Geometría Lineal - Entrega

Julia Romero, Pablo Salas y Victoria Torroja

9 de diciembre de 2025

Ejercicio 1. Sean P y Q dos puntos distintos del plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ real. Sea $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ una homografía tal que $f(P) = Q$ y $f(Q) = P$.

(a) Demuestra que existe una referencia proyectiva $\mathcal{R}$ de $\mathbb{P}^2$ tal que la matriz de f tenga la forma

$$M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Determina la ecuación implícita de una recta genérica ℓ que pasa por P en dicha referencia.

(c) Calcula la ecuación implícita de la recta imagen $f(\ell)$.

(d) Sean ℓ_A y ℓ_B dos rectas distintas que pasan por P. Sea $X = \ell_A \cap f(\ell_B)$ e $Y = \ell_B \cap f(\ell_A)$. Demuestra que la recta que une X e Y pasa siempre por un punto fijo R, independiente de la elección de las rectas.

(e) Usando el principio de dualidad, demuestra el siguiente enunciado: *Dadas dos rectas r y s y una homografía f tal que $f(r) = s$ y $f(s) = r$, el lugar geométrico de los puntos de intersección de las rectas $A + f(B)$ y $B + f(A)$ (donde $A, B \in r$) es una recta fija.*

Solución 1. (a) Como se vio en clase, esto no es demostrable porque no es cierto siempre. De todas formas, cogemos que la matriz de f es

$$M_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Tenemos que $P = [1 : 0 : 0]$ y consideremos un punto $O = [\alpha : \beta : \gamma]$ con $O \neq P$. La recta que pasa por ambos puntos será

$$\ell = \left\{ \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0 \right\} = \{\beta x_2 - \gamma x_1 = 0\}.$$

(c) Como f es una homografía tendremos que $\hat{f}$ es un isomorfismo, por lo que $\operatorname{Ker}\left(\hat{f}\right) = \{0\}$ y $Z = \emptyset$. Así, podemos aplicar que $f(\ell) = \mathbb{P}\left(\hat{f}\left(\hat{\ell}\right)\right)$ y obtenemos que

$$\hat{f}\left(\hat{\ell}\right) = L\left(\left\{\hat{f}(1,0,0), \hat{f}(\alpha,\beta,\gamma)\right\}\right) = L\left(\{(0,1,0), (\beta + \gamma a, \alpha + b\gamma, \gamma)\}\right).$$

Así, tenemos que $f(\ell)$ es la recta que pasa por los puntos Q y $[\beta+\gamma a : \alpha+\gamma b : \gamma]$. De esta forma,

$$f(\ell)=\left\{\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta+\gamma a & \alpha+\gamma b & \gamma \end{vmatrix}=0\right\}=\{\gamma x_0-(\beta+\gamma a)\,x_2=0\}.$$

(d) Antes de empezar vamos a simplificar las ecuaciones de los apartados b) y c) para facilitar los calculos. Tenemos:

$$\begin{aligned}&\ell=\{\gamma x_1-\beta x_2=0\}\\&f(\ell)=\{\gamma x_0-(\beta+\gamma a)x_2=0\}\end{aligned}$$

Consideraremos el caso de $\gamma=0$ al final. Para $\gamma\neq 0$ dividimos las ecuaciones entre γ:

$$\begin{aligned}&\ell=\{x_1-\tfrac{\beta}{\gamma}x_2=0\}\\&f(\ell)=\{x_0+(-\tfrac{\beta}{\gamma}-a)x_2=0\}\end{aligned}$$

Tomando $\lambda=-\frac{\beta}{\gamma}$ obtenemos las ecuaciones de ℓ_Ay ℓ_B:

$$\begin{aligned}&\ell_A=\{x_1+\lambda x_2=0\}\\&f(\ell_A)=\{x_0+(\lambda-a)x_2=0\}\\&\ell_B=\{x_1+\lambda' x_2=0\}\\&f(\ell_B)=\{x_0+(\lambda'-a)x_2=0\}\end{aligned}$$

Sabemos que $\lambda\neq\lambda'$ al ser las rectas distintas. Tomando los espacios vectoriales asociados hacemos la intersección:

$$\hat{X}=\widehat{\ell_A}\cap\widehat{f(\ell_B)}=\left\{\begin{array}{l} x_1+\lambda x_2=0 \\ x_0+(\lambda'-a)x_2=0\end{array}\right.$$

