Álgebra Lineal

Victoria Torroja Rubio

9/10/2024 -

Índice general

0.1. Introducción . . . 2

1. Espacios Vectoriales **7**
1.1. Subespacios vectoriales . . . 8
1.2. Bases de un espacio vectorial . . . 11
1.3. Suma directa de subespacios. . . . 16
1.4. Espacio vectorial cociente . . . 21

2. Aplicaciones Lineales **24**
2.1. Ejemplos de aplicaciones lineales . . . 34
2.1.1. Formas Lineales . . . 34
2.1.2. Homotecias vectoriales . . . 35
2.1.3. Proyecciones . . . 36
2.1.4. Simetrías vectoriales . . . 38
2.2. Espacio vectorial dual . . . 39
2.2.1. Anulador de un subespacio . . . 43
2.2.2. Matriz de f^* . . . 48

3. Matrices **49**
3.1. Matriz asociada a una aplicación lineal . . . 49
3.2. Producto de matrices . . . 51
3.3. Permutaciones . . . 53
3.4. Estructura de álgebra . . . 57
3.5. Determinantes . . . 60
3.6. Sistemas de Cramer . . . 65

4. Forma de Jordan **75**
4.1. Polinomios . . . 77
4.2. Reducción de endomorfismos . . . 82

0.1. Introducción

El cuerpo de los números reales cumple los siguientes requisitos:

$(\mathbb{R}, +)$ es un grupo abeliano:
Definimos suma y producto como

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (a,b) &\to a+b \\ \cdot : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (a,b) &\to a \cdot b. \end{aligned}$$

1. La suma es asociativa
$$\forall a,b,c \in \mathbb{R},\ (a+b)+c = a+(b+c)\,.$$

2. Existe un elemento neutro
$$\exists! 0 \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R},\ 0+a = a+0 = a.$$

3. Existe el opuesto
$$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists -a \in \mathbb{R},\ a+(-a) = (-a)+a = 0.$$

4. La suma es conmutativa
$$\forall a,b \in \mathbb{R},\ a+b = b+a.$$

5. El producto es asociativo,
$$\forall a,b,c \in \mathbb{R},\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

6. El producto es distributivo con respecto a la suma (distributivo por la izquierda y por la derecha),
$$\forall a,b,c \in \mathbb{R},\ a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

7. Existe la unidad,
$$\exists! 1 \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, 1 \cdot a = a \cdot 1 = a.$$

8. Existe la inversa,
$$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}^{1}, \exists a^{-1} \in \mathbb{R}, a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

Definición 0.1 (Anillo)**.** Se denomina **anillo** a un conjunto y dos operaciones $(R, +, \cdot)$ que verifica las propiedades (1)-(6). Si se verifica también (7), se llama **anillo con unidad**.

[1] Utilizamos la notación $\mathbb{R}^*$ por sencillez para denotar $\mathbb{R} - \{0\}$

Definición 0.2 (Cuerpo)**.** Se denomina **cuerpo** a un conjunto con al menos dos elementos ($1 \neq 0$) y dos operaciones $(R, +, \cdot)$ que cumple las propiedades (1)-(8). Si también se verifica que la multiplicación es commutativa, decimos que se trata de un **cuerpo abeliano**.

Definición 0.3. Un conjunto $V \neq \emptyset$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial si existen dos operaciones

$$+ : V \times V \to V,\ (\vec{x}, \vec{y}) \to \vec{x} + \vec{y}$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V,\ (a, \vec{x}) \to a \cdot \vec{x}$$

que verifican que

(i) $(V, +)$ es un grupo abeliano.

(ii) Se cumple la propiedad distributiva,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in V,\ a\,(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}.$$

(iii) Se cumple otra propiedad distributiva,

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \vec{x} \in V,\ (a + b)\,\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x}.$$

(iv) Se cumple la propiedad asociativa,

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \vec{x} \in V,\ a\,(b\vec{x}) = (a \cdot b)\,\vec{x}.$$

(v) $\exists 1 \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in V,\ 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Definición 0.4. Se define $\mathbb{R}^n$, con $n \in \mathbb{N}$, como

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) :\ x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Definición 0.5. Se define la suma $+$ en $\mathbb{R}^n$ de la siguiente manera:

$$\forall \vec{x}, \vec{y},\ \vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

Utilizamos las propiedades de $\mathbb{R}$ como cuerpo abeliano para justificar que $(\mathbb{R}^n, +)$ es un grupo abeliano.

Definición 0.6. Definimos el producto escalar en $\mathbb{R}^n$ de la siguiente manera,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ a \cdot \vec{x} = (a \cdot x_1, a \cdot x_2, \dots, a \cdot x_n).$$

Una consecuencia clara de esto es que para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$0 \cdot \vec{x} = \vec{0}.$$

Al igual que antes, podemos utilizar las propiedades de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ como cuerpo abeliano para justificar que $\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Por las definiciones anteriores tenemos que para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\vec{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_n)\\ &= (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, \dots, 0) + \cdots + (0, \dots, x_n)\\ &= x_1 (1, 0, \dots, 0) + x_2 (0, 1, \dots, 0) + \cdots + x_n (0, \dots, 1)..\end{aligned}$$

Además, podemos concluir que si

$$x_1 (1, \dots, 0) + x_2 (0, 1, \dots, 0) + \cdots + x_n (0, \dots, 1) = y_1 (1, \dots, 0) + y_2 (0, 1, \dots, 0) + \cdots + y_n (0, \dots, 1),$$

entonces $\forall i, 1 \leq i \leq n$, $x_i = y_i$.

Definición 0.7 (Sistema de ecuaciones homogéneo)**.** Sea H un sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\begin{aligned}&a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \cdots + a_n^1 x_n = 0\\ &\vdots\\ &a_1^m x_1 + a_2^m + \cdots + a_n^m x^n = 0.\end{aligned}$$

donde $m, n \in \mathbb{N}$ y $a_i^j \in \mathbb{R}$. Definimos L como el conjunto de soluciones de H:

$$L = \left\{ \left(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n\right) \ : \ x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n \text{ es solución de } H \ \right\} \subset \mathbb{R}^n.$$

[a]

[a] a_j^i no es exponente sino una forma de numeración.

Teorema 0.1. Si $\vec{x_0}, \vec{y_0} \in L$, se cumple que

$$\vec{x_0} + \vec{y_0} \in L.$$

Demostración. Tenemos que $\forall i,\ 1 \leq i \leq m$,

$$
\begin{aligned}
&a_1^i\left(x_0^1+y_0^1\right)+\cdots+a_n^i\left(x_0^n+y_0^n\right)\\
=&a_1^i x_0^1+a_1^i y_0^1+\cdots+a_n^i x_0^n+a_n^i y_0^n\\
=&\underbrace{\left(a_1^i x_0^1+a_2^i x_0^2+\cdots+a_n^i x_0^n\right)}_{0}+\underbrace{\left(a_1^i y_0^1+a_2^i y_0^2+\cdots+a_n^i y_0^n\right)}_{0}\\
=&0.
\end{aligned}
$$

□

Teorema 0.2. Si $\vec{x_0} \in L$ y $a \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$a\vec{x_0} = \left(ax_0^1, ax_0^2, \ldots, ax_0^n\right) \in L.$$

Demostración. Tenemos que para $\forall i,\ 1 \leq i \leq m$,

$$
\begin{aligned}
&a_1^i\left(ax_0^1\right)+a_2^i\left(ax_0^2\right)+\cdots+a_n^i\left(ax_0^n\right)\\
=&a\underbrace{\left(a_1^i x_0^1+a_2^i x_0^2+\cdots+a_n^i x_0^n\right)}_{0}\\
=&a\cdot 0\\
=&0.
\end{aligned}
$$

□

Teorema 0.3. Por lo visto anteriormente, $L \subset \mathbb{R}^n$ es un **subespacio vectorial** sobre $\mathbb{R}$.

Demostración. Muchas de las propiedades de un espacio vectorial automáticamente se heredan a un subespacio vectorial. Las únicas excepciones son la definición de la suma, del producto y la existencia del elemento neutro 0. En este caso, hemos comprobado que la suma está definida en L y que existe la multiplicación $\cdot : \mathbb{R} \times L \to L$ definida en L. Además, $\vec{0} \in L$ es una solución trivial. □

Consideramos un sistema de ecuaciones no homogéneo S:

$$
\begin{aligned}
&a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \cdots + a_n^1 x_n = b^1\\
&\vdots\\
&a_1^m x_1 + a_2^m + \cdots + a_n^m x^n = b^m.
\end{aligned}
$$

Consideramos que $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$ es el conjunto de las soluciones.

$$\mathcal{L} = \left\{ \left(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n\right) \ : \ x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n \text{ es solución de } S \ \right\}.$$

Entonces, ya no se cumple necesariamente que la suma de dos soluciones también es solución. Si $\vec{x_0}, \vec{y_0} \in \mathcal{L}$, $\forall j,\ 1 \leq j \leq m$,

$$\begin{aligned} & a_1^j\left(x_0^1 + y_0^1\right) + a_2^j\left(x_0^2 + y_0^2\right) + \cdots + a_0^j\left(x_0^n + y_0^n\right) \\ =& \left(a_1^j x_0^1 + a_2^j x_0^2 + \cdots + a_n^j x_0^n\right) + \left(a_1^j y_0^1 + a_2^j y_0^2 + \cdots + a_n^j y_0^n\right) \\ =& b^j + b^j = 2b^j \neq b^j. \end{aligned}$$

Si $\vec{X_0} \in L$ y $\vec{x_0} \in \mathcal{L}$, tenemos que

$$\vec{X_0} + \vec{x_0} = b^j \in \mathcal{L}.$$

Capítulo 1

Espacios Vectoriales

Consideramos un cuerpo conmutativo con característica distinta de 2, es decir, $1+1 \neq 0$. A este cuerpo lo llamaremos $\mathbb{K}$.

Definición 1.1 ($\mathbb{K}$-Espacio vectorial)**.** Un conjunto $V \neq \emptyset$ es un $\mathbb{K}$-**espacio vectorial** si se tienen definidas dos aplicaciones

$$\begin{aligned} + : V \times V &\to V \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\to \vec{x} + \vec{y} \\ \cdot : \mathbb{K} \times V &\to V \\ (a, \vec{x}) &\to a \cdot \vec{x}, \end{aligned}$$

tales que verifican que

(1) $(V, +)$ es un cuerpo abeliano.

[Commutatividad.] $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V,\ \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$.

[Asociatividad.] $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V,\ (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$.

[Existencia del elemento neutro.] $\exists \vec{0} \in V, \forall \vec{x} \in V,\ \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$.

[Existencia del opuesto.] $\forall \vec{x} \in V, \exists - \vec{x} \in V,\ \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$. [a]

(2) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \forall a \in \mathbb{K},\ a \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{y}$.

(3) $\forall \vec{x} \in V, \forall a, b \in \mathbb{K},\ (a + b) \cdot \vec{x} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{x}$.

(4) $\forall \vec{x} \in V, \forall a, b \in \mathbb{K},\ (a \cdot b) \cdot \vec{x} = a \cdot (b \cdot \vec{x})$.

(5) $\forall \vec{x} \in V,\ 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

[a] En la propiedad del elemento neutro y del opuesto, como la conmutatividad es un requisito no hay que especificar que el elemento neutro funciona por ambos lados, al igual que el opuesto.

Si considero a $\mathbb{R}$ como un cuerpo, tenemos que $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial (dimensión 2) y un $\mathbb{C}$-espacio vectorial (dimensión 1).

Teorema 1.1. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, entonces se verifica que:

(a) $\forall \vec{x} \in V,\ 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

(b) $\forall \vec{x} \in V, \forall a \in \mathbb{K},\ (-a) \cdot \vec{x} = -a \cdot \vec{x}$.

(c) $\forall a \in \mathbb{K},\ a \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

(d) $a \cdot \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0} \vee a = 0$.

Demostración. **(a)**

$$\begin{aligned} &\vec{x} = (1+0) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} = \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} \\ \Longleftrightarrow\ & -\vec{x} + \vec{x} = -\vec{x} + \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} \\ \Longleftrightarrow\ & 0 = 0 \cdot \vec{x}. \end{aligned}$$

Se puede hacer de otra manera:

$$0 \cdot \vec{x} = (0+0) \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} \iff 0 = 0 \cdot \vec{x}.$$

(b)

$$\begin{aligned} &0 \cdot \vec{x} = (a + (-a)) \cdot \vec{x} = a \cdot \vec{x} + (-a) \cdot \vec{x} \\ \Longleftrightarrow\ & -a \cdot \vec{x} = -a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{x} + (-a) \cdot \vec{x} \\ \Longleftrightarrow\ & -a \cdot \vec{x} = (-a) \cdot x. \end{aligned}$$

(c)

$$a \cdot \vec{x} = a \cdot \left(\vec{x} + \vec{0}\right) = a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{0} \iff -a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{x} = -a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{0}.$$

$$\therefore \vec{0} = a \cdot \vec{0}.$$

También se puede hacer de la siguiente manera:

$$a \cdot \vec{0} = a \cdot \left(\vec{0} + \vec{0}\right) = a \cdot \vec{0} + a \cdot \vec{0} \iff 0 = a \cdot \vec{0}.$$

(d) Si $a = 0$, hemos ganado. Si $a \neq 0$, $\exists \dfrac{1}{a} \in \mathbb{K}$. Por tanto,

$$\vec{0} = \frac{1}{a} \cdot \vec{0} = \frac{1}{a} \cdot (a \cdot \vec{x}) = \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot \vec{x} = \vec{x}.$$

□

1.1. Subespacios vectoriales

Definición 1.2 (Subespacio vectorial)**.** Un conjunto $L \neq \emptyset$ y $L \subset V$ es **parte estable** si

(i) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L,\ \vec{x} + \vec{y} \in L$.

(ii) $\forall a \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in V,\ a \cdot \vec{x} \in L$.

Teorema 1.2. Sea $L \neq \emptyset$ y $L \subset V$, entonces L es parte estable si y sólo si L es subespacio vectorial.

Demostración. **(i)** Si L es un subespacio vectorial es trivial.

(ii) Si L es parte estable, tenemos que para $\vec{x} \in L$ se verifica la propiedad conmutativa, asociativa, etc, dado que $L \subset V$. Además, dado que $\cdot : \mathbb{K} \cdot L \to L$ y $(-1) \cdot \vec{x} = -\vec{x}$, tenemos que si $\vec{x} \in L$ entonces $-\vec{x} \in L$. Además, $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0} \in L$. El resto de propiedades se derivan de que $L \subset V$.

□

Definición 1.3 (Combinación lineal)**.** $\vec{x} \in V$ es la **combinación lineal** de $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p$ con coeficientes $a^1, a^2, \ldots, a^p$ si existen $\vec{x}_i \in V$ y $a^i \in \mathbb{K}$, con $p \in \mathbb{N}$ $(1 \leq i \leq p)$ tales que:

$$\vec{x} = a^1 \cdot \vec{x}_1 + a^2 \cdot \vec{x}_2 + \cdots + a^p \cdot \vec{x}_p.$$

[a]

[a] Los a^i no denotan exponente sino que se trata de una forma de numeración.

Nota. Podemos apreciar que, dadas las condiciones del subespacio vectorial, cualquier combinación lineal de vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p \in L$ es un vector de L.

Teorema 1.3. Sea $H \subset V$ con $H \neq \emptyset$. Definimos $L(H)$ como el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de H, es decir:

$$L(H) = \left\{ a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p \ : \ p \in \mathbb{N}, \vec{x}_i \in H, a^i \in \mathbb{K} \right\}.$$

Se verifica que

(1) $H \subset L(H)$.

(2) $L(H)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

(3) $L(H)$ es el menor subespacio vectorial que contiene a H. Es decir, si L es un subespacio vectorial y $H \subset L$, entonces $L(H) \subset L$.

Demostración. **(1)** Tenemos que si $\vec{x} \in H$ entonces

$$\vec{x} = \underbrace{1 \cdot \vec{x}}_{\text{combinación lineal}} \in L(H).$$

(2) Sean $\vec{x}, \vec{y} \in L(H)$, queremos ver que $\vec{x}+\vec{y} \in L(H)$. Dado que $\vec{x}, \vec{y} \in L(H)$, se pueden expresar como combinación lineal de otros vectores en H.

$$\exists p \in \mathbb{N},\ \exists \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p \in H,\ \exists a^1, a^2, \ldots, a^p \in \mathbb{K},$$

tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

De manera similar, como $\vec{y} \in L(H)$,

$$\exists q \in \mathbb{N},\ \exists \vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_q \in H,\ \exists b^1, b^2, \ldots, b^p \in \mathbb{K},$$

tales que

$$\vec{y} = b^1\vec{y}_1 + b^2\vec{y}_2 + \cdots + b^q\vec{y}_q.$$

Entonces,

$$\vec{x}+\vec{y} = \left(a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p\right) + \left(b^1\vec{y}_1 + b^2\vec{y}_2 + \cdots + b^q\vec{y}_q\right).$$

Como $\forall \vec{x}_i, \vec{y}_i \in H$, tenemos que $\vec{x}+\vec{y} \in L(H)$.

A continuación, demostramos que si $\vec{x} \in L(H)$ entonces $a \cdot \vec{x} \in L(H)$. Como $\vec{x} \in L(H)$,

$$\exists p \in \mathbb{N},\ \exists \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p \in H,\ \exists a^1, a^2, \ldots, a^p \in \mathbb{K},$$

tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} a \cdot \vec{x} =& a \cdot \left(a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p\right) \\ =& a \cdot \left(a^1\vec{x}_1\right) + a \cdot \left(a^2\vec{x}_2\right) + \cdots + a \cdot \left(a^p\vec{x}_p\right) \\ =& \left(a \cdot a^1\right) \cdot \vec{x}_1 + \left(a \cdot a^2\right) \cdot \vec{x}_2 + \cdots + \left(a \cdot a^p\right) \cdot \vec{x}_p. \end{aligned}$$

Aprovechamos las propiedades de V como espacio vectorial y el hecho de que $H \subset V$ (hemos utilizado la propiedad distributiva). Como $\forall a \cdot a^i \in \mathbb{K}$ y $\vec{x}_i \in H$, $a \cdot \vec{x}$ se trata de una combinación lineal y, por tanto, $a \cdot \vec{x} \in L(H)$.

(3) Si $\vec{x} \in L(H)$, tenemos que $\exists p \in \mathbb{N}$, $\exists \vec{x}_i \in H$, $\exists a^i \in \mathbb{K}$ con $1 \leq i \leq p$, tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Como $H \subset L$, $x_i \in L$ y, como L es un subespacio vectorial, tenemos que $a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p \in L$, por lo que $\vec{x} \in L$.

$\square$

Definición 1.4. $L(H)$ es el subespacio generado por H o H es un sistema de generadores de de $L(H)$. Si $L(H) = V$ diremos que H es sistema de generadores.

1.2. Bases de un espacio vectorial

Definición 1.5. V es **finito generado** si existe un sistema de generadores formado por un número finito de vectores. Es decir, si $\exists \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\} = H$ tal que $V = L(H)$, es decir, $\exists\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\} \subset V$ tales que $\forall \vec{x} \in V, \exists a^1, a^2, \ldots, a^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Definición 1.6. Una familia de vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ es **linealmente dependiente** si uno de ellos es combinación lineal de los otros.

$$\exists i = 1, 2, \ldots, p,\ \vec{x}_L \in L\left(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}\right).$$

Es decir,

$$\begin{aligned} &\exists i = 1, 2, \ldots, p,\ \exists a^1, a^2, \ldots, a^{i-1}, a^{i+1}, \ldots, a^p \in \mathbb{K} \\ &\vec{x}_i = a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^{i-1}\vec{x}_{i-1} + a^{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + a^p\vec{x}_p.. \end{aligned}$$

Es decir, si $\vec{x}_j = \vec{0}$, $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ es dependiente, pues

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + 0 \cdot \vec{x}_{j-1} + 0 \cdot \vec{x}_{j+1} + \cdots + 0 \cdot \vec{x}_p.$$

Teorema 1.4. Sea $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\} \subset V$. Son linealmente dependientes si y solo si $\exists a^1, a^2, \ldots, a^p \in \mathbb{K}$ no todos nulos tales que

$$\vec{0} = a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Demostración. **(i)** Supongamos que la familia es linealmente dependiente. Por tanto, $\exists i = 1, \ldots, p$ tal que $\vec{x}_i \in L\left(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_{i+1}, \ldots, \vec{x}_p\}\right)$. Por tanto, existen $a^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x}_i = a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^{i-1}\vec{x}_{i-1} + a^{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Si sumamos el opuesto a ambos lados tenemos que

$$\vec{0} = \vec{x}_i - \vec{x}_i = a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^{i-1}\vec{x}_{i-1} + (-1)\,\vec{x}_1 + a^{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

(ii) Suponemos que $\exists a^1, a^2, \ldots, a^p \in \mathbb{K}$ no todos nulos tales que

$$a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p = \vec{0}.$$

Como no todos los escalares son nulos, podemos encontrar $a^i \neq 0$, y a^i tiene inversa.

$$\therefore (-1)\,a^i\vec{x}_i = a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^{i-1}\vec{x}_{i-1} + a^{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Aprovechando las propiedades:

$$\vec{x}_i = \frac{-a^1}{a^i}\vec{x}_1 + \cdots + \frac{-a^{i-1}}{a^i}\vec{x}_{i-1} + \frac{-a^{i+1}}{a^i}\vec{x}_{i+1} + \cdots + \frac{-a^p}{a^i}\vec{x}_p.$$

□

Corolario 1.1. La familia de vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\} \subset V$ es **linealmente independiente** si y solamente si

$$a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p = \vec{0} \Rightarrow a^1 = a^2 = \cdots = a^p = 0.$$

Teorema 1.5. Una familia de vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ es linealmente independiente si y solamente si $\forall \vec{x} \in L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}), \exists! a^1, a^2, \ldots, a^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Demostración. **(i)** Si $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ es linealmente independiente y sea $\vec{x} \in L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\})$. Supongamos que existen otros escalares $b^1, b^2, \ldots, b^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = b^1\vec{x}_1 + \cdots + b^p\vec{x}_p.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}\vec{0} =& \vec{x} - \vec{x} = \left(a^1\vec{x}_1 + \cdots a^p\vec{x}_p\right) - \left(b^1 + \cdots + b^p\vec{x}_p\right)\\ =& \left(a^1 - b^1\right)\vec{x}_1 + \cdots + \left(a^p - b^p\right)\vec{x}_p.\end{aligned}$$

Como se trata de una familia linealmente independiente, tenemos que $\forall i,\ 1 \leq i \leq p$,

$$a^i - b^i = 0 \iff a^i = b^i.$$

(ii) Recíprocamente, tenemos que si $a^1, a^2, \ldots, a^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^p\vec{x}_p = \vec{0}.$$

Esto puede pasar si $a^1 = a^2 = \cdots = a^p = 0$. Como a^i son únicos, tenemos que si hay alguno no nulo, la combinación lineal no va a ser nula. Por tanto, será linealmente independiente.

□

Definición 1.7 (Base)**.** Una **base** de un espacio vectorial V es un sistema de generadores linealmente independientes.

Corolario 1.2. Una familia de vectores $B \subset V$ es una base de E si y solo si $\forall \vec{x} \in V$ se expresa de manera única como combinación lineal de elementos de B.

Teorema 1.6. Si $V \neq \{0\}$, es finitamente generado, entonces $\exists \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ es base de V. Es decir, todo espacio vectorial $V \neq \{0\}$ generado por un número finito de vectores tiene una base finita.

Demostración. Sea $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ un sistema de generadores de V. Si $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ son linealmente independientes, forman una base (hemos ganado). Sino, uno se puede expresar como combinación lineal de los otros, por lo que $\exists i = 1, 2, \ldots, p$ tal que $\vec{x}_i \in L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_{i+1}, \ldots, \vec{x}_p\})$, por lo que $\exists b^1, b^2, \ldots, b^p \in \mathbb{K}$

$$\vec{x}_i = b^1\vec{x}_1 + b^2\vec{x}_2 + \cdots + b^{i-1}\vec{x}_{i-1} + b^{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + b^p\vec{x}_p.$$

Dado que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ es un sistema de generadores de V, $\forall \vec{x} \in V, \exists a^1, a^2, \ldots, a^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\begin{aligned}
\vec{x} =& a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 + \cdots + a^p\vec{x}_p \\
=& a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^{i-1}\vec{x}_{i-1} + a^i\left(b^1\vec{x}_1 + b^2\vec{x}_2 + \cdots + b^{i-1}\vec{x}_{i-1} + b^{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + b^p\vec{x}_p\right) + a^{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + a^p\vec{x}_p \\
=& \left(a^1 + a^ib^1\right)\vec{x}_1 + \cdots + \left(a^{i-1} + a^ib^{i-1}\right)\vec{x}_{i-1} + \left(a^ib^{i+1} + a^{i+1}\right)\vec{x}_{i+1} + \cdots + \left(a^ib^p + a^p\right)\vec{x}_p.
\end{aligned}$$

Por tanto, el conjunto $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\} - \{x_i\}$ también es un sistema de generadores de V. Si $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_{i+1}, \vec{x}_p\}$ es linealmente independiente, es un sistema de generadores de V. Si es linealmente dependiente repetimos el proceso hasta tener $\{\vec{x}_i\}$, que no puede ser $\vec{0}$, porque $V \neq 0$, y $\{\vec{x}_i\}$ es linealmente independiente. $\square$

Observación. De esto podemos concluir que todo sistema de generadores contiene una base.

Teorema 1.7 (Teorema de Steinitz)**.** Sea $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_p\} \subset V$ una base de V y sea $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_q\} \subset V$ linealmente independiente, entonces $q \leq p$ y se puede obtener una nueva base sustituyendo q de los vectores $\vec{y}_i$ por $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$.

