Cálculo Integral

Victoria Torroja Rubio

19/1/2026

Índice general

Despacho: 431

Correo: jose_mendoza@mat.ucm.es

Bibliografía:

- Para cálculo integral: Marsden & Hoffman: *Elementary Classical Analysis.*
- Para cálculo vectorial: Marsden & Tromba: *Vector calculus.*

Evaluación:

- 13/2/2026: cambiar la clase de cálculo con la de ecuaciones diferenciales.
- Control: 27/2/2026 (*sólo sube, pero cuenta poco, alrededor de un 10 %*).

Capítulo 1

Integral de Riemann

1.1. Conceptos básicos

Consideramos el paralelepípedo

$$R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

que es producto directo de intervalos compactos en $\mathbb{R}$. Consideremos también una función $f : R \to \mathbb{R}$ acotada. Definimos el **volumen** del rectángulo R como el producto de las longitudes de sus lados, es decir,

$$v(R) := (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$

Definición 1.1 (Partición). Tomamos particiones

$$P_1 \in \mathcal{P}([a_1, b_1]), \ldots, P_n \in \mathcal{P}([a_n, b_n]),$$

y decimos que $P = (P_1, \ldots, P_n) \in \mathcal{P}(R)$ es una **partición** de R.

De esta forma, estamos dividiendo el rectángulo R en subrectángulos.

Definición 1.2. Dadas dos particiones $P = (P_1, \ldots, P_n)$ y $Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$, decimos que P es **más fina** que Q, $P \geq Q$, si P_i es más fina que Q_i para $i = 1, \ldots, n$.

Si $T \in \mathcal{P}(R)$, entonces T es un pequeño paralelepípedo cuyos lados son intervalos de P_i (queremos decir que T es uno de los subrectángulos formados por la partición P). Podemos ver que para cada partición $P_i = \left\{x_0^i, \ldots, x_{m_i}^i\right\}$, los rectángulos T tendrán la forma

$$T = \left[x_{j_1}^1, x_{j_1+1}^1\right] \times \cdots \times \left[x_{j_n}^n, x_{j_n+1}^n\right], \; 0 \leq j_i \leq m_i - 1.$$

Así, definimos,

Definición 1.3 (Suma superior e inferior)**.** Decimos que la **suma inferior** de f por P es

$$s(f,P) := \sum_{T\in P} v(T)\, \text{ínf}\, \{f(t)\ :\ t\in T\}.$$

Análogamente, decimos que la **suma superior** de f por P es

$$S(f,P) := \sum_{T\in P} v(T) \sup\{f(t)\ :\ t\in T\}.$$

Observación. A partir de la definición anterior, podemos hacer un par de observaciones.

- En primer lugar, como f está acotada, las sumas superiores e inferiores están bien definidas.
- Para cualquier partición $P\in\mathcal{P}(R)$ se cumple que $s(f,P)\le S(f,P)$.

Para introducir la noción de **integral superior** e **integral inferior**, tenemos que ver que las sumas superiores e inferiores están acotadas, esto se puede ver de dos formas.

Notación. A partir de ahora, utilizamos la notación siguiente:

$$\alpha_T = \text{ínf}\,\{f(t)\ :\ t\in T\} \quad \text{y} \quad \beta_T = \sup\{f(t)\ :\ t\in T\}.$$

Forma 1

Sea $P\in\mathcal{P}(R)$. Como f es acotada en R sabemos que existen $M,m\in\mathbb{R}$ tales que

$$m\le f(x)\le M,\ \forall x\in R.$$

Así, tenemos que

$$\sum_{T\in P} m v(T) \le s(f,P)\le S(f,P)\le \sum_{T\in P} M v(T).$$

Demostremos ahora la igualdad

$$\sum_{T\in P} v(T) = v(R).$$

En primer lugar, consideremos el caso $n=1$. Cogemos $R=[a,b]$ y la partición $P=\{t_0=a,t_1,\dots,t_m=b\}$. Así, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{m} v([t_{i-1},t_i]) = \sum_{i=1}^{m}(t_i-t_{i-1}) = t_m - t_0 = b-a = v(R).$$

