

Cálculo Integral

Victoria Torroja Rubio

19/1/2026

Índice general

1. Integral de Riemann	3
1.1. Conceptos básicos	3
1.2. Integral de Riemann	6
1.3. Propiedades de la integral	9
1.4. Conjuntos medibles Jordan	13
1.5. Conjuntos de medida nula	16
1.6. Teorema de Lebesgue	19
1.7. 11/2/2026	19

Despacho: 431

Correo: jose_mendoza@mat.ucm.es

Bibliografía:

- Para cálculo integral: Marsden & Hoffman: *Elementary Classical Analysis*.
- Para cálculo vectorial: Marsden & Tromba: *Vector calculus*.

Evaluación:

- 13/2/2026: cambiar la clase de cálculo con la de ecuaciones diferenciales.
- Control: 27/2/2026 (*sólo sube, pero cuenta poco, alrededor de un 10 %*).

Capítulo 1

Integral de Riemann

1.1. Conceptos básicos

Consideramos el paralelepípedo

$$R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

que es producto directo de intervalos compactos en \mathbb{R} . Consideraremos también una función $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Definimos el **volumen** del rectángulo R como el producto de las longitudes de sus lados, es decir,

$$v(R) := (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$

Definición 1.1 (Partición). Tomamos particiones

$$P_1 \in \mathcal{P}([a_1, b_1]), \dots, P_n \in \mathcal{P}([a_n, b_n]),$$

y decimos que $P = (P_1, \dots, P_n) \in \mathcal{P}(R)$ es una **partición** de R .

De esta forma, estamos dividiendo el rectángulo R en subrectángulos.

Definición 1.2. Dadas dos particiones $P = (P_1, \dots, P_n)$ y $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$, decimos que P es **más fina** que Q , $P \geq Q$, si P_i es más fina que Q_i para $i = 1, \dots, n$.

Si $T \in \mathcal{P}(R)$, entonces T es un pequeño paralelepípedo cuyos lados son intervalos de P_i (queremos decir que T es uno de los subrectángulos formados por la partición P). Podemos ver que para cada partición $P_i = \{x_0^i, \dots, x_{m_i}^i\}$, los rectángulos T tendrán la forma

$$T = [x_{j_1}^1, x_{j_1+1}^1] \times \cdots \times [x_{j_n}^n, x_{j_n+1}^n], \quad 0 \leq j_i \leq m_i - 1.$$

Así, definimos,

Definición 1.3 (Suma superior e inferior). Decimos que la **suma inferior** de f por P es

$$s(f, P) := \sum_{T \in P} v(T) \inf \{f(t) : t \in T\}.$$

Análogamente, decimos que la **suma superior** de f por P es

$$S(f, P) := \sum_{T \in P} v(T) \sup \{f(t) : t \in T\}.$$

Observación. A partir de la definición anterior, podemos hacer un par de observaciones.

- En primer lugar, como f está acotada, las sumas superiores e inferiores están bien definidas.
- Para cualquier partición $P \in \mathcal{P}(R)$ se cumple que $s(f, P) \leq S(f, P)$.

Para introducir la noción de **integral superior** e **integral inferior**, tenemos que ver que las sumas superiores e inferiores están acotadas, esto se puede ver de dos formas.

Notación. A partir de ahora, utilizamos la notación siguiente:

$$\alpha_T = \inf \{f(t) : t \in T\} \quad \text{y} \quad \beta_T = \sup \{f(t) : t \in T\}.$$

Forma 1

Sea $P \in \mathcal{P}(R)$. Como f es acotada en R sabemos que existen $M, m \in \mathbb{R}$ tales que

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in R.$$

Así, tenemos que

$$\sum_{T \in P} mv(T) \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq \sum_{T \in P} Mv(T).$$

Demostremos ahora la igualdad

$$\sum_{T \in P} v(T) = v(R).$$

En primer lugar, consideremos el caso $n = 1$. Cogemos $R = [a, b]$ y la partición $P = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_m = b\}$. Así, tenemos que

$$\sum_{i=1}^m v([t_{i-1}, t_i]) = \sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) = t_m - t_0 = b - a = v(R).$$

Demostraremos el caso $n = 2$ pues a partir de este es fácil generalizar la demostración para $n > 2$. Por tanto, tomamos $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ con la partición $P = (P_1, P_2)$ tal que

$$P_1 = \{t_0 = a_1, t_1, \dots, t_m = b_1\}, \quad P_2 = \{q_0 = a_2, q_1, \dots, q_r = b_2\}.$$

Tendremos que

$$\sum_{T \in R} v(T) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{r-1} v([t_i, t_{i+1}] \times [q_j, q_{j+1}]) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{r-1} (t_{i+1} - t_i)(q_{j+1} - q_j) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2).$$

Así, podemos decir que

$$mv(R) \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq Mv(R).$$

Forma 2

Lema 1.1. Sean $P, T \in \mathcal{P}(R)$ con $T \geq P$. Entonces,

$$s(f, P) \leq s(f, T) \leq S(f, T) \leq S(f, P).$$

*Demuestra*ción. Lo demostramos para $n = 2$ puesto que la demostración es fácil de generalizar para $n > 2$. Sea $P = (P_1, P_2) \in \mathcal{P}(R)$. Para demostrar el lema basta con demostrar el caso $P' = (P'_1, P'_2)$, donde $P'_1 = P_1 \cup \{u\}$. Claramente tenemos que P' es más fina que P . Concretamente, supongamos que

$$P_1 = \{t_0^1, \dots, t_n^1\} \quad \text{y} \quad P'_1 = \{t_0^1, \dots, t_i^1, u, t_{i+1}^1, \dots, t_n^1\}.$$

