

# Estructuras Algebraicas

Victoria Torroja Rubio

8/9/2025

# Índice general

<b>0. Preliminares</b>	<b>3</b>
0.1. Divisibilidad . . . . .	3
0.2. Factorización . . . . .	6
0.3. Aritmética modular . . . . .	7
<b>1. Grupos</b>	<b>8</b>
1.1. Subgrupos . . . . .	10
1.2. Homomorfismos . . . . .	12
1.3. Grupos cíclicos . . . . .	14
1.4. Grupos finitamente generados . . . . .	20
1.4.1. Grupo diédrico $D_n$ . . . . .	21
1.4.2. Generadores en grupos de congruencias . . . . .	23
<b>2. Cocientes y homomorfismos</b>	<b>25</b>
2.1. Subgrupos normales . . . . .	28

**Profesor:** Adrián Barcelo

**Correo:** abacelo@ucm.es

**Despacho:** 443

**Evaluación**

- 15 % Trabajo a entregar
- 20 % Ejercicios/prácticas a entregar/hacer
- 65 % Examen final (hay que sacar al menos un 4 para que haga media con la evaluación continua)

# Capítulo 0

## Preliminares

Recordamos que  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  es el conjunto de los **números naturales** y  $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  es el conjunto de **números enteros**. Tomamos la suma y el producto tal y como los conocemos  $(+, \cdot)$ . Además, dotas a  $\mathbb{N}$  y  $\mathbb{Z}$  del orden que conocemos  $(<)$ . En  $\mathbb{N}$ , tenemos el **principio del buen orden**.

**Teorema 0.1 (Principio del buen orden).** Todo subconjunto no vacío de  $\mathbb{N}$  tiene un elemento mínimo.

Recordemos también que dado  $z \in \mathbb{Z}$ , su valor absoluto  $|z|$  es asignar el valor positivo de  $z$ . En concreto,

$$|z| = \begin{cases} z, & z \geq 0 \\ -z, & z < 0 \end{cases}.$$

Además, se cumple que

$$|z_1| \leq |z_1 \cdot z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z} / \{0\}.$$

### 0.1. Divisibilidad

**Teorema 0.2.** Sean  $n, m \in \mathbb{Z}$  con  $m \neq 0$ . Así, existen  $q, r \in \mathbb{Z}$  únicos tales que  $n = mq + r$  y  $0 \leq r < |m|$ .

**Demostración.** Estudiemos primero la existencia. Supongamos que  $m > 0$  y consideremos el siguiente subconjunto

$$X = \{n - mk \mid k \in \mathbb{Z}, n - mk \geq 0\} \subset \mathbb{N}.$$

Tenemos que este subconjunto es no vacío. En efecto, si  $n \geq 0$  tenemos que  $n = n - m \cdot 0 \in X$ . Si  $n < 0$ , tenemos que  $n(1 - m) \in X$ . Así, tenemos que  $X \neq \emptyset$ . Así, podemos aplicar el principio del buen orden, por lo que existe un elemento mínimo  $r$ . Así, tenemos que existe  $q \in \mathbb{Z}$  tal que

$$r = n - mq, \quad r \geq 0.$$

Además, tenemos que

$$n - (q + 1)m = n - qm - m = r - m < r.$$

Por tanto,  $n - (q + 1)m \notin X$  por ser  $r$  el mínimo. Entonces, necesariamente tenemos que  $n - (q + 1)m < 0$ , por lo que  $r < m \leq |m|$ . Ahora, si  $m < 0$ , hemos visto que  $r_1, q_1 \in \mathbb{Z}$  tales que  $n = (-m)q_1 + r_1$  con  $0 \leq r_1 < |m|$ . Es trivial que esto demuestra el teorema, puesto que  $-q_1 \in \mathbb{Z}$ .

Ahora demostramos la unicidad. Supongamos que existen  $q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$  tales que

$$n = mq_1 + r_1, \quad n = mq_2 + r_2.$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $r_1 \leq r_2$ . Así, tenemos que

$$(q_1 - q_2)m = r_2 - r_1 \Rightarrow |q_1 - q_2||m| = r_2 - r_1.$$

Así, si  $r_1 \neq r_2$ , tenemos que  $|q_1 - q_2| \geq 1$ . Por tanto, se tiene que

$$|q_1 - q_2||m| \geq |m| > r_2 \geq r_2 - r_1.$$

Así, hemos obtenido una contradicción, por lo que debe ser que  $r_1 = r_2$  y, consecuentemente,  $q_1 = q_2$ .  $\square$

**Observación.** A los números  $n, m, q$  y  $r$  los llamamos **dividendo**, **divisor**, **cociente** y **resto**, respectivamente.

**Definición 0.1.** Dados  $a, b \in \mathbb{Z}$ , decimos que  $a$  divide a  $b$ ,  $a|b$ , si existe  $c \in \mathbb{Z}$  tal que  $b = ac$ .

Recordemos que si  $c|a$  y  $c|b$ , entonces  $c|a + b$ . En efecto,

$$a + b = ck_1 + ck_2 = c(k_1 + k_2).$$

**Proposición 0.1.** Sean  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ,

**Reflexiva.**  $a|a$ .

**Antisimétrica.**  $a|b, b|a \Rightarrow a = b$ .

**Transitiva.**  $a|b, b|c \Rightarrow a|c$ .

**Demostración.** La propiedad reflexiva es trivial, puesto que  $a = a \cdot 1, \forall a \in \mathbb{Z}$ . En cuanto a la propiedad antisimétrica, tenemos que si  $a|b$  y  $b|a$ , entonces  $a = \lambda_1 b$  y  $b = \lambda_2 a$ . Así, tenemos que  $a \leq b$  pero también tenemos que  $b \leq a$ , por lo que debe ser que  $b = a$ . Finalmente, para demostrar la propiedad transitiva basta ver que si  $b = \lambda a$  y  $c = \mu b$ , se tiene que  $c = \mu\lambda a$ , por lo que  $a|c$ .  $\square$

**Observación.** Tenemos entonces, que la relación de divisibilidad es una **relación de orden parcial**.

**Definición 0.2 (Máximo común divisor).** Sean  $n, m \in \mathbb{Z}$  y  $d \in \mathbb{Z}$ . Diremos que  $d$  es **divisor común** de  $n$  y  $m$  si  $d|n$  y  $d|m$ . Llamaremos **máximo común divisor** de  $n$  y  $m$ ,  $\text{mcd}(n, m)$  al más grande de los divisores comunes positivos.

**Observación.** Dado que el máximo común divisor es positivo, es único.

**Proposición 0.2.** Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$ , entonces se cumple:

1. Existe el máximo común divisor de  $a$  y  $b$ .
2. **Identidad de Bézout.** Existen  $x, y \in \mathbb{Z}$  tales que si  $d = \text{mcd}(a, b)$  entonces  $d = ax + by$ .

**Demostración.** La demostración de 1 y 2 es la misma. Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$  y consideremos el siguiente conjunto:

$$S = \{\lambda a + \mu b : \lambda, \mu \in \mathbb{Z}, \lambda a + \mu b > 0\} \subset \mathbb{N}.$$

Está claro que  $S \neq \emptyset$ , pues supongamos sin pérdida de generalidad que  $a > b$ , entonces  $a - b > 0 \in S$ . Así, por el principio del buen orden, tenemos que existe un elemento mínimo de  $S$  al que llamaremos  $d$ . Así, existen  $x, y \in \mathbb{Z}$  tales que  $d = ax + by$ . Vamos a ver que  $d = \text{mcd}(a, b)$ . En primer lugar, vamos a ver que es divisor común de  $a$  y  $b$ . Tenemos que, por el algoritmo de la divisibilidad, existen  $q, r \in \mathbb{Z}$  con  $0 \leq r < d$  tales que

$$a = qd + r.$$

Si  $r > 0$ , tenemos que

$$r = a - qd = a - q(ax + by) = (1 - qx)a + yb \in S.$$

Así, tenemos que  $r \geq d$  pero también  $r < d$ , lo que es una contradicción. Por tanto, debe ser que  $r = 0$ , por lo que  $d|a$ . De manera análoga se demuestra que  $d|b$ . Así, queda demostrado que  $d$  es divisor común de  $a$  y  $b$ . Ahora, supongamos que  $d'$  es también divisor común de  $a$  y  $b$ . Así, existen  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$  tales que  $a = k_1 d'$  y  $b = k_2 d'$ . De esta manera queda que

$$d = xa + yb = xk_1 d' + yk_2 d' = (xk_1 + yk_2) d'.$$

Así, tenemos que  $d' \leq d$ , por lo que  $d = \text{mcd}(a, b)$ . □

Así, sabemos que existe el máximo común divisor, pero ahora necesitamos una manera de calcularlo. Para ello haremos uso del algoritmo de Euclides, que nos va a permitir también encontrar una identidad de Bézout.

**Lema 0.1.** Sean  $a, b, r \in \mathbb{Z}$  tales que  $0 \leq r < b$ . Si existe  $q \in \mathbb{Z}$  tal que  $a = bq + r$ , entonces  $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, r)$ .

**Demostración.** Supongamos las condiciones del lema. Tenemos que, claramente  $\text{mcd}(a, b) | r$ . Así,  $\text{mcd}(a, b)$  es divisor común de  $b$  y  $r$ , por lo que  $\text{mcd}(a, b) \leq \text{mcd}(b, r)$ . Por otro la-

do, tenemos que  $\text{mcd}(b, r) \mid a$ , por lo que es divisor común de  $b$  y  $a$  y, consecuentemente,  $\text{mcd}(b, r) \leq \text{mcd}(a, b)$ . Así, tenemos que  $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, r)$ .  $\square$

**Teorema 0.3 (Algoritmo de Euclides).** Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a > b$  y vamos a dividir  $a$  entre  $b$ . Así,  $a = bq_1 + r_1$ ,  $q_1 \in \mathbb{Z}$ ,  $0 < r_1 < |b|$ .

- Si  $r_1 = 0$ , entonces  $b \mid a$  y  $\text{mcd}(a, b) = b$ .
- Si  $r_1 \neq 0$ , entonces aplicando el lema tenemos que  $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, r_1)$ . Así, dividimos  $b$  entre  $r_1$  y obtenemos  $b = r_1q_2 + r_2$ , y aplicamos el mismo razonamiento de antes hasta obtener un  $r_k = 0$  y tendremos que  $r_{k-1} = \text{mcd}(a, b)$ .

Sabemos que este proceso es finito por el principio del buen orden y porque  $r_i$  se hace cada vez más pequeño.

Reconstruyendo las igualdades obtenidas en el algoritmo de Euclides podemos obtener una identidad de Bézout.

## 0.2. Factorización

**Definición 0.3.** Sea  $a \in \mathbb{Z} / \{-1, 0, 1\}$ .

1. Diremos que  $a$  es **primo** si  $a \mid bc \Rightarrow a \mid b \vee a \mid c$ .
2. Diremos que  $a$  es **irreducible** si  $a = bc \Rightarrow b = \pm 1 \vee c = \pm 1$ .