Demostraremos el caso $n=2$ pues a partir de este es fácil generalizar la demostración para $n>2$. Por tanto, tomamos $R=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ con la partición $P=(P_1,P_2)$ tal que

$$P_1=\{t_0=a_1,t_1,\dots,t_m=b_1\},\quad P_2=\{q_0=a_2,q_1,\cdots,q_r=b_2\}.$$

Tendremos que

$$\sum_{T\in R} v(T) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{r-1} v([t_i,t_{i+1}]\times[q_j,q_{j+1}]) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{r-1}(t_{i+1}-t_i)(q_{j+1}-q_j) = (b_1-a_1)(b_2-a_2).$$

Así, podemos decir que

$$mv(R) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq Mv(R).$$

Forma 2

Lema 1.1. Sean $P,T \in \mathcal{P}(R)$ con $T \geq P$. Entonces,

$$s(f,P) \leq s(f,T) \leq S(f,T) \leq S(f,P).$$

Demostración. Lo demostramos para $n=2$ puesto que la demostración es fácil de generalizar para $n>2$. Sea $P=(P_1,P_2)\in\mathcal{P}(R)$. Para demostrar el lema basta con demostrar el caso $P'=(P_1',P_2)$, donde $P_1'=P_1\cup\{u\}$. Claramente tenemos que P' es más fina que P. Concretamente, supongamos que

$$P_1=\left\{t_0^1,\dots,t_n^1\right\} \quad \text{y} \quad P_1'=\left\{t_0^1,\dots,t_i^1,u,t_{i+1}^1,\dots,t_n^1\right\}.$$

Sea $P_2=\{q_0,\dots,q_r\}$, y definimos los conjuntos de rectángulos

$$J_1=\{[t_i,u]\times[q_j,q_{j+1}] \,:\, 0\leq j\leq r-1\} \quad \text{y} \quad J_2=\{[u,t_{i+1}]\times[q_j,q_{j+1}] \,:\, 0\leq j\leq r-1\}.$$

Claramente tenemos que $J_1\cap J_2=\emptyset$. De esta forma, tenemos que

$$\begin{aligned}
s(f,P') &= \sum_{T\in P'} v(T)\alpha_T = \sum_{T\in P'/(J_1\cup J_2)} v(T)\alpha_T + \sum_{T\in J_1} v(T)\alpha_T + \sum_{T\in J_2} v(T)\alpha_T \\
&= \sum_{T\in P'/(J_1\cup J_2)} v(T)\alpha_T + \sum_{j=0}^{r-1}(u-t_i)(q_{j+1}-q_j)\alpha_j^1 + \sum_{j=0}^{r-1}(t_{i+1}-u)(q_{j+1}-q_j)\alpha_j^2 \\
&\geq \sum_{T\in P'/(J_1\cup J_2)} v(T)\alpha_T + \sum_{j=0}^{r-1}(t_{i+1}-t_i)(q_{j+1}-q_j)\alpha_j = s(f,P).
\end{aligned}$$

La desigualdad para la suma superior se demuestra de forma análoga. □

Demostración. Esta es una demostración alternativa. Consideremos que T es más fina que P y sean $R_1,\dots,R_N$ los subrectángulos de P y $\tilde{R}_1,\dots,\tilde{R}_{\tilde{N}}$ los de T. Sea I_k el conjunto de índices j tales que $\tilde{R}_j\subset R_k$. Así, es fácil ver que

$$R_k=\bigsqcup_{j\in I_k}\tilde{R}_j, \quad v(R_k)=\sum_{j\in I_k} v\left(\tilde{R}_j\right).$$

Denotamos $\alpha_j=\inf\{f(x) \,:\, x\in R_j\}$ y $\tilde{\alpha}_j=\inf\left\{f(x) \,:\, x\in\tilde{R}_j\right\}$. Claramente, si $j\in I_k$ se tiene que $\alpha_k\leq\tilde{\alpha}_j$, así

$$s(f,P)=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k v(R_k)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{j\in I_k}\alpha_k v\left(\tilde{R}_j\right)\leq\sum_{k=1}^{N}\sum_{j\in I_k}\tilde{\alpha}_j v\left(\tilde{R}_j\right)=\sum_{j=1}^{\tilde{N}}\tilde{\alpha}_j v\left(\tilde{R}_j\right)=s(f,T).$$

El caso para la suma superior es análogo. □

Proposición 1.1. Dadas dos particiones, $P, Q \in \mathcal{P}(R)$

$$s(f, P) \leq S(f, Q).$$

Demostración. Sea $T = (P_1 \cup Q_1, \ldots, P_n \cup Q_n) \in \mathcal{P}(R)$. Claramente, $T \geq P$ y $T \geq Q$. Por tanto, aplicando el lema anterior

$$s(f, P) \leq s(f, T) \leq S(f, T) \leq S(f, Q).$$

□

Por ambas formas hemos visto que existen

$$\text{ínf}\{S(f, P) \ : \ P \in \mathcal{P}(R)\} \quad \text{y} \quad \sup\{s(f, P) \ : \ P \in \mathcal{P}(R)\},$$

por lo que estamos en condiciones de definir la integral superior e inferior.

