

Álgebra Lineal

Victoria Torroja Rubio

9/10/2024 -

Índice general

0.1. Introducción	2
1. Espacios Vectoriales	7
1.1. Subespacios vectoriales	8
1.2. Bases de un espacio vectorial	11
1.3. Suma directa de subespacios.	16
1.4. Espacio vectorial cociente	21
2. Aplicaciones Lineales	24

0.1. Introducción

El cuerpo de los números reales cumple los siguientes requisitos:

$(\mathbb{R}, +)$ es un grupo abeliano:

Definimos suma y producto como

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\rightarrow a + b \\ \cdot : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\rightarrow a \cdot b. \end{aligned}$$

1. La suma es asociativa

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a + b) + c = a + (b + c).$$

2. Existe un elemento neutro

$$\exists! 0 \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, 0 + a = a + 0 = a.$$

3. Existe el opuesto

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists -a \in \mathbb{R}, a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

4. La suma es conmutativa

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b = b + a.$$

5. El producto es asociativo,

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

6. El producto es distributivo con respecto a la suma (distributivo por la izquierda y por la derecha),

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

7. Existe la unidad,

$$\exists! 1 \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, 1 \cdot a = a \cdot 1 = a.$$

8. Existe la inversa,

$$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}^1, \exists a^{-1} \in \mathbb{R}, a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

Definición 0.1 (Anillo). Se denomina **anillo** a un conjunto y dos operaciones $(R, +, \cdot)$ que verifica las propiedades (1)-(6). Si se verifica también (7), se llama **anillo con unidad**.

¹Utilizamos la notación \mathbb{R}^* por sencillez para denotar $\mathbb{R} - \{0\}$

Definición 0.2 (Cuerpo). Se denomina **cuerpo** a un conjunto con al menos dos elementos ($1 \neq 0$) y dos operaciones $(R, +, \cdot)$ que cumple las propiedades (1)-(8). Si también se verifica que la multiplicación es conmutativa, decimos que se trata de un **cuerpo abeliano**.

Definición 0.3. Un conjunto $V \neq \emptyset$ es un \mathbb{R} -espacio vectorial si existen dos operaciones

$$\begin{aligned} + : V \times V &\rightarrow V, (\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \vec{x} + \vec{y} \\ \cdot : \mathbb{R} \times V &\rightarrow V, (a, \vec{x}) \rightarrow a \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

que verifican que

(i) $(V, +)$ es un grupo abeliano.

(ii) Se cumple la propiedad distributiva,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in V, a(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}.$$

(iii) Se cumple otra propiedad distributiva,

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \vec{x} \in V, (a + b)\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x}.$$

(iv) Se cumple la propiedad asociativa,

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \vec{x} \in V, a(b\vec{x}) = (a \cdot b)\vec{x}.$$

(v) $\exists 1 \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in V, 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Definición 0.4. Se define \mathbb{R}^n , con $n \in \mathbb{N}$, como

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Definición 0.5. Se define la suma $+$ en \mathbb{R}^n de la siguiente manera:

$$\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

Utilizamos las propiedades de \mathbb{R} como cuerpo abeliano para justificar que $(\mathbb{R}^n, +)$ es un grupo abeliano.

Definición 0.6. Definimos el producto escalar en \mathbb{R}^n de la siguiente manera,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, a \cdot \vec{x} = (a \cdot x_1, a \cdot x_2, \dots, a \cdot x_n).$$

Una consecuencia clara de esto es que para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$0 \cdot \vec{x} = \vec{0}.$$

Al igual que antes, podemos utilizar las propiedades de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ como cuerpo abeliano para justificar que \mathbb{R}^n es un \mathbb{R} -espacio vectorial.

Por las definiciones anteriores tenemos que para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, x_n) \\ &= x_1 (1, 0, \dots, 0) + x_2 (0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n (0, \dots, 1) .. \end{aligned}$$

Además, podemos concluir que si

$$x_1 (1, \dots, 0) + x_2 (0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n (0, \dots, 1) = y_1 (1, \dots, 0) + y_2 (0, 1, \dots, 0) + \dots + y_n (0, \dots, 1),$$

entonces $\forall i, 1 \leq i \leq n, x_i = y_i$.

Definición 0.7 (Sistema de ecuaciones homogéneo). Sea H un sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\begin{aligned} a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \dots + a_n^1 x_n &= 0 \\ \vdots \\ a_1^m x_1 + a_2^m x_2 + \dots + a_n^m x_n &= 0. \end{aligned}$$

donde $m, n \in \mathbb{N}$ y $a_i^j \in \mathbb{R}$. Definimos L como el conjunto de soluciones de H :

$$L = \{ (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) : x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n \text{ es solución de } H \} \subset \mathbb{R}^n.$$

^a

^a a_j^i no es exponente sino una forma de numeración.

Teorema 0.1. Si $\vec{x}_0, \vec{y}_0 \in L$, se cumple que

$$\vec{x}_0 + \vec{y}_0 \in L.$$

Demostración. Tenemos que $\forall i, 1 \leq i \leq m$,

$$\begin{aligned}
 & a_1^i (x_0^1 + y_0^1) + \cdots + a_n^i (x_0^n + y_0^n) \\
 &= a_1^i x_0^1 + a_1^i y_0^1 + \cdots + a_n^i x_0^n + a_n^i y_0^n \\
 &= \underbrace{(a_1^i x_0^1 + a_2^i x_0^2 + \cdots + a_n^i x_0^n)}_0 + \underbrace{(a_1^i y_0^1 + a_2^i y_0^2 + \cdots + a_n^i y_0^n)}_0 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

□

Teorema 0.2. Si $\vec{x}_0 \in L$ y $a \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$a\vec{x}_0 = (ax_0^1, ax_0^2, \dots, ax_0^n) \in L.$$

Demostración. Tenemos que para $\forall i, 1 \leq i \leq m$,

$$\begin{aligned}
 & a_1^i (ax_0^1) + a_2^i (ax_0^2) + \cdots + a_n^i (ax_0^n) \\
 &= a \underbrace{(a_1^i x_0^1 + a_2^i x_0^2 + \cdots + a_n^i x_0^n)}_0 \\
 &= a \cdot 0 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

□

Teorema 0.3. Por lo visto anteriormente, $L \subset \mathbb{R}^n$ es un **subespacio vectorial** sobre \mathbb{R} .

Demostración. Muchas de las propiedades de un espacio vectorial automáticamente se heredan a un subespacio vectorial. Las únicas excepciones son la definición de la suma, del producto y la existencia del elemento neutro 0. En este caso, hemos comprobado que la suma está definida en L y que existe la multiplicación $\cdot : \mathbb{R} \times L \rightarrow L$ definida en L . Además, $\vec{0} \in L$ es una solución trivial. □

Consideramos un sistema de ecuaciones no homogéneo S :

$$\begin{aligned}
 & a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \cdots + a_n^1 x_n = b^1 \\
 & \vdots \\
 & a_1^m x_1 + a_2^m x_2 + \cdots + a_n^m x_n = b^m.
 \end{aligned}$$

Consideramos que $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$ es el conjunto de las soluciones.

$$\mathcal{L} = \{ (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) : x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n \text{ es solución de } S \}.$$

Entonces, ya no se cumple necesariamente que la suma de dos soluciones también es solución.
Si $\vec{x}_0, \vec{y}_0 \in \mathcal{L}$, $\forall j$, $1 \leq j \leq m$,

$$\begin{aligned} & a_1^j (x_0^1 + y_0^1) + a_2^j (x_0^2 + y_0^2) + \cdots + a_n^j (x_0^n + y_0^n) \\ &= \left(a_1^j x_0^1 + a_2^j x_0^2 + \cdots + a_n^j x_0^n \right) + \left(a_1^j y_0^1 + a_2^j y_0^2 + \cdots + a_n^j y_0^n \right) \\ &= b^j + b^j = 2b^j \neq b^j. \end{aligned}$$

Si $\vec{X}_0 \in L$ y $\vec{x}_0 \in \mathcal{L}$, tenemos que

$$\vec{X}_0 + \vec{x}_0 = b^j \in \mathcal{L}.$$

Capítulo 1

Espacios Vectoriales

Consideramos un cuerpo conmutativo con característica distinta de 2, es decir, $1 + 1 \neq 0$. A este cuerpo lo llamaremos \mathbb{K} .

Definición 1.1 (\mathbb{K} -Espacio vectorial). Un conjunto $V \neq \emptyset$ es un \mathbb{K} -espacio vectorial si se tienen definidas dos aplicaciones

$$\begin{aligned} + : V \times V &\rightarrow V \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\rightarrow \vec{x} + \vec{y} \\ \cdot : \mathbb{K} \times V &\rightarrow V \\ (a, \vec{x}) &\rightarrow a \cdot \vec{x}, \end{aligned}$$

tales que verifican que

(1) $(V, +)$ es un cuerpo abeliano.

[Commutatividad.] $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$.

[Asociatividad.] $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V, (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$.

[Existencia del elemento neutro.] $\exists \vec{0} \in V, \forall \vec{x} \in V, \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$.

[Existencia del opuesto.] $\forall \vec{x} \in V, \exists -\vec{x} \in V, \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$.^a

(2) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \forall a \in \mathbb{K}, a \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{y}$.

