Cálculo Diferencial

Victoria Torroja Rubio

8/9/2025

Índice general

Profesor: Jesús Jaramillo

Despacho: 305-E

Correo: jaramil@mat.ucm.es

Contenido:

- Topología de los espacios métricos (Cap 1-5) - Aprox: 6'5 semanas
- Cálculo diferencial en varias variables (Cap 6-11) - Resto

Bibliografía:

- Marsdem-Hoffman (sirve para las dos partes): 'Análisis clásico elemental'
- K. Smith (la parte de integración es más avanzada): 'Primer of modern analysis'

Materiales Campus:

- Apuntes de Victor Sánchez (apuntes muy condensados)
- Manual de Ansemil-Ponte (versión extendida de Marsden-Hoffman)
- Curso de Daniel Azagra

Capítulo 1

Espacios métricos

Definición 1.1 (Espacio métrico)**.** Un **espacio métrico** es un par (X, d) donde X es un conjunto no vacío y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una función que se llama **distancia** o **métrica**, tal que:

1. $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$.
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in X$.
4. (Propiedad triangular) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $\forall x, y, z \in X$.

Ejemplo. Algunos ejemplos de espacios métricos son:

1. Consideremos $(\mathbb{R}, d)$ donde $d(x, y) = |x - y|$.
2. La distancia euclídea en $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$:
$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$
3. La 'métrica del taxi' en $\mathbb{R}^2$ con distancia:
$$d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$
4. Distancias geodésicas: el camino más corto (por ejemplo, en una superficie esférica el camino más corto entre dos puntos es un arco de circunferencia).
5. Distancias en $\mathbb{R}^n$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, consideramos la distancia euclídea
$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

También podemos generalizar la 'métrica del taxi':

$$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|.$$

También se puede considerar la métrica

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i| \ : \ 1 \le i \le n\}.$$

Definición 1.2 (Espacio discreto)**.** Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto cualquiera, y definimos $\forall x, y \in X$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ si } x = y \\ 1, \text{ si } x \neq y \end{cases}.$$

Se dice que d es la **métrica discrecta** y (X,d) el **espacio métrico discreto**.

Definición 1.3 (Subespacio métrico)**.** Sea (X,d) un espacio métrico y sea $Y \subset X$. Se define la **métrica relativa** (o **restringida**) a Y como $d_Y(y,y') = d(y,y')$, $\forall y, y' \in Y$. Entonces, (Y, d_Y) es un espacio métrico que llamaremos **subespacio** de X.

1.1. Espacios normados

Definición 1.4 (Espacio normado)**.** Un **espacio normado** es un par $(E, \|\cdot\|)$ donde E es un espacio vectorial y $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ es una función que se llama **norma** tal que:

1. $\|x\| \ge 0$, $\forall x \in E$.
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E$ [a].
4. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in E$.

[a] En este curso $\mathbb{K}$ va a ser principalmente $\mathbb{R}$.

Proposición 1.1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Si definimos

$$d(x,y) = \|x - y\|, \forall x, y \in E,$$

se obtene que d es una distancia en E, que se llama **asociada** a la norma.

Demostración. Demostremos todas las propiedades de las métricas:

1. Tenemos que $d(x,y) = \|x - y\| \ge 0$, $\forall x, y \in E$.
2. $d(x,y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$.
3. $d(x,y) = \|y - x\| = |-1| \, \|x - y\| = \|x - y\| = d(x,y)$.

4. $d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y)$.

$\square$

Observación. En $\mathbb{R}^n$, dado $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se definen:

$$\text{(Norma euclídea)} \quad \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|.$$

$$\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_i| \ : \ 1 \leq i \leq n\}.$$

Proposición 1.2 (Relación entre las normas en $\mathbb{R}^n$). $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

Demostración. Supongamos que $|x_{i_0}| = \|x\|_\infty$. Entonces, tenemos que

$$|x_{i_0}|^2 \leq |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2.$$

Dado que la función de la raíz es creciente, tenemos que

$$\|x\|_\infty = |x_{i_0}| \leq \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} = \|x\|_2.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\|x\|_1^2 = (|x_1| + \cdots + |x_n|)^2 = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 + C^1 \geq |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 = \|x\|_2^2.$$

Finalmente, tenemos que

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n| \leq |x_{i_0}| + \cdots + |x_{i_0}| = n\,|x_{i_0}| = n\|x\|_\infty.$$

$\square$

Definición 1.5. Dos normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ en un mismo espacio vectorial E son **equivalentes** cuando existen $m, M > 0$ tales que

$$m\|x\|' \leq \|x\| \leq M\|x\|', \ \forall x \in E.$$

Observación. Hemos visto en la proposición anterior que $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ son equivalentes en $\mathbb{R}^n$.