**Observación.** Si  $a \in \mathbb{N}$ ,  $a$  es irreducible si sus únicos divisores son 1 y  $a$ . Además, si  $a \in \mathbb{Z}$ , entonces  $a$  es primo si y solo si es irreducible. En efecto, si  $a$  es irreducible y  $a \mid bc$  pero  $a$  no divide a  $b$ , tenemos que  $\text{mcd}(a, b) = 1$ . Así, existen  $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$  tales que

$$1 = \lambda a + \mu b.$$

De esta forma, se tiene que, dado que  $bc = ak$  con  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$c = c\lambda a + c\mu b = c\lambda a + k\mu a = (c\lambda + k\mu)a.$$

Así, tenemos que  $a$  es primo.

**Teorema 0.4 (Teorema fundamental de la aritmética).** Sea  $n \in \mathbb{Z} / \{-1, 0, 1\}^a$ , entonces  $n$  es producto finito de enteros irreducibles de forma única salvo reordenación. Esto es, existen  $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{Z}$  y  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$  tales que  $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ .

<sup>a</sup>Si  $n < 0$  consideramos la descomposición de  $|n|$  y lo multiplicamos por  $-1$ .

**Corolario 0.1.** Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$  y  $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$  y  $b = q_1^{\beta_1} \cdots q_t^{\beta_t}$ , con  $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$  irreducibles y  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Así, definimos el  $\text{mcd}(a, b)$  como los enteros irreducibles comunes elevados al menor exponente. Es decir, si  $p_i = q_i$  para  $i = 1, \dots, s$  con  $s < t, k$ , tenemos que

$$\text{mcd}(a, b) = p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdots p_s^{\min\{\alpha_s, \beta_s\}}.$$

### 0.3. Aritmética modular

**Definición 0.4.** Sean  $a, m \in \mathbb{Z}$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Diremos que  $a$  es **congruente** con  $m$  módulo  $n$  si  $a - m = kn$  para  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $a \equiv m \pmod{n}$ .

**Observación.** También podemos decir que  $m$  es el resto de dividir  $a$  entre  $n$ .

Las congruencias respetan las operaciones, es decir si  $a_1 \equiv m_1 \pmod{n}$  y  $a_2 \equiv m_2 \pmod{n}$  tenemos que

$$a_1 + a_2 \equiv m_1 + m_2 \pmod{n}.$$

Con la resta funciona igual. Además, si  $b \in \mathbb{Z}$ ,

$$ba_1 \equiv bm_1 \pmod{n}.$$

**Teorema 0.5 (Teorema chino del resto).** Sea el sistema de congruencias

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{n_1} \\ \vdots \\ x \equiv a_t \pmod{n_t} \end{cases},$$

tal que  $a_1, \dots, a_t \in \mathbb{Z}$ ,  $n_1, \dots, n_t \in \mathbb{N}$  tal que  $\text{mcd}(n_i, n_j) = 1$ ,  $\forall i \neq j$ . Entonces, el sistema tiene solución y estas soluciones están en la misma clase de equivalencia módulo  $n = n_1 \cdots n_t$ .



# Capítulo 1

## Grupos

**Definición 1.1 (Grupo).** Sea la terna  $(G, \cdot, e)$  donde  $G$  es un conjunto no vacío,  $\cdot : G \times G \rightarrow G$  una operación interna y  $e \in G$ . Diremos que la terna  $(G, \cdot, e)$  es un **grupo** si se cumple:

**Asociativa.**  $\forall a, b, c \in G, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ .

**Elemento neutro.**  $\forall a \in G, a \cdot e = e \cdot a = a$ .

**Inversa.**  $\forall a \in G, \exists b \in G, a \cdot b = b \cdot a = e$ .

Además, diremos que  $(G, \cdot, e)$  es **abeliano** si se cumple la propiedad conmutativa, es decir,  $\forall a, b \in G, a \cdot b = b \cdot a$ .

**Definición 1.2 (Orden de un grupo).** Dado un grupo  $(G, \cdot, e)$ , llamamos **orden** del grupo a la cardinalidad de  $G$ ,  $|G|$ .

**Ejemplo.** Algunos ejemplos de grupos son:

1.  $(\mathbb{R}, +, 0)$  es un grupo abeliano.
2.  $(\mathbb{R}/\{0\}, \cdot, 1)$  es un grupo abeliano.
3.  $(\mathbb{Z}, +, 0)$  es un grupo abeliano.
4.  $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +, 0)$  no es un grupo por no haber inversos.

**Proposición 1.1.** Sea  $(G, \cdot, e)$  un grupo. Entonces se tiene que:

1. El elemento neutro es único.
2. Dado  $a \in G$ , existe un único elemento inverso.

**Demostración.** Demostremos 1. Supongamos que  $e$  y  $e'$  son ambos elementos neutros.

Tenemos que

$$e = e \cdot e' = e' \cdot e = e'.$$

Así, hemos visto que  $e = e'$ . Ahora, demostremos **2**. Si  $a \in G$ , supongamos que  $b, c \in G$  son sus inversos. Entonces tenemos que

$$b = b \cdot e = b \cdot (a \cdot c) = (b \cdot a) \cdot c = e \cdot c = c.$$

Así, tenemos que  $b = c$ . □

**Observación.** 1. De ahora en adelante, en vez de escribir  $(G, \cdot, e)$  para nombrar el grupo, escribiremos sólo  $G$ . De manera similar, no escribiremos  $a \cdot b$  sino  $ab$ .

2. Dado  $a \in G$  finito, a su inverso lo denotaremos por  $a^{-1}$ .

3. Dado un grupo  $G$ , va a estar totalmente definido por su tabla de multiplicación (tabla de Cayley). Esta será de la forma

	$e$	$a_1$	$\cdots$	$a_n$
$e$	$e$	$a_1$	$\cdots$	$a_n$
$a_1$	$a_1$	$a_1^2$	$\cdots$	$a_1 a_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_n$	$a_n$	$a_n a_1$	$\cdots$	$a_n^2$

**Ejemplo.** Consideremos el grupo  $(\mathbb{Z}_5 / \{0\}, \cdot)$ . Su tabla de Cayley será:

$\cdot$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

**Proposición 1.2.** Sea  $G$  un grupo. Entonces,

1.  $\forall a \in G, (a^{-1})^{-1} = a$ .
2.  $\forall a, b, c \in G, (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .
3.  $\forall a, b, c \in G$ , si  $ba = ca$  o  $ab = ac$ , entonces  $b = c$ .

**Demostración.** Demostramos **1**. Si  $a \in G$ , tenemos que

$$a^{-1}a = a \cdot a^{-1} = e.$$

Dado que el inverso es único, tenemos que  $(a^{-1})^{-1} = a$ . Ahora demostramos **2**. Si  $a, b \in G$ ,

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = aeb^{-1} = aa^{-1} = e.$$

Por la inversa del inverso, tenemos que  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ . Finalmente, demostramos **3**. Si  $a, b, c \in G$  y, sin pérdida de generalidad,  $ba = ca$ , dado que existe  $a^{-1} \in G$ , tenemos

que

$$ba = ca \iff baa^{-1} = caa^{-1} \iff be = ce \iff b = c.$$

□

**Ejemplo.** 1. Consideremos un conjunto  $X \neq \emptyset$  y el conjunto de sus biyecciones  $\text{Biy}(X) = \{f : X \rightarrow X : f \text{ biyección}\}$ . Como operación tomamos la composición de funciones. Entonces,  $(\text{Biy}(X), \circ)$  es un grupo. En efecto:

**Asociativa.** La composición de funciones es asociativa.

**Elemento neutro.** Tomamos como elemento neutro la función identidad. En efecto,  $id \in \text{Biy}(X)$  y  $\forall f \in \text{Biy}(X)$ ,

$$(f \circ id)(x) = f(id(x)) = f(x).$$

$$(id \circ f)(x) = id(f(x)) = f(x).$$

**Inverso.** Si  $f \in \text{Biy}(X)$ , sabemos que por ser  $f$  biyectiva existe  $f^{-1} \in \text{Biy}(X)$  tal que  $f \circ f^{-1} = id$  y  $f^{-1} \circ f = id$ .

Así, hemos visto que  $(\text{Biy}(X), \circ)$  es un grupo, pero no tiene por qué ser abeliano.

2. Sea  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $n \geq 1$ , el conjunto de matrices reales cuadradas con coeficientes en  $\mathbb{R}$ , y consideremos el producto de matrices usual. El par  $(\mathcal{M}_n, \cdot)$  no es un grupo, puesto que las matrices con determinante nulo no tienen inverso.

Tomemos así solo las matrices cuyo determinante es distinto de cero, y por tanto sabemos que tienen inverso. A este conjunto lo llamamos **grupo lineal general**,  $\text{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : |A| \neq 0\}$ . Así,  $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$  forma un grupo.

De manera similar, el conjunto  $\text{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : |A| = 1\}$ , al que llamamos **grupo lineal especial**, también forma un grupo con la multiplicación.

**Observación.** Se puede ver que  $\text{SL}_n(\mathbb{R}) \subset \text{GL}_n(\mathbb{R})$ .

## 1.1. Subgrupos

**Definición 1.3 (Subgrupo).** Sea  $G$  un grupo y  $H \subset G$ . Diremos que  $H$  es **subgrupo** de  $G$ ,  $H \leq G$ , si  $H$  es cerrado para la operación de  $G$ , esto es

- $H \neq \emptyset$ .
- $\forall a, b \in H, ab \in H$ .
- $\forall a \in H, a^{-1} \in H$ .

**Ejemplo.** (i) Sea  $G$  un grupo. Tenemos que  $\{e\} \leq G$  es el **subgrupo trivial**.

(ii)  $\text{SL}_n(\mathbb{R}) \leq \text{GL}_n(\mathbb{R})$ .

(iii)  $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q} \leq \mathbb{R} \leq \mathbb{C}$ .

(iv)  $\mathbb{Q}/\{0\} \leq \mathbb{R}/\{0\} \leq \mathbb{C}/\{0\}$ .

**Proposición 1.3.** Sea  $G$  un grupo y  $H \subset G$ . Así,  $H \leq G$  si y solo si  $e \in H$  y  $\forall a, b \in H$  se cumple que  $ab^{-1} \in H$ .

**Demostración.** Demostremos la primera implicación. Si  $H \leq G$ , tenemos que  $H \neq \emptyset$  por lo que existe  $a \in H$ , por lo que  $a^{-1} \in H$  y  $e = aa^{-1} \in H$ . Ahora, si  $a, b \in H$ , tenemos que  $b^{-1} \in H$ , por lo que  $ab^{-1} \in H$ .

