\begin{aligned}\vec{f}(0, 1) &= \vec{f}\left(-\frac{1}{2}(-1, 0) - \frac{1}{2}(1, -2)\right) = \vec{f}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{(1, 1)(0, 1)} - \frac{1}{2}\overrightarrow{(1, 1)(2, -1)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{f(1, 1)f(0, 1)} - \frac{1}{2}\overrightarrow{f(1, 1)f(2, -1)} = -\frac{1}{2}(-3, -1) - \frac{1}{2}(-2, -1) \\ &= \left(\frac{5}{2}, 1\right).\end{aligned}$$

Finalmente, calculamos  $f(0, 0)$ :

$$\begin{aligned}f(0, 0) &= f((1, 1) - (1, 1)) = f(1, 1) - \vec{f}(1, 1) \\ &= (2, 2) - (3, 1) - \left(\frac{5}{2}, 1\right) = \left(-\frac{7}{2}, 0\right).\end{aligned}$$

Así, hemos obtenido la misma matriz de dos formas distintas.

**Proposición 2.7.** Sean  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  y  $g : \mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{A}''$  aplicaciones afines. Entonces

1.  $g \circ f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}''$  es afín y  $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$ .
2.  $f$  inyectiva  $\iff \vec{f}$  inyectiva.
3.  $f$  sobreyectiva  $\iff \vec{f}$  sobreyectiva.
4. Si  $f$  es biyectiva, entonces  $f^{-1}$  es afín y  $\overrightarrow{f^{-1}} = \vec{f}^{-1}$ .

*Demostración.* 1. Por ser  $g$  y  $f$  aplicaciones afines, sabemos que conservan las combinaciones afines, por lo que  $g \circ f$  también conservará las combinaciones afines y será una aplicación afín. Ahora, sean  $P, Q \in \mathbb{A}$  y  $A = f(P), B = f(Q) \in \mathbb{A}'$ . Tenemos que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{g \circ f}(\overrightarrow{PQ}) &= \overrightarrow{(g \circ f)(P)(g \circ f)(Q)} = \overrightarrow{g(A)g(B)} = \vec{g}(\overrightarrow{AB}) = \vec{g}(\overrightarrow{f(P)f(Q)}) \\ &= \vec{g}(\vec{f}(\overrightarrow{PQ})) = \vec{g} \circ \vec{f}(\overrightarrow{PQ}).\end{aligned}$$

2. Tenemos que  $f$  es inyectiva si y solo si  $f(P) \neq f(Q)$  cuando  $P \neq Q$ , es decir, si  $\vec{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)} \neq 0$  cuando  $\overrightarrow{PQ} \neq 0$ , es decir, cuando  $\vec{f}$  sea inyectiva.
3. Supongamos que  $f$  es sobreyectiva. Dado  $v \in \mathbb{A}'$ , sean  $P, Q \in \mathbb{A}'$  tales que  $v = \overrightarrow{PQ}$ . Sean  $A, B \in \mathbb{A}$  tales que  $f(A) = P$  y  $f(B) = Q$ . Así, tenemos que

$$\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{PQ} = v.$$

Por tanto,  $\vec{f}$  es sobreyectiva. Ahora, supongamos que  $\vec{f}$  es sobreyectiva y sea  $P \in \mathbb{A}'$ . Fijamos  $O \in \mathbb{A}$  y como  $\overrightarrow{f(O)P} \in \vec{\mathbb{A}'}$ , existe  $u \in \vec{\mathbb{A}}$  tal que  $\vec{f}(u) = \overrightarrow{f(O)P}$ . Entonces, tenemos que si cogemos  $B = O + u$ , entonces  $f(B) = P$ . En efecto,

$$f(B) = f(O + u) = f(O) + \vec{f}(u) = f(O) + \overrightarrow{f(O)P} = P.$$

Así, hemos visto que  $f$  es sobreyectiva.

4. Veamos que  $f^{-1}$  conserva las combinaciones afines. Dados  $Q_1, \dots, Q_r \in \mathbb{A}'$  y  $\lambda_0, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$  con  $\sum_{i=0}^r \lambda_i = 1$ , sea  $P_i = f^{-1}(Q_i)$ . Como  $f$  es afín tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^r \lambda_i f^{-1}(Q_i) &= \sum_{i=0}^r \lambda_i P_i = f^{-1} \left( f \left( \sum_{i=0}^r \lambda_i P_i \right) \right) \\ &= f^{-1} \left( \sum_{i=0}^r \lambda_i f(P_i) \right) = f^{-1} \left( \sum_{i=0}^r \lambda_i Q_i \right). \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que  $f^{-1}$  también es afín. Usando (1) deducimos que

$$id_{\vec{\mathbb{A}'}} = \overline{f \circ f^{-1}} = \vec{f} \circ \overline{f^{-1}} \quad \text{y} \quad id_{\vec{\mathbb{A}}} = \overline{f^{-1} \circ f} = \overline{f^{-1}} \circ \vec{f}.$$

Por tanto, tenemos que  $\overline{f^{-1}} = \vec{f}^{-1}$ .

□

**Proposición 2.8.** Sea  $\mathcal{R} = \{P_0, \dots, P_n; P_{n+1}\}$  una referencia proyectiva de  $\mathbb{P}(V)$ . Sea  $\mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_n\}$  asociada y sea  $f : V \rightarrow \mathbb{K}$  lineal tal que  $f(v_i) \neq 0, \forall i = 0, \dots, n$ . Entonces  $\mathcal{R}_A = \{P_0, \dots, P_n\}$  es una referencia afín de  $\mathbb{P}(V)/\mathbb{P}(\text{Ker}(f))$ .

*Demuestra*ción. Como  $P_i = [v_i]$  para  $i = 0, \dots, n$  y  $f(v_i) \neq 0$ , tenemos que  $P_i \in \mathbb{P}(V)/\mathbb{P}(\text{Ker}(f))$ . Veamos que  $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$  es una base de  $\text{Ker}(f)$ . Basta ver que son linealmente independientes puesto que  $\dim \text{Ker}(f) = n$ . Recordamos que

$$\overrightarrow{P_0P_i} = \frac{v_i}{f(v_i)} - \frac{v_0}{f(v_0)}, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Así, tenemos que

$$0 = \alpha_1 \overrightarrow{P_0P_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{P_0P_n} = \alpha_1 \left( \frac{v_1}{f(v_1)} - \frac{v_0}{f(v_0)} \right) + \dots + \alpha_n \left( \frac{v_n}{f(v_n)} - \frac{v_0}{f(v_0)} \right).$$

De donde se deduce que

$$\sum \alpha_i \frac{v_0}{f(v_0)} = \alpha_1 \frac{v_1}{f(v_1)} + \dots + \alpha_n \frac{v_n}{f(v_n)}.$$

Como  $\{v_0, \dots, v_n\}$  son linealmente independientes, tenemos que  $\alpha_i = 0, \forall i = 0, \dots, n$ . Por tanto,  $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$  son linealmente independientes. □

**Proposición 2.9.** Sea  $\mathbb{A}$  un espacio afín sobre  $\mathbb{K}$  de dimensión  $n$ . Sea  $\mathcal{R}_A = \{Q_0, \dots, Q_n\}$  una referencia afín y sea  $\mathbb{P}(V)$  un espacio proyectivo de  $\mathbb{K}$  de dimensión  $n$  con  $\mathcal{R} = \{P_0, \dots, P_n; P_{n+1}\}$  una referencia proyectiva con base asociada  $\mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_n\}$ . Si  $f : V \rightarrow \mathbb{K}$  es lineal tal que  $f(v_i) \neq 0, \forall i = 0, \dots, n$  tal que  $P_i = [v_i]$ , entonces

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{A} &\rightarrow \mathbb{P}(V) / \mathbb{P}(\text{Ker}(f)) \\ (a_0, \dots, a_n)_{\mathcal{R}_A} &\rightarrow \left[ \frac{a_0}{f(v_0)} : \dots : \frac{a_n}{f(v_n)} \right],\end{aligned}$$

es una afinidad que cumple  $\phi(Q_i) = P_i, \forall i = 0, \dots, n$ .

*Demuestra*ción. En la situación de la proposición tenemos que  $\mathcal{R}'_A = \{P_0, \dots, P_n\}$  es referencia afín de  $\mathbb{A}' = \mathbb{P}(V) / \mathbb{P}(\text{Ker}(f))$ . Por tanto, existe una única afinidad  $\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}' : Q_i \rightarrow P_i$ . Sea  $P = (a_0, \dots, a_n)_{\mathcal{R}'_A}$ , entonces  $P = P_0 + \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{P_0 P_i}$ . Así, tenemos que  $P = [a_0 : \dots : a_n]$  si y solo si  $P = [a_0 v_0 + \dots + a_n v_n]$ . Si  $P \in \mathbb{P}(V) / \mathbb{P}(\text{Ker}(f))$ , entonces  $f(a_0 v_0 + \dots + a_n v_n) \neq 0$ . Así, nos queda que

$$\begin{aligned}P &= [v_0] + a_1 \left( \frac{v_1}{f(v_1)} - \frac{v_0}{f(v_0)} \right) + \dots + a_n \left( \frac{v_n}{f(v_n)} - \frac{v_0}{f(v_0)} \right) \\ &= \left[ \frac{v_0}{f(v_0)} + a_1 \left( \frac{v_1}{f(v_1)} - \frac{v_0}{f(v_0)} \right) + \dots + a_n \left( \frac{v_n}{f(v_n)} - \frac{v_0}{f(v_0)} \right) \right] \\ &= \left[ \left( 1 - \sum_{i=1}^n a_i \right) \frac{v_0}{f(v_0)} + a_1 \frac{v_1}{f(v_1)} + \dots + a_n \frac{v_n}{f(v_n)} \right] \\ &= \left[ a_0 \frac{v_0}{f(v_0)} + \dots + a_n \frac{v_n}{f(v_n)} \right] = \left[ \frac{a_0}{f(v_0)} : \frac{a_1}{f(v_1)} : \dots : \frac{a_n}{f(v_n)} \right]_{\mathcal{R}}.\end{aligned}$$

□

## 2.3. Aplicaciones proyectivas

Escribimos  $f : A \rightarrow B$  para denotar a una función definida sobre un subconjunto de  $A$ .

**Definición 2.11 (Aplicación proyectiva).** Una **aplicación proyectiva**  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$  es una función asociada a una función lineal  $\hat{f} : V \rightarrow V'$  de tal forma que  $[\hat{f}(v)] = f([v])$ . La aplicación  $f$  no está definida sobre  $\mathbb{P}(\text{Ker}(\hat{f}))$ . A este conjunto lo llamamos el **centro** de  $f$  y lo denotamos  $Z(f)$ .

**Observación.** Podemos ver que la definición de aplicación proyectiva está bien definida puesto que

$$f([\lambda v]) = [\hat{f}(\lambda v)] = [\lambda \hat{f}(v)] = [\hat{f}(v)].$$

**Observación.** Tenemos que realmente  $f$  es de la forma  $f : \mathbb{P}(V)/Z(f) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ . Si  $Z(f) = \emptyset$ , es decir,  $\text{Ker}(\hat{f}) = \{0\}$ , entonces escribimos  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ . Si además  $\hat{f}$  es un isomorfismo, decimos que  $f$  es una **homografía**.

**Proposición 2.10.** Sea  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$  una aplicación proyectiva. Si  $\hat{f}, \hat{g} : V \rightarrow V'$  cumplen que  $[\hat{f}(v)] = [\hat{g}(v)] = f([v])$ ,  $\forall [v] \in \mathbb{P}(V)/Z(f)$ , entonces existe  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  tal que  $\hat{f} = \lambda \hat{g}$ .

*Demostración.* Tenemos que  $f$  está bien definida en  $\mathbb{P}(V)/\mathbb{P}(\text{Ker}(\hat{f})) = \mathbb{P}(V)/\mathbb{P}(\text{Ker}(\hat{g}))$ . Por tanto,  $\mathbb{P}(\text{Ker}(\hat{f})) = \mathbb{P}(\text{Ker}(\hat{g}))$  y en consecuencia  $\text{Ker}(\hat{f}) = \text{Ker}(\hat{g})$ . Ponemos  $\hat{Z} = \text{Ker}(\hat{f})$ . Buscamos un complemento de  $\hat{Z}$  tal que  $V = \hat{Z} \oplus W$ . Si  $v \in V$ ,  $\exists! z \in \hat{Z}, w \in W$  tales que  $v = z + w$ . Así, tenemos que

$$\hat{f}(v) = \hat{f}(z + w) = \hat{f}(z) + \hat{f}(w) = \hat{f}(w).$$

Análogamente,  $\hat{g}(v) = \hat{g}(w)$ . Así, tenemos que

$$f([v]) = [\hat{f}(v)] = [\hat{f}(w)] = [\hat{g}(v)] = [\hat{g}(w)],$$

por lo que existe  $\lambda_w \in \mathbb{K}^*$  tal que  $\hat{f}(w) = \lambda_w \hat{g}(w)$ . Necesitamos probar que  $\forall w_1, w_2 \in W$  se tiene que  $\lambda_{w_1} = \lambda_{w_2}$ . Consideremos

$$\hat{f}(w_1 + w_2) = \lambda_{w_1 + w_2} \hat{g}(w_1 + w_2) = \lambda_{w_1 + w_2} \hat{g}(w_1) + \lambda_{w_1 + w_2} \hat{g}(w_2) = \lambda_{w_1} \hat{g}(w_1) + \lambda_{w_2} \hat{g}(w_2).$$

Si  $\{\hat{g}(w_1), \hat{g}(w_2)\}$  son linealmente independientes, está claro que  $\lambda_{w_1 + w_2} = \lambda_{w_1} = \lambda_{w_2}$ . Supongamos ahora que son linealmente dependientes, es decir,  $\hat{g}(w_1) = \mu \hat{g}(w_2)$  para  $\mu \in \mathbb{K}^*$  (para que  $\mu \neq 0$  debemos tomar  $w_1, w_2 \neq 0$ ). Sabemos que  $\hat{g}(w_1), \hat{g}(w_2) \neq 0$ . Así, nos queda que

$$\hat{g}(w_1 - \mu w_2) = 0 \iff w_1 - \mu w_2 \in \hat{Z} \cap W \iff w_1 = \mu w_2.$$

Así, está claro que

$$\hat{f}(w_1 + w_2) = (1 + \mu) \hat{f}(w_2) = (1 + \mu) \lambda_{w_2} \hat{g}(w_2) = \mu \lambda_{w_1} \hat{g}(w_2) + \lambda_{w_2} \hat{g}(w_2).$$

De aquí obtenemos que

$$\mu \lambda_{w_2} \hat{g}(w_2) = \mu \lambda_{w_1} \hat{g}(w_2).$$

Como  $\mu \neq 0$ , tenemos que  $\lambda_{w_1} = \lambda_{w_2}$ . Por tanto, existe  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  tal que  $\forall w \in W$  se tiene que  $\hat{f}(w) = \lambda \hat{g}(w)$ . Así, si  $v \in V$ , tenemos que

$$\hat{f}(v) = \hat{f}(w) = \lambda \hat{g}(w) = \lambda \hat{g}(v).$$

□

**Proposición 2.11.** Sean  $\mathbb{P}(V)$  y  $\mathbb{P}(V')$  espacios proyectivos de dimensión  $n$  sobre  $\mathbb{K}$ . Sea  $\mathcal{R} = \{P_0, \dots, P_n; P_{n+1}\}$  y  $\mathcal{R}' = \{P'_0, \dots, P'_n; P'_{n+1}\}$  referencias proyectivas de  $\mathbb{P}(V)$  y  $\mathbb{P}(V')$  respectivamente. Entonces, existe una única homografía  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$  tal que  $f(P_i) = P'_i$ .

*Demostración.* Sea  $\mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_n\}$  una base asociada a  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{B}' = \{v'_0, \dots, v'_n\}$  una base asociada a  $\mathcal{R}'$ .

**Existencia.** Tomamos  $\hat{f} : V \rightarrow V'$  tal que  $\hat{f}(v_i) = v'_i$ , por lo que  $\hat{f}$  es un isomorfismo.

En particular,  $\text{Ker } \hat{f} = \{0\}$ . Como  $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(V')$  tenemos que  $\hat{f}$  induce una homografía. Así, podemos tomar

$$f(P_i) = f([v_i]) = [\hat{f}(v_i)] = [v'_i] = P'_i.$$

Además, tenemos que

$$f(P_{n+1}) = f([v_0 + \dots + v_n]) = [\hat{f}(v_0 + \dots + v_n)] = [v'_0 + \dots + v'_n] = P'_{n+1}.$$

**Unicidad.** Sea  $h : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$  una homografía tal que  $h(P_i) = P'_i$  con  $i = 0, \dots, n+1$ .