Demostración. Se trata de introducir uno por uno los vectores $\{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_p\}$ por los vectores de la base dada. Sea $\vec{x}_1 \in V$, entonces $\exists a^1, a^2, \ldots, a^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x}_1 = a^1\vec{y}_1 + a^2\vec{y}_2 + \cdots + a^p\vec{y}_p = \sum_{i=1}^{p} a^i\vec{y}_i.$$

Existe al menos un $a^i \neq 0$ (porque $\vec{x}_1$ no es nulo). Sea $a^1 \neq 0$.

$$\vec{y}_1 = \left(a^1\right)^{-1}\vec{x}_1 - \sum_{i=2}^{p}\left(a^1\right)^{-1}a^i\vec{y}_i$$

Entonces, $\forall x \in V, \exists b^1, b^2, \dots, b^p \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}\vec{x} =& b^1\vec{y}_1 + b^2\vec{y}_2 + \cdots b^p\vec{y}_p \\ =& b^1\left(\frac{1}{a^1}\vec{x}_1 + \left(-\frac{a^2}{a^1}\right)\vec{y}_2 + \cdots + \left(-\frac{a^p}{a^1}\right)\vec{y}_p\right) + b^2\vec{y}_2 + \cdots + b^p\vec{y}_p \\ =& \frac{b^1}{a^1}\vec{x}_1 + \left(b^1\left(-\frac{a^2}{b^1}\right) + b^2\right)\vec{y}_2 + \cdots + \left(b^1\left(-\frac{a^p}{a^1}\right) + b^p\right)\vec{y}_p.\end{aligned}$$

Hemos llegado a la conclusión de que $\{\vec{x}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_p\}$ forman un sistema de generadores de V. Además, son linealmente independientes, pues

$$\vec{0} = b^1\vec{x}_1 + b^2\vec{y}_2 + \cdots + b^p\vec{y}_p \Rightarrow b^1\left(\sum_{i=1}^{p} a^i\vec{y}_i\right) + b^2\vec{y}_2 + \cdots + b^p\vec{y}_p = \vec{0}$$

$$b^1a^1\vec{y}_1 + \sum_{i=2}^{p}\left(b^1a^i + b^i\right)\vec{y}_i = \vec{0}$$

$$\Rightarrow b^1a^1 = 0,\ b^1a^i + b^i = 0,\ i \geq 2.$$

pues $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_p\}$ son una base. Como $a^1 \neq 0$, tenemos que $b^1 = b^i = 0$. Por tanto, $\{\vec{x}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_p\}$ es una base de V.

Supongamos que $i < \text{mín}\,(p, q)$ y que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_i, \vec{y}_{i+1}, \dots, \vec{y}_p\}$ es sistema de generadores. Entonces, $\exists c^1, c^2, \dots, c^i, d^{i+1}, \dots, d^p \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x}_{i+1} = c^1\vec{x}_1 + c^2\vec{x}_2 + \cdots + c^i\vec{x}_i + d^{i+1}\vec{y}_{i+1} + \cdots + d^p\vec{y}_p = \sum_{j=1}^{i} c^j\vec{x}_j + \sum_{j=i+1}^{p} d^j\vec{y}_j.$$

El procedimiento anterior nos asegura que podemos sustituir $\vec{x}_{i+1}$ por cualquier vector con coeficiente no nulo. Por tanto, tenemos que demostrar que existe un coeficiente del segundo sumatorio no nulo. Si fueran todos nulos, tendríamos que $\vec{x}_{i+1}$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$, esto contradice que sean linealmente independientes. □

Corolario 1.3. Si el espacio vectorial V tiene una base finita, todas las bases de V tienen el mismo número de vectores.

Demostración. Sean $B_1 = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ y $B_2 = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_q\}$ dos bases de V. Como B_1 es una base y B_2 es un conjunto de vectores linealmente independientes, tenemos que todas las bases de V han de ser finitas. Entonces, como B_1 y B_2 son bases y, consecuentemente, linealmente independientes, tenemos que $p \leq q$ y $q \leq p$, por lo que $p = q$. □

Definición 1.8 (Dimensión)**.** La **dimensión** de un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es el número de elementos de sus bases, si son finitas. Si no lo son, diremos que V es de dimensión infinita.

Corolario 1.4. La dimensión de un espacio vectorial coincide con el número máximo de elementos linealmente independientes, y también con el número mínimo de generadores.

Corolario 1.5. Todo conjunto de vectores linealmente independientes puede completarse hasta obtener una base.

Lema 1.1. Si $S \subset V$ es linealmente independiente y $\vec{x} \in V$ y $\vec{x} \notin L(S)$, tenemos que la familia $S \cup \{\vec{x}\}$ es linealmente independiente.

Demostración. Sean $a, a^i \in \mathbb{K}$ y

$$a\vec{x} + a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^p\vec{x}_p = \vec{0}.$$

Si $a \neq 0$, entonces $\vec{x}$ se puede expresar como combinación lineal de S, pero por hipótesis esto no es posible. Por tanto, debe ser que $a = 0$ y, consecuentemente, $\forall a^i = 0$, pues S es linealmente independiente. Por tanto, $S \cup \{\vec{x}\}$ también es linealmente independiente. □

Proposición 1.1. Si V es finitamente generado y L es subespacio vectorial de V, entonces L es finitamente generado y

$$\dim L \leq \dim V.$$

Además,

$$\dim L = \dim V \iff L = V.$$

Demostración. Si $L = \{0\}$ no hay nada que probar (no tiene bases). En caso contrario, existe $\vec{x}_1 \in L$. Si $L = L(\{\vec{x}_1\})$, tenemos que $\vec{x}_1$ es una base. En caso contrario, existe $\vec{x}_2 \in L$ con $\vec{x}_2 \notin L(\{\vec{x}_1\})$. Si $L = L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\})$, $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ forman una base. Sabemos que son linealmente independientes por el lema anterior. En algún momento llegaremos a que $L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\})$ forman una base, pues un corolario anterior nos dice que hay un número máximo de vectores linealmente independientes.

Además, si $\dim L = n$ y $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ es una base de L, por el teorema de Steinitz, también es una base de V. Por tanto,

$$L = L(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}) = V.$$

□

Teorema 1.8 (Teorema de apliación de base)**.** Sea L un subespacio vectorial de V y sea $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ una base de L. Entonces existe $\{\vec{u}_{p+1}, \vec{u}_{p+2}, \ldots, \vec{u}_n\} \subset V$ tales que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p, \vec{u}_{p+1}, \vec{u}_{p+2}, \ldots, \vec{u}_n\}$ son base de V.

Demostración. Si $\dim V = n$ tenemos que existe un número finito de generadores que forman una base de V, y consideramos que los vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ forman una base de L. Entonces, $p \leq n$ y, por el teorema de Steinitz, se puede obtener una nueva base sustituyendo $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ por p vectores de $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$. □

1.3. Suma directa de subespacios.

Notación.

$$\mathcal{P}(V) = \{A \ : \ A \subset V\}.$$

$$\mathcal{L}(V) = \{L \in \mathcal{P}(V) \ : \ L \text{ es subespacio vectorial de } V\ \}.$$

Por tanto,

$$\mathcal{L}(V) \subset \mathcal{P}(V).$$

Teorema 1.9. $\forall I$ conjunto, $\forall i \in I$, si $L_i \in \mathcal{L}(V)$ entonces

$$\bigcap_{i \in I} L_i \in \mathcal{L}(V).$$

Es decir, la intersección de espacios vectoriales es un espacio vectorial.

Demostración. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \bigcap_{i \in I} L_i$ implica que $\vec{x}, \vec{y} \in L_i, \forall i \in I$.Como L_i son subespacios vectoriales:

$$\vec{x} + \vec{y} \in L_i, \forall i \in I \ \Rightarrow \ \vec{x} + \vec{y} \in \bigcap_{i \in I} L_i.$$

Similarmente, si $\vec{x} \in \bigcap_{i \in I} L_i$ y $a \in \mathbb{K}$, tenemos que $\vec{x} \in L_i, \forall i \in I$. Como L_i son subespacios vectoriales, son parte estable, por lo que

$$a \cdot \vec{x} \in L_i, \forall i \in I \ \Rightarrow \ a \cdot \vec{x} \in \bigcap_{i \in I} L_i.$$

□

Observación. Sin embargo, no tiene que cumplirse necesariamente que $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}(V)$ si $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$.

Ejemplo 1.1. Sean $\{\vec{u}, \vec{v}\} \subset V$ linealmente independientes y $L_1 = L(\{\vec{u}\})$ y $L_2 = L(\{\vec{v}\})$ las rectas que generan. Asumamos que $\vec{u} + \vec{v} \in L_1 \cup L_2$. Sin pérdida de generalidad, $\vec{u} + \vec{v} \in L_1$. Por tanto, $\exists a \in \mathbb{K}$ tal que $\vec{u} + \vec{v} = a\vec{u}$. De esta manera,

$$(a-1)\,\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}.$$

Esto es absurdo, pues hemos dicho que estos vectores son linealmente independientes.

Definición 1.9. Si $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$, definimos $L_1 + L_2$ al menor subespacio vectorial generado por la unión.

$$L_1 + L_2 = L(L_1 \cup L_2).$$

Teorema 1.10. Sean $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ y sea $L' = \{\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \,:\, \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2\}$. Tenemos que $L' = L_1 + L_2$.

Demostración. Si $\vec{x}_1 \in L_1$, tenemos que $\vec{x}_1 = \vec{x}_1 + \vec{0} \in L'$, pues $\vec{x}_1 \in L_1$ y $\vec{0} \in L_2$. Por tanto, $L_1 \subset L'$. Similarmente, $L_2 \subset L'$. Consecuentemente, $L_1 \cup L_2 \subset L'$.

Además, tenemos que $L' \in \mathcal{L}(V)$, pues $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L'$ tenemos que $\exists \vec{x}_1, \vec{y}_1 \in L_1$ y $\exists \vec{x}_2, \vec{y}_2 \in L_2$.

$$\vec{x} + \vec{y} = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + (\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \underbrace{(\vec{x}_1 + \vec{y}_1)}_{\in L_1} + \underbrace{(\vec{x}_2 + \vec{y}_2)}_{\in L_2}.$$

Por tanto, $\vec{x} + \vec{y} \in L'$. Similarmente, si $a \in \mathbb{K}$ y $\vec{x} \in L'$ tenemos que existen $\vec{x}_1 \in L_1$ y $\vec{x}_2 \in L_2$ tales que

$$a \cdot \vec{x} = a \cdot (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \underbrace{a\vec{x}_1}_{\in L_1} + \underbrace{a\vec{x}_2}_{\in L_2}.$$

Por tanto, $a \cdot \vec{x} \in L'$. Por tanto, $L' \in \mathcal{L}(V)$.

A continuación demostramos que si $L \in \mathcal{L}(V)$ y $L_1 \cup L_2 \subset L$, entonces $L' \subset L$. Tenemos que $\forall \vec{x} \in L'$ existen $\vec{x}_1 \in L_1$ y $\vec{x}_2 \in L_2$ tales que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$. Por tanto, $\vec{x} \in L$.

$$\therefore L' \subset L.$$

Por todo ello, $L' = L_1 + L_2$. □

Teorema 1.11 (Fórmula de Grassmann)**.** Supongamos que V es de dimensión finita, por lo que todos los conjuntos que vamos a tratar a continuación son de dimensión finita.

$$\dim (L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim (L_1 \cap L_2).$$

Demostración. Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\}$ una base de $L_1 \cap L_2$, y sea $v = \dim (L_1 \cap L_2)$. Podemos ampliar esta base hasta obtener una base de L_1 y L_2. Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m, \vec{u}_{m+1} \ldots, \vec{u}_r\}$ una base de L_1. Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m, \vec{v}_{m+1}, \ldots, \vec{v}_s\}$ base de L_2 . Queremos ver que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m, \ldots, \vec{u}_{m+1}, \ldots, \vec{u}_r, \vec{v}_{m+1}, \ldots, \vec{v}_s\}$ es base de $L_1 + L_2$. Primero queremos ver que es sistema de generadores. Sea $\vec{x} \in L_1 + L_2$. Entonces, existen $\vec{x}_1 \in L_1$ y $\vec{x}_2 \in L_2$ tales que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$. Como anteriormente hemos definido bases para L_1 y L_2, tenemos que existen $a^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x}_1 = a^1\vec{u}_1 + a^2\vec{u}_2 + \cdots + a^r\vec{u}_r.$$

Similarmente, existen $b^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x}_2 = b^1\vec{u}_1 + \cdots + b^m\vec{u}_m + b^{r+1}\vec{v}_{r+1} + \cdots + b^s\vec{v}_s.$$

Por tanto, tenemos que $\vec{x}$ se puede expresar como combinación lineal de $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m, \vec{u}_{m+1}, \ldots, \vec{u}_r, \vec{v}_{m+1}, \ldots, \vec{v}_s\}$.

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \sum_{i=1}^{r} a^i\vec{u}_i + \sum_{i=1}^{m} b^1\vec{u}_i + \sum_{i=m+1}^{s} b^i\vec{v}_i.$$

Por tanto, es sistema de generadores, ahora tenemos que ver que son linealmente independientes. Sean $a^i, b^j \in \mathbb{K}$ tales que

$$a^1\vec{u}_1 + a^2\vec{u}_2 + \cdots + a^m\vec{u}_m + \cdots + a^r\vec{u}_{r+1} + \cdots + \cdots + b^{m+1}\vec{v}_{m+1} + \cdots + b^s\vec{v}_s = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{r} a^i\vec{u}_i + \sum_{i=m+1}^{s} b^i\vec{v}_i = \vec{0}.$$

Sea $\vec{y} = \sum_{i=1}^{r} a^i\vec{u}_i$ por lo que $\vec{y} \in L_1$. Entonces,

$$-\vec{y} = \sum_{i=m+1}^{s} b^i\vec{v}_i \in L_2.$$

Por tanto, $\vec{y} \in L_1 \cap L_2$. Entonces, $\vec{y}$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base de la intersección. Es decir, existen $c^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{y} = c^1\vec{u}_1 + c^2\vec{u}_2 + \cdots + c^m\vec{u}_m.$$

Entonces,

$$\vec{0} = \vec{y} - \vec{y} = \sum_{j=1}^{m} c^j\vec{u}_j + \sum_{i=m+1}^{s} b^i\vec{v}_i = \vec{0}.$$

Como la base de L_2 es linealmente independiente (porque es una base), tenemos que $c^1 = c^2 = \cdots = c^r = b^1 = \cdots = b^q = 0$. Consecuentemente, $\sum_{i=1}^{r} a^i\vec{u}_i = \vec{0}$ y, dado que $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\}$ es base de L_1, tenemos que $a^i = 0, \forall i = 1, \ldots, r$. Por tanto, hemos visto que el conjunto que estábamos estudiando es base.

Esta base tiene dimensión $r + s = r + (s + m) - m$. □

Si $L_1 \cap L_2 = \left\{\vec{0}\right\}$, tenemos que $\dim L_1 + \dim L_2 = \dim (L_1 + L_2)$.

Definición 1.10. Sean $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ su suma es directa si $L_1 \cap L_2 = \left\{\vec{0}\right\}$ y se escribe de la siguiente manera:

$$L_1 \oplus L_2.$$

Proposición 1.2. Sean $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$. Entonces

$$L_1 \oplus L_2 \iff \forall \vec{x} \in L_1 + L_2,\ \exists! \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2,\ \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2.$$

Demostración. **(i)** Supongamos que $L_1 \oplus L_2$. Asumimos que existen, $\vec{x}_1, \vec{y}_1 \in L_1$ y $\vec{x}_2, \vec{y}_2 \in L_2$ tales que si $\vec{x} \in L_1 + L_2$ tenemos que

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \vec{y}_1 + \vec{y}_2.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \vec{0} &= (\vec{x}_1 - \vec{y}_1) + (\vec{x}_2 - \vec{y}_2) . \\ \Rightarrow & \vec{x}_1 - \vec{y}_1 = \vec{y}_2 - \vec{x}_2 \end{aligned}$$

Consecuentemente, $\vec{x}_1 - \vec{y}_1, \vec{y}_2 - \vec{x}_2 \in L_1 \cap L_2$, por tanto, $\vec{x}_1 - \vec{y}_1 = \vec{0} \iff \vec{x}_1 = \vec{y}_1$. Similarmente, $\vec{y}_2 = \vec{x}_2$.

(ii) Suponemos que $\forall \vec{x} \in L_1 + L_2$, $\exists! \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2$, $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$. Queremos ver que $L_1 \cap L_2 = \left\{\vec{0}\right\}$. Sea $\vec{x} \in L_1 \cap L_2$. Tenemos que $\vec{x} = \vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x}$. Tenemos que $\vec{0} \in L_1 \cap L_2$. Como la expresión de $\vec{x}$ ha de ser única, tenemos que $\vec{x} = \vec{0}$, por lo que $L_1 \cap L_2 = \left\{\vec{0}\right\}$.

□

Tenemos que si $L_1, L_2, \ldots, L_k \in \mathcal{L}(V)$,

$$(L_1 + L_2) + L_3 = \{(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + \vec{x}_3 \ : \ \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2, \vec{x}_3 \in L_3\} = L_1 + (L_2 + L_3) .$$

Generalmente, esta suma es asociativa, es decir se puede escribir

$$L_1 + L_2 + \cdots + L_k = \{\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_k \ : \ \vec{x}_i \in L_i\} .$$

Definición 1.11. Diremos que la suma $L_1 + L_2 + \cdots + L_k$ es directa si $\forall \vec{x} \in L_1 + L_2 + \cdots + L_k, \exists! \vec{x}_i \in L_i$ tales que $\vec{x} = \sum_{i=1}^{k} \vec{x}_i$. Esto se denotará de la siguiente manera:

$$L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_k.$$

Proposición 1.3. Si $L_1, \ldots, L_k$, entonces $L_1 \oplus \cdots \oplus L_k$ si y solo si $\forall i = 1, \ldots, k$,

$$L_i \cap (L_1 + L_2 + \cdots + L_{i-1} + L_{i+1} + \cdots + L_k) = \left\{\vec{0}\right\} .$$

Demostración. **(i)** Demostramos la primera implicación. Supongamos que $\forall i = 1, \ldots, k$, y sea $\vec{x} \in L_i \cap (L_1 + \cdots + L_{i-1} + L_{i+1} + \cdots + L_k)$. Queremos decir que $\vec{x} = \vec{0}$. Tenemos que, dado que $\vec{x} \in L_i$:

$$\vec{x} = \vec{0} + \cdots + \vec{0} + \vec{x}_i + \vec{0} + \cdots + \vec{0}.$$

Como $\vec{x} \in L_i \cap (L_1 + \cdots + L_{i-1} + L_{i+1} + \cdots + L_k)$, tenemos que $\vec{x} \in L_1 + \cdots + L_{i-1} + L_{i+1} + \cdots + L_k$:

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_{i-1} + \vec{x}_{i+1} + \cdots + \vec{x}_k.$$

Como $L_1 \oplus \cdots \oplus L_k$, tenemos que la expresión de $\vec{x}$ es única, por lo que $\vec{x} = \vec{0}$.

(ii) Demostramos la siguiente implicación. Asumimos que

$$\forall i = 1, \ldots, k;\ L_i \cap (L_1 + L_2 + \cdots + L_{i-1} + L_{i+1} + \cdots + L_k) = \left\{\vec{0}\right\}.$$

Sea

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{k} \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{k} \vec{y}_i.$$

Con $\vec{x}_i, \vec{y}_i \in L_i$, tenemos que

$$\vec{0} = (\vec{x}_1 - \vec{y}_1) + \cdots + (\vec{x}_i + \vec{y}_i) + \cdots + (\vec{x}_k + \vec{y}_k).$$

$$\therefore \vec{y}_i - \vec{x}_i = (\vec{x}_1 - \vec{y}_1) + \cdots + (\vec{x}_{i-1} - \vec{y}_{i-1}) + (\vec{x}_{i+1} - \vec{y}_{i+1}) + \cdots + (\vec{x}_k - \vec{y}_k).$$

Por lo que $\vec{y}_i - \vec{x}_i = \vec{0}, \forall i = 1, \ldots, k$. Si esto no fuera cierto para algún $\vec{x}_j - \vec{y}_j$, podríamos despejarlo y tendríamos que está en la intersección pero a la vez no es $\vec{0}$, lo cual contradice nuestra hipótesis.

□

Definición 1.12. $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ son **complementarios** si $L_1 \oplus L_2$ y $V = L_1 \oplus L_2$.

$$L_1 \oplus L_2 = V \iff \forall \vec{x} \in V, \exists! \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2,\ \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2.$$

Teorema 1.12. Sea $L \in \mathcal{L}(V)$, entonces existe $L' \in \mathcal{L}(V)$ tal que $L \oplus L' = V$.

Demostración. Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r\}$ una base de L y sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \vec{u}_{r+1}, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V. La manera de ampliar una base no es única. Sea L' el subespacio generado por los vectores que he añadido a la base de L para formar la base de V, es decir,

$$L' = L(\{\vec{u}_{r+1}, \ldots, \vec{u}_n\}).$$

Tenemos que $\forall \vec{x} \in V$, existen $a^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^r\vec{u}_r + a^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + a^n\vec{u}_n.$$

Sea $\vec{x}_1 = a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^r\vec{u}_r \in L$ y $\vec{x}_2 = a^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + a^n \in L'$. Vamos a ver que $L \cap L' = \left\{\vec{0}\right\}$. Sabemos que $\left\{\vec{0}\right\} \subset L \cap L'$. Si $\vec{x} \in L \cap L'$. Entonces existen $a^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^r\vec{u}_r.$$

Como $\vec{x} \in L'$, existen $a^j \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = a^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + a^n\vec{u}_n.$$

Entonces,

$$\vec{0} = \left(a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^r\vec{u}_r\right) - \left(a^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + a^n\vec{u}_n\right).$$

Esto es una combinación lineal de los elementos de una base que me da el vector nulo. Como las bases son linealmente independientes, tenemos que

$$a^1 = \cdots = a^r = a^{r+1} = \cdots = a^n = 0.$$

Por tanto, $\vec{x} = \vec{0}$. Consecuentemente, la suma es directa. □

1.4. Espacio vectorial cociente

Definición 1.13. Definimos la relación de equivalencia:

$$\vec{x}\mathcal{R}\vec{y} \iff \vec{y}-\vec{x} \in L.$$

Si $\vec{x} \in V$,

$$[\vec{x}] = \{\vec{y} \in V \ : \ \vec{y}-\vec{x} \in L\} = \left\{\vec{y} \in V \ : \ \vec{y}-\vec{x} = \vec{l}\right\} = \left\{\vec{x}+\vec{l} \ : \ \vec{l} \in L\right\} = \vec{x}+L$$

Teorema 1.13. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Si $\vec{x}, \vec{y} \in V$ decimos que $\vec{x}R\vec{y}$ si $\vec{x}-\vec{y} \in L$, donde $L \in \mathcal{L}(V)$. Tenemos que R es una relación de equivalencia en V.

Demostración. **(i)** Reflexiva. Si $\vec{x} \in V$, tenemos que

$$\vec{x}-\vec{x} \in \vec{0} \in L.$$

(ii) Simétrica. Si $\vec{x}, \vec{y} \in V$ tal que $\vec{x}R\vec{y}$, tenemos que

$$\vec{x}-\vec{y} \in L \iff \vec{y}-\vec{x} \in L.$$

Pues $\vec{y}-\vec{x} = (-1)(\vec{x}-\vec{y}) \in L$.

(iii) Transitiva. Si $\vec{x}R\vec{y}$ y $\vec{y}R\vec{z}$, tenemos que $\vec{x}-\vec{y} \in L$ y $\vec{y}-\vec{z} \in L$. Como L es espacio vectorial tenemos que:

$$(\vec{x}-\vec{y})+(\vec{y}-\vec{z}) = \vec{x}-\vec{z} \in L.$$

□

Si $\vec{x} \in V$, tenemos que

$$[\vec{x}] = \{\vec{y} \in V \ : \ \vec{y}R\vec{x}\} = \{\vec{y} \in V \ : \ \vec{y}-\vec{x} \in L\} = \left\{\vec{y} \in V \ : \ \exists \vec{l} \in L, \ \vec{y}-\vec{x} = \vec{l}\right\} = \left\{\vec{x}+\vec{l} \ : \ \vec{l} \in L\right\} = \vec{x}+L.$$

Definición 1.14 (Espacio cociente)**.**

$$V/R = V/L = \{\vec{x}+L \ : \ \vec{x} \in V\}.$$

En V/L defino una suma y un producto por escalares:

$$\begin{aligned} + : & V/L \times V/L \to V/L \\ & (\vec{x}+L, \vec{y}+L) \to (\vec{x}+L)+(\vec{y}+L) = (\vec{x}+\vec{y})+L. \end{aligned}$$

Si $\vec{x}+L=\vec{x'}+L$ y $\vec{y}+L=\vec{y'}+L$. Tenemos que ver que si $\vec{x}+L=\vec{y}+L$, entonces $\vec{x'}+L=\vec{y'}+L$. [1] Tenemos que

$$\vec{x'}=\vec{x}+\vec{l} \quad \text{y} \quad \vec{y'}=\vec{y}+\vec{l'}, \quad \text{con } \vec{l},\vec{l'}\in L.$$

$$\vec{x'}+\vec{y'}=\left(\vec{x}+\vec{l}\right)+\left(\vec{y}+\vec{l'}\right)=(\vec{x}+\vec{y})+\left(\vec{l}+\vec{l'}\right).$$

Entonces,

$$\left(\vec{x'}+\vec{y'}\right)-(\vec{x}+\vec{y})=\vec{l}+\vec{l'}\in L.$$

Entonces, $(\vec{x}+\vec{y})\,R\left(\vec{x'}+\vec{y'}\right)$, por lo que sus clases de equivalencia son iguales.

Teorema 1.14. $(V/L,+)$ es un grupo abeliano.

