

# Elementos de Matemáticas y Aplicaciones

Victoria Torroja Rubio

9/10/2024 -

# Índice general

<b>1. Teoría de Números</b>	<b>2</b>
1.1. División Euclídea . . . . .	3
1.2. Máximo Común Divisor . . . . .	4
1.3. Números Primos . . . . .	6
1.4. Congruencias . . . . .	9
1.5. Aplicaciones . . . . .	21
1.5.1. Dígitos de control . . . . .	21
1.5.2. Criptografía . . . . .	22
<b>2. Grupos de simetrías. Mosaicos.</b>	<b>25</b>
2.1. Grupos. Isomorfismos y homomorfismos de grupos. . . . .	25
2.1.1. Subgrupo. Grupos finitos. Orden . . . . .	28
2.1.2. Isomorfismos de grupos . . . . .	29
2.1.3. Subgrupos normales. Grupo cociente. . . . .	31
2.2. Isometrías del plano . . . . .	32
2.3. Grupo diédrico . . . . .	38
<b>3. Trigonometría plana y esférica</b>	<b>40</b>
3.1. Trigonometría plana . . . . .	40
3.2. Trigonometría esférica . . . . .	42
3.2.1. Triángulos esférico . . . . .	42
<b>4. Dinámica Discreta</b>	<b>43</b>
4.1. Sistemas dinámicos lineales de primer orden . . . . .	44
4.1.1. Solución general y particular de los sistemas homogéneos y afines . . . . .	49
4.2. Sistemas dinámicos lineales de segundo orden . . . . .	51
4.2.1. Sistemas dinámicos de segundo orden homogéneos . . . . .	51
4.2.2. Sistemas dinámicos de segundo orden afines . . . . .	53
4.3. Sistemas no lineales . . . . .	54
4.3.1. Ciclos . . . . .	55

# Capítulo 1

## Teoría de Números

**Definición 1.1.**  $R$  es una relación de orden sobre un conjunto  $E$  si:

(i)  $R$  es reflexiva.

$$\forall x \in E, xRx.$$

(ii)  $R$  es transitiva.

$$\forall x, y, z \in E, xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz.$$

(iii)  $R$  es antisimétrica.

$$\forall x, y \in E, xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y.$$

**Definición 1.2.**  $R$  es una relación de orden total si  $R$  es una relación de orden y

$$\forall x, y \in E, xRy \vee yRx.$$

**Teorema 1.1** (Principio de la buena ordenación). Todo subconjunto no vacío  $S \subset \mathbb{N}$  contiene un primer elemento, i.e.

$$\exists a \in \mathbb{N}, a \in S, \forall b \in S, a \leq b.$$

**Definición 1.3.** Sea  $R$  una relación de orden sobre  $E$ . Decimos que  $R$  es una **buena ordenación** si para cada subconjunto no vacío  $X$  de  $E$  existe un elemento  $a \in X$  tal que  $a$  está relacionado con todos los elementos de  $X$ .

Es decir, la relación en  $\mathbb{N}$  definida como  $a \leq b$  es una buena ordenación (por el Principio de la buena ordenación). Sin embargo, esto no se cumple en  $\mathbb{Z}$ , pues puedo tomar subconjuntos en el que no exista un menor número (el subconjunto de los números negativos). Sin embargo, se cumple que

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \{m \in \mathbb{Z} : a \leq m\}$$

está bien ordenado con la relación definida anteriormente.

**Teorema 1.2.** Todo buen orden es total.

**Definición 1.4** (Relación de divisibilidad). Si  $m, n \in \mathbb{Z}$ , decimos que  $m$  divide a  $n$ , es decir,  $m|n$ , si existe un número entero  $d$  tal que  $n = m \cdot d$ .

La relación de divisibilidad en  $\mathbb{N}$  es una relación de orden **no total** (Considera dos números primos distintos, por ejemplo 3 y 5, 3 no divide a 5 y 5 no divide a 3). En  $\mathbb{Z}$  no es una relación de orden, pues no se cumple la condición antisimétrica. Para demostrar esto, considera  $a \in \mathbb{Z}$  y  $-a \in \mathbb{Z}$ , entonces tenemos que  $a|-a$  y  $-a|a$ , pero  $a \neq -a$  si  $a \neq 0$ .

## 1.1. División Euclídea

**Teorema 1.3** (División Euclídea). Sean  $m, n \in \mathbb{Z}$ , con  $m \neq 0$ . Entonces existen  $q, r \in \mathbb{Z}$  únicos tales que

$$n = mq + r, \quad 0 \leq r < |m|.$$

Denominamos a  $q$  el cociente y a  $r$  el resto.

*Demostración.* Primero demostraremos la existencia.

(i) Sea  $m > 0$ .

Sea  $S = \{mx - n : x \in \mathbb{Z}\}$ .  $S$  tiene números positivos, por lo que existe un mínimo  $mt - n > 0$ . Entonces tenemos que

$$m(t-1) - n \leq 0 \Rightarrow 0 \leq n - m(t-1).$$

Por tanto,

$$0 \leq n - m(t-1) = \underbrace{n - mt}_{<0} + m < m.$$

Sea  $q = t - 1$  y  $r = n - m(t - 1)$ , entonces:

$$n = m(t-1) + n - m(t-1) = mq + r.$$

Esto también se puede demostrar por reducción al absurdo. Nos tenemos que dar cuenta de que para cualquier  $q \in \mathbb{Z}$  tenemos que

$$n = mq + (n - mq).$$

La idea es encontrar un  $q \in \mathbb{Z}$  que satisfazca la hipótesis para  $r$ .

Si consideramos el conjunto  $S_0 = \{n - mx : x \in \mathbb{Z} \wedge n - mx \geq 0\}$ . Dado que  $S_0 \subset \mathbb{N}$  y  $S_0 \neq \emptyset$ , podemos encontrar un menor elemento  $r = n - mq$  con  $q \in \mathbb{Z}$ . Entonces, está claro que  $r \geq 0$  dado que  $r \in S_0$ . Si  $r \geq m$  tenemos que:

$$0 \leq r - m = n - mq - m = n - m(q+1) = r - m < r.$$

Por tanto,  $n - m(q+1)$  sería un elemento de  $S_0$  menor que  $r$ , lo cual es una contradicción.

(ii) Si  $m < 0$ , entonces  $-m > 0$  y aplicamos el razonamiento anterior.

Ahora demostramos la unicidad. Suponemos que hay dos cocientes y dos restos,

$$n = mq_1 + r_1 = mq_2 + r_2.$$

Además, suponemos que  $q_1 \neq q_2$ , por lo que  $|q_1 - q_2| \geq 1$ . También sabemos que

$$|m(q_1 - q_2)| = |m||q_1 - q_2| \geq |m|.$$

Por otra parte,

$$|m(q_1 - q_2)| = |r_1 - r_2| < |m|.$$

Por tanto tenemos una contradicción, y debe ser que  $q_1 = q_2$  y, consecuentemente,  $r_1 = r_2$ . □

## 1.2. Máximo Común Divisor

**Definición 1.5** (Máximo Común Divisor). Sean  $n, m \in \mathbb{Z}$ , con  $n, m \neq 0$ , tenemos que  $d = \text{mcd}(m, n)$  ( $d > 0$ ) si

- $d$  divide a  $a$  y  $b$
- cualquier otro divisor común de  $a$  y  $b$  divide a  $d$

**Teorema 1.4.** Si  $m, n \neq 0$  y  $m, n \in \mathbb{Z}$ , entonces:

- (i) Existe algún  $\text{mcd}(m, n) = d$
- (ii) El máximo común divisor es único
- (iii) **Identidad de Bézout**

$$\exists u, v \in \mathbb{Z}, d = mu + nv.$$

*Demostración.* (i) Esto queda demostrado en la primera parte de la demostración para el Teorema 1.5.

(ii) Si existen dos máximos comunes divisores,  $d_1$  y  $d_2$ , tenemos que  $d_1|d_2$  y  $d_2|d_1$ . Por tanto, al tratarse de dos números positivos que se dividen mutuamente ha de ser el caso que  $d_1 = d_2$ .

(iii) En primer lugar, es obvio que  $r_1 = n - mq_1$ . Similarmente,  $r_2 = m - r_1q_2 = m - (n - mq_1)q_2 = -q_2n + m(1 + q_1q_2)$ . Este proceso lo podemos repetir hasta  $r_t$ . □

**Teorema 1.5** (Algoritmo de Euclides). Tenemos  $m, n \neq 0$  y  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Si  $n > m$ , por el Teorema 1.3 tenemos que existen  $q_1, r_1 \in \mathbb{Z}$  tales que

$$n = mq_1 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < |m|.$$

También podemos poner:

$$m = r_1 q_2 + r_2, \quad 0 < r_2 < r_1.$$

En la posición  $i$ :

$$r_i = r_{i+1} q_{i+2} + r_{i+2}, \quad 0 < r_{i+2} < r_{i+1}.$$

En algún momento vamos a tener:

$$r_{t-2} = r_{t-1} q_t + r_t, \quad 0 < r_t < r_{t-1}$$

$$r_{t-1} = r_t q_{t+1} + 0.$$

Entonces,  $\text{mcd}(m, n) = r_t$ .

*Demostración.* Tenemos que cada resto siempre va a ser menor que el módulo del divisor y, además, cada resto va a ser menor que el anterior. Por esta razón, llegará un momento en el que el resto sea 0 (en, como mucho,  $|m|$  etapas).

Vamos a comprobar que  $r_t$  es el máximo común divisor. De la última ecuación tenemos que  $r_t | r_{t-1}$ . De manera similar,  $r_{t-1} | r_{t-2}$ , y así sucesivamente hasta llegar a concluir que  $r_t$  divide a  $n$  y a  $m$ . Suponemos que  $j$  también divide a  $m$  y  $n$ . Entonces, de la primera ecuación obtenemos que  $j$  divide a  $r_1$ , de la segunda obtenemos que  $j$  divide a  $r_2$  y así sucesivamente hasta llegar al hecho de que  $j$  divide a  $r_t$ .  $\square$

**Lema 1.1.** Si  $a, b \in \mathbb{Z}$  son no nulos y  $a > b$  tenemos que

$$a = bc + r.$$

Cualquier divisor común de  $a$  y  $b$  es también divisor de  $r$  y cualquier divisor común de  $b$  y  $r$  lo es también de  $a$ .

Además, si  $r \geq 1$ , se cumple que  $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, r)$ .

1

**Ejemplo 1.1.** Hallamos el máximo común divisor de 26 y 382. Tenemos que:

$$382 = 26 \cdot 14 + 18$$

$$26 = 18 \cdot 1 + 8$$

$$18 = 8 \cdot 2 + 2$$

$$8 = 2 \cdot 4 + 0.$$

Por tanto, el primer resto no nulo es 2 y el máximo común divisor de 26 y 382 es 2.

<sup>1</sup>Esto está demostrado en los ejercicios de Matemáticas Básicas y nos ayuda a demostrar el Algoritmo de Euclides.

Calculamos la identidad de Bézout para estos dos números:

$$\begin{aligned} 2 &= 18 - 2 \cdot 8 \\ &= 18 - (2 \cdot (26 - 18)) \\ &= (382 - 26 \cdot 14) - (2 \cdot (26 - 18)) \\ &= 3 \cdot 382 - 44 \cdot 26. \end{aligned}$$

Aquí nos podemos dar cuenta de que **la Identidad de Bézout no es única**, pues podemos escribir:

$$\begin{aligned} 2 &= 3 \cdot 382 + (-44) \cdot 26 \\ &= 3 \cdot 382 + 382 \cdot 26 \cdot k - 382 \cdot 26 \cdot k + (-44) \cdot 26 \\ &= 382 \cdot (3 + 26k) + 26 \cdot (-44 - 382k). \end{aligned}$$

**Definición 1.6** (Mínimo Común Múltiplo). Consideramos  $m, n \in \mathbb{Z}$  no nulos. Decimos que  $l = \text{mcm}(m, n)$ , o  $l$  es el mínimo común múltiplo de  $m$  y  $n$  si:

- ambos lo dividen.

$$m|l \quad \text{y} \quad n|l.$$

- divide a cualquier entero  $t$  al que  $m$  y  $n$  dividen.

$$m|t \wedge n|t \Rightarrow l|t.$$

**Teorema 1.6.** Si  $a, b \in \mathbb{Z}$  no nulos,

$$\text{mcd}(a, b) \cdot \text{mcm}(a, b) = |a \cdot b|.$$

### 1.3. Números Primos

**Definición 1.7.** Un **número primo** es todo entero  $p > 1$  cuyos únicos divisores son 1 y  $p$ . A los números no primos se les llama **compuestos**.

**Proposición 1.1.** Todo número natural  $n > 1$  tiene algún divisor primo.

*Demostración.* Lo demostramos por inducción sobre  $n$ . Esto claramente se cumple para  $n = 2$ , pues  $2|2$ . Si  $n > 2$ , asumimos que  $\forall k, k \leq n - 1$  tiene algún divisor primo. Si  $n$  es primo, hemos ganado. Si  $n$  es compuesto, es divisible por  $t \in \mathbb{N}$  con  $t \neq 1$  y  $t \neq n$ . Por tanto, como  $t < n$ ,  $t$  tiene algún divisor primo, que será también divisor de  $n$ .  $\square$

**Proposición 1.2.** Todo número natural  $n > 1$  se puede expresar como producto de primos.

*Demostración.* Lo hacemos por reducción al absurdo. Asumimos que existe algún  $n \in \mathbb{N}$  que no es producto de primos. Definimos

$$S = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ no es producto de primos}\} \subset \mathbb{N}.$$

Asumimos que  $k$  es el elemento más pequeño en  $S$ . Entonces  $k$  se puede expresar como  $k = a \cdot b$  con  $a, b \neq k$  y  $a, b < k$ . Entonces, como  $a$  y  $b$  son menores que  $k$  tenemos que  $a$  y  $b$  son producto de primos, esto nos da una contradicción.

También se puede demostrar por inducción. Sabemos que se cumple para  $n = 2$  pues  $2 = 2 \cdot 1$ . Si  $n > 2$  y asumimos que se cumple para todos los números  $k \leq n - 1$ . Si  $n$  es primo hemos ganado. Si  $n$  no es primo, tenemos que  $n$  es compuesto y, consecuentemente,  $n = a \cdot b$  con  $a, b \neq n$  y  $a, b < n$ . Por tanto,  $a$  y  $b$  se puede expresar como producto de primos porque son menores que  $n$  y, consecuentemente,  $n$  se puede expresar como producto de primos.  $\square$

**Teorema 1.7** (Teorema de Euclides). El conjunto de números primos es infinito.

*Demostración.* Supongamos que el conjunto de números primos fuera finito, es decir,

$$P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}.$$

Entonces tomamos  $k = 1 + p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$ . Ningún  $p_i \in P$  divide a  $k$ , pero  $k$  tiene que tener algún divisor primo, por tanto tiene que ser alguno que no está en  $P$ .  $\square$

**Teorema 1.8.** Si  $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$  y  $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$  primo con  $a$ . Si  $m$  divide a  $a \cdot b$  entonces  $m$  divide a  $b$ .

*Demostración.* Tenemos que como  $m$  es primo con  $a$ , entonces  $\text{mcd}(a, m) = 1$ . Aplicando la identidad de Bézout, sabemos que  $\exists u, v \in \mathbb{Z}$  tales que

$$1 = mu + av.$$

Además, si multiplicamos por  $b$  tenemos que

$$b = bmu + abv.$$

Como  $m|m$  y  $m|ab$ , tenemos que  $m|b$ .  $\square$

**Teorema 1.9.** Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$  y  $p$  un número primo. Si  $p$  divide a  $a \cdot b$  entonces  $p|a$  o  $p|b$ .

*Demostración.* Si  $p|a$  hemos ganado. Sin pérdida de generalidad, si  $p$  no divide a  $a$ , tenemos que  $\text{mcd}(p, a) = 1$ . Por el teorema anterior, debe darse que  $p|b$ .  $\square$



**Corolario 1.1.** Sean  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$  y  $p$  primo, tal que

$$p \mid \prod_{i=1}^n a_i.$$

Entonces  $p \mid a_i$  para algún  $i$ .

*Demostración.* Esto se puede demostrar por inducción fuerte. El caso inicial es el teorema anterior. Asumimos que si esto se sostiene para  $k \leq n-1$ . Si cogemos el producto de  $n$  números que es divisible entre  $p$ , tenemos que

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_n \cdot \prod_{i=1}^{n-1} a_i.$$

Por la hipótesis de inducción, tenemos que  $p$  divide a  $a_n$  o  $p$  divide a  $a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdots a_1$ . Por la hipótesis de inducción,  $p$  divide a algún  $a_i$ .  $\square$

**Teorema 1.10.** Sea  $n > 1$  y  $n \in \mathbb{Z}$ . La expresión de  $n$  como producto de primos es única (salvo el orden).