Sea $P_2 = \{q_0, \dots, q_r\}$, y definimos los conjuntos de rectángulos

$$J_1 = \{[t_i, u] \times [q_j, q_{j+1}] : 0 \leq j \leq r-1\} \quad \text{y} \quad J_2 = \{[u, t_{i+1}] \times [q_j, q_{j+1}] : 0 \leq j \leq r-1\}.$$

Claramente tenemos que $J_1 \cap J_2 = \emptyset$. De esta forma, tenemos que

$$\begin{aligned} s(f, P') &= \sum_{T \in P'} v(T) \alpha_T = \sum_{T \in P'/(J_1 \cup J_2)} v(T) \alpha_T + \sum_{T \in J_1} v(T) \alpha_T + \sum_{T \in J_2} v(T) \alpha_T \\ &= \sum_{T \in P'/(J_1 \cup J_2)} v(T) \alpha_T + \sum_{j=0}^{r-1} (u - t_i)(q_{j+1} - q_j) \alpha_j^1 + \sum_{j=0}^{r-1} (t_{i+1} - u)(q_{j+1} - q_j) \alpha_j^2 \\ &\geq \sum_{T \in P'/(J_1 \cup J_2)} v(T) \alpha_T + \sum_{j=0}^{r-1} (t_{i+1} - t_i)(q_{j+1} - q_j) \alpha_j = s(f, P). \end{aligned}$$

La desigualdad para la suma superior se demuestra de forma análoga. \square

*Demuestra*ción. Esta es una demostración alternativa. Consideremos que T es más fina que P y sean R_1, \dots, R_N los subrectángulos de P y $\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_{\tilde{N}}$ los de T . Sea I_k el conjunto de índices j tales que $\tilde{R}_j \subset R_k$. Así, es fácil ver que

$$R_k = \bigsqcup_{j \in I_k} \tilde{R}_j, \quad v(R_k) = \sum_{j \in I_k} v(\tilde{R}_j).$$

Denotamos $\alpha_j = \inf \{f(x) : x \in R_j\}$ y $\tilde{\alpha}_j = \inf \{f(x) : x \in \tilde{R}_j\}$. Claramente, si $j \in I_k$ se tiene que $\alpha_k \leq \tilde{\alpha}_j$, así

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^N \alpha_k v(R_k) = \sum_{k=1}^N \sum_{j \in I_k} \alpha_k v(\tilde{R}_j) \leq \sum_{k=1}^N \sum_{j \in I_k} \tilde{\alpha}_j v(\tilde{R}_j) = \sum_{j=1}^{\tilde{N}} \tilde{\alpha}_j v(\tilde{R}_j) = s(f, T).$$

El caso para la suma superior es análogo. \square

Proposición 1.1. Dadas dos particiones, $P, Q \in \mathcal{P}(R)$

$$s(f, P) \leq S(f, Q).$$

Demostración. Sea $T = (P_1 \cup Q_1, \dots, P_n \cup Q_n) \in \mathcal{P}(R)$. Claramente, $T \geq P$ y $T \geq Q$. Por tanto, aplicando el lema anterior

$$s(f, P) \leq s(f, T) \leq S(f, T) \leq S(f, Q).$$

□

Por ambas formas hemos visto que existen

$$\inf\{S(f, P) : P \in \mathcal{P}(R)\} \quad \text{y} \quad \sup\{s(f, P) : P \in \mathcal{P}(R)\},$$

por lo que estamos en condiciones de definir la integral superior e inferior.

1.2. Integral de Riemann

Definición 1.4 (Integral superior e inferior). Se define como **integral superior** e **integral inferior** a los valores

$$\overline{\int_R f} = \inf\{S(f, P) : P \in \mathcal{P}(R)\} \quad \text{y} \quad \underline{\int_R f} = \sup\{s(f, P) : P \in \mathcal{P}(R)\},$$

respectivamente. Decimos que f es **integrable** si el valor de la integral superior e inferior coincide.

Corolario 1.1. Dada $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ acotada,

$$\underline{\int_R f} \leq \overline{\int_R f}.$$

Ejemplo. Consideremos $f \equiv c$, con c constante. Tenemos que para una partición $P \in \mathcal{P}(R)$,

$$s(f, P) = \sum_{T \in P} v(T) \inf\{f(t) : t \in T\} = \sum_{T \in P} v(T) c = cv(R).$$

Por otro lado,

$$S(f, P) = \sum_{T \in P} v(T) \sup\{f(t) : t \in T\} = \sum_{T \in P} v(T) c = cv(R).$$

Como la integral superior y la inferior coinciden, debe ser que la función es integrable.