Recíprocamente,  $H \neq \emptyset$  puesto que  $e \in H$ . Sea  $a \in H$ . Tenemos que  $a^{-1} = e \cdot a^{-1} \in H$ . Falta que si  $a, b \in H$ , entonces  $ab \in H$ . Sean  $a, b \in H$ , entonces  $a^{-1}, b^{-1} \in H$ . Entonces  $ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$ . Así, demostramos las tres propiedades.  $\square$

**Ejemplo (Producto cartesiano de dos grupos).** Sean  $(G_1, \cdot_{G_1}, e_{G_1})$  y  $(G_2, \cdot_{G_2}, e_{G_2})$  dos grupos. Vamos a ver que su producto cartesiano también es un grupo. Definimos la siguiente operación para el producto cartesiano:

$$\begin{aligned} \cdot : (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) &\rightarrow G_1 \times G_2 \\ (g_1, g_2) \times (g'_1, g'_2) &\rightarrow (g_1 \cdot_{G_1} g'_1, g_2 \cdot_{G_2} g'_2). \end{aligned}$$

Está claro que  $G = G_1 \times G_2 \neq \emptyset$  y que se trata de una operación interna.

**Asociatividad.** Si  $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in G_1 \times G_2$ , tenemos que

$$\begin{aligned} ((a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2)) \cdot (c_1, c_2) &= (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2) \cdot (c_1, c_2) = (a_1 \cdot b_1 \cdot c_1, a_2 \cdot b_2 \cdot c_2) \\ &= (a_1, a_2) \cdot (b_1 \cdot c_1, b_2 \cdot c_2) = (a_1, a_2) \cdot ((b_1, b_2) \cdot (c_1, c_2)). \end{aligned}$$

**Elemento neutro.** Tenemos que  $e = (e_{G_1}, e_{G_2})$ . En efecto, si  $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ , tenemos que

$$\begin{aligned} (e_{G_1}, e_{G_2}) \cdot (g_1, g_2) &= (g_1, g_2) \\ (g_1, g_2) \cdot (e_{G_1}, e_{G_2}) &= (g_1, g_2). \end{aligned}$$

**Inverso.** Si  $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ , tenemos que su inverso será  $(g_1^{-1}, g_2^{-1}) \in G_1 \times G_2$ . En efecto,

$$\begin{aligned} (g_1, g_2) \cdot (g_1^{-1}, g_2^{-1}) &= (e_{G_1}, e_{G_2}) \\ (g_1^{-1}, g_2^{-1}) \cdot (g_1, g_2) &= (e_{G_1}, e_{G_2}). \end{aligned}$$

Así, está claro que  $G_1 \times G_2$  es un grupo.

**Definición 1.4.** Sea  $G$  un grupo. Entonces,

(a) Llamamos **centro** de  $G$  al conjunto

$$Z(G) = \{a \in G : ax = xa, \forall x \in G\}.$$

(b) Llamamos **centralizador** de  $x \in G$  al conjunto

$$C_G(x) = \{a \in G : ax = xa\}.$$

**Observación.** Los conjuntos  $Z(G)$  y  $C_G(x)$  son subgrupos. En efecto:

(i) Tenemos que  $e \in Z(G)$  y si  $a \in Z(G)$ , también tenemos que  $a^{-1} \in Z(G)$ . En efecto,

$$a^{-1}x = xa^{-1} \iff aa^{-1}x = axa^{-1} \iff x = xaa^{-1} = xe = x.$$

Así, si  $a, b \in Z(G)$ , tenemos que  $b^{-1} \in Z(G)$  y  $\forall x \in G$ ,

$$ab^{-1}x = axb^{-1} = xab^{-1}.$$

Por lo que  $ab^{-1} \in Z(G)$  y se trata de un subgrupo.

(ii) El argumento para demostrar que  $C_G(x)$  es un subgrupo de  $G$  es análogo al anterior.

**Observación.** Se puede comprobar que  $Z(G) = \bigcap_{x \in G} C_G(x)$ . En efecto:

(i) Si  $x \in Z(G)$  tenemos que  $\forall g \in G, xg = gx$ , por lo que  $\forall g \in G, x \in C_G(g) \iff x \in \bigcap_{g \in G} C_G(g)$ .

(ii) Si  $x \in \bigcap_{g \in G} C_G(g)$ ,  $x \in C_G(g)$ ,  $\forall g \in G$ . Por lo que  $xg = gx$ ,  $\forall g \in G$  y  $x \in Z(G)$ .

## 1.2. Homomorfismos

**Definición 1.5 (Homomorfismo).** Sean  $G_1$  y  $G_2$  grupos tales que  $\cdot_{G_1}$  y  $\cdot_{G_2}$  son sus operaciones y  $e_{G_1}$  y  $e_{G_2}$  sus elementos neutros. Entonces,  $f : G_1 \rightarrow G_2$  es un **homomorfismo** de grupos si  $\forall a, b \in G_1$ ,

$$f(a \cdot_{G_1} b) = f(a) \cdot_{G_2} f(b).$$

**Observación.** Si  $f_1 : G_1 \rightarrow G_2$  y  $f_2 : G_2 \rightarrow G_3$  son homomorfismos de grupos, entonces  $f_2 \circ f_1$  es un homomorfismo de grupos. Es decir, la composición de homomorfismos de grupos sigue siendo homomorfismo de grupos. En efecto, si  $a, b \in G_1$ ,

$$f_2 \circ f_1(ab) = f_2(f_1(ab)) = f_2(f_1(a)f_1(b)) = f_2(f_1(a))f_2(f_1(b)) = f_2 \circ f_1(a)f_2 \circ f_1(b).$$

**Ejemplo.** Consideremos la aplicación

$$f : \mathbb{R}/\{0\} \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$$

$$t \rightarrow \begin{pmatrix} t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t \end{pmatrix} = t \cdot I_n.$$

Esta aplicación es un homomorfismo de grupos.

**Definición 1.6.** Sea  $f : G_1 \rightarrow G_2$  homomorfismo de grupos. Entonces:

(a) Llamamos **núcleo** de  $f$  al conjunto

$$\text{Ker}(f) = \{a \in G_1 : f(a) = e_{G_2}\}.$$

(b) Llamamos **imagen** de  $f$  al conjunto

$$\text{Im}(f) = \{b \in G_2 : \exists a \in G_1, f(a) = b\}.$$

**Proposición 1.4.** Sea  $f : G_1 \rightarrow G_2$  un homomorfismo de grupos. Entonces:

1.  $f(e_{G_1}) = e_{G_2}$ .
2.  $\forall a \in G_1, f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ .
3. Si  $H \leq G_1$ , entonces  $f(H) \leq G_2$ . En particular, tenemos que  $\text{Im}(f) \leq G_2$ .
4.  $f$  es inyectiva si y solo si  $\text{Ker}(f) = \{e_{G_1}\}$ .
5. Si  $N \leq G_2$ , entonces  $f^{-1}(N) \leq G_1$  que contiene a  $\text{Ker}(f)$ .

**Demostración.** 1. Sabemos que  $e_{G_1} = e_{G_1} \cdot e_{G_1}$ , por lo que:

$$f(e_{G_1}) = f(e_{G_1} \cdot e_{G_1}) = f(e_{G_1}) f(e_{G_1}).$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} e_{G_2} &= f(e_{G_1})^{-1} f(e_{G_1}) = f(e_{G_1})^{-1} (f(e_{G_1}) f(e_{G_1})) \\ &= \left( f(e_{G_1})^{-1} f(e_{G_1}) \right) f(e_{G_1}) = e_{G_2} f(e_{G_1}) = f(e_{G_1}). \end{aligned}$$

2. Sea  $a \in G_1$ , entonces por la unicidad del inverso y por 1:

$$f(a) f(a^{-1}) = f(aa^{-1}) = f(e_{G_1}) = e_{G_2}.$$

3. Si  $H \leq G_1$ , tenemos que  $e_{G_1} \in H$ , por lo que  $e_{G_2} \in f(H)$ . Además, tenemos que  $\forall a, b \in H$  se cumple que  $ab^{-1} \in H$ . Por tanto, si  $x, y \in f(H)$ ,  $\exists a, b \in H$  tales que  $x = f(a)$  y  $y = f(b)$ , de esta manera, tenemos que  $ab^{-1} \in H$ , por lo que  $f(ab^{-1}) \in f(H)$ . Así,

$$xy^{-1} = f(a) f(b)^{-1} = f(a) f(b^{-1}) = f(ab^{-1}) \in f(H).$$

Así, queda demostrado que  $f(H) \leq G_2$ .

4. Si  $\text{Ker}(f) = \{e_{G_1}\}$  y  $f(a) = f(b)$ , tenemos que

$$f(a) f(b)^{-1} = e_{G_2} \iff f(ab^{-1}) = e_{G_2}.$$

Por tanto,  $ab^{-1} = e_{G_1}$ , por lo que  $a = b$ . Así, hemos visto que  $f$  es inyectiva. Supongamos que  $f$  es inyectiva y que  $a \in \text{Ker}(f)$ . Entonces, tenemos que  $f(a) = f(e_{G_1}) = e_{G_2}$ , por lo que  $a = e_{G_1}$  y  $\text{Ker}(f) = \{e_{G_1}\}$ .

5. Supongamos que  $N \leq G_2$ . Tenemos que  $e_{G_2} \in N$ , por lo que  $e_{G_1} \in f^{-1}(N)$ . Si  $x, y \in f^{-1}(N)$  tenemos que  $f(x), f(y) \in N$ , así,

$$f(xy^{-1}) = f(x)f(y^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} \in N.$$

Por tanto,  $\forall x, y \in f^{-1}(N)$ , tenemos que  $xy^{-1} \in f^{-1}(N)$ , por lo que  $f^{-1}(N) \leq G_1$ . Ahora, si  $x \in \text{Ker}(f)$ , tenemos que  $f(x) = e_{G_2} \in N$ , por lo que  $x \in f^{-1}(N)$  y consecuentemente  $\text{Ker}(f) \leq f^{-1}(N)$ . □

**Ejemplo.** 1. Consideremos  $f_m : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  con  $m \in \mathbb{Z}$ , con la suma, tal que  $f(z) = mz$ . Tenemos que  $f_m$  es un homomorfismo de grupos. Por proposición anterior, tenemos que

$$m\mathbb{Z} := f(\mathbb{Z}) = \{z \in \mathbb{Z} : z = km, k \in \mathbb{Z}\} \leq \mathbb{Z}.$$

Similarmente, tenemos que  $\text{Ker}(f_m)$  es el subgrupo trivial si  $m \neq 0$  y es  $\mathbb{Z}$  si  $m = 0$ .

2. Es homomorfismo la aplicación  $\det : \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}/\{0\} : M \rightarrow \det(M)$ . En concreto, se trata de un homomorfismo sobreyectivo. Además, podemos ver que  $\text{Ker}(\det) = \text{SL}_n(\mathbb{R})$ .