Sea  $\hat{h} : V \rightarrow V'$  la aplicación lineal que induce  $h$ . Tenemos que

$$h(P_i) = f(P_i) \Rightarrow [\hat{h}(v_i)] = [\hat{f}(v_i)].$$

Así, tenemos que  $\hat{h}(v_i) = \lambda_i v'_i$  y  $\hat{h}(v_0 + \dots + v_n) = \lambda(v'_0 + \dots + v'_n)$ . De esta manera, obtenemos que

$$\lambda(v'_0 + \dots + v'_n) = \lambda_0 v'_0 + \dots + \lambda_n v'_n.$$

Como  $\mathcal{B}'$  es una base tenemos que  $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = \lambda$ , así tenemos que  $\hat{h}(v_i) = \lambda v'_i = \lambda \hat{f}(v_i)$ , por lo que  $\hat{h} = \lambda \hat{f}$  y  $h = f$ .

□

**Ejemplo.** En  $\mathbb{RP}^1 := \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$  consideremos

$$\begin{aligned} f : \mathbb{RP}^1 &\rightarrow \mathbb{RP}^1 : [x_0 : x_1] \rightarrow [x_0 : 2x_1] \\ g : \mathbb{RP}^1 &\rightarrow \mathbb{RP}^1 : [x_0 : x_1] \rightarrow [2x_0 : x_1]. \end{aligned}$$

Tenemos que  $f([1 : 0]) = [1 : 0]$  y  $g([1 : 0]) = [2 : 0]$ , por lo que  $f([1 : 0]) = g([1 : 0])$ . Análogamente, podemos ver que  $f([0 : 1]) = [0 : 2] = [0 : 1] = g([0 : 1])$ . Sin embargo, como  $f([1 : 1]) = [1 : 2] \neq [2 : 1] = g([1 : 1])$  no puede tratarse de una homografía. Es decir, para poder decir que  $f$  y  $g$  son iguales debemos encontrar tres puntos que formen una referencia proyectiva y cuyas imágenes cuadren. Sin embargo una afinidad de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  está determinada por dos puntos.

**Observación.** Si  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$  es una aplicación proyectiva,  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{R}'$  son referencias proyectivas de  $\mathbb{P}(V)$  y  $\mathbb{P}(V')$ , respectivamente, con bases asociadas  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$ , existe una aplicación lineal  $\hat{f} : V \rightarrow V'$  tal que  $f([v]) = [\hat{f}(v)]$ . Entonces, tenemos que la matriz que representa a la aplicación  $f$  será la clase de equivalencia

$$[M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}(f)] = \left\{ \lambda M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\hat{f}) : \lambda \in \mathbb{K}^* \right\}.$$

Tenemos que

$$f((x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}}) = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\hat{f}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}(f) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo.** Consideremos los siguientes puntos en  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ :

$$P_0 = [1 : 0 : 0], \quad P_1 = [1 : -2 : 1], \quad P_2 = [0 : 2 : 1], \quad P_3 = [1 : -2 : 0].$$

$$Q_0 = [1 : -1 : 0], \quad Q_1 = [1 : 0 : 1], \quad Q_2 = [1 : -1 : 1], \quad Q_3 = [1 : 0 : 0].$$

Nos preguntamos si existe una aplicación proyectiva  $f : \mathbb{P}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$  tal que  $f(P_i) = Q_i$  y calcular  $f$  en la referencia estandar

$$\mathcal{E} = \{[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]; [1 : 1 : 1]\}.$$

Comprobemos que se  $\mathcal{R} = \{P_i : 0 \leq i \leq 3\}$  es una referencia proyectiva. Tenemos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Así, son independientes. Por otro lado, tenemos que

$$(1, -2, 0) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(1, -2, 1) + \gamma(0, 2, 1).$$

Obtenemos que  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \frac{1}{2}$  y  $\gamma = -\frac{1}{2}$ . Como ninguno es nulo, tenemos que  $\mathcal{R}$  es una referencia proyectiva que tiene de base asociada

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, -2, 1), (0, -2, -1)\}.$$

Hacemos lo mismo para ver que  $\mathcal{R}' = \{Q_i : 0 \leq i \leq 3\}$  es una referencia proyectiva y calculamos que su base asociada es

$$\mathcal{B}' = \{(1, -1, 0), (1, 0, 1), (-1, 1, -1)\}.$$

Por la última proposición, existe la  $f$  que buscamos y es única por mandar de una referencia a otra. Así, podemos definir la aplicación lineal asociada como

$$\hat{f}(1, 0, 0) = (1, -1, 0), \quad \hat{f}(1, -2, 1) = (0, -2, -1), \quad \hat{f}(0, -2, -1) = (-1, 1, -1).$$

De aquí es fácil deducir el valor de  $\hat{f}$  en la referencia canónica calculando como actúa  $\hat{f}$  sobre la base canónica o con matrices. Lo hacemos por matrices. Tenemos que  $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\hat{f}) = I$ . Así, tenemos que

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\hat{f}) = C_{\mathcal{B}'\mathcal{E}} M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\hat{f}) C_{\mathcal{E}\mathcal{B}}.$$

Donde tenemos que

$$C_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = C_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{B}'\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como estamos en el caso proyectivo, tenemos que lo que nos importa son las clases de equivalencia de las matrices, no los representantes, por lo que podemos tomar

$$C_{\mathcal{EB}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Así, nos queda

$$M_{\mathcal{EE}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

En la igualdad anterior estamos igualando clases de equivalencia, no ponemos los corchetes por estética. Así, tendríamos que la expresión analítica de  $f$  es

$$f([x_0 : x_1 : x_2]) = [4x_0 + x_1 + x_2 : -4x_0 - 2x_1 : 4x_2].$$

**Proposición 2.12.** Sea  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$  y  $g : \mathbb{P}(V') \rightarrow \mathbb{P}(V'')$  aplicaciones proyectivas con aplicaciones lineales asociadas  $\hat{f} : V \rightarrow V'$  y  $\hat{g} : V' \rightarrow V''$ . Entonces

1. La composición  $g \circ f$  es una aplicación proyectiva y  $\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}$ .
2.  $f$  es inyectiva si y solo si  $\hat{f}$  es inyectiva.
3.  $f$  es sobreyectiva si y solo si  $\hat{f}$  es sobreyectiva.

*Demostración.* 1. Tenemos que  $g \circ f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V'')$  cumple que  $\forall v \in V$ ,

$$g(f([v])) = g([\hat{f}(v)]) = [\hat{g}(\hat{f}(v))].$$

Así, está claro que  $g \circ f$  es una aplicación proyectiva y que  $\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}$ .

2. Supongamos que  $f$  es inyectiva y que  $\hat{f}(v) = \hat{f}(w)$ . Así, tenemos que

$$[\hat{f}(v)] = [\hat{f}(w)] \Rightarrow f([v]) = f([w]) \Rightarrow [v] = [w].$$

Así, tenemos que  $v = \lambda w$  para  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ . Así, tenemos que  $\hat{f}(v) = \lambda \hat{f}(w) = \hat{f}(w)$ , por lo que debe ser que  $\lambda = 1$  (tenemos que  $\hat{f}(w) \neq 0$ ). Recíprocamente, si  $\hat{f}$  es inyectiva y  $f([v]) = f([w])$ , tenemos que

$$[\hat{f}(v)] = [\hat{f}(w)] \Rightarrow \hat{f}(v) = \lambda \hat{f}(w), \lambda \in \mathbb{K}^*.$$

Así, obtenemos que  $v - \lambda w \in \text{Ker } \hat{f}$ , por lo que  $v - \lambda w = 0$  y  $v = \lambda w$ , de forma que  $[v] = [w]$ .

3. Supongamos que  $f$  es sobreyectiva. Si  $v \in V'$ , tenemos que existe  $u \in V$  tal que  $f([u]) = [v]$ , es decir,

$$[\hat{f}(u)] = [v] \Rightarrow \hat{f}(u) = \lambda v, \lambda \in \mathbb{K}^*.$$

Así, si tomamos  $u' = \frac{u}{\lambda} \notin \text{Ker}(\hat{f})$  tenemos que

$$\hat{f}(u') = \hat{f}\left(\frac{u}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}\lambda v = v.$$

Recíprocamente, supongamos que  $\hat{f}$  es sobreyectiva. Si  $[v] \in \mathbb{P}(V')$ , podemos coger a su representante  $v \in V'$  y sabemos que existe  $u \in V$  tal que  $\hat{f}(u) = v$ , es decir,

$$f([u]) = [\hat{f}(u)] = [v].$$

□

## 2.4. Variedades

### 2.4.1. Variedades afines

**Definición 2.12** (Variedad afín). Si  $\mathbb{A}$  es un espacio afín, una **variedad** es un conjunto  $\emptyset \neq X \subset \mathbb{A}$  tal que existe  $P \in X$  y existe  $W \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{A}})$  tal que

$$X = P + W = \{P + w : w \in W\}.$$

**Lema 2.4.** Sean  $X$  una variedad de  $\mathbb{A}$ ;  $P, Q \in X$ ;  $W, U \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{A}})$ . Si  $P + W = Q + U = X$ , entonces  $W = U$  y  $\overrightarrow{PQ} \in W$ .

*Demostración.* Supongamos que  $P + W = Q + U = X$ , tenemos que  $Q \in P + W$ , es decir, existe  $w \in W$  tal que  $P + w = Q$ , por lo que  $\overrightarrow{PQ} = w \in W$ . Por otro lado, si  $u \in U$ , tenemos que  $Q + u \in P + W$ , por lo que existe  $w \in W$  tal que  $Q + u = P + w$ , así nos queda que  $u = \overrightarrow{QP} + w \in W$  por lo que  $u \in W$ . El otro contenido se hace de forma análoga por lo que  $W = U$ . □

**Notación.** Si  $X$  es una variedad de  $\mathbb{A}$  y  $X = P + W$ , ponemos que  $\vec{X} = W$  y lo llamamos la **dirección** de  $X$ .

**Lema 2.5.** Sea  $X$  una variedad de  $\mathbb{A}$ . Entonces,  $\forall P \in X$ ,  $X = P + \vec{X}$ .

*Demostración.* Por definición, sabemos que existe  $O \in X$  tal que  $X = O + \vec{X}$ . Sea  $P \in X$ , tenemos que ver que  $P + \vec{X} = O + \vec{X}$ . Como  $P \in O + \vec{X}$ , existe  $v \in \vec{X}$  tal que  $P = O + v$ , es decir,  $\overrightarrow{OP} = v$ . Así, si  $Q \in P + \vec{X}$ , existe  $w \in \vec{X}$  tal que

$$Q = P + w = O + \overrightarrow{OP} + w = O + (v + w) \in O + \vec{X}.$$

Análogamente, si  $Q \in O + \vec{X}$ , existe  $w \in \vec{X}$  tal que

$$Q = O + w = P + \overrightarrow{PO} + w = P + (w - v) \in P + \vec{X}.$$

Así, tenemos que  $O + \vec{X} = P + \vec{X}$ . □

**Definición 2.13** (Dimensión de una variedad). Sea  $X \subset \mathbb{A}$  una variedad. Decimos que la **dimensión** de  $X$  es  $\dim X := \dim_{\mathbb{K}} \vec{X}$ .

- Si  $\dim X = 0$ ,  $X$  es un **punto**.
- Si  $\dim X = 1$ ,  $X$  es una **recta**.
- Si  $\dim X = 2$ ,  $X$  es un **plano**.
- Si  $\dim X = \dim \mathbb{A} - 1$ ,  $X$  es un **hiperplano**.

**Lema 2.6.** Sea  $X, Y \subset \mathbb{A}$  variedades. Si  $X \cap Y \neq \emptyset$ , entonces  $X \cap Y$  es una variedad y  $\overrightarrow{X \cap Y} = \vec{X} \cap \vec{Y}$ .

*Demuestra*ción. Tenemos que ver que  $X \cap Y = P + \vec{X} \cap \vec{Y}$  con  $P \in \mathbb{A}$ . Como  $X \cap Y \neq \emptyset$ , existe  $P \in X \cap Y$ . Es trivial que  $P + \vec{X} \cap \vec{Y} \subset X \cap Y$ . Ahora, si  $Q \in X \cap Y$ , tenemos que  $\overrightarrow{PQ} \in \vec{X} \cap \vec{Y}$ , por lo que  $Q = P + \overrightarrow{PQ} \in P + \vec{X} \cap \vec{Y}$ .  $\square$

**Definición 2.14** (Variedad generada por un conjunto). La variedad de  $\mathbb{A}$  **generada** por  $S \subset \mathbb{A}$  la denotamos por  $V(S)$  y consiste en la menor variedad que contiene a  $S$ . Así, tenemos que

$$V(S) = \bigcap_{\substack{X \text{ variedad} \\ S \subset X}} X.$$

**Lema 2.7.** Dados  $\{P_0, \dots, P_r\} \subset \mathbb{A}$ , entonces

$$V(\{P_0, \dots, P_r\}) = \left\{ \sum_{i=0}^r \lambda_i P_i : \sum_{i=0}^r \lambda_i = 1 \right\}.$$

$$\overrightarrow{V(\{P_0, \dots, P_r\})} = L(\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_r}).$$

*Demuestra*ción. Sea  $Y = V(\{P_0, \dots, P_r\})$ . Como  $P_0, \dots, P_r \in Y$ , tenemos que  $\overrightarrow{P_0P_i} \in \vec{Y}$ . Así, necesariamente debe ser que  $L(\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_r}) \subset \vec{Y}$ , por lo que

$$P_0 + L(\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_r}) \subset Y.$$

Por ser  $Y$  la menor variedad que contiene a  $\{P_0, \dots, P_r\}$  tenemos que  $Y \subset P_0 + L(\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_r})$ , por lo que  $Y = P_0 + L(\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_r})$ . Así, nos queda que

$$\vec{Y} = L(\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_r}).$$

$\square$

**Observación.** Tenemos que  $\{P_0, \dots, P_r\} \subset \mathbb{A}$  es afinamente independiente si y solo si  $V(\{P_0, \dots, P_r\}) \neq V(\{P_0, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_r\})$ ,  $\forall i \in \{0, \dots, r\}$ . Esto es equivalente a que  $\dim V(\{P_0, \dots, P_r\}) = r$ .

**Proposición 2.13.** Un conjunto  $X \subset \mathbb{A}$  es una variedad si y solo si  $X$  es cerrado por combinaciones afines.

*Demostración.* (i) Si  $X$  es una variedad y  $P_0, \dots, P_r \in X$ , entonces  $V(\{P_0, \dots, P_r\}) \subset X$ , así el conjunto de combinaciones afines de  $\{P_0, \dots, P_r\}$  están contenidas en  $X$ .

(ii) Sabemos que  $X$  es cerrado por combinaciones afines. Sea  $W = \{\overrightarrow{AB} : A, B \in X\} \subset \mathbb{A}$ . Vamos a ver que  $W$  es un subespacio vectorial. Consideremos  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \in W$  y  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ , tenemos que

$$\lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{CD} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) = \lambda \overrightarrow{AB} - \mu \overrightarrow{AC} + \mu \overrightarrow{AD}.$$

Así, tenemos que

$$A + (\lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{CD}) = (1 - \lambda)A + \lambda B - \mu C + \mu D \in X.$$

Por tanto, tenemos que  $A + (\lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{CD}) \in X$  y en consecuencia  $\lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{CD} \in W$ , por lo que  $W$  es un subespacio vectorial. Falta probar que  $X = A + W$ . Si  $B \in X$ , tenemos que  $\overrightarrow{AB} \in W$  por lo que  $B = A + \overrightarrow{AB} \in A + W$ . Recíprocamente, si tomamos  $w \in W$ , tenemos que existen  $B, C \in X$  tal que  $w = \overrightarrow{BC}$ . Veamos que  $A + w \in X$ .

$$A + w = A + \overrightarrow{BC} = A + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = A - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 1 \cdot A - 1 \cdot B + 1 \cdot C \in X,$$

por estar  $X$  cerrado por combinaciones afines.  $\square$

**Notación.** Dadas dos variedades  $X_1$  y  $X_2$ , denotamos  $X_1 + X_2 := V(X_1 \cup X_2)$ , es decir,  $X_1 + X_2$  es la menor variedad que contiene a  $X_1 \cup X_2$ .