Teorema 1.1 (Criterio de integrabilidad de Riemann). Una función $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ acotada es integrable si y solo si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P_\varepsilon \in \mathcal{P}(R)$ tal que

$$S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Demostración. (i) Supongamos que f es integrable y sea $\varepsilon > 0$. Por definición de supremo e ínfimo, tenemos que existen particiones $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(R)$ tales que

$$\int_R f - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, P_1), \quad \int_R f + \frac{\varepsilon}{2} > S(f, P_2).$$

Cogemos $P_\varepsilon \in \mathcal{P}(R)$ más fina que P_1 y P_2 y tenemos que

$$S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) \leq S(f, P_2) - s(f, P_1) < \left(\int_R f + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \left(\int_R f - \frac{\varepsilon}{2} \right) = \varepsilon.$$

(ii) Sea $\varepsilon > 0$, entonces por hipótesis tenemos que

$$0 \leq \overline{\int_R f} - \underline{\int_R f} \leq S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, debe ser que la integral superior y la inferior coinciden, por lo que f es integrable. \square

Observación. La negación del criterio anterior nos permite ver cuándo una función no es integrable, que es si y solo si existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $S(f, P) - s(f, P) \geq \varepsilon_0, \forall P \in \mathcal{P}(R)$.

Ejemplo. Un ejemplo muy común de función no integrable es la función de Dirichlet,

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Este ejemplo lo podemos generalizar en \mathbb{R}^n . En efecto, podemos tomar $R = [0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$, con

$$f : R \rightarrow \mathbb{R} : x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}^n \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}^n \end{cases}.$$

Tenemos que $\forall P \in \mathcal{P}(R)$, $S(f, P) = 1$ y $s(f, P) = 0$, por lo que $S(f, P) - s(f, P) = 1$ y f no es integrable.

Esta noción la podemos generalizar. Consideremos $R = [0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ y $A \subset \mathbb{R}$ tal que A y R/A son densos en R . Por denso queremos decir que todo rectángulo no trivial J , $A \cap J \neq \emptyset$ y $(R/A) \cap J \neq \emptyset$. Entonces,

$$f : R \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in R/A \end{cases},$$

no es integrable.

Teorema 1.2 (Teorema de Darboux). Una función $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ acotada es integrable en R con integral I si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $P \in \mathcal{P}(R)$ con $\|P\| < \delta$ ^a, entonces

$$\left| \sum_{J \in P} f(x_J) v(J) - I \right| < \varepsilon, \quad \forall x_J \in J.$$

^aPara cualquier $J \in P$, el diámetro de J es menor a δ .

Demostración. (i) Se puede mirar en el libro de Marsden y Hoffmann.

(ii) Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que si $\|P\| < \delta$ entonces

$$\left| \sum_{i=1}^N f(x_i) v(J_i) - I \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

Donde J_1, \dots, J_N son los rectángulos que componen la partición P . Cogemos $x_i \in J_i$ tal que

$$|f(x_i) - \beta_{J_i}| < \frac{\varepsilon}{v(J_i) 2N}.$$

Así, tenemos que

$$|S(f, P) - I| \leq \left| S(f, P) - \sum_{i=1}^N f(x_i) v(J_i) \right| + \left| \sum_{i=1}^N f(x_i) v(J_i) - I \right|.$$

Tenemos que

$$\left| S(f, P) - \sum_{i=1}^N f(x_i) v(J_i) \right| < \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon v(J_i)}{v(J_i) 2N} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así, obtenemos que $|S(f, P) - I| < \varepsilon$. De forma análoga se puede demostrar que $|I - s(f, P)| < \varepsilon$. De esta forma, obtenemos que si $\varepsilon > 0$ existe $P \in \mathcal{P}(R)$ tal que

$$|S(f, P) - s(f, P)| \leq |S(f, P) - I| + |I - s(f, P)| < \varepsilon,$$

y por el criterio de Riemann tenemos que f es integrable en R . Además, por lo visto anteriormente, existe $P \in \mathcal{P}(R)$ tal que

$$\left| \overline{\int_R} f - I \right| \leq \left| \overline{\int_R} f - S(f, P) \right| + |S(f, P) - I| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

El caso para la integral inferior es análogo. Así, hemos demostrado que $\int_R f = I$. \square

1.3. Propiedades de la integral

Teorema 1.3. Sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ continua, entonces f es integrable.

Demostración. En esta demostración trabajaremos con la norma infinita pero la equivalencia de normas permite generalizar el resultado para cualquier norma en \mathbb{R}^n . Dado que f es continua en R y este es compacto, tenemos que f es uniformemente continua en R . Sea $\varepsilon > 0$ y $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{v(R)} > 0$. Tenemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - y\|_\infty < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon', \quad \forall x, y \in R.$$

Así, cogemos una partición $P_\delta \in \mathcal{P}(R)$ que form rectángulos de lados con longitud menor a δ . Recordamos que dado que f es continua en R , lo es también en cada subrectángulo generado por la partición P_δ . De esta forma, en cada $T \in P_\delta$, f alcanza su máximo y su mínimo, β_T y α_T , respectivamente. Por tanto,

$$S(f, P_\delta) - s(f, P_\delta) = \sum_{T \in P_\delta} v(T) (\beta_T - \alpha_T) < \varepsilon' \sum_{T \in P_\delta} v(T) = \varepsilon.$$

Por el criterio de integrabilidad de Riemann, f es integrable en R . □

Proposición 1.2 (Linealidad y monotonía). Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo.

Linealidad. Si $f_1, f_2 : R \rightarrow \mathbb{R}$ son integrables en R , entonces

$$\int_R f_1 + f_2 = \int_R f_1 + \int_R f_2.$$

Además, si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en R , entonces

$$\int_R \alpha f = \alpha \int_R f.$$

Monotonía. Si $f_1, f_2 : R \rightarrow \mathbb{R}$ son integrables en R , con $f_1 \leq f_2$, $\forall x \in R$, entonces

$$\int_R f_1 \leq \int_R f_2.$$

Demostración. Aplicamos el teorema de Darboux.

