Análisis de Variable Real

Victoria Torroja Rubio

9/10/2024 -

Índice general

Profesor: Javier Soria
Oficina: 437
Correo: javier.soria@ucm.es

Ayudante: Fernando Ballesta Yague
Oficina: 224
Correo: ferballe@ucm.es

Exámenes: Parcial 1 (16/1/2025)

- 20 % evaluación continua + examen a finales de noviembre (solo sube no baja)
- 80 % exámenes parciales

Si apruebas los parciales no hay que hacer el final.

Recomendaciones de libros

- Primer libro de la bibliografía
- El de Ortega
- 5000 problemas de análisis (para practicar)

0.1. Introducción

Definición 0.1 (Producto cartesiano)**.** Se define

$$A \times B = \{(a,b)\ :\ a \in A,\ b \in B\}.$$

Una relación $\mathcal{R}$ es un conjunto $\mathcal{R} \subset A \times A$. Si $(a,b) \in \mathcal{R}$ se dice que $a\mathcal{R}b$.

Definición 0.2 (Relación de equivalencia)**.** Una relación $\mathcal{R}$ es de equivalencia si cumple las siguientes propiedades.

Reflexiva. $\forall a \in A$, $a\mathcal{R}a$.

Simétrica. $a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$.

Transitiva. $(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \Rightarrow a\mathcal{R}c$.

Definición 0.3 (Relación de orden)**.** Una relación $\mathcal{R}$ es de orden si cumple las siguientes propiedades.

Reflexiva. $\forall a \in A$, $a\mathcal{R}a$.

Antisimétrica. $(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a) \Rightarrow a = b$.

Transitiva. $(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \Rightarrow a\mathcal{R}c$.

Notación. En una relación de orden, si $a\mathcal{R}b$, podemos escribir $a \leq b$. Además, el par ordenado $(A, \leq)$ es un conjunto ordenado. Se dice que es **totalmente ordenado** si $\forall a, b \in A$, $a \leq b$ o $b \leq a$.

Definición 0.4. Dado $(A, \leq)$ y $C \subset A$:

(i) Se dice que C está **acotado superiormente** si existe $M \in A$ tal que $\forall c \in C$, $c \leq M$. Se dice que M es una **cota superior**.

(ii) Se dice que C está **acotado inferiormente** si existe $m \in A$ tal que $\forall c \in C$, $m \leq c$. Se dice que m es una **cota inferior**.

(iii) C tiene **supremo** si tiene una cota superior mínima. Es decir, si $\alpha = \sup(C)$ si $\forall c \in C$, $\alpha \geq c$ y si m es una cota superior, $\alpha \leq m$.

(iv) La definición del **ínfimo** es análoga.

Ejemplo 0.1. Tenemos que el conjunto $\left\{x \in \mathbb{Q} \ : \ x^2 < 2\right\}$ está acotado superiormente por 2. Sin embargo, no tiene supremo en $\mathbb{Q}$, pero sí lo tiene en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 0.2. Sea $\mathbb{R}^2$ y sea $C \subset \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^2\right)$ rectas del plano. Sean $r_1, r_2 \in C$ con $r_1\mathcal{R}r_2 \iff r_1$ y r_2 son paralelas. Esto claramente es una relación de equivalencia.

Definición 0.5 (Aplicación)**.** Dado $C \subset A \times B$, se dice que C es una **aplicación** si $(a, b), (a, c) \in C \Rightarrow b = c$.

Notación. Normalmente se escribe $f : A \to B$ con $a \to f(a)$.

Definición 0.6. Si $f : A \to B$,

Dominio. $\operatorname{dom}(f) = \{x \in A \ : \ \exists f(x)\}$.

Imagen. $\operatorname{Im}(f) = \{b \in B \ : \ \exists a \in A, \ f(a) = b\} \subset B$.

Notación. En las funciones de variable real se denomina gráfico de f al conjunto $Gra(f) = \left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in \operatorname{dom}(f)\right\}$.

Ejemplo 0.3. Consideremos la aplicación $f(x) = a \in \mathbb{R}$, la función constante. Tenemos que $\operatorname{dom}(f) = \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Definición 0.7. Dada $f : A \to B$,

(a) Se dice que f es **inyectiva** si $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

(b) Se dice que f es **suprayectiva** si $\forall b \in B$, $\exists a \in A$ tal que $f(a) = b$.

(c) Se dice que f es **biyectiva** si es inyectiva y suprayectiva.

Notación. Dada $f : A \to B$ y $C \subset A$, se denomina restricción de f en C a la aplicación $f|_C : C \to B$. Así, tenemos que $f(C) = \operatorname{Im}(f|_C) = \{b \in B \ : \ \exists c \in C, \ f(c) = b\}$. De manera similar, $f(A) = \operatorname{Im}(f)$.

Notación. Si $f : A \to B$ y $D \subset B$, se define $f^{-1}(D) = \{a \in A \ : \ f(a) \in D\}$.

Ejemplo 0.4. Consideramos la aplicación $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 2, \ x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{x-1} + 2, \ x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$$

Tenemos que f es biyectiva. Comprobamos la inyectividad.

$$\frac{1}{x} - 2 = \frac{1}{y} - 2 \iff x = y.$$

$$\frac{1}{x-1} + 2 = \frac{1}{y-1} + 2 \iff x = y.$$

Ahora comprobamos la suprayectividad. Si $a = 0$, cogemos $x = \dfrac{1}{2}$. Si $a < 0$, cogemos $x = \dfrac{1}{a-2} \in (0,1)$. Si $a > 0$, cogemos $x = \dfrac{1}{a+2} \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$. Así, la aplicación es biyectiva.

Definición 0.8 (Inversa)**.** Dada $f : A \to \operatorname{Im}(f)$, si f es inyectiva tenemos que f es biyección y $\exists f^{-1} : \operatorname{Im}(f) \subset B \to A$ tal que $b \to f^{-1}(b) = a$.

Ejemplo 0.5. Consideremos $f : \mathbb{R}/\{0\} \to \mathbb{R}/\{0\}$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{x}$, entonces $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}$.

0.2. Cardinalidad

Definición 0.9 (Equipotencia)**.** Dos conjuntos A y B son **equipotentes** si existe una biyección $f : A \to B$.

Proposición 0.1. La relación de equipotencia es una relación de equivalencia.

Demostración. **(i)** Comprobamos la propiedad reflexiva. Tenemos que la identidad $i : A \to A$ con $a \to a$ es una biyección.

(ii) Comprobamos la propiedad simétrica. Dada una biyección, su inversa también es una biyección.

(iii) Comprobamos la propiedad transitiva. La composición de biyecciones es una biyección.

□

Definición 0.10 (Cardinal)**.** Se llama **cardinal** de un conjunto a la clase de equivalencia a la que pertenece por la relación de equipotencia.

Definición 0.11. Dados A y B, tenemos que $|A| \leq |B|$ si $\exists f : A \to B$ inyectiva.

Proposición 0.2. La relación anterior es una relación de orden total.

Demostración. **(i)** La identidad es inyectiva.

(ii) Por el teorema de Cantor-Bernstein, si $f : A \to B$ inyectiva y $g : B \to A$ inyectiva, $\exists h : A \to B$ biyectiva.

(iii) Si $f : A \to B$ inyectiva y $f : B \to C$ inyectiva, tenemos que $g \circ f : A \to C$ es inyectiva.

(iv) Existe un teorema que dice que si A y B son conjuntos, o bien existe $f : A \to B$ inyectiva o bien existe $g : B \to A$ inyectiva.

□

Definición 0.12. Un conjunto A es **finito** si no existe $C \subsetneq A$ tal que $\exists g : C \to A$ biyectiva. Se dice que es **infinito** si no es finito, es decir, $\exists C \subsetneq A$, $\exists g : C \to A$ biyectiva.

Ejemplo 0.6. Tenemos que $\mathbb{N}$ es infinito puesto que $\mathbb{N}$ tiene el mismo cardenal que el conjunto de los números pares. Similarmente, antes hemos visto que $\exists f : (0,1) \to \mathbb{R}$ biyectiva.

Proposición 0.3. **(a)** Sea X finito e $Y \subset X$, entonces Y es finito.

(b) Si X es finito y $|X| = |Y|$, entonces Y es finito.

(c) Si X es infinito y $|X| = |Y|$, entonces Y es infinito.

Demostración. **(a)** Si $Y = X$ es trivial. Consideremos el caso $Y \subsetneq X$. Asumimos que X es finito e Y es infinito. Como Y es infinito, $\exists Z \subsetneq Y$ y $\exists f : Z \to Y$ biyección. Tenemos que $X/Y \neq \emptyset$. Consideremos la aplicación $g : Z \cup (X/Y) \to X$ tal que

$$g(x) = \begin{cases} f(x), \ x \in Z \\ x, \ x \in X/Y \end{cases}$$

Tenemos que $Z \cap (X/Y) = \emptyset$. Así, $x \neq y$ y $x, y \in Z$ tenemos que $f(x) \neq f(y)$. Si $x \in Z$ e $y \in X/Y$, tenemos que $f(x) \in Y \Rightarrow f(x) \notin X/Y$, así, $f(x) \neq y$, por lo que es inyectiva. Ahora comprobamos la sobreyectividad. Si $x \in X$, tenemos que $x \in Y$ o $x \in X/Y$. Si $x \in X/Y$, cogemos $x = g(x)$. Si $x \in Y$, como f es biyectiva, $\exists z \in Z$ tal que $f(z) = x$. Así, como $Z \cup (X/Y) \subsetneq X$ y hemos encontrado una biyección g entre estos dos conjuntos, tenemos que X es infinito. Esto es una contradicción.

(b) Asumimos que Y es infinito. El resto es análogo a la demostración **(c)**.

(c) Dado que X es infinito, tenemos que $\exists Z \subsetneq X$ y $f : Z \to X$ biyectiva. Como $|X| = |Y|$, $\exists T : X \to Y$ biyectiva. Así, tenemos que $T(Z) \subsetneq Y$. Definimos $g = T \circ f \circ T^{-1} : T(Z) \to Y$, que es una biyección, puesto que es una composición de biyecciones. Así, Y es infinito. □

Observación. Tenemos que $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$, puesto que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ con $f(n) = n$ es inyectiva.

Proposición 0.4. Si X es infinito, entonces $|\mathbb{N}| \leq |X|$.

Demostración. Si X es infinito, $\exists a_1 \in X$. Cogemos $f(1) = a_1$. Similarmente cogemos $f(2) = a_2 \in X/\{a_1\}$. Por inducción, $f(n) = a_n \in X/\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$. Tenemos que $f : \mathbb{N} \to X$ es una inyección. □

Proposición 0.5.

$$|X| < |\mathcal{P}(X)|.$$

Demostración. **(i)** Si X es finito, $|X| = n < 2^n = \mathcal{P}(X)$.

(ii) Si X es infinito, tenemos que $h : X \to \mathcal{P}(X)$ con $a \to \{a\}$ es inyectiva. Así, $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$. Vamos a asumir que existe una biyección $f : X \to \mathcal{P}(X)$. Definimos

$$Z = \{a \in X \ : \ a \notin f(x)\} \subset X.$$

Si $Z = \emptyset$, tenemos que $\forall a \in f(a)$, por lo que $\emptyset \notin \operatorname{Im}(f)$, así f no es sobreyectiva. Si $Z \neq \emptyset$, tenemos que $\exists a \in Z$. Similarmente, como $Z \subset X$, $\exists a \in X$ con $Z = f(a)$. De esta manera, tenemos que si $a \in Z$, entonces $a \notin Z$, por lo que tenemos una contradicción. Similarmente, si $a \notin Z$, tenemos que $a \in Z$.

□

Proposición 0.6.

$$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|.$$

Demostración. Sabemos que $\exists \varphi : (0,1) \to \mathbb{R}$ biyectiva. Así, vamos a buscar una biyección $g : \mathbb{N} \to (0,1)$. Sea $B = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} \ : \ a_n \in \{0,1\}, \exists a_{n_0} = 0, \exists a_{n_1} = 1, \forall m, \exists m' > m, a_{m'} = 1 \right\} \subset (0,1)$. Definimos $g : \mathbb{N} \to (0,1)$ biyectiva tal que

$$g(k) = r_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{k,n}}{2^n}.$$

Vamos a construir $r \in (0,1)$ tal que $\forall k \in \mathbb{N}$, $r \neq r_k$. Sea $a_{n_1} = 1$, así, cogemos $a_{n_1} = 0$. Similarmente, si $a_{2,n_2} = 1$, con $n_2 > n_1$, y decimos que $a_{n_2} = 0$. En general, si $a_{k,n_k} = 1$, $a_{n_k} = 0$. En el resto de coordenadas intermedias le ponemos un 1. Así, definimos

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} \neq r_k, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

[1] $\square$

Teorema 0.1.

$$|\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}|.$$

Demostración. Vamos a ver que $|(0,1)| = |(0,1) \times (0,1)|$. Cogemos $f : (0,1) \to (0,1) \times (0,1)$ tal que $r \to (r, a)$. Así, está claro que $|(0,1)| \leq |(0,1) \times (0,1)|$. Ahora, cogemos $g : (0,1) \times (0,1) \to (0,1)$ tal que

$$(r,s) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n} \right) \to g(r,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{2n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^{n+1}} \in (0,1).$$

Tenemos que demostrar que esto es una inyección. $\square$

0.2.1. Números algebraicos

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $\mathbb{K}[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n\}$.

Proposición 0.7. Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$, tenemos que existe $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $p(z) = 0$.

Demostración. Cogemos el polinomio

$$(x - z)(x + z) = x^2 - z^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 \in \mathbb{R}[x].$$

$\square$

Entonces se dice que los números complejos son algebraicos sobre $\mathbb{R}$. Tenemos que $\mathbb{R}$ no es algebraico sobre $\mathbb{Q}$. Considera, por ejemplo π. Tenemos que

$$\mathbb{Q}[x] = \{\text{polinomios de grado } 1\} \cup \{\text{polinomios de grado } 2\} \cup \cdots \cup \{\text{polinomios de grado } n\} \cup \cdots.$$

Podemos ver que las raíces de todos los polinomios de $\mathbb{Q}[x]$ son tantas como $|\mathbb{N}|$. Por tanto, tiene que haber números reales que no son algebraicos.

[1] Si hay un número que tiene infinitos ceros, cogemos representación decimal por la derecha.

0.3. Funciones de variable real

0.3.1. Estudio de funciones

Las funciones pueden tener propiedades variadas. Un ejemplo es ser inyectiva, sobreyectiva (suprayectiva) o biyectiva.

Ejemplo 0.7. Consideremos $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Tenemos que $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}$. Calculamos la imagen. Tenemos que

$$-1 < \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1.$$

Si $a = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, tenemos que

$$a^2 = \frac{x^2}{x^2+1} \iff a^2x^2 + a^2 = x^2 \iff x = \pm\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Así, $\operatorname{Im}(-1,1)$. Así, $f : \mathbb{R} \to (-1,1)$ es biyectiva.

También se puede estudiar el signo de una función:

- $f^+ = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) \geq 0\}$.
- $f^- = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) < 0\}$.

Definición 0.13 (Paridad)**.** f se dice **par** si se verifica que $f(x) = f(-x), \forall x \in \operatorname{dom}(f)$. Se dice que f es **impar** si $\forall x \in \operatorname{dom}(f), f(-x) = -f(x)$.

Definición 0.14 (Monotonía)**.** Se dice que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **monótona creciente** si $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Similarmente, se dice que es **monótona decreciente** si $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

Definición 0.15 (Convexidad)**.** Se dice que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **convexa** si $\forall a, b \in \operatorname{dom}(f)$ y $\alpha \in [0,1]$ se cumple que

$$f(\alpha a + (1-\alpha) b) \leq \alpha f(a) + (1-\alpha) f(b).$$

Unas propiedades importantes de las funciones son sus límites. Si a está en la 'frontera' de $\operatorname{dom}(f)$, tenemos que $a = \pm\infty$ o $a \notin \operatorname{dom}(f)$ pero existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Definición 0.16 (Continuidad)**.** Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in \operatorname{dom}(f)$, se dice que f es **continua** en a si existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Definición 0.17 (Continuidad)**.** Se dice que f es **continua** en $a \in \operatorname{dom}(f)$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $0 \leq |x - a| < \delta$ se tiene que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Definición 0.18 (Continuidad)**.** Se dice que f es **continua** en $a \in \operatorname{dom}(f)$ si $\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to a$ se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Ejemplo 0.8.

- Dado $f = a$ tenemos que es continua en todo $x_0 \in \mathbb{R}$.
- Consideremos la función $f(x) = x$. Cogemos $\delta = \varepsilon$, entonces si $0 \leq |x - x_0| < \delta$, tenemos que $|x - x_0| < \varepsilon$. Así, esta función es continua en todo $\mathbb{R}$.

0.3.2. Métodos para generar funciones

Dadas $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $\operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g) \neq \emptyset$, tenemos que si $x \in \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g)$,

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
- $(fg)(x) = f(x)\, g(x)$.
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f(x)$.
- Si $x \in \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g)$ y $g(x) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Observación. Podemos observar que los polinomios se forman a través de estas trasformaciones elementales.

Similarmente, las funciones racionales se forman a partir de polinomios y de su división.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_0}.$$

Cuando una función es **inyectiva**, podemos definir su inversa. Esta es otra forma de generar funciones. Dada una función inyectiva, se define su inversa f^{-1} por

$$\begin{aligned} f^{-1} : \operatorname{Im}(f) &\to \mathbb{R} \\ y &\to f^{-1}(y) = x. \end{aligned}$$

donde $x \in \operatorname{dom}(f)$ es el único elemento en $\operatorname{dom}(f)$ tal que $f(x) = y$.

Ejemplo 0.9. La función $f(x) = \sqrt{x}$ se genera a partir de la inversa de $f(x) = x^2$.

Dadas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{dom}(g)$, se define f compuesta con g así: $g \circ f : \operatorname{Im}(f) \to \mathbb{R}$. Más adelante demostraremos que la composición de funciones conserva la continuidad. También podemos definir funciones con series de potencias.

Ejemplo 0.10. Dada $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3x^n}{n!}$. El dominio son los valores $x \in \mathbb{R}$ tales que la serie es convergente.

Capítulo 1

El cuerpo de los números reales

1.1. El cuerpo de los números reales.

Definición 1.1 (Cuerpo)**.** Se define $\mathbb{R}$ como un **cuerpo abeliano**:

(i) Existen dos operaciones en $\mathbb{R}$: $+$ (suma) y $\cdot$ (producto).

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\to x + y \\ \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\to x \cdot y. \end{aligned}$$

(ii) La suma es conmutativa:

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x + y = y + x.$$

(iii) La suma es asociativa:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ \ (x + y) + z = x + (y + z)\,.$$

(iv) Existencia del elemento neutro de la suma [a] :

$$\exists 0 \in \mathbb{R},\ 0 + x = x + 0 = x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

(v) Existencia del elemento opuesto:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists - x^b \in \mathbb{R}\ ,\ x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

(vi) El producto es conmutativo:

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \cdot y = y \cdot x.$$

(vii) La multiplicación es asociativa:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)\,.$$

(viii) Existencia del elemento neutro del producto:

$$\exists 1 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ 1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$$

(ix) Existencia del opuesto en el producto:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists \frac{1}{x}^{c} \in \mathbb{R},\ x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1.$$

(x) El producto es distributivo respecto a la suma [d] :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

[a] no estamos afirmando que sea único
[b] el menos no significa nada, no sabemos lo que es restar todavía
[c] Como en a, esto es notación, no sabemos dividir
[d] no hay que especificar distributiva por la izquierda y por la derecha por la propiedad de conmutatividad del producto

Los racionales ($\mathbb{Q}$) cumplen estos requisitos por lo que son un cuerpo, sin embargo $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$ no lo son porque no cumplen con todos los requisitos.Algunos cuerpos interesantes son las clases de equivalencia de la forma $\mathbb{Z}_n$. $\mathbb{R}$ también tiene la propiedad de que existe un orden como en $\mathbb{Q}$.

Teorema 1.1. En $(\mathbb{R}, +, \cdot)$:

(a) El elemento neutro de la suma es único.

(b) El elemento neutro del producto es único.

(c) $\forall x \in \mathbb{R} :\ x \cdot 0 = 0$.

Demostración. **(a)** Suponemos que existe otro elemento $0' \in \mathbb{R}$, además de $0 \in \mathbb{R}$ que cumple que es el elemento neutro de la suma. Tenemos que

$$0 + 0' \underbrace{=}_{(iv)} 0' \underbrace{=}_{(ii)} 0' + 0 \underbrace{=}_{(iii)} 0.$$

Por tanto, $0 = 0'$.

(b) Suponemos que existen $1, 1' \in \mathbb{R}$ que son elementos neutros para el producto. Aplicamos lo mismo que en la demostración anterior.

$$1 \cdot 1' = 1' = 1' \cdot 1 = 1.$$

Por tanto, $1 = 1'$.

(c)

$$x \cdot 0 = x \cdot (0+0) = x \cdot 0 + x \cdot 0.$$

Sumamos el opuesto a ambos lados:

$$\begin{aligned} &x \cdot 0 + (-x \cdot 0) = (-x \cdot 0) + x \cdot 0 + x \cdot 0 \\ &0 = 0 + x \cdot 0 \\ &0 = x \cdot 0. \end{aligned}$$

También se puede demostrar de la siguiente forma:

$$a + a \cdot 0 = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a \cdot (1+0) = a \cdot 1 = a.$$

Si sumamos $-a$ en ambos lados tenemos que $a \cdot 0 = 0$.

□

Lema 1.1. $\forall x \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$(-x) = (-1) \cdot x.$$

Demostración. Aplicamos la parte **(c)** del teorema anterior.

$$(-1) \cdot x + x = (-1) \cdot x + 1 \cdot x = ((-1)+1) \cdot x = 0 \cdot x = 0.$$

□

Teorema 1.2. (a) $x \neq 0,\ y \in \mathbb{R},\ x \cdot y = 1$, entonces $y = \dfrac{1}{x}$.

(b) Si $x \cdot y = 0$ entonces $x = 0$ o $y = 0$.

Demostración. **(a)**

$$y = 1 \cdot y = \frac{1}{x} \cdot x \cdot y = \frac{1}{x} \cdot (x \cdot y) = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}.$$

(b) Si $x = 0$ hemos ganado. Si $x \neq 0$,

$$x \cdot y = 0.$$

Multiplicamos ambos lados por el inverso,

$$\frac{1}{x} \cdot x \cdot y = \frac{1}{x} \cdot 0 = 0 \Rightarrow 1 \cdot y = 0 \Rightarrow y = 0.$$

□

Notaciones: $x, y \in \mathbb{R}$

- Definimos resta como: $x - y = x + (-y)$

- Si $y \neq 0$, definimos la división como
$$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}.$$
- Si $x \neq 0$, $x^0 = 1$.
- $x^1 = x$.
- Si $n \in \mathbb{N}$, $x^n = x \cdot x^{n-1}$.
- Si $x \neq 0$, $x^{-1} = \frac{1}{x}$.
- $x^{-2} = x^{-1} \cdot x^{-1} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$[1].
- Si $n \in \mathbb{N}$, $x^{-n} = x^{-1} \cdot x^{-(n-1)}$.

Definimos los naturales como la suma de la unidad (elemento neutro del producto) y los enteros negativos como la suma del opuesto de la unidad.

Definición 1.2. Si $n, m \in \mathbb{Z}$ y $m \neq 0$, definimos $\mathbb{Q}$ como
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \ : \ n, m \in \mathbb{Z}, \ m \neq 0 \right\}.$$
Definimos el complementario de los números racionales como los números irracionales:
$$\mathbb{R}/\mathbb{Q}.$$
Sabemos que $\mathbb{R}/\mathbb{Q} \neq \emptyset$ porque sabemos que existe $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ tal que $x^2 = 2$.

Definición 1.3 (Grupo)**.** Un grupo es un conjunto con una operación $(+)$ que cumple las condiciones de la suma.

Definición 1.4 (Anillo)**.** Un anillo es un conjunto con dos operaciones $(+, \cdot\ )$ que cumple todas las condiciones menos la existencia de la inversa en el producto.

Ejemplo 1.1. $\mathbb{Z}$ es un anillo.

Definición 1.5 (Propiedades de cuerpo ordenado de $\mathbb{R}$)**.** Asumimos que existe $P \subset \mathbb{R}$ (**números reales positivos**), con $P \neq \emptyset$, tal que

(i) Conjunto cerrado por la suma:
$$\forall x, y \in P, \ x + y \in P.$$

[1] No hemos demostrado que $x^{-2} = \left(\frac{1}{x}\right)^2$

(ii) Conjunto cerrado por el producto:

$$\forall x, y \in P,\ x \cdot y \in P.$$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}$ se cumple sólo una de las siguientes cosas:

$$x \in P, \text{ o } x = 0 \text{ o } -x \in P.$$

A los números tales que $-x \in P$ los llamaremos **números negativos**.

Notaciones

- Si $x \in P$, decimos que $x > 0$.
- Si $x > 0$ o $x = 0$, decimos que $x \geq 0$.
- Si $-x \in P$, decimos que $-x > 0$ o $x < 0$.
- Si $x < 0$ o $x = 0$ decimos que $x \leq 0$.

Definición 1.6. $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

(i) $x > y$ o $y < x$ si $x - y > 0$.

(ii) $x \geq y$ o $y \leq x$ si $x > y$ o $x = y$.

Tenemos que $\mathbb{Q}$ también es un cuerpo ordenado.

Teorema 1.3. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(a) **Propiedad transitiva:** Si $x > y$ y $y > z$, entonces $x > z$.

(b) Si $x > y$, entonces $x + z > y + z$.

(c) Si $x > y$ y $z > 0$, entonces $x \cdot z > y \cdot z$.

Demostración. **(a)** Si $x > y$ entonces $x - y > 0$. Similarmente, $y - z > 0$. Por tanto, $x - y \in P$ y $y - z \in P$. Por las propiedades de P tenemos que:

$$(x - y) + (y - z) \in P \Rightarrow x - z \in P.$$

Consecuentemente, $x - z > 0$ y $x > z$.

(b)

$$(x + z) - (y + z) = x - y \in P.$$

(c)

$$x \cdot z - y \cdot z = (x - y) \cdot z.$$

Como $x - y \in P$ y $z \in P$, tenemos que $(x - y) \cdot z \in P$.

□

Teorema 1.4. **(a)** Si $x \in \mathbb{R}$ y $x \neq 0$, entonces $x^2 > 0$.

(b) $1 > 0$.

(c) Los números naturales son positivos.

Demostración. **(a)** Si $x \neq 0$, x puede ser positivo o negativo. Si $x > 0$, $x \in P$ y $x \cdot x = x^2 \in P$. Si $x < 0$, $-x \in P$, por tanto $(-x) \cdot (-x) \in P$. Además,

$$(-x)(-x) = (-1)^2 x^2 > 0.$$

Tenemos que demostrar que $(-1)^2$ es 1. Sabemos que

$$(-1)(-1) = -(-1).$$

Además,

$$(-1) + 1 = 0 \Rightarrow -(-1) + (-1) + 1 = -(-1) + 0 \Rightarrow -(-1) = 1.$$

Por tanto,

$$1 \cdot x^2 = x^2 > 0.$$

(b) Sabemos que $1 \neq 0$. Aplicamos lo demostrado en **(a)**:

$$1 = 1 \cdot 1 = 1^2 > 0.$$

(c) Definimos un número natural n como la suma de 1, n veces. Tenemos que

$$1 = 1.$$

Además,

$$1 + 1 = 2.$$

Sabemos que $2 > 1$ porque $1 + 1 - 1 = 1 > 0$. Asumimos que esto se sostiene para $n = k$, entonces

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{k} > \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{k-1}.$$

Entonces, si $n = k + 1$,

$$k + 1 = \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{k} + 1.$$

Por tanto, para obtener $k+1$ estamos sumando 1 un total de $k+1$ veces. De manera similar, tenemos que

$$k + 1 - k = 1 > 0.$$

Además, por hipótesis de inducción

$$k + 1 - 1 = k > 0.$$

Por lo que, dado que $k \geq 1$ tenemos que $k \in P$ (por la propiedad transitiva).

□

Ejemplo 1.2. Consideramos el conjunto $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$. Tenemos que

$$1 + 2 \mod 3 = 3 \mod 3 = 0.$$

Tenemos que este conjunto no es un cuerpo ordenado, pues si $1 > 0$, tenemos que $1 \in P$ y, consecuentemente, $1 + 1 \in P$. Sin embargo,

$$1 + 1 = 2 = -1.$$

Como $1 \in P$, tenemos que $-1 < 0$.

Lema 1.2. Si $x \in \mathbb{R}$ y $x > 0$, entonces $\dfrac{1}{x} > 0$.

Demostración. Si $\dfrac{1}{x}$ no es mayor que 0, tenemos que o bien, es 0 o es negativo. No puede ser 0, porque cualquier cosa por 0 es 0. Por tanto, ha de ser negativo. Entonces, el opuesto del inverso ha de ser positivo:

$$-\frac{1}{x} > 0 \Rightarrow x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) > 0.$$

Consecuentemente, $-1 > 0$, que es una contradicción (en un teorema anterior quedó demostrado que $1 > 0$). $\square$

Lema 1.3.

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Demostración. Decimos que

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \iff 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \iff 2 - 1 = (1 + 1) - 1 = 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

$\square$

Teorema 1.5 (Aproximación)**.** Si $x \in \mathbb{R}$, satisface que $0 \leq x < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, entonces, $x = 0$.

Demostración. Suponemos que $x \neq 0$. Sabemos, por hipótesis, que es positivo, i.e. $x > 0$. Tomamos $\varepsilon = \dfrac{x}{2} > 0$ (por el lema anterior). Entonces

$$x < \frac{x}{2} \iff x - \frac{x}{2} < 0 \iff x \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = x \cdot \frac{1}{2} < 0.$$

Esto nos da una contradicción.

Otra posible demostración es decir $\varepsilon = x$ (contradicción porque es imposible que $x < x$, pues daría que 0 es un número negativo). $\square$

Definición 1.7 (Valor absoluto)**.** Sea $x \in \mathbb{R}$, se define $|x|$ de la siguiente manera

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Proposición 1.1. **(i)** $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(ii) $|x|^2 = x^2$

(iii) Si $y \geq 0$:

$$|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y.$$

(iv) $-|x| \leq x \leq |x|$

Demostración. **(i)** Si $x \cdot y > 0$, entonces $|x \cdot y| = x \cdot y$. Además, $x \cdot y > 0 \iff x > 0 \wedge y > 0$ o $x < 0 \wedge y < 0$. Si los dos son positivos

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| = x \cdot y.$$

Si los dos son negativos,

$$|x| \cdot |y| = (-x) \cdot (-y) = x \cdot y.$$

Por tanto,

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$$

Si $x \cdot y < 0$, sin pérdida de generalidad, sea $x < 0$. Entonces $|x| = -x$ y $|y| = y$. Además,

$$|x \cdot y| = -x \cdot y.$$

Por otro lado,

$$|x| \cdot |y| = -x \cdot y.$$

Si $x \cdot y = 0$, o $x = 0$ o $y = 0$. Sin pérdida de generalidad, sea $x = 0$, entonces $|x| = 0$ y $|x \cdot y| = 0$. Además,

$$|x| \cdot |y| = 0 \cdot |y| = 0.$$

(ii) Sabemos que $\forall x \in \mathbb{R}$ se cumple que $x^2 \geq 0$. Entonces, tenemos que

$$x^2 = \left|x^2\right| = |x| \cdot |x| = |x|^2.$$

(iii) Cogemos $y \in \mathbb{R}^*$ y $|x| \leq y$. Analizamos todos los casos. Si $x < 0$, $|x| = -x$ y $-x > 0$. Por tanto, $x < 0 \leq y$. Por tanto,

$$x < y \Rightarrow x \leq y.$$

Por tanto,

$$|x| \leq y \Rightarrow -x \leq y \Rightarrow -y \leq x.$$

Si $x = 0$ tenemso que $|x| = 0$. Además, $0 \leq y$ y $-y < 0$. Si $x > 0$, tenemos que $|x| = x \leq y$. Además,

$$-y \leq 0 < x \Rightarrow -y \leq x.$$

(iv) Lo podemos demostrar de dos formas. En primer lugar, podemos considerar los posibles valores de x. Si $x = 0$ es trivial. Si $x > 0$, tenemos que $|x| = x$. Por tanto, $x \leq |x|$. Además, $-|x| = -x < 0$ y, por tanto,

$$-x < 0 \leq x \leq |x| \Rightarrow -|x| \leq x \leq |x| .$$

Si $x < 0$ tenemos que $|x| = -x$. Entonces, $-|x| = x \leq x$ y $|x| > 0$, por tanto,

$$-|x| \leq x \leq |x| .$$

Otra manera de hacerlo es utilizando el apartado anterior y afirmar que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq x$.

□

Teorema 1.6 (Desigualdad triangular)**.** Para $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x + y| \leq |x| + |y| .$$

Demostración. Utilizamos el apartado **(iii)** del teorema anterior. Tenemos que:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \iff -|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y| .$$

Utilizando **(iv)**, sabemos que $-|x| \leq x \leq |x|$ y, similarmente, $-|y| \leq y \leq |y|$. Por tanto, al sumar estas igualdades obtenemos que

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y| .$$

Esto es lo que queríamos demostrar. □

Corolario 1.1 (Desigualdad triangular al revés)**.** Para $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x - y| \geq ||x| - |y|| .$$

Demostración. Este enunciado es equivalente a (utilizando **(iii)**)

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y| .$$

Además,

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \iff |y| \leq |x - y| + |x| .$$

Entonces, utilizando el teorema anterior

$$|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x| = |x - y| + |x| .$$

Por el otro lado, tenemos que

$$|x| - |y| \leq |x - y| \iff |x| \leq |x - y| + |y| .$$

Por tanto, sabemos que

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| .$$

Por lo que

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y| \iff |x - y| \geq ||x| - |y|| .$$

□

Definición 1.8 (Distancia Euclídea)**.** La distancia en $\mathbb{R}$ se define como

$$d(x,y) = |x-y|.$$

Nota. A $\mathbb{R}$ se le llama **espacio euclídeo** de dimensión 1.