*Demostración.* Sabemos que el teorema es cierto para  $n = 2$ . Asumimos que  $n$  es el número más pequeño para el que hay factorizaciones distintas en números primos. Entonces,

$$n = a_1 \cdot a_2 \cdots a_k = p_1 \cdot p_2 \cdots p_l.$$

Sabemos que  $p_1 \mid n$ . Por el teorema anterior tenemos que  $p_1 \mid (a_1 \cdot a_2 \cdots a_k)$ , y por tanto,  $p_1 \mid a_i$ . Como  $a_i$  también es primo, tenemos que  $a_i = p_1$ . Si dividimos entre ambos números nos quedamos con

$$p_2 \cdot p_3 \cdots p_l = a_1 \cdot a_2 \cdots a_{i-1} \cdot a_{i+1} \cdots a_k.$$

Entonces, estas dos factorizaciones son distintas, pero  $p_2 \cdot p_3 \cdots p_l < n$ , que contradice nuestra hipótesis inicial de que  $n$  era el número más pequeño con factorizaciones distintas.  $\square$

**Definición 1.8.** Se dice que  $m, n \in \mathbb{Z}$  no nulos son **primos entre sí** cuando  $\text{mcd}(m, n) = 1$ .

**Corolario 1.2.** Si  $m$  y  $n$  son coprimos, tenemos que

$$\text{mcm}(m, n) = |m \cdot n|.$$

Sabemos que todo número entero se puede escribir como una factorización de primos. Es decir, si  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}, \quad p_1 < p_2 < \cdots < p_r.$$

Para otro  $m \in \mathbb{Z}$ ,

$$m = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r}.$$

Con  $\alpha_i, \beta_i \geq 0$ . Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$  denotamos:

$$\gamma_i = \min \alpha_i, \beta_i \quad \text{y} \quad \delta_i = \max \{\alpha_i, \beta_i\}.$$

Vamos a calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo.

- $\text{mcd}(m, n) = p_1^{\gamma_1} \cdots p_r^{\gamma_r}$
- $\text{mcm}(m, n) = p_1^{\delta_1} \cdots p_r^{\delta_r}$

Además sabemos que  $\delta_i + \gamma_i = \alpha_i + \beta_i$ .

$$\begin{aligned} m \cdot n &= (p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}) \cdot (p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r}) \\ &= p_1^{\alpha_1 + \beta_1} \cdots p_r^{\alpha_r + \beta_r} = p_1^{\delta_1 + \gamma_1} \cdots p_r^{\delta_r + \gamma_r} \\ &= (p_1^{\gamma_1} \cdots p_r^{\gamma_r}) \cdot (p_1^{\delta_1} \cdots p_r^{\delta_r}) = \text{mcd}(m, n) \cdot \text{mcm}(m, n). \end{aligned}$$

2

**Definición 1.9** (Función de Euler). Sea  $n \in \mathbb{Z}$  con  $n \neq 0$ .

$$\varphi(n) = |\{t \in \mathbb{N} : 1 \leq t \leq n, \text{mcd}(n, t) = 1\}|.$$

**Ejemplo 1.2.** Tenemos que  $\varphi(1) = 1$ , además  $\varphi(2) = 1$ . Para  $\varphi(3)$ , tenemos que 1 y 2 son coprimos con 3, por lo que  $\varphi(3) = 2$ .  $\varphi(4) = 2$ ,  $\varphi(5) = 4$ .

**Teorema 1.11.** Si  $p$  es primo y  $k \in \mathbb{Z}^+$ . Entonces,

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}.$$

**Ejemplo 1.3.**

$$\varphi(5^3) = 5^3 - 5^2.$$

## 1.4. Congruencias

**Definición 1.10** (Relación de equivalencia). Una relación  $R$  en un conjunto  $E$  es una relación que verifica:

(i)  $R$  es reflexiva.

$$\forall x \in E, xRx.$$

(ii)  $R$  es simétrica.

$$\forall x, y \in E, xRy \Rightarrow yRx.$$

<sup>2</sup>Estamos asumiendo, sin pérdida de generalidad, que  $n, m \in \mathbb{N}$ , o que son enteros positivos.

(iii)  $R$  es transitiva.

$$\forall x, y, z \in R, xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz.$$

**Definición 1.11** (Relación de congruencia módulo  $n$ ). Si  $m \in \mathbb{Z}^+$  decimos que  $a$  y  $b$  están relacionados por una relación de equivalencia módulo  $m$

$$a \equiv b \pmod{m},$$

si y solo si  $a - b$  es múltiplo de  $n$ . Es decir,  $a$  y  $b$  tienen el mismo resto al dividirlos por  $m$ .

**Teorema 1.12.** La relación de congruencia es una relación de equivalencia en  $\mathbb{Z}$ . Las clases de equivalencia son los restos al dividir por  $m$ .

*Demostración.* Queda demostrado con las primeras tres propiedades de la siguiente proposición.  $\square$

**Proposición 1.3** (Propiedades de las congruencias). Si  $n > 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y  $a, b, c, d, k \in \mathbb{Z}$ .

(i)  $a \equiv a \pmod{n}$ .

(ii) Si  $a \equiv b \pmod{n}$ , entonces  $b \equiv a \pmod{n}$ .

(iii) Si  $a \equiv b \pmod{n}$  y  $b \equiv c \pmod{n}$ , entonces,  $a \equiv c \pmod{n}$ .

(iv) Si  $a \equiv b \pmod{n}$  y  $c \equiv d \pmod{n}$ , entonces

$$a + c \equiv b + d \pmod{n} \quad \text{y} \quad a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{n}.$$

(v) Si  $a \equiv b \pmod{n}$ , entonces

$$a + k \equiv b + k \pmod{n} \quad \text{y} \quad a \cdot k \equiv b \cdot k \pmod{n}.$$

(vi) Si  $a \equiv b \pmod{n}$ , entonces  $a^m \equiv b^m \pmod{n}$  con  $m \in \mathbb{Z}^+$ .

*Demostración.* (i) Tenemos que  $a - a = 0 = 0 \cdot n$  para  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Por tanto,  $a \equiv a \pmod{n}$ .

(ii) Si  $a \equiv b \pmod{n}$ , tenemos que  $a - b = n\lambda$  con  $\lambda \in \mathbb{Z}$ , entonces,  $b - a = -n\lambda = (-\lambda)n$ . Tenemos que  $-\lambda \in \mathbb{Z}$ , por lo que  $b \equiv a \pmod{n}$ .

(iii) Si  $a \equiv b \pmod{n}$  y  $b \equiv c \pmod{n}$ , tenemos que

$$a - b = n\lambda_1 \quad \text{y} \quad b - c = n\lambda_2.$$

Por tanto,

$$a - c = n(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Como  $\lambda_1 + \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ , tenemos que  $a \equiv c \pmod{n}$ .

(iv) Si  $a \equiv b \pmod{n}$  y  $c \equiv d \pmod{n}$ , tenemos que

$$a - b = \lambda_1 n \quad \text{y} \quad c - d = \lambda_2 n.$$

Por tanto,

$$a + c - (b + d) = n(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Consecuentemente,  $a + c \equiv b + d \pmod{n}$ .

Similarmente,

$$\begin{aligned} ac &= (\lambda_1 n + b)(\lambda_2 n + d) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 n^2 + \lambda_1 d n + \lambda_2 b n + b d \\ &\iff ac - b d = n(\lambda_1 \lambda_2 n + \lambda_1 d + \lambda_2 b). \end{aligned}$$

Por tanto,  $ac \equiv b d \pmod{n}$ .

(v) Si  $a \equiv b \pmod{n}$ , tenemos que

$$a - b = \lambda n \iff (a + k) - (b + k) = \lambda n.$$

Por tanto,  $a + k \equiv b + k \pmod{n}$ .

Similarmente,

$$a - b = \lambda n \iff k(a - b) = k(\lambda n) \iff a \cdot k - b \cdot k = (k\lambda)n \iff a \cdot k \equiv b \cdot k \pmod{n}.$$

(vi) Si  $a \equiv b \pmod{n}$ ,

$$a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \dots + b^{m-1}) = \lambda n \cdot (a^{m-1} + a^{m-2}b + \dots + b^{m-1}).$$

Por tanto,  $a^m \equiv b^m \pmod{n}$ .

□

**Definición 1.12** (Congruencia lineal). Si  $a, b, m \in \mathbb{Z}$  con  $m > 0$ , tenemos una congruencia lineal si:

$$ax \equiv b \pmod{m}.$$

Donde  $a, b$  y  $m$  están dados. <sup>a</sup>

<sup>a</sup>Tenemos que ver si la congruencia tiene solución, cuántas tiene y dónde están.

**Proposición 1.4.** Si tenemos una congruencia lineal  $ax \equiv b \pmod{m}$ . Si  $\alpha$  es una solución de la misma, entonces todo  $\beta \equiv \alpha \pmod{m}$  es también solución de la congruencia. <sup>a</sup>

<sup>a</sup>Esto nos permite reducir las posibles soluciones a los elementos de  $\mathbb{Z}_m$ .

*Demostración.* Sea  $\alpha$  una solución de la congruencia lineal  $ax \equiv b \pmod{m}$ . Por definición,

$$\exists \lambda \in \mathbb{Z}, a\alpha - b = \lambda m.$$

Por otra parte, si  $\beta \equiv \alpha \pmod{m}$ , tenemos que

$$\exists \mu \in \mathbb{Z}, \beta - \alpha = \mu m \Rightarrow \alpha = \beta - \mu m.$$

Entonces,

$$a\alpha - b = a(\beta - \mu m) - b = \lambda m.$$

Por otro lado,

$$a\beta - b = \lambda m + a\mu m = (\lambda + a\mu)m.$$

Entonces,  $\beta$  es solución de la congruencia lineal  $ax \equiv b \pmod{m}$ . □

**Definición 1.13.** Definimos el conjunto de las clases de equivalencia  $a \equiv b \pmod{n}$  como  $\mathbb{Z}_n$ .

$$\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], [2], \dots, [n-1]\} = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

**Ejemplo 1.4.**  $2x \equiv 1 \pmod{4}$ . Esta congruencia lineal no tiene soluciones porque

$$2x - 1 = 4k$$

es imposible, pues  $\forall x \in \mathbb{Z}$ ,  $2x - 1$  es impar. Las posibles soluciones son  $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ . Si comprobamos con  $x \in \mathbb{Z}_4$ , ningún valor funciona. Por tanto, no tiene solución.

**Ejemplo 1.5.**  $2x \equiv 2 \pmod{8}$ . Comprobamos con las posibles soluciones, que están en el conjunto  $\mathbb{Z}_8$ . Tenemos que 1 y 5 son soluciones pues

$$2 \cdot 1 - 2 = 0 \cdot 8 \quad \text{y} \quad 2 \cdot 5 - 2 = 1 \cdot 8.$$

**Ejemplo 1.6.**  $4x \equiv 4 \pmod{8}$ . Comprobamos con los elementos de  $\mathbb{Z}_8$ . Funcionan el 1, 3, 5 y el 7.

**Ejemplo 1.7. (a)**  $12427 \pmod{10}$ . Sabemos que

$$12427 = 7 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^4.$$

Entonces, el resto de esta división entre 10 será 7, por lo que  $12427 \equiv 7 \pmod{10}$ .

**(b)**  $12112 \times 347 \pmod{3}$ . Sabemos que  $12112 \equiv 1 \pmod{3}$  y  $347 \equiv 2 \pmod{3}$ . Por tanto,

$$12112 \times 347 \pmod{3} \Rightarrow 12112 \times 347 \equiv 2 \pmod{3}.$$

Por lo que  $12112 \times 347 \equiv 2 \pmod{3}$ .

**(c)**  $22^{1327} \pmod{21}$ . Sabemos que  $22 \equiv 1 \pmod{21}$ , entonces,

$$22^{1327} \equiv 1^{1327} = 1 \pmod{21}.$$

**(d)**  $10^{123} \pmod{8}$ . Sabemos que  $10 \equiv 2 \pmod{8}$ , entonces

$$10^{123} \equiv 2^{123} = (2^3)^{41} = 8^{41} \pmod{8}.$$

$$\therefore 10^{123} \equiv 0 \pmod{8}.$$

**Teorema 1.13.** Sean  $a, b, m \in \mathbb{Z}$  con  $m > 0$ , y sea  $d = \text{mcd}(a, m)$ . Entonces, la congruencia lineal:  $ax \equiv b \pmod{m}$  tiene solución si y solo si  $d|b$  y, en este caso, el número de soluciones  $\mathbb{Z}_m$  es  $d$ .

*Demostración.* (i) Suponemos que  $d = \text{mcd}(a, m) | b$ , es decir,  $\exists k \in \mathbb{Z}$  tal que  $b = dk$ . Como  $d = \text{mcd}(a, m)$  sabemos que  $\exists u, v \in \mathbb{Z}$  tales que

$$d = au + mv \quad \text{Identidad de Bézout.}$$

Entonces, tenemos que

$$b = dk = (au + mv)k = auk + mvk \Rightarrow b - auk = mvk.$$

Es decir,  $b \equiv auk \pmod{m}$ . Por la propiedad simétrica,  $auk \equiv b \pmod{m}$ . Si  $x = uk$ , es solución de la congruencia.

(ii) Asumimos que existe una solución  $\alpha$ , por lo que  $\exists \lambda \in \mathbb{Z}$  tal que  $a\alpha - b = \lambda m$ . Por tanto

$$b = a\alpha - \lambda m.$$

Como  $d = \text{mcd}(a, m)$ ,  $d|a$  y  $d|m$ . Entonces,  $d|b$  (por la ecuación anterior).

En cuanto al número de soluciones, si  $d = 1 = \text{mcd}(a, m)$ , vamos a asumir que existen dos soluciones,  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ . Tenemos que  $a\alpha \equiv b \pmod{m}$ , por lo que  $a\alpha - b$  es múltiplo de  $m$  y  $a\beta - b$  también. Si restamos las dos ecuaciones, tenemos que

$$a\alpha - a\beta = a(\alpha - \beta) \quad \text{múltiplo de } m.$$

Además, como  $d = 1$ , tenemos que  $a$  es primo con  $m$ , tenemos que  $\alpha - \beta$  es múltiplo de  $m$ . Es decir,  $m|\alpha - \beta$ . Sin embargo,  $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}_m$ . Por tanto,  $\alpha - \beta = 0$  y  $\alpha = \beta$ .

Si  $d > 1$  y  $d|b$ , tenemos que  $a = a_1d$ ,  $b = b_1d$  y  $m = m_1d$ . Entonces, sabemos que

$$a_1dx \equiv b_1d \pmod{m_1d}.$$

Por tanto,

$$a_1dx - b_1d = km_1d.$$

Por tanto,

$$a_1x - b_1 = km_1 \iff a_1x \equiv b_1 \pmod{m_1}.$$

Además, sabemos que  $\text{mcd}(a_1, m_1) = 1$ . Por tanto, estamos en el caso anterior, que nos dice que  $\exists \alpha \in \mathbb{Z}_{m_1}$  que es única. Las soluciones serán,

$$\alpha, \alpha + m_1, \alpha + 2m_1, \dots$$

Es decir, las soluciones tienen la forma  $\alpha + (d-1)m_1$ . □

**Ejemplo 1.8.**  $51x \equiv 27 \pmod{123}$

(1)  $\text{mcd}(51, 123) = 3$ . Además,  $3|27$ , por lo que tiene solución y, en concreto, tiene 3 soluciones.

- (2) Construimos la congruencia auxiliar:  $17x \equiv 9 \pmod{41}$ . Sabemos que esta congruencia tiene solución única. Sea  $a_1 = 17$  y  $m_1 = 41$ . Encontramos la identidad de Bézout para ellos:

$$1 = 41 \cdot 5 + 17 \cdot (-12).$$

Multiplicamos todo por 9,

$$9 = 9 \cdot 5 \cdot 41 - 9 \cdot 12 \cdot 17.$$

Tomamos módulo 41,

$$9 \equiv -9 \cdot 12 \cdot 17 \pmod{41} \iff 17(-9 \cdot 12) \equiv 9 \pmod{41}.$$

Es decir,  $x \equiv -9 \cdot 12 = 108 \pmod{41}$ . Otra solución será,

$$x \equiv -108 + 3 \cdot 41 \equiv 15 \pmod{41}.$$

A partir de aquí, podemos deducir el resto de soluciones:

$$\alpha_1 = 15 \quad \text{o} \quad \alpha \equiv 15 \pmod{41}.$$

$$\alpha_2 = 15 + 41 = 56.$$

$$\alpha_3 = 15 + 2 \cdot 41 = 97.$$

**Ejemplo 1.9.**  $17x \equiv 5 \pmod{13}$ . Tenemos que  $\text{mcd}(17, 13) = 1$ , por lo que tendremos sólo una solución. Encontramos la identidad de Bézout:

$$1 = (-3) \cdot 17 + 4 \cdot 13.$$

$$\therefore 5 = (-15) \cdot 17 + 20 \cdot 13.$$

Por tanto, tenemos que  $17 \cdot (-15) \equiv 5 \pmod{13}$ , por lo que la solución será  $x \equiv -15 \equiv 11 \pmod{13}$ .

