Ecuaciones Diferenciales

Victoria Torroja Rubio

19/1/2026

Índice general

1. Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias **3**
1.1. Motivación: problema directo e inverso . . . 3
1.2. Notación y conceptos básicos . . . 3
1.2.1. Clasificación de EDOS . . . 5
1.2.2. Solución de una EDO . . . 7
1.2.3. Problemas de valor inicial y contornos . . . 9
1.2.4. Sistemas de ecuaciones diferenciales . . . 10
1.3. Existencia y unicidad . . . 12

2. Métodos de integración elemental para EDOS de primer orden **16**
2.1. Método de separación de variables . . . 16
2.2. EDOS lineales . . . 18
2.3. Ecuaciones homogéneas . . . 22
2.4. Ecuaciones exactas y factor integrante . . . 23

Libro principal:

- Libro de Carlos Fernández Pérez - Libro de 3 tomos
- Zilb - libro más de ingenieros con muchos ejercicios para practicar

Capítulo 1

Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias

1.1. Motivación: problema directo e inverso

- **Cuestión directa:** nos dan una función $x(t) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y nos piden que calculemos su derivada.

  Ejemplo. Consideremos $x(t) = e^{t^2}$. Tenemos que $x'(t) = 2te^{t^2} = 2tx(t)$.

- **Cuestión inversa:** busco $x(t) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazca una ecuación diferencial.

  Ejemplo. Encontrar $x(t)$ tal que $x'(t) = 2tx(t)$. Una solución es $x(t) = e^{t^2}$, como hemos visto en el ejemplo anterior. Otra solución es $x_C(t) = Ce^{t^2}$ con $C \in \mathbb{R}$. En el **Tema 2** veremos que no hay más soluciones. Diremos que $\{x_C\}$ es la familia de soluciones de la ecuación diferencial

  $$x' = 2tx$$

  y se denomina **familia monoparamétrica** porque depende de un único parámetro. Para conseguir una única solución podemos imponer alguna condición más, como que $x(0) = 1$. Entonces, tenemos que

  $$Ce^{0^2} = 1 \Rightarrow C = 1.$$

  Así, la única función que verifica esto es $x(t) = e^{t^2}$. A este par, ecuación más condición, se le llama **problema de valor inicial** o **problema de Cauchy**.

  Observación. Una pregunta natural es cómo debe ser $x(t)$ para que el problema de Cauchy tenga solución y sea única. Esta pregunta dio lugar a los **teoremas de existencia y unicidad.**

1.2. Notación y conceptos básicos

Notación. De forma habitual usaremos la notación de Newton para las derivadas de $x(t)$:

$$x'(t), x''(t), \ldots, x^{(n)}(t).$$

Puede que eventualmente aparezca la notación de Leibniz:

$$\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^nx}{dt^n}.$$

A menudo escribirmos simplemente $x, x', \ldots, x^{(n)}$ en vez de $x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)$, pues en las dos sólo hay una variable independiente.

Definición 1.1 (EDO). Entendemos por **ecuación diferencial ordinaria** una relación que implica una o varias derivadas respecto de una única variable t (**variable independiente**) de una función especificada $x(t)$ (**variable dependiente** o **función incógnita**), pudiendo implicar también a funciones de dichas variables x y t. Llamamos **orden** de una EDO al valor de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación.

Observación. Utilizamos el adjetivo **ordinarias** para diferenciarlas de las **ecuaciones en derivadas parciales**, es decir, ecuaciones diferenciales donde una o más funciones dependen de dos o más variables independientes.

Ejemplo. Calculemos los órdenes de estas ecuaciones diferenciales.

- La ecuación
$$x^{'''} + x' = 0,$$
es una EDO de orden 3.
- La ecuación
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$
es una EDP de orden 2.

Ejemplo (Teorema Fundamental del Cálculo). Supongamos que $f(t)$ es una función continua y acotada en un cierto intervalo (a, b) y queremos resolver la EDO $x'(t) = f(t)$. Por el TFC, sabemos que

$$x(t) = \int_a^t f(t)\ dt + x(a), \ \forall t \in (a, b).$$

Si conocemos el valor de $x(a)$ (problema de Cauchy), entonces podemos resolver la EDO.

Aunque ya hemos definido lo que es una EDO, ahora lo hacemos de manera más formal.

Definición 1.2 (EDO). Una **ecuación diferencial ordinaria** es una ecuación que contiene a una función y sus derivadas con respecto a una variable. Formalmente, consideramos $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (incógnita), con I abierto, y $F : \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ con $\tilde{\Omega}$ abierto, y la EDO asociada será

$$F\left(t, x, x', \ldots, x^{(n)}\right) = 0.$$

Asumimos que $F \in \mathcal{C}^1\left(\tilde{\Omega}\right)$ y que existen $\left(t_0, x_0, \ldots, x_0^{(n)}\right) \in \tilde{\Omega}$ de manera que

$$F\left(t_0, x_0, \ldots, x_0^{(n)}\right) = 0.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x^{(n)}}\left(t_0, x_0, \ldots, x_0^{(n)}\right) \neq 0.$$

Esto es importante porque tiene que ver con el teorema de la función implícita. La forma que aparece en la definición se llama la **forma implícita** del problema. Por otro lado, si en la EDO podemos despejar la variable $x^{(n)}$, escribiendo entonces

$$x^{(n)} = f\left(t, x, \ldots, x^{(n-1)}\right),$$

para $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, diremos que la EDO está en **forma explícita**. Finalmente, a n se le llama el **orden** de la EDO.
Recordamos el **Teorema de la Función Implícita:**

Teorema 1.1 (Teorema de la función implícita)**.** Sea $G : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ con U abierto, donde G es de clase $\mathcal{C}^k(U)$. Si existe un punto $(x_0, y_0) \in U$ tal que

- $G(x_0, y_0) = 0$ y,
- $D_2G(x_0, y_0)$ es inversible,

entonces existen $\varepsilon, \delta > 0$ y una función $g : B(x_0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con $g \in \mathcal{C}^k(B(x_0, \varepsilon))$ tal que $g(B(x_0, \varepsilon)) \subset B(y_0, \delta)$ y

$$G(x, g(x)) = 0,\ \forall x \in B(x_0, \varepsilon).$$

Además, las únicas soluciones de $G(x, y) = 0$ en $B(x_0, \varepsilon) \times B(y_0, \delta)$ son las que cumplen la ecuación anterior.