(3) $\forall \vec{x} \in V, \forall a, b \in \mathbb{K}, (a + b) \cdot \vec{x} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{x}$.

(4) $\forall \vec{x} \in V, \forall a, b \in \mathbb{K}, (a \cdot b) \cdot \vec{x} = a \cdot (b \cdot \vec{x})$.

(5) $\forall \vec{x} \in V, 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

^aEn la propiedad del elemento neutro y del opuesto, como la conmutatividad es un requisito no hay que especificar que el elemento neutro funciona por ambos lados, al igual que el opuesto.

Si considero a \mathbb{R} como un cuerpo, tenemos que \mathbb{C} es un \mathbb{R} -espacio vectorial (dimensión 2) y un \mathbb{C} -espacio vectorial (dimensión 1).

Teorema 1.1. Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial, entonces se verifica que:

(a) $\forall \vec{x} \in V, 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

(b) $\forall \vec{x} \in V, \forall a \in \mathbb{K}, (-a) \cdot \vec{x} = -a \cdot \vec{x}$.

(c) $\forall a \in \mathbb{K}, a \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

(d) $a \cdot \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0} \vee a = 0$.

Demostración. (a)

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (1 + 0) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} = \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} \\ \iff -\vec{x} + \vec{x} &= -\vec{x} + \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} \\ \iff 0 &= 0 \cdot \vec{x}. \end{aligned}$$

Se puede hacer de otra manera:

$$0 \cdot \vec{x} = (0 + 0) \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} \iff 0 = 0 \cdot \vec{x}.$$

(b)

$$\begin{aligned} 0 \cdot \vec{x} &= (a + (-a)) \cdot \vec{x} = a \cdot \vec{x} + (-a) \cdot \vec{x} \\ \iff -a \cdot \vec{x} &= -a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{x} + (-a) \cdot \vec{x} \\ \iff -a \cdot \vec{x} &= (-a) \cdot \vec{x}. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} a \cdot \vec{x} &= a \cdot (\vec{x} + \vec{0}) = a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{0} \iff -a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{x} = -a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{0}. \\ \therefore \vec{0} &= a \cdot \vec{0}. \end{aligned}$$

También se puede hacer de la siguiente manera:

$$a \cdot \vec{0} = a \cdot (\vec{0} + \vec{0}) = a \cdot \vec{0} + a \cdot \vec{0} \iff 0 = a \cdot \vec{0}.$$

(d) Si $a = 0$, hemos ganado. Si $a \neq 0$, $\exists \frac{1}{a} \in \mathbb{K}$. Por tanto,

$$\vec{0} = \frac{1}{a} \cdot \vec{0} = \frac{1}{a} \cdot (a \cdot \vec{x}) = \left(\frac{1}{a} \cdot a \right) \cdot \vec{x} = \vec{x}.$$

□

1.1. Subespacios vectoriales

Definición 1.2 (Subespacio vectorial). Un conjunto $L \neq \emptyset$ y $L \subset V$ es **parte estable** si

- (i) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L, \vec{x} + \vec{y} \in L$.
- (ii) $\forall a \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in V, a \cdot \vec{x} \in L$.

Teorema 1.2. Sea $L \neq \emptyset$ y $L \subset V$, entonces L es parte estable si y sólo si L es subespacio vectorial.

Demostración. (i) Si L es un subespacio vectorial es trivial.

- (ii) Si L es parte estable, tenemos que para $\vec{x} \in L$ se verifica la propiedad conmutativa, asociativa, etc, dado que $L \subset V$. Además, dado que $\cdot : \mathbb{K} \cdot L \rightarrow L$ y $(-1) \cdot \vec{x} = -\vec{x}$, tenemos que si $\vec{x} \in L$ entonces $-\vec{x} \in L$. Además, $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0} \in L$. El resto de propiedades se derivan de que $L \subset V$.

□

Definición 1.3 (Combinación lineal). $\vec{x} \in V$ es la **combinación lineal** de $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p$ con coeficientes a^1, a^2, \dots, a^p si existen $\vec{x}_i \in V$ y $a^i \in \mathbb{K}$, con $p \in \mathbb{N}$ ($1 \leq i \leq p$) tales que:

$$\vec{x} = a^1 \cdot \vec{x}_1 + a^2 \cdot \vec{x}_2 + \dots + a^p \cdot \vec{x}_p.$$

^a

^aLos a^i no denotan exponente sino que se trata de una forma de numeración.

Nota. Podemos apreciar que, dadas las condiciones del subespacio vectorial, cualquier combinación lineal de vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p \in L$ es un vector de L .

Teorema 1.3. Sea $H \subset V$ con $H \neq \emptyset$. Definimos $L(H)$ como el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de H , es decir:

$$L(H) = \{a^1 \vec{x}_1 + a^2 \vec{x}_2 + \dots + a^p \vec{x}_p : p \in \mathbb{N}, \vec{x}_i \in H, a^i \in \mathbb{K}\}.$$

Se verifica que

- (1) $H \subset L(H)$.
- (2) $L(H)$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} .
- (3) $L(H)$ es el menor subespacio vectorial que contiene a H . Es decir, si L es un subespacio vectorial y $H \subset L$, entonces $L(H) \subset L$.

Demostración. (1) Tenemos que si $\vec{x} \in H$ entonces

$$\vec{x} = \underbrace{1 \cdot \vec{x}}_{\text{combinación lineal}} \in L(H).$$

- (2) Sean $\vec{x}, \vec{y} \in L(H)$, queremos ver que $\vec{x} + \vec{y} \in L(H)$. Dado que $\vec{x}, \vec{y} \in L(H)$, se pueden expresar como combinación lineal de otros vectores en H .

$$\exists p \in \mathbb{N}, \exists \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p \in H, \exists a^1, a^2, \dots, a^p \in \mathbb{K},$$

tales que

$$\vec{x} = a^1 \vec{x}_1 + a^2 \vec{x}_2 + \dots + a^p \vec{x}_p.$$

De manera similar, como $\vec{y} \in L(H)$,

$$\exists q \in \mathbb{N}, \exists \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_q \in H, \exists b^1, b^2, \dots, b^q \in \mathbb{K},$$

tales que

$$\vec{y} = b^1 \vec{y}_1 + b^2 \vec{y}_2 + \dots + b^q \vec{y}_q.$$

Entonces,

$$\vec{x} + \vec{y} = (a^1 \vec{x}_1 + a^2 \vec{x}_2 + \dots + a^p \vec{x}_p) + (b^1 \vec{y}_1 + b^2 \vec{y}_2 + \dots + b^q \vec{y}_q).$$

Como $\forall \vec{x}_i, \vec{y}_i \in H$, tenemos que $\vec{x} + \vec{y} \in L(H)$.

A continuación, demostramos que si $\vec{x} \in L(H)$ entonces $a \cdot \vec{x} \in L(H)$. Como $\vec{x} \in L(H)$,

$$\exists p \in \mathbb{N}, \exists \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p \in H, \exists a^1, a^2, \dots, a^p \in \mathbb{K},$$

tales que

$$\vec{x} = a^1 \vec{x}_1 + a^2 \vec{x}_2 + \dots + a^p \vec{x}_p.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} a \cdot \vec{x} &= a \cdot (a^1 \vec{x}_1 + a^2 \vec{x}_2 + \dots + a^p \vec{x}_p) \\ &= a \cdot (a^1 \vec{x}_1) + a \cdot (a^2 \vec{x}_2) + \dots + a \cdot (a^p \vec{x}_p) \\ &= (a \cdot a^1) \cdot \vec{x}_1 + (a \cdot a^2) \cdot \vec{x}_2 + \dots + (a \cdot a^p) \cdot \vec{x}_p. \end{aligned}$$

Aprovechamos las propiedades de V como espacio vectorial y el hecho de que $H \subset V$ (hemos utilizado la propiedad distributiva). Como $\forall a \cdot a^i \in \mathbb{K}$ y $\vec{x}_i \in H$, $a \cdot \vec{x}$ se trata de una combinación lineal y, por tanto, $a \cdot \vec{x} \in L(H)$.

- (3) Si $\vec{x} \in L(H)$, tenemos que $\exists p \in \mathbb{N}, \exists \vec{x}_i \in H, \exists a^i \in \mathbb{K}$ con $1 \leq i \leq p$, tales que

$$\vec{x} = a^1 \vec{x}_1 + a^2 \vec{x}_2 + \dots + a^p \vec{x}_p.$$

Como $H \subset L$, $\vec{x}_i \in L$ y, como L es un subespacio vectorial, tenemos que $a^1 \vec{x}_1 + a^2 \vec{x}_2 + \dots + a^p \vec{x}_p \in L$, por lo que $\vec{x} \in L$. □

Definición 1.4. $L(H)$ es el subespacio generado por H o H es un sistema de generadores de $L(H)$. Si $L(H) = V$ diremos que H es sistema de generadores.

