# Matemáticas Básicas - Deberes 3

Victoria Eugenia Torroja Rubio

25/9/24

**Ejercicio 1.** Sean $f$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 - 1$. Hallar las funciones $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$ y $g \circ g$ y determinar el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} \ : (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)\}.$$

**Solución 1.** Calculamos las funciones compuestas que nos pide el enunciado:

$$\begin{aligned} & f(f(x)) = \left(x^2\right)^2 = x^4, \qquad f(g(x)) = \left(x^2 - 1\right)^2 \\ & g(f(x)) = \left(x^2\right)^2 - 1 = x^4 - 1, \qquad g(g(x)) = \left(x^2 - 1\right)^2 - 1 = x^4 - 2x^2 = x^2\left(x^2 - 2\right). \end{aligned}$$

A continuación, resolvemos el siguiente apartado. Si $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} & \left(x^2 - 1\right)^2 = x^4 - 1 \\ \Rightarrow & x^4 - 2x^2 + 1 = x^4 - 1 \\ \Rightarrow & 2x^2 = 2 \\ \Rightarrow & x = \pm 1. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\{x \in \mathbb{R} \ : (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)\} = \{1, \ -1\}.$$

**Ejercicio 2.** Se define en $\mathbb{R}^2$ la relación $(x, y)\,\mathcal{R}\,(a, b)$ si y solo si $y - b = x^2 - a^2$. Demuestra que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. Describe las clases de equivalencia $[(0,0)]$, $[(0,2)]$ y $[(1,1)]$. Describe la clase de un punto cualquiera $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Describe el conjunto cociente $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$.

**Solución 2.** En primer lugar, demostramos que la relación $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ es una relación de equivalencia:

**(i)** Tenemos que es reflexiva, pues $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , $(x, y)\,\mathcal{R}\,(x, y)$:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad y - y = x^2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0.$$

**(ii)** Si $(x, y)\,\mathcal{R}\,(w, z)$,

$$y - z = x^2 - w^2, \text{ multiplicamos ambos lados por } -1 \text{ , } z - y = w^2 - x^2.$$

Por tanto, $(x, y)\,\mathcal{R}\,(w, z) \Rightarrow (w, z)\,\mathcal{R}\,(x, y)$ y $\mathcal{R}$ es simétrica.

**(iii)** Si $(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d)$ y $(c,d)\,\mathcal{R}\,(e,f)$, entonces

$$\begin{aligned} b-d&=a^2-c^2\\ d-f&=c^2-e^2\\ \therefore b-f&=a^2-e^2. \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{R}$ es transitiva.

En conclusión, $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

A continuación, encontramos las clases de equivalencia que nos pide el enunciado. Para ello, sustituimos los puntos que nos dan ((0,0), (0,2) y (1,1)) y encontramos los puntos $(x,y)$ que satisfacen dicha condición. Mostramos como ejemplo el caso de $[(1,1)]$:

$$1-y=1-x^2 \quad \Rightarrow y=x^2.$$

Por lo que los pares $(x,y)$ que componen la clase de equivalencia de $[(1,1)]$ son $\left(x,x^2\right)$ con $x\in\mathbb{R}$.

Las otras clases de equivalencia se obtienen de la misma manera.

$$\begin{aligned} [(0,0)]&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ (0,0)\,\mathcal{R}\,(x,y)\right\}=\left\{\left(x,x^2\right)\ :\ x\in\mathbb{R}\right\}\\ [(1,1)]&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ (1,1)\,\mathcal{R}\,(x,y)\right\}=\left\{\left(x,x^2\right)\ :\ x\in\mathbb{R}\right\}\\ [(0,2)]&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ (0,2)\,\mathcal{R}\,(x,y)\right\}=\left\{\left(x,x^2+2\right)\ :\ x\in\mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

En general, la clase de un punto $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ será el conjunto de puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tales que $(a,b)\,\mathcal{R}\,(x,y)$:

$$b-y=a^2-x^2 \ \Rightarrow y=x^2-\left(a^2-b\right).$$

Es decir,

$$[(a,b)]=\left\{\left(x,x^2-\left(a^2-b\right)\right)\ :\ x\in\mathbb{R}\right\}=\left[\left(0,b-a^2\right)\right].$$

Por tanto, todas las clases de equivalencia de los puntos $(a,b)$ con $a\neq 0$ se pueden expresar como la clase de equivalencia de $(0,k)$ con $k\in\mathbb{R}$. Consecuentemente, el conjunto cociente $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$ será el conjunto de todas las parábolas de la forma $y=x^2+c$ con $c\in\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R}^2/\mathcal{R}=\{[(0,a)]\ :\ a\in\mathbb{R}\}.$$