

第1章

ゼータランドシガ

物理科学科 3 回生

中山敦貴

はじめに

YouTube で「全ての素数の無限積が $4\pi^2$ であることの数学的な証明」^{*1} なる動画を見つけた。この動画では、無限大に発散してしまうであろう全ての素数の無限積が、なんと有限の値 $4\pi^2$ に等しくなるという主張をするものであった。しかし、この動画の中での説明では、ゼータ関数の特殊値というものを証明抜きで用いており、それでは納得がいかないので自分で色々と調べてみた。すると、ゼータ関数の解析接続やらで複素解析の知識が必要だったり結構奥が深いものだったので、まとめるついでに会誌にした。また、ゼータ関数といえばリーマンであり、リーマンといえばリーマン予想である。せっかくゼータ関数を解析接続するのであるから、ついでにリーマン予想の話も軽くすることにする。

1.1 節では、動画の内容と同じく、ゼータ関数の特殊値を用いることで

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \cdots = 4\pi^2$$

という謎の数式が成立してしまうことを示す。ここまでの内容は、上記動画で既に説明されている。1.2 節で複素解析について復習し、1.3 節で実際にゼータ関数の解析接続を行い特殊値を計算する。そして 1.4 節にて数学界の未解決問題として有名なリーマン予想をついでに紹介し、最後にゼータ関数の値を数値計算した美しい(?) グラフをいくつか載せることにする。

^{*1} <https://www.youtube.com/playlist?list=PL006ccJyFq1HtQQhonFlgactqdunSQ10W>

1.1 「 $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \cdots = 4\pi^2$ 」 ???

タイトルにもあるように、このセクションでは謎の数式

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \cdots = 4\pi^2 \quad (1.1)$$

の証明(?)を試みる。

(1.1) 式の左辺は素数の無限積であり、素数が無限個あることから明らかに無限大に発散する。しかし右辺を見るとなぜか $4\pi^2$ という有限値をとっている。これは謎の数式というか、ただ自明に偽な数式である。しかしこれから見ていくように、何故かこの数式が成り立ってしまう。これ以上この数式を眺めていても気持ちが悪くなるだけなので、早速話を進めていこう。

まずはリーマンのゼータ関数 $\zeta(s)$ というものを定義しよう。

1.1.1 リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$

定義&命題 (リーマンゼータ関数). 実数 s について、無限級数によって定義された関数

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \equiv \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots \quad (1.2)$$

は、 $s > 1$ のとき収束し、 $s \leq 1$ で発散する。また、 $\zeta(s)$ はリーマンゼータ関数と呼ばれる。

証明. まず、 $s > 1$ において $\zeta(s)$ が収束することを示す。 $s > 1$ のとき、図 1.1 において、短冊の面積の和は $\zeta(s)$ の値に等しい。よって以下の不等式が成立する。

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s}$$

$s > 1$ であることに注意して積分を計算すると

$$\begin{aligned} 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} &= 1 + \left[\frac{s^{1-s}}{1-s} \right]_1^{\infty} \\ &= 1 + \frac{1}{1-s} \end{aligned}$$

と有限の値となるので、 $s > 1$ のとき $\zeta(s)$ は収束する。

また、 $s \leq 1$ では $\zeta(s)$ が発散することも確認しておこう。図 1.2 において、短冊の面積の和は $\zeta(1)$ の値に等しく、以下の不等式が成立する。

$$\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} > \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = [\log x]_1^{\infty} = \infty$$

よって $\zeta(1)$ は発散する。 $s \leq 1$ のとき $\zeta(s)$ は単調減少関数であるから、 $\zeta(s) \geq \zeta(1) = \infty$ であり、 $s \leq 1$ のとき $\zeta(s)$ は発散する。□

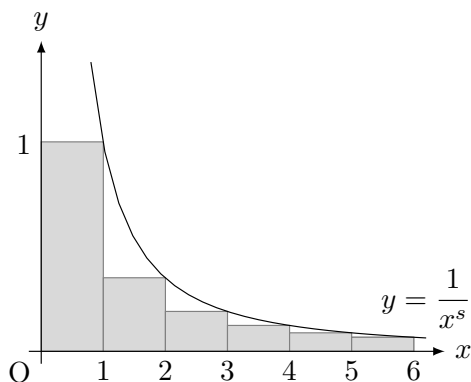


図 1.1 短冊の面積は $\zeta(s)$ の値に等しい。

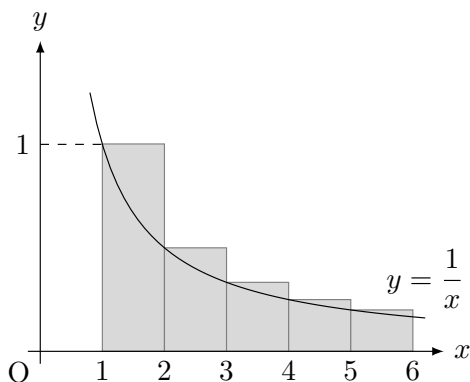


図 1.2 短冊の面積は $\zeta(1)$ の値に等しい。

ここで $\zeta(s)$ の具体的な値をいくつか見ておこう。証明は省くが、ゼータ関数 $\zeta(s)$ は以下のような値が解析的に求められている。

$$\begin{aligned}\zeta(1) &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty, \\ \zeta(2) &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}, \\ \zeta(3) &= 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots = 1.20205..., \\ \zeta(4) &= 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}.\end{aligned}$$

特に $s = 2$ のときはバーゼル問題^{*2}としてよく知られている。また $\zeta(3)$ の値は無理数であることがアペリーによって証明されている。さらに s が偶数のとき $\zeta(s)$ は $\pi^s \times (\text{有理数})$

^{*2} 第 1.3.4 節で紹介する。

数) という形になることが知られている。一体どこから円周率 π が出てくるのであろうか。これについては第 1.4.3 節で説明される。

次に、先ほど定義したゼータ関数が、オイラー積表示と呼ばれる無限積の形に変形できることを示そう。

定理 (オイラー積表示). ゼータ関数は以下のように素数の無限積で表現できる。

$$\zeta(s) = \prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}. \quad (1.3)$$

証明. 素因数分解の一意性と等比級数の公式より

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \\ &= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots \\ &= \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \frac{1}{2^{3s}} + \cdots\right) \\ &\quad \times \left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^{2s}} + \frac{1}{3^{3s}} + \cdots\right) \\ &\quad \times \left(1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{5^{2s}} + \frac{1}{5^{3s}} + \cdots\right) \\ &\quad \times \cdots \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2^s}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{3^s}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{5^s}} \times \cdots \\ &= \prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}. \end{aligned}$$

ただし、無限積の収束性についてはここでは述べない。 □

このオイラーの積表示 (1.3) 式を用いると、次の式が示せる。

定理.

$$\frac{d}{ds} |\zeta(s)| = -|\zeta(s)| \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log p}{p^{ns}} \quad (1.4)$$

証明. まず、 $|x| < 1$ として、等比級数

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

の両辺を積分すると

$$\log |1-x| = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (1.5)$$

となり、 $\log |1-x|$ のテイラー展開が得られる。

オイラーの無限積表示 (1.3) の両辺を絶対値の対数をと、(1.5) を用いると

$$\begin{aligned} \log |\zeta(s)| &= \log \left| \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \right| \\ &= - \sum_p \log \left| 1 - \frac{1}{p^s} \right| \\ &= \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}} \end{aligned}$$

であるから

$$|\zeta(s)| = \exp \left(\sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}} \right)$$

となる。この両辺を s で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} |\zeta(s)| &= \exp \left(\sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}} \right) \cdot \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{p^{ns}} \right) \\ &= |\zeta(s)| \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(-\frac{n \log p}{p^{ns}} \right) \\ &= -|\zeta(s)| \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log p}{p^{ns}} \end{aligned}$$

となる。ただし 2 行目への変形で

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{p^{ns}} \right) &= \frac{d}{ds} e^{\log(p^{-ns})} = \frac{d}{ds} e^{-ns \log p} \\ &= e^{-ns \log p} \cdot (-n \log p) = -\frac{n \log p}{p^{ns}} \end{aligned}$$

であることを用いた。

□

1.1.2 特殊値の代入

ここで (1.4) に $s = 0$ を代入したいのだが、ゼータ関数の定義から明らかなように $\zeta(0)$ は発散する。しかしここで**解析接続**という必殺技を用いることで、無限大に発散してしまう点に有限の値を**一意的**に対応させることができる。この解析接続については次の節で詳しく述べることにして、結果だけ書くと、以下のようなことが言える。