Demostración. **(i)** $\forall\vec{x},\vec{y}\in V$,

$$(\vec{x}+L)+(\vec{y}+L)=(\vec{x}+\vec{y})+L=(\vec{y}+\vec{x})+L.$$

(ii) $\forall\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V$,

$$((\vec{x}+L)+(\vec{y}+L))+(\vec{z}+L)=((\vec{x}+\vec{y})+L)+(\vec{z}+L)=((\vec{x}+\vec{y})+\vec{z})+L=(\vec{x}+L)+((\vec{y}+L)+(\vec{z}+L)).$$

(iii) Si consideramos la clase $\vec{0}+L$, tenemos que $\forall\vec{x}\in V$,

$$\left(\vec{0}+L\right)+(\vec{x}+L)=\left(\vec{0}+\vec{x}\right)+L=\vec{x}+L.$$

(iv) Si $\vec{x}\in V$, el opuesto será, $-(\vec{x}+L)=(-\vec{x})+L$.

$$(\vec{x}+L)+(-(\vec{x}+L))=(\vec{x}+L)+((-\vec{x})+L)=(\vec{x}-\vec{x})+L=\vec{0}+L.$$

□

El producto por escalares está definido así:

$$\cdot\mathbb{K}\times V/L\to V/L$$
$$\forall a\in\mathbb{K},\forall\vec{x}\in V a\cdot(\vec{x}+L)=(a\vec{x})+L.$$

Queremos ver que se trata de una aplicación. Si $\vec{x'}+L=\vec{x}+L$, queremos ver que $\left(a\vec{x'}\right)+L=(a\vec{x})+L$. Tenemos que $\vec{x'}-\vec{x}\in L$, por lo que $a\vec{x}'-a\vec{x}\in L$. Por tanto,

$$(a\vec{x})+L=\left(a\vec{x'}\right)+L.$$

Observación 1.1. Estas operaciones hacen V/L un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

[1] El objetivo, tanto en la suma como en el producto por escalares, es ver que realmente se trata de una aplicación, es decir, si cojo $[\vec{x}]=[\vec{x'}]$ y $[\vec{y}]=[\vec{y'}]$, me tiene que dar que $[\vec{x}+\vec{y}]=[\vec{x'}+\vec{y'}]$.

Teorema 1.15. La dimensión del espacio vectorial V/L se puede expresar como:

$$\dim(V/L) = \dim(V) - \dim(L).$$

Demostración. Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\}$ base de L y sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \ldots, \vec{u}_n\}$ una base de V. Si $i = 1, \ldots, r$, tenemos que

$$\vec{u}_i = \vec{u}_i - \vec{0} \in L \Rightarrow \vec{u}_i + L = \vec{0} + L.$$

Vamos a demostrar que $\{\vec{u}_{r+1} + L, \ldots, \vec{u}_n + L\}$ base de V/L. Primero vemos que es un sistema de generadores. Si $\vec{x} \in V$, queremos ver que la clase de $\vec{x}$ se puede expresar como combinación lineal de estas clases. Existen $a^j \in \mathbb{K}$ tales que:

$$\vec{x} = \underbrace{a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^r\vec{u}_r}_{\in L} + a^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + a^n\vec{u}_n.$$

Entonces, $\vec{x}$ está relacionado con $a^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + a^n\vec{u}_n$. Por tanto,

$$\vec{x} + L = \left(a^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + a^n\vec{u}_n\right) + L = a^{r+1}\left(\vec{u}_{r+1} + L\right) + \cdots + a^n\left(\vec{u}_n + L\right).$$

Por tanto, $\{\vec{u}_{r+1} + L, \ldots, \vec{u}_n + L\}$ es un sistema de generadores de V/L. Ahora tenemos que ver que son linealmente independientes.

$$b^{r+1}\left(\vec{u}_{r+1} + L\right) + \cdots + b^n\left(\vec{u}_n + L\right) = \vec{0} + L.$$

Tenemos que

$$\left(b^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + b^n\vec{u}_n\right) + L = \vec{0} + L.$$

Entonces,

$$b^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + b^n\vec{u}_n - \vec{0} \in L.$$

Entonces, podemos escribir la expresión anterior como combinación lineal de la base de L:

$$b^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + b^n\vec{u}_n = b^1\vec{u}_1 + \cdots + b^r\vec{u}_r.$$

$$\Rightarrow \left(-b^1\right)\vec{u}_1 + \left(-b^2\right)\vec{u}_2 + \cdots + \left(-b^r\right)\vec{u}_r + \cdots + b^n\vec{u}_n = \vec{0}.$$

Dado que $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \ldots, \vec{u}_n\}$ es una base de V , $b^1 = b^2 = \cdots = b^r = \cdots = b^n = 0$. □

Observación 1.2. Podemos formar la base de un espacio cociente V/L a partir de la expansión de la base de L para obtener una base de V.

Capítulo 2

Aplicaciones Lineales

Definición 2.1 (Aplicación Lineal)**.** Sean V y V' son espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$.Una aplicación $f : V \to V'$ es lineal si

(a) $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})\,,\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in V.$

(b) $f(a\vec{x}) = af(\vec{x})\,,\ \forall a \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in V.$

Definición 2.2. Un **monomorfismo** de V en V' es una aplicación lineal inyectiva. Un **epimorfismo** es una aplicación lineal sobreyectiva. Un **isomorfismo** es una aplicación lineal biyectiva (es homomorfismo y epimorfismo a la vez).

Ejemplo 2.1. **(a)** Tenemos que $L \in \mathcal{L}(V)$,

$$\begin{aligned} i : L &\to V \\ \vec{x} &\to \vec{x}. \end{aligned}$$

Esta aplicación es un monomorfismo.

(b) Si $L \in \mathcal{L}(V)$, la aplicación

$$\begin{aligned} p : V &\to V/L \\ \vec{x} &\to \vec{x} + L \end{aligned}$$

Es un epimorfismo.

(c) Sean $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ una base de V, la aplicación

$$\begin{aligned} f : V &\to \mathbb{K}^n \\ \vec{x} &\to \left(a^1, \ldots, a^n\right). \end{aligned}$$

Donde, $\vec{x} = a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^n\vec{u}_n$. Entonces f es un isomorfismo.

Proposición 2.1. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal.

(a) Si $L \in \mathcal{L}(V)$
$$f(L) = \{f(\vec{x}) \in V' \ : \ \vec{x} \in L\} \in \mathcal{L}(V').$$

(b) $f\left(\vec{0}\right) = \vec{0}$ y $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$.

(c) Si $L' \in \mathcal{L}(V')$,
$$f^{-1}(L') = \{\vec{x} \in V \ : \ f(\vec{x}) \in L'\} \in \mathcal{L}(V).$$

(d) $0 : V \to V'$ tal que $\vec{x} \to \vec{0}$ es una aplicación lineal.

Demostración. **(a)** Queremos ver que $\forall \vec{x'}, \vec{y'} \in f(L) \Rightarrow \exists \vec{x}, \vec{y} \in L,\ f(\vec{x}) = \vec{x'}$ y $f(\vec{y}) = \vec{y'}$. Tenemos que ver que la suma y el producto por escalares está bien definidas.

$$\vec{x'} + \vec{y'} = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = f(\vec{x} + \vec{y}) \in f(L).$$

Similarmente, para el producto por escalares, si $a \in \mathbb{K}$,

$$a\vec{x'} = af(\vec{x}) = f(a\vec{x}) \in f(L).$$

(b) Tenemos que $f\left(\vec{0}\right) = f(0 \cdot \vec{x}) = 0f(\vec{x}) = \vec{0}$. Similarmente,

$$f(-\vec{x}) = f((-1)\vec{x}) = -f(\vec{x}).$$

Otra demostración es:

$$f(\vec{x}) + f(-\vec{x}) = f(\vec{x} + (-\vec{x})) = f\left(\vec{0}\right) = \vec{0}.$$

(c) Sean $\vec{x}, \vec{y} \in f^{-1}(L')$, entonces $f(\vec{x}), f(\vec{y}) \in L'$. Como L' es subespacio vectorial,

$$f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \in L'.$$

Por tanto,
$$f(\vec{x} + \vec{y}) \in L' \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in f^{-1}(L').$$

Para el producto por escalares, si $a \in \mathbb{K}$, $\vec{x} \in f^{-1}(L')$,

$$f(\vec{x}) \in L' \Rightarrow af(\vec{x}) = f(a\vec{x}) \in L' \Rightarrow a\vec{x} \in f^{-1}(L).$$

□

Corolario 2.1. **(a)** Imagen. $\mathrm{Im}(f) = f(V) = \{f(\vec{x}) \ : \ \vec{x} \in V\} \in \mathcal{L}(V')$.

(b) Núcleo. $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}\left(\{\vec{0}\}\right) = \left\{\vec{x} \in V \ : \ f(\vec{x}) = \vec{0}\right\} \in \mathcal{L}(V)$.

Demostración. Como V y $\left\{\vec{0}\right\}$ son subespacios vectoriales su imagen y preimagen, respectivamente, también serán subespacios vectoriales por la proposición 2.1. □

Proposición 2.2. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal, entonces:

(a) f es epimorfismo $\iff$ $\mathrm{Im}\,(f) = V'$.

(b) f es monomorfismo $\iff$ $\mathrm{Ker}\,(f) = \left\{\vec{0}\right\}$.

Demostración. **(a)** Es la definición de sobreyectividad.

(b) Primera implicación. Tenemos que $f\left(\vec{0}\right) = \vec{0}$. Si $f(\vec{x}) = \vec{0}$, tenemos que $\vec{x} = \vec{0}$ (porque f es inyectiva). Segunda implicación. Supongo que $\mathrm{Ker}\,(f) = \left\{\vec{0}\right\}$, entonces

$$f(\vec{x}) = f(\vec{y}) \Rightarrow f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = f(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} - \vec{y} \in \mathrm{Ker}\,(f) \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}.$$

□

Proposición 2.3. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal y sea $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\}$ un sistema de generadores de $L \in \mathcal{L}(V)$. Entonces $\{f(\vec{x}_1), \dots, f(\vec{x}_p)\}$ es un sistema de generadores de $f(L)$. [a]

[a] La independencia lineal no se conserva en una aplicación lineal en general.

Demostración. Sea $\vec{x'} \in f(L)$, existe $\vec{x} \in L$ tal que $f(\vec{x}) = \vec{x'}$. Como $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\}$ es un sistema de generadores de L, existen $a^i \in \mathbb{K}$ escalares tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Entonces,

$$\vec{x'} = f\left(a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^p\vec{x}_p\right) = a^1 f(\vec{x}_1) + \cdots + a^p f(\vec{x}_p).$$

□

Teorema 2.1. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal. Entonces, f es un monomorfismo si y solo si $\forall p \in \mathbb{N}, \forall \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\} \subset V$ linealmente independientes, implica que $\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_p)\}$ son linealmente independientes.

Demostración. **(i)** Si f es un monomorfismo y sea $p \in \mathbb{N}$, con $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\} \subset V$ linealmente independientes. Cogemos $a^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$a^1 f(\vec{u}_1) + \cdots + a^p f(\vec{u}_p) = \vec{0}.$$

Como f es una aplicación lineal,

$$\begin{aligned}&a^1 f(\vec{u}_1) + \cdots + a^p f(\vec{u}_p)\\ =&f\left(a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^p\vec{u}_p\right)\\ =&\vec{0}.\end{aligned}$$

Como f es monomorfismo, tenemos que

$$a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^p\vec{u}_p = \vec{0}.$$

Como estos vectores forman una base, tenemos que $a^1 = \cdots = a^p = 0$.

(ii) Lo hacemos por contraposición. Suponemos que f no es inyectiva (no es monomorfismo), por lo que existe $\vec{x} \neq \vec{0}$ tal que $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(f)$. Entonces, $\{\vec{x}\}$ es linealmente independiente y $\{f(\vec{x})\} = \left\{\vec{0}\right\}$ es linealmente dependiente.

□

Teorema 2.2. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal. Entonces f es epimorfismo si y solo si para cada sistema de generadores $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ de V, $\{f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_n)\}$ es sistema de generadores de V'.

Demostración. Sabemos que si $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ es sistema de generadores en V, entonces $\{f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_n)\}$ será sistema de generadores de $\operatorname{Im}(f)$. Si f es epimorfismo, entonces será base de V' y, si es base de V' es porque $\operatorname{Im}(f) = V'$, por lo que es epimorfismo. □

Proposición 2.4. Sean $f : V \to V'$ y $g : V' \to V''$ aplicaciones lineales. Entonces, la composición $g \circ f$ también es lineal.

Demostración. Sean $\vec{x}, \vec{y} \in V$, tenemos que

$$g(f(\vec{x} + \vec{y})) = g(f(\vec{x} + \vec{y})) = g(f(\vec{x}) + f(\vec{y})) = g(f(\vec{x})) + g(f(\vec{y})).$$

Entonces, $g \circ f$ es lineal respecto a la suma. Similarmente, si $a \in \mathbb{K}, \vec{x} \in V$ tenemos que

$$g(f(a\vec{x})) = g(af(\vec{x})) = ag(f(\vec{x})).$$

Por tanto, $g \circ f$ es una aplicación lineal. □

Proposición 2.5. Sea $f : V \to V'$ un isomorfismo (lineal y biyectiva) [a] . Sabemos que existe $f^{-1} : V' \to V$. Entonces, f^{-1} es isomorfismo.

[a] Una función es biyectiva si y sólo si tiene inversa.

Demostración. Solo tenemos que demostrar que es aplicación lineal, porque inversa de una biyección también es biyección. Si $\forall \vec{x'}, \vec{y'} \in V'$, como f es biyectiva, $\exists! \vec{x}, \vec{y} \in V$ tales que $\vec{x'} = f(\vec{x}) \iff \vec{x} = f^{-1}\left(\vec{x'}\right)$ y $\vec{y'} = f(\vec{y}) \iff \vec{y} = f^{-1}\left(\vec{y'}\right)$. Entonces,

$$f^{-1}\left(\vec{x'} + \vec{y'}\right) = f^{-1}\left(f(\vec{x}) + f(\vec{y})\right) = f^{-1}\left(f(\vec{x} + \vec{y})\right) = \vec{x} + \vec{y} = f^{-1}\left(\vec{x'}\right) + f^{-1}\left(\vec{y'}\right).$$

Similarmente, si $a \in \mathbb{K}$ y $\vec{x'} \in V'$, $\exists! \vec{x} \in V$ tal que $f(\vec{x}) = \vec{x'} \iff f^{-1}\left(\vec{x'}\right) = \vec{x}$. Entonces tenemos que,

$$f^{-1}\left(a\vec{x'}\right) = f^{-1}\left(af(\vec{x})\right) = f^{-1}\left(f(a\vec{x})\right) = a\vec{x} = af^{-1}\left(\vec{x'}\right).$$

□

Teorema 2.3. Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ una base de V y sean $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\} \subset V'$. Entonces, $\exists! f : V \to V'$ lineal tal que $f(\vec{u}_i) = \vec{v}_i$.

Demostración. **(i)** Primero demostramos la unicidad, es decir, asumimos que existe y demostramos que debe única. Entonces, asumimos que existe $f : V \to V'$ linal tal que $f(\vec{u}_i) = \vec{v}_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Sea $\vec{x} \in V$, entonces existen $a^i \in \mathbb{K}$ únicos tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^n\vec{u}_n.$$

Entonces,

$$f(\vec{x}) = f\left(a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^n\vec{u}_n\right) = a^1 f(\vec{u}_1) + \cdots + a^n f(\vec{u}_n) = a^1\vec{v}_1 + \cdots + a^n\vec{v}_n.$$

Si exsistese otra función $g : V \to V'$ tal que $g(\vec{u}_i) = \vec{v}_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$, tendríamos que $f(\vec{x}) = g(\vec{x})$, $\forall \vec{x} \in V$.

(ii) Ahora demostramos la existencia. Sea $f : V \to V'$ la aplicación $f(\vec{x}) = x^1\vec{v}_1 + \cdots + x^n\vec{v}_n$, donde $\vec{x} = x^1\vec{u}_n + \cdots + x^n\vec{u}_n$. Tenemos que demostrar que esta aplicación es lineal. Si $\vec{x}, \vec{y} \in V$ queremos ver que $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$. Tenemos que

$$\begin{aligned} f(\vec{x} + \vec{y}) =& f\left(\left(x^1\vec{u}_n + \cdots + x^n\vec{u}_n\right) + \left(y^1\vec{u}_n + \cdots + y^n\vec{u}_n\right)\right) \\ =& f\left(\left(x^1 + y^1\right)\vec{u}_1 + \cdots + \left(x^n + y^n\right)\vec{u}_n\right) \\ =& \left(x^1 + y^1\right)\vec{v}_1 + \cdots + \left(x^n + y^n\right)\vec{v}_n \\ =& \left(x^1\vec{v}_1 + \cdots + x^n\vec{v}_n\right) + \left(y^1\vec{v}_1 + \cdots + y^n\vec{v}_n\right) \\ =& f(\vec{x}) + f(\vec{y}). \end{aligned}$$

Similarmente,

$$f(a\vec{x}) = f\left(a\left(x^1\vec{u}_n + \cdots + x^n\vec{u}_n\right)\right) = f\left(ax^1\vec{u}_1 + \cdots + ax^n\vec{u}_n\right) = af(\vec{x}).$$

□

Podemos ver que

$$f(\vec{u}_i) = f\left(0 \cdot \vec{u}_1 + \cdots + 0 \cdot \vec{u}_{i-1} + 1 \cdot \vec{u}_i + 0 \cdot \vec{u}_{i+1} + \cdots + 0 \cdot \vec{u}_n\right) = 0 \cdot \vec{v}_1 + \cdots + 1 \cdot \vec{v}_i + \cdots + 0 \cdot \vec{v}_n = \vec{v}_i.$$

Corolario 2.2. Sea $f : V \to V'$ lineal y $f(\vec{u}_i) = g(\vec{u}_i), \forall i = 1, \dots, n$ donde $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ es base, entonces $f = g$.

Definición 2.3. Dos espacios vectoriales V y V' son isomorfos si existe $f : V \to V'$ isomorfismo. Lo expresaremos como $V \approx V'$.

Teorema 2.4. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal. Entonces son equivalentes:

(a) f es isomorfismo.

(b) $\forall \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ base de V, $\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)\}$ es base de V'.

(c) $\exists \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ base de V tal que $\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)\}$ es base de V' .

Demostración. Vamos a ver que (a) $\Rightarrow$ (b), que (b) $\Rightarrow$ (c) y que (c) $\Rightarrow$ (a).

(a) $\Rightarrow$ (b) Suponemos que f es un isomorfismo y sea $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ base de V. Entonces este conjunto es sistema de generadores y son linealmente independientes. Entonces $\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)\}$ es sistema de generadores de V'. Además, como son linealmente independientes, $\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)\}$ también son linealmente independientes.

(b) $\Rightarrow$ (c) Evidente.

(c) $\Rightarrow$ (a) Sea $f : V \to V'$ lineal, entonces $\exists \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ base de V, entonces tenemos que $\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)\}$ es base de V'. Sea $g : V' \to V$, tal que $g = f^{-1}$, la única aplicación lineal tal que $g(f(\vec{u}_i)) = \vec{u}_i, \forall i = 1, \dots, n$. Entonces, tenemos que f tiene inversa, por lo que es biyectiva y, además, como es aplicación lineal, es isomorfismo.

□

Corolario 2.3. $V \approx V' \iff \dim V = \dim V'$

Demostración. **(i)** Si $V \approx V'$, existe un isomorfismo entre ellos, y podemos encontrar una base con el mismo número de elementos en V' .

(ii) Supongamos que $\dim V = \dim V'$. Sea $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ base de V y $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ base de V' y $f : V \to V'$ la única aplicación lineal tal que $f(\vec{u}_i) = \vec{v}_i, \forall i = 1, \dots, n$. Como es una aplicación lineal que lleva bases en bases es un isomorfismo.

□

Observación 2.1. Si consideramos la relación de equivalencia de que dos espacios vectoriales sean isomorfos, tenemos que el conjunto cociente tiene tantos elementos como biyecciones.

Teorema 2.5.
$$\dim V = \dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Im}(f).$$

Demostración. Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\}$ base de $\operatorname{Ker}(f)$ y sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \vec{u}_{r+1}, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V. Entonces $\dim V = n$ y $\dim \operatorname{Ker}(f) = r$. Vamos a ver que $\{f(\vec{u}_{r+1}), \ldots, f(\vec{u}_n)\}$ es base de $\operatorname{Im}(f)$. Primero tenemos que ver que son sistema de generadores. Sea $\vec{x'} \in \operatorname{Im}(f)$, entonces existe $\vec{x} \in V$ tal que $f(\vec{x}) = \vec{x'}$. Como $\vec{x} \in V$, existen $a^i \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^n\vec{u}_n.$$

Entonces tenemos que

$$\vec{x'} = f(\vec{x}) = f\left(a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^n\vec{u}_n\right) = fa^1(\vec{u}_1) + \cdots + a^r f(\vec{u}_r) + a^{r+1}f(\vec{u}_{r+1}) + \cdots + a^n f(\vec{u}_n).$$

Tenemos que como $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\}$ es una base de $\operatorname{Ker}(f)$, $f(\vec{u}_i) = \vec{0}, \forall i = 1, \ldots, r$:

$$\vec{x'} = a^{r+1}f(\vec{u}_{r+1}) + \cdots + a^n f(\vec{u}_n).$$

Entonces, $\{f(\vec{u}_{r+1}), \ldots, f(\vec{u}_n)\}$ es sistema de generadores. Ahora vamos a ver que son linealmente independientes. Sean $b^i \in \mathbb{K}$ tal es que

$$b^{r+1}f(\vec{u}_{r+1}) + \cdots + b^n f(\vec{u}_n) = \vec{0}$$
$$\therefore f\left(b^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + b^n\vec{u}_n\right) = \vec{0}$$

Por tanto, $b^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + b^n\vec{u}_n \in \operatorname{Ker}(f)$ y lo podemos poner como combinación lineal de su base (existen $b^i \in \mathbb{K}$ tales que):

$$b^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + b^n\vec{u}_n = b^1\vec{u}_1 + \cdots + b^r\vec{u}_r.$$

$$\therefore -b^1\vec{u}_1 - \cdots - b^r\vec{u}_r + b^{r+1}\vec{u}_{r+1} + \cdots + b^n\vec{u}_n = \vec{0}.$$

Como se trata de una base de V, tenemos que son linealmente independientes y $b^1 = \cdots = b^{r+1} = \cdots = b^n = 0$. Por lo que todos los coeficientes son nulos, $\{f(\vec{u}_{r+1}), \ldots, f(\vec{u}_n)\}$ son linealmente independientes y forman una base de $\operatorname{Im}(f)$. □

Observación 2.2. Si $\dim V = \dim V'$ entonces, f es monomorfismo por lo que $\dim \operatorname{Ker}(f) = \vec{0}$. Entonces, $\dim V = \dim V' = \dim \operatorname{Im}(f) \iff \operatorname{Im}(f) = V'$. Es decir, monomorfismo si y solo si epimorfismo si y solo si isomorfismo, es decir, para demostrar que es un isomorfismo solo hay que demostrar que es un monomorfismo!

Definición 2.4 (Endomorfismo)**.** Un **endomorfismo** de V es una aplicación lineal $f : V \to V$.

Definición 2.5 (Automorfismo)**.** Un **automorfismo** de V es un endomorfismo biyectivo de V.

Teorema 2.6. Sea $f : V \to V'$ lineal, entonces $p : V \to V/\operatorname{Ker}(f)$ tal que $\vec{x} \to \vec{x} + \operatorname{Ker}(f)$ es un epimorfismo. Sea $i : \operatorname{Im}(f) \to V'$ tal que $\vec{x'} \to \vec{x'}$ es monomorfismo. Entonces, $\exists! b : V/\operatorname{Ker}(f) \to \operatorname{Im}(f)$ tal que

$$i \circ b \circ p = f : V \to V'.$$

Además, b es isomorfismo.

Demostración. Definimos $b(\vec{x} + \operatorname{Ker}(f)) = f(\vec{x})$.

Unicidad. Suponemos que existe b, $\forall \vec{x} \in V$ tal que $b(\vec{x} + \operatorname{Ker}(f)) = f(\vec{x})$.

Vemos que b está bien definida. Si $\vec{y} \in V$, con $\vec{x} + \operatorname{Ker}(f) = \vec{y} + \operatorname{Ker}(f)$, tenemos que

$$\vec{x} - \vec{y} \in \operatorname{Ker}(f) \Rightarrow f(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}.$$

Entonces,

$$f(\vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = \vec{0} \iff f(\vec{x}) = f(\vec{y}).$$

Entonces,

$$b(\vec{x} + \operatorname{Ker}(f)) = b(\vec{y} + \operatorname{Ker}(f)).$$

Comprobamos que b es lineal. Comenzamos con la suma. Si $\vec{x}, \vec{y} \in V$,

$$\begin{aligned} b((\vec{x} + \operatorname{Ker}(f)) + (\vec{y} + \operatorname{Ker}(f))) =& b((\vec{x} + \vec{y}) + \operatorname{Ker}(f)) \\ =& f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \\ =& b(\vec{x} + \operatorname{Ker}(f)) + b(\vec{y} + \operatorname{Ker}(f)). \end{aligned}$$

Ahora comprobamos el producto por escalares. Sea $a \in \mathbb{K}$ y $\vec{x} \in V$,

$$\begin{aligned} b(a(\vec{x} + \operatorname{Ker}(f))) =& b(a\vec{x} + \operatorname{Ker}(f)) \\ =& f(a\vec{x}) = af(\vec{x}) = a(b(\vec{x} + \operatorname{Ker}(f))). \end{aligned}$$

Comprobamos que b es un epimorfismo.

$$\forall \vec{x'} \in \operatorname{Im}(f) \Rightarrow \exists \vec{x} \in V,\ f(\vec{x}) = \vec{x'}.$$

Por tanto, $f(\vec{x}) = b(\vec{x} + \operatorname{Ker}(f)) = \vec{x'}$. Entonces, $\vec{x'} \in \operatorname{Im}(b)$.