Proposición 1.2. **(i)** $d(x,y) \geq 0 \wedge d(x,y) = 0 \iff x = y$

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Demostración. **(i)** Trivial

(ii) Trivial

(iii) Utilizamos la desigualdad triangular.

$$d(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y| = d(x,z) + d(z,y).$$

□

Definición 1.9. Dado $x \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, definimos el **entorno de** x con radio ε

$$^{a}B(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} \ : \ |x-y| < \varepsilon\} = (x-\varepsilon, x+\varepsilon).$$

[a] También se usa la V

Observación. $|x-y| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x-y < \varepsilon \iff x-\varepsilon < y < x+\varepsilon \iff y-\varepsilon < x < y+\varepsilon$.

Notaciones. Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$,

- $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b\}$
- $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x \leq b\}$
- $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x < b\}$
- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x \leq b\}$

Corolario 1.2. $x = a \iff \forall \varepsilon > 0, \ x \in B(a,\varepsilon)$

Demostración. Sabemos que $y = 0 \iff 0 \leq y < \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0$. Sea $y = |x-a|$. Ya sabemos que $|x-a| \geq 0$. La hipótesis me dice que

$$\forall \varepsilon > 0, |x-a| < \varepsilon \Rightarrow |x-a| = 0 \iff x = a.$$

Por el otro lado, es trivial que si $x = a$, $\forall \varepsilon > 0, \ x \in B(a,\varepsilon)$. □

Corolario 1.3. Para $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$\bigcap_{\varepsilon>0} B(a,\varepsilon) = \{a\}.$$

[a]

[a]Este colorario significa lo mismo que el anterior.

1.2. Completitud de $\mathbb{R}$

Sabemos que $\forall x \in \mathbb{Q},\ x^2 \neq 2$.
De momento sabemos que $\mathbb{R}$ es un cuerpo abeliano totalmente ordenado. $\mathbb{C}$ no tiene un orden porque no se cumple la condición de que si $z \in \mathbb{C}$ entonces $z^2 \geq 0$.

Definición 1.10. Sea $S \subset \mathbb{R}$ con $S \neq \emptyset$. Se dice que $a \in \mathbb{R}$ es una **cota superior** de S si

$$\forall s \in S,\ s \leq a.$$

Decimos que S está **acotado superiormente** si tiene una cota superior.

Similarmente, se dice que $a \in \mathbb{R}$ es una **cota inferior** de S si

$$\forall s \in S,\ a \leq s.$$

Si tiene una cota inferior decimos que S está **acotado inferiormente**.

Si está acotado superiormente e inferiormente decimos que está acotado.

Ejemplo 1.3. **(i)** El conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$ está acotado superiormente pero no inferiormente, por lo que no es un conjunto acotado.

(ii) S está acotado si y solo si $\exists c > 0$ tal que $\forall s \in S,\ |s| \leq c$. Es decir,

$$\exists c > 0, \forall s \in S,\ -c \leq s \leq c.$$

Nota. Podemos asumir que el conjunto vacío está acotado (no tenemos nada que comprobar).

Definición 1.11. Sea $S \neq \emptyset$. Se dice que $u \in \mathbb{R}$ es el **supremo** de S si

(i) u es cota superior de S. Es decir, $\forall s \in S,\ u \geq s$.

(ii) Si $v \geq s, \forall s \in S$ entonces $v \geq u$. Es decir, es la menor cota superior.

Analogamente, se dice que $u \in \mathbb{R}$ es el **ínfimo** de S si

(i) $\forall s \in S, u \leq s$.

(ii) Si $\forall s \in S,\ v \leq s$, entonces $v \leq u$. Es decir, es la mayor cota inferior.

Definición 1.12. Si $u = \sup(S)$ y $u \in S$, diremos que u es el **máximo** de S.

Similarmente, si $u = \text{ínf}\,(S)$ y $u \in S$, diremos que u es el **mínimo** de S.

Ejemplo 1.4. **(i)** Si $S = (0,1] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 0 < x \leq 1\}$. Tenemos que $1 = \sup(S)$ y como $1 \in S$, 1 ha de ser el máximo. Además, $\text{ínf}\,(S) = 0$ y como $0 \notin S$, no existe el mínimo en S.

(ii) Considera el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < 1\}$. Tenemos que $\sup(S) = 1$ y como $1 \notin S$ tenemos que S no tiene máximo. Además, no tiene cotas inferiores, por lo que el ínfimo no existe. Si no existe lo denotamos de la siguiente manera: $\text{ínf} = -\infty$.

Axioma 1 (Axioma del supremo)**.** Para todo conjunto $S \subset \mathbb{R}$ con $S \neq \emptyset$, si S está acotado superiormente, entonces existe $\sup(S)$.

Observaciones. Tenemos que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo abeliano ordenado, pero no se cumple el axioma del supremo. Considera el conjunto

$$S = \left\{x \in \mathbb{Q} \,:\, x^2 \leq 2\right\}.$$

Este conjunto está acotado superiormente pero no tiene supremo ($\sup(S) \notin \mathbb{Q}$) porque no existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = 2$.

Notación. Si se satisface el axioma del supremo diremos que el cuerpo abeliano, totalmente ordenado, es **completo** [2].

Teorema 1.7. Sea $S \subset \mathbb{R}$ con $S \neq \emptyset$. Supongamos que S está acotado inferiormente. Sea $-S = \{-s \,:\, s \in S\}$. Entonces $-S$ está acotado superiormente y, por el axioma del supremo, tiene supremo. Entonces,

$$\sup(-S) = -\,\text{ínf}\,(S).$$

Es decir, el ínfimo existe y es el opuesto del supremo de $-S$.

Demostración. Sea $v \leq s,\ \forall s \in S$. Sabemos que v existe por la hipótesis del teorema. Entonces, $\forall s \in S,\ -s \leq -v$. Por tanto, $-v$ es una cota superior de $-S$. Por el axioma del supremo, tenemos que $\exists u = \sup(-S)$.

(i) Demostramos que $-u$ es una cota inferior. Sabemos que $u \geq -s,\ \forall s \in S$. Consecuentemente, $-u \leq s,\ \forall s \in S$.

(ii) Si $\forall s \in S,\ v \leq s$. Entonces, $-s \leq -v$, por lo que $-v$ es cota superior de $-S$. Por tanto, $u \leq -v$ y, consecuentemente, $-u \geq v$.

□

[2] No es completo en el sentido algebraico, pues no hay $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = -1$, es completo en el sentido de que no tiene agujeros

Proposición 1.3. Sea $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}$.

(i) Si S está acotado superiormente

$$u = \sup(S) \iff (\forall s \in S, u \geq s) \wedge (\forall \varepsilon > 0, \exists s \in S,\ u - \varepsilon < s).$$

(ii) Si S está acotado inferiormente,

$$u = \text{ínf}\,(S) \iff (\forall s \in S,\ u \leq s) \wedge (\forall \varepsilon > 0, \exists s \in S,\ s < u + \varepsilon)\,.$$

Demostración. **(i)** Sea $u = \sup S$, entonces $\forall s \in S,\ u \geq s$. Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos el punto $u - \varepsilon$. Si $u - \varepsilon \geq s, \forall s \in S$. Entonces $u - \varepsilon$ es cota superior de S. Además, tenemos que $u - \varepsilon < u$, pero como $\sup S = u$ tenemos que $u \leq u - \varepsilon$. Esto es una contradicción.

(ii) Recíprocamente, si u es una cota superior y $\forall \varepsilon > 0, \exists s \in S,\ u - \varepsilon < s$. Si u no fuera supremo, existe $v \geq s, \forall s \in S$ tal que $v < u$. Si tomamos $\varepsilon = u - v > 0$, tenemos que existe $s \in S$ tal que $s > u - \varepsilon$, entonces,

$$u - \varepsilon = v < s.$$

Esto es una contradicción.

□

Proposición 1.4. Si $A, B \subset \mathbb{R}$ con $A, B \neq \emptyset$, tales que $\forall a \in A, \forall b \in B$ se verifica que $a \leq b$, entonces, $\sup A \leq \text{ínf}\, B$ (existen $\sup A$ y $\text{ínf}\, B$).

Demostración. Tenemos que $\forall b \in B, \forall a \in A,\ b \geq a$. Por tanto, A está acotado superiormente y, por el axioma de completitud, existe $\sup A$ y que $\sup A \leq b, \forall b \in B$. Por tanto, $\sup A$ es una cota inferior de B y, por tanto,

$$\sup A \leq \text{ínf}\, B.$$

□

Teorema 1.8 (Propiedad Arquimediana de $\mathbb{R}$)**.** Para todo $x \in \mathbb{R}, \exists n_x \in \mathbb{N}$ tal que $x < n_x$.

Demostración. Asumimos que $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \leq x$. Por lo que $\mathbb{N}$ está acotado superiormente. Entonces, por el axioma de completitud tenemos que $\exists \sup \mathbb{N} \leq x$. Sabemos que $u = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Como $u - 1 < u$, tenemos que $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $u - 1 < m \leq u$. Entonces, $u < m + 1$. Sin embargo, $m + 1 \in \mathbb{N}$ y tenemos que hay un número natural mayor que el supremo de todos los números naturales. Esto es una contradicción. □

Corolario 1.4.

$$\text{ínf}\left\{\frac{1}{n}\ :\ n \in \mathbb{N}\right\} = 0.$$

Demostración. Sea $S = \left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ Como el inverso de un número positivo es positivo, tenemos que el conjunto está acotado inferiormente por 0. Dado $\varepsilon > 0$. Como $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente, si tomamos $x = \frac{1}{\varepsilon}$, podemos encontrar $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{\varepsilon} < n_\varepsilon.$$

Por tanto,

$$0 \leq \text{ínf}\, S \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Por tanto, como $\forall \varepsilon > 0, 0 \leq \text{ínf}\, S < \varepsilon$, tenemos que $\text{ínf}\, S = 0$. □

Corolario 1.5. $\forall a > 0$,

$$\text{ínf}\left\{\frac{a}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\} = 0.$$

Observación. $\mathbb{R}$ es el cuerpo abeliano, ordenado, completo y arquimediano.Es el único conjunto que satisface esto (si hay otro conjunto que también lo cumple, es esencialmente el mismo).

Lema 1.4. Si $a, b > 0$ entonces

$$a < b \iff a^2 < b^2.$$

Demostración.

$$a^2 < b^2 \iff b^2 - a^2 > 0 \iff (b + a)\,(b - a) > 0.$$

Sabemos que $a, b > 0$, por tanto $b + a > 0$, por tanto $b - a$ tiene que ser positivo y, por tanto, $b > a$. □

Teorema 1.9. Existe $x \in \mathbb{R}$, tal que $x^2 = 2$.

Demostración. Sea $S = \left\{s \in \mathbb{R} \ : \ 0 \leq s \ \wedge \ s^2 < 2\right\}$. Sabemos que $S \neq \emptyset$ porque $1 \in S$. Demostramos que está acotado superiormente. Si $s \in S$, entonces, $s^2 < 2 < 4$. Por el lema anterior,

$$s < 2.$$

Por tanto, S está acotado superiormente por 2. Por el axioma de la completitud, $\exists u = \sup S$. Sabemos que

$$1 \leq u \leq 2.$$

Supongamos que $u^2 \neq 2$:

(i) Si $u^2 < 2$, sea $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\left(u+\frac{1}{n}\right)^2 &= u^2 + \frac{2u}{n} + \frac{1}{n^2}\\ &< u^2 + \frac{2u}{n} + \frac{1}{n}\\ &= u^2 + \frac{2u+1}{n}.\end{aligned}$$

Para demostrar que $u^2 + \dfrac{2u+1}{n} < 2$ tenemos que demostrar que $\dfrac{2u+1}{n} < 2 - u^2$. Como $2u+1 > 0$, tenemos que por el colorario anterior que,

$$\text{ínf}\left\{\frac{2u+1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\} = 0.$$

Por tanto, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{2u+1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$ [3]. Si tomamos $\varepsilon = 2 - u^2$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{2u+1}{n_\varepsilon} < 2 - u^2 = \varepsilon \iff \left(u + \frac{1}{n_\varepsilon}\right)^2 < u^2 + \frac{2u+1}{n_\varepsilon} < 2 - u^2 + u^2 = 2.$$

Por tanto, $u = \sup S < u + \dfrac{1}{n_\varepsilon} \in S$. Esto es una contradicción.

(ii) Si $u^2 > 2$, sea $m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\left(u-\frac{1}{m}\right)^2 &= u^2 - \frac{2u}{m} + \frac{1}{m^2}\\ &> u^2 - \frac{2u}{m}.\end{aligned}$$

Queremos decir que $u^2 - \dfrac{2u}{m} > 2$. Cogemos $\varepsilon = u^2 - 2 > \dfrac{2u}{m}$. Usamos el colorario de la propiedad arquimediana. Tenemos que $2u > 0$. Además,

$$\text{ínf}\left\{\frac{2u}{m} \ : \ m \in \mathbb{N}\right\} = 0.$$

Por tanto, $\exists m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{2u}{m_\varepsilon} < \varepsilon$.

$$u^2 - \frac{2u}{m_\varepsilon} > u^2 - \varepsilon = u^2 - \big(u^2 - 2\big) = 2.$$

Así, hemos llegado a la conclusión de que $\left(u - \dfrac{1}{m_\varepsilon}\right)^2 > 2 > s^2, \forall s \in S$. Por el lema anterior,

$$u - \frac{1}{m_\varepsilon} > s, \forall s \in S.$$

[3] En este paso puedes utilizar directamente la propiedad arquimediana y decir que puedes encontrar un $n \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande.

Entonces, $u - \dfrac{1}{m_\varepsilon}$ es una cota superior de S que a su vez es menor que $u = \sup S$. Es decir

$$u - \frac{1}{m_\varepsilon} < u \quad \text{y} \quad u - \frac{1}{m_\varepsilon} \geq u.$$

Esto es una contradicción.

Por tanto, no puede ser que $u^2 > 2$ ni $u^2 < 2$. Por tanto, debe ser que $u^2 = 2$. $\square$

Corolario 1.6. Para todo $a > 0$, y para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x > 0$ tal que

$$x^n = a.$$

Notación. En las condiciones del corolario,

$$x = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Definición 1.13. Si $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$,

$$a^{-\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}.$$

Definición 1.14. $a > 0$, $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$,

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m.$$

Proposición 1.5 (Principio de la buena ordenación)**.** Si $A \subset \mathbb{N}$ con $A \neq \emptyset$, entonces existe $n \in A$ tal que

$$\forall m \in A,\ n \leq m.$$

Definición 1.15. Un conjunto A con un orden $\leq$ se dice que está **bien ordenado** si contiene un primer elemento:

$$\exists x \in A, \forall y < x \Rightarrow y \notin A.$$

Ejemplo 1.5. **(i)** Todo conjunto finito de $\mathbb{R}$ está bien ordenado.

(ii) El intervalo $[0, \infty)$ está bien ordenado.

Teorema 1.10. Sea $A \subset \mathbb{N}$ con $A \neq \emptyset$, entonces A está bien ordenado.

Demostración. Suponemos lo contrario, es decir, existe $\exists A \subset \mathbb{N}$ que no tiene un primer elemento. Queremos ver que $\forall n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{1, \ldots, n\} \cap A = \emptyset$. Si $n = 1$, $\{1\} \cap A = \emptyset$, porque sino 1 sería el primer elemento.

Asumimos que $\{1, 2, \ldots, n\} \cap A = \emptyset$. Entonces tenemos que en el caso de $n + 1$:

$$\{1, \ldots, n+1\} \cap A = (\{1, \ldots, n\} \cup \{n+1\}) \cap A = (\{1, \ldots, n\} \cap A) \cup (\{n+1\} \cap A) = \{n+1\} \cap A.$$

Esto puede ser vacío, o que $\{n+1\} \cap A = \{n+1\}$. Si pasase esto último, $n+1$ sería el menor elemento de A, que rompe con nuestra hipótesis inicial. Por lo tanto, tenemos que $A = \emptyset$. Esto rompe con nuestra hipótesis del teorema. □

Corolario 1.7. Si $x \geq 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 \leq x < n$.

Demostración. Sea $A = \{m \in \mathbb{N} : m > x\} \neq \emptyset$ (por la propiedad arquimediana). Sea n el primer elemento de A. Tenemos que como $n \in A$, $n > x$. Además, $n - 1 \notin A$, por lo que $n - 1 \leq x$. Por tanto:

$$n - 1 \leq x < n.$$

[4] □

Notación. $\lfloor x \rfloor$ es la parte entera de x tal que $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Teorema 1.11 (Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$)**.** Si $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, entonces existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $0 \leq x < y$ [5]. Sabemos, etonces, que $y - x > 0$. Por tanto, podemos encontrar un $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$y - x > \frac{1}{n} > 0.$$

Entonces, sabemos que

$$ny > nx \geq 0.$$

Por el corolario anterior, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que

$$m - 1 \leq nx < m.$$

[4] En el caso de números negativos, coges que $-x > 0$ y repites la demostración.
[5] Si fuesen negativos, cambiamos el signo y repetimos la demostración.

Entonces, tenemos que $x < \frac{m}{n} = r \in \mathbb{Q}$. Combinando las ecuaciones anteriores:

$$ny > n\left(\frac{1}{n} + x\right) = 1 + xn \geq 1 + m - 1 = m \Rightarrow y > \frac{m}{n} = r > x.$$

Por tanto,

$$x < r < y.$$

□

Notación. Los intervalos no acotados los definimos de la siguiente manera:

- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x\}$
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x\}$
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \leq b\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < b\}$
- $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

Teorema 1.12. Sea $S \subset \mathbb{R}$ con $S \neq \emptyset$, tal que $\forall x, y \in S,\ x < y$ se verifica que $[x, y] \subset S$. Entonces, S es un **intervalo** [a] .

[a] Es uno de los casos de intervalos que hemos visto anteriormente (acotado y no acotado).

Demostración. **(i)** Supongamos que S está acotado, sea $a = \inf S$ y $b = \sup S$. Si consideramos el intervalo $[a, b]$ tenemos que como $a = \inf S$, $\forall s \in S,\ s \geq a$. Por el mismo razonamiento, $\forall s \in S,\ b \geq s$. Por tanto,

$$\forall s \in S,\ a \leq s \leq b \Rightarrow S \subset [a, b]\,.$$

Sea $z \in (a, b)$, queremos decir que $z \in S$. Como $a = \inf S$, tenemos que $\exists s \in S$ tal que $a < s < z$. Similarmente, como $b = \sup S$, $\exists s' \in S$ tal que $z < s' < b$. Por tanto, por la hipótesis del teorema tenemos que $s < s'$, por lo que $[s, s'] \subset S$ y $z \in [s, s']$ por lo que $z \in S$.

$$\therefore (a, b) \subset S.$$

Ahora hay que valorar los posibles casos de si $a, b \in S$, para determinar de qué tipo de intervalo acotado se trata.

(ii) Supongamos que S está acotado inferiormente pero no superiormente. Entonces tenemos que si $x \in S$ y $a = \inf S$, $a \leq s, \forall s \in S$. Por tanto,

$$\forall s \in S, a \leq s \Rightarrow S \subset [a, \infty).$$

Si $z \in (a, \infty)$, tenemos que $a < z$. Si cogemos $\varepsilon > 0$ tal que $a + \varepsilon = z$, podemos encontrar $s \in S$ tal que

$$a \leq s < z.$$

Dado que S no está acotado superiormente, podemos encontrar s' tal que $s < z < s'$. Por tanto, $s < s'$ y por hipótesis, $[s, s'] \subset S$, por lo que $z \in [s, s']$ y $z \in S$.

$$\therefore (a, \infty) \subset S.$$

(iii) El caso en el que S está acotado superiormente pero no inferiormente se demuestra igual.

(iv) Si S no está acotado, tenemos que $S \subset \mathbb{R}$. Si $z \in \mathbb{R}$, como S no está acotado, podemos encontrar $s, s' \in S$ tales que $s < z < s'$. Por tanto, $[s, s'] \subset S$ y $z \in [s, s']$, por lo que $z \in S$. De esta manera,

$$(S \subset \mathbb{R}) \wedge (\mathbb{R} \subset S) \Rightarrow S = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)\,.$$

□

Teorema 1.13 (Teorema de los intervalos encajados)**.** Sean $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, con $n \in \mathbb{N}$ tales que $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$. Sea $I_n = [a_n, b_n]$. Esto no puede ser un punto, porque $a_n < b_n$. Entonces $I_{n+1} \subset I_n$. Entonces,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset.$$

[a]

[a] Si el intervalo estuviera abierto, este teorema no tiene por qué cumplirse.

Demostración. Sean $m, n \in \mathbb{N}$, tenemos que $a_m < b_n$. En efecto, si $m \leq n$, entonces, $a_m \leq a_n < b_n \leq b_m$. Si $m > n$,

$$a_m < b_m \leq b_n.$$

Así, demostramos que todos los a_i están a la iquierda y los b_i a la derecha. Entonces, b_n es una cota superior de a_m, y existe $a = \sup\{a_m \,:\, m \in \mathbb{N}\} \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Similarmente, $a \leq \inf\{b_n \,:\, n \in \mathbb{N}\} = b$. Entonces

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n.$$

Por lo que $[a, b] \subset I_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Consecuentemente,

$$\emptyset \neq [a, b] \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n.$$

□

Corolario 1.8. En las condiciones del teorema de los intervalos encajados, si $\inf\{b_n - a_n\} = 0$ entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ se reduce a un punto.

Demostración. Si $\inf\{b_n - a_n \,:\, n \in \mathbb{N}\} = 0$, entonces para $\forall \varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq b - a \leq b_m - a_m < \varepsilon.$$

Como esto se cumple para todo $\varepsilon > 0$, tenemos que $b - a = 0$ y, por tanto, $b = a \in I_n, \forall n \in \mathbb{N}$. □

Teorema 1.14. $\mathbb{R}$ no es numerable.

Demostración. Basta probar que el intervalo $I = [0,1]$ no es numerable [6]. Supongamos que es numerable, es decir, $\exists \varphi : \mathbb{N} \to [0,1]$ biyectiva. Así, $\forall x \in [0,1], \exists! n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) = x$. Sea $x_n = \varphi(n)$. Entonces, $I = \{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Sea $n = 1$ y $x_1 \in [0,1]$. Sea $I_1 \subset [0,1]$ tal que $x_1 \notin I_1$. Si $x_2 \in I_1$, sea $I_2 \subset I_1$ tal que $x_2 \notin I_2$. Iterando, sean $I_1, \ldots, I_n$ intervalos cerrados y encajados tales que $x_n \notin I_n$ [7] .

$$I \subset I_1 \subset \cdots \subset I_n.$$

Por el teorema de los intervalos encajados, podemos asegurar que

$$\emptyset \neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \subset I = [0,1] .$$

Sea $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Entonces, $x \neq x_1$, pues $x \in I_1$. Por la misma razón, $x \neq x_2$, y $x \neq x_n$. Por tanto, $\forall n \in \mathbb{N}, x \neq x_n$, por lo que $x \notin I$, lo que es una contradicción. Por tanto, I no es numerable y, consecuentemente, $\mathbb{R}$ tampoco lo es. $\square$

Corolario 1.9. Los números irracionales, $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ no es un conjunto numerable.

Demostración. Asumimos que $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ es numerable. Entonces, tenemos que

$$(\mathbb{R}/\mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}.$$

Sabemos que la unión de dos conjuntos numerables será numerable, pero $\mathbb{R}$ no es numerable, esto es una contradicción. Por tanto, debe ser que $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ no es numerable. $\square$

1.3. Expresión decimal de los números reales

Expresión en base $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 2$ de los números reales.

Sea $m = 2$ y sea $x \in \mathbb{R}$. Definimos

$$\lfloor x \rfloor = \max \{n \in \mathbb{Z} \ : \ n \leq x\}$$

parte entero. Sea $a = x - \lfloor x \rfloor$, claramente tenemos que $a \in [0,1)$. Tenemos que a es la parte decimal.

(i) Tomamos como convenio que el intervalo que tomamos está cerrado por la izquierda. Vamos a dividir el intervalo $[0,1)$ en m partes iguales (en este caso $m = 2$). El primer intervalo desde la izquierda lo denomino 0 y el segundo 1 (en el caso m lo hacemos desde 0 hasta $m-1$). Si a está en el primer intervalo tomamos $j_1 = 0$, si estuviera en el segundo tomaríamos $j_1 = 1$. Definimos $a_1 = j_1$. Tenemos que

$$\frac{j_1}{2} \leq a < \frac{j_1+1}{2} \Rightarrow a \in \left[\frac{j_1}{2}, \frac{j_1+1}{2}\right).$$

[6] Hay que tener en cuenta que existe una biyección entre $\mathbb{R}$ y $[0,1]$.

[7] Estamos asumiendo que estos intervalos cumplen con los requisitos del teorema de los intervalos encajados, es decir, son intervalos cerrados.

(ii) Repetimos el caso anterior pero con este último intervalo, por lo que lo dividimos en m trozos. El punto medio será

$$\frac{j_1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2j_1 + 1}{4}.$$

El primer grupo lo denominamos 0 y el segundo 1 (en el caso m iría de 0 a $m-1$). Entonces, $j_2 \in \{0, 1\}$. Tenemos que $a_2 = j_2$. Así pues,

$$\frac{j_1}{2} + \frac{j_2}{4} \leq a < \frac{j_1}{2} + \frac{j_2 + 1}{4}.$$

(iii) Paso n-ésimo. Reptimos el mismo procedimiento hasta elegir $j_m \in \{0, 1\}$ (en el caso $m = 2$) para obtener

$$\underbrace{\frac{j_1}{2} + \frac{j_2}{2^2} + \cdots + \frac{j_n}{2^n}}_{i_n} \leq a < \underbrace{\frac{j_1}{2} + \frac{j_2}{2^2} + \cdots + \frac{j_n + 1}{2^n}}_{s_n}.$$

Tenemos que $a \in [i_n, s_n)$ y

$$0 \leq \text{ínf}\,\{s_n - i_n\} = \text{ínf}_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \leq \text{ínf}_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} = 0.$$

Por tanto, $a_n = j_n$.

Notación. Sea $m \geq 2$, $x \in \mathbb{R}$.

$$x = \lfloor x \rfloor + a = \lfloor x \rfloor + (\cdot a_1 a_2 \cdots a_n \cdots)_m.$$

Ejemplo 1.6. **(i)** Sea $m = 10$ y $x = \pi$.

$$\lfloor x \rfloor = 3.$$

Tenemos que $a = \pi - 3$. a tendrá una expresión de la forma $a = (\cdot 1415 \cdots)_{10}$. [8]

(ii) Sea $m = 2$ y $x = \frac{1}{2}$. Tenemos que $\lfloor x \rfloor = 0$, por lo que $a = x$. Tenemos que en el primer paso, está en el intervalo de la derecha. Por tanto, $a_1 = 1$. En el segundo paso se encuentra en la izquierda, por tanto, $a_2 = 0$. Desde aquí, siempre va a estar en el lado izquierdo, por tanto $a_n = 0, n \geq 2$.

$$\therefore \frac{1}{2} = (\cdot 10 \cdots 0 \cdots)_2.$$

(iii) Cómo escribir 13 en base 2:

$$13 = 8 + 4 + 1 = 2^3 + 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 2^0 \Rightarrow (13)_{10} = (1101)_2.$$

(iv) En general, si $a_j \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$,

$$(a_n \cdots a_1)_m = a_n m^{n-1} + \cdots + a_2 m^1 + a_1 m^0.$$

[8] Ambos puntos y comas en los decimales son aceptados.

Observación. Tenemos que $x \in \mathbb{Q}$ si y solo si la parte decimal es periódica. La segunda implicación se puede demostrar utilizando una sucesión geométrica. Recíprocamente, tomamos el caso $p < q$. Si $x = \frac{p}{q}$, tenemos que los restos de dividir p entre q están entre 0 y $q-1$ y, por tanto, después de como mucho q pasos, algún resto se va a volver a repetir. En este punto, los dígitos del cociente empezarán a repetirse en ciclos y, consecuentemente, la representación decimal será periódica.

Expresión decimal en base $m \geq 2$.

$$\forall x \in [0,1]\,, \exists a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$$

tales que

$$\frac{a_1}{m} + \frac{a_2}{m^2} + \cdots + \frac{a_j}{m^j} \leq x < \frac{a_1}{m} + \cdots + \frac{a_j + 1}{m^j}.$$

Recíprocamente, dadas $a_1, \ldots, a_j \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ por el teorema de los intervalos encajados, $\exists! x \in [0,1)$ tal que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \frac{a_1}{m} + \frac{a_2}{m^2} + \cdots + \frac{a_j}{m^j} \leq x < \frac{a_1}{m} + \cdots + \frac{a_j + 1}{m^j}.$$

Observación. Representamos $\mathbb{R}$ como una recta infinita sin huecos.

1.4. Números Complejos

Sabemos que $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, es decir, si $(x,y) \in \mathbb{C}$ tenemos que $x, y \in \mathbb{R}$. Definimos $i = (0,1)$ y si $x \in \mathbb{C}$ podemos expresar x de la siguiente manera:

$$(x, y) = x \cdot (1,0) + y \cdot (0,1)\,.$$

Definición 1.16. En $\mathbb{C}$ se definen la suma y el producto:

(a) Suma.
$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)\,.$$

(b) Producto.
$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1)\,.$$

Teorema 1.15. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo abeliano.

Observación. Tenemos que, según nuestra definición de producto:

$$i^2 = -1.$$

Es decir, en este cuerpo abeliano no existe un orden total. [9]

[9] Para que el orden sea total, el cuadrado de cualquier número debe ser positivo.

Observación. Existe una inyección de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}&\mathbb{R} \to \mathbb{C}\\ &x \to x + i \cdot 0.\end{aligned}$$

Decimos que $\mathbb{R}$ hereda de $\mathbb{C}$ las propiedades de la suma, producto, etc. Además, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Teorema 1.16 (Teorema Fundamental del Álgebra)**.** Si $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, con $z = x + iy \in \mathbb{C}$. $P(z)$ es un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$ con $a_j \in \mathbb{C}$. Entonces, existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $P(w) = 0$. En particular, podemos encontrar $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{N}$ $(1 \leq m \leq n)$ y existen $w_1, \ldots, w_m \in \mathbb{C}$ tales que

$$P(z) = (z - w_1)^{\alpha_1} \cdots (z - w_m)^{\alpha_m}, \quad \alpha_1 + \cdots + \alpha_m = n.$$

[a]

[a] Este teorema nos dice que $\mathbb{C}$ es algebraicamente completo.

Ejemplo 1.7. Sea $P(z) = z^4 + 2z^2 + 1,\ z \in \mathbb{C}$. Tenemos que:

$$P(z) = \left(z^2 + 1\right)^2 = (z + i)^2 (z - i)^2.$$

1.4.1. Representación polar

Definición 1.17. Norma de $z = x + iy$ es:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Teorema 1.17. Si $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1.$$

Definición 1.18. Podemos representar $z \in \mathbb{C}$ como:

$$z = |z|_\theta\,, \ \theta \in [0, 2\pi).$$

Si $x, y > 0$ tenemos que:

$$\theta = \arctan\frac{y}{x}.$$

Capítulo 2

Sucesiones y límites

Definición 2.1. Se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una **sucesión** de números reales si existe una función

$$\begin{aligned} \varphi :&\mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ &n \to \varphi(n) = x_n. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.1. (i) $\varphi(n) = \dfrac{1}{n}$.

(ii) Sucesión de Fibonacci.

$$\varphi(1) = 1,\ \varphi(2) = 1,\ \varphi(n) = \varphi(n-1) + \varphi(n-2).$$

Definición 2.2. Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** a $x \in \mathbb{R}$, y lo escribiremos de esta manera

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ |x - x_n| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0.$$

Proposición 2.1. Si $x_n = \dfrac{1}{n}$, entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, tomamos $x = 0$, tenemos que

$$|x - x_n| = \left|0 - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}.$$

Entonces, queremos probar que

$$\frac{1}{n} < \varepsilon,\ n \geq n_0.$$

Como sabemos que $\inf\left\{\frac{1}{n}\ :\ n\in\mathbb{N}\right\}=0$, tenemos que $\forall\varepsilon>0$

$$0\leq\frac{1}{n_0}<0+\varepsilon,$$

para algún $n_0\in\mathbb{N}$. Si $n\geq n_0$, tenemos que

$$n\geq n_0 \iff \frac{1}{n}\leq\frac{1}{n_0}<\varepsilon.$$

Por tanto, hemos encontrado $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\forall n\geq n_0$,

$$|x-x_n|\leq\varepsilon.$$

$\square$

Ejemplo 2.2. **(i)** Cogemos $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$. Vamos a ver que $\lim_{n\to\infty}x_n=0$, mientras que $\sup x_n\neq\inf x_n\neq 0$.

$$|x_n-0|=\frac{1}{n}.$$

$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N}$ tales que $\forall n\geq n_0$,

$$|x_n-0|=\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

Por lo que

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0.$$

(ii) $x_n=(-1)^n$. Esta sucesión no converge, pues oscila. Tenemos que ver que $\forall x,\exists\varepsilon>0,\forall n_0\in\mathbb{N},\exists n\geq n_0$ tal que $|x-x_n|\geq\varepsilon$. Supongamos que $x>1$ y tomamos $\varepsilon=2$ y $n_0\in\mathbb{N}$. Sea $n\geq n_0$ impar. Entonces

$$|x_n-x|=|-1-x|=2+x-1=1+x>2=\varepsilon.$$

Si $x<-1$, tenemos que $-x>1$. Tomamos $\varepsilon=2$. Podemos encontrar $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $n\geq n_0$ y n es par.

$$|x-1|=2+(-1-x)=1-x\geq 2=\varepsilon.$$

Finalmente, si $-1\leq x\leq 1$, tomamos $\varepsilon=1$. Si $x=0$, tenemos que

$$|1-0|=|0-1|=1\geq 1=\varepsilon.$$

Si $x>0$, tenemos que si $n_0\in\mathbb{N}$ podemos encontrar $n\geq n_0$ impar, tal que

$$|x-(-1)|=x+1\geq 1=\varepsilon.$$

Similarmente, si $x<0$ $(-x>0)$ y $n_0\in\mathbb{N}$ podemos encontrar tal que n sea par:

$$|1-x|=1-x\geq 1=\varepsilon.$$

Proposición 2.2. Si una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, entonces el límite es único.