1.2. Integral de Riemann

Definición 1.4 (Integral superior e inferior). Se define como **integral superior** e **integral inferior** a los valores

$$\overline{\int_R} f = \text{ínf}\{S(f, P) \ : \ P \in \mathcal{P}(R)\} \quad \text{y} \quad \underline{\int_R} f = \sup\{s(f, P) \ : \ P \in \mathcal{P}(R)\},$$

repsectivamente. Decimos que f es **integrable** si el valor de la integral superior e inferior coincide.

Corolario 1.1. Dada $f : R \to \mathbb{R}$ acotada,

$$\underline{\int_R} f \leq \overline{\int_R} f.$$

Ejemplo. Consideremos $f \equiv c$, con c constante. Tenemos que para una partición $P \in \mathcal{P}(R)$,

$$s(f, P) = \sum_{T \in P} v(T) \text{ínf}\{f(t) \ : \ t \in T\} = \sum_{T \in P} v(T) c = cv(R).$$

Por otro lado,

$$S(f, P) = \sum_{T \in P} v(T) \sup\{f(t) \ : \ t \in T\} = \sum_{T \in P} v(T) c = cv(R).$$

Como la integral superior y la inferior coinciden, debe ser que la función es integrable.

Teorema 1.1 (Criterio de integrabilidad de Riemann)**.** Una función $f : R \to \mathbb{R}$ acotada es integrable si y solo si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P_\varepsilon \in \mathcal{P}(R)$ tal que

$$S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Demostración. **(i)** Supongamos que f es integrable y sea $\varepsilon > 0$. Por definición de supremo e ínfimo, tenemos que existen particiones $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(R)$ tales que

$$\int_R f - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, P_1), \quad \int_R f + \frac{\varepsilon}{2} > S(f, P_2).$$

Cogemos $P_\varepsilon \in \mathcal{P}(R)$ más fina que P_1 y P_2 y tenemos que

$$S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) \leq S(f, P_2) - s(f, P_1) < \left(\int_R f + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\int_R f - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

(ii) Sea $\varepsilon > 0$, entonces por hipótesis tenemos que

$$0 \leq \overline{\int_R} f - \underline{\int_R} f \leq S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, debe ser que la integral superior y la inferior coinciden, por lo que f es integrable.

□

Observación. La negación del criterio anterior nos permite ver cuándo una función no es integrable, que es si y solo si existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $S(f, P) - s(f, P) \geq \varepsilon_0$, $\forall P \in \mathcal{P}(R)$.

Ejemplo. Un ejemplo muy común de función no integrable es la función de Dirichlet,

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Este ejemplo lo podemos generalizar en $\mathbb{R}^n$. En efecto, podemos tomar $R = [0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$, con

$$f : R \to \mathbb{R} : x = (x_1, \ldots, x_n) \to \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}^n \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}^n \end{cases} .$$

Tenemos que $\forall P \in \mathcal{P}(R)$, $S(f, P) = 1$ y $s(f, P) = 0$, por lo que $S(f, P) - s(f, P) = 1$ y f no es integrable.
Esta noción la podemos generalizar. Consideremos $R = [0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ y $A \subset \mathbb{R}$ tal que A y R/A son densos en R. Por denso queremos decir que todo rectángulo no trivial J, $A \cap J \neq \emptyset$ y $(R/A) \cap J \neq \emptyset$. Entonces,

$$f : R \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in R/A \end{cases} ,$$

no es integrable.

Teorema 1.2 (Teorema de Darboux)**.** Una función $f : R \to \mathbb{R}$ acotada es integrable en R con integral I si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $P \in \mathcal{P}(R)$ con $\|P\| < \delta$ [a], entonces

$$\left|\sum_{J\in P} f(x_J)\, v(J) - I\right| < \varepsilon, \quad \forall x_J \in J.$$

[a]Para cualquier $J \in P$, el diámetro de J es menor a δ.