1. Sea $\varepsilon > 0$, como f y g son integrables tenemos que existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ y $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(R)$, con $\|P_1\| < \delta_1$ y $\|P_2\| < \delta_2$, tales que

$$\left| \sum_{J \in P_1} f(y_j) v(J) - I_1 \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left| \sum_{T \in P_2} g(z_j) v(J) - I_2 \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cogemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, y tomamos $P \in \mathcal{P}(R)$ con $\|P\| < \delta$, de esta forma

$$\left| \sum_{J \in P} (f + g)(x_j) v(J) - (I_1 + I_2) \right| \leq \left| \sum_{J \in P} f(x_J) v(J) - I_1 \right| + \left| \sum_{J \in P} g(x_J) v(J) - I_2 \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. Sea $I = \int_R f$ y $\varepsilon > 0$. Por el teorema de Darboux, existe $\delta > 0$ tal que si $P \in \mathcal{P}(R)$ con $\|P\| < \delta$, entonces

$$\left| \sum_{J \in P} f(x_J) v(J) - I \right| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}.$$

Así, tenemos que

$$\left| \sum_{J \in P} \alpha f(x_J) v(J) - \alpha I \right| = |\alpha| \left| \sum_{J \in P} f(x_J) v(J) - I \right| < |\alpha| \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon.$$

3. Para demostrar la monotonía primero asumimos que $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable y $f(x) \geq 0, \forall x \in R$. Tenemos que

$$s(f, P) = \sum_{J \in P} \alpha_J v(J) \geq 0, \quad \forall P \in \mathcal{P}(R).$$

Así, está claro que la integral inferior debe ser superior a 0, por lo que el valor de la integral será superior a 0. Ahora, supongamos que $f_1, f_2 : R \rightarrow \mathbb{R}$ son integrables y $f_1(x) \leq f_2(x), \forall x \in R$. Tenemos que la función $f_2 - f_1 : R \rightarrow \mathbb{R}$ cumple que es integrable (por la linealidad) y además $(f_2 - f_1)(x) \geq 0, \forall x \in R$. Por lo que acabamos de demostrar:

$$\int_R f_2 - f_1 = \int_R f_2 - \int_R f_1 \geq 0 \iff \int_R f_1 \leq \int_R f_2.$$

□

Observación (Cota de la integral). Supongamos que $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en R . Entonces, f es acotada, por lo que existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Así, tenemos que

$$\int_R m \leq \int_R f \leq \int_R M \Rightarrow mv(R) \leq \int_R f \leq Mv(R).$$

Se puede hacer un razonamiento igual sobre un conjunto A que es medible Jordan.

Proposición 1.3. Sean $S, R \subset \mathbb{R}^n$ rectángulos cerrados tales que $S \subset R$. Si $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, entonces f es integrable en S .

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y $P = (P_1, \dots, P_n) \in \mathcal{P}(R)$ tal que $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$. Podemos asumir que los vértices de S están en P , es decir, si $S = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$, entonces $a_i, b_i \in P_i, \forall i = 1, \dots, n$. Ahora, consideramos $\tilde{P} = (\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n) \in \mathcal{P}(S)$ tal que $\tilde{P}_i = P_i \cap [a_i, b_i]$ con $i = 1, \dots, n$. Dado que los subrectángulos de \tilde{P} son subrectángulos de P

es fácil ver que S es una unión de subrectángulos de R . Sean R_1, \dots, R_k los subrectángulos de P que también lo son de \tilde{P} , y sean R_{k+1}, \dots, R_N el resto. Tenemos que

$$\begin{aligned}\varepsilon > S(f, P) - s(f, P) &= \sum_{j=1}^k (\beta_j - \alpha_j) v(R_j) + \sum_{j=k+1}^N (\beta_j - \alpha_j) v(R_j) \\ &\geq \sum_{j=1}^k (\beta_j - \alpha_j) v(R_j) = S(f|_S, \tilde{P}) - s(f|_S, \tilde{P}).\end{aligned}$$

Por el criterio de la integrabilidad de Riemann, $f|_S$ es integrable. \square

Lema 1.2. Sean $R, R' \subset \mathbb{R}^n$ rectángulos con $R' \subset R$. Supongamos que $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en R' y $f(x) = 0$ para $x \in \overline{R/R'}$. Entonces f es integrable en R y

$$\int_{R'} f = \int_R f.$$

Demostración. Sea $\tilde{f} := f|_{R'}$ y sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $\tilde{P} \in \mathcal{P}(R')$ tal que

$$S(\tilde{f}, \tilde{P}) - s(\tilde{f}, \tilde{P}) < \varepsilon.$$

Cogemos ahora la partición $P \in \mathcal{P}(R)$ que resulta de extender \tilde{P} a una partición de R , como se muestra en la figura. Entonces, tendremos que R' es una unión de subrectángulos de P . Sean R_1, \dots, R_k los subrectángulos de P que también lo son de \tilde{P} y R_{k+1}, \dots, R_N el resto. Así, tenemos que

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i=1}^k (\beta_i - \alpha_i) v(R_i) + \sum_{i=k+1}^N (\beta_i - \alpha_i) v(R_i) < \varepsilon + \sum_{i=k+1}^N (\beta_i - \alpha_i) v(R_i).$$

Los rectángulos R_{k+1}, \dots, R_N pueden cumplir una de dos cosas.

