Análisis - Mayo 2025

19/5/2025

Ejercicio 1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada e integrable en $[a, b]$. Prueba que existe $\mu \in [\text{ínf}\, f, \sup f]$ de modo que
$$\int_a^b f = \mu (b - a).$$

Solución 1. Dado que f está acotada en $[a, b]$, por el axioma del supremo existen $\beta = \text{ínf}\,\{f(t) \;:\; t \in [a, b]\}$ y $\alpha = \sup\{f(t) \;:\; t \in [a, b]\}$. Además, tenemos que $\forall x \in [a, b]$,
$$\beta \leq f(x) \leq \alpha.$$

Dado que f es integrables, se deduce que
$$\int_a^b \beta \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \alpha \iff \beta (b - a) \leq \int_a^b f \leq \alpha (b - a).$$

Consideremos ahora la función $g(x) = x(b - a)$. Por ser polinómica es continua en $\mathbb{R}$, en particular, es continua en $[a, b]$. Además, tenemos que $\int_a^b f \in [g(\beta), g(\alpha)]$. Recordamos el teorema de la conexión:

Teorema 1 (Teorema de la conexión)**.** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ con f continua en $[a, b]$ y sea $\lambda \in [f(a), f(b)]$ (o $\lambda \in [f(b), f(a)]$). Entonces, como consecuencia del teorema de Bolzano, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = \lambda$.

Dado que g cumple las hipótesis del teorema de la conexión, $\exists \mu \in [\beta, \alpha]$ tal que $\int_a^b f = \mu (b - a)$.

Ejercicio 2. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Es f Lipchitziana? Es decir, existirá $M > 0$ de modo que $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$, para todo $x, y \in [a, b]$?
(**Indicación:** la diferencia $f(x) - f(y)$ sugiere usar el Teorema del Valor Medio.)

Solución 2. Vamos a ver que que una función que cumple con estas condiciones no tiene por qué ser de Lipchitz. En efecto, consideremos la función $f(x) = \sqrt{x}$ en $[0, 1]$. Tenemos que $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, por lo que
$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \infty.$$

Ahora recordamos el Teorema del Valor Medio:

Teorema 2 (Teorema del Valor Medio)**.** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Por un lado, tenemos que si $M > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $x \in (0, \delta)$, se tiene que

$$|f'(x)| > M.$$

Dado que nuestra función cumple con las hipótesis del Teorema del Valor Medio, $\exists c_x \in (0, x)$ tal que

$$|f(x) - f(0)| = |f'(c_x)| |x - 0| \geq M |x - 0|.$$

Esto contradice que f sea de Lipchitz.

Ejercicio 3. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$ y f' es decreciente, prueba que $f(x) \geq f(a)$, para todo $x \in [a, b]$.

Solución 3. Supongamos que no es cierto que $f(x) \geq f(a)$, $\forall x \in [a, b]$. Entonces, tenemos que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) < f(a)$. Además, como f es continua en $[a, b]$ tenemos que tiene un mínimo en este intervalo, es decir, $\exists x_1 \in [a, b]$ con $f(x_1) \leq f(x)$, $\forall x \in [a, b]$. En particular, tenemos que $f(x_1) \leq f(x_0) < f(a)$. Por ser f derivable en (a, b) tenemos que $f'(x_1) = 0$.
Dado que f es continua en $[x_1, b]$ y es derivable en (x_1, b), por el teorema del valor medio tenemos que existe $c \in (x_1, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(x_1)}{b - x} > 0.$$

Dado que $c > x_1$ y $f'(c) > f'(x_1)$, tenemos que f' no es decreciente, lo que contradice nuestra hipótesis. Por tanto, debe ser que $f(x) \geq f(a)$, $\forall x \in [a, b]$.

