

# 白夜

第三号

平成三十年度  
物理科学研究会誌



学友会学術部  
立命館大学 物理科学研究会



# BYAKUYA

## III

BY  
vuccaken

2018.11.25

RITSUMEIKAN  
AT THE SOCIETY  
OF PHYSICAL SCIENCES PRESS



## 卷頭言

こんにちは。物理科学研究会会长の西村宗悟です。今年度は平成最後の年であり、時代が節目を迎える年ですね。節目を迎えるのは年号だけでなく、本研究会も節目の年になります。現在の物理科学研究会の前身である核物理研究会は1949年に発足し、来年で本研究会は70周年を迎えます。今年度と来年度間が節目だからといって、現物理科学研究会の何かが大きく変化するわけでもなく、活動を続けていくと思います。しかし、そういう例年通りの活動できることは大学からの支援やOBの方々からの応援によって初めて実現されることです。支援・応援を受けることが当たり前という考えではなく、支援・応援を受けられることへ感謝しながらこれからも活動を続けていきたいです。

せっかく学外の方に物理科学研究会について知ってもらえる機会なのでこの場で少しどんな活動をしているのかを紹介させていただきます。本研究会では会員それぞれが自分の興味がある分野について研究し、サークル内でそれを発表をしています。分野に関しては物理だけでなく数学や他の応用科学も対象としています。数学や音響学を研究している人もいれば、電子工作やCPUの製作をしている人もいます。そして、本研究会には重大な課題があります。それは会員が少ないということです。毎年、幅広い分野を対象に研究していることを4月の新入生歓迎期に新入生にアピールしているのですが、なかなか入会してくれる人がいません…。今年の新入生歓迎期に研究会宣伝用のビラをある女性に渡そうとしたら彼女に「物理嫌い」と言われました。おそらく本研究会の名前に「物理」という単語が入っていて、「物理=受験勉強+難しい+面白くない」というイメージが頭の中で出来上がってしまっているからではないかと思います。そして、彼女の一言を聞いて私は物理の面白さをもっと伝えていきたいと思いました。今年度の学園祭は物理の面白さを伝えることを目標に企画を考えました！ぜひ、たくさん的人に足を運んでいただきたいです！

さて、本年度の物理科学研究会の会誌「白夜」は過去3年間の中で最もページ数が多くなっています。ページ数が多いから読むのをやめようかな…と思った方もいるのではないかでしょうか？ちょっと待ってください！様々な内容があり、難しいものから簡単なものまで幅広く用意したので、まずは軽い気持ちで目を通してみてください！また、セクションで内容が細かく分けられているので、1日で読み切れなくても大丈夫です！会員が数か月かけて製作した会誌なのでぜひ読んでいただきたいです。

2018年11月24日  
物理科学科3回生 西村宗悟



# 目次

## 卷頭言

v

## 第1章 音とサインとそれからイヤホン♪

	物理科学科 3回生 西村宗悟	1
1.1	はじめに	1
1.2	音って何ですか？	2
1.2.1	音の基礎	2
1.2.2	音の大きさって何？	2
1.2.3	音の物理	6
1.2.4	波といえばサイン波	7
1.3	音の分析にチャレンジ！	9
1.3.1	周波数特性	9
1.3.2	フーリエ級数展開	10
1.3.3	フーリエ変換で周波数分析！	15
1.3.4	スペクトログラム	17
1.3.5	不確定性原理	17
1.3.6	スペクトログラムを見てみよう	18
1.3.7	言語の分析をしてみよう	20
1.4	イヤホンの世界（おまけ）	21
1.4.1	イヤホンの形の分類	21
1.4.2	イヤホンのドライバー	22
参考文献		22

## 第2章 自作CPU

	電気電子工学科 4回生 本田卓	23
2.1	CPU 解説	23
2.1.1	基本仕様	23
2.1.2	基本仕様の解説	24
2.1.3	命令セット	25
2.1.4	サンプルコード	27
2.2	製作小話	29
2.2.1	製作に至った経緯	29
2.2.2	はんだ挫折	29
2.2.3	お世話になった資料	30
2.2.4	こんなことしないでシミュレーションソフトを使いましょう	31
参考文献		31

## 第3章 人工衛星なんてもういいですから。

	機械工学科 1回生 西條晴幸	33
3.1	目的	33
3.2	手法	34
3.2.1	基本方程式	34
3.2.2	計算手法	35
3.3	結果	35
3.4	考察	37
参考文献		38

## 第4章 ゼロから始める飛行の書

	機械工学科 1回生 西條晴幸	41
4.1	目的	41
4.2	揚抗比測定装置の作成	42
4.2.1	準備物	42

---

4.2.2	作成手順	43
4.3	実験	45
4.3.1	実験手法	45
4.3.2	実験環境	46
4.4	結果	47
4.5	考察	47
4.6	結論	47
4.7	今後の課題	47
	参考文献	48

## 第5章 Pythonでデータ処理

物理科学科4回生 門野広大 49

5.1	環境構築	50
5.1.1	諸注意	50
5.1.2	vscode	50
5.1.3	ライブラリの追加方法	51
5.2	Pythonの基礎	51
5.2.1	主な形	51
5.2.2	条件分岐	52
5.2.3	繰り返し	52
5.3	データの処理	53
5.3.1	データ処理のプログラム全体図	53
5.3.2	データプロット	55
5.3.3	データのフィッティング	56
5.4	最後に	56
	参考文献	56

## 第6章 光吸収の量子論の基礎の基礎

物理科学科4回生 門野広大 57

6.1	光吸収の量子論	57
6.1.1	実際に数式	58

6.1.2 数式を終えて . . . . .	60
6.2 複素積分 . . . . .	61
参考文献 . . . . .	63

## 第7章 ゼータランドシガ

物理科学科3回生 中山敦貴 65

7.1 「 $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \dots = 4\pi^2$ 」? ? ? . . . . .	66
7.1.1 リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ . . . . .	66
7.1.2 特殊値の代入 . . . . .	70
7.1.3 解析接続 . . . . .	72
7.2 複素関数について的一般教養 . . . . .	74
7.2.1 複素関数 . . . . .	74
7.2.2 無限級数、無限積 . . . . .	76
7.2.3 その他有用な定理 . . . . .	80
7.3 ゼータ関数の解析接続と特殊値 . . . . .	81
7.3.1 複素数版 $\zeta(s)$ . . . . .	81
7.3.2 $\zeta(s)$ の解析接続 . . . . .	82
7.3.3 特殊値 $\zeta(0)$ . . . . .	85
7.3.4 特殊値 $\zeta'(0)$ . . . . .	85
7.4 リーマン予想 . . . . .	95
7.4.1 ガンマ関数 $\Gamma(s)$ . . . . .	96
7.4.2 積分表示による $\zeta(s)$ の解析接続 . . . . .	104
7.4.3 特殊値表示 . . . . .	109
7.4.4 $\zeta(s)$ の零点と非零領域 . . . . .	112
7.4.5 リーマン予想 . . . . .	113
7.4.6 素数定理 . . . . .	114
7.4.7 リーマン予想と RSA 暗号 . . . . .	116
7.4.8 数値計算（ギャラリー） . . . . .	117
参考文献 . . . . .	127

## 第1章

# 音とサインとそれからイヤホン♪

物理科学科3回生

西村宗悟

### 1.1 はじめに

今回の私の会誌のテーマは音です。音が伝わることは身近な物理現象でありながら音の研究をする人が少なく、たくさんの人に音響工学の面白さを伝えたいと思い会誌のテーマを音しました。なるべく物理学初学者の方にもわかりやすいように書いたので、気軽に読んでいただけると思います。

音の簡単な分析に挑戦してみることを目標にして、まずは音とは何かを説明しました。その後、音の解析に関連する事柄を中心に話をしつつ、実際に周期的な音である矩形波を周期的な関数に見立てて、数学的な手法のフーリエ級数展開を用いて解析しました。次に実際にフリーソフトの「WaveGene」を用いて矩形波を作り、それをフリーソフトの「WaveSpectra」で周波数解析して、周期的な関数のフーリエ変換と比較しました。最後にフリーソフトの「Audacity」を用いて、人間の言語の音の解析を行いました。

おまけとして、イヤホンの種類などについて書いたので興味がある方は読んでください。(イヤホンの話と今回のテーマである音の話は関係ありません(笑))

## 1.2 音って何ですか？

### 1.2.1 音の基礎

私たちはたくさんの音に囲まれて生活をしています。外を歩けば風の音や車の走る音が聞こえますし、室内でも冷暖房設備の稼働音や換気扇の回る音などが常に聞こえてきますよね。では、音とはいったい何なのでしょうか？

音とは何かを一言で言うと、気体・液体・固体を媒質として伝わる振動のことです。日常生活で使われる音という単語は人間の聴覚で知覚できる振動のことを指しますが、厳密に言えば媒質を振動が伝わるもの全てを音と言うので、人間の聴覚が知覚できない媒質の振動でもその振動を音といいます。具体的には周波数 20 ~ 20000 Hz の波が人間の聴覚が知覚できる音です。

音が伝わるというのはどういう現象なのでしょうか？ 音が伝わるのは媒質を構成する分子の振動がある粒子からある粒子に伝わる現象です。また、媒質が振動するというのは圧力が変動することと置き換えることができるので、音は圧力変動が伝わる現象とも考えられます。

### 1.2.2 音の大きさって何？

音は媒質の振動であり、その振動によって空気の圧力が変動します。その圧力の変動の大きさを音圧といいます。音圧は大気圧と同じく空気の圧力なので、音圧の単位は [Pa] (パスカル) を用います。

圧力

圧力とは単位面積当たりに加わる力の大きさのことです。1 Pa は以下のように定義されます。

$$1 \text{ Pa} = \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ m}^2} \quad (1.1)$$

ここで 1 N は 1 kg の物体に  $1 \text{ m/s}^2$  の加速度を生じさせるための力の大きさです。

人によっても異なりますが、人間が音を感じる最小の音圧は  $20 \mu\text{Pa}$ 、最大の音圧（音よりも痛みの方が強くなる音圧）は  $20 \text{ Pa}$  程度です。大気圧は約  $1013 \text{ hPa}$  ( $\approx 10^5 \text{ Pa}$ ) であるので、人間の耳が感じる音圧の大きさはとても小さいです。

ここまで、音圧 [Pa] のお話をしてきましたが、我々が普段テレビなどで耳にする音の大きさは [dB] (デシベル) を単位にしていますよね？ 実は、音の大きさとして用いているのは音圧レベルというものです。まずは音圧レベルの定義を求めるこことを目標に話を進めていきます。

最初に音の強さを定義します。音の強さは単位面積を 1 秒間で通過する音のエネルギーであり、以下のように定義されます。

音の強さ

その点における音の強さを  $I$ 、音圧を  $p$  とします。

$$I = \frac{p^2}{\rho c} [\text{W/m}^2] \quad (1.2)$$

ここで  $\rho$  は空気の密度  $\sim 1.2 \text{ kg/m}^3$ 、 $c$  は音速  $\sim 340 \text{ m/s}$  です。

### 式 (1.2) の証明 (次元解析)

上式の関係において、もちろん右辺と左辺の次元は一致しないといけません。ここからは左辺の単位と右辺の単位が等しくなるかどうかを確かめます。方針としては、左辺は単位面積を 1 秒間で通過する音のエネルギーを音の強さと定義したので、右辺が果たして音のエネルギーの単位と一致するかを確かめます。

[W] は仕事率の単位です。仕事率とは単位時間あたりにどれだけの仕事をするかを表すものです。仕事の単位はエネルギーの単位と同じく [J] であり、仕事は加わっている力 [N] とその力をかけ続けている間に移動した距離 [m] の積で書けます。

$$J = N \cdot m \quad (1.3)$$

また、力 [N] はニュートンの運動方程式より (力を加える物体の質量) [kg] と (動いているときの加速度) [ $\text{m/s}^2$ ] の積で書けるので、

$$N = kg \cdot (m/s^2) \quad (1.4)$$

以上の関係を用いて W を m, kg, s の単位で表すと、

$$\begin{aligned} M &= \frac{J}{s} = \frac{N \cdot m}{s} \\ &= \frac{(kg \cdot m/s^2) \cdot m}{s} \\ &= \frac{kg \cdot m^2}{s^3} \end{aligned} \quad (1.5)$$

式(1.2)の右辺の単位を次元解析すると

$$\begin{aligned}
 \text{(式 (1.2) の右辺の単位)} &= \frac{\text{Pa}^2}{(\text{kg}/\text{m}^3)(\text{m}/\text{s})} \\
 &= \frac{(\text{N}/\text{m}^2)^2}{(\text{kg}/\text{m}^3)(\text{m}/\text{s})} \\
 &= \frac{\text{N}^2 \cdot \text{s}}{(\text{m}^2 \cdot \text{kg})} \\
 &= \frac{(\text{kg} \cdot (\text{m}/\text{s}^2))^2 \cdot \text{s}}{(\text{m}^2 \cdot \text{kg})} \\
 &= \left( \text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^3} \right) \frac{1}{\text{m}^2} \\
 &= \frac{\text{W}}{\text{m}^2}
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

以上より、式(1.2)の右辺と左辺の次元が一致することを示せました。

次に音の強さのレベル表示をします。人間が音を感じる場合の音圧や音の強さは両方とも最小から最大まで、かなり幅があり桁数が大きく異なります。そして、実際に私たちが感じる音の大きさはそこまで厳密に感じ取っているわけではありません。例えば音圧が $20\mu\text{m}$ と $21\mu\text{m}$ ではほとんど同じ音の大きさだと感じます。よって、人間が感じる音の大きさとして表しやすいように（対数を取って桁数を重要視）したのが音の強さのレベル表示です。

#### 音の強さのレベル表示

音圧の最小可聴値  $p_0 = 20 \times 10^{-6} \text{ Pa}$  とすると、音の強さの最小可聴値  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ 。

最小可聴値を基準にして対数を取ったものを音の強さのレベル  $L_I$  と定義すると、

$$L_I = \log_{10} \frac{I}{I_0} [\text{B(ベル)}] \tag{1.7}$$

また、 $[\text{d(デシ)}] = 0.1$  なので

$$1 \text{ B(ベル)} = 10 \text{ dB(デシベル)} \tag{1.8}$$

以上より音の強さのレベル表示を dB を用いて表すと、

$$L_I = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} [\text{dB}] \tag{1.9}$$

音の強さのレベル表示をすることができたので、次はそれを音圧のレベル表示に置き換えます。

音圧レベル表示

$$I \propto p^2 \quad (1.10)$$

という関係があるので、音の強さのレベル  $L_I$  を音圧レベル  $L_p$  に書き換えると

$$L_p = 10 \log_{10} \left( \frac{p}{p_0} \right)^2 [\text{dB}] \quad (1.11)$$

音圧レベルを実際に計算してみましょう。

$$\begin{aligned} L_p &= 10 \log_{10} \left( \frac{p}{p_0} \right)^2 \\ &= 20(\log_{10} p - \log_{10} p_0) \\ &= 20(\log_{10} p - \log_{10} (2 \times 10^{-5})) \\ &= 20(\log_{10} p - \log_{10} 2 - \log_{10} 10^{-5}) \\ &\approx 20(\log_{10} p - 0.3 + 5) \\ &= 20 \log_{10} p + 94 \end{aligned} \quad (1.12)$$

式 (1.12) を使って  $p = 0.1 \text{ [Pa]}$ 、 $p = 1 \text{ [Pa]}$ 、 $p = 10 \text{ [Pa]}$  の時の音圧レベルを計算します。

$$p = 0.1 \text{ [Pa]} \text{ のとき } L_p = 74 \text{ [dB]}$$

$$p = 1 \text{ [Pa]} \text{ のとき } L_p = 94 \text{ [dB]}$$

$$p = 10 \text{ [Pa]} \text{ のとき } L_p = 114 \text{ [dB]}$$

以上の結果より、音圧が 10 倍になっても音圧レベルは 20 dB 程度しか変化しないので音圧レベルを用いることで音の大きさを扱いやすい数値にすることができたといえます。

### 1.2.3 音の物理

音は媒質（空気・水 etc...）の振動が伝わる現象であり、媒質には質量と弾性があります。媒質に質量があるということは明らかのことですが、弾性は本当にあるのでしょうか？

ここで1つ、思考実験をしてみます。断熱容器に空気を入れて、容器内部の空気が外に出ないようにピストンを容器につけます。ピストンを押すと、容器内の空気を圧縮した場合、ピストンを押す方向と逆向きに力が働きます。それは、空気のもつ弾性による力です。また、弾性は空気だけでなく、思考実験で用いた空気を音を伝える他の媒質置き換えても、その媒質は弾性を持つことから、音を伝える媒質は弾性を持っているといえます。

例としてスピーカーの振動板が振動し、音を出している様子をイメージしてみましょう。（図1.1）

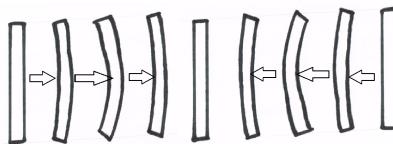


図1.1 スピーカー振動版

図1.1のようにスピーカーの振動板が振動すれば、振動板の周りの空気は押されたり引かれたりします。これが空気の圧力の変化が伝わっていく現象です。

次に振動版によって押された空気がどうなったかをイメージしてみましょう。

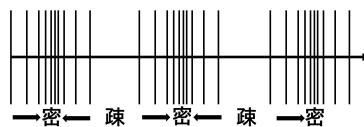


図1.2 空気の圧力変化

図1.2のように空気はばねのような振る舞いをし、空気には密な部分や疎な部分ができます。このように波の振動方向と進行方向が同じ波を縦波といいます。

縦波の他にも横波と呼ばれる波もあり、横波は進行方向と振動方向が垂直になる波のことです（図1.3）。また、縦波の表現を横波の表現にすることができる、逆に横波の表現を縦

波の表現にすることもできます。縦波は空気分子の元の位置からのずれを変位として縦軸にとります。よって、空気の振動の変化を考えるには横波の表現のほうが分かりやすく適しています。

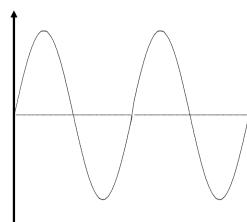


図 1.3 横波

横波を見てサイン波を思い浮かべる人も多いと思います。しかし、なかなか三角関数を日常生活で使うことはないと思うので忘れてしまった人もいますよね。次のセクションではサイン波ってどんな波だったかを復習します。

#### 1.2.4 波といえばサイン波

サイン波は三角関数のひとつであるサイン関数で定義される波形です。この波形は周期的に山と谷が繰り返し現れ、最も基本的な波です(図 1.4)。

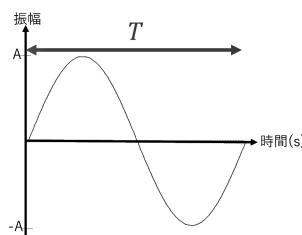


図 1.4 サイン波

波を表すパラメータには振幅・周期があります。振幅は波の山（谷）の高さ、周期は波1つが波1つ分進むのにかかる時間を表します。音の場合は波の振幅は音の大きさ、周期は音の高さに対応しています。よく音の高さを表す時の単位として [Hz : ヘルツ] が使われますが、これは音の周波数の単位です。周波数とは1秒間で波形が何個現れるかを表す

パラメータです。周期  $T_0$  と周波数  $f_0$  の関係は以下の式で表されます。

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \quad (1.13)$$

例えば、周期が 2s の波は 2s ごとに同じ波が繰り返し現れることを意味し、周期 2s の波であると言えますが、1 秒間で 1/2 個（1 波長の半分）が現れるので振動数 1/2 Hz の波とも言えます。

また、振幅を  $A$  として、時刻  $t$  を変数とするサイン波は以下のように表せます。

$$u(t) = A \sin(2\pi f_0 t) \quad (1.14)$$

この式の  $\sin()$  の中身について、 $f_0$  と  $t$  の積は一周期を繰り返す回数を表していて、それにサイン関数の一周期  $2\pi$  [rad] をかけていることから、一周期  $2\pi$  [rad] を  $f_0 t$  回繰り返すという意味であることが分かります。実際に先ほどの例で用いた周期 2s (振動数 1/2 Hz) の波を振幅 1 としてグラフ化してみます。

上式の  $f_0$  を  $f_0 = \frac{1}{2}$  とすると図 1.5 のようになります。

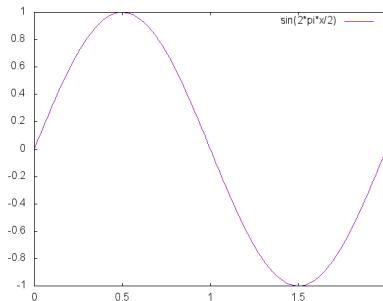


図 1.5 周期 2s のサイン波

図 1.5 より、確かに一周期が 2s であり、1s で一周期の波の半分が現れることが確認できました。

## 1.3 音の分析にチャレンジ！

### 1.3.1 周波数特性

波を表す方法として、縦軸を振幅、横軸を時間にするやり方の他にも、縦軸を振幅、横軸を周波数にする方法もあります。後者の方で表すグラフを周波数特性といいます。図 1.5 の振幅-時間グラフの周波数特性は図 1.6 になります。



図 1.6 周波数特性

波を表すのに振幅-時間グラフを用いる利点は、直感的に波を捉えることができる点です。横軸を時間にすることで波の時間発展による変化を捉えやすくなります。

周波数特性のグラフを用いる利点は、波を構成している波の周波数が一目で分かるという点です。これまでの議論では最も単純な波であるサイン波 1 つのみを考えてきたので、周波数特性のグラフを使う恩恵をあまり感じることができませんが、いくつかの周波数成分を持つ波を解析するときには振幅-時間グラフではどの振動数の波が含まれているかが分かり難いです。

これまで考えてきた 1 つの周波数成分のみで構成される音を純音、いくつかの周波数成分を持つ波のことを複合音といいます。大切なのは、すべて複合音は純音の重ね合わせで表現できるということです。

### 1.3.2 フーリエ級数展開

複合音が純音の重ね合わせで書けるということを言い換えると、複雑な波でも周期的であれば周期的に単純な波であるサイン波やコサイン波の和で書けるということになります。

複雑な周期関数がサイン関数とコサイン関数の和で表わすことをフーリエ級数展開といいます。

#### フーリエ級数展開

$f(x)$  を周期  $2\pi$  の周期関数とすると、 $f(x)$  は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (1.15)$$

と無限級数に展開できる。また、 $a_0, a_n, b_n$  は以下の式で表せる。 $(n \geq 1)$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad (1.16)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad (1.17)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx. \quad (1.18)$$

ここからは具体的な関数を考えてみましょう。ここでは矩形波をフーリエ級数展開してみます。矩形波とは半周期ごとに一定値のハイとロー（ハイの符号を逆にしたもの）を繰り返す波のことです。矩形波は図 1.7 のような形をしています。

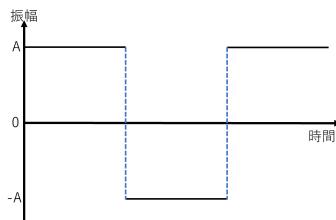


図 1.7 矩形波形の形

これを関数として表現すると

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < \pi) \\ -1 & (-\pi < x < 0) \end{cases} \quad (1.19)$$

ここで、 $f(x)$  は奇数関数、 $\cos(nx)$  は偶関数なので  $f(x)\cos(nx)$  は奇関数となり、 $-\pi$  から  $\pi$  まで積分すると値が 0 になるので  $a_n$  は 0 になります。

また、 $f(x)\sin(nx)$  は偶関数なので  $-\pi$  から  $\pi$  まで積分するのは、0 から  $\pi$  まで積分して二倍にすることと同値です。つまり、 $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$  を求めればよいです。

以上より

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(nx) \quad (1.20)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \quad (1.21)$$

式 (1.20), 式 (1.21) を解けば矩形波の関数  $f(x)$  をフーリエ級数展開できます。

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{1}{n} \cos(nx) \right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{2}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1) \\ &= \begin{cases} -\frac{2}{n\pi}(-1 - 1) & (n = 1, 3, 5...) \\ -\frac{2}{n\pi}(1 - 1) & (n = 2, 4, 6...) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & (n = 1, 3, 5...) \\ 0 & (n = 2, 4, 6...) \end{cases} \end{aligned} \quad (1.22)$$

式(1.22)を式(1.20)に代入して計算すると

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{4}{n\pi} \sin(nx) \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{(2m+1)\pi} \sin((2m+1)x) \\
 &= \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

以上より、矩形波を周期関数  $f(x)$  に見立てたとき  $f(x)$  は

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right) \tag{1.24}$$

というようにサイン関数の和で書けることがわかりました。

ここで再び、この周期関数を矩形波として扱うために、周波数を  $f_0$ 、時間を  $t$  として  $x = 2\pi f_0 t$  とします。式(1.24)に代入すると

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{4}{\pi} \left( \sin(2\pi f_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3 \times 2\pi f_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5 \times 2\pi f_0 t) + \dots \right) \\
 &= \frac{4}{\pi} \left( \sin(2\pi f_0 t) + \frac{1}{3} \sin(2\pi(3f_0)t) + \frac{1}{5} \sin(2\pi(5f_0)t) + \dots \right)
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

式(1.25)からわかるることはいろいろな周期・振幅のサイン波が合成されており、例えば第二項目のサイン波の周波数は第一項目のサイン波の周波数の3倍であるが、振幅は  $1/3$  倍になっていることです。つまり、 $n$  を自然数とし、第  $n$  項目のサイン波は第一項目のサイン波と比べると周波数は  $2n - 1$  倍、振幅は  $1/(2n - 1)$  倍のサイン波であることがわかります。

では、具体的に1周期2msの矩形波を作つてみましょう。

今回計算に使うプログラミング言語は Fortran です。 $n$  を入力し、サイン波を第  $n$  項目まで足し合わせるというプログラミングです。以下、ソースコードを記載します。

```
implicitnone
real*8 pi, y, t, A
integer n, m, x
open(10, file='kukeiha.dat', status='unknown')
pi = 4.0*atan(1.0)
write(*,*) "n を入力"
read(*,*) n !2n+1 倍音まで足し合わせるための n を入力

do x = 0, 400
    y = 0.d0 !y の初期化
    t = x/100000.d0 !時間を 0ms から 4ms まで 0.01ms 刻みで増やすため

    do m = 1, n
        A = 2.d0*m - 1.d0
        y = (4.d0/pi)*(1.d0/A)*sin(A*t*2.d0*pi/0.002) + y
    enddo

    write(10,*) t, y

enddo
close(10)
stop
end
```

図1.8に  $n = 1, 2, 3, 10$  項目までサイン波を足し合わせたグラフをそれぞれ記載します。足し合わせる項数が多いほど矩形波に近づくことがわかります。

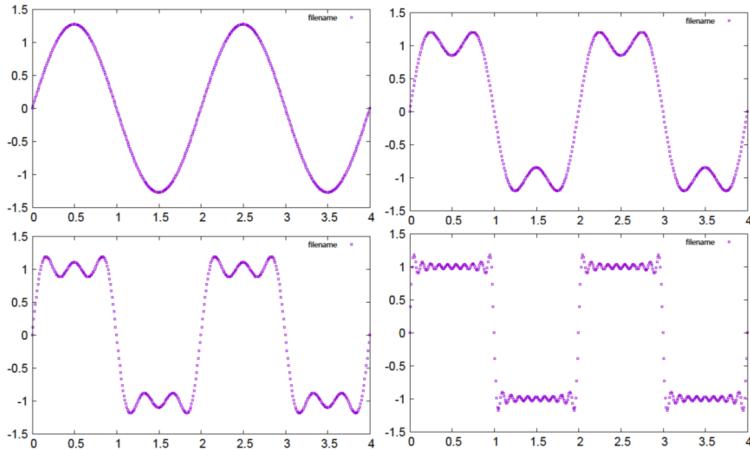


図1.8  $n=1,2,3,10$  項目までサイン波を足し合わせた結果 (左上： $n = 1$ , 右上： $n = 2$ , 左下： $n = 3$ , 右下： $n = 10$ )

次に図1.9に  $n = 1000$  項目までサイン波を足し合わせたグラフを記載します。1000項目まで足し合わせると、理想的な矩形波になっていることがわかります。

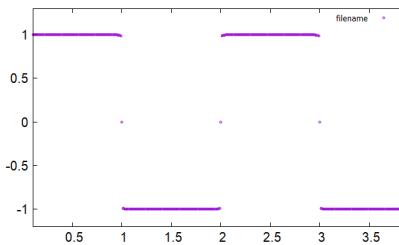


図1.9  $n=1000$  項目までサイン波を足し合わせた結果

周期 2ms の矩形波の周波数特性で最も大きな割合を占めるのは周波数  $f_0 = 1/0.002 = 500\text{Hz}$  でありこのサイン波を基本振動というと、残りの合成されているサイン波の周波数は基本振動の周波数  $f_0$  の奇数倍のものだけであり、振幅は基本振動の振幅の奇数分の1倍の大きさになっています。

以上の結果を矩形波の周波数特性としてグラフにすると図 1.10 になります。

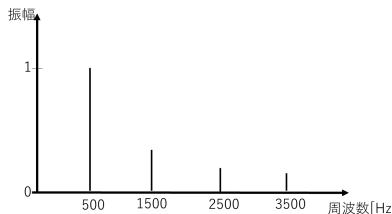


図 1.10 矩形波の周波数特性

### 1.3.3 フーリエ変換で周波数分析！

これまでのお話で純音以外の音（複合音）も純音を足し合わせることで表すことができるということを述べてきましたが、具体的に複合音の中に含まれる純音の周波数・振幅を解析することを周波数分析といいます。