1.2. Bases de un espacio vectorial

Definición 1.5. V es **finito generado** si existe un sistema de generadores formado por un número finito de vectores. Es decir, si $\exists \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\} = H$ tal que $V = L(H)$, es decir, $\exists \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\} \subset V$ tales que $\forall \vec{x} \in V, \exists a^1, a^2, \dots, a^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = a^1 \vec{x}_1 + a^2 \vec{x}_2 + \dots + a^p \vec{x}_p.$$

Definición 1.6. Una familia de vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ es **linealmente dependiente** si uno de ellos es combinación lineal de los otros.

$$\exists i = 1, 2, \dots, p, \vec{x}_i \in L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}).$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \exists i = 1, 2, \dots, p, \exists a^1, a^2, \dots, a^{i-1}, a^{i+1}, \dots, a^p \in \mathbb{K} \\ \vec{x}_i = a^1 \vec{x}_1 + \dots + a^{i-1} \vec{x}_{i-1} + a^{i+1} \vec{x}_{i+1} + \dots + a^p \vec{x}_p. \end{aligned}$$

Es decir, si $\vec{x}_j = \vec{0}$, $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ es dependiente, pues

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{x}_1 + \dots + 0 \cdot \vec{x}_{j-1} + 0 \cdot \vec{x}_{j+1} + \dots + 0 \cdot \vec{x}_p.$$

Teorema 1.4. Sea $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\} \subset V$. Son linealmente dependientes si y solo si $\exists a^1, a^2, \dots, a^p \in \mathbb{K}$ no todos nulos tales que

$$\vec{0} = a^1 \vec{x}_1 + a^2 \vec{x}_2 + \dots + a^p \vec{x}_p.$$

Demostración. (i) Supongamos que la familia es linealmente dependiente. Por tanto, $\exists i = 1, \dots, p$ tal que $\vec{x}_i \in L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_p\})$. Por tanto, existen $a^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x}_i = a^1 \vec{x}_1 + \dots + a^{i-1} \vec{x}_{i-1} + a^{i+1} \vec{x}_{i+1} + \dots + a^p \vec{x}_p.$$

Si sumamos el opuesto a ambos lados tenemos que

$$\vec{0} = \vec{x}_i - \vec{x}_i = a^1 \vec{x}_1 + \dots + a^{i-1} \vec{x}_{i-1} + (-1) \vec{x}_i + a^{i+1} \vec{x}_{i+1} + \dots + a^p \vec{x}_p.$$

(ii) Suponemos que $\exists a^1, a^2, \dots, a^p \in \mathbb{K}$ no todos nulos tales que

$$a^1 \vec{x}_1 + a^2 \vec{x}_2 + \dots + a^p \vec{x}_p = \vec{0}.$$

Como no todos los escalares son nulos, podemos encontrar $a^i \neq 0$, y a^i tiene inversa.

$$\therefore (-1) a^i \vec{x}_i = a^1 \vec{x}_1 + a^2 \vec{x}_2 + \dots + a^{i-1} \vec{x}_{i-1} + a^{i+1} \vec{x}_{i+1} + \dots + a^p \vec{x}_p.$$

Aprovechando las propiedades:

$$\vec{x}_i = \frac{-a^1}{a^i} \vec{x}_1 + \cdots + \frac{-a^{i-1}}{a^i} \vec{x}_{i-1} + \frac{-a^{i+1}}{a^i} \vec{x}_{i+1} + \cdots + \frac{-a^p}{a^i} \vec{x}_p.$$

□

Corolario 1.1. La familia de vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\} \subset V$ es **linealmente independiente** si y solamente si

$$a^1 \vec{x}_1 + a^2 \vec{x}_2 + \cdots + a^p \vec{x}_p = \vec{0} \Rightarrow a^1 = a^2 = \cdots = a^p = 0.$$

Teorema 1.5. Una familia de vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ es linealmente independiente si y solamente si $\forall \vec{x} \in L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}), \exists! a^1, a^2, \dots, a^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = a^1 \vec{x}_1 + a^2 \vec{x}_2 + \cdots + a^p \vec{x}_p.$$

Demostración. (i) Si $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ es linealmente independiente y sea $\vec{x} \in L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\})$. Supongamos que existen otros escalares $b^1, b^2, \dots, b^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = b^1 \vec{x}_1 + \cdots + b^p \vec{x}_p.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \vec{x} - \vec{x} = (a^1 \vec{x}_1 + \cdots + a^p \vec{x}_p) - (b^1 \vec{x}_1 + \cdots + b^p \vec{x}_p) \\ &= (a^1 - b^1) \vec{x}_1 + \cdots + (a^p - b^p) \vec{x}_p. \end{aligned}$$

Como se trata de una familia linealmente independiente, tenemos que $\forall i, 1 \leq i \leq p$,

$$a^i - b^i = 0 \iff a^i = b^i.$$

(ii) Recíprocamente, tenemos que si $a^1, a^2, \dots, a^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$a^1 \vec{x}_1 + \cdots + a^p \vec{x}_p = \vec{0}.$$

Esto puede pasar si $a^1 = a^2 = \cdots = a^p = 0$. Como a^i son únicos, tenemos que si hay alguno no nulo, la combinación lineal no va a ser nula. Por tanto, será linealmente independiente. □

Definición 1.7 (Base). Una **base** de un espacio vectorial V es un sistema de generadores linealmente independientes.

Corolario 1.2. Una familia de vectores $B \subset V$ es una base de E si y solo si $\forall \vec{x} \in V$ se expresa de manera única como combinación lineal de elementos de B .

Teorema 1.6. Si $V \neq \{0\}$, es finitamente generado, entonces $\exists \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ es base de V . Es decir, todo espacio vectorial $V \neq \{0\}$ generado por un número finito de vectores tiene una base finita.

Demostración. Sea $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ un sistema de generadores de V . Si $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ son linealmente independientes, forman una base (hemos ganado). Sino, uno se puede expresar como combinación lineal de los otros, por lo que $\exists i = 1, 2, \dots, p$ tal que $\vec{x}_i \in L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_p\})$, por lo que $\exists b^1, b^2, \dots, b^p \in \mathbb{K}$

$$\vec{x}_i = b^1 \vec{x}_1 + b^2 \vec{x}_2 + \dots + b^{i-1} \vec{x}_{i-1} + b^{i+1} \vec{x}_{i+1} + \dots + b^p \vec{x}_p.$$

Dado que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ es un sistema de generadores de V , $\forall \vec{x} \in V, \exists a^1, a^2, \dots, a^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\begin{aligned} \vec{x} &= a^1 \vec{x}_1 + a^2 \vec{x}_2 + \dots + a^p \vec{x}_p \\ &= a^1 \vec{x}_1 + \dots + a^{i-1} \vec{x}_{i-1} + a^i (b^1 \vec{x}_1 + b^2 \vec{x}_2 + \dots + b^{i-1} \vec{x}_{i-1} + b^{i+1} \vec{x}_{i+1} + \dots + b^p \vec{x}_p) + a^{i+1} \vec{x}_{i+1} + \dots + a^p \vec{x}_p \\ &= (a^1 + a^i b^1) \vec{x}_1 + \dots + (a^{i-1} + a^i b^{i-1}) \vec{x}_{i-1} + (a^i b^{i+1} + a^{i+1}) \vec{x}_{i+1} + \dots + (a^i b^p + a^p) \vec{x}_p. \end{aligned}$$

Por tanto, el conjunto $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\} - \{\vec{x}_i\}$ también es un sistema de generadores de V . Si $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_{i+1}, \vec{x}_p\}$ es linealmente independiente, es un sistema de generadores de V . Si es linealmente dependiente repetimos el proceso hasta tener $\{\vec{x}_i\}$, que no puede ser 0, porque $V \neq 0$, y $\{\vec{x}_i\}$ es linealmente independiente. \square

Observación. De esto podemos concluir que todo sistema de generadores contiene una base.

Teorema 1.7 (Teorema de Steinitz). Sea $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_p\} \subset V$ una base de V y sea $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q\} \subset V$ linealmente independiente, entonces $q \leq p$ y se puede obtener una nueva base sustituyendo q de los vectores \vec{y}_i por $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q\}$.

Demostración. Se trata de introducir uno por uno los vectores $\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_p\}$ por los vectores de la base dada. Sea $\vec{x}_1 \in V$, entonces $\exists a^1, a^2, \dots, a^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x}_1 = a^1 \vec{y}_1 + a^2 \vec{y}_2 + \dots + a^p \vec{y}_p = \sum_{i=1}^p a^i \vec{y}_i.$$

Existe al menos un $a^i \neq 0$ (porque \vec{x}_1 no es nulo). Sea $a^1 \neq 0$.

$$\vec{y}_1 = (a^1)^{-1} \vec{x}_1 - \sum_{i=2}^p (a^1)^{-1} a^i \vec{y}_i$$

Entonces, $\forall x \in V, \exists b^1, b^2, \dots, b^p \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}\vec{x} &= b^1 \vec{y}_1 + b^2 \vec{y}_2 + \dots + b^p \vec{y}_p \\ &= b^1 \left(\frac{1}{a^1} \vec{x}_1 + \left(-\frac{a^2}{a^1} \right) \vec{y}_2 + \dots + \left(-\frac{a^p}{a^1} \right) \vec{y}_p \right) + b^2 \vec{y}_2 + \dots + b^p \vec{y}_p \\ &= \frac{b^1}{a^1} \vec{x}_1 + \left(b^1 \left(-\frac{a^2}{a^1} \right) + b^2 \right) \vec{y}_2 + \dots + \left(b^1 \left(-\frac{a^p}{a^1} \right) + b^p \right) \vec{y}_p.\end{aligned}$$

Hemos llegado a la conclusión de que $\{\vec{x}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_p\}$ forman un sistema de generadores de V . Además, son linealmente independientes, pues

$$\begin{aligned}\vec{0} &= b^1 \vec{x}_1 + b^2 \vec{y}_2 + \dots + b^p \vec{y}_p \Rightarrow b^1 \left(\sum_{i=1}^p a^i \vec{y}_i \right) + b^2 \vec{y}_2 + \dots + b^p \vec{y}_p = \vec{0} \\ &= b^1 a^1 \vec{y}_1 + \sum_{i=2}^p (b^1 a^i + b^i) \vec{y}_i = \vec{0} \\ &\Rightarrow b^1 a^1 = 0, \quad b^1 a^i + b^i = 0, \quad i \geq 2.\end{aligned}$$

pues $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_p\}$ son una base. Como $a^1 \neq 0$, tenemos que $b^1 = b^i = 0$. Por tanto, $\{\vec{x}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_p\}$ es una base de V .