Ejercicio 4. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable en $[a, b]$. Sea $\lambda \in (-\infty, 0)$. Prueba que λf es integrable en $[a, b]$ y que

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

Solución 4. Dado que $\lambda < 0$ se tiene que para una partición $P = \{t_0 = a, t_1, \ldots, t_n = b\}$, $i = 0, \ldots, n-1$

$$M_{\lambda f, i} = \sup \{\lambda f(t) \, : \, t \in [t_i, t_{i+1}]\} = \lambda \operatorname{ínf} \{f(t) \, : \, t \in [t_i, t_{i+1}]\} = \lambda m_{f,i}.$$

$$m_{\lambda f, i} = \operatorname{ínf} \{\lambda f(t) \, : \, t \in [t_i, t_{i+1}]\} = \lambda \sup \{f(t) \, : \, t \in [t_i, t_{i+1}]\} = \lambda M_{f,i}.$$

Dado que f es integrable, por el criterio de integrabilidad de Riemann tenemos que si $\epsilon' = \dfrac{\epsilon}{-\lambda} > 0$, existe una partición P tal que $S(f, P) - I(f, P) < \epsilon' = \dfrac{\epsilon}{-\lambda}$. Así, tenemos que

$$S(\lambda f, P) - I(\lambda f, P) = \lambda I(f, P) - \lambda S(f, P) = -\lambda [S(f, P) - I(f, P)] < -\lambda \frac{\epsilon}{-\lambda} = \epsilon.$$

Así, hemos visto que λf es integrable en $[a,b]$. Ahora demostramos la segunda parte. Supongamos si pérdida de generalidad que $\int_a^b \lambda f \geq \lambda \int_a^b f$.

$0 \leq \int_a^b \lambda f - \lambda \int_a^b f \leq S(\lambda f, P) - \lambda S(f,P) = \lambda I(f,P) - \lambda S(f,P) = -\lambda\left[S(f,P) - I(f,P)\right] < -\lambda \frac{\epsilon}{-\lambda} = \epsilon.$

Como esto es cierto para $\forall \epsilon > 0$, tenemos que $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.

Ejercicio 5. Calcula $\int -\frac{x \sin x + \sin x + \cos x}{(x+1)^2}\, dx$.

Solución 5. Aplicamos la regla de integración por partes:

$$\begin{aligned}
\int -\frac{x \sin x + \sin x + \cos x}{(x+1)^2}\, dx =& \frac{x \sin x + \sin x + \cos x}{x+1} - \int \frac{\sin x + x\cos x + \cos x - \sin x}{x+1}\, dx \\
=& \frac{x \sin x + \sin x + \cos x}{x+1} - \int \frac{(x+1)\cos x}{x+1}\, dx \\
=& \frac{x \sin x + \sin x + \cos x}{x+1} - \sin x + C.
\end{aligned}$$

Ejercicio 6. Se define la función $f(x) = \frac{(-1)^n}{3\sqrt[3]{x^2+2}+1}$ si $x \in [n, n+1)$ con $n = 1, 2, \ldots$. Comprueba que $\int_1^\infty |f(x)|\, dx = \infty$ y que $\int_1^\infty f(x)\, dx$ es convergente.

Solución 6. En primer lugar estudiamos $\int_1^\infty |f(x)|\, dx$. Tenemos que

$$|f(x)| = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2+2}+1}.$$

Dado que $|f(x)| \geq 0$, podemos aplicar el criterio de comparación por cociente:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2+2}+1}}{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}} = \frac{1}{3} \in (0, \infty).$$

Por tanto,

$$\int_1^\infty |f(x)|\, dx < \infty \iff \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx < \infty.$$

Dado que

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx = 3\sqrt[3]{x}\Big|_1^\infty \to \infty.$$

Así, tenemos que $\int_1^\infty |f(x)|\, dx = \infty$. Ahora vamos a ver que $\int_1^\infty f(x)\, dx$ converge. Para ello, aplicamos el criterio de Dirichlet. Consideremos $g(x) = (-1)^n$ para $x \in [n, n+1)$ y $h(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2+2}+1}$. Tenemos que ver que

- $\left| \int_1^M g(x)\ dx \right| \leq K$, $\forall M \in (1, \infty)$.
- $h(x)$ es monótona y $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$.