---

[1] $C \geq 0$.

Definición 1.6 (Producto escalar)**.** Sea E un espacio vectorial real. Un **producto escalar** en E es una forma bilineal, simétrica y definida positiva. Es decir, una aplicación $\langle , \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ tal que

1. $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$, $\forall x, y, z \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\forall x, y \in E$.
3. $\forall x \in E$, $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

Observación. En este caso, denotaremos $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Teorema 1.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** Sea E un espacio vectorial dotado de un producto escalar $\langle , \rangle$. Entonces

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \ \forall x, y \in E.$$

Demostración. **Caso 1.** Si $x = 0$ o $y = 0$, obtenemos la igualdad.

Caso 2. Si $y \neq 0$, tenemos que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle = \langle x, x \rangle + \alpha \langle x, y \rangle + \alpha \langle y, x \rangle + \alpha^2 \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\alpha \langle x, y \rangle + \alpha^2 \|y\|^2.$$

Tomamos $\alpha = -\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$. Así, tenemos que

$$0 \leq \|x\|^2 - \frac{2 \langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} + \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^4} \|y\|^2 = \|x\|^2 - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2}.$$

Así, tenemos que $\frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} \leq \|x\|^2$, por lo que $\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$ y tenemos que $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

□

Proposición 1.3. Sea E un espacio vectorial dotado de un producto escalar $\langle , \rangle$. Entonces, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, es una norma en E, que se dice asociada a $\langle , \rangle$.

Demostración. Comprobamos que se cumplen las propiedades de las normas:

1. Tenemos que claramente $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$, $\forall x \in E$.
2. $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.
3. $\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle = \lambda^2 \|x\|^2$. Tomando la raíz cuadrada, $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.

4. Si $x, y \in E$,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 .\end{aligned}$$

Tomando raíces, tenemos que se verifica la propiedad triangular: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$\square$

1.2. Bolas en un espacio métrico

Definición 1.7. Sea (X, d) un espacio métrico y consideramos $a \in X$, $r > 0$. Se definen como **bola abierta** de centro a y radio r al conjunto

$$B(a, r) = \{x \in X \ : \ d(x, a) < r\}.$$

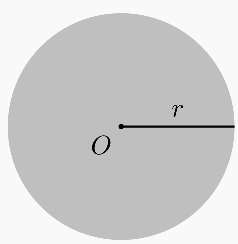
Similarmente, se llama **bola cerrada** de centro a y radio r al conjunto

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in X \ : \ d(x, a) \leq r\}.$$

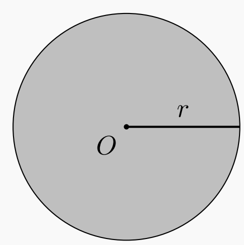
Ejemplo. Considermos bolas en $\mathbb{R}^2$ de distintas normas.

1. Consideremos bolas abiertas y cerradas con la métrica euclídea:

$$B_2((0,0), r) = \left\{(x, y) \ : \ \sqrt{x^2+y^2} < r\right\}, \ \overline{B}_2((0,0), r) = \left\{(x, y) \ : \ \sqrt{x^2+y^2} \leq r\right\}.$$