Supongamos que $i < \min(p, q)$ y que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_i, \vec{y}_{i+1}, \dots, \vec{y}_p\}$ es sistema de generadores. Entonces, $\exists c^1, c^2, \dots, c^i, d^{i+1}, \dots, d^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x}_{i+1} = c^1 \vec{x}_1 + c^2 \vec{x}_2 + \dots + c^i \vec{x}_i + d^{i+1} \vec{y}_{i+1} + \dots + d^p \vec{y}_p = \sum_{j=1}^i c^j \vec{x}_j + \sum_{j=i+1}^p d^j \vec{y}_j.$$

El procedimiento anterior nos asegura que podemos sustituir \vec{x}_{i+1} por cualquier vector con coeficiente no nulo. Por tanto, tenemos que demostrar que existe un coeficiente del segundo sumatorio no nulo. Si fueran todos nulos, tendríamos que \vec{x}_{i+1} se puede expresar como combinación lineal de los vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$, esto contradice que sean linealmente independientes. \square

Corolario 1.3. Si el espacio vectorial V tiene una base finita, todas las bases de V tienen el mismo número de vectores.

Demostración. Sean $B_1 = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ y $B_2 = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_q\}$ dos bases de V . Como B_1 es una base y B_2 es un conjunto de vectores linealmente independientes, tenemos que todas las bases de V han de ser finitas. Entonces, como B_1 y B_2 son bases y, consecuentemente, linealmente independientes, tenemos que $p \leq q$ y $q \leq p$, por lo que $p = q$. \square

Definición 1.8 (Dimensión). La **dimensión** de un espacio vectorial V sobre un cuerpo \mathbb{K} es el número de elementos de sus bases, si son finitas. Si no lo son, diremos que V es de dimensión infinita.

Corolario 1.4. La dimensión de un espacio vectorial coincide con el número máximo de elementos linealmente independientes, y también con el número mínimo de generadores.

Corolario 1.5. Todo conjunto de vectores linealmente independientes puede completarse hasta obtener una base.

Lema 1.1. Si $S \subset V$ es linealmente independiente y $\vec{x} \in V$ y $\vec{x} \notin L(S)$, tenemos que la familia $S \cup \{\vec{x}\}$ es linealmente independiente.

Demostración. Sean $a, a^i \in \mathbb{K}$ y

$$a\vec{x} + a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^p\vec{x}_p = \vec{0}.$$

Si $a \neq 0$, entonces \vec{x} se puede expresar como combinación lineal de S , pero por hipótesis esto no es posible. Por tanto, debe ser que $a = 0$ y, consecuentemente, $\forall a^i = 0$, pues S es linealmente independiente. Por tanto, $S \cup \{\vec{x}\}$ también es linealmente independiente. \square

Proposición 1.1. Si V es finitamente generado y L es subespacio vectorial de V , entonces L es infinitamente generado y

$$\dim L \leq \dim V.$$

Además,

$$\dim L = \dim V \iff L = V.$$

Demostración. Si $L = \{0\}$ no hay nada que probar (no tiene bases). En caso contrario, existe $\vec{x}_1 \in L$. Si $L = L(\{\vec{x}_1\})$, tenemos que \vec{x}_1 es una base. En caso contrario, existe $\vec{x}_2 \in L$ con $\vec{x}_2 \notin L(\{\vec{x}_1\})$. Si $L = L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\})$, $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ forman una base. Sabemos que son linealmente independientes por el lema anterior. En algún momento llegaremos a que $L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\})$ forman una base, pues un corolario anterior nos dice que hay un número máximo de vectores linealmente independientes.

Además, si $\dim L = n$ y $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ es una base de L , por el teorema de Steinitz, también es una base de V . Por tanto,

$$L = L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}) = V.$$

\square

Teorema 1.8 (Teorema de aplicación de base). Sea L un subespacio vectorial de V y sea $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ una base de L . Entonces existe $\{\vec{u}_{p+1}, \vec{u}_{p+2}, \dots, \vec{u}_n\} \subset V$ tales que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p, \vec{u}_{p+1}, \vec{u}_{p+2}, \dots, \vec{u}_n\}$ son base de V .

Demostración. Si $\dim V = n$ tenemos que existe un número finito de generadores que forman una base de V , y consideramos que los vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ forman una base de L . Entonces, $p \leq n$ y, por el teorema de Steinitz, se puede obtener una nueva base sustituyendo $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ por p vectores de $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$. \square

1.3. Suma directa de subespacios.

Notación.

$$\mathcal{P}(V) = \{A : A \subset V\}.$$

$$\mathcal{L}(V) = \{L \in \mathcal{P}(V) : L \text{ es subespacio vectorial de } V\}.$$

Por tanto,

$$\mathcal{L}(V) \subset \mathcal{P}(V).$$

Teorema 1.9. $\forall I$ conjunto, $\forall i \in I$, si $L_i \in \mathcal{L}(V)$ entonces

$$\bigcap_{i \in I} L_i \in \mathcal{L}(V).$$

Es decir, la intersección de espacios vectoriales es un espacio vectorial.

Demostración. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \bigcap_{i \in I} L_i$ implica que $\vec{x}, \vec{y} \in L_i, \forall i \in I$. Como L_i son subespacios vectoriales:

$$\vec{x} + \vec{y} \in L_i, \forall i \in I \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in \bigcap_{i \in I} L_i.$$

Similarmente, si $\vec{x} \in \bigcap_{i \in I} L_i$ y $a \in \mathbb{K}$, tenemos que $\vec{x} \in L_i, \forall i \in I$. Como L_i son subespacios vectoriales, son parte estable, por lo que

$$a \cdot \vec{x} \in L_i, \forall i \in I \Rightarrow a \cdot \vec{x} \in \bigcap_{i \in I} L_i.$$

□

Observación. Sin embargo, no tiene que cumplirse necesariamente que $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}(V)$ si $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$.

Ejemplo 1. Sean $\{\vec{u}, \vec{v}\} \subset V$ linealmente independientes y $L_1 = L(\{\vec{u}\})$ y $L_2 = L(\{\vec{v}\})$ las rectas que generan. Asumamos que $\vec{u} + \vec{v} \in L_1 \cup L_2$. Sin pérdida de generalidad, $\vec{u} + \vec{v} \in L_1$. Por tanto, $\exists a \in \mathbb{K}$ tal que $\vec{u} + \vec{v} = a\vec{u}$. De esta manera,

$$(a - 1)\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}.$$

Esto es absurdo, pues hemos dicho que estos vectores son linealmente independientes.

Definición 1.9. Si $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$, definimos $L_1 + L_2$ al menor subespacio vectorial generado por la unión.

$$L_1 + L_2 = L(L_1 \cup L_2).$$

Teorema 1.10. Sean $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ y sea $L' = \{\vec{x}_1 + \vec{x}_2 : \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2\}$. Tenemos que $L' = L_1 + L_2$.

Demostración. Si $\vec{x}_1 \in L_1$, tenemos que $\vec{x}_1 = \vec{x}_1 + \vec{0} \in L'$, pues $\vec{x}_1 \in L_1$ y $\vec{0} \in L_2$. Por tanto, $L_1 \subset L'$. Similarmente, $L_2 \subset L'$. Consecuentemente, $L_1 \cup L_2 \subset L'$.

Además, tenemos que $L' \in \mathcal{L}(V)$, pues $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L'$ tenemos que $\exists \vec{x}_1, \vec{y}_1 \in L_1$ y $\exists \vec{x}_2, \vec{y}_2 \in L_2$.

$$\vec{x} + \vec{y} = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + (\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \underbrace{(\vec{x}_1 + \vec{y}_1)}_{\in L_1} + \underbrace{(\vec{x}_2 + \vec{y}_2)}_{\in L_2}.$$

Por tanto, $\vec{x} + \vec{y} \in L'$. Similarmente, si $a \in \mathbb{K}$ y $\vec{x} \in L'$ tenemos que existen $\vec{x}_1 \in L_1$ y $\vec{x}_2 \in L_2$ tales que

$$a \cdot \vec{x} = a \cdot (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \underbrace{a\vec{x}_1}_{\in L_1} + \underbrace{a\vec{x}_2}_{\in L_2}.$$

Por tanto, $a \cdot \vec{x} \in L'$. Por tanto, $L' \in \mathcal{L}(V)$.

