

Cálculo Integral

Victoria Torroja Rubio

19/1/2026

Índice general

1. Integral de Riemann	3
1.1. Conceptos básicos	3
1.2. Integral de Riemann	6
1.3. Propiedades de la integral	9
1.4. Conjuntos medibles Jordan	13
1.5. Conjuntos de medida nula	17
1.6. Teorema de Lebesgue	22
1.7. 11/2/2026	23
2. Cálculo de integrales	27
2.1. Teorema de Fubini	27
2.2. Cambio de variable	29
2.2.1. Coordenadas polares	30

Despacho: 431

Correo: jose_mendoza@mat.ucm.es

Bibliografía:

- Para cálculo integral: Marsden & Hoffman: *Elementary Classical Analysis*.
- Para cálculo vectorial: Marsden & Tromba: *Vector calculus*.

Evaluación:

- 13/2/2026: cambiar la clase de cálculo con la de ecuaciones diferenciales.
- Control: 27/2/2026 (*sólo sube, pero cuenta poco, alrededor de un 10 %*).

Capítulo 1

Integral de Riemann

1.1. Conceptos básicos

Consideramos el paralelepípedo

$$R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

que es producto directo de intervalos compactos en \mathbb{R} . Consideraremos también una función $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Definimos el **volumen** del rectángulo R como el producto de las longitudes de sus lados, es decir,

$$v(R) := (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$

Definición 1.1 (Partición). Tomamos particiones

$$P_1 \in \mathcal{P}([a_1, b_1]), \dots, P_n \in \mathcal{P}([a_n, b_n]),$$

y decimos que $P = (P_1, \dots, P_n) \in \mathcal{P}(R)$ es una **partición** de R .

De esta forma, estamos dividiendo el rectángulo R en subrectángulos.

Definición 1.2. Dadas dos particiones $P = (P_1, \dots, P_n)$ y $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$, decimos que P es **más fina** que Q , $P \geq Q$, si P_i es más fina que Q_i para $i = 1, \dots, n$.

Si $T \in \mathcal{P}(R)$, entonces T es un pequeño paralelepípedo cuyos lados son intervalos de P_i (queremos decir que T es uno de los subrectángulos formados por la partición P). Podemos ver que para cada partición $P_i = \{x_0^i, \dots, x_{m_i}^i\}$, los rectángulos T tendrán la forma

$$T = [x_{j_1}^1, x_{j_1+1}^1] \times \cdots \times [x_{j_n}^n, x_{j_n+1}^n], \quad 0 \leq j_i \leq m_i - 1.$$

Así, definimos,

Definición 1.3 (Suma superior e inferior). Decimos que la **suma inferior** de f por P es

$$s(f, P) := \sum_{T \in P} v(T) \inf \{f(t) : t \in T\}.$$

Análogamente, decimos que la **suma superior** de f por P es

$$S(f, P) := \sum_{T \in P} v(T) \sup \{f(t) : t \in T\}.$$

Observación. A partir de la definición anterior, podemos hacer un par de observaciones.

- En primer lugar, como f está acotada, las sumas superiores e inferiores están bien definidas.
- Para cualquier partición $P \in \mathcal{P}(R)$ se cumple que $s(f, P) \leq S(f, P)$.

Para introducir la noción de **integral superior** e **integral inferior**, tenemos que ver que las sumas superiores e inferiores están acotadas, esto se puede ver de dos formas.

Notación. A partir de ahora, utilizamos la notación siguiente:

$$\alpha_T = \inf \{f(t) : t \in T\} \quad \text{y} \quad \beta_T = \sup \{f(t) : t \in T\}.$$

Forma 1

Sea $P \in \mathcal{P}(R)$. Como f es acotada en R sabemos que existen $M, m \in \mathbb{R}$ tales que

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in R.$$

Así, tenemos que

$$\sum_{T \in P} mv(T) \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq \sum_{T \in P} Mv(T).$$

Demostremos ahora la igualdad

$$\sum_{T \in P} v(T) = v(R).$$

En primer lugar, consideremos el caso $n = 1$. Cogemos $R = [a, b]$ y la partición $P = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_m = b\}$. Así, tenemos que

$$\sum_{i=1}^m v([t_{i-1}, t_i]) = \sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) = t_m - t_0 = b - a = v(R).$$

Demostraremos el caso $n = 2$ pues a partir de este es fácil generalizar la demostración para $n > 2$. Por tanto, tomamos $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ con la partición $P = (P_1, P_2)$ tal que

$$P_1 = \{t_0 = a_1, t_1, \dots, t_m = b_1\}, \quad P_2 = \{q_0 = a_2, q_1, \dots, q_r = b_2\}.$$

Tendremos que

$$\sum_{T \in R} v(T) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{r-1} v([t_i, t_{i+1}] \times [q_j, q_{j+1}]) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{r-1} (t_{i+1} - t_i)(q_{j+1} - q_j) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2).$$

Así, podemos decir que

$$mv(R) \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq Mv(R).$$

Forma 2

Lema 1.1. Sean $P, T \in \mathcal{P}(R)$ con $T \geq P$. Entonces,

$$s(f, P) \leq s(f, T) \leq S(f, T) \leq S(f, P).$$

*Demuestra*ción. Lo demostramos para $n = 2$ puesto que la demostración es fácil de generalizar para $n > 2$. Sea $P = (P_1, P_2) \in \mathcal{P}(R)$. Para demostrar el lema basta con demostrar el caso $P' = (P'_1, P'_2)$, donde $P'_1 = P_1 \cup \{u\}$. Claramente tenemos que P' es más fina que P . Concretamente, supongamos que

$$P_1 = \{t_0^1, \dots, t_n^1\} \quad \text{y} \quad P'_1 = \{t_0^1, \dots, t_i^1, u, t_{i+1}^1, \dots, t_n^1\}.$$

Sea $P_2 = \{q_0, \dots, q_r\}$, y definimos los conjuntos de rectángulos

$$J_1 = \{[t_i, u] \times [q_j, q_{j+1}] : 0 \leq j \leq r-1\} \quad \text{y} \quad J_2 = \{[u, t_{i+1}] \times [q_j, q_{j+1}] : 0 \leq j \leq r-1\}.$$

Claramente tenemos que $J_1 \cap J_2 = \emptyset$. De esta forma, tenemos que

$$\begin{aligned} s(f, P') &= \sum_{T \in P'} v(T) \alpha_T = \sum_{T \in P'/(J_1 \cup J_2)} v(T) \alpha_T + \sum_{T \in J_1} v(T) \alpha_T + \sum_{T \in J_2} v(T) \alpha_T \\ &= \sum_{T \in P'/(J_1 \cup J_2)} v(T) \alpha_T + \sum_{j=0}^{r-1} (u - t_i)(q_{j+1} - q_j) \alpha_j^1 + \sum_{j=0}^{r-1} (t_{i+1} - u)(q_{j+1} - q_j) \alpha_j^2 \\ &\geq \sum_{T \in P'/(J_1 \cup J_2)} v(T) \alpha_T + \sum_{j=0}^{r-1} (t_{i+1} - t_i)(q_{j+1} - q_j) \alpha_j = s(f, P). \end{aligned}$$

La desigualdad para la suma superior se demuestra de forma análoga. \square

*Demuestra*ción. Esta es una demostración alternativa. Consideremos que T es más fina que P y sean R_1, \dots, R_N los subrectángulos de P y $\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_{\tilde{N}}$ los de T . Sea I_k el conjunto de índices j tales que $\tilde{R}_j \subset R_k$. Así, es fácil ver que

$$R_k = \bigsqcup_{j \in I_k} \tilde{R}_j, \quad v(R_k) = \sum_{j \in I_k} v(\tilde{R}_j).$$

