

Cálculo Diferencial

Victoria Torroja Rubio

8/9/2025

Índice general

1. Espacios métricos	3
1.1. Espacios normados	4
1.2. Bolas en un espacio métrico	7
1.3. Conceptos topológicos	9
1.4. Conjuntos abiertos y cerrados relativos	15
1.5. Sucesiones en espacios métricos	16
1.6. Completitud	19

Profesor: Jesús Jaramillo

Despacho: 305-E

Correo: jaramil@mat.ucm.es

Contenido:

- Topología de los espacios métricos (Cap 1-5) - Aprox: 6'5 semanas
- Cálculo diferencial en varias variables (Cap 6-11) - Resto

Bibliografía:

- Marsden-Hoffman (sirve para las dos partes): 'Análisis clásico elemental'
- K. Smith (la parte de integración es más avanzada): 'Primer of modern analysis'

Materiales Campus:

- Apuntes de Victor Sánchez (apuntes muy condensados)
- Manual de Ansemil-Ponte (versión extendida de Marsden-Hoffman)
- Curso de Daniel Azagra

Capítulo 1

Espacios métricos

Definición 1.1 (Espacio métrico). Un **espacio métrico** es un par (X, d) donde X es un conjunto no vacío y $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función que se llama **distancia** o **métrica**, tal que:

1. $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$.
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$.
4. (Propiedad triangular) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$.

Ejemplo. Algunos ejemplos de espacios métricos son:

1. Consideremos (\mathbb{R}, d) donde $d(x, y) = |x - y|$.
2. La distancia euclídea en $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$:

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

3. La 'métrica del taxi' en \mathbb{R}^2 con distancia:

$$d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

4. Distancias geodésicas: el camino más corto (por ejemplo, en una superficie esférica el camino más corto entre dos puntos es un arco de circunferencia).
5. Distancias en \mathbb{R}^n . Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, consideramos la distancia euclídea

$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

También podemos generalizar la 'métrica del taxi':

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|.$$

También se puede considerar la métrica

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\}.$$

Definición 1.2 (Espacio discreto). Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto cualquiera, y definimos $\forall x, y \in X$

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y \\ 1, & \text{si } x \neq y \end{cases}.$$

Se dice que d es la **métrica discreta** y (X, d) el **espacio métrico discreto**.

Definición 1.3 (Subespacio métrico). Sea (X, d) un espacio métrico y sea $Y \subset X$. Se define la **métrica relativa** (o **restringida**) a Y como $d_Y(y, y') = d(y, y')$, $\forall y, y' \in Y$. Entonces, (Y, d_Y) es un espacio métrico que llamaremos **subespacio** de X .

1.1. Espacios normados

Definición 1.4 (Espacio normado). Un **espacio normado** es un par $(E, \|\cdot\|)$ donde E es un espacio vectorial y $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ es una función que se llama **norma** tal que:

1. $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in E$.
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E$ ^a.
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in E$.

^aEn este curso \mathbb{K} va a ser principalmente \mathbb{R} .

Proposición 1.1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Si definimos

$$d(x, y) = \|x - y\|, \forall x, y \in E,$$

se obtiene que d es una distancia en E , que se llama **asociada** a la norma.

Demostración. Demostremos todas las propiedades de las métricas:

1. Tenemos que $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$, $\forall x, y \in E$.
2. $d(x, y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$.
3. $d(x, y) = \|y - x\| = |-1| \|x - y\| = \|x - y\| = d(x, y)$.

$$4. d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y).$$

□

Observación. En \mathbb{R}^n , dado $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se definen:

$$(\text{Norma euclídea}) \quad \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

$$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|.$$

$$\|x\|_\infty = \max \{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}.$$

Proposición 1.2 (Relación entre las normas en \mathbb{R}^n). $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

Demostración. Supongamos que $|x_{i_0}| = \|x\|_\infty$. Entonces, tenemos que

$$|x_{i_0}|^2 \leq |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2.$$

Dado que la función de la raíz es creciente, tenemos que

$$\|x\|_\infty = |x_{i_0}| \leq \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} = \|x\|_2.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\|x\|_1^2 = (|x_1| + \dots + |x_n|)^2 = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 + C^1 \geq |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 = \|x\|_2^2.$$

Finalmente, tenemos que

$$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n| \leq |x_{i_0}| + \dots + |x_{i_0}| = n|x_{i_0}| = n\|x\|_\infty.$$

□

Definición 1.5. Dos normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ en un mismo espacio vectorial E son **equivalentes** cuando existen $m, M > 0$ tales que

$$m\|x\|' \leq \|x\| \leq M\|x\|', \quad \forall x \in E.$$

Observación. Hemos visto en la proposición anterior que $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ son equivalentes en \mathbb{R}^n .

¹ $C \geq 0$.

Definición 1.6 (Producto escalar). Sea E un espacio vectorial real. Un **producto escalar** en E es una forma bilineal, simétrica y definida positiva. Es decir, una aplicación $\langle, \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

1. $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in E.$
3. $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$

Observación. En este caso, denotaremos $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$

Teorema 1.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Sea E un espacio vectorial dotado de un producto escalar \langle, \rangle . Entonces

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \forall x, y \in E.$$

Demostración. **Caso 1.** Si $x = 0$ o $y = 0$, obtenemos la igualdad.

