Cálculo Integral

Victoria Torroja Rubio

19/1/2026

Índice general

Despacho: 431

Correo: jose_mendoza@mat.ucm.es

Bibliografía:

- Para cálculo integral: Marsden & Hoffman: *Elementary Classical Analysis.*
- Para cálculo vectorial: Marsden & Tromba: *Vector calculus.*

Evaluación:

- 13/2/2026: cambiar la clase de cálculo con la de ecuaciones diferenciales.
- Control: 27/2/2026 (*sólo sube, pero cuenta poco, alrededor de un 10 %*).

Capítulo 1

Integral de Riemann

1.1. Conceptos básicos

Consideramos el paralelepípedo

$$R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

que es producto directo de intervalos compactos en $\mathbb{R}$. Consideremos también una función $f : R \to \mathbb{R}$ acotada. Definimos el **volumen** del rectángulo R como el producto de las longitudes de sus lados, es decir,

$$v(R) := (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$

Definición 1.1 (Partición). Tomamos particiones

$$P_1 \in \mathcal{P}([a_1, b_1]), \ldots, P_n \in \mathcal{P}([a_n, b_n]),$$

y decimos que $P = (P_1, \ldots, P_n) \in \mathcal{P}(R)$ es una **partición** de R.

De esta forma, estamos dividiendo el rectángulo R en subrectángulos.

Definición 1.2. Dadas dos particiones $P = (P_1, \ldots, P_n)$ y $Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$, decimos que P es **más fina** que Q, $P \geq Q$, si P_i es más fina que Q_i para $i = 1, \ldots, n$.

Si $T \in \mathcal{P}(R)$, entonces T es un pequeño paralelepípedo cuyos lados son intervalos de P_i (queremos decir que T es uno de los subrectángulos formados por la partición P). Podemos ver que para cada partición $P_i = \left\{x_0^i, \ldots, x_{m_i}^i\right\}$, los rectángulos T tendrán la forma

$$T = \left[x_{j_1}^1, x_{j_1+1}^1\right] \times \cdots \times \left[x_{j_n}^n, x_{j_n+1}^n\right], \ 0 \leq j_i \leq m_i - 1.$$

Así, definimos,

Definición 1.3 (Suma superior e inferior)**.** Decimos que la **suma inferior** de f por P es

$$s(f,P) := \sum_{T\in P} v(T) \operatorname{ínf}\{f(t) \ : \ t\in T\}.$$

Análogamente, decimos que la **suma superior** de f por P es

$$S(f,P) := \sum_{T\in P} v(T) \sup\{f(t) \ : \ t\in T\}.$$

Observación. A partir de la definición anterior, podemos hacer un par de observaciones.

- En primer lugar, como f está acotada, las sumas superiores e inferiores están bien definidas.
- Para cualquier partición $P\in\mathcal{P}(R)$ se cumple que $s(f,P)\leq S(f,P)$.

Para introducir la noción de **integral superior** e **integral inferior**, tenemos que ver que las sumas superiores e inferiores están acotadas, esto se puede ver de dos formas.

Notación. A partir de ahora, utilizamos la notación siguiente:

$$\alpha_T = \operatorname{ínf}\{f(t) \ : \ t\in T\} \quad \text{y} \quad \beta_T = \sup\{f(t) \ : \ t\in T\}.$$

Forma 1

Sea $P\in\mathcal{P}(R)$. Como f es acotada en R sabemos que existen $M,m\in\mathbb{R}$ tales que

$$m\leq f(x)\leq M, \ \forall x\in R.$$

Así, tenemos que

$$\sum_{T\in P} mv(T) \leq s(f,P)\leq S(f,P)\leq \sum_{T\in P} Mv(T).$$

Demostremos ahora la igualdad

$$\sum_{T\in P} v(T) = v(R).$$

En primer lugar, consideremos el caso $n=1$. Cogemos $R=[a,b]$ y la partición $P=\{t_0=a,t_1,\ldots,t_m=b\}$. Así, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{m} v([t_{i-1},t_i]) = \sum_{i=1}^{m}(t_i-t_{i-1}) = t_m-t_0 = b-a = v(R).$$