Comprobamos que b es un monomorfismo. Sea $\vec{x} + \operatorname{Ker}(f) \in \operatorname{Ker}(b)$, entonces $f(\vec{x}) = \vec{0}$ por lo que $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(f)$. Concluimos que

$$\vec{x} + \operatorname{Ker}(f) = \vec{0} + \operatorname{Ker}(f).$$

$\square$

Observación 2.3. Lo que nos interesa concluir con este teorema es que si $f : V \to V'$ es lineal, entonces

$$\operatorname{Im}(f) \approx V/\operatorname{Ker}(f).$$

Proposición 2.6. Sea L el complementario vectorial de $\operatorname{Ker}(f)$ en V, es decir,

$$L \oplus \operatorname{Ker}(f) = V \Rightarrow \dim L + \dim \operatorname{Ker}(f) = \dim V.$$

La aplicación

$$\begin{aligned} f_L : L &\to \operatorname{Im}(f) \\ \vec{x} &\to f(\vec{x}), \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Demostración. Tenemos que f_L es lineal. Además,

$$\operatorname{Ker}(f_L) = \left\{\vec{x} \in L \ : \ f(\vec{x}) = \vec{0}\right\} = L \cap \operatorname{Ker}(f) = \left\{\vec{0}\right\}.$$

Entonces tenemos que es monomorfismo. Por otro lado queremos ver que,

$$\operatorname{Im}(f_L) = \operatorname{Im}(f).$$

Si $\vec{x'} \in \operatorname{Im}(f)$, existe $\vec{x} \in V$ tal que $\vec{x'} = f(\vec{x})$. Como $\vec{x} \in V$, $\exists \vec{y} \in \operatorname{Ker}(f)$ y $\vec{z} \in L$ tales que

$$\vec{x'} \in \operatorname{Im}(f_L).$$

Es decir,

$$\vec{x'} = f(\vec{x}) = f(\vec{y} + \vec{z}) = f(\vec{y}) + f(\vec{z}) = f(\vec{z}) = f_L(\vec{z}).$$

Es trivial ver que $\operatorname{Im}(f_L) \subset \operatorname{Im}(f)$. Por tanto es epimorfismo y, consecuentemente, isomorfismo. □

Corolario 2.4. Si $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$,

$$(L_1 + L_2)/L_1 \approx L_2/L_1 \cap L_2.$$

Demostración. Si $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$,

$$\dim(L_1 + L_2) - \dim L_1 = \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

Entonces tenemos que,

$$\dim(L_1 + L_2)/L_1 = \dim L_2/L_1 \cap L_2.$$

□

Corolario 2.5. Si $L_1 \subset L_2 \in \mathcal{L}(V)$, entonces

$$(V/L_1)/(L_2/L_1) \approx V/L_2.$$

Teorema 2.7. $\mathrm{Hom}\,(V, V')$ tiene una estructura de $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Demostración. Sea $\mathrm{Hom}\,(V, V') = \{f : V \to V' \ : \ f \text{ lineal}\}$. En $\mathrm{Hom}\,(V, V')$ definimos la suma de la siguiente manera. Si $f, g \in \mathrm{Hom}\,(V, V')$ definimos

$$\begin{aligned} &f + g : V \to V' \\ &(f + g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}). \end{aligned}$$

Vamos a ver que $f + g$ es aplicación lineal. Si $\vec{x}, \vec{y} \in V$,

$$(f + g)(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x} + \vec{y}) + g(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) + g(\vec{x}) + g(\vec{y}) = (f + g)(\vec{x}) + (f + g)(\vec{y}).$$

Si $a \in \mathbb{K}$ y $\vec{x} \in V$,

$$(f + g)(a\vec{x}) = f(a\vec{x}) + g(a\vec{x}) = af(\vec{x}) + ag(\vec{x}) = a(f + g)(\vec{x}).$$

Entonces, $f+g$ es aplicación lineal. Así, vamos a comprobar que $(\mathrm{Hom}\,(V, V'), +)$ es grupo abeliano. Comprobamos la conmutatividad. Si $\vec{x} \in V$,

$$(f + g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}) = g(\vec{x}) + f(\vec{x}) = (g + f)(\vec{x}).$$

Aplicamos la conmutatividad en V' como espacio vectorial. Comprobamos la asociatividad. Si $f, g, h \in \mathrm{Hom}\,(V, V')$,

$$((f + g)+h)(\vec{x}) = (f + g)(\vec{x})+h(\vec{x}) = f(\vec{x})+g(\vec{x})+h(\vec{x}) = f(\vec{x})+(g + h)(\vec{x}) = (f + (g + h))(\vec{x}).$$

Vamos a ver que $0 \in \mathrm{Hom}\,(V, V')$, definida por $0(\vec{x}) = \vec{0}, \forall \vec{x} \in V$. Tenemos que si $\vec{x}, \vec{y} \in V$,

$$0(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{0} = 0(\vec{x}) + 0(\vec{y}).$$

Si $a \in \mathbb{K}, \vec{x} \in V$,

$$0(a\vec{x}) = \vec{0} = a \cdot 0(\vec{x}) = a \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

Si $f \in \mathrm{Hom}\,(V, V')$, $\forall \vec{x} \in V$,

$$(f + 0)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + 0(\vec{x}) = f(\vec{x}).$$

Entonces, existe el elemento neutro. Vamos a ver la existencia del opuesto. Si $f \in \mathrm{Hom}\,(V, V')$, tomamos $-f$ tal que $-f(\vec{x}) = (-f)(\vec{x})$. Entonces tenemos que

$$(f + (-f))(\vec{x}) = f(\vec{x}) + (-f)(\vec{x}) = f(\vec{x}) - f(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Entonces,

$$(f + (-f))(\vec{x}) = 0(\vec{x}).$$

Producto por escalares. Si $a \in \mathbb{K}$ y $f \in \mathrm{Hom}\,(V, V')$, defino $(af)(\vec{x}) = af(\vec{x})$. Vamos a ver que $af \in \mathrm{Hom}\,(V, V')$.

$$(af)(\vec{x} + \vec{y}) = af(\vec{x} + \vec{y}) = af(\vec{x}) + af(\vec{y}) = (af)(\vec{x}) + (af)(\vec{y}).$$

Similarmente,

Si $b \in \mathbb{K}$ y $\vec{x} \in V$,

$$(af)(b\vec{x}) = af(b\vec{x}) = abf(\vec{x}) = b(af(\vec{x})) = b(f(a\vec{x})).$$

Si $a \in \mathbb{K}$ y $f, g \in \operatorname{Hom}(V, V')$, si $\vec{x} \in V$,

$$(a(f+g))(\vec{x}) = a(f+g)(\vec{x}) = af(\vec{x}) + ag(\vec{x}) = (af)(\vec{x}) + (ag)(\vec{x}) = (af+ag)(\vec{x}).$$

Además,

$$(1f)(\vec{x}) = 1f(\vec{x}) = f(\vec{x}).$$

□

2.1. Ejemplos de aplicaciones lineales

2.1.1. Formas Lineales

Definición 2.6 (Forma lineal)**.** Una **formal lineal** definida en V es una aplicación lineal $\lambda : V \to \mathbb{K}$ [a] .

[a] $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial sobre sí mismo de dimensión 1.

Teorema 2.8. Si λ es una forma lineal no nula, entonces λ es sobreyectiva (epimorfismo).

Demostración. Sea $a \in \mathbb{K}$. Sabemos que $\lambda \neq 0$, por lo que existe $\vec{x}_0 \in V$ tal que $\lambda(\vec{x}_0) = b \neq 0$. Consideramos $\vec{x} = \dfrac{a}{b}\vec{x}_0 \in V$, entonces

$$\lambda(\vec{x}) = \frac{a}{b}\lambda(\vec{x}_0) = a.$$

□

Definición 2.7. Una **recta vectorial** de V es un subespacio vectorial de dimensión 1. Análogamente, un **plano vectorial** de V es un subespacio vectorial de dimensión 2. Un **hiperplano vectorial** de V es un subespacio vectorial de dimensión $\dim V - 1$.

Observación 2.4. Los complementarios vectoriales de los hiperplanos son rectas y viceversa.

Si $\lambda : V \to \mathbb{K}$ lineal no nula,

$$\dim \operatorname{Im}(\lambda) = 1.$$

Por tanto, la imagen de λ es una recta en $\mathbb{K}$. Además,

$$\dim V = \dim \operatorname{Im}(\lambda) + \dim \operatorname{Ker}(\lambda).$$

Si $\lambda \neq 0$, tenemos que $\operatorname{Ker}(\lambda)$ es un hiperplano vectorial.

Proposición 2.7. Si $L \in \mathcal{L}(V)$ es un hiperplano vectorial, existe $\lambda : V \to \mathbb{K}$ lineal no nula, tal que $L = \operatorname{Ker}(\lambda)$ [a] .

[a]Esto nos sirve para definir los hiperplanos en dimensión infinita.

Demostración. Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n-1}\}$ base de L y sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V. Definimos $\lambda : V \to \mathbb{K}$ la única aplicación lineal tal que $\lambda(\vec{u}_i) = 0, \forall i = 1, \ldots n-1$, y cogemos $\lambda(\vec{u}_n) = 1$[1]. Entonces $\operatorname{Ker}(\lambda) = L$, pues su núcleo va a ser un hiperplano vectorial y este contiene a la base de L. Un hiperplano vectorial contenido en otro hiperplano vectorial es el mismo. $\square$

2.1.2. Homotecias vectoriales

Definición 2.8 (Homotecia vectorial)**.** Sea $\alpha \in \mathbb{K} - \left\{\vec{0}\right\}$. La **homotecia vectorial** de razón α es la aplicación $h_\alpha : V \to V$ tal que $\vec{x} \to \alpha\vec{x}$.

Teorema 2.9. **(i)** Todas las homotecias vectoriales son automorfismos. Es decir,

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} - \left\{\vec{0}\right\}, h_\alpha \in \operatorname{Aut}(V).$$

(ii) La aplicación $\mathbb{K} - \left\{\vec{0}\right\} \to H(V)$ donde $H(V) = \left\{h_\alpha : \alpha \in \mathbb{K} - \left\{\vec{0}\right\}\right\}$ con $\alpha \to h_\alpha$, es biyectiva.

(iii) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}^*$,

$$h_{\alpha\beta} = h_\alpha \circ h_\beta.$$

Demostración. **(i)** Tenemos que demostrar que es aplicación lineal, pues está claro que es biyectiva.

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, h_\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y} = h_\alpha(\vec{x}) + h_\alpha(\vec{y}).$$

Si $a \in \mathbb{K}$,

$$h_\alpha(a\vec{x}) = \alpha(a\vec{x}) = a h_\alpha(\vec{x}).$$

(ii) Está claro que la aplicación es sobreyectiva, tenemos que comprobar que es inyectiva: Si $h_\alpha = h_\beta$, tenemos que $\forall \vec{x} \in V$,

$$\alpha\vec{x} = \beta\vec{x}.$$

Si V no es nulo, podemos deducir que,

$$\exists \vec{x} \neq \vec{0},\ (\alpha - \beta)\vec{x} = \vec{0} \ \Rightarrow\ \alpha = \beta.$$

Por lo que esta aplicación es inyectiva.

(iii)

$$\forall \vec{x} \in V,\ h_\beta \circ h_\alpha(\vec{x}) = h_\beta(\alpha\vec{x}) = \beta\alpha\vec{x} = h_{\beta\alpha}(\vec{x}).$$

$\square$

[1]Vale cualquier escalar no nulo.

Teorema 2.10. Sea $f : V \to V$ lineal. Entonces f es una homotecia vectorial si y solo si $\forall L \in \mathcal{L}(V)$ recta vectorial $f(L) = L$.

Demostración. **(i)** Si $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tal que $f = h_\alpha$, sea $L \in \mathcal{L}(V)$ una recta vectorial. Entonces, existe $\vec{x}_0 \in L^*$ tal que $\{\vec{x}_0\}$ es base de L. Entonces, $L = \{a\vec{x}_0 \ : \ a \in \mathbb{K}\}$. Además, tenemos que

$$h_\alpha(L) = \{\alpha a \vec{x}_0 \ : \ a \in \mathbb{K}\} = L.$$

(ii) Si $\vec{x} \in V^*$, entonces $L(\{\vec{x}\})$ es una recta vectorial. Tenemos que

$$f(L(\{\vec{x}\})) = L(\{\vec{x}\}).$$

Si $\vec{x} \in L(\{\vec{x}\})$,

$$f(\vec{x}) \in L(\{\vec{x}\}) \Rightarrow \exists \alpha_{\vec{x}} \in \mathbb{K}, \ f(\vec{x}) = \alpha_{\vec{x}}\vec{x}.$$

Tenemos que ver que α es único. Si $\vec{x}, \vec{y} \in V^*$, tenemos que ver si son linealmente dependientes o linealmente independientes. Si son linealmente dependientes, $\exists a \in \mathbb{K}^*$ tal que

$$\vec{x} = a\vec{y}.$$

Entonces, $f(\vec{x}) = af(\vec{y}) = f(a\vec{y}) = \alpha_{\vec{y}} a\vec{y} = \alpha_{\vec{y}}\vec{x}$. Tenemos que

$$(\alpha_{\vec{x}} - \alpha_{\vec{y}})(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow \alpha_{\vec{x}} = \alpha_{\vec{y}}.$$

Si son linealmente independientes, $\vec{x} + \vec{y} \neq 0$,

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = \alpha_{\vec{x}+\vec{y}}(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha_{\vec{x}+\vec{y}}\vec{x} + \alpha_{\vec{x}+\vec{y}}\vec{y} = \alpha_{\vec{x}}\vec{x} + \alpha_{\vec{y}}\vec{y}.$$

Entonces tenemos que

$$(\alpha_{\vec{x}+\vec{y}} - \alpha_{\vec{x}})\vec{x} = (\alpha_y - \alpha_{\vec{x}+\vec{y}})\vec{y} \Rightarrow \alpha_{\vec{x}} = \alpha_{\vec{x}+\vec{y}} = \alpha_{\vec{y}}.$$

Sea $\alpha = \alpha_{\vec{x}}$, con $\vec{x} \in V^*$. Entonces si $\vec{y} \in V^*$ tenemos que $f(\vec{y}) = \alpha\vec{y}$ y $\vec{0} = \alpha\vec{0}$. Por tanto, se trata de una homotecia lineal.

□

2.1.3. Proyecciones

Supongamos que $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ y seam $L_1 \oplus L_2 = V$. $\forall \vec{x} \in V, \exists \vec{x}_1 \in L_1, \exists \vec{x}_2 \in L_2$, $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$.

Definición 2.9 (Proyección)**.** La **proyección** de base L_1 (respecto a la base L_2) y dirección L_2 (respecto a L_1) es la aplicación

$$\begin{aligned} p_1 &: V \to V \\ \vec{x} &= \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \to \vec{x}_1. \end{aligned}$$

Respecto a $p_2 : V \to V$ tal que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \to \vec{x}_2$.

Teorema 2.11. **(i)** $p_1 + p_2 = id_V$.

(ii) $p_1 \circ p_2 = 0$ y $p_2 \circ p_1 = 0$.

(iii) p_1 y p_2 son lineales.

(iv) $p_1 \circ p_1 = p_1$ y $p_2 \circ p_2 = p_2$.

Demostración. **(i)** $\forall \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2$,

$$(p_1 + p_2)(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = p_1(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + p_2(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \vec{x}_1 + \vec{x}_2.$$

(ii)

$$p_1 \circ p_2(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = p_1(\vec{x}_2) = p_1\left(\vec{0} + \vec{x}_2\right) = \vec{0}.$$

(iii)

$$p_1(\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{y}_1 + \vec{y}_2) = p_1((\vec{x}_1 + \vec{y}_1) + (\vec{x}_2 + \vec{y}_2)) = p_1(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + p_1(\vec{y}_1 + \vec{y}_2).$$

$$p_1(a\vec{x}) = p_1(a(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)) = p_1(a\vec{x}_1 + a\vec{x}_2) = a\vec{x}_1 = ap_1(\vec{x}_1 + \vec{x}_2).$$

(iv) Si $\vec{x} \in V$,

$$p_1 \circ p_1(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = p_1(\vec{x}_1) = \vec{x}_1.$$

□

Definición 2.10. Un endomorfismo $p : V \to V$ es un proyector si $p^2 = p$.

Teorema 2.12. Sea p un proyector definido en V, entonces $(id_V - p)$ es un proyector y $V = L_1 \oplus L_2$ donde $L_1 = \operatorname{Im}(p) = \operatorname{Ker}(p - id_V)$ y $L_2 = \operatorname{Ker}(p) = \operatorname{Im}(p - id_V)$.

Demostración. $\forall \vec{x} \in V$,

$$(id_V - p)^2(\vec{x}) = (id_V - p)(\vec{x} - p(\vec{x})) = \vec{x} - p(\vec{x}) - p(\vec{x}) + p^2(\vec{x}) = \vec{x} - p(\vec{x}) = (id_V - p)(\vec{x}).$$

Vamos a ver que $V = L_1 \oplus L_2$ donde $L_1 = \operatorname{Im}(p)$ y $L_2 = \operatorname{Ker}(p)$.

$$\forall \vec{x} \in V,\ \vec{x} = p(\vec{x}) + \vec{x} - p(\vec{x}),\ p(\vec{x} - p(\vec{x})) = p(\vec{x}) - p^2(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Tenemos que $p(\vec{x}) \in \operatorname{Im}(p)$ y $(id_V - p)(\vec{x}) \in \operatorname{Ker}(p)$. Entonces $V = L_1 \oplus L_2$.

Si $\vec{x} \in L_1 \cap L_2$, existe $\vec{y} \in V$ tal que $p(\vec{y}) = \vec{x}$ y $p(\vec{x}) = \vec{0}$. Entonces,

$$p(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow p^2(\vec{y}) = \vec{0}.$$

Por tanto, $\vec{x} = \vec{0}$ y $p(\vec{y}) = \vec{x}$.

Vamos a comprobar que

$$\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Ker}(p - id_V).$$

(i) $\vec{x} \in \operatorname{Im}(p)$, entonces $\exists \vec{y} \in V$ tal que $p(\vec{y}) = \vec{x}$.

$$(p - id_V)(\vec{x}) = (p - id_V)(p(\vec{y})) = \underbrace{p^2(\vec{y})}_{p} - p(\vec{y}) = \vec{0}.$$

Por tanto, $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(p - id_V)$.

(ii) Si $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(p - id_V)$, tenemos que

$$(p - id_V)(\vec{x}) = p(\vec{x}) - \vec{x} = \vec{0}.$$

Por tanto, $\vec{x} = p(\vec{x})$ y, consecuentemente, $\vec{x} \in \operatorname{Im}(p)$.

La proposición $\operatorname{Ker}(p) = \operatorname{Im}(p - id_V)$ se demuestra igual. □

2.1.4. Simetrías vectoriales

Asumimos que el cuerpo $\mathbb{K}$ es de característica distinta de 2.

Definición 2.11. Un endomorfimos s de V es involutivo si $s^2 = id_V$ ($\iff \exists s^{-1}$ y $s^{-1} = s$).

Definición 2.12. s es la simetría vectorial de base L_1 y dirección L_2.

Teorema 2.13. Sea $s : V \to V$ un endomorfismo involutivo. Sea $L_1 = \operatorname{Im}(s + id_V)$ y $L_2 = \operatorname{Im}(id_V - s)$. Entonces, $L_1 \oplus L_2 = V$ y $s = p_1 - p_2$ (p_1, p_2 son proyecciones). Diremos que s es la simetría de base L_1 y dirección L_2.

$$\operatorname{Im}(s - id_V) = \operatorname{Ker}(s + id_V) \quad \text{y} \quad \operatorname{Im}(s + id_V) = \operatorname{Ker}(s - id_V).$$

Demostración. Sea $L_1 = \operatorname{Im}(s + id_V)$ y $L_2 = \operatorname{Im}(id_V - s)$.

$$\forall \vec{x} \in V,\ \vec{x} = \frac{\vec{x} - s(\vec{x})}{2} + \frac{\vec{x} + s(\vec{x})}{2} = (id_V - s)\left(\frac{\vec{x}}{2}\right) + (id_V + s)\left(\frac{\vec{x}}{2}\right).$$

Sea $\vec{x} \in L_1 \cap L_2$,

$$\vec{x} \in L_1,\ \exists \vec{y} \in V,\ (s + id_V)(\vec{y}) = \vec{x} \Rightarrow s(\vec{x}) = s((s + id_V)(\vec{y})) = s(s(\vec{y}) + \vec{y}) = s^2(\vec{y}) + s(\vec{y}) = \vec{y} + s(\vec{y}) = \vec{x}.$$

$$\vec{x} \in L_2,\ \exists \vec{z} \in V,\ (id_V - s)(\vec{z}) = \vec{x} \Rightarrow s(\vec{x}) = s((id_V - s)(\vec{z})) = s(\vec{z}) - s^2(\vec{z}) = s(\vec{z}) - \vec{z} = -\vec{x}.$$

Entonces, si $\vec{x} \in L_1 \cap L_2$,

$$s(\vec{x}) = \vec{x} \quad \text{y} \quad s(\vec{x}) = -\vec{x} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}.$$

□

Observación 2.5. Tenemos que $p_1(\vec{x}) = (id_V + s)\left(\frac{\vec{x}}{2}\right)$, y $p_2(\vec{x}) = (id_V - s)\left(\frac{\vec{x}}{2}\right)$. Entonces, $s = p_1 - p_2$. Además, diremos que $L_1 = \operatorname{Ker}(s - id_V)$ y $L_2 = \operatorname{Ker}(s + id_V)$. Esto se puede demostrar con ambas implicaciones: $L_1 \subset \operatorname{Ker}(id_V - s)$ y viceversa.

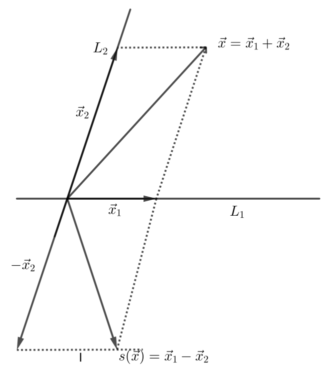

Figura 2.1: Ejemplo de simetrías vectoriales

2.2. Espacio vectorial dual

Definición 2.13 (Espacio dual)**.** Llamaremos **espacio dual** de V y lo representaremos por $V^* = \mathrm{Hom}\,(V, \mathbb{K})$.

Teorema 2.14. Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V, entonces las formas lineales $\left\{\omega^1, \ldots, \omega^n\right\}$ definidas por ser las únicas formas lineales tales que

$$\omega^i\left(\vec{u}_j\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

que llamaremos base dual de $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$.

Demostración. Tenemos que ver que $\left\{\omega^1, \ldots, \omega^n\right\}$ son linealmente independientes. Sean $a_i \in \mathbb{K}$ tales que

$$a_1\omega^1 + \cdots + a_n\omega^n = 0 \in V^*.$$

Tenemos que $\forall i = 1, \ldots, n$,

$$0\left(\vec{u}_i\right) = 0 = \left(a_1\omega^1 + \cdots + a_n\omega^n\right)\left(\vec{u}_i\right) = a_1\omega^1\left(\vec{u}_i\right) + \cdots + a_i\omega^i\left(\vec{u}_i\right) + \cdots + a_n\omega^n\left(\vec{u}_n\right) = a_i.$$

Por tanto, $a_i = 0,\ \forall i = 1, \ldots, n$.

Ahora vamos a ver que son sistema de generadores. Si $\lambda \in V^*$, $\forall i = 1, \ldots, n$,

$$\left(\lambda\left(\vec{u}_1\right)\omega^1 + \lambda\left(\vec{u}_2\right)\omega^2 + \cdots + \lambda\left(\vec{u}_n\right)\omega^n\right)\left(\vec{u}_i\right) = \lambda\left(\vec{u}_i\right).$$

Es decir, tenemos que
$$\lambda = \lambda\left(\vec{u}_1\right)\omega^1 + \cdots + \lambda\left(\vec{u}_n\right)\omega^n.$$
□

Observación 2.6.

$\vec{x} = a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^n\vec{u}_n$

$\forall i = 1, \ldots, n,\ w^i\left(\vec{x}\right) = w^i\left(a^1\vec{u}_1 + \cdots + a^n\vec{u}_n\right) = a^1 w^i\left(\vec{u}_1\right) + \cdots + a^n w^i\left(\vec{u}_n\right) = a^i.$

Corolario 2.6. $\dim V = \dim V^*$.

Observación 2.7. $\left(V^*\right)^* = V^{**}$ bidual. $\forall \vec{x} \in V$,
$$\begin{aligned}\theta_{\vec{x}} :& V^* \to \mathbb{K}\\ & \lambda \to \theta_{\vec{x}}\left(\lambda\right) = \lambda\left(\vec{x}\right), \forall \lambda \in V^*.\end{aligned}$$
Tenemos que, $\theta_{\vec{x}} \in V^{**}$, además, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in V^*$,
$$\theta_{\vec{x}}\left(\lambda_1 + \lambda_2\right) = \left(\lambda_1 + \lambda_2\right)\left(\vec{x}\right) = \left(\lambda_1 + \lambda_2\right)\left(\vec{x}\right) = \lambda_1\left(\vec{x}\right) + \lambda_2\left(\vec{x}\right) = \theta_{\vec{x}}\left(\lambda_1\right) + \theta_{\vec{x}}\left(\lambda_2\right).$$
Además, si $a \in \mathbb{K}$, $\forall \lambda \in V^*$,
$$\theta_{\vec{x}}\left(a\lambda\right) = \left(a\lambda\right)\left(\vec{x}\right) = a\lambda\left(\vec{x}\right) = a\theta_{\vec{x}}\left(\vec{\lambda}\right).$$
Entonces tenemos que $\theta_{\vec{x}}$ es una aplicación lineal y, por tanto, $\theta_{\vec{x}} \in V^{**}$.

Teorema 2.15. La aplicación
$$\begin{aligned}\theta :& V \to V^{**}\\ & \vec{x} \to \theta_{\vec{x}},\end{aligned}$$
es lineal.