Denotamos $\alpha_j = \inf \{f(x) : x \in R_j\}$ y $\tilde{\alpha}_j = \inf \{f(x) : x \in \tilde{R}_j\}$. Claramente, si $j \in I_k$ se tiene que $\alpha_k \leq \tilde{\alpha}_j$, así

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^N \alpha_k v(R_k) = \sum_{k=1}^N \sum_{j \in I_k} \alpha_k v(\tilde{R}_j) \leq \sum_{k=1}^N \sum_{j \in I_k} \tilde{\alpha}_j v(\tilde{R}_j) = \sum_{j=1}^{\tilde{N}} \tilde{\alpha}_j v(\tilde{R}_j) = s(f, T).$$

El caso para la suma superior es análogo. \square

Proposición 1.1. Dadas dos particiones, $P, Q \in \mathcal{P}(R)$

$$s(f, P) \leq S(f, Q).$$

Demostración. Sea $T = (P_1 \cup Q_1, \dots, P_n \cup Q_n) \in \mathcal{P}(R)$. Claramente, $T \geq P$ y $T \geq Q$. Por tanto, aplicando el lema anterior

$$s(f, P) \leq s(f, T) \leq S(f, T) \leq S(f, Q).$$

□

Por ambas formas hemos visto que existen

$$\inf\{S(f, P) : P \in \mathcal{P}(R)\} \quad \text{y} \quad \sup\{s(f, P) : P \in \mathcal{P}(R)\},$$

por lo que estamos en condiciones de definir la integral superior e inferior.

1.2. Integral de Riemann

Definición 1.4 (Integral superior e inferior). Se define como **integral superior** e **integral inferior** a los valores

$$\overline{\int_R f} = \inf\{S(f, P) : P \in \mathcal{P}(R)\} \quad \text{y} \quad \underline{\int_R f} = \sup\{s(f, P) : P \in \mathcal{P}(R)\},$$

respectivamente. Decimos que f es **integrable** si el valor de la integral superior e inferior coincide.

Corolario 1.1. Dada $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ acotada,

$$\underline{\int_R f} \leq \overline{\int_R f}.$$

Ejemplo. Consideremos $f \equiv c$, con c constante. Tenemos que para una partición $P \in \mathcal{P}(R)$,

$$s(f, P) = \sum_{T \in P} v(T) \inf\{f(t) : t \in T\} = \sum_{T \in P} v(T) c = cv(R).$$

Por otro lado,

$$S(f, P) = \sum_{T \in P} v(T) \sup\{f(t) : t \in T\} = \sum_{T \in P} v(T) c = cv(R).$$

Como la integral superior y la inferior coinciden, debe ser que la función es integrable.

Teorema 1.1 (Criterio de integrabilidad de Riemann). Una función $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ acotada es integrable si y solo si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P_\varepsilon \in \mathcal{P}(R)$ tal que

$$S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Demostración. (i) Supongamos que f es integrable y sea $\varepsilon > 0$. Por definición de supremo e ínfimo, tenemos que existen particiones $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(R)$ tales que

$$\int_R f - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, P_1), \quad \int_R f + \frac{\varepsilon}{2} > S(f, P_2).$$

Cogemos $P_\varepsilon \in \mathcal{P}(R)$ más fina que P_1 y P_2 y tenemos que

$$S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) \leq S(f, P_2) - s(f, P_1) < \left(\int_R f + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \left(\int_R f - \frac{\varepsilon}{2} \right) = \varepsilon.$$

(ii) Sea $\varepsilon > 0$, entonces por hipótesis tenemos que

$$0 \leq \overline{\int_R f} - \underline{\int_R f} \leq S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, debe ser que la integral superior y la inferior coinciden, por lo que f es integrable. \square

Observación. La negación del criterio anterior nos permite ver cuándo una función no es integrable, que es si y solo si existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $S(f, P) - s(f, P) \geq \varepsilon_0, \forall P \in \mathcal{P}(R)$.

Ejemplo. Un ejemplo muy común de función no integrable es la función de Dirichlet,

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Este ejemplo lo podemos generalizar en \mathbb{R}^n . En efecto, podemos tomar $R = [0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$, con

$$f : R \rightarrow \mathbb{R} : x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}^n \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}^n \end{cases}.$$

Tenemos que $\forall P \in \mathcal{P}(R)$, $S(f, P) = 1$ y $s(f, P) = 0$, por lo que $S(f, P) - s(f, P) = 1$ y f no es integrable.

Esta noción la podemos generalizar. Consideremos $R = [0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ y $A \subset \mathbb{R}$ tal que A y R/A son densos en R . Por denso queremos decir que todo rectángulo no trivial J , $A \cap J \neq \emptyset$ y $(R/A) \cap J \neq \emptyset$. Entonces,

$$f : R \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in R/A \end{cases},$$

no es integrable.

Teorema 1.2 (Teorema de Darboux). Una función $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ acotada es integrable en R con integral I si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $P \in \mathcal{P}(R)$ con $\|P\| < \delta$ ^a, entonces

$$\left| \sum_{J \in P} f(x_J) v(J) - I \right| < \varepsilon, \quad \forall x_J \in J.$$

^aPara cualquier $J \in P$, el diámetro de J es menor a δ .

Demostración. (i) Se puede mirar en el libro de Marsden y Hoffmann.

(ii) Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que si $\|P\| < \delta$ entonces

$$\left| \sum_{i=1}^N f(x_i) v(J_i) - I \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

Donde J_1, \dots, J_N son los rectángulos que componen la partición P . Cogemos $x_i \in J_i$ tal que

$$|f(x_i) - \beta_{J_i}| < \frac{\varepsilon}{v(J_i) 2N}.$$

Así, tenemos que

$$|S(f, P) - I| \leq \left| S(f, P) - \sum_{i=1}^N f(x_i) v(J_i) \right| + \left| \sum_{i=1}^N f(x_i) v(J_i) - I \right|.$$

Tenemos que

$$\left| S(f, P) - \sum_{i=1}^N f(x_i) v(J_i) \right| < \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon v(J_i)}{v(J_i) 2N} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así, obtenemos que $|S(f, P) - I| < \varepsilon$. De forma análoga se puede demostrar que $|I - s(f, P)| < \varepsilon$. De esta forma, obtenemos que si $\varepsilon > 0$ existe $P \in \mathcal{P}(R)$ tal que

$$|S(f, P) - s(f, P)| \leq |S(f, P) - I| + |I - s(f, P)| < \varepsilon,$$

y por el criterio de Riemann tenemos que f es integrable en R . Además, por lo visto anteriormente, existe $P \in \mathcal{P}(R)$ tal que

$$\left| \overline{\int_R} f - I \right| \leq \left| \overline{\int_R} f - S(f, P) \right| + |S(f, P) - I| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

El caso para la integral inferior es análogo. Así, hemos demostrado que $\int_R f = I$. \square

1.3. Propiedades de la integral

Teorema 1.3. Sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ continua, entonces f es integrable.

Demostración. En esta demostración trabajaremos con la norma infinita pero la equivalencia de normas permite generalizar el resultado para cualquier norma en \mathbb{R}^n . Dado que f es continua en R y este es compacto, tenemos que f es uniformemente continua en R . Sea $\varepsilon > 0$ y $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{v(R)} > 0$. Tenemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - y\|_\infty < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon', \quad \forall x, y \in R.$$

Así, cogemos una partición $P_\delta \in \mathcal{P}(R)$ que form rectángulos de lados con longitud menor a δ . Recordamos que dado que f es continua en R , lo es también en cada subrectángulo generado por la partición P_δ . De esta forma, en cada $T \in P_\delta$, f alcanza su máximo y su mínimo, β_T y α_T , respectivamente. Por tanto,

$$S(f, P_\delta) - s(f, P_\delta) = \sum_{T \in P_\delta} v(T) (\beta_T - \alpha_T) < \varepsilon' \sum_{T \in P_\delta} v(T) = \varepsilon.$$

Por el criterio de integrabilidad de Riemann, f es integrable en R . \square

Proposición 1.2 (Linealidad y monotonía). Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo.

