Análisis Real - Examen Extraordinario

Victoria Eugenia Torroja Rubio

30 de junio de 2025

Ejercicio 1. **(a)** Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto acotado, define los siguientes términos: $\sup A$, $\inf A$, $\max A$, $\min A$.

(b) Demuestra los siguientes resultados, **si son ciertos,** o encuentra un contraejemplo, **si son falsos:**

(i) Si $A \subset B$, entonces $\sup A \leq \sup B$.

(ii) Si $A \subset B$, entonces $\inf A \leq \inf B$.

(iii) Si $A \subsetneq B$, entonces $\sup A < \sup B$.

Ejercicio 2. **(a)** Demuestra que la siguiente sucesión es monótona creciente y acotada superiormente:

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \left(x_n + \frac{1}{4}\right)^2 \quad n \in \mathbb{N}.$$

Justifica que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge y calcula su límite.

(b) Qué pasa si tomamos $x_1 = 1$ en la sucesión anterior?

Solución 1. **(a)** Primero vamos a ver que es creciente. Para ello, emplearemos el método de inducción. Tenemos que

$$x_2 = \left(0 + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \geq 0 = x_0.$$

Asumimos que es cierto para n, por tanto

$$x_{n+1} = \left(x_n + \frac{1}{4}\right)^2 \geq \left(x_{n-1} + \frac{1}{4}\right)^2 = x_n.$$

Así, hemos visto que es creciente para $n \in \mathbb{N}$. Ahora vamos a ver que está acotada superiormente. Para encontrar una cota, vamos a suponer que la sucesión converge:

$$l = \left(l + \frac{1}{4}\right)^2 = l^2 + \frac{l}{2} + \frac{1}{8} \iff l^2 - \frac{l}{2} + \frac{1}{8} = \left(l - \frac{1}{4}\right)^2 = 0 \iff l = \frac{1}{4}.$$

Vamos a comprobar si $\frac{1}{4}$ es una cota superior. Está claro que $\frac{1}{4} \geq 0 = x_0$. Ahora, supongamos que es cierto para n, entonces

$$x_{n+1} = \left(x_n + \frac{1}{4}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}^2 = \frac{1}{4}.$$

Así, hemos visto que $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_n \leq \frac{1}{4}$. Dado que se trata de una sucesión monótona creciente y acotada superiormente, tenemos que converge y, como hemos visto antes, el límite será $l = \frac{1}{4}$.

(b) Si $x_1 = 1$, vamos a ver que la sucesión no converge. Si convergiera, el límite tendría que ser $l = \frac{1}{4}$, como hemos visto en el apartado anteriror. Dado que $x_1 = 1 > \frac{1}{4}$, basta con ver que la sucesión es monótona creciente para ver que nunca va a converger a $\frac{1}{4}$. En primer lugar, tenemos que $x_2 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^2 > 1 = x_1$. Ahora, supongamos que es cierto para n, entonces

$$x_{n+1} = \left(x_n + \frac{1}{4}\right)^2 \geq \left(x_{n-1} + \frac{1}{4}\right)^2 = x_n.$$

Así, hemos visto que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente, por lo que no puede converger a $\frac{1}{4}$. Ahora vamos a ver que diverge. En efecto, hemos visto que $x_n \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, por lo que

$$x_{n+1} = \left(x_n + \frac{1}{4}\right)^2 = x_n^2 + \frac{x_n}{2} + \frac{1}{16} \geq x_n + \frac{1}{16}.$$

Así,

$$x_{n+k} \geq x_n + \frac{k}{16} \to \infty.$$

Ejercicio 3. Estudia y calcula, si existen, los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}}\right)$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2 - n + 7}{3n^2 + 4n - 1}\right)^{\frac{3n^2-7}{5n}}$.

Solución 2. **(a)** Tenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} = \frac{n}{\sqrt{2n}} \to \infty.$$

Así, tenemos que la sucesión diverge.

(b) Recordamos que dadas dos sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tales que $x_n \to x$ y $y_n \to y$, se tiene que $x_n^{y_n} \to x^y$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2 - n + 7}{3n^2 + 4n - 1}\right)^{\frac{3n^2-7}{5n}} &= \lim_{n\to\infty} \left(1 - 1 + \frac{3n^2 - n + 7}{3n^2 + 4n - 1}\right)^{\frac{3n^2-7}{5n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-5n - 8}{3n^2 + 4n - 1}\right)^{\frac{3n^2-7}{5n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3n^2+4n-1}{-5n-8}}\right)^{\frac{3n^2-7}{5n}} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{3n^2+4n-1}{-5n-8}}\right)^{\frac{3n^2+4n-1}{-5n-8}}\right]^{\frac{3n^2-7}{5n}\cdot\frac{-5n-8}{3n^2+4n-1}}\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-7}{5n} \cdot \frac{-5n-8}{3n^2+4n-1} = -1.$$

Así, por lo visto a lo largo del curso tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2-n+7}{3n^2+4n-1}\right)^{\frac{3n^2-7}{5n}} = e^{-1}.$$

Ejercicio 4. Estudia la convergencia, y la convergencia absoluta, de las siguientes series:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} 3^{-n}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

Solución 3. (a) Dado que $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} 3^{-n} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, para ver si converge absolutamente basta con ver que converge. Para ello, empleamos el criterio de la raíz,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} 3^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} 3^{-1} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \frac{1}{3} = \frac{1}{3e} < 1.$$

Así, por el criterio de la raíz, la serie converge, por lo que converge absolutamente.