- Si $R_j \cap R' = \emptyset$, entonces $f|_{R_j} \equiv 0$ y se tiene que $\beta_j - \alpha_j = 0$.
- Si $R_j \cap R' \neq \emptyset$, entonces, debe ser que su intersección con R' no es más que un segmento del borde de R' , es decir, $R_j \cap R' \subset \overline{R/R'}$, por lo que de nuevo tenemos que $\beta_j - \alpha_j = 0$.

Así, hemos visto que $\sum_{i=k+1}^N (\beta_i - \alpha_i) v(R_i) = 0$, por lo que $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$ y tenemos

que f es integrable en R . Veamos ahora que el valor de las integrales coincide. Sea $I = \int_{R'} \tilde{f}$.

Sea $\varepsilon > 0$, podemos coger $\tilde{P} \in \mathcal{P}(R')$ tal que $I - s(\tilde{f}, \tilde{P}) < \varepsilon$. Cogemos $P \in \mathcal{P}(R)$ extendiendo \tilde{P} a una partición de R como hemos hecho antes, así

$$0 \leq I - s(f, P) = I - \sum_{J \in P, J \subset R'} \alpha_J v(J) = I - \sum_{J \in \tilde{P}} \tilde{\alpha}_J v(J) = I - s(\tilde{f}, \tilde{P}) < \varepsilon.$$

Así, hemos obtenido que

$$\int_{\underline{R}} f = \int_R f = I.$$

□

Proposición 1.4. Sean $R, R' \subset \mathbb{R}^n$ rectángulos con $R' \subset R$. Supongamos que $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en R' y $f(x) = 0$ para $x \in R \setminus R'$. Entonces f es integrable en R y

$$\int_{R'} f = \int_R f.$$

Demostración. Supongamos que $f(x) = g(x) + h(x)$ con $g, h : R \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \overline{R/R'} \\ f(x), & \text{resto} \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} 0, & x \in R/\partial R' \\ f(x), & \text{resto} \end{cases}.$$

Veamos que $\int_R h = \int_{R'} h = 0$. Veamos primero que h es integrable en R . Se puede comprobar que $\partial R'$ tiene contenido nulo, por lo que para $\varepsilon > 0$, existe $P \in \mathcal{P}(R)$ tal que

$$\sum_{J \in P, J \cap \partial R' \neq \emptyset} v(J) < \frac{\varepsilon}{M}, \quad \text{donde } |f| \leq M.$$

Así, tendremos que

$$S(h, P) = \sum_{J \in P} \beta_J v(J) = \sum_{J \in P, J \cap \partial R' \neq \emptyset} \beta_J v(J) \leq M \sum_{J \in P, J \cap \partial R' \neq \emptyset} v(J) < \varepsilon.$$

Así, h es integrable en R y su integral es nula. Por una proposición anterior, como $R' \subset R$, tenemos que h también es integrable en R' . De esta manera, como $s(h|_{R'}, P) = 0$, $\forall P \in \mathcal{P}(R')$, tenemos que

$$\int_{R'} h = \int_{R'} h = 0.$$

Veamos ahora que g es integrable en R' . Primero, como f está acotada, tendremos que existe $K > 0$ tal que $\beta_{g,J} - \alpha_{g,J} \leq K$, $\forall J \in P$ con $J \cap \partial R' \neq \emptyset$. Ahora, sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $P_1 \in \mathcal{P}(R')$ tal que $S(\tilde{f}, P_1) - s(\tilde{f}, P_1) < \frac{\varepsilon}{2}$. Además, como $\partial R'$ tiene contenido nulo, existe $P_2 \in \mathcal{P}(R')$ tal que $\sum_{J \in P_2, J \cap \partial R'} v(J) < \frac{\varepsilon}{2K}$. Así, cogiendo $P \in \mathcal{P}(R')$ más fina que P_1 y P_2 ,

$$\begin{aligned} S(g|_{R'}, P) - s(g|_{R'}, P) &= \sum_{J \in P} (\beta_{g,J} - \alpha_{g,J}) v(J) \\ &= \sum_{J \cap \partial R' = \emptyset} (\beta_{g,J} - \alpha_{g,J}) v(J) + \sum_{J \cap \partial R' \neq \emptyset} (\beta_{g,J} - \alpha_{g,J}) v(J) \\ &\leq \sum_{J \in P} (\beta_{f,J} - \alpha_{f,J}) v(J) + \sum_{J \cap \partial R' \neq \emptyset} (\beta_{g,J} - \alpha_{g,J}) v(J) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Así, tenemos que g es integrable en R' y por el lema anterior tenemos que también es integrable en R y además

$$\int_{R'} g = \int_R g.$$

Como f es suma de funciones integrables, tendremos que

$$\int_R f = \int_R g + h = \int_R g + \int_R h = \int_{R'} g.$$

□

1.4. Conjuntos medibles Jordan

Definición 1.5 (Conjunto medible Jordan). Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ con $A \neq \emptyset$ y A acotado. Tomamos un rectángulo R tal que $A \subset R$. Definimos la función

$$\chi_A : R \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$

Diremos que A tiene **volumen** (A es **medible Jordan**) si χ_A es integrable y en este caso diremos que su **volumen** es

$$V(A) = \int_R \chi_A.$$

Ejemplo. ■ Ya vimos anteriormente que $\mathbb{Q}^n \cap [0, 1]^n$ no tiene volumen.

■ Si R es un rectángulo, R es medible Jordan.