Linealidad. Si $f_1, f_2 : R \rightarrow \mathbb{R}$ son integrables en R , entonces

$$\int_R f_1 + f_2 = \int_R f_1 + \int_R f_2.$$

Además, si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en R , entonces

$$\int_R \alpha f = \alpha \int_R f.$$

Monotonía. Si $f_1, f_2 : R \rightarrow \mathbb{R}$ son integrables en R , con $f_1 \leq f_2$, $\forall x \in R$, entonces

$$\int_R f_1 \leq \int_R f_2.$$

Demostración. Aplicamos el teorema de Darboux.

1. Sea $\varepsilon > 0$, como f y g son integrables tenemos que existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ y $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(R)$, con $\|P_1\| < \delta_1$ y $\|P_2\| < \delta_2$, tales que

$$\left| \sum_{J \in P_1} f(y_j) v(J) - I_1 \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left| \sum_{T \in P_2} g(z_j) v(J) - I_2 \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cogemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, y tomamos $P \in \mathcal{P}(R)$ con $\|P\| < \delta$, de esta forma

$$\left| \sum_{J \in P} (f + g)(x_j) v(J) - (I_1 + I_2) \right| \leq \left| \sum_{J \in P} f(x_J) v(J) - I_1 \right| + \left| \sum_{J \in P} g(x_J) v(J) - I_2 \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. Sea $I = \int_R f$ y $\varepsilon > 0$. Por el teorema de Darboux, existe $\delta > 0$ tal que si $P \in \mathcal{P}(R)$ con $\|P\| < \delta$, entonces

$$\left| \sum_{J \in P} f(x_J) v(J) - I \right| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}.$$

Así, tenemos que

$$\left| \sum_{J \in P} \alpha f(x_J) v(J) - \alpha I \right| = |\alpha| \left| \sum_{J \in P} f(x_J) v(J) - I \right| < |\alpha| \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon.$$

3. Para demostrar la monotonía primero asumimos que $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable y $f(x) \geq 0, \forall x \in R$. Tenemos que

$$s(f, P) = \sum_{J \in P} \alpha_J v(J) \geq 0, \quad \forall P \in \mathcal{P}(R).$$

Así, está claro que la integral inferior debe ser superior a 0, por lo que el valor de la integral será superior a 0. Ahora, supongamos que $f_1, f_2 : R \rightarrow \mathbb{R}$ son integrables y $f_1(x) \leq f_2(x), \forall x \in R$. Tenemos que la función $f_2 - f_1 : R \rightarrow \mathbb{R}$ cumple que es integrable (por la linealidad) y además $(f_2 - f_1)(x) \geq 0, \forall x \in R$. Por lo que acabamos de demostrar:

$$\int_R f_2 - f_1 = \int_R f_2 - \int_R f_1 \geq 0 \iff \int_R f_1 \leq \int_R f_2.$$

□

Observación (Cota de la integral). Supongamos que $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en R . Entonces, f es acotada, por lo que existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Así, tenemos que

$$\int_R m \leq \int_R f \leq \int_R M \Rightarrow mv(R) \leq \int_R f \leq Mv(R).$$

Se puede hacer un razonamiento igual sobre un conjunto A que es medible Jordan.

Proposición 1.3. Sean $S, R \subset \mathbb{R}^n$ rectángulos cerrados tales que $S \subset R$. Si $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, entonces f es integrable en S .

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y $P = (P_1, \dots, P_n) \in \mathcal{P}(R)$ tal que $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$. Podemos asumir que los vértices de S están en P , es decir, si $S = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$, entonces $a_i, b_i \in P_i, \forall i = 1, \dots, n$. Ahora, consideramos $\tilde{P} = (\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n) \in \mathcal{P}(S)$ tal que $\tilde{P}_i = P_i \cap [a_i, b_i]$ con $i = 1, \dots, n$. Dado que los subrectángulos de \tilde{P} son subrectángulos de P

es fácil ver que S es una unión de subrectángulos de R . Sean R_1, \dots, R_k los subrectángulos de P que también lo son de \tilde{P} , y sean R_{k+1}, \dots, R_N el resto. Tenemos que

$$\begin{aligned}\varepsilon > S(f, P) - s(f, P) &= \sum_{j=1}^k (\beta_j - \alpha_j) v(R_j) + \sum_{j=k+1}^N (\beta_j - \alpha_j) v(R_j) \\ &\geq \sum_{j=1}^k (\beta_j - \alpha_j) v(R_j) = S(f|_S, \tilde{P}) - s(f|_S, \tilde{P}).\end{aligned}$$

Por el criterio de la integrabilidad de Riemann, $f|_S$ es integrable. \square

Lema 1.2. Sean $R, R' \subset \mathbb{R}^n$ rectángulos con $R' \subset R$. Supongamos que $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en R' y $f(x) = 0$ para $x \in \overline{R/R'}$. Entonces f es integrable en R y

$$\int_{R'} f = \int_R f.$$

Demostración. Sea $\tilde{f} := f|_{R'}$ y sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $\tilde{P} \in \mathcal{P}(R')$ tal que

$$S(\tilde{f}, \tilde{P}) - s(\tilde{f}, \tilde{P}) < \varepsilon.$$

Cogemos ahora la partición $P \in \mathcal{P}(R)$ que resulta de extender \tilde{P} a una partición de R , como se muestra en la figura. Entonces, tendremos que R' es una unión de subrectángulos de P . Sean R_1, \dots, R_k los subrectángulos de P que también lo son de \tilde{P} y R_{k+1}, \dots, R_N el resto. Así, tenemos que

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i=1}^k (\beta_i - \alpha_i) v(R_i) + \sum_{i=k+1}^N (\beta_i - \alpha_i) v(R_i) < \varepsilon + \sum_{i=k+1}^N (\beta_i - \alpha_i) v(R_i).$$

Los rectángulos R_{k+1}, \dots, R_N pueden cumplir una de dos cosas.

- Si $R_j \cap R' = \emptyset$, entonces $f|_{R_j} \equiv 0$ y se tiene que $\beta_j - \alpha_j = 0$.
- Si $R_j \cap R' \neq \emptyset$, entonces, debe ser que su intersección con R' no es más que un segmento del borde de R' , es decir, $R_j \cap R' \subset \overline{R/R'}$, por lo que de nuevo tenemos que $\beta_j - \alpha_j = 0$.

Así, hemos visto que $\sum_{i=k+1}^N (\beta_i - \alpha_i) v(R_i) = 0$, por lo que $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$ y tenemos

que f es integrable en R . Veamos ahora que el valor de las integrales coincide. Sea $I = \int_{R'} \tilde{f}$.