**Ejemplo 1.10.**  $66x \equiv 42 \pmod{168}$ . Tenemos que  $d = \text{mcd}(66, 168) = 6$ , y  $6|42$ , por lo que esta congruencia lineal va a tener 6 soluciones en  $\mathbb{Z}_{168}$ . Encontramos la congruencia auxiliar:

$$11x \equiv 7 \pmod{28}.$$

Hallamos la identidad de Bézout para  $\text{mcd}(11, 28) = 1$ :

$$1 = 2 \cdot 28 + (-5) \cdot 11.$$

$$\therefore 7 = 14 \cdot 28 + (-35) \cdot 11.$$

Por todo ello, tenemos que  $11 \cdot (-35) \equiv 7 \pmod{28}$ , por lo que las soluciones serán,

$$x \equiv -35 \pmod{28} \Rightarrow x \equiv 21 \pmod{168}.$$

Sumamos múltiplos de 28 hasta obtener 6 soluciones.

**Proposición 1.5.** Si  $m$  y  $n$  son primos entre sí, entonces  $[x]_m \cap [x]_n = [x]_{mn}$ .

*Demostración.* (i) Si  $x \in \mathbb{Z}$  y  $m, n \in \mathbb{N}$  siempre tenemos la inclusión

$$[x]_{mn} \subset [x]_m \cap [x]_n.$$

En efecto, si  $y \in [x]_{mn}$ , tenemos que existe  $\lambda \in \mathbb{Z}$  tal que

$$y - x = \lambda mn.$$

Por tanto, tenemos que  $y$  es congruente con  $x$  módulo  $n$  y módulo  $m$ .

(ii) Si  $m, n$  son primos entre sí y  $y \in [x]_m \cap [x]_n$ , tenemos que existen  $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$  tales que

$$y - x = \lambda m = \mu n.$$

Como  $\text{mcd}(m, n) = 1$ , tenemos que  $n \mid \lambda$ , por lo que  $\lambda = \lambda_1 n$ . Por tanto,

$$y - x = \lambda m = \lambda_1 mn.$$

Por tanto,  $y \in [x]_{mn}$ . □

**Observación.** Si  $a_1 x \equiv b_1 \pmod{m}$  y  $a_2 x \equiv b_2 \pmod{n}$ , y  $\alpha$  es solución de cada una de las congruencias, cada  $\beta \in [\alpha]_{mn}$  es también solución.

**Teorema 1.14.** Sean  $m$  y  $n$  primos entre sí, con  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Si cada una de las congruencias lineales:

$$a_1 x \equiv b_1 \pmod{m} \quad \text{y} \quad a_2 x \equiv b_2 \pmod{n},$$

tiene solución, existe una solución común a las dos congruencias en  $\mathbb{Z}_{mn}$ . Además, si  $\text{mcd}(a_1, m) = \text{mcd}(a_2, n) = 1$ , tenemos que la solución es única en  $\mathbb{Z}_{mn}$ .

*Demostración.* Consideramos dos soluciones,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ . Consideramos  $x \equiv \alpha_1 \pmod{m}$  y  $x \equiv \alpha_2 \pmod{n}$ . Vamos a ver que tienen solución común en  $\mathbb{Z}_{mn}$ . Sabemos que  $\text{mcd}(m, n) = 1$ . Por tanto,  $\exists u, v \in \mathbb{Z}$  tales que

$$mu + nv = 1.$$

Tomamos módulos en esta expresión:

$$nv \equiv 1 \pmod{m} \quad \text{y} \quad mu \equiv 1 \pmod{n}.$$

Vamos a ver que  $\alpha_1 nv + \alpha_2 mu$  es una solución para cada una de las congruencias. Consideramos

$$\alpha_1 nv + \alpha_2 mu = \alpha_1 nv + \alpha_2 (1 - nv) = \alpha_2 + n(\alpha_1 v - \alpha_2 v).$$

Si hacemos módulo  $n$ , tenemos que

$$\alpha_1 nv + \alpha_2 mu \equiv \alpha_2 \pmod{n}.$$



Por tanto, va a ser una solución de la segunda congruencia. Similarmente,

$$\alpha_1 nv + \alpha_2 mu = \alpha_1 (1 - mu) + \alpha_2 mu = \alpha_1 + m(\alpha_2 u - \alpha_1 u).$$

$$\therefore \alpha_1 nv + \alpha_2 mu \equiv \alpha_1 \pmod{m}.$$

Por tanto,  $\alpha_1 nv + \alpha_2 mu$  es solución de ambos sistemas. Como  $[\alpha]_n \cap [\alpha]_m = [\alpha]_{mn}$ , tenemos que  $\beta \in [\alpha]_{mn}$  es solución del sistema.

Ahora demostramos la unicidad. Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{mn}$  son soluciones del sistema de congruencias. Por ser soluciones de la primera, y tener está única solución en  $\mathbb{Z}_m$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  son congruentes módulo  $m$ . Por la transitividad tenemos que

$$\alpha \equiv \beta \pmod{m}.$$

Similarmente,

$$\alpha \equiv \beta \pmod{n}.$$

Por tanto, tenemos que  $\alpha \in [\beta]_m \cap [\beta]_n = [\beta]_{mn}$ . Por tanto,  $\alpha = \beta$ , por se ambos números elementos de  $\mathbb{Z}_{mn}$ .  $\square$

**Corolario 1.3.** Tenemos  $m, n \in \mathbb{Z}$  y  $m, n$  primos entre sí. Entonces las congruencias

$$x \equiv b_1 \pmod{m} \quad \text{y} \quad x \equiv b_2 \pmod{n}$$

tiene solución única en  $\mathbb{Z}_{mn}$ .

**Ejemplo 1.11.**  $x \equiv 4 \pmod{8}$  y  $x \equiv -1 \pmod{15}$ . Tenemos que  $\text{mcd}(8, 15) = 1$ . La identidad Bézout es:

$$1 = 2 \cdot 8 + (-1) \cdot 15.$$

La solución común estará en  $\mathbb{Z}_{120}$ . Tenemos que la solución será

$$\alpha = \alpha_1 \cdot 2 \cdot 8 + \alpha_2 \cdot (-1) \cdot 15 = (-1) \cdot 2 \cdot 8 + 4 \cdot (-1) \cdot 15 = -76.$$

Para que sea positiva le sumamos múltiplos de 120, es decir,  $\alpha \equiv 44 \pmod{120}$ .

**Teorema 1.15** (Teorema Chino del resto). Sean  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}^+$ , primos entre sí 2 a 2. Si cada una de las congruencias lineales  $a_i x \equiv b_i \pmod{n_i}$  tiene solución, entonces existe una solución común a todas ellas en  $\mathbb{Z}_{n_1 \dots n_k}$ .

*Demostración.* Ya hemos demostrado el caso  $n = 2$ . Asumimos que es cierto para  $n-1$  congruencias, entonces las primeras  $n-1$  congruencias tendrán solución común, a la que llamaremos  $\alpha$ . También cualquier solución de la congruencia

$$x \equiv \alpha \pmod{m_1 \cdots m_{n-1}},$$

es solución de las primeras  $n-1$  congruencias. Ahora podemos considerar el siguiente sistema de congruencias:

$$\begin{cases} x \equiv \alpha \pmod{m_1 \cdots m_{n-1}} \\ a_n x \equiv b_n \pmod{m_n} \end{cases}.$$

Como  $m_1 \cdots m_{n-1}$  y  $m_n$  son primos entre sí, el sistema de congruencias tiene solución común, que es de todo el sistema. La unicidad de las soluciones en el caso de que  $\text{mcd}(a_i, m_i) = 1$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$  se puede demostrar también por inducción de la siguiente manera: la solución  $\alpha$  de las  $n-1$  primeras congruencias del sistema es única, como la de la  $n$ -ésima también lo es.  $\square$

**Ejemplo 1.12.**

$$\begin{cases} 5x \equiv 6 & \text{mód } 12 \\ 2x \equiv 5 & \text{mód } 7 \\ 3x \equiv 1 & \text{mód } 5 \end{cases}.$$

Primero tenemos que ver que los módulos son primos entre sí dos a dos.

$$\text{mcd}(12, 7) = \text{mcd}(5, 7) = \text{mcd}(12, 5) = 1.$$

Cada congruencia tiene solución.

$$\begin{cases} x \equiv \alpha_1 & \text{mód } 12 \\ x \equiv \alpha_2 & \text{mód } 7 \\ x \equiv \alpha_3 & \text{mód } 5 \end{cases}.$$

Cogemos dos congruencias y las resolvemos para obtener  $x \equiv \alpha \pmod{12 \cdot 7}$ . Cogemos la anterior y una de las otras dos restantes para obtener  $x \equiv \beta \pmod{12 \cdot 7 \cdot 5}$ . Obtenemos las siguientes soluciones:

$$\begin{cases} x \equiv 6 & \text{mód } 12 \\ x \equiv 6 & \text{mód } 7 \\ x \equiv 2 & \text{mód } 5 \end{cases}.$$

Cogemos las dos primeras congruencias:

$$1 = 3 \cdot 12 + (-5) \cdot 7.$$

Sabemos que la solución será de la forma:

$$\alpha \equiv 6 \cdot 3 \cdot 12 + 6 \cdot (-5) \cdot 7 \equiv 6 \pmod{84}.$$

Ahora resolvemos el siguiente sistema de congruencias:

$$\begin{cases} x \equiv 2 & \text{mód } 5 \\ x \equiv 6 & \text{mód } 84 \end{cases}.$$

Tenemos que

$$1 = 17 \cdot 5 - 84.$$

Por tanto, la solución tendrá la forma:

$$\beta \equiv 6 \cdot 17 \cdot 5 - 2 \cdot 84 \equiv -334 \equiv 342 \pmod{420}.$$

3

---

<sup>3</sup>En la solución de un sistema de dos congruencias, se multiplica la solución de cada congruencia de forma cruzada, es decir, si  $\alpha_1$  es solución de  $a_1 \equiv b_1 \pmod{m_1}$  y  $\alpha_2$  es solución de la congruencia  $a_2 x \equiv b_2 \pmod{m_2}$ , entonces la solución de ambas congruencias será  $\alpha \equiv \alpha_2 u m_1 + \alpha_1 v m_2 \pmod{m_1 \cdot m_2}$  ( $u$  y  $v$  proceden de la Identidad de Bézout).

**Definición 1.14** (Función de Euler). Si  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$\varphi(n) = |\{t \in \mathbb{N}, 1 \leq t \leq n, \text{mcd}(t, n) = 1\}|.$$

**Proposición 1.6.** Si  $p$  es primo, tenemos que

$$\varphi(p) = p - 1.$$

*Demostración.* Es trivial, pues todos los números menores a  $p$  serán coprimos con  $p$ , pues  $p$  es primo.  $\square$

**Proposición 1.7.** Si  $p$  es primo y  $k > 1$ ,

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}.$$

*Demostración.* Tenemos que el número de números de 1 a  $p^k$  que tienen a  $p$  como divisor serán  $\frac{p^k}{p}$ . Por tanto, el número de números que no tienen a  $p$  como divisor será:

$$p^k - p^{k-1}.$$

$\square$

**Teorema 1.16.** Si  $a$  y  $b$  son primos entre sí, entonces

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

**Corolario 1.4.** Si  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}^+$  y primos entre sí (2 a 2), entonces

$$\varphi(n_1 \cdots n_k) = \varphi(n_1) \cdots \varphi(n_k).$$

**Corolario 1.5.** Si  $n > 2$  con  $n \in \mathbb{Z}$  y  $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$  ( $p_1, \dots, p_k$  primos). Entonces tenemos que

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

*Demostración.* Por una proposición anterior, tenemos que

$$\varphi(p_i^{\alpha_i}) = p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i-1} = p_i^{\alpha_i} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Aplicando el corolario anterior:

$$\varphi(n) = \varphi(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}) = \varphi(p_1^{\alpha_1}) \cdots \varphi(p_k^{\alpha_k}).$$

Entonces tenemos que,

$$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots p_k^{\alpha_k} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

□

**Ejemplo 1.13.**  $\varphi(151200)$ . Si factorizamos 151200 en sus factores primos tenemos que:

$$151200 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

Entonces:

$$\varphi(151200) = 151200 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} = 2^8 \cdot 3^3 \cdot 5 = 34560.$$

**Teorema 1.17** (Teorema de Euler). Si  $a$  y  $n$  son primos entre sí, entonces  $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ .

**Corolario 1.6** (Pequeño Teorema de Fermat). Si  $p$  es primo y  $a$  no es múltiplo de  $p$ , entonces  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

**Teorema 1.18** (Inversa módulo  $n$ ). Si  $1 \leq a \leq n$  y  $\text{mcd}(a, n) = 1$ , entonces  $a$  tiene inverso módulo  $n$ . Es decir,

$$\exists c, a \cdot c \equiv 1 \pmod{n}, \quad 1 \leq c < n.$$

Si  $\text{mcd}(a, n) \neq 1$ ,  $a$  no tiene inversa módulo  $n$ . Para averiguar la inversa tenemos que resolver esta congruencia:

$$ac \equiv 1 \pmod{n} \begin{cases} a^{-1} \equiv c \pmod{n} \\ \text{mcd}(a, n) = 1 \end{cases}.$$

**Ejemplo 1.14.**  $777^{-1} \pmod{1009}$ . Queremos resolver la congruencia  $777x \equiv 1 \pmod{1009}$ . Calculamos la identidad de Bézout para obtener:

$$1 = -274 \cdot 777 + 211 \cdot 1009 \Rightarrow x \equiv -274 \equiv 735 \pmod{1009}.$$

**Ejemplo 1.15.** Calculamos  $5^{28575} \pmod{17}$ . En primer lugar, intentamos aplicar el teorema de Euler. Vemos que  $\text{mcd}(5, 17) = 1$ , por lo que lo podemos aplicar. Entonces, tenemos que

$$\varphi(17) = 16.$$

Además, tenemos que

$$5^{28575} \equiv 5^{16 \cdot 1785 + 15} \equiv 5^{15} \pmod{17}.$$

Por otro lado tenemos que

$$5^{16} \equiv 5^{15} \cdot 5 \equiv 1 \pmod{17}.$$

Por tanto,

$$5^{15} \equiv 5^{-1} \pmod{17}.$$

Para calcular  $5^{-1} \pmod{17}$  tenemos que resolver la congruencia  $5x \equiv 1 \pmod{17}$ . Para ello hacemos la identidad de Bézout:

$$1 = 7 \cdot 5 - 2 \cdot 17 \Rightarrow x \equiv 5^{-1} \equiv 7 \pmod{17}.$$

$$\therefore 5^{28575} \equiv 7 \pmod{17}.$$

**Teorema 1.19** (Propiedad exponencial de las congruencias). Si  $a \equiv b \pmod{n}$  con  $k \in \mathbb{N}$ , entonces  $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ .

**Ejemplo 1.16.** (i) Para calcular  $41^5 \pmod{43}$ , tenemos en cuenta que  $41 \equiv -2 \pmod{43}$ , por tanto,

$$41^5 \equiv (-2)^5 \equiv -32 \equiv 11 \pmod{43}.$$

(ii) Calculamos  $11^{13} \pmod{85}$ . Iteramos:

$$11^2 \equiv 121 \equiv 36 \pmod{85}$$

$$11^3 \equiv 11^2 \cdot 11 \equiv 36 \cdot 11 \equiv 56 \pmod{85}$$

$$11^4 \equiv 11^3 \cdot 11 \equiv 56 \cdot 11 \equiv 21 \pmod{85}$$

$$11^5 \equiv 11^4 \cdot 11 \equiv 21 \cdot 11 \equiv 61 \pmod{85}$$

$$11^6 \equiv 11^5 \cdot 11 \equiv 61 \cdot 11 \equiv 76 \pmod{85}.$$

Entonces tenemos que

$$11^{13} \equiv 11^6 \cdot 11^6 \cdot 11 \equiv 76 \cdot 76 \cdot 11 \equiv 63536 \equiv 41 \pmod{85}.$$

**Teorema 1.20** (Procedimiento sistemático). Sea  $k \in \mathbb{N}$  suma de potencias de 2. Es decir,

$$a^4 \equiv (a^2)^2 \pmod{n}$$

$$a^8 \equiv (a^4)^2 \pmod{n}$$

$$a^{16} \equiv (a^8)^2 \pmod{n}$$

$$a^{32} \equiv (a^{16})^2 \pmod{n}.$$

**Ejemplo 1.17.** En el ejemplo anterior sería:

$$11^{13} = 11^8 \cdot 11^4 \cdot 11 = (11^4)^2 \cdot 11^4 \cdot 11.$$

**Ejemplo 1.18.** Este es un ejemplo de un ejercicio de examen.

- (a) Hallar el menor número natural  $n$  para que la congruencia  $329x \equiv 729 + n \pmod{1222}$  tenga solución.