Caso 2. Si $y \neq 0$, tenemos que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle = \langle x, x \rangle + \alpha \langle x, y \rangle + \alpha \langle y, x \rangle + \alpha^2 \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\alpha \langle x, y \rangle + \alpha^2 \|y\|^2.$$

Tomamos $\alpha = -\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$. Así, tenemos que

$$0 \leq \|x\|^2 - \frac{2\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} + \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^4} \|y\|^2 = \|x\|^2 - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2}.$$

Así, tenemos que $\frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} \leq \|x\|^2$, por lo que $\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$ y tenemos que $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$

□

Proposición 1.3. Sea E un espacio vectorial dotado de un producto escalar \langle, \rangle . Entonces, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, es una norma en E , que se dice asociada a \langle, \rangle .

Demostración. Comprobamos que se cumplen las propiedades de las normas:

1. Tenemos que claramente $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0, \forall x \in E.$
2. $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$
3. $\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle = \lambda^2 \|x\|^2.$ Tomando la raíz cuadrada, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$

4. Si $x, y \in E$,

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

Tomando raíces, tenemos que se verifica la propiedad triangular: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

□

1.2. Bolas en un espacio métrico

Definición 1.7. Sea (X, d) un espacio métrico y consideramos $a \in X$, $r > 0$. Se definen como **bola abierta** de centro a y radio r al conjunto

$$B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}.$$

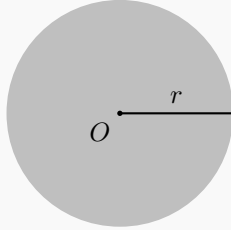
Similarmente, se llama **bola cerrada** de centro a y radio r al conjunto

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}.$$

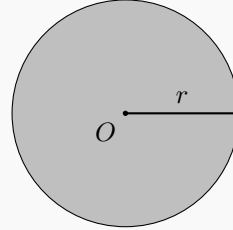
Ejemplo. Consideremos bolas en \mathbb{R}^2 de distintas normas.

1. Consideremos bolas abiertas y cerradas con la métrica euclídea:

$$B_2((0, 0), r) = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} < r\}, \quad \overline{B}_2((0, 0), r) = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq r\}.$$



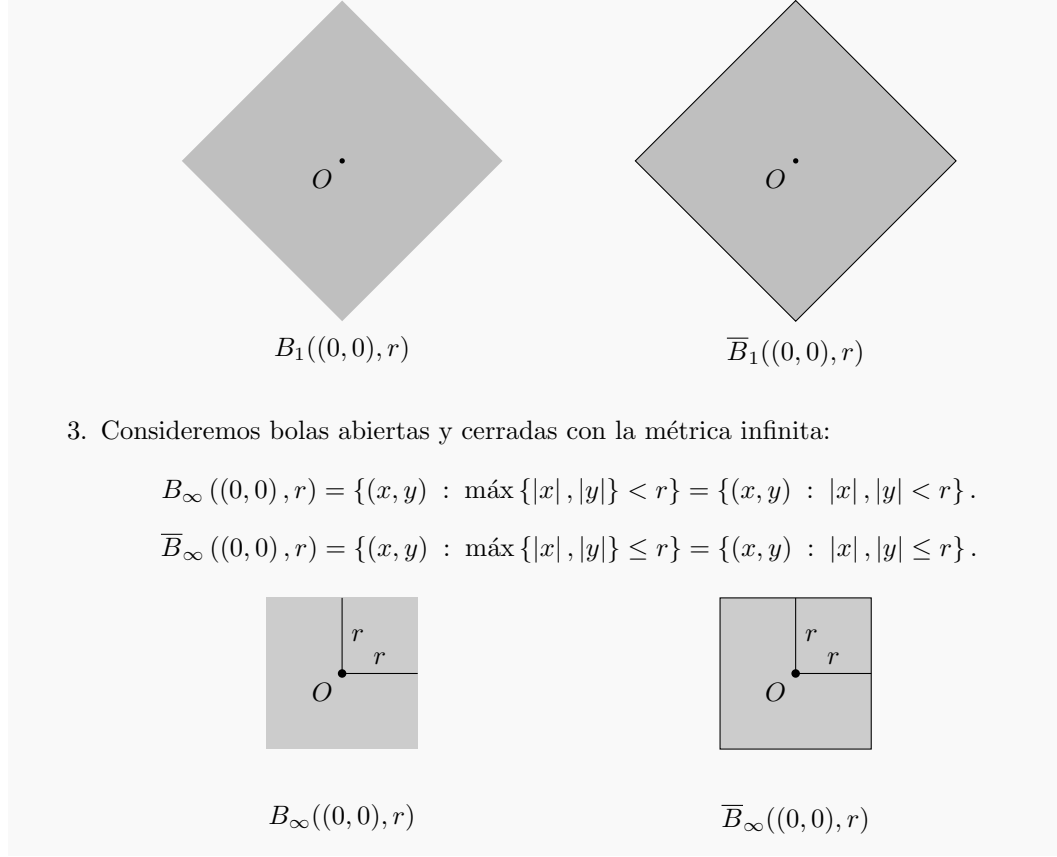
$B_2((0, 0), r)$



$\overline{B}_2((0, 0), r)$

2. Consideremos bolas abiertas y cerradas con la métrica 'del taxi':

$$B_1((0, 0), r) = \{(x, y) : |x| + |y| < r\}, \quad \overline{B}_1((0, 0), r) = \{(x, y) : |x| + |y| \leq r\}.$$



3. Consideremos bolas abiertas y cerradas con la métrica infinita:

$$B_\infty((0,0), r) = \{(x, y) : \max\{|x|, |y|\} < r\} = \{(x, y) : |x|, |y| < r\}.$$

$$\overline{B}_\infty((0,0), r) = \{(x, y) : \max\{|x|, |y|\} \leq r\} = \{(x, y) : |x|, |y| \leq r\}.$$

Observación. En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ se tiene que $B(0, r) = (-r, r)$ y $\overline{B}(0, r) = [-r, r]$. Similarmente, tenemos que $B(a, r) = (a - r, a + r)$ y $\overline{B}(a, r) = [a - r, a + r]$.