Sea $\varepsilon > 0$, podemos coger $\tilde{P} \in \mathcal{P}(R')$ tal que $I - s(\tilde{f}, \tilde{P}) < \varepsilon$. Cogemos $P \in \mathcal{P}(R)$ extendiendo \tilde{P} a una partición de R como hemos hecho antes, así

$$0 \leq I - s(f, P) = I - \sum_{J \in P, J \subset R'} \alpha_J v(J) = I - \sum_{J \in \tilde{P}} \tilde{\alpha}_J v(J) = I - s(\tilde{f}, \tilde{P}) < \varepsilon.$$

Así, hemos obtenido que

$$\underline{\int_R} f = \int_R f = I.$$

□

Proposición 1.4. Sean $R, R' \subset \mathbb{R}^n$ rectángulos con $R' \subset R$. Supongamos que $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en R' y $f(x) = 0$ para $x \in R \setminus R'$. Entonces f es integrable en R y

$$\int_{R'} f = \int_R f.$$

Demostración. Supongamos que $f(x) = g(x) + h(x)$ con $g, h : R \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \overline{R/R'} \\ f(x), & \text{resto} \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} 0, & x \in R/\partial R' \\ f(x), & \text{resto} \end{cases}.$$

Veamos que $\int_R h = \int_{R'} h = 0$. Veamos primero que h es integrable en R . Se puede comprobar que $\partial R'$ tiene contenido nulo, por lo que para $\varepsilon > 0$, existe $P \in \mathcal{P}(R)$ tal que

$$\sum_{J \in P, J \cap \partial R' \neq \emptyset} v(J) < \frac{\varepsilon}{M}, \quad \text{donde } |f| \leq M.$$

Así, tendremos que

$$S(h, P) = \sum_{J \in P} \beta_J v(J) = \sum_{J \in P, J \cap \partial R' \neq \emptyset} \beta_J v(J) \leq M \sum_{J \in P, J \cap \partial R' \neq \emptyset} v(J) < \varepsilon.$$

Así, h es integrable en R y su integral es nula. Por una proposición anterior, como $R' \subset R$, tenemos que h también es integrable en R' . De esta manera, como $s(h|_{R'}, P) = 0$, $\forall P \in \mathcal{P}(R')$, tenemos que

$$\underline{\int_{R'}} h = \int_{R'} h = 0.$$

Veamos ahora que g es integrable en R' . Primero, como f está acotada, tendremos que existe $K > 0$ tal que $\beta_{g,J} - \alpha_{g,J} \leq K$, $\forall J \in P$ con $J \cap \partial R' \neq \emptyset$. Ahora, sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $P_1 \in \mathcal{P}(R')$ tal que $S(\tilde{f}, P_1) - s(\tilde{f}, P_1) < \frac{\varepsilon}{2}$. Además, como $\partial R'$ tiene contenido nulo, existe $P_2 \in \mathcal{P}(R')$ tal que $\sum_{J \in P_2, J \cap \partial R'} v(J) < \frac{\varepsilon}{2K}$. Así, cogiendo $P \in \mathcal{P}(R')$ más fina que P_1 y P_2 ,

$$\begin{aligned} S(g|_{R'}, P) - s(g|_{R'}, P) &= \sum_{J \in P} (\beta_{g,J} - \alpha_{g,J}) v(J) \\ &= \sum_{J \cap \partial R' = \emptyset} (\beta_{g,J} - \alpha_{g,J}) v(J) + \sum_{J \cap \partial R' \neq \emptyset} (\beta_{g,J} - \alpha_{g,J}) v(J) \\ &\leq \sum_{J \in P} (\beta_{f,J} - \alpha_{f,J}) v(J) + \sum_{J \cap \partial R' \neq \emptyset} (\beta_{g,J} - \alpha_{g,J}) v(J) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Así, tenemos que g es integrable en R' y por el lema anterior tenemos que también es integrable en R y además

$$\int_{R'} g = \int_R g.$$

Por otro lado, sea $I = \int_{R'} f$, entonces, suponiendo que $I \geq \int_{R'} g$ tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq I - \int_{R'} g \leq S(f|_{R'}, P) - s(g|_{R'}, P) \\ &= \sum_{J \cap \partial R' = \emptyset} \beta_{f,J} v(J) + \sum_{J \cap \partial R' \neq \emptyset} \beta_{f,J} v(J) - \sum_{J \cap \partial R' = \emptyset} \alpha_{g,J} v(J) - \sum_{J \cap \partial R' \neq \emptyset} \alpha_{g,J} v(J) \\ &= \sum_{J \cap \partial R' = \emptyset} (\beta_{f,J} - \alpha_{f,J}) v(J) + \sum_{J \cap \partial R' \neq \emptyset} (\beta_{f,J} - \alpha_{g,J}) v(J) \\ &\leq \sum_{J \in P} (\beta_{f,J} - \alpha_{f,J}) v(J) + \sum_{J \cap \partial R' \neq \emptyset} \tilde{K} v(J) < \varepsilon. \end{aligned}$$

El objetivo de \tilde{K} es acotar la resta $\beta_{f,J} - \alpha_{g,J} \geq 0$, lo cual podemos hacer puesto que f y g son acotadas y valen lo mismo en casi todos los puntos. El primer término lo podemos hacer arbitrariamente pequeño por la integrabilidad de f en R' y el segundo porque $\partial R'$ tiene contenido nulo. El caso $I \leq \int_{R'} g$ es análogo.

Finalmente, como f es suma de funciones integrables, tendremos que

$$\int_R f = \int_R g + h = \int_R g + \int_R h = \int_{R'} g = \int_{R'} f.$$

□

1.4. Conjuntos medibles Jordan

Definición 1.5 (Conjunto medible Jordan). Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ con $A \neq \emptyset$ y A acotado. Tomamos un rectángulo R tal que $A \subset R$. Definimos la función

$$\chi_A : R \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$

Diremos que A tiene **volumen** (A es **medible Jordan**) si χ_A es integrable y en este caso diremos que su **volumen** es

$$V(A) = \int_R \chi_A.$$

Ejemplo. ■ Ya vimos anteriormente que $\mathbb{Q}^n \cap [0, 1]^n$ no tiene volumen.

■ Si R es un rectángulo, R es medible Jordan.

Observación. Sea $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ acotado y R un rectángulo tal que $A \subset R$. Cogemos $P \in \mathcal{P}(R)$. Podemos observar que

$$\alpha_J = \begin{cases} 1, & J \subset A \\ 0, & J \not\subset A \end{cases}.$$

Así, tendremos que

$$s(\chi_A, P) = \sum_{J \in P} v(J) \alpha_J = \sum_{J \in P, J \subset A} v(J).$$

De esta forma,

$$\underline{\int}_R \chi_A = \sup \left\{ \sum_{J \in P, J \subset A} v(J) : P \in \mathcal{P}(R) \right\}.$$

Consideremos ahora las sumas superiores,

$$\beta_J = \begin{cases} 1, & J \cap A \neq \emptyset \\ 0, & J \cap A = \emptyset \end{cases}.$$

De esta forma,

$$S(\chi_A, P) = \sum_{J \in P, J \cap A \neq \emptyset} v(J).$$

Así,

$$\overline{\int}_R \chi_A = \inf \left\{ \sum_{J \in P, J \cap A \neq \emptyset} v(J) : P \in \mathcal{P}(R) \right\}.$$

Definición 1.6 (Integral en otros conjuntos). Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ también acotada. Diremos que f es **integrable en A** si existe R rectángulo tal que $A \subset R$ y

$$\tilde{f} : R \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases},$$

es integrable en R . En este caso

$$\int_A f := \int_R \tilde{f}.$$

De forma equivalente, desde $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ y $A \subset R$, diremos que f es integrable en A si $f \cdot \chi_A$ es integrable en R y tomamos

$$\int_A f = \int_R f \cdot \chi_A.$$

Observación. Tanto para la definición anterior como para la de volumen, tenemos que ver que basta con que exista R , puesto que en cuanto existe uno para cualquier otro rectángulo que cumpla estas características el valor de la integral coincide.