**Lema 2.8.** Sean  $X_1 = P_1 + \vec{X}_1$  y  $X_2 = P_2 + \vec{X}_2$  variedades. Entonces,

$$X_1 + X_2 = P_1 + \left( L(\overrightarrow{P_1 P_2}) + \vec{X}_1 + \vec{X}_2 \right).$$

$$\text{En particular, } \overrightarrow{X_1 + X_2} = L(\overrightarrow{P_1 P_2} + \vec{X}_1 + \vec{X}_2).$$

*Demostración.* Consideremos

$$Y = P_1 + \left( L(\overrightarrow{P_1 P_2}) + \vec{X}_1 + \vec{X}_2 \right).$$

Está claro que  $X_1 = P_1 + \vec{X}_1 \subset Y$ . Análogamente,  $X_2 = P_2 + \vec{X}_2 = P_1 + \overrightarrow{P_1 P_2} + \vec{X}_2 \subset Y$ . De esta manera, tenemos que  $X_1 + X_2 \subset Y$ , puesto que  $X_1 + X_2$  es la menor variedad que

contienen a  $X_1$  y  $X_2$ . Por otro lado, supongamos que  $P \in Y$ , entonces tenemos que existen  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $w_1 \in W_1$  y  $w_2 \in W_2$  tales que

$$P = P_1 + \lambda \overrightarrow{P_1 P_2} + w_1 + w_2.$$

Podemos encontrar  $Q_1 \in X_1$  y  $Q_2 \in X_2$  tales que

$$\begin{aligned} P &= P_1 + \lambda \overrightarrow{P_1 P_2} + \overrightarrow{P_1 Q_1} + \overrightarrow{P_2 Q_2} = P_1 + \lambda \overrightarrow{P_1 P_2} + \overrightarrow{P_1 Q_1} + \overrightarrow{P_2 P_1} + \overrightarrow{P_1 Q_2} \\ &= P_1 + \lambda \overrightarrow{P_1 P_2} + \overrightarrow{P_1 Q_1} - \overrightarrow{P_1 P_2} + \overrightarrow{P_1 Q_2} = -\lambda P_1 + (\lambda - 1) P_2 + Q_1 + Q_2. \end{aligned}$$

Así, tenemos que  $P$  es una combinación afín de  $P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in X_1 \cup X_2 \subset X_1 + X_2$ , que está cerrado por combinaciones afines, por lo que  $P \in X_1 + X_2$  e  $Y \subset X_1 + X_2$ .  $\square$

**Teorema 2.1 (Fórmula de Grassmann).** Sean  $X_1, X_2 \subset \mathbb{A}$  variedades con  $\dim \mathbb{A} \leq \infty$ . Entonces

$$\dim X_1 + X_2 = \dim X_1 + \dim X_2 - \dim (\vec{X}_1 \cap \vec{X}_2) + \varepsilon,$$

donde

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, & X_1 \cap X_2 \neq \emptyset \\ 1, & X_1 \cap X_2 = \emptyset \end{cases}.$$

*Demostración.* Tenemos que

$$\dim X_1 + X_2 = \dim_{\mathbb{K}} \overrightarrow{X_1 + X_2}.$$

- Si  $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$  existe  $P \in X_1 \cap X_2$  tal que  $X_1 = P + \vec{X}_1$  y  $X_2 = P + \vec{X}_2$ . Así, tenemos que

$$\overrightarrow{X_1 + X_2} = L(\overrightarrow{PP}) + \vec{X}_1 + \vec{X}_2 = \vec{X}_1 + \vec{X}_2.$$

Entonces,

$$\dim X_1 + X_2 = \dim_{\mathbb{K}} \vec{X}_1 + \vec{X}_2 = \dim_{\mathbb{K}} \vec{X}_1 + \dim_{\mathbb{K}} \vec{X}_2 - \dim_{\mathbb{K}} \vec{X}_1 \cap \vec{X}_2.$$

- Ahora, si  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ , tenemos que  $X_1 = P_1 + \vec{X}_1$  y  $X_2 = P_2 + \vec{X}_2$ . Veamos que  $\overrightarrow{P_1 P_2} \notin \vec{X}_1 + \vec{X}_2$ . En efecto, si  $\overrightarrow{P_1 P_2} \in \vec{X}_1 + \vec{X}_2$  tenemos que existen  $v_1 \in \vec{X}_1$  y  $v_2 \in \vec{X}_2$  tales que

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = v_1 + v_2.$$

Existe  $B \in X_1$  tal que  $v_1 = \overrightarrow{P_1 B}$ . Así, nos queda que

$$v_2 = \overrightarrow{P_1 P_2} - v_1 = \overrightarrow{P_1 P_2} - \overrightarrow{P_1 B} = \overrightarrow{BP_1} + \overrightarrow{P_1 P_2} = \overrightarrow{BP_2}.$$

Así, tendríamos que  $P_2 - v_2 = P_2 - \overrightarrow{BP_2} = P_2 + \overrightarrow{P_2 B} = B \in X_1 \cap X_2$ , que es una contradicción. Por tanto, tendremos que

$$\begin{aligned} \dim X_1 + X_2 &= \dim_{\mathbb{K}} (\overrightarrow{X_1 + X_2}) \\ &= 1 + \dim_{\mathbb{K}} (\vec{X}_1 + \vec{X}_2) = 1 + \dim_{\mathbb{K}} \vec{X}_1 + \dim_{\mathbb{K}} \vec{X}_2 - \dim_{\mathbb{K}} (\vec{X}_1 \cap \vec{X}_2). \end{aligned}$$

$\square$

**Ejemplo.** En  $\mathbb{R}^3$  si tomamos  $X_1$  como una recta y  $X_2$  como un plano tal que  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$  y  $\vec{X}_1 \subset \vec{X}_2$ , tenemos que

$$\dim X_1 + X_2 = \dim X_1 + \dim X_2 - \dim (\vec{X}_1 \cap \vec{X}_2) + \varepsilon = 3.$$

Sin embargo, tenemos que

$$\dim X_1 + X_2 \neq \dim X_1 + \dim X_2 - \dim (X_1 \cap X_2) + \varepsilon,$$

esta última ecuación no tiene sentido puesto que no hemos descrito ninguna forma de asociar una dimensión al conjunto vacío.

**Definición 2.15.** Sean  $X_1$  y  $X_2$  variedades de  $\mathbb{A}$ .

1. Se dice que son **paralelas** si  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$  y  $\vec{X}_1 \subset \vec{X}_2$  o  $\vec{X}_2 \subset \vec{X}_1$ .
2. Se dice que se **cortan** si  $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ ,  $\vec{X}_1 \not\subset \vec{X}_2$  y  $\vec{X}_2 \not\subset \vec{X}_1$ .
3. Se dice que se **cruzan** si  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ ,  $\vec{X}_1 \not\subset \vec{X}_2$  y  $\vec{X}_2 \not\subset \vec{X}_1$ .

**Proposición 2.14.** Sean  $\mathbb{A}$  y  $\mathbb{A}'$  dos espacios afines,  $X \subset \mathbb{A}$ ,  $Y \subset \mathbb{A}'$  variedades afines y  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  una aplicación afín. Entonces,

1.  $f(X)$  es una variedad afín y

$$\overline{f(\vec{X})} = \vec{f}(\vec{X}) \quad \text{y} \quad f(X) = f(A) + \vec{f}(\vec{X}), \quad A \in X.$$

2. Si  $f^{-1}(Y) \neq \emptyset$ , entonces  $f^{-1}(Y)$  es una variedad afín y

$$\overline{f^{-1}(Y)} = \vec{f}^{-1}(\vec{Y}) \quad \text{y} \quad f^{-1}(Y) = A + \vec{f}^{-1}(\vec{Y}), \quad A \in f^{-1}(Y).$$

*Demostración.* 1. Sea  $X = A + \vec{X}$ , veamos que  $f(X) = f(A) + \vec{f}(\vec{X})$ . Si  $B \in f(X)$  entonces existe  $C \in X$  tal que  $f(C) = B$ . Como  $C \in X$  tenemos que  $C = A + v$  con  $v \in \vec{X}$ . Por ser  $f$  una aplicación afín tenemos que

$$B = f(C) = f(A + v) = f(A) + \vec{f}(v) \in f(A) + \vec{f}(\vec{X}).$$

Recíprocamente, si  $B \in f(A) + \vec{f}(\vec{X})$ , tenemos que existe  $v \in \vec{f}(\vec{X})$  y en consecuencia  $u \in \vec{X}$  con  $v = \vec{f}(u)$ , tal que

$$B = f(A) + v = f(A) + \vec{f}(u) = f(A + u) \in f(X).$$

2. Supongamos que  $f^{-1}(Y) \neq \emptyset$ , entonces existe  $A \in f^{-1}(Y)$ , es decir,  $f(A) \in Y$ . Si  $B \in f^{-1}(Y)$ , tenemos que  $f(B) \in Y$ . Por ser  $f$  una aplicación afín tenemos que

$$f(B) = f(A + \vec{AB}) = f(A) + \vec{f}(\vec{AB}) \iff \vec{f}(\vec{AB}) = \overline{f(A)f(B)} \in \vec{Y}.$$

Así, tenemos que  $\overrightarrow{AB} \in \vec{f}^{-1}(\vec{Y})$ , por lo que  $B \in A + \vec{f}^{-1}(\vec{Y})$ . Recíprocamente, si  $B \in A + \vec{f}^{-1}(\vec{Y})$ , tenemos que existe  $v \in \vec{f}^{-1}(\vec{Y})$  tal que  $B = A + v$ . Así, tenemos que

$$f(B) = f(A) + \vec{f}(v) \in Y.$$

□

### 2.4.2. Ecuaciones de variedades afines

Sea  $\mathbb{A}$  un espacio afín de dimensión  $n$  y  $X \subset \mathbb{A}$  una variedad de dimensión  $d$ . En una referencia cartesiana  $\mathcal{R}_C = \{O, \mathcal{B}\}$  podemos describir  $X$  con ecuaciones implícitas con  $C \in \mathcal{M}_{(n-d) \times n}(\mathbb{K})$  y  $a_1, \dots, a_{n-d} \in \mathbb{K}$  tales que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in X \iff C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-d} \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo.** Consideremos la variedad dada por las ecuaciones

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 \\ 3x_1 + x_3 = 1 \end{cases}.$$

En este caso tenemos que  $n = 3$  y  $d = 1$ , donde  $n - d$  es el número de ecuaciones.

Tenemos que  $X$  es una recta.

Tenemos que  $\vec{X} = \{\overrightarrow{OA} : A \in X\}$ . Así, si  $O = (y_1, \dots, y_n)$  y  $\overrightarrow{OA} = (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)$ ,

$$C \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - C \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-d} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-d} \end{pmatrix} = 0.$$

Por tanto, tenemos que

$$(x_1, \dots, x_n)_\mathcal{B} \in \vec{X} \iff C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo.** En el ejemplo anterior, tenemos que

$$\vec{X} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \right\}.$$

También podemos describir  $X$  con **ecuaciones paramétricas**. Es decir, existen  $C \in \mathcal{M}_{n \times d}(\mathbb{K})$  y  $P = (a_1, \dots, a_n)_{\mathcal{R}_C}$  entonces

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in X \iff \exists \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^d, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo.** Consideremos la variedad

$$X = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 \\ 3x_1 + x_3 = 1 \end{cases} \right\}.$$

Tenemos que  $P = (0, 2, 1) \in X$  y

$$\vec{X} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \right\} = L((1, -2, -3)).$$

Así, tendríamos que las ecuaciones paramétricas para esta variedad serían

$$X = \{(0, 2, 1) + \lambda(1, -2, -3) : \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

En una referencia afín  $\mathcal{R}_A$  podemos describir  $X$  con **ecuaciones baricéntricas**. Es decir, existe  $C \in \mathcal{M}_{(n+1) \times (d+1)}$  tal que

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in X \iff \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \vdots \\ \mu_d \end{pmatrix}, \quad \sum_{i=0}^d \mu_i = 1.$$

**Ejemplo.** En el ejemplo anterior consideremos la referencia afín estándar

$$\mathcal{R}_A = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

Recordamos que

$$X = \{(0, 2, 1) + \lambda(1, -2, -3) : \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Si tomamos  $P_0 = (0, 2, 1)$ ,  $\overrightarrow{P_0 P_1} = (1, -2, -3)$  y  $P_1 = (1, 0, -2)$ . De esta manera nos queda

$$X = \left\{ P_0 + \lambda \overrightarrow{P_0 P_1} : \lambda \in \mathbb{K} \right\} = \{(1 - \lambda)P_0 + \lambda P_1 : \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Matricialmente nos queda

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_A} : \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_A} = (1 - \lambda) \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

**Ejemplo.** Consideremos  $\mathbb{A} = \mathbb{R}^3$  y las variedades

$$X_1 = (0, 0, 1) + L((2, 3, 0), (-1, -1, 0)).$$

$$X_2 = \{2x_1 + x_2 = 3\}.$$

Calculemos las ecuaciones implícitas y paramétricas de  $X_1 + X_2$  y  $X_1 \cap X_2$ . En primer lugar, calculemos las ecuaciones implícitas de  $X_1$ :

$$X_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{K} \right\}.$$

Obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x_1 = 2\lambda - \mu \\ x_2 = 3\lambda - \mu \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow X_1 = \{x_3 = 1\}.$$

Así, tenemos que  $X_1 \cap X_2$  viene dado por los puntos que satisfacen las ecuaciones implícitas de  $X_1$  y  $X_2$ :

$$X_1 \cap X_2 = \begin{cases} x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \end{cases}.$$

Para obtener las ecuaciones paramétricas necesitamos calcular  $\overrightarrow{X_1 \cap X_2}$ :

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{X_1 \cap X_2} = L((-1, 2, 0)).$$

Como  $(1, 1, 1) \in X_1 \cap X_2$  tenemos que

$$X_1 \cap X_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

Por otro lado, tenemos que  $\dim(X_1 + X_2) = 3$ , por lo que  $X_1 + X_2 = \mathbb{A}$ .

### 2.4.3. Variedades proyectivas

**Definición 2.16 (Variedad proyectiva).** Se dice que  $X \subset \mathbb{P}(V)$  es una **variedad proyectiva** si existe  $U \in \mathcal{L}(V)$  tal que  $X = \mathbb{P}(U)$ , es decir,  $X = \{[u] : u \in U \setminus \{0\}\}$ . La dimensión de  $X$  es  $\dim X = \dim_{\mathbb{K}} U - 1$ .

**Observación.** En el mundo proyectivo tenemos que el conjunto  $\emptyset$  es una variedad de dimensión  $-1$ . Sin embargo, en el mundo afín el conjunto  $\emptyset$  no es una variedad.

**Proposición 2.15.** Consideremos la aplicación

$$\pi : V / \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(V) : v \mapsto [v].$$

Para  $X \subset \mathbb{P}(V)$  definimos

$$\hat{X} := \pi^{-1}(X) \cup \{0\}.$$

Si  $X$  es una variedad tenemos que  $\hat{X}$  es un subespacio vectorial de  $V$  y  $\mathbb{P}(\hat{X}) = X$ .

*Demostración.* (i) Supongamos que  $x \in \hat{X}$ . Si  $x = 0$  claramente  $x \in \pi^{-1}(X) \cup \{0\}$ . Si  $x \neq 0$ , tenemos que  $[x] \in X$ , por lo que  $x \in \pi^{-1}(X) \cup \{0\}$ .

(ii) Supongamos que  $x \in \pi^{-1}(X) \cup \{0\}$ . Si  $x = 0$  claramente  $x \in \hat{X}$ . Si  $x \neq 0$ , tenemos que  $\pi(x) = [x] \in X$ , por lo que debe ser que  $x \in \hat{X}$ .

□

**Proposición 2.16.** Sean  $\{X_i\}_{i \in I}$  una familia de variedades de  $\mathbb{P}(V)$ . Entonces,  $X = \bigcap_{i \in I} X_i$  es una variedad y  $\hat{X} = \bigcap_{i \in I} \hat{X}_i$ .

*Demostración.* Tenemos que  $\bigcap_{i \in I} X_i$  es una variedad si y solo si  $\pi^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \cup \{0\}$  es un subespacio vectorial. Tenemos que

$$\pi^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \cup \{0\} = \bigcap_{i \in I} \pi^{-1}(X_i) \cup \{0\} = \bigcap_{i \in I} (\pi^{-1}(X_i) \cup \{0\}) = \bigcap_{i \in I} \hat{X}_i.$$

Esto último sabemos que es un subespacio vectorial, por lo que  $X$  es una variedad.

□

**Definición 2.17 (Variedad generada por un conjunto).** Sea  $\emptyset \neq S \subset \mathbb{P}(V)$ . La **variedad proyectiva generada por  $S$**  es

$$V(S) = \bigcap_{\substack{X \subset \mathbb{P}(V) \text{ variedad} \\ S \subset X}} X.$$

Es decir,  $V(S)$  es la menor variedad que contiene a  $S$ .

**Proposición 2.17.**  $\widehat{V(S)} = L[\pi^{-1}(S)]$ .

*Demostración.* Ponemos  $U = L[\pi^{-1}(S)]$ . En primer lugar tenemos que ver que  $\widehat{V(S)} \supset U$ . Como  $S \subset V(S)$  tenemos que

$$\pi^{-1}(S) \subset \pi^{-1}(V(S)) \cup \{0\} = \widehat{V(S)} \Rightarrow L[\pi^{-1}(S)] \subset \widehat{V(S)} \Rightarrow U \subset \widehat{V(S)}.$$

Recíprocamente tenemos que  $S \subset \pi(U) \Rightarrow V(S) \subset \pi(U)$ . Como  $\pi(U)$  es una variedad tenemos que  $\widehat{V(S)} \subset \widehat{\pi(U)} = U$ .  $\square$

**Definición 2.18.** Si  $X_1$  y  $X_2$  son variedades de  $\mathbb{P}(V)$ , definimos

$$X_1 + X_2 := V(X_1 \cup X_2).$$

Por la proposición anterior tenemos que  $\widehat{X_1 + X_2} = V(\widehat{X_1 \cup X_2}) = L(\widehat{X_1} \cup \widehat{X_2}) = \widehat{X_1} + \widehat{X_2}$ .