Observación (Relación de las bolas en \mathbb{R}^n). Sabemos que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

Por tanto, tenemos que

$$B_1(a, r) \subset B_2(a, r) \subset B_\infty(a, r) \subset B_1(a, nr)^a.$$

En efecto, si $x \in B_1(a, r)$, tenemos que $\|x - a\|_1 < r$. Por tanto, es fácil ver que $\|x - a\|_2 \leq \|x - a\|_1 < r$, por lo que $x \in B_2(a, r)$. El resto de inclusiones se deducen de forma análoga.

^aTambién se puede escribir $B_\infty(a, nr) \subset B_1(a, r) \subset B_2(a, r) \subset B_\infty(a, nr)$.

Definición 1.8. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se define el **diámetro** de A como

$$\text{diam}(A) = \sup \{d(x, y) : x, y \in A\} \in [0, \infty).$$

Se dice que A es **acotado** si $\text{diam}(A) < \infty$.

Proposición 1.4. Dado un espacio métrico (X, d) con $A \subset X$, tenemos que A está acotado si y solo si A está contenido en alguna bola.

Demostración. (i) Supongamos que A está acotado, entonces $\text{diam}(A) = r < \infty$. Así, tenemos que si $x \in A$, entonces $\forall a \in A$ se tiene que $d(a, x) \leq r$, por lo que $A \subset \overline{B}(a, r)$. También podemos ver que lo contiene una bola abierta: $A \subset \overline{B}(a, r) \subset B(a, r+1)$.

(ii) Si A está contenido en una bola, tenemos que existe $x \in X$ y $\frac{r}{2} > 0$ tal que $A \subset B(x, \frac{r}{2})$. De esta manera, si $a, b \in A$ se tiene que

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Así, se tiene que $\forall a, b \in A$, $d(a, b) < r$, por lo que $\text{diam}(A) \leq r < \infty$, por lo que A está acotado. □

1.3. Conceptos topológicos

Definición 1.9 (Conjunto abierto). Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que A es un **conjunto abierto** si $\forall a \in A, \exists r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A$.

Proposición 1.5. Toda bola abierta es un conjunto abierto.

Demostración. Tomemos $A = B(a, R)$ y $x \in B(a, R)$. Sea $\delta = d(x, a) < R$ y $r = R - \delta > 0$ ². Sea $y \in B(x, r)$, tenemos que $d(x, y) < r$. Así,

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < r + \delta = R.$$

Así, $y \in B(a, R)$, por lo que $B(x, r) \subset B(a, R)$. □

Ejemplo. En $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.

1. Consideremos $A = \{(x, y) : 0 < x < 1\}$. Vamos a ver que es abierto. Si $a \in A$, sea $a = (x, y)$ y consideramos $r = \min\{x, 1 - x\}$. Entonces, tenemos que $B_2(a, r) \subset A$.

²No hace falta de escribir $r = \min\{R - \delta, \delta\}$ al tratarse de una bola.

A , en efecto, si $(x', y') \in B_2(a, r)$:

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} < r \Rightarrow |x - x'| < r \Rightarrow 0 < x' < 1.$$

Así, tenemos que $(x', y') \in A$.

2. Consideremos $A = \{(x, y) : 0 < x \leq 1\}$. Vamos a ver que no es abierto. En efecto, si tomamos $a = (1, 0)$ y $r > 0$, tenemos que $(1 + \frac{r}{2}, 0) \in B_2(a, r)$ pero $(1 + \frac{r}{2}, 0) \notin A$.

Proposición 1.6. En \mathbb{R}^n los conjuntos abiertos coinciden para $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$.

Demostración. Como se vio en una observación anterior, sabemos que

$$B_1(a, r) \subset B_2(a, r) \subset B_\infty(a, r) \subset B_1(a, nr).$$

- Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Si A es abierto con la norma $\|\cdot\|_2$, tenemos que $\forall a \in A, \exists r > 0$ tal que $B_2(a, r) \subset A$. Por la observación, como $B_1(a, r) \subset B_2(a, r) \subset A$, tenemos que también es abierto para la norma $\|\cdot\|_1$.
- Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Si A es abierto con la norma $\|\cdot\|_\infty$, entonces $\forall a \in A, \exists r > 0$ tal que $B_\infty(a, r) \subset A$. Por la observación anterior, tenemos que $B_2(a, r) \subset B_\infty(a, r) \subset A$, por lo que A es abierto respecto a la norma $\|\cdot\|_2$.
- Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Si A es abierto respecto de $\|\cdot\|_1$, tenemos que $\forall a \in A, \exists r > 0$ tal que $B_1(a, r) \subset A$. Sea $r' = \frac{r}{n} > 0$,

$$B_\infty(a, r') \subset B_1(a, nr') = B_1(a, r) \subset A.$$

Por tanto, A es abierto respecto de la norma $\|\cdot\|_\infty$.

□

Teorema 1.2 (Propiedades de los abiertos). Sea (X, d) un espacio métrico.