En efecto, sea $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ tal que χ_A es integrable en el rectángulo $R \supset A$ y sea $R' \supset A$ otro rectángulo. Tenemos que $R \cap R'$ es un rectángulo que contiene a A . Por las últimas proposiciones de la sección anterior tenemos que, por ser f integrable en R lo es en $R \cap R'$ y además

$$\int_R \chi_A = \int_{R \cap R'} \chi_A = \int_{R'} \chi_A.$$

Las integrales sobre conjuntos que no sean rectángulos cumplen propiedades parecidas a las integrales sobre rectángulos.

Proposición 1.5 (Linealidad y monotonía). Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ con $A \neq \emptyset$.

1. **Linealidad.** Si $f_1, f_2 : A \rightarrow \mathbb{R}$ son integrables en A , entonces

$$\int_A f_1 + f_2 = \int_A f_1 + \int_A f_2.$$

Además, si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en A , entonces

$$\int_A \alpha f = \alpha \int_A f.$$

2. **Monotonía.** Si $f_1, f_2 : A \rightarrow \mathbb{R}$ son integrables en A , con $f_1 \leq f_2, \forall x \in A$, entonces

$$\int_A f_1 \leq \int_A f_2.$$

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ con $A \neq \emptyset$.

1. Como f_1 y f_2 son integrables en A , existe R rectángulo tal que $A \subset R$ y existen $\int_R \tilde{f}_1$ y $\int_R \tilde{f}_2$. Así, tendremos que existe

$$\int_A f_1 + f_2 = \int_R \widetilde{f_1 + f_2} = \int_R \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 = \int_R \tilde{f}_1 + \int_R \tilde{f}_2 = \int_A f_1 + \int_A f_2.$$

Similarmente, si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en A , entonces existe $R \subset \mathbb{R}^n$ rectángulo con $A \subset R$ y existe $\int_R \tilde{f}$. Así, existe

$$\int_A \alpha f = \int_R \widetilde{\alpha f} = \int_R \alpha \tilde{f} = \alpha \int_R \tilde{f} = \alpha \int_A f.$$

2. Como f_1 y f_2 son integrables en A , existe $R \subset \mathbb{R}^n$ rectángulo con $A \subset R$ tal que \tilde{f}_1 y \tilde{f}_2 son integrables en R . Es fácil ver que $\tilde{f}_1 \leq \tilde{f}_2, \forall x \in R$, por lo que

$$\int_A f_1 = \int_R \tilde{f}_1 \leq \int_R \tilde{f}_2 = \int_A f_2.$$

□

Definición 1.7 (Media). Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrable con $A \subset \mathbb{R}^n$ medible Jordan y $v(A) > 0$, definimos la **media** de f en A como

$$m_A(f) = \frac{1}{v(A)} \int_A f.$$

Observación. Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, entonces está acotada por lo que existen $M, m > 0$ tales que $m \leq f(x) \leq M$, así

$$mv(A) \leq \int_A f \leq Mv(A) \iff m \leq \frac{1}{v(A)} \int_A f \leq M \iff m \leq m_A(f) \leq M.$$

Podemos observar que

$$\int_A m_A(f) = \int_A f.$$

Teorema 1.4 (Teorema del valor medio). Sea $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y conexo, medible Jordan con volumen positivo, y sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces, existe $x_m \in A$ tal que

$$f(x_m) = m_A(f) = \frac{1}{v(A)} \int_A f.$$

Demostración. Como f es continua y A es compacto y conexo, debe ser que $f(A)$ también es compacto y conexo (por lo que debe ser un intervalo cerrado y acotado), es decir, existen $x_1, x_2 \in A$ tales que

$$m = f(x_1) \leq f(x) \leq M = f(x_2), \quad \forall x \in A.$$

Así, tenemos que $f(A) = [m, M]$. Anteriormente hemos visto que $m \leq m_A(f) \leq M$, por lo que $m_A(f) \in f(A)$ y en consecuencia existe $x_m \in A$ tal que $f(x_m) = m_A(f)$. □

Proposición 1.6. Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, entonces $|f|$ es integrable y

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|.$$

Demostración. Demostramos la segunda parte. Claramente tenemos que

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \quad \forall x \in A.$$

Por la propiedad de la monotonía tenemos que

$$-\int_A |f| \leq \int_A f \leq \int_A |f| \iff \left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|.$$

□

Observación. Sea A medible Jordan y $|f(x)| \leq M, \forall x \in A$. Entonces, tenemos que

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f| \leq M v(A).$$

De esta manera, podemos utilizar la proposición anterior para obtener una cota de la integral.

Proposición 1.7 (Aditividad de la integral respecto de los conjuntos de integración). Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ acotados con $f : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Supongamos que $\int_{A \cap B} f = 0$ y f es integrable en A y en B . Entonces f es integrable en $A \cup B$ y

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

Demostración. Es fácil ver que

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}.$$

Por tanto, tenemos que

$$f \cdot \chi_{A \cup B} = f \cdot \chi_A + f \cdot \chi_B - f \cdot \chi_{A \cap B}.$$

Si cogemos $R \subset \mathbb{R}^n$ rectángulo tal que $A \cup B \subset R$, aplicando las hipótesis de la proposición y la linealidad de la integral tendremos que

$$\int_{A \cup B} f = \int_R f \cdot \chi_{A \cup B} = \int_R f \cdot \chi_A + \int_R f \cdot \chi_B - \int_R f \cdot \chi_{A \cap B} = \int_A f + \int_B f.$$

□

1.5. Conjuntos de medida nula

Lema 1.3. Sea $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, A tiene contenido nulo ^a si y solo si existe $R \supset A$ tal que $\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathcal{P}(R)$ tal que $\sum_{J \in P, J \cap A \neq \emptyset} v(J) < \varepsilon$.

^a A es medible Jordan y $v(A) = 0$.

Demostración. Tenemos que A tiene contenido nulo si y solo si es medible Jordan y $v(A) = 0$, es decir, si existe $R \subset \mathbb{R}^n$ rectángulo con $A \subset R$ y

$$0 \leq \underline{\int_R} \chi_A \leq \overline{\int_R} \chi_A \leq 0.$$

Esto último sucede si y solo si $\inf \{S(\chi_A, P) : P \in \mathcal{P}(R)\} \leq 0$, es decir, si $\forall \varepsilon > 0$ existe $P \in \mathcal{P}(R)$ tal que¹

$$S(\chi_A, P) = \sum_{J \in P, J \cap A \neq \emptyset} v(J) < \varepsilon.$$

□

Proposición 1.8 (Caracterización de contenido nulo). $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene contenido nulo si y solo si $\forall \varepsilon > 0$ existe $\{J_1, \dots, J_N\}$ familia finita de rectángulos tal que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^N J_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^N v(J_i) < \varepsilon.$$

Demostración. La primera implicación es trivial a partir del lema anterior, por lo que demostraremos únicamente la segunda implicación. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $\{J_1, \dots, J_N\}$ familia de rectángulos que recubren A y $\sum_{i=1}^N v(J_i) < \varepsilon$. Cogemos $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo grande tal que $\bigcup_{i=1}^N J_i \subset R$. Podemos obtener una partición $P \in \mathcal{P}(R)$ tal que cualquiera de los J_i es unión de rectángulos de P . Entonces,

$$\sum_{J \in P, J \cap A \neq \emptyset} v(J) = \sum_{i=1}^N \sum_{J \in P, J \subset J_i} v(J) \leq \sum_{i=1}^N v(J_i) < \varepsilon.$$

Por el lema anterior, tenemos que A tiene contenido nulo. □

Proposición 1.9. Sea $\{A_1, \dots, A_N\} \subset \mathbb{R}^n$ una familia finita de conjuntos de contenido nulo. Entonces, $\bigcup_{i=1}^N A_i$ tiene contenido nulo.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Para cada A_i existe una familia $\{J_1^i, \dots, J_{N_i}^i\}$ de rectángulos tales que

$$A_i \subset \bigcup_{1 \leq j \leq N_i} J_j^i \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{N_i} v(J_j^i) < \frac{\varepsilon}{N}.$$

Así, si cogemos la familia $\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^N \{J_1^i, \dots, J_{N_i}^i\}$, tendremos que claramente $\bigcup_{i=1}^N A_i$ está recubierto por \mathcal{F} y además

$$\sum_{J \in \mathcal{F}} v(J) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i} v(J_j^i) < \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon.$$

¹ Esto último se deduce de la caracterización de ínfimo: $S(\chi_A, P) < \overline{\int_R} \chi_A + \varepsilon \leq \varepsilon$.