**Teorema 2.2 (Teorema de incidencia).** Sea  $\mathbb{P}(V)$  de dimensión finita y  $X, Y$  variedades de  $\mathbb{P}(V)$ . Entonces,

$$\dim(X + Y) = \dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y).$$

*Demostración.* Aplicando la fórmula de Grassmann

$$\begin{aligned} \dim(X + Y) &= \dim_{\mathbb{K}}(\widehat{X + Y}) - 1 = \dim_{\mathbb{K}}(\widehat{X} + \widehat{Y}) - 1 = \dim_{\mathbb{K}}\widehat{X} + \dim_{\mathbb{K}}\widehat{Y} - \dim_{\mathbb{K}}(\widehat{X} \cap \widehat{Y}) - 1 \\ &= (\dim_{\mathbb{K}}\widehat{X} - 1) + (\dim_{\mathbb{K}}\widehat{Y} - 1) - (\dim_{\mathbb{K}}(\widehat{X} \cap \widehat{Y}) - 1) \\ &= \dim X + \dim Y - (\dim_{\mathbb{K}}\widehat{X \cap Y} - 1) = \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y). \end{aligned}$$

$\square$

**Definición 2.19 (Posición relativa de dos variedades proyectivas.).** Sean  $X_1, X_2 \subset \mathbb{P}(V)$  dos variedades proyectivas.

1. Si  $X_1 \subset X_2$  o  $X_2 \subset X_1$ , una de las variedades está incluida en la otra.
2. Si  $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ ,  $X_1 \not\subset X_2$  y  $X_2 \not\subset X_1$ , las variedades se **cortan**.
3. Si  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ , las variedades **no se cortan**.

**Corolario 2.1.** Si  $\dim \mathbb{P}(V) = n \geq 2$  y  $X, Y \subset \mathbb{P}(V)$  son hiperplanos, entonces  $X \cap Y \neq \emptyset$ . En particular, en  $\mathbb{P}^2$  todo par de rectas se interseca.

*Demostración.* Por el teorema anterior, tenemos que

$$\dim(X \cap Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X + Y).$$

Como  $X \subset X + Y \subset \mathbb{P}(V)$  tenemos que

$$\dim X = n - 1 \leq \dim(X + Y) \leq n = \dim \mathbb{P}(V).$$

Así, tenemos que

$$\dim(X \cap Y) \geq \dim X + \dim Y - n \geq (n - 1) + (n - 1) - n \geq n - 2 \geq 0.$$

□

**Observación.** De forma más general, es cierto que si  $X$  es un hiperplano de  $\mathbb{P}(V)$  e  $Y$  es una variedad con  $\dim Y \geq 1$ , la intersección de  $X$  e  $Y$  no es vacía.

**Proposición 2.18.** Sea  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$  una aplicación proyectiva de centro  $Z = Z(f)$  y aplicación lineal asociada  $\hat{f}$ .

1. Si  $X \subset \mathbb{P}(V)$  es una variedad, entonces  $f(X/Z)$  es una variedad y  $\widehat{f(X/Z)} = \widehat{\hat{f}(\hat{X})}$ .
2. Si  $Y \subset \mathbb{P}(V')$  es una variedad, entonces  $f^{-1}(Y) \cup Z$  es una variedad y  $\widehat{f^{-1}(Y) \cup Z} = \widehat{\hat{f}^{-1}(\hat{Y})}$ .

*Demostración.* 1. Basta ver que  $f(X/Z) = \mathbb{P}(\hat{f}(\hat{X}))$ . En primer lugar podemos ver que  $\hat{f}(\hat{X}) / \{0\} = \hat{f}(\hat{X}/\text{Ker}(\hat{f}))$ . Además,

$$\begin{aligned} f(X/Z) &= \left\{ [\hat{f}(u)] \in \mathbb{P}(V') : u \in \hat{X}/\text{Ker}(\hat{f}) \right\} = \left\{ [w] \in \mathbb{P}(V') : w \in \hat{f}(\hat{X}) / \{0\} \right\} \\ &= \mathbb{P}(\hat{f}(\hat{X})). \end{aligned}$$

2. Basta con demostrar que  $f^{-1}(Y) \cup Z = \mathbb{P}(\hat{f}^{-1}(\hat{Y}))$ . Podemos ver que  $\hat{f}^{-1}(\hat{Y}) = \hat{f}^{-1}(\hat{Y}/\{0\}) \cup \text{Ker}(\hat{f})$ . Así, tenemos que

$$\begin{aligned} f^{-1}(Y) \cup Z &= \left\{ [u] \in \mathbb{P}(V) : [\hat{f}(u)] \in Y \text{ o } [u] \in Z \right\} = \left\{ [u] \in \mathbb{P}(V) : u \in \hat{f}^{-1}(\hat{Y}/\{0\}) \cup \text{Ker}(\hat{f}) \right\} \\ &= \mathbb{P}(\hat{f}^{-1}(\hat{Y})). \end{aligned}$$

□

**Notación.** Por estética escribiremos

$$f(X) := f(X/Z) \quad \text{y} \quad f^{-1}(Y) := f^{-1}(Y) \cup Z.$$

**Ejemplo.** Consideremos  $f : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3 : [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \rightarrow [x_0 : x_1 : 0 : 0]$ . Tenemos que  $Z(f) = \{[0 : 0 : x_2 : x_3]\} = \{x_0 = 0, x_1 = 0\}$ , que es una recta. Si  $X = \{x_0 - x_2 = 0\}$  es un plano de  $\mathbb{P}^3$ , calculamos  $f(X)$ . Para ello, calculamos  $\hat{f} : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^4 : (x_0, x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_0, x_1, 0, 0)$ . Tenemos que

$$\hat{X} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^4 : x_0 - x_2 = 0\} = L((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)).$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned}\hat{f}(\hat{X}) &= L\left(\hat{f}(1,0,1,0), \hat{f}(0,1,0,0), \hat{f}(0,0,0,1)\right) = L((1,0,0,0), (0,1,0,0)) \\ &= \{x_2 = 0, x_3 = 0\}.\end{aligned}$$

Así, nos queda que  $f(X) = \{x_2 = 0, x_3 = 0\}$  que es una recta de  $\mathbb{P}^3$ . Por otro lado, dado  $Y = \{[1 : 0 : 0 : 0]\}$ , tenemos que para calcular  $f^{-1}(Y)$ :

$$\begin{aligned}\hat{f}^{-1}(L(1,0,0,0)) &= L\left((1,0,0,0), \text{Ker } \hat{f}\right) = L((1,0,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)) \\ &= \{x_1 = 0\}.\end{aligned}$$

Así, tenemos que  $f^{-1}(Y) = \{x_1 = 0\}$  que es un plano de  $\mathbb{P}^3$ .

# Capítulo 3

## Dualidad

### 3.1. Repaso del espacio dual

Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial. Decíamos que  $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{K})$  es el **espacio dual**, donde  $V^*$  también es un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial. En efecto, si  $\phi, \psi \in \text{Hom}(V, \mathbb{K})$ , tenemos que

$$(\phi + \psi)(v) := \phi(v) + \psi(v), \quad \forall v \in V.$$

Análogamente, si  $\lambda \in \mathbb{K}$  y  $\phi \in \text{Hom}(V, \mathbb{K})$  tenemos que

$$(\lambda\phi)(v) := \lambda(\phi(v)), \quad \forall v \in V.$$

Sea  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $V$ . Definimos  $\phi_i : V \rightarrow \mathbb{K}$  de forma que

$$\phi_i(v_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Veamos que  $\mathcal{B}^* = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$  es una base de  $V^*$ . Sea  $\phi \in V^*$  y sea  $u = (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}} \in V$ . Tenemos que

$$\phi(u) = \phi(x_1v_1 + \dots + x_nv_n) = x_1\phi(v_1) + \dots + x_n\phi(v_n).$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} (\phi(v_1)\phi_1 + \dots + \phi(v_n)\phi_n)(u) &= \phi(v_1)\phi_1(u) + \dots + \phi(v_n)\phi_n(u) \\ &= \phi(v_1)\phi_1(x_1v_1 + \dots + x_nv_n) + \dots + \phi(v_n)\phi_n(x_1v_1 + \dots + x_nv_n) \\ &= \phi(v_1)\sum_{i=1}^n x_i\phi_1(v_i) + \dots + \phi(v_n)\sum_{i=1}^n x_i\phi_n(v_i) \\ &= x_1\phi(v_1) + \dots + x_n\phi(v_n). \end{aligned}$$

Veamos que  $\mathcal{B}^*$  son linealmente independientes. Supongamos que

$$0 = \lambda_1\phi_1 + \dots + \lambda_n\phi_n.$$

Tenemos entonces que

$$0 = \lambda_1\phi_1(v_i) + \dots + \lambda_n\phi_n(v_i) = \lambda_i.$$

Por tanto, tenemos que  $\lambda_i = 0, \forall i = 1, \dots, n$  y en consecuencia son linealmente independientes.

**Corolario 3.1.** Si  $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ , entonces  $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} V^*$ .

<sup>a</sup>Si la dimensión es infinita también es cierto pero no nos vale la demostración anterior.

Supongamos que  $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$  y veamos que hay un isomorfismo canónico entre  $V$  y  $V^{**} = (V^*)^* = \text{Hom}(V^*, \mathbb{K})$ . Este viene dado por la función

$$\text{ev} : V \rightarrow V^{**} : u \rightarrow \text{ev}_u, \quad \text{ev}_u : V^* \rightarrow \mathbb{K} : \phi \rightarrow \text{ev}_u(\phi) = \phi(u).$$

Veamos que es un isomorfismo:

$$\text{ev}_{u_1+u_2}(\phi) = \phi(u_1+u_2) = \phi(u_1) + \phi(u_2) = \text{ev}_{u_1}(\phi) + \text{ev}_{u_2}(\phi), \quad \forall \phi \in V^*.$$

$$\text{ev}_{\lambda u}(\phi) = \phi(\lambda u) = \lambda \phi(u) = \lambda \text{ev}_u(\phi), \quad \forall \phi \in V^*.$$

Así, hemos visto que  $\text{ev}$  es lineal. Veamos ahora que  $\text{ev}$  es inyectiva.

$$\begin{aligned} \text{ev}_u = 0 &\iff \text{ev}_u(\phi) = 0, \quad \forall \phi \in V^* \iff \phi(u) = 0, \quad \forall \phi \in V^* \iff \phi_i(u) = 0, \quad \forall \phi_i \in \mathcal{B}^* \\ &\iff u = 0 \iff \text{Ker}(\text{ev}) = \{0\}. \end{aligned}$$

Como  $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} V^* = \dim_{\mathbb{K}} (V^{**}) < \infty$ , con ver que es inyectiva hemos visto que es biyectiva y por tanto es un isomorfismo. Abusando de la notación, identificamos  $V$  con  $V^{**}$  mediante  $u = \text{ev}_u$ .

Dado  $U \in \mathcal{L}(V)$ , podemos definir el **ortogonal** de  $U$  de la forma

$$U^\perp = \{\phi \in V^* : \phi(u) = 0, \quad \forall u \in U\}.$$

**Proposición 3.1.** Se cumple,

1.  $U^\perp$  es un  $\mathbb{K}$ -subespacio vectorial de  $V^*$ .
2. Si  $U \subset W$ , entonces  $W^\perp \subset U^\perp$ .
3.  $\dim_{\mathbb{K}} U^\perp = \dim_{\mathbb{K}} V - \dim_{\mathbb{K}} U$ .
4.  $V^\perp = \{0\}$  y  $\{0\}^\perp = V^*$ .

*Demuestra*ción. 1. Claramente  $U^\perp \neq \emptyset$  puesto que  $0 \in U^\perp$ . Ahora, sean  $\phi_1, \phi_2 \in U^\perp$  y  $u \in U$ ,

$$(\phi_1 + \phi_2)(u) = \phi_1(u) + \phi_2(u) = 0 \Rightarrow \phi_1 + \phi_2 \in U^\perp.$$

Además, sea  $\phi \in U^\perp$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$  y  $u \in U$ ,

$$(\lambda\phi)(u) = \lambda(\phi(u)) = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda\phi \in U^\perp.$$

2. Sea  $u \in U \subset W$ . Si  $\phi \in W^\perp$  tenemos que  $\phi(u) = 0, \forall u \in U \subset W$ , por lo que  $\phi \in U^\perp$  y en consecuencia  $W^\perp \subset U^\perp$ .

3. Sea  $\dim_{\mathbb{K}} U = k$  y  $\dim_{\mathbb{K}} V = n$ . Sea  $\{u_1, \dots, u_k\}$  una base de  $U$  y la ampliamos a  $\{u_1, \dots, u_n\}$  base de  $V$ . Sea  $\mathcal{B}^* = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$  la base dual de la anterior. Tenemos que  $\phi_{k+1}, \dots, \phi_n \in U^\perp$ , puesto que  $\forall u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k \in U$  tenemos que

$$\forall j > k, \phi_j(u) = \lambda_1 \phi_j(u_1) + \dots + \lambda_k \phi_j(u_k) = 0.$$

Tenemos que  $\phi_{k+1}, \dots, \phi_n$  son linealmente independientes por ser parte de una base. Veamos que generan  $U^\perp$ . Sea  $\phi \in U^\perp$ . Como  $\mathcal{B}^*$  es base de  $V^*$ , tenemos que

$$\phi = a_1 \phi_1 + \dots + a_n \phi_n.$$

Además, tenemos que

$$\begin{cases} \phi(u_i) = a_1 \phi_1(u_i) + \dots + a_n \phi_n(u_i) = a_i \\ \phi(u_i) = 0 \end{cases}, \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Por tanto, tenemos que  $a_i = 0, \forall i = 1, \dots, k$ , por lo que  $\phi = a_{k+1} \phi_{k+1} + \dots + a_n \phi_n$ .

4. Es fácil ver que  $\dim_{\mathbb{K}} V^* = 0$ , por lo que  $V^* = \{0\}$ . Análogamente tenemos que  $\dim \{0\}^\perp = \dim_{\mathbb{K}} V$ , así tenemos que  $\{0\}^\perp = V$ . □

**Proposición 3.2.** Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial con  $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$  y  $U, W \in \mathcal{L}(V)$ .

1.  $(U^\perp)^\perp = U$ <sup>a</sup>.
2.  $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$ .
3.  $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$ .
4. Si  $V = U \oplus W$ , entonces  $V^* = U^\perp \oplus W^\perp$ .

---

<sup>a</sup>Este igual no es estricto puesto que  $(U^\perp)^\perp \subset V^{**}$ , realmente estamos diciendo que  $(U^\perp)^\perp = \text{ev}(U)$ .

*Demostración.* 1. Recordamos que  $U^\perp = \{\phi \in V^* : \phi(u) = 0, \forall u \in U\}$ . Así, tenemos que

$$(U^\perp)^\perp = \{\text{ev}_v \in V^{**} : \text{ev}_v(\phi) = 0, \forall \phi \in U^\perp\} = \{v : \phi(v) = 0, \forall \phi \in U^\perp\} = \text{ev}(U).$$

2. Tenemos que  $U \cap W \subset U, W$ , por lo que  $U^\perp \subset (U \cap W)^\perp$  y  $W^\perp \subset (U \cap W)^\perp$ . Por tanto, tenemos que  $U^\perp + W^\perp \subset (U \cap W)^\perp$ . Por otro lado, tenemos que

$$U \cap W = ((U \cap W)^\perp)^\perp \subset (U^\perp + W^\perp)^\perp \subset (U^\perp)^\perp \cap (W^\perp)^\perp = U^\perp \cap W^\perp = U \cap W.$$

Por tanto, debe ser que todos los contenidos son igualdades, en particular,  $U \cap W = (U^\perp + W^\perp)^\perp$ . Así, obtenemos que  $(U \cap W)^\perp = ((U^\perp + W^\perp)^\perp)^\perp = U^\perp + W^\perp$ .

3. Como  $U \subset U + W$  y  $W \subset U + W$ , tenemos que  $(U + W)^\perp \subset U^\perp, W^\perp$ , por lo que  $(U + W)^\perp \subset U^\perp \cap W^\perp$ . Tenemos que

$$U + W = ((U + W)^\perp)^\perp \supset (U^\perp \cap W^\perp)^\perp \supset (U^\perp)^\perp + (W^\perp)^\perp = U + W.$$

Al igual que en (2), tenemos que  $U + W = (U^\perp \cap W^\perp)^\perp$ , por lo que  $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$ .

4. Consideremos  $V = U \oplus W$ , es decir,  $V = U + W$  y  $U \cap W = \{0\}$ . Así, tenemos que  $V^\perp = U^\perp \cap W^\perp = \{0\}^\perp = U^\perp + W^\perp = V^*$ .