A continuación demostramos que si $L \in \mathcal{L}(V)$ y $L_1 \cup L_2 \subset L$, entonces $L' \subset L$. Tenemos que $\forall \vec{x} \in L'$ existen $\vec{x}_1 \in L_1$ y $\vec{x}_2 \in L_2$ tales que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$. Por tanto, $\vec{x} \in L$.

$$\therefore L' \subset L.$$

Por todo ello, $L' = L_1 + L_2$. □

Teorema 1.11 (Fórmula de Grassmann). Supongamos que V es de dimensión finita, por lo que todos los conjuntos que vamos a tratar a continuación son de dimensión finita.

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

Demostración. Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$ una base de $L_1 \cap L_2$, y sea $v = \dim(L_1 \cap L_2)$. Podemos ampliar esta base hasta obtener una base de L_1 y L_2 . Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m, \vec{u}_{m+1}, \dots, \vec{u}_r\}$ una base de L_1 . Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m, \vec{v}_{m+1}, \dots, \vec{v}_s\}$ base de L_2 . Queremos ver que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m, \dots, \vec{u}_{m+1}, \dots, \vec{u}_r, \vec{v}_{m+1}, \dots, \vec{v}_s\}$ es base de $L_1 + L_2$. Primero queremos ver que es sistema de generadores. Sea $\vec{x} \in L_1 + L_2$. Entonces, existen $\vec{x}_1 \in L_1$ y $\vec{x}_2 \in L_2$ tales que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$. Como anteriormente hemos definido bases para L_1 y L_2 , tenemos que existen $a^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x}_1 = a^1 \vec{u}_1 + a^2 \vec{u}_2 + \dots + a^r \vec{u}_r.$$

Similarmente, existen $b^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x}_2 = b^1 \vec{u}_1 + \dots + b^m \vec{u}_m + b^{r+1} \vec{v}_{r+1} + \dots + b^s \vec{v}_s.$$

Por tanto, tenemos que \vec{x} se puede expresar como combinación lineal de $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m, \vec{u}_{m+1}, \dots, \vec{u}_r, \vec{v}_{m+1}, \dots, \vec{v}_s\}$.

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \sum_{i=1}^r a^i \vec{u}_i + \sum_{i=1}^m b^1 \vec{u}_i + \sum_{i=m+1}^s b^i \vec{v}_i.$$

Por tanto, es sistema de generadores, ahora tenemos que ver que son linealmente independientes. Sean $a^i, b^j \in \mathbb{K}$ tales que

$$a^1 \vec{u}_1 + a^2 \vec{u}_2 + \cdots + a^m \vec{u}_m + \cdots + a^r \vec{u}_{r+1} + \cdots + \cdots + b^{m+1} \vec{v}_{m+1} + \cdots + b^s \vec{v}_s = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^r a^i \vec{u}_i + \sum_{i=m+1}^s b^i \vec{v}_i = \vec{0}.$$

Sea $\vec{y} = \sum_{i=1}^r a^i \vec{u}_i$ por lo que $\vec{y} \in L_1$. Entonces,

$$-\vec{y} = \sum_{i=m+1}^s b^i \vec{v}_i \in L_2.$$

Por tanto, $\vec{y} \in L_1 \cap L_2$. Entonces, \vec{y} se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base de la intersección. Es decir, existen $c^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{y} = c^1 \vec{u}_1 + c^2 \vec{u}_2 + \cdots + c^m \vec{u}_m.$$

Entonces,

$$\vec{0} = \vec{y} - \vec{y} = \sum_{j=1}^m c^j \vec{u}_j + \sum_{i=m+1}^s b^i \vec{v}_i = \vec{0}.$$

Como la base de L_2 es linealmente independiente (porque es una base), tenemos que $c^1 = c^2 = \cdots = c^r = b^1 = \cdots = b^q = 0$. Consecuentemente, $\sum_{i=1}^r a^i \vec{u}_i = \vec{0}$ y, dado que $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r\}$ es base de L_1 , tenemos que $a^i = 0, \forall i = 1, \dots, r$. Por tanto, hemos visto que el conjunto que estábamos estudiando es base.

Esta base tiene dimensión $r + s = r + (s + m) - m$. □

Si $L_1 \cap L_2 = \{\vec{0}\}$, tenemos que $\dim L_1 + \dim L_2 = \dim (L_1 + L_2)$.

Definición 1.10. Sean $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ su suma es directa si $L_1 \cap L_2 = \{\vec{0}\}$ y se escribe de la siguiente manera:

$$L_1 \oplus L_2.$$

Proposición 1.2. Sean $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$. Entonces

$$L_1 \oplus L_2 \iff \forall \vec{x} \in L_1 + L_2, \exists! \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2, \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2.$$

Demostración. (i) Supongamos que $L_1 \oplus L_2$. Asumimos que existen, $\vec{x}_1, \vec{y}_1 \in L_1$ y $\vec{x}_2, \vec{y}_2 \in L_2$ tales que si $\vec{x} \in L_1 + L_2$ tenemos que

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \vec{y}_1 + \vec{y}_2.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\vec{0} &= (\vec{x}_1 - \vec{y}_1) + (\vec{x}_2 - \vec{y}_2). \\ \Rightarrow \vec{x}_1 - \vec{y}_1 &= \vec{y}_2 - \vec{x}_2\end{aligned}$$

Consecuentemente, $\vec{x}_1 - \vec{y}_1, \vec{y}_2 - \vec{x}_2 \in L_1 \cap L_2$, por tanto, $\vec{x}_1 - \vec{y}_1 = \vec{0} \iff \vec{x}_1 = \vec{y}_1$. Similarmente, $\vec{y}_2 = \vec{x}_2$.

(ii) Suponemos que $\forall \vec{x} \in L_1 + L_2, \exists! \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2, \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$. Queremos ver que $L_1 \cap L_2 = \{\vec{0}\}$. Sea $\vec{x} \in L_1 \cap L_2$. Tenemos que $\vec{x} = \vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x}$. Tenemos que $\vec{0} \in L_1 \cap L_2$. Como la expresión de \vec{x} ha de ser única, tenemos que $\vec{x} = \vec{0}$, por lo que $L_1 \cap L_2 = \{\vec{0}\}$. \square

Tenemos que si $L_1, L_2, \dots, L_k \in \mathcal{L}(V)$,

$$(L_1 + L_2) + L_3 = \{(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + \vec{x}_3 : \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2, \vec{x}_3 \in L_3\} = L_1 + (L_2 + L_3).$$

Generalmente, esta suma es asociativa, es decir se puede escribir

$$L_1 + L_2 + \dots + L_k = \{\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_k : \vec{x}_i \in L_i\}.$$

Definición 1.11. Diremos que la suma $L_1 + L_2 + \dots + L_k$ es directa si $\forall \vec{x} \in L_1 + L_2 + \dots + L_k, \exists! \vec{x}_i \in L_i$ tales que $\vec{x} = \sum_{i=1}^k \vec{x}_i$. Esto se denotará de la siguiente manera:

$$L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_k.$$

Proposición 1.3. Si L_1, \dots, L_k , entonces $L_1 \oplus \dots \oplus L_k$ si y solo si $\forall i = 1, \dots, k$,

$$L_i \cap (L_1 + L_2 + \dots + L_{i-1} + L_{i+1} + \dots + L_k) = \{\vec{0}\}.$$

Demostración. (i) Demostramos la primera implicación. Supongamos que $\forall i = 1, \dots, k$, y sea $\vec{x} \in L_i \cap (L_1 + \dots + L_{i-1} + L_{i+1} + \dots + L_k)$. Queremos decir que $\vec{x} = \vec{0}$. Tenemos que, dado que $\vec{x} \in L_i$:

$$\vec{x} = \vec{0} + \dots + \vec{0} + \vec{x}_i + \vec{0} + \dots + \vec{0}.$$

Como $\vec{x} \in L_i \cap (L_1 + \dots + L_{i-1} + L_{i+1} + \dots + L_k)$, tenemos que $\vec{x} \in L_1 + \dots + L_{i-1} + L_{i+1} + \dots + L_k$:

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_{i-1} + \vec{x}_{i+1} + \dots + \vec{x}_k.$$

Como $L_1 \oplus \dots \oplus L_k$, tenemos que la expresión de \vec{x} es única, por lo que $\vec{x} = \vec{0}$.