定理 (ゼータ関数の特殊値). 解析接続を行うことでゼータ関数 $\zeta(s)$ の定義域を $s = 1$ を除く複素数全体に拡張でき

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad (1.6)$$

$$\zeta'(0) = -\frac{1}{2} \log 2\pi \quad (1.7)$$

が成り立つ。

今はとりあえずこの事実を受け入れよう。すると、(1.4) に上記の特殊値を用いることで次のことが言える。

定理. 以下の等式が成り立つ。

$$\prod_p p = 4\pi^2. \quad (1.8)$$

証明. (1.4) で $s = 0$ とおくと

$$\begin{aligned} |\zeta'(0)| &= -|\zeta(0)| \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \log p \\ &= -|\zeta(0)| \sum_p \log p \sum_{n=1}^{\infty} 1 \\ &= -|\zeta(0)| \cdot \zeta(0) \sum_p \log p \end{aligned}$$

と書ける。ただし、2 行目において $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$ と発散してしまうところを、形式的に

$$\zeta(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^0} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \text{ が言えることを用いた。}$$

この式にゼータ関数の特殊値 (1.6), (1.7) を代入して

$$\begin{aligned} \left| -\frac{1}{2} \log 2\pi \right| &= -\left| -\frac{1}{2} \right| \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \sum_p \log p \\ 2 \log 2\pi &= \sum_p \log p \\ \log 4\pi^2 &= \log \prod_p p \\ 4\pi^2 &= \prod_p p \end{aligned}$$

となる。

□

これで、謎の数式

$$\prod_p p = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \cdots = 4\pi^2 \quad (1.9)$$

が成り立つことが示された？

いやいや... 途中で出てきた謎の特殊値 $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$, $\zeta'(0) = -\frac{1}{2} \log 2\pi$ なんてものを使ったからこんな変なことになってしまったのだろう。そもそもゼータ関数 $\zeta(s)$ は $s=0$ では定義されていなかった、というか明らかに $\zeta(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty$ と発散してしまうではないか。

しかし上にも書いたように、 $\zeta(s)$ に解析接続という必殺技を用いることで、無限大に発散してしまう点に有限の値を一意的に対応させることができる。これはつまり、 $\zeta(s)$ の定義域を広げることができるということを意味している。(1.2) のように級数で定義されたゼータ関数 $\zeta(s)$ の定義域は、複素数の場合も含めると $\operatorname{Re}(s) > 1$ であることが知られている (後述)。しかし、ゼータ関数 $\zeta(s)$ を解析接続することで、その定義域を実部が 1 でない複素数全体にまで拡張することができるのである！！

解析接続前		解析接続後
$\zeta(s)$	$\xrightarrow{\text{解析接続}}$	$\zeta(s)$
$s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > 1$		$s \in \mathbb{C}, s \neq 1$

次節では、解析接続について簡単に理解してもらうため、実際に幾何級数を解析接続してみせる。

1.1.3 解析接続

高校数学でもよく登場する以下の幾何級数は、 $|x| < 1$ のとき収束し

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

というように右辺の分数の形で書けることは周知の通りである。しかし右辺の $\frac{1}{1-x}$ だけ見ると $x = 1$ のみを除いて有限の値をとるため、誰もが一度は経験したことがあるように、 $|x| < 1$ という条件を忘れて $x = 2$ などを代入してしまうのである。この間違いは本当に正しくないのでしょうか？ 左辺は $|x| < 1$ 以外の点では無限大に発散し、どうせ意味のないものになってしまうのだが、それならいつそ $|x| < 1$ 以外の点では、右辺でもって左辺の級数の値を定義してやるのはどうだろうか？ このアイデアを使うと、 $|x| < 1$ のときにしか定義されなかった左辺の幾何級数を $x = 1$ を除く実数全体において定義することができる！ しかし、関数を定義する時に問題となるのはその一意性である。 $|x| < 1$ の領域において、左辺の幾何級数の値と一致する関数はいくらでも考えられる。

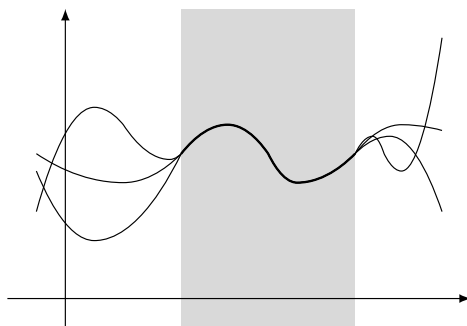


図 1.3 ある領域では一致する関数

ここで、考えるている関数を複素数の範囲まで拡張することにする。定義域を複素数にまで拡張したところで、上図からすぐイメージできるように、ある領域では一致し、その他の領域では一致しないような複素関数はいくらでも存在しう。しかしこの複素関数に正則性（複素関数としての微分可能性）という条件を課すと、ある正則な領域で一致する関数は他の正則な領域においても完全に一致してしまうのである！ この事実は一貫の定理と呼ばれ、関数を解析接続する際にその一意性を保証する重要な定理である。証明はしないが、下に改めて書いておく。

定理 (一致の定理). 領域 $D \in \mathbb{C}$ 上で正則な複素関数 $f(z), g(z)$ が、 D 内の異なる 2 点を結ぶ曲線上で一致すれば、この 2 つの関数は領域 D 全体で恒等的に等しい。

とにかく、正則な領域では一意的に解析接続できる、ということさえわかってもらえればよい。正則関数の性質のひとつである、正則関数はその導関数もまた正則関数となる、ということなどからもわかるように、複素関数にとって微分可能であるということは結構厳しい条件なのである。

結局、解析接続というのは、解析接続される前の定義域では元の関数と一致し、それ以外の領域でも定義されている新しい関数で、元の関数を上書きしてやるということである。ここで、謎の数式についてもう一度考えてみる。

前節で解析接続済みゼータ関数の特殊値を用いて

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \cdots = 4\pi^2$$

という数式を示した。この数式は、次のように解釈するのが正しい。《もしある点 a で、定義はされていないが形式的に左辺のような素数の無限積になってしまう関数があるとする。この関数を解析接続し、先ほど発散してしまった点 a で有限値をとるような関数で上書きできたとすると、その新しい関数は点 a で $4\pi^2$ という値をとる。》これが、この数式が表していることである。

この数式が表していることが、 $2 \times 3, 2 \times 3 \times 5, 2 \times 3 \times 5 \times 7, \cdots$ というように、素数を順番にかけていった部分積が $4\pi^2$ という値に収束する、などということでは決してないことに注意が必要である。左辺の無限積が解析接続される前のものであることを強調するために

$$“2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \cdots” = 4\pi^2$$

というような表記をすることもあつらしい。

ということで、謎の数式と題した、素数の無限積が $4\pi^2$ とイコールで結ばれている謎の式について理解してもらえただろうか？ これを聞いて失望した方もいるかもしれないが、数学がこんな矛盾を孕んでいる方がおそろしいので、これで良しとしよう。

これにてめでたしめでたし... といきたいところだが、暫し待て。この数式を求める際に、ゼータ関数の特殊値というものを聞いたが、この値はどこから出てきたのだろうか。それに、ゼータ関数がどのようにして解析接続されるのか気になる。よって以降のセクションでは、ゼータ関数の特殊値なんてものを認められない人たちのために、実際にゼータ関数を解析接続する様子を示し、その生まれ変わったゼータ関数から実際に特殊値を計算してみることにする。

1.2 複素関数についての一般教養

これからは、定義域や値域を複素数の範囲にまで拡張した複素関数について考えていく。複素関数についても微分や積分を定義できるのだが、実数のときとは少しわけが違う。しかしそのおかげで色々とお利益もある。複素関数の微分可能性は実数の時よりも格段と強い制約となり、一致の定理が使えるまでになる。また、実数の範囲では手も足もでなかった実関数の定積分が、積分路を複素平面にまで延長し、留数という概念を用いることで簡単に計算できるようになることもある。

純粋な数学として非常に興味深い分野というだけでなく、物理などへの応用もかなりあるという、知らないで人生の半分は損してしまうというのが、複素解析学という理論体系である。しかしあくまで今回のメインはゼータ関数であるので、ここでは後で必要になる定理をいくつか述べるに留めておく。証明もいくつかは載せてはいるが、ないものについては参考文献に書いた本などを各自参照していただきたい。

それではまず、基本的な用語から定義していく。

1.2.1 複素関数

定義. 複素平面上のある領域内の任意の z において、複素関数 $f(z)$ が微分可能であるとき、 $f(z)$ はその領域で正則であるという。

また、正則でない点を特異点と呼ぶ。特に $f(z) = \frac{1}{(z-a)^m}$ のような特異点、つまり

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^m f(z)$$

の極限值が存在する特異点を m 位の極と呼び、 m は位数と呼ばれる。1 位の極は単極とも呼ばれる。

定義 (複素線積分). $f(t)$ はある領域 D で定義された連続関数とする。そして C は、 D に含まれる α から β に至る曲線であって、方程式

$$z = \phi(t) \quad (t \in [a, b] \subset \mathbb{R}, \alpha = \phi(a), \beta = \phi(b))$$

で表されているとする。 C が滑らかな曲線の場合、曲線 C に沿う $f(z)$ の積分は、次のように実関数の積分を通じて定義する：

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &:= \int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) dt \\ &\equiv \int_a^b \operatorname{Re}[f(\phi(t)) \phi'(t)] dt + i \int_a^b \operatorname{Im}[f(\phi(t)) \phi'(t)] dt. \end{aligned}$$