Demostración. Tenemos que $\forall \lambda \in V^*$,
$$\theta_{\vec{x}+\vec{y}}\left(\lambda\right) = \lambda\left(\vec{x} + \vec{y}\right) = \lambda\left(\vec{x}\right) + \lambda\left(\vec{y}\right) = \theta_{\vec{x}}\left(\lambda\right) + \theta_{\vec{y}}\left(\lambda\right) = \left(\theta_{\vec{x}} + \theta_{\vec{y}}\right)\left(\lambda\right).$$
Entonces tenemos que
$$\theta_{\vec{x}+\vec{y}} = \theta_{\vec{x}} + \theta_{\vec{y}} \iff \theta\left(\vec{x} + \vec{y}\right) = \theta\left(\vec{x}\right) + \theta\left(\vec{y}\right).$$
Además, si $a \in \mathbb{K}$ y $\vec{x} \in V$:
$$\theta\left(a\vec{x}\right) = \theta_{a\vec{x}} = a\theta_{\vec{x}} = a\theta\left(\vec{x}\right).$$
Entonces, $\forall \lambda \in V^*$,
$$\theta_{a\vec{x}}\left(\lambda\right) = \lambda\left(a\vec{x}\right) = a\lambda\left(\vec{x}\right) = \left(a\theta_{\vec{x}}\right)\left(\lambda\right).$$
Por tanto,
$$\theta_{a\vec{x}} = a\theta_{\vec{x}} \iff \theta\left(a\vec{x}\right) = a\theta\left(\vec{x}\right).$$
□

Definición 2.14. Sea $V^{**} = \text{Hom}\left(V^*, \mathbb{K}\right)$ el espacio dual de V^*. Entonces es el espacio **bidual** de V. Además,

$$\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V.$$

Teorema 2.16. θ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración. Como tienen la misma dimensión, nos basta con demostrar que es inyectiva. Sea $\vec{x} \in \text{Ker}\left(\theta\right)$, queremos ver que $\vec{x} = \vec{0}$. Tenemos que $\forall \lambda \in V^*$,

$$\theta_{\vec{x}}\left(\lambda\right) = \lambda\left(\vec{x}\right) = \vec{0}.$$

Por tanto, tenemos que $\vec{x} = \vec{0}$ (porque todas las formas lineales devuelven 0 si insertas 0) y, consecuentemente, θ es isomorfismo. ☐

Teorema 2.17. Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V y sea $\left\{\omega^1, \ldots, \omega^n\right\}$ su dual. Tenemos que $\{\theta_{\vec{u}_1}, \ldots, \theta_{\vec{u}_n}\}$ es base de V^{**}. Además, $\forall i, j = 1, \ldots, n$,

$$\theta_{\vec{u}_i}\left(\omega^j\right) = \omega^j\left(\vec{u}_i\right) = \begin{cases} 1, \text{ si } i = j \\ 0, \text{ si } i \neq j \end{cases}.$$

Es decir, tenemos que $\{\theta_{\vec{u}_1}, \ldots, \theta_{\vec{u}_n}\}$ es la base dual de $\left\{\omega^1, \ldots, \omega^n\right\}$.

Observación 2.8. Si $f : V \to V'$ lineal y $\lambda' \in V^{'*}$, tenemos que

$$\lambda' \circ f : V \to \mathbb{K}, \ \lambda' \circ f \in V^*.$$

Se tiene definida una aplicación (la aplicación dual de f)

$$\begin{aligned} f^* :& V^{'*} \to V^* \\ & \lambda' \to f^*\left(\lambda'\right) = \lambda' \circ f \end{aligned}$$

Proposición 2.8. f^* es lineal.

Demostración. Tenemos que $\forall \lambda_1', \lambda_2' \in V'^*$,

$$f^*\left(\lambda_1' + \lambda_2'\right) = \left(\lambda_1' + \lambda_2'\right) \circ f.$$

Además, $\forall \vec{x} \in V$,

$$\begin{aligned} \left(\left(\lambda_1 + \lambda_2'\right) \circ f\right)\left(\vec{x}\right) =& \left(\lambda_1' + \lambda_2'\right)\left(f\left(\vec{x}\right)\right) = \lambda_1'\left(f\left(\vec{x}\right)\right) + \lambda_2'\left(f\left(\vec{x}\right)\right) = \left(\lambda_1' \circ f\right)\left(\vec{x}\right) + \left(\lambda_2' \circ f\right)\left(\vec{x}\right) \\ =& f^*\left(\lambda_1'\right)\left(\vec{x}\right) + f^*\left(\lambda_2'\right)\left(\vec{x}\right) = \left(f^*\left(\lambda_1'\right) + f^*\left(\lambda_2'\right)\right)\left(\vec{x}\right). \end{aligned}$$

Además, $\forall a \in \mathbb{K}, \forall \lambda' \in V'^*$, tenemos que

$$f^* (a\lambda') = (a\lambda') \circ f = af^* (\lambda') .$$

Tenemos que $\forall \vec{x} \in V$,

$$(a\lambda') \circ f (\vec{x}) = a (\lambda' \circ f) (\vec{x}) = af^* (\lambda') (\vec{x}) .$$

□

Teorema 2.18. Se tiene definida una aplicación

$$\begin{aligned} * : \operatorname{Hom}(V, V') &\to \operatorname{Hom}(V'^*, V^*) \\ f &\to f^*. \end{aligned}$$

Tenemos que $*$ es lineal.

Demostración. Si $f, g \in \operatorname{Hom}(V, V')$, tenemos que $\forall \lambda' \in V'^*$,

$$(f+g)^* (\lambda') = \lambda' \circ (f+g) = f^* (\lambda') + g^* (\lambda') = (f^* + g^*) (\lambda') .$$

Entonces tenemos que $\forall \vec{x} \in V$,

$$\lambda' \circ (f+g) (\vec{x}) = \lambda' (f (\vec{x}) + g (\vec{x})) = (f^* (\lambda') + g^* (\lambda')) (\vec{x}) .$$

Si $a \in \mathbb{K}$ y $f \in \operatorname{Hom}(V, V')$, queremos ver que

$$* (af) = (af)^* = af^*.$$

Tenemos que $\forall \lambda' \in V'^*$,

$$(af)^* (\lambda') = \lambda' \circ (af) = af^* (\lambda') .$$

Entonces, $\forall \vec{x} \in V$,

$$(\lambda' \circ (af)) (\vec{x}) = \lambda' (af (\vec{x})) = a\lambda' (f) (\vec{x}) = af^* (\lambda') (\vec{x}) .$$

□

Proposición 2.9. Sea $f \in \operatorname{Hom}(V, V')$ y $g \in \operatorname{Hom}(V', V'')$. Se cumple que

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

Demostración. Tenemos que $\forall \lambda'' \in V''^*$,

$$(g \circ f)^* (\lambda'') = \lambda'' \circ (g \circ f) = (\lambda'' \circ g) \circ f = (g^* (\lambda'')) \circ f = f^* (g^* (\lambda'')) = (f^* \circ g^*) (\lambda'') .$$

□

Proposición 2.10.
$$(id_V)^* = id_{V^*}.$$

Demostración. Tenemos que $\forall\lambda \in V^*$,
$$(id_V)^*(\lambda) = \lambda \circ id_V = id_{V^*}(\lambda).$$
□

Proposición 2.11. Si $f : V \to V'$ isomorfismo, f^* isomorfismo y $\left(f^{-1}\right)^* = (f^*)^{-1}$.

Demostración. Existe $f^{-1} : V' \to V$ tal que $f^{-1} \circ f = id_V$ y $f \circ f^{-1} = id_{V'}$. Entonces tenemos que
$$f^* \circ \left(f^{-1}\right)^* = \left(f^{-1} \circ f\right)^* = (id_V)^* = id_{V^*}.$$
Similarmente,
$$\left(f^{-1}\right)^* \circ f^* = \left(f \circ f^{-1}\right)^* = (id_{V'})^* = id_{V'^*}.$$
□

Si $f \in \operatorname{Hom}(V, V')$, tenemos que $(f^*)^* = f^{**} \in \operatorname{Hom}(V^{**}, V'^{**})$. Tenemos que $\forall\vec{x} \in V, \theta_{\vec{x}} \in V^{**}$, entonces
$$f^{**}(\theta_{\vec{x}}) = \theta_{\vec{x}} \circ f^* = \theta \circ f.$$
$$\forall\lambda' \in V'^*, \theta_{\vec{x}} \circ f^*(\lambda') = \theta_{\vec{x}}(\lambda' \circ f) = \lambda' \circ f(\vec{x}) = \lambda'(f(\vec{x})) = \theta_{f(\vec{x})}(\lambda').$$
Queremos ver que
$$\theta^{-1} f^{**} \theta_{\vec{x}} = f.$$

2.2.1. Anulador de un subespacio

Definición 2.15 (Ortogonal y anulador)**.** Si $\emptyset \neq A \subset V$. Llamaremos **ortogonal** a A y la expresaremos por:
$$A^\perp = \left\{\lambda \in V^* \ : \ \lambda(\vec{x}) = \vec{0}, \forall\vec{x} \in A\right\} = \{\lambda \in V^* \ : \ A \subset \operatorname{Ker}(\lambda)\}.$$

Proposición 2.12.
$$A^\perp \in \mathcal{L}(V^*).$$

Demostración. Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in A^\perp$, vamos a ver que $\lambda_1 + \lambda_2 \in A^\perp$:
$$\forall\vec{x} \in A,\ (\lambda_1 + \lambda_2)(\vec{x}) = \lambda_1(\vec{x}) + \lambda_2(\vec{x}) = 0.$$
Por lo que, $\lambda_1 + \lambda_2 \in A^\perp$. Similarmente, si $\lambda \in A^\perp$ y $a \in \mathbb{K}$, vamos a ver que $a\lambda \in A^\perp$:
$$\forall\vec{x} \in A, (a\lambda)(\vec{x}) = a\lambda(\vec{x}) = a \cdot 0 = 0.$$
Por lo que $a\lambda \in A^\perp$. □

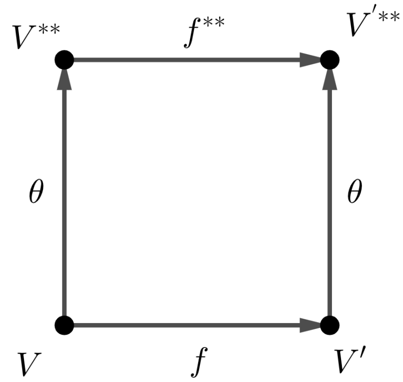

Figura 2.2: Resumen del espacio dual

Proposición 2.13. Si $\emptyset \neq A \subset B \subset V$, entonces $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.

Demostración. Si $\lambda \in B^{\perp}$, tenemos que $\forall \vec{x} \in B$, $\lambda(\vec{x}) = 0$. Como $A \subset B$, tenemos que $\forall \vec{x} \in A$, $\lambda(\vec{x}) = 0$, por lo que $\lambda \in A^{\perp}$. □

Proposición 2.14.

$$A^{\perp} = L(A)^{\perp}.$$

Demostración. Si $A \subset L(A)$ tenemos que $L(A)^{\perp} \subset A^{\perp}$. Sea $\lambda \in A^{\perp}$,

$$\forall \vec{x} \in L(A), \exists p \in \mathbb{N}, \exists a^1, \ldots, a^p \in \mathbb{K}, \exists \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p \in A.$$

$$\vec{x} = a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^p\vec{x}_p.$$

Entonces,

$$\lambda(\vec{x}) = \lambda\left(a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^p\vec{x}_p\right) = a^1\lambda(\vec{x}_1) + \cdots + a^p\lambda(\vec{x}_p) = 0.$$

□

Proposición 2.15. Sean $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$, entonces tenemos que $(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$ y $(L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$.

Demostración. **(1.1)** Tenemos que $L_1 \subset L_1 + L_2$ y $L_2 \subset L_1 + L_2$. Entonces sabemos que $(L_1 + L_2)^{\perp} \subset L_1^{\perp}$ y $(L_1 + L_2)^{\perp} \subset L_2^{\perp}$. Por tanto

$$(L_1 + L_2)^{\perp} \subset L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}.$$

(1.2) Si $\lambda \in L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$, tenemos que

$$\forall \vec{x} \in L_1^{\perp}, \lambda(\vec{x}) = \vec{0}$$
$$\forall \vec{y} \in L_2^{\perp}, \lambda(\vec{y}) = \vec{0}.$$

Tenemos que
$$\forall \vec{x} \in L_1 + L_2, \exists \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2, \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2.$$

Entonces tenemos que

$$\lambda(\vec{x}) = \lambda(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \lambda(\vec{x}_1) + \lambda(\vec{x}_2) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.$$

Por tanto, $\lambda \in (L_1 + L_2)^{\perp}$, por lo que

$$L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp} \subset (L_1 + L_2)^{\perp}.$$

(2.1) Tenemos que $L_1 \cap L_2 \subset L_1, L_2$, por lo que

$$L_1^{\perp} \subset (L_1 \cap L_2)^{\perp} \in \mathcal{L}(V^*)$$
$$L_2^{\perp} \subset (L_1 \cap L_2)^{\perp} \in \mathcal{L}(V^*).$$

Entonces,
$$L_1^{\perp} + L_2^{\perp} \subset (L_1 \cap L_2)^{\perp}.$$

(2.2) Vamos a ver que $(L_1 \cap L_2)^{\perp} \subset L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$. Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\}$ base de $L_1 \cap L_2$ y sean $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{r+p}\}$ y $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \vec{w}_{r+1}, \ldots, \vec{w}_{r+q}\}$ bases de L_1 y L_2, respectivamente. Sea

$$\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{r+p}, \vec{w}_{r+1}, \ldots, \vec{w}_{r+q}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\},$$

base de V. Si $\lambda \in (L_1 \cap L_2)^{\perp}$, tenemos que ver que existen $\lambda_1 \in L_1^{\perp}, \lambda_2 \in L_2^{\perp}$ tales que $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Para $\forall i = 1, \ldots, r$ defino

$$\lambda_1(\vec{u}_i) = 0 \quad \text{y} \quad \lambda_2(\vec{u}_i) = 0.$$

De esta manera, $(\lambda_1 + \lambda_2)(\vec{u}_i) = 0$. Para $i = r+1, \ldots, r+p$ y $\vec{u}_i \in L_1$ defino

$$\lambda(\vec{u}_i) \in \mathbb{K}, \ \lambda_1(\vec{u}_i) = 0, \ \lambda_2(\vec{u}_i) = \lambda(\vec{u}_i).$$

Similarmente, para $i = r+1, \ldots, r+q$,

$$\lambda(\vec{w}_i) \in \mathbb{K}, \ \lambda_1(\vec{w}_i) = \lambda(\vec{w}_i), \ \lambda_2(\vec{w}_i) = 0.$$

□

Teorema 2.19. Sea $L \in \mathcal{L}(V)$, entonces

$$\dim L^{\perp} = \dim V - \dim L.$$

Observación 2.9. Tenemos que
$$\left(L^{\perp}\right)^{\perp} = \theta\left(L\right).$$

Demostración. Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\}$ base de L, $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V y $\left\{\omega^1, \ldots, \omega^n\right\}$ su base dual. Entonces tenemos ya que $\left\{\omega^{r+1}, \ldots, \omega^n\right\}$ son linealmente independientes. Vamos a ver que son sistema de generadores,

$$\forall \lambda \in L^{\perp} \in \mathcal{L}\left(V\right), \exists a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}, .$$
$$\lambda = a_1\omega^1 + \cdots + a_n\omega^n.$$

Tenemos que $\forall i = 1, \ldots, r$,

$$0 = \lambda\left(\vec{u}_i\right) = a_1\omega^1\left(\vec{u}_i\right) + \cdots + a_i\omega^i\left(\vec{u}_i\right) + \cdots + a_r\omega^r\left(\vec{u}_i\right) + \cdots + a_n\omega^n\left(\vec{u}_i\right) = a_i.$$

Así,
$$\lambda = a_{r+1}\omega^{r+1} + \cdots + a_n\omega^n.$$

□

Observación 2.10. Tenemos que

$$\dim L = \dim \theta\left(L\right) = \dim\left(L^{\perp}\right)^{\perp}.$$

Lema 2.1. Sea $L_1, L_2 \in \mathcal{L}\left(V\right)$ tales que $V = L_1 \oplus L_2$ y sea $f_1 : L_1 \to V'$ y $f_2 : L_2 \to V'$ aplicaciones lineales. Entonces, existe una única $f : V \to V'$ tal que

$$f|_{L_1} = f_1 \quad \text{y} \quad f|_{L_2} = f_2.$$

[a]

[a] $f|_L$ es f restringida por L, es decir, solo está definida para los vectores de L.

Demostración. Tenemos que $\forall \vec{x} \in V$, $\exists! \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2$ tales que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$. Queremos que $f\left(\vec{x}\right) = f\left(\vec{x}_1\right) + f\left(\vec{x}_2\right)$:

$$f\left(\vec{x}\right) = f\left(\vec{x}_1\right) + f\left(\vec{x}_2\right) = f|_{L_1}\left(\vec{x}_1\right) + f|_{L_2}\left(\vec{x}_2\right) = f_1\left(\vec{x}_1\right) + f_2\left(\vec{x}_2\right).$$

Sea $f : V \to V'$ la aplicación definida de esta manera:

$$f\left(\vec{x}_1 + \vec{x}_2\right) = f_1\left(\vec{x}_1\right) + f_2\left(\vec{x}_2\right).$$

Queremos ver que f es lineal:

$$\begin{aligned}
\forall \vec{x}, \vec{y} \in V,\ f\left(\vec{x} + \vec{y}\right) &= f\left(\left(\vec{x}_1 + \vec{x}_2\right) + \left(\vec{y}_1 + \vec{y}_2\right)\right) \\
&= f\left(\left(\vec{x}_1 + \vec{y}_1\right) + \left(\vec{x}_2 + \vec{y}_2\right)\right) \\
&= f_1\left(\vec{x}_1 + \vec{y}_1\right) + f_2\left(\vec{x}_2 + \vec{y}_2\right) \\
&= f_1\left(\vec{x}_1\right) + f_2\left(\vec{x}_2\right) + f_1\left(\vec{y}_1\right) + f_2\left(\vec{y}_2\right) \\
&= f\left(\vec{x}_1 + \vec{x}_2\right) + f\left(\vec{y}_1 + \vec{y}_2\right) \\
&= f\left(\vec{x}\right) + f\left(\vec{y}\right).
\end{aligned}$$

Similarmente, sea $a \in \mathbb{K}$ y $\vec{x} \in V$,

$$\begin{aligned} f(a\vec{x}) =& f(a(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)) = f(a\vec{x}_1 + a\vec{x}_2) = f_1(a\vec{x}_1) + f_2(a\vec{x}_2) \\ =& a f_1(\vec{x}_1) + a f_2(\vec{x}_2) = a(f_1(\vec{x}_1) + f_2(\vec{x}_2)) \\ =& a f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = a f(\vec{x}). \end{aligned}$$

Si $\vec{x}_1 \in L_1$, tenemos que

$$f|_{L_1}(\vec{x}_1) = f\left(\vec{x}_1 + \vec{0}\right) = f_1(\vec{x}_1) + f_2\left(\vec{0}\right) = f_1(\vec{x}_1).$$

□

Teorema 2.20. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal. Entonces,

(a) $\operatorname{Ker}(f^*) = \operatorname{Im}(f)^{\perp}$.

(b) $\operatorname{Im}(f^*) = \operatorname{Ker}(f)^{\perp}$.

(c) f inyectiva $\iff$ f^* sobreyectiva.

(d) f sobreyectiva $\iff$ f^* inyectiva.

(e) $\dim \operatorname{Im}(f) = \dim \operatorname{Im}(f^*)$.

Demostración. **(a)** Tenemos que $\forall \lambda' \in \operatorname{Ker}(f^*)$, tenemos que

$$\forall \vec{x} \in V,\ \lambda' \circ f(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Similarmente,

$$f^*(\lambda') = \lambda' \circ f = 0.$$

En la otra dirección,

$$\lambda' \in \operatorname{Im}(f)^{\perp} \Rightarrow \forall \vec{x} \in V, \lambda'(f(\vec{x})) = f^*(\lambda')(\vec{x}) = 0.$$

Por tanto, $f^*(\lambda') = 0$ y $\lambda' \in \operatorname{Ker}(f^*)$.

(b) Si $\lambda \in \operatorname{Im}(f^*)$. Entonces, existe $\lambda' \in V'^*$ tal que $\lambda = f^*(\lambda') = \lambda' \circ f$. Así, $\forall \vec{x} \in \operatorname{Ker}(f)$, $\lambda(\vec{x}) = \lambda' \circ f(\vec{x}) = \lambda'\left(\vec{0}\right) = 0$.

En la otra dirección, si $\lambda \in \operatorname{Ker}(f)^{\perp}$, buscamos $\lambda' \in V'^*$ tal que $f^*(\lambda') = \lambda' \circ f = \lambda$. Sea $L' \in \mathcal{L}(V')$ tal que $\operatorname{Im}(f) \oplus L' = V'$ y buscamos $\lambda'|_{L'} = 0$. Si $\vec{x'} \in \operatorname{Im}(f)$, existe un $\vec{x} \in V$ tal que $f(\vec{x}) = \vec{x'}$. Defino $\lambda'\left(\vec{x'}\right) = f(\vec{x})$. Como $\lambda \in \operatorname{Ker}(f)^{\perp}$ [2], tenemos que si $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$,

$$f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = f(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} - \vec{y} \in \operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(\lambda).$$

Asi, definimos que $\lambda'\left(\vec{x'}\right) = \vec{x}$ con $\vec{x} \in V$ tal que $f(\vec{x}) = \vec{x'}$.

[2]Ortogonal del núcleo, que no el núcleo del ortogonal.

(c) Tenemos que f es inyectiva si y solo si $\mathrm{Ker}\,(f) = \left\{\vec{0}\right\}$. Esto es equivalente a que $\mathrm{Ker}\,(f)^{\perp} = \mathrm{Im}\,(f^{*}) = V^{*}$, que es equivalente a que f^{*} es sobreyectiva.

(d) Tenemos que f es sobreyectiva si y solo si $\mathrm{Im}\,(f) = V'$. Esto es equivalente a decir que $\mathrm{Im}\,(f)^{\perp} = \mathrm{Ker}\,(f^{*}) = \left\{\vec{0}\right\}$, que es equivalente a decir que f^{*} sea inyectiva.

(e)

$$\dim \mathrm{Im}\,(f) = \dim V' - \dim \mathrm{Im}\left(f^{\perp}\right) = \dim V' - \dim \mathrm{Ker}\,(f^{*}) = \dim V'^{*} - \dim \mathrm{Ker}\,(f^{*}) = \dim \mathrm{Im}\,(f^{*})\,.$$

□

Definición 2.16. Si $f : V \to V'$ es lineal llamaremos $\mathrm{ran}\,(f)$ a $\dim \mathrm{Im}\,(f)$.

2.2.2. Matriz de f^{*}

Teorema 2.21.
$$\mathcal{M}_{\{\sigma^{j}\}\{\omega^{i}\}}\,(f^{*}) = \left(\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}\,(f)\right)^{t}.$$

Demostración. Sea $f : V \to V'$ lineal y $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ una base de V y $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ una base de V'. Entonces, tenemos que $\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}\,(f) = A \in \mathcal{M}_{m\times n}\,(\mathbb{K})$ es la matriz asociada a f. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

Así, la dual de f está definida de la siguiente manera

$$\begin{aligned} f^{*} : V'^{*} &\to V^{*} \\ \lambda &\to \lambda \circ f. \end{aligned}$$

Así, si $\left\{\omega^1, \ldots, \omega^n\right\}$ es la base dual de $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ y $\left\{\sigma^1, \ldots, \sigma^m\right\}$ es la base dual de $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$, entonces $\mathcal{M}_{\{\vec{\sigma}^{i}\}\{\vec{\omega}^{j}\}}\,(f^{*}) = B \in \mathcal{M}_{n\times m}\,(\mathbb{K})$ es la matriz que corresponde a f^{*}. Las columnas de B son las coordenadas de $f^{*}\left(\sigma^{j}\right)$ en la base $\left\{\omega^1, \ldots, \omega^n\right\}$. Así,

$$f^{*}\left(\sigma^{j}\right)(\vec{u}_i) = \sigma^{j}\left(f\left(\vec{u}_i\right)\right) = \sigma^{j}\left(a_i^1 \vec{v}_i + \cdots + a_i^j \vec{v}_j + \cdots + a_i^m \vec{v}_m\right) = a_i^j.$$

Así, $B = A^{t}$. □

Capítulo 3

Matrices

3.1. Matriz asociada a una aplicación lineal

Definición 3.1 (Matriz)**.** Una matriz A con coeficientes $\mathbb{K}$ de $m \in \mathbb{N}$ filas y $n \in \mathbb{N}$ columnas es una tabla

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

con $a_i^j \in \mathbb{K}$, $\forall i = 1, \ldots, n$, $\forall j = 1, \ldots, m$.

Sean V, V' espacios vectoriales con $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ y $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ bases de V y V', respectivamente. Si $f \in \mathrm{Hom}\,(V, V')$, entonces $f\,(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) \in V'$ y existen $a_i^j \in \mathbb{K}$ tales que

$$\begin{aligned} &f\,(\vec{u}_1) = a_1^1\vec{v}_1 + \cdots + a_1^m\vec{v}_m \\ &f\,(\vec{u}_2) = a_2^1\vec{v}_1 + \cdots + a_2^m\vec{v}_m \\ &\vdots \\ &f\,(\vec{u}_n) = a_n^1\vec{v}_1 + \cdots + a_n^m\vec{v}_m. \end{aligned}$$

Entonces, a f le podemos asignar la matriz A tal que

$$f \to A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

Teorema 3.1. Sea $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) = \{A \ : \ A \text{ matriz } m\times n\}$. Definimos

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}} : \operatorname{Hom}(V, V') &\to \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})\\ f &\to A.\end{aligned}$$

Tenemos que $\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}$ es biyectiva.

Demostración. Tenemos que si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, entonces existen unos únicos $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n \in V'$ tales que

$$\begin{aligned}\vec{w}_1 =& a_1^1\vec{v}_1 + \cdots + a_1^n\vec{v}_m\\ &\vdots\\ \vec{w}_n =& a_m^1\vec{v}_1 + \cdots + a_m^n\vec{v}_m.\end{aligned}$$

Para estos existe una única $f \in \operatorname{Hom}(V, V')$ tal que $f(\vec{u}_1) = \vec{w}_1, \ldots, f(\vec{u}_n) = \vec{w}_n$. □

Teorema 3.2. $\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}$ es isomorfismo.