(ii) Demostramos la siguiente implicación. Asumimos que

$$\forall i = 1, \dots, k; L_i \cap (L_1 + L_2 + \dots + L_{i-1} + L_{i+1} + \dots + L_k) = \{\vec{0}\}.$$

Sea

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^k \vec{x}_i = \sum_{i=1}^k \vec{y}_i.$$

Con $\vec{x}_i, \vec{y}_i \in L_i$, tenemos que

$$\vec{0} = (\vec{x}_1 - \vec{y}_1) + \dots + (\vec{x}_i + \vec{y}_i) + \dots + (\vec{x}_k + \vec{y}_k).$$

$$\therefore \vec{y}_i - \vec{x}_i = (\vec{x}_1 - \vec{y}_1) + \dots + (\vec{x}_{i-1} - \vec{y}_{i-1}) + (\vec{x}_{i+1} - \vec{y}_{i+1}) + \dots + (\vec{x}_k - \vec{y}_k).$$

Por lo que $\vec{y}_i - \vec{x}_i = \vec{0}, \forall i = 1, \dots, k$. Si esto no fuera cierto para algún $\vec{x}_j - \vec{y}_j$, podríamos despejarlo y tendríamos que está en la intersección pero a la vez no es $\vec{0}$, lo cual contradice nuestra hipótesis. □

Definición 1.12. $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ son **complementarios** si $L_1 \oplus L_2 = V$.

$$L_1 \oplus L_2 = V \iff \forall \vec{x} \in V, \exists! \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2, \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2.$$

Teorema 1.12. Sea $L \in \mathcal{L}(V)$, entonces existe $L' \in \mathcal{L}(V)$ tal que $L \oplus L' = V$.

Demostración. Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$ una base de L y sea $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \vec{u}_{r+1}, \dots, \vec{u}_n\}$ base de V . La manera de ampliar una base no es única. Sea L' el subespacio generado por los vectores que he añadido a la base de L para formar la base de V , es decir,

$$L' = L(\{\vec{u}_{r+1}, \dots, \vec{u}_n\}).$$

Tenemos que $\forall \vec{x} \in V$, existen $a^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = a^1 \vec{u}_1 + \dots + a^r \vec{u}_r + a^{r+1} \vec{u}_{r+1} + \dots + a^n \vec{u}_n.$$

Sea $\vec{x}_1 = a^1 \vec{u}_1 + \dots + a^r \vec{u}_r \in L$ y $\vec{x}_2 = a^{r+1} \vec{u}_{r+1} + \dots + a^n \vec{u}_n \in L'$. Vamos a ver que $L \cap L' = \{\vec{0}\}$.

Sabemos que $\{\vec{0}\} \subset L \cap L'$. Si $\vec{x} \in L \cap L'$. Entonces existen $a^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = a^1 \vec{u}_1 + \dots + a^r \vec{u}_r.$$

Como $\vec{x} \in L'$, existen $a^j \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = a^{r+1} \vec{u}_{r+1} + \dots + a^n \vec{u}_n.$$

Entonces,

$$\vec{0} = (a^1 \vec{u}_1 + \dots + a^r \vec{u}_r) - (a^{r+1} \vec{u}_{r+1} + \dots + a^n \vec{u}_n).$$

Esto es una combinación lineal de los elementos de una base que me da el vector nulo. Como las bases son linealmente independientes, tenemos que

$$a^1 = \dots = a^r = a^{r+1} = \dots = a^n = 0.$$

Por tanto, $\vec{x} = \vec{0}$. Consecuentemente, la suma es directa. □

1.4. Espacio vectorial cociente

Definición 1.13. Definimos la relación de equivalencia:

$$\vec{x}\mathcal{R}\vec{y} \iff \vec{y} - \vec{x} \in L.$$

Si $\vec{x} \in V$,

$$[\vec{x}] = \{\vec{y} \in V : \vec{y} - \vec{x} \in L\} = \{\vec{y} \in V : \vec{y} - \vec{x} = \vec{l}\} = \{\vec{x} + \vec{l} : \vec{l} \in L\} = \vec{x} + L$$

Teorema 1.13. Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial. Si $\vec{x}, \vec{y} \in V$ decimos que $\vec{x}\mathcal{R}\vec{y}$ si $\vec{x} - \vec{y} \in L$, donde $L \in \mathcal{L}(V)$. Tenemos que R es una relación de equivalencia en V .

Demostración. (i) Reflexiva. Si $\vec{x} \in V$, tenemos que

$$\vec{x} - \vec{x} \in \vec{0} \in L.$$

(ii) Simétrica. Si $\vec{x}, \vec{y} \in V$ tal que $\vec{x}\mathcal{R}\vec{y}$, tenemos que

$$\vec{x} - \vec{y} \in L \iff \vec{y} - \vec{x} \in L.$$

Pues $\vec{y} - \vec{x} = (-1)(\vec{x} - \vec{y}) \in L$.

(iii) Transitiva. Si $\vec{x}\mathcal{R}\vec{y}$ y $\vec{y}\mathcal{R}\vec{z}$, tenemos que $\vec{x} - \vec{y} \in L$ y $\vec{y} - \vec{z} \in L$. Como L es espacio vectorial tenemos que:

$$(\vec{x} - \vec{y}) + (\vec{y} - \vec{z}) = \vec{x} - \vec{z} \in L.$$

□

Si $\vec{x} \in V$, tenemos que

$$[\vec{x}] = \{\vec{y} \in V : \vec{y}\mathcal{R}\vec{x}\} = \{\vec{y} \in V : \vec{y} - \vec{x} \in L\} = \{\vec{y} \in V : \exists \vec{l} \in L, \vec{y} - \vec{x} = \vec{l}\} = \{\vec{x} + \vec{l} : \vec{l} \in L\} = \vec{x} + L.$$

Definición 1.14 (Espacio cociente).

$$V/R = V/L = \{\vec{x} + L : \vec{x} \in V\}.$$

En V/L defino una suma y un producto por escalares:

$$\begin{aligned} + : V/L \times V/L &\rightarrow V/L \\ (\vec{x} + L, \vec{y} + L) &\rightarrow (\vec{x} + L) + (\vec{y} + L) = (\vec{x} + \vec{y}) + L. \end{aligned}$$

Si $\vec{x} + L = \vec{x}' + L$ y $\vec{y} + L = \vec{y}' + L$. Tenemos que ver que si $\vec{x} + L = \vec{y} + L$, entonces $\vec{x}' + L = \vec{y}' + L$.

¹ Tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \vec{x} + \vec{l} \quad \text{y} \quad \vec{y}' = \vec{y} + \vec{l}', \quad \text{con } \vec{l}, \vec{l}' \in L. \\ \vec{x}' + \vec{y}' &= (\vec{x} + \vec{l}) + (\vec{y} + \vec{l}') = (\vec{x} + \vec{y}) + (\vec{l} + \vec{l}'). \end{aligned}$$

Entonces,

$$(\vec{x}' + \vec{y}') - (\vec{x} + \vec{y}) = \vec{l} + \vec{l}' \in L.$$

Entonces, $(\vec{x} + \vec{y}) R (\vec{x}' + \vec{y}')$, por lo que sus clases de equivalencia son iguales.

Teorema 1.14. $(V/L, +)$ es un grupo abeliano.

Demostración. (i) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$,

$$(\vec{x} + L) + (\vec{y} + L) = (\vec{x} + \vec{y}) + L = (\vec{y} + \vec{x}) + L.$$

(ii) $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$,

$$((\vec{x} + L) + (\vec{y} + L)) + (\vec{z} + L) = ((\vec{x} + \vec{y}) + L) + (\vec{z} + L) = ((\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}) + L = (\vec{x} + L) + ((\vec{y} + L) + (\vec{z} + L)).$$

(iii) Si consideramos la clase $\vec{0} + L$, tenemos que $\forall \vec{x} \in V$,

$$(\vec{0} + L) + (\vec{x} + L) = (\vec{0} + \vec{x}) + L = \vec{x} + L.$$

(iv) Si $\vec{x} \in V$, el opuesto será, $-(\vec{x} + L) = (-\vec{x}) + L$.

$$(\vec{x} + L) + (-\vec{x} + L) = (\vec{x} + L) + ((-\vec{x}) + L) = (\vec{x} - \vec{x}) + L = \vec{0} + L.$$

□

El producto por escalares está definido así:

$$\begin{aligned} \cdot \mathbb{K} \times V/L &\rightarrow V/L \\ \forall a \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in V &a \cdot (\vec{x} + L) = (a\vec{x}) + L. \end{aligned}$$

Queremos ver que se trata de una aplicación. Si $\vec{x}' + L = \vec{x} + L$, queremos ver que $(a\vec{x}') + L = (a\vec{x}) + L$. Tenemos que $\vec{x}' - \vec{x} \in L$, por lo que $a\vec{x}' - a\vec{x} \in L$. Por tanto,

$$(a\vec{x}) + L = (a\vec{x}') + L.$$

Observación 1.1. Estas operaciones hacen V/L un espacio vectorial sobre \mathbb{K} .

¹El objetivo, tanto en la suma como en el producto por escalares, es ver que realmente se trata de una aplicación, es decir, si cojo $[\vec{x}] = [\vec{x}']$ y $[\vec{y}] = [\vec{y}']$, me tiene que dar que $[\vec{x} + \vec{y}] = [\vec{x}' + \vec{y}']$.