Obtenemos una recta vectorial: $\hat{X}=L(\{(\lambda'-a,\lambda,-1)\})$, siendo el punto proyectivo $X=[\lambda'-a:\lambda:-1]$. Análogamente calculamos $\hat{Y}=\widehat{\ell_B}\cap\widehat{f(\ell_A)}$, obteniendo: $Y=[\lambda-a:\lambda':-1]$. Ahora calculamos la recta $X+Y$, donde

$$\widehat{X+Y}=L(\hat{X}\cup\hat{Y})=L(\{(\lambda'-a,\lambda,-1),(\lambda-a,\lambda',-1)\}).$$

Haciendo el determinante:

$$\begin{vmatrix} x_0 & \lambda-a & \lambda'-a \\ x_1 & \lambda' & \lambda \\ x_2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=(\lambda-\lambda')x_0+(\lambda-\lambda')x_1+(\lambda-\lambda')(\lambda+\lambda'-a)x_2=0$$

Con $\lambda-\lambda'\neq 0$, obtenemos la ecuación de la recta:

$$s=X+Y=\{x_0+x_1+(\lambda+\lambda'-a)x_2=0\}$$

Para obtener el punto fijo R, tenemos que encontrar la intersección de todas las posibles rectas s. Para ello basta con la intersección de 2 rectas distintas cualesquiera que tenga la expresión de s.

$$s\cap s'=\left\{\begin{array}{l} x_0+x_1+(\lambda+\lambda'-a)x_2=0 \\ x_0+x_1+(\mu+\mu'-a)x_2=0\end{array}\right.$$

Al ser distintas el espacio vectorial asociado estará generado por un único vector, $\widehat{s \cap s'} = L((1,-1,0)) = \hat{R}$. Y por tanto:

$$R = [1 : -1 : 0]$$

Por último estudiamos el caso $\gamma = 0$. Con las ecuaciones iniciales:

$$\ell = \{\gamma x_1 - \beta x_2 = 0\}$$
$$f(\ell) = \{\gamma x_0 - (\beta + \gamma a) x_2 = 0\}$$

Podemos ver que

$$\ell_0 = f(\ell_0) = \{x_2 = 0\}$$

Esta recta pasa por P y por Q. Sabiendo que todas las ℓ pasan por P y todas las $f(\ell)$ pasan por Q, podemos ver como la intersección con otra recta distinta y su imagen será:

$$\ell_0 \cap f(\ell_B) = X_0 = Q$$
$$f(\ell_0) \cap \ell_B = Y_0 = P$$

Por lo tanto la recta correspondiente que une X_0 e Y_0 será: $s_0 = \ell_0$. Y así podemos comprobar:

$$[1 : -1 : 0] = R \in s_0 = \ell_0$$

De esta forma R pertenece a todas las posibles rectas s.

(e) Aplicando el principio de dualidad (cambiamos las dimensiones de las variedades por las de sus duales, intersecciones por sumas y el sentido de los contenidos), tenemos que el enunciado dual será:

Dados dos puntos R y S y una homografía f tal que $f(R) = S$ y $f(S) = R$, la intersección de las rectas generadas por $a \cap f(b)$ y $b \cap f(a)$ (donde a, b son rectas que contienen a R) es un punto fijo .

Este enunciado es el que hemos demostrado en el apartado anterior, por lo que el enunciado original queda demostrado por ser su dual.

Ejercicio 2. Una dilatación es una afinidad $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tal que $\vec{\varphi} = \lambda \cdot id$ con $\lambda \in \mathbb{K}^{\times}$. Llamamos a λ la *razón* de φ.

(a) Demuestra que una afinidad es una dilatación si y solo si para cada recta l, su imagen es paralela o igual a l.

(b) Demuestra que toda dilatación distinta de la identidad o bien es una translación o bien tiene un único punto fijo y es una homotecia.

(c) Sea $\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ la homografía dada por

$$\varphi([x_0 : x_1 : x_2]) = [3x_0 + 2x_1 + 2x_2 : -x_0 - x_2 : 2x_0 + 2x_1 + 3x_2]\,.$$

Demuestra que $l = \{x_0 + x_1 + x_2 = 0\}$ es una recta invariante por φ. Calcula el resto de rectas invariantes y puntos fijos, si los hay.

(d) Con la notación de (c), demuestra que φ induce una dilatación de $\mathbb{A} = \mathbb{P}^2/l$. Si es una traslación, calcúlese su dirección, y si es una homotecia calcúlense su centro y su razón.