(b) Vamos a ver que no converge absolutamente. Para ello, basta ver que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ es divergente:

$$\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) + \cdots + \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \sqrt{n+1}-1 \to \infty.$$

Para ver que la serie converge, vamos a aplicar el criterio de Dirichlet. En primer lugar, tenemos que la suma $\displaystyle\sum_{n=1}^{M} (-1)^n$ está claramente acotada. Por otro lado, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

Falta ver que la serie es decreciente, lo cual es bastante trivial tras racionalizar. Así, la serie converge, pero no absolutamente.

Ejercicio 5. Comprueba si la siguiente función es continua en su dominio:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{x}, & x \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \\ -1, & x = 0 \\ \frac{\int_0^{x^2} \cos\sqrt{t}\, dt}{\sin^2 x}, & x \in (0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}.$$

Solución 4. Por un lado, $\dfrac{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{x}$ es continua en $[-\dfrac{\pi}{2},0)$ por ser cociente de funciones continuas. Por otro lado, por ser $\cos\sqrt{t}$ composición de funciones continuas, es continua e integrable, por lo que $\displaystyle\int_0^{x^2}\cos\sqrt{t}\,dt$ es continua en $\mathbb{R}$ y el cociente $\dfrac{\int_0^{x^2}\cos\sqrt{t}\,dt}{\sin^2 x}$, $\quad x\in(0,\dfrac{\pi}{2}]$ es continuo en $(0,\dfrac{\pi}{2}]$, por ser cociente de funciones continuas. Así, basta con estudiar la continuidad de f en $x=0$. Así, aplicando L'Hôpital y el segundo Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{1}=-1.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\cos\sqrt{t}\,dt}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x\cos x^2}{2\sin x\cos x}=1.$$

Así, como $\lim_{x\to 0^+} f(x)\neq f(0)$, tenemos que la función no es continua en $x=0$.

Ejercicio 6. Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función derivable en (a,b). Si $x_0\in(a,b)$ es un mínimo local de f, prueba que $f'(x_0)=0$.

Ejercicio 7. Prueba que la ecuación:

$$x^2-x\sin x-\cos x=0,$$

tiene únicamente dos soluciones.

Solución 5. Para resolver este ejercicio, vamos a tratar de dibujar la función $f(x)=x^2-x\sin x-\cos x$. Tenemos que la función es continua en $\mathbb{R}$, estudiemos sus límites en infinito:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} x^2-x\sin x-\cos x=\lim_{x\to\infty} x^2\left(1-\frac{\sin x}{x}-\frac{\cos x}{x^2}\right)=\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2-x\sin x-\cos x=\lim_{x\to-\infty} x^2\left(1-\frac{\sin x}{x}-\frac{\cos x}{x^2}\right)=\infty.$$

claramente, es derivable, estudiemos la derivada:

$$f'(x)=2x-(\sin x+x\cos x)+\sin x=2x-x\cos x=x(2-\cos x).$$

Está claro que $f'(x)=0 \iff x=0$. Además, se tiene que

$$f'(x)=\begin{cases}<0, & x<0\\ 0, & x=0\\ >0, & x>0\end{cases}.$$

Tenemos que $f(0)=-1$. Dado que es decreciente cuando $x<0$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$, tenemos que existe un único punto $x_1\in(-\infty,0)$ tal que $f(x_1)=0$. Análogamente, existe un único punto $x_2\in(0,\infty)$ tal que $f(x_2)=0$.

Ejercicio 8. Calcula $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

Solución 6. Tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Esto es cierto porque la función $\frac{1}{1+x^2}$ es continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 9. Calcula el volumen de revolución que se produce al girar la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{\sin x}\,(\cos x + 1)$, para $x \in [0, \pi]$, respecto del eje de las x (eje $y = 0$).

Solución 7. En primer lugar, estudiemos la gráfica de la función. Basta con saber que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [0, \pi]$. Así, tenemos que

$$V = \pi \int_0^{\pi} \left[\sqrt{\sin x}\,(\cos x + 1)\right]^2\, dx = \pi \int_0^{\pi} \sin x\,(\cos x + 1)^2\, dx = \pi \int_0^{\pi} \sin x\left(\cos^2 x + 2\cos x + 1\right)\, dx.$$

Cogemos $u = \cos x$, así $du = -\sin x dx$:

$$= \pi \int_{-1}^{1} u^2 + 2u + 1\, du = \pi \left[\frac{(u+1)^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \pi\left(\frac{8}{3} - 0\right) = \frac{8\pi}{3}.$$

Ejercicio 10. Sea la función $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x-\pi)^{2k}}{(2k)!}$. Calcula su serie de Taylor centrada en cero.

Solución 8.