Una demostración alternativa es hacerlo por inducción. Supongamos que A y B tienen contenido nulo y veamos que $A \cup B$ también tiene contenido nulo. Como $A \cap B \subset A$, es sencillo ver que también tendrá contenido nulo, y por la propiedad de aditividad tendremos que para un rectángulo $R \supset A \cup B$ se tiene que

$$v(A \cup B) = \int_R \chi_{A \cup B} = \int_R \chi_A + \int_R \chi_B - \int_R \chi_{A \cap B} = v(A) + v(B) - v(A \cap B) = 0.$$

A partir de aquí es sencillo ver inducitivamente que la proposición se cumple para una familia finita de conjuntos de contenido nulo. \square

Observación. En la proposición anterior es importante que la familia de conjuntos sea finita y no numerable. En efecto, ya vimos que $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ no tiene contenido nulo.

Definición 1.8 (Medida nula). Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que A tiene **medida nula** si $\forall \varepsilon > 0, \exists \{J_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ familia de rectángulos tales que

$$A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} J_k \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} v(J_k) < \varepsilon.$$

Lema 1.4. Un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida nula si y solo si $\forall \varepsilon > 0$ existe una sucesión de rectángulos $\{R_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tales que

$$A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \text{Int}(R_j) \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{\infty} v(R_j) < \varepsilon.$$

Demostración. La segunda implicación es trivial, por lo que sólo demostraremos la primera. Dado $\varepsilon > 0$, existe una sucesión de rectángulos $\{Q_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tales que

$$A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j) < \frac{\varepsilon}{2},$$

donde $Q_j = [a_1^j, b_1^j] \times [a_n^j, b_n^j]$ y $v(Q_j) = \prod_{k=1}^n (b_k^j - a_k^j)$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Para $\delta_j > 0$ definimos

$$R_j = [a_1^j - \delta_j, b_1^j + \delta_j] \times \cdots \times [a_n^j - \delta_j, b_n^j + \delta_j].$$

Claramente tenemos que $Q_j \subset \text{Int}(R_j)$ y además

$$v(R_j) = \prod_{k=1}^n (b_k^j - a_k^j + 2\delta_j) \xrightarrow{\delta_j \rightarrow 0} v(Q_j), \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Cogemos δ_j de forma que $v(R_j) \leq v(Q_j) + \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^j}$. De esta forma tenemos que $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j$ y además

$$\sum_{j=1}^{\infty} v(R_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(v(Q_j) + \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^j} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^j} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Proposición 1.10. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene contenido nulo entonces también tiene medida nula.

Demostración. Supongamos que A tiene contenido nulo y sea $\varepsilon > 0$. Tenemos que existe $\{J_1, \dots, J_N\}$ familia de rectángulos tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^N J_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^N v(J_i) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora, tomamos una sucesión cualquiera de rectángulos $\{J_{N+k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $v(J_{N+k}) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. De esta forma, es trivial que $\{J_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ recubre a A y

$$\sum_{i=1}^{\infty} v(J_i) = \sum_{i=1}^N v(J_i) + \sum_{k=1}^{\infty} v(J_{N+k}) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon.$$

□

Proposición 1.11. Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una sucesión o familia finita de conjuntos de medida nula, entonces $\bigcup_{i \in I} A_i$ también tiene medida nula.

Demostración. Sea $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Tomamos $\varepsilon > 0$ y para cada $i \in I$ tomamos un rectángulo J_i tal que $A_i \subset J_i$ y $v(J_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. Claramente se tiene que

$$A \subset \bigcup_{i \in I} J_i \quad \text{y} \quad \sum_{i \in I} v(J_i) < \sum_{i \in I} \frac{\varepsilon}{2^i} < \varepsilon.$$

Alternativamente, podemos ver que para un $i \in I$ se tiene que existe $\{J_{ij}\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que

$$A_i \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} J_{ij} \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{\infty} v(J_{ij}) < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

De esta forma, podemos coger la familia numerable $\{J_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ que recubre a A y tendremos que²

$$\sum_{i \in I, j \in \mathbb{N}} = \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{\infty} v(J_{ij}) < \sum_{i \in I} \frac{\varepsilon}{2^i} < \varepsilon.$$

²El hecho de que podamos sumar primero en función de J y luego de i se debe a que los términos se pueden reordenar en una serie doble que es absolutamente convergente.

□

Ejemplo. Por la proposición anterior tenemos que $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ tiene medida nula pero como vimos no tiene contenido nulo puesto que no es medible Jordan. Es decir, **que un conjunto tenga medida nula no significa que tenga contenido nulo**.

Proposición 1.12. Si $\emptyset \neq B \subset A \subset \mathbb{R}^n$ tal que A tiene contenido (resp. medida) nulo, entonces B tiene contenido (resp. medida) nulo.

Demostración. Supongamos que $B \subset A$ y A tiene contenido nulo. Si $\varepsilon > 0$ tendremos que existe $\{J_1, \dots, J_N\}$ familia de rectángulos que recubre a A y $\sum_{i=1}^N v(J_i) < \varepsilon$. Como $B \subset A$ se tiene que también recubren a B , por lo que B también tiene contenido nulo. La demostración para el caso de medida nula es análoga. □

Proposición 1.13. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ medible Jordan. Entonces, A tiene contenido nulo si y solo si tiene medida nula.

Demostración. La primera implicación es cierta para cualquier subconjunto de \mathbb{R}^n , por lo que sólo demostraremos la segunda implicación. Supongamos que A tiene medida nula. □

Ejemplo. Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo (no trivial, es decir, no tiene volumen nulo). Entonces, $v(R) > 0$ por lo que R no tiene contenido nulo, que se puede deducir a partir de la definición. Además, como R es medible Jordan y no tiene contenido nulo tenemos que no tiene medida nula.

Corolario 1.2. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $A \supset R$ con R rectángulo no trivial. Entonces A no tiene contenido ni medida nula.

Demostración. Como contenido nulo implica medida nula, basta con demostrar que no puede tener medida nula. Supongamos que A tiene medida nula, entonces para $\varepsilon > 0$ existe $\{J_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que esta familia recubre a A y $\sum_{k=1}^{\infty} v(J_k) < \varepsilon$. Como $R \subset A$, tendremos que esta familia también recubre a R y por tanto R también tiene medida nula, lo cual es una contradicción como se ha visto en el ejemplo anterior.³ □

Teorema 1.5. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Entonces K tiene contenido nulo si y solo si K tiene medida nula.

³La demostración no es necesaria realmente puesto que este enunciado es una consecuencia directa de la proposición anterior.