Demostración. **(i)** Se puede mirar en el libro de Marsden y Hoffmann.

(ii) Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que si $\|P\| < \delta$ entonces

$$\left|\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\, v(J_i) - I\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

Donde $J_1, \dots, J_N$ son los rectángulos que componen la partición P. Cogemos $x_i \in J_i$ tal que

$$|f(x_i) - \beta_{J_i}| < \frac{\varepsilon}{v(J_i)\, 2N}.$$

Así, tenemos que

$$|S(f,P) - I| \leq \left|S(f,P) - \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\, v(J_i)\right| + \left|\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\, v(J_i) - I\right|.$$

Tenemos que

$$\left|S(f,P) - \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\, v(J_i)\right| < \sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon v(J_i)}{v(J_i)\, 2N} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así, obtenemos que $|S(f,P) - I| < \varepsilon$. De forma análoga se puede demostrar que $|I - s(f,P)| < \varepsilon$. De esta forma, obtenemos que si $\varepsilon > 0$ existe $P \in \mathcal{P}(R)$ tal que

$$|S(f,P) - s(f,P)| \leq |S(f,P) - I| + |I - s(f,P)| < \varepsilon,$$

y por el criterio de Riemann tenemos que f es integrable en R. Además, por lo visto anteriormente, existe $P \in \mathcal{P}(R)$ tal que

$$\left|\overline{\int_R} f - I\right| \leq \left|\overline{\int_R} f - S(f,P)\right| + |S(f,P) - I| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

El caso para la integral inferior es análogo. Así, hemos demostrado que $\displaystyle\int_R f = I$.

□

1.3. Propiedades de la integral

Teorema 1.3. Sea $f : R \to \mathbb{R}$ continua, entonces f es integrable.

Demostración. En esta demostración trabajaremos con la norma infinita pero la equivalencia de normas permite generalizar el resultado para cualquier norma en $\mathbb{R}^n$. Dado que f es continua en R y este es compacto, tenemos que f es uniformemente continua en R. Sea $\varepsilon > 0$ y $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{v(R)} > 0$. Tenemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - y\|_\infty < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon', \ \forall x, y \in R.$$

Así, cogemos una partición $P_\delta \in \mathcal{P}(R)$ que form rectángulos de lados con longitud menor a δ. Recordamos que dado que f es continua en R, lo es también en cada subrectángulo generado por la partición P_δ. De esta forma, en cada $T \in P_\delta$, f alcanza su máximo y su mínimo, β_T y α_T, respectivamente. Por tanto,

$$S(f, P_\delta) - s(f, P_\delta) = \sum_{T \in P_\delta} v(T)(\beta_T - \alpha_T) < \varepsilon' \sum_{T \in P_\delta} v(T) = \varepsilon.$$

Por el criterio de integrabilidad de Riemann, f es integrable en R. □

Proposición 1.2 (Linealidad y monotonía). Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo.

Linealidad. Si $f_1, f_2 : R \to \mathbb{R}$ son integrables en R, entonces

$$\int_R f_1 + f_2 = \int_R f_1 + \int_R f_2.$$

Además, si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : R \to \mathbb{R}$ es integrable en R, entonces

$$\int_R \alpha f = \alpha \int_R f.$$

Monotonía. Si $f_1, f_2 : R \to \mathbb{R}$ son integrables en R, con $f_1 \leq f_2$, $\forall x \in R$, entonces

$$\int_R f_1 \leq \int_R f_2.$$

Demostración. Aplicamos el teorema de Darboux.