図 1.11 のように窓を使い波形を区切りそのなかに含まれる波の周波数特性を求める方法がフーリエ変換です。フーリエ変換では複合音は大小様々な波長の波が合成されており、その波長の波がどれぐらいの振幅でもって合成されているのかを分析します。窓の大きさを  $\Delta t$  とすると、波形に当てはめることのできるサイン波の最小周波数  $\Delta f$  は以下のように表せます。

$$\Delta f = \frac{1}{\Delta t} \quad (1.26)$$

当てはめることのできる最小のサイン波の周波数が制約されるのは、当てはめることでできる最大の周期のサイン波が制約されるからです。窓の大きさに対して、当てはめるサイン波の周期が大きい場合というのは窓に当てはめるサイン波の 1 周期が窓 1 つに入りきらないことを意味します。よって、入りきらないということは最大の周期のサイン波を含むことができないことになるので制約を受けます。

周波数特性の周波数分布は  $\Delta f$  の整数倍の値のみ持ちます。また、窓の大きさ  $\Delta t$  が大きいと周波数分析の精度が上がります。なぜならば、窓の大きさが大きいほど含まれているサイン波の最小周波数  $\Delta f$  が小さくなるからです。

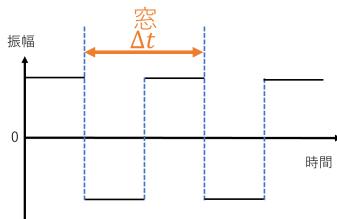


図 1.11 フーリエ変換

では、実際に波形をフーリエ変換して周波数特性を求めてみましょう。先ほど、フーリエ級数展開で矩形波の周波数特性を求めたので、このソフトを使って矩形波の周波数特性を求めて、結果が一致するかどうかを確かめてみます。

まずは波形を作るところから始めます。今回はインターネットでダウンロードできるフリーソフト「WaveGene」を使います。「WaveGene」は <http://efu.jp.net/soft/wg/wg.html> からダウンロードできます。

図 1.12 に「WaveGene」で作った周期 2 ms の矩形波を記載します。



図 1.12 Wavegene で作った矩形波

この波形を、またまたフリーソフト「WaveSpectra」を使い解析します。「WaveSpectra」は <http://efu.jp.net/soft/ws/ws.html> からダウンロードできます。「WaveSpectra」は波をフーリエ変換し、周波数特性を出してくれます。

図 1.13 に矩形波を「WaveSpectra」で周波数解析した結果を記載します。

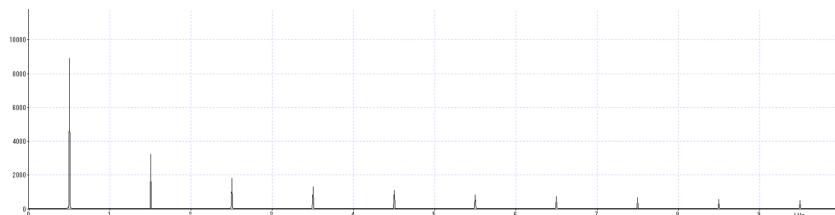


図 1.13 WaveSpectra で解析した矩形波の周波数特性

図 1.13 と級数展開の結果を比べると結果は一致することが分かります。

### 1.3.4 スペクトログラム

これまで時間変化によって音（周波数）が変わらない場合の周波数特性を求めるために、窓で波形を区切ってフーリエ変換を用い周波数特性を求めていましたが、実際の音は時間発展によって変化するものもあるので、一般的には音の周波数特性を調べる場合は時間ごとの周波数特性を求める必要があります。

方法としてはこれまでと同じく窓の中の音をフーリエ変換しつつ、その窓を時間変化に応じて少しずつずらしていくという手法です。窓を少しずつずらすことによって周波数分析を時間的に連続して行うことができます。

以上の手法を用いた結果得られる周波数特性を表すグラフをスペクトログラムといいます。スペクトログラムは横軸を時間、縦軸を周波数として、色の濃さでその周波数の音の強さ（大きさ）を表します。図 1.14 → 図 1.15 → 図 1.16 の順に進み最後の図 1.16 がスペクトログラムです。

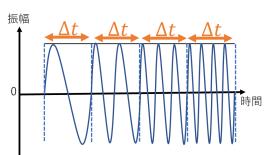


図 1.14 窓をずらす

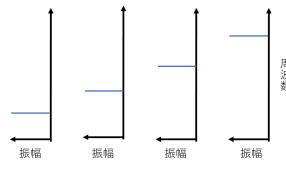


図 1.15 ずらした窓でフー  
リエ変換

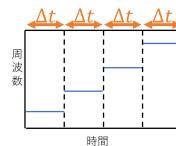


図 1.16 スペクトログラム

### 1.3.5 不確定性原理

周波数分析の精度は窓の大きさによって決まります。時間に応じて音が変化する場合は、時間を区切ることと周波数を区切ることを別々に行い、区切られた中の音の周波数特性を調べます。

時間を区切る間隔を小さくすると、より時間の変化に対して観測で得られるスペクトログラムが敏感になるので、時間変化を詳細に調べることができます。同様に周波数を区切る間隔を小さくすると、より周波数特性を詳細に調べることができます。以上より時間を区切る間隔は時間分解能、周波数を区切る間隔は周波数分解能を表すことがわかります。

時間分解能を  $\Delta t$ 、周波数分解能を  $\Delta f$  とすると、この二つの関係は以下のようになります。

$$\Delta f \propto \frac{1}{\Delta t} \quad (1.27)$$

上式の意味は時間分解能と周波数分解能が反比例の関係であることです。この関係から時間分解能と周波数分解能のどちらも低い値にすることができないということがわかります。仮に時間変化を詳細に調べようとすると時間分解能を低くするので、周波数分解能が高くなり、周波数特性の周波数部分が曖昧になります。同様に周波数特性を詳細に調べようすると、周波数特性の時間変化の部分が曖昧になります。

このように片方を小さくすると片方が大きくなり、二つを同時に小さくできないことを不確定性原理といいます。

時間分解能を小さくしたスペクトログラムを広帯域スペクトログラムといい、周波数分解能を小さくしたスペクトログラムを狭帯域スペクトログラムといいます。前者は周波数分解能が大きくなり、帯域通過フィルタの帯域幅を大きくして周波数分析を行うこと同じなので「広帯域スペクトログラム」、反対に後者は帯域通過フィルタの帯域幅を小さくして周波数分析を行うので「狭帯域スペクトログラム」という名前が付けられています。

### 1.3.6 スペクトログラムを見てみよう

では、実際にスペクトログラムを見てみましょう。

今回は「Audacity」というオープンソースのオーディオソフトウェアを使ってスペクトログラムを見ます。

「Audacity」は <https://www.audacityteam.org/> からダウンロードできます。

Audacity を使うと、音波を縦軸：振幅、横軸：時間とした横波の図を表示させたり、その横波の周波数特性やスペクトログラムを分析することができます。

まず最初に同じ音源に対して、先ほど紹介した広帯域スペクトログラムと狭帯域スペクトログラムの二種類で分析してみます。周期 2 ms の矩形波の広帯域スペクトログラムと狭帯域スペクトログラムは図 1.17 のようになります。(上が広帯域スペクトログラム、下が狭帯域スペクトログラム)

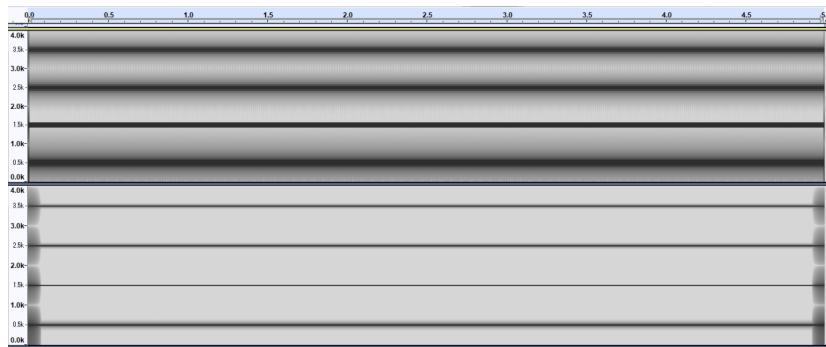


図 1.17 矩形波の広帯域スペクトグラムと狭帯域スペクトグラム

図 1.17 より、広帯域スペクトグラムは周波数特性に広がりがあり、狭帯域スペクトグラムは周波数特性に広がりがありません。これは狭帯域スペクトグラムの方が周波数分解能が高いからです。よって、狭帯域スペクトグラムは周波数特性を分析するのに向いているということがわかります。また、周期 2 ms の矩形波の周波数特性が確かに、これまで確認してきたような数値になっていることもわかります。次は時間発展により周波数が変わる音波のスペクトグラムを見てみましょう。

図 1.18 は「ブツリ」と言ったのを録音したものを周波数分析した結果で、上が広帯域スペクトグラムで下が狭帯域スペクトグラムです。

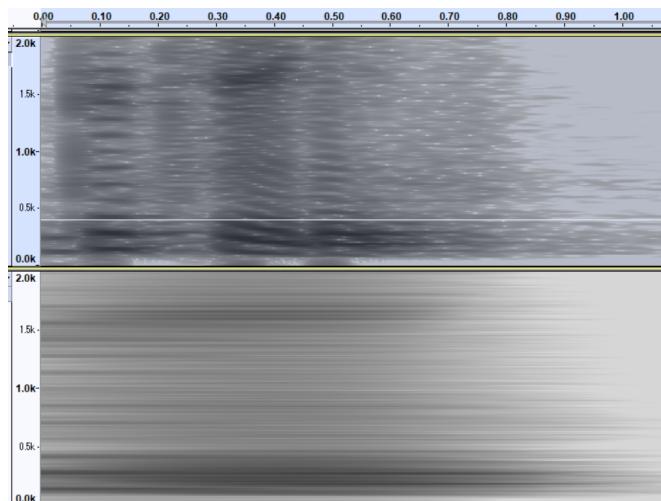


図 1.18 「ブツリ」という音声の広帯域スペクトグラムと狭帯域スペクトグラム

### 1.3.7 言語の分析をしてみよう

耳から得る情報の1つとして言語があります。日本語は50音で言葉を形成しますよね。「あ」の音は誰が聞いても「あ」とわかります。つまり、「あ」の音はどういう音なのかを日本語でコミュニケーションをとる人は知っていて、話す人はそれを口から発し、聞く人は耳でその音を聴き、その音が「あ」であると理解します。よって、「あ」という音は固有の音であり、「あ」には固有の波形があるはずという仮説が立てられます。

今回は「あ」の音の波形を「Audacity」を用いて見てみます。(図1.19)

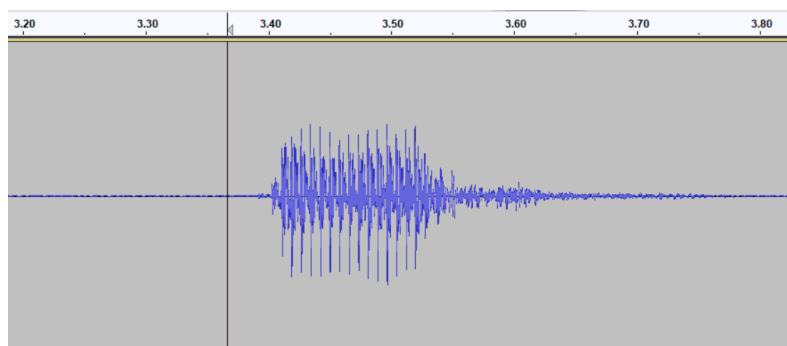


図 1.19 「あ」の全体の波形

図1.19を拡大すると図1.20の波形が見えます。よく見ると1つの波が周期的に繰り返されているのがわかります。つまり、これが「あ」の音の正体であり、「あ」の固有な波形であると言えます。

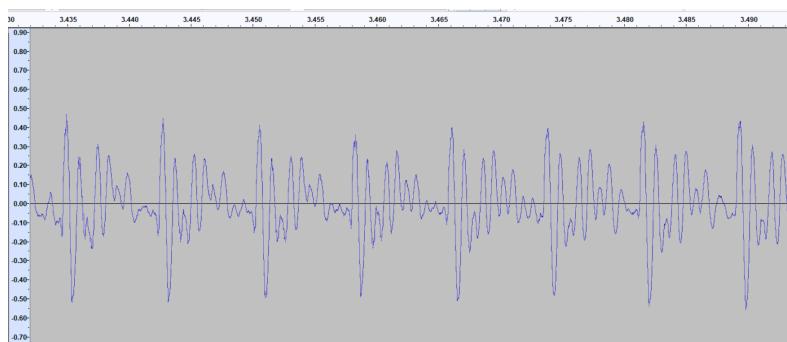


図 1.20 「あ」の波形を拡大

## 1.4 イヤホンの世界（おまけ）

おまけとしてここからはイヤホンの世界をお届けします（笑）。

### 1.4.1 イヤホンの形の分類

イヤホンの形状の種類は大きく2つに分けられます。

- カナル型
- インナーイヤー型

カナル型イヤホンは耳栓を耳に装着するのと同じように耳に装着するタイプのイヤホンです。特徴としては、イヤホンのドライバ部分と鼓膜が近いので、音を綺麗に聞き取れることと、イヤーチップがあるので耳に密着させることができ、外部の音を遮音することができるタイプのイヤホンです。欠点はイヤーチップが耳に密着するので長時間イヤホンをつけていると、耳が痛くなってしまいます。

インナーイヤー型イヤホンとは耳の耳介にイヤホンを装着するタイプのイヤホンです。特徴はイヤホンと外耳道の入口との間に空間ができるので、外の音が聞こえやすいことです。欠点としては、外音を取り込んでしまうのを防ぐのに音量を上げすぎてしまいうことです。音量が大きい状態に慣れてしまうと難聴になりやすくなってしまいます。

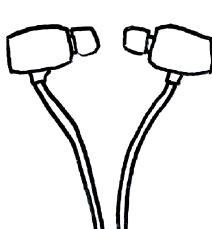


図 1.21 カナル型イヤホン

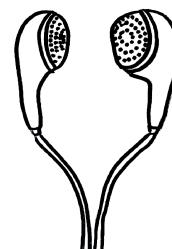


図 1.22 インナーイヤー型イヤホン

### 1.4.2 イヤホンのドライバー

イヤホン内の音を出す部分をドライバーといいます。ドライバーにはダイナミック型とバランスドアーマチュア型の2種類あります。

- ダイナミック型
- バランスドアーマチュア型 (BA型)

最近ではそれらのドライバーを組み合わせたハイブリッド型のイヤホンもありますが、すべてのイヤホンにはダイナミック型かバランスドアーマチュア型のどちらかが必ず使われています。ではそれぞれのドライバーの特徴を見ていきましょう。

ダイナミック型イヤホンは1つのドライバーで再生できる音の周波数帯域が広く、低音を鳴らすのが得意なイヤホンです。現在はイヤホンのドライバーの主流となっていて、比較的安価で手に入るイヤホンにはダイナミック型のドライバーが搭載されています。もちろん、高い再生能力や表現力があるダイナミック型のドライバーもたくさんあるので、ダイナミック型のイヤホンだから音が良くないということはありません。

バランスドアーマチュア型イヤホンは1つのドライバーで再生できる音の周波数帯域が狭く、中音と高音を鳴らすのが得意なイヤホンです。小型のドライバーであり、ドライバー内部の構造がダイナミック型に比べて複雑なので、バランスドアーマチュア型のドライバーは簡単に作ることができません。よって、バランスドアーマチュア型のドライバーは価格が高い傾向があります。それに加えて1つ1つのドライバーの周波数帯域が狭いことを補うために、複数のバランスドアーマチュア型のドライバーを搭載することも多いのですから価格は高くなります。以上のことより、バランスドアーマチュア型のドライバーを搭載したイヤホンはダイナミック型のイヤホンに比べてマイナーな存在になっています。しかし、ボーカルの声は中音に属するので声を重視にする人にはぜひ1度、バランスドアーマチュア型のドライバーを搭載したイヤホンの音を聴いていただきたいです。

## 参考文献

- [1] 青木直史 (2014), 『ゼロからはじめる音響工学』, 講談社.
- [2] 久保和宏ほか (2009), 『音響学 ABC』, 技報堂出版.
- [3] 鈴木陽一ほか・日本音響学会編 (2011), 『音響工学入門』, コロナ社.

## 第2章

# 自作CPU

電気電子工学科 4 回生

本田卓

## はじめに

一昨年の3月から今年の3月ごろにかけて自作の8 bit CPUをTTLのみで製作しました。ですから今回はそのCPUの基本仕様、製作中のエピソードなどをまとめました。かなりマニアックな物ですが興味のある方は是非お読みください。

### 2.1 CPU解説

#### 2.1.1 基本仕様

- bit 数 : 8 bit CPU
- レジスタ数 : 1 個
- 動作周波数 : 12 MHz
- RISC 命令長 : 16 bit
- 1 命令 16 クロック
- 命令数 : 18 個

### 2.1.2 基本仕様の解説

まずこのCPUの基本仕様について解説します。普通CPUの仕様で気になるのはビット数でしょう。最近のパソコンなら32bitか64bitのものが使われています。CPUのビット数の定義は詳しく書きませんが、簡単に言えば「そのCPUが一度（1命令）に処理できるデータサイズのこと」です。このCPUでは1命令で8bitデータを処理できるので8bitCPUとなります。

次にレジスタですが、これはCPU内にある小さなメモリです。CPUの主な処理は「2進数データの演算」と「メインメモリへのデータの格納」です。二つ目のメインメモリへ格納ですが、メインメモリというのは、私たちは「メモリ」とよんでいます、小さければ4GBくらいで大きければ16GBくらいのあれです。このメインメモリですが、CPU本体とは離れた場所にあります。ですからCPUとメインメモリが通信するのに時間がかかります。そこで、CPUとメインメモリの間にもう一つCPUから高速にアクセスすることができるメモリを用意します。それがレジスタです（レジスタはCPUの内部に含まれます）。CPUはレジスタに値を格納して、その格納された値をメインメモリへ格納する、という手順を踏みます。普通のCPUならレジスタは複数個備えているのですが、このCPUは回路を単純にするためレジスタを1個しか備えていません。

動作周波数はクロックを発生させるICを使っているのでこのICの上限である12MHzが上限となります。

次に命令についてです。CPUの命令は大きく分けてRISCとCISCに分けられます。簡単に説明するとRISCが全命令の命令長が同じ、CISCが命令によって命令長が違うというものです。このCPUではすべての命令が16bitなのでRISCということになります。次に1命令にかかるクロック数ですが、これはいろいろな資料を参考に考えた結果、16クロックで1命令実行されるような回路になったというだけで、特に深い意味はありません。頑張って設計すればもっと少ないクロック数で1命令を実行できるようになります。簡単で作りやすかったのでこうなりました。そして最後に命令数ですが、これがこのCPUの一番の特徴を表しているといえます。

本当に特徴を表しているのはその命令の中身なのですが、とにかく、命令の内容でCPUになにができるかが決まります。詳しくは後で説明しますが、このCPUの命令の特徴を一言でいうと「必要最低限」です。いろいろな命令を実行させる場合はもちろん回路が複雑になります。それが一番嫌だったので、これがあれば最低限のことはできるという程度しか命令を用意していません。次の章で命令について詳しく説明します。

### 2.1.3 命令セット

この CPU が実行できる全命令とその説明をします。まずは説明に使われる用語の説明を行います。

- A : レジスタのこと。複数あればレジスタ A, レジスタ B, ... となります。今回は A レジスタしかないので A しか出てきません。
- 機械語 : 2 進数 (0,1) で表現された実際に CPU が読み取る命令のこと。
- アセンブリ : 機械語の 1 命令をわかりやすいように 2 進数から文字に変換したもの。
- IM(Immediate data) : 機械語命令の後半部分の値のこと (前半部分はオペコード)。
- プログラムカウンタ (PC) : メインメモリの中で実際に実行される命令が格納されているアドレス (番地) を示す値。通常 1 命令実行されるたびインクリメントされる。

次に命令の例を表 2.1 に、全命令とその説明をまとめた命令表を表 2.2 に示します。

表 2.1 命令の例

	オペコード	IM
アセンブリ	LDIM	3
機械語	0101 0000	0000 0011
意味	A レジスタに 3 を格納する	

表 2.2 命令表

命令 アセンブラー表記	機械語 (16進数)	説明	式
LDIM	50	IM データを A レジスタにロードする	$A = IM$
ADDIM	91	A レジスタの値に IM の値を足したものを A レジスタに格納する	$A = A + IM$
SUBIM	62	A レジスタの値に IM の値を引いたものを A レジスタに格納する	$A = A - IM$
ANDIM	D3	A レジスタの値と IM の値の AND をとったものを A レジスタに格納する	$A = A AND IM$
NOTIM	3	A レジスタの値と IM の値の NOT をとったものを A レジスタに格納する	$A = A AND IM$
ORIM	74	A レジスタの値と IM の値の OR をとったものを A レジスタに格納する	$A = A AND IM$
LDMEM	55	A レジスタにメインメモリの IM 番地の値を格納する	$A = [IM]$
ADDMEM	96	A レジスタの値にメインメモリの IM 番地の値を足したものを A レジスタに格納する	$A = A + [IM]$
SUBMEM	67	A レジスタの値にメインメモリの IM 番地の値を引いたものを A レジスタに格納する	$A = A - [IM]$
ANDMEM	D8	A レジスタの値とメインメモリの IM 番地の値の AND をとったものを A レジスタに格納する	$A = A AND [IM]$
NOTMEM	8	A レジスタの値とメインメモリの IM 番地の値の NOT をとったものを A レジスタに格納する	$A = A NOT [IM]$
ORMEM	79	A レジスタの値とメインメモリの IM 番地の値の OR をとったものを A レジスタに格納する	$A = A OR [IM]$
JMP	5A	プログラムカウンタの値を IM に変更する	$PC = IM$
JNC	5B	キャリーフラグが 1 の場合プログラムカウンタを IM にする	$PC = IM (CF = 1)$
JNZ	5C	ゼロフラグが 1 の場合プログラムカウンタを IM にする	$PC = IM (ZF = 1)$
STR	D	A レジスタの値をメインメモリの IM 番地に格納する	$[IM] = A$
IN	5E	IN ポートの値を A レジスタに格納する	$A = IN$
OUT	F	A レジスタの値を OUT ポートに出力する	$OUT = A$

### 2.1.4 サンプルコード

#### 3 × 5 の計算

---

```
1      LDIM 0
2      STR 0
3      STR 1
4 bbb:LDIM 5
5      SUBMEM 1
6      JNZ aaa
7      LDMEM 0
8      ADDIM 3
9      STR 0
10     LDMEM 1
11     ADDIM 1
12     STR 1
13     JMP bbb
14 aaa:LDMEM 0
15     OUT
16 ccc:JMP ccc
```

---

**■解説** 最初の LDIM 0, STR 0, STR 1 でメインメモリの 0 番地と 1 番地に 0 を格納します。次に LDIM 5, SUBMEM 1 で 5 からメインメモリの 1 番地の値を引きます。はじめは 0 が格納されているので答えは 5 が返ってきます。ここで答えが 0 だった場合次の JNZ aaa に引っかかり aaa アドレス（プログラム中の aaa: LDMEM 0）にジャンプしますが、今回は 5 なのでそのまま次の命令に行きます。LDMEM 0, ADDIM 3, STR 0 でメインメモリの 0 番地の値を A レジスタを持ってきて、それに 3 を足してまた 0 番地に戻します。次の LDMEM 1, ADDIM 1, STR 1 で同様に 1 番地の値を持ってきて 1 足してまた 1 番地に戻します。ここで JMP bbb により bbb の地点に戻るのでこれまでの命令が繰り返されるのですが、1 番地の値が 1 足されているので最初の LDIM 5, SUBMEM 1, JNZ aaa のところが  $5 - 1 = 4$  となります。これでも 0 ではないので JNZ で aaa にはジャンプしないのですが、これをあと 4 回繰り返すと  $5 - 5$  となり JNZ aaa が実行されて aaa 地点の実行へ移ります。そこからは LDMEM 0 で 0 番地の値を呼び出して OUT で OUT ポートに出力（A レジスタの値を人が見えるように LED で表示）します。JMP ccc はその場無限ループなのでこれ以上もう CPU は何もしません。

1 から 10 まで足し算

---

```
1    LDIM 0
2    STR 0
3    LDIM 1
4    STR 1
5    LDIM 10
6    STR 2
7 bbb:LDMEM 0
8    ADDMEM 1
9    STR 0
10   LDMEM 1
11   ADDIM 1
12   STR 1
13   LDMEM 2
14   SUBIM 1
15   JNZ aaa
16   STR 2
17   JMP bbb
18 aaa:LDMEM 0
19   OUT
20 ccc:JMP ccc
```

---

**■解説** 前の  $3 \times 5$  のプログラムで詳しく説明したので今回は少しづっくりと説明します。最初の LDIM 0, STR 0, LDIM 1, STR 1, LDIM 10, STR 2 でメインメモリの 0 番地に 0、1 番地に 1、2 番地に 10 を格納します。つぎに LDMEM 0, ADDMEM 1, STR 0 でメインメモリ 0 番地の値と 1 番地の値を足します。次の LDMEM 1, ADDIM 1, STR 1 で 1 番地の値を 1 増やします。これで次は 0 番地の値に 2 が足されます。最後に LDMEM 3, SUBIM 1, STR 3 で 3 番地の値から 1 引きます。3 番地にはもともと 10 が入っており、引き算の答えが 0 になったとき（10 ループしたとき）JNZ ccc でループを抜けて 0 番地の値を OUT で出力します。

## 2.2 製作小話

### 2.2.1 製作に至った経緯

もともとサークル活動として電子工作、マイコンを使ったプログラミングをしていました。そんな中で「マイコンの中身ってどうなっているんだろう」という疑問を持っていましたが、同時に「ものすごい複雑な構造をしていて、簡単にわかるものではない」とも思っていました。ですが、ある日偶然「論理回路だけで電卓を作る」というサイトを見つけました。そこにはとても分かりやすく論理回路で計算機を作る方法が解説されており、論理回路の基礎しか知らない僕でも簡単に理解することができました。これをきっかけに「もしかしたらCPUの構造も論理回路だけで理解できるかもしれない」と思いました。そこから名著「CPUの創り方」を読んだり、自分で勉強したりしてある程度CPUを理解することができました。ですが、この時はまだCPU自作をしたいとは思っていました、できるとは思えず行動はしていました。そんなとき、詳しくは説明できませんが、とんでもないミラクルが起き、回路のスペシャリストの方と知り合うことができ、僕がCPUを自作したいと話すと、「ぜひ一緒に作りましょう」という流れになり、その結果CPUを作ることになりました。そこから一年かかりましたが無事CPUを完成させることができました。かなり運がよかったです。

### 2.2.2 はんだ挫折

今完成しているCPUは外注基板でできていますが最初はユニバーサル基板でジャンパー配線の手はんだで作ろうとしていました。書き込み回路だけは手はんだで作りましたが（僕ではなくはんだ付けが得意な友達がやってくれました）あまりの面倒くささに手はんだは断念して外注基板に変更することになりました。下図が実際にはんだ付けされた基板です。

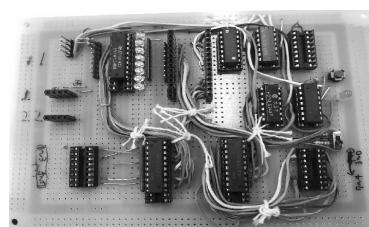


図 2.1 ユニバーサル基盤にはんだ付けした回路

### 2.2.3 お世話になった資料

このCPUを作るまでにいろいろな資料にお世話になりました。その中でも特に役に立った資料（本、サイトなど）を紹介します。

- 電卓製作サイト

<http://www7b.biglobe.ne.jp/~yizawa/logic2/chap1/index.html>

先ほども書いたように僕がCPUを作ることになったきっかけです。普通「CPUは論理回路だけでできている」と言われても想像がつきません。ですが、このサイトの丁寧な解説で自分が思っているほどCPUの内部回路は難しくないのかもしれないと思えるようになりました。

- CPUの創り方

有名なやつです。TTLを10個だけでCPUを自作するという本です。これがCPUなのかというほど簡単なCPUを作りますが、基本構造は変わらないのでこれを理解できればCPUの基本は理解できます。いきなり最新の複雑なCPUを理解できるわけがないので、最初はこの本のような最小構造のCPUを勉強するのが一番いいと思います（趣味で勉強するなら）。



図 2.2 CPU の創り方

- がたろうさんのサイト

<http://diode.matrix.jp/>

自作 CPU を作るおじいさんのサイトです。この人が作った CPU の回路を参考に今回の CPU を製作しました。CPU だけでなく、独自のコンパイラ、OS などほとんどのものを自作しています。この人のまねをしたといつても間違いではないです。

#### 2.2.4 こんなことしないでシミュレーションソフトを使いましょう

最後にこれを見て少しでも CPU に興味を持たれた方がいるなら一つアドバイスですが、はんだ付けして実物が欲しい！などと思わなければ、論理回路シミュレータという素晴らしいものがあるのでそちらを使いましょう。フリーソフトでだれでも簡単に使えます。僕が使っているのは Logisim というソフトです。作った回路が実際に CPU として動作するか確認として使っていましたが、とても便利でした。正直途中から「シミュレータで動いたんだからもうはんだ付けしなくてもいいか」とも思っていました。変更点があれば一瞬で変更できるし、コピペできるし、ほかの人が作った部品流用できるし、完璧です。ネットにほかの人が logisim で作った CPU が上がっているのでそれを参考にすることもできます。「CPU の創り方」の CPU なんてすぐ作れます。まあ、実物は思い出になりますし、いいところもあります。(でももう作りません)

### 参考文献

- [1] 渡波 郁, CPU の創り方, 毎日コミュニケーションズ.



