Matemáticas Básicas - Deberes 2

Victoria Eugenia Torroja Rubio

19/9/24

1. Tipo 1

2. Tipo 2

3. Tipo 3

Ejercicio 1. Demuestra que para todo número real positivo x se tiene que

$$x + \frac{1}{4x} \geq 1.$$

Solución 1. Asumimos que $x \in \mathbb{R}^+$, donde $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

$$x + \frac{1}{4x} - 1 = \frac{x^2 + \frac{1}{4} - x}{x} = \frac{1}{4x}\left(4x^2 - 4x + 1\right) = \frac{(2x-1)^2}{4x}.$$

Como $(2x-1)^2 \geq 0$ y $x \geq 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} &\frac{(2x-1)^2}{4x} \geq 0 \\ \Rightarrow\ & x + \frac{1}{4x} - 1 \geq 0 \\ \Rightarrow\ & x + \frac{1}{4x} \geq 1. \end{aligned}$$

Ejercicio 2. Prueba que si $n \geq 1$ es un entero y $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ son números reales en el intervalo $(-1, 0]$, entonces

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Solución 2. **(i)** Si $n = 1$,

$$\prod_{k=1}^{1}(1+x_k) = 1 + x_1$$
$$1 + \sum_{k=1}^{1} x_k = 1 + x_1$$
$$\therefore \prod_{k=1}^{1}(1+x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{1} x_k.$$

(ii) Asumimos que la inecuación se sostiene para $n = h$, por lo que

$$\prod_{k=1}^{h}(1+x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{h} x_k.$$

Si $n = h + 1$,

$$\begin{aligned}
&\underbrace{(1+x_1)\cdot(1+x_2)\cdots(1+x_h)}_{\text{Hipótesis de inducción}}\cdot(1+x_{h+1})\\
\geq &\left(1 + \sum_{k=1}^{h} x_k\right)(1+x_{h+1})\\
= &1 + x_{h+1} + \sum_{k=1}^{h} x_k + x_{h+1}\sum_{k=1}^{h} x_k.
\end{aligned}$$

Como $x_i \in (-1, 0]$ $(1 \leq i \leq h+1)$ tenemos que

$$x_{h+1}\sum_{k=1}^{h} x_k \geq 0.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{h+1}(1+x_k) \geq &1 + x_{h+1} + \sum_{k=1}^{h} x_k + x_{h+1}\sum_{k=1}^{h} x_k = 1 + \sum_{k=1}^{h+1} x_k + x_{h+1}\sum_{k=1}^{h} x_k\\
\geq &1 + \sum_{k=1}^{h+1} x_k.
\end{aligned}$$

4. Tipo 4