En primer lugar, si $M > 1$, tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq M < n+1$. Por un lado si $N \in \mathbb{N}$,

$$\int_1^N g(x)\ dx = \sum_{k=1}^{N-1} \int_k^{k+1} g(x)\ dx = \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^k \in \{1, 0, -1\}.$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_1^M g(x)\ dx \right| &= \left| \int_1^n g(x)\ dx + \int_n^M g(x)\ dx \right| \leq \left| \int_1^n g(x)\ dx \right| + \left| \int_n^M g(x)\ dx \right| \\ &\leq 1 + \int_n^M |g(x)|\ dx = 1 + M - n \leq 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Así, hemos comprobado que se cumple la primera hipótesis. Ahora vamos a ver que se cumple la segunda. Tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2+2}+1} = 0.$$

Además, h es monótona. En efecto, si $x \leq y$,

$$x^2 + 2 \leq y^2 + 2 \iff 3\sqrt[3]{x^2+2} + 1 \leq 3\sqrt[3]{y^2+2} + 1 \iff \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2+2}+1} \geq \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2+2}+1}.$$

Así, hemos visto que es monótona decreciente. Dado que se cumplen las dos hipótesis del criterio de Dirichlet, tenemos que la integral impropia $\int_1^\infty f(x)\ dx$ converge.

Ejercicio 7. Calcula la serie de Taylor centrada en cero de la función coseno hiperbólico $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Cuál es su radio de convergencia? Qué orden n del resto $R_{0,n}(x)$ es suficiente para que el polinomio de Taylor $P_{0,n}(x)$ aproxime a la función con un error menor que $\frac{1}{100}$ en todo el intervalo $[-1, 1]$? Justifica todas las respuestas.

Solución 7. Hay dos formas de deducir la fórmula para el polinomio de Taylor.

Forma 1. Tenemos que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Así,

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n + (-1)^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Forma 2. Tenemos que $\cosh(0) = 1$ y $(\cosh)'(0) = \sinh(0) = 0$. Así, tenemos que para $n \in \mathbb{N}$

$$(\cosh)^{(2n)}(0) = 1,\ (\cosh)^{(2n+1)}(0) = 0.$$

Así, dado que el polinomio de Taylor centrado en cero tiene la forma $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$, tenemos que la serie de Taylor será:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Dado que la serie de Taylor es una serie de potencias, calculamos el radio de convergencia como lo haríamos con otras series de potencias. Aplicamos el criterio del cociente:

$$\left| \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \right| \left| \frac{(2n)!}{x^2} \right| = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)} \to 0.$$

Dado que la serie converge para cualquier $x \in \mathbb{R}$, tenemos que el radio de convergencia es ∞. Para calcular el resto aplicamos el teorema de Taylor:

$$|R_{0,n}(x)| = \left| \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \, dx \right| \leq \int_0^x \frac{\left| f^{(n+1)}(t) \right|}{n!} |x-t|^n \, dx.$$

Dado que $f^{(n+1)}(t) \in \{\sinh(t), \cosh(t)\}$, si $t \in [-1,1]$, tenemos que (gráficamente se puede comprobar) $\left| f^{(n+1)}(t) \right| \leq \frac{e+\frac{1}{e}}{2}$. Así, tenemos que

$$\int_0^x \frac{\left| f^{(n+1)}(t) \right|}{n!} |x-t|^n \, dx \leq \frac{e+\frac{1}{e}}{2n!} \int_0^x |x-t|^n \, dx = \frac{e+\frac{1}{e}}{2(n+1)!} \left[-|x-t|^{n+1} \right]_0^x = \frac{e+\frac{1}{e}}{2} \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Como $t \in [-1,1]$ tenemos que $|t| \leq 1$, por lo que

$$\frac{e+\frac{1}{e}}{2} \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{e+\frac{1}{e}}{2} \frac{1}{(n+1)!}.$$

Tenemos que $\frac{e+\frac{1}{e}}{2} \approx \frac{3}{2}$. Probando, tenemos que si $n=5$,

$$\frac{e+\frac{1}{e}}{2} \frac{1}{(5+1)!} \approx \frac{3}{2} \frac{1}{6!} = \frac{1}{2 \cdot 5! \cdot 2} = \frac{1}{240} \leq \frac{1}{100}.$$

Ejercicio 8. Calcula $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^{\frac{3}{2}} e^x}{4n^2x^2 - 4nx + 2} \, dx$ y $\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{n^{\frac{3}{2}} e^x}{4n^2x^2 - 4nx + 2} \, dx$.