Solución 2. (a) Sea $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una dilatación y $l \subset \mathbb{A}$ una recta afín. Así, tenemos que existe $\mathbb{P} \in \mathbb{A}$ y $u \in \vec{\mathbb{A}}$ tal que

$$l = P + L(\{u\}).$$

Como l es una variedad afín y φ es una aplicación afín tenemos que

$$\varphi(l) = f(P) + \vec{\varphi}(L(\{u\})).$$

Para ver que $\varphi(l)$ es paralela o igual a l basta con ver que $\vec{l} = \vec{\varphi}\left(\vec{l}\right)$. En efecto, como $\lambda \neq 0$,

$$\vec{\varphi}\left(\vec{l}\right) = \vec{\varphi}(L(\{u\})) = L(\{\vec{\varphi}(u)\}) = L(\{\lambda u\}) = L(\{u\}) = \vec{l}.$$

Recíprocamente, supongamos que φ es una afinidad y que para cualquier recta $l \subset \mathbb{A}$, $\varphi(l)$ es paralela o igual a l. Como acabamos de ver, esto quiere decir que $\vec{\varphi}\left(\vec{l}\right) = \vec{l}$. Así, tenemos que $\forall u \in \vec{\mathbb{A}}, \exists \lambda_u \in \mathbb{K}$ tal que $\vec{\varphi}(u) = \lambda_u u$. Sean $u, v \in \vec{\mathbb{A}}$ distintos y consideremos dos casos:

- Si $\{u, v\}$ son linealmente independientes, tenemos que

$$\vec{\varphi}(u) = \lambda_u u, \quad \vec{\varphi}(v) = \lambda_v v \quad \text{y} \quad \vec{\varphi}(u+v) = \lambda_{u+v}(u+v).$$

  Aplicando la linealidad de $\vec{\varphi}$ tenemos que

$$\vec{\varphi}(u+v) = \lambda_{u+v}u + \lambda_{u+v}v = \lambda_u u + \lambda_v v \Rightarrow (\lambda_{u+v} - \lambda_u)u + (\lambda_{u+v} - \lambda_v)v = 0.$$

  Como $\{u, v\}$ son linealmente independientes tenemos que $\lambda_{u+v} - \lambda_u = \lambda_{u+v} - \lambda_v = 0$, por lo que $\lambda = \lambda_{u+v} = \lambda_u = \lambda_v$. Así, tenemos que $\vec{\varphi} = \lambda id$, por lo que φ es una dilatación.
- Si $\{u, v\}$ son linealmente dependientes, tenemos que existe $\mu \in \mathbb{K}^\times$ tal que $v = \mu u$. Así, tendremos que

$$\vec{\varphi}(v) = \lambda_v v = \lambda_v \mu u = \lambda_u \mu u \Rightarrow (\lambda_v - \lambda_u)\mu u = 0.$$

  Como $\mu \neq 0$ y $u \neq 0$, debe ser que $\lambda_v - \lambda_u = 0$, por lo que $\lambda = \lambda_v = \lambda_u$. Así, $\vec{\varphi} = \lambda id$ y φ es una dilatación [1].

(b) Supongamos que $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una dilatación con $\varphi \neq id$, por lo que $\vec{\varphi} = \lambda id$. Podemos considerar dos casos:

- Supongamos que $\lambda = 1$, por lo que $\vec{\varphi} = id$. Claramente φ no tiene puntos fijos. Si tuviese un punto fijo $P \in \mathbb{A}$ tendríamos que si $Q \neq P$, entonces

$$\varphi(Q) = \varphi\left(P + \overrightarrow{PQ}\right) = \varphi(P) + \vec{\varphi}\left(\overrightarrow{PQ}\right) = P + \overrightarrow{PQ} = Q.$$

  Así, tendríamos que $\varphi = id$, que es una contradicción. Por tanto, no hay puntos fijos. Consideremos $A, B \in \mathbb{A}$. Tenemos que $\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \vec{\varphi}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AB}$. De esta manera,

$$\overrightarrow{A\varphi(A)} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\varphi(B)} + \overrightarrow{\varphi(B)\varphi(A)} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\varphi(B)} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B\varphi(B)}.$$

  Consecuentemente podemos tomar $u := \overrightarrow{O\varphi(O)}$ para algún $O \in \mathbb{A}$ y tendremos que $\forall A \in \mathbb{A}$, $\varphi(A) = A + u$, por lo que claramente φ es una traslación.

[1] En ningún caso puede ser $\lambda = 0$ puesto que φ es una afinidad, por lo que $\vec{\varphi}$ es una biyección y $\operatorname{Ker}\vec{\varphi} = \{0\}$.