1. X y \emptyset son abiertos.
2. La unión arbitraria de abiertos es abierto.
3. La intersección finita de abiertos es abierto.

Demostración. 1. Es trivial que \emptyset es abierto. Por otro lado, si $a \in X$, tenemos que $\forall r > 0$, $B(a, r) \subset X$. Así, X está abierto.

2. Supongamos que $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos abiertos y sea $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Si $a \in A$, tenemos que $a \in A_i$ para algún $i \in I$. Así, existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i$. Por tanto, $B(a, r) \subset A$ y A es abierto.

3. Sean A_1, \dots, A_m conjuntos abiertos y sea $A = A_1 \cap \dots \cap A_m$. Si $a \in A$, tenemos que $a \in A_i$ para $1 \leq i \leq m$. Así, existe $r_i > 0$ tal que $B(a, r_i) \subset A_i$. Si tomamos $r = \min \{r_i : 1 \leq i \leq m\}$, tenemos que $B(a, r) \subset B(a, r_i)$, $\forall i = 1, \dots, m$. Por tanto, $B(a, r) \subset A$ y A es abierto.

□

Observación. La intersección infinita de conjuntos abiertos puede no ser abierto. Por ejemplo, consideremos en $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ consideramos $A_m = B_2\left((0, 0), \frac{1}{m}\right)$, que es abierto $\forall m \in \mathbb{N}$. Sin embargo, $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m = \{(0, 0)\}$, que no es abierto.

Definición 1.10 (Conjunto cerrado). Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que un conjunto $C \subset X$ es **cerrado** si X/C es abierto.

Proposición 1.7. Toda bola cerrada es un conjunto cerrado.

Demostración. En efecto, sea $C = \overline{B}(p, R) = \{x \in X : d(x, p) \leq R\}$ y sea $A = X/C = \{x \in X : d(x, p) > R\}$. Si $a \in A$, tenemos que $d(a, p) = \delta > R$. Así, tomando $r = \delta - R > 0$, si $x \in B(a, r)$, tenemos que

$$d(x, p) \geq d(p, a) - d(x, a) > \delta - r = R.$$

Así, tenemos que $x \in A$, por lo que $B(a, r) \subset A$ y X/C es abierto, por lo que C es cerrado. □

Observación. Es fácil ver que en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$:

- (a, b) es abierto.
- $[a, b]$ es cerrado.
- $(a, b]$ y $[a, b)$ no son ni abiertos ni cerrados.

Teorema 1.3 (Propiedades de los cerrados). Sea (X, d) un espacio métrico.

1. Los conjuntos X y \emptyset son cerrados.
2. La intersección arbitraria de cerrados es cerrado.
3. La unión finita de cerrados es cerrado.

Demostración. 1. Dado que $\emptyset = X/X$ y $X = X/\emptyset$, del teorema anterior se sigue que son cerrados.

2. Sean $\{C_i\}_{i \in I}$ cerrados. Entonces, $\forall i \in I$ tenemos que X/C_i es abierto, así,

$$X/\bigcap_{i \in I} C_i = \bigcup_{i \in I} (X/C_i),$$

que es abierto, por lo que $\bigcap_{i \in I} C_i$ es cerrado.

3. Sean C_1, \dots, C_m cerrados. Entonces, $\forall i = 1, \dots, m$, tenemos que X/C_i es abierto. Así,

$$X/\bigcup_{i=1}^m C_i = \bigcap_{i=1}^m (X/C_i),$$

es abierto, por lo que $\bigcup_{i=1}^m C_i$ es cerrado.

□

Definición 1.11 (Punto interior). Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que $a \in A$ es un **punto interior** de A si existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A$. Denotamos $\text{Int}(A)$ al conjunto de puntos interiores de A .

Observación. Es trivial ver que $\text{Int}(A) \subset A$.

Proposición 1.8. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$.

1. El conjunto $\text{Int}(A)$ es el mayor abierto contenido en A .
2. A es abierto si y solo si $A = \text{Int}(A)$.

Demostración. 1. Sea $U = \text{Int}(A)$. Vamos a ver que es abierto. Dado $x \in U$, tenemos que existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$. Si $y \in B(x, r)$, por tratarse de una bola abierta existe $r' > 0$ tal que $B(y, r') \subset B(x, r) \subset A$, por lo que $y \in \text{Int}(A) = U$. Por tanto, $B(x, r) \subset U$ y U es abierto.

Ahora tenemos que ver que es el mayor abierto. Supongamos que V es abierto y $V \subset A$. Sea $x \in V$, tenemos que existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset V \subset A$. Por tanto, $x \in \text{Int}(A) = U$ y $V \subset U$.

2. Si $A = \text{Int}(A)$ está claro que A es abierto. Recíprocamente, si A es abierto, tenemos que como A es el mayor abierto contenido en A , $A = \text{Int}(A)$.

□

Ejemplo. En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, sea $A = (0, 2]$. Tenemos que $\text{Int}(A) = (0, 2)$. En efecto,

- (i) Si $x \in (0, 2)$, entonces existe $r > 0$ tal que $(x - r, x + r) \subset (0, 2) \subset (0, 2]$, por lo que $x \in \text{Int}(A)$.
- (ii) Recíprocamente, tenemos que $2 \notin \text{Int}(A)$, puesto que $\forall r > 0$ tenemos que $(2 - r, 2 + r)$

no es subconjunto de $(0, 2]$.