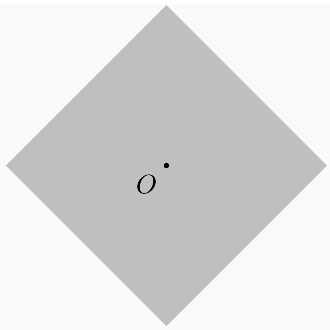
$B_2((0,0), r)$



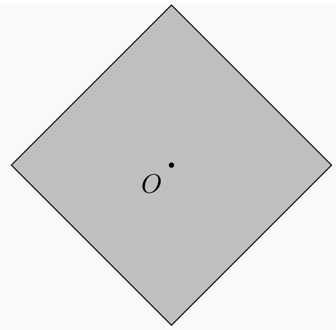
$\overline{B}_2((0,0), r)$

2. Consideremos bolas abiertas y cerradas con la métrica 'del taxi':

$$B_1((0,0), r) = \{(x, y) \ : \ |x| + |y| < r\}, \ \overline{B}_1((0,0), r) = \{(x, y) \ : \ |x| + |y| \leq r\}.$$



$B_1((0,0),r)$

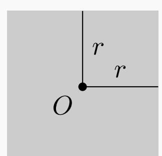


$\overline{B}_1((0,0),r)$

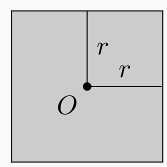
3. Consideremos bolas abiertas y cerradas con la métrica infinita:

$$B_\infty\left((0,0),r\right) = \{(x,y) \ : \ \text{máx}\{|x|,|y|\} < r\} = \{(x,y) \ : \ |x|,|y| < r\}.$$

$$\overline{B}_\infty\left((0,0),r\right) = \{(x,y) \ : \ \text{máx}\{|x|,|y|\} \leq r\} = \{(x,y) \ : \ |x|,|y| \leq r\}.$$



$B_\infty((0,0),r)$



$\overline{B}_\infty((0,0),r)$

Observación. En $(\mathbb{R},|\cdot|)$ se tiene que $B(0,r) = (-r,r)$ y $\overline{B}(0,r) = [-r,r]$. Similarmente, tenemos que $B(a,r) = (a-r,a+r)$ y $\overline{B}(a,r) = [a-r,a+r]$.

Observación (Relación de las bolas en $\mathbb{R}^n$). Sabemos que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

Por tanto, tenemos que

$$B_1(a,r) \subset B_2(a,r) \subset B_\infty(a,r) \subset B_1(a,nr)\ ^a.$$

En efecto, si $x \in B_1(a,r)$, tenemos que $\|x-a\|_1 < r$. Por tanto, es fácil ver que $\|x-a\|_2 \leq \|x-a\|_1 < r$, por lo que $x \in B_2(a,r)$. El resto de inclusiones se deducen de forma análoga.

[a] También se puede escribir $B_\infty(a,nr) \subset B_1(a,r) \subset B_2(a,r) \subset B_\infty(a,nr)$.

Definición 1.8. Sean (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se define el **diámetro** de A como

$$diam\,(A) = \sup\{d\,(x,y)\ :\ x,y \in A\} \in [0,\infty).$$

Se dice que A es **acotado** si $diam\,(A) < \infty$.

Proposición 1.4. Dado un espacio métrico (X,d) con $A \subset X$, tenemos que A está acotado si y solo si A está contenido en alguna bola.

Demostración. **(i)** Supongamos que A está acotado, entonces $diam\,(A) = r < \infty$. Así, tenemos que si $x \in A$, etonces $\forall a \in A$ se tiene que $d\,(a,x) \leq r$, por lo que $A \subset \overline{B}\,(a,r)$. También podemos ver que lo contiene una bola abierta: $A \subset \overline{B}\,(a,r) \subset B\,(a,r+1)$.

(ii) Si A está contenido en una bola, tenemos que existe $x \in X$ y $\frac{r}{2} > 0$ tal que $A \subset B\left(x,\frac{r}{2}\right)$. De esta manera, si $a,b \in A$ se tiene que

$$d\,(a,b) \leq d\,(a,x) + d\,(x,b) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Así, se tiene que $\forall a,b \in A$, $d\,(a,b) < r$, por lo que $diam\,(A) \leq r < \infty$, por lo que A está acotado.

□

1.3. Conceptos topológicos

Definición 1.9 (Conjunto abierto)**.** Sean (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que A es un **conjunto abierto** si $\forall a \in A, \exists r > 0$ tal que $B\,(a,r) \subset A$.

Proposición 1.5. Toda bola abierta es un conjunto abierto.