Solución 8. Consideremos la sucesión de funciones $f_n(x) = \frac{n^{\frac{3}{2}} e^x}{4n^2x^2 - 4nx + 2}$. Calculamos el límite puntual. Si $x \neq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}} e^x}{4n^2x^2 - 4nx + 2} = 0.$$

Si $x = 0$ tenemos que $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \infty$. Así, el límite puntual de f_n es $f = 0$ en $(0,1]$. Vamos a ver que converge uniformemente en $[a,1]$ si $a > 0$.En primer lugar, vamos a ver cuándo $g_n(x) = 4n^2x^2 - 4nx + 2$ alcanza su mímimo. Tenemos que

$$g_n'(x) = 8n^2x - 4n.$$

Así, tenemos que $g_n'(x) = 0 \iff x = \dfrac{1}{2n}$. Además, como $g_n''(x) = 8n^2 > 0$, sabemos que es convexa. Finalmente, como el discriminante

$$D = 16n^2 - 32n^2 < 0.$$

Por tanto, g_n alcanza un mínimo en $x = \dfrac{1}{2n}$. Así, tenemos que si cogemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{2n_0} < a$,

$$\left| \frac{n^{\frac{3}{2}} e^x}{4n^2x^2 - 4nx + 2} \right| \leq \frac{n^{\frac{3}{2}} e}{4n^2a^2 - 4na + 2} \to 0.$$

Así, tenemos que $f_n \to 0$ converge uniformemente en $[a, 1]$, $\forall a \in (0, 1]$. Como f_n es integrable para $\forall n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{n^{\frac{3}{2}} e^x}{4n^2x^2 - 4nx + 2}\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}} e^x}{4n^2x^2 - 4nx + 2}\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 0\, dx = 0.$$

Ahora estudiamos la segunda integral. No podemos aplicar el teorema que hemos aplicado para la otra integral porque f_n no converge uniformemente en $[0, 1]$, puesto que no se conserva la continuidad. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{n^{\frac{3}{2}} e^x}{4n^2x^2 - 4nx + 2}\, dx \geq \int_0^1 \frac{n^{\frac{3}{2}} x}{4n^2x^2 - 4nx + 2}\, dx = \frac{n^{\frac{3}{2}}}{8n} \int_0^1 \frac{8nx - 4 + 4}{4n^2x^2 - 4nx + 2}\, dx \\
&= \frac{n^{\frac{3}{2}}}{8n} \left[\ln \left| 4n^2x^2 - 4nx + 2 \right| \right]_0^1 + \frac{n^{\frac{3}{2}}}{8n} \int_0^1 \frac{4}{4n^2x^2 - 4nx + 2}\, dx \\
&= \frac{n^{\frac{3}{2}}}{8n} \left(\ln\left(4n^2 - 4n + 2\right) - \ln 2 \right) + \frac{n^{\frac{3}{2}}}{8n} \int_0^1 \frac{4}{(2nx - 1)^2 + 1}\, dx \\
&= \frac{n^{\frac{3}{2}}}{8n} \left(\ln\left(4n^2 - 4n + 2\right) - \ln 2 \right) + \frac{n^{\frac{3}{2}}}{8n} \left[\frac{4}{2n} \arctan(2nx - 1) \right]_0^1 \\
&= \underbrace{\frac{n^{\frac{3}{2}}}{8n} \left(\ln\left(4n^2 - 4n + 2\right) - \ln 2 \right)}_{\to\infty} + \underbrace{\frac{n^{\frac{3}{2}}}{8n} \frac{4}{2n} \left(\arctan(2n - 1) + \frac{\pi}{4} \right)}_{\to 0} \to \infty.
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^{\frac{3}{2}} e^x}{4n^2x^2 - 4nx + 2}\, dx = \infty.$