1.2.1. Clasificación de EDOS

Podemos clasificar una EDO atendiendo a diferentes conceptos.

- Atenciendo al orden, es decir, el orden de la derivada de mayor orden involucrada en la EDO.

  Ejemplo. La EDO $x''' + tx' = 0$ es una EDO de orden 3.

- Atendiendo a la expresión dada, pueden ser

  1. **Expresión explícita** o **forma normal**
  2. **Expresión implícita**,
  3. Referidas a las EDOS de orden 1, a veces trabajamos con la **expresión diferencial**, que viene en general dada por $M(t, x)\,dx + N(t, x)\,dt = 0$.

  Ejemplo. La EDO

$$x' = \frac{3x^2 + t^2}{x + t},$$

esta en forma explícita, mientras que la forma diferencial será

$$(x+t)\,dx - \left(3x^2+t^2\right) dt = 0.$$

En general, dada la EDO de orden 1, $F(t,x,x') = 0$ (expresión implícita), $x' = f(t,x)$ (expresión implícita), tenemos que

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \iff dx - f(t,x)\,dt = 0,$$

es la **expresión diferencial**.

- Otra forma de clasificarlas es por <u>linealidad</u>.

Definición 1.3 (EDO Lineal)**.** Una EDO es **lineal** cuando se puede escribir de la forma

$$L(x(t)) = b(t),$$

siendo $L(x(t))$ el operador lineal

$$L(x(t)) = \sum_{j=0}^{n} a_j(t)\, x^{(j)}(t),$$

donde $x^{(0)}(t) = x(t)$. Los **coeficientes** $a_j(t)$ son funciones que dependen sólo de t. Cuando todos los coeficientes $a_j(t)$ hablamos de una EDO lineal **con coeficientes constantes**. Decimos que $b(t)$ es el **término independiente** de la EDO lineal. Cuando $b(t) \equiv 0$ decimos que la EDO lineal se denomina **lineal homogénea**.

Observación. La clave de las EDOS lineales homogéneas (y de ahí su nombre de lineal) es que el conjunto de soluciones tiene estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Formalmente, escribimos que si $L(x) = 0$ es una EDO lineal de orden n, entonces

- Si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son soluciones, $x_1(t) + x_2(t)$ también lo es.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ y $x(t)$ solución de la EDO, $\lambda x(t)$ también es solución.

Demostración. Tenemos que $L(x_1(t)) = L(x_2(t)) = 0$. Por tanto, tenemos que

$$L(x_1(t) + x_2(t)) = L(x_1(t)) + L(x_2(t)) = 0.$$

Hemos aplicado que la derivada de la suma es la suma de las derivadas. Del mismo modo, si $x(t)$ es solución, $L(x(t)) \equiv 0$ y por tanto

$$L(\lambda x(t)) = \sum_{j=0}^{n} a_j(t)\,(\lambda x(t))^{(j)} = \lambda \sum_{j=0}^{n} a_j(t)\, x^{(j)}(t) = \lambda L(x(t)) = 0.$$

□

Observación. Una EDO es lineal si su expresión implícita es lineal, es decir, todas las derivadas están elevadas a exponente 0 o 1 y no se multiplican entre sí.

Ejemplo. Consideremos la EDO anterior:

$$x' = \frac{3x^2 + t^2}{x + t}.$$

Podemos despejar de forma que

$$(x + t)\, x' - 3x^2 = t^2.$$

Está claro que no es lineal, puesto que el término x está al cuadrado. Sin embargo, la EDO $x'' + 3tx' + x = 0$ sí es lineal. Finalmente,

$$xx'' + tx' = t^2,$$

no es lineal, puesto que se están multiplicando x y x''.

- Atendiendo a la dependencia o no de la variable independiente, cuando una EDO no depende explícitamente de la variable independiente se denomina **autónoma**.

Definición 1.4 (EDO autónoma)**.** En una EDO, cuando no aparece explícitamente la variable independiente decimos que es **autónoma**. Formalmente, su expresión explícita será

$$x^{(n)} = f\left(x, x', \ldots, x^{(n-1)}\right).$$

Ejemplo.
- La EDO $x'' + x'x = 0$ es **autónoma** (la t sólo puede aparecer implícitamente con la variable dependiente).
- La EDO $x''' + x' = 0$ es autónoma pero $x' = 2tx$ no es autónoma.

Observación. Veremos que de las EDOs autónomas de orden 1 es fácil sacar mucha información cualitativa con la representación.

Observación. Las únicas EDOs lineales que son autónomas son las lineales de coeficientes constantes con término independiente también constante, es decir

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_0 x = b.$$

1.2.2. Solución de una EDO

El problema principal asociado a una EDO es encontrar sus soluciones.

Definición 1.5 (Solución de una EDO)**.** Dada una EDO de orden n donde $t \in I \subset \mathbb{R}$, decimos que la función $x = x(t)$ definida en $J \subset I$ es **solución** de la EDO si

- Existen sus n primeras derivadas: x', …, $x^{(n)}$ en J.
- Satisfacen la ecuación dada para todo $t \in J$.

El proceso de obtención de las soluciones de una EDO se denomina también **integración de la ecuación** y a sus soluciones **curvas integrales**. Además, cuando nos dan una EDO de forma explícita, es decir

$$x^{(n)} = f\left(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}\right),$$

decimos que f es el **campo** asociado a la ecuación anterior. Lo ideal es encontrar una solución explícitamente pero en muchos casos la solución vendrá dada de manera implícita.

Notación. Normalmente I denota el intervalo de definición de la EDO y J el intervalo donde está definida la solución. En general, buscamos el intervalo J más grande posible. Si no se indica lo contrario, supondremos que I y J son abiertos, donde las derivadas de los extremos del intervalo se consideran siempre laterales.

Definición 1.6. Dadas dos soluciones (x, J) y $\left(\tilde{x}, \tilde{J}\right)$ de $x' = f(t, x)$, se dice que (x, J) es una **prolongación** de $\left(\tilde{x}, \tilde{J}\right)$ o que $x(t)$ **se extiende** a $\tilde{x}(t)$ si $\tilde{J} \subset J$ y $\tilde{x}(t) = x(t)$, $\forall t \in \tilde{J}$.