Demostración. La primera implicación es cierta para cualquier subconjunto de \mathbb{R}^n , por lo que demostraríremos únicamente la segunda implicación. Supongamos que $K \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida nula, entonces existen $\{R_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ rectángulos tales que

$$K \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \text{Int}(R_j) \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{\infty} v(R_j) < \varepsilon.$$

Como se trata de un recubrimiento abierto de K , por ser K compacto debe ser que existe un subrecubrimiento finito, es decir, existen $\{R_{j_1}, \dots, R_{j_N}\}$ tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^N R_{j_i}$ y además

$$\sum_{i=1}^N v(R_{j_i}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} v(R_j) < \varepsilon.$$

Por tanto, K tiene contenido nulo. \square

1.6. Teorema de Lebesgue

Teorema 1.6 (Teorema de Lebesgue). Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y R un rectángulo. Entonces f es integrable si y solo si el conjunto de discontinuidades de f en R , $D(f)$, tiene medida nula.

Ahora estamos preparados para demostrar la proposición siguiente (que ya habíamos mencionado antes):

Corolario 1.3. Si $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, entonces $|f|$ también es integrable.

Demostración. Si f es continua en $x \in R$, entonces $|f|$ también es continua en x . De esta manera, tenemos que $D(|f|) \subset D(f)$. Así, como $D(f)$ tiene medida nula, por una proposición anterior tenemos que $D(|f|)$ también tiene medida nula, por lo que $|f|$ también es integrable en R . \square

Corolario 1.4. Sean $f, g : R \rightarrow \mathbb{R}$ integrables. Entonces, $f + g$ es integrable en R .

Demostración. Es sencillo ver que $D(f + g) \subset D(f) \cup D(g)$. Como $D(f)$ y $D(g)$ tienen medida nula su unión también, por lo que $D(f + g)$ tiene medida nula y $f + g$ es integrable. \square

Corolario 1.5. Sean $f, g : R \rightarrow \mathbb{R}$ integrables en R . Entonces, $f \cdot g$ es integrable en R .

Proposición 1.14. Un conjunto no vacío y acotado $A \subset \mathbb{R}^n$ es medible Jordan si y solo si ∂A tiene medida nula ^a.

^aRecordamos que $\partial A = \{x \in R : B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ y } B(x, \varepsilon) \cap (R/A) \neq \emptyset, \forall \varepsilon > 0\}$.

Demostración. A es medible Jordan si y solo si existe $R \subset \mathbb{R}^n$ rectángulo con $A \subset R$ tal que χ_A es integrable en R . Esto es equivalente a que $D(\chi_A)$ tenga medida nula. Veamos que $D(\chi_A) = \partial A$.

(\Rightarrow) Si $x \in \partial A$, entonces se cumple que $\forall \varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ y $B(x, \varepsilon) \cap (R/A) \neq \emptyset$. Así, existen sucesiones $\{y_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset A$ y $\{z_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset R/A$ tales que $y_j, z_j \rightarrow x$. Así, tenemos que $\chi_A(y_j) \rightarrow 1$ y $\chi_A(z_j) \rightarrow 0$, por lo que χ_A es discontinua en x .

(\Leftarrow) Si $x \notin \partial A$, existe $\varepsilon_0 > 0$ para el cual podemos distinguir dos casos:

- $B(x, \varepsilon_0) \cap A = \emptyset$, por lo que debe ser que $B(x, \varepsilon_0) \subset R/A$. Tenemos que $\chi_A|_{B(x, \varepsilon_0)} \equiv 0$, por lo que es continua en x y $x \notin D(\chi_A)$.
- $B(x, \varepsilon_0) \cap (R/A) = \emptyset$, por lo que debe ser que $B(x, \varepsilon_0) \subset A$. Tenemos que $\chi_A|_{B(x, \varepsilon_0)} \equiv 1$, por lo que es continua en x y $x \notin D(\chi_A)$.

□

Observación. Recordamos que $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado es medible Jordan si y solo si existe $R \subset \mathbb{R}^n$ rectángulo tal que χ_A es integrable en R . Entonces, por el criterio de Lebesgue, A es medible Jordan si y solo si $D(\chi_A)$ tiene medida nula. Tenemos que $D(\chi_A) = \partial A$, por lo que buscamos que ∂A tenga medida nula .

Ejemplo. Consideremos $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Tenemos que $\partial A = [0, 1]$ y como $v(\partial A) = 1 \neq 0$, ∂A no tiene medida nula por lo que A no es medible Jordan.

Observación. Supongamos que A y B son medibles Jordan. Tenemos que

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B.$$

Como χ_A y χ_B son integrables Riemann, tenemos que $\chi_{A \cap B}$ es integrable Riemann.

1.7. 11/2/2026

Proposición 1.15. Sea A de contenido nulo y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Entonces, f es integrable en A y $\int_A f = 0$.

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ de contenido nulo y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Cogemos $R \subset \mathbb{R}^n$ rectángulo tal que $A \subset R$ y consideramos la función

$$\tilde{f} : R \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$

Tendremos que $D(\tilde{f}) \subset \overline{A}$. En efecto, si $x \notin \overline{A}$ tendremos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset R/A$, por lo que $\tilde{f}|_{B(x, \varepsilon)} \equiv 0$ y por tanto es continua en x . Como A tiene

contenido nulo, \bar{A} también tiene contenido nulo (Hoja 3, Ejercicio 2). Por tanto, \bar{A} tiene medida nula. Así, \tilde{f} es integrable en R y en consecuencia f es integrable en A . Veamos ahora que el valor de la integral es nulo. Como \tilde{f} es integrable, basta con ver que la integral inferior de $|\tilde{f}|$ vale 0, es decir,

$$\int_R |\tilde{f}| = \sup \left\{ s(|\tilde{f}|, P) : P \in \mathcal{P}(R) \right\} = 0.$$

Sea $P \in \mathcal{P}(R)$, entonces

$$s(|\tilde{f}|, P) = \sum_{J \in P} \alpha_J v(J).$$

Como A tiene volumen nulo y J no, no puede ser que $J \subset A$. Así, tenemos que existe $x \in J$ con $x \notin A$, por lo que $\alpha_J = 0$, $\forall J \in P$. Así, tenemos que $s(|\tilde{f}|, P) = 0$, por lo que la integral inferior vale 0. Así,

$$\left| \int_R \tilde{f} \right| \leq \int_R |\tilde{f}| = 0 \Rightarrow \int_R \tilde{f} = \int_A f = 0.$$

Otra forma de verlo es ver que

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f| \leq \int_A M = Mv(A) = 0,$$

donde $|f| \leq M$, $\forall x \in A$.

□

Observación. Nos podemos preguntar, es válido el resultado si en vez de tener A contenido nulo tenemos que A tiene medida nula? Claramente, la respuesta es que no. En efecto, tenemos que $\chi_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}$ tiene medida nula pero no es integrable. Sin embargo, sí es cierto que si A tiene medida nula y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, entonces $\int_A f = 0$.

Corolario 1.6. Sean $f, g : R \rightarrow \mathbb{R}$ acotadas con f integrable en $A \subset R$ y $\{x \in R : f(x) \neq g(x)\}$ tiene contenido nulo. Entonces, g es integrable en A y

$$\int_A g = \int_A f.$$

Demostración. Tenemos que $g(x) = g(x) - f(x) + f(x)$. Por la proposición anterior tenemos que $g(x) - f(x)$ es integrable y tiene integral nula, por ser suma de funciones integrables tenemos que g es integrable y

$$\int_A g = \int_A g - f + \int_A f = \int_A f.$$

□

Observación. Al igual que antes, el enunciado no es cierto si sustituimos 'contenido nulo' con 'medida nula'. En efecto, basta con considerar $f \equiv 0$ y $g = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$.