Teorema 1.15. La dimensión del espacio vectorial V/L se puede expresar como:

$$\dim(V/L) = \dim(V) - \dim(L).$$

Demostración. Sea $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r\}$ base de L y sea $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \dots, \vec{u}_n\}$ una base de V . Si $i = 1, \dots, r$, tenemos que

$$\vec{u}_i = \vec{u}_i - \vec{0} \in L \Rightarrow \vec{u}_i + L = \vec{0} + L.$$

Vamos a demostrar que $\{\vec{u}_{r+1} + L, \dots, \vec{u}_n + L\}$ base de V/L . Primero vemos que es un sistema de generadores. Si $\vec{x} \in V$, queremos ver que la clase de \vec{x} se puede expresar como combinación lineal de estas clases. Existen $a^j \in \mathbb{K}$ tales que:

$$\vec{x} = \underbrace{a^1 \vec{u}_1 + \dots + a^r \vec{u}_r}_{\in L} + a^{r+1} \vec{u}_{r+1} + \dots + a^n \vec{u}_n.$$

Entonces, \vec{x} está relacionado con $a^{r+1} \vec{u}_{r+1} + \dots + a^n \vec{u}_n$. Por tanto,

$$\vec{x} + L = (a^{r+1} \vec{u}_{r+1} + \dots + a^n \vec{u}_n) + L = a^{r+1} (\vec{u}_{r+1} + L) + \dots + a^n (\vec{u}_n + L).$$

Por tanto, $\{\vec{u}_{r+1} + L, \dots, \vec{u}_n + L\}$ es un sistema de generadores de V/L . Ahora tenemos que ver que son linealmente independientes.

$$b^{r+1} (\vec{u}_{r+1} + L) + \dots + b^n (\vec{u}_n + L) = \vec{0} + L.$$

Tenemos que

$$(b^{r+1} \vec{u}_{r+1} + \dots + b^n \vec{u}_n) + L = \vec{0} + L.$$

Entonces,

$$b^{r+1} \vec{u}_{r+1} + \dots + b^n \vec{u}_n - \vec{0} \in L.$$

Entonces, podemos escribir la expresión anterior como combinación lineal de la base de L :

$$b^{r+1} \vec{u}_{r+1} + \dots + b^n \vec{u}_n = b^1 \vec{u}_1 + \dots + b^r \vec{u}_r.$$

$$\Rightarrow (-b^1) \vec{u}_1 + (-b^2) \vec{u}_2 + \dots + (-b^r) \vec{u}_r + \dots + b^n \vec{u}_n = \vec{0}.$$

Dado que $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \dots, \vec{u}_n\}$ es una base de V , $b^1 = b^2 = \dots = b^r = \dots = b^n = 0$. □

Observación 1.2. Podemos formar la base de un espacio cociente V/L a partir de la expansión de la base de L para obtener una base de V .

Capítulo 2

Aplicaciones Lineales

Definición 2.1 (Aplicación Lineal). Sean V y V' son espacios vectoriales sobre \mathbb{K} . Una aplicación $f : V \rightarrow V'$ es lineal si

(a) $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}), \forall \vec{x}, \vec{y} \in V.$

(b) $f(a\vec{x}) = af(\vec{x}), \forall a \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in V.$

Definición 2.2. Un **monomorfismo** de V en V' es una aplicación lineal inyectiva. Un **epimorfismo** es una aplicación lineal sobreyectiva. Un **isomorfismo** es una aplicación lineal biyectiva (es homomorfismo y epimorfismo a la vez).

Ejemplo 2. (a) Tenemos que $L \in \mathcal{L}(V),$

$$\begin{aligned} i : L &\rightarrow V \\ \vec{x} &\rightarrow \vec{x}. \end{aligned}$$

Esta aplicación es un monomorfismo.

(b) Si $L \in \mathcal{L}(V),$ la aplicación

$$\begin{aligned} p : V &\rightarrow V/L \\ \vec{x} &\rightarrow \vec{x} + L \end{aligned}$$

Es un epimorfismo.

(c) Sean $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ una base de V , la aplicación

$$\begin{aligned} f : V &\rightarrow \mathbb{K}^n \\ \vec{x} &\rightarrow (a^1, \dots, a^n). \end{aligned}$$

Donde, $\vec{x} = a^1\vec{u}_1 + \dots + a^n\vec{u}_n$. Entonces f es un isomorfismo.

Proposición 2.1. Sea $f : V \rightarrow V'$ una aplicación lineal.

(a) Si $L \in \mathcal{L}(V)$

$$f(L) = \{f(\vec{x}) \in V' : \vec{x} \in L\} \in \mathcal{L}(V').$$

(b) $f(\vec{0}) = \vec{0}$ y $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$.

(c) Si $L' \in \mathcal{L}(V')$,

$$f^{-1}(L') = \{\vec{x} \in V : f(\vec{x}) \in L'\} \in \mathcal{L}(V).$$

(d) $0 : V \rightarrow V'$ tal que $\vec{x} \rightarrow \vec{0}$ es una aplicación lineal.

Demostración. (a) Queremos ver que $\forall \vec{x}', \vec{y}' \in f(L) \Rightarrow \exists \vec{x}, \vec{y} \in L, f(\vec{x}) = \vec{x}'$ y $f(\vec{y}) = \vec{y}'$. Tenemos que ver que la suma y el producto por escalares está bien definidas.

$$\vec{x}' + \vec{y}' = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = f(\vec{x} + \vec{y}) \in f(L).$$

Similarmente, para el producto por escalares, si $a \in \mathbb{K}$,

$$a\vec{x}' = af(\vec{x}) = f(a\vec{x}) \in f(L).$$

(b) Tenemos que $f(\vec{0}) = f(0 \cdot \vec{x}) = 0f(\vec{x}) = \vec{0}$. Similarmente,

$$f(-\vec{x}) = f((-1)\vec{x}) = -f(\vec{x}).$$

Otra demostración es:

$$f(\vec{x}) + f(-\vec{x}) = f(\vec{x} + (-\vec{x})) = f(\vec{0}) = \vec{0}.$$

(c) Sean $\vec{x}, \vec{y} \in f^{-1}(L')$, entonces $f(\vec{x}), f(\vec{y}) \in L'$. Como L' es subespacio vectorial,

$$f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \in L'.$$

Por tanto,

$$f(\vec{x} + \vec{y}) \in L' \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in f^{-1}(L').$$

Para el producto por escalares, si $a \in \mathbb{K}, \vec{x} \in f^{-1}(L')$,

$$f(\vec{x}) \in L' \Rightarrow af(\vec{x}) = f(a\vec{x}) \in L' \Rightarrow a\vec{x} \in f^{-1}(L').$$

□

Corolario 2.1. (a) Imagen. $\text{Im}(f) = f(V) = \{f(\vec{x}) : \vec{x} \in V\} \in \mathcal{L}(V')$.

(b) Núcleo. $\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{\vec{0}\}) = \{\vec{x} \in V : f(\vec{x}) = \vec{0}\} \in \mathcal{L}(V)$.

Demostración. Como V y $\{\vec{0}\}$ son subespacios vectoriales su imagen y preimagen, respectivamente, también serán subespacios vectoriales por la proposición 2.1. \square

Proposición 2.2. Sea $f : V \rightarrow V'$ una aplicación lineal, entonces:

(a) f es epimorfismo $\iff \text{Im}(f) = V'$.

(b) f es monomorfismo $\iff \text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$.

Demostración. (a) Es la definición de sobreyectividad.

(b) Primera implicación. Tenemos que $f(\vec{0}) = \vec{0}$. Si $f(\vec{x}) = \vec{0}$, tenemos que $\vec{x} = \vec{0}$ (porque f es inyectiva). Segunda implicación. Supongo que $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$, entonces

$$f(\vec{x}) = f(\vec{y}) \Rightarrow f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = f(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} - \vec{y} \in \text{Ker}(f) \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}.$$

\square

Proposición 2.3. Sea $f : V \rightarrow V'$ una aplicación lineal y sea $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\}$ un sistema de generadores de $L \in \mathcal{L}(V)$. Entonces $\{f(\vec{x}_1), \dots, f(\vec{x}_p)\}$ es un sistema de generadores de $f(L)$.^a

^aLa independencia lineal no se conserva en una aplicación lineal en general.

Demostración. Sea $\vec{x}' \in f(L)$, existe $\vec{x} \in L$ tal que $f(\vec{x}) = \vec{x}'$. Como $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\}$ es un sistema de generadores de L , existen $a^i \in \mathbb{K}$ escalares tales que

$$\vec{x} = a^1 \vec{x}_1 + \dots + a^p \vec{x}_p.$$

Entonces,

$$\vec{x}' = f(a^1 \vec{x}_1 + \dots + a^p \vec{x}_p) = a^1 f(\vec{x}_1) + \dots + a^p f(\vec{x}_p).$$

\square

Teorema 2.1. Sea $f : V \rightarrow V'$ una aplicación lineal. Entonces, f es un monomorfismo si y solo si $\forall p \in \mathbb{N}, \forall \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\} \subset V$ linealmente independientes, implica que $\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_p)\}$ son linealmente independientes.