Ejemplo. Consideremos los siguientes ejemplos.

1. Dada la EDO $x' = x\cos t$, tenemos que la solución $x(t) = e^{\sin t}$ es solución para todo $\mathbb{R}$. Lo mismo sucede con la solución $x_C = Ce^{\sin t}$ para $C \in \mathbb{R}$. Sin embargo, la ecuación $x' + \sqrt{t}x = t^2$ sólo tiene sentido para $t \geq 0$. Respecto a la solución, se puede ver que $x(t) = t^{\frac{3}{2}} - \dfrac{3}{2}$ es solución.

2. Es importante ver que la solución debe ser solución en un intervalo. Por ejemplo, $x' = x$ tiene como solución $x(t) = e^t$ en $t \in \mathbb{R}$. Podríamos pensar que $x = \sin t$ también, pero no es solución salvo para $t = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, que no es un intervalo. Por tanto, esta última no es solución.

Normalmente encontrar la solución a una EDO es muy complicado. Sin embargo, ver si una función es o no es solución es muy sencillo, basta con derivar, sustituir en la ecuación y ver si obtenemos o no una identidad para algún intervalo de la variable independiente.

Ejemplo.
1. Consideremos $x'' - 2x' + x = 0$, es sencillo comprobar que $x(t) = (1 + 2t)e^t$ es solución.

2. Las soluciones a una EDO no siempre se pueden dar explícitamente. En efecto, para la EDO
$$x' = \frac{x}{x^2 + 1},$$
una solución es
$$\ln|x(t)| + \frac{x(t)^2}{2} = t + C, \ C \in \mathbb{R}.$$
Decimos que esta es una solución **implícita** de la EDO.

Ejemplo. La solución de una EDO puede ser una función definida a trozos. En efecto, consideremos la EDO, $x'^2 - 9tx = 0$. Una solución es

$$x(t) = \begin{cases} 0, \ t \leq 0 \\ t^3, \ t > 0 \end{cases} .$$

Se puede comprobar que $x \in \mathcal{C}^1$ y es solución de la ecuación.

Obtener la **solución general** de una EDO es hallar todas las soluciones que verifican la ecuación. En una EDO lineal de orden n veremos que la solución general es una familia que depende de n parámetros y se denomina **familia n-paramétrica**.

Ejemplo. Para la EDO $x' = x$ vimos que la solución general era la familia $\{x_c\}$ con $x_C(t) = Ce^t$, $C \in \mathbb{R}$. Decimos que es una **familia monoparamétrica**, puesto que depende de un único parámetro C.

Ejemplo. La EDO $x'' - x = 0$ tiene por solución general

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

que es una **familia biparamétrica**. La base del espacio vectorial de soluciones $\left\{e^t, e^{-t}\right\}$, puesto que son linealmente independientes.

En el caso no lineal, obtener una solución genera es mas complicado. En este escenario podemos, por ejemplo, tener **soluciones singulares** que son aquellas que no pertenecen a una familia de funciones dependiente de un parámetro que también es solución.

Ejemplo. Consideremos $x' = t\sqrt{x}$. Una solución de la EDO es

$$x(t) = \left(\frac{t^2}{4} + C\right)^2, C \in \mathbb{R},$$

es una familia solución de la EDO. Sin embargo, esta familia no incluye la solución trivial, $x(t) \equiv 0$, por tanto decimos que esta es una solución singular.

En el caso anterior, para encontrar la solución general tenemos que encontrar la familia y la solución singular.

Observación. No confundir solución singular con solución particular. Una **solución particular** es una solución concreta de la EDO; es decir un miembro de la familia si la solución es una familia.

Ejemplo. En el ejemplo anterior, la solución singular también es solución particular. Otro ejemplo es que $x(t) = e^t$ es una solución particular de $x' = x$.

Notación. La **solución trivial** es la solución idénticamente nula.

1.2.3. Problemas de valor inicial y contornos

Definición 1.7 (Problema de valor inicial)**.** Un **problema de valor inicial** o **de Cauchy** es un sistema

$$\begin{cases} x^{(n)} = f\left(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}\right), \ t \in I \\ x(t_0) = x_0, \ t_0 \in I, \ x_0 \in \mathbb{R} \\ x'(t_0) = x_1, \ x_1 \in \mathbb{R} \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}, \ x_{n-1} \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Ejemplo.

1. La EDO $x' = x$ sujeta a $x(0) = 3$ es un problema de valor inicial que tiene por solución única la función $x(t) = 3e^t$.

2. La EDO $x'' + 16x = 0$ tiene por soluciones la familia biparamétrica $x(t) = C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t$. El problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'' + 16x = 0 \\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \\ x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

tiene una única solución, que es $x(t) = -2\cos 4t + \dfrac{1}{4}\sin 4t$.

Definición 1.8 (Problema de contorno)**.** Se define **problema de contorno** como un par formado por una EDO y unas condiciones inciales de frontera, que pueden o no implicar a las derivadas [a] . Existen dos casos especiales de problemas de contorno:

- **Problema de Dirichlet:** se proporciona el valor de la función en puntos diferentes.

- **Problema de Neumann:** se proporciona el valor de la derivada de una función en puntos diferentes.

[a] La principal diferencia respecto de las anteriores es que las condiciones iniciales no están todas asociadas al mismo instante $t = t_0$.

Ejemplo.

1. El siguiente es un ejemplo de condición de frontera de tipo Dirichlet:

$$\begin{cases} x'' + x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x(\pi) = 0 \end{cases}.$$

2. El siguiente es un ejemplo de condición de frontera de tipo Neumann:

$$\begin{cases} x'' + 3x = 1 \\ x'(0) = x'(\pi) = 0 \end{cases}.$$

1.2.4. Sistemas de ecuaciones diferenciales

Definición 1.9 (Sistema de EDOS de orden 1 y n ecuaciones)**.** El orden indica la derivada de mayor orden involucrada. Se trata de hallar n funciones incógnita $x_1(t), \dots, x_n(t)$ referidas a la misma variable independiente t tales que

$$(S)\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}.$$

Para resolver el sistema tendremos que encontrar las $x_i(t)$ soluciones definidas en un intervalo de definición J común a todas ellas.