- Supongamos ahora que $\lambda \neq 1$. Supongamos que tiene un punto fijo $C \in \mathbb{A}$ y $A \in \mathbb{A}$ con $A \neq f(A)$. Tendremos que

$$\varphi(A) = \varphi\left(C + \overrightarrow{CA}\right) = \varphi(C) + \vec{\varphi}(CA) = C + \lambda\overrightarrow{CA}.$$

De donde se deduce que

$$\overrightarrow{A\varphi(A)} = \overrightarrow{A\left(C + \lambda\overrightarrow{CA}\right)} = \overrightarrow{AC} + \lambda\overrightarrow{CA} = (1-\lambda)\overrightarrow{AC}.$$

Así, tenemos que, de haber un punto fijo sería único y sería $C = A + \dfrac{\overrightarrow{A\varphi(A)}}{1-\lambda}$. En efecto sería único puesto que si tuviésemos otro punto fijo C' obtendríamos que

$$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{\varphi(C)\varphi(C')} = \vec{\varphi}\left(\overrightarrow{CC'}\right) = \lambda\overrightarrow{CC'}.$$

Como $\lambda \neq 1$, debe ser que $\overrightarrow{CC'} = 0$ por lo que $C = C'$. Veamos que el punto C que hemos construido es efectivamente un punto fijo:

$$\begin{aligned}\varphi(C) =& \varphi\left(A + \frac{\overrightarrow{A\varphi(A)}}{1-\lambda}\right) = \varphi(A) + \vec{\varphi}\left(\frac{\overrightarrow{A\varphi(A)}}{1-\lambda}\right) = \varphi(A) + \frac{1}{1-\lambda}\vec{\varphi}\left(\overrightarrow{A\varphi(A)}\right)\\ =& \varphi(A) + \frac{\lambda}{1-\lambda}\overrightarrow{A\varphi(A)} = A + \overrightarrow{A\varphi(A)} + \frac{\lambda}{1-\lambda}\overrightarrow{A\varphi(A)} = A + \frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{A\varphi(A)} = C.\end{aligned}$$

Así, tenemos que φ tendrá un único punto fijo y si $A \in \mathbb{A}$, tendremos que

$$\varphi(A) = \varphi\left(C + \overrightarrow{CA}\right) = C + \lambda\overrightarrow{CA},$$

por lo que φ es una homotecia.

(c) Consideremos la aplicación lineal asociada a φ,

$$\hat{\varphi}(x_0, x_1, x_2) = (3x_0 + 2x_1 + 2x_2, -x_0 - x_2, 2x_0 + 2x_1 + 3x_2).$$

Dada la variedad $l = \{x_0 + x_1 + x_2 = 0\}$, tenemos que

$$\hat{l} = \{x_0 + x_1 + x_2 = 0\} = L(\{(-1,1,0), (-1,0,1)\}).$$

Para ver que l es invariante basta con ver que $\hat{l}$ es invariante por $\hat{\varphi}$. Tenemos que

$$\hat{\varphi}\left(\hat{l}\right) = L(\{\hat{\varphi}(-1,1,0)\}, \hat{\varphi}(-1,0,1)) = L(\{(-1,1,0), (-1,0,1)\}) = \hat{l}.$$

Así hemos obtenido que $\hat{\varphi}\left(\hat{l}\right) = \hat{l}$ y $\varphi(l) = \mathbb{P}\left(\hat{\varphi}\left(\hat{l}\right)\right) = \mathbb{P}\left(\hat{l}\right) = l$ [2] .

[2] No nos tenemos que preocupar por el centro puesto que al ser φ una homografía, $\hat{\varphi}$ es un isomorfismo, por lo que $\mathrm{Ker}(\hat{\varphi}) = \{0\}$ y $Z = \emptyset$.

Busquemos ahora el resto de rectas y puntos fijos. Al estar en $\mathbb{P}^2$ tenemos que las rectas son en verdad hiperplanos. En efecto, si $l \subset \mathbb{P}^2$ es una recta tenemos que

$$\dim l = 1 = \dim \mathbb{P}^2 - 1.$$

Así, realmente estamos buscando los puntos fijos e hiperplanos invariantes por φ. Para calcular los puntos fijos calculamos los autovalores de M_φ.

$$P\varphi\left(\lambda\right) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda - 4\right)\left(\lambda - 1\right)^2.$$

Así, los autovalores de $\hat{\varphi}$ son 1 y 4. En primer lugar, calculemos los puntos fijos, para lo que calculamos los subespacios vectoriales $L_4 = \operatorname{Ker}\left(\hat{\varphi} - 4id\right)$ y $L_1 = \operatorname{Ker}\left(\hat{\varphi} - id\right)$.