Definición 1.12 (Punto adherente). Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que $x \in X$ es **punto adherente** a A (o también **punto clausura**) si $\forall r > 0$, $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$. Denotamos \overline{A} o $Adh(A)$ al conjunto de puntos adherentes de A .

Observación. Se ve trivialmente que $A \subset \overline{A}$.

Ejemplo. En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sea $A = (0, 2]$. Tenemos que $\overline{A} = [0, 2]$. En efecto:

- (i) Tenemos que $0 \in \overline{A}$, puesto que $\forall r > 0$ tenemos que $(-r, r) \cap A \neq \emptyset$. Así, tenemos que $[0, 2] \subset \overline{A}$.
- (ii) Recíprocamente, si $x > 2$, tenemos que existe $r > 0$ suficientemente pequeño tal que $x - r > 2$, por tanto $x \notin \overline{A}$. Similarmente, podemos demostrar que $0 \notin \overline{A}$.

Lema 1.1. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces, $\overline{A} = X / \text{Int}(X/A)$.

Demostración. (i) Sea $x \in \overline{A}$. Tenemos que $\forall r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$, por lo que $B(x, r) \not\subset X/A$, por lo que $x \notin \text{Int}(X/A)$, por lo que $x \in X / \text{Int}(X/A)$.

(ii) Sea $x \in X / \text{Int}(X/A)$, entonces $x \notin \text{Int}(X/A)$, es decir, $\forall r > 0$ tenemos que $B(x, r) \not\subset X/A$. Así, debe ser que $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$, por lo que $x \in \overline{A}$. □

Proposición 1.9. 1. \overline{A} es el menor cerrado que contiene a A .

2. Un conjunto $A \subset X$ es cerrado si y solo si $A = \overline{A}$.

Demostración. 1. Tenemos que $\overline{A} = X / \text{Int}(X/A)$, por lo que su complementario es abierto y él es cerrado. Ahora vamos a ver que es el menor cerrado que contiene a A . Sea $C \subset X$ cerrado con $A \subset C$. Tenemos que $X/C \subset X/A$, por lo que $X/C \subset \text{Int}(X/A)$ y tenemos que $C \supset X / \text{Int}(X/A) = \overline{A}$.

2. Si $A = \overline{A}$, A es cerrado. Por otro lado, si A es cerrado, entonces su complementario, X/A es abierto, por lo que $X/A = \text{Int}(X/A)$, por lo que $\overline{A} = X / \text{Int}(X/A) = X / (X/A) = A$. □

Definición 1.13 (Punto frontera). Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que $x \in X$ es un **punto frontera** de A si $\forall r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ y $B(x, r) \cap (X/A) \neq \emptyset$. Denotamos $Fr(A)$ o ∂A el conjunto de puntos frontera de A .

Observación. Tenemos que $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X/A}$ y en particular $Fr(A)$ es cerrado.

Ejemplo. En $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ sea $A = \{(x, y) : 0 < x \leq 1\}$. Tenemos que

$$Fr(A) = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \cup \{(1, y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

En efecto:

- (i) Sea $P = (0, y)$. Tenemos que $\forall r > 0$, $B(P, r) \cap A \neq \emptyset$ y $B(P, r) \cap (X/A) \neq \emptyset$. Así, $P \in Fr(A)$. De forma análoga, se puede demostrar que $P = (1, y) \in Fr(A)$.
- (ii) El recíproco lo demostramos típicamente por contrapositiva. Sea $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ con $x \neq 0$ y $x \neq 1$. Hay tres posibilidades a considerar: $x \in (-\infty, 0)$, $x \in (0, 1)$ o $x \in (1, \infty)$. Si $x \in (-\infty, 0)$, $\exists r > 0$ tal que $B(P, r) \cap A = \emptyset$. El resto de los casos se demuestran de forma análoga.

Definición 1.14 (Punto de acumulación). Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que $x \in X$ es un **punto de acumulación** de A si $\forall r > 0$ se tiene que $A \cap (B(x, r) / \{x\}) \neq \emptyset$. Denotamos A' el conjunto de los puntos de acumulación de A .

Observación. Tenemos que $A' \subset \overline{A}$. En efecto, si $x \in A'$, tenemos que $\forall r > 0$ se cumple que $A \cap (B(x, r) / \{x\}) \neq \emptyset$, es decir, $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$, por lo que $x \in \overline{A}$.

Ejemplo. Consideremos $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \subset (\mathbb{R}^2, d_2)$. Tenemos que

- $\text{Int}(A) = \emptyset$. En efecto, tenemos que $\forall r > 0$, si $n_0 = (n, n) \in \mathbb{N}^2$, existe $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ tal que $n < x < n + r$, por lo que $(x, x) \in B(n, r)$ pero $(x, x) \notin \mathbb{N}^2$.
- $\overline{A} = A$. En efecto, si $x \notin A$, tenemos que podemos encontrar $r > 0$ suficientemente pequeño tal que $B(x, r) \cap A = \emptyset$.
- $\partial A = A$. Dado que $A = \overline{A}$ y $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X/A}$, tenemos que $A \subset \partial A$. Por otro lado, si $x \notin A$, tenemos que existe un $r > 0$ suficientemente pequeño tal que $B(x, r) \cap A = \emptyset$, como hemos visto anteriormente, por lo que $x \notin \partial A$.
- $A' = \emptyset$. Si cogemos $r < 1$ y $n \in \mathbb{N}^2$, está claro que $(B(n, r) / \{n\}) \cap A = \emptyset$, por lo que n no puede ser un punto de acumulación. Si $x \notin A$, hacemos un argumento similar al del apartado anterior.