Podemos reescribir este sistema de n incógnitas como una EDO vectorial de orden 1. En efecto, podemos considerar

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{f}(t, \vec{x}(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix},$$

Además, una EDO de orden n se puede reescribir como un sistema de EDOS de orden 1.En efecto, consideremos $x^{(n)} = f\left(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}\right)$. Podemos reescribir $x \equiv x_1$, $x' \equiv x_2$, $\dots$, $x^{(n-1)} \equiv x_n$. Así, nos queda el sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}.$$

Observación. Un sistema lineal de orden 1 son siempre de la forma

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t) x_1 + a_{12}(t) x_2 + \cdots + a_{1n}(t) x_n + b_1(t) \\ \vdots \\ x_i' = a_{i1}(t) x_1 + a_{i2}(t) x_2 + \cdots + a_{in}(t) x_n + b_i(t) \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}(t) x_1 + a_{n2}(t) x_2 + \cdots + a_{nn}(t) x_n + b_n(t) \end{cases}.$$

Matricialmente, podemos escribir $\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{b}(t)$, con $A(t) \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Posteriormente estudiaremos las EDOS lineales de coeficientes constantes puesto que entonces tendremos que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Ejemplo. Hoja 1, Ejercicio 10. Convierte $x'' + x\left(\frac{3}{2}x - 1\right) = 0$ en un sistema de dos ecuaciones de primer orden. Denotamos $x_1 \equiv x$ y $x_2 \equiv x'$, así, tenemos que

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_1 \left(1 - \frac{3}{2}x_1\right) \end{cases}.$$

1.3. Existencia y unicidad

Dado un problema de Cauchy de la forma

$$(P) \begin{cases} x' = f(t,x), \ t \in I \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}.$$

Vamos a buscar condiciones suficientes en f para garantizar que (P) tenga solución y esta sea única.

Ejemplo. Consideremos

$$(P) \begin{cases} x' = x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}.$$

Sabemos que la solución de esta EDO es la familia monoparamétrica $x_C(t) = Ce^t$ para $C \in \mathbb{R}$. Una forma de resolverlo es

$$x' = x \iff \frac{x'}{x} = 1 \iff \int \frac{x'}{x}\, dt = \int dt \iff \ln x(t) = t + C \iff x(t) = e^{t+C} = Ce^t.$$

Si imponemos la condición $x(t_0) = x_0$, tenemos que

$$Ce^{t_0} = x_0 \iff C = \frac{x_0}{e^{t_0}} = x_0 e^{-t_0}.$$

Así, la única solución de esa familia que es solución de (P) es $x(t) = x_0 e^{t-t_0}$, $t \in \mathbb{R}$. Así, (P) tiene solución única.

Ejemplo. Consideremos ahora

$$(P) \begin{cases} x' = \sqrt{|x|} \\ x(0) = 0 \end{cases}.$$

Podemos observar que la función nula es solución de (P). Haciendo el procedimiento del ejemplo anterior podemos obtener más soluciones, como

$$x(t) = \begin{cases} 0, \ t \leq 0 \\ \frac{t^2}{4}, \ t > 0 \end{cases}.$$

En efecto, podemos considerar $x(t) > 0$ y así

$$\frac{x'}{\sqrt{x}} = 1 \iff \int \frac{x'}{\sqrt{x}}\, dt = \int dt \iff 2\sqrt{x(t)} = t + C \iff x(t) = \frac{1}{4}(t+C)^2.$$

Hay infinitas soluciones, podemos escribir también

$$x(t) = \begin{cases} 0, \ t \leq C \\ \frac{(t+C)^2}{4}, \ t > C \end{cases}.$$

En este caso hay infinitas soluciones a (P), es decir no vamos a tener solución única. Podemos hacer varias observaciones:

1. En $(0,0)$, la función $\sqrt{x}$ no es derivable.
2. En $(t_0, x_0) \neq (0,0)$ puede encontrar un entorno del punto por el que pase sólo una solución. Es decir, existe solución única localmente ($\sqrt{x}$ es derivable fuera de ese punto). Podemos pensar que pedir a f que sea derivable es una buena condición suficiente.

Observación. Dado el problema de Cauchy

$$(P)\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} .$$

Consideramos que f es continua para que (P) esté bien definida, sin embargo pedir derivabilidad de f puede que sea demasiado. Por tanto, buscamos una condición que esté entre medias de la continuidad y la derivabilidad, que será que la función sea Lipschitz respecto de la segunda variable. Si lo es globalmente (en todo su dominio), hablaremos de un resultado global de unicidad; mientras que si lo es solo en un entorno de (t_0, x_0) el resultado será local.

Definición 1.10 (Función Lipschitz)**.** Sea $E \subset \mathbb{R}^2$ abierto, se dice que $f : E \to \mathbb{R}$ es **globalmente Lipcschitz** en E respecto de si existe $h > 0$ tal que

$$\underbrace{|f(x) - f(y)|}_{|f(t,x)-f(t,y)|} \leq h\|x-y\|.$$

Diremos que lo es **localmente** si $\forall x_0 \in E$ es Lipschit en $B(x_0, R)$ para algún $R > 0$. Globalmente Lipschitz respecto de la segunda variable uniformemente en t.

Definición 1.11 (Función Lipschitz)**.** Sea $E \subset \mathbb{R}^2$ abierto y $f : E \to \mathbb{R} : (t,x) \to f(t,x)$, decimos que es **Lipschitz** respecto de la segunda variable (x) si existe $L > 0$ tal que $\forall (t,x), (t,y) \in E$

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|,$$

uniformemente en t (es decir, L no depende de t).

Teorema 1.2 (Teorema local de Cauchy (Picard-Lindelöf))**.** Sea $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua y localmente Lipschitz respecto de la segunda variable. Entonces, el problema (P) dado por

$$(P)\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene solución única para cada $(t_0, x_0) \in E$ al que se refiera (P).

Observación. Podemos hacer un par de observaciones:

- La continuidad de f garantiza la existencia de soluciones pero no la unicidad (Teorema de Cauchy). Es la condición de ser Lipschitz la que garantiza la unicidad.
- Para la versión global de este teorema consideramos $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y pediremos que sea globalmente Lipschitz respecto de la segunda variable en $I \times \mathbb{R}$.