注意. 積分路 C が閉曲線るとき

$$\oint_C f(z) dz$$

とも書く。

定理 (ローラン展開). 関数 $f(z)$ が円環領域 $D = \{z \mid R_1 < |z - a| < R_2\}$ ($0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$) において正則ならば、 $f(z)$ は次の形の級数に展開できる。

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad c_n := \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta.$$

この級数は D 内のすべての z に対して収束する。ただし、積分路 C は D 内の任意の単純閉曲線 (= 自分自身と交わらない閉曲線) である。

また、この級数を $f(z)$ の $z = a$ まわりのローラン展開と呼ぶ。

注意. ローラン展開は、テイラー展開の負ベキの項ありバージョンだと思っておけば良い。

定義 (留数). 上のローラン展開において、 c_{-1} すなわち $(z - a)^{-1}$ の係数を $f(z)$ の $z = a$ における留数と呼び、 $\operatorname{Res}_{z=a}[f]$ という記号で表す。

$$\operatorname{Res}_{z=a}[f] := c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$$

定理 (留数の求め方). $z = a$ が n 位の極であるとき

$$\operatorname{Res}_{z=a}[f] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-a)^n f(z)\}$$

が成り立つ。特に単純極のとき

$$\operatorname{Res}_{z=a}[f] = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z)$$

である。

証明. 留数の定義よりわかる。 □

定理 (留数定理). $f(z)$ は、単純閉曲線 C の内部に有限個の特異点 $z = a_n$ ($n = 1, 2, \dots, m$) を持つが、それらを除けば周上も含めて C の内部で正則であるとする。このとき

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{n=1}^m \operatorname{Res}_{z=a_n}[f]$$

が成り立つ。

証明. 留数の定義よりわかる。 □

1.2.2 無限級数、無限積

単に収束と言っても収束の仕方はいろいろある。ここでは一様収束という概念が重要になってくる。

定義 (一様収束). 任意の $\epsilon > 0$ に対して自然数 $n_0(\epsilon)$ を適当に選べば、 $n \geq n_0(\epsilon)$ なるすべての n に対して、複素平面の部分集合 E において z に無関係に

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$$

が成り立つとする。このとき、 E において $f_n(z)$ は $f(z)$ に一様収束するという。

注意. 一様収束では、 n_0 を z に依存せず選べることが重要である。

また、上記の定義は数学の言葉では

$$\forall \epsilon, \exists n_0 \text{ s.t. } n > n_0 \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \quad (\forall z \in E)$$

と書かれる。

関数列の極限としての関数が正則であることを言うためには、一様収束という条件が必要になってくるのだが、実際はそれよりも少しゆるい条件、すなわち広義一様収束が言えれば十分である。

定義 (広義一様収束). 領域 D に含まれる任意の有界集合 K で $f_n(z)$ が $f(z)$ に一様収束するとき、 $f_n(z)$ は D で広義一様収束するという。

注意. 上にも書いたが、広義一様収束は一様収束よりもゆるい条件であり、一様収束するならば広義一様収束する。

定理. 関数 $f_n(z)$ は領域 D で正則であるとする。 D において $f_n(z)$ が $f(z)$ に広義一様収束するならば、 $f(z)$ は D で正則である。また、 k 階導関数 $f_n^{(k)}(z)$ は $f^{(k)}(z)$ に広義一様収束する。

定義. 積 $\prod_{n=1}^N a_n$ が $N \rightarrow \infty$ のとき 0 でない有限の値になるとき、無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するという。収束しない場合、発散するという。

注意. 無限積においては極限值が 0 となる場合を収束に含めず、発散とすることに注意が必要である*3。無限積の収束の定義から 0 を除外する理由は、以降の定理で見られるような指数・対数写像による無限積と無限和との対応づけにおいて、収束概念どうしても対応づけられるようにするためである。仮に無限積が 0 に収束することを認めてしまうと

$$\text{無限和} = \log(\text{無限積})$$

の対応で無限和が $-\infty$ に発散する場合に無限積だけが収束することになってしまう。無限積の収束の定義において 0 を除外することによって、無限積と無限和の収束性が同値となるのである。

定理. 無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ が収束するための必要十分条件は、 $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n)$ が収束することである。

*3 細かいことを言うと、 $a_n = 0$ となる項が有限個の場合、無限積は 0 に収束すると定義するのが主流らしい。ただしこの定義においても、 $a_n = 0$ となる項が無限個ある場合は、無限積は 0 に発散するという。極限值が 0 であっても収束・発散のどちらの場合もあり得るのでややこしい。

証明. 無限和の収束を仮定し、その値を S とすると

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N (1 + a_n) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left(\log \prod_{n=1}^N (1 + a_n) \right) \\ &= \exp \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \log(1 + a_n) \right) \\ &= e^S\end{aligned}$$

となるので無限積も収束する。逆に、無限積の収束を仮定し、その値を P とする。

$$S_N := \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n), \quad P_N := \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

と書けば、 $S_N = \log P_N$ であるから*4、 $N \rightarrow \infty$ とすると

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \log P$$

となり、無限和も収束する。 □

無限積の絶対収束を以下のように定義する。

定義. 無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ が絶対収束するとは、 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|)$ が収束すること
いう。

注意. $\prod_{n=1}^{\infty} |1 + a_n|$ ではないことに注意。

*4 実はこの式は自明でない。何故ならば、 $\log P_N$ は主値であるから $-\pi < \operatorname{Im} \log P_N \leq \pi$ を満たすが、 S_N が $-\pi < \operatorname{Im} S_N \leq \pi$ を満たすとは限らないからである。一般にそのずれを考慮すると、 k_N を整数として

$$\log P_N = S_N + 2\pi i k_N$$

と書ける。 $N \rightarrow \infty$ で k_N が収束することを示せば良いのだが、面倒なのでここではやらない。

定理. 無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ が絶対収束するための必要十分条件は、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束することである。すなわち

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|) \text{ が収束} \iff \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ が収束}$$

証明.

$$A_N = \sum_{n=1}^N |a_n|, \quad B_N = \prod_{n=1}^N (1 + |a_n|)$$

とおく。 B_N を展開すると

$$\begin{aligned} B_N &= 1 + \sum_{n=1}^N |a_n| + \sum_{1 \leq i < j \leq N} |a_i| |a_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq N} |a_i| |a_j| |a_k| + \cdots \\ &\geq 1 + \sum_{n=1}^N |a_n| = 1 + A_N \end{aligned}$$

となる。また、指数関数のテイラー展開より

$$\exp |a_n| = 1 + |a_n| + \frac{|a_n|^2}{2} + \cdots \geq 1 + |a_n|$$

であるので

$$B_N \leq \prod_{n=1}^N \exp |a_n| = \exp \left(\sum_{n=1}^N |a_n| \right) = \exp A_N$$

となる。よって

$$1 + A_N \leq B_N \leq \exp A_N$$

であり、 A_N, B_N は共に増加列であることから $\lim_{N \rightarrow \infty} A_N$ と $\lim_{N \rightarrow \infty} B_N$ の収束性は一致する。□

定理. 無限積は、絶対収束すれば収束する。すなわち、無限和 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束すれば、無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ は収束する。

注意. 無限和についても同様のことが言える。つまり、絶対収束する無限和は収束する。また、 a_n は一般に複素数を仮定している。

定理. 絶対収束する無限積は、積の順序を変更しても無限積の値は変わらない。

注意. 無限和についても同様のことが言える。

定理 (二重和の交換). 二重和 $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n,m}|$ は、収束するならば n についての和と m についての和の順序を入れ替えても良い。

1.2.3 その他有用な定理

定理 (三角不等式). 複素数 A, B について、以下の不等号が成立する。

$$|A + B| \leq |A| + |B|, \quad (1.10)$$

$$|A| - |B| \leq |A - B|. \quad (1.11)$$

また、 $|C| > |D|$ であれば

$$\frac{|A + B|}{|C + D|} \leq \frac{|A| + |B|}{|C| - |D|} \quad (1.12)$$

が成り立つ。

証明. まず (1.10) 式を示す。両辺正であるから $(|A| + |B|)^2 - |A + B|^2 \geq 0$ を示せばよい。 $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ を用いて $A = a_1 + ia_2, B = b_1 + ib_2$ と書けるとすると

$$\begin{aligned} (|A| + |B|)^2 - |A + B|^2 &= |A|^2 + 2|A||B| + |B|^2 - |A + B|^2 \\ &= a_1^2 + a_2^2 + 2|A||B| + b_1^2 + b_2^2 \\ &\quad - \{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2\} \\ &= 2|A||B| - (2a_1b_1 + 2a_2b_2) \end{aligned}$$