Demostración. Tomemos $A = B\,(a,R)$ y $x \in B\,(a,R)$. Sea $\delta = d\,(x,a) < R$ y $r = R - \delta > 0$ [2]. Sea $y \in B\,(x,r)$, tenemos que $d\,(x,y) < r$. Así,

$$d\,(y,a) \leq d\,(y,x) + d\,(x,a) < r + \delta = R.$$

Así, $y \in B\,(a,R)$, por lo que $B\,(x,r) \subset B\,(a,R)$. □

Ejemplo. En $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\right)$.

1. Consideremos $A = \{(x,y)\ :\ 0 < x < 1\}$. Vamos a ver que es abierto. Si $a \in A$, sea $a = (x,y)$ y consideramos $r = \min\{x, 1-x\}$. Entonces, tenemos que $B_2\,(a,r) \subset$

[2] No hace falta de escribir $r = \min\{R-\delta,\delta\}$ al tratarse de una bola.

A, en efecto, si $(x', y') \in B_2(a, r)$:

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} < r \Rightarrow |x - x'| < r \Rightarrow 0 < x' < 1.$$

Así, tenemos que $(x', y') \in A$.

2. Consideremos $A = \{(x, y) \ : \ 0 < x \leq 1\}$. Vamos a ver que no es abierto. En efecto, si tomamos $a = (1, 0)$ y $r > 0$, tenemos que $\left(1 + \frac{r}{2}, 0\right) \in B_2(a, r)$ pero $\left(1 + \frac{r}{2}, 0\right) \notin A$.

Proposición 1.6. En $\mathbb{R}^n$ los conjuntos abiertos coinciden para $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$.

Demostración. Como se vio en una observación anterior, sabemos que

$$B_1(a, r) \subset B_2(a, r) \subset B_\infty(a, r) \subset B_1(a, nr).$$

- Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Si A es abierto con la norma $\|\cdot\|_2$, tenemos que $\forall a \in A, \exists r > 0$ tal que $B_2(a, r) \subset A$. Por la observación, como $B_1(a, r) \subset B_2(a, r) \subset A$, tenemos que también es abierto para la norma $\|\cdot\|_1$.
- Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Si A es abierto con la norma $\|\cdot\|_\infty$, entonces $\forall a \in A, \exists r > 0$ tal que $B_\infty(a, r) \subset A$. Por la observación anterior, tenemos que $B_2(a, r) \subset B_\infty(a, r) \subset A$, por lo que A es abierto respecto a la norma $\|\cdot\|_2$.
- Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Si A es abierto respecto de $\|\cdot\|_1$, tenemos que $\forall a \in A, \exists r > 0$ tal que $B_1(a, r) \subset A$. Sea $r' = \frac{r}{n} > 0$,

$$B_\infty(a, r') \subset B_1(a, nr') = B_1(a, r) \subset A.$$

Por tanto, A es abierto respecto de la norma $\|\cdot\|_\infty$.

□

Teorema 1.2 (Propiedades de los abiertos). Sea (X, d) un espacio métrico.

1. X y $\emptyset$ son abiertos.
2. La unión arbitraria de abiertos es abierto.
3. La intersección finita de abiertos es abierto.

Demostración.

1. Es trivial que $\emptyset$ es abierto. Por otro lado, si $a \in X$, tenemos que $\forall r > 0$, $B(x, r) \subset X$. Así, X está abierto.
2. Supongamos que $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos abiertos y sea $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Si $a \in A$, tenemos que $a \in A_i$ para algún $i \in I$. Así, existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i$. Por tanto, $B(a, r) \subset A$ y A es abierto.

3. Sean $A_1, \ldots, A_m$ conjuntos abiertos y sea $A = A_1 \cap \cdots \cap A_m$. Si $a \in A$, tenemos que $a \in A_i$ para $1 \leq i \leq m$. Así, existe $r_i > 0$ tal que $B(a, r_i) \subset A_i$. Si tomamos $r = \text{mín}\{r_i : 1 \leq i \leq m\}$, tenemos que $B(a, r) \subset B(a, r_i)$, $\forall i = 1, \ldots, m$. Por tanto, $B(a, r) \subset A$ y A es abierto.