Ejemplo (Hoja 1, Ejercicio 27 apartado (a))**.** Consideremos el problema de Cauchy

$$(P)\begin{cases} y' = y^2, \ (t, y) \in \mathbb{R}^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Consideremos las funciones $\varphi_1(t) = \dfrac{1}{1-t}$ para $t \in (-\infty, 1)$ y $\varphi_2(t) = 0$ para $t \in \mathbb{R}$. Tenemos que $f(t, y) = y^2$ es continua. Buscamos aplicar el teorema del valor medio, es decir,

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right| |x - y|.$$

Buscamos que $\left| \dfrac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right|$ esté acotado uniformemente en t. En nuestro caso tenemos que

$$|f(t, x) - f(t, y)| = \left|x^2 - y^2\right| = |x - y| |x + y| \leq 2M |x - y|.$$

Así, es Lipschitz localmente en un entorno de $(0, 1)$. Por el teorema anterior, el problema tiene solución única. Claramente $\varphi_2(t)$ no es solución. Por otro lado, es sencillo comprobar que $\varphi_1(t)$ es solución de (P). Podemos observar que el intervalo $(-\infty, 1)$ es el más grande posible de definición puesto que $\varphi_1(t)$ tiene una asíntota vertical en $t = 1$.
Podemos ver que esta EDO se puede resolver por separación de variables:

$$y' = y^2 \iff \frac{1}{y^2}y' = 1 \iff \int \frac{y'}{y^2}\, dt = \int dt \iff -\frac{1}{y} = t + C \iff y = \frac{1}{C - t}.$$

Ejemplo (Hoja 1, Ejercicio 17 apartado (c))**.** El enunciado dice: 'La pendiente de la recta tangente en $(t, x(t))$ es proporcional al cuadrado de la ordenada' y pasa por $(1, 1)$. El problema será

$$(P)\begin{cases} x' = kx^2, \ k \neq 0 \\ x(1) = 1 \end{cases}.$$

Podemos sacar la solución general de la EDO, suponiendo $t > 0$ y descartando la solución trivial:

$$\frac{x'}{kx^2} = 1 \iff \int \frac{x'}{kx^2}\, dt = \int dt \iff -\frac{1}{kx} = t + C \iff x(t) = \frac{1}{C - kt}.$$

Aplicando la condición inicial

$$1 = \frac{1}{C - k} \iff C = k + 1, \quad \text{suponiendo } C \neq k.$$

Así, la solución particular será

$$x(t) = \frac{1}{k+1-kt} = \frac{1}{1+k(1-t)}.$$

Como pasa por el $(1,1)$, como nos da una hipérbola nos fijamos en la rama que contiene el $(1,1)$.

Ejemplo (Hoja 1, Ejercicio 18)**.** Comprobemos que $x(t) = \dfrac{1+Ce^{2t}}{1-Ce^{2t}}$ con $C \in \mathbb{R}$ es solución de la EDO $x' = x^2 - 1$. Tenemos que

$$x'(t) = \frac{2Ce^{2t}\left(1-Ce^{2t}\right) + \left(1+Ce^{2t}\right)2Ce^{2t}}{\left(1-Ce^{2t}\right)^2} = \frac{4Ce^{2t}}{\left(1-Ce^{2t}\right)^2}.$$

Por otro lado, tenemos que

$$x^2 - 1 = \left(\frac{1+Ce^{2t}}{1-Ce^{2t}}\right)^2 - 1 = \frac{1+2Ce^{2t}+C^2e^{4t}}{\left(1-Ce^{2t}\right)^2} - 1 = \frac{4Ce^{2t}}{\left(1-Ce^{2t}\right)^2}.$$

Por tanto, $x(t)$ es solución de la EDO. Buscamos las soluciones de equilibrio, que son $x \equiv 1$ y $x \equiv -1$. Si $C = 0$ podemos ver que $x \equiv 1$, por lo que esta no es solución singular. Sin embargo, sí es solución singular $x \equiv -1$.

Ejemplo (Hoja 1, Ejercicio 19)**.** Dada una familia de curvas A nos preguntamos por la familia de curvas ortogonales a ella.

Capítulo 2

Métodos de integración elemental para EDOS de primer orden

Como se ha visto en el capítulo anterior, una EDO de primer orden viene dada generalmente por una expresión de la forma

$$F(t,x,x') = 0.$$

En algunos casos podremos despejar x' por lo que podremos escribir la EDO de la forma $x' = f(t,x)$. Esta última se denomina la **forma explícita o normal** de una EDO de primer orden. De esta forma podemos pasar fácilmente a la **forma diferencial** que en general tiene la forma

$$M(t,x)\,dt + N(t,x)\,dx = 0.$$

Es fácil pasar de la forma explícita a la forma diferencial, en efecto,

$$x' = f(t,x) \iff \frac{dx}{dt} = f(t,x) \iff f(t,x)\,dt - dx = 0.$$

En general, veremos que dado el problema de Cauchy

$$(P)\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}.$$

Tenemos entonces que resolver P es equivalente a

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} x'(s)\ ds = \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\ ds.$$

2.1. Método de separación de variables

Definición 2.1 (EDO en variables separadas). Se dice que una EDO está en **variables separadas** si podemos escribir

$$x'(t) = f(t, x(t)) = p(t)\, q(x(t)).$$

Observación (Método de resolución). En general para resolver una EDO en variables separadas procedemos de la siguiente forma. Si $q(x(t)) \neq 0$, podremos integrar en $t \in I$ [a] a los dos lados de la igualdad. En efecto,

$$x'(t) = p(t)\, q(x(t)) \iff \int \frac{x'(t)}{q(x(t))}\, dt = \int p(t)\, dt \iff Q(x(t)) = P(t) + C,$$

donde $\frac{d}{dt} Q(x(t)) = \frac{x'(t)}{q(x(t))}$ y $\frac{d}{dt} P(t) = p(t)$. Podemos aplicar la regla de la cadena para ver que

$$\int \frac{x'(t)}{q(x(t))}\, dt = \int \frac{1}{q(x)}\, dx.$$

[a] Donde I es un intervalo donde buscamos que esté definida la solución.