## 第3章

# 人工衛星なんてもういいですから。

機械工学科1回生

西條晴幸

## はじめに

この文章たちは私が4年ほど前に行った活動を基にしたものであるので、少々古い内容もありますが内容的には高校物理だけ（中学生でも少し勉強すれば読める…はず）なので、そこのあなたもさらっと読んでいってみてください。わからなかつたらこの機会（?）に物理の「力学」と数学の「ベクトル」をちょちょいと勉強してみましょう。いざ。

### 3.1 目的

宇宙空間において、ある天体のまわりで初速度をもった物体を放つと、天体の重力と物体の運動から起きる慣性力（遠心力）が釣り合うことで、物体が天体のまわりを半永久的に周回する場合がある。この時の天体に対する物体の速度を第一宇宙速度と言う。地球における第一宇宙速度を BASIC 言語のプログラムを用いて、物体の運動シミュレーションを行うことで概算する。

## 3.2 手法

### 3.2.1 基本方程式

原点  $O$  に質量  $M$  の恒星があり、位置  $\vec{r} = (x, y)$  に質量  $m$  の惑星が存在するとき、万有引力の法則を仮定すると、惑星の受ける力は距離の2乗に反比例する大きさと、惑星から恒星へと向かう向きを持っているので次のように書くことができる。

$$\vec{F} = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \frac{GMm}{|\vec{r}|^2} \quad (3.1)$$

ここで、 $G$  は万有引力定数である。

また、運動方程式により加速度  $\vec{a}$  は、力  $\vec{F}$  によって次のように定められる。

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (3.2)$$

そして、時刻  $t$  と  $t + dt$  の間の位置と速度の単位時間あたりの変化は、それぞれ平均の速度と平均の加速度と呼ばれる。

$$\frac{\vec{r}(t + dt) - \vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}, \quad \frac{\vec{v}(t + dt) - \vec{v}(t)}{dt} = \vec{a} \quad (3.3)$$

ここで、平均の速度と加速度をそれぞれ時刻  $t$  での速度と加速度で近似すれば、

$$\vec{r}(t + dt) \doteq \vec{r}(t) + \vec{v}(t)dt, \quad \vec{v}(t + dt) \doteq \vec{v}(t) + \vec{a}(t)dt \quad (3.4)$$

となる。この式を成分で表せば、

$$\begin{aligned} x(t + dt) &\doteq x(t) + v_x(t)dt \\ y(t + dt) &\doteq y(t) + v_y(t)dt \\ v_x(t + dt) &\doteq v_x(t) + a_x(t)dt \\ v_y(t + dt) &\doteq v_y(t) + a_y(t)dt \end{aligned} \quad (3.5)$$

となり、ここでの加速度  $a_x, a_y$  は (3.1), (3.2) 式より、

$$\begin{aligned} a_x(t) &= \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{GM}{(\sqrt{x^2 + y^2})^2} = -x(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}GM \\ a_y(t) &= \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{GM}{(\sqrt{x^2 + y^2})^2} = -y(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}GM \end{aligned} \quad (3.6)$$

と表すことができる。これら (3.5), (3.6) 式を逐次解くことで位置と速度の時間発展を追うことができる。なお、恒星の質量は惑星に比べて十分大きく、その位置は変化しないとみなせるものとした。

### 3.2.2 計算手法

本研究の数値計算には、"Excel VBA"を用いた。万有引力定数のため、 $G = 6.67 \times 10^{20}$ 、地球質量(ここから前項の"恒星"＝地球とする)のため、 $M = 6 \times 10^{24}$ とした。時間の刻み  $dt = 0.001$  として次の初期条件の下、時刻  $t = 25000$ まで計算し、その間の位置、速度を出力した。また、地球半径( $r$ )を概数で 6371 km と仮定した。そして海拔 0.001 km から直径に対して垂直に物体を打ち出し、地表に衝突することなく周回を続ける最低速度を求める(暇なので手打ちで有効数字 5 つほど)こととする。正確に第一宇宙速度を求める際には海拔 0 km を用いるべきだが、0 km を用いると最初の地点で地表に衝突してしまうため、0.001 km とした。 $V_y$ を徐々に変化(手打ち)させていき、衝突しない最低速度

表 3.1 計算の初期条件

変数	$x$ (物体の $x$ 座標)	$y$ (同 $y$ 座標)	$v_x$ (速度の $x$ 成分)	$v_y$ (同 $y$ 成分)
初期条件	6371.001	0	0	$V_y$

を求める。

実際に使用したプログラムは付録 A に収録した。

## 3.3 結果

この計算によって次の結果が得られた。

表 3.2 各時刻における物体の位置と速度

時刻	<i>x</i> 座標	<i>y</i> 座標	<i>x</i> 速度	<i>y</i> 速度
0	6371.001	0	0	7.9417
1.000991	6371.001	7.957604	-0.00988	7.9417
2.000037	6371.001	15.89091	-0.01973	7.9417
3.000965	6371.001	23.84104	-0.0296	7.9417
4.000893	6371.001	31.78324	-0.03946	7.9417
5.00082	6371.001	39.72544	-0.04932	7.9417
6.000748	6371.001	47.66764	-0.05918	7.9417
7.000675	6371.001	55.60984	-0.06904	7.9417
8.000603	6371.001	63.55204	-0.07889	7.9417
9.000007	6371.001	71.4863	-0.08874	7.9417
10.00041	6371.001	79.4285	-0.0986	7.9417
1249	0.540027	6395.427	-7.91084	0.032387
2497	-6423.28	-3.9226	0.002993	-7.876
3745	2.473652	-6398.39	7.907204	0.034003
4980	6371.67	-0.05906	-0.00308	7.941112
7461	-6422.99	-1.63569	-0.00308	-7.87653
24998	3252.188	5486.858	-6.81944	4.062116
24999	3248.688	5488.858	-6.82212	4.057721
25000	3245.188	5490.858	-6.82474	4.053327

すべての計算結果は付録に収録したかった。

また、初期位置を  $(6372, 0)$  にした場合は  $7.9295 \text{ km/s}^2$  となり、 $(6400, 0)$  とした場合は  $7.8985 \text{ km/s}^2$  となった。また、 $dt$  の値を変化させると、 $dt$  の値が小さくなるほど速度は上がっていくことが分かった。

表 3.3 各初期位置、用いた  $dt$  において求められた速度

初期位置	$dt$	速度 (km/s)	$T$ (周期)
(6400,0)	0.1	7.8974	5074
(6400,0)	0.01	7.8985	5049
(6400,0)	0.001	7.8985	4965
(6372,0)	0.1	7.9237	5057
(6372,0)	0.01	7.9246	5035
(6372,0)	0.001	7.9295	4957
(6371.001,0)	0.1	7.9249	5057
(6371.001,0)	0.01	7.9256	5032
(6371.001,0)	0.001	7.9417	4980

## 3.4 考察

$x, y$  座標を描画すると以下のようになる

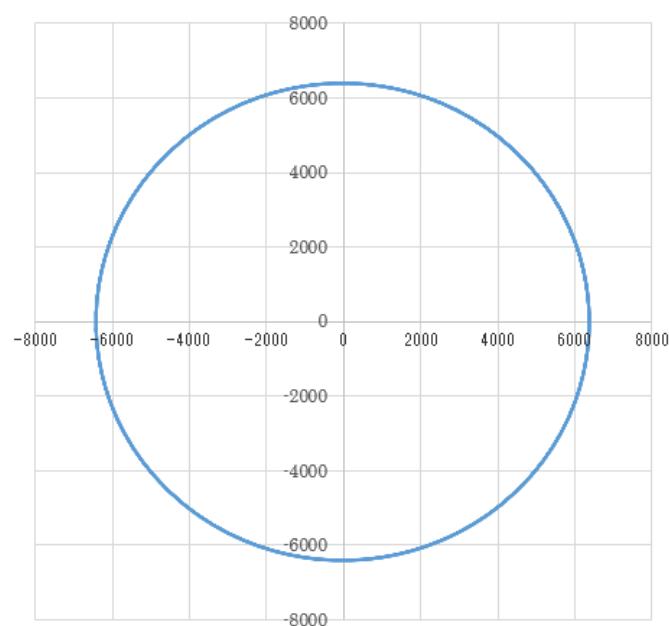


図 3.1 物体の軌跡

座標  $(6371.001, 0)$  を出発した物体が地球の周りを周回する様子を読み取ることができます。

求める速度を  $v$  とすると、円運動の運動方程式は

$$m \frac{v^2}{r} = mg \quad (3.7)$$

となる。 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  (重力加速度) とし、また、今回物体の質量  $m$  は 1 である (つまり今回の想定は地球上で 1kg の物体を投げた場合である)。よって速度の理論値は  $v = \sqrt{gr}$  より、約  $7.9016 \text{ km/s}^2$  となる。これはシミュレーションによって求められた値と比較し約 0.5% の差である。この誤差は表 3.3 より、 $dt$  の値が大きすぎる、または小さすぎるためではないと考えられる。表 3 から読み取ると、初期位置に地表からある程度余裕をもつた海拔を設定した場合のほうが理論値に近い速度が求められている。このことから、先ほどの誤差は、初期位置が地表から近すぎたことにより、小さな計算誤差によって地表に衝突したと判定された地点があつたためであると考えられる。数値計算では有限の桁数で計算を打ち切っていることから、計算誤差は多少なりとも必ず発生していることは確かである。

以上の求められた値を、等速円運動の公式  $v = \frac{2\pi r}{t}$  に代入すると、およそ正しい値(約 1% 以内)となることと、理論値との誤差の量(約 0.5%) からも、およそ正しい値の速度が求められたと考えられる。

## 参考文献

- [1] 和田純夫, 「プリンキピアを読む」, 講談社.

## 付録 A 数値計算のプログラム

```

1 Sub planet() '天体運行シミュレーション
2 '1定数の宣言
3 Const dt As Single = 0.001 '時間の刻み
4 Const Period As Single = 25000 '計算終了時刻
5 Const Output_interval As Single = 1 '出力時間間隔
6
7 '2変数の宣言
8 Dim t As Single
9 Dim time_to_output As Single '次に出力する時刻
10 Dim row_to_output As Single '出力する行
11 Dim x As Single
12 Dim y As Single

```

```
13  Dim Vx As Single
14  Dim Vy As Single
15  Dim new_x As Single
16  Dim new_y As Single
17  Dim new_Vx As Single
18  Dim new_Vy As Single
19  Dim D As Single
20
21  '3初期条件の読み込み
22  x = Range("B2")
23  y = Range("C2")
24  Vx = Range("D2")
25  Vy = Range("E2")
26  time_to_output = Output_interval
27  row_to_output = 3
28
29  '4ループの実行
30  For t = 0 To Period Step dt '軌道計算
31      new_x = x + Vx * dt
32      new_y = y + Vy * dt
33      new_Vx = Vx + Ax(x, y) * dt
34      new_Vy = Vy + Ay(x, y) * dt
35
36      D = (x ^ 2 + y ^ 2) ^ 0.5
37
38      x = new_x
39      y = new_y
40      Vx = new_Vx
41      Vy = new_Vy
42
43      If D < 6371 Then
44          Cells(3, 7) = t
45          Exit For
46      End If
47
48  '5出力
49  If t >= time_to_output Then
50      Cells(row_to_output, 1) = t
51      Cells(row_to_output, 2) = x
52      Cells(row_to_output, 3) = y
53      Cells(row_to_output, 4) = Vx
54      Cells(row_to_output, 5) = Vy
55      'Cells(row_to_output, 6) = Ax(x, y)
56      'Cells(row_to_output, 7) = Ay(x, y)
57      Cells(row_to_output, 6) = area_velocity(x, y, Vx, Vy) ,
58          'area_velocity を決める
59      time_to_output = time_to_output + Output_interval
60      row_to_output = row_to_output + 1 '行を降ろしていく
61  End If
62
63  Next t 'ここまでループ動作
64 End Sub
65
66 '位置から加速度を求める
67  Function Ax(x As Single, y As Single) As Single
```

```
68 Const G As Single = 6.67E-20 '万有引力定数
69 Const M As Single = 6E+24 '地球質量
70     Ax = -1 * G * M * x * (x ^ 2 + y ^ 2) ^ (-1.5)
71 End Function
72
73 Function Ay(x As Single, y As Single) As Single
74 Const G As Single = 6.67E-20 '万有引力定数
75 Const M As Single = 6E+24 '地球質量
76     Ay = -1 * G * M * y * (x ^ 2 + y ^ 2) ^ (-1.5)
77 End Function
78
79 '面積速度を求める
80 Function area_velocity(x As Single, y As Single, v_x As Single, v_y As
81     Single) As Single
82     area_velocity = 0.5 * ((x ^ 2 + y ^ 2) * (v_x ^ 2 + v_y ^ 2) - (x * v_x
83         + y * v_y) ^ 2)
82 'area_velocity は決めた順通りに代入される
83 End Function
```

## 第4章

# ゼロから始める飛行の書

機械工学科1回生

西條晴幸

## はじめに

最近話題になっている小型無人機「ドローン」について、飛行機型のドローンの開発について考えた。大き目な紙飛行機サイズのオーダーだ。飛行機型のドローンの難点は、ヘリコプター型のものと比べ安定性が低く、機体形状や制御の開発にコストがかかることがある。よって、翼の形状の評価を行うことができる装置を、安価に作成することを試みた。またこのサイズ感と実験の簡単さと私の趣味で、まずは紙飛行機の翼型について調べられるような装置を作ることとした。作成した装置を用いて、2種類の翼型について評価を行ったところ、相対的に、理論結果に近い結果が得られた。このことより、紙飛行機が飛ぶと考えられる流れ場において、目安となる翼の評価を行える装置を作成できたと言える。装置の作り方について丁寧に記述したので、自由研究くらいにでも使っていただければと思う。

### 4.1 目的

二次元翼の揚抗比を求められる簡易で低成本な実験装置を作成し、その装置の有用性を調べる。

## 4.2 揚抗比測定装置の作成

風路など主な部分の作成方法は、JAXA 宇宙教育センター、—ミニ風洞— <http://edu.jaxa.jp/materialDB/detail/78875> を参考にし、若干の改変を加えた。つまり、簡便な風洞実験装置の作成を試みる。

### 4.2.1 準備物

- [1] 空冷ファン：1辺が 12 cm、厚さ 40 mm 程度。

厚さ 20 mm 程度の出力がやや小さいものしか入手できない場合は、それでもよい。その際は [10] のボルトの長さは首下長さ 30 mm でよい。電子部品のパーツセンターなどで購入できます。パソコン用のファンではパワーが不足するため、電子装置用の冷却ファンを用いることが望ましい。AC100V 駆動のものを用いる場合は別途電源コードを用意する必要がある。

今回使用したファンは長尾製作所「X-FAN RDH1238B」である。電源は PC の電源装置より 4 ピン接続で用いた。

- [2] 120 mmFAN 用フィンガーガード（上記 [1] 空冷ファンの防護フェンス）

- [3] バルサ板またはベニヤ板

風路用：120×360× 厚さ 13 mm を 2 枚、146×360× 厚さ 13 mm を 2 枚

- [4] の空冷ファンをちょうど入れることができる長さ 360mm の四角い筒が作れれば、寸法は自由でよい。

翼の模型用：146×100× 厚さ 13 mm 任意枚

- [5] 厚めの工作用紙あるいはプラスチックの下敷：40×120 mm の長方形 10 枚

- [6] 竹串：長さ 136 mm、直径 3 mm 任意本（制作する翼の枚数の 2 倍数）

- [7] 画用紙：48×100 mm 数枚

- [8] 木ねじ：3.2×32 mm、16 本

- [9] ベニヤ板：厚さ 3 mm 程度、1 辺が 60 mm の直角 2 等辺三角形 4 枚

- [10] ボルト：M4 首下長さ 50 mm のもの、ナット、スプリングワッシャ 4 組

- [11] 木ねじ：3×12 mm 12 本

#### [工具など]

木工用きり若しくはドリル、ドライバー、はさみ、速乾性木工用接着剤、カッター

## 4.2.2 作成手順

### 作成手順

- I). [3] の板 ( $120 \times 360 \times 13 \text{ mm}$  2 枚、 $146 \times 360 \times 13 \text{ mm}$  2 枚) を使って、[1] の空冷ファンをぴったり入れることができる長さ  $360 \text{ mm}$  の四角い風路を作る。(下図 4.1 参照)

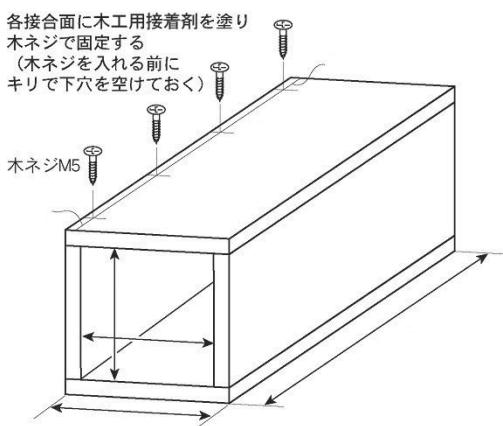


図 4.1

- II). 板の組み合わせを確認した後、木工用きり若しくはドリルで木ねじ用の下穴を  $100 \text{ mm}$  間隔であける (下穴をあけておかないと板が割れことがある)。板の接合面を木工用接着剤で貼り合わせ、乾燥する前に [8] の木ねじで固定する。
- III). 空冷ファンを風路のいちばんはしに挿入する。
- IV). 空冷ファンを固定する。
- a). 空冷ファンの 4 か所の角部に固定用の穴があるため、その穴に合わせて [9] の三角形のベニヤ板にボルトを通す穴をあける。その際、ベニヤ板の直角の角が、風路の外側の角部に合うように穴の位置を決める (下図 4.2 参照)。
- b). 固定は風路の外側から [2] の防護フェンス、三角板、空冷ファンの順にボルトを通して、風路内側に出たボルトのはしには、スプリングワッシャ、ナットを通して、外側からドライバーで締める。(下図 4.2 参照)。

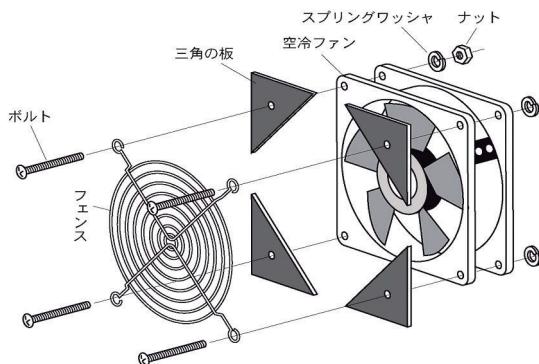


図 4.2

- c). 空冷ファンとベニヤ板の位置が決まつたら、[11] の木ねじでベニヤ板をそれぞれ 3 か所で固定する。(下図 4.3 参照) 電線が外に取り回せないファンの場合、風路に電線を出す穴を設ける。

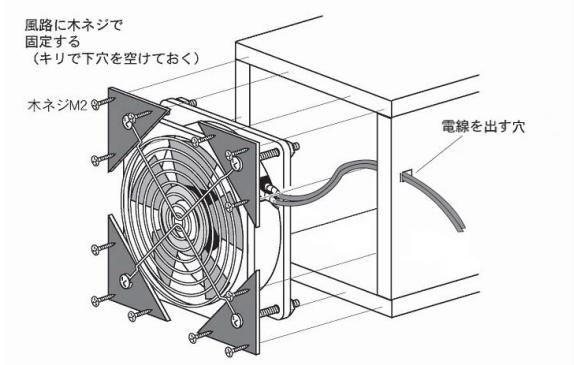


図 4.3

- V). [4] の工作用紙あるいはプラスチックの下敷を使って整流格子を作る。
- 短辺のはしから 20 mm 間隔で、長辺に垂直に 20 mm、直線を 5 本引く。次に右側から、はさみなどで線にそって切り込みを入れる。
  - 縦横に組み合わせて、格子の穴の寸法が一辺 20 mm 奥行き 40 mm の格子を作り、組み合せた部分を木工用接着剤で適当に固定する。

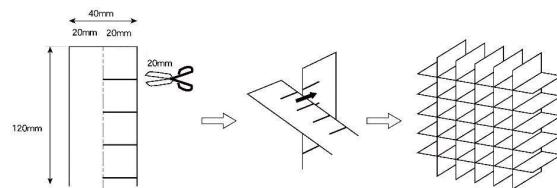


図 4.4

(c) 接着剤が乾いたら、風路の中、空冷ファンの側と反対側のはしから 240 mm 以上奥の位置に差し入れる(下図 4.5 参照)。あとで取り替えができるように軽く接着しておく。

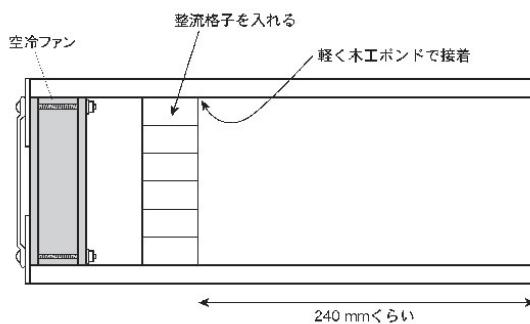


図 4.5

## 4.3 実験

### 4.3.1 実験手法

翼作成の簡易性を鑑み、実験を行う翼は翼型が直線の直線型と、翼型が中折れ型とした。また各翼型を飛行物体に使用した際に公平に扱うため、重量(この場合翼の前端から後端までの翼にそった弓なりの長さ)を揃えた。また空気の流れに対する迎え角は  $10^\circ$  とする。

この条件下で、それぞれの翼について装置を用いて揚力と抗力をそれぞれ 5 回測定し、最大値と最小値を除いた 3 回の平均値を結果の値とする。

### 4.3.2 実験環境

本実験は室内で行う。実験時の気圧は 1013 hPa。また今回使用したファンで生み出される風速を計算しておく。今回使用した、長尾製作所「X-FAN RDH1238B」の風量は 154.0 CFM(立法フィート毎秒) である。また、風路は 12 cm 四方である。また、 $1 \text{ ft}^3 = 28316.846592 \text{ cm}^3$  より求められる風速 (m/s) は、

$$154 \times \frac{28316.846592}{12^2 \times 100 \times 60} = 5.047215712 \text{ (m/s)}$$

約 5 m/s となる。紙飛行機の滑空速度はおよそ 4 ~ 5 m/s であるため、この風速は紙飛行機の実験を行うにあたって適切なものだと言える。

また本実験環境において、空気の流れは乱流である。ここにレイノルズ数を示す。  
(レイノルズ数：流体の慣性力と粘性力の比を表す無次元数であり、流れ場の性質を示す指標として用いられる。)

#### [文字の定義と値]

- $U$ (代表流速)：本実験では風速にあたるため、事前計算よりおよそ 5 m/s である。
- $L$ (代表長さ)：本実験では翼弦長にあたるためおよそ 0.06 m である。
- $\rho$ (流体の密度)：本実験では室内の空気の密度。気圧  $P = 1013 \text{ hPa}$ 、室温  $t = 27^\circ\text{C}$ 、乾燥空気の気体定数  $R (= 2.87)$ 、機体の状態方程式  $P = \rho R(t + 273.15)$  よりこれを  $\rho$  について解くと  $\rho = P/\{R(t + 273.15)\}$  なので数値を代入して  $\rho = 1.175950932778935$  である。
- $\mu$ (流体の粘性係数)：本実験では空気の粘性係数にあたり、 $27^\circ\text{C}$  において引用 [8] より  $1.830 \times 10^{-5}$  である。

まとめるとそれぞれ

$$\begin{aligned} U &\doteq 5.0 \text{ m/s}, \quad L \doteq 0.060 \text{ m}, \\ \rho &\doteq 1.176 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad \mu \doteq 1.83 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

よってレイノルズ数  $Re$  は

$$\begin{aligned} Re &= \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{5.05 \times 0.0600 \times 1.176 \times 10^3}{1.830 \times 10^{-5}} \\ &= 19471475.40983607 \doteq 1.95 \times 10^7 \end{aligned}$$

この値から、本実験環境における流れ場は層流ではなく乱流であることがわかる。このため残念ながら理論計算することは難しく、各数値単体での正当性の検証は困難である。

## 4.4 結果

### 直線型

揚力	…	2.7g
抗力	…	0.6g
揚抗比	…	約 4.50

### 中折れ型

揚力	…	6.1g
抗力	…	0.9g
揚抗比	…	約 6.78

## 4.5 考察

5回のいずれの試行においても数値の誤差は  $\pm 0.6\text{ g}$  程度であったため、精度の高い実験ができたと考えられる。

二つの翼の揚抗比は多くの航空機に用いられているように、低速域において中折れ型のほうが大きい値を示すことがわかっている。実験結果の数値はこの事実に沿っており、このことからこの装置は目安程度には信頼できる揚抗比を測定できるものだと考えられる。

また今回の実験の全予算は測定装置(キッチンスケール 2500円)も含め 7000円程度であり、十分な低コスト化に成功したと言える。

## 4.6 結論

二次元翼の揚抗比を求められる実験装置を低成本で作成し、その正確性の程度を実験によって示すことができた。

## 4.7 今後の課題

装置の有用性の証明にはまだ数パターンの翼についての評価を行うことも必要であるため、より信頼性の高い結論を示すために実験を繰り返すことを今後の課題とし、そこから速度域を上げてドローン開発に向けていく。

## 参考文献

- [1] 小林 昭夫「紙ヒコーキで知る飛行の原理—身近に学ぶ航空力学」(1988)
- [2] 須藤 浩三「流体の力学」コロナ社
- [3] JAXA 宇宙教育センター, 一ミニ風洞—  
<http://edu.jaxa.jp/materialDB/detail/78875>
- [4] 飛行機はなぜ飛べるか? 揚力とは? キャンバの効果のメカニズムとは?  
<http://www2.plala.or.jp/puthoff/wing.html>
- [5] 飛行機に働く力 basic forces;lift, drag, thrust 航空実用辞典  
<http://www.jal.com/ja/jiten/dict/p051.html>
- [6] 水理学 株式会社環境技術研究所開発センター  
<http://spokon.net/eelnews/hydraulics/009s.htm>
- [7] 流体解析の基礎講座 ソフトウェアクリエイドル  
<http://www.cradle.co.jp/tec/column01/008.html>
- [8] 標準大気の特性 HEISHIN  
[http://www.eng-book.com/sample/pdf/eb18\\_p150.pdf](http://www.eng-book.com/sample/pdf/eb18_p150.pdf)
- [9] 流体力学 水・空気の物性 機械用語集  
[http://www.mterm-pro.com/machine-yougo/  
fluid-dynamics/water-air-bussei.html](http://www.mterm-pro.com/machine-yougo/fluid-dynamics/water-air-bussei.html)
- [10] 流体解析の基礎講座 第1～8回  
<http://www.cradle.co.jp/tec/column01/>
- [11] パッと知りたい! 人と差がつく乱流と乱流モデル講座 第1～13回  
<http://www.cradle.co.jp/tec/column04/index.html>

## 第5章

# Pythonでデータ処理

物理科学科 4回生

門野広大

## はじめに

研究室に入ったら実験データをグラフにプロットしたりいろんなことをしないといけないと思います。研究室によってデータ処理をするソフトは異なると思いますが、大体は有料で個人で買うにはちょっと…っていう感じになると思います。研究室で作業すれば問題はないと思いますが、家でゆっくり一人で作業したいけど研究室のパソコンをもってかえるのはだるいといった感じになります。

そういうときに Python で簡単なデータ処理ができるようになっているといいと思います。それなら Gnuplot でいいじゃんかという声がしそうなのでちょっと補足しておきます。Python はデータ処理だけでなくいろんなことができる所以データ処理から入って数値解析などに進展したりすることも数値計算の知識さえあれば簡単にできます。それに今絶賛流行中のラズパイも基本的に Python でプログラミングします。そのほかにもこれから出てくるマイコン(マイクロコンピュータ)の開発環境は Python が増えると思います。データ分析から入って Python の世界に入れば研究の可能性が広がっていきます。

今回の会誌は、実験データをプロットして簡単なフィッティングできるまで解説したいと思います。(自分も初心者なので信用しきらないで下さい)

## 5.1 環境構築

### 5.1.1 諸注意

Pythonを書く環境は調べるとたくさんあり今回紹介するのはあくまで一例なのでまあ気に入らなかつたら別の環境にすぐさま移動してください。

### 5.1.2 vscode

Visual Studio Code (vscode)でのPython構築をします。とっても簡単です。

まずvscodeをダウンロードします。<https://code.visualstudio.com/>からインストーラーをダウンロードして、起動させてください。追加タスクの選択をすべて選択しておくと今後便利かも。

次に、vscodeの拡張機能を追加します。ファイル→基本設定→拡張機能でPythonで検索して一番上にあるやつをインストールしてください。インストールが完了したら再読み込みして、新規ファイルを作成し、

```
print ('Hello world')
```

