Métodos Numéricos - Ejercicios de clase

Victoria Eugenia Torroja Rubio

8/9/2025

Tema 1

Ejercicio 1. Tenemos que la $Bx \in \mathcal{M}_{m\times 1}$. Así, tenemos que

$$(Bx)_i = \sum_{j=0}^{n} b_{ij}x_j = b_i^T x.$$

De esta manera, nos queda que

$$Bx = \left(b_i^T x\right)_{i=1}^{n} = \begin{pmatrix} b_1^T x \\ \vdots \\ b_m^T x \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2. Tenemos que

$$(Bx)_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}x_k.$$

Para $1 \leq i \leq m$ tenemos que

$$Bx = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n b_{1k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n b_{mk}x_k \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} x_k \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{mk} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} x_k b_k.$$

Ejercicio 3. Tenemos que las dimensiones de AB serán de $m \times p$. Por otro lado,

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Así, tenemos que la columna i-ésima de la matriz AB será:

$$AB_i = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{ki} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk}b_{ki} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix} = Ab_i.$$

Ejercicio 4. Tenemos que, por el ejercicio 2,

$$A\left(Bx\right) = A\left(\sum_{k=1}^{p} x_k b_k\right) = \sum_{k=1}^{p} A x_k b_k = \sum_{k=1}^{p} x_k \left(A b_k\right).$$

Por otro lado, los ejercicios 2 y 3 nos dicen que

$$\left(AB\right)x = \left(Ab_1, \dots, Ab_p\right)x = \sum_{p}^{k=1} x_k A b_k.$$

Así, queda demostrada la igualdad.

Ejercicio 5. Sea $C = (c_1, \dots, c_q)$. Tenemos que

$$A\left(BC\right) = A\left(Bc_1, \dots, Bc_q\right) = \left(A\left(Bc_1\right), \dots, A\left(Bc_q\right)\right) = \left(\left(AB\right)c_1, \dots, \left(AB\right)c_q\right) = \left(AB\right)C.$$

Ejercicio 6. Por un lado, tenemos que

$$\left(DA\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik} a_{kj} = d_i a_{ij}.$$

Similarmente,

$$\left(AD\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_{kj} = a_{ij} d_j.$$

Ejercicio 7. La dimensión de vw^* será de $n \times n$. Tenemos que

$$\left(vw^*\right)_{ij} = v_i \overline{w}_j.$$

Ejercicio 8. Es fácil ver que:

$$\left(\lambda D\right)_{ij} = \lambda d_{ij} = \begin{cases} 0, \ i \neq j \\ d_i, \ i = j \end{cases}.$$

Así, tenemos que λD también es diagonal. Similarmente,

$$\left(D + E\right)_{ij} = \begin{cases} 0, \ i \neq j \\ d_i + e_i, \ i = j \end{cases}.$$

$$\left(DE\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik} e_{kj} = \begin{cases} 0, \ i \neq j \\ d_i e_i, \ i = j \end{cases}.$$

Ejercicio 9. Tenemos que si $i < j$, $\left(A\right)_{ij} = \left(B\right)_{ij} = 0$. Así,

$$\left(\lambda A\right) = \begin{cases} 0, \ i < j \\ \lambda a_{ij}, \ i \geq j \end{cases}.$$

$$(A+B)_{ij} = \begin{cases} 0, \ i<j \\ a_{ij}+b_{ij}, \ i \geq j \end{cases}.$$

Para este último caso supongamos que $i<j$,

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=i}^{j-1} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=j}^{n} a_{ik}b_{kj} = 0+0+0 = 0.$$

Ejercicio 10. **(a)** Si D es inversible, por ser diagonal tenemos que

$$\det(D) = \prod_{i=1}^{n} d_i \neq 0.$$

Por tanto, $d_i \neq 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Así, tenemos que

$$\det\left(DD^{-1}\right) = \det(D)\det\left(D^{-1}\right) = \det(I_n) = 1 \iff \det\left(D^{-1}\right) = \frac{1}{\det(D)} \neq 0.$$

Así, tenemos que D^{-1} es inversible. Tenemos que $D^{-1} = diag\left(\frac{1}{d_1}, \ldots, \frac{1}{d_n}\right)$.

(b)

Ejercicio 11. Supongamos que $\lambda \in Sp(A)$ y $\alpha \in \mathbb{K}/\{0\}$. Tenemos que

$$\lambda \in Sp(A) \iff \det(A-\lambda I_n) = 0 \iff \frac{1}{\alpha^n}\det(\alpha A - \alpha\lambda I_n) = 0 \iff \det(\alpha A - \alpha\lambda I_n) = 0 \iff \alpha\lambda \in Sp(\alpha A).$$