**Definición 1.7 (Isomorfismo y automorfismo).** Sea  $f : G_1 \rightarrow G_2$  un homomorfismo de grupos. Si  $f$  es biyectiva, entonces  $f$  es un **isomorfismo** y lo escribimos  $G_1 \cong G_2$ . Si  $f : G_1 \rightarrow G_1$  es un isomorfismo, se llama **automorfismo**.

**Observación.** 1. Si  $G_1 \cong G_2$  tenemos que  $|G_1| = |G_2|$  y tienen la misma tabla de Cayley.

2. Si  $f : G_1 \rightarrow G_2$  es un isomorfismo, tenemos que  $f^{-1} : G_2 \rightarrow G_1$  también lo es. En efecto, Si  $x, y \in G_2$  existen  $a, b \in G_1$  tales que  $x = f(a)$  e  $y = f(b)$ . Así,

$$f^{-1}(xy) = f^{-1}(f(a)f(b)) = f^{-1}(f(ab)) = ab = f^{-1}(x)f^{-1}(y).$$

3. Si  $f : G_1 \rightarrow G_2$  es un homomorfismo sobreyectivo, tenemos que  $f(G_1) \cong G_2$ , es decir,  $\text{Im}(f) \cong G_2$ .
4. Si  $f : G_1 \rightarrow G_2$  es un homomorfismo inyectivo, entonces  $G_1 \cong \text{Im}(f)$ .
5. La relación de ser isomorfo es una relación de equivalencia.
6. El conjunto de automorfismos de  $G$ ,  $\text{Aut}(G)$ , es un subgrupo de  $\text{Biy}(G)$ .

## 1.3. Grupos cíclicos

**Notación.** Sea  $(G, \cdot)$  un grupo,  $a \in G$  y  $k \in \mathbb{Z}$ . Entonces utilizaremos la siguiente notación:

$$a^0 = e, \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}}, \quad a^{-n} = \underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdots a^{-1}}_{n \text{ veces}}.$$

**Lema 1.1.** Sea  $(G, \cdot)$  un grupo,  $a \in G$  y  $k, l \in \mathbb{Z}$ . Entonces  $a^{l+k} = a^l a^k$  y  $(a^{-1})^k = a^{-k} = (a^k)^{-1}$ .

**Demostración.** Está claro que, por la propiedad asociativa, si  $l, k \in \mathbb{N}$  (o  $l, k \leq 0$ , se procede igual):

$$a^{l+k} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{l+k \text{ veces}} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_l \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_k = a^l a^k.$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $l \leq 0$  y  $k > 0$ . Entonces, es evidente que

$$a^l a^k = a \cdots a \cdot a^{-1} \cdots a^{-1} = a^{l-k}.$$

Por otro lado, tenemos que

$$(a^{-1})^k a^k = (a^{-1} \cdots a^{-1}) \cdot (a \cdots a) = a^{-1} \cdots a^{-1} \cdot (a^{-1} \cdot a) \cdot a \cdots a = e.$$

Al haber el mismo número de  $a^{-1}$  que de  $a$ , está claro que el resultado será el elemento neutro. Por la unicidad del inverso, tenemos que  $(a^k)^{-1} = (a^{-1})^k$ .  $\square$

**Notación.** Dado un grupo  $(G, \cdot)$  y  $a \in G$ , utilizaremos la siguiente notación:

$$\langle a \rangle = \{a^k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

**Proposición 1.5.** Si  $G$  es un grupo y  $a \in G$ , se tiene que  $\langle a \rangle \leq G$  y  $\langle a \rangle$  es abeliano.

**Demostración.** Dado que  $G$  es un grupo, su operación es cerrada, por lo que  $\langle a \rangle \subset G$ . Tenemos que  $e \in \langle a \rangle$ . Por otro lado, si  $x, y \in \langle a \rangle$ , existen  $n, m \in \mathbb{Z}$  tales que  $x = a^n$  e  $y = a^m$ . Así, tenemos que  $y^{-1} = a^{-m}$ , así,  $xy^{-1} = a^n a^{-m} = a^{n-m} \in \langle a \rangle$ , puesto que  $n - m \in \mathbb{Z}$ . Además, es abeliano, puesto que

$$xy = a^n a^m = a^{n+m} = a^{m+n} = a^m a^n = yx.$$

$\square$

**Notación.** Si la operación del grupo fuera aditiva, en lugar de  $a^k$  escribiríamos  $ka$ .

**Observación.** Está claro que  $\langle a \rangle = \langle a^{-1} \rangle$ . En efecto,

$$x \in \langle a \rangle \iff x = a^n, n \in \mathbb{Z} \iff x = (a^{-1})^{-n}, n \in \mathbb{Z} \iff x \in \langle a^{-1} \rangle.$$

**Definición 1.8 (Grupo cíclico).** Un grupo  $G$  es **cíclico** si existe  $a \in G$  tal que  $G = \langle a \rangle$ . Decimos que  $a$  es **generador** de  $G$  o que  $G$  **está generado** por  $a$ .

**Ejemplo.** Consideremos el grupo  $(\mathbb{Z}, +)$ . Tenemos que este grupo es cíclico y tiene dos generadores, 1 y  $-1$ . En efecto, se cumple que  $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle$ .

**Proposición 1.6.** Si  $G$  es un grupo cíclico, cualquier subgrupo  $H \leq G$  también es cíclico.



**Demostración.** Supongamos que  $H \neq \{e\}$  y  $H \neq G$ , puesto que estos casos son triviales. Sea  $k \in \mathbb{N}$  el más pequeño tal que  $a^k \in H$ . Podemos observar que dado que  $H \leq G$ , tenemos que  $a^{-k} \in H$ . Vamos a ver que  $H = \langle a^k \rangle$ .

- (i) Si  $x \in H$ , tenemos que existe  $l \in \mathbb{Z}$  tal que  $x = a^l$ . Por el algoritmo de la división, tenemos que existen  $q, r \in \mathbb{Z}$  tales que

$$l = qk + r, \quad 0 \leq r < k.$$

Entonces, tenemos que

$$a^l = a^{qk+r} = (a^k)^q a^r.$$

Dado que  $a^l, (a^k)^q \in H$ , debe ser que  $a^r \in H$ . Como  $k \in \mathbb{N}$  era el menor tal que  $a^k \in H$  y  $r < k$ , debe ser que  $r = 0$ , por lo que  $x = a^l = (a^k)^q \in H$ . Así, hemos visto que  $H \leq \langle a^k \rangle$ .

- (ii) Por otro lado, si  $x \in \langle a^k \rangle$ , tenemos que existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $x = (a^k)^n \in H$ . Así, tenemos que  $\langle a^k \rangle \subset H$ .

Así, hemos visto que  $H = \langle a^k \rangle$ , por lo que es cíclico.  $\square$

**Corolario 1.1.** Todo  $H \leq \mathbb{Z}$  es un subgrupo cíclico, es decir, existe  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $H = \langle m \rangle$ .

**Demostración.** Se deduce fácilmente a partir de la proposición y de la observación anterior.  $\square$

**Ejemplo.** 1. El conjunto  $U_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ , de las raíces  $n$ -ésimas de la unidad, es un grupo cíclico con la multiplicación. Recordamos que  $w_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$ , para  $k = 0, \dots, n-1$ . Es sencillo ver que  $(U_n, \cdot, 1) \leq (\mathbb{C}/\{0\}, \cdot, 1)$ . En efecto,

$$e^{i\frac{2\pi \cdot 0}{n}} = e^0 = 1.$$

Ahora, si  $w_1, w_2 \in U_n$ , tenemos que si  $k_1 > k_2$ :

$$w_1 w_2^{-1} = e^{i\frac{2\pi k_1}{n}} e^{i\frac{2\pi(-k_2)}{n}} = e^{i\frac{e\pi(k_1-k_2)}{n}} \in U_n.$$

Así, está claro que  $(U_n, \cdot, 1) \leq (\mathbb{C}/\{0\}, \cdot, 1)$ . Para ver que es cíclico basta con ver que  $U_n = \langle e^{i\frac{2\pi}{n}} \rangle$ .

2. En  $\mathbb{Z}$ , tenemos que  $\forall m \in \mathbb{Z}, m\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ . Sabemos que  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_m = \{[0], [1], \dots, [m-1]\}$ . Podemos definir la operación:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m &\rightarrow \mathbb{Z}_m \\ ([a]_m, [b]_m) &\rightarrow [a+b]_m. \end{aligned}$$

Vamos a ver que esta operación está bien definida. Si  $x \in [a]_m$  e  $y \in [b]_m$ , tenemos que

$$m|x - a \quad \text{y} \quad m|y - b.$$

Así, existen  $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$  tales que  $x = a + \lambda m$  e  $y = b + \mu m$ . Por tanto, obtenemos que

$$x+y = a+\lambda m+b+\mu m = (a+b)+(\lambda+\mu)m \iff x+y \equiv a+b \pmod{m} \iff [x+y]_m = [a+b]_m.$$

Queremos ver ahora que  $(\mathbb{Z}_m, +, [0]_m)$  es un grupo. Está claro que  $\mathbb{Z}_m \neq \emptyset$  y que el elemento neutro es  $[0]_m$ . Ahora comprobamos que hay inversos. Si  $[a]_m \in \mathbb{Z}_m$ , tenemos que  $[-a]_m \in \mathbb{Z}_m$  y, por definición,  $[a]_m + [-a]_m = [0]_m$ . También se puede ver que  $\mathbb{Z}_m$  es cíclico, es decir, que  $\mathbb{Z}_m = \langle [1]_m \rangle$ .

**Lema 1.2.** Sea  $G$  un grupo cíclico, por lo que  $G = \langle a \rangle$ . Entonces si  $a^k \neq e, \forall k \in \mathbb{N}$ , tenemos que  $G$  tiene orden infinito. En caso contrario, si  $m = \min \{k \in \mathbb{N} : a^k = e\}$  tenemos que  $G = \langle a \rangle = \{e, a, \dots, a^{m-1}\}$ . Además,  $a^k = e$  si y solo si  $m|k$ .

**Demostración.** (i) Sea  $a^k \neq e, \forall k \in \mathbb{N}$ . Entonces,  $a^k \neq e, \forall \mathbb{Z}/\{0\}$ , por lo que el orden de  $G$  es infinito. En efecto, si existieran  $i, j \in \mathbb{Z}$  distintos tales que  $a^i = a^j$ , tendríamos que  $a^{i-j} = e$ , lo que es una contradicción.

(ii) Por otro lado, sea  $m = \min \{k \in \mathbb{N} : a^k = e\}$ . Vamos a ver que  $G = \langle a \rangle = \{e, a, \dots, a^{m-1}\}$ . Es trivial que  $\{e, a, \dots, a^{m-1}\} \subset G$ . Recíprocamente, si  $g \in G$ , tenemos que existe  $l \in \mathbb{Z}/\{0\}$  tal que  $g = a^l$ . Por el algoritmo de la división, tenemos que existen  $q, r \in \mathbb{Z}$  tales que

$$l = mq + r, \quad 0 \leq r < m.$$

Así, tenemos que

$$a^l = a^{mq+r} = (a^m)^q a^r = a^r.$$

Así, como  $0 \leq r < m$ , debe ser que  $g \in \{e, a, \dots, a^{m-1}\}$ , por lo que  $G \subset \{e, a, \dots, a^{m-1}\}$ . Consecuentemente,  $G = \{e, a, \dots, a^{m-1}\}$ .

