Análisis - Parcial 1 Solución

Victoria Eugenia Torroja Rubio

21/1/2025

Solución 1. Visto en clase.

Solución 2. **(a)** Aplicamos el criterio del cociente para sucesiones

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{3\cdot 5\cdots(2n+3)}\cdot\frac{3\cdot 5\cdots(2n+1)}{n!} = \frac{n+1}{2n+3} \to \frac{1}{2} < 1.$$

Por tanto, la sucesión converge a 0.

(b) Tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\frac{n^3+n^2+1}{n^3+n}\right)^{\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}} &= \left(1+\frac{n^2-n+1}{n^3+n}\right)^{\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}} = \left(1+\frac{1}{\frac{n^3+n}{n^2-n+1}}\right)^{\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}\\ &= \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^3+n}{n^2-n+1}}\right)^{\frac{n^3+n}{n^2-n+1}}\right]^{\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\cdot\frac{n^2-n+1}{n^3+n}}.\end{aligned}$$

Sea $C(n) = \left(1+\frac{1}{\frac{n^3+n}{n^2-n+1}}\right)^{\frac{n^3+n}{n^2-n+1}}$. Entonces tenemos que

$$x_n = C(n)^{\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\cdot\frac{n^2-n+1}{n^3+n}}.$$

Tenemos que $C(n) \to e$ y

$$\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\cdot\frac{n^2-n+1}{n^3+n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot\frac{n^3-n^2+1}{n^3+n} \to e\cdot 1 = e.$$

Así, $x_n \to e^e$.

Solución 3. **(a)** Tenemos que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}g(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\lim_{x\to x_0} g(x) = 1\cdot 0 = 0.$$

(b) Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} .$$

Existen sucesiones $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ e $y_n = \dfrac{1}{\pi n}$, que convergen a 0 y son estrictamente positivas, pero sus imágenes convergen a cosas distintas.

(c)

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Solución 4. **(a)** Visto en clase.

(b) **(i)** Vamos a ver que converge absolutamente. Tenemos que

$$\left| \frac{(-1)^n 4^{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{n(\log(n))^2} \right| \leq \frac{4^{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{n(\log(n))^2}.$$

Para el primero, aplicamos la regla del cociente.

$$\frac{4^{2n+2}}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{4^{2n}} = \frac{16}{(2n+1)(2n+2)} \to 0 < 1.$$

Por tanto converge. Para la segunda aplicamos el criterio de condensación de Cauchy.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log(n))^2} \approx \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n(n\log 2)^2} \approx \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Por tanto, la segunda serie converge. Por el criterio de comparación, la serie original converge absolutamente, por lo que converge.

(ii) Vamos a ver que no converge absolutamente.

$$\left| \frac{\cos(n\pi) n^{n-1}}{(n+1)^n} \right| = \frac{n^{n-1}}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \frac{1}{n} \geq \frac{1}{3n}.$$

Así, la serie no converge absolutamente. Vamos a ver si converge. Para ello aplicamos el criterio de Leibniz, que nos dice que sí converge. Podemos usar el criterio de Leibniz puesto que $\sum_{j=1}^{n} (-1)^j$ está acotada y el otro término es estrictamente decreciente y converge a 0.