と書き込み、拡張子を.pyのファイル名で保存すると右下にPythonがダウンロードされてません的な警告が出るので、ダウンロードボタンを押してください。そうするとブラウザが開くのでそのサイトからインストーラーをダウンロードして起動してください。インストーラーの最初の画面にpathの追加云々のチェックがあるのでチェックしてください。そこから先は特に特別なことをしなくても大丈夫です。ダウンロードが終わったら、再度vscodeを開き先ほど保存したファイルを開いてください。

F5をクリックするだけでデバックができるのでクリックしてください。そうすると下のほうにターミナルが開くので、そのになんか黄色い文字が表示され、なんかコマンドを実行してくださいできなことが書いてあつたらそのコマンドをターミナルに書き込んで実行してください。おそらく

```
python -m pip install -U pylint --user  
python -m pip install --upgrade pip
```

の二つだと思います。

以上でおそらく環境が構築できると思いますが何か行き詰まつたらGoogle先生に聞いてください。いろんな人が詳しくブログで紹介してくれているのでこんな適当な説明より

も百倍いいと思います。

### 5.1.3 ライブラリの追加方法

この後、初期状態では入っていないライブラリを使用します。コマンド一つで追加することができます。デバックを開始したときに入ってないぞと言われたら `import` や `from` とかの後ろに書いてあるライブラリの名前を以下のコマンドに入れてターミナルで実行してください。

```
import numpy as np
```

↑これだったらライブラリの名前 = `numpy`

```
from matplotlib import pyplot
```

↑これだったらライブラリの名前 = `matplotlib`

コマンド

```
python -m pip install ライブラリの名前
```

## 5.2 Python の基礎

今回使用する主な文法についてだけです。詳しくは本やブログを参照してください。

### 5.2.1 主な形

Python のプログラム（Python には限らず）は基本的に上から順番に実行していきます。初めにライブラリを追加するプログラムを入れます。

```
from matplotlib import pyplot  
import numpy as np  
import math
```

```
import + ライブラリの名前
```

で基本的にできます。ライブラリでそのプログラムで用意されている関数をしようするとき

`ライブラリの名前. 関数名()`

のような形で使用しないといけないので、ライブラリの名前が長いと面倒なので

```
import + ライブラリの名前 + as + 今後使用する名前
```

といった形に書いてやると関数の名前を短くできます。

ライブラリを追加したらそのあとは普通にプログラムを書くだけです。

自作の関数を作成するには

```
def func(x ,intensity ,X0,HWHM):
    return intensity * HWHM**2 /((x-X0)**2 + HWHM**2)
```

といった形で書けます。上はローレンツ関数の値を返す関数です。

## 5.2.2 条件分岐

```
if 条件1:
    処理1
elif 条件2:
    処理2
else:
    処理3
```

という形です。

## 5.2.3 繰り返し

この処理がPythonでは遅いらしいです。あんま使わないで用意されている関数をうまく使用してください。

C言語とはちょっと違います。C言語とかはカウンタ変数(大体*i,j*とか使うやつ)をどこまでやるかみたいな感じでループをしますが、Pythonではそういうものは使わなっぽいです。下に具体例を示します。

```
l = ['Alice', 'Bob', 'Charlie']
for name in l:
    print(name)
```

`for`の後に任意の適当な変数を入れループは`in`の後のリストなどのインテラブルオブジェクト?の要素が順番に変数が代入され処理が行われるっぽいです。

通常のC言語みたいなループをしたい場合は`range()`関数を使用します。

`range(最小値, 最大値, 数)`のように引数をとると最小値から最大値まで指定した数だけのリストを作ってくれます。普通に何回か同じ処理を繰り返したいだけだったら、

`range(回数)` という形で引数をとればその回数だけループを繰り返してくれます。回数は任意の変数に代入されます。

下に `range()` を使った例を示します。

```
for name in range(100):
    sum = sum + 1
```

ほかにもたくさんありますが、詳しくは書店にある Python の本を読んでください。とても丁寧に書いてあります。

## 5.3 データの処理

とりあえず今回は自分が実験に使用したプログラムについての解説的な感じにしたいと思います。すべて理解している人が書いているわけではないのでその辺察してくれるとありがたいです。

### 5.3.1 データ処理のプログラム全体図

とりあえず自分が実験データのフィッティングに使用したものを下にコピペします。ほとんど誰かのブログのパクリです。

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot
import matplotlib.ticker as ptick
import scipy.optimize
import glob, re
from functools import cmp_to_key

filename = 'file.dat'

with open(filename,'r') as file:
    X,Y =[],[]
    for line in file.readlines()[0:]:
        items = line[:-1].split(' ')
        X.append(float(items[0]))
        Y.append(float(items[1]))
    pyplot.plot(X,Y,label = filename)

max_Y = max(Y)
min_Y = min(Y)

if np.abs(max_Y) >= np.abs(min_Y):
```

```

intensity = max_Y
X0 = X[Y.index(max_Y)]
else:
    intensity = min_Y
    X0 = X[Y.index(min_Y)]

pini = np.array([intensity,X0,1])

def func(x ,intensity ,X0,HWHM):
    return intensity * HWHM**2 /((x-X0)**2 + HWHM**2)

popt, pcov = scipy.optimize.curve_fit(func, X, Y, p0=pini)
perr = np.sqrt(np.diag(pcov))

print("initial parameter\toptimized parameter")
for i, v in enumerate(pini):
    print(str(v)+ '\t' + str(popt[i]) + ' ± ' + str(perr[i]))

fitline = func(X, popt[0], popt[1], popt[2])
pyplot.plot(X, fitline,label = 'FITTING')
pyplot.ylabel('intensity',fontsize = 15)
pyplot.xlabel('Shift[GHz]',fontsize = 15)
pyplot.tick_params(labelsize = 12)
pyplot.legend(loc="best")
pyplot.show()

```

このプログラムはデータファイルを読み込んで、ローレンチアンでフィッティングしようというものです。ローレンチアンって何かというと、式で書くと

$$f(x) = I_0 \frac{(\Gamma/2)^2}{(x - x_0)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

この式をグラフ化すると

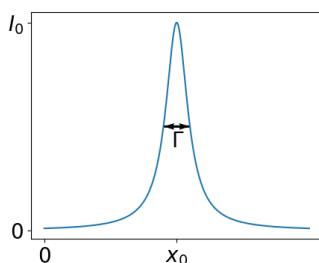


図 5.1 ローレンチアン

この形の関数は割とよくある形です。このフィッティングができたら大体良いです。上のプログラムの各部分をちょっと詳しく…

### 5.3.2 データプロット

はじめにデータ処理をするうえでデータを読み込ませないといけないです。上のプログラムでは初めに行っています。

```
filename = 'file.dat'

with open(filename,'r') as file:
    X,Y =[],[]
    for line in file.readlines()[0:]:
        items = line[:-1].split(' ')
        X.append(float(items[0]))
        Y.append(float(items[1]))
    pyplot.plot(X,Y,label = filename)
```

この部分です。`filename` には今から処理したいデータのファイル名を入れてください。拡張子は `*.txt`, `*.dat`, `*.plt` はできました。他は知りませんが多分大丈夫です。

```
with open(filename,'r') as file:
```

この後にファイルを読み込む動作を書きます。通常だとファイルを開いて処理してファイルを閉じるといった操作をしなくてはならないですが、これはしなくてよさそうです。

```
X,Y =[],[]
```

では、これからファイルから読み込むデータの配列を宣言します。

```
for line in file.readlines()[0:]:
```

で、のループで最後まで読み込んでます。`file.readlines()[0:]` で何行目から読んでどこまで読まないかを宣言できます。ここでは一行目からファイルの最後までって感じです。

```
item = line[:-1].split(' ')
```

ここでデータファイルのデータが何で区切られてるのかを宣言します。`split("")` の中に入れます。上ではスペースですと書いてあります。タブの場合 (`'\t'`)、セミコロンの場合 (`', '`) です。ほかの場合は調べてください。大体デバック開始したら vscode が教えてくれますが…

そのあとは配列に順序良く入れるという関数です。ここで、どんな変数なのかをちゃんと言わないと今後そのデータを処理できません。

そのままグラフにプロットさせたかったら、`matplotlib` のライブラリにある `pyplot` を使って

```
pyplot.plot(x軸のデータ,y軸のデータ)
```

でプロットできます。表示したかったら

```
pyplot.show()
```

と打ち込めばその時点での plot したデータのグラフを表示してくれます。

### 5.3.3 データのフィッティング

フィッティングする関数は下の部分です。

```
pini = np.array([intensity,X0,1])  
  
def func(x ,intensity ,X0,HWHM):  
    return intensity * HWHM**2 /((x-X0)**2 + HWHM**2)  
  
popt, pcov = scipy.optimize.curve_fit(func, X, Y, p0=pini)  
perr = np.sqrt(np.diag(pcov))
```

いざフィッティングする部分は