Teorema 2.1 (Existencia y unicidad para EDOS en variables separadas). Si $f(t, x) = p(t)\, q(x(t))$ con $p : (a, b) \to \mathbb{R}$ y $q : (c, d) \to \mathbb{R}$ continuas y $q(x(t)) \neq 0$, $\forall x(t) \in (c, d)$, entonces

$$(P) \begin{cases} x'(t) = p(t)\, q(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene solución única para todo $(t_0, x_0) \in (a, b) \times (c, d)$, en un entorno de t_0.

Demostración. Sea $x(t)$ una solución del problema. Como $q(x) \neq 0$ en (c, d) podemos escribir

$$\frac{x'(t)}{q(x(t))} = p(t).$$

Sean

$$Q(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{1}{q(s)}\, ds \quad \text{y} \quad P(t) := \int_{t_0}^{t} p(s)\, ds.$$

Por el teorema fundamental del cálculo tendremos que $\frac{d}{dt} Q(x(t)) = \frac{x'}{q(x(t))}$, por lo que la EDO equivale a $\frac{d}{dt} Q(x(t)) = \frac{d}{dt} P(t)$. Integrando obtenemos

$$Q(x(t)) = P(t) + C.$$

Imponiendo la condición inicial $x(t_0) = x_0$ tenemos que $Q(x_0) = P(t_0) = 0$, por lo que $C = 0$ y nos queda que $Q(x(t)) = P(t)$. Ahora, definimos

$$F(t, x) = Q(x) - P(t).$$

Se cumple:

- $F(t_0, x_0) = 0$.
- $F \in \mathcal{C}^1((a,b) \times (c,d))$.
- $\dfrac{\partial F}{\partial x}(t_0, x_0) = \dfrac{1}{q(x_0)} \neq 0$.

Por el Teorema de la Función Implícita existe un entorno de t_0 en el que existe una única solución $x(t)$ tal que $F(t, x(t)) = 0$. Si derivamos implícitamente obtenemos que

$$F_t + x'(t) F_x = 0 \Rightarrow x'(t) = -\frac{F_t}{F_x} = p(t)\, q(x(t)).$$

La unicidad se deduce del Teorema de la Función Implícita. $\square$

Ejemplo. Obtengamos la solución general de la EDO $x' = \dfrac{x^2}{t}$ y la solución particular cuando $x(1) = 0$. Como $x(1) = 0$, no podemos aplicar el método de separación de variables, por lo que la solución particular que buscamos es la solución trivial. Para resolver la EDO (sin condición inicial), una vez descartada la solución trivial, tendremos que

$$x' = \frac{x^2}{t} \iff \int \frac{x'}{x^2}\, dt = \int \frac{1}{t}\, dt \iff -\frac{1}{x} = \ln t + C \iff x = \frac{1}{C - \ln t}.$$

Ejemplo. Obtengamos la solución del problema

$$(P) \begin{cases} x' = \frac{(2t+1)(2x-1)}{2(t^2+t)} \\ x(1) = 0 \end{cases}.$$

Podemos observar que es de variables separadas, además la solución $x \equiv \dfrac{1}{2}$ es solución de la EDO pero no del problema. Tendremos que para $t \in I$ donde I es un entorno del 1:

$$\frac{2x'}{2x-1} = \frac{2t+1}{t^2+t} \iff \int \frac{2x'}{2x-1}\, dt = \int \frac{2t+1}{t^2+t}\, dt \iff \ln(1-2x) = \ln(t^2+t) + C$$
$$\iff \ln\left(\frac{1-2x}{t^2+t}\right) = C \iff \frac{1-2x}{t^2+t} = C.$$

En un entorno de $(1,0)$ tenemos que los contenidos del valor absoluto son positivos por lo que podemos decir que $C = \dfrac{1}{2}$.

2.2. EDOS lineales

Sea $(E)\ \ x'(t) = a(t)\, x(t) + b(t)$ una EDO lineal. Tendremos que la EDO lineal homogénea asociada será $(E_h)\ \ x'(t) = a(t)\, x(t)$. Consideraremos que $a(t)$ y $b(t)$ son continuas en un cierto intervalo. Claramente esta última es una EDO de variables separadas. Tendremos que, suponiendo que $x(t) \neq 0$,

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)}\, dt = \int a(t)\ dt \iff \ln x(t) = \int a(t)\ dt + C \iff x(t) = C \exp\left(\int a(t)\ dt\right).$$

Estas son todas las soluciones de la EDO. En efecto, podemos ver que todas las soluciones son proporcionales a la función $\exp\left(\int a(t)\ dt\right)$. Si $u(t)$ es solución de (E_h) podemos ver que si cogemos

$$u(t)\exp\left(-\int a(s)\ ds\right)$$

y lo derivamos, tendremos que

$$u'(t)\exp\left(-\int a(s)\ ds\right) - u(t)\,a(t)\exp\left(-\int a(s)\ ds\right).$$

Como $u(t)$ es solución tendremos que $u'(t) = a(t)\,u(t)$, por lo que

$$= u(t)\,a(t)\exp\left(-\int a(s)\ ds\right) - u(t)\,a(t)\exp\left(-\int a(s)\ ds\right) = 0.$$

Por tanto, tendremos que

$$u(t)\exp\left(-\int a(s)\ ds\right) = K \Rightarrow u(t) = K\exp\left(\int a(s)\ ds\right).$$

Así, hemos demostrado que esta familia monoparamétrica compone todas las soluciones de la EDO. Es fácil comprobar que las soluciones de (E_h) constituyen un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 1.

Proposición 2.1. El conjunto de soluciones de (E_h) tiene estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 1.

Demostración. En el capítulo anterior vimos que el conjunto de soluciones de una EDO lineal componía un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, falta por ver que en este caso la dimensión será 1 (el argumento que hemos dado anteriormente vale).
Supongamos que $u(t) = c(t)\exp\left(\int a(s)\ ds\right)$ es solución de (E_h). Por tanto, debe ser que $u'(t) = a(t)\,u(t)$, por lo que

$$c'(t)\exp\left(\int a(s)\ ds\right) + c(t)\,a(t)\exp\left(\int a(s)\ ds\right) = a(t)\,c(t)\exp\left(\int a(s)\ ds\right).$$

Por tanto, debe ser que $c' \equiv 0$, por lo que $c(t)$ es una función constante. $\square$

Corolario. La solución general de (E) es de la forma

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t),$$

donde $x_h(t)$ es la solución general de (E_h) y $x_p(t)$ es una solución particular de (E).