Demostración. Supongamos que existen $x, x' \in \mathbb{R}$ con $x \neq x'$ tales que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, n_0' \in \mathbb{N}$ tales que si $n \geq n_0$ y $n \geq n_0$, $|x_n - x| < \varepsilon$ y $|x_n - x| < \varepsilon$. Sea $\varepsilon = \dfrac{|x - x'|}{3}$. Entonces, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$. Lo mismo sucede con $n_0' \in \mathbb{N}$. Tenemos que $|x - x'| = 3\varepsilon$. Sea $n \geq \text{máx}\{n_0, n_0'\}$,

$$3\varepsilon = |x - x_n + x_n - x'| \leq |x - x_n| + |x_n - x'| < 2\varepsilon.$$

Esto es una contradicción, por lo que $x = x'$.

Otra demostración consiste en asumir que existen dos límites de la sucesión, x y x'. Tenemos que si $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_1$

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Similarmente, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_2$, entonces

$$|x_n - x'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces, si cogemos $n_0 = \text{máx}\{n_1, n_2\}$ y $n \geq n_0$, tenemos que

$$|x - x'| = |x - x_n + x_n - x'| \leq |x - x_n| + |x_n - x'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por tanto, $x' = x$. $\square$

Definición 2.3. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

(i) Diremos que la sucesión diverge a ∞, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, si

$$\forall c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ x_n \geq c.$$

(ii) Diremos que la suciesión diverge a $-\infty$, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ si

$$\forall c < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ x \leq c.$$

Observación. Existen sucesiones que convergen y las que no convergen. Dentro de las que no convergen están las que divergen (a ∞ y $-\infty$) y las que no divergen ($(-1)^n$).

Ejemplo 2.3. Tenemos que $x_n = n$ satisface que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Ejemplo 2.4. Consideremos $x_n = \dfrac{2n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Demostramos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Queremos decir que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ |x_n - 2| < \varepsilon$. Tenemos que

$$\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{2n - 2n - 2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1}.$$

$$\frac{2}{n_0+1} < \varepsilon \iff \frac{2}{\varepsilon} - 1 < n_0.$$

Por la propiedad arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$. Si $n \geq n_0$, tenemos que

$$\frac{2}{n+1} < \varepsilon.$$

Proposición 2.3. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ y sea $m \in \mathbb{N}$. Sea $y_n = x_{n+m}$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff \lim_{n\to\infty} y_n = x.$$

Demostración. **(i)** Asumimos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Entonces tenemos que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ |x - x_n| < \varepsilon.$$

Como $m \in \mathbb{N}$, tenemos que $m + n_0 > n_0$, por lo que, si $n \geq n_0$, $|x - x_{m+n}| < \varepsilon$. Es decir,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |x - y_n| < \varepsilon.$$

(ii) Recíprocamente, si $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$, tenemos que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ |x - y_n| < \varepsilon.$$

Es decir,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 + m \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ |x - x_{m+n}| < \varepsilon.$$

Si cogemos $n_0' = m + n_0$, tenemos que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0', \forall n \geq n_0', |x - x_n| < \varepsilon.$$

□

Teorema 2.1 (Regla del bocadillo)**.** Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ con

$$\forall n \in \mathbb{N},\ y_n \leq z_n \leq x_n.$$

Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Entonces, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = x$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Cogemos $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_1$

$$|y_n - x| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Similarmente, sea $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_2$,

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Sea $n_0 = \text{máx}\{n_1, n_2\}$. Sea $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} |z_n - x| &= |z_n - y_n + y_n - x_n + x_n - x| \\ &\leq |z_n - y_n| + |y_n - x_n| + |x_n - x| \\ &= z_n - y_n + x_n - y_n + |x_n - x| \\ &\leq x_n - y_n + x_n - y_n + |x_n - x| \\ &= 2(x_n - y_n) + |x_n - x|. \end{aligned}$$

Observación. Tenemos que

$$|x_n - y_n| = |x_n - x + x - y_n| \leq |x_n - x| + |y_n - x|.$$

Por tanto,

$$2(x_n - y_n) + |x_n - x| \leq 3|x_n - x| + 2|x - y_n| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{6} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Una demostración alternativa es decir que existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que si $\varepsilon > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} &\forall n \geq n_1,\ |x_n - x| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x_n - x < \varepsilon \iff -\varepsilon + x < x_n < \varepsilon + x \\ &\forall n \geq n_2,\ |y_n - x| < \varepsilon \iff -\varepsilon < y_n - x < \varepsilon \iff -\varepsilon + x < y_n < \varepsilon + x. \end{aligned}$$

Sea $n > \text{máx}\{n_1, n_2\}$, por hipótesis tenemos que

$$-\varepsilon + x < x_n < z_n < y_n < \varepsilon + x.$$

$$\therefore |z_n - x| < \varepsilon.$$

□

Ejemplo 2.5. **(i)** $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0.$$

Como $n^k \geq n$, tenemos que $n^{k-1} \geq 1$. Además, podemos deducir que

$$0 \leq \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n}.$$

La primera sucesión converge a 0 y la segunda también converge a 0 (propiedad arquimediana), por lo que $\frac{1}{n^k} \to 0$.

(ii) Si $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n^k}.$$

Tenemos que

$$0 \leq \left|\frac{\sin n}{n^k}\right| \leq \frac{1}{n^k}.$$

Como $0 \to 0$ y $\frac{1}{n^k} \to 0$, tenemos que $\frac{\sin n}{n^k} \to 0$.

Observación. En la regla del bocadillo, basta que las estimaciones sean ciertas a partir de un cierto valor. Es decir, si $y_n \leq z_n \leq x_n,\ n \geq n_0$, si $y_n, x_n \to x$, tenemos que $z_n \to x$.

Ejemplo 2.6. La sucesión $\dfrac{n}{2^n} \to 0$. Esto lo demostramos diciendo que $\dfrac{n}{2^n} \leq \dfrac{1}{n}$. En el caso $n = 3$ esto no se cumple, porque se cumple en $n \geq 4$.

Definición 2.4. Se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ está acotada si existe $c > 0$, tal que

$$|x_n| \leq c,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

[a]

[a]Es decir, $-c \leq x_n \leq c$, o sea, está acotado superior e inferiormente.

Teorema 2.2. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ converge, entonces está acotada.

Demostración. Sea $\varepsilon = 1$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$

$$|x_n - x| < 1.$$

Además, $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Tenemos que si $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} |x_n| &= |x_n - x + x| \\ &\leq |x_n - x| + |x| \\ &\leq 1 + |x|. \end{aligned}$$

Sea $c = \max\{1 + |x|, |x_n| \ :\ n \leq n_0\}$. Entonces tenemos que

$$|x_n| \leq c,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Observación. El recíproco del teorema anterior no es cierto en general. Considera $(-1)^n$ que está acotada por 1 pero no converge.

Ejemplo 2.7. Si $x \in \mathbb{R}$, existe $a_0 \in \mathbb{Z}$ y existen $a_n \in \{0, \ldots, 9\}$ tales que

$$\underbrace{a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}}_{x_n} \leq x \leq a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n + 1}{10^n}.$$

Vamos a demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. En efecto,

$$x_n \leq x < x_n + \frac{1}{10^n}.$$

Entonces, tenemos que

$$0 \leq |x - x_n| \leq \frac{1}{10^n}.$$

Tenemos que $0 \to 0$ y $\dfrac{1}{10^n} \to 0$, por lo que $|x - x_n| \to 0$, por lo que $x_n \to x$.

Teorema 2.3. Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, tales que $x_n \to x$ y $y_n \to y$.

(i) $x_n + y_n \to x + y \iff \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$.

(ii) $x_n y_n \to xy \iff \lim_{n\to\infty} x_n y_n = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)$.

(iii) Si $y_n \neq 0$, $y \neq 0$,

$$\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y} \iff \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}.$$

(iv) $|x - x_n| \to 0$.

Demostración. **(i)** Si $\varepsilon > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1,\ |x_n - x| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Similarmente, existe $n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2,\ |y_n - y| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Tomamos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

$$|x_n + y_n - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(ii)

$$|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| = |x_n (y_n - y) + y (x_n - x)| \leq |x_n| |y_n - y| + |y| |x_n - x|.$$

Cogemos $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_1,\ |x_n - x| < |x|$,

$$|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| < 2|x|.$$

Así,

$$|x_n y_n - xy| \leq 2|x| |y_n - y| + |y| |x_n - x|.$$

Cogemos $n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ tales que $\forall n \geq n_2$ y $\forall n \geq n_3$,

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2|y|} \quad \text{y} \quad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{4|x|}.$$

Entonces, si cogemos $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$, tenemos que $\forall n \geq n_0$,

$$|x_n y_n - xy| \leq 2|x| |y_n - y| + |y| |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(iii)

$$\begin{aligned} \left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| &= \left|\frac{x_n y - x y_n}{y_n y}\right| = \left|\frac{y(x_n - x) - x(y_n - y)}{y_n y}\right| \\ &\leq \frac{1}{|y_n|} |x_n - x| + \frac{1}{|y_n|} \left|\frac{x}{y}\right| |y_n - y|. \end{aligned}$$

Si cogemos $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_1$, $|y_n - y| < \dfrac{|y|}{2}$. Entonces tenemos que

$$|y_n| = |y_n - y + y| \geq |y| - |y_n - y| > \frac{|y|}{2}.$$

Entonces,

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{x}{y}\right| \le \frac{1}{|y_n|}\,|x_n-x| + \frac{1}{|y_n|}\left|\frac{x}{y}\right|\,|y_n-y| < \frac{2}{|y|}\,|x_n-x| + \left|\frac{2x}{y^2}\right|\,|y_n-y|\,.$$

Cogemos $n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \ge n_2$ y $\forall n \ge n_3$ tenemos que

$$|x_n-x| < \frac{\varepsilon\,|y|}{4} \quad \text{y} \quad |y_n-y| < \varepsilon\left|\frac{y^2}{4x}\right|.$$

Si cogemos $n_0 = \text{máx}\,\{n_1, n_2, n_3\}$, tenemos que $\forall n \ge n_0$,

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{x}{y}\right| \le \frac{1}{|y_n|}\,|x_n-x| + \frac{1}{|y_n|}\left|\frac{x}{y}\right|\,|y_n-y| < \frac{2}{|y|}\,|x_n-x| + \left|\frac{2x}{y^2}\right|\,|y_n-y| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(iv) Decir que $|x-x_n| \to 0$ es lo mismo que decir que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. En efecto, si $|x-x_n| \to 0$, tenemos que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_0,\ |x_n-x| < \varepsilon.$$

Esta es la definición de $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = n$.

□

Corolario 2.1. **(i)** Si cada una de estas sucesiones converge [a] :

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n+\cdots+z_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \cdots + \lim_{n\to\infty} z_n.$$

(ii) Si $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n^k = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^k.$$

[a] Si la suma converge, las sucesiones individuales no tienen por qué converger. Considera $x_n = n$ y $y_n = -n$.

Teorema 2.4. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, con $x_n \ge 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, entonces, $x \ge 0$.

Demostración. Supongamos que $x < 0$. Sea $\varepsilon = \dfrac{|x|}{2} > 0$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \ge n_0$, $|x_n - x| < \varepsilon$. Tenemos que

$$|x_n-x| = x_n - x < \varepsilon = \frac{|x|}{2} = \frac{-x}{2} \Rightarrow x_n < \frac{x}{2} \iff x_n < \frac{x}{2} < 0 \iff x_n < 0, \forall n \ge n_0.$$

Esto es una contradicción. □

Corolario 2.2. Si $x_n \leq y_n$, $x_n \to x$ y $y_n \to y$. Entonces, $x \leq y$.

Demostración. Si $y_n - x_n \geq 0$, entonces $y_n - x_n \to y - x$. Por el teorema anterior tenemos que

$$y - x \geq 0 \iff y \geq x.$$

□

Corolario 2.3. Si $x_n \to x$. Entonces, $|x_n| \to |x|$.[a]

[a]El recíproco no se cumple, comprueba $(-1)^n$.

Demostración. Tenemos que

$$0 \leq ||x_n| - |x|| \leq \underbrace{|x_n - x|}_{\to 0}.$$

Entonces, $||x_n| - |x|| \to 0$. □

Teorema 2.5. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{+}$[a], y supongamos que $x_n \to x$ y $x > 0$. Sea $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$x_n^{\frac{1}{m}} \to x^{\frac{1}{m}} \iff \lim_{n\to\infty} x_n^{\frac{1}{m}} = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^{\frac{1}{m}}.$$

[b]

[a]$\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

[b]Si aplicamos esta propiedad junto a la del exponente, lo podemos demostrar para $q \in \mathbb{Q}$.

Demostración. Sea $a = x^{\frac{1}{m}} \iff a^m = x$ y $a_n = x_n^{\frac{1}{m}} \iff a_n^m = x_n$. Sabemos que

$$a^m - a_n^m = (a - a_n)\left(a^{m-1} + \cdots + a_n^{m-1}\right).$$

$$\Rightarrow \frac{a^m - a_n^m}{a^{m-1} + \cdots + a_n^{m-1}} = a - a_n.$$

Entonces tenemos que

$$\frac{|a^m - a_n^m|}{a^{m-1}} \geq \frac{|a^m - a_n^m|}{\left|a^{m-1} + \cdots + a_n^{m-1}\right|} = |a - a_n|.$$

Por tanto,

$$0 \leq \left|x^{\frac{1}{m}} - x_n^{\frac{1}{m}}\right| \leq \underbrace{\frac{1}{a^{m-1}}|x - x_n|}_{\to 0}.$$

Entonces, $\left|x^{\frac{1}{m}} - x_n^{\frac{1}{m}}\right| \to 0$. □

2.1. Criterios de Convergencia

Proposición 2.4. Si $0 < r < 1$, entonces $r^n \to 0$.

Demostración. Sea $R = \frac{1}{r} > 1$. Queremos ver que $R^n \to \infty$. Como $R > 0$, por la desigualdad de Bernouilli tenemos que

$$R^n = (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Por tanto,

$$0 < r^n = \frac{1}{R^n} = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{1+nx} < \frac{1}{nx}.$$

Como $\frac{1}{x} \to \frac{1}{x}$ y $\frac{1}{n} \to 0$, tenemos que $\frac{1}{nx} \to 0$. Entonces, $r^n \to 0$. □

Observación. En la demostración anterior hemos dicho que $r^n \to 0$ es equivalente a decir que $R^n \to \infty$. Esto es porque la definición de la segunda será:

$$\forall c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, R^n > c.$$

Si $R^n > c$ tenemos que

$$\frac{1}{r^n} > c \iff r^n < c.$$

Por tanto, se trata de la misma definición, solo que cambiamos ε por c.

Ejemplo 2.8. **(i)** Si $c > 0$, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}} = 1$. Si $c = 1$ el resultado es trivial. Si $c > 1$, tenemos que, $c^{\frac{1}{n}} > 1$ (problema 18 de la hoja 2). Entonces, podemos encontrar $x_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$c^{\frac{1}{n}} = 1 + x_n \iff x_n = c^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Entonces, utilizando la desigualdad de Bernuilli:

$$c = (1+x_n)^n \geq 1 + nx_n \iff x_n \leq \frac{c-1}{n}.$$

Por tanto, tenemos que

$$0 < \left|c^{\frac{1}{n}} - 1\right| = x_n \leq \frac{c-1}{n}.$$

Como $\frac{1}{n} \to 0$ y $c - 1 \to c - 1$, por el teorema 2.3 tenemos que $\frac{c-1}{n} \to 0$. Entonces,

$$\left|c^{\frac{1}{n}} - 1\right| \to 0 \iff c^{\frac{1}{n}} \to 1.$$

Si $0 < c < 1$, tenemos que $c^{\frac{1}{n}} < 1$. Entonces existe $x_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$c^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+x_n}.$$

Utilizando la identidad de Bernuilli:

$$c = \frac{1}{(1+x_n)^n} \leq \frac{1}{1+nx_n} < \frac{1}{nx_n}.$$

Entonces tenemos que,

$$\left|c^{\frac{1}{n}} - 1\right| = \frac{x_n}{1+x_n} < x_n < \left(\frac{1}{c}\right)\frac{1}{n}.$$

Utilizando el teorema 2.3, tenemos que $\frac{1}{nc} \to 0$ y, consecuentemente, $c^{\frac{1}{n}} \to 1$.

(ii) Similarmente, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$. Sabemos que $n^{\frac{1}{n}} > 1$ para $n > 1$. Entonces podemos escribir

$$n^{\frac{1}{n}} = 1 + x_n.$$

Entonces, aplicando el teorema del binomio tenemos que

$$n = (1+x_n)^n = 1 + nk_n + \frac{1}{2}n(n-1)x_n^2 + \cdots \geq 1 + \frac{1}{2}n(n-1)x_n^2.$$

Por tanto, tenemos que $x_n^2 \leq \frac{2}{n}$. Entonces podemos decir que

$$0 < \left|n^{\frac{1}{n}} - 1\right| = x_n \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por el teorema 2.5 tenemos que $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \to 0^{\frac{1}{2}} = 0$. Entonces, $\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \to 0$ y $n^{\frac{1}{n}} \to 1$.

Teorema 2.6 (Regla del cociente)**.** Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ y existe $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Entonces, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Demostración. Sea $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Como se trata de una sucesión de términos positivos, tenemos que $l \in [0,1)$ [1]. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n} - l\right| < \varepsilon \iff -\varepsilon + l < \frac{x_{n+1}}{x_n} < \varepsilon + l.$$

Por lo tanto,

$$x_{n+1} < (l+\varepsilon)\,x_n.$$

Consecuentemente,

$$x_{n+1} < (l+\varepsilon)\,x_n < (l+\varepsilon)^2\,x_{n-1} < \cdots < (l+\varepsilon)^{n+1-n_0}\,x_{n_0}.$$

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $l + \varepsilon < 1$, por ejemplo, cogemos $\varepsilon = \frac{1-l}{2}$. Tomamos $r = l + \varepsilon < 1$ y obtenemos que si $n \geq n_0$

$$x_{n+1} < r^{n+1}\frac{x_{n_0}}{r^{n_0}}.$$

Por la proposición 2.4 tenemos que $r^{n+1} \to 0$, por lo que $x_{n+1} \to 0$ (aplicando la regla del bocadillo). □

[1] Los límites no conservan estrictamente las desigualdades. Considera la sucesión $x_n = \frac{1}{n}$. Tenemos que cada elemento es mayor que 0 pero el límite es 0.

Observación. Si $l = 1$ el resutlado puede ser falso, considera el caso $x_n = n$. Tenemos que

$$\frac{x_{n+1}}{x} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1,$$

pero

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Ejemplo 2.9. Consideramos la sucesión $x_n = \dfrac{n}{2^n}$. Aplicamos la regla del cociente.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} < 1.$$

Entonces, $x_n \to 0$.

Definición 2.5 (Monotonía)**.** Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Se dice que

(i) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es **creciente** si $x_n \leq x_{n+1}$ [a] .

(ii) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es **decreciente** si $x_n \geq x_{n+1}$.

(iii) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es **monótona** si es creciente o decreciente.

[a] Es estrictamente creciente si $x_n < x_{n+1}$. También funciona así si es estrictamente decreciente.

Teorema 2.7. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

(i) Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y está acotada superiormente, entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

(ii) Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y está acotada inferiormente, entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

[a]

[a] Lo importante de este teorema es que si una sucesión está acotada y es monótona, entonces existe el límite.

Demostración. **(i)** Sea $s = \sup \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} < \infty$. Sea $\varepsilon > 0$, queremos ver que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s - x_n < \varepsilon, \forall n \geq n_0$. Como $s = \sup \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$s - \varepsilon < x_{n_0}.$$

Además, como se trata de una sucesión creciente, tenemos que si $n \geq n_0$,

$$x_n \geq x_{n_0} > s - \varepsilon \iff s - x_n < \varepsilon.$$

(ii) Se puede demostrar de dos formas: una es similar a la anterior, mientras que la otra se parece a la demostración de la existencia del ínfimo en casos de la existencia de una cota inferior. Comenzamos con la primera. Sea $i = \text{ínf}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Como i es el ínfimo, sabemos que si $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_{n_0} < i + \varepsilon.$$

Además, como la sucesión es decreciente tenemos que si $n \geq 0$

$$x_n < x_{n_0} < i + \varepsilon.$$

Entonces, si $n \geq n_0$ tenemos que

$$x_n - i < \varepsilon.$$

Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \text{ínf}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

La otra demostración comienza diciendo que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente acotada inferiormente, entonces la sucesión $\{-x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente acotada superiormente. Por un teorema que vimos en el capítulo anterior, sabemos que $\sup\{-x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = -\text{ínf}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Aplicando el apartado anterior tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\lim_{n\to\infty}(-x_n) = \text{ínf}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

$\square$

Ejemplo 2.10. **(i)**

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}.$$

Esta sucesión decrece. Además, $1 + \frac{1}{n} \geq 1$, es decir, está acotada inferiormente. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \text{ínf}\left\{1+\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = 1 + \text{ínf}\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = 1.$$

(ii) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{2^n}$, $n \geq 2$. La sucesión va a ser de la forma

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots.$$

Tenemos que el término genera será $x_n = \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} \to 1$, pues $\frac{1}{2^{n+1}} \to 0$.

Observación. Si $r > 0$ y $m > n$,

$$\sum_{j=n}^{m} r^j = \frac{r^n - r^{m+1}}{1-r}.$$

(iii) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Esta serie diverge. Sabemos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente. Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existe, entonces estaría acotada superioremnte. Nos vamos a fijar en los términos x_{2^n}. Tenemos que

$$x_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right).$$

Tenemos que en el último paréntesis hay $2^n - \left(2^{n-1}+1\right) + 1 = 2^{n-1}$ elementos. Entonces tenemos que

$$x_{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + \cdots + 2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2} \to \infty.$$

Entonces, esta sucesión diverge y, por tanto, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no puede estar acotada superiormente. Entonces, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente.

(iv) Número de Euler.

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Vamos a demostrar que es creciente y que está acotada superiormente. En efecto,

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{1}{n^i}.$$

Observación.

$$\begin{aligned}\binom{n}{i}\frac{1}{n^i} &= \frac{n\,(n-1)\cdots 1}{i!\,(n-i)!n^i} = \frac{n\,(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!n^i} = \frac{1}{i!}\cdot 1\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-i+1}{n}\\ &= \frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right).\end{aligned}$$

A partir de la observación 2.8, podemos ver que

$$\binom{n}{i}\frac{1}{n^i} = \frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right) < \frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n+1}\right).$$

Por lo tanto,

$$e_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\frac{1}{(n+1)^i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}\frac{1}{(n+1)^i} + \frac{1}{(n+1)^{n+1}} > \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{1}{n^i} = e_n.$$

Por tanto, $e_n < e_{n+1}$, por lo que la sucesión e_n es creciente. Ahora tenemos que ver que está acotada, en concreto, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $e_n \leq 3$. Usamos que $2^{j-1} \leq j!$. Partiendo de la observación 2.8, tenemos que

$$\binom{n}{i}\frac{1}{n^i} < \frac{1}{i!} \leq \frac{1}{2^{i-1}}.$$

De esta manera,

$$e_n \leq 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} \leq 1 + 2 = 3.$$

Por tanto, la sucesión va a converger a e, es decir,

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Ejemplo 2.11. Si $r > 0$ y $x_n = r^{\frac{1}{n}}$ entonces $x_n \to 1$. Consideramos varios casos. Si $r = 1$, es trivial. Si $r > 1$, entonces vamos a ver si es creciente o decreciente. Tenemos que

$$r > 1 \iff r^{n+1} > r^n \iff r^{\frac{1}{n}} > r^{\frac{1}{n+1}}.$$

Es decir, la sucesión decrece y, por tanto, decrece. Como $r > 1$, entonces, $x_n = r > 1$. Entonces la sucesión decreciente $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada inferiormente por 1. Consecuentemente, la sucesión converge. Vamos a demostrar que el límite es 1. Sea $x = \lim_{n\to\infty} r^{\frac{1}{n}}$. Como, $x_n > 1$, tenemos que $x \geq 1$. Supongamos que $x > 1$. Tenemos que

$$x_n = r^{\frac{1}{n}} \geq x \Rightarrow r \geq x^n.$$

Si $n \to \infty$ tenemos que x^n diverge, por lo que $r = \infty$. Esto es una contradicción, por lo que debe ser que $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. Ahora, supongamos que $0 < r < 1$.

2.2. Subsucesiones y Teorema de Bolzano-Weiestrass

Definición 2.6. Dada una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ y una sucesión creciente estrictamente de números naturales: $n_1 < n_2 < \ldots < n_j < n_{j+1} < \cdots$. Se dice que $\left\{x_{n_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una **subsucesión** (o **parcial**) de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Ejemplo 2.12. Si $x_n = (-1)^n$. Una subsucesión sería $x_{2n} = 1$ y otra sería $x_{2n-1} = -1$.

Teorema 2.8. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ sucesión convergente con $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, y $\left\{x_{n_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión, entonces $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = x$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $|x_n - x| < \varepsilon$. Si $n_j \geq n_0$ entonces $\left|x_{n_j} - x\right| < \varepsilon$. □

Observación. El teorema anterior sirve para ver que algo no converge.

Ejemplo 2.13.

$$x_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ n, & n \text{ impar} \end{cases}.$$

Tenemos que $x_{2n-1} = 2n - 1$ no converge, por lo que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge.

Teorema 2.9. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Son equivalentes:

(i) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a x.

(ii) $\exists\varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0,\ |x_n - x| \geq \varepsilon$.

(iii) $\exists\varepsilon > 0$ y $\exists \left\{x_{n_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\left|x_{n_j} - x\right| \geq \varepsilon,\ \forall j \in \mathbb{N}$.

Demostración. **(i)** Tenemos que **(i)** $\iff$ **(ii)** son equivalentes por definición.

(ii) Vamos a ver que **(iii)** $\Rightarrow$ **(i)**. Como $\left\{x_{n_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ no converge a x, tenemos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a x.

(iii) Vamos a ver que **(ii)** $\Rightarrow$ **(iii)**. Dado $\varepsilon > 0$ de **(ii)**, sea $n_1 \geq n_0$ tal que $|x_{n_1} - x| \geq \varepsilon$. Tomamos ahora $n_2 \geq n_1 + 1 > n_1$ tal que $|x_{n_2} - x| \geq \varepsilon$. Iterando, obtenemos una colección de índices estrictamente crecientes: $n_1 < n_2 < \cdots < n_j < \cdots$, de manera que,

$$\left|x_{n_j} - x\right| \geq \varepsilon.$$

□

Ejemplo 2.14. Sea $x_n = \sin n$. Vamos a demostrar que no existe el límite. Supongamos que $x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} [2k\pi, (2k+1)\pi]$. Entonces $\sin x \geq 0$. Como la longitud de los intervalos es mayor que uno, sabemos que hay un natural. Por tanto podemos decir que

$$n_k \in [2k\pi, (2k+1)\pi]\,,\ n_k \in \mathbb{N}.$$

Como los intervalos son disjuntos, tenemos que $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$. Si $\lim_{n\to\infty} \sin n = l$, existe $\lim_{k\to\infty} \sin n_k = l \geq 0$. Ahora consideramos el caso $x < 0$, para ello, tomamos $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Sea $I_\varepsilon = [\pi + \varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$. Si $x \in I_\varepsilon$, tenemos que

$$|\sin x| \geq |\sin(\pi + \varepsilon)| > 0.$$

Entonces, la longitud del intervalo es estrictamente mayor que 1. Por tanto,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists m_k \in [(2k+1) - \varepsilon, (2k+2)\pi - \varepsilon]$$

tal que $\sin m_k \leq \sin[(2k+1)\pi + \varepsilon]$. Si $\exists \lim_{n\to\infty} \sin n$, existe el límite de esta subsucesión, es decir, $\exists l = \lim_{k\to\infty} \sin m_k \leq \sin(\varepsilon + \pi) < 0$. Por tanto, tenemos que $l \geq 0$ y $l < 0$. Esto es una contradicción.

Teorema 2.10 (Teorema de la sucesión monótona)**.** Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Entonces $\exists \left\{x_{n_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que es monótona.

Demostración. Diremos que x_m es un **pico** de la sucesión si $x_m \geq x_n$, $\forall n \geq m$. Supongamos que en $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hay infinitos picos. Entonces podemos crear una subsucesión descreciente (monótona), $\left\{x_{m_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ con los picos:

$$x_{m_1} > x_{m_2} > \cdots > x_{m_j} > \cdots .$$

Si hay un número finito de picos, podemos ir hasta el último pico tal que a partir de este no hay más picos. Supongamos que no hay picos. Es decir, sea $x_{n_1} \in \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\forall n \geq n_1$, x_n no es un pico. Por tanto, $\exists n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} > x_{n_1}$. Iterando,

$$\exists n_1 < n_2 < \cdots < n_j < \cdots ,$$

tales que

$$x_{n_1} < x_{n_2} < \cdots < x_{n_j} < \cdots .$$

Por tanto, la subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ es creciente y, por tanto, monótona. □

> **Teorema 2.11** (Teorema de Bolzano-Weiestrass)**.** Dada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ acotada entonces $\exists \left\{x_{n_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ subsucesión convergente.

Demostración. Por el teorema de la sucesión monótona, sabemos que existe $\left\{x_{n_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ subsucesión es monótona. Además, como la sucesión está acotada, la subsucesión también lo está y, por tanto, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_{n_j}$. □

> **Teorema 2.12.** Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ sucesión acotada y $x \in \mathbb{R}$. Si para toda $\left\{x_{n_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ subsucesión que converge, lo hace a x, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Demostración. Sea $|x_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y supongamos que para esta sucesión no existe el límite (por lo que no es igual a x). Así, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\exists \left\{x_{n_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ con $\left|x_{n_j} - x\right| \geq \varepsilon, \forall j \in \mathbb{N}$. Por hipótesis esta subsucesión esta acotada. Aplicando el teorema de Bolzano-Weiestrass, $\exists \{y_l\}_{l\in\mathbb{N}} \subset \left\{x_{n_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ subsucesión convergente. Entonces tenemos que esta subsucesión converge a x. Sin embargo, tenemos que

$$|y_l - x| \geq \varepsilon,\ l \geq l_0.$$

Esto implica que y_l no converge a x. Esto es una contradicción, por lo que debe ser que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. □

Ejemplo 2.15. Considera

$$x_n = \begin{cases} n,\ n \text{ par} \\ 0,\ n \text{ impar} \end{cases} .$$

Satisface que toda subsucesión convergente tiene como límite 0 pero la sucesión no converge (observamos que no es una sucesión acotada).

Ejemplo 2.16. Estudiamos la convergencia de $x_n = n^{\frac{1}{n}}$. Vamos a ver que es decreciente (monótona). Tenemos que

$$x_{n+1} = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} < x_n = n^{\frac{1}{n}} \iff (n+1)^n < n^{n+1} = n \cdot n^n \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n.$$

Tenemos que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e \leq 3.$$

Entonces tenemos que si $n \geq 4$ (recordamos que no nos importan los primeros términos de la sucesión),

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n.$$

Por tanto, si $n \geq 4$ la sucesión es decreciente. Además, tenemos que está acotada inferioremnte por 1. Por tanto, la sucesión converge. Tenemos que

$$n^{\frac{1}{n}} \to l \geq 1.$$

Como esta sucesión converge, sabemos que todas las subsucesiones han de converger al mismo límite, por lo que basta con calcular la convergencia de una subsucesión. Vamos a ver que

$$x_{2n} = (2n)^{\frac{1}{2n}} \to 1.$$

Tenemos que

$$x_{2n} = (2n)^{\frac{1}{2n}} = 2^{\frac{1}{2n}} \cdot n^{\frac{1}{2n}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sabemos que $\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1$ y $\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}} \to \sqrt{l}$. Entonces tenemos que,

$$l = \sqrt{l} \iff l^2 = l \iff l \in \{0, 1\}.$$

Podemos descartar 0 porque $l \geq 1$, por tanto, $l = 1$.

2.3. Sucesiones Cauchy

Definición 2.7 (Sucesión de Cauchy)**.** Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de **Cauchy** si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \varepsilon$, con $n, m \geq n_0$.

Proposición 2.5. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

(i) Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

(ii) Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy entonces es una sucesión acotada.

Demostración. **(i)** Sabemos que $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Así, cogemos $m, n \geq n_0$.
Entonces,

$$|x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
$$|x_m - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |x_n - l + x_m - l| \\ &\leq |x_n - l| + |l - x_m| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(ii) Cogemos $\varepsilon = 1$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq n_0$, $|x_n - x_m| < 1$. Cogemos $m = n_0$ y $n \geq n_0$. Tenemos que

$$|x_n - x_{n_0}| < 1.$$

Entonces,

$$|x_n| = |x_n - x_{n_0} + x_{n_0}| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < 1 + |x_{n_0}|.$$

Si $n \geq n_0$, la sucesión está acotada por $1 + |x_{n_0}|$, nos queda por acotar los $n < n_0$.

$$|x_n| \leq \max\{\max\{|x_k| \ : \ 1 \leq k \leq n_0\}, 1 + |x_{n_0}|\}.$$

□

Observación. Vamos a concluir que ser de Cauchy es equivalente a converger. Esto se cumple en $\mathbb{R}$ pero no en $\mathbb{Q}$! Entonces, podemos pensar que este hecho está relacionado con el axioma de completitud.

Teorema 2.13 (Criterio de convergencia de Cauchy)**.** Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ converge si y solo si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Demostración. Basta probar que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es de Cauchy, entonces converge. Por el teorema de Bolzano-Weiestrass, como es una sucesión de Cauchy está acotada, por lo que existe $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a l. Sabemos que $\forall\varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_1$,

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Además, $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n_k \geq n_2$,

$$|x_{n_2} - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, si $n \geq n_0$, queremos ver que

$$|x_n - l| < \varepsilon.$$

Sea $n_k \geq n_0$ y $n \geq n_0$,

$$|x_n - l| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - l| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Ejemplo 2.17. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$,

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2},\ n \geq 3.$$

Tenemos que la distancia entre dos puntos sucesivos será:

$$|x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} + \cdots + x_{n+1} + x_n| \\ &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &= \frac{1}{2^{m-2}} + \frac{1}{2^{m-3}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{m-1}}}{1 - \frac{1}{2}} \to 0,\ \text{si } n, m \to \infty. \end{aligned}$$

Así, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. En efecto, $x_n \to \dfrac{5}{3}$.

2.4. Otros teoremas

Observación. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$,

- Recordamos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ si $\forall c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$ tal que $x_n > c$.
- Si $x_n \leq y_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$.
- Si $x_n \leq y_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Corolario 2.4. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tales que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = L \in (0, \infty)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, entonces, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$.