```
popt, pcov = scipy.optimize.curve_fit(func, X, Y, p0=pini)
```

の関数です。よくわかつてなくそのまま使っているのでわからないのですが。引数に、フィッティングしたいグラフの関数、*x* 軸データ、*y* 軸データ、初期値を入れたらフィッティングしてくれます。データの読み込みとこのフィッティングまでの間の部分は適当な初期値を決めるところです。何となく読んで察してください。

*popt* に収束したパラメータ、*perr* に標準誤差が格納されます。

そのあとはグラフにプロットするためのものです。調べてください。

## 5.4 最後に

今回は自分がブログを見ながら生データにフィッティングするためのプログラムを作ったのでそれについての解説をしたいがために書いたものです。本当に参考程度で温かい目で見てほしいです。

## 参考文献

[1] <https://qiita.com/yokot2/items/f8920f65b1037ec7009d>

## 第6章

# 光吸収の量子論の基礎の基礎

物理科学科 4回生

門野広大

## はじめに

研究室の輪読で使っている参考書「固体スペクトロスコピー」の第三章でちょっと出てきた「時間に依存する摂動論」について一度輪読担当だった時にまとめたというか肉付けした事柄について書きたいと思います。

シュレディンガー方程式とか量子論の基礎的な部分は飛ばして進みます。

## 6.1 光吸収の量子論

光の吸収過程は量子論的に取り扱う必要があります。今回は時間に依存する摂動論を用いて量子論的に光吸収のつよさを求めるということをします。

摂動論… 正直ピンとくる人はいないし難しそうだなあと思う人がほとんどだと思います。私もよくわかってません。書籍とか読むと、ハミルトニアン  $H_0$  という系があって、粒子は  $H_0$  の固有状態  $|n\rangle$  にあったとする。その系に  $H'$  という小さな変化を与える、このことを摂動を与えるというらしいです。 $H_0$  の固有状態がわかつていて、 $H = H_0 + H'$  というハミルトニアンに対するシュレディンガー方程式が解けないときに近似的に解く方法の一つが摂動論です。

今回は、光を物質に入射したときの吸収の過程についてを考えるので、時間に依存するタイプの摂動論についてです。時間に依存しないほうが大体先に書いていますが今回は依

存します！

### 6.1.1 実際に数式

時間に依存しないシュレディンガー方程式は

$$H_0\phi_0(r) = E_n\phi_n(r) \quad (6.1)$$

定常状態にあるハミルトニアンを  $H_0$ 、その固有関数  $\phi_n(r)$ 、固有値を  $E_n$  とした。

この系に外部から摂動  $H'(t)$  が加わると、シュレディンガー方程式は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi(r,t) = (H_0 + H'(t))\Phi(r,t) \quad (6.2)$$

とかける。この系の固有関数を  $\phi_n(r)e^{-iE_nt/\hbar}$  で展開すると

$$\Phi(r,t) = \sum_n a_n(t)\phi_n(r)e^{-iE_nt/\hbar} \quad (6.3)$$

とおき、シュレディンガー方程式に代入すると

$$i\hbar\sum_n \frac{\partial}{\partial t} a_n(t)\phi_n(r)e^{-iE_nt/\hbar} = (H_0 + H'(t))\sum_n a_n(t)\phi_n(r)e^{-iE_nt/\hbar} \quad (6.4)$$

$$(左辺) = i\hbar\sum_n \phi_n(r)\frac{\partial a_n(t)}{\partial t}e^{-iE_nt/\hbar} + i\hbar\sum_n a_n(t)E_n e^{-iE_nt/\hbar}$$

$$\begin{aligned} (右辺) &= \sum_n a_n(t)H'(t)\phi_n(r)e^{-iE_nt/\hbar} + \sum_n a_n(t)H_0\phi_n(r)e^{-iE_nt/\hbar} \\ &= \sum_n a_n(t)H'(t)\phi_n(r)e^{-iE_nt/\hbar} + \sum_n a_n(t)E_n\phi_n(r)e^{-iE_nt/\hbar} \end{aligned}$$

$$i\hbar\sum_n \phi_n(r)\frac{\partial a_n(t)}{\partial t}e^{-iE_nt/\hbar} = \sum_n a_n(t)H'(t)\phi_n(r)e^{-iE_nt/\hbar} \quad (6.5)$$

この数式に左側から  $\phi_m^* e^{iE_mt/\hbar}$  をかけて積分すると

$$(左辺) = i\hbar\sum_n \langle m|n \rangle \frac{\partial a_n(t)}{\partial t} e^{i(E_m - E_n)t/\hbar} \quad (6.6)$$

ここで、 $\langle m|n \rangle = \int \phi_m^* \phi_n dr = \delta_{mn}$  を使用する。

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial a_m(t)}{\partial t} &= \sum_n a_m(t) \langle m|H'|n \rangle e^{i(E_m - E_n)t/\hbar} \\ i\hbar \frac{\partial a_m(t)}{\partial t} &= \sum_n a_m(t) H'_{mn} e^{i(E_m - E_n)t/\hbar} \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$H'_{mn} = \langle m|H'|n \rangle = \int \phi_m^* H' \phi_n dr \quad (6.8)$$

最初に系はエネルギー  $E_0$  を持った基底状態にあるものとし、 $t = 0$  から摂動が加わるとすると、 $t = 0$  では、 $a_n = \delta_{n0}$  と置くことができる。一次の摂動の近似内で

$$i\hbar \frac{\partial a_m(t)}{\partial t} = H'_{m0} e^{i(E_m - E_0)t/\hbar} \quad (6.9)$$

ここで  $\omega_{m0} = (E_m - E_0)/\hbar$  を代入して積分する。

$$a_m = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{m0} e^{i\omega_{m0}t} dt \quad (6.10)$$

もし摂動  $H'$  が周期的(調和摂動)であり

$$H'(r, t) = H'_0(r)(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad (6.11)$$

で表せるとして

$$H'_{m0} = \langle m|H'_0(r)|0 \rangle (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad (6.12)$$

これを用いると

$$\begin{aligned} a_m(t) &= -\frac{i}{\hbar} \langle m|H'_0|0 \rangle \int_0^t e^{i\omega_{m0}t} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) dt \\ &= -i \frac{\langle m|H'_0|0 \rangle}{\hbar} \left\{ \int_0^t e^{i(\omega_{m0} + \omega)t} dt + \int_0^t e^{i(\omega_{m0} - \omega)t} dt \right\} \\ &= \frac{\langle m|H'_0|0 \rangle}{\hbar} \left\{ \left( \frac{1 - e^{i(\omega_{m0} + \omega)t}}{\omega_{m0} + \omega} \right) + \left( \frac{1 - e^{i(\omega_{m0} - \omega)t}}{\omega_{m0} - \omega} \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.13)$$

となるが、基底状態 0 から励起状態  $m$  へ光を吸収して遷移する場合には  $\omega_{m0} \simeq \omega$  だけ許される。この時には  $\omega_{m0} + \omega$  を分母に持つ項は非常に小さくなり無視できる。励起状態  $m$  の存在確率は

$$\begin{aligned} |a_m(t)|^2 &= \frac{|\langle m|H'_0|0 \rangle|^2}{\hbar^2(\omega_{m0} + \omega)^2} (1 - e^{i(\omega_{m0} - \omega)t})^2 \\ &= \frac{4|\langle m|H'_0|0 \rangle|^2}{\hbar^2(\omega_{m0} + \omega)^2} \left( \sin^2 \frac{(\omega_{m0} - \omega)t}{2} \right) \end{aligned} \quad (6.14)$$

この存在確率は  $\omega$  に対して幅を持っているので、 $\omega_{m0}$  の近くのエネルギー密度  $\rho(E_m)$  について積分する必要がある。

励起状態  $m$  の存在確率  $|A_m(t)|^2$  は

$$\begin{aligned} |A_m(t)|^2 &= \int^i nfty_0 |a_m|^2 \rho(E_m) dE_m \\ &= \frac{4}{\hbar} \int^i nfty_0 |\langle m | H'_0 | 0 \rangle|^2 \rho(\omega_{m0} \hbar) \frac{\sin^2 \frac{(\omega_{m0} - \omega)t}{2}}{(\omega_{m0} - \omega)^2} d\omega_{m0} \\ &= \frac{2\pi t}{\hbar} |\langle m | H'_0 | 0 \rangle|^2 \rho(E_m) \end{aligned} \quad (6.15)$$

で与えられる。ここで  $E_m = \omega_{m0}\hbar$  を用いて変数変換し、 $\omega \simeq \omega_{m0}$  の付近なので  $|\langle m | H'_0 | 0 \rangle|$ ,  $\rho(E_m)$  を定数として扱った。

単位時間当たりの励起状態  $m$  に遷移する確率  $W_{m0}$  は

$$W_{m0} = \frac{d|A_m(t)|^2}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle m | H'_0 | 0 \rangle|^2 \rho(E_m) \quad (6.16)$$

で与えられ、これを黄金律と呼ばれる。

媒質中の光の強度を  $I$  とすると単位時間に失われるエネルギーに関しては

$$-\frac{dI}{dz} = W_{m0} \hbar \omega \quad (6.17)$$

の関係があり媒質中の光の吸収の関係  $I = e^{-\alpha z}$  より吸収係数  $\alpha$  は

$$\alpha = W_{m0} \frac{\hbar \omega}{I} \quad (6.18)$$

の関係がある。

### 6.1.2 数式を終えて

数式をいろいろな近似や数式変形で変えてきました。ここで導いた中で一番大事なのは数式 (6.16) のフェルミの黄金律 (Fermi's golden rule) と呼ばれているものです (フェルミさんの名前がありますがフェルミさんが導いたものでないとか…詳しく述べません)。この数式はよく使われる便利な公式だそうです。今回導くときに "存在確率は  $\omega$  に対して幅を持っている" としました。これは遷移する先の状態が連続状態の場合を考えていたためです。もちろん、量子力学なので離散的な状態への遷移も考えないといけないのでその場合についても考えときます。

まず式 (6.14) から

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \frac{\sin^2 \frac{(\omega_m - \omega)t}{2}}{t(\omega_m - \omega)^2} = \frac{\pi}{2} \delta(\omega_m - \omega) \quad (6.19)$$

とデルタ関数の公式を利用することができる。よって、単位時間当たりに離散的な状態への遷移確率は

$$W_{m0}^{\text{離散}} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle m | H'_0 | 0 \rangle|^2 \delta(\omega_m - \omega) \quad (6.20)$$

と簡単に導くことができる。これもフェルミの黄金律と呼ぶ。

今回の状況を図に表すと以下のようになる。

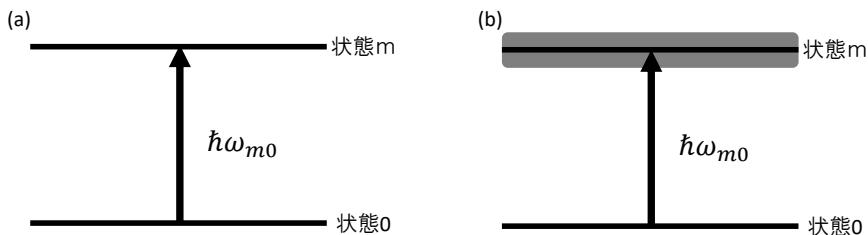


図 6.1 (a) 離散的状態  $m$  への遷移、(b) 連続的状態  $m$  への遷移

(a) では式 (6.20) が利用でき、(b) では式 (6.16) が利用できる。

## 6.2 複素積分

式 (6.15) のところの積分は、めんどくさい積分。

変数変換とかしてとりあえず、

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \quad (6.21)$$

という積分ということにする。被積分関数

$$f(z) = \frac{\sin^2 z}{z^2} \quad (6.22)$$

は正則であるから、この関数を

$$\oint f(z)dz = 0$$

$$\oint = \int_{-R-i}^{R-i} + \int_{R-i}^R + \int_R^{-R} + \int_{-R}^{-R-i}$$

という経路(図6.2)で積分して  $R \rightarrow \infty$  に飛ばしてやることを考える。

この経路にすることで、今後特異点をうまく避けることができる。

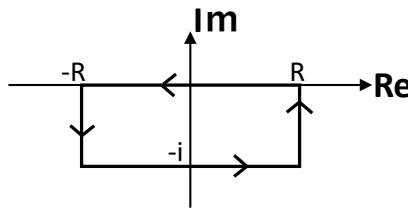


図 6.2  $-i$  下げる

$R \rightarrow \infty$  で上からおさえると  $\int_{R-i}^R = \int_{-R}^{-R-i} = 0$  となる！

$$\begin{aligned} -\int_R^{-R} &= \int_{-R}^R \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_{-R-i}^{R-i} \frac{\sin^2 z}{z^2} dz = \int_{-R-i}^{R-i} \frac{1 - \cos(2z)}{2z^2} dz \\ &= \int_{-R-i}^{R-i} \frac{1 - \frac{e^{2iz} + e^{-2iz}}{2}}{2z^2} dz = \int_{-R-i}^{R-i} \frac{2 - e^{2iz} - e^{-2iz}}{4z^2} dz \\ &= \int_{-R-i}^{R-i} \frac{1 - e^{2iz}}{4z^2} dz + \int_{-R-i}^{R-i} \frac{1 - e^{-2iz}}{4z^2} dz \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$f_+(z) = \frac{1 - e^{2iz}}{4z^2} \quad f_-(z) = \frac{1 - e^{-2iz}}{4z^2}$$

とおく。

経路に注意して複素積分してやると数式(6.23)を求めることができる。まず  $f_+$  を図の上を通る経路で

$$\oint f_+(z)dz = \int_{-R-i}^{R-i} f_+(z)dz + \int_{C_\perp} f_+(z)dz \quad (6.24)$$

として、頑張ると  $C_\perp$  の経路はゼロになるはず、この経路の中には  $z = 0$  で特異点がある

ので、留数定理を使って

$$\begin{aligned}
 \int_{-R-i}^{R-i} f_+(z) dz &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0}[f_+] = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz}(z^2 f_+) \\
 &= 2\pi i \frac{1}{4} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz}(1 - e^{2iz}) \\
 &= 2\pi i \frac{1}{4} \lim_{z \rightarrow 0} (-2ie^{2iz}) \\
 &= 2\pi i \times \frac{1}{4} \times (-2i) = \pi
 \end{aligned}$$

次に  $f_-$  を図の下を通る経路で

$$\oint f_-(z) dz = \int_{-R-i}^{R-i} f_-(z) dz + \int_{C_\downarrow} f_-(z) dz$$

$C_\text{上}$  の経路は頑張ればゼロにもっていける。この経路の中には特異点が存在しないので

$$\int_{-R-i}^{R-i} f_-(z) dz = 0 \quad (6.25)$$

したがって

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{1}{2} \times \pi = \frac{\pi}{2} \quad (6.26)$$

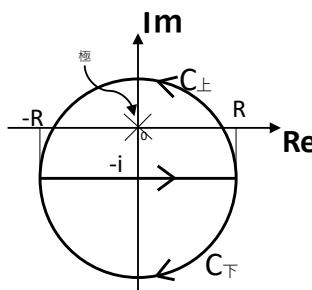


図 6.3 数式 6.23 を求める経路

## 参考文献

- [1] 大成 誠之助著, 固体スペクトロスコピー, 裳華房, 1994.
- [2] 江藤 幹雄著, パリティ物理教科書シリーズ, 量子力学 1, 丸善出版, 2013.
- [3] [http://www.nr.titech.ac.jp/~chiba/en/pdf/golden\\_rule\\_2.pdf](http://www.nr.titech.ac.jp/~chiba/en/pdf/golden_rule_2.pdf)



## 第7章

# ゼータランドシガ

物理科学科3回生  
中山敦貴

## はじめに

YouTubeで「全ての素数の無限積が $4\pi^2$ であることの数学的な証明」<sup>\*1</sup>なる動画を拝見した。この動画では、無限大に発散してしまうであろう全ての素数の無限積が、なんと有限の値 $4\pi^2$ に等しくなるという主張をするものであった。しかし、この動画の中での説明では、ゼータ関数の特殊値というものを証明抜きで用いており、それでは納得がいかないので自分で色々と調べてみた。すると、ゼータ関数の解析接続やら複素解析の知識が必要だったりと結構奥が深いものだったので、まとめるついでに会誌にした。また、ゼータ関数と言えばリーマンであり、リーマンといえばリーマン予想である。せっかくゼータ関数を解析接続するのであるから、ついでにリーマン予想の話も軽くすることにする。

7.1節では、動画の内容と同じく、ゼータ関数の特殊値を用いることで

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \cdots = 4\pi^2$$

という謎の数式が成立してしまうことを示す。ここまで内容は、上記動画で既に説明されている。7.2節で複素解析について復習し、7.3節で実際にゼータ関数の解析接続を行い特殊値を計算する。そして7.4節にて数学界の未解決問題として有名なリーマン予想をついでに紹介し、最後にゼータ関数の値を数値計算した美しい(?)グラフをいくつか載せることにする。

---

<sup>\*1</sup> <https://www.youtube.com/playlist?list=PL006ccJyFqlHtQQhonFlgactqdunSQ10W>

## 7.1 「 $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \cdots = 4\pi^2$ 」 ???

タイトルにもあるように、このセクションでは謎の数式

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \cdots = 4\pi^2 \quad (7.1)$$

の証明（?）を試みる。

(7.1) 式の左辺は素数の無限積であり、素数が無限個あることから明らかに無限大に発散する。しかし右辺を見るとなぜか  $4\pi^2$  という有限値をとっている。これは謎の数式というか、ただ自明に偽な数式である。しかしこれから見ていくように、何故かこの数式が成り立ってしまう。これ以上この数式を眺めていても気持ちが悪くなるだけなので、早速話を進めていこう。

まずはリーマンのゼータ関数  $\zeta(s)$  というものを定義しよう。

### 7.1.1 リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$

**定義&命題（リーマンゼータ関数）.** 実数  $s$  について、無限級数によって定義された関数

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \equiv \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots \quad (7.2)$$

は、 $s > 1$  のとき収束し、 $s \leq 1$  で発散する。また、 $\zeta(s)$  はリーマンゼータ関数と呼ばれる。

**証明.** まず、 $s > 1$ において  $\zeta(s)$  が収束することを示す。 $s > 1$  のとき、図 7.1において、短冊の面積の和は  $\zeta(s)$  の値に等しい。よって以下の不等式が成立する。

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s}$$

$s > 1$  であることに注意して積分を計算すると

$$\begin{aligned} 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} &= 1 + \left[ \frac{s^{1-s}}{1-s} \right]_1^{\infty} \\ &= 1 + \frac{1}{1-s} \end{aligned}$$

と有限の値となるので、 $s > 1$  のとき  $\zeta(s)$  は収束する。

また、 $s \leq 1$  では  $\zeta(s)$  が発散することも確認しておこう。図 7.2において、短冊の面積の和は  $\zeta(1)$  の値に等しく、以下の不等式が成立する。

$$\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} > \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = [\log x]_1^{\infty} = \infty$$

よって  $\zeta(1)$  は発散する。 $s \leq 1$  のとき  $\zeta(s)$  は単調減少関数であるから、 $\zeta(s) \geq \zeta(1) = \infty$  であり、 $s \leq 1$  のとき  $\zeta(s)$  は発散する。□

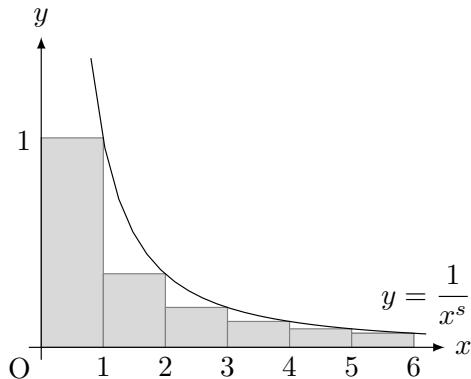


図 7.1 短冊の面積は  $\zeta(s)$  の値に等しい。

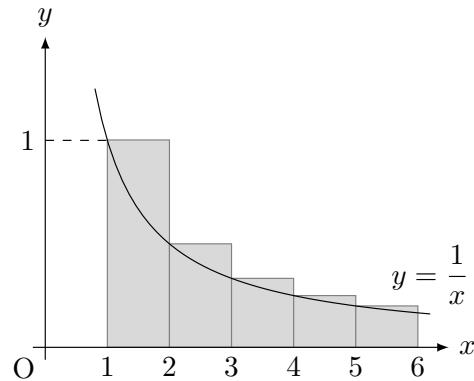


図 7.2 短冊の面積は  $\zeta(1)$  の値に等しい。

ここで  $\zeta(s)$  の具体的な値をいくつか見ておこう。証明は省くが、ゼータ関数  $\zeta(s)$  は以下のようないくつかの値が解析的に求められている。

$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty,$$

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots = 1.20205\dots,$$

$$\zeta(4) = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}.$$

特に  $s = 2$  のときはバーゼル問題<sup>\*2</sup>としてよく知られている。また  $\zeta(3)$  の値は無理数であることがアペリーによって証明されている。さらに  $s$  が偶数のとき  $\zeta(s)$  は  $\pi^s \times (\text{有理})$

<sup>\*2</sup> 第 7.3.4 節で紹介する。

数) という形になることが知られている。一体どこから円周率  $\pi$  が出てくるのであろうか。これについては第 7.4.3 節で説明される。

次に、先ほど定義したゼータ関数が、オイラー積表示と呼ばれる無限積の形に変形できることを示そう。

**定理 (オイラー積表示).** ゼータ関数は以下のように素数の無限積で表現できる。

$$\zeta(s) = \prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}. \quad (7.3)$$

**証明.** 素因数分解の一意性と等比級数の公式より

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \\ &= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots \\ &= \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \frac{1}{2^{3s}} + \dots\right) \\ &\quad \times \left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^{2s}} + \frac{1}{3^{3s}} + \dots\right) \\ &\quad \times \left(1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{5^{2s}} + \frac{1}{5^{3s}} + \dots\right) \\ &\quad \times \dots \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2^s}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{3^s}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{5^s}} \times \dots \\ &= \prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}. \end{aligned}$$

ただし、無限積の収束性についてはここでは述べない。□

このオイラーの積表示 (7.3) 式を用いると、次の式が示せる。

**定理.**

$$\frac{d}{ds} |\zeta(s)| = -|\zeta(s)| \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log p}{p^{ns}} \quad (7.4)$$

**証明.** まず、 $|x| < 1$  として、等比級数

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

の両辺を積分すると

$$\log|1-x| = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (7.5)$$

となり、 $\log|1-x|$  のテイラー展開が得られる。

オイラーの無限積表示 (7.3) の両辺を絶対値の対数をとり、(7.5) を用いると

$$\begin{aligned} \log|\zeta(s)| &= \log \left| \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \right| \\ &= - \sum_p \log \left| 1 - \frac{1}{p^s} \right| \\ &= \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}} \end{aligned}$$

であるから

$$|\zeta(s)| = \exp \left( \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}} \right)$$

となる。この両辺を  $s$  で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} |\zeta(s)| &= \exp \left( \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}} \right) \cdot \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{p^{ns}} \right) \\ &= |\zeta(s)| \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( -\frac{n \log p}{p^{ns}} \right) \\ &= -|\zeta(s)| \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log p}{p^{ns}} \end{aligned}$$

となる。ただし 2 行目への変形で

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{p^{ns}} \right) &= \frac{d}{ds} e^{\log(p^{-ns})} = \frac{d}{ds} e^{-ns \log p} \\ &= e^{-ns \log p} \cdot (-n \log p) = -\frac{n \log p}{p^{ns}} \end{aligned}$$

であることを用いた。  $\square$

### 7.1.2 特殊値の代入

ここで(7.4)に $s=0$ を代入したいのだが、ゼータ関数の定義から明らかに $\zeta(0)$ は発散する。しかしここで**解析接続**という必殺技を用いることで、無限大に発散してしまう点に有限の値を**一意的に**対応させることができる。この解析接続については次の節で詳しく述べることにして、結果だけ書くと、以下のようなことが言える。

**定理（ゼータ関数の特殊値）.** 解析接続を行うことでゼータ関数 $\zeta(s)$ の定義域を $s=1$ を除く複素数全体に拡張でき

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad (7.6)$$

$$\zeta'(0) = -\frac{1}{2} \log 2\pi \quad (7.7)$$

が成り立つ。

今はとりあえずこの事実を受け入れよう。すると、(7.4)に上記の特殊値を用いることで次のことが言える。

**定理.** 以下の等式が成り立つ。

$$\prod_p p = 4\pi^2. \quad (7.8)$$

**証明.** (7.4)で $s=0$ とおくと

$$\begin{aligned} |\zeta'(0)| &= -|\zeta(0)| \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \log p \\ &= -|\zeta(0)| \sum_p \log p \sum_{n=1}^{\infty} 1 \\ &= -|\zeta(0)| \cdot \zeta(0) \sum_p \log p \end{aligned}$$

と書ける。ただし、2行目において $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$ と発散してしまうところを、形式的に $\zeta(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^0} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ が言えることを用いた。

この式にゼータ関数の特殊値 (7.6), (7.7) を代入して

$$\begin{aligned} \left| -\frac{1}{2} \log 2\pi \right| &= -\left| -\frac{1}{2} \right| \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \sum_p \log p \\ 2 \log 2\pi &= \sum_p \log p \\ \log 4\pi^2 &= \log \prod_p p \\ 4\pi^2 &= \prod_p p \end{aligned}$$

となる。  $\square$

これで、謎の数式

$$\prod_p p = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \cdots = 4\pi^2 \quad (7.9)$$

が成り立つことが示された？

いやいや… 途中で出てきた謎の特殊値  $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ ,  $\zeta'(0) = -\frac{1}{2} \log 2\pi$  なんでものを使つたからこんな変なことになってしまったのだろう。そもそもゼータ関数  $\zeta(s)$  は  $s = 0$  では定義されていなかった、というか明らかに  $\zeta(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty$  と発散してしまうではないか。

しかし上にも書いたように、 $\zeta(s)$  に解析接続という必殺技を用いることで、無限大に発散してしまう点に有限の値を一意的に対応させることができる。これはつまり、 $\zeta(s)$  の定義域を広げることができるということを意味している。(7.2) のように級数で定義されたゼータ関数  $\zeta(s)$  の定義域は、複素数の場合も含めると  $\operatorname{Re}(s) > 1$  であることが知られている（後述）。しかし、ゼータ関数  $\zeta(s)$  を解析接続することで、その定義域を実部が 1 でない複素数全体にまで拡張することができるのである！！

解析接続前		解析接続後
$\zeta(s)$	$\xrightarrow{\text{解析接続}}$	$\zeta(s)$
$s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > 1$		$s \in \mathbb{C}, s \neq 1$

次節では、解析接続について簡単に理解してもらうため、実際に幾何級数を解析接続してみせる。

### 7.1.3 解析接続

高校数学でもよく登場する以下の幾何級数は、 $|x| < 1$  のとき収束し

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

というように右辺の分数の形で書けることは周知の通りである。しかし右辺の  $\frac{1}{1-x}$ だけ見ると  $x = 1$  のみを除いて有限の値をとるため、誰もが一度は経験したことがあるよう $|x| < 1$  という条件を忘れて  $x = 2$ などを代入してしまうのである。この間違いは本当に正しくないのであろうか？ 左辺は  $|x| < 1$  以外の点では無限大に発散し、どうせ意味のないものになってしまうのだから、それならいつそ  $|x| < 1$  以外の点では、右辺でもって左辺の級数の値を定義してやるのはどうだろうか？ このアイデアを使うと、 $|x| < 1$  のときにしか定義されなかった左辺の幾何級数を  $x = 1$  を除く実数全体において定義することができる！ しかし、関数を定義する時に問題となるのはその一意性である。 $|x| < 1$  の領域において、左辺の幾何級数の値と一致する関数はいくらでも考えられる。

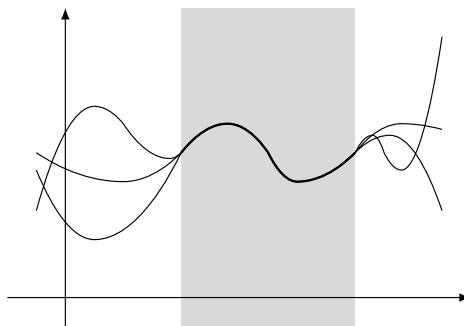


図 7.3 ある領域では一致する関数

ここで、考へるている関数を複素数の範囲まで拡張することにする。定義域を複素数にまで拡張したところで、上図からすぐイメージできるように、ある領域では一致し、他の領域では一致しないような複素関数はいくらでも存在しうる。しかしこの複素関数に正則性（複素関数としての微分可能性）という条件を課すと、ある正則な領域で一致する関数は他の正則な領域においても完全に一致してしまうのである！ この事実は一致の定理と呼ばれ、関数を解析接続する際にその一意性を保証する重要な定理である。証明はしないが、下に改めて書いておく。

**定理（一致の定理）.** 領域  $D \in \mathbb{C}$  上で正則な複素関数  $f(z), g(z)$  が、 $D$  内の異なる 2 点を結ぶ曲線上で一致すれば、この 2 つの関数は領域  $D$  全体で恒等的に等しい。

とにかく、正則な領域では一意的に解析接続できる、ということさえわかつてもらえばよい。正則関数の性質のひとつである、正則関数はその導関数もまた正則関数となる、ということなどからもわかるように、複素関数にとって微分可能であるということは結構厳しい条件なのである。

結局、解析接続というのは、解析接続される前の定義域では元の関数と一致し、それ以外の領域でも定義されている新しい関数で、元の関数を上書きしてやるということである。ここで、謎の数式についてもう一度考えてみる。

前節で解析接続済みゼータ関数の特殊値を用いて

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \cdots = 4\pi^2$$

という数式を示した。この数式は、次のように解釈するのが正しい。《もある点  $a$  で、定義はされていないが形式的に左辺のような素数の無限積になってしまう関数があるする。この関数を解析接続し、先ほど発散してしまった点  $a$  で有限値をとるような関数で上書きできたとすると、その新しい関数は点  $a$  で  $4\pi^2$  という値をとる。》これが、この数式が表していることである。

この数式が表していることが、 $2 \times 3, 2 \times 3 \times 5, 2 \times 3 \times 5 \times 7, \dots$  というように、素数を順番にかけていった部分積が  $4\pi^2$  という値に収束する、などということでは決してないことに注意が必要である。左辺の無限積が解析接続される前のものであることを強調するために

$$\text{“}2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \cdots \text{”} = 4\pi^2$$

というような表記をすることもあるらしい。

ということで、謎の数式と題した、素数の無限積が  $4\pi^2$  とイコールで結ばれている謎の式について理解してもらえただろうか？ これを聞いて失望した方もいるかもしれないが、数学がこんな矛盾を孕んでいる方がおそろしいので、これで良しとしよう。

これにてめでたしめでたし… といきたいところだが、暫し待て。この数式を求める際に、ゼータ関数の特殊値というものを用いたが、この値はどこから出てきたのだろうか。それに、ゼータ関数がどのようにして解析接続されるのか気になる。よって以降のセクションでは、ゼータ関数の特殊値なんてものを認められない人たちのために、実際にゼータ関数を解析接続する様子を示し、その生まれ変わったゼータ関数から実際に特殊値を計算してみることにする。

## 7.2 複素関数についての一般教養

これからは、定義域や値域を複素数の範囲にまで拡張した複素関数について考えていこう。複素関数についても微分や積分を定義できるのだが、実数のときは少しきわけが違う。しかしそのおかげで色々とご利益もある。複素関数の微分可能性は実数の時よりも格段と強い制約となり、一致の定理が使えるまでになる。また、実数の範囲では手も足もでなかつた実関数の定積分が、積分路を複素平面にまで延長し、留数という概念を用いることで簡単に計算できるようになることもある。

純粋な数学として非常に興味深い分野というだけでなく、物理などへの応用もかなりあるという、知らないと人生の半分は損してしまうというのが、複素解析学という理論体系である。しかしあくまで今回のメインはゼータ関数であるので、ここでは後で必要になる定理をいくつか述べるに留めておく。証明もいくつかは載せてはいるが、ないものについては参考文献に書いた本などを各自参照していただきたい。

それではまず、基本的な用語から定義していく。

### 7.2.1 複素関数

**定義.** 複素平面上のある領域内の任意の  $z$  において、複素関数  $f(z)$  が微分可能であるとき、 $f(z)$  はその領域で正則であるといふ。

また、正則でない点を特異点と呼ぶ。特に  $f(z) = \frac{1}{(z-a)^m}$  のような特異点、つまり

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^m f(z)$$

の極限値が存在する特異点を  $m$  位の極と呼び、 $m$  は位数と呼ばれる。1位の極は単純極とも呼ばれる。

**定義（複素線積分）.**  $f(t)$  はある領域  $D$  で定義された連続関数とする。そして  $C$  は、 $D$  に含まれる  $\alpha$  から  $\beta$  に至る曲線であって、方程式

$$z = \phi(t) \quad (t \in [a, b] \subset \mathbb{R}, \alpha = \phi(a), \beta = \phi(b))$$

で表されているとする。 $C$  が滑らかな曲線の場合、曲線  $C$  に沿う  $f(z)$  の積分は、次のように実関数の積分を通じて定義する：

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &:= \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t) dt \\ &\equiv \int_a^b \operatorname{Re}[f(\phi(t))\phi'(t)] dt + i \int_a^b \operatorname{Im}[f(\phi(t))\phi'(t)] dt. \end{aligned}$$

**注意.** 積分路  $C$  が閉曲線のとき

$$\oint_C f(z) dz$$

とも書く。

**定理（ローラン展開）.** 関数  $f(z)$  が円環領域  $D = \{z \mid R_1 < |z - a| < R_2\}$  ( $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$ ) において正則ならば、 $f(z)$  は次の形の級数に展開できる。

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad c_n := \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta.$$

この級数は  $D$  内のすべての  $z$  に対して収束する。ただし、積分路  $C$  は  $D$  内の任意の単純閉曲線 (=自分自身と交わらない閉曲線) である。

また、この級数を  $f(z)$  の  $z = a$  まわりのローラン展開と呼ぶ。

**注意.** ローラン展開は、テイラー展開の負ベキの項ありバージョンだと思っておけば良い。

**定義（留数）.** 上のローラン展開において、 $c_{-1}$  すなわち  $(z - a)^{-1}$  の係数を  $f(z)$  の  $z = a$  における留数と呼び、 $\operatorname{Res}_{z=a}[f]$  という記号で表す。

$$\operatorname{Res}_{z=a}[f] := c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$$

**定理（留数の求め方）.**  $z = a$  が  $n$  位の極であるとき

$$\text{Res}_{z=a}[f] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-a)^n f(z)\}$$

が成り立つ。特に単純極のとき