□

**Corolario 3.2.** La aplicación

$$\perp: \mathcal{L}(V) \rightarrow \mathcal{L}(V^*): U \mapsto U^\perp,$$

es una biyección con sí misma como inversa. Además, cambia  $\subset$  por  $\supset$ , y  $+$  por  $\cap$  y viceversa.

## 3.2. Dualidad en espacios proyectivos

Dado un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $V$ , tenemos que hay una biyección entre las variedades de  $\mathbb{P}(V)$  y los subespacios de  $V$ . También tenemos una biyección entre los subespacios de  $V$  y subespacios de  $V^*$ . En particular

$$\{X \subset \mathbb{P}(V) : X \text{ variedad}\} \leftrightarrow \{X \subset \mathbb{P}(V^*) : X \text{ variedad}\}.$$

En efecto, podemos considerar la aplicación  $X \mapsto \mathbb{P}((\hat{X})^\perp)$ .

**Notación.** Denotamos  $X^* := \mathbb{P}((\hat{X})^\perp)$ .

Tenemos que se cumplen las mismas propiedades que hemos demostrado anteriormente para subespacios vectoriales.

**Lema 3.1.** Si  $\dim \mathbb{P}(V) = n < \infty$ , entonces  $\dim X^* = \dim \mathbb{P}(V) - \dim X - 1$ .

*Demostración.* Recordamos que

$$\dim X = \dim_{\mathbb{K}} \hat{X} - 1.$$

Como  $\widehat{X^*} = \mathbb{P}(\widehat{\hat{X}^\perp}) = \hat{X}^\perp$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \dim X^* &= \dim_{\mathbb{K}} (\hat{X}^\perp) - 1 = \dim_{\mathbb{K}} \hat{X}^\perp - 1 = \dim_{\mathbb{K}} V - \dim_{\mathbb{K}} \hat{X} - 1 \\ &= \dim \mathbb{P}(V) + 1 - (\dim X + 1) - 1 = \dim \mathbb{P}(V) + \dim X - 1. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo.** Consideremos  $\dim \mathbb{P}(V) = 2$ . Si  $P$  es un punto, tenemos que  $\dim P^* = 2 - 0 - 1 = 1$ , por lo que el dual de un punto en un espacio proyectivo de dimensión dos es una recta. Similarmente, si  $X = \mathbb{P}(V)$ , tenemos que  $\dim X^* = 2 - 2 - 1 = 0$ , por lo que  $X^* = \emptyset$ .

**Observación (Principio de dualidad).** Si  $\mathcal{E}$  es un enunciado sobre variedades de  $\mathbb{P}(V)$  que se expresa con  $\forall, \exists, \subset, \dim, \cap, +$  y negación, y obtenemos  $\mathcal{E}^*$ , un enunciado dual sustituyendo

$$\dim = d \leftrightarrow \dim \mathbb{P}(V) - d - 1.$$

$$\subset \leftrightarrow \supset .$$

$$\cap \leftrightarrow +.$$

Entonces,  $\mathcal{E}$  es cierto si y solo si  $\mathcal{E}^*$  es cierto.

**Ejemplo.** Consideremos el enunciado

$\mathcal{E}$ : 'Todo par de hiperplanos de un espacio proyectivo de dimensión  $n$  tiene intersección no vacía'.

El enunciado dual sería,

$\mathcal{E}^*$ : 'Todo par de puntos de un espacio proyectivo de dimensión  $n$  generan una variedad que está contenida en un hiperplano'.

### 3.3. Coordenadas y dualidad

**Definición 3.1 (Bases duales).** Dos referencias proyectivas,  $\mathcal{R}$  de  $\mathbb{P}(V)$  y  $\mathcal{R}^*$  de  $\mathbb{P}(V^*)$ , son **duales** si admiten bases asociadas  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}^*$  duales. Es decir,  $\mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_n\}$  y  $\mathcal{B}^* = \{\phi_0, \dots, \phi_n\}$  con

$$\phi_j(v_i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} .$$

**Observación.** Sea  $H = \{a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0\} \subset \mathbb{P}(V)$  un hiperplano dado en la referencia  $\mathcal{R}$ , tenemos que

$$a_0\phi_0 + \dots + a_n\phi_n \in V^*.$$

Así, tendremos que

$$\begin{aligned} (x_0, \dots, x_n) \in \hat{H} &\iff a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0 \\ &\iff a_0\phi_0(x_0, \dots, x_n) + \dots + a_n\phi_n(x_0, \dots, x_n) = 0 \\ &\iff (a_0\phi_0 + \dots + a_n\phi_n)(x_0, \dots, x_n) = 0 \\ &\iff \hat{H}^\perp = L(a_0\phi_0 + \dots + a_n\phi_n). \end{aligned}$$

Así, tenemos que  $H^* = \mathbb{P}(\hat{H}^\perp) = [a_0 : \dots : a_n]_{\mathcal{R}^*}$ .

**Ejemplo.** En  $\mathbb{P}^2$  vamos a calcular la intersección de dos rectas sin resolver un sistema. Consideremos

$$L_1 = \{x_0 - 3x_1 + 2x_2 = 0\}, \quad L_2 = \{5x_0 - 4x_1 - 3x_2 = 0\}.$$

Tenemos que  $L_1 \cap L_2 = P \iff L_1^* + L_2^* = P^*$ . Está claro que  $L_1$  y  $L_2$  son hiperplanos de  $\mathbb{P}^2$ . Tenemos que

$$L_1^* = [1 : -3 : 2], \quad L_2^* = [5 : -4 : -3].$$

Tenemos que  $P^*$  es la recta que pasa por  $L_1^*$  y  $L_2^*$ . Así,

$$P = \left\{ [x_0 : x_1 : x_2] : \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 5 \\ x_1 & -3 & -4 \\ x_2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \right\} = \{17x_0 + 13x_1 + 11x_2 = 0\}.$$

Así, nos queda que  $P = (P^*)^* = [17 : 13 : 11]$ .

**Observación.** En general, si  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{R}^*$  son referencias duales y

$$X = \begin{cases} a_{10}x_0 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n-d,0}x_0 + \cdots + a_{n-d,n}x_n = 0 \end{cases},$$

es una variedad de dimensión  $d$  de  $\mathbb{P}(V)$  en la referencia  $\mathcal{R}$ , tenemos que

$$\hat{X} = \left\{ (x_0, \dots, x_n)_{\mathcal{B}} : \begin{pmatrix} a_{10} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-d,0} & \cdots & a_{n-d,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Así, tendremos que

$$\hat{X}^\perp = L(a_{10}\phi_0 + \cdots + a_{1n}\phi_n, \dots, a_{n-d,0}\phi_0 + \cdots + a_{n-d,n}\phi_n).$$

Por tanto,

$$X^* = \left\{ [x_0 : \cdots : x_n]_{\mathcal{R}^*} : \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{10} & \cdots & a_{n-d,0} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & \cdots & a_{n-d,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-d} \end{pmatrix}, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-d} \in \mathbb{K} \right\}.$$

**Ejemplo (Dual de un cubo).** Consideremos en  $\mathbb{R}^3$  el cubo de vértices  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ . Podemos situar  $\mathbb{R}^3$  dentro de un espacio proyectivo:  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{P}^3 / \{x_0 = 0\}$ , es decir,

$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow [1 : x_1 : x_2 : x_3].$$

Consideremos la variedad  $S = \{x_3 = 1\}$ , es decir, la cara superior del cubo. Tenemos que  $\bar{S} = \{x_3 = x_0\}$  y

$$\bar{S}^* = [1 : 0 : 0 : -1].$$

Consideremos ahora un vértice del cubo, por ejemplo  $P = (1, 1, 1)$ . Tenemos que  $\bar{P} = [1 : 1 : 1 : 1]$  y

$$\bar{P} = \begin{cases} x_0 = x_1 \\ x_0 = x_2 \\ x_0 = x_3 \end{cases}.$$

Así, tenemos que podemos calcular  $\bar{P}^*$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \bar{P}^* &= \mathbb{P}(L((1, 0, 0, -1), (1, -1, 0, 0), (1, 0, -1, 0))) \\ &= \left\{ \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & 0 & -1 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & -1 \\ x_3 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \right\} = \{x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0\}. \end{aligned}$$

Consideremos ahora la recta  $l = \{x_3 = 1, x_1 = 1\}$ . Tenemos que

$$\bar{l} = \begin{cases} x_3 = x_0 \\ x_1 = x_0 \end{cases}.$$

Así, nos queda que su dual será

$$\begin{aligned} \bar{l}^* &= \mathbb{P}(L((1, 0, 0, -1), (1, -1, 0, 0))) \\ &= \left\{ [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] : \text{ran} \begin{pmatrix} x_0 & 1 & 1 \\ x_1 & 0 & -1 \\ x_2 & 0 & 0 \\ x_3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \right\} = \{x_2 = 0, x_0 + x_1 + x_3 = 0\}. \end{aligned}$$

Ahora, podemos volver a  $\mathbb{R}^3$  restringiendo las variedades duales a  $\mathbb{P}^3 / \{x_0 = 0\}$ .

**Definición 3.2 (Haz de hiperplanos).** Sea  $X \subset \mathbb{P}(V)$  una variedad con  $\dim X = \dim \mathbb{P}(V) - 2$ . El conjunto

$$h(X) = \{H \text{ hiperplano} : X \subset H\},$$

es el **haz de hiperplanos** con base  $X$ .

**Ejemplo.** En  $\mathbb{P}^2$  sea  $X$  un punto. Tenemos que  $h(X)$  es el conjunto de rectas que pasan por  $X$ . Análogamente, en  $\mathbb{P}^3$  si  $X$  es una recta, tenemos que  $h(X)$  es el conjunto de los planos que contienen a  $X$ .

**Observación.** Sea  $X \subset \mathbb{P}(V)$  con  $\dim X = \dim \mathbb{P}(V) - 2$ . Tenemos que

$$\dim X^* = \dim \mathbb{P}(V) - \dim X - 1 = \dim \mathbb{P}(V) - \dim \mathbb{P}(V) + 2 - 1 = 1.$$

Por tanto,  $X^*$  es una recta de  $\mathbb{P}(V^*)$ . Además, tenemos que

$$X^* = \mathbb{P}(\hat{X}^\perp) = \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \text{Hom}(V, \mathbb{K}) : \omega(x) = 0, \forall x \in \hat{X}\right\}\right) = h(X).$$

### 3.4. Aplicaciones duales

Sea  $\mathcal{B}$  una base de  $V$  y  $\mathcal{B}'$  una base de  $V'$ . Consideremos  $\mathcal{B}^*$  y  $\mathcal{B}'^*$  las bases duales de las anteriores, respectivamente. Dada  $f : V \rightarrow V'$  lineal, definimos la **aplicación lineal dual** de la siguiente forma:

$$f^* : V'^* \rightarrow V^* : \omega \in \text{Hom}(V', \mathbb{K}) \rightarrow \omega \circ f \in \text{Hom}(V, \mathbb{K}).$$

Sean  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $\mathcal{B}' = \{u_1, \dots, u_m\}$ ,  $\mathcal{B}^* = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$  y  $\mathcal{B}'^* = \{\psi_1, \dots, \psi_m\}$ . Tenemos que

$$f(v_i) = \sum_{k=1}^m a_{ki} u_k, \quad f^*(\psi_i) = \sum_{k=1}^n b_{ki} \phi_k.$$

Ahora, tenemos que

$$a_{ij} = \psi_i(f(v_j)) = \psi_i \left( \sum_{k=1}^m a_{kj} u_k \right) = f^*(\psi_i)(v_j) = \left( \sum_{k=1}^n b_{ki} \phi_k \right) (v_j) = b_{ji}.$$

Por tanto, tenemos que

$$\boxed{\mathcal{M}_{\mathcal{B}^* \mathcal{B}'^*}(f^*) = (\mathcal{M}_{\mathcal{B} \mathcal{B}'}(f))^T.}$$

**Lema 3.2.** Sean  $f : V \rightarrow V'$  y  $g : V' \rightarrow V''$  duales. Entonces

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

*Demostración.* Sea  $\omega \in \text{Hom}(V'', \mathbb{K})$ , entonces

$$(g \circ f)^*(\omega) = \omega \circ (g \circ f) = f^*(\omega \circ g) = f^* \circ g^*(\omega).$$

□

**Definición 3.3 (Aplicación proyectiva dual).** Dada una aplicación proyectiva  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ , con aplicación lineal asociada  $\hat{f} : V \rightarrow V'$ , definimos su **aplicación dual** como

$$f^* : \mathbb{P}(V'^*) \rightarrow \mathbb{P}(V^*) : [\omega] \rightarrow [\hat{f}^*(\omega)] = [\omega \circ \hat{f}].$$

**Observación.** Como  $(\lambda \hat{f})^* = \lambda \hat{f}^*$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ , tenemos que  $f^*$  está bien definido. Además,  $Z(f^*) = (\text{Im}(f))^*$ . En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} Z(f^*) &= \mathbb{P}\left(\text{Ker}(\hat{f}^*)\right) = \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \text{Hom}(V', \mathbb{K}) : \omega \circ \hat{f} = 0\right\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \text{Hom}(V', \mathbb{K}) : \omega(x) = 0, \forall x \in \text{Im}(\hat{f})\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\text{Im}(\hat{f})^\perp\right) = \text{Im}(f)^*. \end{aligned}$$

**Lema 3.3.** Consideremos  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$  y  $g : \mathbb{P}(V') \rightarrow \mathbb{P}(V'')$ . Entonces,

1.  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ .
2.  $f^*$  es inyectiva  $\iff f$  es sobreyectiva.
3.  $f^*$  es sobreyectiva  $\iff f$  es inyectiva.
4.  $f^*$  es biyectiva  $\iff f$  es biyectiva. Además,  $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$ .

*Demostración.* 1. Es consecuencia de que  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ .

2. Es consecuencia de que  $f^*$  es inyectiva si y solo si  $\hat{f}^*$  también lo es, y de que  $Z(f^*) = \emptyset$  si y solo si  $f$  es suprayectiva.
3. Con Ancochea fue demostrado para espacios vectoriales, de ahí es fácil extenderlo al espacio proyectivo.
4. La primera parte es consecuencia de los dos apartados anteriores. Por otro lado

$$\widehat{(f^{-1})^*} = \widehat{(f^{-1})}^* = (\hat{f}^*)^{-1}.$$

La segunda igualdad ha sido demostrada por Ancochea el año pasado. □

**Observación.** Sea  $f : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^{n'}$  una homografía y  $A \subset \mathbb{P}^n$ ,  $B \subset \mathbb{P}^{n'}$  variedades tales que  $f(A) = B$ . Entonces, es cierto que

$$f^*(B^*) = A^*.$$

En efecto, si  $\omega \in f^*(B^*)$ , tenemos que existe  $\lambda \in B^\perp$  tal que  $\omega = \lambda \circ f$ . Así,

$$\omega(A) = \lambda \circ f(A) = \lambda(f(A)) = \lambda(B) = \{0\}.$$

Por tanto,  $\omega \in A^\perp$ , por lo que  $f^*(B^*) \subset A^*$ . Como  $f$  es biyectiva, tenemos que  $f^*$  es biyectiva. Como  $\dim A = \dim B$ , tendremos que  $\dim A^\perp = \dim B^\perp$ , por lo que  $\dim f^*(B^\perp) = \dim A^\perp$  y en consecuencia  $f^*(B^\perp) = A^\perp$ .

### 3.5. Variedades invariantes por homografías

**Definición 3.4 (Variedad invariante).** Sea  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$  una homografía. Se dice que  $X \subset \mathbb{P}(V)$  es una **variedad invariante por  $f$**  si  $f(X) \subset X$ <sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Esto es equivalente a que  $f(X) = X$  puesto que  $f$  es una homografía. En efecto, si  $f(X) \subset X$  y  $\dim X = \dim f(X)$  está claro que  $X = f(X)$ .

## Puntos fijos

Un punto  $P \in \mathbb{P}(V)$  es fijo si  $f(P) = P$ , que es cierto si y solo si

$$P = [x_0 : \dots : x_n], \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M(f) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Esto es cierto si y solo si  $P = [v]$  es un autovector para  $\lambda \neq 0$ . Así, tendremos que  $\lambda$  es raíz del polinomio

$$p(t) = \det(M_B(\hat{f}) - tI).$$

Dependiendo de  $\mathbb{K}$  puede haber puntos fijos o no. Por ejemplo, si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , el polinomio característico de  $\hat{f}$  siempre tiene raíces, pero si  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  no siempre tiene raíces. Fijado  $\lambda$  raíz de  $p(t)$ , tomamos

$$\hat{X}_\lambda = \text{Ker}(\hat{f} - \lambda id), X_\lambda = \mathbb{P}(\hat{X}_\lambda).$$

Así, tenemos que  $X_\lambda$  es una variedad de puntos fijos de  $f$ .