Demostraremos el caso $n=2$ pues a partir de este es fácil generalizar la demostración para $n>2$. Por tanto, tomamos $R=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ con la partición $P=(P_1,P_2)$ tal que

$$P_1=\{t_0=a_1,t_1,\ldots,t_m=b_1\}, \quad P_2=\{q_0=a_2,q_1,\cdots,q_r=b_2\}.$$

Tendremos que

$$\sum_{T\in R} v\left(T\right) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{r-1} v\left(\left[t_i,t_{i+1}\right]\times\left[q_j,q_{j+1}\right]\right) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{r-1}\left(t_{i+1}-t_i\right)\left(q_{j+1}-q_j\right) = \left(b_1-a_1\right)\left(b_2-a_2\right).$$

Así, podemos decir que

$$mv\left(R\right)\leq s\left(f,P\right)\leq S\left(f,P\right)\leq Mv\left(R\right).$$

Forma 2

Lema 1.1. Sean $P,T\in\mathcal{P}\left(R\right)$ con $T\geq P$. Entonces,

$$s\left(f,P\right)\leq s\left(f,T\right)\leq S\left(f,T\right)\leq S\left(f,P\right).$$

Demostración. Lo demostramos para $n=2$ puesto que la demostración es fácil de generalizar para $n>2$. Sea $P=\left(P_1,P_2\right)\in\mathcal{P}\left(R\right)$. Para demostrar el lema basta con demostrar el caso $P'=\left(P_1',P_2\right)$, donde $P_1'=P_1\cup\{u\}$. Claramente tenemos que P' es más fina que P. Concretamente, supongamos que

$$P_1=\left\{t_0^1,\dots,t_n^1\right\}\quad \text{y}\quad P_1'=\left\{t_0^1,\dots,t_i^1,u,t_{i+1}^1,\dots,t_n^1\right\}.$$

Sea $P_2=\{q_0,\dots,q_r\}$, y definimos los conjuntos de rectángulos

$$J_1=\{[t_i,u]\times[q_j,q_{j+1}]\ :\ 0\leq j\leq r-1\}\quad \text{y}\quad J_2=\{[u,t_{i+1}]\times[q_j,q_{j+1}]\ :\ 0\leq j\leq r-1\}.$$

Claramente tenemos que $J_1\cap J_2=\emptyset$. De esta forma, tenemos que

$$\begin{aligned} s\left(f,P'\right) &= \sum_{T\in P'} v\left(T\right)\alpha_T = \sum_{T\in P'/(J_1\cup J_2)} v\left(T\right)\alpha_T + \sum_{T\in J_1} v\left(T\right)\alpha_T + \sum_{T\in J_2} v\left(T\right)\alpha_T \\ &= \sum_{T\in P'/(J_1\cup J_2)} v\left(T\right)\alpha_T + \sum_{j=0}^{r-1}\left(u-t_i\right)\left(q_{j+1}-q_j\right)\alpha_j^1 + \sum_{j=0}^{r-1}\left(t_{i+1}-u\right)\left(q_{j+1}-q_j\right)\alpha_j^2 \\ &\geq \sum_{T\in P'/(J_1\cup J_2)} v\left(T\right)\alpha_T + \sum_{j=0}^{r-1}\left(t_{i+1}-t_i\right)\left(q_{j+1}-q_j\right)\alpha_j = s\left(f,P\right). \end{aligned}$$

La desigualdad para la suma superior se demuestra de forma análoga. □

Proposición 1.1. Dadas dos particiones, $P,Q\in\mathcal{P}\left(R\right)$

$$s\left(f,P\right)\leq S\left(f,Q\right).$$

Demostración. Sea $T=\left(P_1\cup Q_1,\dots,P_n\cup Q_n\right)\in\mathcal{P}\left(R\right)$. Claramente, $T\geq P$ y $T\geq Q$. Por tanto, aplicando el lema anterior

$$s\left(f,P\right)\leq s\left(f,T\right)\leq S\left(f,T\right)\leq S\left(f,Q\right).$$

□

Por ambas formas hemos visto que existen

$$\text{ínf}\left\{S\left(f,P\right)\;:\;P\in\mathcal{P}\left(R\right)\right\}\quad\text{y}\quad\sup\left\{s\left(f,P\right)\;:\;P\in\mathcal{P}\left(R\right)\right\},$$

por lo que estamos en condiciones de definir la integral superior e inferior.