$$\text{Res}_{z=a}[f] = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z)$$

である。

**証明.** 留数の定義よりわかる。  $\square$

**定理（留数定理）.**  $f(z)$  は、単純閉曲線  $C$  の内部に有限個の特異点  $z = a_n$  ( $n = 1, 2, \dots, m$ ) を持つが、それらを除けば周上も含めて  $C$  の内部で正則であるとする。このとき

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{n=1}^m \text{Res}_{z=a_n}[f]$$

が成り立つ。

**証明.** 留数の定義よりわかる。  $\square$

### 7.2.2 無限級数、無限積

単に収束と言っても収束の仕方はいろいろある。ここでは一様収束という概念が重要になってくる。

**定義（一様収束）.** 任意の  $\epsilon > 0$  に対して自然数  $n_0(\epsilon)$  を適当に選べば、 $n \geq n_0(\epsilon)$  なるすべての  $n$  に対して、複素平面の部分集合  $E$  において  $z$  に無関係に

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$$

が成り立つとする。このとき、 $E$  において  $f_n(z)$  は  $f(z)$  に一様収束するという。

**注意.** 一様収束では、 $n_0$  を  $z$  に依存せず選べることが重要である。

また、上記の定義は数学の言葉では

$$\forall \epsilon, \exists n_0 \text{ s.t. } n > n_0 \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \ (\forall z \in E)$$

と書かれる。

関数列の極限としての関数が正則であることを言うためには、一様収束という条件が必要になってくるのだが、実際はそれよりも少しゆるい条件、すなわち広義一様収束が言えれば十分である。

**定義（広義一様収束）.** 領域  $D$  に含まれる任意の有界集合  $K$  で  $f_n(z)$  が  $f(z)$  に一様収束するとき、 $f_n(z)$  は  $D$  で広義一様収束するという。

**注意.** 上にも書いたが、広義一様収束は一様収束よりもゆるい条件であり、一様収束するならば広義一様収束する。

**定理.** 関数  $f_n(z)$  は領域  $D$  で正則であるとする。 $D$  において  $f_n(z)$  が  $f(z)$  に広義一様収束するならば、 $f(z)$  は  $D$  で正則である。また、 $k$  階導関数  $f_n^{(k)}(z)$  は  $f^{(k)}(z)$  に広義一様収束する。

**定義.** 積  $\prod_{n=1}^N a_n$  が  $N \rightarrow \infty$  のとき 0 でない有限の値になるとき、無限積  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$  は収束するという。収束しない場合、発散するという。

**注意.** 無限積においては極限値が 0 となる場合を収束に含めず、発散とすることに注意が必要である<sup>\*3</sup>。無限積の収束の定義から 0 を除外する理由は、以降の定理で見られるような指数・対数写像による無限積と無限和との対応づけにおいて、収束概念どうしも対応づけられるようにするためにある。仮に無限積が 0 に収束することを認めてしまうと

$$\text{無限和} = \log(\text{無限積})$$

の対応で無限和が  $-\infty$  に発散する場合に無限積だけが収束することになってしまう。無限積の収束の定義において 0 を除外することによって、無限積と無限和の収束性が同値となるのである。

**定理.** 無限積  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  が収束するための必要十分条件は、 $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n)$  が収束することである。

<sup>\*3</sup> 細かいことを言うと、 $a_n = 0$  となる項が有限個の場合、無限積は 0 に収束すると定義するのが主流らしい。ただしこの定義においても、 $a_n = 0$  となる項が無限個ある場合は、無限積は 0 に発散するという。極限値が 0 であっても収束・発散のどちらの場合もあり得るのでややこしい。

**証明.** 無限和の収束を仮定し、その値を  $S$  とすると

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N (1 + a_n) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left( \log \prod_{n=1}^N (1 + a_n) \right) \\ &= \exp \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \log(1 + a_n) \right) \\ &= e^S \end{aligned}$$

となるので無限積も収束する。逆に、無限積の収束を仮定し、その値を  $P$  とする。

$$S_N := \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n), \quad P_N := \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

と書けば、 $S_N = \log P_N$  であるから<sup>\*4</sup>、 $N \rightarrow \infty$  とすると

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \log P$$

となり、無限和も収束する。□

無限積の絶対収束を以下のように定義する。

**定義.** 無限積  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  が絶対収束するとは、 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|)$  が収束することをいう。

**注意.**  $\prod_{n=1}^{\infty} |1 + a_n|$  ではないことに注意。

---

<sup>\*4</sup> 実はこの式は自明でない。何故ならば、 $\log P_N$  は主値であるから  $-\pi < \operatorname{Im} \log P_N \leq \pi$  を満たすが、 $S_N$  が  $-\pi < \operatorname{Im} S_N \leq \pi$  を満たすとは限らないからである。一般にそのずれを考慮すると、 $k_N$  を整数として

$$\log P_N = S_N + 2\pi i k_N$$

と書ける。 $N \rightarrow \infty$  で  $k_N$  が収束することを示せば良いのだが、面倒なのでここではやらない。

**定理.** 無限積  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  が絶対収束するための必要十分条件は、 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  が絶対収束することである。すなわち

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|) \text{ が収束} \iff \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ が収束}$$

**証明.**

$$A_N = \sum_{n=1}^N |a_n|, \quad B_N = \prod_{n=1}^N (1 + |a_n|)$$

とおく。 $B_N$  を展開すると

$$\begin{aligned} B_N &= 1 + \sum_{n=1}^N |a_n| + \sum_{1 \leq i < j \leq N} |a_i||a_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq N} |a_i||a_j||a_k| + \dots \\ &\geq 1 + \sum_{n=1}^N |a_n| = 1 + A_N \end{aligned}$$

となる。また、指數関数のテイラー展開より

$$\exp |a_n| = 1 + |a_n| + \frac{|a_n|^2}{2} + \dots \geq 1 + |a_n|$$

であるので

$$B_N \leq \prod_{n=1}^N \exp |a_n| = \exp \left( \sum_{n=1}^N |a_n| \right) = \exp A_N$$

となる。よって

$$1 + A_N \leq B_N \leq \exp A_N$$

であり、 $A_N, B_N$  は共に増加列であることから  $\lim_{N \rightarrow \infty} A_N$  と  $\lim_{N \rightarrow \infty} B_N$  の収束性は一致する。□

**定理.** 無限積は、絶対収束すれば収束する。すなわち、無限和  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  が収束すれば、無限積  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  は収束する。

**注意.** 無限和についても同様のことが言える。つまり、絶対収束する無限和は収束する。また、 $a_n$  は一般に複素数を仮定している。

**定理.** 絶対収束する無限積は、積の順序を変更しても無限積の値は変わらない。

**注意.** 無限和についても同様のことが言える。

**定理 (二重和の交換).** 二重和  $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n,m}|$  は、収束するならば  $n$  についての和と  $m$  についての和の順序を入れ替えても良い。

### 7.2.3 その他有用な定理

**定理 (三角不等式).** 複素数  $A, B$  について、以下の不等号が成立する。

$$|A + B| \leq |A| + |B|, \quad (7.10)$$

$$|A| - |B| \leq |A - B|. \quad (7.11)$$

また、 $|C| > |D|$  であれば

$$\frac{|A + B|}{|C + D|} \leq \frac{|A| + |B|}{|C| - |D|} \quad (7.12)$$

が成り立つ。

**証明.** まず (7.10) 式を示す。両辺正であるから  $(|A| + |B|)^2 - |A + B|^2 \geq 0$  を示せばよい。 $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$  を用いて  $A = a_1 + ia_2, B = b_1 + ib_2$  と書けるとすると

$$\begin{aligned} (|A| + |B|)^2 - |A + B|^2 &= |A|^2 + 2|A||B| + |B|^2 - |A + B|^2 \\ &= a_1^2 + a_2^2 + 2|A||B| + b_1^2 + b_2^2 \\ &\quad - \{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2\} \\ &= 2|A||B| - (2a_1b_1 + 2a_2b_2) \end{aligned}$$

ここで複素数  $A, B$  を複素数平面上のベクトルだと思い、それらのなす角を  $\theta$  とすると、内積の定義から

$$a_1b_1 + a_2b_2 = |A||B| \cos \theta \leq |A||B|$$

である。よって

$$(|A| + |B|)^2 - |A + B|^2 \geq 0$$

すなわち (7.10) 式が示された。また (7.10) 式において  $A \rightarrow A - B$  と置き換えれば (7.10) 式が得られる。さらに、 $|C| > |D|$  であれば

$$\frac{|A + B|}{|C + D|} = \frac{|A + B|}{|C - (-D)|} \leq \frac{|A| + |B|}{|C| - |D|}$$

であり、(7.12) 式も従う。  $\square$

**注意.** 次の定理と合わせて、複素積分の絶対値を上から抑える際に用いる。

**定理.** 複素積分においても、一般に次の不等式が成立する。

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| \quad (7.13)$$

## 7.3 ゼータ関数の解析接続と特殊値

### 7.3.1 複素数版 $\zeta(s)$

**定義&命題 (リーマンゼータ関数).** 複素数  $s$  について定義されたゼータ関数

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (7.14)$$

は、 $\operatorname{Re}(s) > 1$  のとき広義一様に絶対収束し、正則関数となる。また、このような級数による  $\zeta(s)$  の表示を、ディリクレ級数表示という。

**証明.**  $\operatorname{Re}(s) > 1$  のとき  $\zeta(s)$  が絶対収束することを示す。実数  $\sigma, t$  を用いて  $s \equiv \sigma + it$  と書けるとすると、 $\zeta(s)$  の第  $n$  項は

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^s} &= e^{\log n - s} = e^{-s \log n} \\ &= e^{-(\sigma+it) \log n} = e^{-\sigma \log n} e^{-it \log n} \\ &= e^{-\sigma \log n} \{ \cos(t \log n) - i \sin(t \log n) \} \\ &= \frac{1}{n^\sigma} \{ \cos(t \log n) - i \sin(t \log n) \} \end{aligned}$$

であるから、絶対値をとると

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n^s} \right| &= \frac{1}{n^\sigma} |\cos(t \log n) - i \sin(t \log n)| \\ &= \frac{1}{n^\sigma} \sqrt{\cos^2(t \log n) + \sin^2(t \log n)} \\ &= \frac{1}{n^\sigma} \quad (\because \cos^2 X + \sin^2 X = 1) \end{aligned}$$

となるので、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}$  が収束すれば  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right|$  も収束する。よって、 $s$  が実数の場合の議論より、 $\zeta(s)$  は  $\sigma \equiv \operatorname{Re}(s) > 1$  のとき絶対収束することがわかる。

次に、 $\sigma > 1$  における収束の広義一様性を示す。 $s$  が  $\operatorname{Re}(s) \equiv \sigma \geq 1 + \delta$  なる集合内を動くとき、無限和と第  $N$  部分和の値の差は、次のように評価できる。

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} \leq \int_N^{\infty} \frac{1}{x^\sigma} dx = \left[ \frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma} \right]_N^{\infty} = \frac{1}{(\sigma-1)N^{\sigma-1}} \leq \frac{1}{\delta N^\delta}$$

$\frac{1}{\delta N^\delta} < \varepsilon$  なる  $N$  は  $\delta$  によってのみ取れ、 $s$  に依らない。これで広義一様収束であることが示された。よって、正則性も従う。□

### 7.3.2 $\zeta(s)$ の解析接続

**定理 ( $\zeta(s)$  の解析接続).**  $\zeta(s)$  は、極  $s = 1$  を除く全複素平面  $\mathbb{C}$  上に解析接続される。極  $s = 1$  の位数は 1 であり、留数は 1 である。

**証明.**  $\operatorname{Re}(s) = \sigma > 1$  において、定義式 (7.14) の第 1 項と第 2 項を取り分け、第 3 項から先の無限和と分けて書くと

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= 1 + 2^{-s} + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)^{-s} \\ &= 1 + 2^{-s} + \sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-s} \end{aligned}$$

となる。ここで、二項展開

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-s} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} n^{-k}$$

を用いる。 $\binom{-s}{k}$  は二項係数

$$\binom{-s}{k} = \frac{-s(-s-1)(-s-2)\cdots(-s-k+1)}{k!}$$

である。すると

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= 1 + 2^{-s} + \sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} n^{-k} \\ &= 1 + 2^{-s} + \sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} + \sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-s}{k} n^{-k} \\ &= \zeta(s) + 2^{-s} + \sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-s}{k} n^{-k}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $n$  と  $k$  の二重和の順序を交換したい。そのためには順序交換した後の二重級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \binom{-s}{k} \sum_{n=2}^{\infty} n^{-s-k}$$

が絶対収束することを示せばよい。まず、 $n$  にわたる和は

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{1}{n^{s+k}} \right| &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma+k}} \leq \frac{1}{2^{\sigma+k}} + \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{\sigma+k}} \\ &= \frac{1}{2^{\sigma+k}} + \frac{1}{(\sigma+k-1)2^{\sigma+k-1}} \\ &< \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{k2^k} \\ &\leq \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^k} = \frac{3}{2^{k+1}}\end{aligned}$$

のように、 $k$  に関する公比  $\frac{1}{2}$  の等比数列によって評価できるから、 $n$  にわたる和に二項係数を付けて  $k$  にわたらせた無限和は絶対収束する。よって、上の二重和は順序交換が可能であり

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \zeta(s) + 2^{-s} + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-s}{k} \sum_{n=2}^{\infty} n^{-s-k} \\ &= \zeta(s) + 2^{-s} + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-s}{k} (\zeta(s+k) - 1).\end{aligned}$$

この式から  $k = 1$  を取り出して書くと

$$\zeta(s) = \zeta(s) + 2^{-s} - s(\zeta(s+1) - 1) + \sum_{k=2}^{\infty} \binom{-s}{k} (\zeta(s+k) - 1)$$

となる。両辺から  $\zeta(s)$  を引き、 $\zeta(s+1)$  について解くと

$$\zeta(s+1) = 1 + \frac{2^{-s}}{s} + \frac{1}{s} \sum_{k=2}^{\infty} \binom{-s}{k} (\zeta(s+k) - 1).$$

$s$  と  $s-1$  に置き換えて

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= 1 + \frac{2^{1-s}}{s-1} + \frac{1}{s-1} \sum_{k=2}^{\infty} \binom{1-s}{k} (\zeta(s-1+k) - 1) \\ &= 1 + \frac{2^{1-s}}{s-1} + \frac{s}{2} (\zeta(s+1) - 1) - \frac{s(s+1)}{6} (\zeta(s+2) - 1) \end{aligned} \quad (7.15)$$

となる。この置き換えによって、これまで  $\operatorname{Re}(s) > 1$  としていた仮定が  $\operatorname{Re}(s) > 2$  となつたが、ここで (7.15) の両辺の各々がより広い範囲の  $s$  で定義されるかどうかみてみる。

右辺に現れる全項のゼータ関数は  $\operatorname{Re}(s) > 0$  において定義されるから、 $k$  にわたる無限和は  $\operatorname{Re}(s) > 0$  において絶対収束し、極限として得る関数は正則となる。よって、左辺の  $\zeta(s)$  の定義域は、 $s = 1$  の極を除いて  $\operatorname{Re}(s) > 0$  にまで拡張されることになる。このように一度定義域が広がれば、あとは (7.15) を繰り返し用いて複素平面全体への解析接続ができる。

また、(7.15) の表示から、極は  $s = 1$  のみであり、位数は 1 で留数は

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \frac{2^{1-s}}{s-1} = 1$$

と求められる。  $\square$

### 7.3.3 特殊値 $\zeta(0)$

上で与えた  $\zeta(s)$  の解析接続の証明は初等的なものであるが、特殊値を容易に計算できるという利点がある。

**定理.**

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}. \quad (7.16)$$

**証明.** (7.15) の表示において  $s \rightarrow 0$  とすると

$$\begin{aligned}\zeta(0) &= 1 + \frac{2}{-1} + \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow 0} s \zeta(s+1) \\ &= 1 - 2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

□

これで目標のひとつ、特殊値  $\zeta(0)$  の値を知ることができた。あとは微分係数  $\zeta'(0)$  を求めるために、表示 (7.15) を微分して  $s \rightarrow 0$  とすれば…と思ったが、この表示を実際に微分して  $\zeta'(0)$  を求めるのは容易ではなさそうだ。少なくとも私には無理だった（できそうな人はトライしてみてください）。ということで、このダイレクトな方法は諦め、イータ関数  $\eta(s)$  を使った方法で求めることにする。道のりは長いが、こちらの方が確実である<sup>\*5</sup>。

### 7.3.4 特殊値 $\zeta'(0)$

前のセクションで  $\zeta(s)$  を解析接続するとすぐに  $\zeta(0)$  の値も求まったが、 $\zeta'(0)$  の値はそう簡単にはいかない。これで最後なので頑張ろう。

---

<sup>\*5</sup> これから行う方法はあまり一般的なものではないらしい。アダマール積だとかフォン・マンゴールド関数を使った方法がよく見られる。しかしあ既に調べてしまったものは仕方ないので、別の方法は各自ググってもらうとしよう。

**定義&命題（ディリクレのイータ関数）。** 複素数  $s$  について、無限級数によって定義された関数

$$\eta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \equiv \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots \quad (7.17)$$

は、 $\operatorname{Re}(s) > 1$  のとき広義一様に絶対収束し、正則関数となる。また、 $\eta(s)$  はディリクレのイータ関数と呼ばれる。

**証明。**  $\eta(s)$  は  $\zeta(s)$  の交代級数であるから、絶対収束性についての議論は  $\zeta(s)$  と同じ。

□

**定理（イータ関数とゼータ関数の関係式）。**  $\operatorname{Re}(s) > 1$  の領域において

$$\eta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s) \quad (7.18)$$

という関係式が成り立つ。

**証明。**  $\operatorname{Re}(s) > 1$  とすると、絶対収束する領域では項の順序を入れ替えて良いので

$$\begin{aligned} \eta(s) &= 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots \\ &= \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots\right) - 2\left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - 2 \cdot 2^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \\ &= (1 - 2^{1-s}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s). \end{aligned}$$

□

(7.18) 式から  $\eta(s)$  は  $s = 1$  を除いた複素数全体へ解析接続されることがすぐにわかる。 $s = 1$  では  $\eta(1) = 0 \cdot \infty$  となり不定形であるが、これは  $\log 2$  という値に収束することが知られている<sup>\*6</sup>。 $\eta(s)$  は  $s = 1$  でも有限値をとるので、複素数平面全体で正則な関数に解

<sup>\*6</sup> 直感的には、 $|x| < 1$  において収束する  $\log(1+x)$  のテイラー展開

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

析接続できるのかな？ まあ今回は  $s = 1$  はどうでもいいので、とりあえず先に進もう。

**定理 (イータ関数の別表示).**

$$\eta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \{ n^{-s} - (n+1)^{-s} \} \quad (7.19)$$

**証明.**

$$\begin{aligned} \eta(s) &= 1 - 2^{-s} + 3^{-s} - 4^{-s} + \dots \\ &= \frac{1}{2} (1 + 1 - 2^{-s} - 2^{-s} + 3^{-s} + 3^{-s} - 4^{-s} - \dots) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1 - 2^{-s} - 2^{-s} + 3^{-s} + 3^{-s} - 4^{-s} - \dots) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \{ (1 - 2^{-s}) - (2^{-s} - 3^{-s}) + (3^{-s} - 4^{-s}) - \dots \} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \{ n^{-s} - (n+1)^{-s} \} \end{aligned}$$

□

**定理 (余接関数の極).**  $\cot z \equiv \frac{\cos z}{\sin z}$  は、 $z = \pi n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) に 1 位の極を持ち、それらの留数はすべて 1 である。

**証明.**  $z \equiv x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) とすると

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin(x + iy) \\ &= \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) \\ &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \sin z = 0 &\iff \sin x \cosh y = 0 \text{かつ } \cos x \sinh y = 0 \\ &\iff \sin x = 0 \text{かつ } [\cos x = 0 \text{ または } \sinh y = 0] \\ &\iff x = \pi n \text{ かつ } [x = \frac{\pi n}{2} (n \neq 0) \text{ または } y = 0] \\ &\iff x = \pi n \text{ かつ } y = 0 \\ &\iff z = \pi n \end{aligned}$$

---

において  $x = 1$  とすれば  $\eta(1) = \log 2$  を得ることができる。

である。 $z = \pi n$  で  $\cos z \neq 0$  なので、 $\cot z$  の極は  $\sin z$  の零点と一致し、 $z = \pi n$  のみであることがわかる。また

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow \pi n} (z - \pi n) \cot z &= \lim_{z \rightarrow \pi n} (z - \pi n) \frac{\cos z}{\sin z} \\&= \lim_{A \rightarrow 0} A \cdot \frac{\cos(A + \pi n)}{\sin(A + \pi n)} \\&= \lim_{A \rightarrow 0} A \cdot \frac{\cos A \cos \pi n - \sin A \sin \pi n}{\sin A \cos \pi n + \cos A \sin \pi n} \\&= \lim_{A \rightarrow 0} \frac{A}{\sin A} \cdot \cos A = 1\end{aligned}$$

であるから、すべての極  $z = \pi n$  の位数は 1 であり、留数は 1 である。  $\square$

**定理（余接関数の部分分数展開）。**

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 n^2} \quad (7.20)$$

**証明。** (7.20) を証明するためには、図 7.4 のように経路  $C$  に沿った積分

$$\oint_C \frac{\cot \zeta}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta \quad (z \neq \pi n)$$

を 2 つの方法で計算すればよい。すなわち、(i) 留数定理を使う方法と、(ii) 積分を直接実行する方法で求めた積分値が等しいとおく。

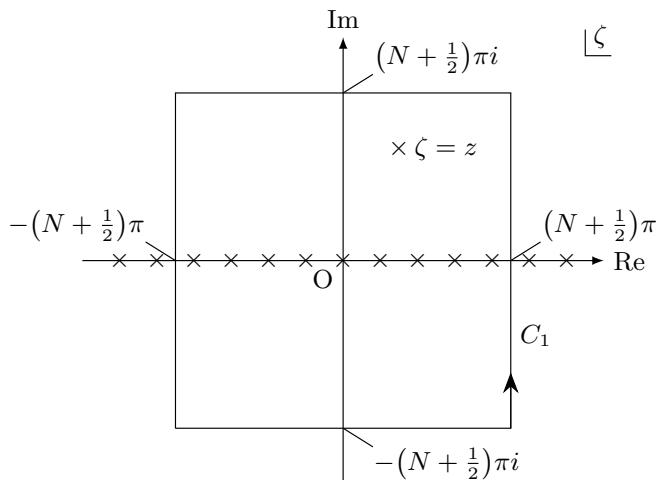


図 7.4 経路  $C$  と  $\frac{\cot \zeta}{\zeta(\zeta - z)}$  の極

(i) まず  $\frac{(\cot \zeta)}{\zeta(\zeta - z)}$  は  $\zeta = z$  と  $\zeta = \pi n$  のところに極を持つ。 $\zeta = z$  と  $\zeta = \pi n$  ( $n \neq 0$ ) のところは 1 位の極であり、留数はそれぞれ  $\frac{\cot z}{z}$  と  $\frac{1}{\pi n(\pi n - z)}$  である。 $\zeta = 0$  のところは 2 位の極であり、留数は

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{d}{d\zeta} \left( \zeta^2 \cdot \frac{\cot \zeta}{\zeta(\zeta - z)} \right) &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{\zeta \cot \zeta}{(\zeta - z)} \right) \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left( \frac{\cot \zeta}{\zeta - z} - \frac{\zeta}{(\zeta - z) \sin^2 \zeta} - \frac{\zeta \cot \zeta}{(\zeta - z)^2} \right) \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left( \frac{\cos \zeta}{\zeta(\zeta - z) \sin \zeta} - \frac{1}{\zeta(\zeta - z) \sin^2 \zeta} - \frac{\zeta^2}{(\zeta - z)^2 \sin \zeta} \right) \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\zeta(\zeta - z)} - \frac{1}{\zeta(\zeta - z)} - \frac{1}{(\zeta - z)^2} \right) \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{(\zeta - z)^2} \right) = -\frac{1}{z^2} \end{aligned}$$

と求まる。よってこれらの留数を合計すると積分値が求まり

$$\oint_C \frac{\cot \zeta}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta = 2\pi i \left( \frac{\cot z}{z} + \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N \frac{1}{\pi n(\pi n - z)} - \frac{1}{z^2} \right) \quad (7.21)$$

となる。

(ii) 次に (7.21) 式左辺の積分を経路  $C$  の各辺ごとに実行してみる。例えば図 7.4 の右辺部分の経路  $C_1$  に沿った積分は  $\zeta = (N + \frac{1}{2})\pi + iy$  とおいて

$$\int_{C_1} \frac{\cot \zeta}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta = \int_{-(N + \frac{1}{2})\pi}^{(N + \frac{1}{2})\pi} \frac{\cot \{(N + \frac{1}{2})\pi + iy\}}{\{(N + \frac{1}{2})\pi + iy\}\{(N + \frac{1}{2})\pi + iy - z\}} i dy$$

であるが

$$\begin{aligned} |\cot \{(N + \frac{1}{2})\pi + iy\}| &= \left| \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\pi \cdot \sin iy + \cos(N + \frac{1}{2})\pi \cdot \cos iy}{\sin(N + \frac{1}{2})\pi \cdot \cos iy + \cos(N + \frac{1}{2})\pi \cdot \sin iy} \right| \\ &= \left| \frac{\sin iy}{\cos iy} \right| = \left| \frac{e^{-y} - e^y}{e^{-y} + e^y} \right| \leq 1 \end{aligned}$$

であり、また  $-(N + \frac{1}{2})\pi \leq y \leq (N + \frac{1}{2})\pi$  において

$$\begin{aligned} |(N + \frac{1}{2})\pi + iy| &= \sqrt{\{(N + \frac{1}{2})\pi\}^2 + y^2} \geq (N + \frac{1}{2})\pi, \\ |(N + \frac{1}{2})\pi + iy - z| &\geq |(N + \frac{1}{2})\pi + iy| - |z| \geq (N + \frac{1}{2})\pi - |z| \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_1} \frac{\cot \zeta}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta \right| &\leq \int_{-(N+\frac{1}{2})\pi}^{(N+\frac{1}{2})\pi} \left| \frac{\cot \{(N+\frac{1}{2})\pi + iy\}}{\{(N+\frac{1}{2})\pi + iy\}\{(N+\frac{1}{2})\pi + iy - z\}} \right| dy \\ &\leq \int_{-(N+\frac{1}{2})\pi}^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{1}{(N+\frac{1}{2})\pi \{(N+\frac{1}{2})\pi - |z|\}} dy \\ &= \frac{2}{(N+\frac{1}{2})\pi - |z|}. \end{aligned}$$

したがって、 $N \rightarrow \infty$  のとき積分値は 0 に近づく。他の部分の経路からの寄与も同じように小さくなるので、結局 (7.21) 式左辺は  $N \rightarrow \infty$  で 0 である。つまり

$$\frac{\cot z}{z} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{\pi n(\pi n - z)} - \frac{1}{z^2} = 0$$

が成立する。この式を整理すると

$$\begin{aligned} \cot z &= \frac{1}{z} - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{z}{\pi n(\pi n - z)} \\ &= \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{z}{\pi n(\pi n - z)} + \frac{z}{-\pi n(-\pi n - z)} \right\} \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 n^2} \end{aligned}$$

となる。 □

### 定理 (サイン関数の無限積展開).

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2} \right) \quad (7.22)$$

**証明.** まず任意の複素数  $z$  を固定するとき、級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{z^2}{n^2} \right)$  は広義一様に絶対収束するので、無限積  $P(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2} \right)$  も広義一様に絶対収束し、正則関数となる。そこで、関数  $f(z)$  を

$$f(z) := \frac{zP(z)}{\sin z}$$

と定義し、これが恒等的に  $f(z) \equiv 1$  であることを示せばよい。両辺対数をとると

$$\log f(z) = \log z + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \log \left( 1 + \frac{z}{\pi n} \right) + \log \left( 1 - \frac{z}{\pi n} \right) \right] - \log(\sin z)$$

であり、微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \log f(z) &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{1 + \frac{z}{\pi n}} - \frac{1}{1 - \frac{z}{\pi n}} \right] - \frac{\cos z}{\sin z} \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} - \cot z. \end{aligned}$$

ここで (7.20) より

$$\frac{d}{dz} \log f(z) = 0$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \log f(z) &= \text{定数} \\ f(z) &= \text{定数} \end{aligned}$$

となるから、 $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} = 1$  に注意して

$$f(z) \equiv f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{zP(z)}{\sin z} = P(0) = 1.$$

□

なお、 $\sin z$  の無限積展開は、多項式にしか使えない因数定理を誤用することでも奇跡的に求められる。すなわち、 $\sin z$  が零点  $z = \pi n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) を持つことから