Finalmente, como  $l = qm + r$ , es trivial que  $a^l = e \iff r = 0$ .

□

**Observación.** En el lema podemos ver que  $m = \min \{k \in \mathbb{N} : a^k = e\}$  es también el orden de  $G$ .

**Proposición 1.7.** Dos grupos  $G$  y  $H$  cíclicos del mismo orden son isomorfos.

**Demostración.** Sea  $G = \langle a \rangle$  y  $H = \langle b \rangle$ . Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} f : G &\rightarrow H \\ a^k &\rightarrow b^k. \end{aligned}$$

Vamos a ver que se trata de un homomorfismo de grupos:

$$f(a^k) f(a^t) = b^k b^t = b^{k+t} = f(a^{k+t}) = f(a^k a^t).$$

Ahora vamos a ver que es biyectiva.

**Inyectiva.** Si  $|G| > k \geq t$  y  $f(a^k) = f(a^t)$ , tenemos que  $f(a^{k-t}) = b^{k-t} = e$ . Como  $|G| > k - t \geq 0$ , debe ser que  $k - t = 0$ , por lo que  $a^k = a^t$ .

**Sobreyectiva.** Si  $c \in H$  con  $c = b^k$  para algún  $k = 0, \dots, |H| - 1$ , tenemos que  $f(a^k) = b^k = c$ .

Así, está claro que  $f$  es un isomorfismo.  $\square$

**Notación.** Vamos a llamar  $C_n$  al grupo cíclico con la multiplicación y  $\mathbb{Z}_n$  al grupo cíclico con la suma.

**Definición 1.9 (Orden de un elemento).** Sea  $G$  un grupo y  $a \in G$ . Llamaremos **orden** de  $a$ ,  $o(a)$ , al cardinal del grupo que genera, es decir,  $o(a) = |\langle a \rangle|$ .

**Observación.** Sean  $G$  y  $H$  grupos.

1. Si  $G$  es finito y  $a \in G$ , tenemos que

$$o(a) = m = \min \{k \in \mathbb{N} : a^k = e\}.$$

Si  $\langle a \rangle$  es finito, entonces se aplica de igual forma. En particular,  $o(a) | k \iff a^k = e$ , para  $k \in \mathbb{Z} / \{0\}$ .

2. Supongamos que  $G$  y  $H$  son finitos. Sea  $f : G \rightarrow H$  un homomorfismo y sea  $x \in G$ . Entonces  $o(f(x)) | o(x)$ . En efecto, tenemos que

$$f(x)^{o(x)} = f(x^{o(x)}) = f(e_G) = e_H \iff o(f(x)) | o(x).$$

Además, si  $f : G \rightarrow H$  es isomorfismo, entonces sabemos que existe  $f^{-1} : H \rightarrow G$  que también es isomorfismo. De aquí, obtenemos que  $o(x) | o(f(x))$ , por lo que  $o(x) = o(f(x))$ .

**Ejemplo.** 1. Consideremos los grupos  $C_2 \times C_4$  y  $C_8$ . Ambos tienen orden 8, sin embargo no son isomorfos. En  $C_8$  hay elementos de orden 8, puesto que  $C_8 = \langle a \rangle$  tal que  $a^8 = e$ , pero en  $C_2 \times C_4$  no hay elementos de orden 8, lo más que hay es de orden 4. En efecto, si  $(a, b) \in C_2 \times C_4$  tenemos que

$$(a, b)^4 = (a^4, b^4) = (e_{C_2}, e_{C_4}) \in C_2 \times C_4.$$

Tenemos que  $C_8 = \{e, a, \dots, a^{n-1}\}$  y

$$C_2 \times C_4 = \{(e, e), (e, b), (e, b^2), (e, b^3), (c, e), (c, b), (c, b^2), (c, b^3)\}.$$

2. Tomemos los grupos  $(\mathbb{C}, +, 0)$  y  $(\mathbb{C}/\{0\}, \cdot, 1)$ . Supongamos que existe un homomorfismo de grupos,  $f : \mathbb{C}/\{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ . Esta aplicación nunca podrá ser inyectiva. En efecto, tenemos que  $i \in \mathbb{C}/\{0\}$  y  $o(i) = 4$ , pero si  $z \in \mathbb{C}$ , tenemos que  $o(z)$  no es finito.

**Lema 1.3.** Sea  $G$  un grupo y sea  $a \in G$  tal que  $o(a)$  es finito. Entonces,

1.  $o(a) = o(a^{-1})$ .
2.  $\forall k \in \mathbb{N}$ , si  $\text{mcd}(o(a), k) = 1$ , entonces  $o(a^k) = o(a)$ . En general,

$$o(a^k) = \frac{o(a)}{\text{mcd}(o(a), k)}.$$

3. Si  $b \in G$  con  $o(b)$  finito tal que  $ab = ba$  y  $\text{mcd}(o(a), o(b)) = 1$ , entonces  $o(ab) = o(a)o(b)$ .

**Demostración.** 1. Como  $\langle a \rangle = \langle a^{-1} \rangle$ , tenemos que

$$o(a) = |\langle a \rangle| = |\langle a^{-1} \rangle| = o(a^{-1}).$$

2. Fijemos  $k \in \mathbb{N}$ . Sea  $r \geq 1$  con  $r \in \mathbb{N}$ , entonces tenemos que

$$\begin{aligned} a^{kr} = e &\iff o(a) \mid kr \iff o(a) \mid \text{mcd}(o(a)r, kr) \\ &\iff o(a) \mid r \cdot \text{mcd}(o(a), k) \iff \frac{o(a)}{\text{mcd}(o(a), k)} \mid r. \end{aligned}$$

Así, tenemos que  $o(a^k) = \frac{o(a)}{\text{mcd}(o(a), k)}$ .

3. Supongamos que  $ab = ba$  y que  $\text{mcd}(o(a), o(b)) = 1$ . Tenemos que

$$(ab)^{o(a)o(b)} = a^{o(a)o(b)}b^{o(a)o(b)} = \left(a^{o(a)}\right)^{o(b)}\left(b^{o(b)}\right)^{o(a)} = e \cdot e = e.$$

Tenemos que  $o(ab) \mid o(a)o(b)$ . Por otro lado, tenemos que

$$a^{o(ab)}b^{o(ab)} = (ab)^{o(ab)} = e.$$

Así, tenemos que  $a^{o(ab)} = b^{-o(ab)}$  y por (1) tenemos que  $o(a^{o(ab)}) = o(b^{o(ab)})$ .

Por (2) tenemos que

$$\frac{o(a)}{\text{mcd}(o(a), o(ab))} = o(a^{o(ab)}) = o(b^{o(ab)}) = \frac{o(b)}{\text{mcd}(o(b), o(ab))}.$$

Sabemos que los órdenes son números naturales y que  $\text{mcd}(o(a), o(b)) = 1$ , por tanto debe ser que

$$\frac{o(a)}{\text{mcd}(o(a), o(ab))} = \frac{o(b)}{\text{mcd}(o(b), o(ab))} = 1.$$

Así, obtenemos que  $o(a) = \text{mcd}(o(a), o(ab))$  y  $o(b) = \text{mcd}(o(b), o(ab))$ , por lo que  $o(a) \mid o(ab)$  y  $o(b) \mid o(ab)$ . Como  $\text{mcd}(o(a), o(b)) = 1$ , tenemos que  $o(a) o(b) \mid o(ab)$ . Así, podemos concluir que  $o(a) o(b) = o(ab)$ .  $\square$

**Corolario 1.2.** Sean  $n, m \geq 1$  enteros naturales tales que  $\text{mcd}(n, m) = 1$ . Entonces, el grupo  $C_n \times C_m \cong C_{nm}$  es el único grupo cíclico de orden  $n \cdot m$  salvo isomorfía.

**Demostración.** La unicidad ya la hemos visto. Lo único que falta por ver es que  $C_n \times C_m$  es cíclico. Supongamos que  $C_n = \langle a \rangle$  y  $C_m = \langle b \rangle$ . Tenemos que  $(a, 1_m) \in C_n \times C_m$  y  $o(a, 1_m) = n$ . De forma análoga se puede ver que  $o(1_n, b) = m$ . Tenemos que

$$o((a, 1_m)(1_n, b)) = o(a, 1_m) o(1_n, b) = nm.$$

Así, tenemos que  $\langle (a, b) \rangle \subset C_n \times C_m$  y  $|C_n \times C_m| = o(a, b)$ , por lo que debe ser que  $C_n \times C_m = \langle (a, b) \rangle$  y  $C_n \times C_m$  es cíclico.  $\square$

**Proposición 1.8.** Sea  $G$  un grupo cíclico tal que  $G = \langle a \rangle$ , y sea  $d > 0$  de forma que  $d \mid o(a) = n$ . Entonces existe un único subgrupo  $H \leq G$  de orden  $d$  tal que  $H = \langle a^{\frac{n}{d}} \rangle$ .

**Demostración.** Sea  $k = \frac{n}{d}$ . Vamos a considerar el homomorfismo de grupos  $f : G \rightarrow G : x \rightarrow x^d$ . Cogemos

$$H = \text{Ker}(f) = \{x \in G : x^d = e\} \leq G.$$

Como  $H$  es subgrupo de un grupo cíclico, tenemos que  $H$  también es cíclico. Así, para un  $r \in \mathbb{N}$ ,  $H = \langle a^r \rangle$ . Tenemos que  $(a^r)^d = e$ , por lo que  $n \mid rd$ . En particular, tenemos que  $kd \mid rd$ , por lo que  $k \mid r$ . Así, nos queda que  $a^r \in \langle a^k \rangle$ , por lo que  $H \subset \langle a^k \rangle$ . Recíprocamente, tenemos que  $k = \text{mcd}(k, n)$ , por lo que

$$o(a^k) = \frac{o(a)}{\text{mcd}(k, o(a))} = \frac{n}{k} = d.$$

Entonces, tenemos que  $(a^k)^d = e$ , por lo que  $a^k \in H$ . Así, tenemos que  $\langle a^k \rangle \subset H$ . Así, hemos demostrado que  $H = \langle a^k \rangle$ .