Para que la congruencia tenga solución tiene que darse que  $\text{mcd}(329, 1222) \mid 729 + n$ . Tenemos que  $\text{mcd}(329, 1222) = 47$ . Entonces tenemos que

$$729 + n \equiv 0 \pmod{47}.$$

Además, tenemos que  $729 \equiv 40 \pmod{47}$ , por lo que

$$n \equiv -40 \pmod{47} \Rightarrow n \equiv 7 \pmod{47}.$$

- (b) Resolver la congruencia para el valor de  $n$  obtenido en (a).

Resolvemos la congruencia  $329x \equiv 799 \pmod{1222}$ . Hallamos la congruencia auxiliar:

$$7x \equiv 17 \pmod{26}.$$

Con la identidad de Bézout, tenemos que  $1 = 3 \cdot 26 + (-11) \cdot 7$ , así

$$17 = 51 \cdot 26 + (-187) \cdot 7 \Rightarrow x \equiv 21 + 26k \pmod{1222}, \quad 0 \leq k \leq 47.$$

## 1.5. Aplicaciones

### 1.5.1. Dígitos de control

**Definición 1.15** (La letra del D.N.I.). La letra del D.N.I. se obtiene dividiendo el número del D.N.I. entre 23 y luego traduciendo cada uno de los 23 posibles restos a una letra predeterminada <sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Hay una tabla.

**Ejemplo 1.19.** La letra que corresponde al D.N.I. 12345678 es la Z, pues el resto de este número entre 23 es 14.

**Definición 1.16** (Los dígitos de control.). Tenemos cuatro dígitos de control. El primero es la última cifra del número que se obtiene sumando los productos de las cifras número de serie del soporte, respectivamente, por 7, 3, 1, 7, 3, 1, 7, 3, 1, una vez convertidas las tres primeras letras según la tabla.

El en caso del segundo, se procede como en el caso anterior para el campo de la fecha de nacimiento.

Para el tercer número se hace lo mismo solo que en este caso para la fecha de vencimiento.

Para el último número, se hace lo mismo para la concatenación de los campos 3, 4, 5, 7, 8, 10 y 11 (sustituyendo las letras por números según la tabla).

**Definición 1.17** (Número de registro personal de los funcionarios.). Está formado por el número de su D.N.I. y dos cifras más. La primera es el resto del número anterior entre 7 (entonces estará entre 0 y 6). La segunda es este mismo resto más dos.

### 1.5.2. Criptografía

Consiste en transformar un mensaje claro en otro cifrado (cifrar) y en reconvertir el mensaje cifrado en mensaje claro (descifrar). Existen varios procedimientos.

**Definición 1.18** (Procedimiento aditivo.). La clave del cifrado es un número  $b$  que se suma a cada uno de los del mensaje. Para obtener números entre 0 y 36 se obtiene el resto módulo 37 de la suma del número original más  $b$ . El receptor debe conocer  $b$  y no tiene más que restar  $b$  módulo 37 para descifrar el mensaje.

**Ejemplo 1.20.** Vamos a cifrar el mensaje 'EL 1 A LAS 3' con la clave aditiva  $b = 17$ . Primero traducimos cada carácter a su valor numérico según la tabla:

14 21 36 1 36 10 36 21 10 28 36 3.

Su codificación será:

31 1 16 18 16 27 16 1 27 8 16 20.

Según la tabla, esto se traduce en 'V1G1GRG1RGK'.

**Definición 1.19** (Procedimiento multiplicativo.). Es lo mismo que el anterior solo que en vez de sumar se multiplica por un factor  $a$ . Es decir, el cifrado de la conversión numérica de cada carácter será  $ma \pmod{37}$ . Para que el cifrado sea biyectivo es necesario que todas las congruencias lineales  $ax \equiv y \pmod{37}$  tengan una única solución para cualquier  $y \in \mathbb{Z}_{37}$ . Esto ocurre sí y solo sí

$$\text{mcd}(a, 37) = 1.$$

Para descifrar el mensaje se considera  $a^{-1}$ , inverso de  $a$  en  $\mathbb{Z}_{37}$ . Así,

$$(ma)a^{-1} \equiv m \pmod{37}.$$

$a$

<sup>a</sup>Es decir, el número buscado  $m$  es el resto de dividir  $(ma)a^{-1}$  entre 37.

**Ejemplo 1.21.** Vamos a cifrar el mensaje anterior: 'El 1 A LAS 3', con la clave multiplicativa  $a = 7$ . Su traducción venía dada en el ejemplo anterior y su codificación será:

24 36 30 7 30 33 30 36 33 11 30 21.

Esto se traduce en 'O U7UXU XBUL'. Ahora, el receptor debe multiplicar la cadena numérica por el inverso de 7 en  $\mathbb{Z}_{37}$ , que es 16. Así obtenemos la cadena

$$384\ 576\ 480\ 112\ 480\ 528\ 480\ 576'; 528\ 176\ 480\ 336,$$

cuyos restos módulo 37 constituyen la cadena original.

**Definición 1.20** (Procedimiento exponencial). Se quiera cifrar un número  $m$ , se elevará este a un exponente  $k$  y el resultado se reducirá módulo  $n$ , siendo  $k$  y  $n$  números naturales elegidos convenientemente.

**Teorema 1.21.** Sean  $n, t \in \mathbb{N}$  tales que

$$t \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}.$$

Dado  $m \in \mathbb{N}$  si se verifica alguna de las siguientes hipótesis

- $m$  y  $n$  son primos entre sí.
- $n$  es primo.
- $n$  es producto de dos primos distintos.

entonces,

$$m^t \equiv m \pmod{n}.$$

**Observación.** Este resultado se utiliza para encriptar de la siguiente manera: se elige  $n$  primo o producto de dos primos distintos, se calcula  $\varphi(n)$ , se toma  $k$  primo con  $\varphi(n)$  y se calcula  $j$ , el inverso de  $k$  en  $\mathbb{Z}_{\varphi(n)}$ . De esta manera,

$$kj \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}.$$

Suponiendo que el emisor y el receptor conocen  $k$  y  $j$ , el emisor mandará el mensaje codificado que es  $r$ , el resto de la división de  $k^k$  entre  $n$ . Para descodificar, teniendo en cuenta que

$$m^{kj} \equiv m \pmod{n},$$

el receptor calculará

$$r^j \equiv (m^k)^j \equiv m^{jk} \equiv m \pmod{n}.$$

Así se recupera el mensaje original  $m$ .<sup>4</sup>

**Definición 1.21** (Procedimiento RSA). Se da un par  $(n, k)$ . Cada letra se traduce a su número correspondiente  $a$  y se calcula  $a^k \pmod{n}$ . El resultado del cifrado es un número, no se vuelve a traducir a letras. Ahora, para descifrar es necesario calcular  $j$ , el inverso de  $k$  módulo  $\varphi(n)$ .

<sup>4</sup>Este procedimiento solo es válido si  $m < n$ .



A continuación, se eleva cada número del cifrado a  $j$  módulo  $n$ .

**Ejemplo 1.22.** Hacemos un ejemplo con la palabra 'ADN' y la clave  $(n, k) = (55, 3)$ . Tenemos que los números correspondientes son 10 13 23. Elevamos cada uno de los números a 3 mód 55 obteniendo el resultado 10 52 12. Ahora, para descifrar, calculamos el inverso de  $k = 3$  módulo  $\varphi(n) = \varphi(55) = 40$ . En este caso, obtenemos que  $j = 27$ . Así, elevando cada uno de los elementos del cifrado a  $j = 27$  módulo 55 obtenemos la configuración inicial 10 13 23, es decir, las letras 'ADN'.

## Capítulo 2

# Grupos de simetrías. Mosaicos.

**Objetivo:** Estudiar y clasificar todas las formas posibles de cubrir el plano con copias idénticas de una 'ficha' o 'pieza' (tesela) de manera periódica: mosaicos.

**Herramientas:** Estudio de los movimientos en el plano que preservan la teselación.

**Elementos matemáticos:**

- Grupo - Subgrupo
- Grupo de movimiento en el plano
- Simetrías

**Aplicaciones:**

- Retículos
- 17 grupos cristalográficos planos

### 2.1. Grupos. Isomorfismos y homomorfismos de grupos.

**Definición 2.1** (Grupo). Se define como **grupo** al par ordenado  $(G, \cdot)$  formado por un conjunto  $G$  y una operación interna

$$\begin{aligned}\cdot : G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) &\rightarrow a \cdot b.\end{aligned}$$

tales que

(1) La operación es asociativa.

$$\forall a, b, c \in G, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

(2) Existe un elemento neutro.

$$\exists e \in G, \forall a \in G, e \cdot a = a \cdot e = a.$$

(3) Existe el inverso.

$$\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G, a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e.$$

Si se cumple también la propiedad conmutativa:

$$\forall a, b \in G, a \cdot b = b \cdot a,$$

se denomina grupo conmutativo o **abeliano**.

**Ejemplo 2.1.** (1)  $(\mathbb{Z}, +)$  es un grupo abeliano.

(2)  $(\mathbb{Q}, \cdot)$  no es un grupo pues  $0 \in \mathbb{Q}$  no tiene inverso.

(3)  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$  es un grupo abeliano.

(4) Tenemos que  $(2\mathbb{Z} + 1, +)$  no es un grupo, pues la suma de dos números impares es un número par. Similarmente,  $(2\mathbb{Z} + 1, \cdot)$  no es un grupo por la ausencia de inversos.

(5) El conjunto de las matrices  $2 \times 2$  es un grupo abeliano con la suma.  $(M_{2 \times 2}, +)$  es un grupo abeliano.

(6) El conjunto de las matrices  $n \times n$  con  $\det \neq 0$ ,  $(M_{n \times n}, \cdot)$ , es un grupo abeliano. En concreto, en el caso de las matrices  $2 \times 2$ , recibe el nombre de **grupo general lineal de orden 2** y se denota como  $GL(2, \mathbb{R})$  o  $GL(2)$ .

(7) El conjunto de matrices  $2 \times 2$ ,  $(M_{2 \times 2}, \cdot)$ , con  $\det = 1$  es un grupo y se denomina **grupo especial lineal**:  $SL(2)$ .

(8) El conjunto de matrices ortogonales ( $A^T = A^{-1}$ ) es un grupo al que se denomina **grupo ortogonal**:  $O(2)$ .

(9) Las matrices ortogonales con  $\det = 1$  se denomina **grupo especial ortogonal**:  $SO(n)$ .

(10)  $(\mathbb{Z}_n, +)$  con  $n \in \mathbb{N}$  forma un grupo abeliano.

(11) Si  $p$  es primo,  $(\mathbb{Z}_p, \cdot)$  también es un grupo abeliano.

**Proposición 2.1.** Sea  $(G, \cdot)$  un grupo.

(1) Propiedades cancelativas por la derecha y por la izquierda de un grupo:

$$a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b$$

$$c \cdot a = c \cdot b \Rightarrow a = b.$$

(2) El elemento neutro de un grupo es único.

(3) Cada elemento de un grupo tiene un único inverso.

(4) Si  $a \in G$ , entonces  $(a^{-1})^{-1} = a$ .

(5) Si  $a, b \in G$ ,  $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ .

(6) Son equivalentes:

(a)  $(G, \cdot)$  es un grupo abeliano.

(b)  $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}, \forall a, b \in G$ .

*Demostración.* (1) Como  $(G, \cdot)$  es un grupo, tenemos que si  $a, b, c \in G$ , existe  $c^{-1} \in G$  tal que

$$a \cdot c = b \cdot c \iff a \cdot c \cdot c^{-1} = b \cdot c \cdot c^{-1} \iff a \cdot e = b \cdot e \iff a = b.$$

Similarmente,

$$c \cdot a = c \cdot b \iff c^{-1} \cdot c \cdot a = c^{-1} \cdot c \cdot b \iff e \cdot a = e \cdot b \iff a = b.$$

(2) Sean  $e, e' \in G$  dos elementos neutros de  $(G, \cdot)$ . Entonces, tenemos que

$$e = e \cdot e' = e' \cdot e = e'.$$

(3) Si  $a \in G$ , sean  $b, c \in G$  dos inversos de  $a$ . Entonces tenemos que

$$a \cdot b = a \cdot c = e.$$

Por (1) tenemos que  $b = c$ . Otra manera de demostrarlo es:

$$b = b \cdot e = b \cdot (a \cdot c) = (b \cdot a) \cdot c = e \cdot c = c.$$

(4)

$$(a^{-1})^{-1} \cdot a^{-1} = e.$$

Como el inverso de  $a^{-1}$  es  $a$  y el inverso es único, tenemos que  $a = (a^{-1})^{-1}$ .

(5) Tenemos que

$$(a \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) = a \cdot (b^{-1} \cdot b) \cdot a^{-1} = a \cdot e \cdot a^{-1} = a \cdot a^{-1} = e.$$

Como el inverso de  $a \cdot b$  es  $(a \cdot b)^{-1}$ , y el inverso es único, tenemos que  $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ .

(6) Si es un grupo abeliano, se cumple la propiedad conmutativa y con el resultado (5) la demostración es trivial. Recíprocamente, si  $\forall a, b \in G$  tenemos que

$$(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1},$$

tenemos que

$$(a \cdot b) \cdot (a \cdot b)^{-1} = (b \cdot a) \cdot (a \cdot b)^{-1}.$$

Por la propiedad (1) tenemos que  $a \cdot b = b \cdot a$ , por lo que se cumple la propiedad conmutativa y es un grupo abeliano. □

### 2.1.1. Subgrupo. Grupos finitos. Orden

**Definición 2.2.** Sea  $(G, \cdot)$  un grupo y sea  $H \subset G$ . Se dice que  $H$  es un subgrupo de  $G$ , y se escribe  $H \leq G$ , si  $(H, \cdot)$  es un grupo.

**Ejemplo 2.2.** (i) Tenemos que  $(2\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +) \leq (\mathbb{C}, +)$ .

(ii)  $\text{SO}(n) \leq \text{SL}(n) \leq \text{GL}(n)$ .

**Definición 2.3.** Si  $x \in G$  con  $(G, \cdot)$  grupo,  $n \in \mathbb{Z}$ , denotamos a

$$x^n = \begin{cases} \underbrace{x \cdots x}_{n \text{ veces}} & \text{si } n > 0 \\ e & \text{si } n = 0 \\ \underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{n \text{ veces}} & \text{si } n < 0 \end{cases}.$$

El conjunto  $\langle x \rangle = \{x^n : n \in \mathbb{Z}\}$  es un subgrupo abeliano de  $G$ . Es un subgrupo generado por el elemento  $x$ . Si  $\exists x \in G$ ,  $G = \langle x \rangle$  se denomina **grupo cíclico**.

**Definición 2.4** (Orden). Si  $G$  es un grupo finito, se llama **orden** de  $G$  a  $|G|$ , es decir, al número de elementos de  $G$ . Si  $G$  no es un conjunto finito diremos que tiene **orden infinito**. Si  $x \in G$ , el orden de  $x$  es:  $\text{ord}(x) = |\langle x \rangle|$ .

**Observación.** El orden de un elemento  $x$ , si es finito, es el menor entero positivo  $n$  tal que  $x^n = e$ .

**Proposición 2.2.** Sea  $H$  un subconjunto no vacío de un grupo  $(G, \cdot)$ . Entonces,  $H \leq G$  si y solo si  $\forall x, y \in H$  se tiene que  $x \cdot y^{-1} \in H$ .

*Demostración.* (i) Es trivial, pues si  $x, y \in H$ , como  $H \leq G$ , tenemos que  $\exists y^{-1} \in H$  y  $x \cdot y^{-1} \in H$ .