Demostración. Si x_h es solución de (E_h) tendremos que $x'_h = a(t)\,ax_h$. Además, si $x_p(t)$ es solución particular de (E) tendremos que $x'_p = a(t)\,x_p + b(t)$. Así, tenemos que

$$(x_h + x_p)' = x'_h + x'_p = a(t)(x_h + x_p) + b(t).$$

Por tanto, $x_h + x_p$ es solución de (E). Veamos ahora que cualquier solución de (E) se puede expresar de esta forma. Si $x_p(t)$ es solución particular de (E) tendremos que

$$(x(t) - x_p(t))' = x' - x_p' = a(t)\,x + b(t) - a(t)\,x_p - b(t) = a(t)\,(x - x_p).$$

Por tanto, tenemos que la diferencia es solución de (E_h). □

Observación. En este caso, el conjunto de soluciones forma un espacio afín.

Observación (Método de variación de constantes)**.** Para resolver la EDO completa nos falta ver cómo obtener una solución particular. Esto lo haremos mediante el **método de variación de constantes:** proponemos una solución particular no muy diferente a $x_h(t)$, como por ejemplo

$$x_p(t) = C(t)\exp\left(\int a(s)\ ds\right).$$

Forzamos que sea solución y tendremos que

$$x_p' = C'\exp\left(\int a(s)\ ds\right) + Ca(t)\exp\left(\int a(s)\ ds\right).$$

Queremos que $x_p'(t) = a(t)\,x_p + b(t)$, pero esto tiene como consecuencia que

$$C'\exp\left(\int a(s)\ ds\right) + Ca(t)\exp\left(\int a(s)\ ds\right) = a(t)\,C\exp\left(\int a(s)\ ds\right) + b(t).$$

De esta forma, nos queda que

$$C'(t) = b(t)\exp\left(-\int a(s)\ ds\right) \iff C(t) = \int b(t)\exp\left(-\int a(s)\ ds\right)\ dt.$$

Así, hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 2.2. Para cada $(t_0, x_0) \in (\alpha, \omega) \times \mathbb{R}$ [a] el problema

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)\,x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admite por solución $x(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\ ds\right)$. Análogamente, la única solución del problema

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)\,x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

es la función

$$x(t) = C\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\ ds\right) + \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\ ds\right)\int_{t_0}^{t} b(s)\exp\left(-\int_{t_0}^{s} a(u)\ du\right)\ ds.$$

[a] Siendo (α, ω) el intervalo donde son continuas $a(t)$ y $b(t)$.

Ejemplo (Hoja2, Ejercicio 6)**.** Consideremos la EDO

$$(R) \quad x' + x = 2te^{-t} + t^2.$$

En este caso, tendremos que (E) es $x' + x = 2te^{-t} + t^2$ y (E_h) será $x' + x = 0$. Resolvemos (E_h) por separación de variables:

$$\frac{x'}{x} = -1 \iff \int \frac{x'}{x}\ dt = -\int\ dt \iff \ln x = -t + C \iff x_h(t) = Ce^{-t}, C \in \mathbb{R}.$$

Podemos observar que la solución trivial está incluída dentro de nuestra familia monoparamétrica de soluciones. Ahora, buscamos una solución particular $x_p(t)$ por el método de variación de constantes. Es decir, buscamos $x_p(t) = C(t)\,e^{-t}$. Tendremos que

$$x_p'(t) = C'(t)\,e^{-t} - C(t)\,e^{-t}.$$

Queremos que $x_p' + x = 2te^{-t} + t^2$, por lo que

$$C'(t)\,e^{-t} - Ce^{-t} + Ce^{-t} = 2te^{-t} + t^2 \iff C'(t) = 2t + t^2e^t.$$

Así, nos queda que

$$C(t) = \int 2t + t^2e^t\ dt = t^2 + t^2e^t - 2te^t + 2e^t.$$

Por tanto, nos queda que

$$x_p(t) = t^2e^{-t} + t^2 - 2t + 2.$$

Así, la solución general de (E) será

$$x(t) = Ce^{-t} + t^2e^{-t} + t^2 - 2t + 2.$$

Calculemos ahora la solución que verifique $x(0) = 1$. Tendremos que $C = -1$, por lo que la solución particular que buscamos será

$$x(t) = e^{-t} + t^2e^{-t} + t^2 - 2t + 2.$$

2.3. Ecuaciones homogéneas

Definición 2.2 (Función homogénea)**.** Decimos que $f(t,x)$ es una **función homogénea** de grado $m \in \mathbb{R}$ si [a]

$$f(\lambda t, \lambda x) = \lambda^m f(t,x), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

[a] Esta definición se puede extender a funciones de más variables.

Ejemplo. La función $f(t,x) = t^2 + x^2$ es homogénea de grado 2, sin embargo $f(t,x) = t^2 + x^2 + 3$ no es homogénea.

Definición 2.3 (EDO homogénea)**.** Dada la EDO $x' = f(t,x)$, decimos que es una **EDO homogénea** si f es una función homogénea de grado 0.

Observación. Podemos ver que esto es equivalente a que, si la EDO viene dada por $M(t,x)\,dt + N(t,x)\,dx = 0$ en su forma diferencial, entonces M y N son funciones homogéneas del mismo grado. En efecto, si $N(t,x) \neq 0$ tendremos que

$$x' = -\frac{M(\lambda t, \lambda x)}{N(\lambda t, \lambda x)} = -\frac{\lambda^m M(t,x)}{\lambda^m N(t,x)} = -\frac{M(t,x)}{N(t,x)}.$$

Observación (Método de resolución)**.** Veremos que las EDOS homogéneas son EDOS de variables separadas haciendo el cambio de variable oportuno. En efecto, podemos ver que

$$x' = f(t,x) = f\left(t, t\frac{x}{t}\right) = t^0 f\left(1, \frac{x}{t}\right) = f\left(1, \frac{x}{t}\right).$$

Haciendo el cambio de variable $z(t) = \dfrac{x(t)}{t}$, tenemos que

$$x = zt \Rightarrow x' = z't + z.$$

Por tanto, tendremos que $z't + z = f(1,z) = \tilde{f}(z)$, que es una EDO de variables separadas, por lo que podemos proceder de la forma

$$z't = \tilde{f}(z) - z \iff \frac{z'}{\tilde{f}(z) - z} = \frac{1}{t}.$$

Ejemplo (Hoja2, Ejercicio 3 apartado 1)**.** Consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} tx^2x' = x^3 - t^3 \\ x(1) = 2 \end{cases}.$$