Observación. Sea $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ acotado y R un rectángulo tal que $A \subset R$. Cogemos $P \in \mathcal{P}(R)$. Podemos observar que

$$\alpha_J = \begin{cases} 1, & J \subset A \\ 0, & J \not\subset A \end{cases}.$$

Así, tendremos que

$$s(\chi_A, P) = \sum_{J \in P} v(J) \alpha_J = \sum_{J \in P, J \subset A} v(J).$$

De esta forma,

$$\underline{\int}_R \chi_A = \sup \left\{ \sum_{J \in P, J \subset A} v(J) : P \in \mathcal{P}(R) \right\}.$$

Consideremos ahora las sumas superiores,

$$\beta_J = \begin{cases} 1, & J \cap A \neq \emptyset \\ 0, & J \cap A = \emptyset \end{cases}.$$

De esta forma,

$$S(\chi_A, P) = \sum_{J \in P, J \cap A \neq \emptyset} v(J).$$

Así,

$$\overline{\int}_R \chi_A = \inf \left\{ \sum_{J \in P, J \cap A \neq \emptyset} v(J) : P \in \mathcal{P}(R) \right\}.$$

Definición 1.6 (Integral en otros conjuntos). Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ también acotada. Diremos que f es **integrable en A** si existe R rectángulo tal que $A \subset R$ y

$$\tilde{f} : R \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases},$$

es integrable en R . En este caso

$$\int_A f := \int_R \tilde{f}.$$

De forma equivalente, desde $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ y $A \subset R$, diremos que f es integrable en A si $f \cdot \chi_A$ es integrable en R y tomamos

$$\int_A f = \int_R f \cdot \chi_A.$$

Observación. Tanto para la definición anterior como para la de volumen, tenemos que ver que basta con que exista R , puesto que en cuanto existe uno para cualquier otro rectángulo que cumpla estas características el valor de la integral coincide.

En efecto, si $\tilde{f} : R \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable y R' es otro rectángulo tal que $A \subset R'$, basta con tomar el rectángulo que contenga a $R \cap R'$, puesto que dado que \tilde{f} es integrable en R , también lo será en este nuevo rectángulo (puesto que realmente hemos cortado partes en las que la función se anulaba). Así, el valor de la integral en R y R' coincidirá. Esto se ve de forma más clara con la observación anterior.

Las integrales sobre conjuntos que no sean rectángulos cumplen propiedades parecidas a las integrales sobre rectángulos.

Proposición 1.5 (Linealidad y monotonía).

Definición 1.7 (Media). Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrable con $A \subset \mathbb{R}^n$ medible Jordan y $v(A) > 0$, definimos la **media** de f en A como

$$m_A(f) = \frac{1}{v(A)} \int_A f.$$

Observación. Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, entonces está acotada por lo que existen $M, m > 0$ tales que $m \leq f(x) \leq M$, así

$$mv(A) \leq \int_A f \leq Mv(A) \iff m \leq \frac{1}{v(A)} \int_A f \leq M \iff m \leq m_A(f) \leq M.$$

Podemos observar que

$$\int_A m_A(f) = \int_A f.$$

Teorema 1.4 (Teorema del valor medio). Sea $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y conexo, medible Jordan con volumen positivo, y sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces, existe $x_m \in A$ tal que

$$f(x_m) = m_A(f) = \frac{1}{v(A)} \int_A f.$$

Demostración. Como f es continua y A es compacto y conexo, debe ser que $f(A)$ también es compacto y conexo (por lo que debe ser un intervalo cerrado y acotado), es decir, existen $x_1, x_2 \in A$ tales que

$$m = f(x_1) \leq f(x) \leq M = f(x_2), \quad \forall x \in A.$$

Así, tenemos que $f(A) = [m, M]$. Anteriormente hemos visto que $m \leq m_A(f) \leq M$, por lo que $m_A(f) \in f(A)$ y en consecuencia existe $x_m \in A$ tal que $f(x_m) = m_A(f)$. \square

Proposición 1.6. Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, entonces $|f|$ es integrable y

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|.$$

Demostración. Demostramos la segunda parte. Claramente tenemos que

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \quad \forall x \in A.$$

Por la propiedad de la monotonía tenemos que

$$-\int_A |f| \leq \int_A f \leq \int_A |f| \iff \left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|.$$

\square

Observación. Sea A medible Jordan y $|f(x)| \leq M, \forall x \in A$. Entonces, tenemos que

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f| \leq M v(A).$$

De esta manera, podemos utilizar la proposición anterior para obtener una cota de la integral.

Proposición 1.7 (Aditividad de la integral respecto de los conjuntos de integración). Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ acotados con $f : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Supongamos que f es integrable en $A \cap B$ y $\int_{A \cap B} f = 0$. Entonces f es integrable en $A \cup B$ si y solo si f es integrable en A y en B , y en este caso

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

Demostración. Es fácil ver que

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}.$$

Por tanto, tenemos que

$$f \cdot \chi_{A \cup B} = f \cdot \chi_A + f \cdot \chi_B - f \cdot \chi_{A \cap B}.$$

La equivalencia se deduce de las propiedades de la linealidad de la integral. \square

1.5. Conjuntos de medida nula

Lema 1.3. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, A tiene contenido nulo ^a si y solo si existe $R \supset A$ tal que $\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathcal{P}(R)$ tal que $\sum_{J \in P, J \cap A \neq \emptyset} v(J) < \varepsilon$.

^a A es medible Jordan y $v(A) = 0$.