Demostración. (i) Si f es un monomorfismo y sea $p \in \mathbb{N}$, con $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\} \subset V$ linealmente independientes. Cogemos $a^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$a^1 f(\vec{u}_1) + \dots + a^p f(\vec{u}_p) = \vec{0}.$$

Como f es una aplicación lineal,

$$\begin{aligned} & a^1 f(\vec{u}_1) + \cdots + a^p f(\vec{u}_p) \\ &= f(a^1 \vec{u}_1 + \cdots + a^p \vec{u}_p) \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Como f es monomorfismo, tenemos que

$$a^1 \vec{u}_1 + \cdots + a^p \vec{u}_p = \vec{0}.$$

Como estos vectores forman una base, tenemos que $a^1 = \cdots = a^p = 0$.

- (ii) Lo hacemos por contraposición. Suponemos que f no es inyectiva (no es monomorfismo), por lo que existe $\vec{x} \neq \vec{0}$ tal que $\vec{x} \in \text{Ker}(f)$. Entonces, $\{\vec{x}\}$ es linealmente independiente y $\{f(\vec{x})\} = \{\vec{0}\}$ es linealmente dependiente. □

Teorema 2.2. Sea $f : V \rightarrow V'$ una aplicación lineal. Entonces f es epimorfismo si y solo si para cada sistema de generadores $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ de V , $\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)\}$ es sistema de generadores de V' .

Demostración. Sabemos que si $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ es sistema de generadores en V , entonces $\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)\}$ será sistema de generadores de $\text{Im}(f)$. Si f es epimorfismo, entonces será base de V' y, si es base de V' es porque $\text{Im}(f) = V'$, por lo que es epimorfismo. □

Proposición 2.4. Sean $f : V \rightarrow V'$ y $g : V' \rightarrow V''$ aplicaciones lineales. Entonces, la composición $g \circ f$ también es lineal.

Demostración. Sean $\vec{x}, \vec{y} \in V$, tenemos que

$$g(f(\vec{x} + \vec{y})) = g(f(\vec{x}) + f(\vec{y})) = g(f(\vec{x})) + g(f(\vec{y})).$$

Entonces, $g \circ f$ es lineal respecto a la suma. Similarmente, si $a \in \mathbb{K}, \vec{x} \in V$ tenemos que

$$g(f(a\vec{x})) = g(af(\vec{x})) = ag(f(\vec{x})).$$

Por tanto, $g \circ f$ es una aplicación lineal. □

Proposición 2.5. Sea $f : V \rightarrow V'$ un isomorfismo (lineal y biyectiva) ^a. Sabemos que existe $f^{-1} : V' \rightarrow V$. Entonces, f^{-1} es isomorfismo.

^aUna función es biyectiva si y sólo si tiene inversa.

Demostración. Solo tenemos que demostrar que es aplicación lineal, porque inversa de una biyección también es biyección. Si $\forall \vec{x}', \vec{y}' \in V'$, como f es biyectiva, $\exists! \vec{x}, \vec{y} \in V$ tales que $\vec{x}' = f(\vec{x}) \iff \vec{x} = f^{-1}(\vec{x}')$ y $\vec{y}' = f(\vec{y}) \iff \vec{y} = f^{-1}(\vec{y}')$. Entonces,

$$f^{-1}(\vec{x}' + \vec{y}') = f^{-1}(f(\vec{x}) + f(\vec{y})) = f^{-1}(f(\vec{x} + \vec{y})) = \vec{x} + \vec{y} = f^{-1}(\vec{x}') + f^{-1}(\vec{y}').$$

Similarmente, si $a \in \mathbb{K}$ y $\vec{x}' \in V'$, $\exists! \vec{x} \in V$ tal que $f(\vec{x}) = \vec{x}' \iff f^{-1}(\vec{x}') = \vec{x}$. Entonces tenemos que,

$$f^{-1}(a\vec{x}') = f^{-1}(af(\vec{x})) = f^{-1}(f(a\vec{x})) = a\vec{x} = af^{-1}(\vec{x}').$$

□

Teorema 2.3. Sea $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ una base de V y sean $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \subset V'$. Entonces, $\exists! f : V \rightarrow V'$ lineal tal que $f(\vec{u}_i) = \vec{v}_i$.

Demostración. (i) Primero demostramos la unicidad, es decir, asumimos que existe y demostramos que debe ser única. Entonces, asumimos que existe $f : V \rightarrow V'$ lineal tal que $f(\vec{u}_i) = \vec{v}_i$, $\forall i = 1, \dots, n$. Sea $\vec{x} \in V$, entonces existen $a^i \in \mathbb{K}$ únicos tales que

$$\vec{x} = a^1 \vec{u}_1 + \dots + a^n \vec{u}_n.$$

Entonces,

$$f(\vec{x}) = f(a^1 \vec{u}_1 + \dots + a^n \vec{u}_n) = a^1 f(\vec{u}_1) + \dots + a^n f(\vec{u}_n) = a^1 \vec{v}_1 + \dots + a^n \vec{v}_n.$$

Si existiese otra función $g : V \rightarrow V'$ tal que $g(\vec{u}_i) = \vec{v}_i$, $\forall i = 1, \dots, n$, tendríamos que $f(\vec{x}) = g(\vec{x})$, $\forall \vec{x} \in V$.

(ii) Ahora demostramos la existencia. Sea $f : V \rightarrow V'$ la aplicación $f(\vec{x}) = x^1 \vec{v}_1 + \dots + x^n \vec{v}_n$, donde $\vec{x} = x^1 \vec{u}_1 + \dots + x^n \vec{u}_n$. Tenemos que demostrar que esta aplicación es lineal. Si $\vec{x}, \vec{y} \in V$ queremos ver que $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$. Tenemos que

$$\begin{aligned} f(\vec{x} + \vec{y}) &= f((x^1 \vec{u}_1 + \dots + x^n \vec{u}_n) + (y^1 \vec{u}_1 + \dots + y^n \vec{u}_n)) \\ &= f((x^1 + y^1) \vec{u}_1 + \dots + (x^n + y^n) \vec{u}_n) \\ &= (x^1 + y^1) \vec{v}_1 + \dots + (x^n + y^n) \vec{v}_n \\ &= (x^1 \vec{v}_1 + \dots + x^n \vec{v}_n) + (y^1 \vec{v}_1 + \dots + y^n \vec{v}_n) \\ &= f(\vec{x}) + f(\vec{y}). \end{aligned}$$

Similarmente,

$$f(a\vec{x}) = f(a(x^1 \vec{u}_1 + \dots + x^n \vec{u}_n)) = f(ax^1 \vec{u}_1 + \dots + ax^n \vec{u}_n) = af(\vec{x}).$$

□

Podemos ver que

$$f(\vec{u}_i) = f(0 \cdot \vec{u}_1 + \dots + 0 \cdot \vec{u}_{i-1} + 1 \cdot \vec{u}_i + 0 \cdot \vec{u}_{i+1} + \dots + 0 \cdot \vec{u}_n) = 0 \cdot \vec{v}_1 + \dots + 1 \cdot \vec{v}_i + \dots + 0 \cdot \vec{v}_n = \vec{v}_i.$$

Corolario 2.2. Sea $f : V \rightarrow V'$ lineal y $f(\vec{u}_i) = g(\vec{u}_i), \forall i = 1, \dots, n$ donde $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ es base, entonces $f = g$.

Definición 2.3. Dos espacios vectoriales V y V' son isomorfos si existe $f : V \rightarrow V'$ isomorfismo. Lo expresaremos como $V \approx V'$.

Teorema 2.4. Sea $f : V \rightarrow V'$ una aplicación lineal. Entonces son equivalentes:

- (a) f es isomorfismo.
- (b) $\forall \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ base de V , $\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)\}$ es base de V' .
- (c) $\exists \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ base de V tal que $\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)\}$ es base de V' .

Demostración. Vamos a ver que (a) \Rightarrow (b), que (b) \Rightarrow (c) y que (c) \Rightarrow (a).

(a) \Rightarrow (b) Suponemos que f es un isomorfismo y sea $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ base de V . Entonces este conjunto es sistema de generadores y son linealmente independientes. Entonces $\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)\}$ es sistema de generadores de V' . Además, como son linealmente independientes, $\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)\}$ también son linealmente independientes.

(b) \Rightarrow (c) Evidente.

(c) \Rightarrow (a) Sea $f : V \rightarrow V'$ lineal, entonces $\exists \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ base de V , entonces tenemos que $\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)\}$ es base de V' . Sea $g : V' \rightarrow V$, tal que $g = f^{-1}$, la única aplicación lineal tal que $g(f(\vec{u}_i)) = \vec{u}_i, \forall i = 1, \dots, n$. Entonces, tenemos que f tiene inversa, por lo que es biyectiva y, además, como es aplicación lineal, es isomorfismo.

□

Corolario 2.3. $V \approx V' \iff \dim V = \dim V'$

Demostración. (i) Si $V \approx V'$, existe un isomorfismo entre ellos, y podemos encontrar una base con el mismo número de elementos en V' .

(ii) Supongamos que $\dim V = \dim V'$. Sea $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ base de V y $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ base de V' y $f : V \rightarrow V'$ la única aplicación lineal tal que $f(\vec{u}_i) = \vec{v}_i, \forall i = 1, \dots, n$. Como es una aplicación lineal que lleva bases en bases es un isomorfismo.

□

Observación 2.1. Si consideramos la relación de equivalencia de que dos espacios vectoriales sean isomorfos, tenemos que el conjunto cociente tiene tantos elementos como biyecciones.