## Hiperplanos invariantes

Un hiperplano  $H = \{b_0x_0 + \dots + b_nx_n = 0\}$  es invariante para  $f$  si y solo si

$$f(H) \subset H \iff f^*(H^*) \supset H^* \iff f^*([b_0 : \dots : b_n]) = [b_0 : \dots : b_n].$$

Esto es cierto si y solo si existe  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  tal que

$$\lambda \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = M_{B^*}(\hat{f}^*) \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \iff \lambda \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = M_B(\hat{f})^T \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Esto es cierto si y solo si

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \text{Ker}\left(M_B(\hat{f})^T - \lambda id\right).$$

Esto es cierto si y solo si  $\lambda$  es raíz del polinomio característico de  $M_B(\hat{f})^T$ , que coincide con el polinomio característico de  $\hat{f}$ . Si tomamos

$$\hat{Y}_\lambda = \text{Ker}\left(M_B(\hat{f})^T - \lambda id\right),$$

tenemos que

$$\mathbb{P}(\hat{Y}_\lambda)^* = \left\{b_0x_0 + \dots + b_nx_n = 0 : (b_0, \dots, b_n) \in \hat{Y}_\lambda - \{0\}\right\},$$

que es una familia de hiperplanos invariantes para  $f$ .

## Rectas invariantes

**Proposición 3.3.** Sea  $f : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  una homografía y  $L$  una recta de  $\mathbb{P}^n$ . Entonces, son equivalentes:

- (i)  $L$  es una recta invariante para  $f$ .
- (ii)  $L \subset \text{Fix}(f)$  o existe  $P \in L / \text{Fix}(f)$  tal que  $f^2(P) \in V(\{P, f(P)\}) = L$ .

*Demostración.*  $\Rightarrow$  Supongamos que  $L$  es una recta invariante por  $f$  y  $L \subsetneq \text{Fix}(f)$ . Entonces, existe  $P \in L$  tal que  $f(P) \neq P$ . Como  $L$  es invariante, tenemos que  $f(P) \in L$ , por lo que  $L = V(\{P, f(P)\})$ . Como  $f(P) \in L$  y  $L$  es invariante, debe ser que  $f^2(P) \in L$ .

$\Leftarrow$  Si  $L \subset \text{Fix}(f)$  no hay nada que demostrar. Supongamos que  $L \subsetneq \text{Fix}(f)$  y que existe  $P \in L / \text{Fix}(f)$  tal que  $f^2(P) \in V(\{P, f(P)\}) = L$ . Tenemos que para  $Q \in L$ ,

$$f(Q) \in f(L) = f(V(\{P, f(P)\})) = V(\{f(P), f^2(P)\}) = L.$$

Así, tenemos que  $L$  es invariante. □

**Ejemplo.** Calcular rectas invariantes para homografías involutivas es muy sencillo. En efecto si  $L \subsetneq \text{Fix}(f)$ , cogemos  $P \in L$  con  $f(P) \neq P$ , entonces  $f^2(P) = P \in V(\{P, f(P)\})$  y tomamos  $L = V(\{P, f(P)\})$ .

Así, las rectas invariantes de una homografía involutiva son las rectas de puntos fijos y las que unen un punto no fijo con su imagen.

**Observación.** Dada una homografía  $f : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ , sabemos que la búsqueda de puntos fijos e hiperplanos invariantes se reduce a buscar subespacios de autovectores. Veámos cómo proceder para calcular las rectas invariantes.

- Cada par de puntos fijos  $P$  y  $Q$  determina una recta invariante  $V(\{P, Q\})$  y cada par de hiperplanos invariantes  $H_1$  y  $H_2$  determina una recta invariante  $H_1 \cap H_2$ .
- La restricción de  $f$  a cada hiperplano invariante  $H$  es una homografía  $f|_H : H \rightarrow H$ , cuyas rectas invariantes se calculan resolviendo un sistema de ecuaciones lineales por ser hiperplanos de  $H$ .
- Por último, podemos utilizar la proposición anterior para calcular las restantes rectas invariantes o confirmar su defecto si las anteriores eran todas.

**Ejemplo (Rectas invariantes por homologías).** Se dice que una homografía  $f : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  es una homología si el conjunto de puntos fijos es igual a un hiperplano de puntos fijos,  $H$ , más un punto fijo exterior a este hiperplano,  $P$ .

En este caso las únicas rectas invariantes son

- las rectas contenidas en  $H$ .
- las rectas que pasan por  $P$ , puesto que cortan a  $H$  y son invariantes por ser la unión de dos puntos fijos.

Tenemos que  $\mathbb{A} = \mathbb{P}^n/H$  es un espacio afín y, como  $f|_H = id$  y  $f|_{\mathbb{A}}$  tiene un único punto fijo,  $f|_{\mathbb{A}}$  es una homotecia.

Supongamos que hay una recta invariante,  $\ell$ , no contenida en  $H$  y que no pasa por  $P$ . Sea  $Q \in \ell/H$  con  $Q \neq P$ , podemos hacer dos observaciones:

- Como  $\ell$  es invariante,  $f(Q) \in \ell$ .
- Como  $f|_{\mathbb{A}}$  es una homotecia, debe ser que  $f(Q) \in V(\{P, Q\})$ .

Así, tenemos que

$$f(Q) \in \ell \cap V(\{P, Q\}) = \{Q\}.$$

Tenemos que  $f(Q) = Q$  y como no hay más puntos invariantes que  $P$ , esto es una contradicción.

## Otras subvariedades invariantes

**Lema 3.4.** Sean  $X_1, X_2$  variedades invariantes para una homografía  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$  y  $\dim \mathbb{P}(V) < \infty$ . Entonces,  $X_1 \cap X_2$  y  $X_1 + X_2$  son invariantes para  $f$ .

*Demostración.* Tenemos que  $f(X_1) \subset X_1$  y  $f(X_2) \subset X_2$ . Así, tenemos que

$$f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2) \subset X_1 \cap X_2.$$

Por tanto,  $X_1 \cap X_2$  es invariante. Ahora, tenemos que  $X_1 + X_2 = V(X_1 \cup X_2)$ . Así, tenemos que

$$f(X_1) \cup f(X_2) \subset f(X_1) + f(X_2), \quad f(X_1) \cup f(X_2) \subset f(X_1 + X_2).$$

Así, tenemos que  $f(X_1) + f(X_2) \subset f(X_1 + X_2)$ . Por ser homografía, tenemos que  $f(X_1) = X_1$  y  $f(X_2) = X_2$ . Así, tenemos que

$$X_1 + X_2 \subset f(X_1 + X_2).$$

Por ser  $f$  homografía tenemos que  $\dim(X_1 + X_2) = \dim f(X_1 + X_2)$ , por lo que  $X_1 + X_2 = f(X_1 + X_2)$ .  $\square$

**Ejemplo.** Consideremos

$$f : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3 : [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \rightarrow [x_0 + x_1 : x_1 + x_2 : x_2 + x_3 : 2x_3].$$

Tenemos que

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que el polinomio característico será  $P_M(t) = \det(M - tid) = (1-t)^3(2-t)$ , por lo que los autovalores son  $\lambda \in \{1, 2\}$ .

- Los puntos fijos para  $\lambda = 1$  son:

$$(M - \lambda I) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} .$$

Así, tenemos que la variedad de los puntos fijos para  $\lambda = 1$  es  $X_1 = [1 : 0 : 0 : 0]$ .

- Los puntos fijos para  $\lambda = 2$  serán

$$(M - 2I) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_0 + x_1 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases} .$$

Así, la variedad de puntos fijos para  $\lambda = 2$  será  $X_2 = [1 : 1 : 1 : 1]$ .

- Los hiperplanos invariantes para  $\lambda = 1$  será:

$$(M^t - I) \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b_0 = 0 \\ b_1 = 0 \\ b_2 + b_3 = 0 \end{cases} .$$

Así, nuestra familia de hiperplanos invariantes para  $\lambda = 1$  son  $H = \{x_2 - x_3 = 0\} = [0 : 0 : 1 : -1]^*$ .

- Los hiperplanos invariantes para  $\lambda = 2$  serán:

$$(M^t - 2I) \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -b_0 = 0 \\ b_0 - b_1 = 0 \\ b_1 - b_2 = 0 \\ b_2 = 0 \end{cases} .$$

Así,  $H = \{x_3 = 0\} = [0 : 0 : 0 : 1]^*$  es nuestra familia de hiperplanos invariantes para  $\lambda = 2$ .

- Calculamos las rectas invariantes. Sabemos que la recta que pasan por los dos puntos fijos es una recta invariante. Así, obtenemos

$$l_1 = \{[1 : 0 : 0 : 0]\} + \{[1 : 1 : 1 : 1]\} .$$

Análogamente la recta que resulta de la intersección de los dos hiperplanos es otra recta invariante. Así, obtenemos

$$l_2 = \begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} .$$

La pregunta es, hay más rectas invariantes? Sea  $l$  una recta invariante. Si  $[1 : 0 : 0]$  y  $[1 : 1 : 1 : 1]$  están en  $l$ , tenemos que  $l = l_1$ . Por otro lado, si  $[1 : 0 : 0 : 0] \in l$  y  $[1 : 1 : 1 : 1] \notin l$ , podemos considerar la variedad

$$X = \{[1 : 1 : 1 : 1]\} + l,$$

que es una variedad invariante. Así, tenemos que

$$\dim X = \dim \{[1 : 1 : 1 : 1]\} + \dim l - \dim (l \cap \{[1 : 1 : 1 : 1]\}) = 2.$$

Por tanto tenemos que  $X$  es un hiperplano invariante, por lo que debe ser que  $X \in \{H_1, H_2\}$ . En este caso tenemos que  $X = H_1$ . Tenemos que  $l \cap H_2$  es una variedad invariante, por lo que

$$\dim l \cap H_2 = \dim l + \dim H_2 - \dim (l + H_2) \geq 1 + 2 - 3 = 0.$$

Por tanto, tenemos que  $l \cap H_2 \neq \emptyset$ . Si  $\dim (l \cap H_2) = 1$ , tenemos que  $l \subset H_2$ , pero como  $l \subset H_1$ , tenemos que  $l = l_2$ . Por otro lado, si  $\dim (l \cap H_2) = 0$ , tenemos que  $l \cap H_2 = [1 : 0 : 0 : 0]$ .

Sabemos que si  $l$  existe, entonces  $l \subset H$  y  $l \cap H_2 = [1 : 0 : 0 : 0]$ . Sea  $P = [a : b : c : d] \in l$  con  $P \neq [1 : 0 : 0 : 0]$ . Como  $P \in H_1$  tenemos que  $P = [a : b : c : c]$ . Tenemos que

$$f(P) = [a + b : b + c : 2c : 2c] \in l.$$

Nuevamente,

$$f^2(P) = [a + 2b + c : b + 3c : 4c : 4c].$$

Tenemos que  $(a, b, c, c), (a + b, b + c, 2c, 2c), (a + 2b + c, b + 3c, 4c, 4c) \in \hat{l}$  y  $\dim \hat{l} = 2$ , por lo que

$$\begin{aligned} 2 &= \text{ran} \begin{pmatrix} a & b & c & c \\ a+b & a+c & 2c & 2c \\ a+2b+c & a+3c & 4c & 4c \end{pmatrix} = \text{ran} \begin{pmatrix} a & b & c & c \\ b & c & c & c \\ 2b+c & 3c & 3c & 3c \end{pmatrix} \\ &= \text{ran} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & c \\ c & c & c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si  $c = 0$ , tenemos que

$$\text{ran} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow b \neq 0.$$

Así, tenemos que  $P = [a : 1 : 0 : 0]$ . Así, tenemos que  $l = P + \{[1 : 0 : 0 : 0]\}$ , por lo que

$$\hat{l} = L(\{(1, 0, 0, 0), (a, 1, 0, 0)\}) = L(\{(0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\}).$$

Así, hemos obtenido que  $l = l_2$ . Esto es una contradicción, puesto que habíamos dicho que  $l \cap H_2$  era un punto. Por tanto, supongamos ahora que  $c \neq 0$ , podemos

suponer  $c = 1$  y tenemos que

$$2 = \text{ran} \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(b-1)^2 = 0.$$

Así, obtenemos que  $b = 1$  y por tanto  $P = [a : 1 : 1 : 1]$ . Así, como  $l = P + \{[1 : 0 : 0 : 0]\}$ , tenemos que

$$\hat{l} = L(\{(a, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0)\}).$$

Así, tenemos que  $(1, 1, 1, 1) \in l$ , por lo que  $l = l_1$ , que es una contradicción puesto que habíamos supuesto que  $[1 : 1 : 1 : 1] \notin l$ . Por tanto, no existe la recta con las características que hemos pedido.

Supongamos ahora que  $[1 : 0 : 0 : 0] \in l$  y  $[1 : 1 : 1 : 1] \in l$ . Tenemos que  $l \cap H_2$  es una variedad invariante. Haciendo el mismo argumento que antes, tenemos que

$$\dim(l \cap H_2) = \dim l + \dim H_2 - \dim(l + H_2) \geq 0.$$

Si  $l \subset H_2$ , tenemos que  $[1 : 1 : 1 : 1] \in H_2$ , que no es posible. Si  $l \cap H_2$  es un punto, tenemos que es un punto fijo por lo que debe ser que  $l \cap H_2 = [1 : 0 : 0 : 0]$ , por lo que  $[1 : 0 : 0 : 0] \in l$ , que es una contradicción. Así, no existe una recta invariante con estas características.

Finalmente, si  $[1 : 0 : 0 : 0] \notin l$  y  $[1 : 1 : 1 : 1] \notin l$ , tenemos que  $l \cap H_i$  no es un punto fijo, por lo que debe ser que  $l \subset H_i$  para  $i = 1, 2$ . Así, tenemos que  $l = H_1 \cap H_2$ , que es una contradicción puesto que  $[1 : 0 : 0 : 0] \in H_1 \cap H_2$ .

### 3.6. Espacios afines en espacios proyectivos

Recordamos que si  $\mathbb{P}^n$  es un espacio proyectivo de dimensión  $n$ ,  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$  y  $f : V \rightarrow \mathbb{K}$  lineal, entonces  $\mathbb{P}^n / \mathbb{P}(\text{Ker}(f))$  es un espacio afín con dirección  $\text{Ker}(f) \subset V$ . Así, podemos escribir,  $\mathbb{P}(\text{Ker}(f))$  es un hiperplano  $H$  de  $\mathbb{P}^n$  y tenemos que  $\hat{H} = \text{Ker}(f)$ .

**Proposición 3.4.** Sea  $\psi : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  una homografía y  $H = \{\omega = 0\}$ <sup>a</sup> un hiperplano invariante para  $\psi$ . Entonces  $\psi|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ , con  $\mathbb{A} = \mathbb{P}^n / H$  es una afinidad.

<sup>a</sup>Es el núcleo de una forma lineal.