$$\begin{aligned} \sin z &= az(z + \pi)(z - \pi)(z + 2\pi)(z - 2\pi)(z + 3\pi)(z - 3\pi) \cdots \\ &= az \prod_{n=1}^{\infty} (z + n\pi)(z - n\pi) \end{aligned}$$

というように因数分解できるとする。係数  $a$  を決定するために両辺  $z$  で割り  $z \rightarrow 0$  とすると

$$1 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = a \prod_{n=1}^{\infty} n\pi(-n\pi)$$

であるから

$$a = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi(-n\pi)}.$$

よって

$$\begin{aligned}\sin z &= z \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(z+n\pi)(z-n\pi)}{n\pi(-n\pi)} \\ &= z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n\pi}\right) \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) \\ &= z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)\end{aligned}$$

となり、上で示したことと同じ結果が得られた。これはかの天才オイラーによって発見された方法であり、オイラーはさらに  $\sin z$  のマクローリン展開

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

と上で示した  $\sin z$  の無限積表示の  $z^3$  の係数を比較することで、

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (7.23)$$

であることを示し、バーゼル問題を解決した。

天才オイラーの登場によって話が逸れてしまったが、ここで話を戻し、 $\sin z$  の無限積展開の特殊値としてウォリス積というものを求めよう。

**定理 (ウォリス積).**

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} \\ &\equiv \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots\end{aligned} \quad (7.24)$$

**証明.** (7.22)において  $z = \frac{\pi}{2}$  を代入すると

$$\begin{aligned}\sin \frac{\pi}{2} &= \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) \\ 1 &= \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n)^2 - 1}{(2n)^2}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} \\ \frac{\pi}{2} &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}.\end{aligned}$$

□

これでようやく  $\zeta'(0)$  を求める準備が整った。これで本当に最後なので頑張っていこう。

**定理.**

$$\zeta'(0) = -\frac{1}{2} \log 2\pi \quad (7.25)$$

**証明.** (7.18), (7.19) より

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \{n^{-s} - (n+1)^{-s}\}$$

ここで、両辺  $s$  で微分し、 $s = 0$  を代入する。

右辺については

$$\frac{d}{dx} a^{-x} = \frac{d}{dx} e^{-x \log a} = -a^{-x} \log a$$

であることに注意して

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}(\text{右辺}) \Big|_{s=0} &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{\log n}{n^s} - \frac{\log(n+1)}{(n+1)^s} \right\} \Big|_{s=0} \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \{ \log n - \log(n+1) \} \\
&= \frac{1}{2} \{ -(\log 1 - \log 2) + (\log 2 - \log 3) - (\log 3 - \log 4) + \dots \} \\
&= \frac{1}{2} \log \left\{ \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \log \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} \\
&= \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

となる。ただし最後の変形でウォリス積 (7.24) 式を用いた。

一方、左辺については、既に求めた特殊値  $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$  を用いて

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}(\text{左辺}) \Big|_{s=0} &= 2^{1-s} \log 2 \cdot \zeta(s) + (1 - 2^{1-s}) \zeta'(s) \Big|_{s=0} \\
&= 2 \log 2 \cdot \zeta(0) - \zeta'(0) \\
&= -\log 2 - \zeta'(0)
\end{aligned}$$

となる。よって両辺等しいのだから

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \log \frac{\pi}{2} &= -\log 2 - \zeta'(0) \\
\zeta'(0) &= \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{2} + \log 2 \\
&= \frac{1}{2} \log 2\pi.
\end{aligned}$$

□

以上より、ゼータ関数の特殊値  $\zeta(0)$  および  $\zeta'(0)$  を求めることができた。ここまで道のりが長いと何のためにゼータ関数の特殊値を計算したのか忘れてしまいそうだが、これでようやく

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \dots = 4\pi^2$$

という数式を理解できたと言つても良いだろう。

目的は全て達成されもうお腹もいっぱいなのでここで終わっても良いのだが、せっかくゼータ関数  $\zeta(s)$  とお友達になって（定義して）さらには親友にもなった（解析接続もした）ので、かの有名な未解決問題「リーマン予想」に触れない手はない。

以降のセクションでは、リーマン予想を証明することはないが、それがどんなものであるか、何が面白いのかについて簡単に説明し、リーマン予想が正しいことを支持する数値計算の結果を見せる。

それではここで

リーマンの奇妙な冒険 第一部 完

とする。

## 7.4 リーマン予想

最後にリーマン予想の話をしよう。だがその前にゼータ関数についてもう少し詳しくなっておこう。まず、ゼータ関数の解析接続を別の方法（積分表示）で与える。この表示による副産物として、 $s$  が負の整数のときの  $\zeta(s)$  の値をベルヌーイ数を用いて簡単に計算できるようになる。ここでゼータ関数の自明な零点についても説明する。また、 $s$  が正の偶数であるときの  $\zeta(s)$  の値もベルヌーイ数を用いて計算できることを示す。

次に  $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$  を除いた領域では  $\zeta(s)$  は零点を持たないことを示し、 $\zeta(s)$  非自明な零点について説明する。ただしこの辺で私が力尽きてしまったので、証明はいくつか省略している。

以上のことを踏まえ、ここでようやくリーマン予想について説明する。素数定理というものを見ながら、リーマン予想がどういう意味を持つのかについて考えていく。

最後に、Fortran を用いて  $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$  上にある  $\zeta(s)$  の零点を数値計算で求めてみたので、その結果を載せておく。

### 7.4.1 ガンマ関数 $\Gamma(s)$

まずはゼータ関数の積分表示に必要なガンマ関数を定義する。

**定義（ガンマ関数）.** 複素数  $s$  について、積分で定義された関数

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \quad (7.26)$$

は、 $\operatorname{Re}(s) > 0$  で一様に絶対収束し、正則関数となる。 $\Gamma(s)$  はガンマ関数と呼ばれる。

**証明.** 右辺の広義積分が  $\operatorname{Re}(s) > 0$  で絶対収束することを示す。 $x > 0$  と任意の  $0 \leq m \in \mathbb{Z}$  に対し

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^m}{m!} + \cdots \geq \frac{x^m}{m!}$$

であるから、 $e^{-x} \leq m! x^{-m}$  であり、 $s \equiv \sigma + it$  とおくと、 $0 < \sigma < m$  なる任意の  $\sigma, m$  に対し

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |e^{-x} x^{s-1}| dx &= \int_0^\infty e^{-x} x^{\sigma-1} dx \\ &= \int_0^1 e^{-x} x^{\sigma-1} dx + \int_1^\infty e^{-x} x^{\sigma-1} dx \\ &\leq \int_0^1 x^{\sigma-1} dx + m! \int_1^\infty x^{\sigma-m-1} dx \\ &= \left[ \frac{x^\sigma}{\sigma} \right]_0^1 + m! \left[ \frac{x^{\sigma-m}}{\sigma-m} \right]_1^\infty \\ &= \frac{1}{\sigma} + \frac{m!}{m-\sigma} \end{aligned}$$

となるので、積分は収束する。また

$$\Gamma_n(s) := \int_{\frac{1}{n}}^n e^{-t} t^{s-1} dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおくと、各  $\Gamma_n(s)$  は  $\operatorname{Re}(s) > 0$  で正則である。さらに、 $0 < a < b$  とするとき、

$a \leq \operatorname{Re}(s) \leq b$  ならば

$$\begin{aligned}\Gamma(s) - \Gamma_n(s) &= \left( \int_0^\infty - \int_{\frac{1}{n}}^n \right) e^{-t} t^{s-1} dt \\ &= \left( \int_0^{\frac{1}{n}} + \int_n^\infty + \int_n^\infty - \int_{\frac{1}{n}}^n \right) e^{-t} t^{s-1} dt \\ &= \left( \int_0^{\frac{1}{n}} + \int_n^\infty \right) e^{-t} t^{s-1} dt\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}|\Gamma(s) - \Gamma_n(s)| &= \left| \int_0^{\frac{1}{n}} e^{-t} t^{s-1} dt + \int_n^\infty e^{-t} t^{s-1} dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^{\frac{1}{n}} e^{-t} t^{s-1} dt \right| + \left| \int_n^\infty e^{-t} t^{s-1} dt \right| \\ &\leq \int_0^{\frac{1}{n}} |e^{-t} t^{s-1}| dt + \int_n^\infty |e^{-t} t^{s-1}| dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{n}} e^{-t} t^{s-1} dt + \int_n^\infty e^{-t} t^{s-1} dt \\ &\leq \int_0^{\frac{1}{n}} e^{-t} t^{a-1} dt + \int_n^\infty e^{-t} t^{b-1} dt.\end{aligned}$$

ゆえに、 $\operatorname{Re}(s) > 0$  で  $\Gamma_n(s)$  は  $\Gamma(s)$  に一様収束する。よって、 $\operatorname{Re}(s) > 0$  で  $\Gamma(s)$  は正則である。  $\square$

以下に示す性質から、ガンマ関数とは自然数  $n$  の階乗  $n!$  を複素数の範囲にまで拡張したのものであると理解できる。

**定理（ガンマ関数の性質）.**  $\operatorname{Re}(s) > 0$  のとき、関係式

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad (7.27)$$

が成り立つ。特に  $s$  が自然数  $n$  のとき

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (7.28)$$

となる。

**証明.**  $\operatorname{Re}(s) > 0$  であると仮定すると、部分積分より

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1) &= \int_0^\infty e^{-x} x^s dx \\ &= [(-e^{-x})x^s]_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-x})sx^{s-1} dx \\ &= 0 + s \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \\ &= s\Gamma(s).\end{aligned}$$

また、 $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$  であるから、自然数  $n$  について  $\Gamma(n) = (n-1)!$  が言える。  $\square$

先ほど求めた関係式を用いて、ガンマ関数を複素数全体へ解析接続する。

**定理（ガンマ関数の解析接続）.** ガンマ関数は複素数全体に解析接続される。ガンマ関数は零点を持たず、 $s = 0, -1, -2, \dots$  にのみ 1 位の極を持つ。これらの極を除いた複素数全体で正則関数となる。

**証明.**  $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$  における  $\Gamma(s)$  の値から、関係式

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}$$

によって、 $\Gamma(s)$  の定義域を  $\operatorname{Re}(s) > -1$  にまで延長できる。これを繰り返し行うことにより、 $\operatorname{Re}(s) > -2, \operatorname{Re}(s) > -3, \dots$  と次々に延長でき、 $\Gamma(s)$  は複素数全体へ解析接続される。

また、 $s = 0, -1, -2, \dots$  にのみ極を持ち、それらが全て 1 位の極であることは、上の関係式によりすぐにわかる。零点を持たないことは、後述の相反公式からわかる。  $\square$

次に、 $\Gamma(s)$  の相反公式というものを示す。この式によって  $\Gamma(s)$  が零点を持たないことがわかる。つまり  $\frac{1}{\Gamma(s)}$  は複素平面全体で正則関数となる。

$\Gamma(s)$  の相反公式を示す準備として、まずは次の定積分の値を求めておこう。

**定理.**  $0 < \alpha < 1$  のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1 + e^x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \quad (7.29)$$

が成り立つ。

証明.

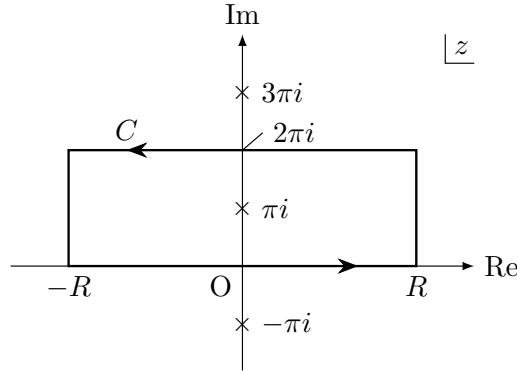


図 7.5 積分路  $C$  と  $f(z)$  の極

$f(z) := \frac{e^{\alpha z}}{1 + e^z}$  ( $0 < \alpha < 1$ ) とし、図 7.5 のような経路  $C$  に沿った積分の値を、留数定理を用いた方法と、直接積分を実行する方法の 2 通りの方法で求める。

まず、 $f(z)$  は極を  $z = (2n+1)\pi i$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) に持ち、それらはすべて単純極である。よって経路  $C$  内の極は  $z = \pi i$  のみであり、そこでの留数は

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z=\pi i}[f] &= \lim_{z \rightarrow \pi i} (z - \pi i) \frac{e^{\alpha z}}{1 + e^z} \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta \cdot \frac{e^{\alpha(\zeta+\pi i)}}{1 + e^{\zeta+\pi i}} \quad (\because \zeta := z - \pi i) \\ &= e^{\pi i \alpha} \cdot \lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta \cdot \frac{e^{\alpha \zeta}}{1 - e^\zeta} \quad (\because e^{\pi i} = -1) \\ &= e^{\pi i \alpha} \cdot \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\zeta}{1 - e^\zeta} \\ &= e^{\pi i \alpha} \cdot \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\zeta}{1 - \{1 + \zeta + \mathcal{O}(\zeta^2)\}} \\ &= e^{\pi i \alpha} \cdot \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{-1 + \mathcal{O}(\zeta)} \\ &= -e^{\pi i \alpha} \end{aligned}$$

であるから、留数定理より

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \cdot \text{Res}_{z=\pi i}[f] = -2\pi i e^{\pi i \alpha}$$

となる。 $R \rightarrow \infty$  としてもこの値は変わらない。

一方、経路  $C$  を各辺ごとに分解すると

$$\oint_C f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx + \int_0^{2\pi} \frac{e^{\alpha(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} i dy \\ + \int_R^{-R} \frac{e^{\alpha(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}} dx + \int_{2\pi}^0 \frac{e^{\alpha(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}} i dy.$$

ここで

$$|\text{第2項}| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{\alpha(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} i dy \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{\alpha(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} \right| dy \\ = \int_0^{2\pi} \frac{|e^{\alpha R}| |e^{iy}|}{|1+e^R e^{iy}|} dy = \int_0^{2\pi} \frac{e^{\alpha R}}{|1+e^R e^{iy}|} dy \\ \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{\alpha R}}{|e^R e^{iy}| - 1} dy = \int_0^{2\pi} \frac{e^{\alpha R}}{e^R - 1} dy \\ = 2\pi \cdot \frac{e^{\alpha R}}{e^R - 1} = 2\pi \cdot \frac{e^{-(1-\alpha)R}}{1 - e^{-R}} \\ \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 2\pi \cdot \frac{0}{1 - 0} = 0,$$

$$|\text{第4項}| = \left| \int_{2\pi}^0 \frac{e^{\alpha(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}} i dy \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{\alpha(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}} \right| dy \\ \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\alpha R}}{1 - e^{-R}} dy = 2\pi \cdot \frac{e^{-\alpha R}}{1 - e^{-R}} \\ \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 2\pi \cdot \frac{0}{1 - 0} = 0,$$

$$\text{第3項} = \int_R^{-R} \frac{e^{\alpha(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}} dx = - \int_{-R}^R \frac{e^{\alpha x} e^{2\pi i \alpha}}{1+e^x e^{2\pi i}} dx \\ = -e^{2\pi i \alpha} \int_{-R}^R \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx$$

となるので

$$\oint_C f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx + 0 + 0 - e^{2\pi i \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx \\ = (1 - e^{2\pi i \alpha}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx.$$

よって、これら 2通りの方法で求めた積分値が等しいので

$$(1 - e^{2\pi i \alpha}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1 + e^x} dx = -2\pi i e^{\pi i \alpha}.$$

$1 - e^{2\pi i \alpha} \neq 0$  であるから

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1 + e^x} dx &= \frac{2\pi i e^{\pi i \alpha}}{e^{2\pi i \alpha} - 1} \\ &= \frac{2\pi i}{e^{\pi i \alpha} - e^{-\pi i \alpha}} \\ &= \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \quad \left( \because \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right) \end{aligned}$$

となる。 □

相反公式の証明で実際に用いるのは、上の式で  $t := e^x$  と変数変換した次の式である。

**定理.**  $0 < \alpha < 1$  のとき

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \quad (7.30)$$

が成り立つ。

**証明.** (7.29)において  $t := e^x$  と変数変換すれば

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1 + e^x} dx = \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha}}{1+t} \cdot \frac{dt}{t} \quad (\because t := e^x) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt. \end{aligned}$$

□

ここでさらにベータ関数と呼ばれるものを定義する。下記の関係式からもわかるように、ベータ関数はガンマ関数と深く結びついている。

**定義&命題.**  $\operatorname{Re}(p), \operatorname{Re}(q) > 0$  であるような複素数  $p, q$  について、ベータ関数を

$$B(p, q) := \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad (7.31)$$

と定義すると、以下の関係式が成り立つ。

$$B(p, q) = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx, \quad B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (7.32)$$

**証明.** まず、ベータ関数の定義式において、変数変換  $x =: \frac{t}{1+t}$  を行うこと

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^\infty \left( \frac{t}{1+t} \right)^{p-1} \left( 1 - \frac{t}{1+t} \right)^{q-1} \frac{dt}{(1+t)^2} \\ &= \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt \end{aligned}$$

が得られる。

次に、ガンマ関数の定義式から

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \left( \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx \right) \left( \int_0^\infty e^{-y} y^{q-1} dy \right)$$

であり、 $x =: X^2, y =: Y^2$  と変数変換を行うと

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \left( \int_0^\infty e^{-X^2} X^{2(p-1)} \cdot 2X dX \right) \left( \int_0^\infty e^{-Y^2} Y^{2(q-1)} \cdot 2Y dY \right) \\ &= 4 \int_0^\infty dX \int_0^\infty dY e^{-(X^2+Y^2)} X^{2p-1} Y^{2q-1}. \end{aligned}$$

ここで、 $X =: r \cos \theta, Y =: r \sin \theta$  と変数変換を行うと

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= 4 \int_0^\infty dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta r e^{-r^2} (r \cos \theta)^{2p-1} (r \sin \theta)^{2q-1} \\ &= \left( 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta \right) \left( 2 \int_0^\infty e^{r^2} r^{2p+2q-1} dr \right). \end{aligned}$$

後半部分は、 $R := r^2$  と変数変換すれば  $dR = 2r dr$  であるから

$$2 \int_0^\infty e^{r^2} r^{2p+2q-1} dr = \int_0^\infty e^R R^{p+q-1} dR = \Gamma(p+q)$$

となる。前半部分は、ベータ関数の定義式において  $x =: \sin^2 \theta$  と変数変換すれば、 $dx = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$  であるから

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2(p-1)} \theta (1 - \sin^2 \theta)^{q-1} \cdot 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2q-1} \theta \cos^{2p-1} \theta d\theta \end{aligned}$$

となる。よって

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = B(p, q)\Gamma(p+q).$$

□

**定理（相反公式）.**

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} \quad (s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) \quad (7.33)$$

**証明.**  $0 < \alpha < 1$  のとき

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = B(\alpha, 1-\alpha) = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$$

であるから、一致の定理より

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} \quad (s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$$

となる。

□

**注意.** 前にも書いたように、この相反公式 (7.33) から  $\Gamma(s)$  は零点を持たないことがわかる。さらに  $\frac{1}{\Gamma(s)}$  は複素平面全体で正則な関数であり、 $s = -k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) に 1 位の零点を持つ。

$$\frac{1}{\Gamma(-k)} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (7.34)$$

また、(7.48) の代わりに相反公式 (7.33) を用いることでもガンマ関数  $\Gamma(s)$  を解析接続することができる。すなわち、 $\operatorname{Re}(s) \leq 0$  のとき

$$\Gamma(s) = \frac{\pi}{\Gamma(1-s)\sin \pi s} \quad (7.35)$$

によって  $\Gamma(s)$  を定義してもかまわない。 $s = 0, -1, -2, \dots$  に極を持つこともすぐにわかる。こちらの方法で  $\Gamma(s)$  を解析接続する方が、一発で  $\Gamma(s)$  の値が求まるので実用的である。

### 7.4.2 積分表示による $\zeta(s)$ の解析接続

前節で定義したガンマ関数  $\Gamma(s)$  を用いて、第 7.3.2 節とは異なった方法で、再びゼータ関数  $\zeta(s)$  を解析接続する。この解析接続の副産物として、 $s$  が負の整数のときの  $\zeta(s)$  の値を求める一般公式を得ることができる。

それではまず、 $B_n$  はベルヌーイ数と呼ばれる有理数を定義するところから始めよう。

**定義（ベルヌーイ数）.** ベルヌーイ数  $B_n$  を以下のマクローリン展開の展開係数として定義する。

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n. \quad (7.36)$$

上の定義からベルヌーイ数を計算するのは容易ではなく<sup>\*7</sup>、以下の漸化式が有用である。

**定理（ベルヌーイ数の漸化式）.**

$$B_0 = 1, \quad B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k \quad (7.37)$$

**注意.** この漸化式から、ベルヌーイ数  $B_n$  は有理数であることがわかる。

**証明.**  $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$  とその逆数をテイラー展開し、それらの積が恒等的に 1 であることからベルヌーイ数が満たす漸化式を求める。 $f(x)$  の逆数のテイラー展開は

---

<sup>\*7</sup>  $B_n = \left. \frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{x}{e^x - 1} \right) \right|_{x=0}$  で計算できるが、かなり面倒臭い。

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(x)} &= \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 \right) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}1 &= f(x) \cdot \frac{1}{f(x)} = \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i}{i!} x^i \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{(j+1)!} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_i}{i!(j+1)!} x^{i+j}\end{aligned}$$

ここで、図 7.6 のように二重和の取り方を変更する。 $i, j$  について縦横に足し上げるのでなく、 $i + j =: n$  を固定し、斜め方向に足し上げていく。

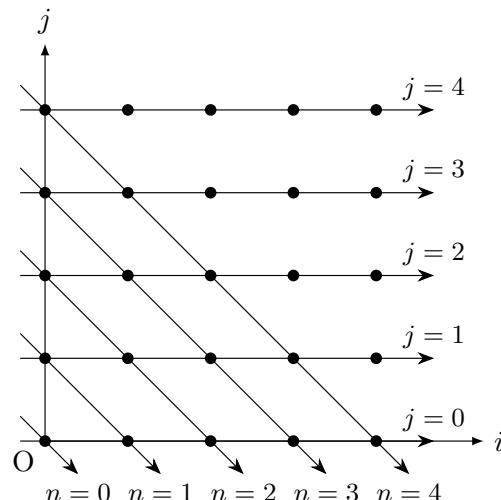


図 7.6 二重和の取り方の変更。

すると

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!(n-k+1)!} x^n \quad (n := i+j, k := i)$$

となり、各  $x^n$  の係数を比較すると

$$\begin{cases} 1 = B_0 & (n=0), \\ 0 = \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!(n-k+1)!} & (n \geq 1) \end{cases}$$

が得られる。第2式は

$$0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!(n-k+1)!} + \frac{B_n}{n!}$$

となるので

$$\begin{aligned} B_n &= -n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!(n-k+1)!} \\ &= -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} B_k \\ &= -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k. \end{aligned}$$

よって漸化式(7.37)が得られる。  $\square$

### ベルヌーイ数 $B_n$ の具体的な値.

$B_0 = 1,$	$B_5 = 0,$	$B_{10} = \frac{5}{66},$
$B_1 = -\frac{1}{2},$	$B_6 = \frac{1}{42},$	$B_{11} = 0,$
$B_2 = \frac{1}{6},$	$B_7 = 0,$	$B_{12} = -\frac{691}{2730},$
$B_3 = 0,$	$B_8 = -\frac{1}{30},$	$B_{13} = 0,$
$B_4 = -\frac{1}{30},$	$B_9 = 0,$	$B_{14} = \frac{7}{6}.$

**注意.**  $k$  が 3 以上の奇数のとき  $B_k = 0$  である。このことは第 7.4.3 節で示す。

ディリクレ表示で定義されたゼータ関数  $\zeta(s)$  は、ガンマ関数  $\Gamma(s)$  を用いて以下のように積分表示できる。ただし、定義域は相変わらず  $\operatorname{Re}(s) > 1$  である。

**定理 (リーマンの第一積分表示).**

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \quad (\operatorname{Re}(s) > 1). \quad (7.38)$$

**証明.**  $x > 0$  において、等比級数の和の公式より

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} &\equiv e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots \\ &= \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1} \end{aligned}$$

であることを用いて

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx &= \int_0^\infty x^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty x^{s-1} e^{-nx} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \int_0^\infty u^{s-1} e^{-u} du \quad (u := nx) \\ &= \Gamma(s) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \Gamma(s) \cdot \zeta(s). \end{aligned}$$

□

上の積分表示では  $\zeta(s)$  の定義域は  $\operatorname{Re}(s) > 1$  のままであるが、次のように積分を分解することで、 $\zeta(s)$  を  $s = 1$  を除く複素平面全体に解析接続することができる！

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \text{I}(s) + \text{II}_k(s) + \text{III}_k(s).$$

ここで

$$\begin{aligned} \text{I}(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx, \\ \text{II}_k(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \left( \frac{1}{e^x - 1} - \sum_{\ell=0}^{k+1} \frac{B_\ell}{\ell!} x^{\ell-1} \right) x^{s-1} dx, \\ \text{III}_k(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \left( \sum_{\ell=0}^{k+1} \frac{B_\ell}{\ell!} x^{\ell-1} \right) x^{s-1} dx \end{aligned}$$

である。また、 $k$  は  $k \geq 0$  を満たす整数とし、 $B_\ell$  はベルヌーイ数である。

このように積分を 3 つに分割して書くことで、 $\operatorname{Re}(s) > 1$  でしか定義されなかつたゼータ関数  $\zeta(s)$  を、 $s = 1$  の一点を除き、各整数  $k$  に対し  $\operatorname{Re}(s) > -k - 1$  にまで解析接続できる。つまり、いくらでも大きな整数  $k$  を取れば、ゼータ関数  $\zeta(s)$  は  $s = 1$  を除いた全ての複素数で正則となるように解析接続できる！！ そのことを以下で詳しく見てみよう。

まず、 $\frac{1}{\Gamma(s)}$  は複素数全体で正則な関数である。さらに、 $I(s)$  の積分は、被積分関数の分母の指數関数の方が収束が速いので、 $s$  の値に依らず有限値に収束し、 $I(s)$  は複素数全体で正則関数となる。

次に、 $\text{II}_k(s)$  の被積分関数は、ベルヌーイ数の定義を思い出すと

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{e^x - 1} - \sum_{\ell=0}^{k+1} \frac{B_\ell}{\ell!} x^{\ell-1} \right) x^{s-1} &= \left( \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{\ell!} x^{\ell-1} - \sum_{\ell=0}^{k+1} \frac{B_\ell}{\ell!} x^{\ell-1} \right) x^{s-1} \\ &= \sum_{\ell=k+2}^{\infty} \frac{B_\ell}{\ell!} x^{\ell-1} \cdot x^{s-1} \\ &= \mathcal{O}(x^{s+k}) \quad (0 < x < 1) \end{aligned}$$

であることから、 $\text{II}_k(s)$  の積分は  $\mathcal{O}(x^{s+k+1})$  ( $0 < x < 1$ ) となり、 $\operatorname{Re}(s) > -k - 1$  で有限値に収束することがわかる。よって、 $\text{II}_k(s)$  は  $\operatorname{Re}(s) > -k - 1$  において正則な関数である。

