Métodos Numéricos - Demostraciones de las observaciones

Victoria Eugenia Torroja Rubio

8/9/2025

Observación (Observación 2.5, Página 57)**.**

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (A^*)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^*, \quad \left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$$

Demostración. **(i)** Aprovechamos que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ es un grupo para usar la unicidad del inverso:

$$AB \cdot B^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = I, \quad B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}B = I.$$

(ii) Sabemos que $(AB)^* = B^*A^*$:

$$A^* \cdot \left(A^{-1}\right)^* = \left(A^{-1} \cdot A\right)^* = I^* = I, \quad \left(A^{-1}\right)^* \cdot A^* = \left(A \cdot A^{-1}\right)^* = I^* = I.$$

(iii) Sabemos que $(AB)^T = B^TA^T$:

$$A^T\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = I^T = I, \quad \left(A^{-1}\right)^T A^T = \left(AA^{-1}\right)^T = I^T = I.$$

□

Observación (Observación 2.6, Página 58)**.**

1. Toda matriz hermítica o unitaria es normal.
2. Si A es hermítica e inversible, A^{-1} también es hermítica.
3. Si A es normal e inversible, A^{-1} también es normal.

Demostración.

1. Trivial a partir de la definición.
2. Sea A hermítica e inversible, veamos que A^{-1} también es hermítica:

$$A = A^* \iff A^{-1} = (A^*)^{-1} \iff A^{-1} = \left(A^{-1}\right)^*.$$

3. Sea A normal e inversible, veamos que A^{-1} también es normal:

$$\left(A^{-1}\right)^* A^{-1} = A^{-1}\left(A^{-1}\right)^* \iff (A^*)^{-1} A^{-1} = A^{-1}(A^*)^{-1} \iff AA^* = A^*A.$$

□

Proposición (Proposición 2.11, Página 71)**.** Sea $\|\cdot\|$ una norma en V. La aplicación $|||\cdot||| : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dada por

$$|||A||| = \sup_{v\neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|=1} \|Av\|,$$

es una norma matricial.

Demostración. Veamos que se cumplen las propiedades de las normas matriciales.

(i) Está claro que como $\|Av\| \geq 0$, $\forall v \in V$, si $|||A||| = 0$, debe ser que $A = 0$.

(ii) Si $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$|||\lambda A||| = \sup_{\|v\|=1} \|\lambda Av\| = \sup_{\|v\|=1} |\lambda| \, \|Av\| = |\lambda| \sup_{\|v\|=1} \|Av\| = |\lambda| \, |||A|||.$$

(iii) Si $A, B \in \mathcal{M}_n$,

$$|||A+B||| = \sup_{\|v\|=1} \|\left(A+B\right) v\| = \sup_{\|v\|=1} \|Av+Bv\| \leq \sup_{\|v\|=1} \left(\|Av\| + \|Bv\|\right) = \sup_{\|v\|=1} \|Av\| + \sup_{\|v\|=1} \|Bv\|.$$

(iv) Si $A, B \in \mathcal{M}_n$,

$$|||AB||| = \sup_{\|v\|=1} \|ABv\| \leq |||A||| \cdot \sup_{\|v\|=1} \|Bv\| = |||A||| \cdot |||B|||.$$

En efecto, por definición tenemos que

$$|||A||| = \sup_{v\neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} \geq \frac{\|Av\|}{\|v\|} \iff |||A||| \cdot \|v\| \geq \|Av\|.$$

□

Proposición (Proposición 2.12, Página 72)**.** Sea $|||\cdot|||$ una norma matricial subordinada.

(i) $\|Av\| \leq |||A||| \cdot \|v\|$, $A \in \mathcal{M}_n$ y $v \in V$.

(ii) $|||A||| = \text{ínf}\,\{\lambda \geq 0 \ : \ \|Av\| \leq \lambda \|v\|, \ v \in V\}$.

(iv) Existe $u \in V^*$ tal que $\|Au\| = |||A||| \cdot \|u\|$.

(v) $|||I||| = 1$.

Demostración. **(i)** A partir de la definición

$$|||A||| = \sup_{v\neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} \geq \frac{\|Av\|}{\|v\|} \iff |||A||| \cdot \|v\| \geq \|Av\|.$$

(ii) Como $|||A||| = \sup_{v\neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|}$, si $M = |||A|||$ tenemos que

$$M \geq \frac{\|Av\|}{\|v\|}, \ \forall v \in V^* \Rightarrow \|Av\| \leq M\|v\|, \ \forall v \in V.$$

Por ser M el supremo, tenemos que ningún elemento de valor inferior va a cumplir esta propiedad, por lo que debe ser que $M = \text{ínf}\,\{\lambda \geq 0 \ : \ \|Av\| \leq \lambda \|v\|\}$.

(iii) Se deduce de la continuidad de $v \to \|Av\|$ sobre la esfera unidad, que es compacta, por lo que se alcanza el supremo y $\|Au\| = |||A|||$. Como $\|u\| = 1$, se tiene que

$$\|Au\| = |||A||| \cdot \|u\|.$$

(iv) En efecto, como $\forall v \in V$, $I \cdot v = v$ tenemos que

$$|||I||| = \sup_{\|v\|=1} \|Iv\| = \sup_{\|v\|=1} \|v\| = 1.$$

$\square$