Probabilidad

Victoria Torroja Rubio

8/9/2025

Índice general

Profesora: Elena Landáburu
Correo: elenalan@ucm.es
Despacho: 409
Evaluación:

- 80 % Examen final (común para todos los grupos)
- 20 % Evaluación continua (ejercicios a entregar en clase)

Bibliografía: Teoría de la probabilidad de Pilar Ibarrola

Temas:

- Estructuras sobre las partes de un cojunto (límites, álgebra, σ-álgebras).
- Probabilidad (sucesos, probabilidad condicionada, teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes).
- Variables aleatorias unidimensionales (discretas, absolutamente continuas, mixtas).
- Modelos de probabilidad (discretos, continuos).
- Variables aleatorias bidimensionales (discretas, continuas).
- Regresión y correlación.
- Convergencia de sucesiones de variables aleatorias.

Capítulo 1

Estructuras sobre las partes de un conjunto

Sea Ω un cojunto fijo que en lo sucesivo se denominará **espacio total**. Consideramos el conjunto $\mathcal{P}(\Omega)$ de las partes de Ω.
Recibirá el nombre de sucesión de conjuntos toda aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathcal{P}(\Omega)$ y se representará por $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

Definición 1.1 (Límite inferior)**.** Se denomina **límite inferior** de la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y se representa por $\liminf A_n$ al conjunto de los puntos de Ω que pertenecen a todos los A_n, excepto a lo sumo a un número finito de ellos.

Podemos apreciar que también se puede definir el límite inferior como el conjunto de puntos de Ω cuyos elementos pertenecen a todos los A_n desde un n en adelante.

Definición 1.2 (Límite superior)**.** Se denomina **límite superior** de la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y se representa por $\limsup A_n$, al conjunto de los puntos de Ω que pertenecen a infinitos A_n.

Observación. Podemos observar que las definiciones anteriores caracterizan a dos conjuntos que pueden ser distintos. En efecto, si $x \in \{A_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, tenemos que $x \in \limsup A_n$ pero $x \notin \liminf A_n$.

Proposición 1.1. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos. Se cumple:

$$\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n, \quad \limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n.$$

Demostración. **(i)** Demostramos la primera igualdad. En primer lugar, si $x \in \liminf A_n$ tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$, $x \in A_n$, así, $x \in \bigcap_{n=N}^{\infty} A_n$. De esta forma,

$x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_n$. Por tanto, $\liminf A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$. Recíprocamente, si $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$ tenemos que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$, $x \in \bigcap_{n=N}^{\infty} A_n$. Es decir, tenemos que a partir de un número N, x pertenece a todos los A_n, por lo que $x \in \liminf A_n$. De esta manera $\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \subset \liminf A_n$ y queda demostrada la igualdad.

(ii) Si $x \in \limsup A_n$, tenemos que x pertenece a infinitos A_n, por lo que para cualquier $n_0 \in \mathbb{N}$, existe $n \geq n_0$ tal que $x \in A_n$. Así, tenemos que $\forall k \in \mathbb{N}$, $x \in \bigcup_{n=k} A_n$, es decir, $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$. Así, queda demostrado que $\limsup A_n \subset \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$. Recíprocamente, si $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$, tenemos que $\forall k \in \mathbb{N}$, $x \in \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$, por lo que debe ser que x está en infinitos A_n, es decir, $x \in \limsup A_n$. Así, $\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \subset \limsup A_n$ y queda demostrada la igualdad.

□

Proposición 1.2. Para toda sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ se verifica que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

Demostración. Si $x \in \liminf A_n$, tenemos que x pertenece a todos los A_n sin, como mucho, un número finito de ellos. Por tanto, es trivial que $x \in \limsup A_n$, puesto que pertenece a infinitos A_n. □

Definición 1.3 (Sucesión convergente)**.** Se dice que una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es **convergente** si $\liminf A_n = \limsup A_n$, y en este caso el límite de la sucesión es

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \liminf A_n = \limsup A_n.$$

Definición 1.4 (Sucesión monótona)**.** La sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es **monótona creciente** o **expansiva** si $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que $A_n \subset A_{n+1}$.
Similarmente, la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es **monótona decreciente** o **contractiva** si $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que $A_n \supset A_{n+1}$.