Demostración. Sabemos que es biyectiva, ahora tenemos que ver que es una aplicación lineal. Para ello, definimos la suma de matrices de la siguiente forma: si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$,

$$A + B = \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}\left(\mathcal{M}^{-1}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}(A) + \mathcal{M}^{-1}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}(B)\right).$$

Definimos el producto por escalares. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $a \in \mathbb{K}$,

$$a \cdot A = \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}\left(a \cdot \mathcal{M}^{-1}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}(A)\right).$$

La demostración se puede completar con la demostración del siguiente teorema. □

Teorema 3.3. $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Demostración. Tenemos las siguientes equivalencias

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1\\ \vdots & & \vdots\\ a_1^m & \cdots & a_n^m\end{pmatrix} \iff f \in \operatorname{Hom}(V, V') \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & b_n^1\\ \vdots & & \vdots\\ b_1^m & \cdots & b_n^m\end{pmatrix} \iff g \in \operatorname{Hom}(V, V').$$

Así, $A + B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \iff f + g \in \operatorname{Hom}(V, V')$. Tenemos que

$$\begin{aligned}f(\vec{u}_i) =& a_i^1\vec{v}_i + \cdots + a_i^m\vec{v}_m, \ \forall i = 1, \ldots, n\\ g(\vec{u}_i) =& b_i^1\vec{v}_i + \cdots + b_i^m\vec{v}_m, \ \forall i = 1, \ldots, n.\end{aligned}$$

Entonces, tenemos que

$$(f+g)(\vec{u}_i) = f(\vec{u}_i) + g(\vec{u}_i) = \left(a_i^1 + b_i^1\right)\vec{v}_1 + \cdots + \left(a_i^m + b_i^m\right)\vec{v}_m.$$

Es decir,

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1^1 + b_1^1 & \cdots & a_n^1 + b_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m + b_1^m & \cdots & a_n^m + b_n^m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}).$$

Hacemos lo mismo con el producto por escalares. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $a \in \mathbb{K}$, tenemos que $af \in \mathrm{Hom}(V, V') \iff a \cdot A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Tenemos que

$$af(\vec{u}_i) = aa_i^1\vec{v}_1 + \cdots + aa_i^m\vec{v}_m.$$

Es decir,

$$a \cdot A = \begin{pmatrix} aa_1^1 & \cdots & aa_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ aa_1^m & \cdots & aa_n^m \end{pmatrix}.$$

Tenemos que existe la matriz 0, pues $0 \in \mathrm{Hom}(V, V')$, por lo que

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Similarmente, la matriz opuesta se puede definir así:

$$-A = (-1) \cdot A = \begin{pmatrix} -a_1^1 & \cdots & -a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ -a_1^m & \cdots & -a_n^m \end{pmatrix}.$$

□

3.2. Producto de matrices

Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V, $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ base de V' y $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_p\}$ base de V''. Entonces, podemos encontrar aplicaciones lineales tales que

$$f \in \mathrm{Hom}(V, V') \to A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \quad \text{y} \quad g \in \mathrm{Hom}(V', V'') \to B \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{K}).$$

Tenemos que $g \circ f \in \mathrm{Hom}(V, V'')$. Definimos el producto de matrices tal que

$$g \circ f \to B \cdot A \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K}).$$

Es decir,

$$B \cdot A = \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{w}_k\}}(g \circ f).$$

Tenemos que la expresión de A y B será:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & b_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_1^m & \cdots & b_n^m \end{pmatrix}.$$

Entonces, $\forall i = 1, \ldots, m$ y $\forall j = 1, \ldots, p$,

$$\begin{aligned} f(\vec{u}_i) =& a_i^1 \vec{v}_1 + \cdots + a_i^m \vec{v}_m \\ g(\vec{v}_j) =& b_j^1 \vec{w}_1 + \cdots + b_j^p \vec{w}_p. \end{aligned}$$

Tenemos que $g \circ f$ será:

$$\begin{aligned} g(f(\vec{u}_i)) =& g\left(a_i^1 \vec{v}_1 + \cdots + a_i^m \vec{v}_m\right) \\ =& a_i^1 \left(b_1^1 \vec{w}_1 + \cdots + b_1^p \vec{w}_p\right) + \cdots + a_i^m \left(b_p^1 \vec{w}_1 + \cdots + b_m^p \vec{w}_p\right) \\ =& \left(a_i^1 b_1^1 + \cdots + a_i^m b_m^i\right) \vec{w}_1 + \cdots + \left(a_i^1 b_1^p + \cdots + a_i^m b_m^p\right) \vec{w}_p. \end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_1^j b_j^1 & \cdots & \sum_{j=1}^m a_n^j b_j^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_1^j b_j^p & \cdots & \sum_{j=1}^m a_n^j b_j^p \end{pmatrix}.$$

Ahora vamos a ver como utilizamos la matriz de una transformación lineal para calcular $f(\vec{x})$.

Sea $f : V \to V'$ lineal. Si $\vec{x} \in V$, entonces existen únicos $x^1, \ldots, x^n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{x} = x^1 \vec{u}_1 + \cdots + x^n \vec{u}_n.$$

Entonces tenemos que $f(\vec{x}) \in V'$, por lo que $\exists! x'^1, \ldots, x'^m \in \mathbb{K}$ tales que

$$f(\vec{x}) = x'^1 \vec{v}_1 + \cdots + x'^m \vec{v}_m.$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) =& f\left(x^1 \vec{u}_1 + \cdots + x^n \vec{u}_n\right) = x^1 f(\vec{u}_1) + \cdots + x^n f(\vec{u}_n) \\ =& x^1 \left(a_1^1 \vec{v}_1 + \cdots + a_1^m \vec{v}_m\right) + \cdots + x^n \left(a_n^1 \vec{v}_1 + \cdots + a_n^m \vec{v}_m\right) \\ =& \left(x^1 a_1^1 + \cdots + x^1 a_n^1\right) \vec{v}_1 + \cdots + \left(x^1 a_1^m + \cdots + x^n a_n^m\right) \vec{v}_m. \end{aligned}$$

Así, tenemos que las coordenadas de $f(\vec{x})$ serán:

$$\begin{cases} x'^1 = x^1 a_1^1 + \cdots + x^1 a_n^1 \\ \vdots \\ x'^m = x^1 a_1^m + \cdots + x^n a_n^m \end{cases}.$$

En forma matricial tenemos que

$$A \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ \vdots \\ x'^m \end{pmatrix}.$$

A continuación, vamos a estudiar la matriz de cambio de base. Sea $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ y $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ bases de V. Tenemos que

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 =& a_1^1\vec{u}_1 + \cdots + a_1^n\vec{u}_n \\ &\vdots \\ \vec{v}_n =& a_n^1\vec{u}_1 + \cdots + a_n^n\vec{u}_n.\end{aligned}$$

Así, si $\vec{x} \in V$ existen unos únicos $x^1, \dots, x^n \in \mathbb{K}$ tales que $\vec{x} = x^1\vec{u}_1 + \cdots + x^n\vec{u}_n$ y existen unos únicos $x'^1, \dots, x'^n \in \mathbb{K}$ tales que $\vec{x} = x'^1\vec{v}_1 + \cdots + x'^n\vec{v}_n$. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}\vec{x} =& x'^1\vec{v}_1 + \cdots + x'^n\vec{v}_n \\ =& x'^1\left(a_1^1\vec{u}_1 + \cdots + a_1^n\vec{u}_n\right) + \cdots + x'^n\left(a_n^1\vec{u}_1 + \cdots + a_n^n\vec{u}_n\right) \\ =& \left(x'^1a_1^1 + \cdots + x'^na_n^1\right)\vec{u}_1 + \cdots + \left(x'^1a_1^n + \cdots + x'^na_n^n\right)\vec{u}_n.\end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$\begin{cases} x^1 = x'^1a_1^1 + \cdots + x'^na_n^1 \\ \vdots \\ x^n = x'^1a_1^n + \cdots + x'^na_n^n \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}}_{\text{Matriz cambio de base}} \begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 3.1. $id_V : V_{\{\vec{v}_i\}} \to V_{\{\vec{u}_i\}}$. Queremos calcular la matriz $\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_i\}}(id_V)$. Tenemos que

$$id_V(\vec{v}_i) = \vec{v}_i = a_i^1\vec{u}_1 + \cdots + a_i^n\vec{u}_n.$$

Por tanto,

$$\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_i\}}(id_V) = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

3.3. Permutaciones

Definición 3.2 (Permutación)**.** Sea $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Una **permutación** de X es una aplicación biyectiva $\sigma : X \to X$.

Normalmente se escriben de la siguiente forma:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{bmatrix}.$$

Teorema 3.4. Sea $\mathcal{S}_n = \{\sigma \ : \ \sigma \text{ permutación de } \ X\}$ y $\circ : \mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n$ sea la operación de composición entre permutaciones. Entonces, $(\mathcal{S}_n, \circ)$ es un grupo.

Demostración. Tenemos que la composición de funciones biyectivas es una operación cerrada. Además, tenemos que es asociativa, existe el elemento neutro (i.e. id_X) y el opuesto (i.e. σ^{-1}, el inverso, que también es biyección). $\square$

Definición 3.3. Sean $\{a_1, \ldots, a_r\} \subset X$ distintos 2 a 2. El **r-ciclo** $(a_1, \ldots, a_r)$ es la permutación $(a_1, \ldots, a_r)$ tal que

$$\begin{aligned} a_1 &\to a_2 \\ a_2 &\to a_3 \\ &\vdots \\ a_r &\to a_1. \end{aligned}$$

Proposición 3.1. Toda permutación es composición de r-ciclos.

Demostración. Sea $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Si $\forall a \in X$, $\sigma(a) = a$, entonces $\sigma = id_X$, que es un 1-ciclo. Si $\exists a_1 \in X$ tal que $\sigma(a_1) = a_2 \neq a_1$, defino

$$\begin{aligned} a_3 &= \sigma^2(a_1) = \sigma(a_2) \in X \\ &\vdots \\ a_k &= \sigma^{k-1}(a_1) = \sigma(a_{k-1}) \in X. \end{aligned}$$

Sea $r \in \mathbb{N}$ el primer natural tal que $a_r \in \{a_1, \ldots, a_{r-1}\}$. Entonces, $\sigma(a_r) = a_1$. Así, tenemos que $a_r = \sigma^{r-1}(a_1)$ y $\sigma(a_r) = \sigma^h(a_1)$, con $h < r$. De esta manera, $a^{r-h} = \sigma^{r-1-h}(a_1) = a_1$. Si $\forall b \in X - \{a_1, \ldots, a_r\}$ tenemos que $\sigma(b) = b$ ya hemos terminado. En cambio, si existe $b_1 \in X - \{a_1, \ldots, a_r\}$ tal que $\sigma(b_1) = b_2 \neq b_1$, hacemos el mismo procedimiento de antes:

$$\begin{aligned} b_3 &= \sigma(b_2) = \sigma^2(b_1) \\ &\vdots \\ b_k &= \sigma(b_{k-1}) = \sigma^{k-1}(b_1). \end{aligned}$$

Sea s el primer natural tal que $\sigma(b_s) \in \{b_1, \ldots, b_{s-1}\}$. Entonces, $\sigma(b_s) = b_1$. Así, tenemos que $\sigma = (b_1, \ldots, b_s) \circ (a_1, \ldots, a_r)$. Repetimos este proceso hasta que se agoten los elementos de X. $\square$

Ejemplo 3.2. Consideremos

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 8 & 10 & 2 & 1 & 3 & 4 & 6 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 5 & 2 & 8 & 6 & 3 & 10 & 7 & 4 \\ 9 & 5 & 1 & 8 & 6 & 3 & 10 & 7 & 4 & 2 \end{bmatrix} \\ &= (1, 9, 5) \circ (2, 8, 6, 3, 10, 7, 4) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.3.

$$\begin{aligned}\sigma &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 5 & 6 & 1 & 2 & 7 & 3 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 & 2 & 5 & 3 & 6 & 7 & 9 & 10 \\ 8 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6 & 7 & 3 & 10 & 9 \end{bmatrix} \\ &= (1,8,4) \circ (2,5) \circ (3,6,7) \circ (9,10)\,. \end{aligned}$$

Definición 3.4. Los 2-ciclos los llamaremos **trasposiciones**.

Proposición 3.2. Todo ciclo es producto de trasposiciones.

Demostración. Tenemos que

$$(a_1, \ldots, a_m) = (a_1, a_2)\,(a_2, a_3) \cdots (a_{m-1}, a_m)\,.$$

□

Definimos

$$\nabla = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\vec{x}_i - \vec{x}_j) = (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)\,(\vec{x}_1 - \vec{x}_3) \cdots (\vec{x}_1 - \vec{x}_n)\,(\vec{x}_2 - \vec{x}_3) \cdots (\vec{x}_2 - \vec{x}_n) \cdots (\vec{x}_{n-1} - \vec{x}_n)\,.$$

De esta manera, si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, definimos

$$\nabla\sigma = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \vec{x}_{\sigma(i)} - \vec{x}_{\sigma(j)}.$$

Una permutación de σ es un par $i < j$ tal que $\sigma(i) < \sigma(j)$. Una inversión de σ es un par $i < j$ tal que $\sigma(j) < \sigma(i)$. Entonces, el número de factores de ∇ y $\nabla\sigma$ es el mismo. Así, tenemos que

$$\nabla\sigma = (-1)^{\text{número de inversiones}}\,\nabla.$$

El valor de -1 elevado al número de inversiones de σ lo llamaremos índice o signo de σ y se escribirá $\operatorname{ind}(\sigma)$ o $\operatorname{sig}(\sigma)$ [1] . Entonces,

$$\nabla\sigma = \operatorname{sig}(\sigma)\,\nabla.$$

Sea $\tau \in \mathcal{S}_n$, entonces

$$\underbrace{\nabla\sigma \circ \tau}_{\operatorname{sig}(\sigma\circ\tau)\nabla} = \operatorname{sig}(\sigma)\,\nabla\tau = \operatorname{sig}(\sigma)\operatorname{sig}(\tau)\,\nabla.$$

Definimos,

$$\begin{aligned} \operatorname{sig} : \mathcal{S}_n &\to \{-1, 1\} \\ \sigma &\to \operatorname{sig}(\sigma)\,. \end{aligned}$$

[1] También se corresponde con el número de trasposiciones en las que se puede componer σ.

Proposición 3.3. La trasposición $(1,2)$ tiene signo negativo.

Demostración. Tenemos que

$$\nabla(1,2) = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \cdots (x_2 - x_n)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n) \cdots (x_{n-1} - x_n).$$

Como podemos ver respecto a la primera definición de ∇, tenemos que todo es igual menos el primer factor, que es de signo opuesto. Así, $\operatorname{sig}(1,2) = -1$. □

Proposición 3.4. La trasposición $(1,a)$ es negativa para $a \geq 2$.

Demostración. Tenemos que $(1,a) = (2,a) \circ (1,2) \circ (2,a)$.

$$\begin{aligned} &1 \to 1 \to 2 \to a \\ &2 \to a \to a \to 2 \\ &a \to 2 \to 1 \to 1. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\operatorname{sig}(1,a) = \operatorname{sig}(2,a)(-1)(\operatorname{sig}(2,a)) = (\operatorname{sig}(2,a))^2(-1) = -1.$$

□

Proposición 3.5. $\operatorname{sig}(a,b) = -1$.

Demostración. Tenemos que $(a,b) = (1,b) \circ (1,a) \circ (1,b)$. Así, $a \to b$ y $b \to a$, por lo que

$$\begin{aligned} &1 \to b \to b \to b \\ &a \to a \to 1 \to b \\ &b \to 1 \to a \to a. \end{aligned}$$

Entonces, $\operatorname{sig}((a,b)) = \operatorname{sig}(1,b)^2 \cdot \operatorname{sig}(1,a) = -1$. □

Proposición 3.6. $\operatorname{sig}((a_1, \ldots, a_r)) = (-1)^{r-1}$.

Demostración. Tenemos que

$$(a_1, a_r) \circ (a_1 a_{r-1}) \cdots (a_1 a_3)(a_1 a_2).$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} &a_1 \to a_2 \to a_2 \to \cdots \to a_2 \to a_2 \\ &a_2 \to a_1 \to a_3 \to \cdots \to a_3 \to a_3 \\ &\vdots \\ &a_{r-1} \to a_{r-1} \to a_{r-1} \to \cdots \to a_1 \to a_r \\ &a_r \to a_{r-1} \to a_r \to \cdots \to a_r \to a_r. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.4. Sea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 7 & 2 & 1 & 3 & 8 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (1, 10, 5) \circ (2, 9, 6, 3, 7, 8, 4) .$$

Por tanto,

$$\operatorname{sig}(\sigma) = \operatorname{sig}(1, 10, 5) \cdot \operatorname{sig}(2, 9, 6, 3, 7, 8, 4) = (-1)^2 \cdot (-1)^6 = 1.$$

3.4. Estructura de álgebra

Sean $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$, $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ y $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_p\}$ bases de V, V' y V'' respectivamente. Si $f \in \operatorname{Hom}(V, V')$, tenemos que

$$\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{v_j\}}(f) = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} = A,$$

donde $f(\vec{u}_i) = a_i^1 \vec{v}_1 + \cdots + a_i^m \vec{v}_m$. Similarmente, si $g \in \operatorname{Hom}(V, V')$,

$$\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}(g) = \begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & b_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_1^m & \cdots & b_n^m \end{pmatrix} = B.$$

Recordamos que

$$A + B = \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}(f + g) = \begin{pmatrix} a^1 + b^1 & \cdots & a_n^1 + b_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m + b_1^m & \cdots & a_n^m + b_n^m \end{pmatrix}.$$

Similarmente, si $a \in \mathbb{K}$,

$$a \cdot A = \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}(a \cdot f) = \begin{pmatrix} aa_1^1 & \cdots & aa_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ aa_1^m & \cdots & aa_n^m \end{pmatrix}.$$

Proposición 3.7. El producto de matrices es distributivo por la izquierda y por la derecha.

Si $f \in \operatorname{Hom}(V, V')$ y $g \in \operatorname{Hom}(V', V'')$, tenemos que $\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}(f) = A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, $\mathcal{M}_{\{\vec{v}_j\}\{\vec{w}_k\}}(g) = B \in \mathcal{M}_{p \times m}(\mathbb{K})$. Definíamos el producto de matrices de la siguiente forma,

$$B \cdot A = \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{w}_k\}}(g \circ f) .$$

Si $f \in \operatorname{Hom}(V, V')$, $g \in \operatorname{Hom}(V', V'')$ y $h \in \operatorname{Hom}(V'', V''')$, tenemos que

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Así, como $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{K})$ y $C \in \mathcal{M}_{q\times p}$, tenemos que el producto de matrices es asociativo:

$$C \cdot (B \cdot A) = (C \cdot B) \cdot A \in \mathcal{M}_{q\times n}(\mathbb{K}).$$

Si $f, g \in \operatorname{Hom}(V, V')$, $h \in \operatorname{Hom}(V', V'')$, tenemos que $\forall \vec{x} \in V$,

$$h \circ (f+g)(\vec{x}) = h \circ (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = h(f(x)) + h(g(x)) = (h \circ f + h \circ g)(\vec{x}).$$

Así, $h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g$. Entonces, hemos demostrado que el producto de matrices es distributivo por la izquierda. Entonces, $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{K})$,

$$C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B.$$

Sea $f \in \operatorname{Hom}(V, V')$ y $g, h \in \operatorname{Hom}(V', V'')$. Tenemos que $\forall \vec{x} \in V$,

$$((g+h) \circ f)(\vec{x}) = (g+h)(f(\vec{x})) = g(f(\vec{x})) + h(f(\vec{x})) = g \circ f(\vec{x}) + h \circ f(\vec{x}) = (g \circ f + h \circ f)(\vec{x}).$$

Así, concluimos que $(g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f$. Por lo que el producto de matrices es distributivo por la derecha. Es decir, sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B, C \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{K})$,

$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A.$$

Proposición 3.8. El producto de matrices no es conmutativo.

Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{K})$. Entonces $B \cdot A \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$, pero $A \cdot B$ no está definido. Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, tenemos que $A \cdot B, B \cdot A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, pero no tienen por qué ser iguales. En efecto, sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .Entonces

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposición 3.9. Existe un elemento identidad en el producto de matrices

Tenemos que Observando las imágenes, tenemos que

$$A \cdot I_{n\times n} = A \quad \text{y} \quad I_{m\times m} A = A.$$

Entonces, si consideramos la aplicación

$$id_V : V_{\{\vec{u}_i\}} \to V_{\{\vec{u}_i\}},$$

tal que $\forall i = 1, \ldots, n$, $id_V(\vec{u}_i) = \vec{u}_i$, tenemos que su matriz será

$$\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{u}_i\}}(id_V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_{n\times n}.$$

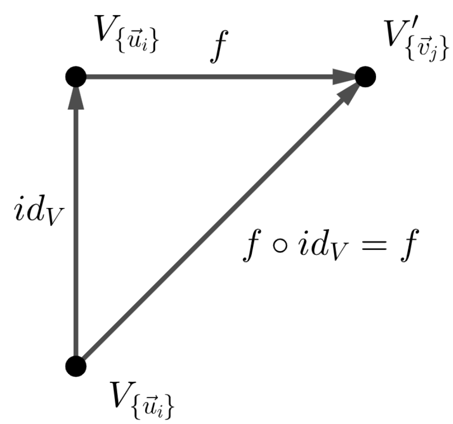

Figura 3.1: Matriz inversa respecto a V

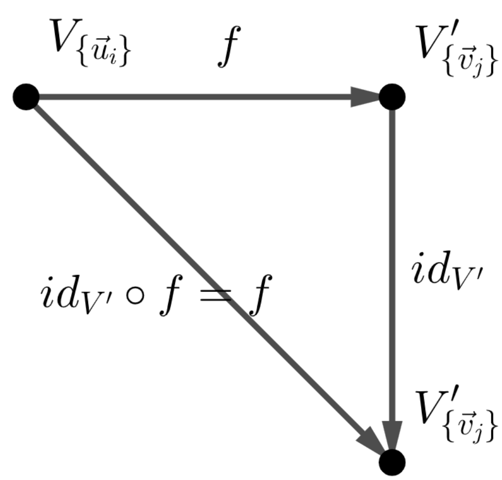

Figura 3.2: Matriz inversa respecto a V'

Consideremos la función,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{u}_i\}} : \operatorname{End}(V) &\to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \\ f &\to \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{u}_i\}}(f). \end{aligned}$$

Proposición 3.10. Por lo demostrado anteriormente, tenemos que $(\operatorname{End}(V), +, \cdot_{\mathbb{K}})$ y $(\mathcal{M}_{n\times n}, +, \cdot_{\mathbb{K}})$ son $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Similarmente, $(\operatorname{End}(V), +, \circ)$ y $(\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ son anillos con unidad.

Definición 3.5. Diremos que $\operatorname{End}(V)$ y $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ son **álgebras** con unidad.

Tenemos que

$$\operatorname{Aut}(V) = \{f \in \operatorname{End}(V) \ : \ f \text{ invertible}\} = \left\{f \in \operatorname{End}(V) \ : \ \exists f^{-1}\right\}.$$

Así, $(\operatorname{Aut}(V), \cdot)$ es un grupo. En general, la suma de automorfismos no es autormorfismo. Por ejemplo, $id_V - id_V = 0 \notin \operatorname{Aut}(V)$. Definimos

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \left\{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \ : \ \exists A^{-1}\right\}.$$

Para estudiar este conjunto, introduciremos la noción de determinante.