(ii) Recíprocamente, tenemos que la operación interna está cerrada. La propiedad asociativa se cumple porque se  $(G, \cdot)$  es un grupo. Por definición, tenemos que si  $x, y \in H$  entonces,  $x \cdot y^{-1} \in H$ . Podemos coger  $x \cdot x^{-1} = e \in H$ . Así,  $H$  contiene al elemento neutro. Similarmente, como  $e, x \in H$ , tenemos que  $e \cdot x^{-1} = x^{-1} \in H$ . Por lo que podemos encontrar inversos para todos los elementos de  $H$ . □

**Proposición 2.3.** Si  $H_1 \leq G$  y  $H_2 \leq G$ , entonces  $H_1 \cap H_2 \leq G$ .

*Demostración.* Tenemos que ver que  $\forall x, y \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow x \cdot y^{-1} \in H_1 \cap H_2$ . Si  $x, y \in H_1 \cap H_2$ , tenemos que  $x, y \in H_1$  y  $x, y \in H_2$ . Así, como  $H_1, H_2 \leq G$ , tenemos que  $y^{-1} \in H_1 \cap H_2$  y  $x \cdot y^{-1} \in H_1 \cap H_2$ . □

**Proposición 2.4.** Si  $(G, \cdot)$  es un grupo finito y  $x \in G$ , el orden de  $x$  coincide con el menor entero positivo  $k$  tal que  $x^k = e$ . Además,

$$\langle x \rangle = \{x, x^2, x^3, \dots, x^k = e\}.$$

**Ejemplo 2.3.** Consideramos el grupo  $(\mathbb{Z}_6, +) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}\langle 0 \rangle &= \{0\} \Rightarrow \text{ord}(0) = 1 \\ \langle 1 \rangle &= \{1, 2, 3, 4, 5, 0\} \Rightarrow \text{ord}(1) = 6 \\ \langle 2 \rangle &= \{2, 4, 0\} \Rightarrow \text{ord}(2) = 3 \\ \langle 3 \rangle &= \{3, 0\} \Rightarrow \text{ord}(3) = 2 \\ \langle 4 \rangle &= \{4, 2, 0\} \Rightarrow \text{ord}(4) = 3 \\ \langle 5 \rangle &= \{5, 4, 3, 2, 1, 0\} \Rightarrow \text{ord}(5) = 6.\end{aligned}$$

### 2.1.2. Isomorfismos de grupos

**Definición 2.5** (Isomorfismo). Sean  $(G, \cdot), (G', *)$  grupos. Se dice que  $f : G \rightarrow G'$  es un **isomorfismo** (de grupos) si es biyectiva y

$$\forall x, y \in G, f(x \cdot y) = f(x) * f(y).$$

Si  $G$  es isomorfo a  $G'$ , lo escribiremos  $G \cong G'$ .

**Ejemplo 2.4.**  $f : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$  con  $f : x \rightarrow e^x$ .

**Proposición 2.5.** Si  $G \cong G'$ , entonces

- (a)  $G$  y  $G'$  tienen el mismo cardinal.
- (b) Si  $e$  y  $e'$  son, respectivamente, los elementos neutros de  $G$  y  $G'$ ,

$$f(e) = e' \quad \text{y} \quad f^{-1}(e') = e.$$

Además,  $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$ .

- (c) Si  $H \leq G$ ,  $f(H) \leq G'$ .
- (d) Si  $x \in G$ ,  $\text{ord}(x) = \text{ord}(f(x))$ .
- (e) Si  $G$  es abeliano, entonces  $G'$  también lo es.

*Demostración.* (a) Es trivial, puesto que tiene que un isomorfismo es biyectivo por definición.

(b) Tenemos que  $\forall x \in G$ ,

$$f(x) = f(x \cdot e) = f(x) * f(e).$$

De esta manera,

$$e' = (f(x))^{-1} * f(x) = (f(x))^{-1} * f(x) * f(e) = e' * f(e) = f(e).$$

Similarmente, tenemos que

$$f(x) * f(x^{-1}) = f(x \cdot x^{-1}) = f(e) = e'.$$

Así, tenemos que  $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$ . El hecho que  $f^{-1}(e') = e$  se deriva de que  $f$  es una biyección.

(c) Sea  $H \leq G$ . Entonces si  $f(x), f(y) \in f(H)$  tenemos que

$$f(x) * (f(y))^{-1} = f(x \cdot y^{-1}) \in f(H),$$

pues  $x \cdot y^{-1} \in H$ .

(d) Tenemos que  $f(\langle x \rangle) \leq G'$  y además,

$$f(x^n) = (f(x))^n.$$

Por tanto,

$$\text{ord}(x) = |\langle x \rangle| = |f(\langle x \rangle)| = |\langle f(x) \rangle| = \text{ord}(f(x)).$$

(e) Si  $G$  es abeliano,  $\forall x, y \in G$  tenemos que  $x \cdot y = y \cdot x$ . Así,

$$f(x \cdot y) = f(x) * f(y) \quad \text{y} \quad f(y \cdot x) = f(y) * f(x)$$

$$\therefore f(x) * f(y) = f(y) * f(x).$$

□

**Definición 2.6** (Homomorfismo). Se dice que  $(G, \cdot) \rightarrow (G', *)$  es **homomorfismo** si  $\forall x, y \in G$ ,  $f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$ .

**Ejemplo 2.5.** La siguiente aplicación es homomorfismo pero no isomorfismo.

$$\begin{aligned} f : (\text{GL}(n), \cdot) &\rightarrow (\mathbb{R}/\{0\}, \cdot) \\ M_{n \times n} &\rightarrow \det(M_{n \times n}). \end{aligned}$$

Si  $A, B \in \text{GL}(n)$ , entonces  $f(A \cdot B) = f(A) \cdot f(B)$ , pues  $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ .

**Observación.** En la proposición anterior, (b) y (c) también se cumplen para los homomorfismos.

**Definición 2.7** (Núcleo e imagen). Sea  $e'$  el elemento neutro de  $G'$ . El **núcleo** de  $f$  se define de la siguiente manera:

$$\text{Ker}(f) = \{x \in G : f(x) = e'\}.$$

Se define **imagen** de  $f$  al conjunto

$$\text{Im}(f) = f(G) = \{f(x) \in G' : x \in G\}.$$

**Ejemplo 2.6.** En la aplicación del ejemplo anterior tenemos que  $\text{Ker}(f) = \text{SL}(n)$  e  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}/\{0\}$ .

**Proposición 2.6.** Si  $f$  es homomorfismo, tenemos que  $\text{Ker}(f) \leq G$  y  $\text{Im}(f) \leq G'$ .

*Demostración.* Para ver que  $\text{Ker}(f) \leq G$  basta ver que  $\forall x, y \in \text{Ker}(f)$  se verifica que

$$f(xy^{-1}) = f(x)(f(y))^{-1} = e^{-1}.$$

Es decir,  $xy^{-1} \in \text{Ker}(f)$ . Por otra parte, como los homomorfismos llevan subgrupos en subgrupos, tenemos que  $\text{Im}(f) \leq G'$ .  $\square$

**Proposición 2.7.** Sea  $f$  es homomorfismo.

- (a)  $f$  es inyectiva  $\iff \text{Ker}(f) = \{e\}$ .
- (b)  $f$  es sobreyectiva  $\iff \text{Im}(f) = G'$ .
- (c) Si  $f$  es inyectiva y sobreyectiva es biyectiva y, por tanto, isomorfismo.

*Demostración.* (a) Sea  $f$  inyectiva. Si  $a \in \text{Ker}(f)$  tenemos que  $f(a) = f(e) = e'$ , por lo que  $a = e$ . Recíprocamente, si  $\text{Ker}(f) = \{e\}$ , tenemos que si  $f(a) = f(b)$  entonces

$$f(a) = f(b) \iff f(a)(f(b))^{-1} = e' \iff f(ab^{-1}) = e'.$$

Entonces,  $ab^{-1} \in \text{Ker}(f)$  por lo que  $ab^{-1} = e$ , es decir,  $a = b$ . Por lo que  $f$  es inyectiva.

(b) Sale directamente de la definición de sobreyectividad.  $\square$

### 2.1.3. Subgrupos normales. Grupo cociente.

**Definición 2.8.** Sea  $H \leq G$ . Definimos la relación de equivalencia  $x\mathcal{R}_Hy \iff x \cdot y^{-1} \in H$ . Entonces, las clases de equivalencia tendrán la forma

$$Hx = [x]_H = \{hx : h \in H\}.$$

Cada clase de equivalencia contiene exactamente  $|H|$  elementos.

**Teorema 2.1** (Teorema de Lagrange). Sea  $G$  un grupo finito y  $H \leq G$ . Entonces  $|H|$  divide a  $|G|$ .



*Demostración.* Sea  $G/H$  el conjunto cociente de  $G$  por la relación de equivalencia  $\mathcal{R}_H$ .

$$G/H = \{Hx : x \in G\}.$$

Dado que los  $Hx$  son una partición de  $G$ , cada  $Hx$  tiene  $|H|$  elementos y, al haber  $|G/H|$  de ellas, tenemos que  $|G| = |G/H| |H|$ .  $\square$

**Definición 2.9** (Conjunto cociente). Denominamos conjunto cociente al conjunto

$$G/H = \{Hx : x \in G\}.$$

**Definición 2.10** (Subgrupo normal). Sea  $H \leq G$ . Decimos que  $H$  es **subgrupo normal** ( $H \triangle G$ ) si se verifica que

$$g \cdot h \cdot g^{-1} \in H, \forall g \in G, \forall h \in H.$$

**Observación.** Si  $G$  es abeliano, todos sus subgrupos son normales.

**Proposición 2.8.** Si  $H \triangle G$ , entonces  $(G/H, \cdot)$  es grupo.

*Demostración.* Podemos definir el producto de clases de la siguiente manera:

$$(Hx)(Hy) = Hxy.$$

La definición no depende del representante elegido pues

$$(h x h' y) (x y)^{-1} = h x h' y y^{-1} x^{-1} = h x h' x^{-1} = h (x h' x^{-1}) \in H.$$

Esto último se cumple porque  $H$  es normal.  $\square$

**Proposición 2.9.** Sea  $f : G \rightarrow G'$  homomorfismo. Entonces  $\text{Ker}(f) \triangle G$ .

*Demostración.* Tenemos que  $\forall x \in \text{Ker}(f), \forall z \in G, \text{Ker}(f) \leq G$ . Ahora tenemos que ver que  $z \cdot x \cdot z^{-1} \in \text{Ker}(f)$ . Es decir,  $f(z x z^{-1}) = e'$ . Como  $f$  es homomorfismo,

$$f(z x z^{-1}) = f(z) f(x) f(z^{-1}) = f(z) f(z^{-1}) = f(z) (f(z))^{-1} = e'.$$

$\square$

## 2.2. Isometrías del plano

**Definición 2.11** (Isometrías del plano). Aplicación biyectiva  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ . Es decir,  $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ . Las isometrías preservan los ángulos.

**Proposición 2.10.** Tenemos que  $E_2$  (isometrías del plano), con la composición forman un grupo  $(E_2, \circ)$ .

*Demostración.* (i) Tenemos que la composición de isometrías es isometría:

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(y)| = |g(f(x)) - g(f(y))| = |f(x) - f(y)| = |x - y|.$$

A partir de esto la propiedad asociativa es trivial.

(ii) La aplicación identidad es, trivialmente una isometría.

(iii) Si  $f$  es una isometría, tenemos que, como es biyectiva, existe  $f^{-1}$  que cumple que

$$|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| = |f(f^{-1}(x)) - f(f^{-1}(y))| = |x - y|.$$

□

**Ejemplo 2.7.** (1) Traslación de un vector  $\vec{v}$ . Tenemos que  $t_{\vec{v}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $t_{\vec{v}}(x) = x + \vec{v}$ , donde  $x$  es un punto en  $\mathbb{R}^2$ .

(2) Las rotaciones alrededor de un punto.

(3) Las reflexiones respecto a una recta.

**Definición 2.12** (Aplicación lineal). Tenemos que  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una **aplicación lineal** si se verifica que

(1)  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ .

(2)  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

**Observación.** De (1) y (2) podemos formular el resultado equivalente:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

**Observación.** Toda aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  viene determinada por las imágenes de una base. Sea  $B = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  una base de  $\mathbb{R}^2$ . Entonces, si  $f(e_1) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  y  $f(e_2) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ . Entonces, la matriz asociada a la aplicación lineal será

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

**Proposición 2.11.** Las isometrías del plano que dejan fijo el origen son aplicaciones lineales.

*Demostración.* Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una isometría que verifica que  $f(0) = 0$ . Entonces

$$|f(y)| = |f(y) - f(0)| = |y - 0| = |y|, \forall y \in \mathbb{R}^2.$$

- (i) Si  $\lambda = 0$  o  $x = 0$  es trivial. Si  $x \in \mathbb{R}^2$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tenemos que, como  $f$  conserva la alineación de tres puntos, entonces  $x$ ,  $f(x)$  y  $\lambda f(x)$  están alineados. Entonces,  $f(\lambda x) = \mu f(x)$  para algún  $\mu \in \mathbb{R}$ . Así,

$$|\mu| |x| = |\mu| |f(x)| = |\mu f(x)| = |f(\lambda x)| = |\lambda x| = |\lambda| |x|.$$

Por tanto,  $\mu = \pm \lambda$ . Si  $f(\lambda x) = -\lambda f(x)$  tendríamos que

$$|\lambda + 1| |x| = |(-\lambda - 1) f(x)| = |f(\lambda x) - f(x)| = |\lambda x - x| = |\lambda - 1| |x|.$$

Como  $x \neq 0$ , tenemos que  $|\lambda + 1| = |\lambda - 1|$ , que solo puede pasar si  $\lambda = 0$ , que es una contradicción.

- (ii) Vamos a ver que  $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ . Si  $0$ ,  $x$  e  $y$  están alineados tenemos que  $y = \mu x$  y podemos aplicar el apartado anterior. En otro caso, los puntos anteriores forman el triángulo  $x0y$ , que queda transformado en el triángulo  $f(x)0f(y)$ . Similarmente, el triángulo  $x(x + y)y$  se transforma en  $f(x)pf(y)$  donde  $p = f(x + y)$ . Como  $f$  es isometría y ser  $0$ ,  $x$ ,  $x + y$ ,  $y$  un paralelogramo, tenemos que el cuadrilátero  $0$ ,  $f(x)$ ,  $p$ ,  $f(y)$  también es un paralelogramo. Entonces, tenemos que  $p = f(x) + f(y)$ .

□

**Proposición 2.12.** Las únicas isometrías del plano que dejan fijo el origen son las rotaciones en torno al origen y las reflexiones con eje por el origen.

*Demostración.* Por la proposición anterior, las isometrías que dejan fijo el origen son aplicaciones lineales, por lo que tienen asociadas a ellas una matriz  $M$ . Dado que tienen que preservar la norma,

$$M^t M = I_2.$$

Esto se puede verificar usando la igualdad

$$x^t x = |x|^2 = |Mx|^2 = (Mx)^t Mx, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Por ser  $GL(2)$  un grupo, tenemos que

$$M^t = M^{-1} \Rightarrow M^t M = I_2.$$

Consecuentemente, si

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

tenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}.$$

Por un lado, tenemos que  $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ , por lo que existen  $\theta$  y  $\varphi$  tales que

$$a = \cos \varphi, \quad b = \sin \varphi, \quad d = \cos \theta \text{ y } c = \sin \theta.$$

Por otro lado, tenemos que  $ac + bd = 0$ , por lo que

$$0 = \cos \varphi \sin \theta + \sin \varphi \cos \theta = \sin(\theta + \varphi).$$

Entonces,

$$\theta + \varphi = 0 \quad \text{o} \quad \theta + \varphi = \pi.$$

(i) Si  $\theta + \varphi = 0$ , tenemos que  $\cos \varphi = \cos \theta$  y  $\sin \varphi = -\sin \theta$ . Por tanto,

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Esta matriz coincide con la de una rotación de ángulo  $\theta$  alrededor del origen, por tanto esta transformación coincide con una rotación. Además, como  $\det(M) = 1$  tenemos que  $M \in \text{SO}(2)$ .

(ii) Si  $\theta + \varphi = \pi$  tenemos que  $\cos \theta = -\cos \varphi$  y  $\sin \theta = \sin \varphi$ , por lo que

$$M = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Por tanto, como esta matriz coincide con la de una reflexión de ángulo  $\frac{\varphi}{2}$  con respecto al origen, la isometría es dicha reflexión. En este caso,  $\det(M) = -1$ .

□

**Observación.** Tenemos que la matriz asociada a una rotación con ángulo de rotación  $\theta$  será

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad |A_\theta| = 1.$$

**Observación.** Tenemos que la matriz asociada a una reflexión será

$$B_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}, \quad |B_\varphi| = -1.$$

**Observación.** Tenemos que  $A_\theta$  y  $B_\varphi$  son matrices ortogonales. Es decir,  $A_\theta^{-1} = A_\theta^t$  y  $B_\varphi^{-1} = B_\varphi^t$ . Una propiedad importante de las matrices ortogonales es que  $MM^t = I_2$ , es decir,  $\det(M) = \pm 1$ . Si  $\det(M) = -1$ , tenemos que  $M^2 = I_2$ .

**Proposición 2.13.** Las únicas isometrías del plano son las rotaciones en torno al origen compuestas con las traslaciones y las reflexiones con eje por el origen compuestas con traslaciones.

*Demostración.* Sea  $f$  una isometría y que  $f(0) = v$ . Sea  $t_v$  la traslación de vector  $v$ , se tiene que la isometría

$$t_v^{-1} \circ f = g,$$

fija el origen. El resultado se sigue aplicando la proposición anterior.  $\square$

Entonces, tenemos que podemos expresar cualquier isometría del plano  $f$  en términos de una traslación  $t_v$  y una transformación ortogonal  $f_M$ .

(1) Traslación de vector  $v$ :  $t_v(x) = v + x$ .

(2) Transformación ortogonal (rotación o reflexión):  $f_M$  tal que  $f_M(x) = Mx$ , donde  $M = A_\theta, B_\varphi$ .