Demostración. Tenemos que A tiene contenido nulo si y solo si es medible Jordan y $v(A) = 0$, es decir, si existe $R \subset \mathbb{R}^n$ rectángulo con $A \subset R$ y

$$0 \leq \int_R \chi_A \leq \overline{\int}_R \chi_A \leq 0.$$

Esto último sucede si y solo si $\inf \{S(\chi_A, P) : P \in \mathcal{P}(R)\} \leq 0$, es decir, si $\forall \varepsilon > 0$ existe $P \in \mathcal{P}(R)$ tal que ¹

$$S(\chi_A, P) = \sum_{J \in P, J \cap A \neq \emptyset} v(J) < \varepsilon.$$

\square

¹ Esto último se deduce de la caracterización de ínfimo: $S(\chi_A, P) < \overline{\int}_R \chi_A + \varepsilon \leq \varepsilon$.

Proposición 1.8 (Caracterización de contenido nulo). $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene contenido nulo si y solo si $\forall \varepsilon > 0$ existe $\{J_1, \dots, J_N\}$ familia finita de rectángulos tal que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^N J_i \quad \text{y} \quad \sum_{i \in F} v(J_i) < \varepsilon.$$

Demostración. La primera implicación es trivial a partir del lema anterior, por lo que demostraremos únicamente la segunda implicación. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $\{J_1, \dots, J_N\}$ familia de rectángulos que recubren A y $\sum_{i=1}^N v(J_i) < \varepsilon$. Cogemos $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo grande tal que $\bigcup_{i=1}^N J_i \subset R$. Podemos obtener una partición $P \in \mathcal{P}(R)$ tal que cualquiera de los J_i es unión de rectángulos de P . Entonces,

$$\sum_{J \in P, J \cap A \neq \emptyset} v(J) = \sum_{i=1}^N \sum_{J \in P, J \subset J_i} v(J) \leq \sum_{i=1}^N v(J_i) < \varepsilon.$$

Por el lema anterior, tenemos que A tiene contenido nulo. \square

Proposición 1.9. Sea $\{A_1, \dots, A_N\} \subset \mathbb{R}^n$ una familia finita de conjuntos de contenido nulo. Entonces, $\bigcup_{i=1}^N A_i$ tiene contenido nulo.

Observación. En la proposición anterior es importante que la familia de conjuntos sea finita y no numerable. En efecto, ya vimos que $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ no tiene contenido nulo.

Definición 1.8 (Medida nula). Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que A tiene **medida nula** si $\forall \varepsilon > 0, \exists \{J_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ familia de rectángulos tales que

$$A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} J_k \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} v(J_k) < \varepsilon.$$

Proposición 1.10. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene contenido nulo entonces también tiene medida nula.

Demostración. Supongamos que A tiene contenido nulo y sea $\varepsilon > 0$. Tenemos que existe $\{J_1, \dots, J_N\}$ familia de rectángulos tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^N J_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^N v(J_i) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora, tomamos una sucesión cualquiera de rectángulos $\{J_{N+k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $v(J_{N+k}) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. De esta forma, es trivial que $\{J_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ recubre a A y

$$\sum_{i=1}^{\infty} v(J_i) = \sum_{i=1}^N v(J_i) + \sum_{k=1}^{\infty} v(J_{N+k}) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon.$$

□

Proposición 1.11. Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una sucesión o familia finita de conjuntos de medida nula, entonces $\bigcup_{i \in I}$ también tiene medida nula.

Demostración. Tomamos $\varepsilon > 0$ y para cada $i \in I$ tomamos un rectángulo J_i tal que $A_i \subset J_i$ y $v(J_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. Claramente se tiene que

$$A \subset \bigcup_{i \in I} J_i \quad \text{y} \quad \sum_{i \in I} v(J_i) < \sum_{i \in I} \frac{\varepsilon}{2^i} < \varepsilon.$$

□

Ejemplo. Por la proposición anterior tenemos que $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ tiene medida nula pero como vimos no tiene contenido nulo puesto que no es medible Jordan. Es decir, **que un conjunto tenga medida nula no significa que tenga contenido nulo**.

Teorema 1.5. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Entonces K tiene contenido nulo si y solo si K tiene medida nula.

Proposición 1.12. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ medible Jordan. Entonces, A tiene contenido nulo si y solo si tiene medida nula.

Proposición 1.13. Si $\emptyset \neq B \subset A \subset \mathbb{R}^n$ tal que A tiene contenido (resp. medida) nulo, entonces B tiene contenido (resp. medida) nulo.

Ejemplo. Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo (no trivial, es decir, no tiene volumen nulo). Entonces, $v(R) > 0$ por lo que R no tiene contenido nulo, que se puede deducir a partir de la definición. Además, como R es medible Jordan y no tiene contenido nulo tenemos que no tiene medida nula.

Observación. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $A \supset R$ con R rectángulo no trivial. Entonces A no tiene contenido ni medida nula.

1.6. Teorema de Lebesgue

Teorema 1.6 (Teorema de Lebesgue). Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y R un rectángulo. Entonces f es integrable si y solo si el conjunto de discontinuidades de f en R , $D(f)$, tiene medida nula.

Ahora estamos preparados para demostrar la proposición siguiente (que ya habíamos mencionado antes):

Corolario 1.2. Si $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, entonces $|f|$ también es integrable.