Demostración. Dado $\varepsilon = 1$, tenemos que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_1$

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - L \right| < 1.$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x_n, y_n > 0$. Entonces, tenemos que

$$-1 < \frac{x_n}{y_n} - L < 1 \iff -y_n < x_n - y_n L < y_n.$$

Así, $x_n < y_n (1 + L)$. Tenemos que $x_n \to \infty$, por lo que $y_n (1 + L) \to \infty$ por lo que $y_n \to \infty$. $\square$

Ejemplo 2.18.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n}{n^2+1} = 3.$$
Como $n^2+1 \to \infty$ tenemos que $3n^2+5n \to \infty$ y viceversa.

Teorema 2.14 (Criterio de Stolz)**.** Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tales que
$$b_1 < b_2 < \cdots < b_n < \cdots,$$
y supongamos que $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Si existe
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l,$$
entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$,
$$-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} - l < \frac{\varepsilon}{2}.$$
$$\iff \left(l-\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1}-b_n) < a_{n+1}-a_n < \left(l+\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1}-b_n), \ \forall n \geq n_0.$$
Así, para n_0,
$$\left(l-\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n_0+1}-b_{n_0}) < a_{n_0+1}-a_{n_0} < \left(l+\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n_0+1}-b_{n_0}).$$
$$\vdots$$
$$\left(l-\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n_0+m}-b_{n_0+m-1}) < a_{n_0+m}-a_{n_0+m-1} < \left(l+\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n_0+m}-b_{n_0+m-1}), \ m \in \mathbb{N}.$$
Si sumamos todas las desigualdades y usando la propiedad telescópica,
$$\left(l-\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n_0+m}-b_{n_0}) < a_{n_0+m}-a_{n_0} < \left(l+\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n_0+m}-b_{n_0}).$$
Dividimos todo por $b_{n_0+m} \neq 0$ ($b_{n_0+m} > 0$),
$$\left(l-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{b_{n_0}}{b_{n_0+m}}\right) < \frac{a_{n_0+m}}{b_{n_0+m}} - \frac{a_{n_0}}{b_{n_0+m}} < \left(l+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{b_{n_0}}{b_{n_0+m}}\right).$$
Así, tenemos que
$$l-\frac{\varepsilon}{2} = \lim_{m\to\infty} \inf \left(l-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{b_{n_0}}{b_{n_0+m}}\right) \leq \lim_{m\to\infty} \inf \frac{a_{n_0+m}}{b_{n_0+m}} - 0.$$
Además, tenemos que
$$\lim_{m\to\infty} \sup \frac{a_{n_0+m}}{b_{n_0+m}} - 0 \leq \lim_{m\to\infty} \sup \left(l+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{b_{n_0}}{b_{n_0+m}}\right) = l+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Así, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{a_{n_0+m}}{b_{n_0+m}} \leq \lim_{m\to\infty} \sup \frac{a_{n_0+m}}{b_{n_0+m}} \leq l + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo tanto, $\forall \varepsilon > 0$:

$$l - \frac{\varepsilon}{2} \leq \lim_{m\to\infty} \inf \frac{a_m}{b_m} \leq \lim_{m\to\infty} \sup \frac{a_m}{b_m} \leq l + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo que

$$l \leq \lim_{m\to\infty} \inf \frac{a_m}{b_m} \leq \lim_{m\to\infty} \sup \frac{a_m}{b_m} \leq l.$$

Por tanto tenemos que $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{a_m}{b_m} = l$. □

Observación. (i) En el criterio de Stolz, si $l = \pm\infty$, entonces $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{a_m}{b_m} = \pm\infty$.

Segundo criterio de Stolz. Si tenemos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tales que $a_n \to 0$ y $b_n \to 0$ y $b_n < b_{n+1}$ [2], entonces, si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$.

Observación. Propiedades de los límites superiores e inferiores:

(i) Si $x_n \leq y_n$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} \inf y_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sup y_n$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n = l \iff \lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

(iii) Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sup (x_n + y_n) = l + \lim_{n\to\infty} \sup y_n.$$

$$\lim_{n\to\infty} \inf (x_n + y_n) = l + \lim_{n\to\infty} \inf y_n.$$

Ejemplo 2.19. Sea $x_n = (-1)^n$ y $y_n = (-1)^n + 1$, tenemos que $x_n \leq y_n$. Además,

$$\lim_{n\to\infty} \inf x_n = -1 \leq \lim_{n\to\infty} \inf y_n = 0.$$

Similarmente,

$$\lim_{n\to\infty} \sup x_n = 1 \leq \lim_{n\to\infty} \sup y_n = 2.$$

Ejemplo 2.20. Sabemos que si $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$, entonces $a_n \to \infty$. Veamos a qué tiende [3]

$$n \geq 2, \ \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\log n}.$$

[2] Realmente solo importa que sea monotona, no importa que sea creciente o decreciente.
[3] A partir de ahora $\log = \ln$, no es en base 10.

Por el criterio de Stolz, basta estudiar el límite,

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{\log(n+1)-\log n}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{\frac{n+1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Tenemos que $\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \to \log e = 1$ y $\dfrac{n+1}{n}\to 1$, por lo que

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{\log(n+1)-\log(n)}\to 1.$$

Es decir, la serie armónica, en el infinito, se aproxima al logaritmo neperiano.

2.5. Series numéricas

Definición 2.8 (Suma parcial)**.** Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$. Sea llama **suma parcial n-ésima**

$$S_n = a_1+\cdots+a_n.$$

Definición 2.9. Dada la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, diremos que la **serie** $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge a S si $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Ejemplo 2.21. **(i)** $a_n = 2^{-n}$, $n\in\mathbb{N}$. Tenemos que

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}.$$

De esta manera,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}S_n=1.$$

(ii) $a_n=(-1)^n$. Tenemos que $S_1=-1$, $S_2=0$, entonces, no existe el límite de S_n. Por tanto, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ no converge.

(iii) $a_n=\dfrac{1}{n}$. Tenemos que

$$S_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

Tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$, por lo que la serie armónica es divergente.

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$. Tenemos que

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Entonces tenemos que,

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{2} \\
S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\
&\vdots \\
S_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

De esta manera, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} S_n = 1$.

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Teorema 2.15. Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ y la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demostración. Sea $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$. Como $S_n \to l$, entonces $S_{n-1} \to l$. Así, $S_n - S_{n-1} \to 0$. Entonces tenemos que $S_n - S_{n-1} = a_n \to 0$. □

Teorema 2.16. Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada superioremente.

Demostración. Como los $a_n \geq 0$, tenemos que $S_n \leq S_{n+1}$ (es monótona creciente). Así, $S_n \to l \iff S_n$ está acotada superiormente. □

Observación. Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = a + b.$$

Es decir, podemos extrapolar todas las propiedades de los límites a las series.

Teorema 2.17 (Criterio de comparación)**.** Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tales que $a_n \leq b_n$ para $n \geq k$. Si, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Demostración. Sea $n \geq k$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \underbrace{a_1 + \cdots + a_{k-1}}_{a\in\mathbb{R}} + \sum_{j=k}^{n} b_j \leq a + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}_{C} < \infty.$$

Entonces, tenemos que $S_n \leq C$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y, por el teorema anterior, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. □

Ejemplo 2.22. Vamos a demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Tenemos que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$n \leq n^2 \iff \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n^2+n}.$$

Entonces, sea $a_n = \frac{1}{n^2}$ y $b_n = \frac{2}{n^2+n}$. Entonces tenemos que $0 \leq a_n \leq b_n$. De un ejemplo anterior deducimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2 \cdot 1 = 2.$$

Entonces, por el teorema anterior tenemos que [4]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Ejemplo 2.23. Si $p \in \mathbb{R}$ y $a_n = \frac{1}{n^p}$:

- Si $p \leq 0$, tenemos que

$$a_n \to \begin{cases} \infty, \ p \neq 0 \\ 1, \ p = 0 \end{cases}.$$

  Así, como a_n no tiende a 0, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \infty$.

- Si $0 \leq p \leq 1$, tenemos que $n^p \leq n$. Por tanto,

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \infty.$$

[4] Si la sucesión es de términos positivos, entonces decir $\lim_{n\to\infty} a_n < \infty$ es lo equivalente a decir que converge. Si no son términos positivos no lo podemos afirmar. Considera $a_n = (-1)^n$.

- Si $p \geq 2$, tenemos que $n^p \geq n^2$, por lo que $\dfrac{1}{n^p} \leq \dfrac{1}{n^2}$. Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, por el criterio de comparación tenemos que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty.$$
- Si $1 < p < 2$, tenemos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty$ por el **criterio de la integral** (lo veremos en el segundo semestre).

Observación. Así, podemos concluir que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1.$$

Ejemplo 2.24. Demostramos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 2n + 1} < \infty$.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3+2n+1}} = 1.$$

Así pues,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 2n + 1} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty.$$
[5]

Teorema 2.18. Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l > 0$, entonces
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty.$$

Demostración. Sea $\varepsilon = \dfrac{l}{2} > 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$,
$$\left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| < \varepsilon \iff l - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon + l \iff \frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3l}{2}.$$

Entonces, si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, tenemos que
$$\frac{l}{2} b_n < a_n,$$

[5] El símbolo $\approx$ lo utilizamos para decir que cuando $n \to \infty$ se comportan prácticamente igual.

por lo que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también converge. Recíprocamente, si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ tenemos que $a_n < \frac{3l}{2} b_n$, por lo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. $\square$

Teorema 2.19 (Criterio de la raíz)**.** Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ y supongamos que existe $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a \geq 0$.

- Si $a < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $a > 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
- Si $a = 1$, entonces no sabemos.

Demostración. **(i)** Si $a < 1$, sea $a < r < 1$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $a - \varepsilon > 0$ y $a + \varepsilon < r$. Entonces, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$,

$$a - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < a + \varepsilon < r.$$

Entonces tenemos que si $n \geq n_0$,

$$(a-\varepsilon)^n < a_n < (a+\varepsilon)^n < r^n.$$

Por el criterio de comparación, como

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r} < \infty, \; 0 \leq r < 1,$$

es convergente, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también es convergente.

(ii) Análogamente, si $a > 1$, tomamos $1 < r < a$ y ε tal que $r < a - \varepsilon$. Así, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$,

$$|\sqrt[n]{a_n} - a| < \varepsilon \iff r < -\varepsilon + a < \sqrt[n]{a_n} < \varepsilon + a.$$

Es decir, si $n \geq n_0$,

$$r^n < a_n.$$

Como $r > 1$, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} \frac{r - r^{n+1}}{1-r} = \infty.$$

Por el criterio de comparación, como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n > \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \infty$, tenemos que la serie de a_n diverge.

$\square$

Ejemplo 2.25. Ejemplos del caso $a = 1$.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ y

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

(ii) Considera $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge y

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\right)^2 = 1.$$

Ejemplo 2.26. Ejercicio 76(f). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} 3^{-n}$. Llamamos a_n al término general. Entonces,

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n 3^{-1}.$$

Si $n \to \infty$, tenemos que

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e.$$

Como $0 < e < 3$, tenemos que $\dfrac{e}{3} < 1$. Por el criterio de la raíz, la serie converge.

Teorema 2.20 (Criterio del cociente)**.** Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que existe $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, entonces:

- Si $a < 1$, tenemos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $a > 1$, tenemos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
- Si $a = 1$, no sabemos.

Demostración. Una manera de demostrarlo es ver que este criterio implica el de la raíz. Otra manera de hacerlos es recurriendo a series geométricas.

(i) Si $a < 1$, tomamos $\varepsilon > 0$ tal que si $n \geq n_0$, y tomamos $a < r < 1$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < a + \varepsilon < r.$$

Entonces tenemos que si $n \geq n_0$,

$$a_{n+1} < r a_n < \cdots < r^{n+1-n_0} a_{n_0} = r^{n+1} \frac{a_{n_0}}{r^{n_0}}.$$

Entonces, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} < \frac{a_{n_0}}{r^{n_0}} \sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1}.$$

Como $r < 1$, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1} < \infty.$$

Por el criterio de comparación, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(ii) Si $a > 1$ es análogo.

$\square$

Ejemplo 2.27. Ejemplos de $a = 1$.

(i) Sea $a_n = \frac{1}{n}$. Tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

(ii) Sea $a_n = \frac{1}{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{(n+1)^2} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = 1.$$

(iii) Sea $k \in \mathbb{N}$ y sea $a_n = \frac{n^k}{2^n}$. Usamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^k}{2^{n+1}}}{\frac{n^k}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} \left(\frac{n+1}{n} \right)^k = \frac{1}{2} < 1.$$

Por el criterio del cociente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{2^n}$ converge.

Teorema 2.21 (Criterio de Leibniz)**.** Supongamos que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ decreciente, es decir, $a_{n+1} \leq a_n$ y tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Entonces, la serie alternada converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \text{converge.}$$

Ejemplo 2.28. Considera $a_n = \frac{1}{n}$. Entonces tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, mientras que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Definición 2.10. Se dice que una serie es **absolutamente convergente** si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

Observación. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ no es absolutamente convergente.

Teorema 2.22. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente (i.e. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$), entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Demostración. Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Queremos ver que $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente. Sea $S_n^* = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$. Sabemos que $\{S_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Entonces, tenemos que $|S_n| \leq S_n^*$. Sabemos que $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente si y solo si es de Cauchy. Sea $m > n$,

$$0 \leq |S_m - S_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_n| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| = S_m^* - S_n^*.$$

Si $m, n \to \infty$, tenemos que $S_m^* - S_n^* \to 0$. Entonces, $|S_m - S_n| \to 0$, por lo que es de Cauchy y, consecuentemente, converge. $\square$

Ejemplo 2.29. Estudiar la convergencia de las siguientes series.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$. Usamos el criterio del cociente.

$$\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{n+1}{(n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1.$$

Por tanto, la serie converge, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} < \infty$.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^2}$. Tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\theta|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Por el criterio de comparación, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\theta|}{n^2} < \infty$. Es decir, la serie inicial converge absolutamente por lo que converge.

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ con $x \in \mathbb{R}$. Tomamos la serie en valor absoluto para ver que converge absolutamente. Empleamos el criterio del cociente:

$$\frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \frac{|x|}{n+1} \to 0.$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} < \infty$, la serie inicial converge absolutamente, por lo que converge.

Observación.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Teorema 2.23 (Sumación por partes de Abel)**.** Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, sea $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ y sea $m > n$. Entonces,

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{m-1} A_k \left(b_k - b_{k+1}\right) + A_m b_m - A_n b_{n+1}.$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{m} \left(A_k - A_{k-1}\right) b_k = \sum_{k=n+1}^{m} A_k b_k - \sum_{k=n}^{m-1} A_k b_{k+1} \\ = A_m b_m - A_n b_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{m-1} A_k \left(b_k - b_{k+1}\right).\end{aligned}$$

□

Teorema 2.24 (Criterio de Dirichlet)**.** Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que si $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ entonces $|A_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y b_n decrece y converge a 0. Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad \text{converge.}$$

Demostración. Vamos a ver que es sucesión de Cauchy, es decir, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k \to 0$ si $m \geq n+1$, cuando $n, m \to \infty$. Utilizamos el teorema anterior:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m-1} A_k \left(b_k - b_{k+1}\right) + A_m b_m - A_n b_{n+1}\right|.$$

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$,

$$|b_n| < \frac{\varepsilon}{3M},$$

y $\forall m > n \geq n_0$ tal que

$$|b_m - b_n| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Seguimos con lo anterior:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{m-1} A_k\left(b_k - b_{k+1}\right) + A_m b_m - A_n b_{n+1}\right| \\
&\leq M \sum_{k=n+1}^{m-1} |b_k - b_{k+1}| + M\,|b_m| + M\,|b_{n+1}| \\
&\leq M \sum_{k=n+1}^{m-1} (b_k - b_{k+1}) + M\frac{\varepsilon}{3M} + M\frac{\varepsilon}{3M} = M\left(b_{n+1} - b_m\right) + \frac{2\varepsilon}{3} \\
&= M\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.25 (Criterio de Leibniz)**.** Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ decreciente que converge a 0, entonces la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

Demostración. Tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \begin{cases} -1, & n \text{ impar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}.$$

Entonces, las sumas parciales están acotadas superiormente por $M = 1$. Por el criterio de Dirichlet, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n,$$

converge [6] . □

Ejemplo 2.30. **(i)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

(iii) Demostrar que (usar inducción)

$$\left|\sum_{n=1}^{m} \cos nx\right| = \left|\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\right|.$$

[6] Este teorema es realmente un corolario del teorema anterior.

2.6. Exponentes reales.

Recordamos que si $x > 0$ y $n \in \mathbb{N}$:

$$x^{\frac{1}{n}} = \sup\{r \in \mathbb{Q} \,:\, r^n < x\}.$$

En general, si $n \in \mathbb{Z},\ n < 0$, definimos $x^0 = 1$ y

$$x^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{n}}.$$

Pasamos al caso $p = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$,

$$x^p = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m.$$

Queremos ver que pasa en el caso x^α con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lema 2.1. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x^r - 1| < \varepsilon,\ 0 < r < \frac{1}{n_0},\ r \in \mathbb{Q}.$$

Demostración. Sabemos que $x^{\frac{1}{n}} \to 1$ si $n \to \infty$. Así, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$,

$$\left|x^{\frac{1}{n}} - 1\right| < \varepsilon.$$

Sea $0 < r < \dfrac{1}{n_0},\ r \in \mathbb{Q}$. Si $x > 1$, tenemos que $0 < x^r - 1 < x^{\frac{1}{n_0}} - 1 < \varepsilon$. Si $0 < x < 1$, tenemos que $x^r > x^{\frac{1}{n_0}}$ por lo que $0 < 1 - x^r < 1 - x^{\frac{1}{n_0}} < \varepsilon$. El caso $x = 1$ es trivial. □

Corolario 2.5. Si $r_n \to 0$ y $r_n \in \mathbb{Q}^+$, con $x > 0$, entonces $x^{r_n} \to 1$ si $n \to \infty$.

Teorema 2.26. Si $x > 0$, y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

(i) Si $r_n \in \mathbb{Q}$ tales que $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \alpha$, entonces $\{x^{r_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(ii) Si $s_n \in \mathbb{Q}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \alpha$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x^{s_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x^{r_n}$.

Demostración. **(i)** Tenemos $r_n \in \mathbb{Q}$ con $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \alpha$. Sin pérdida de generalidad tomamos $\alpha > 0$. Vamos a demostrar que es de Cauchy. Como $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, entonces está acotada, por lo que existe K tal que $0 \leq r_n < K \in \mathbb{N}$ (descartamos los primeros términos negativos). Hacemos primero el caso $x > 1$ (el caso $x < 1$ es análogo). Supongamos que $r_m \geq r_n$.

$$|x^{r_m} - x^{r_n}| = \left|x^{r_n}\left(x^{r_m - r_n} - 1\right)\right| \leq x^K \left|x^{r_m - r_n} - 1\right| \to 0.$$

En el paso anterior hemos utilizado el lema y corolario anterior. Así, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} x^{r_n}$ converge.

(ii) Si $s_n \to \alpha$ y $r_n \to \alpha$, tenemos que $s_n - r_n \to 0$. Supongamos que $r_n \geq s_n$,

$$x^{r_n} - x^{s_n} = x^{s_n}\left(x^{r_n - s_n} - 1\right).$$

Entonces, tenemos que

$$|x^{r_n} - x^{s_n}| \leq x^K \left|x^{r_n - s_n} - 1\right| \to 0.$$

Como la diferencia converge a 0, tenemos que $\lim_{n\to\infty} x^{r_n} = \lim_{n\to\infty} x^{s_n}$. [7]

□

Definición 2.11. Dado $x > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se define $x^\alpha = \lim_{n\to\infty} x^{r_n}$ donde $r_n \in \mathbb{Q} \to \alpha$.

Proposición 2.6. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ con $x_n, y_n > 0$, con $x_n \to x > 0$ y $y_n \to y > 0$, entonces

$$x_n^{y_n} \to x^y.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\varepsilon' = \left[\left(\frac{\varepsilon}{x^y} + 1\right)^{\frac{1}{y}} - 1\right] \cdot x > 0$. Entonces, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $x_n < x + \varepsilon'$. Así, tenemos que

$$x_n^{y_n} < (x + \varepsilon')^{y_n}.$$

Entonces, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sup x_n^{y_n} \leq \lim_{n\to\infty} \sup (x + \varepsilon')^{y_n} = (x + \varepsilon')^y = x^y + \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0.$$

Así, tenemos que $\lim_{n\to\infty} \sup x_n^{y_n} \leq x^y$. Ahora, dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\varepsilon'' = x - (x^y - \varepsilon)^{\frac{1}{y}} > 0$. Así, obtenemos que para $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$, $x - \varepsilon'' < x_n$:

$$(x - \varepsilon'')^y = x^y - \varepsilon \leq \lim_{n\to\infty} \inf x_n^{y_n},\ \forall \varepsilon > 0.$$

Así, $x^y \leq \lim_{n\to\infty} \inf x_n^{y_n}$. □

[7] Esta afirmación solo la podemos hacer si las sucesiones convergen. Sino, no, considera $x_n = n$ y $y_n = n$.

Capítulo 3

Límites de funciones

Definición 3.1 (Punto de acumulación)**.** Sea $A \subset \mathbb{R}$. Se dice que c es un **punto de acumulación** de A si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$ con $x \neq c$ tal que $|x - c| < \varepsilon$.

Ejemplo 3.1. Sea $A = (0, 1)$ y sea $0 < c < 1$. Tenemos que c es un punto de acumulación de A. Similarmente, 0 y 1 también son puntos de acumulación de A.

Notación. $A' = \{c \in \mathbb{R} \ : \ c \text{ punto de acumulación de } A\}$. Así, si $A = (0, 1)$, entonces $A' = [0, 1]$.

Ejemplo 3.2. $A = \{0, 1\}$. Tenemos que $A' = \emptyset$.

Teorema 3.1. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Entonces, $c \in A'$ si y solo si $\exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ con $x_n \neq c$ tales que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = c$.

Demostración. **(i)** Supongamos que $A' \neq \emptyset$. Si $c \in A'$, tomamos $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, entonces $\exists x_n \in A$, $x_n \neq c$ tal que $|x_n - c| < \dfrac{1}{n}$. Así, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A - \{c\}$ y $|x_n - c| < \dfrac{1}{n} \to 0$, por lo que $x_n \to c$.

(ii) Recíprocamente, si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A - \{c\}$ tal que $x_n \to c$. Sea $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - c| < \varepsilon$. Así, $x_n \in A - \{c\}$ y $|x_n - c| < \varepsilon$. Por lo que $c \in A'$.

$\square$

Ejemplo 3.3. **(i)** Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $x_n \to c$ con $x_n \neq c$ y sea $A = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Entonces, $A' = \{c\}$. Por ejemplo, si $A = \left\{\dfrac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$, entonces $A' = \{0\}$.

(ii) Sea $A = \mathbb{Q}$, tenemos que $A' = \mathbb{R}$, pues $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. Análogamente, si $A = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$, tenemos que $A' = \mathbb{R}$.

Definición 3.2 (Límite)**.** Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $c \in A'$. Se dice que l es el límite de f cuando x se aproxima a c [a] :

$$\lim_{x \to c} f(x) = l,$$

si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tal que si $x \in A - \{c\}$ y $0 < |x - c| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.

[a] Por lo estudiado anteriormente, podemos calcular el límite sin que $c \in A$, es decir, sin que f esté definido en c.

Ejemplo 3.4. Sea $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x}$. Si $A = (0, 1]$, tenemos que $0 \in A' = [0, 1]$. Queremos ver que $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$. Sea $\varepsilon > 0$, quiero encontrar $\delta > 0$ tal que si $x \in (0, 1]$y $0 < x < \delta$, entonces $\left| \dfrac{x^2 + x}{x} - 1 \right| < \varepsilon$. Tenemos que

$$\left| \frac{x^2 + x}{x} - 1 \right| = |x + 1 - 1| = x < \varepsilon.$$

Cogemos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. También podemos tomar $\delta = \varepsilon$. Entonces si $0 < x < \delta$, tenemos que $|f(x) - 1| < \varepsilon$.

Ejemplo 3.5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$. Tenemos que $0 \in \mathbb{R}' = \mathbb{R}$. Vamos a ver que $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$. Vamos a ver que si $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - 0| < \delta$, entonces $\left| x^2 - 0 \right| < \varepsilon$.

$$\left| x^2 \right| < \varepsilon \iff x^2 < \varepsilon.$$

Podemos tomar $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, pues entonces

$$x < \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow x^2 < \left(\sqrt{\varepsilon} \right)^2 = \varepsilon.$$

Teorema 3.2 (Caracterización del límite por convergencia de sucesiones)**.** Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c \in A'$ y $l \in \mathbb{R}$. Entonces, son equivalentes los siguientes enunciados:

(i) $\lim_{x \to c} f(x) = l$.

(ii) $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A - \{c\}$, $x_n \to c$ si $n \to \infty$, entonces $f(x_n) \to l$.

Demostración. **(i)** $\Rightarrow$ **(ii)** Queremos ver que $\forall \varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $|f(x_n) - l| < \varepsilon$. Sabemos que dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $x \in A / \{c\}$ y $0 < |x - c| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$. Como $x_n \to c$, dado $\delta > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, $|x_n - c| < \delta$. Recordamos que $x_n \neq c$. Por tanto, $|f(x_n) - l| < \varepsilon$.

(ii) $\Rightarrow$ **(i)** Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A / \{c\}$ y $x_n \to c$, entonces $f(x_n) \to l$. Quiero ver que $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta$ con $x \in A / \{c\}$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$. Supongamos lo contrario. Es decir, $\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0, \exists 0 < |x - c| < \delta$ con $x \in A$ tal que $|f(x) - l| \geq \varepsilon$. Tomamos $\delta = \dfrac{1}{n}$, entonces existe x_n tal que $0 < |x_n - c| < \frac{1}{n}$, con $x_n \in A$ tal que $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$. Así, $x_n \to c$, $x_n \in A/\{c\}$ pero tenemos que $f(x_n)$ no tiende a l, que contradice nuestra hipótesis. Por tanto, $\lim_{x\to c} f(x) = l$. [1]

□

Ejemplo 3.6. Consideramos la función

$$f(x) = \operatorname{sig} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} .$$

Tenemos que $x_n = \frac{1}{n} \to 0$ y $f(x_n) = 1 \to 1$, pero si tomamos $y_n = -\frac{1}{n} \to 0$, pero $f(y_n) = -1 \to -1$. Entonces, como $-1 \neq 1$, tenemos que no existe $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Ejemplo 3.7. Vamos a ver que no existe el límite $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ si $x > 0$. Basta tomar $x_n = \frac{1}{n} \to 0$, pero $\frac{1}{x_n} = n$ diverge, por lo que no converge a un número real finito.

Definición 3.3. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in A'$. Diremos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ si $\forall C > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta$, $x \in A$, entonces $f(x) > C$.
Análogamente, diremos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ si $\forall C < 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$, $x \in A$, entonces, $f(x) < C$.

Ejemplo 3.8. Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \frac{1}{x}$. Entonces, $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$. En efecto, dada $C > 0$ tomamos $\delta < \frac{1}{C}$ y obtenemos que

$$0 < |x - 0| = x < \delta < \frac{1}{C} \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} > C.$$

Ejemplo 3.9. Sea $g : \mathbb{R}/\{0\} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = \frac{1}{x}$. El límite $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe.

Definición 3.4. Sea $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ y sea $l \in \mathbb{R}$. Se dice que $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists C > 0$ tal que si $x > C$ entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.
Análogamente, si $f : (-\infty, a) \to \mathbb{R}$ $\lim_{x\to -\infty} f(x) = l$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists C < 0$ tal que si $x < C$ entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.

[1] Cuando pasamos de sucesión a variable continua, lo solemos hacer por reducción al absurdo.

Ejemplo 3.10. Sea $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$, $x > 0$. Queremos ver que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$. Sea $\varepsilon > 0$,

$$\left|\frac{x+1}{x} - 1\right| = \left|\frac{x+1-x}{x}\right| = \frac{1}{x}.$$

Si $C = \dfrac{1}{\varepsilon}$, tenemos que si $x > C$,

$$x > \frac{1}{\varepsilon} \iff \frac{1}{x} < \varepsilon.$$

Definición 3.5. Sea $f : (a,\infty) \to \mathbb{R}$. Diremos que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ si $\forall C > 0$, $\exists D > 0$ tal que si $x > D$, con $x \in (a,\infty)$, entonces $f(x) > C$.
Análogamente, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ si $\forall C < 0$, $\exists D > 0$ tal que si $x > D$, con $x \in (a,\infty)$, entonces $f(x) < C$.
Análogamente, sea $f : (-\infty, a) \to \mathbb{R}$. Tenemos que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ si $\forall C > 0$, $\exists D < 0$ tal que si $x < D$, entonces $f(x) > C$. Finalmente, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si $\forall C < 0$, $\exists D < 0$ tal que si $x < D$ entonces $f(x) < C$.

Observación. Análogamente al criterio de existencia de límite por convergencia de sucesiones, se puede adaptar el mismo argumento en los restantes casos de límites. Por ejemplo, si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y sea $x_n \to \infty$ si $n \to \infty$. Entonces tenemos que $f(x_n) \to \infty$. Queremos ver que $\forall C > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $f(x_n) > C$. Sabemos que $\forall C > 0$, existe $D > 0$ tal que si $x > D$, con $x \in \operatorname{dom} f$, entonces $f(x) > C$. Como $x_n \to \infty$, para $D > 0$, tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $x_n > D$, por lo que $f(x_n) > C$.

Ejemplo 3.11. Sea $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x > 0$. Queremos ver si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Queremos ver que $\forall\varepsilon > 0$, $\exists C > 0$ tal que si $x > C$ entonces $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| < \varepsilon$. Tenemos que

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{|\sin x|}{x} \leq \frac{1}{x} < \varepsilon.$$

Para que esto sea cierto, cogemos $C = \dfrac{1}{\varepsilon}$, así, $x > C \Rightarrow \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{C} = \varepsilon$.

Definición 3.6 (Localmente acotada)**.** Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$. Se dice que f está **localmente acotada** en x_0 si $\exists\delta > 0$ y $\exists C > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$, con $x \in A$, entonces $|f(x)| < C$. [a]

[a] No es necesario que x_0 sea punto de acumulación.

Ejemplo 3.12. Tenemos que $f(x) = x^2$ está localmente acotada en todo $x_0 \in \mathbb{R}$. Basta tomar $\delta = 1$ y $f(x_0+\delta) = (x_0+\delta)^2$ y $f(x_0-\delta) = (x_0-\delta)^2$ y tomar $C = \max\{f(x_0+\delta), f(x_0-\delta)\}$. Tenemos que $|f(x)| = x^2 \leq C$, $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Teorema 3.3. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$, $l \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$. Entonces, f está localmente acotada en x_0.

Demostración. Dado $\varepsilon = 1$, tenemos que existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < 1$. Entonces, tenemos que

$$|f(x)| = |f(x) - l + l| \leq |f(x) - l| + |l| < 1 + |l|.$$

Cogemos $C = 1 + |l|$. □

Ejemplo 3.13. El recíproco no funciona. Cogemos, por ejemplo $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ con $x \neq 0$. Tenemos que está función está localmente acotada en 0 por 1, pero $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.

Teorema 3.4. Sean $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$, sea $l = \lim_{x \to x_0} f(x)$ y $m = \lim_{x \to x_0} g(x)$. Entonces,

(i) $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = l + m$.

(ii) $\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = l - m$.

(iii) $\forall a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0} (af(x)) = a \cdot l$.

(iv) $\lim_{x \to x_0} (f(x)\, g(x)) = l \cdot m$.

(v) Si $m \neq 0$, y $g(x) \neq 0$, $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$.

Demostración. **(i)** Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta$. Entonces

$$|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así,

$$|f(x) + g(x) - l - m| \leq |f(x) - l| + |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

si $0 < |x - x_0| < \delta,\ x \in A$.

(ii) La demostración es análoga a **(i)**.

(iii) Aplicamos el criterio del límite por sucesiones. Como $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, tenemos que si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A/\{x_0\}$ con $x_n \to x_0$, entonces $f(x_n) \to l$. Queremos ver que $(af)(x_n) \to al$. Tenemos que

$$(af)(x_n) = af(x_n).$$

Aplicando las propiedades de los límites de sucesiones, $a \to a$ y $f(x_n) \to l$. Por tanto, $(af)(x_n) \to al$.

(iv) Por el criterio de límite por sucesiones, sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A/\{x_0\}$, con $x_n \to x_0$. Queremos ver que $(f \cdot g)(x_n) \to l \cdot m$. Tenemos que

$$(f \cdot g)(x_n) = f(x_n)\, g(x_n).$$

Como f converge y $x_n \to x_0$, tenemos que $f(x_n) \to l$ y $g(x_n) \to m$. Aplicando las propiedades de los límites de sucesiones,

$$(f \cdot g)(x_n) = f(x_n)\, g(x_n) \to l \cdot m.$$

(v) Por el criterio del límite por sucesiones, sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A/\{x_0\}$ con $x_n \to x_0$. Vamos a ver que $\left(\frac{f}{g}\right)(x_n) \to \frac{l}{m}$. Tenemos que

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x_n) = \frac{f(x_n)}{g(x_n)}.$$

Tenemos que $f(x_n) \to l$ y $g(x_n) \to m$, por lo que $\left(\frac{f}{g}\right)(x_n) \to \frac{l}{m}$.

□

Ejemplo 3.14. Calculamos $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+5\right)$.

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2+5\right) = \lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} 5 = \left(\lim_{x\to 2} x\right)^2 + 5 = 2^2 + 5 = 9.$$

Teorema 3.5. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$ y supongamos que $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$. Si $a \le f(x) \le b$, entonces $a \le l \le b$.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$, con $x \in A$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$. Entonces, tenemos que

$$|f(x) - l| < \varepsilon \iff -\varepsilon < l - f(x) < \varepsilon \iff f(x) - \varepsilon < l < \varepsilon + f(x).$$

Así, tenemos que

$$a - \varepsilon < l < \varepsilon + b,\ \forall \varepsilon > 0.$$

Entonces, $a \le l \le b$ [2] . □

Teorema 3.6 (Regla del bocadillo)**.** Si $f, g, h : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$. Si $g(x) \le f(x) \le h(x)$ y $\exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = l$, entonces, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

[2]Esta demostración se puede hacer también utilizando la caracterización del límite por convergencia de sucesiones.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, buscamos un $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$. Por hipótesis, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ con $x \in A$,

$$|g(x) - l| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |h(x) - l| < \varepsilon.$$

Así, tenemos que

$$l - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < l + \varepsilon.$$

Así, tenemos que $|f(x) - l| < \varepsilon$. □

Ejemplo 3.15. Vamos a ver $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$. Geométricamente podemos ver que

$$\sin x \leq x \leq \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Como estamos viendo el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Entonces, podemos hacer

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

Como $1 \to 1$ y $\frac{1}{\cos x} \to 1$, tenemos que $\frac{x}{\sin x} \to 1$ por la regla del bocadillo.