*Demostración.* Como  $\psi(H) = H$ ,  $\psi$  induce una función en el complementario de  $H$ , que es  $\mathbb{A}$ . Para ver que  $\psi|_{\mathbb{A}}$  es una afinidad basta comprobar que preserva las combinaciones afines. Sean  $P_0, \dots, P_k \in \mathbb{A}$  con  $P_i = [v_i]$ ,  $v_i \in V / \{0\}$  y  $\omega(v_i) \neq 0$ , y sean  $\lambda_0, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$  tales que

$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ . Así, tenemos que

$$\begin{aligned}
\psi(\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_k P_k) &= \psi\left(P_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{P_0 P_i}\right) = \psi\left([v_0] + \sum_{i=1}^k \lambda_i \left(\frac{v_i}{\omega(v_i)} - \frac{v_0}{\omega(v_0)}\right)\right) \\
&= \psi\left(\left[\frac{v_0}{\omega(v_0)} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \left(\frac{v_i}{\omega(v_i)} - \frac{v_0}{\omega(v_0)}\right)\right]\right) = \left[\frac{\hat{\psi}(v_0)}{\omega(v_0)} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \left(\frac{\hat{\psi}(v_i)}{\omega(v_i)} - \frac{\hat{\psi}(v_0)}{\omega(v_0)}\right)\right] \\
&= ^* \left[ \frac{\hat{\psi}(v_0)}{C\omega(\hat{\psi}(v_0))} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \left( \frac{\hat{\psi}(v_i)}{C\omega(\hat{\psi}(v_i))} - \frac{\hat{\psi}(v_0)}{C\omega(\hat{\psi}(v_0))} \right) \right] \\
&= \left[ \frac{\hat{\psi}(v_0)}{\omega(\hat{\psi}(v_0))} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \left( \frac{\hat{\psi}(v_i)}{\omega(\hat{\psi}(v_i))} - \frac{\hat{\psi}(v_0)}{\omega(\hat{\psi}(v_0))} \right) \right] \\
&= [\hat{\psi}(v_0)] + \sum_{i=1}^k \lambda_i [\hat{\psi}(v_0)] \overrightarrow{[\hat{\psi}(v_0)][\hat{\psi}(v_i)]} = \psi(P_0) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{\psi(P_0) \psi(P_i)} \\
&= \lambda_0 \psi(P_0) + \cdots + \lambda_k \psi(P_k).
\end{aligned}$$

Veamos que  $*$  es cierto, es decir, veamos que  $\text{Ker}(\omega) = \text{Ker}(\omega \circ \hat{\psi})$ .

$$\begin{aligned}
v \in \text{Ker}(\omega) / \{0\} &\iff [v] \in H \iff \psi([v]) \in H \iff [\hat{\psi}(v)] \in H \\
&\iff \hat{\psi}(v) \in \text{Ker}(\omega) \iff \omega(\hat{\psi}(v)) = 0 \iff v \in \text{Ker}(\omega \circ \hat{\psi}).
\end{aligned}$$

Tenemos que  $V = \text{Ker}(\omega) \oplus L(u)$  para algún  $u \in V$ . Si  $v \in V$ , existe  $z \in \text{Ker}(\omega)$  y  $\lambda \in \mathbb{K}$  tal que  $v = z + \lambda u$ . Así, tenemos que

$$\omega(v) = \omega(z + \lambda u) = \omega(\lambda u) = \lambda \omega(u).$$

Así, tenemos que

$$(\omega \circ \hat{\psi})(v) = \omega(\hat{\psi}(v)) = \omega(\hat{\psi}(z + \lambda u)) = \omega(\hat{\psi}(\lambda u)) = \lambda \omega(\hat{\psi}(u)).$$

Así, podemos coger  $C = \frac{\omega(v)}{\omega(\hat{\psi}(v))} = \frac{\omega(u)}{\omega(\hat{\psi}(u))}$ . □

**Ejemplo.** Consideremos la homografía

$$f : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3 : [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \rightarrow [x_0 + x_1 : x_1 + x_2 : x_2 + x_3 : 2x_3].$$

Un plano invariante es  $H = \{x_3 = 0\}$ . Así, podemos considerar el espacio afín  $\mathbb{A} = \mathbb{P}^3/H = \{[x_0 : x_1 : x_2 : 1] : x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{K}\}$ . Buscamos ahora  $f|_{\mathbb{A}}$ . Buscamos una referencia de  $\mathbb{A}$ . Sabemos que  $H_2 = \{x_2 - x_3 = 0\}$  es invariante y los puntos  $[1 : 0 : 0 : 0]$  y  $[1 : 1 : 1 : 1]$  son fijos. Sea  $O = [1 : 1 : 1 : 1] \in \mathbb{A}$ , por lo que  $f(O) = O$ . Consideremos

ahora los puntos,

$$P_1 = [1 : 0 : 1 : 1], \quad P_2 = [0 : 1 : 1 : 1] \quad \text{y} \quad P_3 = [0 : 0 : 0 : 1].$$

Tenemos que

$$f(P_1) = [1 : 1 : 2 : 2] = \left[ \frac{1}{2} : \frac{1}{2} : 1 : 1 \right], \quad f(P_2) = [1 : 2 : 2 : 2] = \left[ \frac{1}{2} : 1 : 1 : 1 \right].$$

$$f(P_3) = [0 : 0 : 1 : 2] = \left[ 0 : 0 : \frac{1}{2} : 1 \right].$$

Así, podemos tomar la referencia cartesiana  $\mathcal{R}_C = \left\{ O, \mathcal{B} = \left\{ \overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3} \right\} \right\}$ . Calculemos la matriz de  $f|_{\mathbb{A}}$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{f}(\overrightarrow{OP_1}) &= \overline{\overrightarrow{f(O)f(P_1)}} = [1 : 1 : 1 : 1] \overrightarrow{\left[ \frac{1}{2} : \frac{1}{2} : 1 : 1 \right]} = \left( -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0 \right). \\ \vec{f}(\overrightarrow{OP_2}) &= \overline{\overrightarrow{f(O)f(P_2)}} = [1 : 1 : 1 : 1] \overrightarrow{\left[ \frac{1}{2} : 1 : 1 : 1 \right]} = \left( -\frac{1}{2}, 0, 0, 0 \right). \\ \vec{f}(\overrightarrow{OP_3}) &= \overline{\overrightarrow{f(O)f(P_3)}} = [1 : 1 : 1 : 1] \overrightarrow{\left[ 0 : 0 : \frac{1}{2} : 1 \right]} = \left( -1, -1, -\frac{1}{2}, 0 \right). \end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$\mathcal{B} = \{(-1, 0, 0, 0), (0, -1, 0, 0), (-1, -1, -1, 0)\}.$$

En esta base, tenemos que

$$\overline{\overrightarrow{f(OP_2)}} = \left( \frac{1}{2}, 0, 0, 0 \right)_B, \quad \overline{\overrightarrow{f(OP_1)}} = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0 \right)_B, \quad \overline{\overrightarrow{f(OP_3)}} = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)_B.$$

Así, nos queda que la matriz de  $f|_{\mathbb{A}}$  en la referencia  $\mathcal{R}_C$  será

$$M_{\mathcal{R}_C}(f|_{\mathbb{A}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

**Observación.** Sea  $X \subset \mathbb{P}^n$  una variedad tal que

$$X = \begin{cases} a_{00}x_0 + \cdots + a_{0n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{k0}x_0 + \cdots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Consideremos el hiperplano  $H = \{b_0x_0 + \cdots + b_nx_n = 0\}$  y consideremos  $\mathbb{A} = \mathbb{P}^n/H$  que es un espacio afín. Tenemos que  $X \cap \mathbb{A}$  es una variedad afín. En efecto, tenemos que

$$\mathbb{A} = \{[x_0 : \cdots : x_n] : b_0x_0 + \cdots + b_nx_n = 1\} = \left\{ \left( \frac{1}{b_0}(1 - b_1x_1 - \cdots - b_nx_n), x_1, \dots, x_n \right) \right\} \subset \mathbb{K}^{n+1}.$$

Así, tenemos que

$$X \cap \mathbb{A} = \begin{cases} a_{00} \frac{1}{b_0} (1 - b_1 x_1 - \cdots - b_n x_n) + \cdots + a_n x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{k0} \frac{1}{b_0} (1 - b_1 x_1 - \cdots - b_n x_n) + \cdots + a_k x_n = 0 \end{cases},$$

que son las ecuaciones implícitas de una variedad afín.

**Ejemplo.** Consideremos en  $\mathbb{P}^3$  el hiperplano  $H = \{x_0 + x_1 + x_2 = 0\}$ . Tenemos que

$$\mathbb{A} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) : x_0 + x_1 + x_2 = 1\}.$$

Consideremos por otro lado la variedad

$$X = \begin{cases} 2x_0 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

Así, tenemos que

$$X \cap \mathbb{A} = \begin{cases} 2(1 - x_1 - x_2) + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

### 3.7. Completaciones proyectivas

Sea  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  una afinidad con  $\dim \mathbb{A} = n$  y  $\mathcal{R}_C = \{O, \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}\}$  una referencia cartesiana de  $\mathbb{A}$ . Para meter el espacio afín  $\mathbb{A}$  en un espacio proyectivo consideramos la aplicación

$$i : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n : (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}} \rightarrow [1 : x_1 : \cdots : x_n].$$

Tenemos que

$$\text{Im}(i) = \{[1 : x_1 : \cdots : x_n] : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}\} = \mathbb{P}^n / \{x_0 = 0\}.$$

**Definición 3.5.** Se define la **completación proyectiva** de  $f$  respecto a  $i$  de la forma

$$\bar{f} : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n : [x_0 : \cdots : x_n] \rightarrow \left[ x_0 (1, f(0, \dots, 0)) + \left( 0, \vec{f}(x_1, \dots, x_n) \right) \right].$$

**Proposición 3.5.** La aplicación  $\bar{f} : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  es una homografía y  $\bar{f}|_{\mathbb{A}} = f$ .

*Demostración.* Tenemos que ver que  $\bar{f}$  es una homografía y que  $\bar{f}|_{\mathbb{A}} = f$ . Ponemos

$$\hat{f} : \mathbb{K}^{n+1} \rightarrow \mathbb{K}^{n+1} : (x_0, \dots, x_n) \rightarrow x_0 (1, f(0, \dots, 0)) + \left( 0, \vec{f}(x_1, \dots, x_n) \right).$$

Veamos que es lineal. Tenemos que

$$\begin{aligned}
 \hat{f}((x_0, \dots, x_n) + (y_0, \dots, y_n)) &= \hat{f}((x_0 + y_0, \dots, x_n + y_n)) \\
 &= (x_0 + y_0)(1, f(0, \dots, 0)) + \left(0, \vec{f}(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)\right) \\
 &= (x_0 + y_0)(1, f(0, \dots, 0)) + \left(0, \vec{f}(x_1, \dots, x_n)\right) + \left(0, \vec{f}(y_1, \dots, y_n)\right) \\
 &= \left[x_0(1, f(0, \dots, 0)) + \left(0, \vec{f}(x_1, \dots, x_n)\right)\right] \\
 &\quad + \left[y_0(1, f(0, \dots, 0)) + \left(0, \vec{f}(y_1, \dots, y_n)\right)\right] \\
 &= \hat{f}(x_0, \dots, x_n) + \hat{f}(y_0, \dots, y_n).
 \end{aligned}$$

Análogamente, si  $\lambda \in \mathbb{K}$  tenemos que

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(\lambda(x_0, \dots, x_n)) &= \hat{f}(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) \\
 &= (\lambda x_0)(1, f(0, \dots, 0)) + \left(0, \vec{f}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)\right) \\
 &= (\lambda x_0)(1, f(0, \dots, 0)) + \lambda \left(0, \vec{f}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)\right) \\
 &= \lambda \left(x_0(1, f(0, \dots, 0)) + \left(0, \vec{f}(x_1, \dots, x_n)\right)\right) \\
 &= \lambda \hat{f}(x_0, \dots, x_n).
 \end{aligned}$$

Veamos ahora que  $\bar{f}|_{i(\mathbb{A})} = i \circ f$ . Por el teorema anterior sabemos que  $\bar{f}|_{i(\mathbb{A})}$  es una afinidad. En efecto, tenemos que  $\bar{f}(\{x_0 = 0\}) = \{x_0 = 0\}$ :

$$\begin{aligned}
 \bar{f}(\{x_0 = 0\}) &= \left[\hat{f}(\{x_0 = 0\})\right] = \left\{\left[0(1, f(0, \dots, 0)) + \left(0, \vec{f}(x_1, \dots, x_n)\right)\right] : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}\right\} \\
 &= \{x_0 = 0\}.
 \end{aligned}$$

Finalmente, para ver que las dos funciones coinciden es suficiente con comprobar la igualdad en una referencia afín. Consideremos la referencia

$$\mathcal{R}_A = \{O, O + v_1, \dots, O + v_n\}.$$

Tenemos que

$$\bar{f}(i(O)) = \bar{f}([1 : 0 : \dots : 0]) = [(1, f(0, \dots, 0))].$$

Además,  $i(f(O)) = i(f(0, \dots, 0)) = [(1, f(0, \dots, 0))]$ . De forma análoga, tenemos que si  $j = 1, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned}
 \bar{f}(i(O + v_j)) &= \bar{f}([1 : 0 : \dots : 1 : \dots : 0]) \\
 &= \left[1(1, f(0, \dots, 0)) + \left(0, \vec{f}(0, \dots, 1, \dots, 0)\right)\right] \\
 &= \left[(1, f(0, \dots, 0) + \vec{f}(0, \dots, 1, \dots, 0))\right] \\
 &= [(1, f(O + v_j))].
 \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$i(f(O + v_j)) = [1, f(O + v_j)].$$

Como son dos afinidades que coinciden en una referencia afín, tendremos que  $\bar{f}|_{i(\mathbb{A})} = i \circ f$ .  $\square$

**Observación.** Se puede comprobar que si  $\mathcal{E}$  es la referencia estándar de  $\mathbb{P}^n$ , entonces

$$[M_{\mathcal{E}}(\overline{f})] = [M_{\mathcal{R}_C}(f)].$$

**Ejemplo.** Consideremos la aplicación

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) \rightarrow (2x_1 + x_2, 2x_2 + 1).$$

Tendremos que

$$\begin{aligned}\overline{f}([x_0 : x_1 : x_2]) &= \left[ x_0(1, f(0, 0)) + (0, \vec{f}(x_1, x_2)) \right] \\ &= [x_0(1, 0, 1) + (0, 2x_1 + x_2, x_2)] \\ &= [x_0 : 2x_1 + x_2 : x_0 + 2x_2].\end{aligned}$$

Sea  $f : \mathbb{K}^{n+1} \rightarrow \mathbb{K}$  una forma lineal y  $\mathbb{A} = \mathbb{P}^n / \mathbb{P}(\text{Ker}(f))$ , donde  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$ , es un espacio afín. Si  $X \subset \mathbb{A}$  es una variedad afín de dimensión  $d$ ,  $X$  viene dado por  $n - d$  ecuaciones implícitas. Como  $X$  es un espacio afín tiene una referencia afín  $\{P_0, \dots, P_d\}$  y

$$\overline{X} = V_{\mathbb{P}}(P_0, \dots, P_d),$$

es el completado proyectivo de  $X$ .

**Lema 3.5.** Si  $P_0, \dots, P_d$  son independientes en  $\mathbb{A}$ , entonces están en posición general en  $\mathbb{P}^n$ .

*Demostración.* Supongamos que  $P_0, \dots, P_d$  son independientes, por lo que  $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_d}\}$  son linealmente independientes. Supongamos que  $P_i = [v_i]$  para  $i = 0, \dots, d$ . Tenemos que ver que  $\{v_0, \dots, v_d\}$  son linealmente independientes. Recordamos que

$$\overrightarrow{P_0P_i} = \frac{v_i}{f(v_i)} - \frac{v_0}{f(v_0)}.$$

Supongamos que

$$0 = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_d v_d.$$

Así, tenemos que

$$0 = \lambda_0 v_0 + \sum_{i=1}^d \lambda_i f(v_i) \left( \overrightarrow{P_0P_i} + \frac{v_0}{f(v_0)} \right) = \left( \lambda_0 + \sum_{i=1}^d \lambda_i \frac{f(v_i)}{f(v_0)} \right) v_0 + \sum_{i=1}^d \lambda_i f(v_i) \overrightarrow{P_0P_i}.$$

Como  $[v_0] = P_0 \in \mathbb{A} = \mathbb{P}^n / \mathbb{P}(\text{Ker}(f))$  y  $\overrightarrow{P_0P_i} \in \text{Ker}(f)$ , tenemos que

$$f(\mu_0 v_0) = f \left( \sum_{i=1}^d \mu_i \overrightarrow{P_0P_i} \right) = 0 \Rightarrow \mu_0 = 0.$$

Por tanto,

$$\mu_0 v_0 = \sum_{i=1}^d \mu_i \overrightarrow{P_0P_i} = 0.$$

Como  $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_d}\}$  son linealmente independientes tenemos que  $\mu_i = 0$ , por lo que  $\lambda f(v_i) = 0$  y  $\lambda_i = 0$ . Así, tenemos que

$$0 = \lambda_0 v_0 \Rightarrow \lambda_0 = 0.$$

Por tanto,  $\{v_0, \dots, v_d\}$  son linealmente independientes.  $\square$

**Observación.** Por el lema, tenemos que

$$\dim \overline{X} = \dim \hat{X} - 1 = \dim(L(\{v_0, \dots, v_d\})) - 1 = d.$$

En particular,  $\overline{X}$  está definido por  $n - d$  ecuaciones implícitas. Así, si

$$X = \begin{cases} a_{00}x_0 + \dots + a_{0n}x_n = c_0 \\ \vdots \\ a_{n-d-1,0}x_0 + \dots + a_{n-d-1,n}x_n = c_n \end{cases},$$

y

$$f(x_0, \dots, x_n) = b_0x_0 + \dots + b_nx_n,$$

suponiendo que  $b_0 \neq 0$ , tenemos que

$$\mathbb{A} = \{[x_0 : \dots : x_n] : b_0x_0 + \dots + b_nx_n = 1\}.$$

Comprobamos que  $P_0, \dots, P_d$  vistos como puntos de  $\mathbb{P}^n$  cumplen

$$\begin{cases} a_{00}x_0 + \dots + a_{0n}x_n = c_0(b_0x_0 + \dots + b_nx_n) \\ \vdots \\ a_{n-d-1,0}x_0 + \dots + a_{n-d-1,n}x_n = c_n(b_0x_0 + \dots + b_nx_n) \end{cases}.$$

Son  $n - d$  ecuaciones implícitas por lo que necesariamente debe ser las ecuaciones de  $\overline{X}$ .