$\square$

Observación. La intersección infinita de conjuntos abiertos puede no ser abierto. Por ejemplo, consideremos en $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ consideramos $A_m = B_2\left((0,0), \dfrac{1}{m}\right)$, que es abierto $\forall m \in M$. Sin embargo, $A = \displaystyle\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m = \{(0,0)\}$, que no es abierto.

Definición 1.10 (Conjunto cerrado). Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que un conjunto $C \subset X$ es **cerrado** si X/C es abierto.

Proposición 1.7. Toda bola cerrada es un conjunto cerrado.

Demostración. En efecto, sea $C = \overline{B}(p, R) = \{x \in X : d(x, p) \leq R\}$ y sea $A = X/C = \{x \in X : d(x, p) > R\}$. Si $a \in A$, tenemos que $d(a, p) = \delta > R$. Así, tomando $r = \delta - R > 0$, si $x \in B(a, r)$, tenemos que

$$d(x, p) \geq d(p, a) - d(x, a) > \delta - r = R.$$

Así, tenemos que $x \in A$, por lo que $B(a, r) \subset A$ y X/C es abierto, por lo que C es cerrado. $\square$

Observación. Es fácil ver que en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$:

- (a, b) es abierto.
- $[a, b]$ es cerrado.
- $(a, b]$ y $[a, b)$ no son ni abiertos ni cerrados.

Teorema 1.3 (Propiedades de los cerrados). Sea $(X, \emptyset)$ un espacio métrico.

1. Los conjuntos X y $\emptyset$ son cerrados.
2. La intersección arbitraria de cerrados es cerrado.
3. La unión finita de cerrados es cerrado.

Demostración. 1. Dado que $\emptyset = X/X$ y $X = X/\emptyset$, del teorema anterior se sigue que son cerrados.

2. Sean $\{C_i\}_{i\in I}$ cerrados. Entonces, $\forall i \in I$ tenemos que X/C_i es abierto, así,
$$X/\bigcap_{i\in I} C_i = \bigcup_{i\in I} (X/C_i),$$
que es abierto, por lo que $\bigcap_{i\in I} C_i$ es cerrado.

3. Sean $C_1, \dots, C_m$ cerrados. Entonces, $\forall i = 1, \dots, m$, tenemos que X/C_i es abierto. Así,
$$X/\bigcup_{i=1}^{m} C_i = \bigcap_{i=1}^{m} (X/C_i),$$
es abierto, por lo que $\bigcup_{i=1}^{m} C_i$ es cerrado.

□

Definición 1.11 (Punto interior)**.** Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que $a \in A$ es un **punto interior** de A si existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A$. Denotamos $\mathrm{Int}(A)$ al conjunto de puntos interiores de A.

Observación. Es trivial ver que $\mathrm{Int}(A) \subset A$.

Proposición 1.8. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$.

1. El conjunto $\mathrm{Int}(A)$ es el mayor abierto contenido en A.
2. A es abierto si y solo si $A = \mathrm{Int}(A)$.

Demostración.

1. Sea $U = \mathrm{Int}(A)$. Vamos a ver que es abierto. Dado $x \in U$, tenemos que existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$. Si $y \in B(x, r)$, por tratarse de una bola abierta existe $r' > 0$ tal que $B(y, r') \subset B(x, r) \subset A$, por lo que $y \in \mathrm{Int}(A) = U$. Por tanto, $B(x, r) \subset U$ y U es abierto.
Ahora tenemos que ver que es el mayor abierto. Supongamos que V es abierto y $V \subset A$. Sea $x \in V$, tenemos que existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset V \subset A$. Por tanto, $x \in \mathrm{Int}(A) = U$ y $V \subset U$.
2. Si $A = Int(A)$ está claro que A es abierto. Recíprocamente, si A es abierto, tenemos que como A es el mayor abierto contenido en A, $A = Int(A)$.

□

Ejemplo. En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, sea $A = (0, 2]$. Tenemos que $\mathrm{Int}(A) = (0, 2)$. En efecto,

(i) Si $x \in (0, 2)$, entonces existe $r > 0$ tal que $(x - r, x + r) \subset (0, 2) \subset (0, 2]$, por lo que $x \in \mathrm{Int}(A)$.