Ejemplo 3.16. (i) Sea $A = (0,1) \cup (1, \infty)$ y $f : A \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x(x-1)^2}$. Tenemos que $A' = [0, \infty)$. Si $x = 0$, tenemos que $x_n = \frac{1}{n} \in A$ y $x_n \to 0$, por lo que $0 \in A'$. Hacemos lo mismo con el 1 y la sucesión $x_n = 1 + \frac{1}{n} \to 1$.Si $x < 0$, no existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tal que $x_n \to x$. Por lo que $x \notin A'$. Vamos a ver que $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$. Si $x > 0$,

$$\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 (x+1)}{x(x-1)^2} = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}.$$

Queremos ver que $\forall C > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $0 < |x - 0| < \delta$, $x \in A$, entonces $f(x) > C$.Tenemos que conseguir que

$$1 + \frac{1}{x} > C \iff \frac{1}{x} > C - 1.$$

Entonces, tomamos $\delta = \min\left\{\frac{1}{|C-1|}, 1\right\}$, así, si $0 < x < \delta$, entonces $1 + \frac{1}{x} = f(x) > C$. Ahora demostramos que $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$. Tenemos que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 1} 1 + \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1 + 1 = 2.$$

Ahora demostramos que $\lim_{x \to 2} f(x)$,

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{\lim_{x \to 2} \left(x^3 - x^2 - x + 1\right)}{\lim_{x \to 2} x(x-1)^2} = \frac{3}{2}.$$

Finalmente, demostramos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. Tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 1 + 0 = 1.$$

(ii) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, y $\exists \lim_{x\to 0} f(x) = l$. Vamos a demostrar que $l = 0$ y $\forall c \in \mathbb{R}$, $\exists \lim_{x\to c} f(x)$.
Tenemos que $0 = x + (-x)$, por lo que $f(0) = f(x) + f(-x)$. Tenemos que $\lim_{x\to 0} f(x) = l$. Ahora queremos ver que $\lim_{x\to 0} f(-x) = l$. Sabemos que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $0 < |x - 0| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$. Queremos ver que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $0 < |x - 0| < \delta$, entonces $|f(-x) - l| < \varepsilon$. Tenemos que si $0 < |x - 0| < \delta$, entonces $0 < |-x - 0| < \delta$. Por tanto, tenemos que $f(-x) \to l$ y $f(0) = f(x) + f(-x) = 2l$ [3] . Tenemos que

$$x = 0 + x \Rightarrow f(x+0) = f(x) + f(0) = f(x) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow l = 0.$$

Ahora vamos a ver que $\forall c \in \mathbb{R}$, $\exists \lim_{x\to c} f(x)$.

$$f(x) = f(x - c + c) = f(x - c) + f(c).$$

Vamos a ver que $\lim_{x\to c} f(x - c) = 0$. Sea $x - c = y$. Entonces, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $0 < |y| < \delta$, tenemos que $|f(y)| < \varepsilon$. Así,

$$f(x) = f(x - c + c) = f(x - c) + f(c) \to f(c).$$

Demostramos que f es lineal. Tenemos que

$$f(x) = f\left(\frac{x}{n} + \cdots + \frac{x}{n}\right) = nf\left(\frac{x}{n}\right).$$

Similarmente,

$$f(nx) = f(x + \cdots + x) = nf(x).$$

Así,

$$f\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q} f(x) \Rightarrow f(\lambda x) = \lambda x, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Este último paso se demuestra por continuidad y con sucesiones de racionales que tiendan a números reales (como la parte de exponentes reales). Ahora, podemos ver que f es lineal. Para que sea lineal, tenemos que $f(x) = cx$. Esto es fácil, pues tenemos que $f(1) = c$.

(iii) Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c \in A'$ y supongamos que $\exists \lim_{x\to c} f(x) = l > 0$. Entonces, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in (c - \delta, c + \delta) \cap A$, $f(x) > 0$.
Sabemos que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta$, $x \in A$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$. Tomamos $\varepsilon = \frac{l}{2}$, tal que $l - \varepsilon = \frac{l}{2} > 0$. Entonces $\exists \delta > 0$ tal que si $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap A$, con $x \neq c$, entonces:

$$|f(x) - l| < \varepsilon \iff -\frac{l}{2} < f(x) - l < \frac{l}{2} \Rightarrow 0 < \frac{l}{2} < f(x).$$

[3] Tenemos que $\lim_{x\to 0} f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) + \lim_{x\to 0} f(-x)$. Como $f(0)$ es una constante, tenemos que $\lim_{x\to 0} f(0) = f(0)$.

(iv) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vamos a ver si $\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$.
Sea $x \in \mathbb{R}$ y sea $\delta = 2|x - c| + 1 > 0$. Entonces

$$|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon \iff f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon.$$

(v) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. El enunciado $\forall \delta > 0,\ \exists \varepsilon > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \delta$ es equivalente a decir que $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

(vi) **(a)** $f(x) = \dfrac{1}{x},\ x > 0$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x},\ x \in \mathbb{R}/\{0\}$.

$$\nexists \lim_{x \to 0} f(x).$$

Definición 3.7 (Límites laterales)**.** Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y sea c un punto de acumulación de $A \cap (c, \infty)$. Sea $l \in \mathbb{R}$. Se dice que l es el **límite por la derecha** de f en c:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = l,$$

si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tal que si $0 < x - c < \delta$ con $x \in A$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.
Análogamente, si c es un punto de acumulación de $A \cap (-\infty, c)$. Decimos que

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = l,$$

si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tal que si $0 < c - x < \delta$, $x \in A$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Definición 3.8. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $c \in (A \cap (c, \infty))'$.

- $\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty$ si $\forall C > 0,\ \exists \delta > 0$ tal que si $0 < x - c < \delta$, con $x \in A$, entonces $f(x) > C$.
- $\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$ si $\forall C < 0,\ \exists \delta > 0$ tal que si $0 < x - c < \delta$ con $x \in A$, entonces $f(x) < C$.

Ahora consideramos $c \in (A \cap (-\infty, c))'$.

- $\lim_{x \to c^-} f(x) = \infty$ si $\forall C > 0,\ \exists \delta > 0$ tal que si $0 < c - x < \delta$ con $x \in A$, entonces $f(x) > C$.
- $\lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$ si $\forall C < 0,\ \exists \delta > 0$ tal que si $0 < c - x < \delta$ con $x \in A$, entonces $f(x) < C$.

Ejemplo 3.17. En el ejemplo anterior, tenemos que si $f(x) = \dfrac{1}{x}$ con $x \in \mathbb{R}/\{0\}$,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty.$$

Teorema 3.7. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $c \in (A \cap (c,\infty))' \cap (A \cap (-\infty, c))'$. Entonces $\lim_{x\to c} f(x) = l$ si y solo si

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = l.$$

Demostración. **(i)** Sabemos que $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta$ con $x \in A$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$. Vamos a ver que $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tal que si $0 < x - c < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$. Es trivial, pues basta tomar el mismo δ de la definición de límite. El análogo para el límite por la izquierda es también trivial.

(ii) Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\delta_1 > 0$ tal que si $0 < x - c < \delta_1$, $x \in A$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$. Similarmente, $\exists\delta_2 > 0$ tal que si $0 < c - x < \delta_2$, con $x \in A$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$. Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ y tengo que $0 < |x - c| < \delta$, con $x \in A$. Si $x > c$,

$$0 < x - c < \delta \leq \delta_1,\ x \in A \ \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Si $x < c$,

$$0 < c - x < \delta \leq \delta_2,\ x \in A \ \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

□

Ejemplo 3.18. Sea $f(x) = \operatorname{sig}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Tenemos que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \neq \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1.$$

Por tanto, no existe $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Ejemplo 3.19. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sea $f(x) = x + 1$ y

$$g(x) = \begin{cases} 2, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases} .$$

(a) Calcular $(g \circ f)(x)$ y $g\left(\lim_{x\to 1} f(x)\right)$.

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} .$$

Tenemos que

$$\lim_{x\to 1} (g \circ f)(x) = 2.$$

Ahora, tenemos que $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$, entonces

$$g\left(\lim_{x\to 1} f(x)\right) = g(2) = 2.$$

(b) Calcular $(f \circ g)(x)$ y $f\left(\lim\limits_{x \to 1} g(x)\right)$.

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 3, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

Tenemos que

$$\lim_{x \to 1} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to 1^+} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to 1^-} (f \circ g)(x) = 3.$$

Ahora, tenemos que $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$, entonces

$$f\left(\lim_{x \to 1} g(x)\right) = f(2) = 3.$$

Ejemplo 3.20. Consideremos el enunciado $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists n \geq n_0$ tal que $|x_n - l| < \varepsilon$. Vamos a ver si este enunciado es equivalente a que exista $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} \to l$.

(i) Sea $\varepsilon = 1$. Sea $n_0 = 1$, entonces $\exists n_1 \geq 1$ tal que $|x_{n_1} - l| < \varepsilon = 1$. Sea $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y $n_0 = n_1 + 1$. Entonces, $\exists n_2 \geq n_0 > n_1$ tal que $|x_{n_2} - l| < \frac{1}{2}$. Si tenemos $x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}$ estrictamente creciente, tal que $\left|x_{n_j} - l\right| < \frac{1}{j}$, $j = 1, \ldots, k$. Ahora, sea $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$ y $n_0 = n_k + 1$. Entonces, $\exists n_{k+1} \geq n_0 > n_k$ tal que $\left|x_{n_{k+1}} - l\right| < \frac{1}{k+1}$. Por tanto, construimos $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$|x_{n_k} - l| < \frac{1}{k}, \ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{k \to \infty} x_{n_k} = l.$$

(ii) Tenemos que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0' \in \mathbb{N}$ tal que si $n_k \geq n_0'$, $|x_{n_k} - l| < \varepsilon$. Dado $\varepsilon > 0$ y dado $n_0 \in \mathbb{N}$, tenemos que ver que $\exists n \geq n_0$ tal que $|x_n - l| < \varepsilon$. Sea $n_k \geq \max\{n_0, n_0'\}$, entonces

$$|x_{n_k} - l| < \varepsilon, \ n_k \geq n_0.$$

Ejemplo 3.21. Vamos a demostrar que $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. Sabemos que $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Dado $x \in \mathbb{R}$ con $x \geq 1$, entonces existen $n_x = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$ y $\alpha_x \in [0, \infty)$ tal que $x = n_x + \alpha_x$. Tenemos que $\lim\limits_{x \to \infty} n_x = \infty$. Entonces, tenemos que

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 + \frac{1}{n_x + \alpha_x}\right)^{n_x + \alpha_x} = \left(1 + \frac{1}{n_x + \alpha_x}\right)^{n_x} \left(1 + \frac{1}{n_x + \alpha_x}\right)^{\alpha_x}.$$

Vamos a ver que $\left(1 + \frac{1}{n_x + \alpha_x}\right)^{\alpha_x} \to 1$. Tenemos que

$$1 \leq \left(1 + \frac{1}{n_x + \alpha_x}\right)^{\alpha_x} \leq \underbrace{1 + \frac{1}{n_x + \alpha_x}}_{\to 1}.$$

Ahora vamos a ver que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n_x+\alpha_x}\right)^{n_x}=e$. Tenemos que

$$\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x}\leq\left(1+\frac{1}{n_x+\alpha_x}\right)^{n_x}\leq\underbrace{\left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x}}_{\to e}.$$

El término de la izquierda lo cogemos y lo multiplicamos y dividimos por $\left(1+\dfrac{1}{n_x+1}\right)\to 1$. Así,

$$\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x}=\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x+1}\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{-1}\to e.$$

Así, $\left(1+\dfrac{1}{n_x+\alpha_x}\right)^{n_x}\to e$, por lo que el límite original converge a e.

Ejemplo 3.22. Si $g(x)\to\infty$ cuando $x\to\infty$ y $f(x)\to l$ si $x\to\infty$, entonces $(f\circ g)(x)\to l$. Sabemos que $\forall C>0,\ \exists K>0$ tal que $\forall x>K,\ g(x)>C$. Similarmente, tenemos que $\forall\varepsilon>0,\ \exists K>0$ tal que si $x>K$ entonces $|f(x)-l|<\varepsilon$. Sea $\varepsilon>0$, existe $K>0$ tal que cumpla los requisitos de la convergencia de f. Ahora, puedo encontrar $K'>0$ tal que si $x>K'$, entonces $g(x)>K$. Así, $|f(g(x))-l|<\varepsilon$.

Corolario 3.1. Sea $g(x)\to\infty$ cuando $x\to\infty$. Tenemos que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{g(x)}\right)^{g(x)}=e$.

Teorema 3.8. Sea $A\subset\mathbb{R}$, $f,g:A\to\mathbb{R}$, $(a,\infty)\subset A$. Supongamos que $g(x)\neq 0$, $\forall x>a$ y existe $L\in\mathbb{R}$, $L\neq 0$ tal que $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$. Entonces

- Si $L>0$: si $x\to\infty$, $f(x)\to\infty\iff g(x)\to\infty$.
- Si $L<0$: si $x\to\infty$, $f(x)\to\pm\infty\iff g(x)\to\mp\infty$.

Demostración. Supongamos que $L>0$ y que $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$. Queremos ver que $\forall C>0,\ \exists K>0$ tal que si $x>K$ entonces $f(x)>C$. Sabemos que $\forall C'>0,\ \exists K'>0$ tal que si $x>K'$ entonces $f(x)>C'$. Similarmente, $\forall\varepsilon>0,\ \exists K''>0$ tal que si $x>K''$ entonces $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-l\right|<\varepsilon$. Entonces, cogemos $\varepsilon=\dfrac{L}{2}$,

$$\frac{L}{2}g(x)<f(x)<\frac{3}{2}Lg(x).$$

Sea $C'=\dfrac{3CL}{2}>0$, entonces existe $K'>0$ tal que si $x>K$, entonces $f(x)>C$. Sea $K=\max\{K',K''\}$, entonces si $x>K$

$$g(x)>\frac{2C'}{3L}=C.$$

□

Ejemplo 3.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x^2+x+1\right)$. Tenemos que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x+1}{x^2}=3>0.$$

Como $x^2\to\infty$, tenemos que $3x^2+x+1\to\infty$.

Ejemplo 3.24. Demostrar que existe $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ tal que $\exists\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ y no existe $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$. Consideremso

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x},\ x\in(-1,0)\\ 0,\ x\in[0,1)\end{cases}.$$

Tenemos que el límite por la izquierda no existe pues podemos coger dos subsucesiones convergentes a 0 cuyas imágenes converjan a cosas distintas. Por ejemplo,

$$x_n=\frac{-1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\to 0 \quad \text{y} \quad f(x_n)=1\to 1.$$

$$y_n=\frac{-1}{\frac{3\pi}{2}+2n\pi}\to 0 \quad \text{y} \quad f(y_n)=-1\to -1.$$

Ejemplo 3.25. Sea $x_n>0$ con $x_n\to 0$. Esta sucesión no tiene por qué ser decreciente pues puede dar saltitos. Considera la sucesión

$$x_n=\frac{1}{2},\frac{2}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\ldots.$$

Proposición 3.1. Tenemos que $x_n\to l$ si y solo si la subsucesión de los pares y la de los impares convergen al mismo límite.

Demostración. **(i)** La primera implicación es trivial, pues si $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$ cualquier subsucesión converge al mismo límite.

(ii) Sea $\varepsilon>0$, entonces existe $n_1\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq n_1$, $|x_{2n}-l|<\varepsilon$. Similarmente, existe $n_2\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq n_2$, $|x_{2n-1}-l|<\varepsilon$. Sea $n_0=\max\{n_1,n_2\}$. Si $n\geq n_0$,

$$|x_{2n}-l|<\varepsilon$$
$$|x_{2n-1}-l|<\varepsilon.$$

Entonces, $x_n\to l$.

$\square$

Observación. Este criterio se puede extender a cualquier partición de $\mathbb{N}$.

Ejemplo 3.26. Calcular $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{j}{2^j}$. Aplicando el criterio del cociente

$$\frac{j+1}{2^{n+1}}\frac{2^n}{j}\to\frac{1}{2}<1.$$

Por lo que converge. Tenemos que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{j}{2^j} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{j} 1 \right) \frac{1}{2^j} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{2^j} \right) = \sum_{k=1}^{n} 2 \left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} - 2 \frac{n}{2^{n+1}} \to 2.$$

Capítulo 4

Funciones continuas

Definición 4.1 (Continuidad)**.** Dada $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y $c \in \mathrm{dom}(f)$, se dice que f es **continua** en c si se verifican los siguientes enunciados equivalentes:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $0 \leq |x - c| < \delta$, entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.
- $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ con $x_n \to c$ se tiene que $f(x_n) \to f(c)$.

[1]

Observación. Si $c \in \mathrm{dom}(f)$ es un punto de acumulación, la definición de continuidad es equivalente a que

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Si $c \in \mathrm{dom}(f)$ no fuera un punto de acumulación, entonces resulta trivial que f es continua en c.

Observación. Vamos a asumir que si $a \in \mathrm{dom}(f)$ y f es continua en a, existe $r > 0$ tal que $(a - r, a + r) \subset \mathrm{dom}(f)$.

La continuidad es una propiedad local de las funciones, es decir, se debe comprobar punto a punto.

Definición 4.2. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $B \subset A$. Se dice que f es continua en B si es continua en todos los puntos de B.

Ejemplo 4.1.

- La función constante $f(x) = a$ es continua en todo $\mathbb{R}$. Pues, cogemos $\forall x, y \in \mathbb{R}$, se tiene que $|f(x) - f(y)| = |a - a| = 0 < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$.
- La función identidad $f(x) = x$ también es continua en todo $\mathbb{R}$. En efecto, si tomamos $\delta = \varepsilon$, tenemos que si $|x - c| < \delta$, $|f(x) - f(c)| = |x - c| < \varepsilon$.

[1] La equivalencia de estas definiciones fue demostrada en el capítulo anterior.

Proposición 4.1. Sea $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $a \in \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g)$, siendo f y g continuas en a. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) $f + g$ es continua en a.

(ii) λf es continua en a.

(iii) $f \cdot g$ es continua en a.

(iv) Si $g(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ es continua en a.

Demostración. **(i)** Tenemos que $\lim_{x\to a} (f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f(a) + g(a) = (f+g)(a)$.

(ii)-(iv) El resto de demostraciones son análogas.

□

Ejemplo 4.2.

- Por estas reglas podemos deducir que las funciones polinómicas, es decir, funciones de la forma $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, son continuas en todo $\mathbb{R}$.
- Las funciones racionales, es decir, de la forma

$$h(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m},$$

son continuas en los puntos donde $Q(x) \neq 0$.

Teorema 4.1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{dom}(g)$ y tal que f es continua en a y g es continua en $f(a) \in \operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{dom}(g)$. Entonces, tenemos que $g \circ f$ es continua en a. [a].

[a] El límite de una composición de funciones no tiene por qué ser las composiciones de los límites

Demostración. Dado que g es continua, sea $\varepsilon > 0$ y $\delta_1 > 0$ tal que si $|y - f(a)| < \delta_1$ tenemos que $|g(y) - g(f(a))| < \varepsilon$. Como f es continua en a tenemos que $\exists \delta_2 > 2$ tal que si $|x - a| < \delta_2$, entonces $|f(x) - f(a)| < \delta_1$. □

Teorema 4.2. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua e inyectiva en (a, b). Si $x_0 \in (a, b)$, entonces $f^{-1} : \operatorname{Im}(f) \to \mathbb{R}$ es continua en $f(x_0)$.

Demostración. Se verá el miércoles. □

Ejemplo 4.3. Consideremos $f(x) = x^2$ con $x > 0$. Tenemos que $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ con $x > 0$. Así, concluimos que $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ es continua en todo $x > 0$.

Ejemplo 4.4. Consideremos $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Tenemos que f es continua en su dominio pues es composición de dos funciones continuas.

Ejemplo 4.5. Otras funciones continuas son $\sin x, \cos x, \tan x, e^x$ y $\ln x$.

4.1. Discontinuidad de funciones

Definición 4.3. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

(a) Se dice que f tiene una **discontinuidad evitable** en a si $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ y $l \neq f(a)$.

(b) Se dice que f tiene una **discontinuidad de salto** en a si $\exists \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ y $\exists \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ pero no coinciden.

(c) Se dice que f tiene una **discontinuidad esencial** en a si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ o no existe, o $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ o no existe.

Ejemplo 4.6. Consideremos la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$. Tenemos que $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}/\{-1,1\}$. Al ser racional, tenemos que f es continua en $\operatorname{dom}(f)$. A continuación, estudiamos los límites y las discontinuidades.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{2}.$$

Como existe el límite pero la función no está definida en $x=1$, tenemos que la función presenta una discontinuidad evitable en $x=1$. Estudiamos el límite en $x=-1$:

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty, \quad \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x+1} = \infty.$$

Por tanto, en $x=-1$ tenemos una discontinuidad esencial. Podemos estudiar también los límites en el infinito:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x+1} = 0.$$

Definición 4.4 (Asíntotas)**.** Sea $f: A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

(a) Se dice que f tiene una **asíntota vertical** en $a\in\mathbb{R}$ si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ o $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$.

(b) Se dice que f tiene una **asíntota horizontal** en si $\exists \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l\in\mathbb{R}$ o $\exists \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = m\in\mathbb{R}$.

(c) Se dice que $y = ax+b$ es una **asíntota oblicua** de f si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - (ax+b) = 0$ o bien si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (ax+b) = 0$.

Observación. En el ejemplo anterior, tenemos que f tiene una asíntota vertical en $x=-1$ y que $y=0$ es una asíntota horizontal.

Observación. La definición **(c)** es equivalente a que $\exists \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$ y $\exists \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = b$. En efecto, tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{f(x)}{x} - a\right).$$

Debe darse, necesariamente que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - a = 0$. Así, tenemos que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$. Además, está claro que $\lim_{x\to\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0 \iff \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = b$.

4.2. Funciones continuas en intervalos

Teorema 4.3 (Teorema de Bolzano)**.** Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en el intervalo $[a,b]$ [a]. Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

[a] Es continua en $[a,b]$ si $\forall c \in (a,b)$, $\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

Demostración. **Ejercicio para casa:** Demostrar el caso $f(a) > 0 > f(b)$. **Puede entrar en el examen.**
Sin pérdida de generalidad, asumimos que $f(a) < 0 < f(b)$. Definimos el conjunto

$$A = \{r \in [a,b] \ : \ \forall x \in [a,r], f(x) < 0\} \neq \emptyset.$$

Tenemos que $A \neq \emptyset$ puesto que $a \in A$. Tenemos que $b \notin A$, pues $f(b) > 0$ y $r \leq b$, $\forall r \in A$. Por el axioma de completitud, tenemos que $\exists c = \sup(A)$. Podemos observar que $a \leq c \leq b$. Vamos a ver que $f(c) = 0$.

- Si $f(c) < 0$, tenemos que existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, tal que $f(c) + \varepsilon < 0$. Dado que f es continua en $[a,b]$, $\exists \delta > 0$ tal que si $|x - c| < \delta$, $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. De aquí se deduce que
$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon \iff f(x) < f(c) + \varepsilon < 0.$$
Así, $\exists r = c + \frac{\delta}{2}$ tal que si $x \in \left[a, c + \frac{\delta}{2}\right]$, entonces $f(x) < 0$. Es decir, $r \in A$, pero $r > c$, por lo que hemos obtenido una contradicción.

- Si $f(c) > 0$, tenemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(c) - \varepsilon > 0$. Dado que f es continua en $[a,b]$, tenemos que $\exists \delta > 0$ tal que si $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. De aquí se deduce que
$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon \iff f(x) > f(c) - \varepsilon > 0.$$
Ya hemos obtenido la contradicción, pues se supone que, dado que $c = \sup(A)$, $\forall \delta > 0$, $\exists a \in A$ tal que $c - \varepsilon < a$. Si embargo, hemos obtenido que para el δ anterior, si $x \in (c - \delta, c + \delta)$, entonces $f(x) > 0$, por lo que $x \notin A$.

Por tanto, debe ser que $f(c) = 0$. $\square$

Demostración. Asumimos que $f(a) < 0 < f(b)$. Sea $a_0 = a$ y $b_0 = b$. Ahora, consideremos el punto medio $r = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$. Tenemos dos posibilidades.

- Si $f(r) \geq 0$, tomamos $a_1 = a_0$ y $b_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$.
- Si $f(r) < 0$, tomamos $a_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$ y $b_1 = b_0$.

Así, en cualquier caso obtenemos que $a_1 < b_1$, $f(a_1) < 0 \leq f(b_1)$ y que $b_1 - a_1 = \dfrac{b_0 - a_0}{2}$. Repetimos el proceso tomando $r = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$. Si seguimos repitiendo el proceso obtenemos dos sucesiones: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$a_n < b_n, \quad f(a_n) < 0 \leq f(b_n), \quad b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \cdots = \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

Por construcción, tenemos que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, por lo que existe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$. Similarmente, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, por lo que existe $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$. Además, como $a_n < b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\alpha \leq \beta$ y

$$\beta - \alpha \leq b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \to 0.$$

Así, $\alpha = \beta = c \in (a, b)$. Dado que f es continua en $[a, b]$, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) \leq 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(c) \geq 0$, por lo que $f(c) = 0$. ☐

Ejemplo 4.7. Consideremos la ecuación

$$\frac{x^{15} + 7x^2 - 12 - x^2 \ln x}{\ln x} = 0 \Rightarrow x^{15} + 7x^2 - 12 - x^2 \ln x = 0.$$

Tenemos que $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x = 0$. Además, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Es continua en el resto de los puntos. Por el teorema de Bolzano, la ecuación tiene al menos una solución.

Corolario 4.1 (Teorema de la conexión)**.** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y sea $f(a) < \lambda < f(b)$ (o $f(a) > \lambda > f(b)$)entonces, $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = \lambda$.

Demostración. Sea $f(a) < \lambda < f(b)$ (el otro caso se deja como **ejercicio**) y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) - \lambda$. Tenemos que $g(a) = f(a) - \lambda < 0$ y $g(b) = f(b) - \lambda > 0$. Aplicando el teorema de Bolzano, tenemos que $\exists c \in (a, b)$ tal que $g(c) = f(c) - \lambda = 0$, esto es, $f(c) = \lambda$. ☐

Ejemplo 4.8. Consideremos la función

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \begin{cases} > 0, \ x > -1, x \neq 1 \\ < 0, \ x < -1 \end{cases}.$$

Observación. El teorema de la conexión, nos dice que cuando pintamos una función continua no va a haber saltos.

4.3. Propiedades de las funciones continuas

Definición 4.5. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Se dice que f se dice **acotada** en A si $\exists M > 0$ tal que $|f(x)| < M$, $\forall x \in A$.

(b) Se dice que $x_0 \in A$ es un **máximo** de f si $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in A$.

(c) Se dice que $x_0 \in A$ es un **mínimo** de f si $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in A$.

Ejemplo 4.9. Consideremos la función $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Tenemos que $\operatorname{dom}(f) = (0, \infty)$ y f es continua en su dominio. Tenemos que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$. Además, se ve que f es decreciente. Esta función no está acotada superiormente, por lo que no tiene máximo. A pesar de estar acotada inferiormente, no tiene mínimo.

Teorema 4.4. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$.

(a) f está acotada.

(b) f tiene al menos un máximo.

(c) f tiene al menos un mínimo.

Demostración. **(a)** Supongamos que f no está acotada superiormente. Tenemos que $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists a_n \in [a, b]$ tal que $f(a_n) > N$. Cogemos la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [a, b]$. Entonces, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, existe $\left\{a_{n_j}\right\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a $l \in [a, b]$. Dado que f es continua en el intervalo $[a, b]$, tenemos que $\lim\limits_{n \to \infty} f\left(a_{n_j}\right) = f(l)$ pero a la vez $\lim\limits_{n \to \infty} f\left(a_{n_j}\right) = \infty$.

(b) Se hace de forma análoga a **(c)**.

(c) Por **(a)**, f está acotada. Consideramos el conjunto $A = \{f(x) : x \in [a, b]\} \neq \emptyset$, que está acotado por $M > 0$. Entonces, existe $\beta = \inf(A)$. Si $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\beta + \dfrac{1}{n}$ no es ínfimo, por lo que existe $a_n \in [a, b]$ tal que $\beta \leq f(a_n) < \beta + \dfrac{1}{n}$. Así, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, $\exists \left\{a_{n_j}\right\}_{j \in \mathbb{N}} \to \alpha \in [a, b]$ y, por continuidad,

$$\beta \leq f\left(a_{n_j}\right) < \beta + \frac{1}{n_j} \Rightarrow \beta \leq f(\alpha) \leq \beta \Rightarrow f(\alpha) = \beta.$$

Así, α es el mínimo que buscábamos.

□

Definición 4.6 (Monotonía)**.** **(a)** Se dice que f es **monótona creciente** si $\forall x < y$, $f(x) \leq f(y)$. Se dice que es **estrictamente creciente** si $f(x) < f(y)$.

(b) Se dice que f es **monótona decreciente** si $\forall x < y$, $f(x) \geq f(y)$. Se dice que es **estrictamente decreciente** si $f(x) > f(y)$.

Observación. Si f es estrictamente monótona, entonces es inyectiva. En efecto, si $x \neq y$,

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \text{ o } f(x) > f(y)$$
$$x > y \Rightarrow f(x) > f(y) \text{ o } f(x) < f(y)$$

Lema 4.1. Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es continua e inyectiva, entonces es monótona.

Demostración. Supongamos que no es monótona. Entonces, para $x_1 < x_2 < x_3$ debe ocurrir una de las siguientes opciones:

- $f(x_1) < f(x_2)$ y $f(x_3) < f(x_1)$.
- $f(x_1) > f(x_2)$ y $f(x_3) > f(x_2)$.

En cualquier caso, si $\lambda \in (\text{mín}\{f(x_1), f(x_2), f(x_3)\}, \text{máx}\{f(x_1), f(x_2), f(x_3)\})$, por el teorema de la conexión, existe más de un punto $x \in (x_1, x_2)$ tal que $f(x) = \lambda$. □

Teorema 4.5 (Teorema de la función inversa)**.** Sea una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ definida sobre todo un intervalo, inyectiva y continua en (a, b). Su función inversa f^{-1} es continua en todo su dominio.

Demostración. Sea $c \in (a, b)$ y consideremos $f(c) \in \text{dom}\left(f^{-1}\right)$. Sea $\varepsilon > 0$. Podemos encontrar $r > 0$ tal que

$$c - \varepsilon < c - r < c < c + r < c + \varepsilon \text{ y } (c - r, c + r) \subset (a, b).$$

Entonces, de la continuidad de f y por ser inyectiva tenemos que

$$f(c - r) < f(c) < f(c + r) \text{ o } f(c - r) > f(c) > f(c + r).$$

Consideremos el primer caso (el otro caso se demuestra de forma análoga). Cogemos

$$\delta = \text{mín}\{f(c) - f(c - r), f(c + r) - f(c)\} > 0.$$

Entonces, tenemos que si $|y - f(c)| < \delta$, existe $x \in (c - r, c + r)$ tal que $f(x) = y$. Luego, por ser f^{-1} inyectiva, si $|y - f(c)| < \delta$, tenemos que

$$\left|f^{-1}(y) - f^{-1}(f(c))\right| = |x - c| < r < \varepsilon.$$

□

4.4. Continuidad Uniforme

Definición 4.7 (Continuidad uniforme)**.** Sea una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que f es **uniformemente continua** en el conjunto A si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $x, y \in A$ y $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Observación.

- La continuidad uniforme se define sobre todo un conjunto, no es una propiedad local como la continuidad.
- Si f es uniformememente continua en I (intervalo o semirrecta), entonces f es continua en cada punto de I.

Ejemplo 4.10. Consideremos la función $f = \dfrac{1}{x}$, $x \in (0,1)$. Tenemos que f es continua en cada punto de $(0,1)$, pero no es uniformemente continua en el intervalo. En efecto, sea $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ y sea $\delta > 0$. Sea $x_n = \dfrac{1}{n}$ y sean $n, m \in \mathbb{N}$ suficientemente grandes y distintas. Entonces, tenemos que

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| < \delta.$$

Sin embargo, $\left| f\left(\dfrac{1}{n}\right) - f\left(\dfrac{1}{m}\right) \right| = |n - m| \geq 1 > \varepsilon = \dfrac{1}{2}$.

Ejemplo 4.11. Consideremos la función $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$. Sea $\delta > 0$. Tenemos que

$$|f(x) - f(x + \delta)| = \left| x^2 - \left(x^2 + 2\delta x + \delta^2 \right) \right| \geq 2x\delta \to \infty.$$

Así, x^2 no puede ser uniformemente continua en el intervalo $(1, \infty)$.

Resulta útil formular una condición equivalente para decir que f no es uniformemente continua en A.

Proposición 4.2 (Criterios de continuidad no uniforme)**.** Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces son equivalentes:

(i) f no es uniformemente continua en A.

(ii) Existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0$, existen $x, y \in A$ tales que si $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

(iii) Existe $\varepsilon > 0$ y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tales que $x_n - y_n \to 0$ pero $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 4.12. Vamos a demostrar que $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ no es uniformemente continua en el intervalo $(0, \infty)$. En efecto, podemos considerar las sucesiones $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ y $y_n = \dfrac{1}{\pi n}$, tales que $x_n - y_n \to 0$ pero

$$f(x_n) - f(y_n) = 1 - 0 = 1 \geq 1.$$

Teorema 4.6. Sea una función $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua en el intervalo $[a,b]$. Entonces, f es uniformemente continua sobre $[a,b]$.