1. Sea $\varepsilon > 0$, como f y g son integrables tenemos que existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ y $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(R)$, con $\|P_1\| < \delta_1$ y $\|P_2\| < \delta_2$, tales que

$$\left| \sum_{J \in P_1} f(y_j) v(J) - I_1 \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left| \sum_{T \in P_2} g(z_j) v(J) - I_2 \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cogemos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, y tomamos $P \in \mathcal{P}(R)$ con $\|P\| < \delta$, de esta forma

$$\left| \sum_{J \in P} (f+g)(x_j) v(J) - (I_1 + I_2) \right| \leq \left| \sum_{J \in P} f(x_J) v(J) - I_1 \right| + \left| \sum_{J \in P} g(x_J) v(J) - I_2 \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. Sea $I = \int_R f$ y $\varepsilon > 0$. Por el teorema de Darboux, existe $\delta > 0$ tal que si $P \in \mathcal{P}(R)$ con $\|P\| < \delta$, entonces
$$\left| \sum_{J \in P} f(x_J) v(J) - I \right| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}.$$
Así, tenemos que
$$\left| \sum_{J \in P} \alpha f(x_J) v(J) - \alpha I \right| = |\alpha| \left| \sum_{J \in P} f(x_J) v(J) - I \right| < |\alpha| \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon.$$

3. Para demostrar la monotonía primero asumimos que $f : R \to \mathbb{R}$ es integrable y $f(x) \geq 0$, $\forall x \in R$. Tenemos que
$$s(f, P) = \sum_{J \in P} \alpha_J v(J) \geq 0, \ \forall P \in \mathcal{P}(R).$$
Así, está claro que la integral inferior debe ser superior a 0, por lo que el valor de la integral será superior a 0. Ahora, supongamos que $f_1, f_2 : R \to \mathbb{R}$ son integrables y $f_1(x) \leq f_2(x)$, $\forall x \in R$. Tenemos que la función $f_2 - f_1 : R \to \mathbb{R}$ cumple que es integrable (por la linealidad) y además $(f_2 - f_1)(x) \geq 0$, $\forall x \in R$. Por lo que acabamos de demostrar:
$$\int_R f_2 - f_1 = \int_R f_2 - \int_R f_1 \geq 0 \iff \int_R f_1 \leq \int_R f_2.$$

$\square$

Observación (Cota de la integral). Supongamos que $f : R \to \mathbb{R}$ es integrable en R. Entonces, f es acotada, por lo que existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que
$$m \leq f(x) \leq M, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$
Así, tenemos que
$$\int_R m \leq \int_R f \leq \int_R M \Rightarrow mv(R) \leq \int_R f \leq Mv(R).$$
Se puede hacer un razonamiento igual sobre un conjunto A que es medible Jordan.

Proposición 1.3. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es integrable, entonces $|f|$ es integrable y
$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|.$$

Demostración. Demostramos la segunda parte. Claramente tenemos que
$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \ \forall x \in A.$$

Por la propiedad de la monotonía tenemos que

$$-\int_A |f| \leq \int_A f \leq \int_A |f| \iff \left|\int_A f\right| \leq \int_A |f|.$$

□

Observación. Sea A medible Jordan y $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in A$. Entonces, tenemos que

$$\left|\int_A f\right| \leq \int_A |f| \leq M v(A).$$

De esta manera, podemos utilizar la proposición anterior para obtener una cota de la integral.

Proposición 1.4. Sean $S, R \subset \mathbb{R}^n$ rectángulos cerrados tales que $S \subset R$. Si $f : R \to \mathbb{R}$ es integrable, entonces f es integrable en S.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y $P = (P_1, \ldots, P_n) \in \mathcal{P}(R)$ tal que $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$. Podemos asumir que los vértices de S están en P, es decir, si $S = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, entonces $a_i, b_i \in P_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Ahora, consideramos $\tilde{P} = \left(\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n\right) \in \mathcal{P}(S)$ tal que $\tilde{P}_i = P_i \cap [a_i, b_i]$ con $i = 1, \ldots, n$. Dado que los subrectángulos de $\tilde{P}$ son subrectángulos de P es fácil ver que S es una unión de subrectángulos de R. Sean $R_1, \ldots, R_k$ los subrectángulos de P que también lo son de $\tilde{P}$, y sean $R_{k+1}, \ldots, R_N$ el resto. Tenemos que

$$\varepsilon > S(f,P) - s(f,P) = \sum_{j=1}^{k} (\beta_j - \alpha_j)\, v(R_j) + \sum_{j=k+1}^{N} (\beta_j - \alpha_j)\, v(R_j)$$

$$\geq \sum_{j=1}^{k} (\beta_j - \alpha_j)\, v(R_j) = S\left(f|_S, \tilde{P}\right) - s\left(f|_S, \tilde{P}\right).$$

Por el criterio de la integrabilidad de Riemann, $f|_S$ es integrable. □

1.4. Conjuntos medibles Jordan

Definición 1.5 (Volumen)**.** Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ con $A \neq \emptyset$ y A acotado. Tomamos un rectángulo R tal que $A \subset R$. Definimos la función

$$\chi_A : R \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$

Diremos que A tiene **volumen** (A es **medible Jordan**) si χ_A es integrable y en este caso diremos que su **volumen** es

$$V(A) = \int_R \chi_A.$$

Ejemplo.