Demostramos ahora la unicidad. Sea  $K$  un subgrupo de orden  $d$ . Como  $K \leq G$ , que es cíclico, sabemos que  $K$  es cíclico, y está generado por un elemento  $a^r = b$ . Sabemos que  $b^d = e$ , por lo que  $b \in H$  y  $K \subset H$ . Como ambos grupos son del mismo orden, debe ser que  $H = K$ .  $\square$

## 1.4. Grupos finitamente generados

**Definición 1.10.** Sea  $G$  un grupo y  $S \subset G$  con  $S = \{s_1, \dots, s_k\}$  finito. Llamamos **subgrupo generado por  $S$**  al conjunto

$$\langle S \rangle = \{s_1^{t_1} s_2^{t_2} \cdots s_k^{t_k} : t_i \in \mathbb{Z}, s_i \in S, k \in \mathbb{N}\}.$$

**Definición 1.11 (Grupo finitamente generado).** Sea  $G$  un grupo. Diremos que  $G$  es **finitamente generado** si  $G = \langle s_1, \dots, s_k \rangle$  para algún  $S = \{s_1, \dots, s_k\} \subset G$  finito.

**Observación.** Se cumple que  $\langle S \rangle = \bigcap_{S \subset H \leq G} H$ . En efecto:

- (i) Si  $x \in \langle S \rangle$ , tenemos que  $x = s_1^{t_1} \cdots s_k^{t_k}$  para  $s_i \in S$  y  $t_i \in \mathbb{Z}$ . Entonces, si  $S \subset H \leq G$ , como  $H$  es subgrupo la operación está cerrada en  $H$ , por lo que  $x = s_1^{t_1} \cdots s_k^{t_k} \in H$ . Así,  $\langle S \rangle \subset \bigcap_{S \subset H \leq G} H$ .
- (ii) Supongamos que  $x \in \bigcap_{S \subset H \leq G} H$  pero  $x \notin \langle S \rangle$ . Esto es una contradicción, pues es fácil comprobar que  $\langle S \rangle \leq G$  y  $S \subset \langle S \rangle$ . Por tanto, debe ser que  $\bigcap_{S \subset H \leq G} H \subset \langle S \rangle$ .

**Ejemplo.** 1. Los grupos cíclicos son finitamente generados puesto que son generados por un único elemento.

2. Todos los grupos finitos están finitamente generados.

3. El grupo de los cuaterniones,  $Q$ , tiene orden 8 y tenemos que  $Q = \langle i, j, k \rangle = \langle i, j \rangle$ .

**Proposición 1.9.** Sea  $G$  un grupo y  $\emptyset \neq S \subset G$ , con  $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ . Sea  $f : G \rightarrow H$  un homomorfismo de grupos. Entonces  $f(\langle S \rangle) = \langle f(S) \rangle$ .

**Demostración.** Sea  $\langle S \rangle = \{s_1^{t_1} \cdots s_k^{t_k} : t_i \in \mathbb{Z}, s_i \in S, k \in \mathbb{N}\}$ . Tenemos que

$$f(s_1^{t_1} \cdots s_k^{t_k}) = f(s_1^{t_1}) \cdots f(s_k^{t_k}) = f(s_1)^{t_1} \cdots f(s_k)^{t_k}.$$

□

#### 1.4.1. Grupo diédrico $D_n$

Sea  $n \geq 3$  y consideremos  $U_n = \left\langle e^{\frac{2\pi i}{n}} \right\rangle$ <sup>1</sup>. Pensemos en la representación de  $U_n$  en el plano, que forma un polígono de  $n$  lados. Tenemos que si  $u = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ , entonces

$$U_n = \{1, u, u^2, \dots, u^{n-1}\}.$$

Sea  $\tau$  la simetría en el plano respecto del eje horizontal. Entonces, tenemos que  $\tau : U_n \rightarrow U_n : z \rightarrow z^{-1}$ , que es una biyección. Sea  $\rho$  el giro en sentido antihorario de ángulo  $\frac{2\pi}{n}$ .

<sup>1</sup>Recordamos que este es el grupo formado por las raíces  $n$ -ésimas de la unidad.

Tenemos que  $\rho : U_n \rightarrow U_n : z \rightarrow z \cdot u$ , que también es una biyección. Definimos el grupo diédrico de orden  $n$  como

$$D_n = \langle \tau, \rho \rangle.$$

Estudiemos el orden de  $\tau$  y  $\rho$ . Por ser  $\tau$  una simetría tenemos que  $\forall z \in U_n$ ,

$$\tau^2(z) = \tau(z^{-1}) = z.$$

Así, tenemos que  $o(\tau) = 2$ . Por otro lado,

$$\rho^k(z) = zu^k.$$

Tenemos que  $u^k = 1 \iff n|k$ , por tanto  $o(\rho) = n$ . Así podemos asegurar que

$$\{1, \tau, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}, \tau\rho, \dots, \tau\rho^{n-1}\} \subset D_n.$$

Por un lado sabemos que  $\rho^i \neq \rho^j$  si  $i \neq j$  con  $i, j < n$ , y  $\tau \neq \rho^k$ ,  $\forall k \leq n$ , puesto que tienen imagen distinta en 1. Por tanto, tenemos que  $|D_n| \geq 2n$ . Veamos que efectivamente  $|D_n| = 2n$  y que  $D_n$  coincide con el conjunto de arriba. Veamos que  $\tau \cdot \rho$  tiene orden dos:

$$(\tau \cdot \rho)^2(z) = \tau(\rho(\tau(\rho(z)))) = \tau(\rho(\tau(z \cdot u))) = \tau(\rho(u^{-1}z^{-1})) = \tau(u^{-1}z^{-1}u) = u^{-1}zu = z.$$

Así, obtenemos que  $\tau \cdot \rho = \rho^{-1} \cdot \tau$  y  $o(\tau \cdot \rho) = 2$ . En particular tenemos que  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\tau\rho^k = \rho^{-k}\tau$ . Así, tenemos que  $|D_n| = 2n$  y  $D_n$  es el conjunto que hemos visto anteriormente. Podemos hacer un par de observaciones:

- Todos los elementos de  $D_n$  pueden ser expresados como una potencia de  $\tau$  por una potencia de  $\rho$ .
- No es un grupo abeliano, puesto que  $\tau \cdot \rho \neq \rho \cdot \tau$ .

**Proposición 1.10.** Sea  $G$  un grupo finito tal que  $G = \langle s, t \rangle$ , donde  $s$  tiene orden 2,  $t$  tiene orden  $n$  y  $st$  tiene orden 2. Entonces,  $G \cong D_n$ .

**Demostración.** Como  $(st)^2 = e$ , tenemos que  $st = t^{-1}s$ . Así, es fácil ver que  $st^k = t^{-k}s$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ . Si repetimos el argumento dado en la construcción del grupo diédrico, tenemos que

$$G = \{1, s, t, t^2, \dots, t^{n-1}, st, \dots, st^{n-1}\}.$$

Consideremos la aplicación  $f : D_n \rightarrow G : \tau^i \rho^j \rightarrow s^i t^j$  para  $i \in \{0, 1\}$  y  $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Se trata de un homomorfismo de grupos puesto que

$$f((\tau^i \rho^j)(\tau^k \rho^m)) = f(\tau^{i+k} \rho^{m-j}) = s^{i+k} t^{m-j} = s^i s^k t^{-j} t^m = s^i t^j s^k t^m = f(\tau^i \rho^j) f(\tau^k \rho^m).$$

Veamos que es una biyección. Tenemos que

$$\text{Im}(f) = \langle f(\tau), f(\rho) \rangle = \langle s, t \rangle = G.$$

Por tanto,  $f$  es sobreyectiva. Como  $G$  y  $D_n$  tienen el mismo orden, tenemos que  $f$  es un isomorfismo y  $G \cong D_n$ .  $\square$

### 1.4.2. Generadores en grupos de congruencias

Vamos a considerar  $\mathbb{Z}_m = \{[0]_m, [1]_m, \dots, [m-1]_m\}$ . Sea

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m &\rightarrow \mathbb{Z}_m \\ ([a]_m, [b]_m) &\rightarrow [a \cdot b]_m. \end{aligned}$$

Veamos que la aplicación está bien definida. Supongamos que  $[a]_m = [a']_m$  y  $[b]_m = [b']_m$ . Tenemos que  $a - a' = km$  y  $b - b' = k'm$  para  $k, k' \in \mathbb{Z}$ . Así,

$$ab = (km + a')(k'm + b') = kk'm^2 + kb'm + a'k'm + a'b' \Rightarrow ab - a'b' = Cm, \quad C \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto,  $[ab]_m = [a'b']_m$ . Consideremos el neutro  $[1]_m$ . Vamos a estudiar si  $(\mathbb{Z}_m / \{[0]_m\}, \cdot, [1]_m)$  es un grupo. Para que lo sea, basta estudiar la propiedad de los inversos y que la operación sea interna. Para que este conjunto sea grupo debe darse que  $m$  es primo.

**Definición 1.12.** Sea  $\mathbb{Z}_m$  con  $m \in \mathbb{N}$  y vamos a definir las **unidades de  $\mathbb{Z}_m$**  como  $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m) = \{[a]_m : \text{mcd}(a, m) = 1\}$ .

**Observación.** El conjunto está bien definido ya que si  $[a]_m = [b]_m$ , tenemos que  $b = a + km$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . Como  $\text{mcd}(a, m) = 1$ , debe ser que  $\text{mcd}(b, m) = 1$ .

**Lema 1.4.** Dado  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $[a]_m \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$  si y solo si tiene inverso multiplicativo en  $\mathbb{Z}_m^*$ .

**Demostración.** (i) Supongamos que  $[a]_m \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$ , por lo que  $\text{mcd}(a, m) = 1$ . Por la identidad de Bézout, existen  $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$  tales que

$$1 = \lambda a + \mu m.$$

Por tanto, tenemos que  $[1]_m = [\lambda a]_m = [\lambda]_m [a]_m$ . Para ver que  $[\lambda]_m$  es el inverso multiplicativo de  $[a]_m$  falta ver que  $[\lambda]_m \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$ . En efecto, tenemos que  $\text{mcd}(\lambda, m) \mid 1$  por lo que  $\text{mcd}(\lambda, m) = 1$  y  $[\lambda]_m \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$ .

(ii) Supongamos que  $[a]_m$  tiene inverso multiplicativo. Entonces, existe  $[b]_m \in \mathbb{Z}_m^*$  tal que  $[a]_m \cdot [b]_m = [a \cdot b]_m = [1]_m$ . Por tanto,  $1 = ab - km$ . Sea  $d = \text{mcd}(a, m)$ , entonces  $d \mid a$  y  $d \mid m$ , por lo que  $d \mid 1$  y tenemos que  $d = 1$ . Así, nos queda que  $[a]_m \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$ . □

**Observación.** Los elementos de  $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$  son los generadores de  $\mathbb{Z}_m$ . En efecto, si  $[a]_m \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$  tenemos que  $\text{mcd}(a, m) = 1$ , por lo que  $o([a]_m) = m$ .

**Proposición 1.11.** El conjunto  $(\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m), \cdot, [1]_m)$  es un grupo abeliano.