ここで複素数 A, B を複素数平面上のベクトルだと思い、それらのなす角を θ とすると、内積の定義から

$$a_1b_1 + a_2b_2 = |A||B| \cos \theta \leq |A||B|$$

である。よって

$$(|A| + |B|)^2 - |A + B|^2 \geq 0$$

すなわち (1.10) 式が示された。また (1.10) 式において $A \rightarrow A - B$ と置き換えれば (1.10) 式が得られる。さらに、 $|C| > |D|$ であれば

$$\frac{|A + B|}{|C + D|} = \frac{|A + B|}{|C - (-D)|} \leq \frac{|A| + |B|}{|C| - |D|}$$

であり、(1.12) 式も従う。 □

注意. 次の定理と合わせて、複素積分の絶対値を上から抑える際に用いる。

定理. 複素積分においても、一般に次の不等式が成立する。

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| \quad (1.13)$$

1.3 ゼータ関数の解析接続と特殊値

1.3.1 複素数版 $\zeta(s)$

定義&命題 (リーマンゼータ関数). 複素数 s について定義されたゼータ関数

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (1.14)$$

は、 $\operatorname{Re}(s) > 1$ のとき広義一様に絶対収束し、正則関数となる。また、このような級数による $\zeta(s)$ の表示を、ディリクレ級数表示という。

証明. $\operatorname{Re}(s) > 1$ のとき $\zeta(s)$ が絶対収束することを示す。実数 σ, t を用いて $s \equiv \sigma + it$ と書けるとすると、 $\zeta(s)$ の第 n 項は

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^s} &= e^{\log n^{-s}} = e^{-s \log n} \\ &= e^{-(\sigma + it) \log n} = e^{-\sigma \log n} e^{-it \log n} \\ &= e^{-\sigma \log n} \{ \cos(t \log n) - i \sin(t \log n) \} \\ &= \frac{1}{n^\sigma} \{ \cos(t \log n) - i \sin(t \log n) \} \end{aligned}$$

であるから、絶対値をとると

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n^s} \right| &= \frac{1}{n^\sigma} |\cos(t \log n) - i \sin(t \log n)| \\ &= \frac{1}{n^\sigma} \sqrt{\cos^2(t \log n) + \sin^2(t \log n)} \\ &= \frac{1}{n^\sigma} \quad (\because \cos^2 X + \sin^2 X = 1) \end{aligned}$$

となるので、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}$ が収束すれば $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right|$ も収束する。よって、 s が実数の場合の議論より、 $\zeta(s)$ は $\sigma \equiv \operatorname{Re}(s) > 1$ のとき絶対収束することがわかる。

次に、 $\sigma > 1$ における収束の広義一様性を示す。 s が $\operatorname{Re}(s) \equiv \sigma \geq 1 + \delta$ なる集合内を動くとき、無限和と第 N 部分和の値の差は、次のように評価できる。

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} \leq \int_N^{\infty} \frac{1}{x^\sigma} dx = \left[\frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma} \right]_N^{\infty} = \frac{1}{(\sigma-1)N^{\sigma-1}} \leq \frac{1}{\delta N^\delta}$$

$\frac{1}{\delta N^\delta} < \varepsilon$ なる N は δ によってのみ取れ、 s に依らない。これで広義一様収束であることが示された。よって、正則性も従う。 \square

1.3.2 $\zeta(s)$ の解析接続

定理 ($\zeta(s)$ の解析接続). $\zeta(s)$ は、極 $s = 1$ を除く全複素平面 \mathbb{C} 上に解析接続される。極 $s = 1$ の位数は 1 であり、留数は 1 である。

証明. $\operatorname{Re}(s) = \sigma > 1$ において、定義式 (1.14) の第 1 項と第 2 項を取り分け、第 3 項から先の無限和と分けて書くと

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= 1 + 2^{-s} + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)^{-s} \\ &= 1 + 2^{-s} + \sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-s} \end{aligned}$$

となる。ここで、二項展開

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-s} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} n^{-k}$$

を用いる。 $\binom{-s}{k}$ は二項係数

$$\binom{-s}{k} = \frac{-s(-s-1)(-s-2)\cdots(-s-k+1)}{k!}$$

である。すると

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= 1 + 2^{-s} + \sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} n^{-k} \\ &= 1 + 2^{-s} + \sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} + \sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-s}{k} n^{-k} \\ &= \zeta(s) + 2^{-s} + \sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-s}{k} n^{-k}\end{aligned}$$

となる。ここで、 n と k の二重和の順序を交換したい。そのためには順序交換した後の二重級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \binom{-s}{k} \sum_{n=2}^{\infty} n^{-s-k}$$

が絶対収束することを示せばよい。まず、 n にわたる和は

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{1}{n^{s+k}} \right| &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma+k}} \leq \frac{1}{2^{\sigma+k}} + \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{\sigma+k}} \\ &= \frac{1}{2^{\sigma+k}} + \frac{1}{(\sigma+k-1)2^{\sigma+k-1}} \\ &< \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{k2^k} \\ &\leq \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^k} = \frac{3}{2^{k+1}}\end{aligned}$$

のように、 k に関する公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列によって評価できるから、 n にわたる和に二項係数を付けて k にわたらせた無限和は絶対収束する。よって、上の二重和は順序交換が可能であり

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \zeta(s) + 2^{-s} + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-s}{k} \sum_{n=2}^{\infty} n^{-s-k} \\ &= \zeta(s) + 2^{-s} + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-s}{k} (\zeta(s+k) - 1).\end{aligned}$$

この式から $k = 1$ を取り出して書くと

$$\zeta(s) = \zeta(s) + 2^{-s} - s(\zeta(s+1) - 1) + \sum_{k=2}^{\infty} \binom{-s}{k} (\zeta(s+k) - 1)$$

となる。両辺から $\zeta(s)$ を引き、 $\zeta(s+1)$ について解くと

$$\zeta(s+1) = 1 + \frac{2^{-s}}{s} + \frac{1}{s} \sum_{k=2}^{\infty} \binom{-s}{k} (\zeta(s+k) - 1).$$

s と $s-1$ に置き換えて

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= 1 + \frac{2^{1-s}}{s-1} + \frac{1}{s-1} \sum_{k=2}^{\infty} \binom{1-s}{k} (\zeta(s-1+k) - 1) \\ &= 1 + \frac{2^{1-s}}{s-1} + \frac{s}{2} (\zeta(s+1) - 1) - \frac{s(s+1)}{6} (\zeta(s+2) - 1) \end{aligned} \quad (1.15)$$

となる。この置き換えによって、これまで $\operatorname{Re}(s) > 1$ としていた仮定が $\operatorname{Re}(s) > 2$ となったが、ここで (1.15) の両辺の各々がより広い範囲の s で定義されるかどうかみてる。

右辺に現れる全項のゼータ関数は $\operatorname{Re}(s) > 0$ において定義されるから、 k にわたる無限和は $\operatorname{Re}(s) > 0$ において絶対収束し、極限として得る関数は正則となる。よって、左辺の $\zeta(s)$ の定義域は、 $s = 1$ の極を除いて $\operatorname{Re}(s) > 0$ にまで拡張されたことになる。このように一度定義域が広がれば、あとは (1.15) を繰り返し用いて複素平面全体への解析接続ができる。

また、(1.15) の表示から、極は $s = 1$ のみであり、位数は 1 で留数は

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \frac{2^{1-s}}{s-1} = 1$$

と求められる。

□

1.3.3 特殊値 $\zeta(0)$

上で与えた $\zeta(s)$ の解析接続の証明は初等的なものであるが、特殊値を容易に計算できるという利点がある。

定理.

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}. \quad (1.16)$$

証明. (1.15) の表示において $s \rightarrow 0$ とすると

$$\begin{aligned} \zeta(0) &= 1 + \frac{2}{-1} + \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow 0} s \zeta(s+1) \\ &= 1 - 2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

これで目標のひとつ、特殊値 $\zeta(0)$ の値を知ることができた。あとは微分係数 $\zeta'(0)$ を求めるために、表示 (1.15) を微分して $s \rightarrow 0$ とすれば... と思ったが、この表示を実際に微分して $\zeta'(0)$ を求めるのは容易ではなさそうだ。少なくとも私には無理だった（できそうな人はトライしてみてください）。ということで、このダイレクトな方法は諦め、イータ関数 $\eta(s)$ を使った方法で求めることにする。道のりは長いが、こちらの方が確実である^{*5}。

1.3.4 特殊値 $\zeta'(0)$

前のセクションで $\zeta(s)$ を解析接続するとすぐに $\zeta(0)$ の値も求まったが、 $\zeta'(0)$ の値はそう簡単にはいかない。これで最後なので頑張ろう。

^{*5} これから行う方法はあまり一般的なものではないらしい。アダマール積だとかフォン・マンゴールド関数を使った方法がよく見られる。しかしまあ既に調べてしまったものは仕方ないので、別の方法は各自ググってもらうとしよう。

定義&命題 (ディリクレのイータ関数). 複素数 s について、無限級数によって定義された関数

$$\eta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \equiv \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots \quad (1.17)$$

は、 $\operatorname{Re}(s) > 1$ のとき広義様に絶対収束し、正則関数となる。また、 $\eta(s)$ はディリクレのイータ関数と呼ばれる。

