Métodos Numéricos - Demostraciones de las observaciones

Victoria Eugenia Torroja Rubio

8/9/2025

Proposición (Proposición 2.11, Página 71)**.** Sea $\|\cdot\|$ una norma en V. La aplicación $|||\cdot||| : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dada por

$$|||A||| = \sup_{v\neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|=1} \|Av\|,$$

es una norma matricial.

Demostración. Veamos que se cumplen las propiedades de las normas matriciales.

(i) Está claro que como $\|Av\| \geq 0$, $\forall v \in V$, si $|||A||| = 0$, debe ser que $A = 0$.

(ii) Si $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$|||\lambda A||| = \sup_{\|v\|=1} \|\lambda Av\| = \sup_{\|v\|=1} |\lambda| \, \|Av\| = |\lambda| \sup_{\|v\|=1} = |\lambda| \, |||A|||.$$

(iii) Si $A, B \in \mathcal{M}_n$,

$$|||A+B||| = \sup_{\|v\|=1} \| (A+B) \, v\| = \sup_{\|v\|=1} \|Av+Bv\| \leq \sup_{\|v\|=1} (\|Av\| + \|Bv\|) = \sup_{\|v\|=1} \|Av\| + \sup_{\|v\|=1} \|Bv\|.$$

(iv) Si $A, B \in \mathcal{M}_n$,

$$|||AB||| = \sup_{\|v\|=1} \|ABv\| \leq |||A||| \cdot \sup_{\|v\|=1} \|Bv\| = |||A||| \cdot |||B|||.$$

En efecto, por definición tenemos que

$$|||A||| = \sup_{v\neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} \geq \frac{\|Av\|}{\|v\|} \iff |||A||| \cdot \|v\| \geq \|Av\|.$$

$\square$