(ii) Recíprocamente, tenemos que $2 \notin \mathrm{Int}(A)$, puesto que $\forall r > 0$ tenemos que $(2 - r, 2 + r)$

no es subconjunto de $(0, 2]$.

Definición 1.12 (Punto adherente). Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que $x \in X$ es **punto adherente** a A (o también **punto clausura**) si $\forall r > 0$, $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$. Denotamos $\overline{A}$ o $Adh(A)$ al conjunto de puntos adherentes de A.

Observación. Se ve trivialmente que $A \subset \overline{A}$.

Ejemplo. En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sea $A = (0, 2]$. Tenemos que $\overline{A} = [0, 2]$. En efecto:

(i) Tenemos que $0 \in \overline{A}$, puesto que $\forall r > 0$ tenemos que $(-r, r) \cap A \neq \emptyset$. Así, tenemos que $[0, 2] \subset \overline{A}$.

(ii) Recíprocamente, si $x > 2$, tenemos que existe $r > 0$ suficientemente pequeño tal que $x - r > 2$, por tanto $x \notin \overline{A}$. Similarmente, podemos demostrar que $0 \notin \overline{A}$.

Lema 1.1. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entcones, $\overline{A} = X / \operatorname{Int}(X/A)$.

Demostración. **(i)** Sea $x \in \overline{A}$. Tenemos que $\forall r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$, por lo que $B(x, r) \not\subset X/A$, por lo que $x \notin \operatorname{Int}(X/A)$, por lo que $x \in X / \operatorname{Int}(X/A)$.

(ii) Sea $x \in X / \operatorname{Int}(X/A)$, entonces $x \notin \operatorname{Int}(X/A)$, es decir, $\forall r > 0$ tenemos que $B(x, r) \not\subset X/A$. Así, debe ser que $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$, por lo que $x \in \overline{A}$.

□

Proposición 1.9.
1. $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A.
2. Un conjunto $A \subset X$ es cerrado si y solo si $A = \overline{A}$.

Demostración.
1. Tenemos que $\overline{A} = X / \operatorname{Int}(X/A)$, por lo que su complementario es abierto y él es cerrado. Ahora vamos a ver que es el menor cerrado que contiene a A. Sea $C \subset X$ cerrado con $A \subset C$. Tenemos que $X/C \subset X/A$, por lo que $X/C \subset \operatorname{Int}(X/A)$ y tenemos que $C \supset X / \operatorname{Int}(X/A) = \overline{A}$.
2. Si $A = \overline{A}$, A es cerrado. Por otro lado, si A es cerrado, entonces su complementario, X/A es abierto, por lo que $X/A = \operatorname{Int}(X/A)$, por lo que $\overline{A} = X / \operatorname{Int}(X/A) = X/(X/A) = A$.

□

Definición 1.13 (Punto frontera). Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que $x \in X$ es un **punto frontera** de A si $\forall r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ y $B(x, r) \cap (X/A) \neq \emptyset$. Denotamos $Fr(A)$ el conjunto de puntos frontera de A.

Observación. Tenemos que $Fr\,(A) = \overline{A} \cap \overline{X/A}$ y en particular $Fr\,(A)$ es cerrado.

Ejemplo. En $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\right)$ sea $A = \{(x, y)\ :\ 0 < x \leq 1\}$.Tenemos que

$$Fr\,(A) = \{(0, y)\ :\ y \in \mathbb{R}\} \cup \{(1, y)\ :\ y \in \mathbb{R}\}.$$

En efecto:

(i) Sea $P = (0, y)$. Tenemos que $\forall r > 0$, $B\,(P, r) \cap A \neq \emptyset$ y $B\,(P, r) \cap (X/A) \neq \emptyset$. Así, $P \in Fr\,(A)$. De forma análoga, se puede demostrar que $P = (1, y) \in Fr\,(A)$.

(ii) El recíproco lo demostramos típicamente por contrapositiva. Sea $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ con $x \neq 0$ y $x \neq 1$. Hay tres posibilidades a considerar: $x \in (-\infty, 0)$, $x \in (0, 1)$ o $x \in (1, \infty)$. Si $x \in (-\infty, 0)$, $\exists r > 0$ tal que $B\,(P, r) \cap A = \emptyset$. El resto de los casos se demuestran de forma análoga.