Definición 1.4 (Integral superior e inferior)**.** Se define como **integral superior** e **integral inferior** a los valores

$$\overline{\int_R} f=\text{ínf}\left\{S\left(f,P\right)\;:\;P\in\mathcal{P}\left(R\right)\right\}\quad\text{y}\quad\underline{\int_R} f=\sup\left\{s\left(f,P\right)\;:\;P\in\mathcal{P}\left(R\right)\right\},$$

repsectivamente. Decimos que f es **integrable** si el valor de la integral superior e inferior coincide.

Corolario 1.1. Dada $f:R\to\mathbb{R}$ acotada,

$$\underline{\int_R} f\leq\overline{\int_R} f.$$

Ejemplo. Consideremos $f\equiv c$, con c constante. Tenemos que para una partición $P\in\mathcal{P}\left(R\right)$,

$$s\left(f,P\right)=\sum_{T\in P}v\left(T\right)\text{ínf}\left\{f\left(t\right)\;:\;t\in T\right\}=\sum_{T\in P}v\left(T\right)c=cv\left(R\right).$$

Por otro lado,

$$S\left(f,P\right)=\sum_{T\in P}v\left(T\right)\sup\left\{f\left(t\right)\;:\;t\in T\right\}=\sum_{T\in P}v\left(T\right)c=cv\left(R\right).$$

Como la integral superior y la inferior coinciden, debe ser que la función es integrable.

Teorema 1.1 (Criterio de integrabilidad de Riemann)**.** Una función $f:R\to\mathbb{R}$ acotada es integrable si y solo si $\forall\varepsilon>0$, $\exists P_\varepsilon\in\mathcal{P}\left(R\right)$ tal que

$$S\left(f,P_\varepsilon\right)-s\left(f,P_\varepsilon\right)<\varepsilon.$$

Demostración. **(i)** Supongamos que f es integrable y sea $\varepsilon>0$. Por definición de supremo e ínfimo, tenemos que existen particiones $P_1,P_2\in\mathcal{P}\left(R\right)$ tales que

$$\int_R f-\frac{\varepsilon}{2}<s\left(f,P_1\right),\;\int_R f+\frac{\varepsilon}{2}>S\left(f,P_2\right).$$

Cogemos $P_\varepsilon\in\mathcal{P}\left(R\right)$ más fina que P_1 y P_2 y tenemos que

$$S\left(f,P_\varepsilon\right)-s\left(f,P_\varepsilon\right)\leq S\left(f,P_2\right)-s\left(f,P_1\right)<\left(\int_R f+\frac{\varepsilon}{2}\right)-\left(\int_R f-\frac{\varepsilon}{2}\right)=\varepsilon.$$

(ii) Sea $\varepsilon > 0$, entonces por hipótesis tenemos que

$$0 \leq \overline{\int_R} f - \underline{\int_R} f \leq S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, debe ser que la integral superior y la inferior coinciden, por lo que f es integrable.

□

Observación. La negación del criterio anterior nos permite ver cuándo una función no es integrable, que es si y solo si existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $S(f, P) - s(f, P) \geq \varepsilon_0$, $\forall P \in \mathcal{P}(R)$.

Ejemplo. Un ejemplo muy común de función no integrable es la función de Dirichlet,

$$f : [0,1] \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Este ejemplo lo podemos generalizar en $\mathbb{R}^n$. En efecto, podemos tomar $R = [0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$, con

$$f : R \to \mathbb{R} : x = (x_1, \ldots, x_n) \to \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}^n \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}^n \end{cases}.$$

Tenemos que $\forall P \in \mathcal{P}(R)$, $S(f, P) = 1$ y $s(f, P) = 0$, por lo que $S(f, P) - s(f, P) = 1$ y f no es integrable.
Esta noción la podemos generalizar. Consideremos $R = [0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ y $A \subset \mathbb{R}$ tal que A y R/A son densos en R. Por denso queremos decir que todo rectángulo no trivial J, $A \cap J \neq \emptyset$ y $(R/A) \cap J \neq \emptyset$. Entonces,

$$f : R \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in R/A \end{cases},$$

no es integrable.