Definición 1.15 (Punto aislado). Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que $x \in A$ es un **punto aislado** de A si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap A = \{x\}$. Denotaremos $\text{Ais}(A)$ al conjunto de los puntos aislados de A .

Proposición 1.10. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces, se cumple que $\overline{A} = A' \cup \text{Ais}(A)$.

Demostración. (i) Sea $x \in \overline{A}$. Supongamos que $x \notin A'$, entonces existe $r > 0$ tal que $A \cap (B(x, r) \setminus \{x\}) = \emptyset$. Sin embargo, sabemos que $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$ al ser $x \in \overline{A}$, por tanto debe ser que $A \cap B(x, r) = \{x\}$, es decir, $x \in \text{Ais}(A)$.

(ii) Está claro que $\text{Ais}(A) \subset A \subset \overline{A}$ y $A' \subset \overline{A}$, por lo que $A' \cup \text{Ais}(A) \subset \overline{A}$. □

Corolario 1.1. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces, A es cerrado si y solo si A contiene todos sus puntos de acumulación.

Demostración. (i) Tenemos que $A = \overline{A} = A' \cup \text{Ais}(A)$, por lo que $A' \subset A$.

(ii) Tenemos que $\text{Ais}(A) \subset A$ y $A' \subset A$, por lo que $\overline{A} = \text{Ais}(A) \cup A' \subset A$, así, $\overline{A} = A$. □

Definición 1.16. Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ y $x \in X$. Se define la **distancia** de x a A como:

$$d(x, A) = \inf \{d(x, a) : a \in A\}.$$

Proposición 1.11. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces,

$$\overline{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}.$$

Demostración. (i) Sea $x \in \overline{A}$, entonces existe $r > 0$ tal que $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$. Por tanto, existe $a_r \in A \cap B(x, r)$, por tanto $d(x, a_r) < r$. Así, tenemos que

$$d(x, A) \leq d(x, a_r) < r, \quad \forall r > 0.$$

Por tanto, $d(x, A) = 0$.

(ii) Tenemos que $\forall r > 0$, $d(x, A) < r$, por lo que existe $a_r \in A$ tal que $d(x, a_r) < r$. Por tanto, $a_r \in A \cap B(x, r) \neq \emptyset$ y podemos concluir que $x \in \overline{A}$. □

1.4. Conjuntos abiertos y cerrados relativos

Observación. Sean (X, d) un espacio métrico e $Y \subset X$. Sabemos que (Y, d_Y) es un subespacio métrico de (X, d) donde $d_Y(y_1, y_2) = d(y_1, y_2)$. Dado $y_0 \in Y$ y $r > 0$, la bola $B_Y(y_0, r) = \{y \in Y : d(y, y_0) < r\} = B(y_0, r) \cap Y$. Es decir, la forma de las bolas cambia.

Observación. En un espacio métrico (X, d) , todo conjunto abierto es unión de bolas abiertas. En efecto, si A es abierto, entonces $\forall a \in A$, existe $r_a > 0$ tal que $B(a, r_a) \subset A$, por lo que $A = \bigcup_{a \in A} B(a, r_a)$ ^a.

^aEsta observación se puede reformular diciendo que un subconjunto $A \subset X$ es abierto si y solo si es unión de bolas abiertas.

Proposición 1.12. Sean (X, d) un espacio métrico e $Y \subset X$.

(a) $A \subset Y$ es d_Y -abierto si y solo si existe $U \subset X$ abierto tal que $A = U \cap Y$.

(b) $C \subset Y$ es d_Y -cerrado si y solo si existe $H \subset X$ cerrado tal que $C = H \cap Y$.

Estos conjuntos se llaman **abiertos y cerrados relativos** de Y , respectivamente.

Demostración. (a) Sea $Y \subset X$,

- (i) Tenemos que $\forall y \in A$, existe $r_y > 0$ tal que $B_Y(y, r_y) \subset A$. Definimos $U = \bigcup_{y \in A} B(y, r_y)$, que es abierto en (X, d) por ser unión de bolas abiertas. Veamos que $A = U \cap Y$. Tenemos que si $y \in A$, entonces $y \in B(y, r_y) \subset A \subset U$ (puesto que $B_Y(y, r_y) \subset B(y, r_y)$). Recíprocamente, sea $z \in Y \cap U$, entonces existe $y \in Y$ tal que $z \in B(y, r_y) \cap Y = B_Y(y, r_y) \subset A$. Por tanto, $Y \cap U \subset A$.
- (ii) Dado $y_0 \in A = U \cap Y$, como U es abierto³, existe $r > 0$ tal que $B(y_0, r) \subset U$. Por tanto, tenemos que $B_Y(y_0, r) = B(y_0, r) \cap Y \subset U \cap Y = A$. Así, hemos visto que A es d_Y -abierto.

(b) Sea $Y \subset X$.

- (i) Sea $C \subset Y$ d_Y -cerrado, entonces tenemos que Y/C es d_Y -abierto. Así, existe $U \subset X$ abierto tal que $Y/C = U \cap Y$. Sea $H = X/U$, que es cerrado. Veamos que $C = H \cap Y$:

$$C = Y/(Y/C) = Y/(U \cap Y) = Y/U = Y \cap (X/U) = Y \cap H.$$

- (ii) Si $C = H \cap Y$ con H cerrado en X , entonces X/H es abierto. Tenemos que

$$Y/C = Y/(H \cap Y) = Y \cap (X/H).$$

Dado que X/H es abierto, por (a) tenemos que Y/C es d_Y -abierto, por lo que C es d_Y -cerrado.