最後に、 $\text{III}_k(s)$  の積分は

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{k+1} \frac{B_\ell}{\ell!} \int_0^1 x^{s+\ell-2} dx &= \sum_{\ell=0}^{k+1} \frac{B_\ell}{\ell!} \left[ \frac{x^{s+\ell-1}}{s+\ell-1} \right]_0^1 dx \\ &= \sum_{\ell=0}^{k+1} \frac{B_\ell}{\ell!} \cdot \frac{1}{s+\ell-1} \end{aligned}$$

となるので、 $s = 1, 0, -1, -2, \dots, -k$  に 1 位の極を持つ。ここで、 $s = 1$  以外のすべての極は、 $\frac{1}{\Gamma(s)}$  の零点と打ち消しあう。よって、 $\text{III}_k(s)$  は  $s = 1$  を除いた複素平面全体で正則である。

以上のことから、 $\zeta(s)$  は  $k \geq 0$  である各整数  $k$  に対し

$$\zeta(s) = I(s) + \text{II}_k(s) + \text{III}_k(s)$$

は、 $\operatorname{Re}(s) > -k - 1$  において、 $s = 1$  の一点のみを除き、正則な関数として解析接続される。 $k$  は好きに取れるので、結局  $\zeta(s)$  は  $s = 1$  を除いた複素平面全体に解析接続される。

### 7.4.3 特殊値表示

上の  $\zeta(s)$  の解析接続の式から、次の特殊値表示も得られる。

**特殊値表示（負の整数）.**  $k \geq 0$  である整数  $k$  に対し

$$\zeta(-k) = (-1)^k \frac{B_{k+1}}{k+1} \quad (7.39)$$

**証明.** 上の  $\zeta(s)$  の解析接続において、 $I(s)$  と  $II(s)$  の積分はともに有限であり、 $\frac{1}{\Gamma(s)}$  は  $s = -k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) に零点を持つので

$$I(-k) = 0, \quad II_k(-k) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

となる。また、 $III_k(s)$  は

$$\begin{aligned} III_k(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{\ell=0}^{k+1} \frac{B_\ell}{\ell!} \cdot \frac{1}{s+\ell-1} \\ &= \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{1}{(s+k)\Gamma(s)} + \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{\ell=0}^k \frac{B_\ell}{\ell!} \cdot \frac{1}{s+\ell-1} \\ &= \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{s(s+1)\cdots(s+k-1)}{\Gamma(s+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{\ell=0}^k \frac{B_\ell}{\ell!} \cdot \frac{1}{s+\ell-1} \\ &\quad (\because \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) を k+1 回用いた) \end{aligned}$$

となるので、 $s = -k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) として

$$\begin{aligned} III_k(-k) &= \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{(-k)(-k+1)\cdots(-1)}{\Gamma(1)} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(-k)} \sum_{\ell=0}^k \frac{B_\ell}{\ell!} \cdot \frac{1}{-k+\ell-1} \\ &= \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} \cdot (-1)^k \frac{k!}{\Gamma(1)} + 0 \\ &= (-1)^k \frac{B_{k+1}}{k+1} \end{aligned}$$

となる。よって、 $k \geq 0$  である整数  $k$  に対し

$$\begin{aligned}\zeta(-k) &= \text{I}(-k) + \text{II}_k(-k) + \text{III}_k(-k) \\ &= 0 + 0 + (-1)^k \frac{B_{k+1}}{k+1} \\ &= (-1)^k \frac{B_{k+1}}{k+1}.\end{aligned}$$

□

**特殊値表示（正の偶数）。**  $k \geq 0$  である整数  $k$  に対し

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{2k+1} (2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!} \quad (7.40)$$

**証明。** サイン関数の無限積展開 (7.22)

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2} \right)$$

において、 $z =: \frac{u}{2i}$  とおき、両辺を対数微分する。まず左辺は

$$(\text{左辺}) = \sin \frac{u}{2i} = \frac{e^{\frac{u}{2}} - e^{-\frac{u}{2}}}{2i} = \frac{e^{\frac{u}{2}} (1 - e^{-u})}{2i}$$

であるから

$$\begin{aligned}\frac{d}{du} \log (\text{左辺}) &= \frac{d}{du} \left[ \frac{u}{2} + \log (1 - e^{-u}) - \log 2i \right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^u - 1}\end{aligned}$$

となる。また、右辺は

$$(\text{右辺}) = \frac{u}{2i} \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{u^2}{4\pi^2 n^2} \right) = \frac{u}{2i} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi^2 n^2 + u^2}{4\pi^2 n^2}$$

であるから

$$\begin{aligned}\frac{d}{du} \log (\text{右辺}) &= \frac{d}{du} \left[ \log u - \log 2i + \sum_{n=1}^{\infty} \log (4\pi^2 n^2 + u^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \log 4\pi^2 n^2 \right] \\ &= \frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2u}{4\pi^2 n^2 + u^2}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2u}{4\pi^2 n^2 + u^2}.$$

ここで左辺は、ベルヌーイ数の定義(7.36)

$$\frac{u}{e^u - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} u^k$$

と、 $B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}$ であることを用いて

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{u} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} u^k - \frac{1}{u} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{u} (B_0 + B_1 u) + \frac{1}{u} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_k}{k!} u^k - \frac{1}{u} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{u} \left(1 - \frac{u}{2}\right) + \frac{1}{u} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_k}{k!} u^k - \frac{1}{u} \\ &= \frac{1}{u} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_k}{k!} u^k \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_k}{k!} u^k &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2u^2}{4\pi^2 n^2 + u^2} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{u}{2\pi n}\right)^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{u}{2\pi n}\right)^2} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{u}{2\pi n}\right)^2 \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{u}{2\pi n}\right)^{2r} \\ &= 2 \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{u}{2\pi n}\right)^{2r+2} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{u}{2\pi n}\right)^{2k} \quad (k := r+1) \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k) u^{2k}. \end{aligned}$$

両辺を  $u$  のべき乗として比較すると、右辺は偶数次の項からなるので、 $k$  が 3 以上のとき  $B_k = 0$  であることがわかる。また、 $u^{2k}$  の係数を比較することで

$$\frac{B_{2k}}{(2k)!} = 2 \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k)$$

となり、整理すれば結論を得る。  $\square$

上の証明から次のことも得られた。

**定理.**  $k$  が 3 以上の奇数のとき  $B_k = 0$  である。

#### 7.4.4 $\zeta(s)$ の零点と非零領域

(7.39) と、ベルヌーイ数  $B_k$  は  $k$  が 3 以上の奇数のとき  $B_k = 0$  であることから、 $\zeta(s)$  は  $s$  が負の偶数のとき零点を持つことがわかる。これらの零点はゼータ関数の**自明な零点**と呼ばれる。

$$\zeta(-2n) = 0 \quad (n \geq 1, n \in \mathbb{Z}).$$

自明な零点以外にも  $\zeta(s) = 0$  となるような複素数  $s$  は存在するのだが、それらはゼータ関数の**非自明な零点**と呼ばれ、存在分布の規則性は未だにわかっていない。しかしこれから示すことによって、 $\zeta(s)$  の非自明な零点が存在する領域をある程度絞ることができる。

**定理.**  $\zeta(s)$  は絶対収束域で非零である。すなわち、 $\operatorname{Re}(s) > 1$  なる領域で  $\zeta(s) \neq 0$  である。

**証明.** 第 7.1.1 節で示したように、ゼータ関数  $\zeta(s)$  は次のようにかける（オイラー積表示）。

$$\zeta(s) = \prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}. \quad (7.41)$$

無限積が収束すればその値は非零なので<sup>\*8</sup>、(7.41) の右辺の無限積が  $\operatorname{Re}(s) > 1$  で収束することを示せばよい。 $\operatorname{Re}(s) \equiv \sigma$  とすれば

$$\sum_{p:\text{素数}} \left| \frac{1}{p^s} \right| = \sum_{p:\text{素数}} \frac{1}{p^\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}$$

であり、最右辺は  $\sigma > 1$  すなわち  $\operatorname{Re}(s) > 1$  で収束するので、(7.41) の右辺は  $\operatorname{Re}(s) > 1$  で絶対収束する。よって、 $\operatorname{Re}(s) > 1$  において  $\zeta(s) \neq 0$  である。  $\square$

上では  $\operatorname{Re}(s) > 1$  において  $\zeta(s) \neq 0$  であることを見たが、さらに境界  $\operatorname{Re}(s) = 1$  においても  $\zeta(s) \neq 0$  であることが知られている。さらに、ゼータ関数のオイラー積表示

<sup>\*8</sup> 第 7.2.2 節を参照

(7.41) は境界  $\operatorname{Re}(s) = 1$  ( $s \neq 0$ )において（絶対収束とは限らない普通の）収束することも知られている。すなわち、この境界上では  $\zeta(s)$  が単に非零であるだけでなく、オイラー積表示が収束するような非零となっている。また、オイラー積表示の収束領域はこの境界以上には広がらないことも知られている。

証明は省略するが、このことを改めて定理として書いておく。

**定理.** 境界  $\operatorname{Re}(s) = 1$  ( $s \neq 0$ ) で  $\zeta(s) \neq 0$  である。

**証明.** 省略 (ToT) □

最後に、完備ゼータ関数というものを定義すると、以下のような美しい関数等式が成り立つことを紹介しておく。

**定理 (関数等式).** 完備ゼータ関数を

$$\widehat{\zeta}(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) \quad (7.42)$$

とおくと、関数等式

$$\widehat{\zeta}(s) = \widehat{\zeta}(1-s) \quad (7.43)$$

が成り立つ。

**証明.** 省略 (ToT) □

先ほど示した  $\zeta(s)$  が  $\operatorname{Re}(s) \geq 1$  で非零であることと、この関数等式を使うことで、 $\zeta(s)$  は自明な零点 ( $s = -2, -4, -6, \dots$ ) を除き、 $\operatorname{Re}(s) \leq 0$  においても非零であることがわかる。つまり、 $\zeta(s)$  は自明な零点を除いた  $\operatorname{Re}(s) \leq 0$  および  $1 \leq \operatorname{Re}(s)$  の領域では非零である。

#### 7.4.5 リーマン予想

ここでようやく本題のリーマン予想の話に入る。ゼータ関数とお友達になった今の私たちには、リーマンの主張をすぐに理解することができる。それは次のようにある。

**命題 (リーマン予想).** ゼータ関数  $\zeta(s)$  のすべての非自明な零点は、 $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$  の直線上にある。

前節で述べたように、 $\zeta(s)$  は自明な零点を除いた  $\operatorname{Re}(s) \leq 0$  および  $1 \leq \operatorname{Re}(s)$  の

領域では非零である。よって、もし非自明な零点が存在するならば、それらはすべて  $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$  の領域にあることがわかる。リーマンの主張は零点の存在領域がさらに  $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$  にまで狭められるというのだ。しかし、リーマンの予想が発表されてから 150 年以上経った現在においても、零点の収束領域を  $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$  よりさらに狭めることに成功した人は存在しない。

主張がシンプルな割に 150 年以上も解かれていないというこのツンデレな予想は、クレイ数学研究所のミレニアム懸賞問題にもなっている。つまりこれを解けば（肯定的な証明を与えれば）懸賞金 100 万ドル (= iPnone XS 1000 個分) が貰えるのである！ ただし反例を見つけて予想を否定したのでは懸賞金は貰えないらしいので、今すぐ PC を起動して数値計算してやろうとしている人は一旦落ち着こう。

また、非自明な零点は何個ぐらいあるのか気になるところであるが、これは既に  $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$  の領域に無限個存在することが証明されている。 $N(T)$  を  $\zeta(s)$  の零点で

$$0 < \operatorname{Re}(s) < 1, \quad 0 < \operatorname{Im}(s) \leq T$$

を満たすものの個数とすると、次の定理が成り立つ。

**定理 ( $N(T)$  の挙動).**

$$N(T) = \frac{T \log T}{2\pi} - \frac{1 + \log 2\pi}{2\pi} + \mathcal{O}(\log T) \quad (T \rightarrow \infty) \quad (7.44)$$

**証明.** 省略 (ToT) □

この定理から  $N(T)$  の主要項のオーダーは  $T \log T$  であり、これは  $T \rightarrow \infty$  のとき  $\infty$  の発散するので、非自明な零点は無限個存在することがわかる。

#### 7.4.6 素数定理

偉い人たちがゼータ関数の非自明な零点にこだわるのには理由がある。それはみんな大好き素数の話と関係がある。まずは素数階段というものを作ってみよう。次の図 7.7 のように素数が来るたびに 1 だけ上がる関数<sup>\*9</sup>である。

---

<sup>\*9</sup> 素数の点  $x = x_p$  で  $\pi(x)$  を垂直に上げてしまうと（一価）関数にならないので、その点では不連続に

$$\pi(x_p) := \frac{1}{2} [\pi(x_p - 0) + \pi(x_p + 0)]$$

の値を取るとする。

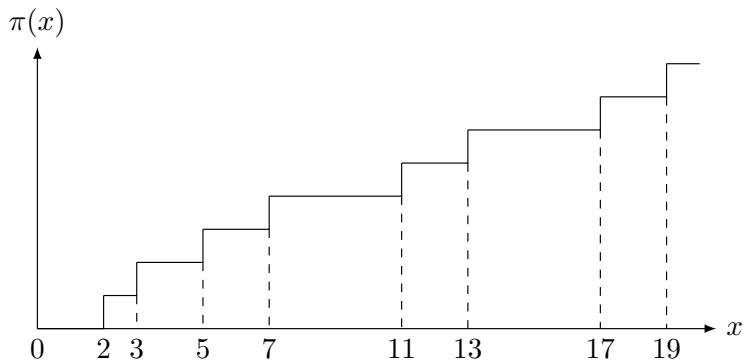


図 7.7 素数階段

この関数を  $\pi(x)$  と書く。素数は英語で prime number というので、その頭文字 p に対応するギリシャ文字  $\pi$  という名前が付けられている。円周率とは関係ない。

$\pi(x)$  には  $x$  以下の素数の個数という意味がある。つまり  $\pi(x)$  を具体的な  $x$  の式として表すことができれば、素数の分布が正確にわかることになる。果たしてそのようなことができるのであろうか。まずは近似式<sup>\*10</sup>として、以下の定理を与える。

**定理 (素数公式).**  $\pi(x)$  について、以下の近似式が成り立つ。

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \sim \text{li}(x) \quad (x \rightarrow \infty). \quad (7.45)$$

ここで  $\text{li}(x)$  は次式で定義される対数積分関数である。

$$\text{li}(x) := \int_2^x \frac{du}{\log u}. \quad (7.46)$$

**注意.**  $x/\log x$  より  $\text{li}(x)$  の方が近似の精度がよいことが示されている。

**証明.** 省略 (ToT) □

\*10 ここでは近似記号 “ $\sim$ ” (ニヨロ) は

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \rightarrow \infty) \iff \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

と定義されているとする。

**定理（明示公式）.**  $\pi(x)$  について、以下の等式が成り立つ。

$$\pi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m} \left( \text{Li}(x^{\frac{1}{m}}) - \sum_{\zeta(\rho)=0} \text{Li}(x^{\frac{\rho}{m}}) - \log 2 + \int_{x^{\frac{1}{m}}}^{\infty} \frac{du}{(u^2 - 1)u \log u} \right).$$

**注意.** 上の定理において、 $\text{Li}(x)$  は

$$\text{Li}(x) := \int_0^x \frac{du}{\log u} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left( \int_0^{1-\epsilon} \frac{du}{\log u} + \int_{1+\epsilon}^x \frac{du}{\log u} \right)$$

で定義される対数積分であり、 $\rho$  は  $\zeta(s)$  の非自明な零点を表す。また、 $\mu(m)$  はメビウス関数と呼ばれ

$$\mu(m) := \begin{cases} +1 & (m \text{ が偶数個の相違なる素数の積}) \\ -1 & (m \text{ が奇数個の相違なる素数の積}) \\ 0 & (m \text{ が素数の平方で割れる}) \end{cases}$$

と定義されている。具体的には

$m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu(m)$	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1

のようである。

**証明.** 省略 (ToT) □

この定理は  $\pi(x)$  に厳密に等しい式を与えている。そしてそこにゼータ関数の非自明な零点が絡んでいる!!!! しかし、 $\pi(x)$  の式が与えられたといつても、無限級数や広義積分が使われているため、数値計算で厳密に  $\pi(x)$  を知ることはできない。さらにゼータ関数の零点も無限個あるのでなおさらだ。こんな式は使わないで、普通に素数判定プログラム作った方が早そう……。

#### 7.4.7 リーマン予想と RSA 暗号

某公共放送局の某番組でそのように伝えられてしまったが故かは知らないが、リーマン予想が証明されると RSA 暗号（現在一般的な暗号方式）が無意味になってしまうなどと、いくらかの人がそういう心配をしているのをたまに見かける。結論から言えばそんなことはない。

RSA 暗号は、簡単というかテキトーに言うと、デカイ素数の積（公開鍵）をその約数であるデカイ素数（秘密鍵）を用いて因数分解することで暗号を復元している。これがなぜ暗号として機能するかというと、デカイ数の因数分解は短時間（例えば数ヶ月）では計算できないからである。素因数分解のアルゴリズムはいろいろあるが、わざわざそれに前節に書いた  $\pi(x)$  の公式を使って素数判定するのは賢くない。 $\zeta(s)$  の非自明な零点が  $\text{Re}(s) = \frac{1}{2}$  にしかないということがわかれば、確かに非自明な零点を探すのは楽になるがそれだけである。

例え暗号方式などについて全くの無知であっても、リーマン予想が解かれることで現在使われている暗号が無意味になってしまうという主張は正しくないことがわかる。もしリーマン予想が暗号解読に繋がるのならば、仮にそれが真であると仮定してしまえば暗号は解読できることになってしまう。リーマン予想は広く知られているのに、現在も RSA 暗号が使われていることから、リーマン予想は暗号解読に影響しないことがわかる。よって、リーマン予想が証明されたところで世の中は大して変わらない。数学界については知らないが。

暗号解読に関係するのはむしろ、 $P \neq NP$  予想と呼ばれる問題の方である。こちらもミレニアム懸賞問題になっている。よくわからんが、現在では因数分解を多項式時間で行うアルゴリズムは見つかっていないが、もし  $P = NP$  が証明されてしまうと、多項式時間で因数分解ができるアルゴリズムが存在することになってしまうらしい。そもそもそのアルゴリズムが発見されると、今度こそ RSA 暗号が簡単に解読することができてしまうのかな？ ただし、 $P \neq NP$  予想という名前からわかるように、 $P \neq NP$  であるだろうと多くの人が考えているらしい。

#### 7.4.8 数値計算（ギャラリー）

最後に付録として、 $\Gamma(s)$  や  $\zeta(s)$ 、素数公式の様子などを Fortran で数値計算し、Gnuplot と Ti<sub>k</sub>Z を用いて<sup>\*11</sup> 美しい（？）図を作成したので、それらをいくつか載せておく。クリティカルライン  $\text{Re}(s) = \frac{1}{2}$  上の  $\zeta(s)$  も計算したので是非参照されたい。

---

<sup>\*11</sup> Gnuplot で pdf を直接出力しても十分美しいグラフを作成できるが、Gnuplot の出力先を Ti<sub>k</sub>Z に変更し (`set terminal tikz`)、L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X を経由してグラフを作成した方がより美しいものが得られる。その際には、L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 側でプリアンブルに `\usepackage{gnuplot-lua-tikz}` と記し、`\input` コマンドで Gnuplot が吐いた tex ファイルを読み込むだけでよい。ただし、Gnuplot から `gnuplot-lua-tikz.sty` を生成しておく必要がある。

### ガンマ関数 $\Gamma(s)$

まずは、相反公式を変形した

$$\Gamma(s) = \frac{\pi}{\Gamma(1-s) \sin \pi s} \quad (7.47)$$

によって複素数全体へと解析接続されたガンマ関数  $\Gamma(s)$  のグラフを紹介する。ガンマ関数の性質

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad (7.48)$$

を用いて計算するより、(7.47) を用いた方が多少精度が良かった。とはいえる、図 7.8 を見ればわかりやすいが、 $s$  が  $-4$  より小さいところでは無限大に発散する様子が上手く描かれていない。教科書に載っているような美しい図を描くのはなかなか難しそうである。素人のプログラムではこれが限界だったので堪忍していただきたい。

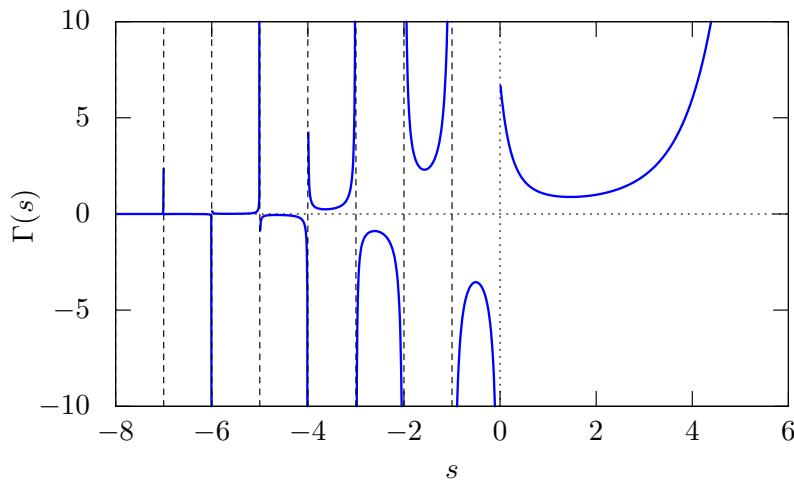
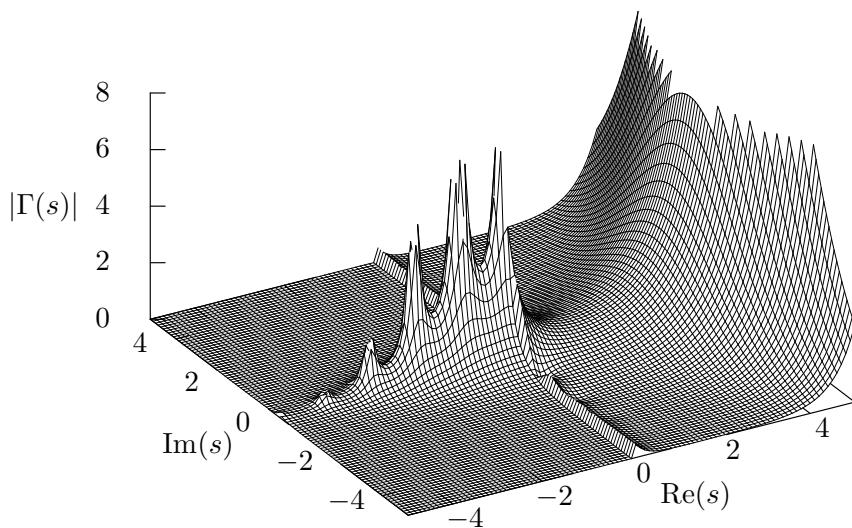


図 7.8 解析接続した  $\Gamma(s)$ 。 $s$  および  $\Gamma(s)$  は実数。

図 7.9 は  $x, y$  軸に引数  $s$  の実部と虚部を表し、 $z$  軸に  $\Gamma(s)$  の絶対値を表している。虚軸付近に小さな山が見えるが、これは計算精度のせいで生じてしまったものであり、実際は存在しないらしい。ガンマ関数を数値計算するときは Lanczos 近似というものを使うのが良いらしいが、ここでは深入りしない。

図 7.9  $|\Gamma(s)|$  の値。3 次元プロット。

### 素数階段と素数公式

次に、素数公式

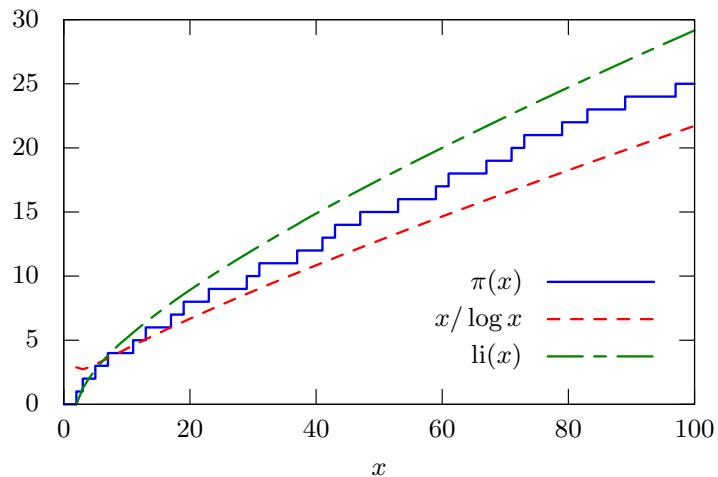
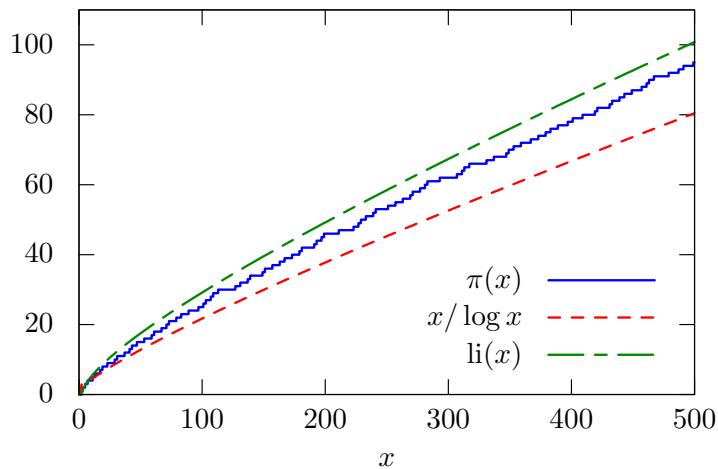
$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \sim \text{li}(x) \quad (x \rightarrow \infty) \quad (7.49)$$

の様子を図にした。図 7.10, 7.11 を見ると、確かに素数公式は正しいようであることがわかる。また、 $x$  がある程度大きいところでは、常に  $x/\log x < \pi(x) < \text{li}(x)$  の関係があることがわかる。

明示公式の方については、式を見るだけで非常に面倒臭いことを悟ってしまったので、今回はパスすることにした。tsujimotter さん<sup>\*12</sup> が明示公式が  $\pi(x)$  に収束する様子を体感できるブラウザアプリを公開していたので、是非そちら<sup>\*13</sup> で確認していただきたい。

<sup>\*12</sup> <http://tsujimotter.hatenablog.com/about>

<sup>\*13</sup> こちら：「リーマンの素数公式を可視化する」<http://tsujimotter.hatenablog.com/entry/2014/06/29/002109>

図 7.10  $\pi(x)$  とその近似式。 $x \leq 100$ 。図 7.11  $\pi(x)$  とその近似式。 $x \leq 500$ 。

### ゼータ関数 $\zeta(s)$

初めに  $s > 1$  について級数で定義したゼータ関数 (7.2) の様子を見てみる。当然無限回足しあげるのは不可能なので、第  $N$  項までで切り上げることにする。

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s}.$$

図 7.12 を見ればわかるように、この級数は収束が非常に遅い。 $s \rightarrow 1$  で  $\zeta(s) \rightarrow \infty$  になることは既に示したが、図 7.12 で見られるように、 $N = 10^6 = 1,000,000$  まで足し上げても  $s \rightarrow 1$  で  $\zeta(s)$  は 14 にも満たない。

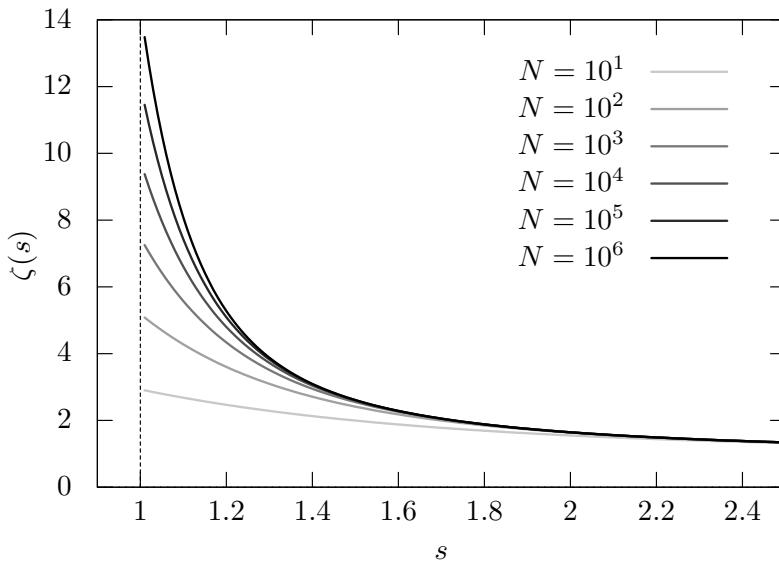


図 7.12 級数表示 (7.2) による  $\zeta(s)$ 。

7.3.2 節の (7.15) で  $\zeta(s)$  を解析接続した際にも、 $s = 1 + \varepsilon$  における収束性の悪さが、 $\operatorname{Re}(s)$  が 1 以下の領域にも影響してくる。実際、この解析接続で  $\zeta(s)$  の値を計算してみたが、やはり上手くいかなかった。

そこで、本文中では証明を与えていないが、tsujimotter さんなどいくつかのサイトで紹介されている次の式で  $\zeta(s)$  を  $s = 1$  を除く複素数全体へ解析接続する。

$$\zeta(s) := \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} \binom{m-1}{j-1} j^{-s}. \quad (7.50)$$

この解析接続の証明はせきゅーんさん<sup>\*14</sup> の記事「リーマンゼータ関数の級数表示による解析接続 (<http://integers.hatenablog.com/entry/2016/08/16/133319>)」で紹介されている。今回はこの式を使わせていただいて、 $\zeta(s)$  の数値計算をしてみようと思う。

まずは実軸上の値を計算し、 $s > 1$  ではちゃんと解析接続する前の  $\zeta(s)$  と一致していることを確認する。

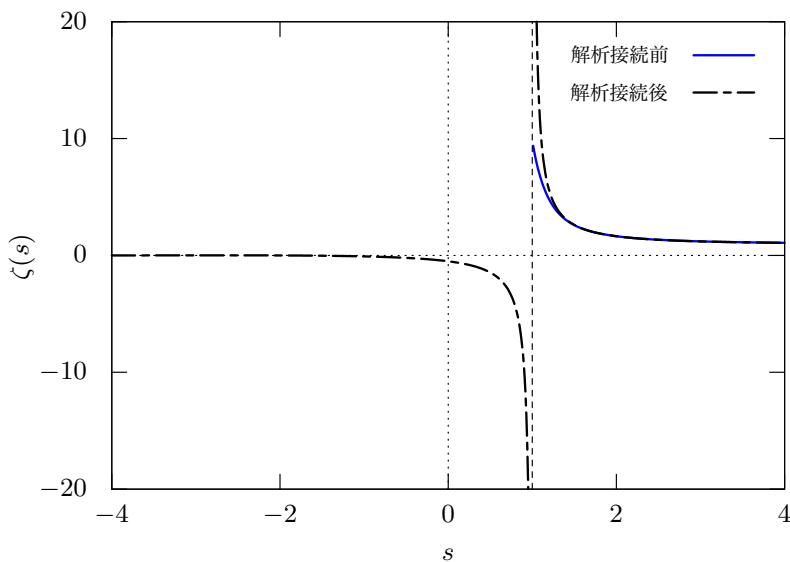


図 7.13 解析接続した  $\zeta(s)$ 。 $s$  は実数。

図 7.13 からわかるように、(7.50) で解析接続した  $\zeta(s)$  は  $s > 1$  でちゃんと解析接続前と一致するどころか、解析接続前のものより収束が速くなっている。この図を描くとき外側の級数は  $m = 10$  までしか足し上げていない。それでこんなに収束が速くなるので驚きだ。

この式を信用してもらえたところで、次は実軸上の自明な零点について見てみる。 $s < 0$  での振動は非常に小さく、図 7.13 では零点があるのかよくわからないのでもう少し拡大してみる。

---

<sup>\*14</sup> <http://integers.hatenablog.com/about>

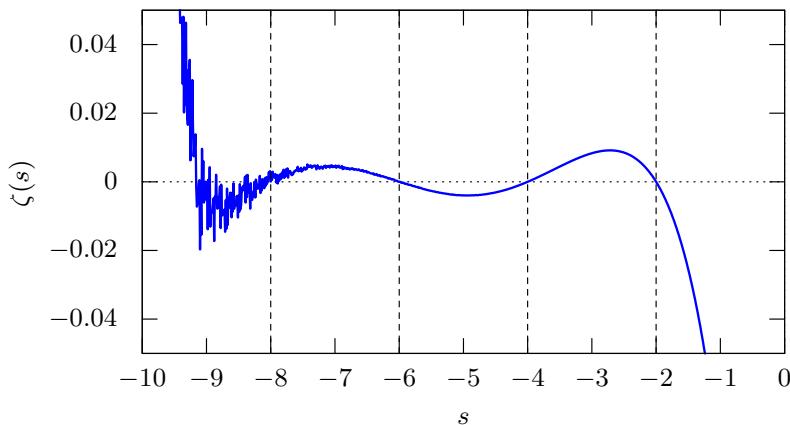
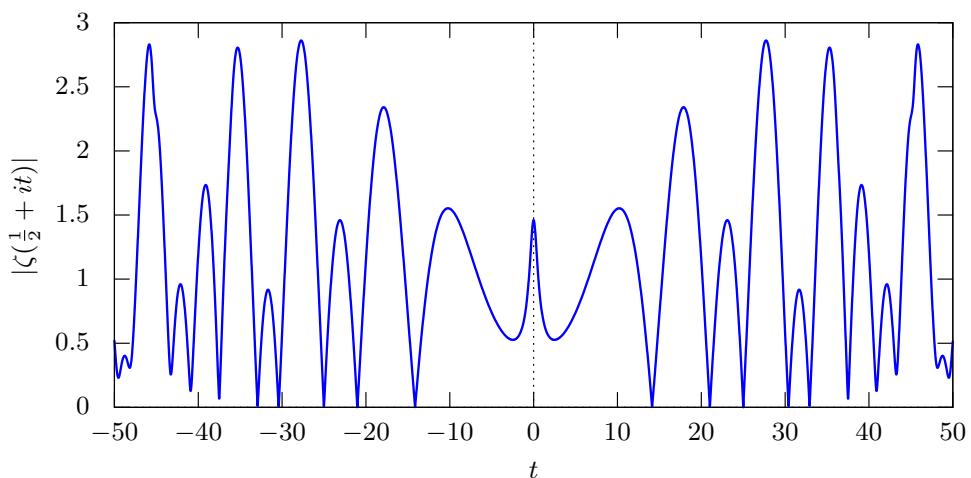
図 7.14 解析接続した  $\zeta(s)$  の自明な零点。

図 7.14 から確かに  $\zeta(s)$  は  $s$  が負の偶数に零点を持っていることがわかる。しかし私のチーププログラムでは  $s = -8$  ぐらいまでが限界で、それより小さいところの様子はわからない。こちらも  $\zeta(s)$  の値を計算するとき外側の級数は  $m = 10$  までにしてある。 $m$  の上限をあげると精度が増すはずなのだが、あまりそれをしてしまうと二項係数の部分がオーバーフローしてしまい、誤のわからないことになってしまう（これで 5 時間ほど無駄にした）。とりあえず自明な零点についてはこれで妥協していただきたい。

図 7.15 解析接続した  $\zeta(s)$  の非自明な零点。

次に本題である  $\zeta(s)$  の非自明な零点について見てみる（図 7.15）。リーマンによって  $\zeta(s)$  の非自明な零点は全て  $s = \frac{1}{2} + it$  上にあるだろうと予想されている。この直線はクリティカルラインと呼ばれている。

複素変数の複素関数を 2 次元や 3 次元にプロットするのは困難なので、以降  $\zeta(s)$  の値は絶対値を取ることにする。図 7.15 が左右対称になっているのはそのためである<sup>\*15</sup>。

先人たちによって既に知られている非自明な零点の虚部を、原点に近い順に書いてみると、以下の表のようである<sup>\*16</sup>。ただし虚部が負の部分は省略している。

表 7.1  $\zeta(s)$  の非自明な零点

番号	虚部 $\text{Im}(s) = t$
1	14.1347251417346937904572519835624766
2	21.0220396387715549926284795938969162
3	25.0108575801456887632137909925627734
4	30.4248761258595132103118975305839571
5	32.9350615877391896906623689640747418
6	37.5861781588256712572177634807052984
7	40.9187190121474951873981269146334247
8	43.3270732809149995194961221654068456
9	48.0051508811671597279424727494276636
10	49.7738324776723021819167846785638367

表 7.1 を参照しつつ図 7.15 を見てみると、確かに  $t = 14, 21, 25, 30, 33$  付近に零点があることがわかる。

最後に  $\zeta(s)$  の 3 次元プロットを見て終わりにしよう。図 7.16 は原点周りの  $\zeta(s)$  の全体像である。1 つ目の非自明な零点が見られる。

また、図 7.17 は実軸付近の様子を描いている。自明な零点と  $s = 1$  で発散する点が見られる。ただし自明な零点の凹凸は非常に小さいため、 $|\zeta(s)|$  の値は対数表示している。

\*15 一般に複素数  $z$  について、実数  $x, y$  を用いて  $z = x + iy$  と書けたとすると、 $|z| \equiv \sqrt{zz}$  であるから、 $|\bar{z}| = \sqrt{\bar{z}\bar{z}} = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{zz} = |z|$  となり、 $|z| = |\bar{z}|$  すなわち  $|x + iy| = |x - iy|$  であるので、複素数の絶対値は虚部について反転対称性がある。

\*16 引用元：<http://www.lmfdb.org/zeros/zeta/>

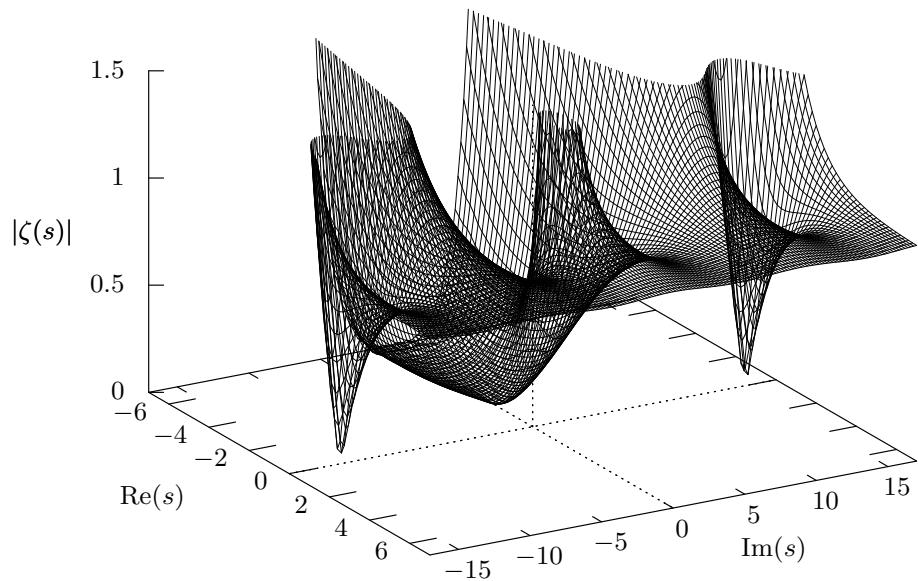
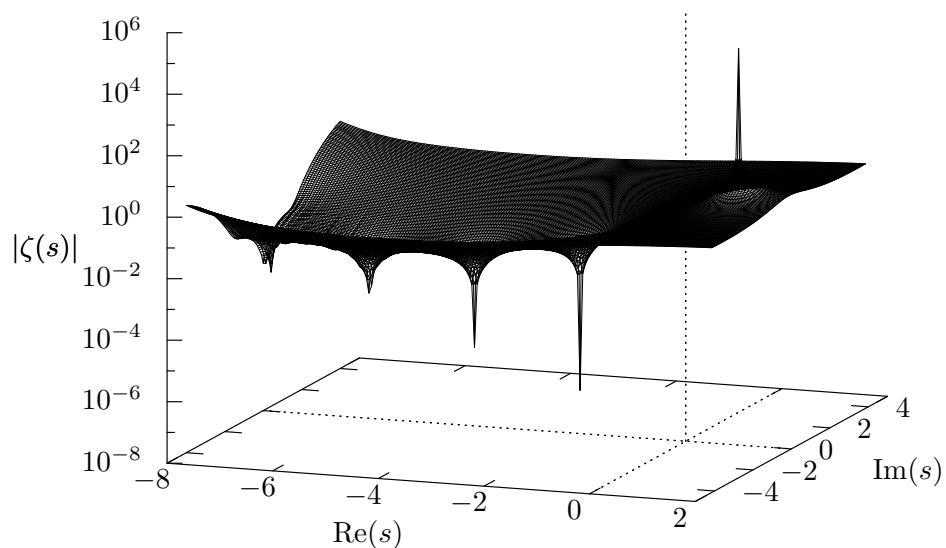
図 7.16  $|\zeta(s)|$  の値。3 次元プロット。図 7.17 実軸付近。 $|\zeta(s)|$  の自明な零点が見られる。

図 7.18 はクリティカルライン  $s = \frac{1}{2} + it$  付近の  $|\zeta(s)|$  の値を描いている。一体どういう規則で非自明な零点は現れるのであろうか。

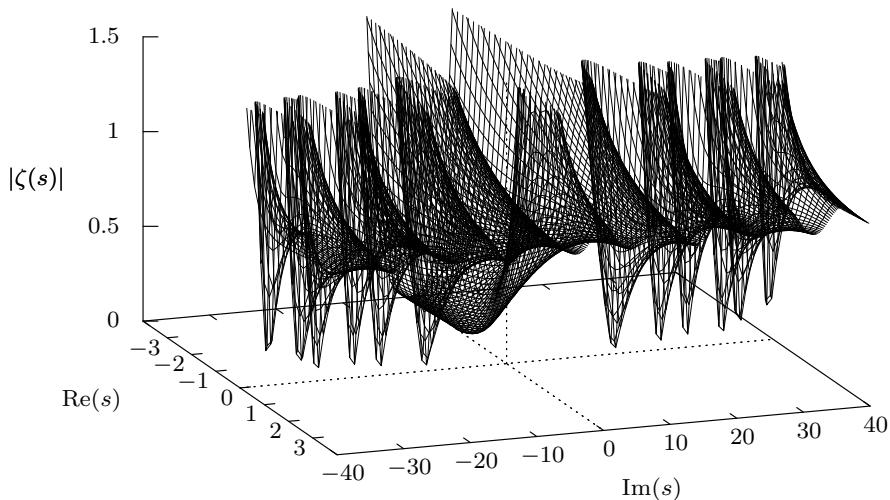


図 7.18 クリティカルライン付近。 $|\zeta(s)|$  の非自明な零点が見られる。

## おわりに

今回配布する会誌では予算の都合上、図などがモノクロ印刷となってしまい大変見にくくいものであるかと思いますが、うちの研究会のホームページ <http://rp2017xy.starfree.jp/> に会誌を PDF でアップロードする予定なので、フルカラーなキレイな図を見たい方は是非そちらも確認していただきたい。以上、お疲れ様でした。

T H E E N D

T H A N K Y O U F O R R E A D I N G

## 参考文献

### 書籍

- [1] 小山信也; 素数とゼータ関数; 共立出版社; 2016.
- [2] 森正武, 杉原正顯; 複素関数論; 岩波書店; 2003.
- [3] 野村隆昭; 複素関数論講義; 共立出版; 2016.
- [4] 福山秀敏, 小形正男; 基礎物理学シリーズ 3 物理数学 I; 朝倉書店; 2015.
- [5] ハロルド・M・エドワーズ 著, 鈴木治郎 訳; 明解 ゼータ関数とリーマン予想; 講談社; 2012.

### Web サイト

- [1] 全ての素数の無限積が  $4\pi^2$  であることの数学的な証明; 2016/04/04.  
<https://www.youtube.com/playlist?list=PL006ccJyFqlHtQQhonFlgactqdunSQ10W>
- [2] のんびり固体物理学; ゼータ関数の導関数の特殊値  $\zeta'(0)$  の導出; 2017/02/12.  
<http://solidstatephysics.blog.fc2.com/blog-entry-24.html>
- [3] INTEGERS; 階乗とガンマ関数; 2015/11/30.  
<http://integers.hatenablog.com/entry/2015/11/30/020829>
- [4] 倭算数理研究所; ベルヌーイ数; 2013/08/23.  
<https://wasan.hatenablog.com/entry/2013/08/23/040806>
- [5] tsujimotter; リーマンの素数公式を可視化する; 2014/06/29.  
<http://tsujimotter.hatenablog.com/entry/2014/06/29/002109>
- [6] LMFDB; Zeros of  $\zeta(s)$ ; 2018/08/16.  
<http://www.lmfdb.org/zeros/zeta/>
- [7] INTEGERS; リーマンゼータ関数の級数表示による解析接続; 2016/08/16.  
<http://integers.hatenablog.com/entry/2016/08/16/133319>
- [8] tsujimotter; リーマンのゼータ関数で遊び倒そう (Ruby 編); 2015/02/11.  
<http://tsujimotter.hatenablog.com/entry/riemann-zeta-function>

## 編集後記

今年は去年の反省を踏まえ、会誌の締め切りを 10 月中に設定していたのに、なぜかまた学園祭前日まで編集作業をしている。というか輪転間に合うのか？<sup>\*17</sup>

前回に続き、今回もまた LATEX によって会誌を作成した。今回は表紙から裏表紙まで全て LATEX で作成してある。各部員の担当分をまとめる際には、\input コマンドの代わりに emath <sup>\*18</sup> の\ReadTeXFile コマンドを使用させていただいた。非常に便利であり感謝している。

今年の会誌は、全体で 100 ページを超えることを目標にし、一人 20 ページ以上というノルマを課していたが、結果として無事 100 ページ超えを達成することができた。皆さんお疲れ様でした。

まあ皆さん頑張って LATEX で書いて提出してくれたのはいいのだが、何度言つても数式に全角アルファベットを使ったり、単位をイタリック体にしてたりしてきて大変だった。あと個人的には今回初めて TikZ の環境を使ってお絵かきしてみたのだが、かなり満足のいくものができたよかったです。皆さんもパワポ卒業しましょう。

もうあと少しで平成は終わってしまうが、とりあえず大阪万博が今日決まったのでよかったです。平成が終わると私はもう卒研生なので、平成のうちに量子力学を完全に理解できるよう頑張りたいと思います。皆さんも残り少ない平成の時代を充実した日々で送れるよう頑張りましょう。

あと立命は来年の 10 連休ないらしいです。

### P.S. 部員へ

来年度は週 4 で LATEX ゼミやります。残りの 3 日は Markdown ゼミです。

2018 年 11 月 24 日  
物理科学科 3 回生 中山敦貴

---

<sup>\*17</sup>間に合いませんでした。

<sup>\*18</sup> 大熊一弘, <http://emath.la.coocan.jp>

## **物理科学研究会の略歴**

- 1949 年 核物理研究会として発足
- 2000 年 物理科学研究会に改名
- 2016 年 会誌 白夜 第 1 号出版
- 2017 年 OB 会の開催
- 2018 年 会誌 白夜 第 3 号出版
- 2019 年 部員が足りず廃部の危機！？

## **平成 30 年度 物理科学研究会誌 白夜 第 3 号**

---

2018 年 11 月 25 日 初版発行

2018 年 11 月 30 日 第 2 版発行

**著者：**立命館大学 物理科学研究会

〒525-8577 滋賀県草津市野路東 1 丁目 1-1

立命館大学 BKC アクト  $\alpha$

メール： vuccaken@gmail.com

ホームページ： rp2017xy.starfree.jp

Twitter： @vuccaken

**表紙イラスト：**阿部龍幸

**裏表紙イラスト：**西村宗悟

**装丁：**中山敦貴

---





vuccaken

2018