Teorema 1.2 (Teorema de Darboux)**.** Una función $f : R \to \mathbb{R}$ acotada es integrable en R con integral I si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $P \in \mathcal{P}(R)$ con $\|P\| < \delta$ [a], entonces

$$\left| \sum_{J \in P} f(x_J)\, v(J) - I \right| < \varepsilon, \quad \forall x_J \in J.$$

[a] Para cualquier $J \in P$, el diámetro de J es menor a δ.

Demostración. **(i)** Supongamos que $f : R \to \mathbb{R}$ es integrable con integral I y sea $\varepsilon > 0$. Por el criterio de integrabilidad de Riemann, existe $P_\varepsilon \in \mathcal{P}(R)$ tal que $S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$.

(ii) Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que si $\|P\| < \delta$ entonces

$$\left| \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\, v(J_i) - I \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

Donde $J_1, \ldots, J_N$ son los rectángulos que componen la partición P. Cogemos $x_i \in J_i$ tal que

$$|f(x_i) - \beta_{J_i}| < \frac{\varepsilon}{v(J_i)\, 2N}.$$

Así, tenemos que

$$|S(f,P) - I| \leq \left| S(f,P) - \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\, v(J_i) \right| + \left| \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\, v(J_i) - I \right|.$$

Tenemos que

$$\left| S(f,P) - \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\, v(J_i) \right| < \sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon v(J_i)}{v(J_i)\, 2N} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así, obtenemos que $|S(f,P) - I| < \varepsilon$. De forma análoga se puede demostrar que $|I - s(f,P)| < \varepsilon$. De esta forma, obtenemos que si $\varepsilon > 0$ existe $P \in \mathcal{P}(R)$ tal que

$$|S(f,P) - s(f,P)| \leq |S(f,P) - I| + |I - s(f,P)| < \varepsilon,$$

y por el criterio de Riemann tenemos que f es integrable en R. Además, por lo visto anteriormente, existe $P \in \mathcal{P}(R)$ tal que

$$\left| \overline{\int_R} f - I \right| \leq \left| \overline{\int_R} f - S(f,P) \right| + |S(f,P) - I| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

El caso para la integral inferior es análogo. Así, hemos demostrado que $\displaystyle\int_R f = I$.

□

Teorema 1.3. Sea $f : R \to \mathbb{R}$ continua, entonces f es integrable.

Demostración. En esta demostración trabajaremos con la norma infinita pero la equivalencia de normas permite generalizar el resultado para cualquier norma en $\mathbb{R}^n$. Dado que f es continua en R y este es compacto, tenemos que f es uniformemente continua en R. Sea $\varepsilon > 0$ y $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{v(R)} > 0$. Tenemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - y\|_\infty < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon',\ \forall x, y \in R.$$

Así, cogemos una partición $P_\delta \in \mathcal{P}(R)$ que form rectángulos de lados con longitud menor a δ. Recordamos que dado que f es continua en R, lo es también en cada subrectángulo generado por la partición P_δ. De esta forma, en cada $T \in P_\delta$, f alcanza su máximo y su mínimo, β_T y α_T, respectivamente. Por tanto,

$$S(f,P_\delta) - s(f,P_\delta) = \sum_{T \in P_\delta} v(T)(\beta_T - \alpha_T) < \varepsilon' \sum_{T \in P_\delta} v(T) = \varepsilon.$$

Por el criterio de integrabilidad de Riemann, f es integrable en R. □

1.2. Integrales en otros conjuntos

Definición 1.5 (Volumen). Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ con $A \neq \emptyset$ y A acotado. Tomamos un rectángulo R tal que $A \subset R$. Definimos la función

$$\chi_A : R \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$

Diremos que A tiene **volumen** (A es **medible Jordan**) si χ_A es integrable y en este caso diremos que su **volumen** es

$$V(A) = \int_R \chi_A.$$

Observación. Ya vimos anteriormente que $\mathbb{Q}^n \cap [0,1]^n$ no tiene volumen.