- Ya vimos anteriormente que $\mathbb{Q}^n \cap [0,1]^n$ no tiene volumen.
- Si R es un rectángulo, R es medible Jordan.

Observación. Sea $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ acotado y R un rectángulo tal que $A \subset R$. Cogemos $P \in \mathcal{P}(R)$. Podemos observar que

$$\alpha_J = \begin{cases} 1, & J \subset A \\ 0, & J \subsetneq A \end{cases}.$$

Así, tendremos que

$$s(\chi_A, P) = \sum_{J \in P} v(J)\, \alpha_J = \sum_{J \in P, J \subset A} v(J).$$

De esta forma,

$$\underline{\int_R} \chi_A = \sup \left\{ \sum_{J \in P, J \subset A} v(J) \ : \ P \in \mathcal{P}(R) \right\}.$$

Consideremos ahora las sumas superiores,

$$\beta_J = \begin{cases} 1, & J \cap A \neq \emptyset \\ 0, & J \cap A = \emptyset \end{cases}.$$

De esta forma,

$$S(\chi_A, P) = \sum_{J \in P, J \cap A \neq \emptyset} v(J).$$

Así,

$$\overline{\int_R} \chi_A = \text{ínf} \left\{ \sum_{J \in P, J \cap A \neq \emptyset} v(J) \ : \ P \in \mathcal{P}(R) \right\}.$$

Definición 1.6 (Integral en otros conjuntos). Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado y $f : A \to \mathbb{R}$ también acotada. Diremos que f **es integrable en** A si existe R rectángulo tal que $A \subset R$ y

$$\tilde{f} : R \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} f(x), \ x \in A \\ 0, \ x \notin A \end{cases},$$

es integrable en R. En este caso

$$\int_A f := \int_R \tilde{f}.$$

De forma equivalente, desde $f : R \to \mathbb{R}$ y $A \subset R$, diremos que f es integrable en A si $f \cdot \chi_A$ es integrable en R y tomamos

$$\int_A f = \int_R f \cdot \chi_A.$$

Observación. Tanto para la definición anterior como para la de volumen, tenemos que ver que basta con que exista R, puesto que en cuanto existe uno para cualquier otro rectángulo que cumpla estas características el valor de la integral coincide.

En efecto, si $\tilde{f} : R \to \mathbb{R}$ es integrable y R' es otro rectángulo tal que $A \subset R'$, basta con tomar el rectángulo que contenga a $R \cap R'$, puesto que dado que $\tilde{f}$ es integrable en R, también lo será en este nuevo rectángulo (puesto que realmente hemos cortado partes en las que la función se anulaba). Así, el valor de la integral en R y R' coincidirá. Esto se ve de forma más clara con la observación anterior.

Definición 1.7 (Media). Sea $f : A \to \mathbb{R}$ integrable con $A \subset \mathbb{R}^n$ medible Jordan y $v(A) > 0$, definimos la **media** de f en A como

$$m_A(f) = \frac{1}{v(A)} \int_A f.$$

Observación. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es integrable, entonces está acotada por lo que existen $M, m > 0$ tales que $m \leq f(x) \leq M$, así

$$mv(A) \leq \int_A f \leq Mv(A) \iff m \leq \frac{1}{v(A)} \int_A f \leq M \iff m \leq m_A(f) \leq M.$$

Podemos observar que

$$\int_A m_A(f) = \int_A f.$$

Teorema 1.4 (Teorema del valor medio)**.** Sea $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y conexo, medible Jordan con volumen positivo, y sea $f : A \to \mathbb{R}$ continua. Entonces, existe $x_m \in A$ tal que

$$f(x_m) = m_A(f) = \frac{1}{v(A)} \int_A f.$$

Demostración. Como f es continua y A es compacto y conexo, debe ser que $f(A)$ también es compacto y conexo (por lo que debe ser un intervalo cerrado y acotado), es decir, existen $x_1, x_2 \in A$ tales que

$$m = f(x_1) \leq f(x) \leq M = f(x_2), \ \forall x \in A.$$

Así, tenemos que $f(A) = [m, M]$. Anteriormente hemos visto que $m \leq m_A(f) \leq M$, por lo que $m_A(f) \in f(A)$ y en consecuencia existe $x_m \in A$ tal que $f(x_m) = m_A(f)$. □