□

1.5. Sucesiones en espacios métricos

³Cuando escribimos abierto y $B(x, r)$ queremos decir que es d -abierto y es la bola en X , respectivamente.

Definición 1.17 (Sucesión y convergencia). Sea (X, d) un espacio métrico. Una **sucesión** es una aplicación $S : \mathbb{N} \rightarrow X$. Si $S(n) = x_n \in X$, denotamos la sucesión por $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Se dice que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** a $x_0 \in X$ cuando $d(x_n, x_0)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$

Observación. Recordamos que $x_n \rightarrow x_0$ si y solo si (ambas definiciones son equivalentes):

- $\forall \varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene que $d(x_n, x_0) < \varepsilon$.
- $\forall \varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene que $x_n \in B(x_0, \varepsilon)$.

Proposición 1.13. Sea (X, d) un espacio métrico. Si la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge, el límite es único.

Demostración. Supongamos que $l_1, l_2 \in X$ son límites de la sucesión, entonces tenemos que si $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se cumple que

$$d(l_1, l_2) \leq d(l_1, x_n) + d(x_n, l_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, debe ser que $d(l_1, l_2) = 0$, por lo que $l_1 = l_2$. \square

Proposición 1.14. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces, $x \in \bar{A}$ si y solo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tal que $x_n \rightarrow x$.

Demostración. (i) Tenemos que si $x \in \bar{A}$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, es decir. Así, podemos coger una sucesión tal que para $\varepsilon = \frac{1}{n}$ se tiene que $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A$. Vamos a ver que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x .

$$0 \leq d(x_n, x) < \frac{1}{n} \Rightarrow d(x_n, x) \rightarrow 0 \iff x_n \rightarrow x.$$

(ii) Si existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tal que $x_n \rightarrow x$, tenemos que si $r > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0, x_n \in B(x, r)$, es decir, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$, por lo que $x \in \bar{A}$. \square

Proposición 1.15. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces $x \in A'$ si y solo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de términos distintos con $x_n \rightarrow x$.

Demostración. (i) Si $x \in A'$, tenemos que $\forall r > 0, A \cap (B(x, r) \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.

- Para $n = 1$, tomamos x_1 tal que $x_1 \in A \cap (B(x, 1) \setminus \{x\})$.

- Para $n = 2$, tomamos $\varepsilon = \min \left\{ \frac{1}{2}, d(x_1, x) \right\}$, y tomamos x_2 tal que $x_2 \in A \cap (B(x, \varepsilon) / \{x\})$.
- Asumimos que tenemos $\{x_1, \dots, x_n\}$ distintos como los hemos descrito anteriormente. Ahora, en el caso $n + 1$, cogemos $\varepsilon = \min \left\{ \frac{1}{n+1}, d(x_i, x) \right\}$ para $i = 1, \dots, n$. Así, cogemos $x_{n+1} \in A \cap (B(x, \varepsilon) / \{x\})$. Obtenemos que

$$0 < d(x_{n+1}, x) < \frac{1}{n+1} < d(x_i, x), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Así, está claro que $x_{n+1} \neq x_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Así, hemos construido la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que buscábamos. Tenemos que ver que la sucesión converge a x . En efecto, si $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, $\frac{1}{n} < \varepsilon$, por lo que $d(x_n, x) < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

- (ii) Puesto que los elementos de la sucesión no se repiten, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq m$, $x_n \neq x$. Como la sucesión converge, si $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \geq m$ tal que $\forall n \geq n_0$, $A \cap (B(x_n, \varepsilon) / \{x\}) \neq \emptyset$, por lo que $x \in A'$. □

Observación. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Tenemos que una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un punto $x \in E$ si y solo si $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

Proposición 1.16. En \mathbb{R}^n consideremos las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de \mathbb{R}^n tal que

$$x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n),$$

y $x_n \rightarrow x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$. Entonces, la sucesión converge coordenada a coordenada, es decir, $x_k^i \rightarrow x^i$ para $1 \leq i \leq n$.

Demostración. Recordamos que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

Así, tenemos que si $x_k \rightarrow x$,

$$\|x_k - x\|_\infty \leq \|x_k - x\|_2 \leq \|x_k - x\|_1 \leq n\|x_k - x\|_\infty.$$

Por tanto, la convergencia no depende de la métrica que escojamos. Así, para $1 \leq i \leq n$ tenemos que

$$|x_k^i - x^i| \leq \|x_k - x\|_2 \leq |x_k^1 - x^1| + \dots + |x_k^n - x^n| \rightarrow 0.$$

□

Definición 1.18 (Subsucesión). Sea sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, donde (X, d) es un espacio métrico. Una **subsucesión** es otra sucesión de la forma $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que n_k es estrictamente creciente.

Proposición 1.17. Sea (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \rightarrow x$. Entonces, toda subsucesión converge a x .

Demostración. Sea $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Tenemos que si $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene que $d(x_n, x) < \varepsilon$. Como $n_k \rightarrow \infty$, podemos encontrar $n_{k_0} \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n_k \geq n_{k_0}$ se tenga que $n_k \geq n_0$, por lo que $\forall k \geq k_0$, tenemos que $d(x_k, x) < \varepsilon$. Así, hemos visto que la subsucesión converge al mismo límite. \square

1.6. Completitud

Definición 1.19 (Sucesión de Cauchy). Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X es una **sucesión de Cauchy** si $\forall \varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m, n \geq n_0$, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Proposición 1.18. Toda sucesión convergente es de Cauchy.