証明. $\eta(s)$ は $\zeta(s)$ の交代級数であるから、絶対収束性についての議論は $\zeta(s)$ と同じ。 □

定理 (イータ関数とゼータ関数の関係式). $\operatorname{Re}(s) > 1$ の領域において

$$\eta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s) \quad (1.18)$$

という関係式が成り立つ。

証明. $\operatorname{Re}(s) > 1$ とすると、絶対収束する領域では項の順序を入れ替えても良いので

$$\begin{aligned} \eta(s) &= 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots \\ &= \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots\right) - 2\left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - 2 \cdot 2^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \\ &= (1 - 2^{1-s}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s). \end{aligned}$$

□

(1.18) 式から $\eta(s)$ は $s = 1$ を除いた複素数全体へ解析接続されることがすぐにわかる。 $s = 1$ では $\eta(1) = 0 \cdot \infty$ となり不定形であるが、これは $\log 2$ という値に収束することが知られている*6。 $\eta(s)$ は $s = 1$ でも有限値をとるので、複素数平面全体で正則な関数に解

*6 直感的には、 $|x| < 1$ において収束する $\log(1+x)$ のテイラー展開

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

析接続できるのかな？ まあ今回は $s = 1$ はどうでもいいので、とりあえず先に進もう。

定理（イータ関数の別表示）.

$$\eta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \{n^{-s} - (n+1)^{-s}\} \quad (1.19)$$

証明.

$$\begin{aligned} \eta(s) &= 1 - 2^{-s} + 3^{-s} - 4^{-s} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} (1 + 1 - 2^{-s} - 2^{-s} + 3^{-s} + 3^{-s} - 4^{-s} - \cdots) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1 - 2^{-s} - 2^{-s} + 3^{-s} + 3^{-s} - 4^{-s} - \cdots) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \{ (1 - 2^{-s}) - (2^{-s} - 3^{-s}) + (3^{-s} - 4^{-s}) - \cdots \} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \{n^{-s} - (n+1)^{-s}\} \end{aligned}$$

□

定理（余接関数の極）. $\cot z \equiv \frac{\cos z}{\sin z}$ は、 $z = \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) に 1 位の極を持ち、それらの留数はすべて 1 である。

証明. $z \equiv x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とすると

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin(x + iy) \\ &= \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) \\ &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \sin z = 0 &\iff \sin x \cosh y = 0 \text{ かつ } \cos x \sinh y = 0 \\ &\iff \sin x = 0 \text{ かつ } \lceil \cos x = 0 \text{ または } \sinh y = 0 \rceil \\ &\iff x = \pi n \text{ かつ } \lceil x = \frac{\pi n}{2} \text{ } (n \neq 0) \text{ または } y = 0 \rceil \\ &\iff x = \pi n \text{ かつ } y = 0 \\ &\iff z = \pi n \end{aligned}$$

において $x = 1$ とすれば $\eta(1) = \log 2$ を得ることができる。

である。 $z = \pi n$ で $\cos z \neq 0$ なので、 $\cot z$ の極は $\sin z$ の零点と一致し、 $z = \pi n$ のみであることがわかる。また

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \pi n} (z - \pi n) \cot z &= \lim_{z \rightarrow \pi n} (z - \pi n) \frac{\cos z}{\sin z} \\ &= \lim_{A \rightarrow 0} A \cdot \frac{\cos(A + \pi n)}{\sin(A + \pi n)} \\ &= \lim_{A \rightarrow 0} A \cdot \frac{\cos A \cos \pi n - \sin A \sin \pi n}{\sin A \cos \pi n + \cos A \sin \pi n} \\ &= \lim_{A \rightarrow 0} \frac{A}{\sin A} \cdot \cos A = 1 \end{aligned}$$

であるから、すべての極 $z = \pi n$ の位数は 1 であり、留数は 1 である。 \square

定理 (余接関数の部分分数展開).

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 n^2} \quad (1.20)$$

証明. (1.20) を証明するためには、図 1.4 のように経路 C に沿った積分

$$\oint_C \frac{\cot \zeta}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta \quad (z \neq \pi n)$$

を 2 つの方法で計算すればよい。すなわち、(i) 留数定理を使う方法と、(ii) 積分を直接実行する方法で求めた積分値が等しいとおく。

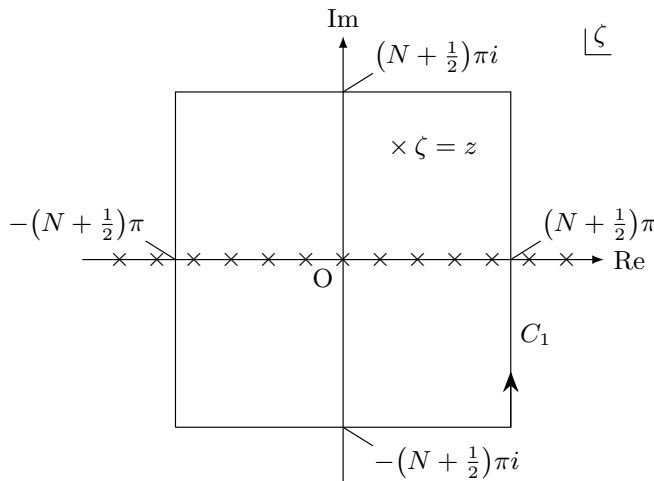


図 1.4 経路 C と $\frac{\cot \zeta}{\zeta(\zeta - z)}$ の極

(i) まず $\frac{(\cot \zeta)}{\zeta(\zeta - z)}$ は $\zeta = z$ と $\zeta = \pi n$ のところに極を持つ。 $\zeta = z$ と $\zeta = \pi n$ ($n \neq 0$) のところは 1 位の極であり、留数はそれぞれ $\frac{\cot z}{z}$ と $\frac{1}{\pi n(\pi n - z)}$ である。 $\zeta = 0$ のところは 2 位の極であり、留数は

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{d}{d\zeta} \left(\zeta^2 \cdot \frac{\cot \zeta}{\zeta(\zeta - z)} \right) &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{\zeta \cot \zeta}{(\zeta - z)} \right) \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left(\frac{\cot \zeta}{\zeta - z} - \frac{\zeta}{(\zeta - z) \sin^2 \zeta} - \frac{\zeta \cot \zeta}{(\zeta - z)^2} \right) \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left(\frac{\cos \zeta}{\zeta(\zeta - z) \sin \zeta} - \frac{1}{\zeta(\zeta - z) \sin^2 \zeta} - \frac{\cos \zeta}{(\zeta - z)^2 \sin \zeta} \right) \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\zeta(\zeta - z)} - \frac{1}{\zeta(\zeta - z)} - \frac{1}{(\zeta - z)^2} \right) \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{(\zeta - z)^2} \right) = -\frac{1}{z^2} \end{aligned}$$

と求まる。よってこれらの留数を合計すると積分値が求まり

$$\oint_C \frac{\cot \zeta}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta = 2\pi i \left(\frac{\cot z}{z} + \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N \frac{1}{\pi n(\pi n - z)} - \frac{1}{z^2} \right) \quad (1.21)$$

となる。

(ii) 次に (1.21) 式左辺の積分を経路 C の各辺ごとに実行してみる。例えば図 1.4 の右辺部分の経路 C_1 に沿った積分は $\zeta = (N + \frac{1}{2})\pi + iy$ とおいて

$$\int_{C_1} \frac{\cot \zeta}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta = \int_{-(N+\frac{1}{2})\pi}^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{\cot \left\{ (N + \frac{1}{2})\pi + iy \right\}}{\left\{ (N + \frac{1}{2})\pi + iy \right\} \left\{ (N + \frac{1}{2})\pi + iy - z \right\}} i dy$$

であるが

$$\begin{aligned} \left| \cot \left\{ (N + \frac{1}{2})\pi + iy \right\} \right| &= \left| \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\pi \cdot \sin iy + \cos(N + \frac{1}{2})\pi \cdot \cos iy}{\sin(N + \frac{1}{2})\pi \cdot \cos iy + \cos(N + \frac{1}{2})\pi \cdot \sin iy} \right| \\ &= \left| \frac{\sin iy}{\cos iy} \right| = \left| \frac{e^{-y} - e^y}{e^{-y} + e^y} \right| \leq 1 \end{aligned}$$

であり、また $-(N + \frac{1}{2})\pi \leq y \leq (N + \frac{1}{2})\pi$ において

$$\begin{aligned} \left| (N + \frac{1}{2})\pi + iy \right| &= \sqrt{\left\{ (N + \frac{1}{2})\pi \right\}^2 + y^2} \geq (N + \frac{1}{2})\pi, \\ \left| (N + \frac{1}{2})\pi + iy - z \right| &\geq \left| (N + \frac{1}{2})\pi + iy \right| - |z| \geq (N + \frac{1}{2})\pi - |z| \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{C_1} \frac{\cot \zeta}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta \right| &\leq \int_{-(N+\frac{1}{2})\pi}^{(N+\frac{1}{2})\pi} \left| \frac{\cot \left\{ \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi + iy\right\}}{\left\{ \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi + iy\right\} \left\{ \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi + iy - z\right\}} \right| dy \\
 &\leq \int_{-(N+\frac{1}{2})\pi}^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{1}{\left(N + \frac{1}{2}\right)\pi \left\{ \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi - |z|\right\}} dy \\
 &= \frac{2}{\left(N + \frac{1}{2}\right)\pi - |z|}.
 \end{aligned}$$

したがって、 $N \rightarrow \infty$ のとき積分値は 0 に近づく。他の部分の経路からの寄与も同じように小さくなるので、結局 (1.21) 式左辺は $N \rightarrow \infty$ で 0 である。つまり

$$\frac{\cot z}{z} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{\pi n(\pi n - z)} - \frac{1}{z^2} = 0$$

が成立する。この式を整理すると

$$\begin{aligned}
 \cot z &= \frac{1}{z} - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{z}{\pi n(\pi n - z)} \\
 &= \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{z}{\pi n(\pi n - z)} + \frac{z}{-\pi n(-\pi n - z)} \right\} \\
 &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 n^2}
 \end{aligned}$$

となる。 □

定理 (サイン関数の無限積展開).