3.5. Determinantes

Definición 3.6. Una r-**forma multilineal** definida en V es una aplicación $t : \underbrace{V \times V \cdots \times V}_{r \text{ veces}} \to \mathbb{K}$ tal que

(a) $\forall i = 1, \ldots, r,\ \forall \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r, \vec{x'}_i \in V$,

$$t\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i + \vec{x'}_i, \ldots, \vec{x}_r\right) = t(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_r) + t\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x'}_i, \ldots, \vec{x}_r\right).$$

(b) $\forall i = 1, \ldots, r,\ \forall \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r \in V,\ \forall a \in \mathbb{K}$,

$$t(x_1, \ldots, a\vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_r) = at(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_r).$$

Definición 3.7. Una r-forma multilineal es **alternada** si $\forall \sigma \in \mathcal{S}_r$,

$$t\left(\vec{x}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{x}_{\sigma(r)}\right) = \operatorname{sig}(\sigma)\, t(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r),\ \forall \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r \in V.$$

Proposición 3.11. Si t es una r-forma multilineal, $\forall \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r \in V$,

$$t\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{0}, \ldots, \vec{x}_r\right) = 0.$$

Demostración. Tenemos que $\vec{0} = 0 \cdot \vec{x}_i$, así,

$$t\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{0}, \ldots, \vec{x}_r\right) = 0 \cdot t\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_r\right) = 0.$$

□

Proposición 3.12. Sea t una r-forma multilineal alternada. Entonces $\forall \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r \in V$,

$$t\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_r\right) = -t\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_r\right).$$

Demostración. Tenemos que $\operatorname{sig}(i, j) = -1$. □

Proposición 3.13. Si $\vec{x}_i = \vec{x}_j$ y t es una forma multilineal alternada,

$$t\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_r\right) = 0,\ i \neq j.$$

Demostración. Tenemos que

$$t\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_r\right) = -t\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_r\right).$$

Esto implica que $t\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_r\right) = 0$. □

Proposición 3.14.

$$t\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, a\vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_r\right) = 0.$$

Demostración. Por la proposición anterior,

$$t\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, a\vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_r\right) = at\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_r\right) = a \cdot 0 = 0.$$

□

Proposición 3.15.

$$t\left(\vec{x}_1, \ldots, \sum_{j=1}^{r} a^j \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_r\right) = 0,\ j \neq i.$$

Demostración. Tenemos que

$$\sum_{j=1}^{r} a^j t\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_r\right) = 0.$$

□

Proposición 3.16.

$$t\left(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_i+\sum_{j=1}^{r}a^j\vec{x}_j,\ldots,\vec{x}_r\right)=t\left(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_i,\ldots,\vec{x}_r\right),\ j\neq i.$$

Sea $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n\}$ base de V, t multilineal alternada

$$\begin{aligned}
\vec{x}_1 =& a_1^1\vec{u}_1+\cdots+a_1^n\vec{u}_n=\sum_{j=1}^{n}a_1^j\vec{u}_j\\
\vdots&\\
\vec{x}_i =& a_i^1\vec{u}_1+\cdots+a_i^n\vec{u}_n=\sum_{j=1}^{n}a_i^j\vec{u}_j\\
\vdots&\\
\vec{x}_r =& a_r^1\vec{u}_1+\cdots+a_r^n\vec{u}_n=\sum_{j=1}^{n}a_r^j\vec{u}_j.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
t\left(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_r\right) =& t\left(\sum_{j=1}^{n}a_1^j\vec{u}_j,\ldots,\sum_{j=1}^{n}a_r^j\vec{u}_j\right)\\
=& \sum_{(j_1,\ldots,j_r)}a_1^{j_1}\cdots a_r^{j_r}t\left(\vec{u}_{j_1},\ldots,\vec{u}_{j_r}\right).
\end{aligned}$$

Se trata de r-variaciones con repetición. Tenemos que si $j_i=j_h$, entonces el término $t\left(\vec{u}_{j_1},\ldots,\vec{u}_{j_r}\right)$ se va a anular, por lo que realmente se trata de variaciones n-arias sin repetición. Sea $\dim(V)=n$ y sea t una n-forma multilineal alternada. Si $\{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n\}\subset V$,

$$\begin{pmatrix}\vec{u}_1 & \cdots & \vec{u}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1^1 & \cdots & a_n^1\\ \vdots & & \vdots\\ a_1^n & \cdots & a_n^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{x}_1 & \cdots & \vec{x}_n\end{pmatrix}.$$

Son variaciones n-arias sin repetición de $(1,2,\ldots,n)$.

$$\begin{aligned}
t\left(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_r\right) =& \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}a_1^{\sigma(1)}a_2^{\sigma(2)}\cdots a_n^{\sigma(n)}t\left(\vec{u}_{\sigma(1)},\ldots,\vec{u}_{\sigma(n)}\right)\\
=& \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}a_1^{\sigma(1)}\cdots a_n^{\sigma(n)}\operatorname{sig}(\sigma)\,t\left(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n\right).
\end{aligned}$$

Definición 3.8 (Determinante)**.** Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, el determinante de $A_{\sigma\in\mathcal{S}_n}$ es

$$\det A = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \operatorname{sig}(\sigma)\, a_1^{\sigma(1)} \cdots a_n^{\sigma(n)}.$$

Definición 3.9 (Traspuesta)**.** Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, llamaremos **traspuesta** de A a la matriz $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ que tiene por filas las columnas de A.

Teorema 3.5.

$$\det A^t = \det A.$$

Demostración. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, entonces

$$\det A^t = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \operatorname{sig}(\sigma)\, a^1_{\sigma(1)} \cdots a^n_{\sigma(n)} = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \operatorname{sig}\left(\sigma^{-1}\right) a_1^{\sigma^{-1}(1)} \cdots a_n^{\sigma^{-1}(n)} = \sum_{\Pi\in\mathcal{S}_n} \operatorname{sig}(\Pi)\, a_1^{\Pi(1)} \cdots a_n^{\Pi(n)} = \det A.$$

□

Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V tal que $t(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) = 1$. Entonces, $t(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = \det A$ y

$$\begin{pmatrix}\vec{x}_1 & \cdots & \vec{x}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{u}_1 & \cdots & \vec{u}_n\end{pmatrix} A.$$

Observación 3.1.

.

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_i^1 + b_i^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_i^n + b_i^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} =& t(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i + \vec{y}_i, \ldots \vec{x}_n) \\
=& t(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_n) + t(\vec{x}_1, \ldots, \vec{y}_i, \ldots, \vec{x}_n) \\
=& \det \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_i^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_i^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & b_i^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & b_i^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Observación 3.2.

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & aa_i^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & aa_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} =& t(\vec{x}_1, \ldots, a\vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_n) \\
=& at(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_n) \\
=& a \det \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_i^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Observación 3.3. En el caso anteriro, si $a = 0$, el determinante de la matriz es 0.

Observación 3.4.

$$\det \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_j^1 & \cdots & a_i^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_j^n & \cdots & a_i^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} = t\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_n\right) = -t\left(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_n\right).$$

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}\left(\mathbb{K}\right).$$

Tenemos que

$$\det\left(A\right) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \operatorname{sig}\left(\sigma\right) a_1^{\sigma(1)} \cdots a_n^{\sigma(n)}.$$

Vamos a ver como calcular el determinante de una matriz aislando una única fila o columna. Seleccionamos el elemento a_1^1 y calculamos la suma de todos los sumandos donde interviene a_1^1:

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n,\ \sigma(1)=1} \operatorname{sig}\left(\sigma\right) a_1^1 a_2^{\sigma(2)} \cdots a_n^{\sigma(n)} = \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{n-1}} \operatorname{sig}\left(\sigma\right) a_2^{\sigma(2)} \cdots a_n^{\sigma(n)}\right) \cdot a_1^1 = a_1^1 \det \begin{pmatrix} a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Este mismo procedimiento se puede hacer para un elemento cualquiera a_j^i.

Definición 3.10 (Adjunto)**.** El menor complementario α_j^i es el determinante de la matriz $(n-1)\times(n-1)$ que se obtiene A suprimiendo la fila i y la columna j, y llamaremos **adjunto** a $A_j^i = \left(-1\right)^{i+j} \alpha_j^i$.

Si cogemos la fija j, vamos a tener que

$$\det\left(A\right) = a_j^1 A_j^1 + a_j^2 A_j^2 + \cdots + a_j^n A_j^n = a_1^i A_1^i + a_2^i A_2^i + \cdots + a_n^i A_n^i.$$

Proposición 3.17. Si $i \neq k$ tenemos que

$$a_i^1 A_k^1 + a_i^2 A_k^2 + \cdots + a_i^n A_k^n = 0.$$

Similarmente, si $j \neq k$,

$$a_1^j A_1^k + a_2^j A_2^k + \cdots + a_n^j A_n^k = 0.$$

Demostración. Sea $\overline{A}$ una matriz con las mismas columnas que A, salvo la columna k, donde vuelve a aparecer la columna i. Claramente tenemos que $\det\left(\overline{A}\right) = 0$. Ahora, si desarrollamos $\overline{A}$ por los términos de la columna k, tenemos que

$$0 = \det\left(\overline{A}\right) = \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_k^j \overline{A}_k^j.$$

Sin embargo, tal y como hemos definido $\overline{A}$, tenemos que $\overline{a}_k^j = a_i^j$ y $\overline{A}_k^j = A_k^j$. □

Tenemos que

$$\begin{pmatrix}\vec{u}_1 & \cdots & \vec{u}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{u}_1 & \cdots & \vec{u}_n\end{pmatrix} I_{n\times n}.$$

Por tanto, tenemos que

$$1 = t(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) = \underbrace{t(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)}_{1} \det(I_{n\times n}) \Rightarrow \det(I_{n\times n}) = 1.$$

Recordamos que $\mathrm{Aut}(V) = \left\{f \in \mathrm{End}(V) \ : \ \exists f^{-1}\right\}$ y $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) = \left\{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \ : \ \exists A^{-1}\right\}$.

Teorema 3.6. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Entonces, $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$.

Demostración. **(i)** Si $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, $\exists A^{-1}$ tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_{n\times n}$. Así,

$$1 = \det(I_{n\times n}) = \det\left(A \cdot A^{-1}\right) = \det(A) \cdot \det\left(A^{-1}\right).$$

Por tanto, tenemos que si $\det(A) \neq 0$, $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)} \neq 0$. Estrictamente tenemos que tener que $\det(A), \det\left(A^{-1}\right) \neq 0$.

(ii) Si $\det(A) \neq 0$. Vamos a comprobar que $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}(\mathrm{Adj}(A))^t$. Tenemos que

$$\begin{pmatrix} \frac{A_1^1}{|A|} & \cdots & \frac{A_1^n}{|A|} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{A_n^1}{|A|} & \cdots & \frac{A_n^n}{|A|} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_1^1 a_1^1 + \cdots + a_1^n A_1^n & \cdots & A_n^1 a_n^1 + \cdots + A_1^n a_n^n \\ \vdots & & \vdots \\ \cdots & A_j^1 a_j^1 + \cdots + A_j^n a_j^n & \cdots \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}.$$

Tenemos que $\forall i, j = 1, \ldots, n$ el coeficiente de la fila j y la columna i de la matriz producto. Tenemos que

$$\frac{\sum_{k=1}^n A_k^i a_k^j}{|A|} = \begin{cases} \frac{\det(A)}{\det(A)} = 1, \text{ si } j = i \\ 0, \text{ si } j \neq i \end{cases}.$$

Es decir, el producto de las dos matrices anteriores es la identidad.

□

3.6. Sistemas de Cramer

Definición 3.11 (Sistemas de Cramer)**.** Un **sistema de Cramer** es un sistema de ecuaciones lineales

$$(S)\begin{cases} a_1^1 x^1 + \cdots + a_n^1 x^n = b^1 \\ \vdots \\ a_1^n x^1 + \cdots + a_n^n x^n = b^n \end{cases} \qquad \text{donde } a_i^j \in \mathbb{K},\, b^j \in \mathbb{K},\, \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

Además,

$$\det \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \neq 0.$$

Teorema 3.7. Todo sistema de cramer tiene solución única.

Demostración. Primero vemos la **unicidad**. Si $\left(x_0^1, \ldots, x_0^n\right)$ es solución de (S),

$$(S)\begin{cases} a_1^1 x_0^1 + \cdots + a_n^1 x_0^n = b^1 \\ \vdots \\ a_1^n x_0^1 + \cdots + a_n^n x_0^n = b^n \end{cases} \qquad \text{donde } a_i^j \in \mathbb{K},\, b^j \in \mathbb{K},\, \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}.$$

Como $\det(A) \neq 0$, tenemos que $\exists! A^{-1}$. Entonces,

$$A^{-1} A \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}.$$

Ahora vamos a ver la **existencia**. Vamos a ver que el producto $A^{-1}\begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}$ es solución de S.

$$A^{-1}\begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} A_1^1 & \cdots & A_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ A_n^1 & \cdots & A_n^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} A_1^1 b^1 + \cdots + A_1^n b^n \\ \vdots \\ A_n^1 b^1 + \cdots + A_n^n b^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\det\begin{pmatrix} b^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}}{\det(A)} \\ \vdots \\ \dfrac{\det\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_{i-1}^1 & b^1 & a_{i+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ a_1^n & \cdots & a_{i-1}^n & b^n & a_{i+1}^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}}{\det(A)} \\ \vdots \\ \dfrac{\det\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & b^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & b^n \end{pmatrix}}{\det(A)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{A_1^1}{|A|} & \cdots & \frac{A_1^n}{|A|} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{A_n^1}{|A|} & \cdots & \frac{A_n^n}{|A|} \end{pmatrix}.$$

$\square$

Definición 3.12 (Menor)**.** Un **menor** de orden r de A, $r \leq \min\{m, n\}$, es el determinante de una matriz $r \times r$ que se obtiene de A suprimiendo $(m-r)$ filas y $(n-r)$ columnas.

Definición 3.13 (Rango)**.** Decimos que el **rango** de A es r si existe un menor de orden r de A no nulo y todos los de orden $r+1$ son nulos.

Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V y sean $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m\} \subset V$, tales que

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= a_1^1\vec{u}_1 + \cdots + a_1^n\vec{u}_n \\ &\vdots \\ \vec{x}_m &= a_m^1\vec{u}_1 + \cdots + a_m^n\vec{u}_n. \end{aligned}$$

Entonces, en función de estos valores definimos,

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_m^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_m^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K}).$$

Teorema 3.8.
$$\operatorname{ran}(A) = \dim\left(L\left(\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m\}\right)\right).$$

Demostración. Sea $r = \operatorname{ran}(A)$ y $\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{vmatrix} \neq 0.$

(1) Vamos a ver que $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r\}$ son linealmente independientes.
Sean $a^1, \ldots, a^r \in \mathbb{K}$. Si
$$a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^r\vec{x}_r = \vec{0}.$$

Entonces,
$$\begin{aligned} &a^1\left(a_1^1\vec{u}_1 + \cdots + a_1^r\vec{u}_r + \cdots + a_1^n\vec{u}_n\right) + \cdots + a^r\left(a_r^1\vec{u}_1 + \cdots + a_r^r\vec{u}_r + \cdots + a_r^n\vec{u}_n\right) \\ &= \left(a^1a_1^1 + \cdots + a^ra_r^1\right)\vec{u}_1 + \cdots + \left(a^1a_1^r + \cdots + a^ra_r^r\right)\vec{u}_r + \cdots + \left(a^1a_1^n + \cdots + a^ra_r^n\right)\vec{u}_n = \vec{0}. \end{aligned}$$

Así, tenemos que
$$\begin{aligned} a^1a_1^1 + \cdots + a^ra_r^1 &= 0 \\ &\vdots \\ a^1a_1^r + \cdots + a^ra_r^r &= 0 \\ &\vdots \\ a^1a_1^n + \cdots + a^ra_r^n &= 0. \end{aligned}$$

Entonces, $\left(a^1, \ldots, a^r\right)$ es solución del sistema
$$\begin{cases} a_1^1x^1 + \cdots + a_r^1x^r = 0 \\ \vdots \\ a_1^rx^1 + \cdots + a_r^rx^r = 0 \end{cases}.$$

Como es un sistema de Cramer homogéneo, tenemos que $a^1 = \cdots = a^r = 0$.

(2) Vamos a ver que $\forall i = 1, \ldots, m-r$, $\vec{x}_{r+i}$ es linealmente dependiente de $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r\}$.
Sea $i = 1, \ldots, m-r$, queremos ver que $\vec{x}_{r+i} \in L\left(\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r\}\right)$. Queremos llegar al siguiente sistema, respecto a las coordenadas de $\vec{x}_{r+i}$, que es un sistema de Cramer:
$$(S) = \begin{cases} a_1^1x^1 + \cdots + a_r^1x^r = x_{r+i}^1 \\ \vdots \\ a_1^rx^1 + \cdots + a_r^rx^r = x_{r+i}^r \end{cases}.$$

Al ser un sistema de Cramer, tenemos que $\exists!\left(a^1,\ldots,a^r\right)$ solución de S. Tenemos que

$$\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_{r+i}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_{r+i}^r \\ a_1^{r+j} & \cdots & a_r^{r+j} & a_{r+i}^{r+j} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_{r+i}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_{r+i}^r \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r+i}^{r+j} - a^1 a_{r+i}^1 - \cdots - a^r a_{r+i}^r \end{vmatrix}. \\
&= \begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{vmatrix} \left(a_{r+i}^{r+j} - a^1 a_{r+i}^1 - \cdots - a_{r+i}^r\right)
\end{aligned}$$

Entonces,

$$a_{r+i}^{r+j} = a^1 a_{r+i}^1 + \cdots + a^r a_{r+i}^r.$$

□

Dado el sistema

$$(S)\begin{cases} a_1^1 x^1 + \cdots + a_n^1 x^n = b^1 \\ \vdots \\ a_1^m x^1 + \cdots + a_n^m x^n = b^m \end{cases}$$

Definimos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), \quad B = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 & b^1 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m & b^m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times(n+1)}(\mathbb{K}).$$

Tenemos que $\operatorname{ran}(A) \leq \operatorname{ran}(B) \leq \operatorname{ran}(A) + 1$.

Teorema 3.9 (Teorema de Rouché-Fröbenius)**.** (S) tiene solución si y solo si $\operatorname{ran}(A) = \operatorname{ran}(B)$.

Demostración. **(i)** Si el sistema (S) tiene solución, existe $\left(x_0^1,\ldots,x_0^n\right) \in \mathbb{K}^n$ tal que

$$\begin{cases} a_1^1 x_0^1 + \cdots + a_n^1 x_0^n = b^1 \\ \vdots \\ a_1^m x_0^1 + \cdots + a_n^m x_0^n = b^n \end{cases}.$$

Como la última columna de la matriz B depende linealmente de A, tenemos que $\operatorname{ran}(A) = \operatorname{ran}(B)$.

(ii) Supongamos que $\operatorname{ran}(A) = \operatorname{ran}(B) = r$ y que $\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{vmatrix} \neq 0$. Consideramos el sistema (P) el sistema en el que intervienen las primeras r ecuaciones:

$$(P) \begin{cases} a_1^1 x^1 + \cdots + a_r^1 x^r + \cdots + a_n^1 x^n = b^1 \\ \vdots \\ a_1^r x^1 + \cdots + a_r^r x^r + \cdots + a_n^r x^n = b^r \end{cases}.$$

Tenemos que toda solución de (S) es solución de (P). Vamos a ver que toda solución de (P) es solución de (S). Sea $\left(x_0^1, \ldots, x_0^r, \ldots, x_0^n\right)$ solución de (P). Entonces,

$$\begin{aligned} a_1^1 x_0^1 + \cdots + a_r^1 x_0^r + \cdots + a_n^1 x_0^n &= b^1 \\ &\vdots \\ a_1^r x_0^1 + \cdots + a_r^r x_0^r + \cdots + a_n^r x_0^n &= b^r. \end{aligned}$$

Si $i > 1, \ldots, m-r$, queremos ver que

$$a_1^{r+i} x_0^1 + \cdots + a_r^{r+i} x_0^r + \cdots + a_n^r x_0^n = b^{r+i}.$$

Tenemos que existen $l_1, \ldots, l_r \in \mathbb{K}$ tales que

$$\begin{aligned} l_1 a_1^1 + \cdots + l_r a_1^r &= a_1^{r+i} \\ &\vdots \\ l_1 a_r^1 + \cdots + l_r a_r^r &= a_r^{r+i} \\ &\vdots \\ l_1 a_n^1 + \cdots + l_r a_n^r &= a_n^{r+i} \\ l_1 b^1 + \cdots + l_r b^r &= b^{r+i} \end{aligned}.$$

Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} a^{r+i} 1 x_0^1 + \cdots + a_r^{r+i} x_0^r + \cdots + a_n^{r+i} x_0^n = & \left(l_1 a_1^1 + \cdots + l_r a_1^r\right) x_0^1 + \cdots + \left(l_1 a_n^1 + \cdots + l_r a_n^r\right) x_0^n \\ = & l_1 \left(a_1^1 x_0^1 + \cdots + a_n^1 x_0^n\right) + \cdots + l_r \left(a_1^r x_0^1 + \cdots + a_n^r x_0^n\right) \\ = & l_1 b^1 + \cdots + l_r b^r = b^{r+i}. \end{aligned}$$

Entonces, tenemos que el sistema (P')

$$(P') \begin{cases} a_1^1 x^1 + \cdots + a_r^1 x^r = b^1 - a_{r+1}^1 x^{r+1} - \cdots - a_n^1 x^n \\ \vdots \\ a_1^r x^1 + \cdots + a_r^r x^r = b^r - a_{r+1}^r x^{r+1} - \cdots - a_n^r x^n \end{cases}.$$

Claramente, el sistema (P') es equivalente al sistema (P). Si fijo $\left(x_0^{r+1}, \ldots, x_0^n\right) \in \mathbb{K}^{n-r}$, tenemos que el sistema

$$(P_1) \begin{cases} a_1^1 x^1 + \cdots + a_r^1 x^r = b^1 - a_{r+1}^1 x_0^{r+1} - \cdots - a_n^1 x_0^n \\ \vdots \\ a_1^r x^1 + \cdots + a_r^r x^r = b^r - a_{r+1}^r x_0^{r+1} - \cdots - a_n^r x_0^n \end{cases}.$$

Al tratarse de un sistema de Cramer, existe una única solución $\left(x_0^1, \ldots, x_0^r\right)$ de (P_1). Entonces, $\left(x_0^1, \ldots, x_0^r, x_0^{r+1}, \ldots, x_0^n\right)$ es solución de (P). Si $\left(y_0^{r+1}, \ldots, y_0^n\right) \in \mathbb{K}^{n-r}$. Consideremos el sistema (P_2),

$$(P_2) \begin{cases} a_1^1 x^1 + \cdots + a_r^1 x^r = b^1 - a_{r+1}^1 y_0^{r+1} - \cdots - a_n^1 y_0^n \\ \vdots \\ a_1^r x^1 + \cdots + a_r^r x^r = b^r - a_{r+1}^r y_0^{r+1} - \cdots - a_n^r y_0^n \end{cases}.$$

Como es sistema de Cramer, $\exists!\left(y_0^1, \ldots, y_0^r\right)$ solución de (P_2). Por tanto, $\left(y_0^1, \ldots, y_0^r, y_0^{r+1}, \ldots, y_0^n\right)$ es solución de (P).

$\square$

Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ una base de V. Sea $L \in \mathcal{L}(V)$ tal que $\dim(L) = r$ y sea $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ una base de L. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= a_1^1 \vec{u}_1 + \cdots + a_1^n \vec{u}_n \\ &\vdots \\ \vec{v}_r &= a_r^1 \vec{u}_1 + \cdots + a_r^n \vec{u}_n. \end{aligned}$$

Entonces, si $\vec{x} \in V$ con $\vec{x} = x^1 \vec{u}_1 + \cdots + x^n \vec{u}_n$. Tenemos que $\vec{x} \in L$ si y solo si existen $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$ tales que $\vec{x} = \lambda^1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda^r \vec{v}_r$ (ecuaciones paramétricas). Esto es, si y solo si

$$\begin{aligned} x^1 \vec{u}_1 + \cdots + x^n \vec{u}_n &= \lambda^1 \left(a_1^1 \vec{u}_1 + \cdots + a_1^n \vec{u}_n\right) + \cdots + \lambda^r \left(a_r^1 \vec{u}_1 + \cdots + a_r^n \vec{u}_n\right) \\ &= \left(\lambda^1 a_1^1 + \cdots + \lambda^r a_r^1\right) \vec{u}_1 + \cdots + \left(\lambda^1 a_1^n + \cdots + \lambda^r a_r^n\right) \vec{u}_n. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} x^1 &= \lambda^1 a_1^1 + \cdots + \lambda^r a_r^1 \\ &\vdots \\ x^n &= \lambda^1 a_1^n + \cdots + \lambda^r a_r^n. \end{aligned}$$

Es decir, si y solo si el sistema anterior tiene solución. Es decir,

$$r = \operatorname{ran} \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} = \operatorname{ran} \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 & x^1 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n & x^n \end{pmatrix}.$$

Así obtenemos las ecuaciones implícitas de L. Supongamos que

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{vmatrix} = \nabla \neq 0.$$

Entonces, tenemos que los menores de orden $r+1$ de la matriz de coeficientes que contienen al menor anterior son nulos.

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & x^1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & x^r \\ a_1^{r+1} & \cdots & a_r^{r+1} & x^{r+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Similarmente, $\forall i = 1, \ldots, n-r$,

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & x^1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & x^r \\ a_1^{r+i} & \cdots & a_r^{r+i} & x^{r+i} \end{vmatrix} = 0.$$

Si desarrollamos este determinante por adjuntos:

$$x^1 b_1^1 + x^2 b_2^1 + \cdots + x^r b_r^1 x^{r+1} \nabla = 0.$$

Tenemos que $\forall i = 1, \ldots, n-r$,

$$x^1 b_1^1 + \cdots + x^r b_r^1 + x^{r+i} \nabla = 0.$$

Tenemos $n-r$ ecuaciones donde la matriz de coeficientes será

$$\operatorname{ran} \begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & b_r^1 & \nabla & 0 & \cdots & 0 \\ b_1^2 & \cdots & b_r^2 & 0 & \nabla & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_1^{n-r} & \cdots & b_r^{n-r} & 0 & \cdots & 0 & \nabla \end{pmatrix} = n-r.$$

Con esto hemos demostrado que todo subespacio vectorial es el conjunto de las soluciones de un sistema homogéneo. Ahora consideremos el recíproco. Consideremos el sistema homogéneo (H):

$$(H) \begin{cases} c_1^1 x^1 + \cdots + c_n^1 x^n = 0 \\ \vdots \\ c_1^{n-r} x^1 + \cdots + c_n^{n-r} x^n = 0 \end{cases}.$$

Sea $L = \left\{ x_0^1 \vec{u}_1 + \cdots + x_0^n \vec{u}_n \ : \ \left(x_0^1, \ldots, x_0^n \right) \text{ solución de } (H) \right\} \in \mathcal{L}(V)$ tales que $\dim(L) = r$. Supongamos que

$$\operatorname{ran} \begin{pmatrix} c_1^1 & \cdots & c_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ c_1^{n-r} & \cdots & c_n^{n-r} \end{pmatrix} = n-r.$$

En la introducción está demostrado que L es un subespacio vectorial. Supongamos que

$$\begin{vmatrix} c_1^1 & \cdots & c_{n-r}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ c_1^{n-r} & \cdots & c_{n-r}^{n-r} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Entonces

$$\begin{cases} c_1^1 x^1 + \cdots + c_{n-r}^1 x^{n-r} = -c_{(n-r)+1}^1 x^{(n-r)+1} - \cdots - c_n^1 x^n \\ \vdots \\ c_1^{n-r} x^1 + \cdots + c_{n-r}^{n-r} x^{n-r} = -c_{(n-r)+1}^{n-r} x^{(n-r)+1} - \cdots c_n^{n-r} x^n \end{cases}.$$

Supongamos que las siguientes tuplas son soluciones de (H):

$$\begin{cases} \left(d_1^1, \ldots, d_1^{n-r}, 1, 0 \ldots, 0\right) \\ \left(d_2^1, \ldots, d_2^{n-r}, 0, 1, \ldots, 0\right) \\ \vdots \\ \left(d_r^1, \ldots, d_r^{n-r}, 0, \ldots, 0, 1\right) \end{cases}.$$

Sean

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 =& d_1^1 \vec{u}_1 + \cdots + d_1^{n-r} \vec{u}_{n-r} + \vec{u}_{n-r+1} \in L \\ &\vdots \\ \vec{v}_r =& d_r^1 \vec{u}_1 + \cdots + d_r^{n-r} \vec{u}_{n-r} + \vec{u}_{n-r+1} \in L \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \vec{x}_0 =& x_0^1 \vec{u}_1 + \cdots + x_0^{n-r} \vec{u}_{n-r} + \cdots + x_0^n \vec{u}_n \in L \\ \vec{z}_0 =& \vec{x}_0 - x_0^{n-r+1} \vec{x}_1 - x_0^{n-r+2} \vec{v}_2 - \cdots - x_0^n \vec{v}_r = z_0^1 \vec{u}_1 + \cdots + z_0^{n-r} \vec{u}_{n-r} + 0 \cdot \vec{u}_{n-r+1} + \cdots + 0 \cdot \vec{u}_n \in L. \end{aligned}$$

Entonces tenemos que $\left(z_0^1, \ldots, z_0^{n-r}, 0, \ldots, 0\right)$ son solución de (H). Entonces, $\left(z_0^1, \ldots, z_0^{n-r}\right)$ es solución del sistema de Cramer.

$$\begin{cases} c_1^1 x^1 + \cdots + c_{n-r}^1 x^{n-r} = 0 \\ \vdots \\ c_1^{n-r} x^1 + \cdots + c_{n-r}^{n-r} x^{n-r} = 0 \end{cases}.$$

Así, $\vec{z}_0 = \vec{0}$ y

$$\vec{x}_0 = x_0^{n-r+1} \vec{v}_1 + x_0^n \vec{v}_r \Rightarrow L = L\left(\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}\right).$$

Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V y $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r\} \subset V$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_r^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times r}(\mathbb{K}).$$

Tenemos que $\dim\left(L\left(\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r\}\right)\right) = \operatorname{ran}(A)$.