**Notación.**  $f(v, M) = t_v \circ f_M$  tal que  $f(x) = v + Mx$ . Si  $\det(M) = 1$ , entonces se trata de rotaciones. Si  $\det(M) = -1$ , entonces se trata de reflexiones. Además, si  $\det(M) = 1$  se habla de **isometrías directas** y, si no, de **isometrías inversas**.

Vamos a calcular la expresión de la composición de dos isometrías. Sean  $f = (v, M)$  y  $g = (u, N)$  isometrías. Tenemos que

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= (v, M) \circ (u, N) = (t_v \circ f_M) \circ (t_u \circ f_N)(x) = v + M(u + Nx) = (v + Mu) + MNx \\ &= t_{v+Mu} \circ f_{MN}(x) = (v + Mu, MN). \end{aligned}$$

Así,

$$(v, M)(u, N) = (v + Mu, MN)$$

**Teorema 2.2.** Así, los casos posibles de isometría en el plano se reducen a

(a) Traslaciones de vector  $v$ . Son de la forma  $(v, I_2)$ .

(b) Rotaciones de centro  $c$  y ángulo  $\theta$ . Son de la forma  $(v, A_\theta)$  donde

$$v = c - A_\theta c \quad \text{y} \quad A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

(c) Reflexiones con eje una recta  $l$  que forma un ángulo de  $\frac{\varphi}{2}$  con la horizontal. Son de la forma  $(v, B_\varphi)$  con

$$v = 2a \quad \text{y} \quad B_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix},$$

donde  $a$  es el punto de  $l$  más cercano al origen.

(d) Reflexiones con deslizamiento con eje una recta  $l$  que forma un ángulo  $\frac{\varphi}{2}$  con la horizontal y con vector de deslizamiento  $b$ , paralelo a  $l$ . Son de la forma  $(v, B_\varphi)$  con

$$v = 2a + b \quad \text{y} \quad B_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix},$$

siendo  $a$  el punto de  $l$  más cercano al origen.

*Demostración.* (a) Trivial.

- (b) Si  $f$  es una rotación de centro  $c$  y ángulo  $\theta$ , tenemos que  $f$  se puede construir como una traslación de  $c$  al origen, el giro de ángulo  $\theta$  respecto a este y, finalmente, la traslación del origen a  $c$ . Es decir,

$$f(x) = c + A_\theta(x - c).$$

Recíprocamente, toda isometría  $f = (v, A_\theta)$  se corresponde con una rotación. En efecto, si fuera una rotación tendría que verificar que  $f(c) = c$ , por lo que

$$v + A_\theta c = c \Rightarrow (I_2 - A_\theta)c = v.$$

Así,  $c$  es solución del sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 - \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Como el determinante de la matriz del sistema es

$$(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta = 1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 2 - 2 \cos \theta = 2(1 - \cos \theta) \neq 0,$$

pues  $\theta \neq 0$ , tenemos que

$$c = (I_2 - A_\theta)^{-1} v.$$

Sea  $g$  la rotación de centro este valor  $c$  y ángulo  $\theta$ . Entonces  $f \equiv g$ , pues

$$\begin{aligned} g(p) &= (c - A_\theta c) + A_\theta p = (I_2 - A_\theta)c + A_\theta p \\ &= (I_2 - A_\theta)(I_2 - A_\theta)^{-1} v + A_\theta p \\ &= v + A_\theta p = f(p), \quad p \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

- (c) y (d) Sea  $m$  la recta paralela a  $l$  por el origen y  $f_{B_\varphi}$  la reflexión respecto a  $m$ . Para construir la reflexión sobre  $l$  con deslizamiento  $b$  basta trasladar  $l$  hasta  $m$ , reflejar  $m$  mediante  $f_{B_\varphi}$ , sumar el vector  $b$  y, finalmente, volver a trasladar hasta  $l$ . Es decir

$$f(x) = a + B_\varphi(x - a) + b = a + B_\varphi x - B_\varphi a + b = 2a + b + B_\varphi x,$$

pues  $B_\varphi a = -a$ . Recíprocamente, si  $f$  es una isometría del tipo  $(v, B_\varphi)$ , consideramos

$$b = \frac{v + B_\varphi v}{2} \quad \text{y} \quad a = \frac{v - B_\varphi v}{4}.$$

- (i) Si  $b \neq 0$ . Como  $B_\varphi^2 = I_2$ ,

$$B_\varphi b = \frac{B_\varphi v + B_\varphi^2 v}{2} = \frac{B_\varphi v + v}{2} = b.$$

Es decir, el vector  $b$  queda invariante por  $B_\varphi$  y, por tanto, es un vector director del eje de la reflexión  $B_\varphi$  (esto es, la recta que pasa por el origen y forma un ángulo de  $\frac{\varphi}{2}$  con la

horizontal). Por otra parte, como  $B_\varphi a = -a$ , se verifica que  $a$  es perpendicular a dicho eje. En efecto,

$$\begin{aligned} a^t b &= \frac{1}{8} (v - B_\varphi v)^t (v + B_\varphi v) = \frac{1}{8} (v^t v - v^t B_\varphi^t v + v^t B_\varphi v - v^t B_\varphi^t B_\varphi v) \\ &= \frac{1}{8} (v^t v - v^t B_\varphi v + v^t B_\varphi v - v^t I_2 v) = 0. \end{aligned}$$

Así pues, la recta  $l$  de dirección  $b$  que pasa por el punto  $a$  tiene la propiedad de que  $a$  es el punto de  $l$  más cercano al origen. Si llamamos  $g$  a la reflexión sobre  $l$  con deslizamiento  $b$ , por lo visto anteriormente tenemos que

$$g(p) = 2a + b + B_\varphi p = \frac{v - B_\varphi v}{2} + \frac{v + B_\varphi v}{2} + B_\varphi p = v + B_\varphi p = f(p), \quad \forall p \in \mathbb{R}^2,$$

por lo que  $f \equiv g$ , es decir,  $f$  es una reflexión con deslizamiento.

- (ii) Si  $b = 0$ , entonces  $B_\varphi v = -v$  y  $a = \frac{v}{2}$ . Así pues, el vector  $v$  (y, por tanto,  $a$ ) es perpendicular al eje de reflexión de  $B_\varphi$ . Razonando como antes, la recta  $l$  paralela al eje de  $B_\varphi$  que pasa por el punto  $a$  tiene la propiedad de que  $a$  es el punto de  $l$  más cercano al origen. Ahora, si llamamos  $g$  a la reflexión respecto a  $l$  tenemos que

$$g(p) = 2a + B_\varphi p = v + B_\varphi p = f(p), \quad \forall p \in \mathbb{R}^2.$$

Entonces,  $g \equiv f$ , es decir,  $f$  es una reflexión.

□

**Observación.** Dada una isometría  $(v, M)$ , el procedimiento a seguir para clasificarla es:

1. Si  $M = I_2$  entonces es traslación.
2. Si  $M \neq I_2$  y  $|M| = 1$  se trata de una rotación.
3. Si  $M \neq I_2$  y  $|M| = -1$  se trata de una reflexión. Para distinguir si es reflexión o reflexión con deslizamiento:
  - a) Si  $Mv = -v$  es una reflexión.
  - b) Si  $Mv \neq -v$  es una reflexión con deslizamiento.

## 2.3. Grupo diédrico

$G = \langle x, y \rangle = \{e, x, y, x^2, x^3, x^{-1}, xy, y^2, \dots\}$  grupo generado por  $x$  e  $y$ .

**Definición 2.13** (Grupo diédrico). El **grupo diédrico**,  $D_n$ , es el grupo de las simetrías de un polígono regular de  $n$  lados (esto es, las isometrías que lo dejan fijo). Tenemos que  $\text{ord}(D_n) = 2n$ .

**Ejemplo 2.8.** Rotaciones con respecto a su centro ( $\sigma$ ). Tenemos que

$$\begin{array}{rcl} & & i \\ & & \vdots \\ \sigma & \rightarrow & \frac{2\pi}{n} \\ \sigma^2 & \rightarrow & \frac{4\pi}{n} \\ & & \vdots \\ \sigma^{n-1} & \rightarrow & (n-1) \frac{2\pi}{n} \end{array}$$

Tenemos que  $\sigma^n = i$ .

**Ejemplo 2.9.** Simetría con respecto a una recta que pasa por el centro del polígono y uno de sus vértices ( $\tau$ ).

El resto de movimientos se pueden obtener de la siguiente manera. Si  $\sigma$  es una rotación de  $\frac{2\pi}{3}$  radianes con respecto al centro de un polígono regular de  $n$  lados y  $\tau$  simetría con respecto a una recta que pasa por este centro y cualquiera de los vértices del polígono, entonces las composiciones

$$\sigma \circ \tau, \sigma^2 \circ \tau, \dots, \sigma^{n-1} \circ \tau,$$

son las simetrías que faltan. Entonces tenemos que

$$D_n = \{i, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1}, \tau, \sigma \circ \tau, \sigma^2 \circ \tau, \dots, \sigma^{n-1} \circ \tau\}.$$

Por lo que  $D_n = \langle \sigma, \tau \rangle$  y  $\sigma^n = i$  y  $\tau^2 = i$ .

**Ejemplo 2.10.** Tenemos que  $D_3 = \{i, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma \circ \tau, \sigma^2 \circ \tau\}$ . Tenemos que  $\sigma$  es la rotación de ángulo  $\frac{2\pi}{3}$  y así para el resto de rotaciones.

**Proposición 2.14.**

$$\tau \circ \sigma = \sigma^{-1} \circ \tau.$$

**Proposición 2.15.**

$$\sigma^n = I_2, \quad \tau^2 = I_2, \quad \sigma^k \tau = \tau \sigma^{n-k}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$



## Capítulo 3

# Trigonometría plana y esférica

### 3.1. Trigonometría plana

**Teorema 3.1.** (i)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .

(ii)  $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$ .

(iii)  $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$ .

**Teorema 3.2** (Suma de ángulos).

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$$

Las siguientes igualdades se deducen a partir de las anteriores.

**Teorema 3.3** (Diferencia de ángulos).

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}.$$

**Teorema 3.4** (Ángulo doble).

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}.\end{aligned}$$

**Teorema 3.5** (Ángulo mitad).

$$\begin{aligned}\sin \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \\ \cos \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \\ \tan \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.\end{aligned}$$

**Teorema 3.6** (Productos de senos y cosenos).

$$\begin{aligned}\sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} (\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)) \\ \cos \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} (\sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} (\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta &= -\frac{1}{2} (\cos (\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta)).\end{aligned}$$

**Teorema 3.7** (Suma y diferencia de senos y cosenos).

$$\begin{aligned}\sin A + \sin B &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ \sin A - \sin B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \\ \cos A + \cos B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ \cos A - \cos B &= -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}.\end{aligned}$$

**Teorema 3.8** (Teorema del seno).

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

**Teorema 3.9** (Teorema del coseno).

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \end{aligned}$$

**Teorema 3.10** (Fórmulas de proyección).

$$\begin{aligned} a &= b \cos C + c \cos B \\ b &= c \cos A + a \cos C \\ c &= a \cos B + b \cos A. \end{aligned}$$

**Teorema 3.11** (Fórmulas de Mollweide).

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{c} &= \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}}, & \frac{a-b}{c} &= \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} \\ \frac{b+c}{a} &= \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}}, & \frac{b-c}{a} &= \frac{\sin \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} \\ \frac{c+a}{b} &= \frac{\cos \frac{C-A}{2}}{\sin \frac{B}{2}}, & \frac{c-a}{b} &= \frac{\sin \frac{C-A}{2}}{\cos \frac{B}{2}}. \end{aligned}$$

## 3.2. Trigonometría esférica

Recordamos que se define **esfera** como el subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  formado por los puntos cuya distancia a un punto fijo (**centro**) es menor o igual que una cierta cantidad  $r$ , denominada **radio**.

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq r^2 \right\}.$$

La **superficie** de una esfera de centro  $(x_0, y_0, z_0)$  y radio  $r$  es el subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  definido por

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \right\}.$$

### 3.2.1. Triángulos esférico

## Capítulo 4

# Dinámica Discreta

La dinámica se encarga de estudiar los cambios en un sistema a lo largo del tiempo. En particular, la dinámica discreta estudia estos cambios en una sucesión de instantes de tiempo (días, meses, años, etc.). Se asume que cada uno de estos estados depende de los instantes anteriores. En general, buscaremos la relación causa-efecto que permite determinar cierto estado en función de los anteriores.

**Ejemplo 4.1.** Consideremos como primer ejemplo la sucesión de Fibonacci. Una pareja de conejos tarda un mes en alcanzar la edad fértil. A partir de ese mes, es capaz de engendrar una nueva pareja de conejos cada mes. Dado un mes  $n$ , buscamos calcular cuántos conejos hay.

- En  $t_0$  ( $n = 0$ ) tenemos solo los dos conejos iniciales.
- En  $t_1$  ( $n = 1$ ), la pareja es fértil, por lo que en  $t_2$  ( $n = 2$ ) tendremos la pareja nativa sumada a su descendencia.
- En  $t_3$  ( $n = 3$ ) tenemos la pareja inicial, su descendencia, y otra descendencia suya.
- En  $t_4$  ( $n = 4$ ) tenemos la pareja inicial, su descendencia primera y su segunda y la descendencia de su descendencia.

Así, en general tenemos que  $A(n+2) = A(n+1) + A(n)$ . Matemáticamente, tenemos que la relación que buscamos es la sucesión de Fibonacci

$$A(0) = 1, A(1) = 1, A(n+2) = A(n+1) + A(n).$$

**Definición 4.1.** Un **sistema dinámico discreto de primer orden** es una sucesión de números  $\{A(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que cada elemento de la sucesión se relaciona con el anterior mediante alguna función  $f$  tal que  $A(n+1) = f(A(n), n)$ , con  $n \in \mathbb{N}$ <sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Asumimos que  $\mathbb{N}$  incluye el 0.

**Definición 4.2.** Dado un sistema dinámico  $A(n+1) = f(A(n), n)$  de primer orden:

- (a) Llamamos **solución general** a la fórmula de sucesiones  $\{A(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  que satisface el sistema al solicitar los valores  $A(n)$  y  $A(n+1)$ .
- (b) Llamamos **solución particular** del sistema con dato inicial  $a_0 = A(0)$  a la sucesión  $\{A(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  que satisface el sistema para los valores  $A(n+1)$  y  $A(n)$  y además, tal que  $A(0) = a_0$ .

**Definición 4.3** (Sistema lineal). Un sistema dinámico discreto de primer orden se dice **lineal** de coeficientes constantes si es de la forma  $A(n+1) = rA(n) + b$ , donde  $b, r \in \mathbb{R}$ . En esta situación, se denominan

- (a) Sistema **homogéneo** si  $b = 0$ .
- (b) Sistema **afín** si  $b \neq 0$ .

**Ejemplo 4.2.** Consideremos  $A(n+1) = 3A(n)$ . Vamos a encontrar su solución general. Supongamos que  $a_0 = A(0)$ . Tenemos que

$$A(1) = 3a_0, A(2) = 3A(1) = 3^2a_0, \dots, A(n) = 3^n a_0.$$

Podemos observar que se trata de una sucesión geométrica.

**Definición 4.4.** Un sistema dinámico discreto de orden dos es una sucesión  $\{A(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $A(n+2) = f(A(n+1), A(n), n)$ , para cierta función  $f$ .

**Observación.** Esta definición es generalizable a orden  $m$  si la función depende de  $m$  estados independientes del sistema.

## 4.1. Sistemas dinámicos lineales de primer orden

Estudiaremos los puntos de equilibrio, la estabilidad y análisis gráfico.

**Definición 4.5** (Sistemas autónomos). Un sistema dinámico de primer orden se dice **autónomo** si el funcional  $f$  no depende de  $n$ , es decir, si  $A(n+1) = f(A(n))$ . En caso contrario, se denomina **no autónomo**.

**Ejemplo 4.3.** Consideremos un préstamo personal al 5% anual con pagos anuales de 100 euros. Consideremos  $a_0 = A(0)$ . Medimos la deuda anual:

$A(0)$	$A(1)$	$A(2)$	$\dots$	$A(n+1)$
$a_0$	$1,05a_0 - 100$	$1,05a_0 - 100$	$\dots$	$1,05A(n) - 100$

Si  $a_0 = 1000$ , tenemos que la deuda está disminuyendo y si  $a_0 = 3000$ , la deuda está aumentando, cuando  $n \in \{1, \dots, 5\}$ . Tenemos que para  $a_0 = 2000$ ,  $A(1) = A(2) = \dots = A(5)$ .

**Definición 4.6** (Punto de equilibrio). Un **punto de equilibrio** (o **fijo**),  $a$ , del sistema dinámico discreto autónomo  $A(n+1) = f(A(n))$ , con  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , si  $A(n) = a$  es solución constante del sistema. Es decir, si  $A(n) = a$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

**Observación.** Se tiene que cumplir que  $A(0) = a_0 = a$ .

**Proposición 4.1.** La condición necesaria y suficiente para que  $a \in \mathbb{R}$  sea punto de equilibrio del sistema  $A(n+1) = f(A(n))$ , es que  $a = f(a)$ .