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2} \right) \quad (1.22)$$

証明. まず任意の複素数 z を固定するとき、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{z^2}{n^2} \right)$ は広義一様に絶対収束するので、無限積 $P(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2} \right)$ も広義一様に絶対収束し、正則関数となる。そこで、関数 $f(z)$ を

$$f(z) := \frac{zP(z)}{\sin z}$$

と定義し、これが恒等的に $f(z) \equiv 1$ であることを示せばよい。両辺対数をとると

$$\log f(z) = \log z + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\log \left(1 + \frac{z}{\pi n} \right) + \log \left(1 - \frac{z}{\pi n} \right) \right] - \log(\sin z)$$

であり、微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \log f(z) &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{1 + \frac{z}{\pi n}} - \frac{1}{1 - \frac{z}{\pi n}} \right] - \frac{\cos z}{\sin z} \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} - \cot z. \end{aligned}$$

ここで (1.20) より

$$\frac{d}{dz} \log f(z) = 0$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \log f(z) &= \text{定数} \\ f(z) &= \text{定数} \end{aligned}$$

となるから、 $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} = 1$ に注意して

$$f(z) \equiv f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{zP(z)}{\sin z} = P(0) = 1.$$

□

なお、 $\sin z$ の無限積展開は、多項式にしか使えない因数定理を誤用することでも奇跡的に求められる。すなわち、 $\sin z$ が零点 $z = \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) を持つことから

$$\begin{aligned} \sin z &= az(z + \pi)(z - \pi)(z + 2\pi)(z - 2\pi)(z + 3\pi)(z - 3\pi) \cdots \\ &= az \prod_{n=1}^{\infty} (z + n\pi)(z - n\pi) \end{aligned}$$

というように因数分解できるとする。係数 a を決定するために両辺 z で割り $z \rightarrow 0$ とすると

$$1 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = a \prod_{n=1}^{\infty} n\pi(-n\pi)$$

であるから

$$a = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi(-n\pi)}.$$

よって

$$\begin{aligned} \sin z &= z \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(z+n\pi)(z-n\pi)}{n\pi(-n\pi)} \\ &= z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n\pi}\right) \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) \\ &= z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) \end{aligned}$$

となり、上で示したことと同じ結果が得られた。これはかの天才オイラーによって発見された方法であり、オイラーはさらに $\sin z$ のマクローリン展開

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

と上で示した $\sin z$ の無限積表示の z^3 の係数を比較することで、

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (1.23)$$

であることを示し、バーゼル問題を解決した。

天才オイラーの登場によって話が逸れてしまったが、ここで話を戻し、 $\sin z$ の無限積展開の特殊値としてウォリス積というものを求めよう。

定理 (ウォリス積).

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} \\ &\equiv \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots \end{aligned} \quad (1.24)$$

証明. (1.22) において $z = \frac{\pi}{2}$ を代入すると

$$\begin{aligned}\sin \frac{\pi}{2} &= \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) \\ 1 &= \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n)^2 - 1}{(2n)^2}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} \\ \frac{\pi}{2} &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}.\end{aligned}$$

□

これでようやく $\zeta'(0)$ を求める準備が整った。これで本当に最後なので頑張っていこう。

定理.

$$\zeta'(0) = -\frac{1}{2} \log 2\pi \quad (1.25)$$

証明. (1.18), (1.19) より

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \{n^{-s} - (n+1)^{-s}\}$$

ここで、両辺 s で微分し、 $s = 0$ を代入する。

右辺については

$$\frac{d}{dx} a^{-x} = \frac{d}{dx} e^{-x \log a} = -a^{-x} \log a$$

であることに注意して

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{ds}(\text{右辺}) \right|_{s=0} &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{\log n}{n^s} - \frac{\log(n+1)}{(n+1)^s} \right\} \Big|_{s=0} \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \{\log n - \log(n+1)\} \\
&= \frac{1}{2} \{-(\log 1 - \log 2) + (\log 2 - \log 3) - (\log 3 - \log 4) + \cdots\} \\
&= \frac{1}{2} \log \left\{ \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \log \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} \\
&= \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

となる。ただし最後の変形でウォリス積 (1.24) 式を用いた。

一方、左辺については、既に求めた特殊値 $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ を用いて

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{ds}(\text{左辺}) \right|_{s=0} &= 2^{1-s} \log 2 \cdot \zeta(s) + (1 - 2^{1-s}) \zeta'(s) \Big|_{s=0} \\
&= 2 \log 2 \cdot \zeta(0) - \zeta'(0) \\
&= -\log 2 - \zeta'(0)
\end{aligned}$$

となる。よって両辺等しいのだから

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \log \frac{\pi}{2} &= -\log 2 - \zeta'(0) \\
\zeta'(0) &= \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{2} + \log 2 \\
&= \frac{1}{2} \log 2\pi.
\end{aligned}$$

□

以上より、ゼータ関数の特殊値 $\zeta(0)$ および $\zeta'(0)$ を求めることができた。ここまで道のりが長いと何のためにゼータ関数の特殊値を計算したのか忘れてしまいそうだが、これでようやく

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \cdots = 4\pi^2$$

という数式を理解できたと言っても良いだろう。

目的は全て達成されもうお腹もいっぱいなのでここで終わっても良いのだが、せっかくゼータ関数 $\zeta(s)$ とお友達になって（定義して）さらには親友にもなった（解析接続もした）ので、かの有名な未解決問題「リーマン予想」に触れない手はない。

以降のセクションでは、リーマン予想を証明することはないが、それがどんなものであるか、何が面白いのかについて簡単に説明し、リーマン予想が正しいことを支持する数値計算の結果を見せる。

それではここで

リーマンの奇妙な冒険 第一部 完

とする。

1.4 リーマン予想

最後にリーマン予想の話をしてしよう。だがその前にゼータ関数についてもう少し詳しくなっておこう。まず、ゼータ関数の解析接続を別の方法（積分表示）で与える。この表示による副産物として、 s が負の整数のときの $\zeta(s)$ の値をベルヌーイ数を用いて簡単に計算できるようになる。ここでゼータ関数の自明な零点についても説明する。また、 s が正の偶数であるときの $\zeta(s)$ の値もベルヌーイ数を用いて計算できることを示す。

次に $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$ を除いた領域では $\zeta(s)$ は零点を持たないことを示し、 $\zeta(s)$ 非自明な零点について説明する。ただしこの辺で私が力尽きてしまったので、証明はいくつか省略している。

以上のことを踏まえ、ここでようやくリーマン予想について説明する。素数定理というものを見ながら、リーマン予想がどういう意味を持つのかについて考えていく。

最後に、Fortran を用いて $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$ 上にある $\zeta(s)$ の零点を数値計算で求めてみたので、その結果を載せておく。

1.4.1 ガンマ関数 $\Gamma(s)$

まずはゼータ関数の積分表示に必要なガンマ関数を定義する。

定義 (ガンマ関数). 複素数 s について、積分で定義された関数

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (1.26)$$

は、 $\operatorname{Re}(s) > 0$ で一様に絶対収束し、正則関数となる。 $\Gamma(s)$ はガンマ関数と呼ばれる。

証明. 右辺の広義積分が $\operatorname{Re}(s) > 0$ で絶対収束することを示す。 $x > 0$ と任意の $0 \leq m \in \mathbb{Z}$ に対し

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^m}{m!} + \cdots \geq \frac{x^m}{m!}$$

であるから、 $e^{-x} \leq m! x^{-m}$ であり、 $s \equiv \sigma + it$ とおくと、 $0 < \sigma < m$ なる任意の σ, m に対し

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |e^{-x} x^{s-1}| dx &= \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\sigma-1} dx \\ &= \int_0^1 e^{-x} x^{\sigma-1} dx + \int_1^{\infty} e^{-x} x^{\sigma-1} dx \\ &\leq \int_0^1 x^{\sigma-1} dx + m! \int_1^{\infty} x^{\sigma-m-1} dx \\ &= \left[\frac{x^{\sigma}}{\sigma} \right]_0^1 + m! \left[\frac{x^{\sigma-m}}{\sigma-m} \right]_1^{\infty} \\ &= \frac{1}{\sigma} + \frac{m!}{m-\sigma} \end{aligned}$$