Demostración. Supongamos que f no es uniformemente continua. Entonces, podemos encontrar un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\frac{1}{n}$ existen $x_n, y_n \in [a,b]$ tales que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Por el teorema de Bolzano-Weierstrass podemos encontrar dos subsucesiones (primero una y de ésta sacamos la segunda) de modo que $x_{n_k} \to x$ e $y_{n_k} \to y$. Así, esta claro que $x_{n_k} \to x$ y que $x, y \in [a,b]$. También tenemos que $x = y$, pues

$$0 \leq |x-y| \leq |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - y_{n_k}| + |y_{n_k} - y| \leq |x - x_{n_k}| + \frac{1}{n_k} + |y_{n_k} - y| \to 0.$$

Ahora, de la continuidad de f se tiene que $f(x_{n_k}) \to f(x)$ y $f(y_{n_k}) \to f(y) = f(x)$. Esto da una contradicción, pues también tenemos que, $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$. Esto es una contradicción. □

Definición 4.8 (Función de Lipschitz)**.** Se dice que una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una **función de Lipschitz** si existe $K > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < K\,|x-y|\,,\ \forall x, y \in A.$$

Observación. La condición de Lipschitz se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x-y}\right| < K,\ x, y \in A,\ x \neq y.$$

Es decir, una función es de Lipschitz si y solo si las pendientes de todos los segmentos de recta que unen dos puntos de la gráfica de $y = f(x)$ están acotadas por algún número K.

Teorema 4.7. Si $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de Lipschitz, entonces es uniformemente continua en A.

Demostración. Dado que f satisface la condición de Lipschitz, tenemos que existe $K > 0$ tal que $\forall x, y \in A$

$$|f(x) - f(y)| < K\,|x-y|\,.$$

Sea $\varepsilon > 0$, cogemos $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$, así si $|x-y| < \delta$ tenemos que

$$|f(x) - f(y)| < K\,|x-y| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

□

Ejemplo 4.13.

- Consideremos la función $f(x) = x^2$ definida en el intervalo $A = [0, b]$. Entonces f es de Lipschizt, en efecto
$$|f(x) - f(y)| = |x + y|\,|x - y| < 2b\,|x - y|\,.$$
Por tanto, es uniformemente continua en A (también podríamos haber llegado a esta conclusión con el teorema 4.6).

- No todas las funciones uniformemente continuas son de Lipschitz. En efecto, consideremos $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $I = [0, 2]$. Dado que f es continua en $\mathbb{R}$, se tiene que es uniformemente continua en I, sin embargo, no es de Lipschitz.

- En algunos casos es útil combinar el teorema de la continuidad uniforme y las funciones Lipschitz para demostrar la continuidad uniforme de una función en un conjunto. Por ejemplo, consideremos $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Tenemos que f es uniformemente continua en el intervalo $I = [0, 2)$ (por el ejemplo anterior). Además, en $J = [1, \infty)$ tenemos que es de Lispchitz:
$$|f(x) - f(y)| = \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}\,|x - y|\,.$$
Dado que f es uniformemente continua en I y J, tomando $\delta = \text{mín}\,\{1, \delta_I(\varepsilon), \delta_J(\varepsilon)\}$, tenemos que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}^+$. [2]

Teorema 4.8. Si $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua en A y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ es de Cauchy, entonces $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ de Cauchy y sea $\varepsilon > 0$. Tenemos que dado que f es uniformemente continua, $\exists\delta > 0$ tal que $|x - y| < \delta$ implica que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Así, como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\forall n, m \geq n_0$ se tiene que $|x_n - x_m| < \delta$. Así, se tiene que $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. ☐

Teorema 4.9 (Teorema de la extensión continua)**.** Una función f es uniformemente continua en el intervalo (a, b) si y solo si se puede definir en los puntos terminales a y b de tal modo que la función extendida es continua en $[a, b]$.

Demostración. ($\Leftarrow$) Si podemos definir
$$F(x) = \begin{cases} \text{lím}_{x\to a^+} f(x)\,, \ x = a \\ f(x)\,, \ x \in (a, b) \\ \text{lím}_{x\to b^-} f(x)\,, \ x = b \end{cases},$$
con F continua, tenemos que F es uniformemente continua en $[a, b]$ y por tanto lo es en (a, b). Dado que $f = F|_{(a,b)}$, está claro que f es uniformemente continua en (a, b).

[2] A la hora de demostrar que una función es uniformemente continua en un intervalo, si se va a hacer el procedimiento anterior, es útil no utilizar intervalos disjuntos, sino intentar crear solapamientos.

($\Rightarrow$) Supongamos que f es uniformemente continua en (a,b). Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (a,b)$ con $x_n \to a$, tenemos que es de Cauchy. Por ser f uniformemente continua, $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ también es de Cauchy, por lo que converge a un valor $l \in \mathbb{R}$. Si $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $y_n \to a$, tenemos que, por la continuidad uniforme de f,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} (y_n - x_n) + \lim_{n\to\infty} x_n = 0 + l = l.$$

Así, por la caracterización del límite por sucesiones, se tiene que existe $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y se puede definir $F(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)$ como se hizo en el apartado anterior. El argumento para b es análogo.

□

4.5. Funciones monótonas

Teorema 4.10. Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo o semirrecta y f es monótona en I y está acotada. Entonces, para cada $x_0 \in I$ existen $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ y $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$.

Demostración. Supongamos que f es creciente (el caso decreciente se hace de forma análoga). Salvo en los extremos del intervalo, donde existen únicamente los límites laterales y donde se usa la acotación de f. Sea $x_0 \in I$ tal que existe $\delta > 0$ con $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$ [3] . Sea $A = \{f(x) \,:\, x \in (x_0 - \delta, x_0)\}$. Dado que f es monótona creciente, tenemos que

$$f(x) \leq f(x_0 + \delta)\,, \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)\,.$$

Sea $B = \{f(x) \,:\, x \in (x_0, x_0 + \delta)\}$. Así, tenemos que

$$f(x_0 - \delta) \leq f(x)\,, \ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)\,.$$

Entonces, por el axioma del supremo [4] , tenemos que existe $\alpha = \sup(A)$ y $\beta = \inf(B)$. En concreto, tenemos que $\alpha = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ y $\beta = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$. En efecto, si $\varepsilon > 0$, existe $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0)$ tal que $\alpha - \varepsilon < f(x_1) \leq \alpha$. Sea $r = |x_0 - x_1| > 0$. Si $0 < x - x_0 < r$, entonces, $\alpha - \varepsilon < f(x_1) < f(x) < \alpha$. Así, $|\alpha - f(x)| < \varepsilon$. Por definición de límite lateral, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \alpha$. En los límites del intervalo, solo se considera el conjunto A o B y se usa la hipótesis de acotación. □

Teorema 4.11. Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo o semirrecta. Sea f monótona en I y acotada, y sean $x_1, x_2 \in I$. Entonces, si $x_1 < x_2$ y f es monótona creciente, entonces $\lim_{x\to x_1^+} f(x) \leq \lim_{x\to x_2^-} f(x)$. Si f es monótona decreciente, entonces $\lim_{x\to x_1^+} f(x) \geq \lim_{x\to x_2^-} f(x)$.

[3] Basta con que sea un punto de acumulación.

[4] Demostrar que A y B están acotados se puede hacer utilizando la hipótesis del teorema que dice que f está acotada.

Demostración. Supongamos que f es creciente (el otro caso se hace de forma análoga). Del teorema anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_1^+} f(x) &= \inf \{f(x) \ : \ x \in (x_1, x_1 + \delta)\} = \beta \\ \lim_{x \to x_2^-} f(x) &= \sup \{f(x) \ : \ x \in (x_2 - \delta, x_2)\} = \alpha. \end{aligned}$$

Podemos tomar el mismo $\delta > 0$ en ambos casos tal que $(x_1, x_1 + \delta) \cap (x_2 - \delta, x_2) = \emptyset$. Dado que f es creciente, si $y_1 \in (x_1, x_1 + \delta)$ y $y_2 \in (x_2 - \delta, x_2)$, por lo que $y_1 < y_2$, tenemos que $f(y_1) \leq f(y_2)$ y, está claro que $\beta \leq \alpha$. □

Observación. De estos dos resultados, podemos concluir que las discontinuidades de las funciones monótonas acotadas son descontinuidades de salto.

Teorema 4.12. Si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo o semirrecta, y f es monótona y acotada, entonces si

$$E = \{x \in I \ : \ f \text{ no es continua en } x\},$$

tenemos que $|E| \leq |\mathbb{N}|$.

Demostración. Si f es monótona y f no es continua en x, debe ser que en x tiene una discontinuidad de salto. Supongamos que f es creciente. Sea $y \in E$. Por el teorema anterior tenemos que

$$\lim_{x \to y^-} f(x) < r_y < \lim_{x \to y^+} f(x),$$

donde $r \in \left(\lim_{x \to y^-} f(x), \lim_{x \to y^+} f(x) \right) \cap \mathbb{Q}$. Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} T : E &\to \mathbb{Q} \\ y &\to T(y) = r_y. \end{aligned}$$

Vamos a ver que T es inyectiva. Sean $y_1, y_2 \in E$, con $y_1 \neq y_2$ y $y_1 < y_2$. Entonces,

$$r_{y_1} < \lim_{x \to y_1^+} f(x) \leq \lim_{x \to y_2^-} f(x) < r_{y_2}.$$

Así, $T(y_1) = r_{y_1} \neq r_{y_2} = T(y_2)$. □

Ejemplo 4.14. Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0,1) \cap \mathbb{Q} \\ 1, & x \in (0,1) / \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Esta función no es continua en ningún punto de $(0, 1)$.

Capítulo 5

La Derivada

Recordamos que la ecuación de la recta que pasa por dos puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ será

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1.$$

Definición 5.1 (Derivada)**.** Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $a \in \operatorname{dom}(f)$ tal que $\exists r > 0$ tal que $(a - r, a + r) \subset \operatorname{dom}(f)$. Se dice que f es **derivable** en el punto $x = a$ si existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

Entonces, se dice que f es **derivable** en a.

Observación. Tenemos que la derivabilidad, al igual que la continuidad, es una propiedad local. Se dice que f es derivable en $A \subset \operatorname{dom}(f)$ si f es derivable en cada $a \in A$.

Observación. Se llama función derivada de f a la función

$$\begin{aligned} f' : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to f'(x). \end{aligned}$$

Tenemos que $\operatorname{dom}(f') = \{x \ : \ f(x) \text{ derivable en } x\}$.

Ejemplo 5.1.

- Si consideramos $f(x) = a \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a - a}{h} = 0.$$

- Consideremos $f(x) = x$. Tenemos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h} = 1.$$

- La función $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & h \to 0^+ \\ -1, & h \to 0^- \end{cases}.$$

Observación. Si $x = x_0 + h$, tenemos que $h = x - x_0$, así

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Definición 5.2 (Recta Tangente)**.** Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en $a \in A$. Se llama **recta tangente** de la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ a la recta

$$r(x) = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Teorema 5.1. Sea $r(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$. Entonces se cumple que:

(a) La recta r pasa por $(a, f(a))$.

(b) $\lim_{x\to a} \frac{f(x) - r(x)}{x-a} = 0$.

(c) Si $s(x)$ es una recta que pasa por $(a, f(a))$ y $\lim_{x\to a} \frac{f(x) - s(x)}{x-a} = 0$, entonces $r(x) = s(x)$.

(d) $r'(a) = f'(a)$.

Demostración. **(a)** Tenemos que $r(a) = f(a)$.

(b)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} \frac{f(x) - r(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a))}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \\ &= f'(a) - f'(a) = 0. \end{aligned}$$

[1]

(c) Sea $s(x) = d(x-a) + f(a)$ y $\lim_{x\to a} \frac{f(x) - s(x)}{x-a} = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - r(x)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - s(x) + s(x) - r(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{s(x) - r(x)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{d(x-a) + f(a) - f'(a)(x-a) - f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} (d - f'(a)) = d - f'(a). \end{aligned}$$

Así, $d = f'(a)$ y $r(x) = s(x)$.

[1] Esto significa que $f(x) - r(x) \to 0$ mucho más rápido que $x - a \to 0$, lo que nos asegura que la tangente es una buena aproximación a la curva.

(d) Tenemos que

$$r'(a) = \lim_{x \to a} \frac{r(x) - r(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f'(a)(x-a) + f(a) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

□

Ejemplo 5.2. Consideremos la función $f(x) = x^3$, que es continua en $\mathbb{R}^3$ y monótona creciente. Sabemos que $f(x) < 0$ si $x < 0$ y $f(x) > 0$ si $x > 0$. Tenemos que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$. Calculamos la derivada en un punto $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \to 0} \left(3x^2 + 3xh + h^2\right) = 3x^2.$$

Así, la ecuación de la tangente en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ será

$$y = 3x_0^2(x - x_0) + x_0^3.$$

Teorema 5.2. Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo o semirrecta, y $a \in I$. Si existe $f'(a)$, entonces f es continua en a.

Demostración. Tenemos que $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \in \mathbb{R}$. Tenemos que f es continua en a si $\exists \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, es decir, si $\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = 0$. Supongamos que $\lim_{x \to a} f(x) - f(a) \neq 0$. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ y $x_n \to a$ tal que $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. Así,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = \pm\infty.$$

Esto es una contradicción, puesto que $f'(a) \in \mathbb{R}$. □

Ejemplo 5.3. El recíproco no es cierto. Recordemos que $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$ pero no es derivable en este punto.

Teorema 5.3. Sea $f, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con I invervalo o semirrecta y $a \in I$, tales que existen $f'(a)$ y $g'(a)$. Sea $\lambda > 0$.

(a) $\exists (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

(b) $\exists (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.

(c) $\exists (f \cdot g)'(a) = f'(a)\, g(a) + f(a)\, g'(a)$.

(d) Si $g(a) \neq 0$, $\exists \left(\frac{1}{g}\right)(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$.

(e) Si $g(a) \neq 0$, $\exists \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\, g(a) - f(a)\, g'(a)}{g^2(a)}$.

Demostración. **(a)** Tenemos que

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)-(f(a)+g(a))}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\ &= f'(a)+g'(a).\end{aligned}$$

(b) Tenemos que

$$(\lambda f)'(a) = \lim_{x\to a}\frac{\lambda f(x)-\lambda f(a)}{x-a} = \lambda\left(\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) = \lambda f'(a).$$

(c) Tenemos que

$$\begin{aligned}(f\cdot g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a} g(x)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g(a)f'(a)+f(a)g'(a).\end{aligned}$$

(d) Tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g}\right)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g}(x)-\frac{1}{g}(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\frac{g(a)-g(x)}{g(a)g(x)}\\ &= \lim_{x\to a} -\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot\frac{1}{g(x)g(a)} = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}.\end{aligned}$$

(e) Podemos aplicar **(c)** y **(d)** para deducirla.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a)\frac{1}{g(a)} + f(a)\left(-\frac{g'(a)}{g^2(a)}\right) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

□

Ejemplo 5.4. Hoja 3 - Problema 7. Si $g(0)=g'(0)=0$, se define

$$f(x) = \begin{cases} g(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right), \ x\neq 0\\ 0, \ x=0\end{cases}.$$

Vamos a ver si f es continua. Tenemos que (esto fue demostrado en un ejercicio de las hojas)

$$|f(x)| = \left|g(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |g(x)| \to 0.$$

Por tanto, $|f(x)|\to 0$ y es continua en $x=0$. Entonces, tenemos que

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

El límite anterior se deduce de que

$$\left|\frac{g(x)}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \left|\frac{g(x)}{x}\right| \to 0.$$

Teorema 5.4. Sea $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$. Entonces, existe $f'(x) = nx^{n-1}$.

Demostración. Se demuestra por inducción. Si $n = 1$ es trivial. Suponemos que es cierto para n. Entonces, tenemos que si $f(x) = x^{n+1} = x^n \cdot x$,

$$f'(x) = (x^n)' \cdot x + x^n (x)' = nx^{n-1} \cdot x + x^n = nx^n + x^n = (n+1) x^n.$$

□

Corolario 5.1. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$, con $n \in \mathbb{N}$. Entonces, si $x \neq 0$, $f'(x) = -nx^{-n-1}$.

Demostración. Aplicando el apartado **(c)** del **Teorema 5.3**,

$$f'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{(n-1)-2n} = -nx^{-n-1}.$$

□

Ejemplo 5.5. Consideremos $f(x) = \dfrac{x^3 + x + 1}{x^2 - 1}$. Entonces, tenemos que si $x \neq \pm 1$,

$$f'(x) = \frac{\left(3x^2 + 1\right)\left(x^2 - 1\right) - \left(x^3 + x + 1\right)(2x)}{\left(x^2 - 1\right)^2}.$$

Teorema 5.5 (Regla de la cadena)**.** Sea $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{dom}(g)$ y $a \in \operatorname{dom}(f)$, tal que existe $f'(a)$ y existe $g'(f(a))$. Entonces, existe $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a)$.

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{f(x) - f(a)} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.\end{aligned}$$

Sea $h = f(x) - f(a)$, entonces $h \to 0$ cuando $x \to a$. Así,

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(f(a) + h) - g(f(a))}{h} = g'(f(a)).$$

Por otro lado, es trivial que $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$. Así, hemos obtenido que $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a)$. □

Ejemplo 5.6. Consideremos la función $f(x) = \left(x^2 - 3\right)^{27}$. Aplicando el teorema anterior,

$$f'(x) = 27\left(x^2 - 3\right)^{26} \cdot 2x = 54x\left(x^2 - 3\right)^{26}.$$

Teorema 5.6 (Teorema de la función inversa)**.** Sea $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ derivable en (α, β) y f' es continua en (α, β) y para $a \in (\alpha, \beta)$, $f'(a) \neq 0$. Entonces, en un intervalo centrado en $f(a)$ existe f^{-1}, que es derivable y $\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Demostración. Si $f'(a) \neq 0$ tenemos que $f'(a) > 0$ o $f'(a) < 0$. Sin pérdida de generalidad, asumamos que $f'(a) > 0$ (como f' es continua, en un intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, $f'(x) > 0$), entonces podemos demostrar que f es inyectiva en $(a - \delta, a + \delta)$ (por el teorema del valor medio). Tenemos que f es continua (por ser derivable) e inyectiva, por lo que f es estrictamente monótona en $(a - \delta, a + \delta)$ y, por tanto, existe f^{-1}. Consideremos la aplicación

$$f : (a - \delta, a + \delta) \to (f(a - \delta), f(a + \delta)).$$

Tenemos que f^{-1} es continua en $(f(a - \delta), f(a + \delta))$. Entonces, si $y = f(a)$, $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(a)) = a$. Entonces, tenemos que

$$\lim_{y \to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}f(a)}{y - f(a)} = \lim_{x \to a} \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

□

Observación. Sea $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ con $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $f^{-1}(x) = x^n$. Así, tenemos que

$$f'(x) = \frac{1}{n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

En general, si $n, m \in \mathbb{N}$ y$f(x) = x^{\frac{n}{m}} = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n$, entonces aplicando la regla de la cadena,

$$f'(x) = n\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1} = \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}.$$

Ejemplo 5.7. Consideremos la función $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}} \cdot \frac{(x+1)^2 - 2x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Consideremos ahora las funciones $\sin(x), \cos(x)$ y $\tan(x)$. Más adelante se demostrarán la siguiente igualdade:

$$(\sin x)' = \cos x.$$

De esta se pueden deducir las otras derivadas. Tenemos que $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, por tanto, derivando a ambos lados:

$$(\cos x)' = \frac{-2\sin x \cos x}{2\sqrt{1 - \sin^2 x}} = -\sin x.$$

Por definición, tenemos que $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, por tanto,

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Vamos a estudiar ahora las funciones inversas: $\arcsin x, \arccos x, \arctan x$. Si $f(x) = \arctan x$, tenemos que $f^{-1}(x) = \tan x$. Aplicando el teorema de la función inversa,

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Sea $f(x) = e^x$. Más adelante se demostrará que $f'(x) = e^x$. Lo haremos introduciendo la función logarítmica, que es la inversa de la exponencial.

Definición 5.3 (Funciones hiperbólicas)**.** Sea llama **coseno hiperbólico** a la función $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Similarmente, se llama **seno hiperbólico** a la función $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Finalmente, se define **tangente hiperbólica** a la función $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$.

Calculamos sus derivadas.

$$\begin{aligned}
(\cosh x)' &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \\
(\sinh x)' &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \\
(\tanh x)' &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x.
\end{aligned}$$

Observación. Podemos observar que

$$\boxed{1 = \cosh^2 x - \sinh^2 x}$$

Ahora podemos calcular las derivadas de sus inversas aplicando el teorema de la función inversa.

$$\begin{aligned}
(\operatorname{arcsinh} x)' &= \frac{1}{\cosh(\operatorname{arcsinh} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(\operatorname{arcsinh} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \\
(\operatorname{arccosh} x)' &= \frac{1}{\sinh(\operatorname{arccosh} x)} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\arccos x) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \\
(\operatorname{arctanh} x)' &= \frac{1}{1 - \tanh^2(\operatorname{arctanh} x)} = \frac{1}{1 - x^2}.
\end{aligned}$$

Definición 5.4 (Extremos relativos)**.** Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Se dice que x_0 es un **máximo relativo** si existe $r > 0$ tal que $(x_0 - r, x_0 + r) \subset A$, y allí $f(x_0) \geq f(x)$ para $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$.

(b) Se dice que x_0 es un **mínimo relativo** si existe $r > 0$ tal que $(x_0 - r, x_0 + r) \subset A$, y allí $f(x_0) \leq f(x)$ para $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$.

Observación. Los máximos y mínimos absolutos de una función definida en un intervalo o semirrecta abierta son automáticamente extremos relativos. Sin embargo, el recíproco no tiene por que ser cierto.

Ejemplo 5.8. Si consideramos la función $f(x) = |x|$ definida en $[-1, 1]$, tenemos que f tiene un mínimo relativo en $x = 0$, que también es un mínimo absoluto.

Teorema 5.7. Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un intervalo o semirrecta, con f derivable en I. Sea $x_0 \in I$ un extremo relativo. Entonces, $f'(x_0) = 0$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, se x_0 un máximo local. Entonces existe $r > 0$ tal que $(x_0 - r, x_0 + r) \subset I$.

- Si $x > x_0$ tenemos que, dado que f es derivable en I,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leq 0.$$

- Si $x < x_0$, tenemos que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0.$$

Así, como $\exists f'(x_0)$, debe ser que $f'(x_0) = 0$. □

Ejemplo 5.9. **(i)** Consideremos la función $f(x) = |x|$ definida en $(-1, 1)$. Tiene un mínimo local en $x = 0$ pero no es derivable en este punto.

(ii) El recíproco del teorema anterior no es cierto. En efecto, consideremos la función $f(x) = x^3$ definida en $(-1, 1)$. Tenemos que $f'(0) = 0$, pero no tiene un extremo relativo en ese punto.

Observación. Para buscar máximos y mínimos de una función buscamos en:

- Los extremos del dominio.
- Los puntos donde no es continua o derivable.
- Los puntos en los que se anula la derivada.

Teorema 5.8 (Teorema de Rolle)**.** Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demostración. Si f es constante, es trivial puesto que $\forall x \in (a,b)$ se tiene que $f'(x) = 0$. En caso contrario, dado que f es continua en $[a,b]$ existe $x_0 \in (a,b)$ máximo o mínimo local con $f(x_0) > f(a)$ o $f(x_0) < f(a)$. Por el teorema anterior, dado que x_0 es un extremo local y f es derivable en (a,b), debe ser que $f'(x_0) = 0$. □

Teorema 5.9 (Teorema del valor medio)**.** Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en el intervalo (a,b). Entonces, existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

Demostración. Sea $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$. Tenemos que g es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Además, dado que $g(a) = g(b) = 0$, por el teorema de Rolle, existe $c \in (a,b)$ tal que $g'(c) = 0$. Es decir,

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

□

Corolario 5.2. **(a)** Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ con f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$, entonces f es constante.

(b) Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, ambas continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b). Si $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in (a,b)$, entonces existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + k$, $\forall x \in [a,b]$.

(c) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$, entonces f es inyectiva [a] .

[a] El recíproco también es cierto.

Demostración. **(a)** Sean $x, y \in [a,b]$, entonces f es continua en $[x,y]$ y derivable en (x,y). Por el teorema del valor medio, existe $c \in (x,y)$ con $f(x) - f(y) = f'(c)(x-y) = 0$, así, $f(x) = f(y)$, $\forall x, y \in [a,b]$.

(b) Consideremos la función $h(x) = f(x) - g(x)$. Entonces, h es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Además, como $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, tenemos, por **(a)**, que $h(x) = k \in \mathbb{R}$, por lo que $f(x) = g(x) + k$.

(c) Si $x, y \in [a,b]$ (con $x \neq y$), entonces $f : [x,y] \to \mathbb{R}$ es continua en $[x,y]$ y derivable en (x,y). Por el teorema del valor medio, existe $c \in (x,y)$ con $f(x) - f(y) = f'(c)(x-y) \neq 0$, por lo que debe ser que $f(x) \neq f(y)$.

□

Ejemplo 5.10. El teorema del valor medio sirve para estimar errores. Consideremos $f(x) = \sqrt{x}$ y que conocemos $\sqrt{x}$ pero no conocemos $\sqrt{y}$. Podemos entonces, estimar el valor de $\sqrt{y}$ con la distancia $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right|$. Sabemos que existe $c \in (x, y)$ tal que

$$f'(c)(x - y) = f(x) - f(y).$$

Si $x, y > 1$, entonces tenemos que

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| = f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}} |x - y| \leq \frac{1}{2} |x - y|.$$

Este procedimiento también sirve para ver que esta función es uniformemente continua en $(1, \infty)$, puesto que acabamos de ver que es de Lipschitz.

5.1. Regla de L'Hôpital

Definición 5.5 (Curvas paramétricas)**.** Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas en $[a, b]$. Se llama **curva paramétrica** a los puntos $C = \{(f(t), g(t)) \ : \ t \in [a, b]\}$.

Observación. Si $f(t) = t$, tenemos una gráfica (podemos definir una función, puesto que a cada valor de x se le asigna sólo uno de y).

Observación. Con tres funciones $f(t), g(t), h(t)$, podemos definir curvas en el espacio.

Vamos a estudiar la tangente de una curva paramétrica. Si cogemos dos puntos, t_0 y t, podemos calcular la ecuación de la recta que pasa por esos puntos:

$$y(t) = \frac{g(t) - g(t_0)}{f(t) - f(t_0)} (x - f(t_0)) + g(t_0).$$

Tenemos que

$$\lim_{t \to t_0} \frac{g(t) - g(t_0)}{f(t) - f(t_0)} = \lim_{t \to t_0} \left(\frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} \cdot \frac{t - t_0}{f(t) - f(t_0)} \right) = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}.$$

Entonces, concluimos que si C es una curva del plano y $\exists f'$ y g' entonces la pendiente de la recta tangente por el punto $(f(t_0), g(t_0))$ será $\dfrac{g'(t_0)}{f'(t_0)}$. Es decir, esta recta tiene como vector director $(f'(t_0), g'(t_0))$.

Si tenemos una curva C que empieza en $(f(a), g(a))$ y termina en $(f(b), g(b))$, nos gustaría decir que si $c \in (a, b)$, entonces

$$\frac{g'(c)}{f'(c)} = \frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Esto se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 5.10 (Teorema del valor medio de Cauchy)**.** Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{g'(c)}{f'(c)} = \frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Demostración. Sea $h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$. Dado que f y g son continuas y derivables, tenemos que $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Tenemos que $h(a) = h(b) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$. Aplicando el teorema de Rolle, tenemos que existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$. Es decir,

$$h'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)) \iff f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$

□

Observación. Si $f(b) \neq f(a)$ y $f'(c) \neq 0$, el teorema anterior es equivalente a decir que

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$

Observación. Podemos ver que el teorema del valor medio es un caso particular de este teorema. En efecto, si tenemos que $f(t) = t$, entonces obtenemos el teorema del valor medio.

Teorema 5.11 (Regla de L'Hôpital)**.** Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, con $f'(x) \neq 0$, continuas en $[a, b] / \{x_0\}$ y derivables en $(a, b) / \{x_0\}$, tales que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$. Si existe $\lim_{x \to x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)}$, entonces existe $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)}$. [a]

[a] Cuando decimos $\lim_{x \to x_0}$, realmente vale también para x_0^-, x_0^+ y x_0.

Demostración. Vamos a estudiar los límites laterales (para demostrar el límite, basta con comprobar que los límites laterales coinciden). Sin pérdida de generalidad, estudiamos $\lim_{x \to x_0^+} \frac{g(x)}{f(x)}$. Definimos $g(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} g(x)$ y $f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$. Entonces, tenemos que

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{g(x) - g(x_0)}{f(x) - f(x_0)}.$$

Tenemos que $f, g : [x_0, x] \to \mathbb{R}$ son continuas en $[x_0, x]$ y derivables en (x_0, x). Aplicando el teorema del valor medio de Cauchy, tenemos que existe $c_x \in (x_0, x)$ tal que

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{g(x) - g(x_0)}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{g'(c_x)}{f'(c_x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{g'(x)}{f'(x)}.$$

En efecto, si $x \to x_0^+$ tenemos que $c_x \to x_0^+$, por lo que, dado que existe $\lim_{x \to x_0^+} \frac{g'(x)}{f'(x)}$ tenemos que

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{g'(c_x)}{f'(c_x)} = \lim_{y \to x_0^+} \frac{g'(y)}{f'(y)}.$$

□

Demostración. Esta es una demostración alternativa. Al igual que antes, definimos $f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ y $g(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} g(x)$. Dado que exsiste $\lim_{x \to x_0^+} \frac{g'(x)}{f'(x)} = l \in \mathbb{R}$, si $\varepsilon > 0$ tenemos que existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < x - x_0 < \delta$ entonces $\left| \frac{g'(x)}{f'(x)} - l \right| < \varepsilon$. Tenemos que, dado que f y g son continuas en $[x_0, x_0 + \delta]$ y derivables en $(x_0, x_0 + \delta)$, entonces para cada $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ existe $c_x \in (x_0, x)$ tal que

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{f(x) - f(x_0)} = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g'(c_x)}{f'(c_x)}.$$

Dado que $c_x \in (x_0, x_0 + \delta)$, tenemos que

$$\left| \frac{g(x)}{f(x)} - l \right| = \left| \frac{g'(c_x)}{f'(c_x)} - l \right| < \varepsilon.$$

□

Observación. Si existieran $f'(x_0) \neq 0$ y $g'(x_0)$, la prueba sería muy sencilla. En efecto, tendríamos que serían continuas en x_0 y por tanto

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{g'(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Ejemplo 5.11.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{\sin x}{x}} = 0.$$

En este segundo caso no podemos aplicar L'Hôpital, puesto que $\lim_{x \to 0} \frac{g'(x)}{f'(x)}$ no existe.

Teorema 5.12 (Relga de L'Hôpital general)**.** Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ [a] dos funciones derivables en (a, b) salvo quizás en x_0, donde $x_0 \in (a, b)$. Supongamos que $f'(x) \neq 0$ si $x \neq x_0$ y que existen

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0,$$

o bien [b]

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Si, existe $\lim_{x \to x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)}$, entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)}.$$

[a]El intervalo (a, b) puede ser una semirrecta

[b]Cuando escribimos x_0 en el límite, también podemos escribir x_0^+, x_0^-, ∞ o $-\infty$.

Demostración. **(i)** Supongamos que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$. Entonces, tenemos que,

$$\lim_{x\to0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to0^+} g\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Así, podemos aplicar la regla de L'Hôpital a estas funciones, de forma que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to0^+}\frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to0^+}\frac{g'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to0^+}\frac{g'\left(\frac{1}{x}\right)}{f'\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{g'(x)}{f'(x)}.$$

(ii) Supongamos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ y existe $\lim_{x\to x_0^+}\frac{g'(x)}{f'(x)} = l \in \mathbb{R}$. Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, tenemos que existe $\delta > 0$ tal que si $0 < x - x_0 < \delta$, entonces

$$\left|\frac{g'(x)}{f'(x)} - l\right| < \varepsilon.$$

Cogemos $x_1 \in (x_0, x_0+\delta)$ y, dado que f tiene límite por la derecha infinito en x_0, podemos coger $x_2 \in (x_0, x_1)$ tal que $f(x) \neq f(x_1)$ si $x \in (x_0, x_2)$. Así, definimos la función

$$F(x) = \frac{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}},\ x \in (x_0, x_2).$$

Tenemos que $\lim_{x\to x_0^+} F(x) = 1$. Por tanto, existe $x_3 \in (x_0, x_2)$ tal que si $0 < x - x_0 < x - x_3$, $|F(x) - 1| < \varepsilon$. Así, tenemos que si $\varepsilon < \dfrac{1}{2}$

$$\frac{1}{|F(x)|} < \frac{1}{1-\varepsilon} < 2.$$

Entonces, tenemos que

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(x)}{f(x)}\cdot\frac{F(x)}{F(x)} = \frac{g(x) - g(x_1)}{f(x) - f(x_1)}\cdot\frac{1}{F(x)}.$$

Por el teorema del valor medio de Cauchy existe $\xi \in (x_0, x_1)$ tal que

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g'(\xi)}{f'(\xi)}\cdot\frac{1}{F(x)}.$$

Así, si $x_0 < x < x_3 < x_2 < x_1 < x_0 + \delta$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{g(x)}{f(x)} - l\right| &= \left|\frac{g'(\xi)}{f'(\xi)}\cdot\frac{1}{F(x)} - l\right| = \left|\frac{g'(\xi)}{f'(\xi)} - lF(x)\right|\cdot\frac{1}{|F(x)|}\\ &\le \left\{\left|\frac{g'(\xi)}{f'(\xi)} - l\right| + |l - lF(x)|\right\}\cdot\frac{1}{|F(x)|}\\ &\le (\varepsilon + |l|\,\varepsilon)\,2 = (2(1+|l|))\,\varepsilon.\end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.12. Consideremos el límite $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$. Aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

5.2. Crecimiento y decrecimiento

Notación.

- Se denomina $f'\left(x^+\right) = \lim_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, a la derivada por la derecha.
- Se denomina $f'\left(x^-\right) = \lim_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, a la derivada por la izquierda.

Observación. Tenemos que existe $f'(x_0)$ si $f'\left(x_0^+\right) = f'\left(x_0^-\right)$.

Corolario 5.3. Sea $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b] / \{s\}$ y derivable en $(a,b) / \{s\}$. Si existe $\lim_{x\to s^*} h(x) = r$ y existe $\lim_{x\to s^*} h'(x)$, entonces existe $h'(s^*) = \lim_{x\to s^*} h'(x)$. [a]

[a] Aquí, s^* significa s, s^+ o s^-.

Demostración. Sea $g(x) = h(x) - r$ y $f(x) = x - s$. Entonces, tenemos que $\lim_{x\to s} g(x) = \lim_{x\to s} (h(x) - r) = 0$ y $\lim_{x\to s} f(x) = \lim_{x\to s} (f(x) - s) = 0$. Entonces tenemos que

$$\lim_{x\to s} \frac{h(x) - r}{x - s} = \lim_{x\to s} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to s} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \lim_{x\to s} \frac{h'(x)}{1}.$$

Este último término existe por hipótesis. □

Observación. Esto nos dice que la derivada de una función continua no puede tener discontinuidad de salto.