**Ejemplo.** Consideremos la variedad afín

$$X = \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases},$$

con  $X \subset \mathbb{R}^3$ , que es una recta. Podemos meter  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{P}^3$  de la forma:

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3 : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow [1 : x_1 : x_2 : x_3],$$

es decir, identificamos  $\mathbb{R}^3$  con  $\mathbb{P}^3 / \{x_0 = 0\}$ . Así, tendremos que

$$\overline{X} = \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2x_0 \\ x_1 + x_3 = x_0 \end{cases}.$$

**Observación.** Sea  $\overline{X}$  la completación proyectiva de una variedad afín  $X$ . Podemos considerar

$$X_\infty = \overline{X}/X = \overline{X} \cap \mathbb{P}(\text{Ker}(f)) \quad \text{y} \quad \hat{X}_\infty = \overrightarrow{X},$$

que es una variedad de  $\mathbb{P}^n$ . En efecto, si  $X = V_{\mathbb{A}}(P_0, \dots, P_d)$  y  $\overline{X} = V_{\mathbb{P}}(P_0, \dots, P_d)$ , tenemos que  $[\overrightarrow{P_0P_i}] \in \overline{X}$  y como  $f([\overrightarrow{P_0P_i}]) = 0$  tenemos que  $[\overrightarrow{P_0P_i}] \notin X$ . Como

$$\overrightarrow{X} = L(\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_d}\}) \subset \hat{X}_\infty,$$

y

$$\dim \overrightarrow{X} = d \leq \dim \widehat{\overline{X}/X} < d + 1.$$

Por tanto, debe ser que  $\overrightarrow{X} = \widehat{\overline{X}/X} = \hat{X}_\infty$ .

# Capítulo 4

## Cónicas y cuádricas

**Notación.** De ahora en adelante tomamos  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ .

### 4.1. Clasificación de cuádricas proyectivas

Consideremos el conjunto  $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$  de polinomio scon coeficientes en  $\mathbb{K}$  en  $n + 1$  variables.

**Definición 4.1 (Polinomios equivalentes).** Dos polinomios  $p, q \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$  son **equivalentes** si existe  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  tal que  $p = \lambda q$ .

**Definición 4.2 (Polinomio homogéneo).** Un polinomio  $p \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$  es **homogéneo** si todos los monomios tienen el mismo grado. Equivalentemente, existe  $d$  tal que  $p(tx_0, \dots, tx_n) = t^d p(x_0, \dots, x_n)$ .

**Ejemplo.** El polinomio  $x_1^2 + x_1x_2$  es homogéneo, pero el polinomio  $x_0^2 + x_1 + x_2 + 1$  no es homogéneo.

**Definición 4.3 (Hipersuperficie y soporte).** Una **hipersuperficie** de  $\mathbb{P}^n$  en la referencia  $\mathcal{R}$ , es la clase de equivalencia  $[F]$  de un polinomio homogéneo  $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ . El **soporte** de  $[F]$  es el conjunto  $V(F) = \{[x_0 : \dots : x_n] : F(x_0, \dots, x_n) = 0\}$ .

**Observación.** El conjunto  $V(F)$  está bien definido. En efecto, si  $[x_0 : \dots : x_n] \in V(F)$  y  $[x_0 : \dots : x_n] = [y_0 : \dots : y_n]$ , tenemos que existe  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  tal que  $(y_0, \dots, y_n) = \lambda(x_0, \dots, x_n)$ . Así, tendremos que

$$F(y_0, \dots, y_n) = F(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, \dots, x_n) = \lambda^d \cdot 0 = 0.$$

**Definición 4.4 (Cónicas y cuádricas).** Una **cuádrica** es una hipersuperficie  $[F]$  con  $\text{grad}(F) = 2$ . Una **cónica** es una cuádrica en  $\mathbb{P}^2$ .

**Definición 4.5** (Equivalencia de cuádricas). Dos cuádricas  $[F]$  y  $[G]$  de  $\mathbb{P}^n$  son **equivalentes** si existe una homografía  $\varphi : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  tal que  $[F(x_0, \dots, x_n)] = [G(\varphi(x_0, \dots, x_n))]$ .

Sea  $F$  un polinomio homogéneo de grado 2. Entonces, tendremos que

$$F = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} x_i x_j.$$

Podemos poner,

$$M(F) = \begin{pmatrix} a_{00} & \frac{a_{01}}{2} & \cdots & \frac{a_{0n}}{2} \\ \frac{a_{01}}{2} & a_{11} & \cdots & \frac{a_{1n}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{0n}}{2} & \frac{a_{1n}}{2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Es una matriz simétrica. Podemos ver que

$$(x_0, \dots, x_n) M(F) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = F(x_0, \dots, x_n).$$

Si  $\varphi : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  es una homografía, entonces

$$(x_0, \dots, x_n) M(F(\hat{\varphi})) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \hat{\varphi}(x_0, \dots, x_n) M(F) \hat{\varphi} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left( M(\hat{\varphi}) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)^T M(F) M(\hat{\varphi}) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Por lo que

$$(x_0, \dots, x_n) M(\hat{\varphi})^T M(F) M(\hat{\varphi}) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Así, hemos demostrado el siguiente lema:

**Lema 4.1.** Dos cuádricas  $[F]$  y  $[G]$  son equivalentes si y solo si existe  $C \in \text{GL}$  tal que  $[M(C)] = [C^T M(F) C]$ .

**Observación.** Así, tenemos que el problema de clasificar cuádricas proyectivas es equivalente a clasificar matrices simétricas por convergencia.

**Teorema 4.1.** Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  con  $(\mathbb{K}) \neq 2$ . Entonces,  $A$  es congruente con una matriz diagonal si y solo si  $A$  es simétrica.

*Demostración.* (i) Supongamos que  $A = P^T D P$  con  $D$  diagonal. Tenemos que

$$A^T = (P^T D P)^T = P^T D^T P = P^T D P = A.$$

Como  $A^T = A$  tenemos que  $A$  es simétrica.

(ii) Supongamos que  $A$  es simétrica y procedemos por inducción.

- Si  $n = 1$ , tenemos que  $A = (a)$  que es diagonal.
- Si  $n > 1$ , tenemos que  $A$  es simétrica por lo que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Si  $a_{11} \neq 0$ , podemos considerar

$$P^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & \\ \vdots & & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^T A P = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A' & \\ 0 & & \end{pmatrix}.$$

Por inducción, existe  $P'$  tal que  $P'^T A' P' = D$  es diagonal. Así, tenemos que

$$\left( P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P' & \\ 0 & & \end{pmatrix} \right)^T A P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P' & \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D & \\ 0 & & \end{pmatrix}.$$

Si  $a_{11} = 0$ , podemos considerar varios casos:

- Si  $a_{1i} = 0, \forall i = 1, \dots, n$ , tenemos que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A' & \\ 0 & & \end{pmatrix}.$$

Por hipótesis de inducción existe  $P'$  tal que  $P'^T A' P' = D'$  diagonal, por lo que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P' & \\ 0 & & \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P' & \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & \\ 0 & & \end{pmatrix},$$

que es diagonal.

- Si existe  $a_{1i} \neq 0$ , tenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & \cdots & \\ \vdots & & 0 & & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & \cdots & \\ \vdots & & 0 & & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2a_{ii} & \times & \times \\ \times & & \\ \times & & \end{pmatrix},$$

que es simétrica y  $2a_{ii} \neq 0$ , por lo que podemos usar el caso  $a_{11} \neq 0$  y concluimos que existe  $P$  tal que

$$P^T \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & \cdots & \\ \vdots & & 0 & & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & \cdots & \\ \vdots & & 0 & & 1 \end{pmatrix} P = D.$$

□

**Observación.** Supongamos que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Entonces una matriz diagonal de la forma

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que  $D$  es congruente con

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

usando que

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{d_1}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{d_r}} & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{d_1}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{d_r}} & \\ & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|d_1|}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{|d_r|}} & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|d_1|}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{|d_r|}} & \\ & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d_1}{|d_1|} & & \\ & \frac{d_r}{|d_r|} & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

**Teorema 4.2.** Toda cuádrica  $[F]$  de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  es equivalente a la siguiente cuádrica

$$x_0^2 + \cdots + x_{r-1}^2, \quad r = \text{ran}(F),$$

y  $\forall t \neq r$ ,  $x_0^2 + \cdots + x_{t-1}^2$  no es equivalente a  $x_0^2 + \cdots + x_{r-1}^2$ .

*Demostación.* Tenemos que  $[F] \sim [G]$  si y solo si existe  $P$  invertible tal que  $P^T M(F) P = \lambda M(G)$ . Como  $P$  es invertible, tenemos que  $\text{ran}(P^T M(F) P) = \text{ran}(M(F)) = \text{ran}(M(G))$ . Por el teorema anterior y la observación sobre  $\mathbb{C}$ , podemos tomar  $M(G)$  diagonal con 1's en la diagonal, por lo que  $[G] = [x_0^2 + \cdots + x_{r-1}^2]$ .

Si  $t \neq r$ , tenemos que las matrices

$$\begin{pmatrix} 1_1 & & \\ & 1_r & \\ & & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1_1 & & \\ & 1_t & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

no son congruentes por matrices invertibles. □

**Teorema 4.3.** Toda cuádrica de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  es equivalente a la siguiente cuádrica

$$x_0^2 + \dots + x_{p-1}^2 - x_p^2 - \dots - x_{r-1}^2, \quad r = \text{ran}(F), \quad p \geq r - p,$$

y si  $t \neq r$  (o  $r = t$  y  $q \geq t - q$  y  $q \neq p$ ), entonces  $x_0^2 + \dots + x_{p-1}^2 - x_p^2 - \dots - x_{r-1}^2$  no es equivalente a  $x_0^2 + \dots + x_{q-1}^2 - x_q^2 - \dots - x_{t-1}^2$ .

*Demostración.* Tenemos que  $[F] \sim [G]$  si y solo si existe  $P$  invertible y  $\lambda \in \mathbb{K}^\times$  tal que  $P^T M(F) P = \lambda M(G)$ , por lo que  $\text{ran}(M(F)) = \text{ran}(M(G))$ , por lo que la signatura de  $M(F)$  coincide con la de  $\lambda M(G)$ . Por el teorema y la observación sobre  $\mathbb{R}$ ,

$$M(F) \quad \text{congruente} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & \end{pmatrix},$$

y en el caso que  $p < r-p$  podemos multiplicar por  $-1$ . Por tanto,  $[F] = [x_0^2 + \dots + x_{p-1}^2 - x_p^2 - \dots - x_r^2]$  y la unicidad viene de la discusión de rango y signatura.  $\square$

## Resumen

- Las cónicas complejas son equivalentes a una y solo una de las siguientes:

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 \quad \text{o bien} \quad x_0^2 + x_2^2 \quad \text{o bien} \quad x_0^2.$$

- Las cónicas reales son equivalentes a una y solo una de las siguientes:

- De rango 3:  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$  y  $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2$ .
- De grado 2:  $x_0^2 + x_1^2$  y  $x_0^2 - x_1^2$ .
- De grado 1:  $x_0^2$ .

**Ejemplo.** Clasifiquemos la cónica

$$F = x_0^2 + x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_0x_1 + 6x_0x_2,$$

y buscamos la homografía que la lleve a la forma estándar.

Tenemos que

$$M(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que  $\det(M(F)) \neq 0$ , por lo que es de rango 3. Para calcular la signatura estudiamos las raíces de  $P_{M(F)}(t)$ . Como va a tener raíces positivas y negativas tendremos que  $[F] \sim [x_0^2 + x_1^2 - x_2^2]$  en el caso real y  $[F] \sim [x_0^2 + x_1^2 + x_2^2]$  en el caso

complejo. La homografía que nos piden es  $P$  tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} = P^T M(F) P.$$

**Ejemplo.** Consideremos la cónica

$$F = 10x_0^2 + 2x_0x_1 + x_1^2 + 4x_2^2.$$

Tenemos que

$$M(F) = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Obtenemos que  $F$  es equivalente a  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ . En efecto, si tomamos

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad P^T M(F) P = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos a interpretar  $P$  como un cambio de referencia,

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{1}{3}y_0 \\ x_1 = -\frac{1}{3}y_0 + y_2 \\ x_2 = \frac{1}{2}y_1 \end{cases}.$$

Así, obtenemos que la nueva expresión de  $F$  será

$$\begin{aligned} F &= 10 \left( \frac{1}{3}y_0 \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{3}y_0 \right) \left( -\frac{1}{3}y_0 + y_2 \right) + \left( -\frac{1}{3}y_0 + y_2 \right)^2 + 4 \left( \frac{1}{2}y_1 \right)^2 \\ &= y_0^2 + y_1^2 + y_2^2. \end{aligned}$$

Un método relativamente rápido para ver con qué cuádrica se corresponde una cuádrica  $F$  es completar cuadrados y ver a ojo el cambio de variable. En este caso lo podríamos hacer de esta forma:

$$F = 10x_0^2 + 2x_0x_1 + x_1^2 + 4x_2^2 = 9x_0^2 + (x_0 + x_1)^2 + 4x_2^2.$$

De aquí es fácil ver que tomamos

$$\begin{cases} y_0 = 3x_0 \\ y_1 = x_0 + x_1 \\ y_2 = 2x_2 \end{cases}.$$

## 4.2. Clasificación de cuádricas afines

Sea  $\mathbb{A}$  un espacio afín de dimensión  $n$  y  $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  de grado 2. Una **cuádrica afín** es la clase  $[f] = \{\lambda f : \lambda \in \mathbb{K}^*\}$  con

$$V_{\mathbb{A}} = \{(x_1, \dots, x_n) : f(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

el soporte de la cuádrica. Dos cuádricas afines  $[f]$  y  $[g]$  en  $\mathbb{A}$  son equivalentes si existe  $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  tal que  $f \circ \varphi = \lambda g$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ . Matricialmente, si

$$f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c,$$

tendremos que

$$M(f) = (c \quad b).$$

### Observación.

$$f(x_1, \dots, x_n) = (1 \quad x_1 \quad \cdots \quad x_n) M(f) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Tenemos que  $f \circ \varphi = \lambda g$  si y solo si

$$M(\varphi)^T M(f) M(\varphi) = \lambda M(g),$$

con

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}).$$

Así,  $f$  y  $g$  son afínmente equivalentes si y solo si  $M(f)$  y  $M(g)$  son congruentes por matrices de tipo afinidad.

**Teorema 4.4 (Teorema de Witt).** Sean  $[f]$  y  $[g]$  dos cuádricas afines de  $\mathbb{A}$ . Sea  $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{P}^n / \{x_0 = 0\}$  la inclusión de  $\mathbb{A}$  en  $\mathbb{P}^n$ . Entonces,  $[f]$  y  $[g]$  son afínmente equivalentes si y solo si  $[\bar{f}]$  y  $[\bar{g}]$  las completaciones proyectivas son proyectivamente equivalentes y

$$[\bar{f}] \cap \{x_0 = 0\} \quad \text{y} \quad [\bar{g}] \cap \{x_0 = 0\},$$

son proyectivamente equivalentes.

**Observación.** Tomando la inclusión  $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{P}^n / \{x_0 = 0\}$ , tendremos que  $M(f) = M(\bar{f})$  y si

$$M(f) = \begin{pmatrix} c & b_{\frac{1}{2}} & \cdots & b_{\frac{n}{2}} \\ b_{\frac{1}{2}} & & & \\ \vdots & & A & \\ b_{\frac{n}{2}} & & & \end{pmatrix},$$

entonces  $M([f] \cap \{x_0 = 0\}) = A$ .

**Ejemplo.** Consideremos  $f = 2x_1^2 - x_1x_2 + 4x_1 - 6x_2 - x_2^2$ . Tenemos que

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -\frac{1}{2} \\ -3 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, tenemos que

$$\bar{f} = 2x_1^2 - x_1x_2 + 4x_1x_0 - 6x_2x_0 - x_2^2.$$

$\bar{f}$  es el homogeneizado de  $f$  'sustituyendo' 1 por  $x_0$ . Así, tenemos que

$$\bar{f} \cap \{x_0 = 0\} = 2x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2,$$

que es una cuádrica proyectiva en  $\{x_0 = 0\} \subset \mathbb{P}^2$ . Por el teorema anterior, tenemos que clasificar afínmente es equivalente a clasificar proyectivamente. Tenemos que  $\bar{f} \sim x_0^2 + x_1^2 - x_2^2$  en el caso real y  $\bar{f} \sim x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$  en el caso complejo. Análogamente, tenemos que  $\bar{f} \cap \{x_0 = 0\} \sim x_0^2 - x_1^2$  en el caso real y  $\bar{f} \cap \{x_0 = 0\} \sim x_0^2 + x_1^2$  en el caso complejo.

## Resumen

Sea  $Q$  una cónica afín real,  $\bar{Q}$  la cónica en el completado proyectivo,  $(x_1, x_2) \rightarrow [1 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 / \{x_0 = 0\}$ , y  $Q_\infty$  la cónica del infinito  $\mathbb{A}_\infty = \{x_0 = 0\} \subset \mathbb{P}^n$ . Para  $\bar{Q}$  hay cinco casos (que ya hemos visto), mientras que los únicos casos para  $Q_\infty$  son

$$x_1^2 + x_2^2 \quad x_1^2 - x_2^2 \quad x_1^2.$$

Así, tenemos la clasificación

|           |            |     |
|-----------|------------|-----|
| $\bar{Q}$ | $Q_\infty$ | $Q$ |
|-----------|------------|-----|