Demostración. Si f es continua en $x \in R$, entonces $|f|$ también es continua en x . De esta manera, tenemos que $D(|f|) \subset D(f)$. Así, como $D(f)$ tiene medida nula, por una proposición anterior tenemos que $D(|f|)$ también tiene medida nula, por lo que $|f|$ también es integrable en R . \square

Corolario 1.3. Sean $f, g : R \rightarrow \mathbb{R}$ integrables. Entonces, $f + g$ es integrable en R .

Demostración. Es sencillo ver que $D(f + g) \subset D(f) \cup D(g)$. Como $D(f)$ y $D(g)$ tienen medida nula su unión también, por lo que $D(f + g)$ tiene medida nula y $f + g$ es integrable. \square

Corolario 1.4. Sean $f, g : R \rightarrow \mathbb{R}$ integrables en R . Entonces, $f \cdot g$ es integrable en R .

Observación. Recordamos que $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado es medible Jordan si y solo si existe $R \subset \mathbb{R}^n$ rectángulo tal que χ_A es integrable en R . Entonces, por el criterio de Lebesgue, A es medible Jordan si y solo si $D(\chi_A)$ tiene medida nula. Tenemos que $D(\chi_A) = \partial A$, por lo que buscamos que ∂A tenga medida nula ^a.

^aRecordamos que $\partial A = \{x \in R : B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ y } B(x, \varepsilon) \cap (R/A) \neq \emptyset, \forall \varepsilon > 0\}$.

Ejemplo. Consideremos $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Tenemos que $\partial A = [0, 1]$ y como $v(\partial A) = 1 \neq 0$, ∂A no tiene medida nula por lo que A no es medible Jordan.

Observación. Supongamos que A y B son medibles Jordan. Tenemos que

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B.$$

Como χ_A y χ_B son integrables Riemann, tenemos que $\chi_{A \cap B}$ es integrable Riemann.

1.7. 11/2/2026

Proposición 1.14. Sea A de contenido nulo y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Entonces, f es integrable en A y $\int_A f = 0$.

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ de contenido nulo y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Cogemos $R \subset \mathbb{R}^n$ rectángulo tal que $A \subset R$ y consideramos la función

$$\tilde{f} : R \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$

Tendremos que $D(\tilde{f}) \subset \overline{A}$. En efecto, si $x \notin \overline{A}$ tendremos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset R/A$, por lo que $\tilde{f}|_{B(x, \varepsilon)} \equiv 0$ y por tanto es continua en x . Como A tiene contenido nulo, \overline{A} también tiene contenido nulo (Hoja 3, Ejercicio 2). Por tanto, \overline{A} tiene medida nula. Así, \tilde{f} es integrable en R y en consecuencia f es integrable en A . Veamos ahora que el valor de la integral es nulo. Como \tilde{f} es integrable, basta con ver que la integral inferior de $|\tilde{f}|$ vale 0, es decir,

$$\int_R |\tilde{f}| = \sup \left\{ s(|\tilde{f}|, P) : P \in \mathcal{P}(R) \right\} = 0.$$

Sea $P \in \mathcal{P}(R)$, entonces

$$s(|\tilde{f}|, P) = \sum_{J \in P} \alpha_J v(J).$$

Como A tiene volumen nulo y J no, no puede ser que $J \subset A$. Así, tenemos que existe $x \in J$ con $x \notin A$, por lo que $\alpha_J = 0$, $\forall J \in P$. Así, tenemos que $s(|\tilde{f}|, P) = 0$, por lo que la integral inferior vale 0. Así,

$$\left| \int_R \tilde{f} \right| \leq \int_R |\tilde{f}| = 0 \Rightarrow \int_R \tilde{f} = \int_A f = 0.$$

□

Observación. Nos podemos preguntar, es válido el resultado si en vez de tener A contenido nulo tenemos que A tiene medida nula? Claramente, la respuesta es que no. En efecto, tenemos que $\chi_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}$ tiene medida nula pero no es integrable. Sin embargo, sí es cierto que si A tiene medida nula y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, entonces $\int_A f = 0$.

Corolario 1.5. Sean $f, g : R \rightarrow \mathbb{R}$ acotadas con f integrable en $A \subset R$ y $\{x \in R : f(x) \neq g(x)\}$ tiene contenido nulo. Entonces, g es integrable en A y

$$\int_A g = \int_A f.$$

Demostración. Tenemos que $g(x) = g(x) - f(x) + f(x)$. Por la proposición anterior tenemos que $g(x) - f(x)$ es integrable y tiene integral nula, por ser suma de funciones integrables tenemos que g es integrable y

$$\int_A g = \int_A g - f + \int_A f = \int_A f.$$

□

Observación. Al igual que antes, el enunciado no es cierto si sustituimos 'contenido nulo' con 'medida nula'. En efecto, basta con considerar $f \equiv 0$ y $g = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$.

Observación. Podemos repasar nuestro resultado sobre la aditividad de la integral en conjuntos integrables. Si $A = A_1 \cup A_2$ con A, A_1 y A_2 medibles Jordan, si además $A_1 \cap A_2$ tiene contenido nulo entonces

$$\int_A f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f.$$

Proposición 1.15. Sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ con $f \geq 0$, y $\int_R f = 0$. Entonces el conjunto $\{x \in R : f(x) \neq 0\}$ tiene medida nula. Es decir, existe $A \subset R$ de medida nula tal que $f(x) = 0, \forall x \in R/A$.

Notación. A partir de ahora, si decimos que algo se cumple en casi todo punto es porque se cumple en todos los puntos salvo en un conjunto de medida nula.