Observación. Sea $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ acotado y R un rectángulo tal que $A \subset R$. Cogemos $P \in \mathcal{P}(R)$. Podemos observar que

$$\alpha_J = \begin{cases} 1, & J \subset A \\ 0, & J \subsetneq A \end{cases}.$$

Así, tendremos que

$$s(\chi_A, P) = \sum_{J \in P} v(J)\, \alpha_J = \sum_{J \in P, J \subset A} v(J).$$

De esta forma,

$$\underline{\int_R} \chi_A = \sup \left\{ \sum_{J \in P, J \subset A} v(J) \ : \ P \in \mathcal{P}(R) \right\}.$$

Consideremos ahora las sumas superiores,

$$\beta_J = \begin{cases} 1, & J \cap A \neq \emptyset \\ 0, & J \cap A = \emptyset \end{cases}.$$

De esta forma,

$$S(\chi_A, P) = \sum_{J \in P, J \cap A \neq \emptyset} v(J).$$

Así,

$$\overline{\int_R} \chi_A = \inf \left\{ \sum_{J \in P, J \cap A \neq \emptyset} v(J) \ : \ P \in \mathcal{P}(R) \right\}.$$

Ejemplo. Si R es un rectángulo, R es medible Jordan.

Definición 1.6 (Integral en otros conjuntos). Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado y $f : A \to \mathbb{R}$ también acotada. Diremos que f **es integrable en** A si existe R rectángulo tal que $A \subset R$ y

$$\tilde{f} : R \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases},$$

es integrable en R. En este caso

$$\int_A f := \int_R \tilde{f}.$$

De forma equivalente, desde $f : R \to \mathbb{R}$ y $A \subset R$, diremos que f es integrable en A si $f \cdot \chi_A$ es integrable en R y tomamos

$$\int_A f = \int_R f \cdot \chi_A.$$

Observación. Tanto para la definición anterior como para la de volumen, tenemos que ver que basta con que exista R, puesto que en cuanto existe uno para cualquier otro rectángulo que cumpla estas características el valor de la integral coincide.

En efecto, si $\tilde{f} : R \to \mathbb{R}$ es integrable y R' es otro rectángulo tal que $A \subset R'$, basta con tomar el rectángulo que contenga a $R \cap R'$, puesto que dado que $\tilde{f}$ es integrable en R, también lo será en este nuevo rectángulo (puesto que realmente hemos cortado partes en las que la función se anulaba). Así, el valor de la integral en R y R' coincidirá. Esto se ve de forma más clara con la observación anterior.

1.3. Propiedades de la integral

Proposición 1.2 (Propiedades de las integrales)**.** Sea $A \subset \mathbb{R}^n$.

1. Si $f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}$ son integrables en A, entonces
$$\int_A f_1 + f_2 = \int_A f_1 + \int_A f_2.$$
2. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ es integrable en A, entonces
$$\int_A \alpha f = \alpha \int_A f.$$
3. Si $f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}$ son integrables en A, con $f_1 \leq f_2$, $\forall x \in A$, entonces
$$\int_R f_1 \leq \int_R f_2.$$

Demostración. Aplicamos el teorema de Darboux.

1. Sea $\varepsilon > 0$, como f y g son integrables tenemos que existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ y $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(R)$, con $\|P_1\| < \delta_1$ y $\|P_2\| < \delta_2$, tales que
$$\left| \sum_{J \in P_1} f(y_j) v(J) - I_1 \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left| \sum_{T \in P_2} g(z_j) v(J) - I_2 \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Cogemos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, y tomamos $P \in \mathcal{P}(R)$ con $\|P\| < \delta$, de esta forma
$$\left| \sum_{J \in P} (f+g)(x_j) v(J) - (I_1 + I_2) \right| \leq \left| \sum_{J \in P} f(x_J) v(J) - I_1 \right| + \left| \sum_{J \in P} g(x_J) v(J) - I_2 \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Proposición 1.3. Por otro lado,

Demostración. Hay que ver primero que si $f \geq 0$, entonces
$$\int_R f \geq 0.$$
Una vez demostrado esto, basta con aplicar la linealidad y lo demostrado anteriormente con $f_2 - f_1 \geq 0$. □

Supongamos que $f : R \to \mathbb{R}$ es integrable en R. Entonces, f es acotada, por lo que existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que
$$m \leq f(x) \leq M, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$
Así, tenemos que
$$\int_R m \leq \int_R f \leq \int_R M \Rightarrow m v(R) \leq \int_R f \leq M v(R).$$