Proposición 1.3. Toda sucesión monótona creciente o decreciente tiene límite.

Demostración. Como hemos visto antes, dado que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$ para cualquier $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, basta con demostrar que el límite superior es subconjunto del límite inferior.

(i) Supongamos primero que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es decreciente. Así, tenemos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n-1}$. De esta manera, si $x \in \limsup A_n$, tenemos que existe una subsucesión $\left\{A_{n_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $x \in A_{n_j}$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Así, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, podemos coger $n_j \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $n_j \geq k$. Así, tenemos que, por ser la sucesión decreciente,

$$A_{n_j} \subset A_{n_j-1} \subset \cdots \subset A_k \subset \cdots \subset A_1.$$

De esta manera, está claro que $x \in A_k$. Así, hemos demostrado que x pertenece a todos los A_k, por lo que $x \in \liminf A_n$ y la sucesión converge.

(ii) Supongamos que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, es decir, $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que $A_n \subset A_{n+1}$. Entonces, si $x \in \limsup A_n$ tenemos que existe una subsucesión $\left\{A_{n_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que x pertenece a todos los A_{n_j}. Así, para n_1 tenemos que

$$x \in A_{n_1} \subset A_{n_1+1} \subset \cdots .$$

De esta manera, x pertenece a todos los A_n salvo excepto a un número finito de ellos. Por tanto, $x \in \liminf A_n$ y $\limsup A_n \subset \liminf A_n$, por lo que la sucesión converge.

$\square$

Definición 1.5 (Semianillo)**.** Dado el espacio total Ω, una clase $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tiene una estructura de **semianillo** si

(a) $\emptyset \in \mathcal{C}$.

(b) $\forall A, B \in \mathcal{C}$, $A \cap B \in \mathcal{C}$.

(c) $\forall A, B \in \mathcal{C}$ existe una sucesión finita $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$ con $C_i \cap C_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ tal que $A - B = \bigcup\limits_{1\leq j\leq n} C_j$.

Proposición 1.4. Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ un semianillo.

1. $\forall B \in \mathcal{C}, \forall C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$, $\exists A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{C}$ con $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ tales que
$$B - \bigcup_{i=1}^{n} C_i = \bigcup_{j=1}^{m} A_j.$$
2. Cualesquiera que sean $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$, $\exists A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{C}$ con $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ tales que
$$\bigcup_{i=1}^{n} C_i = \bigcup_{j=1}^{m} A_j.$$
3. Cualesquiera que sean $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$ se tiene que $C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_n \in \mathcal{C}$.

Demostración. Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ un semianillo.

1. Si $B, C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$, tenemos que

$$B - \bigcup_{1\leq i\leq n} C_i = B - (C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n) = (B - C_1) \cap (B - C_2) \cap \cdots \cap (B - C_n)$$

2. Aplicando que $\emptyset \in \mathcal{C}$ y **(c)**, tenemos que $\exists A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{C}$, con $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, tales que

$$\bigcup_{1\leq i\leq n} .$$

3. Es trivial por inducción.

$\square$

Definición 1.6 (Anillo)**.** Dado el espacio total Ω, una clase $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tiene estructura de **anillo** si

(a) $\forall A, B \in \mathcal{R}$, $A \cap B \in \mathcal{R}$.

(b) $\forall A, B \in \mathcal{R}$, $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

Proposición 1.5. Sea $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ un anillo.

1. $\forall A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{R}$ se tiene que $\bigcup_{1\leq i\leq n} A_i \in \mathcal{R}$.
2. $\forall A, B \in \mathcal{R}$ se tiene que $A - B \in \mathcal{R}$.
3. Todo anillo es semianillo.
4. La intersección de anillos es un anillo.

Definición 1.7 (Álgebra)**.** Dado el espacio total Ω, una clase $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tiene una estructura de **álgebra** si

(a) $\Omega \in \mathcal{Q}$.