*Demostración.* Observar que si  $A(n) = a \iff A(n+1) = a$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .  $\square$

**Ejemplo 4.4.** Encontrar los puntos de equilibrio del sistema  $A(n+1) = 2A(n) - 3$ . Buscamos  $a = f(a)$ , por lo que  $A(0) = a = 3$ .

**Proposición 4.2.** El único punto de equilibrio del sistema lineal afín discreto de la forma  $A(n+1) = rA(n) + b$  con  $r \neq 1$  y  $r, b \in \mathbb{R}$ , es  $a = \frac{b}{r-1}$ .

*Demostración.* Si  $a = A(n)$ , la única solución de  $a = ra + b$  es  $a = \frac{b}{r-1}$ .  $\square$

**Definición 4.7.** Se dice que un punto de equilibrio  $a$  del sistema dinámico  $A(n+1) = f(A(n))$  es

- (i) **Estable (atractor/atractivo)** si  $\exists \varepsilon > 0$  tal que  $|A(0) - a| < \varepsilon$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} A(n) = a$ .
- (ii) **Inestable (repulsor/repulsivo)** si  $\exists \varepsilon > 0$ , tal que si  $0 < |A(0) - a| < \varepsilon$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} A(n) \neq a$ .
- (iii) **Neutro** si no es estable ni inestable.

**Ejemplo 4.5.** Continuamos con el ejemplo anterior,  $A(n+1) = 2A(n) + 3$ . Tenemos que el punto de equilibrio único es  $a = A(0) = 3$ . Consideremos  $a_0^1 = 3,01$  y  $a_0^2 = 2,99$ .

	$a_0^1$	$a_0^2$
$A(0)$		
$A(1)$	3,02	2,98
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$A(10)$	13,24	-7,24

Sin embargo, si cogemos ahora  $A(n+1) = 0,8A(n) - 2$ , tenemos que el único punto de equilibrio será  $a = -10$ . Cogemos  $a_0^1 = -9,99$ ,  $a_0^2 = -10,01$ ,  $a_0^3 = -10,005$  y  $a_0^4 = -9,995$ .

	$a_0^1$	$a_0^2$	$a_0^3$	$a_0^4$
$A(0)$	-9,99	-10,01	-10,005	-9,995
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$A(10)$	-9,9989	-10,0010	-10,0005	-9,99946

**Teorema 4.1.** Sea el sistema dinámico afín  $A(n+1) = rA(n) + b$ , con  $r \in \mathbb{R}/\{1\}$ . El punto de equilibrio  $a = \frac{b}{r-1}$  es

- (a) Estable si  $|r| < 1$ . Resulta además que  $\lim_{n \rightarrow \infty} A(n) = a$ ,  $\forall A(0) = a_0 \in \mathbb{R}$ .
- (b) Inestable si  $|r| > 1$ . Resulta además que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |A(n)| = \infty$ ,  $\forall A(0) = a_0 \in \mathbb{R}$ , con  $A(0) \neq a$ .
- (c) Neutro si  $r = -1$ . En esta situación  $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  se tiene que  $A(2n) = A(0)$  y  $A(2n+1) = A(1)$ .

*Demostración.* Dado el sistema  $A(n+1) = rA(n) + b$ . Tenemos que el punto de equilibrio de equilibrio verifica que

$$a = f(a) \Rightarrow a = \frac{b}{r-1}.$$

Por tanto, se tiene que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$|A(n) - a| = |rA(n-1) + b - a| = |rA(n-1) + b + ar - b| = |r| |A(n-1) - a|.$$

Apliquemos el procedimiento de inducción sobre  $n$ . Si  $n = 1$ ,

$$|A(1) - a| = |r| |A(0) - a|.$$

Si  $n = 2$ ,

$$|A(2) - a| = |r| |A(1) - a| = r^2 |A(0) - a|.$$

Asumimos que es cierto para  $n$ . Ahora estudiamos el caso  $n+1$ :

$$|A(n+1) - a| = |r| |A(n) - a| = |r|^{n+1} |A(0) - a|.$$

- (a) Si  $|r| < 1$ , tenemos que si  $n \rightarrow \infty$ ,  $|r|^n \rightarrow 0$  y, en consecuencia,

$$|A(n) - a| = |r|^n |A(0) - a| \rightarrow 0.$$

- (b) Si  $|r| > 1$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |A(n) - a| = \lim_{n \rightarrow \infty} |r|^n |A(0) - a| = \infty.$$

Por tanto,  $a$  es un punto de equilibrio inestable.

- (c) Si  $r = -1$ , tenemos que

$$|A(n) - a| = |A(0) - a|, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Por tanto, se tiene que  $a$  es un punto de equilibrio neutro. Además, tenemos que para todo  $n$  se verifica que

$$A(n) = -A(n-1) + b = -(-A(n-2) + b) + b = A(n-2).$$

Así, se tiene que

$$\begin{cases} A(0) = A(2) = \dots = A(2n) = \dots \\ A(1) = A(3) = \dots = A(2n+1) = \dots \end{cases}.$$

□

**Ejemplo 4.6. Ejercicio 1, Hoja 7.** El día 1 de enero de 2010. El capital inicial en la cuenta bancaria es de 1000 euros. El interés compuesto es de 10 % anual.

- (a) Obtener la relación entre la cantidad de dinero que habrá en la cuenta el día 1 de enero de cada año a partir de la que hubiera el anterior.

$$\begin{array}{ll} 1 \text{ enero } 2010 & A(0) = 1000 \\ 1 \text{ enero } 2011 & A(1) = 1100 \\ 1 \text{ enero } 2012 & A(2) = 1210 \end{array}$$

Buscamos la relación  $A(n+1) = rA(n) + b$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} A(0) &= 1000 \\ A(1) &= 1000 + 10\%1000 = 1,1A(0) \\ A(2) &= A(1) + 10\%A(1) = 1,1A(1) = 1,1^2A(0) \\ &\vdots \\ A(n) &= 1,1^nA(0). \end{aligned}$$

(b)  $A(n) = 1,1^nA(0)$ .

- (c) Calcular el dinero en la cuenta el 1 de enero de 2028.

$$A(18) = 1,1^{18}A(0) = 5559,92 \text{ euros.}$$

**Ejemplo 4.7. Ejercicio 2, Hoja 7.** Un cultivo celular, las células se reproducen por mitosis (de cada célula se obtienen dos nuevas en una unidad de tiempo).

- (a) Si inicialmente tenemos 100 células, cuántas habrá para 6 unidades de tiempo y para  $n$  unidades?

Es evidente que (en el examen hay que demostrarlo por inducción)

$$A(n) = 2A(n-1) = 2^nA(0).$$

Para  $n = 6$  se tiene que  $A(6) = 2^6 \cdot 100 = 6400$ . Para  $n = 100$  tenemos que  $A(100) \approx 10^{30}$ .



- (b) Modelizar el problema nuevamente asumiendo la tasa de natalidad  $b \in \mathbb{R}$  y la tasa de mortalidad  $d \in \mathbb{R}$ .

La nueva solución general será  $A(n) = A(n-1) + bA(n-1) - dA(n-1) = (1+b-d)A(n-1)$ .

Así, tenemos que  $A(n) = (1+b-d)^n A(0)$ .

**Ejemplo 4.8. Ejercicio 4, Hoja 7.** Hemos hecho un préstamo de 1000 euros al 5% anual con pagos de 100 euros anuales. Cuánto dinero debemos a los 5 años?

Tenemos que

$$A(0) = a_0$$

$$A(1) = a_0 + 5\%a_0 - 100 = 1,05a_0 - 100$$

$$A(2) = a_1 + 5\%a_1 - 100 = 1,05(1,05a_0 - 100) - 100 = 1,05^2a_0 - 1,05 \cdot 100 - 100$$

$\vdots$

$$A(n) = 1,05^n a_0 - 100(1,05^{n-1} + \dots + 1,05 + 1) = 1,05^n a_0 - 100 \sum_{i=0}^{n-1} 1,05^i$$

Así, tenemos que  $A(n) = 1,05^n a_0 - 100 \cdot \frac{1 - 1,05^n}{1 - 1,05}$ .

- (a) Deuda para  $n = 5$  con  $a_0^1 = 1000$ ,  $a_0^2 = 2000$  y  $a_0^3 = 3000$ . Tenemos que

$$a_0^1 \rightarrow A(5) = 723,72$$

$$a_0^2 \rightarrow A(5) = 2000$$

$$a_0^3 \rightarrow A(5) = 3276,28.$$

- (b) El punto de equilibrio  $a$  debe verificar que  $f(a) = a$ . Tenemos que

$$a = 1,05^n a - \frac{1 - 1,05^n}{1 - 1,05} \cdot 100 \Rightarrow a = 100 \cdot \frac{1 - 1,05^n}{(1 - 1,05^n)(1 - 1,05)} = 2000.$$

**Definición 4.8** (Gráfica de un sistema). Dado el sistema dinámico lineal autónomo de primer orden  $A(n+1) = f(A(n))$  con  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , con  $A(0) = a_0$  dado. Sea la representación gráfica de la curva  $y = f(x)$  e  $y = x$ . Entonces la sucesión de puntos

$$\{(A(0), f(A(0))), \dots, (A(n), f(A(n)))\}.$$

se denomina **gráfica del sistema**

**Teorema 4.2.** Sea la representación gráfica del sistema dinámico  $A(n+1) = rA(n) + b$ , dado por la recta  $y = rx + b$ . El punto de intersección con  $y = x$  es  $(a, a)$ , con  $a$  el punto de equilibrio del sistema. Entonces la sucesión de puntos de la gráfica del sistema verifica:

- (a) Converge a  $(a, a)$  si  $|r| < 1$ .

(b) Diverge de  $(a, a)$  si  $|r| > 1$ .

(c) Oscila en un cuadrado alrededor de  $(a, a)$  si  $r = -1$ .

*Demostración.* Trivial. □

**Ejemplo 4.9.** Consideremos  $A(n+1) = -0,8A(n) + 3,6$ , con  $A(0) = 4$ ; y  $A(n+1) = -A(n) + 4$  con  $A(0) = 6$ . En el primer caso, como  $|-0,8| < 1$ , el punto de equilibrio  $(2, 2)$  es punto de equilibrio estable. Gráficamente, el sistema converge a  $(2, 2)$ . En el segundo caso, el punto de equilibrio es también  $(2, 2)$ , pero no es estable puesto que  $|-1| = 1$ .

**Definición 4.9.** Una solución  $A(n)$  de un sistema dinámico se dice **periódica** si existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $A(n+m) = A(n)$  con  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Se dice que  $m$  es el **período** de la solución.

#### 4.1.1. Solución general y particular de los sistemas homogéneos y afines

Recordamos que un sistema homogéneo es un sistema dinámico de la forma

$$A(n+1) = rA(n), \quad r \in \mathbb{N}.$$

**Teorema 4.3.** La solución general del sistema dinámico lineal homogéneo es

$$A(n) = cr^n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

con  $c \in \mathbb{R}$ . La solución particular del sistema con  $A(0) = a_0$  es

$$A(n) = a_0 r^n.$$

*Demostración.* Por un lado, tenemos que  $\forall c \in \mathbb{R}, cr^{n+1} = rcr^n$ . Por tanto, la sucesión  $A(n) = cr^n$  es solución del sistema dinámico. Por otro lado, cualquier otra solución del sistema dinámico debe ser de esa forma. Razonamos por inducción. Tenemos que  $A(1) = rA(0)$ . Asumimos que  $A(n) = r^n A(0)$ . Entonces,

$$A(n+1) = rA(n) = r^{n+1}A(0).$$

□

**Corolario 4.1.** La solución particular del sistema, conocido el valor  $A(m) = a_m$  para cierto  $m \in \mathbb{N}$  es

$$A(n) = \frac{a_m}{r^m} r^n = a_m r^{n-m}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

*Demostración.* Tenemos que

$$A(m) = a_0 r^m = a_m \Rightarrow a_0 = \frac{a_m}{r^m}.$$

Por tanto,

$$A(n) = a_0 r^n = \frac{a_m}{r^m} r^n = a_m r^{n-m}.$$

□

**Teorema 4.4.** Sea el sistema dinámico lineal afín  $A(n+1) = rA(n) + b$ , con  $r, b \in \mathbb{R}$ . La solución general es

$$A(n+1) = \begin{cases} cr^n - \frac{b}{1-r}, & r \neq 1 \\ c + nb, & r = 1 \end{cases}.$$

La solución particular con  $a_0 = A(0)$  es

$$A(n) = \begin{cases} \left(a_0 - \frac{b}{1-r}\right) r^n + \frac{b}{1-r}, & r \neq 1 \\ a_0 + nb, & r = 1 \end{cases}.$$

*Demostración.* El punto de equilibrio del sistema dinámico afín  $A(n+1) = rA(n) + b$  es

$$a = ra + b \Rightarrow a = \frac{b}{1-r}, \quad r \neq 1.$$

Consideremos el sistema dinámico  $E(n) = A(n) - a$ . Así, tenemos que

$$E(n+1) = A(n+1) - a = rA(n) + b - (ra + b) = r(A(n) - a) = rE(n).$$

Por tanto, tenemos que  $E(n)$  es un sistema dinámico homogéneo, por lo que su solución general será

$$E(n) = cr^n, \quad c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Por tanto,

$$E(n) = A(n) - a = cr^n \Rightarrow A(n) = cr^n + a = cr^n + \frac{b}{1-r}, \quad r \neq 1.$$

Si  $A(0) = a_0$ , se tiene que  $E(0) = a_0 - a$ . Así,

$$E(n) = (a_0 - a) r^n = A(n) - a \Rightarrow A(n) = (a_0 - a) r^n + a = \left(a_0 - \frac{b}{1-r}\right) r^n + \frac{b}{1-r}.$$

Si  $r = 1$ , se tiene que el sistema se escribe  $A(n+1) = A(n) + b$ . Por inducción <sup>1</sup> obtenemos que

$$A(n) = a_0 + nb.$$

□

---

<sup>1</sup>Se trata de una sucesión aritmética.

## 4.2. Sistemas dinámicos lineales de segundo orden

Son sistemas de la forma

$$A(n+2) = aA(n+1) + bA(n) + c,$$

con  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . En este caso también diferenciamos en sistemas homogéneos y afines:

- Si  $c = 0$  se dice que el sistema es **homogéneo**.
- Si  $c \neq 0$  se dice que el sistema es **afín**.

### 4.2.1. Sistemas dinámicos de segundo orden homogéneos

**Definición 4.10** (Ecuación y polinomio característicos). La **ecuación característica** asociada a un sistema dinámico lineal de segundo orden homogéneo  $A(n+2) = aA(n+1) + bA(n)$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ , es  $x^2 = ax + b$ . El **polinomio característico** de este sistema es el polinomio de segundo grado  $P(x) = x^2 - ax - b$ .