Proposición 3.18.

$$L\left(\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_r\}\right) = L\left(\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_r\}\right).$$

Proposición 3.19. Sea $a \in \mathbb{K}/\{0\}$,

$$L\left(\{\vec{x}_1,\dots,a\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_r\}\right). = L\left(\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_r\}\right)$$

Proposición 3.20. Si $a \in \mathbb{K}$,

$$L\left(\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_j + a\vec{x}_i \dots,\vec{x}_r\}\right) = L\left(\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_r\}\right).$$

Si $a_1^1 \neq 0$, a la segunda fila le resto la primera multiplicada por $\dfrac{a_1^2}{a_1^1}$. Para $i = 2,\dots,n$ a la fila i le resto la primera multiplicada por $\dfrac{a_1^i}{a_1^1}$.

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_r^1 \\ 0 & a_2^2 & \cdots & a_r'^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_2'^r & \cdots & a_r'^r \end{pmatrix}.$$

Si $a_1^1 = 0$ y $\exists a_1^i \neq 0$, permutamos las filas 1 e i. Supongo por hipótesis de inducción que después de i etapas.

$$\begin{pmatrix} b_1^1 & * & \cdots & * \\ 0 & b_1^2 & \cdots & * \\ 0 & \cdots & b_1^i & * \\ 0 & \cdots & 0 & D \end{pmatrix},$$

donde

$$D = \begin{pmatrix} d_1^1 & \cdots & d_t^1 \\ \vdots & & \vdots \\ d_1^s & \cdots & d_r^t \end{pmatrix}.$$

El método anterior consiste en una forma de calcular el rango de una matriz usando Gauss. La forma de calcular la inversa de una matriz $A \in \mathrm{GL}\left(n,\mathbb{K}\right)$ consiste en utilizar combinaciones lineales hasta obtener la identidad. Si hacemos las mismas trasformaciones con $I_{n\times n}$, obtenemos A^{-1}.

Capítulo 4

Forma de Jordan

Sea $f : V \to V'$ lineal. Si $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ y $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ son bases de V y V', respectivamente, tenemos que $A = \mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{v}_j\}}(f) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Si $\left\{\vec{u'}_1, \dots, \vec{u'}_n\right\}$, $\left\{\vec{v'}_1, \dots, \vec{v'}_m\right\}$ son bases de V y V', respectivamente, con $B = \mathcal{M}_{\left\{\vec{u'}_i\right\}\left\{\vec{v'}_j\right\}}(f)$, tenemos que

$$\begin{pmatrix}\vec{u'}_1 & \dots & \vec{u'}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{u}_1 & \dots & \vec{u}_n\end{pmatrix} C,\ C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$$
$$\begin{pmatrix}\vec{v'}_1 & \dots & \vec{v'}_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_m\end{pmatrix} D,\ D \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{K}).$$

Entonces, tenemos el siguiente diagrama. De aquí se deduce que $f = id_{V'} \circ f \circ id_V$, que es lo mismo que

$$B = D^{-1}AC.$$

Definición 4.1. Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ son equivalentes si existe $C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, $D \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{K})$ tales que $D^{-1}AC = B$.

Observación 4.1. Esta es una relación de equivalencia en el cojunto de matrices $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. En concreto las matrices equivalentes tienen el mismo rango.

Observación 4.2. Revisar el último ejercicio de aplicaciones lineales.

Observación 4.3. Si $f \in \mathrm{End}(V)$, tenemos que $C = D$, por lo que $B = C^{-1}AC$.

Definición 4.2. Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ son semejantes si existe $C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ tal que $B = C^{-1}AC$.

Definición 4.3. El vector $\vec{x} \in V$ es un **vector propio** de $f \in \mathrm{End}(V)$ si existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$. Similarmente, se dice que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un **valor propio** de f si $\exists \vec{x} \in V / \left\{\vec{0}\right\}$ tal que

$$\begin{tikzcd} f: V \arrow[r, "A"] \arrow[d, "C \leftarrow id_V"'] & V' \arrow[d, "id_{V'} \rightarrow D^{-1}"] \\ f: V \arrow[r, "B"] & V' \end{tikzcd}$$

Figura 4.1: Semejanza de matrices

$f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$.

Si $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ es base de V formada por vectores propios de f

$$f(\vec{x}_i) = \lambda_i \vec{x}_i.$$

Ejemplo 4.1. No siempre existen los valores propios. Por ejemplo, consideremos la aplicación dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A partir de un sistema de ecuaciones obtenemos que $\lambda^2 = -1$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, esta aplicación no tendría valores propios. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, sí que los tendría.

4.1. Polinomios

Definición 4.4. Una **sucesión** definida en $\mathbb{K}$ es una aplicación $a(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tal que $n \to a_n$. Diremos que $a(x) = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$. Un **polinomio** con coeficientes en $\mathbb{K}$ es una sucesión $a(x) = (a_0, \ldots, a_n, \ldots)$ tal que existe $a_m \neq 0$ y $a_k = 0$, $\forall k > m$. Diremos que m es el **grado** del polinomio $a(x)$.

Observación 4.4. Por esta definición, el polinomio $0 = (0, \ldots, 0, \ldots)$ no tiene grado.

Sea $\mathbb{K}[x] = \{a(x) \ : \ a(x) \text{ polinomio con coeficientes en } \mathbb{K}\}$. Así, definimos la suma de polinomios

$$a(x) + b(x) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n, \ldots).$$

Observación 4.5. Tenemos que con esta suma, $\mathbb{K}[x]$ es un grupo abeliano.

Ahora definimos el producto de polinomios:

$$a(x) \cdot b(x) = \left(\underbrace{a_0 b_0}_{c_0}, \underbrace{a_1 b_0 + a_0 b_1}_{c_1}, \ldots, c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j, \ldots \right).$$

Observación 4.6. Tenemos que con este producto, $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad. La unidad será $(1, 0, \ldots, 0, \ldots)$.

Observación 4.7. Se deduce fácilmente que

- $\operatorname{grad}(a(x) + b(x)) \leq \operatorname{máx}(\operatorname{grad}(a(x)), \operatorname{grad}(b(x)))$
- $\operatorname{grad}(a(x) \cdot b(x)) = \operatorname{grad}(a(x)) + \operatorname{grad}(b(x))$.

Proposición 4.1. A partir de la segunda igualdad tenemos que

(a) Si $a(x) \cdot b(x) = 0$, $a(x) = 0$ o $b(x) = 0$.

(b) Si $a(x) \cdot b(x) = a(x) \cdot c(x) \neq 0$, entonces $b(x) = c(x)$.

(c) Los únicos elementos invertibles de $\mathbb{K}[x]$ son los de grado 0.

Podemos definir el producto por escalares:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}[x] &\to \mathbb{K}[x] \\ (a, (a_0, \dots, a_n, \dots)) &\to (aa_0, \dots, aa_n, \dots). \end{aligned}$$

Observación 4.8. Así, $\mathbb{K}[x]$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Esto nos permite escribir

$$\begin{aligned} a(x) =& (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \\ =& a_0 (1, 0, \dots, 0, \dots) + a_1 (0, 1, \dots, 0, \dots) + \cdots + a_n (0, \dots, 1, \dots) + \cdots. \end{aligned}$$

Así, definimos

$$\begin{aligned} x &= (0, 1, \dots, 0, \dots) \\ x^2 &= (0, 0, 1, \dots, 0, \dots) \\ x^3 &= (0, 1, \dots, 0, \dots) \cdot (0, 0, 1, \dots, 0, \dots) = (0, 0, 0, 1, \dots, 0, \dots) \end{aligned}$$

Supongamos que $x^{k-1} = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0, \dots)$. Así, para x^k,

$$x^k = (0, 1, \dots, 0, \dots) \cdot (0, 0, \dots, 1, \dots, 0, \dots).$$

Así, tenemos que si $a(x) \in \mathbb{K}[x]$,

$$a(x) = (a_0, 0, \dots, 0, \dots) + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Si a cada $a \in \mathbb{K}$ le hacemos corresponder el polinomio $(a, 0, \dots, 0, \dots)$, obtenemos una aplicación inyectiva $\mathbb{K} \to \mathbb{K}[x]$ que conserva las operaciones anteriores. Así, podemos sustituir $(a_0, 0, \dots, 0, \dots)$ por a_0.

Teorema 4.1. Sean $a(x), b(x) \in \mathbb{K}[x]/\{0\}$, entonces $\exists! p(x), r(x) \in \mathbb{K}[x]$ tales que $a(x) = b(x) p(x) + r(x)$. Además, $\operatorname{grad}(r(x)) < \operatorname{grad}(b(x))$ o $r(x) = 0$.

Demostración. Si $\operatorname{grad}(a(x)) < \operatorname{grad}(b(x))$ tomamos $p(x) = 0$ y $r(x) = a(x)$. Supongamos que $\operatorname{grad}(a(x)) \geq \operatorname{grad}(b(x))$, entonces

$$\begin{aligned} a(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,\ a_n \neq 0 \\ b(x) &= b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m,\ b_m \neq 0. \end{aligned}$$

Tenemos que

$$a(x) - b(x) \frac{a_m}{b_m} \left(x^{n-m}\right) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n_1} x^{n_1},\ n_1 \geq n.$$

Si $n_1 < m$,

$$a(x) = b(x) \underbrace{\left(\frac{a_m}{b_m} \left(x^{m-n}\right)\right)}_{p(x)} + \underbrace{c(x)}_{r(x)}.$$

Si $n_1 \geq m$,

$$c(x) - \frac{c_{n_1}}{b_m}\left(x^{n_1-m}\right) = d_0 + d_1 x + \cdots d_{n_2} x^{n_2},\ n_2 < n_1 < n.$$

Si $n_2 < m$,

$$a(x) = b(x)\left(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m} + \frac{c_{n_1}}{b_m}x^{n_1-m}\right) + d_{n_2}x^{n_2}.$$

Si $n_2 \geq m$, $n_2 < n_1 < n$ y repetimos el paso anterior. Ahora demostramos la unicidad, $a(x) = b(x)p(x) + r(x)$ con $\operatorname{grad}(r(x)) < \operatorname{grad}(b(x))$ o $r(x) = 0$ y $a(x) = b(x)p'(x) + r'(x)$ con $\operatorname{grad}(r'(x)) < \operatorname{grad}(b(x))$ o $r'(x) = 0$. Tenemos que

$$b(x)(p(x) - p'(x)) = r'(x) - r(x).$$

Si $r(x) \neq r'(x)$, entonces $\operatorname{grad}(r(x) - r'(x)) < \operatorname{grad}(b(x))$. Así, $\operatorname{grad}(b(x)(p(x) - p'(x))) < \operatorname{grad}(b(x))$. Sin embargo, tenemos que $\operatorname{grad}(b(x)(p(x) - p'(x))) \geq \operatorname{grad}(b(x))$. Esto es una contradicción, por lo que debe ser que $p(x) = p'(x)$ y $r(x) = r'(x)$. □

Definición 4.5. Decimos que $p(x)$ es el **cociente** de la división de $a(x)$ entre $b(x)$ y $r(x)$ es el **resto**.

Definición 4.6. Si $r(x) = 0$, decimos que $a(x)$ es múltiplo de $b(x)$ o que $b(x)$ divide a $a(x)$. Esto se escribe $b(x)\,|a(x)$.

Definición 4.7 (Ideal)**.** Un **ideal** I de $\mathbb{K}[x]$ es un conjunto $I \neq \emptyset$ y $I \subset \mathbb{K}[x]$, que verifica que

(a) Si $a(x), b(x) \in I$, $a(x) + b(x) \in I$.

(b) Si $a(x) \in I$ y $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, tenemos que $p(x)\,a(x) \in I$.

Observación 4.9. Dado $b(x) \in \mathbb{K}[x]$ y sea $(b(x)) = \{p(x)\,b(x) \ :\ p(x) \in \mathbb{K}[x]\}$. Tenemos que este conjunto es un ideal.

Proposición 4.2. Sea $I \subset \mathbb{K}[x]$ un ideal. Entonces, $\exists! b(x) \in I$ mónico, tal que $I = (b(x))$.

Demostración. Si $I = \{0\}$, entonces $(0) = I$. Si $I \neq \{0\}$, sea $b(x) \in I$ un polinomio de menor grado entre los polinomios de I. Tenemos que $(b(x)) \subset I$ por las propiedades del ideal. Si $a(x) \in I$, tenemos que existen $p(x), r(x) \in \mathbb{K}[x]$ tales que

$$a(x) = b(x)\,p(x) + r(x).$$

Entonces, $r(x) = a(x) - b(x)\,p(x) \in I$. Como $\operatorname{grad}(r(x)) < \operatorname{grad}(b(x))$ y $r(x) \in I$, tenemos que $r(x) = 0$. □

Definición 4.8. Se dice que $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ es **mónico** si su coeficiente de mayor grado es 1.

Observación 4.10. (i) $\forall k \in \mathbb{K}/\{0\}$, $(b(x)) = (kb(x))$.

(ii) $a(x) \in (a(x)) \subset (b(x)) \iff b(x)\,|a(x)$.

Proposición 4.3. Sean $I_1, \ldots, I_i$ ideales de $\mathbb{K}[x]$ donde $i \in X$, entonces $\bigcap_{i\in X} I_i$ también es ideal.

Demostración. Si $a(x), b(x) \in \bigcap_{i\in X} I_i$, entonces $\forall i \in X$, $a(x), b(x) \in I_i$. Así, $\forall i \in X$, $a(x)+b(x) \in I_i$, de esta manera $a(x)+b(x) \in \bigcap_{i\in X} I_i$ Similarmente, si $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ y $a(x) \in \bigcap_{i\in X} I_i$, tenemos que $\forall i \in X$, $p(x)\,a(x) \in I_i$. Así, $p(x)\,a(x) \in \bigcap_{i\in X} I_i$. □

Sean $a_1(x), \ldots, a_p(x) \in \mathbb{K}[x]$. Entonces tenemos que

$$(a_1(x)) \cap (a_2(x)) \cap \cdots \cap (a_p(x)),$$

es un ideal. Por tanto, $\exists!\,(m(x))$ mónico tal que $(a_1(x)) \cap (a_2(x)) \cap \cdots \cap (a_p(x)) = (m(x))$.

Definición 4.9 (Mínimo común múltiplo)**.** Decimos que $m(x)$ es **mínimo común múltiplo** de $a_1(x), \ldots, a_p(x)$.

Dados $a_1(x), \ldots, a_q(x) \in \mathbb{K}[x]$, sea

$$I = \{p_1(x)\,a_1(x) + \cdots + p_q(x)\,a_q(x) \ : \ p_1(x), \ldots, p_q(x) \in \mathbb{K}[x]\}.$$

Tenemos que I es un ideal de $\mathbb{K}[x]$. Así, $\exists! d(x) \in \mathbb{K}[x]$ mónico tal que $I = (d(x))$. Así, $(a_1(x)), \ldots, (a_q(x)) \subset (d(x))$. De esta manera tenemos que $\forall i = 1, \ldots, q$, $d(x)\,|a_i(x)$. Si $q(x) \in \mathbb{K}[x]$ tal que $\forall i = 1, \ldots, q$, $q(x)\,|a_i(x)$, tenemos que $q(x)\,|d(x)$.

Definición 4.10 (Máximo común divisor)**.** Se dice que $d(x)$ es el **máximo común divisor**.

Definición 4.11. Si $a(x), b(x) \in \mathbb{K}[x]$ son **primos entre sí** si su máximo común divisor es 1.

Teorema 4.2. Si $\mathrm{mcd}(a(x), b(x)) = 1$ y $a(x)\,|c(x)\,b(x)$, entonces $a(x)\,|c(x)$.

Demostración. Tenemos que $\exists p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x]$ tales que $1 = p(x)\,a(x) + q(x)\,b(x)$. Así,

$$c(x) = c(x)\,p(x)\,a(x) + c(x)\,q(x)\,b(x) \subset (a(x)).$$

□

Definición 4.12. Un polinomio $a(x) \in \mathbb{K}[x]$ es **irreducible** si sus únicos divisores sean k o $ka(x)$, donde $k \in \mathbb{K}/\{0\}$.

Teorema 4.3. Todo polinomio de grado mayor o igual que 1 es producto de polinomios irreducibles.

Demostración. Sea $a(x) \in \mathbb{K}[x]$. Si $a(x)$ es irreducible, tenemos que $a(x) = a(x) \cdot 1$. Si $a(x)$ no es irreducilbe, tenemos que $\exists p_1(x) \in \mathbb{K}[x]$ tal que $p_1(x) | a(x)$ de grado mínimo entre los divisores de $a(x)$. Así, $a(x) = p_1(x) a_1(x)$. Tenemos que $p_1(x)$ es irreducible. Si $a_1(x)$ es irreducible, hemos ganado. Si $a_1(x)$ no es irreducible, tenemos que $\exists p_2(x) \in \mathbb{K}[x]$ tal que $p_2(x) | a_1(x)$ de grado mínimo entre los polinomios que dividen $a_1(x)$. Tenemos que $p_2(x)$ es irreducible. Así, $a_1(x) = p_2(x) a_2(x)$, así $a(x) = p_1(x) p_2(x) a_2(x)$. Después de n etapas, tenemos que $a(x) = p_1(x) p_2(x) \cdots p_n(x) a_n(x)$. □

Proposición 4.4. Sea $p(x) = p_1(x) \cdots p_n(x) = q_1(x) \cdots q_m(x)$, donde $p_i(x), q_j(x)$ son irreducibles. Entonces, tenemos que $n = m$ y los polinomios $p_i(x), q_j(x)$ coinciden salvo en orden y factores escalares.

Demostración. Si $n = 1$, tenemos que $p_1 = q_1(x) q_2(x) \cdots q_m(x)$. Entonces, si $m \neq 1$, tenemos que $p_1(x)$ no es irreducible, lo cual es una contradicción. Por tanto, debe ser que $m = 1$ y $p_1(x) = q_1(x)$. Ahora, asumimos que es cierto para $n - 1$. Tenemos que

$$p_1(x) \cdots p_n(x) = q_1(x) \cdots q_m(x).$$

Así, $p_n(x) | q_1(x) \cdots q_m(x)$. Así, tenemos que $p_n(x) | q_1(x)$ o $p_n(x) | q_2(x) \cdots q_m(x)$.

- En el primer caso, tenemos que $\exists k \in \mathbb{K}/\{0\}$ tal que $p_n(x) = kq_1(x)$. Así, $p_1(x) \cdots p_{n-1}(x) = \frac{1}{k}(q_1(x) \cdots q_{m-1}(x))$. Por hipótesis, tenemos que $n-1 = m-1$ y $p_i(x) = q_j(x)$ salvo escalares no nulos.
- En el segundo caso, tenemos que $p_n(x) | q_2 \cdots q_m$, donde podemos iterar el paso anterior.

□

Si $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, definimos la aplicación

$$\begin{aligned} p : \mathbb{K} &\to \mathbb{K} \\ k &\to p(k) = a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + \cdots + a_n k^n. \end{aligned}$$

Definición 4.13. Se dice que $k \in \mathbb{K}$ es una **raíz** de $p(x)$ si $p(k) = 0$.

Proposición 4.5. Sea $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ de grado mayor o igual que 1, entonces $k \in \mathbb{K}$ es una raíz de $p(x)$ sí y sólo si $(x-k)\,|p(x)$.

Demostración. **(i)** Sean $p(x) = q(x)(x-k) + r(x)$, donde $\operatorname{grad}(r(x)) < 1$ o $r(x) = 0$. Así, tenemos que si $p(k) = 0 = q(k)(k-k) + r(x)$, entonces $(x-k)\,|p(x)$.

(ii) Recíprocamente, si $p(x) = q(x)(x-k)$, tenemos que $p(k) = 0$.

□

Definición 4.14. Sea k una raíz de $p(x) \in \mathbb{K}[x]$. Diremos que k es una raíz de $p(x)$ de orden r si $(x-k)^r\,|p(x)$ y $(x-k)^{r+1} \nmid p(x)$.

Observación 4.11. La suma de las multiplicidades de las raíces de un polinomio de grado n es menor o igual que n.

4.2. Reducción de endomorfismos

Sea $f \in \operatorname{End}(V)$. Sea $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ base de V. Tenemos que $\mathcal{M}_{\{\vec{u}_i\}\{\vec{u}_i\}}(f) = A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Si $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ es otra base de V. Sea $\mathcal{M}_{\{\vec{v}_i\}\{\vec{v}_i\}}(f) = B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Tenemos que

$$(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)\,C,\ C \in \operatorname{GL}(n, \mathbb{K}).$$

Así, tenemos que $B = C^{-1}AC$.

Definición 4.15. Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ son **semejantes** si existe $C \in \operatorname{GL}(n, \mathbb{K})$ tal que $B = C^{-1}AC$.

Sea $f \in \operatorname{End}(V)$ (o $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$).

Definición 4.16. Un vector $\vec{x} \in V$ es un **vector propio** o **autovector** de f si existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$. Similarmente, se dice que un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ es un **valor propio** o **autovalor** de f si existe $\vec{x} \in V/\left\{\vec{0}\right\}$ tal que $f(x) = \lambda\vec{x}$.

Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ y sea $L_\lambda = \{\vec{x} \in V \ :\ f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\} = \operatorname{Ker}(f - \lambda id_V) \in \mathcal{L}(V)$. Si λ no es valor propio de f, tenemos que $L_\lambda = \left\{\vec{0}\right\}$.

Observación 4.12. En las simetrías los únicos autovalores son $\{-1, 1\}$. En efecto, tenemos que $V = \operatorname{Ker}(s + id_V) \oplus \operatorname{Ker}(s - id_V)$.

Teorema 4.4. Sea $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ valores propios de f distintos 2 a 2, y sean $\vec{x}_i \in L_{\lambda_i}/\left\{\vec{0}\right\}, \forall i = 1, \ldots, p$. Entonces, $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\}$ son linealmente independientes.

Demostración. Si $p = 1$, tenemos que $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$, por lo que $\{\vec{x}_1\}$ es linealmente independiente. Ahora, consideremos el caso de $p = 2$. Sean $a^1, a^2 \in \mathbb{K}$ tales que $a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2 = \vec{0}$. Así, tenemos que

$$\vec{0} = f\left(\vec{0}\right) = f\left(a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2\right) = a^1 f\left(\vec{x}_1\right) + a^2 f\left(\vec{x}_2\right) = a^1\lambda_1\vec{x}_1 + a^2\lambda_2\vec{x}_2.$$

Así, tenemos que

$$\lambda_1 \cdot \vec{0} = \lambda_1\left(a^1\vec{x}_1 + a^2\vec{x}_2\right) = a^1\lambda_1\vec{x}_1 + a^2\lambda_1\vec{x}_2.$$

Así, tenemos que

$$\vec{0} = \left(a^1\lambda_1 - a^1\lambda_1\right)\vec{x}_1 + \left(a^2\lambda_2 - a^2\lambda_2\right)\vec{x}_2 \Rightarrow \vec{0} = a^2\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)\vec{x}_2 \Rightarrow a^2 = 0.$$

Así, como $a^1\vec{x}_1 = \vec{0}$, tenemos que $a^1 = 0$. Ahora, asumimos que es cierto para $p - 1$. En el caso de p, sean $\left\{a^1, \ldots, a^p\right\} \subset \mathbb{K}$ tales que $a^1\vec{x}_1 + \cdots + a^p\vec{x}_p = \vec{0}$. Tenemos que

$$\vec{0} = \lambda_1\vec{0} = \lambda_1 a^1\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_1 a^p\vec{x}_p.$$

Por otro lado tenemos que

$$\vec{0} = f\left(\vec{0}\right) = a^1\lambda_1\vec{x}_1 + \cdots + a^p\lambda_p\vec{x}_p = a^2\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)\vec{x}_2 + \cdots + a^p\left(\lambda_p - \lambda_1\right)\vec{x}_p.$$

Así, tenemos que

$$a^2\left(\lambda_2 - \lambda_1\right) = a^3\left(\lambda_3 - \lambda_1\right) = \cdots = a^p\left(\lambda_p - \lambda_1\right) = 0.$$

Por tanto, $a^2 = a^3 = \cdots = a^p = 0$ y, consecuentemente $a^1\vec{x}_1 = \vec{0} \Rightarrow a^1 = 0$. □

Observación 4.13. Una consecuencia de este teorema es que

$$L_{\lambda_1} \oplus L_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus L_{\lambda_p}.$$