Tenemos que la EDO es equivalente a $tx^2dx + \left(t^3 - x^3\right)dt = 0$ y ambas M y N son homogéneas de grado 3. Tenemos que

$$x' = \frac{x^3 - t^3}{tx^2} = \frac{\left(\frac{x}{t}\right)^3 - 1}{\left(\frac{x}{t}\right)^2}.$$

Hacemos el cambio de variable $z = \frac{x}{t}$, de forma que $x' = z't + z$. Así, nos queda que para $t > 0$,

$$z't + z = \frac{z^3 - 1}{z^2} \iff z't = -\frac{1}{z^2} \iff z^2 z' = -\frac{1}{t} \iff \frac{z^3}{3} = -\ln t + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Deshaciendo el cambio $z = \frac{x}{t}$, tenemos que

$$x^3 = -3t^3 \ln t + Ct^3,\ C \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

Ahora buscamos la solución particular

$$8 = -3 \cdot 1 \cdot \ln 1 + C \cdot 1 \iff C = 8.$$

Así, nos queda que la solución particular será $x^3 = -3t^3 \ln t + 8t^3$ con $t > 0$.

2.4. Ecuaciones exactas y factor integrante

Definición 2.4 (Ecuación exacta)**.** La EDO $M(t,x)\,dt + N(t,x)\,dx = 0$ con M y N continuas en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, se dice que es **exacta** si existe si existe una función $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $F \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ tal que la solución de la EDO son las curvas de nivel de F, esto es $F(t,x) = C$, $C \in \mathbb{R}$.

Observación. La definición equivalente a la anterior es:

*La EDO $M(t,x)\,dt + N(t,x)\,dx = 0$ es **exacta** si existe $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $F \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ tal que*

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = M(t,x) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = N(t,x).$$

En efecto, derivando implícitamente tenemos que

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} x' = 0 \iff \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dx = 0.$$

Así, tendremos que $M(t,x) = \frac{\partial F}{\partial t}$ y $N(t,x) = \frac{\partial F}{\partial x}$. Recíprocamente,

$$M(t,x) + N(x,t)\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}F(t,x),$$

por lo que la EDO es equivalente a $\frac{d}{dt}F(t,x) = 0$ y sus soluciones son las curvas de nivel del campo $F(t,x)$.

Proposición 2.2. Para M y N continuas y con derivadas parciales continuas en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, la EDO $M(t,x)\,dt + N(t,x)\,dx = 0$ es exacta si y solo si $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$.

Demostración. Como $M, N \in \mathcal{C}^1$, se sigue que $F \in \mathcal{C}^2(\Omega)$.

(i) Si $M(t,x)\,dt + N(t,x)\,dx = 0$ es exacta, existe $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$M(t,x) = \frac{\partial F}{\partial t} \quad \text{y} \quad N(t,x) = \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Como $F \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ podemos aplicar el teorema de Schwartz, por lo que

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

(ii) Supongamos que $\dfrac{\partial M}{\partial x} = \dfrac{\partial N}{\partial t}$. Buscamos $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $F \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ y $\dfrac{\partial F}{\partial t} = M(t,x)$ y $\dfrac{\partial F}{\partial x} = N(t,x)$. Podemos tomar

$$\frac{\partial F}{\partial t} = M(t,x) \Rightarrow F(t,x) = \int M(t,x)\ dt + C(x).$$

Tendremos que $C(x)$ es tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int M(t,x)\ dt\right) + C'(x) = N(t,x) \iff C'(x) = N(t,x) - \int \frac{\partial}{\partial x} M(t,x)\ dt.$$

De esta forma tendremos que

$$C(x) = \int \left(M(t,x) - \int \frac{\partial}{\partial x} N(t,x)\ dt\right)\ dx + C.$$

La construcción está bien hecha y $C(x)$ es una función que depende sólo de x puesto que si derivamos $C'(x)$ respecto de t obtenemos

$$\frac{\partial C'}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0.$$

Así, tenemos que

$$F(t,x) = \int M(t,x)\ dt + \int \left(N(t,x) - \int \frac{\partial}{\partial x} M(t,x)\ dt\right)\ dx + C.$$

$\square$

Observación. Observando la construcción que acabamos de hacer tendremos que la solución general de la ecuación es $F(t,x) = C$, donde F la hemos calculado anteriormente.

Ejemplo (Hoja 2, Ejercicio 4 apartado (a)). Consideremos $x' = \dfrac{2tx}{x - t^2}$. En su forma diferencial tendremos que

$$2tx\ dt + \left(t^2 - x\right)\ dx = 0.$$

Veamos si es exacta. Tenemos que $M(t,x) = 2tx$ y $N(t,x) = t^2 - x$, así

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 2t = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Como es exacta, existe $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que la solución de la EDO son las curvas de nivel de F. Buscamos F:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 2tx \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = t^2 - x.$$

Tendremos que

$$F(t,x) = \int 2tx\, dt + C(x) = t^2 x + C(x).$$

Además, necesitamos que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = t^2 - x = t^2 + C'(x) \iff C'(x) = -x.$$

Así, tenemos que $C(x) = -\frac{x^2}{2}$ [1], por lo que nos queda que $F(t,x) = t^2 x - \frac{x^2}{2}$ y la solución de la EDO es

$$t^2 x - \frac{x^2}{2} = C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Observación (Factor integrante)**.** Hay EDOS que no son exactas, pero que si las multiplicamos por una función $\mu(t,x)$ se convierten en exactas. Es decir, $M(t,x)\,dt + N(t,x)\,dx = 0$ no es exacta, pero existe μ tal que

$$\underbrace{\mu M(t,x)}_{\widetilde{M}} + \underbrace{\mu N(t,x)}_{\tilde{N}} x' = 0,$$

es exacta puesto que $\frac{\partial \widetilde{M}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial t}$. A μ lo llamamos **factor integrante**. Si no nos dan alguna información de μ para que lo podeamos calcular, no podemos calcular μ ni la solución de la EDO (sería una EDP muy complicada).

---

[1] No nos interesan las constantes porque las soluciones son las curvas de nivel de F.