**Teorema 4.5.** Sea el sistema lineal homogéneo de segundo orden  $A(n+2) = aA(n+1) + bA(n)$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ , y sean  $r, s \in \mathbb{R}$  con  $r \neq s$  las soluciones del polinomio característico (reales o complejas). Entonces

(a) La solución general del sistema es

$$A(n) = c_1 r^n + c_2 s^n,$$

donde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

(b) La solución particular del sistema con  $A(0) = a_0$  y  $A(1) = a_1$  será

$$A(n) = \frac{a_1 - sa_0}{r - s} r^n + \frac{a_1 - ra_0}{r - s} s^n.$$

*Demostración.* (a) Hacemos uso de la técnica de inducción. Primero, veamos que la solución del sistema se escribe de la forma  $A(n) = c_1 r^n + c_2 s^n$ . Sean  $r$  y  $s$  las soluciones del polinomio característico con  $r \neq s$ . Es decir, verifican que

$$r^2 - ar - b = 0, \quad \text{y} \quad s^2 - as - b = 0.$$

En esta situación,  $A(0)$  y  $A(1)$  se puede escribir de la forma

$$A(n) = .$$

□

**Teorema 4.6.** Sea el sistema dinámico lineal de segundo orden,  $A(n+2) = aA(n+1) + bA(n)$ , y sea  $r \neq 0$  la única raíz de  $P(x)$  (es decir, raíz doble). Entonces,

(a) La solución general del sistema dinámico es de la forma

$$A(n) = (c_1 + c_2 n) r^n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

(b) La solución particular del sistema que satisface  $A(0) = a_0$  y  $A(1) = a_1$  es

$$A(n) = \left( a_0 + \frac{a_1 - r a_0}{r} n \right) r^n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

*Demostración.* (a) Dado el sistema dinámico  $A(n+2) = aA(n+1) + bA(n)$  de polinomio característico  $P(x) = x^2 - ax - b$ , si  $r \neq 0$  es la única solución posible, tenemos que

$$x^2 - ax - b = (x - r)^2 = x^2 - 2xr + r^2.$$

Así, tenemos que  $a = 2r$  y  $b = -r^2$ . Por tanto, tenemos que el sistema se puede escribir de la forma

$$A(n+2) = 2rA(n+1) - r^2A(n).$$

Supongamos ahora que existe un sistema dinámico  $B(n)$  tal que  $A(n) = B(n)r^n$ , que debe verificar que

$$A(n+2) = B(n+2)r^n = 2r(B(n+1)r^{n+1}) - r^2B(n)r^n.$$

Por tanto,  $B(n+2) = 2B(n+1) - B(n)$ . Veamos, por inducción, si  $B(n)$  tiene solución de la forma  $B(n) = c_1 + c_2 n$ . Para  $n = 0$  y  $n = 1$  se tiene que, si fuera cierto,

$$B(0) = c_1 + 0c_2$$

$$B(1) = c_1 + 1c_2.$$

Como este sistema tiene solución única, es claro que  $B(0)$  y  $B(1)$  verifican solución. Supongamos que  $B(n)$  y  $B(n+1)$  también verifican la solución y comprobemos si entonces  $B(n+2)$  también es de la forma deseada.

$$B(n+2) = 2B(n+1) - B(n) = 2(c_1 + c_2(n+1)) - (c_1 + c_2 n) = c_1 + 2c_2(n+2).$$

Así, se tendría que

$$A(n) = B(n)r^n = (c_1 + c_2 n)r^n.$$

(b) Busquemos ahora la solución particular para  $A(0) = a_0$  y  $A(1) = a_1$ . Si  $n = 0$  y  $n = 1$ :

$$n = 0 \Rightarrow (c_1 + 0c_2)r^0 = c_1 = a_0$$

$$n = 1 \Rightarrow (c_1 + 1c_2)r^1 = rc_1 + rc_2 = a_1.$$

Así, tenemos que  $c_1 = a_0$  y  $c_2 = \frac{a_1 - ra_0}{r}$ , por lo que

$$A(n) = \left( a_0 + \frac{a_1 - ra_0}{r} n \right) r^n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

□

### 4.2.2. Sistemas dinámicos de segundo orden afines

**Teorema 4.7.** Sea el sistema lineal afín de segundo orden  $A(n+2) = aA(n+1) + bA(n) + c$  y sean  $r$  y  $s$  las soluciones del polinomio característico asociado  $P(x) = x^2 - ax - b$ . La solución general del sistema es

$$A(n) = \begin{cases} c_1 r^n + c_2 s^n + \frac{c}{1-a-b}, & r \neq s \wedge r, s \neq 1 \\ (c_1 + c_2 n) r^n + \frac{c}{1-a-b}, & r = s \neq 1 \\ (c_1 r^n + c_2) + \frac{c}{2-a} n, & r \neq 1 \wedge s = 1 \\ (c_1 + c_2 n) + \frac{cn^2}{2}, & r = s = 1 \end{cases}.$$

*Demostración.* Dadas dos soluciones  $A(n)$  y  $B(n)$  del sistema, tales que

$$A(n+2) = aA(n+1) + bA(n) + c.$$

$$B(n+2) = aB(n+1) + bB(n) + c.$$

Es claro que su diferencia

$$\begin{aligned} D(n+2) &= A(n+2) - B(n+2) = a(A(n+1) - B(n+1)) + b(A(n) - B(n)) \\ &= aD(n+1) + bD(n). \end{aligned}$$

es un sistema homogéneo. Así, dada una solución del sistema lineal homogéneo asociado al sistema afín, podemos construir la solución general a partir de ella y una particular, con  $A(n)$  la solución del sistema homogéneo asociado y  $A_p(n)$  una solución particular del sistema afín. Para buscar  $A_p(n)$ , vemos en primer lugar que si una raíz de  $P(x) = 1$ , entonces

$$P(1) = 0 = 1 - a - b \Rightarrow b = 1 - a.$$

Si  $s = 1$  y  $r = a - 1$ , se tendrán las soluciones. Si  $r = s = 1$ , que ocurre cuando  $a = 2$  y  $b = -1$ . Otra posibilidad es que  $r \neq 1$  y  $s = 1$  si  $b = 1 - a$  y  $a \neq 2$ . Si  $r \neq 1$  y  $s \neq 1$ , si  $b = 1 - a$  y  $a \neq 1$ .  $\square$

**Observación.** Para encontrar la solución particular con datos  $A(0) = a_0$  y  $A(1) = a_1$ , basta con resolver el sistema de ecuaciones de incógnitas  $c_1$  y  $c_2$ .

**Ejemplo 4.10.** Calcular la TAE, de una cuenta con capitalización cada  $m$  meses de intereses con interés 3%. Tendríamos que el sistema dinámico sería

$$A(n+1) = \left(1 + \frac{I}{m}\right) A(n) + b,$$

con  $b$  siendo la cantidad aportar a detraer al finalizar cada período. La solución particular será

$$A(n) = \left(1 + \frac{I}{m}\right)^n \left(a_0 + \frac{mb}{I}\right) - \frac{mb}{I}.$$

En este caso se tienen  $m = 4$  períodos de pago,  $I = \frac{3}{100}$   $b = 0$ . A 12 meses,

$$A(4) = \left(1 + \frac{0,03}{4}\right)^4 a_0 = 1,0304a_0.$$

Así, TAE = 0,0304 = 3,04%.

### 4.3. Sistemas no lineales

**Definición 4.11.** Son aquellos sistemas de la forma  $A(n+1) = f(A(n), n)$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , con  $f$  no lineal.

**Ejemplo 4.11.** Consideremos el sistema  $A(n+1) = -A(n)^3 + 0,8A(n)$ . Calculamos el punto de equilibrio con  $a = f(a)$ :

$$a = -a^3 - 0,8a \Rightarrow a = 0.$$

Existen otras dos raíces complejas conjugadas. Si  $A(0) = 1, 2$ , la sucesión de puntos de la gráfica converge a  $(a, a)$ , por lo que es estable. Esto no es cierto para  $A(0) = 1, 4$ .

**Teorema 4.8.** Sea  $a$  el punto de equilibrio de un sistema autónomo  $A(n+1) = f(A(n))$  no lineal, que tenga derivada continua, entonces

(a)  $a$  es estable si  $|f'(a)| < 1$ .

(b)  $a$  es inestable si  $|f'(a)| > 1$ .

*Demostración.* (a) Si  $|f'(a)| < 1$ , tenemos que  $\exists \varepsilon > 0, b \in (|f'(a)|, 1)$  tal que  $|f'(x_0)| < b$  para  $x_0 \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ . Llamamos  $I = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  y elegimos  $A(0) \in I$ . Veamos que  $|A(1) - a| < |A(0) - a|$  y que iterativamente tendremos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |A(n) - a| = 0$ . Por definición, siendo  $a$  punto de equilibrio, entonces por definición  $a = f(a)$ . Además,  $A(1) = f(A(0))$ . Por tanto,

$$|A(1) - a| = |f(A(0)) - f(a)|.$$

Por el teorema del valor medio, como  $f$  es continua  $\exists x_0$  entre  $a$  y  $A(0)$  tal que

$$f(A(0)) - f(a) = f'(x_0)(A(0) - a).$$

Habiendo elegido  $A(0) \in I$ , entonces  $x_0 \in I$  y, consecuentemente,  $|f'(x_0)| < b$ . Así

$$|A(1) - a| = |f'(x_0)| |A(0) - a| < b |A(0) - a|.$$

Así, tenemos que  $A(1) \in I$ , por lo que podemos repetir el proceso para demostrar lo mismo para  $A(2)$ . Así, iterando

$$|A(n) - a| < \dots < b^{n-1} |A(1) - a| < b^n |A(0) - a|.$$

Por ser  $b < 1$ , se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |A(n) - a| = 0$ .

(b) Procediendo de la misma forma que (a), siendo  $|f'(a)| > 1$ , entonces existen  $\varepsilon > 0$  y  $b \in (1, |f'(a)|)$  tales que  $|f'(x)| > b$ ,  $\forall x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ . Elegimos ahora  $A(0) \in I = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ . Existirá cierto  $n \in \mathbb{N}$  con  $A(n) \notin I$  y  $a$  será inestable. En efecto, siendo  $a$  de equilibrio tenemos que  $a = f(a)$  y  $A(1) = f(A(0))$ . Entonces,

$$|A(1) - a| = |f(A(0)) - f(a)|.$$

Por el teorema del valor medio, existe  $x_0 \in I$  tal que

$$|A(1) - a| = |f'(x_0)| |A(0) - a| > b |A(0) - a|.$$

Ahora pueden pasar dos cosas:

- Si  $A(1) \notin I$ , hemos ganado.
- Si  $A(1) \in I$ , iteramos obteniendo  $A(2)$  tal que

$$|A(2) - a| > b |A(1) - a| > b^2 |A(0) - a|.$$

Si  $A(2) \notin I$ , hemos ganado. En caso contrario, seguimos iterando.

Como  $I$  es finito, entonces iterando el procedimiento existirá cierto  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $A(n) \notin I$  o bien  $|A(n+1) - a| > b^{n+1} |A(0) - a|$ . Dado que  $\lim_{n \rightarrow \infty} b^n = \infty$ , entonces se tendrá que existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $A(n) \notin I$  o  $A(n+1) \notin I$ , por lo que el sistema será inestable.  $\square$

**Observación.** Si  $|f'(a)| = 1$ , el resultado no es concluyente. Una forma de obtener más información es estudiando las derivadas sucesivas, aunque aquí no lo haremos.

**Ejemplo 4.12. (a)** Continuación de  $A(n+1) = -A(n)^3 - 0,8A(n)$ . Teníamos que  $a = 0$  era el único punto de equilibrio y  $f'(x) = -3x^2 - 0,8$ . Se tiene que  $|f'(0)| = 0,8 < 1$ , por lo que el sistema es estable.

**(b)** Consideremos  $A(n+1) = A(n)^3 - A(n)^2 + 1$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Calculamos los puntos de equilibrio,

$$a = a^3 - a^2 + 1 \Rightarrow a^3 - a^2 - a + 1 = 0 \Rightarrow a = \pm 1.$$

Tenemos que  $f'(x) = 3x^2 - 2x$ . Así,  $|f'(1)| = 1$ , por lo que no podemos decidir, y  $|f'(-1)| = 5 > 1$  por lo que es inestable. Por observación gráfica, se puede ver que en  $a = 1$ , es estable por la izquierda e inestable por la derecha, por lo que es **semiestable**. Es decir  $a = 1$  es un **punto de equilibrio semiestable**.

**Observación.** Cuando un punto de equilibrio es estable, es útil calcular el **intervalo maximal**  $(c, d)$  en el que se verifique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(n) = a, \forall A(0) \in (c, d).$$

#### 4.3.1. Ciclos

**Definición 4.12.** Un ciclo de orden dos de un sistema dinámico  $A(n+1) = f(A(n))$  de primer orden, que tiene valores  $a_1$  y  $a_2$ , se define estable si existen entornos  $(c_1, d_1)$  y  $(c_2, d_2)$  de  $a_1$  y  $a_2$ , respectivamente, tales que

**(a)** Si  $A(0) \in (c_1, d_1)$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} A(2n) = a_1$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} A(2n+1) = a_2$ .

**(b)** Si  $A(0) \in (c_2, d_2)$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} A(2n) = a_2$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} A(2n+1) = a_1$ .



**Observación.** Es decir, dado  $A(0)$  próximo a  $a_1$ , entonces la sucesión  $A(n)$  tiende a  $a_1$  si  $n$  es par y a  $a_2$  si es impar y viceversa si  $A(0)$  es próximo a  $a_2$ .

**Ejemplo 4.13.** Consideremos el sistema  $A(n+1) = 3, 2A(n)(1 - A(n))$ . La ecuación logística será  $A(n+1) = rA(n)(1 - A(n))$ . Puede comprobarse que

$$a_1 = \frac{21 + \sqrt{21}}{32} \approx 0,79, \quad a_2 = \frac{21 - \sqrt{21}}{32} \approx 0,51,$$

son ciclos de orden dos del sistema  $A(n+1) = f(A(n))$  con  $f(x) = x - 3, 2x^2$ . Basta ver que

$$A(1) = a_2, \quad A(2) = a_1.$$

Para estudiar su estabilidad, consideremos

$$A(n+2) = f(f(A(n))) = 3, 2f(A(n))(1 - f(A(n))) = \frac{256}{125}A(n)(1 - A(n))(16A(n)^2 - 16A(n) + 5).$$

Sea  $g(x) = \frac{256}{125}x(1-x)(16x^2 - 16x + 5) = f(f(x))$ . Con este cambio de variable tendríamos un nuevo sistema  $B(n+1) = g(B(n))$ , con  $B(n) = A(2n)$ . Tenemos que  $a_1$  y  $a_2$  son puntos de equilibrio de  $B(n)$ . La estabilidad de estos se puede estudiar gráficamente o con el teorema anterior. Lo hacemos de la segunda forma. Así, tenemos que, aplicando la regla de la cadena,

$$g'(x) = f'(f(x))f'(x).$$

Para  $x = a_1$  se tiene que

$$g'(a_1) = f'(f(a_1))f'(a_1) = f'(a_2)f'(a_1).$$

$$g'(a_2) = f'(f(a_2))f'(a_2) = f'(a_1)f'(a_2).$$

Si  $a_1$  y  $a_2$  fueran ciclos de orden 2, tendríamos que  $f(a_1) = a_2$  y  $a_2 = f(a_1)$ . Tenemos que si tomamos los valores de  $a_1$  y  $a_2$  del principio,

$$|g'(a_1)| = |f'(a_2)f'(a_1)| = 0,16 < 1$$

$$|g'(a_2)| = |f'(a_1)f'(a_2)| = 0,16 < 1.$$

**Observación.** En general, para estudiar los posibles ciclos de orden 2 de  $A(n+1) = f(A(n))$ :

1. Determinar si existen  $a_1$  y  $a_2$  soluciones de la ecuación  $a = g(a) = f(f(a))$ .
2. Estudiar su estabilidad mediante  $g'(x)$ , es decir, estudiamos si  $|f'(a_1)f'(a_2)| < 1$ .

**Teorema 4.9.** Si  $a$  es solución de  $a = g(a) = f(f(a))$ , entonces o bien  $a$  es de equilibrio o bien es uno de los valores de un ciclo de orden 2.

**Teorema 4.10.** Dado un sistema de primer de primer orden  $A(n+1) = f(A(n))$  que tenga un ciclo de orden dos que tome valores  $a_1$  y  $a_2$ , entonces si  $f$  tiene derivada continua en sendos entornos de ambos, se tendrá que

- (a) El ciclo es estable si  $|f'(a_1) f'(a_2)| < 1$ .
- (b) El sistema es inestable si  $|f'(a_1) f'(a_2)| > 1$ .

*Demostración.* Sean  $a_1$  y  $a_2$  los valores que definen el ciclo del sistema dinámico. Supongamos que son puntos de equilibrio estables del sistema definido por  $g = f \circ f$ , es decir, tales que  $|g'(a_1)|, |g'(a_2)| < 1$ . Por tanto, como según la regla de la cadena  $g'(x) = f'(f(x)) f'(x)$  y si  $a_1$  y  $a_2$  definen un ciclo, entonces  $f(a_1) = a_2$  y  $f(a_2) = a_1$ . Entonces

$$|g'(a_1)| = |f'(a_1) f'(a_2)| < 1.$$

$$|g'(a_2)| = |f'(a_2) f'(a_1)| < 1.$$

□

**Observación.** Esto se puede generalizar para ciclos de orden 4, 6, etc.

**Definición 4.13.** El sistema  $A(n+1) = f(A(n))$  tiene un ciclo de orden  $2n$  con valores  $a_1, \dots, a_k$ , el ciclo es estable si

$$|f'(a_1) f'(a_2) \cdots f'(a_k)| < 1,$$

e inestable si

$$|f'(a_1) f'(a_2) \cdots f'(a_k)| > 1.$$

**Ejemplo 4.14.** Ecuación logística:  $A(n+1) = rA(n)(1 - A(n))$ ,  $r \in [0, 4]$ . En general, podemos estudiar los puntos de equilibrio y los ciclos a partir de  $f(x) = rx - rx^2$ . Primero encontramos los puntos de equilibrio

$$a = f(a) \Rightarrow a = ar - a^2r \Rightarrow a = 0, \frac{r-1}{r}.$$

Tenemos que  $f'(x) = -2rx + r$ . Así,  $|f'(0)| < 1$ , por lo que si  $|r| < 1$ ,  $a$  es estable. Por otro lado

$$\left| f' \left( \frac{r-1}{r} \right) \right| \Rightarrow a = \frac{r-1}{r}.$$

El punto  $a$  es estable si  $r \in (1, 3)$  e inestable si  $r \neq 0$  o  $r \notin (1, 3)$ .