Observación. Podemos repasar nuestro resultado sobre la aditividad de la integral en conjuntos integrables. Si $A = A_1 \cup A_2$ con A, A_1 y A_2 medibles Jordan, si además $A_1 \cap A_2$ tiene contenido nulo entonces

$$\int_A f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f.$$

Proposición 1.16. Sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ con $f \geq 0$, y $\int_R f = 0$. Entonces el conjunto $\{x \in R : f(x) \neq 0\}$ tiene medida nula. Es decir, existe $A \subset R$ de medida nula tal que $f(x) = 0, \forall x \in R/A$.

Demostración. Queremos ver que el conjunto $X = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ tiene medida nula. Tenemos que

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

con $A_k = \left\{x \in R : f(x) > \frac{1}{k}\right\}$. Basta probar que A_k tienen medida nula y basta probar que tienen contenido nulo. Supongamos que A_k es medible Jordan, entonces

$$0 = \int_R f \geq \int_{A_k} f \geq \int_{A_k} \frac{1}{k} = \frac{1}{k} v(A_k) \geq 0.$$

Así, debe ser que $\frac{1}{k} v(A_k) = 0$, por lo que $v(A_k) = 0$. Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ y sea $\varepsilon > 0$, existe $P \in \mathcal{P}(R)$ tal que $S(f, P) < \frac{\varepsilon}{k_0}$. Así, tenemos que

$$\frac{\varepsilon}{k_0} > \sum_{J \in P} \beta_J v(J) \geq \sum_{J \cap A_{k_0} \neq \emptyset} \beta_J v(J) \geq \sum_{J \cap A_{k_0} \neq \emptyset} v(J) \frac{1}{k_0}.$$

Así, tenemos que $\sum_{J \cap A_{k_0} \neq \emptyset} v(J) < \varepsilon$, por lo que A_{k_0} tiene contenido nulo. \square

Notación. A partir de ahora, si decimos que algo se cumple en casi todo punto es porque se cumple en todos los puntos salvo en un conjunto de medida nula.

Observación. No podemos concluir que $\{x \in R : f(x) \neq 0\}$ tiene contenido nulo. En

efecto, basta tomar la función de Thomae,

$$x \rightarrow \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \quad \left(\text{la fracción } \frac{p}{q} \text{ es irreducible} \right) \end{cases}.$$

que es continua en los irracionales y discontinua en los racionales. Así, $D(f) = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ que tiene medida nula, por lo que f es integrable.

Capítulo 2

Cálculo de integrales

Ejemplo. Consideremos $f(x, y) = x^2y + \cos xy$ y $R = [0, 1] \times [2, 3]$. Como f es continua en \mathbb{R}^2 , lo es en R por lo que es integrable. Buscamos cómo calcular

$$\int_{[0,1] \times [2,3]} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Veremos que la forma de calcular integrales es a través de integrales iteradas, es decir,

$$\begin{aligned} \int_{[0,1] \times [2,3]} f(x, y) \, dx \, dy &= \int_2^3 \int_0^1 x^2y + \cos xy \, dx \, dy = \int_2^3 \frac{y}{3} + \frac{\sin y}{y} \, dy \\ &= \left[\frac{y^2}{6} \right]_2^3 + \int_2^3 \frac{\sin y}{y} \, dy = \frac{5}{6} + \int_2^3 \frac{\sin y}{y} \, dy. \end{aligned}$$

Podríamos haber planteado también la integral

$$\int_0^1 \int_2^3 x^2y + \cos xy \, dy \, dx,$$

es decir, cambiar el orden de integración. En este caso, los dos resultados coinciden.

2.1. Teorema de Fubini

Teorema 2.1 (Teorema de Fubini). Sea $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ y $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ integrable. Supongamos que para cada $x \in [a, b]$, la función

$$f_x : [c, d] \rightarrow \mathbb{R} : y \rightarrow f(x, y),$$

es integrable en $[c, d]$. Entonces, la función

$$x \rightarrow \int_c^d f_x(y) dy,$$

es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} f = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

Observación. Podemos hacer un par de observaciones.

- Es importante ver la condición de que f_x sea integrable es necesaria puesto que el hecho de que f sea integrable no implica siempre que f_x lo sea.
- El teorema también se cumple si cambiamos x por y .

Teorema 2.2 (Teorema de Fubini en \mathbb{R}^n). Sea $R = R_1 \times R_2 \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo con $R_1 \subset \mathbb{R}^k$ rectángulo y $R_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$ rectángulo. Suponemos que $\forall x \in R_1$, $f_x : R_2 \rightarrow \mathbb{R} : y \rightarrow f(x, y)$ es integrable en R_2 . Entonces la función

$$x \rightarrow \int_{R_2} f(x, y),$$

es integrable en R_1 y se tiene que

$$\int_R f = \int_{R_1} \int_{R_2} f(x, y) dy dx.$$

Ejemplo. Consideremos los siguientes ejemplos.

1. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, queremos calcular

$$\int_A f(x, y) dx dy.$$

Si cogemos el rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 1]$, tenemos que

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_R \tilde{f}(x, y) dx dy.$$

Si cogemos un $x_0 \in [a, b]$, podemos considerar

$$\tilde{f}_{x_0} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R} : y \rightarrow \begin{cases} f(x_0, y), & (x_0, y) \in A \\ 0, & (x_0, y) \notin A \end{cases}.$$

Supongamos que es integrable, entonces tendremos que

$$\int_R \tilde{f} = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{f}(x, y) dy dx.$$

Dado que nos es incómodo calcular la integral de \tilde{f} , podemos decir que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^y \tilde{f}(x, y) dy + \int_y^1 \tilde{f}(x, y) dy \right) dx &= \int_0^1 \int_0^y f(x, y) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x, y) dy dx. \end{aligned}$$

Si tomamos por ejemplo $f(x, y) = x$, tendremos que

$$\int_A f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} x dy dx = \int_0^1 x(1-x) dx = \frac{1}{6}.$$

Podemos cambiar el orden de integración:

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-y} x dx dy = \int_0^1 \frac{(1-y)^2}{2} dy = \frac{1}{6}.$$

2. Consideremos ahora $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$. Podemos considerar $R = [-1, 1] \times [0, 1]$. De esta forma,

$$\int_A f(x, y) dy dx = \int_{-1}^1 \int_0^1 \tilde{f}(x, y) dy dx = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx.$$

Podemos cambiar el orden de integración:

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_{-1}^1 \tilde{f}(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy.$$

3. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], g_2(x) \leq y \leq g_1(x)\}$ para $g_1, g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuas. Tendremos que

$$\int_A f(x, y) dy dx = \int_a^b \int_{g_2(x)}^{g_1(x)} f(x, y) dy dx.$$

2.2. Cambio de variable

Teorema 2.3 (Teorema de cambio de variable). Si $\varphi : B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow A \subset \mathbb{R}^n$ es de clase \mathcal{C}^1 y $\varphi^{-1} \in \mathcal{C}^1$ ^a, tenemos que

$$\int_A f(x) dx = \int_B f(\varphi(t)) |\det \varphi'(t)| dt.$$

Asumimos que A y B son abiertos.

^aBuscamos que φ sea difeomorfismo.

2.2.1. Coordenadas polares

El cambio de coordenadas polares consiste en

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta.$$

Para deshacer el cambio es fácil ver que

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad y \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Es sencillo comprobar que

$$J(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix} \Rightarrow |\det J(\rho, \theta)| = \rho.$$

En este caso podemos considerar $\varphi : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Ejemplo. Consideremos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Tenemos que

$$v(A) = \int_A dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx = \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2} dx = \pi.$$

Intentemos resolver el problema pero esta vez con un cambio de variable:

$$v(A) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \pi.$$

Podemos ver que hemos obtenido el mismo valor por los dos métodos.