**Demostración.** (i) Veamos que la operación está cerrada. Si  $[a]_m, [b]_m \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$  tenemos que si  $\text{mcd}(ab, m) > 1$ , entonces existe un primo  $p$  tal que  $p \mid m$  y  $p \mid ab$ , por lo que  $p \mid a$  o  $p \mid b$ , que es una contradicción. Por tanto, tenemos que  $[ab]_m \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)^a$ .



(ii) Veamos que se cumple la propiedad asociativa. Está claro que

$$([a]_m \cdot [b]_m) [c]_m = [ab]_m \cdot [c]_m = [abc]_m = [a]_m \cdot [bc]_m = [a]_m ([b]_m \cdot [c]_m).$$

(iii) Está claro que el elemento neutro es  $[1]_m$ .

(iv) Por lo visto en el lema anterior, los elementos de  $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$  tienen inversos multiplicativos en  $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$ . □

<sup>a</sup>Esta parte también se puede demostrar directamente utilizando la identidad de Bézout para  $a, m$  y  $b, m$  y haciendo el producto de las dos.

**Definición 1.13 (Función de Euler).** La **función de Euler**,  $\varphi$ , se define como

$$\varphi : \mathbb{N} / \{0\} \rightarrow \mathbb{N} : m \rightarrow \varphi(m) = |\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)|.$$

Es decir,  $\varphi(m)$  es el número de generadores de  $\mathbb{Z}_m$ .

**Proposición 1.12.** Sea  $\varphi$  la función de Euler.

1. Si  $p$  es primo con  $p \geq 2$ , entonces  $\varphi(p) = p - 1$ .
2. Si  $p$  es primo y  $k \geq 2$  entero, entonces  $\varphi(p^k) = (p - 1)p^{k-1}$ . En particular, si  $k \geq 3$ ,  $\varphi(p^k) = \varphi(p^{k-1})p$ .
3. Si  $n, m \in \mathbb{N}$  tales que  $\text{mcd}(n, m) = 1$ , entonces  $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$ .

**Demostración.** 1. Es trivial.

2. El grupo  $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{p^k})$  está formado por las clases  $[a]_{p^k} \in \mathbb{Z}_{p^k}$  tales que  $\text{mcd}(a, p^k) = 1$ , es decir,  $\text{mcd}(a, p) = 1$ . Por tanto,

$$\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{p^k}) = \mathbb{Z}_{p^k} / \underbrace{\left\{ [pi]_{p^k} : 0 \leq i < p^k \right\}}_{p\mathbb{Z}_{p^k}}.$$

Podemos observar que  $p\mathbb{Z}_{p^k} = \langle [p]_{p^k} \rangle = \langle p \cdot [1]_{p^k} \rangle$ , por lo que tiene orden  $\frac{p^k}{p} = p^{k-1}$ . Por tanto, tenemos que

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = (p - 1)p^{k-1}.$$

Finalmente, está claro que la ecuación  $\varphi(p^k) = \varphi(p^{k-1})p$  es trivial para  $k = 2$ . Si  $k > 2$ , tenemos que

$$\varphi(p^{k-1})p = (p - 1)p^{k-2}p = (p - 1)p^{k-1} = \varphi(p^k).$$

□

## Capítulo 2

# Cocientes y homomorfismos

**Definición 2.1.** Sea  $G$  un grupo,  $H \leq G$  y  $a \in G$ . Definimos los conjuntos

$$aH = \{ah : h \in H\}, \quad Ha = \{ha : h \in H\}.$$

**Lema 2.1.** Sea  $G$  un grupo,  $H \leq G$  y  $a \in G$ . Las aplicaciones

$$f_1 : H \rightarrow aH : h \rightarrow ah, \quad f_2 : H \rightarrow Ha : h \rightarrow ha$$

son biyecciones. En particular, si  $a \in H$ ,  $aH = Ha = H$ .

**Demostración.** Demostramos sólomente que  $f_1$  es biyección, puesto que la demostración de  $f_2$  es análoga.

- Veamos que  $f_1$  es sobreyectiva. Tenemos que si  $x \in aH$ , entonces  $\exists h \in H$  tal que  $x = ah$ , por lo que  $f_1(h) = x$ .
- Para ver que  $f_1$  es inyectiva, supongamos que  $f_1(h_1) = f_1(h_2)$ , por lo que  $ah_1 = ah_2$ . Multiplicando por el inverso de  $a$  en la izquierda de ambos lados obtenemos que  $h_1 = h_2$ .

Ahora, si  $a \in H$ , tenemos que  $aH, Ha \subset H$ . Sea  $h \in H$ , por tanto

$$h = \underbrace{a^{-1}(ah)}_{\in aH} = \underbrace{(ha^{-1})a}_{\in Ha} \in H.$$

Así, tenemos que  $H \subset aH, Ha$ , por lo que  $H = aH = Ha$ . □

**Definición 2.2.** Sea  $G$  un grupo y  $H \leq G$ . Sean  $a, b \in G$  y vamos a definir la relación de equivalencia  $\sim_H$ :

$$a \sim_H b \iff Ha = Hb.$$

Entonces diremos que  $a$  y  $b$  son **congruentes por la derecha módulo  $H$** . El **índice**  $[G : H]$  de  $H$  en  $G$  es el número de  $G$  módulo  $H$ . Es decir,

$$[G : H] := |G / \sim_H|.$$

**Lema 2.2.** Sean  $a, b \in G$  y  $H \leq G$ . Entonces  $a \sim_H b$  si y solo si  $ab^{-1} \in H$ .

**Demostración.** (i) Si  $a \sim_H b$  tenemos que  $Ha = Hb$ . Por tanto,  $a = e \cdot a \in Hb$ , por lo que existe  $h \in H$  tal que  $a = hb$ , así tenemos que  $ab^{-1} = h \in H$ .

(ii) Si  $ab^{-1} \in H$ , tenemos que existe  $h \in H$  tal que  $ab^{-1} = h$  por lo que  $a = hb$  y  $a \in Hb$ . Sea  $xa \in Ha$ , tenemos que  $xa = xhb \in Hb$ , por lo que  $Ha \subset Hb$ . Recíprocamente, tenemos que  $b = h^{-1}a$ . Tomamos  $h' = h^{-1} \in H$ . Entonces, si  $xb \in Hb$  tenemos que  $xb = xh'a \in Ha$ , por lo que  $Hb \subset Ha$ . Así, nos queda que  $Ha = Hb$ . □

**Observación.** Si  $a \in G$ , tenemos que  $[a]_{\sim_H} = Ha$ . Lo llamamos la clase de equivalencia de  $a$  módulo  $H$  o la clase lateral derecha de  $a$  por  $H$ . En efecto,

$$b \in [a]_m \iff ab^{-1} \in H \iff ba^{-1} \in H \iff b \in Ha.$$

**Proposición 2.1 (Fórmula de Lagrange).** Sea  $G$  un grupo y  $H \leq G$ . Entonces,  $|G| = |G : H| |H|$ .

**Demostración.** Sea  $[G : H] = k$ , entonces sean  $a_1, \dots, a_k$  representantes de las  $k$  distintas clases de equivalencia. Así,

$$G = Ha_1 \sqcup \dots \sqcup Ha_k.$$

Dado que se trata de uniones disjuntas obtenemos que

$$|G| = |Ha_1 \sqcup \dots \sqcup Ha_k| = \sum_{i=1}^k |Ha_i| = \sum_{i=1}^k |H| = k |H|.$$

La segunda igualdad la hemos obtenido del primer lema del tema. □

**Observación.** 1. Sea  $G$  un grupo finito y  $a \in G$ . Entonces por la fórmula de Lagrange sabemos que  $o(a) \mid |G|$ . Basta ver que hemos tomado  $H = \langle a \rangle$ .

2. Se puede definir la relación de equivalencia también por la izquierda:

$$a \sim^H b \iff aH = bH \iff b^{-1}a \in H.$$

Podemos observar que  $\sim_H$  y  $\sim^H$  son en general distintos pero  $G / \sim_H$  y  $G / \sim^H$  están

en biyección. En efecto, la aplicación  $[a]_{\sim_H} \rightarrow [a^{-1}]_{\sim_H}$  es una biyección. Así, el índice de un subgrupo no depende de si trabajamos por la izquierda o por la derecha.

**Proposición 2.2 (Transitividad del índice).** Sean  $G$  un grupo finito y  $H, K \leq G$  tales que  $K \leq H$ . Así,

$$[G : K] = [G : H][H : K].$$

**Demostración.** Sea  $m = [G : H]$  y  $n = [H : K]$ . Sean  $a_1, \dots, a_m$  representantes de las clases de equivalencia de  $[G : H]$  y sean  $b_1, \dots, b_n$  representantes de las clases de equivalencia  $[H : K]$ . Así, tenemos que

$$G = Ha_1 \sqcup \dots \sqcup Ha_m, \quad H = Kb_1 \sqcup \dots \sqcup Kb_n.$$

Por tanto,  $Ha_i = Kb_1a_i \sqcup \dots \sqcup Kb_na_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$ . Así, nos queda que

$$G = \bigsqcup_{i=1}^m Ha_i = \bigsqcup_{i=1}^m \left( \bigsqcup_{j=1}^n Kb_ja_i \right).$$

Así queda demostrado el resultado.  $\square$

**Corolario 2.1.** Sea  $K \leq H \leq G$  tales que  $[G : K] = p$ , con  $p$  primo. Entonces o  $H = K$  o  $H = G$ .

**Demostración.** Tenemos que

$$[G : K] = [G : H][H : K].$$

Hay dos posibles casos:

- Si  $[G : H] = p$ , entonces  $[H : K] = 1$  y  $H = K$ .
- Si  $[H : K] = p$ , entonces  $[G : H] = 1$  y  $H = G$ .

$\square$

**Corolario 2.2.** Sea  $G$  un grupo finito.

1. Si  $H, K \leq G$  con órdenes coprimos entre ellos, entonces  $H \cap K = \{e\}$ .
2. Si  $G$  tiene orden primo, entonces  $G$  es cíclico y está generado por  $a \in G/\{e\}$ .

**Demostración.** 1. Sabemos que  $H \cap K \leq G, K, H$ . Por la fórmula de Lagrange tenemos que  $|H \cap K|$  divide a  $|H|$  y a  $|K|$ , pero  $\text{mcd}(|H|, |K|) = 1$ , por lo que  $|K \cap H| = 1$  y necesariamente  $H \cap K = \{e\}$ .

2. Supongamos que  $|G| = p$ , con  $p$  primo, y  $a \in G/\{e\}$ . Por la fórmula de Lagrange, sabemos que  $o(a)$  divide a  $|G|$ . Por ser  $|G|$  primo, debe ser que  $o(a) = p$ , por lo que  $G = \langle a \rangle$ .

$\square$

**Teorema 2.1 (Teorema de Euler).** Sea  $m \geq 1$  un entero natural. Para cada  $a \in \mathbb{Z}$  tal que  $\text{mcd}(a, m) = 1$  se cumple que  $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ , donde  $\varphi(m)$  es la función de Euler.

