Física

Victoria Torroja Rubio

19/1/2026

Índice general

Capítulo 1

Cinemática (Geometría diferencial de curvas)

La **mecánica comprende tres partes:**

- **Cinemática:** estudia el movimiento sin atender a las causas.
- **Dinámica:** estudia el movimiento atendiendo a las fuezas que lo causan.
- **Estática:** estudia las condiciones para que no se produzca movimiento.

En cinemática estudiamos el movimiento de un punto material sin dimensiones al que llamamos P.

Utilizaremos habitualmente el **sistema de referencia cartesiano** con origen O, de tres ejes a los que llamamos X, Y y Z, con vectores directores unitarios $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ y $\hat{k}$, respectivamente. Así, podemos describir a nuestro punto P de la forma $P\,(x, y, z)$.

Definición 1.1 (Vector de posición)**.** Llamamos **vector de posición** al vector $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$.

A los ángulos que forman el vector de posición con los ejes X, Y y Z los llamamos α, β y γ, respectivamente.

Observación. Claramente,

$$\cos\alpha = \frac{x}{\|\overrightarrow{OP}\|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{\|\vec{r}\|} := \frac{x}{r}.$$

Así, escribimos,

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{r}.$$

Dado que la posición de nuestro objeto va a cambiar a lo largo del tiempo, podemos escribir $\vec{r}\,(t)$.

Definición 1.2 (Desplazamiento)**.** Decimos que el **desplazamiento** de nuestra partícula en un periodo de tiempo Δt es

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}\,(t + \Delta t) - \vec{r}\,(t)\,.$$

Definición 1.3 (Velocidad media)**.** La **velocidad media** se describe como el vector

$$\vec{v}_{\text{media}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Definición 1.4 (Ley del movimiento)**.** Se define **ley del movimiento** a la aplicación $\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

Definición 1.5 (Trayectoria)**.** La **trayectoria** es $\operatorname{Im}(\vec{r}) = \{\vec{r}\,(t)\ :\ t \in I\}$.

Definición 1.6 (Velocidad instantánea)**.** La **velocidad instantánea** es la velocidad que lleva la partícula en cada instante, es decir,

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}\,(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

En general, la ley del movimiento la podemos escribir de la forma

$$\vec{r}\,(t) = (x\,(t)\,, y\,(t)\,, z\,(t)) = x\,(t)\,\hat{\imath} + y\,(t)\,\hat{\jmath} + z\hat{k}.$$

Notación. En muchos casos resulta desagradable escribir la t del tiempo, por lo que podemos escribir,

$$\vec{r}\,(t) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}.$$

$$\dot{\vec{r}}\,(t) = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}.$$

Definición 1.7 (Aceleración)**.** Se define la **aceleración** de la forma

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}\,(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}}\,(t)\,.$$

Es sencillo ver que el vector tangente a la curva será

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}.$$

Sea $\hat{n}$ el vector normal a la curva el perpendicular al vector tangente. Tiene el mismo sentido que el que sigue la curvatura de la trayectoria.

Así, podemos escribir $\vec{v} = v\hat{t}$. Así, tenemos que

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{dv}{dt}\hat{t}}_{\text{aceleración tangencial}} + \underbrace{v\frac{d\hat{t}}{dt}}_{\text{aceleración normal}}.$$

Tenemos que

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \hat{t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\hat{t}' - \hat{t}}{\Delta t}.$$

Podemos ver que

$$\Delta \hat{t} = \hat{t}' - \hat{t} = \Delta \phi \cdot \hat{n}.$$

Por tanto,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \hat{t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\hat{t}' - \hat{t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \cdot \hat{n}.$$

Tenemos que

$$\Delta \phi = \frac{\text{arco}}{R} = \frac{v\Delta t}{R}.$$

Así,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \hat{t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\hat{t}' - \hat{t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \cdot \hat{n} = \frac{v}{R}\hat{n}.$$

De esta forma, nos queda que la expresión de la aceleración normal es

$$\hat{a} = \frac{dv}{dt}\hat{t} + \frac{v^2}{R}\hat{n}.$$

Decimos que R es el **radio de curvatura**. Para intervalos de tiempo muy pequeños la trayectoria se puede aproximar a una circunferencia, pero en general tenemos que el radio de curvatura depende del tiempo: $R(t)$.

El vector normal está definido cuando hay cambios de dirección, es decir, si la trayectoria es una línea recta no hablamos de vector normal.

Tipos de movimiento en el plano:

- **Movimiento rectilíneo uniforme (MRU):** son movimientos en los que $\vec{a} = 0$, por lo que $\vec{v}(t) = \vec{v}_0$. Así, tenemos que

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}_0 \, dt \Rightarrow \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \vec{v}_0 (t - t_0).$$

  Así, nos queda que

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}_0 (t - t_0).}$$

- **Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA):** son movimientos en los que $\vec{a}(t) = \vec{a}_0$. De esta forma, tenemos que

$$\vec{v}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}_0 \, dt \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \vec{a}_0 (t - t_0).$$

Así, tenemos que

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\ dt = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t_0) + \vec{a}_0 (t - t_0)\ dt = \vec{v}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}_0 (t - t_0)^2 .$$

Así, nos queda que

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}_0 (t - t_0)^2 .}$$

- **Movimiento circular uniforme (MCU):** en este caso está claro que

  $$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + R\cos(\omega t)\,\hat{i} + R\sin(\omega t)\,\hat{j}.$$

  De esta manera, podemos calcular la velocidad y consecuentemente la aceleración,

  $$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = R\omega\left[-\sin(\omega t)\,\hat{i} + \cos(\omega t)\,\hat{j}\right] \Rightarrow v(t) = \|\vec{v}(t)\| = R\omega,\ \hat{t} = -\sin(\omega t)\,\hat{i} + \cos(\omega t)\,\hat{j}.$$

  Análogamente,

  $$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \omega^2 R\left[-\cos(\omega t)\,\hat{i} - \sin(\omega t)\,\hat{j}\right] \Rightarrow a(t) = \|\vec{a}(t)\| = \omega^2 R,\ \hat{n} = -\cos(\omega t)\,\hat{i} - \sin(\omega t)\,\hat{j}.$$

  Como $v = \omega R$, tenemos que $\omega = \dfrac{v}{R}$, por lo que

  $$\vec{a}(t) = \frac{v^2}{R}\hat{n}.$$

1.1. Sistemas de referencia

Sistemas de referencia móvil: triedro de Frenet-Serret