Dada $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ puede existir f' y puede existir $(f')' = f''$.

Observación. En física, f es un proceso, f' es la velocidad y f'' es la aceleración. Por ejemplo, la segunda ley de Newton se puede expresar de la forma

$$F = mx''.$$

A través de f' y f'' se pueden conocer propiedades de f.

Teorema 5.13. Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b).

(a)
- Si $f'(c) > 0$, $\forall c \in (a,b)$, entonces f es creciente en $[a,b]$.
- Si f es creciente en $[a,b]$, entonces $f'(c) \geq 0$, $\forall c \in (a,b)$.

(b)
- Si $f'(c) < 0$, $\forall c \in (a,b)$, entonces f es decreciente en $[a,b]$.

- Si f es decreciente en $[a,b]$, entonces $f'(c) \leq 0$, $\forall c \in (a,b)$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, demostramos solo **(a)**, pues la demostración de **(b)** es análoga.

(i) Sean $x, y \in [a,b]$ con $x < y$. Por el teorema del valor medio, existe $c \in (x,y)$ tal que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Tenemos que $f'(c) \geq 0$, por lo que también tenemos que $f(y) - f(x) \geq 0$, es decir, $f(y) \geq f(x)$.

(ii) Sea $c \in (a,b)$. Si f es creciente, tenemos que si $x > c$,

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Similarmente, si $x < c$ tenemos que

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Por tanto, tenemos que $f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$.

□

Teorema 5.14. Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivable en (a,b). Si existe $x_1, x_2 \in (a,b)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f'(x_1) < \lambda < f'(x_2)$, entonces existe $x_0 \in (a,b)$ tal que $f'(x_0) = \lambda$.

Demostración. Sea $g(x) = f(x) - \lambda x$. Tenemos que g es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Además, tenemos que $g'(x) = f'(x) - \lambda$. Si $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$, es decir, $f'(x) \neq \lambda$, entonces g es inyectiva, por lo que debe ser monótona.

- Si g es creciente y $g'(x) \neq 0$, tenemos que $g'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Entonces tenemos que

$$f'(x_1) - \lambda = g'(x_1) < 0.$$

- Si g es decreciente y $g'(x) \neq 0$, tenemos que $g'(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Entonces tenemos que

$$f'(x_2) - \lambda = g'(x_2) > 0.$$

□

Observación. Recordamos que una función derivada no puede dar saltos.

Ejemplo 5.13. No todas las funciones derivadas son continuas. Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), \ x \neq 0 \\ 0, \ x = 0 \end{cases}.$$

Teienmos que f es continua en $\mathbb{R}$. En efecto,

$$\left| x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq x^2 \to 0, \ x \to 0.$$

Sin embargo, no es derivable en $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, \ x \neq 0 \\ 0, \ x = 0 \end{cases}.$$

Dado que $\exists \lim_{x \to 0} f'(x)$, f' no es continua en $x = 0$.

5.3. Concavidad y convexidad

Procedemos a estudiar las derivadas segundas, con el objetivo de estudiar la convexidad y la concavidad.

Lema 5.1.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x = \alpha a + (1 - \alpha) b, \ \alpha \in [0, 1]\}.$$

Demostración. **(i)** Si $x = \alpha a + (1 - \alpha) b = a + (1 - \alpha)(b - a) \geq a$. Además, $x = \alpha a + (1 - \alpha) b = b + \alpha (a - b) \leq b$, por lo que $x \in [a, b]$.

(ii) Si $c \in [a, b]$, tenemos que

$$\frac{c - a}{b - a} \leq 1, \quad \frac{b - c}{b - a} \leq 1.$$

Tomamos $\alpha = \dfrac{b - c}{b - a}$. Entonces, tenemos que

$$c = \frac{b - c}{b - a} a + \frac{c - a}{b - a} b = \alpha a + (1 - \alpha) b.$$

□

Observación. A esta expresión se la llama **combinación convexa** de a y b.

Definición 5.6. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, se dice que f es **convexa** en $[a, b]$ si para $\forall x, y \in [a, b]$, $x < y$ se verifica que

$$f(\alpha x + (1 - \alpha) y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y), \ \forall \alpha \in [0, 1].$$

Observación. Para entender la definición de convexidad

$$\begin{aligned} f(\alpha x+(1-\alpha)y) \leq & \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)=\alpha(f(x)-f(y))+f(y) \\ = & \frac{f(x)-f(y)}{x-y}\alpha(x-y)+f(y) \\ = & \frac{f(x)-f(y)}{x-y}(\alpha(x-y)+y-y)+f(y) \\ = & \frac{f(x)-f(y)}{x-y}([\alpha x+(1-\alpha)y]-y)+f(y)=r(\alpha x+(1-\alpha)y). \end{aligned}$$

Donde r es la recta que une los puntos $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$. Es decir, la gráfica de $f|_{[x,y]}$ queda por debajo de la gráfica de la recta que pasa por $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$.

Definición 5.7. Se dice que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es **cóncava** si $\forall x,y\in[a,b]$, $x<y$, y $\forall\alpha\in[0,1]$,

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\geq \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y).$$

Es decir, la gráfica de $f|_{[x,y]}$ queda por encima de la recta que pasa por los puntos $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$.

Proposición 5.1. Sea $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función definida sobre un intervalo o semirrecta. Son equivalentes:

(a) f es convexa sobre I si y solo si $\forall a,b\in I$, $\forall x\in(a,b)$ se tiene que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\iff\frac{f(b)-f(x)}{b-x}\geq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

(b) f es cóncava sobre I si y solo si $\forall a,b\in I$, $\forall x\in(a,b)$ se tiene que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\iff\frac{f(b)-f(x)}{b-x}\leq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Demostración. La demostración de **(b)** es análoga a **(a)**. Tenemos que si f es convexa,

$$f(x)\leq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)=r(x).$$

Operando, obtenemos que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

El recíproco se demuestra haciendo las mismas cuentas al revés. □

Proposición 5.2. Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función sobre un intervalo o semirrecta.

(a) Si f es convexa en I y derivable en I, entonces f' es creciente.

(b) Si f es cóncava en I y derivable I, entonces f' es decreciente.

Demostración. La demostración de **(b)** es análoga a la de **(a)**. Sea $a \in I$ con $a < b$. Dada $a, a+h_1$ y $a+h_2$ con $0 < h_1 < h_2$, por la proposición anterior tenemos que, dado que son cocientes crecientes,

$$\frac{f(a+h_1) - f(a)}{h_1} \leq \frac{f(a+h_2) - f(a)}{h_2}.$$

Es decir, las pendientes $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, decrecen cuando $h > 0$ tiende a 0. Así, como f es derivable en a tenemos que

$$f'(a) = f'\left(a^+\right) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Por el otro lado, si $h_2 < h_1 < 0$, por la proposición anterior tenemos que

$$\frac{f(b) - f(b+h_2)}{h_2} \leq \frac{f(b) - f(b+h_2)}{h_2}.$$

Es decir, las pendientes $\dfrac{f(b+h) - f(b)}{h}$ decrecen cuando $h \to 0^-$. Así, dado que f es derivable en b tenemos que

$$f'(b) = f'\left(b^-\right) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} \geq \frac{f(b+h) - f(b)}{h}.$$

Si $a < x < b$, por lo visto anteriormente tenemos que

$$f'(a) \leq \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b-x} \leq f'(b).$$

Por tanto, f' es creciente. □

Corolario 5.4. Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo o semirrecta y f es derivable dos veces en I.

(a) Si f es convexa, $f'' \geq 0$.

(b) Si f es cóncava, $f'' \leq 0$.

Demostración. La demostración de **(b)** es análoga a la de **(a)**. Si f es convexa y como existe f'', tenemos que por la proposición anterior, si f' es creciente, $f'' \geq 0$. □

Lema 5.2. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivable en $[a, b]$ tal que $f(a) = f(b)$.

(a) Si f' es creciente, entonces $f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in [a, b]$.

(b) Si f' es decreciente, entonces $f(x) \geq f(a)$, $\forall x \in [a, b]$.

Demostración. Supongamos que existe $x \in [a, b]$ con $f(x) > f(a)$. Como $f|_{[a,b]}$ es continua, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in [a, b]$, en concreto $f(x_0) > f(a)$, y además $f'(x_0) = 0$. Por el teorema del valor medio, existe $x_1 \in (a, x_0)$ tal que

$$f'(x_1) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} > 0.$$

Entonces, tenemos que $f'(x_1) > f'(x_0)$, lo cual es una contradicción, pues habíamos dicho que la derivada era creciente. □

Proposición 5.3. Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con I intervalo o semirrecta, y f derivable.

(a) Si f' es creciente, entonces f es convexa.

(b) Si f' es decreciente, entonces f es cóncava.

Observación. Si existe f'', entonces

(a) $f'' \geq 0$ implica que f' es creciente, lo cual implica que f es convexa.

(b) $f'' \leq 0$ implica que f' es decreciente, lo cual implica que f es cóncava.

Demostración. Sean $a, b \in I$ y $x \in (a, b)$. Definimos la función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a).$$

Tenemos que g es derivable. En efecto:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dado que f' es creciente, g' es creciente. Tenemos que $g(a) = g(b) = 0$. Por el lema anterior sabemos que $g(x) \leq g(a) = 0$, $\forall x \in [a, b]$. Así, tenemos que

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a), \ \forall x \in [a, b].$$

□

Todo lo anterior prueba el siguiente teorema.

Teorema 5.15. Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con I intervalo o semirrecta, con f derivable.

(a) f es convexa en I si y solo si f' es creciente. Si existe f'', entonces f es convexa si y solo si $f'' \geq 0$.

(b) f es cóncava en I si y solo si f' es decreciente. Si existe f'', entonces f es cóncava si y solo si $f'' \leq 0$.

5.4. Puntos críticos

Definición 5.8 (Punto crítico)**.** Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable. Se dice que f tiene un **punto crítico** en $a \in A$ si $f'(a) = 0$. [a]

[a]Puede considerarse también punto crítico si $f''(a) = 0$, en el caso en el que exista f''.

Observación. Los puntos críticos de una función son candidatos a máximos y mínimos relativos de la función y, por tanto, puntos donde puede cambiar el crecimiento de una función. Por otro lado, los candidatos a puntos de inflexión son los puntos críticos de la función derivada.

Teorema 5.16. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivable dos veces en (a, b) y sea $x_0 \in (a, b)$ un punto crítico.

(a) Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, entonces x_0 es un máximo local.

(b) Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$, entonces x_0 es un mínimo local.

Demostración. La demostración se verá en unas semanas. □

Definición 5.9 (Punto de inflexión)**.** Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Se dice que $x_0 \in (a, b)$ es un **punto de inflexión** si para $\delta > 0$, en $(x_0 - \delta, x_0)$ es cóncava y en $(x_0, x_0 + \delta)$ es convexa (o viceversa).

Teorema 5.17. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ tal que $\exists f''(x)$, $\forall x \in (a, b)$. Si $x_0 \in (a, b)$ es un punto de inflexión, entonces $f''(x_0) = 0$.

Demostración. Sabemos que f' es continua, puesto que f'' existe. Si f es convexa en $(x_0 - \delta, x_0)$, entonces f' es creciente y, al ser continua, tenemos que

$$f'(x_0) = \sup \{f'(x) \ : \ x \in (x_0 - \delta, x_0)\}.$$

Similarmente, si f es cóncava en $(x_0, x_0 + \delta)$, dado que f' es decreciente y es continua, tenemos que

$$f'(x_0) = \inf \{f'(x) \ : \ x \in (x_0, x_0 + \delta)\}.$$

Así, tenemos que f' tiene un máximo local en x_0 y, dado que existe $f''(x_0)$, tiene que ser necesariamente que $f''(x_0) = 0$. □

Ejemplo 5.14. El recíproco no es cierto. Consideremos $f(x) = x^4$. Tenemos que $f'(x) = 4x^3$ y $f''(x) = 12x^2 \geq 0$. Tenemos que $f''(x) = 0 \iff x = 0$. Si embargo, la función no tiene un punto de inflexión en $x = 0$, sino que se trata de un mínimo.

Ejemplo 5.15. Consideremos $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - x}{x^2 - x}$. Vamos a estudiar su gráfica. Tenemos que $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}/\{0,1\}$. Tenemos que en $x = 0$ tiene una discontinuidad evitable. Estudiamos los límites:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 1} = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 1} = \infty.$$

También

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \infty.$$

Es decir, f tiene una asíntota vertical en $x = 1$. Además, también tiene una asíntota oblicua. En efecto,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - x} = 1.$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x - 1 - x(x-1)}{x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x - 1}{x - 1} = -1.$$

Así, la ecuación de la asíntota oblicua será $y = x - 1$. Estudiamos la derivada. Si $x \neq 0, 1$,

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 + 3}{(x-1)^2} \geq 0.$$

Por tanto, tenemos que la función es creciente.

Capítulo 6

La Integral

6.1. Definición de la integral

Definición 6.1 (Partición)**.** Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$. Se llama **partición** P de $[a, b]$ a todo subconjunto finito de $[a, b]$ que contiene a a y b.

Observación. Las particiones tendrán la forma

$$P = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\}, \; t_i < t_{i+1}, \; \forall i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Notación. Se llama $P([a, b]) = \{P \text{ partición de } [a, b]\}$.

Definición 6.2. Dadas $P, P' \in P([a, b])$, decimos que P' es **más fina** que P si $P \subsetneq P'$.

Ejemplo 6.1. Consideremos el intervalo $[1, 2]$ y las particiones $P = \left\{1, \frac{3}{2}, 2\right\} \subsetneq P' = \left\{1, \sqrt{2}, \frac{3}{2}, 2\right\}$.

Definición 6.3. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ [a] acotada y sea $P = \{t_0 = a, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n = b\}$ una partición. Se definen

$$M_i = \sup \{f(t) \; : \; t \in [t_1, t_{i+1}]\}, \; i = 0, \ldots, n-1.$$

$$m_i = \text{ínf} \{f(t) \; : \; t \in [t_1, t_{i+1}]\}, \; i = 0, \ldots, n-1.$$

[b]

[a] De momento estamos solo considerando funciones cuyas imágenes son positivas.
[b] Sabemos que existen (no tienen por qué alcanzarse) porque f está acotada.

Definición 6.4. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y sea $P = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = b\}$ una partición. Se llama **suma superior** de f respecto de P y se escribe

$$S(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (t_{i+1} - t_i).$$

Similarmente, se llama **suma inferior** de f respecto de P a

$$I(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (t_{i+1} - t_i).$$

Observación. Tenemos que $I(f,P) \leq S(f,P)$, pues $m_i \leq M_i$, $\forall i = 0, \dots, n-1$.

Lema 6.1. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y sean $P, P' \in P([a,b])$ con P' más fina que P. Entonces,

$$I(f,P) \leq I(f,P') \leq S(f,P') \leq S(f,P).$$

Demostración. Supongamos que $P' = P \cup \{u\}$, donde $t_i < u < t_{i+1}$. Observemos que

$$m_i = \text{ínf}\{f(t) \ : \ t \in [t_i, t_{i+1}]\} \leq \text{mín}\left\{m_{[t_i,u]}, m_{[u,t_{i+1}]}\right\}.$$

$$M_i = \sup\{f(t) \ : \ t \in [t_i, t_{i+1}]\} \geq \text{máx}\left\{M_{[t_i,u]}, M_{[u,t_{i+1}]}\right\}.$$

Así, tenemos que

$$I(f,P) = \sum_{j=0}^{n-1} m_j (t_{j+1} - t_j) \leq \sum_{j=0, i\neq j}^{n-1} m_j (t_{j+1} - t_j) + m_{[t_i,u]}(u - t_i) + m[u, t_{i+1}](t_{i+1} - u) = I(f,P').$$

Similarmente, tenemos que

$$S(f,P') = \sum_{j=0, i\neq j}^{n-1} M_j (t_{j+1} - t_j) + M_{[t_i,u]}(u - t_i) + M_{[u,t_{i+1}]}(t_{i+1} - u) \leq \sum_{j=0}^{n-1} M_j (t_{j+1} - t_j) = S(f,P).$$

Así, tenemos que $I(f,P) \leq I(f,P') \leq S(f,P') \leq S(f,P)$. [1] Repetimos el proceso hasta que $P \cup \{u_1, \dots, u_k\} = P'$. □

Lema 6.2. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y $P, P' \in P([a,b])$. Entonces, $I(f,P) \leq S(f,P')$.

Demostración. Cogemos $P'' = P \cup P'$, así P'' es más fina que P y P'. Aplicando el lema anterior:

$$I(f,P) \leq I(f,P'') \leq S(f,P'') \leq S(f,P').$$

□

[1] Las desigualdades anteriores se basan en que $m_i (t_{i+1} - t_i) = m_i (u - t_i) + m_i (t_{i+1} - u) \leq m_{[u,i+1]} (t_{i+1} - u) + m_{[i,u]} (u - i)$.

Definición 6.5. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada.

(a) Se define la **integral inferior** de f en $[a, b]$

$$\sup \{I (f, P) \ : \ P \in P ([a, b])\} = \underline{\int_a^b} f.$$

(b) Se define la **integral superior** de f en $[a, b]$

$$\text{ínf} \{S (f, P) \ : \ P \in P ([a, b])\} = \overline{\int_a^b} f.$$

(c) Decimos que f es **integrable** en $[a, b]$ si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. A este valor se le llama la integral de f en $[a, b]$:

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f.$$

Observación. Tenemos que la integral inferior siempre es menor que la superior: $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$.

Ejemplo 6.2. Consideremos la función

$$f (x) = \begin{cases} 1, \ x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, \ x \in [0, 1]/\mathbb{Q} \end{cases} .$$

Tenemos que $I (f, P) = 0$ y $S (f, P) = 1$, por lo que

$$\underline{\int_0^1} f = 0 \neq 1 = \overline{\int_0^1} f.$$

Por tanto, la función de Dirichlet no es integrable.

Definición 6.6 (Área)**.** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y $f \geq 0$.

(a) Se llama **recinto por debajo de la gráfica de** f al subconjunto de $\mathbb{R}^2$

$$A_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [a, b], y \in [0, f (x)]\right\}.$$

(b) Si f es integrable en $[a,b]$, se define el **área** de A_f

$$\text{Área } A_f = \int_a^b f.$$

6.2. Funciones integrables

Teorema 6.1 (Criterio de integrabilidad de Riemann)**.** Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Son equivalentes:

(a) f es integrable en $[a,b]$.

(b) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P \in P([a,b])$ tal que $S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon$.

Demostración. **(i)** Sea $\varepsilon > 0$. Tenemos que existe $P_1 \in P([a,b])$ tal que

$$\underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2} < I(f, P_1).$$

Similarmente, existe $P_2 \in P([a,b])$ tal que

$$\overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} > S(f, P_2).$$

Sea $P_3 = P_1 \cup P_2$, por lo que P_3 es más fina que P_1 y P_2. Así, tenemos que

$$S(f,P_3) - I(f,P_3) \leq S(f,P_2) - I(f,P_1) \leq \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

(ii) Sabemos que si $\varepsilon > 0$ existe $P \in P([a,b])$ tal que

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon.$$

Así, tenemos que $\forall \varepsilon > 0$,

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon \iff \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f.$$

□

Proposición 6.1. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Sea

$$P_n = \left\{a, a + \frac{b-a}{n}, a + \frac{2(b-a)}{n}, \ldots, a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}, b\right\}.$$

Si existe $\lim_{n\to\infty} I(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n)$, entonces f es integrable en $[a,b]$ y

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} I(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n).$$

Demostración. Sea $\alpha = \lim_{n\to\infty} I(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n)$. Tenemos que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_1$, $|I(f,P_n) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ y existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_2$, $|S(f,P_n) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$. Así, si $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, para $n \geq n_0$ tenemos que $I(f,P_n), S(f,P_n) \in \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}, \alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Así, tenemos que

$$0 \leq S(f,P_n) - I(f,P_n) < \varepsilon.$$

Así, por el criterio de integrabilidad Riemann, tenemos que

$$\exists \int_a^b f = \lim_{n\to\infty} I(f,P_n).$$

En efecto, tenemos que

$$0 < S(f,P_n) - \int_a^b f \leq S(f,P_n) - I(f,P_n) \to 0.$$

□

Observación. En general, si $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de particiones y $\lim_{n\to\infty} S(f,P_n) - I(f,P_n) = 0$, tenemos que f es integrable en $[a,b]$ y $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n)$.

Ejemplo 6.3. Calculamos el área de un triángulo. Sea $f(x) = rx$ donde $x \in [0,a]$. Tenemos que el área será

$$S = \frac{ra^2}{2}.$$

Tomamos la partición P_n de la proposición anterior. Tenemos que

$$I(f,P_n) = \frac{ra^2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{ra^2}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \to \frac{ra^2}{2}.$$

$$S(f,P) = \frac{ra^2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) = \frac{ra^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \to \frac{ra^2}{2}.$$

Así, f es integrable y queda que

$$\int_0^a rx\,dx = \frac{ra^2}{2}.$$

Teorema 6.2. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$, entonces existe $\displaystyle\int_a^b f$.

Demostración. Sea $b-a$ la distancia de a a b. Hacemos partes iguales de longitud $\frac{b-a}{n}$. Así, obtenemos la partición

$$P_n = \left\{a, a + \frac{b-a}{n}, \dots, a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}, b\right\}.$$

Dado que f es continua en un intervalo cerrado, tenemos que es uniformemente continua en este mismo intervalo [2] . Así, si $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x-y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Además, como $\frac{b-a}{n} \to 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ tenemos que $\frac{b-a}{n} < \delta$. Así, tenemos que si $n \geq n_0$

$$S(f, P_n) - I(f, P_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \leq \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon.$$

Por el criterio de integrabilidad tenemos que f es integrable en $[a,b]$. Además, tenemos que $\lim_{n\to\infty} S(f, P_n) - I(f, P_n) = 0$. Por lo visto en la observación anterior, tenemos que

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} I(f, P_n).$$

□

Corolario 6.1. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y consideremos la partición

$$P_n = \left\{a, a + \frac{b-a}{n}, \dots, a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}, b\right\}.$$

(a) Sea $x_i \in \left[a + \frac{i(b-a)}{n}, a + \frac{(i+1)(b-a)}{n}\right]$ con $i = 1, \dots, n-1$, entonces

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).$$

(b) En particular,

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right).$$

(c) En particular,

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{(i+1)(b-a)}{n}\right).$$

[2] Podemos aplicar la continuidad uniforme porque, dado que f es continua, tenemos que $M_i, m_i \in \operatorname{Im}(f)$ en cada intervalo $[t_i, t_{i+1}]$.

(d) Si $[a,b]=[0,1]$,

$$\int_0^1 f = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right).$$

Demostración. Demostramos sólamente **(d)**, pues el resto de casos son análogos. Por el teorema anterior tenemos que

$$\int_0^1 f = \lim_{n\to\infty} I\left(f,P_n\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} m_i \frac{1}{n}.$$

Dado que f es continua tenemos que existe $x_i \in \left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]$ con $f\left(x_i\right)=m_i$. Dado que f es uniformemente continua si $\varepsilon>0$ tenemos que $\exists\delta>0$ tal que si $|x-y|<\delta$ se tiene que $|f\left(x\right)-f\left(y\right)|<\varepsilon$. Ahora, como $\frac{1}{n}\to 0$, cogemos $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\forall n\geq n_0$ se tenga que $\frac{1}{n}<\delta$:

$$0\leq \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n} - \sum_{i=0}^{n-1} m_i\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{i}{n}\right)-f\left(x_i\right)\right] \leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\varepsilon = \varepsilon.$$

Así, hemos demostrado que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} m_i = 0 \iff \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{1}{n}\right) = \int_0^1 f.$$

□

Ejemplo 6.4. Vamos a calcular $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(k+n\right)\left(k-n\right)\right)$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(k+n\right)\left(k-n\right)\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\left(k^2-n^2\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}\left(k^2-n^2\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2-1\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2+1\right) = \int_0^1\left(x^2-1\right)\,dx + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\\
&= \int_0^1\left(x^2-1\right)\,dx.
\end{aligned}$$

6.3. Propiedades de la integral

Teorema 6.3. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrable y $c\in(a,b)$. Entonces, existen $\int_a^c f$ y $\int_c^b f$ y además

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Demostración. La parte de existencia se puede demostrar utilizando el criterio de integrabilidad. Sabemos que si $\varepsilon > 0$, existe $P \in P([a, b])$ tal que $S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon$. Podemos suponer que $c \in P$, es decir, existe $t_{k_0} = c$. Si no ocurriese, $P' = P \cup \{c\}$ sería más fina que P y

$$S(f, P') - I(f, P') \leq S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon.$$

Así, tenemos que

$$S(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{k_0-1} M_i(t_{i+1} - t_i) + \sum_{i=k_0}^{n-1} M_i(t_{i+1} - t_i).$$

$$I(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{k_0-1} m_i(t_{i+1} - t_i) + \sum_{i=k_0}^{n-1} m_i(t_{i+1} - t_i).$$

Definimos la partición $P'' = \{t_0 = a, t_1, \ldots, t_{k_0} = c\}$. Tenemos que

$$S(f, P'') - I(f, P'') \leq S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon.$$

Por tanto, existe $\displaystyle\int_a^c f$. Análogamente, se puede ver que existe $\displaystyle\int_c^b f$.

Ahora, vamos a demostrar la igualdad. Si $\varepsilon > 0$, tenemos que, si asumimos (sin pérdida de generalidad), que $\displaystyle\int_a^b f \geq \int_a^c f + \int_c^b f$,

$$0 \leq \int_a^b f - \left(\int_a^c f + \int_c^b f\right) \leq S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon.$$

Por tanto, como esto es cierpo $\forall \varepsilon > 0$, se tiene que

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

□

Observación. Si convenimos para que $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$, tenemos que el teorema anterior es cierto para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, siempre que las integrales que aparecen existan.

Observación. Es fácil ver que si f es integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$, también lo será en $[a, b]$. En efecto, si f es integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$, tenemos que si $\varepsilon > 0$ existen $P_1 \in P([a, c])$ y $P_2 \in P([c, b])$ tales que

$$S(f, P_1) - I(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad S(f, P_2) - I(f, P_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así, si $P_3 = P_1 \cup P_2$, se tiene que

$$S(f, P_3) - I(f, P_3) = S(f, P_1) + S(f, P_2) - (I(f, P_1) + I(f, P_2)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Teorema 6.4. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones acotadas e integrables y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces,

(a) $\exists \int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g.$

(b) $\exists \int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$

Demostración. **(a)** Sea $\varepsilon > 0$, tenemos que existe $P \in P([a, b])$ tal que

$$S(f, P) - I(f, P) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad S(g, P) - I(g, P) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tenemos que si f y g están acotadas, $f + g$ también lo estará. Si $|f| \leq M$ y $|g| \leq M$, tenemos que

$$|f + g| \leq |f| + |g| \leq 2M.$$

Así, tenemos que

$$M_{f+g,i} = \sup \{(f + g)(t) \ : \ t \in [t_i, t_{i+1}]\} \leq M_{f,i} + M_{g,i}.$$

Similarmente, obtenemos que $m_{f+g,i} \geq m_{f,i} + m_{g,i}$. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} S(f + g, P) - I(f + g, P) =& \sum_{i=0}^{n-1} M_{f+g,i}(t_{i+1} - t_i) + \sum_{i=0}^{n-1} m_{f+g,i}(t_{i+1} - t_i) \\ \leq& \sum_{i=0}^{n-1} (M_{f,i} + M_{g,i})(t_{i+1} - t_i) - \sum_{i=0}^{n-1} (m_{f,i} + m_{g,i})(t_{i+1} - t_i) \\ =& S(f, P) - I(f, P) + S(g, P) - I(g, P) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Así, hemos demostrado que la integral existe. Ahora supongamos que (en el caso contrario se procede de forma análoga)

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_a^b f + g - \left(\int_a^b f + \int_a^b g \right) \leq& S(f + g, P) - (I(f, P) + I(g, P)) \\ \leq& S(f, P) + S(g, P) - I(f, P) - I(g, P) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(b) Si $\lambda = 0$ es trivial. Consideremos que $\lambda > 0$, pues el caso $\lambda < 0$ se hace de forma análoga. Tenemos que $\sup(\mathrm{Im}(\lambda f)) = \lambda \sup(\mathrm{Im}(f))$ y $\text{ínf}(\mathrm{Im}(\lambda f)) = \lambda \, \text{ínf}(\mathrm{Im}(f))$. Dado que f es integrable, si $\varepsilon > 0$, tenemos que existe $P \in P([a, b])$ tal que

$$S(f, P) - I(f, P) < \frac{\varepsilon}{2\lambda}.$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} S(\lambda f, P) - I(\lambda f, P) =& \sum_{i=0}^{n-1} M_{\lambda f,i}(t_{i+1}-t_i) - \sum_{i=0}^{n-1} m_{\lambda f,i}(t_{i+1}-t_i) \\ =& \lambda \left[\sum_{i=0}^{n-1} M_{f,i}(t_{i+1}-t_i) - \sum_{i=0}^{n-1} m_{f,i}(t_{i+1}-t_i) \right] \\ <& \lambda \cdot \frac{\varepsilon}{\lambda} = \varepsilon. \end{aligned}$$

En el caso de $\lambda < 0$, ha de tenerse en cuenta que $\sup(\lambda A) = \lambda \inf(A)$ y $\inf(\lambda A) = \lambda \sup(A)$. Así, tenemos que $\forall P \in P([a,b])$,

$$S(\lambda f, P) = \lambda I(f, P) \quad \text{y} \quad I(\lambda f, P) = \lambda S(f, P).$$

□

Observación. Consideremos el conjunto $\mathcal{C}[a,b]$, que es conjunto de las funciones continuas en un intervalo. Tenemos que es un espacio vectorial. Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} T : \mathcal{C}[a,b] \to& \mathbb{R} \\ f \to& \int_a^b f. \end{aligned}$$

Tenemos que T es una aplicación lineal, en concreto es una forma lineal.

Teorema 6.5. Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrables.

(a) Si $f \leq g$, $\forall x \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

(b) Si $m \leq f \leq M$ con $m, M \in \mathbb{R}$, entonces

$$(b-a)\, m \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

(c) La función $|f|$ es integrable y además,

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Demostración. **(a)** Si $f \leq g$, tenemos que $M_{f,i} \leq M_{g,i}$ y $m_{f,i} \leq m_{g,i}$. Así $\forall P \in P([a,b])$ se tiene que,

$$S(f,P) \leq S(g,P) \quad \text{y} \quad I(f,P) \leq I(S,P).$$

Por tanto,

$$\int_a^b f = \overline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} g = \int_a^b g.$$

(b) Tomamos $g = M$ y $h = m$. Dado que se tiene que $h \leq f \leq g$, por el apartado **(a)** se tiene que

$$\int_a^b h \leq \int_a^b f \leq \int_a^b g \iff (b-a)\, m \leq \int_a^b f \leq M\,(b-a)\,.$$

(c) Primero demostramos que $|f|$ es integrable. Definimos

$$f^+ = \begin{cases} f(x)\,, & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases} \quad , \quad f^- = \begin{cases} 0, & f(x) \geq 0 \\ -f(x)\,, & f(x) < 0 \end{cases} \quad .$$

Se ve fácilmente que $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$. Vamos a ver que f^+ y f^- son integrables. Sin pérdida de generalidad, vamos a ver que f^+ es integrable. Sea $\varepsilon > 0$, existe $P \in P([a,b])$ tal que

$$\begin{aligned} S(f,P) - I(f,P) &= \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(t_{i+1} - t_i) \\ &= \left[\sum_{i \in \{j \,:\, M_j > 0\}} M_i (t_{i+1} - t_i) - \sum_{i \in \{j \,:\, m_j > 0\}} m_i (t_{i+1} - t_i) \right] \\ &+ \left[\sum_{i \in \{j \,:\, M_j \leq 0\}} M_i (t_{i+1} - t_i) - \sum_{i \in \{j \,:\, m_j \leq 0\}} m_i (t_{i+1} - t_i) \right] \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Tenemos que $\{j \,:\, M_j \leq 0\} \subset \{j \,:\, m_j \leq 0\}$ y siempre se tiene que $M_i - m_i \geq 0$. Además, tenemos que

$$M_j - m_j \geq M_j,\ M_j > 0, m_j \leq 0.$$

Similarmente, tenemos que $\{j \,:\, m_j \geq 0\} \subset \{j \,:\, M_j \geq 0\}$. Así, tenemos que

$$S\left(f^+, P\right) - I\left(f^+, P\right) = \left[\sum_{i \in \{j \,:\, M_j > 0\}} M_i (t_{i+1} - t_i) - \sum_{i \in \{j \,:\, m_j > 0\}} m_i (t_{i+1} - t_i) \right] < \varepsilon.$$

Así, hemos visto que f^+ es integrable, y f^-, de forma análoga también es integrable, por lo que $|f|$ es integrable.
Una vez demostrado que $|f|$ es integrable, tenemos que

$$\left| \int_a^b f \right| = \left| \int_a^b f^+ - f^- \right| = \left| \int_a^b f^+ - \int_a^b f^- \right| \leq \int_a^b f^+ + \int_a^b f^- = \int_a^b |f|\,.$$

□

6.4. Teorema Fundamental del Cálculo

Definición 6.7. Dada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrable, se define la función

$$F(x)=\int_a^x f(t)\ dt,\ x\in[a,b].$$

Ejemplo 6.5. Consideremos la función

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5},\ x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ \frac{6}{5},\ x\in\left(\frac{1}{2},1\right]\\ \frac{3}{10},\ x\in(1,2]\end{cases}.$$

Tenemos que f es integrable y

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}x,\ x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ \frac{1}{10}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{6}{5},\ x\in\left(\frac{1}{2},1\right]\\ \frac{7}{10}+(x-1)\cdot\frac{3}{10},\ x\in(1,2]\end{cases}.$$

Teorema 6.6. Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es integrable, tenemos que $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ es continua en $[a,b]$.