**Demostración.** Recordamos que  $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$  son las unidades de  $\mathbb{Z}_m$  y  $\varphi(m) = |\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)|$ . Sea  $a \in \mathbb{Z}$  con  $[a]_m \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$ . Así

$$[a^{\varphi(m)}]_m = [a]_m^{\varphi(m)} = [1]_m,$$

puesto que  $\varphi(m) = |\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)|$  y  $o([a]_m) \mid \varphi(m)$ . □

**Corolario 2.3 (Pequeño teorema de Fermat).** Sea  $p \geq 2$  primo y  $a \in \mathbb{Z}$  entonces  $a^p \equiv a \pmod{p}$ .

<sup>a</sup>Para que se cumpla el teorema debe darse que  $\text{mcd}(a, p) = 1$ .

**Demostración.** Usando lo anterior, tenemos que

$$a^{\varphi(p)} \equiv a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow a^p \equiv a \pmod{p}.$$

□

**Ejemplo (Grupos de orden 4).** Vamos a considerar grupos de orden 4. Sea  $G = \{e, a, b, ab\}$ . Como  $|G| = 4$ , el orden de sus elementos es 2 o 4. Podemos considerar varios casos:

- Puede suceder que todos los elementos tengan orden 2. Tendríamos entonces que  $G \cong C_2 \times C_2$ .
- Puede suceder que exista un elemento de orden 4. Entonces existe otro elemento de orden 4 que es su inverso. Por tanto, el otro elemento que sobra debe tener orden 2. Tendríamos entonces que  $G \cong C_4$ .

## 2.1. Subgrupos normales

**Definición 2.3.** Sea  $G$  un grupo,  $H \leq G$  y  $a \in G$ . Definimos el subgrupo  $a^{-1}Ha = \{a^{-1}ha : h \in H\}$  como el **conjugado** de  $H$  por  $a$ .

**Observación.** Comprobemos que verdaderamente  $a^{-1}Ha$  es un subgrupo. Está claro que  $e \in a^{-1}Ha$ , puesto que  $e = a^{-1}ea$ . Ahora, si  $x, y \in H$ , existen  $h_1, h_2 \in H$  tales que  $x = a^{-1}h_1a$  e  $y = a^{-1}h_2a$ . Así, tenemos que

$$xy^{-1} = (a^{-1}h_1a)(a^{-1}h_2a) = a^{-1}h_1h_2a \in a^{-1}Ha.$$

Así, nos queda que  $a^{-1}Ha \leq G$ .

**Observación.** 1. Si  $G$  es abeliano, tenemos que  $a^{-1}ha = h$ , por lo que  $a^{-1}Ha = H$ ,  $\forall a \in G$ .

2. Si  $a \in H$ , entonces  $a^{-1}Ha = H$ .

3.  $a^{-1}Ha$  y  $H$  están en biyección, por tanto si  $H$  es finito, el orden de  $a^{-1}Ha$  no depende del  $a$  escogido.

**Definición 2.4 (Subgrupo normal).** Sea  $G$  un grupo y  $H \leq G$ . Diremos que  $H$  es **subgrupo normal**,  $H \triangleleft G$ , si  $a^{-1}Ha = H$ ,  $\forall a \in G$ .

**Observación.** 1. Siempre hay subgrupos normales:  $\{e\}$  y  $G$ .

2. Si  $G$  es abeliano, todo subgrupo es normal.

**Lema 2.3.** Sea  $H \leq G$ . Son equivalentes:

1.  $H \triangleleft G$ .
2.  $\forall a \in G, \forall h \in H$  tal que  $a^{-1}ha \in H$ .
3.  $aH = Ha, \forall a \in G$ .

**Demostración.** (1)  $\Rightarrow$  (2) Es trivial por la definición.

(2)  $\Rightarrow$  (3) Sea  $h_1 \in H$  tal que  $a^{-1}ha = h_1$ . Así, tenemos que  $ha = ah_1 \in aH$ . Por otro lado, sea  $h_2 \in H$  tal que  $aha^{-1} = h_2$ , por lo que  $ah = h_2a \in Ha$ .

(3)  $\Rightarrow$  (1) Como  $aH = Ha$ , tenemos que  $H = a^{-1}Ha, \forall a \in G$  por lo que  $H \triangleleft G$ .  $\square$

**Proposición 2.3.** Sean  $G_1$  y  $G_2$  grupos y  $f$  un homomorfismo de grupos.

1. Si  $H \triangleleft G_1$ , entonces  $f(H) \triangleleft \text{Im}(f)$ .
2. Si  $K \triangleleft \text{Im}(f)$ , entonces  $f^{-1}(K) \triangleleft G_1$ . En particular,  $\text{Ker}(f) \triangleleft G_1$ .

**Demostración.** 1. Sabemos que si  $H \leq G_1$  entonces  $f(H) \leq \text{Im}(f)$ . Falta ver que es subgrupo normal, es decir,  $\forall y \in \text{Im}(f), y^{-1}f(H)y = f(H)$ . Sea  $y \in \text{Im}(f)$  y  $h' \in f(H)$ , sea  $x \in G_1, h \in H$  tales que  $f(x) = y$  y  $f(h) = h'$ . Tenemos que

$$y^{-1}h'y = f(x^{-1})f(h)f(x) = f(x^{-1}hx) \in f(H).$$

2. Si  $K \leq \text{Im}(f)$ , entonces  $f^{-1}(K) \leq G_1$ . Tenemos que ver que  $f^{-1}(K) \triangleleft G_1$ , es decir,  $\forall x \in G_1, x^{-1}f^{-1}(K)x = f^{-1}(K)$ . Sea  $x \in G_1, k \in f^{-1}(K)$ , entonces existe  $y \in \text{Im}(f)$  y  $k' \in K$  tales que  $f(x) = y$  y  $f(k) = k'$ . Así, nos queda que

$$x^{-1}kx = f^{-1}(y)^{-1}f^{-1}(k')f^{-1}(y) = f^{-1}(y^{-1}k'y) \in f^{-1}(K).$$

$\square$

**Ejemplo.** Consideremos la aplicación  $\det : \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ . Tenemos que  $\text{Ker}(\det) = \text{SL}_n(\mathbb{R}) \triangleleft \text{GL}_n(\mathbb{R})$ .

**Proposición 2.4.** Sea  $G$  un grupo.

1. Si  $H \leq G$  y  $[G : H] = 2$ , entonces  $H \triangleleft G$ .
2. Si  $K, H \leq G$  y  $H \triangleleft G$ , entonces  $HK \leq G$ . Además, si  $K \triangleleft G$ ,  $HK \triangleleft G$ .
3. Si  $K, H \triangleleft G$  con  $H \cap K = \{e\}$ , entonces  $\forall k \in K, \forall h \in H$  se tiene que  $hk = kh$ .

**Demostración.** 1. Como  $[G : H] = 2$ , solo existen dos clases de equivalencia,  $[e]_{\sim_H}$  y  $[a]_{\sim_H}$ . Así,  $G = H \sqcup Ha = H \sqcup aH$ , por lo que  $Ha = aH$  y  $H \triangleleft G$ .

2. Es trivial que  $e \in HK$ . Sean  $x, y \in HK$ , entonces existen  $h_1, h_2 \in H, k_1, k_2 \in K$  tales que  $x = h_1k_1$  e  $y = h_2k_2$ . Tenemos que

$$xy^{-1} = (h_1k_1)(h_2k_2)^{-1} = h_1(k_1k_2^{-1})h_2^{-1} \in h_1(k_1k_2^{-1})H = h_1H(k_1k_2^{-1}).$$

Así, tenemos que  $h_1H(k_1k_2^{-1}) \subset H(k_1k_2^{-1}) \subset HK$ , por lo que  $xy^{-1} \in HK$ . Si se cumple también que  $K \triangleleft G$  entonces dados  $g \in G$  y  $hk \in HK$ ,

$$g^{-1}(hk)g = (g^{-1}hg)(g^{-1}kg) \in HK.$$

3. Tenemos que ver que si  $k \in K$  y  $h \in H$ , entonces  $hk = kh$ , que es equivalente a ver que  $h^{-1}k^{-1}hk = e$ . Tenemos que

$$h^{-1}k^{-1}hk = h^{-1}k^{-1}hkh^{-1}h = h^{-1}(k^{-1}hkh^{-1})h \in H.$$

$$h^{-1}k^{-1}hk = k^{-1}kh^{-1}k^{-1}hk = k^{-1}(kh^{-1}k^{-1}h)k \in K.$$

Así,  $h^{-1}k^{-1}hk \in H \cap K$ , por lo que  $h^{-1}k^{-1}hk = e$ , que es lo que queríamos demostrar.  $\square$

**Observación.** Sea  $G$  grupo y  $H, K \triangleleft G$  con  $H \cap K = \{e\}$ , y la aplicación  $f : H \times K \rightarrow G : (h, k) \rightarrow hk$ . Entonces  $f$  es un homomorfismo inyectivo y  $\text{Im}(f) = HK$ . Además si  $H$  y  $K$  son finitos, entonces  $|HK| = |H||K|$ .

**Ejemplo.** Tomamos  $D_4 = \langle \tau, \rho \rangle = \{e, \tau, \rho, \rho^2, \rho^3, \tau\rho, \tau\rho^2, \tau\rho^3\}$ . Estudiemos los subgrupos de  $D_4$ . Sabemos que todos los subgrupos, a excepción de los triviales, van a tener orden dos o cuatro.

- Calculamos los subgrupos de orden 4:

$$H_1 = \langle \rho \rangle, H_2 = \langle \tau, \rho^3 \rangle, H_3 = \langle \tau\rho, \rho^2 \rangle.$$

- Calculamos los subgrupos de orden 2:

$$H_4 = \langle \tau \rangle, H_5 = \langle \rho^2 \rangle, H_6 = \langle \tau\rho \rangle, H_7 = \langle \tau\rho^2 \rangle, H_8 = \langle \tau\rho^3 \rangle.$$

Estudiemos cuáles de estos son normales. Por la proposición anterior, tenemos que todos los subgrupos de orden 4 son normales porque su índice es dos. Entre los grupos de orden dos el único normal es  $H_5$ . Es fácil ver que el resto no son normales.

**Observación.** En general si  $K \triangleleft H$  y  $H \triangleleft G$  no implica que  $K \triangleleft G$ . Por ejemplo, en  $D_4$  tenemos que  $\langle \tau \rangle \triangleleft \langle \tau, \rho^2 \rangle \triangleleft D_4$  pero  $\langle \tau \rangle$  no es subgrupo normal de  $D_4$ .

**Definición 2.5 (Grupo simple).** Llamamos **grupos simples** a los grupos,  $G$ , cuyos únicos subgrupos normales son  $\{e\}$  y  $G$ .

**Ejemplo.** El grupo  $\mathbb{Z}_p$  con  $p$  primo es un grupo simple.