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ una sucesión convergente a $x_0 \in X$. Así, si $\varepsilon > 0$, tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Si $n, m \geq n_0$,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

\square

Definición 1.20 (Espacio completo). Se dice que un espacio métrico (X, d) es **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente en (X, d) .

Teorema 1.4. El espacio $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es completo.

Ejemplo. Consideramos $X = \mathbb{Q}$ con la distancia usual. Entonces, $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ no es completo. Hay sucesiones $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ de Cauchy tales que $q_n \rightarrow x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Entonces la sucesión $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no converge en $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$. Como ejemplo se puede tomar la sucesión de los decimales de $\sqrt{2}$.

Corolario 1.2. El espacio \mathbb{R}^n con la norma $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y con $\|\cdot\|_\infty$ también es completo.

Demostración. Recordamos que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

Por tanto una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ es de Cauchy para $\|\cdot\|_\infty$ si y solo si lo es para $\|\cdot\|_2$, si y solo si lo es para $\|\cdot\|_1$. Por ejemplo, para $\|\cdot\|_2$, si $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ es de Cauchy, entonces $\forall \varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k, j \geq k_0$,

$$|x_k^i - x_j^i| \leq \|x_k - x_j\|_2 < \varepsilon, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Donde $x_m = (x_m^1, \dots, x_m^n)$. Por tanto, cada componente $\{x_k^i\}_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en \mathbb{R} , por lo que cada componente es convergente en \mathbb{R} y la sucesión es convergente en \mathbb{R}^n . \square

Ejemplo. Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Consideramos el siguiente espacio normado:

$$X = \mathcal{C}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ continua en } [a, b]\}.$$

$$\|f\|_\infty = \sup \{|f(t)| : t \in [a, b]\} = \max \{|f(t)| : t \in [a, b]\}.$$

Por ser f continua, la norma está bien definida. Se trata de una norma, puesto que:

- $\|f\|_\infty \geq 0$.
- $\|f\|_\infty = 0$ si y solo si $|f(t)| = 0, \forall t \in [a, b]$, es decir, $f = 0$.
- $\|\lambda f\|_\infty = \sup \{|\lambda f(t)| : t \in [a, b]\} = |\lambda| \sup \{|f(t)| : t \in [a, b]\} = |\lambda| \|f\|_\infty$.
- Comprobamos la propiedad triangular:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_\infty &= \sup \{|f(t) + g(t)| : t \in [a, b]\} \\ &\leq \sup \{|f(t)| : t \in [a, b]\} + \sup \{|g(t)| : t \in [a, b]\} = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Podemos observar que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow f$ en $\|\cdot\|_\infty$ si y solo si $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$. Es decir, si $\forall \varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$: $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$. Esto es cierto si y solo si $\forall \varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene que $|f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon, \forall t \in [a, b]$. Es decir, si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en $[a, b]$ a f .

Otra observación que podemos hacer es que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy con $\|\cdot\|_\infty$ si y solo si $\forall \varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq n_0$ se tiene que $\|f_m - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$, si y solo si $\forall \varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq n_0, |f_n(t) - f_m(t)| \leq \varepsilon, \forall t \in [a, b]$. Así, podemos decir que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es **uniformemente de Cauchy**.

Teorema 1.5. El espacio $(\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ es completo.

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy para $\|\cdot\|_\infty$. Tenemos que

$$\forall t \in [a, b], |f_n(t) - f_m(t)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty.$$

Luego, $\forall t \in [a, b]$, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en \mathbb{R} , por lo que existe $a_t \in \mathbb{R}$ tal que $\{f_n(t)\} \rightarrow a_t$. Definimos la función

$$\begin{aligned} f : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow a_t. \end{aligned}$$

Vamos a ver que $f_n \rightarrow f$ en $\|\cdot\|_\infty$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq n_0$, tenemos que

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [a, b].$$

Si cogemos $m \rightarrow \infty$, tenemos que

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [a, b], \forall n \geq n_0.$$

Así, tenemos que $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$. Por tanto, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f uniformemente en $[a, b]$. Como el límite de una sucesión de funciones continuas es una función continua, tenemos que $f \in \mathcal{C}[a, b]$. \square

Proposición 1.19. Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $Y \subset X$. Entonces, (Y, d_Y) es completo si y solo si Y es cerrado en X .

Demostración. (i) Sea (Y, d_Y) completo. Vamos a ver que Y es cerrado. Sea $x \in \overline{Y}$, por lo que $\exists \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$ tal que $y_n \rightarrow x$. Por tanto, $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en X e Y . Luego, existe $y_0 = x = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in Y$, por lo que $x \in Y$. Así, tenemos que $\overline{Y} \subset Y$ y por tanto Y es cerrado.

(ii) Supongamos que Y es cerrado en X . Sea $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (Y, d_Y)$ sucesión de Cauchy. Entonces, $\forall \varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq n_0$ $d_Y(y_n, y_m) < \varepsilon$. Por ser de Cauchy en (X, d) , existe $x \in X$ tal que $y_n \rightarrow x$. Por tanto, tenemos que $x \in \overline{Y} = Y$, por lo que $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente en Y . \square