(b) $\forall A \in \mathcal{Q}$, $A^c \in \mathcal{Q}$.

(c) $A, B \in \mathcal{Q}$, $A \cup B \in \mathcal{Q}$.

Proposición 1.6.

1. $\forall A, B \in \mathcal{Q}$ se tiene que $A \cap B \in \mathcal{Q}$.
2. $\forall A, B \in \mathcal{Q}$ se tiene que $A - B \in \mathcal{Q}$.
3. $\forall A, B \in \mathcal{Q}$ se tiene que $A \Delta B \in \mathcal{Q}$.
4. Para cualquier sucesión finita $A_1, \ldots, A_n$ con $A_i \in \mathcal{Q}$, $i = 1, \ldots, n$, se tiene que $\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i \in \mathcal{Q}$.
5. Todo álgebra es un anillo.

Demostración.

1. Aplicando **(b)** y **(c)** tenemos que
$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{Q}.$$
2. Aplicando **(b)** y el apartado anterior tenemos que
$$A - B = A \cap B^c \in \mathcal{Q}.$$
3. Aplicando los dos apartados anteriores, está claro que
$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) \in \mathcal{Q}.$$
4. Se deduce por inducción a partir de **(c)**.
5. Ya hemos visto que se cumple **(a)**, tenemos que ver que se cumple **(b)**.

□

Definición 1.8 (σ-álgebra)**.** Dado el espacio total Ω, una clase $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tiene estructura de **σ-álgebra** si

(a) $\Omega \in \mathcal{A}$.

(b) $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.

(c) Dada cualquier sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ verifica $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Proposición 1.7.

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2. Para cualquier sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $A_n \in \mathcal{A}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.
3. Para cualquier sucesión finita $A_1, \ldots, A_n$ con $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, \ldots, n$, se tiene que $\bigcup_{1\leq i\leq n} A_i \in \mathcal{A}$.
4. Para cualquier sucesión finita $A_1, \ldots, A_n$ con $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, \ldots, n$, se tiene que $\bigcap_{1\leq i\leq n} A_i \in \mathcal{A}$.
5. Toda σ-álgebra es un álgebra.
6. Todo álgebra con un número finito de elementos es σ-algebra.
7. Toda σ-álgebra es cerrada respecto de la operación paso al límite para cualquier sucesión.
8. La intersección de σ-algebras definidas sobre el mismo espacio total es una σ-álgebra.
9. Dada una clase $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ existe una mínima σ-álgebra que la contiene. Esta será la intersección de todas las σ-álgebras que contengan a $\mathcal{B}$. Se indicará por $\sigma(\mathcal{B})$.

Demostración.

1. Por **(a)** y **(b)** tenemos que $\Omega^c = \emptyset \in \mathcal{A}$.
2. Aplicando **(b)** y **(c)**, tenemos que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right)^c \in \mathcal{A}.$$

   En efecto, tenemos que $A_n^c \in \mathcal{A}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \in \mathcal{A}$ y su complementario también pertenece a $\mathcal{A}$.

3. Podemos coger la sucesión $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $A_m = A_m$ con $1 \leq m \leq n$, y $A_m = \bigcup_{1\leq i\leq n} A_i$ para $m > n$. Así, está claro que, aplicando **(c)**,

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m = \bigcup_{1\leq i\leq n} A_i \in \mathcal{A}.$$

4. Se demuestra de forma análoga al apartado anterior.
5. Basta demostrar la condición **(c)**, que es cierto por lo demostrado en **3**.
6.

7. Dada una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tal que $A_n \in \mathcal{A}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, es trivial que si existe $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ debe ser que $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \limsup A_n$. Así, por lo demostrado anteriormente,
$$\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}.$$
8. Está claro que se cumplen **(a)** y **(b)**.

□

Observación. La unión de dos σ-álgebras puede no ser σ-álgebra.

Definición 1.9 (Clase monótona)**.** Dado el espacio total Ω, una clase $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tiene estructura de clase monótona si y solo si es cerrada bajo la operación paso al límite para sucesiones monótonas de subconjuntos de $\mathcal{M}$.