Proposición 1.5 (Aditividad de la integral respecto de los conjuntos de integración)**.** Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ acotados con $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ acotada. Supongamos que f es integrable en $A \cap B$ y $\displaystyle\int_{A \cap B} f = 0$. Entonces f es integrable en $A \cup B$ si y solo si f es integrable en A y en B, y en este caso

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

Demostración. Es fácil ver que

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}.$$

Por tanto, tenemos que

$$f \cdot \chi_{A \cup B} = f \cdot \chi_A + f \cdot \chi_B - f \cdot \chi_{A \cap B}.$$

La equivalencia se deduce de las propiedades de la linealidad de la integral. □

1.5. Conjuntos de medida nula

Lema 1.2. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, A tiene contenido nulo [a] si y solo si existe $R \supset A$ tal que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P \in \mathcal{P}(R)$ tal que $\displaystyle\sum_{J \in P,\ J \cap A \neq \emptyset} v(J) < \varepsilon$.

[a] A es medible Jordan y $v(A) = 0$.

Demostración. Tenemos que A tiene contenido nulo si y solo si es medible Jordan y $v(A) = 0$, es decir, si existe $R \subset \mathbb{R}^n$ rectángulo con $A \subset R$ y

$$0 \leq \underline{\int_R} \chi_A \leq \overline{\int_R} \chi_A \leq 0.$$

Esto último sucede si y solo si $\inf\{S(\chi_A, P) : P \in \mathcal{P}(R)\} \leq 0$, es decir, si $\forall \varepsilon > 0$ existe $P \in \mathcal{P}(R)$ tal que [1]

$$S(\chi_A, P) = \sum_{J \in P,\ J \cap A \neq \emptyset} v(J) < \varepsilon.$$

□

Proposición 1.6 (Caracterización de contenido nulo). $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene contenido nulo si y solo si $\forall \varepsilon > 0$ existe $\{J_1, \dots, J_N\}$ familia finita de rectángulos tal que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N} J_i \quad \text{y} \quad \sum_{i \in F}^{N} v(J_i) < \varepsilon.$$

Demostración. La primera implicación es trivial a partir del lema anterior, por lo que demostraremos únicamente la segunda implicación. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $\{J_1, \dots, J_N\}$ familia de rectángulos que recubren A y $\sum_{i=1}^{N} v(J_i) < \varepsilon$. Cogemos $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo grande tal que $\bigcup_{i=1}^{N} J_i \subset R$. Podemos obtener una partición $P \in \mathcal{P}(R)$ tal que cualquiera de los J_i es unión de rectángulos de P. Entonces,

$$\sum_{J \in P,\ J \cap A \neq \emptyset} v(J) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{J \in P, J \subset J_i} v(J) \leq \sum_{i=1}^{N} v(J_i) < \varepsilon.$$

Por el lema anterior, tenemos que A tiene contenido nulo. □

Proposición 1.7. Sea $\{A_1, \dots, A_N\} \subset \mathbb{R}^n$ una familia finita de conjuntos de contenido nulo. Entonces, $\bigcup_{i=1}^{N} A_i$ tiene contenido nulo.

Observación. En la proposición anterior es importante que la familia de conjuntos sea finita y no numerable. En efecto, ya vimos que $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ no tiene contenido nulo.

Definición 1.8 (Medida nula). Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que A tiene **medida nula** si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \{J_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ familia de rectángulos tales que

$$A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} J_k \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} v(J_k) < \varepsilon.$$

[1] Esto último se deduce de la caracterización de ínfimo: $S(\chi_A, P) < \overline{\int_R} \chi_A + \varepsilon \leq \varepsilon$.

Proposición 1.8. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene contenido nulo entonces también tiene medida nula.