となるので、積分は収束する。また

$$\Gamma_n(s) := \int_{\frac{1}{n}}^n e^{-t} t^{s-1} dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおくと、各 $\Gamma_n(s)$ は $\operatorname{Re}(s) > 0$ で正則である。さらに、 $0 < a < b$ とするとき、

$a \leq \operatorname{Re}(s) \leq b$ ならば

$$\begin{aligned}\Gamma(s) - \Gamma_n(s) &= \left(\int_0^\infty - \int_{\frac{1}{n}}^n \right) e^{-t} t^{s-1} dt \\ &= \left(\int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^n + \int_n^\infty - \int_{\frac{1}{n}}^n \right) e^{-t} t^{s-1} dt \\ &= \left(\int_0^{\frac{1}{n}} + \int_n^\infty \right) e^{-t} t^{s-1} dt\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}|\Gamma(s) - \Gamma_n(s)| &= \left| \int_0^{\frac{1}{n}} e^{-t} t^{s-1} dt + \int_n^\infty e^{-t} t^{s-1} dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^{\frac{1}{n}} e^{-t} t^{s-1} dt \right| + \left| \int_n^\infty e^{-t} t^{s-1} dt \right| \\ &\leq \int_0^{\frac{1}{n}} |e^{-t} t^{s-1}| dt + \int_n^\infty |e^{-t} t^{s-1}| dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{n}} e^{-t} t^{a-1} dt + \int_n^\infty e^{-t} t^{b-1} dt \\ &\leq \int_0^{\frac{1}{n}} e^{-t} t^{a-1} dt + \int_n^\infty e^{-t} t^{b-1} dt.\end{aligned}$$

ゆえに、 $\operatorname{Re}(s) > 0$ で $\Gamma_n(s)$ は $\Gamma(s)$ に一様収束する。よって、 $\operatorname{Re}(s) > 0$ で $\Gamma(s)$ は正則である。 \square

以下に示す性質から、ガンマ関数とは自然数 n の階乗 $n!$ を複素数の範囲にまで拡張したのものであると理解できる。

定理 (ガンマ関数の性質). $\operatorname{Re}(s) > 0$ のとき、関係式

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \tag{1.27}$$

が成り立つ。特に s が自然数 n のとき

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{1.28}$$

となる。

証明. $\operatorname{Re}(s) > 0$ であると仮定すると、部分積分より

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1) &= \int_0^\infty e^{-x} x^s dx \\ &= [(-e^{-x})x^s]_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-x})sx^{s-1} dx \\ &= 0 + s \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \\ &= s\Gamma(s).\end{aligned}$$

また、 $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$ であるから、自然数 n について $\Gamma(n) = (n-1)!$ が言える。

□

先ほど求めた関係式を用いて、ガンマ関数を複素数全体へ解析接続する。

定理 (ガンマ関数の解析接続). ガンマ関数は複素数全体に解析接続される。ガンマ関数は零点を持たず、 $s = 0, -1, -2, \dots$ にのみ 1 位の極を持つ。これらの極を除いた複素数全体で正則関数となる。

証明. $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ における $\Gamma(s)$ の値から、関係式

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}$$

によって、 $\Gamma(s)$ の定義域を $\operatorname{Re}(s) > -1$ にまで延長できる。これを繰り返し行うことにより、 $\operatorname{Re}(s) > -2, \operatorname{Re}(s) > -3, \dots$ と徐々に延長でき、 $\Gamma(s)$ は複素数全体へ解析接続される。

また、 $s = 0, -1, -2, \dots$ にのみ極を持ち、それらが全て 1 位の極であることは、上の関係式によりすぐにわかる。零点を持たないことは、後述の相反公式からわかる。 □

次に、 $\Gamma(s)$ の相反公式というものを示す。この式によって $\Gamma(s)$ が零点を持たないことがわかる。つまり $\frac{1}{\Gamma(s)}$ は複素平面全体で正則関数となる。

$\Gamma(s)$ の相反公式を示す準備として、まずは次の定積分の値を求めておこう。

定理. $0 < \alpha < 1$ のとき

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\alpha x}}{1 + e^x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \quad (1.29)$$

が成り立つ。

証明.

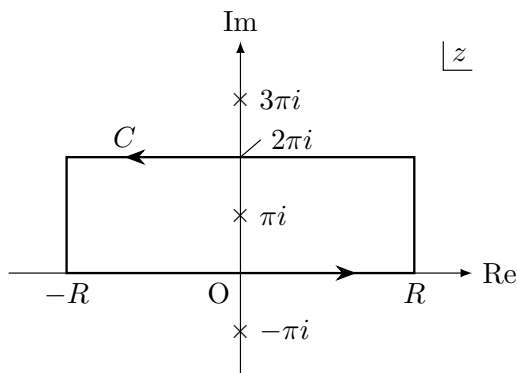


図 1.5 積分路 C と $f(z)$ の極

$f(z) := \frac{e^{\alpha z}}{1 + e^z}$ ($0 < \alpha < 1$) とし、図 1.5 のような経路 C に沿った積分の値を、留数定理を用いた方法と、直接積分を実行する方法の 2 通りの方法で求める。

まず、 $f(z)$ は極を $z = (2n+1)\pi i$ ($n \in \mathbb{Z}$) に持ち、それらはすべて単純極である。よって経路 C 内の極は $z = \pi i$ のみであり、そこでの留数は

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Res}_{z=\pi i}[f] &= \lim_{z \rightarrow \pi i} (z - \pi i) \frac{e^{\alpha z}}{1 + e^z} \\
 &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta \cdot \frac{e^{\alpha(\zeta + \pi i)}}{1 + e^{\zeta + \pi i}} \quad (\because \zeta := z - \pi i) \\
 &= e^{\pi i \alpha} \cdot \lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta \cdot \frac{e^{\alpha \zeta}}{1 - e^{\zeta}} \quad (\because e^{\pi i} = -1) \\
 &= e^{\pi i \alpha} \cdot \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\zeta}{1 - e^{\zeta}} \\
 &= e^{\pi i \alpha} \cdot \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\zeta}{1 - \{1 + \zeta + \mathcal{O}(\zeta^2)\}} \\
 &= e^{\pi i \alpha} \cdot \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{-1 + \mathcal{O}(\zeta)} \\
 &= -e^{\pi i \alpha}
 \end{aligned}$$

であるから、留数定理より

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=\pi i}[f] = -2\pi i e^{\pi i \alpha}$$

となる。 $R \rightarrow \infty$ としてもこの値は変わらない。

一方、経路 C を各辺ごとに分解すると

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \int_{-R}^R \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx + \int_0^{2\pi} \frac{e^{\alpha(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} i dy \\ &\quad + \int_R^{-R} \frac{e^{\alpha(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}} dx + \int_{2\pi}^0 \frac{e^{\alpha(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}} i dy. \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} |\text{第2項}| &= \left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{\alpha(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} i dy \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{\alpha(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} \right| dy \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{|e^{\alpha R}| |e^{i\alpha y}|}{|1+e^R e^{iy}|} dy = \int_0^{2\pi} \frac{e^{\alpha R}}{|1+e^R e^{iy}|} dy \\ &\leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{\alpha R}}{|e^R e^{iy}| - 1} dy = \int_0^{2\pi} \frac{e^{\alpha R}}{e^R - 1} dy \\ &= 2\pi \cdot \frac{e^{\alpha R}}{e^R - 1} = 2\pi \cdot \frac{e^{-(1-\alpha)R}}{1 - e^{-R}} \\ &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 2\pi \cdot \frac{0}{1 - 0} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\text{第4項}| &= \left| \int_{2\pi}^0 \frac{e^{\alpha(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}} i dy \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{\alpha(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}} \right| dy \\ &\leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\alpha R}}{1 - e^{-R}} dy = 2\pi \cdot \frac{e^{-\alpha R}}{1 - e^{-R}} \\ &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 2\pi \cdot \frac{0}{1 - 0} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{第3項} &= \int_R^{-R} \frac{e^{\alpha(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}} dx = - \int_{-R}^R \frac{e^{\alpha x} e^{2\pi i \alpha}}{1+e^x e^{2\pi i}} dx \\ &= -e^{2\pi i \alpha} \int_{-R}^R \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx + 0 + 0 - e^{2\pi i \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx \\ &= (1 - e^{2\pi i \alpha}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx. \end{aligned}$$

よって、これら 2 通りの方法で求めた積分値が等しいので

$$(1 - e^{2\pi i\alpha}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1 + e^x} dx = -2\pi i e^{\pi i\alpha}.$$