Proposición 1.8.

1. La intersección de dos clases monótonas, del mismo espacio total es otra clase monótona.
2. La intersección de una familia arbitraria de clases monótonas es clase monótona.
3. Dada una clase $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ siempre existirá una mínima clase monótona que contenga a $\mathcal{B}$. Se denotará por $\mathcal{M}(\mathcal{B})$. Será la intersección de todas las clases monótonas que contengan a $\mathcal{B}$.
4. Toda σ-álgebra es clase monótona.
5. Toda clase monótona que sea álgebra, es σ-álgebra.
6. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es σ-álgebra si y solo si $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es álgebra y clase monótona.

Definición 1.10. La σ-álgebra engendrada por una clase $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es la σ-álgebra más pequeña que contiene a $\mathcal{B}$ que se representa por $\sigma(\mathcal{B})$.

Definición 1.11 (Espacio medible)**.** Al par $(\Omega, \mathcal{A})$, donde $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es una σ-álgebra se le denomina **espacio medible** o **espacio probabizable**. A los elementos de $\mathcal{A}$ se les llama conjuntos medibles.

Capítulo 2

Introducción al cálculo de probabilidades

Por experimento entendemos cualquier acción que pueda dar lugar a resultados identificables. Un experimento que da lugar siempre al mismo resultado, recibe el nombre de **experimento determinista**.

Definición 2.1 (Experimento aleatorio). Un experimento que pueda dar lugar a varios resultados, sin que sea posible anunciar con certeza cuál de éstos va a ser observado, recibe el nombre de **experimento aleatorio**. Estos tienen tres propiedades:

1. Los posibles resultados del experimento son conocidos previamente.
2. No se puede predecir de antemano el resultado.
3. Realizado en condiciones análogas puede dar lugar a resultados distintos en cada experiencia particular.

Ejemplo. Un ejemplo de experimento aleatorio es el del lanzamiento de una moneda, mientras que un ejemplo de un experimento determinista es el del fenómeno de los días y las noches.

Definición 2.2 (Espacio muestral). Llamaremos **espacio muestral**, Ω, al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Observación. Hay que tener en cuenta que un mismo experimento puede dar lugar a distintos espacios muestrales.

Ejemplo. Consideremos como experimento aleatorio el lanzamiento de un dado.

- Si el interés es el resultado numérico, tenemos que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Si el interés es que el resultado sea múltiplo de 2, tenemos que $\Omega = \{par, impar\}$.

Observación. Los espacios muestrales pueden ser finitos o infinitos.

Definición 2.3 (Suceso). Un **suceso** es un subconjunto del espacio muestral. Se trata de un suceso **elemental** si están formados por un único elemento, mientras que son sucesos **compuestos** aquellos que son unión de sucesos elementales.

Ejemplo. En el lanzamiento de un dado, el suceso de que salga un 2 es un suceso elemental, mientras que el suceso de que salga par es un suceso compuesto.

2.1. Axiomas de la probabilidad

Definición 2.4 (Axiomática de Kolmogorov). Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio probabilizable. Definimos una función de conjunto P dediante una aplicación de $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{R}$ que cumple que:

Axioma 1. $\forall A \in \mathcal{A}$, $P(A) \geq 0$.

Axioma 2. $P(\Omega) = 1$.

Axioma 3. $\forall A, B \in \mathcal{A}$ con $A \cap B \neq \emptyset$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Axioma 3 generalizado. Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, con $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, entonces

$$P\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Observación.

1. Está claro que $P(\emptyset) = 0$, puesto que $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$, podemos afirmar que
$$P(\emptyset) = P(\emptyset \cup \emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset) \iff P(\emptyset) = 0.$$
2. Si $A \in \mathcal{A}$, tenemos que $P(A^c) = 1 - P(A)$. En efecto, tenemos que $A^c \cap A = \emptyset$ y $A^c \cup A = \Omega$, por lo que
$$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) = P(\Omega) = 1 \iff P(A^c) = 1 - P(A).$$
3. Si $A, B \in \mathcal{A}$ con $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.