Demostración. Supongamos que A tiene contenido nulo y sea $\varepsilon > 0$. Tenemos que existe $\{J_1, \dots, J_N\}$ familia de rectángulos tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N} J_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{N} v(J_i) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora, tomamos una sucesión cualquiera de rectángulos $\{J_{N+k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $v(J_{N+k}) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. De esta forma, es trivial que $\{J_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ recubre a A y

$$\sum_{i=1}^{\infty} v(J_i) = \sum_{i=1}^{N} v(J_i) + \sum_{k=1}^{\infty} v(J_{N+k}) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon.$$

□

Proposición 1.9. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una sucesión o familia finita de conjuntos de medida nula, entonces $\bigcup_{i\in I}$ también tiene medida nula.

Demostración. Tomamos $\varepsilon > 0$ y para cada $i \in I$ tomamos un rectángulo J_i tal que $A_i \subset J_i$ y $v(J_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. Claramente se tiene que

$$A \subset \bigcup_{i\in I} J_i \quad \text{y} \quad \sum_{i\in I} v(J_i) < \sum_{i\in I} \frac{\varepsilon}{2^i} < \varepsilon.$$

□

Ejemplo. Por la proposición anterior tenemos que $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ tiene medida nula pero como vimos no tiene contenido nulo puesto que no es medible Jordan. Es decir, **que un conjunto tenga medida nula no significa que tenga contenido nulo**.

Teorema 1.5. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Entonces K tiene contenido nulo si y solo si K tiene medida nula.

Proposición 1.10. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ medible Jordan. Entonces, A tiene contenido nulo si y solo si tiene medida nula.

Proposición 1.11. Si $\emptyset \neq B \subset A \subset \mathbb{R}^n$ tal que A tiene contenido (resp. medida) nulo, entonces B tiene contenido (resp. medida) nulo.

Ejemplo. Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo (no trivial, es decir, no tiene volumen nulo). Entonces, $v(R) > 0$ por lo que R no tiene contenido nulo, que se puede deducir a partir de la definición. Además, como R es medible Jordan y no tiene contenido nulo tenemos que no tiene medida nula.

Observación. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $A \supset R$ con R rectángulo no trivial. Entonces A no tiene contenido ni medida nula.

1.6. Teorema de Lebesgue

Teorema 1.6 (Teorema de Lebesgue)**.** Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ acotada y R un rectángulo. Entonces f es integrable si y solo si el conjunto de discontinuidades de f en R, $D(f)$, tiene medida nula.

Ahora estamos preparados para demostrar la proposición siguiente (que ya habíamos mencionado antes):

Corolario 1.2. Si $f : R \to \mathbb{R}$ es integrable, entonces $|f|$ también es integrable.

Demostración. Si f es continua en $x \in R$, entonces $|f|$ también es continua en x. De esta manera, tenemos que $D(|f|) \subset D(f)$. Así, como $D(f)$ tiene medida nula, por una proposición anterior tenemos que $D(|f|)$ también tiene medida nula, por lo que $|f|$ también es integrable en R. □

Corolario 1.3. Sean $f, g : R \to \mathbb{R}$ integrables. Entonces, $f + g$ es integrable en R.

Demostración. Es sencillo ver que $D(f+g) \subset D(f) \cup D(g)$. Como $D(f)$ y $D(g)$ tienen medida nula su unión también, por lo que $D(f+g)$ tiene medida nula y $f+g$ es integrable. □

Corolario 1.4. Sean $f, g : R \to \mathbb{R}$ integrables en R. Entonces, $f \cdot g$ es integrable en R.

Observación. Recordamos que $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado es medible Jordan si y solo si existe $R \subset \mathbb{R}^n$ rectángulo tal que χ_A es integrable en R. Entonces, por el criterio de Lebesgue, A es medible Jordan si y solo si $D(\chi_A)$ tiene medida nula. Tenemos que $D(\chi_A) = \partial A$, por lo que buscamos que ∂A tenga medida nula [a].

[a] Recordamos que $\partial A = \{x \in R \ : \ B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ y } B(x,\varepsilon) \cap (R/A) \neq \emptyset, \ \forall \varepsilon > 0\}$.

Ejemplo. Consideremos $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Tenemos que $\partial A = [0,1]$ y como $v(\partial A) = 1 \neq 0$, ∂A no tiene medida nula por lo que A no es medible Jordan.

Observación. Supongamos que A y B son medibles Jordan. Tenemos que

$$\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B.$$

Como χ_A y χ_B son integrables Riemann, tenemos que $\chi_{A\cap B}$ es integrable Riemann.