Demostración. Sea $c\in[a,b]$. Tenemos que

$$F(c+h)-F(c)=\int_a^{c+h} f(t)\ dt-\int_a^c f(t)\ dt=\int_c^{c+h} f(t)\ dt.$$

Por ser f continua en $[a,b]$ también está acotada, es decir, existe $M>0$ tal que $\forall t\in[a,b]$, $|f(t)|\le M$. Así, tenemos que

$$|F(c+h)-F(c)|=\left|\int_c^{c+h} f(t)\ dt\right|\le\int_c^{c+h}|f(t)|\ dt\le\int_c^{c+h} M=|h|\,M\to 0.$$

Por tanto, tenemos que $\lim\limits_{h\to 0}F(c+h)-F(c)=0$, por lo que $\lim\limits_{x\to c}F(x)=F(c)$. □

Teorema 6.7 (Teorema Fundamental del Cálculo)**.** Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. La función $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ es derivable en $c\in[a,b]$ y $F'(c)=f(c)$. [a]

[a] También se puede demostrar con la hipótesis de que f sea integrable en vez de continua. En este caso, $F'(c)=f(c)$ en los puntos donde f es continua.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $h>0$. Como hemos visto en la demostración anterior,

$$F(c+h)-F(c)=\int_c^{c+h} f(t)\ dt.$$

Sea $m_h = \text{ínf}\{f(t) \,:\, t \in [c, c+h]\}$ y $M_h = \sup\{f(t) \,:\, t \in [c, c+h]\}$. Entonces, tenemos que

$$hm_h \leq \int_c^{c+h} f(t)\ dt \leq M_h h.$$

Por lo que tenemos que

$$m_h \leq \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(t)\ dt = \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq M_h.$$

Dado que f es continua, tenemos que si $h \to 0$, $m_h, M_h \to f(c)$, por lo que $F'(c) = f(c)$. □

Observación. Una demostración alternativa es la siguiente. Si f es continua en $c \in [a, b]$ entonces si $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$ se tiene que $|f(c+h) - f(c)| < \varepsilon$. Así,

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(t)\ dt - \frac{f(c)}{h}\int_c^{c+h} dt\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_c^{c+h} f(t) - f(c)\ dt\right| \\ &\leq \frac{1}{|h|}\int_c^{c+h} |f(t) - f(c)|\ dt < \frac{1}{|h|}\varepsilon\,|h| = \varepsilon.\end{aligned}$$

Corolario 6.2 (Regla de Barrow)**.** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Si $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ verifica que $g'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(t)\ dt = g(b) - g(a).$$

Demostración. Sea $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ \ dt$. Por el teorema fundamental del cálculo, tenemos que $F'(x) = f(x) = g'(x)$. Así, tenemos que F y g tienen la misma derivada. Podemos recordar que, por el teorema del valor medio, $F(x) = g(x) + K$, $\forall x \in [a, b]$. En particular,

$$F(a) = \int_a^a f(t)\ dt = 0 \Rightarrow g(a) + K = 0.$$

Por tanto, tenemos que $F(x) = g(x) - g(a)$ y, por tanto,

$$F(b) = \int_a^b f(t)\ dt = g(b) - g(a).$$

□

Ejemplo 6.6. Consideremos $\displaystyle\int_0^a rx\ dx$. Antes lo tuvimos que resolver mediante el límite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} r\frac{ia}{n}$. Esto se complica si consideramos, por ejemplo, $f(x) = x^5$. Con la regla de Barrow, los cálculos se simplifican considerablemente:

$$\int_0^1 x^5\ dx = \left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Ejemplo 6.7. Sea $F(x)=\displaystyle\int_{x^2}^{\ln(x+1)}\sqrt{1+t^2}\,dt$. Vamos a calcular la derivada. Tenemos que $f(t)=\sqrt{1+t^2}$ es continua en $\mathbb{R}$, por lo que es integrable. Podemos ver que

$$F(x)=\int_{x^2}^{\ln(x+1)}\sqrt{1+t^2}\,dt=-\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt+\int_0^{\ln(x+1)}\sqrt{1+t^2}\,dt.$$

Definimos $G(x)=\displaystyle\int_0^x\sqrt{1+t^2}\,dt$, por lo que $F(x)=G(\ln(x+1))-G\left(x^2\right)$. Así, tenemos que

$$F'(x)=-\sqrt{1+\left(x^2\right)^2}\cdot 2x+\sqrt{1+(\ln(x+1))^2}\frac{1}{x+1}.$$

Teorema 6.8 (Regla de Barrow II)**.** Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es integrable y $g'(x)=f(x)$, $\forall x\in[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(t)\;dt=g(b)-g(a).$$

Demostración. Sea $P\in P([a,b])$. Por el teorema del valor medio, tenemos que existe $\xi_i\in(t_i,t_{i+1})$ tal que

$$m_i(t_{i+1}-t_i)\leq g(t_{i+1})-g(t_i)=g'(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)=f(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)\leq M_i(t_{i+1}-t_i).$$

Así, tenemos que

$$I(f,P)=\sum_{i=0}^{n-1}m_i(t_{i+1}-t_i)\leq\sum_{i=0}^{n-1}g(t_{i+1})-g(t_i)=g(b)-g(a)\leq\sum_{i=0}^{n-1}M_i(t_{i+1}-t_i)=S(f,P).$$

Así, tenemos que $\forall P\in P([a,b])$, $I(f,P)\leq g(b)-g(a)\leq S(f,P)$. También tenemos que $\forall P\in P([a,b])$ se cumple que

$$I(f,P)\leq\int_a^b f(t)\;dt\leq S(f,P).$$

Así, si $\displaystyle\int_a^b f(t)\;dt\geq g(b)-g(a)$ (el otro caso es análogo) y $\varepsilon>0$, existe $P\in P([a,b])$ tal que,

$$0\leq\int_a^b f(t)\;dt-(g(b)-g(a))\leq S(f,P)-I(f,P)<\varepsilon.$$

Por tanto, ha de ser que $\displaystyle\int_a^b f(t)\;dt=g(b)-g(a)$. □

Observación. Otra forma de demostrar la igualdad de este último teorema es deducir que, dado que

$$I(f,P)\leq g(b)-g(a)\leq S(f,P).$$

Por tanto, tenemos que $g(b) - g(a) \leq \overline{\int_a^b} f(t)\ dt$ y $\underline{\int_a^b} f(t)\ dt \leq g(b) - g(a)$. Así, dado que f es integrable se tiene que

$$\int_a^b f(t)\ dt = \underline{\int_a^b} f(t)\ dt \leq g(b) - g(a) \leq \overline{\int_a^b} f(t)\ dt = \int_a^b f(t)\ dt.$$

Por tanto, $\int_a^b f(t)\ dt = g(b) - g(a)$

Ejemplo 6.8. Consideremos la integral $\int_0^\pi \sin x\ dx$. Sabemos que $-\cos x = (\sin x)'$. Por tanto, tenemos que

$$\int_0^\pi \sin x\ dx = -\cos x|_0^\pi = 2.$$

6.5. Función logarítmica y exponencial

Ejemplo 6.9. Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ con $f(t) = \frac{1}{t}$.

Definición 6.8 (Logaritmo neperiano)**.** Para $x > 0$ se define **logaritmo neperiano** de x por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\ dt.$$

Observación. Tenemos que por el teorema fundamental del cálculo, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Similarmente, tenemos que $\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\ dt = 0$. Si $x > 1$, tenemos que

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\ dx > 0.$$

Si $x < 1$ se tiene que

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\ dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\ dt < 0.$$

Dado que la derivada es siempre positiva, tenemos que es una función creciente y, como $(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$, la función es cóncava. Vamos a calcular los límites.

$$\lim_{n\to\infty} \ln n = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{t}\ dt \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \infty.$$

De este resultado y de que f es creciente, se deduce que $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$. Por otro lado, vamos a calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x$.

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{\frac{1}{n}} \frac{1}{t}\, dt = \lim_{n\to\infty} -\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{t}\, dt \leq \lim_{n\to\infty} -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\frac{1}{k}} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n\to\infty} -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = -\infty.$$

Dado que f es creciente, tenemos que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

Teorema 6.9.

$$\forall x, y > 0,\ \ln xy = \ln x + \ln y.$$

Demostración. Sea y fijo. Definimos $g(x) = \ln yx$. Tenemos que $g'(x) = \dfrac{1}{yx} \cdot y = \dfrac{1}{x}$. Como consecuencia del teorema del valor medio, tenemos que $g(x) = \ln x + K$. Tenemos que $g(1) = \ln 1 + K$, por lo que $K = g(1) = \ln y$. Así, tenemos que $g(x) = \ln xy = \ln x + \ln y$. □

Proposición 6.2. **(a)** $\forall x > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln x^n = n \ln x$.

(b) $\forall x > 0$, $\ln \dfrac{1}{x} = -\ln x$.

(c) $\forall x, y > 0$, $\ln \dfrac{x}{y} = \ln x - \ln y$.

Demostración. **(a)** Tenemos que si $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln x^n = \ln(x + \cdots + x) = n \ln x.$$

(b)

$$0 = \ln \frac{x}{x} = \ln x + \ln \frac{1}{x} \iff \ln \frac{1}{x} = -\ln x.$$

(c)

$$\ln \frac{x}{y} = \ln x + \ln \frac{1}{y} = \ln x - \ln y.$$

□

Observación. Tenemos que $\ln x$ es monótona creciente y se tiene que $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$. Así, tenemos que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\exists x_0$ tal que $\ln x_0 = \lambda$. Como consecuencia del valor medio, dado que $(\ln x)' > 0$, se tiene que $\ln x$ es inyectiva. Por tanto, cabe definir su inversa.

Definición 6.9 (Función exponencial)**.** Definimos la función

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to (0, \infty) \\ x &\to \exp(x) = \ln^{-1} x. \end{aligned}$$

Observación. Es decir, $\exp x = y \iff \ln y = x$.

Por lo calculado anteriormente, tenemos que $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp x = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \exp x = \infty$. Además tenemos que

$$(\exp x)' = \frac{1}{\ln' \exp x} = \exp x > 0.$$

Por tanto, tenemos que es creciente y convexa.

Teorema 6.10.

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y.$$

Demostración. Sean $x' = \exp x$ e $y' = \exp y$. Tenemos que $\ln x' = x$ y $\ln y' = y$. Así, tenemos que

$$\exp(x+y) = \exp(\ln x' + \ln y') = \exp(\ln x'y') = x'y' = \exp x \cdot \exp y.$$

□

Notación. Se define $e = \exp 1$.

Observación. Por tanto, tenemos que $\exp n = \exp(1 + \cdots + 1) = e^n$.

Notación. Se define $\exp x = e^x$.

Teorema 6.11.

$$\lim_{x\to\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1.$$

Demostración.

$$\lim_{x\to\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = 1.$$

□

Observación. Por tanto, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$. Dado que el logaritmo es continuo y monótono, se tiene que [3]

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp 1 = e.$$

[3]Sabemos que este límite converge a $l \in \mathbb{R}$ porque es monótono y está acotado superiormente. De aquí se deduce que $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \ln l = 1$, y por ser el logaritmo inyectivo, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Definición 6.10. **(a)** $\forall a > 0$ y $\forall x \in \mathbb{R}$, se define $a^x = e^{x \ln a}$.

(b) Si $a > 0$ y $a \neq 1$, se denomina la inversa de a^y al $\log_a x = (a^y)^{-1}$.

Proposición 6.3. **(a)** $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$.

(b) $\forall a \in \mathbb{R}$, $a^1 = a$.

(c) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

(d) $\log_a = \dfrac{\log_x}{\log_a}$.

(e) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

Demostración. **(a)**

$$\left(a^b\right)^c = e^{c \ln a^b} = e^{c \ln e^{b \ln a}} = e^{cb \ln a} = a^{bc}.$$

(b)

$$a^1 = e^{\ln 1} = e^0 = 1.$$

(c)

$$a^{x+y} = e^{(x+y) \ln a} = e^{x \ln a + y \ln a} = e^{x \ln a} \cdot e^{y \ln a} = a^x a^y.$$

(d)

$$a^{\log_a x} = e^{\log_a x \cdot \ln a} = e^{\ln x} = x.$$

□

Observación. A partir de estas funciones se definen las funciones hiperbólicas y se pueden estudiar sus propiedades.

Proposición 6.4. **(a)** Sea una función tal que $f'(x) = f(x)$, entonces existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = Ke^x$.

(b) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración. **(a)** Sea $f(x)$ tal que $f'(x) = f(x)$. Sea $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^x}$. Tenemos que

$$g'(x) = \frac{f'(x) e^x - f(x) e^x}{(e^x)^2} = 0.$$

Por tanto, tenemos que $g(x) = K$. Por tanto, se obtiene que $f(x) = Ke^x$.

(b) Aplicamos L'Hôpital n veces,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n!} = \infty.$$

□

6.6. Criterio de integrabilidad de Lebesgue

Definición 6.11 (Contenido cero)**.** Se dice que $A \subset \mathbb{R}$ tiene **contenido cero** si $\forall \varepsilon > 0$, existe una sucesión de intervalos abiertos [a] $\{(a_n, b_n) \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ tal que

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n) \ \text{ y } \ \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) \leq \varepsilon.$$

[a]Se pueden repetir intervalos.

Ejemplo 6.10. Sea $A = \{a\} \subset \mathbb{R}$. Sea $\varepsilon > 0$, tenemos que $A \subset \left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Así, $a + \frac{\varepsilon}{2} - \left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$. Tenemos que este conjunto tiene contenido cero [4] .

Ejemplo 6.11. Sea $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ un conjunto finito de números reales. Vamos a ver que tiene contenido cero. Sea $\varepsilon > 0$. Sea $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Cogemos la familia de intervalos,

$$\left\{\left(x_i - \frac{\varepsilon}{2n}, x_i + \frac{\varepsilon}{2n}\right) \ : \ i = 1, \ldots, n\right\}.$$

Así, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{\varepsilon}{2n} - \left(x_i - \frac{\varepsilon}{2n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

Ejemplo 6.12. Sea $A = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Sea $\varepsilon > 0$, cogemos

$$(a_n, b_n) = \left(r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right).$$

Así, tenemos que $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n)$. Así, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[r_n + \frac{\varepsilon}{2} - \left(r_n - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right] = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon.$$

Así, A tiene contenido cero.

Observación. De estos ejemplos se deduce que cualquier conjunto finito o numerable de $\mathbb{R}$ tiene contenido cero.

[4]En este caso, hemos cogido la sucesión de intervalos que contiene un intervalo abierto $\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ y el resto son el intervalo $(a, a) = \emptyset$.

Teorema 6.12 (Teorema de integrabilidad de Lebesgue)**.** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Tenemos que f integrable en $[a, b]$ si y solo si el conjunto de discontinuidades de f tiene contenido cero.

Proposición 6.5. Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ monótona. Entonces existe $\displaystyle\int_a^b g(x)\ dx$.

Demostración. Dado que el conjunto de discontinuidades de una función monótona es a lo más numerable, tenemos quetiene contenido cero, por lo que la función es integrable. □

Teorema 6.13. Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua con $g([a, b]) \subset \operatorname{dom}(f)$. Tenemos que $f \circ g$ es integrable en $[a, b]$.

Demostración. Dado que g es integrable, tenemos que el conjunto de sus discontinuidades tiene contenido cero. Como f es continua, $f \circ g$ es continua donde g es continua. Así, el conjunto de discontinuidades de g y de $f \circ g$ es el mismo, por lo que el conjunto de discontinuidades de $f \circ g$ tiene contenido cero y, por el teorema anterior se tiene que $f \circ g$ es integrable. □

Corolario 6.3. Si f es integrable en $[a, b]$, f^2 también lo es.

Demostración. Si $h(x) = x^2$, se tiene que $f^2 = h \circ f$. Dado que h es continua y f es integrable, por la proposición anterior se tiene que f^2 es integrable. □

Corolario 6.4. Si f y g son integrables, tenemos que fg es integrable.

Demostración. Si f y g son integrables, tenemos que $f + g$ es integrable. Por el corolario anterior tenemos que $(f + g)^2$ es integrable. Por tanto, tenemos que

$$fg = \frac{(f + g)^2 - f^2 - g^2}{2}.$$

Por lo que fg es integrable. □

Ejemplo 6.13. Consideremos una función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ con $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$ tal que

$$f(x) = \frac{n^2}{2n + 1}\left[(n + 1)x - 1\right]\left[(n + 1)x + 1\right], \quad \frac{1}{n + 1} \le x < \frac{1}{n}.$$

Si calculamos

$$\lim_{x \to \frac{1}{n}} f(x) = 1.$$

Así, en todos los $\frac{1}{n} \in [0,1]$ tenemos que el límite tiende a 1. Además tenemos que

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0.$$

Entonces, tenemos que la función no es continua en los puntos donde $x = \frac{1}{n}$. Además, tenemos que

$$f(x) = \frac{n^2}{2n+1}\left[(n+1)^2 x^2 - 1\right].$$

Es decir, se parece a parábolas que tienden a 1 en los puntos de la forma $\frac{1}{n}$. Si fuera integrable, tendríamos que

$$\int_0^1 f(x)\ dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x)\ dx.$$

Vamos a demostrar que es integrable con el criterio de integrabilidad de Riemann. Sea $\varepsilon > 0$ cogemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces, tenemos que $f|_{\left[\frac{1}{n_0},1\right]}$ es integrable porque continene un número finito de discontinuidades. Entonces, existe $P' \in P\left(\left[\frac{1}{n_0},1\right]\right)$, tal que

$$S\left(f|_{\left[\frac{1}{n_0},1\right]}, P'\right) - I\left(f|_{\left[\frac{1}{n_0},1\right]}, P'\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora, consideremos la partición $P = \{0\} \cup P'$. Tenemos que

$$S(f,P) - I(f,P) = \frac{1}{n_0} + S(f,P') - (0 + I(f,P')) < \frac{1}{n_0} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ejemplo 6.14. Consideremos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable. Vamos a demostrar que $\int_a^b f(t)\ dt = \int_{a+c}^{b+c} f(t-c)\ dt$. Sea $g(t) = f(t-c)$, tenemos que $\operatorname{dom}(g) = [a+c, b+c]$. Tenemos que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P \in P([a,b])$ tal que $S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon$. Tenemos que $P = \{t_0 = a, t_1, \ldots, t_n = b\}$. Ahora consideramos la partición

$$P' = \{t'_0, t'_1, \ldots, t'_n\},\ t'_i = t_i + c,\ \forall i = 0, \ldots, n.$$

Así, tenemos que $S(f,P) = S(g,P')$ y $I(f,P) = I(g,P')$. Por tanto,

$$S(g,P') - I(g,P') < \varepsilon.$$

Así, tenemos que $f(t-c)$ es integrable. Ahora demostramos la igualdad:

$$I(g,P') \leq \int_a^b f(t)\ dt \leq S(g,P').$$

Por tanto, $\int_a^b f(t)\ dt = \int_{a+c}^{b+c} f(t-c)\ dt$.

Ejemplo 6.15. Consideremos $f(x) = \log_{e^x}(\sin x)$. Vamos a calcular su derivada. Tenemos que

$$f(x) = \log_{e^x}(\sin x) = \frac{\ln \sin x}{\ln e^x} = \frac{\ln \sin x}{x}.$$

Ahora resulta fácil ver que

$$f'(x) = \frac{x\frac{\cos x}{\sin x} - \ln \sin x}{x^2} = \frac{\cos x - \sin x \ln \sin x}{x^2 \sin x}.$$

Ejemplo 6.16. Calculemos el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{x^3}.$$

Aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{6} = 0.$$

Ejemplo 6.17. Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, \ x \neq 0 \\ 0, \ x = 0 \end{cases}.$$

Tenemos que calcular f', f y $f^{(n)}(0)$ y estudiar su continuidad. Empezamos por esto último. El único problema está en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Por tanto, f es continua en $\mathbb{R}$. Para pintar la función puede resultar útil saber que $\lim_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} = 1$. Ahora derivamos,

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = \begin{cases} < 0, \ x < 0 \\ > 0, \ x > 0 \end{cases}.$$

Calculamos la derivada en 0:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h^2}}}.$$

Sea $y = \dfrac{1}{h}$, si $h \to 0$, $y \to \infty$, así,

$$f'(0) = \lim_{y\to\infty} \frac{y}{e^{y^2}} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{2ye^{y^2}} = 0.$$

Así, tenemos que

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, \ x \neq 0 \\ 0, \ x = 0 \end{cases}.$$

Ahora calculamos la segunda derivada.

$$f''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{h^3} e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{h^4}}{e^{\frac{1}{h^2}}} = \lim_{y\to\infty} \frac{2y^4}{e^{y^2}} = 0.$$

Para $x \neq 0$,

$$f'(x) = \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Supongamos que

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, \ x \neq 0 \\ 0, \ x = 0 \end{cases}.$$

Ahora consideremos el caso $n+1$. Vamos a calcular $f^{(n+1)}$. Si $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f(n+1)(x) =& P_n'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} + P_n\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{2}{x^3}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \\ =& e^{-\frac{1}{x^2}} P_n'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + P_n\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{2}{x^3}\right) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Ahora si $x = 0$,

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{P_n\left(\frac{1}{h}\right) e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{P_n\left(\frac{1}{h}\right)\frac{1}{h}}{e^{-\frac{1}{h^2}}} = \lim_{y\to\infty} \frac{P_n(y)\, y}{e^{y^2}} = 0.$$

6.7. Cálculo de primitivas

Sabemos que si $\exists \displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ y $\exists g$ tal que $g'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$, entonces, por la regla de Barrow

$$\int_a^b f(t)\ dt = g(b) - g(a).$$

Definición 6.12 (Primitiva)**.** Dada f, se dice que g es una **primitiva** (o **integral**) de f si $g' = f$.

Observación. Por la regla de Barrow, el cálculo de integrales se reduce muchas veces al cálculo de primitivas.

Ejemplo 6.18. Consideremos $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\, dx$. Tenemos que $(-\cos x)' = \sin x$, por lo que

$$\int_0^\pi \sin x\, dx = [-\cos x]_0^\pi = 2.$$

Apéndice A

Productos infinitos

Sea $\{b_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ y sea $B_n = \prod_{j=1}^{n} b_j$. Se dice que el producto infinito converge si

$$\prod_{j=1}^{\infty} b_j = \lim_{n\to\infty} B_n = l > 0.$$

Ejemplo A.1. **(i)** Sea $b_j = \frac{1}{j} > 0$. Entonces,

$$B_n = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = \frac{1}{n!} \to 0.$$

No converge.

(ii) Sea $b_j = 1 - \frac{1}{j^2}$, $j \geq 2$. Tenemos que

$$b_j = 1 - \frac{1}{j^2} = \frac{j^2-1}{j^2} = \frac{(j+1)(j-1)}{j^2}.$$

Tenemos que,

$$\begin{aligned} B_3 =& \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3} = \frac{4}{2\cdot 3} \\ B_4 =& \frac{4}{2\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4} = \frac{5}{2\cdot 4} \\ &\vdots \\ B_n =& \frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(iii) Calcular $\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{j^2}\right)$.

Teorema A.1. Sea $b_j = 1 + a_j,\ a_j > 0$. Entonces, $\prod_{j=1}^{\infty} b_j$ converge si y solo si $\sum_{j=1}^{\infty} a_j < \infty$. En particular, si $\prod_{j=1}^{\infty} b_j$ converge, entonces $b_j \to 1$.

Demostración. Por continuidad del logaritmo, si $\log\left(\prod_{j=1}^{\infty} b_j\right)$, lo de dentro también debe converger. Así, tenemos que

$$\log\left(\prod_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \log\left(1 + a_j\right).$$

Sabemos que $\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$. Así,

$$\frac{\log(1 + a_j)}{a_j} \to 1.$$

Por comparación, $\sum_{j=1}^{\infty} \log(1 + a_j) < \infty \iff \sum_{j=1}^{\infty} a_j < \infty$. □

Ejemplo A.2. Así, tenemos que $\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{j^2}\right)$ converge pues $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \infty$.

Apéndice B

Reordenamiento de series

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biyectiva. Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, qué pasa con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$?

Teorema B.1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Sin embargo, Riemann probó que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge absolutamente y tomamos $c \in \mathbb{R}$, entonces existe $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biyectiva tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = c$.

Ejemplo B.1. Considera $a_n = (-1)^n$, sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = (-1+1) + (-1+1) + \cdots = 0 + 0 + \cdots .$$

Similarmente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + (1 + -1) + (-1+1) + \cdots = -1.$$

Apéndice C

Series de potencias

Anteriormente, hemos visto series numéricas, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, con $a_n \in \mathbb{R}$. Ahora, queremos estudiar $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in I$. En particular, nos interesan funciones del tipo $f_n(x) = a_n (x - x_0)^n$, $x_0 \in I$. Queremos ver si una f cualquiera la puedo reescribir de la manera:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n .$$

Esta es su serie de Taylor si $f \in \mathcal{C}^{\infty}(I)$ (se puede derivar infinitas veces) y decimos que $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Ejemplo C.1. (i) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

(ii) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

(iii) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Apéndice D

Función logarítmica

Sea $f(x) = e^x$ con $x \in \mathbb{R}$. Como $e > 1$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Similarmente, sabemos que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ y $f(0) = 1$. Tenemos que f es inyectiva, pues si $f(x) = f(y)$, entonces

$$e^{x-y} = 1 \Rightarrow x - y = 0 \iff x = y.$$

Además, si $x < y$,

$$e^x = e^{x-y+y} = e^{x-y}e^y < e^y.$$

Así, f es estrictamente creciente y $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ es exhaustiva. Entonces, $\forall y \in (0, \infty)$, $\exists! x \in \mathbb{R}$ tal que $e^x = y$. Entonces, podemos concluir que $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ es biyectiva. Por lo tanto, podemos definir la función inversa de e^x, que denotaremos como $\log x = \ln x$ [1]. Entonces

$$\log : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ \log(e^x) = x \iff e^{\log x} = x.$$

Observación. En general, si $a > 0$ y $a \neq 1$, se define

$$\log_a x = y \iff a^y = x.$$

Ejemplo D.1. Si $a = \frac{1}{2}$, tenemos que $\lim_{x\to\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$. Similarmente, $\lim_{x\to 0} \log_{\frac{1}{2}} x = \infty$.

Proposición D.1. **(i)** $\log xy = \log x + \log y$, con $x, y > 0$.

(ii) $\log x^a = a \log x$ con $x > 0$ y $a \in \mathbb{R}$.

(iii) Cambio de base. Sean $a, b > 0$ con $a, b \neq 1$ y $x > 0$. Tenemos que

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

[1] Vamos a considerar que log no está en base 10 sino en base e.

(iv) Si $a > 0$ con $a \neq 1$, y $x, y > 0$,
$$x^{\log_a y} = y^{\log_a x}.$$

Demostración. **(i)** Tenemos que si $\log xy = a$, $e^a = xy$. Sea $a_1 = \log x$ y $a_2 = \log y$. Entonces, $x = e^{a_1}$ e $y = e^{a_2}$. Entonces, tenemos que

$$e^a = xy = e^{a_1} e^{a_2} = e^{a_1 + a_2} \Rightarrow a = a_1 + a_2.$$

Entonces, $\log xy = \log x + \log y$.

(ii) Sea $\log x^a = b$. Entonces, $x^a = e^b$. Si $a_1 = \log x$, $e^{a_1} = x$. Así,

$$(e^{a_1})^a = e^{aa_1} = e^b.$$

Por tanto, $b = aa_1$ y $\log x^a = a \log x$.

(iii) Tenemos que
$$\log_a b \cdot \log_b x = \log_a b^{\log_b x} = \log_a x.$$

(iv) Sea $x \neq 1$,
$$\log_a y = \log_x y^{\log_a x} = \log_a x \log_x y = \log_a x \frac{\log_a y}{\log_a x}.$$

□

Observación. Queremos ver que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$. Tenemos que

$$\frac{\log(1+x)}{x} = \frac{1}{x} \log(1+x) = \log(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Sea $y = \dfrac{1}{x}$, si $x \to 0$, $y \to \infty$. Así,

$$\log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y.$$

Así,
$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to \infty} \log\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = \log e = 1.$$

Ejemplo D.2. Sean $a, b > 0$ y sea $x_n = \left(\dfrac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$. Tenemos que

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{\frac{b}{a}}}{2}\right)^n = a\left(\frac{1 + \sqrt[n]{\frac{b}{a}}}{2}\right)^n.$$

Sea $r = \dfrac{b}{a}$,

$$\left(\frac{1+\sqrt[n]{\frac{b}{a}}}{2}\right)^n = \left(\frac{1+\sqrt[n]{r}}{2}\right)^n = \left(1-1+\frac{1+\sqrt[n]{r}}{2}\right)^n = \left(1+\frac{\sqrt[n]{r}-1}{2}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\frac{2}{\sqrt[n]{r}-1}}\right)^n$$

$$= \left(1+\frac{1}{\frac{2}{\sqrt[n]{r}-1}}\right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{r}-1}\frac{\sqrt[n]{r}-1}{2}n}.$$

Entonces, tenemos que calcular $\lim_{n\to\infty} n\dfrac{\sqrt[n]{r}-1}{2}$. Tenemos que

$$n\frac{\sqrt[n]{r}-1}{2} = \frac{n}{2}\underbrace{\frac{\sqrt[n]{r}-1}{\log\sqrt[n]{r}}}_{1}\log\sqrt[n]{r} \to \frac{1}{2}\log r.$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2}{\sqrt[n]{r}-1}}\right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{r}-1}\frac{\sqrt[n]{r}-1}{2}n} = e^{\frac{1}{2}\log r} = \sqrt{r}.$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = a\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{ab}.$$

Observación. Sabemos que $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\log(x+1)} = 1$. Por lo tanto, si $x_n > 0$, con $x_n \to 0$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\log(x_n+1)} = 1.$$

Tomando, $x_n = \sqrt[n]{r}-1 \to 0$.

Ejemplo D.3. Consideremos $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{\sin x} = 1$, pues

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{\sin x} = \frac{\log(1+x)}{x}\cdot\frac{x}{\sin x} = 1\cdot 1 = 1.$$

Apéndice E

Construcción de $\mathbb{R}$

Sabemos qué son los números naturales, $\mathbb{N}$. Con ellos definimos los números enteros, $\mathbb{Z}$, y a partir de estos se introduce $\mathbb{Q}$, el cuerpo de los números racionales. A partir de aquí, existen diversas construcciones de los números reales $\mathbb{R}$. Veamos una que está basada en la siguiente idea: vamos a interpretar un número real como una sucesión de Cauchy.

Sea $\mathcal{C} = \left\{ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q} \,:\, \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ es de Cauchy} \right\}$. Es decir, $\forall \varepsilon > 0$ con $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq n_0$, $|x_n - x_m| < \varepsilon$. En $\mathcal{C}$ se define la siguiente relación de equivalencia $\mathcal{R}$:

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \,\mathcal{R}\, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \iff \lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0.$$

A partir de esto, definimos

$$\mathbb{R} := \mathcal{C}/\mathcal{R} = \left\{ [\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}] \,:\, \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C} \right\}.$$

En $\mathbb{R}$ definimos la suma:

$$[\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}] + [\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}] = [\{x_n + y_n\}_{n\in\mathbb{N}}].$$

Esta definición es coherente con $\mathcal{R}$, pues si $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in [\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}]$ y $\{y'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in [\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}]$. Entonces tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} (x'_n + y'_n - (x_n + y_n)) = 0 \iff [\{x'_n + y'_n\}] = [\{x_n + y_n\}].$$

Análogamente, definimos el producto de la siguiente manera:

$$[\{x_n\}] \cdot [\{y_n\}] = [\{x_n y_n\}].$$

Primero vamos a ver que el producto de sucesiones de Cauchy también es sucesión de Cauchy, para poder hablar de su clase de equivalencia.

$$x_n y_n - x_m y_m = x_n y_n - x_m y_m + x_n y_m - x_n y_m = x_n (y_n - y_m) + y_m (x_n - x_m) \to 0.$$

Si $\{x'_n\} \in [\{x_n\}]$ y $\{y'_n\} \in [\{y_n\}]$. Queremos ver que $[\{x'_n y'_n\}] = [\{x_n y_n\}]$.

$$x'_n y'_n - x_n y_n = x'_n y'_n - x_n y'_n + x_n y'_n - x_n y_n = y'_n (x'_n - x_n) + x_n (y'_n - y_n) \to 0.$$

Por tanto, el producto está bien definido.

Definición E.1. Tenemos que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ tal que si $x \in \mathbb{Q}$, entonces $x \to [\{x\}]$, donde

$$\{x\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x, x, \ldots, x, \ldots\}.$$

Así, definimos $0 = [\{0\}]$ y $1 = [\{1\}]$. Si $x \in \mathbb{R}$, con $x = [\{x_n\}]$, definimos

$$-x = [\{-x_n\}].$$

Así, hemos definido el elemento neutro de la suma y del producto, así como el inverso de la suma. Ahora tenemos que encontrar el inverso del producto. Veamos que existe $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in [\{x_n\}] \in \mathbb{R}/\{0\}$ tal que para algún $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$, o bien $x'_n > \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$ o $x'_n < -\varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$. En efecto, como x_n no tiende a 0, existe $\varepsilon > 0$ con $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ tal que $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists n \geq n_0$ tal que $|x_n| > 2\varepsilon$. Tomando $k \in \mathbb{N}$, exiset $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{n_k}| > 2\varepsilon$. Como la sucesión es de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m, n \geq j$, $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \geq j$. Por tanto, $\forall m \geq j$, $|x_{n_k} - x_m| < \varepsilon$, por lo que $x_m > \varepsilon$. Definimos ahora

$$x'_n = \begin{cases} 1, \; 1 \leq n \leq j \\ x_n, \; n > j \end{cases}.$$

Así, $[\{x'_n\}] = [\{x_n\}]$ y ahora podemos definir

$$[\{x_n\}]^{-1} = \frac{1}{[\{x_n\}]} = \left[\left\{\frac{1}{x'_n}\right\}\right].$$

Entonces, claramente se cumple que $[\{x_n\}] \cdot [\{x_n\}]^{-1} = 1$. Sólamente queda ver que $[\{x_n\}]^{-1}$ es sucesión de Cauchy. Así, podemos probar que $(\mathbb{R}, +\cdot)$ es un cuerpo abeliano.

Definición E.2. $[\{x_n\}] > 0$ si y solo si existe $\varepsilon > 0$ con $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, para el que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$,

$$\begin{cases} x_n > \varepsilon, \; \forall n \geq n_0 \\ \text{o} \\ x_n < -\varepsilon, \; \forall n \geq n_0. \end{cases}$$

Así, tenemos que $(\mathbb{R}, +, \cdot, >)$ es un cuerpo abeliano totalmente ordenado y arquimediano.