- Para $\lambda = 4$,

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_0 + 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_0 + 4x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_0 + 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_1 \\ x_0 = -2x_1 \end{cases}.$$

  Así, tenemos que $L_4 = L\left(\{(-2, 1, -2)\}\right)$. Por tanto un punto fijo será $P_1 = [2 : -1 : 2]$.

- Para $\lambda = 1$,

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0 + x_1 + x_2 = 0.$$

  Así, tenemos que $L_1 = L\left(\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}\right)$, por lo que hay otra familia de puntos fijos que será

$$\{[x_0 : x_1 : x_2] \;:\; x_0 + x_1 + x_2 = 0\}.$$

Calculemos ahora las rectas invariantes. Supongamos que l es la recta invariante $l = \{b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0\} = [b_0 : b_1 : b_2]^*$.

- Para $\lambda = 4$,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b_0 + b_1 - 2b_2 = 0 \\ b_0 - 2b_1 + b_2 = 0 \\ 2b_0 - b_1 - b_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 \\ b_0 = b_1 \end{cases}.$$

  Así, tenemos que $l_1^* = [1 : 1 : 1]$, por lo que $l_1 = \{x_0 + x_1 + x_2 = 0\}$.

- Para $\lambda = 1$,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2b_0 - b_1 + 2b_2 = 0.$$

  Este es el subespacio vectorial generado por $\{(1, 2, 0), (0, 1, 2)\}$. Por tanto, hay una familia de rectas invariantes que es

$$\{b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0 \;:\; 2b_0 - b_1 + 2b_2 = 0\}.$$

(d) Por ser l un hiperplano invariante por φ en $\mathbb{P}^2$, tenemos que $\mathbb{A} := \mathbb{P}^2/l$ es un espacio afín. Por un teorema visto en clase tenemos que por ser φ una homografía, $\varphi|_{\mathbb{A}}$ es una afinidad. Consideremos los puntos

$$P_0 = [1:0:0]\,, \quad P_1 = [0:1:0]\,, \quad P_2 = [0:0:1]\,.$$

que pertenecen a $\mathbb{A}$. Como

$$\overrightarrow{P_0P_1} = (-1,1,0)\,, \quad \overrightarrow{P_0P_2} = (-1,0,1)\,,$$

son linealmente independientes y pertenecen a $\hat{l}$ que tiene dimensión 2, $\mathcal{R}_c = \left\{P_0, \mathcal{B} = \left\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}\right\}\right\}$ es una referencia cartesiana de $\mathbb{A}$. Calculemos cómo actúa $\varphi|_{\mathbb{A}}$ respecto de esta referencia. Tenemos que

$$\varphi(P_0) = [3:-1:2]\,, \quad \varphi(P_1) = [2:0:2] \quad \text{y} \quad \varphi(P_2) = [2:-1:3]\,.$$

Por tanto,

$$\vec{\varphi}\left(\overrightarrow{P_0P_1}\right) = \overrightarrow{\varphi(P_0)\,\varphi(P_1)} = \overrightarrow{[3:-1:2]\,[2:0:2]} = \frac{1}{4}(-1,1,0)\,.$$

$$\vec{\varphi}\left(\overrightarrow{P_0P_2}\right) = \overrightarrow{\varphi(P_0)\,\varphi(P_2)} = \overrightarrow{[3:-1:2]\,[2:-1:3]} = \frac{1}{4}(-1,0,1)\,.$$

Así, obtenemos que si $v \in \vec{\mathbb{A}}$, existen $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tales que $v = \lambda\overrightarrow{P_0P_1} + \mu\overrightarrow{P_0P_2}$. De esta forma,

$$\overrightarrow{\varphi|_{\mathbb{A}}}(v) = \overrightarrow{\varphi|_{\mathbb{A}}}\left(\lambda\overrightarrow{P_0P_1} + \mu\overrightarrow{P_0P_2}\right) = \frac{1}{4}\left(\lambda\overrightarrow{P_0P_1} + \mu\overrightarrow{P_0P_2}\right) = \frac{1}{4}id(v)\,.$$

Así tenemos que $\varphi|_{\mathbb{A}}$ es una dilatación. Concretamente es una homotecia de razón $\frac{1}{4}$ y centro $C = [2:-1:2]$ (es el único punto fijo de φ que está en $\mathbb{A}$).