$1 - e^{2\pi i\alpha} \neq 0$ であるから

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1 + e^x} dx &= \frac{2\pi i e^{\pi i\alpha}}{e^{2\pi i\alpha} - 1} \\ &= \frac{2\pi i}{e^{\pi i\alpha} - e^{-\pi i\alpha}} \\ &= \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \quad \left(\because \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right) \end{aligned}$$

となる。 □

相反公式の証明で実際に用いるのは、上の式で $t := e^x$ と変数変換した次の式である。

定理. $0 < \alpha < 1$ のとき

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \quad (1.30)$$

が成り立つ。

証明. (1.29) において $t := e^x$ と変数変換すれば

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1 + e^x} dx = \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha}}{1+t} \cdot \frac{dt}{t} \quad (\because t := e^x) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt. \end{aligned}$$

□

ここでさらにベータ関数と呼ばれるものを定義する。下記の関係式からもわかるように、ベータ関数はガンマ関数と深く結びついている。

定義&命題. $\operatorname{Re}(p), \operatorname{Re}(q) > 0$ であるような複素数 p, q について、ベータ関数を

$$B(p, q) := \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad (1.31)$$

と定義すると、以下の関係式が成り立つ。

$$B(p, q) = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx, \quad B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (1.32)$$

証明. まず、ベータ関数の定義式において、変数変換 $x =: \frac{t}{1+t}$ を行うことで

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^\infty \left(\frac{t}{1+t} \right)^{p-1} \left(1 - \frac{t}{1+t} \right)^{q-1} \frac{dt}{(1+t)^2} \\ &= \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt \end{aligned}$$

が得られる。

次に、ガンマ関数の定義式から

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \left(\int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx \right) \left(\int_0^\infty e^{-y} y^{q-1} dy \right)$$

であり、 $x =: X^2, y =: Y^2$ と変数変換を行うと

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(\int_0^\infty e^{-X^2} X^{2(p-1)} \cdot 2X dX \right) \left(\int_0^\infty e^{-Y^2} Y^{2(q-1)} \cdot 2Y dY \right) \\ &= 4 \int_0^\infty dX \int_0^\infty dY e^{-(X^2+Y^2)} X^{2p-1} Y^{2q-1}. \end{aligned}$$

ここで、 $X =: r \cos \theta, Y =: r \sin \theta$ と変数変換を行うと

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= 4 \int_0^\infty dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta r e^{-r^2} (r \cos \theta)^{2p-1} (r \sin \theta)^{2q-1} \\ &= \left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta \right) \left(2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2p+2q-1} dr \right). \end{aligned}$$

後半部分は、 $R =: r^2$ と変数変換すれば $dR = 2r dr$ であるから

$$2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2p+2q-1} dr = \int_0^\infty e^{-R} R^{p+q-1} dR = \Gamma(p+q)$$

となる。前半部分は、ベータ関数の定義式において $x =: \sin^2 \theta$ と変数変換すれば、 $dx = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$ であるから

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2(p-1)} \theta (1 - \sin^2 \theta)^{q-1} \cdot 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2q-1} \theta \cos^{2p-1} \theta d\theta \end{aligned}$$

となる。よって

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = B(p, q)\Gamma(p+q).$$

□

定理 (相反公式).

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} \quad (s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) \quad (1.33)$$

証明. $0 < \alpha < 1$ のとき

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = B(\alpha, 1-\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$$

であるから、一致の定理より

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} \quad (s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$$

となる。

□

注意. 前にも書いたように、この相反公式 (1.33) から $\Gamma(s)$ は零点を持たないことがわかる。さらに $\frac{1}{\Gamma(s)}$ は複素平面全体で正則な関数であり、 $s = -k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) に 1 位の零点を持つ。

$$\frac{1}{\Gamma(-k)} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.34)$$

また、(1.48) の代わりに相反公式 (1.33) を用いることでもガンマ関数 $\Gamma(s)$ を解析接続することができる。すなわち、 $\operatorname{Re}(s) \leq 0$ のとき

$$\Gamma(s) = \frac{\pi}{\Gamma(1-s) \sin \pi s} \quad (1.35)$$

によって $\Gamma(s)$ を定義してもかまわない。 $s = 0, -1, -2, \dots$ に極を持つこともすぐにわかる。こちらの方法で $\Gamma(s)$ を解析接続する方が、一発で $\Gamma(s)$ の値が求まるので実用的である。

1.4.2 積分表示による $\zeta(s)$ の解析接続

前節で定義したガンマ関数 $\Gamma(s)$ を用いて、第 1.3.2 節とは異なった方法で、再びゼータ関数 $\zeta(s)$ を解析接続する。この解析接続の副産物として、 s が負の整数のときの $\zeta(s)$ の値を求める一般公式を得ることができる。

それではまず、 B_n はベルヌーイ数と呼ばれる有理数を定義するところから始めよう。

定義 (ベルヌーイ数). ベルヌーイ数 B_n を以下のマクローリン展開の展開係数として定義する。

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n. \quad (1.36)$$

上の定義からベルヌーイ数を計算するのは容易ではなく^{*7}、以下の漸化式が有用である。

定理 (ベルヌーイ数の漸化式).

$$B_0 = 1, \quad B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k \quad (1.37)$$

注意. この漸化式から、ベルヌーイ数 B_n は有理数であることがわかる。

証明. $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ とその逆数をテイラー展開し、それらの積が恒等的に 1 であることからベルヌーイ数が満たす漸化式を求める。 $f(x)$ の逆数のテイラー展開は

^{*7} $B_n = \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) \Big|_{x=0}$ で計算できるが、かなり面倒臭い。

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(x)} &= \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 \right) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}1 &= f(x) \cdot \frac{1}{f(x)} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i}{i!} x^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{(j+1)!} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_i}{i!(j+1)!} x^{i+j}\end{aligned}$$

ここで、図 1.6 のように二重和の取り方を変更する。 i, j について縦横に足し上げるのではなく、 $i+j=:n$ を固定し、斜め方向に足し上げていく。

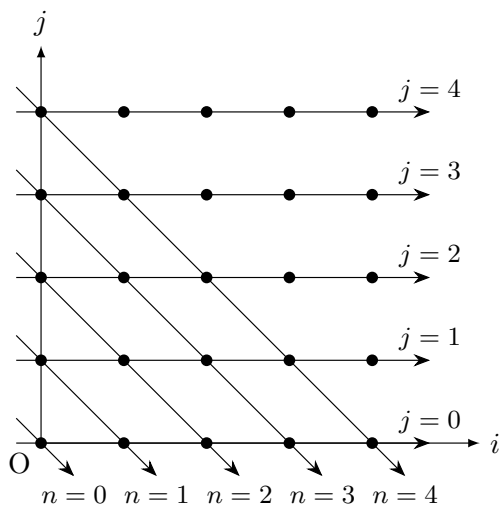


図 1.6 二重和の取り方の変更。

すると

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!(n-k+1)!} x^n \quad (n := i+j, k := i)$$

となり、各 x^n の係数を比較すると

$$\begin{cases} 1 = B_0 & (n = 0), \\ 0 = \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!(n-k+1)!} & (n \geq 1) \end{cases}$$

が得られる。第2式は

$$0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!(n-k+1)!} + \frac{B_n}{n!}$$

となるので

$$\begin{aligned} B_n &= -n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!(n-k+1)!} \\ &= -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} B_k \\ &= -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k. \end{aligned}$$

よって漸化式 (1.37) が得られる。 □

ベルヌーイ数 B_n の具体的な値.

$B_0 = 1,$	$B_5 = 0,$	$B_{10} = \frac{5}{66},$
$B_1 = -\frac{1}{2},$	$B_6 = \frac{1}{42},$	$B_{11} = 0,$
$B_2 = \frac{1}{6},$	$B_7 = 0,$	$B_{12} = -\frac{691}{2730},$
$B_3 = 0,$	$B_8 = -\frac{1}{30},$	$B_{13} = 0,$
$B_4 = -\frac{1}{30},$	$B_9 = 0,$	$B_{14} = \frac{7}{6}.$

注意. k が3以上の奇数のとき $B_k = 0$ である。このことは第1.4.3節で示す。

ディリクレ表示で定義されたゼータ関数 $\zeta(s)$ は、ガンマ関数 $\Gamma(s)$ を用いて以下のように積分表示できる。ただし、定義域は相変わらず $\operatorname{Re}(s) > 1$ である。

定理 (リーマンの第一積分表示).

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \quad (\operatorname{Re}(s) > 1). \quad (1.38)$$

証明. $x > 0$ において、等比級数の和の公式より

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} &\equiv e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots \\ &= \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1} \end{aligned}$$

であることを用いて

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx &= \int_0^\infty x^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty x^{s-1} e^{-nx} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \int_0^\infty u^{s-1} e^{-u} du \quad (u := nx) \\ &= \Gamma(s) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \Gamma(s) \cdot \zeta(s). \end{aligned}$$

□

上の積分表示では $\zeta(s)$ の定義域は $\operatorname{Re}(s) > 1$ のままであるが、次のように積分を分解することで、 $\zeta(s)$ を $s = 1$ を除く複素平面全体に解析接続することができる！

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \mathrm{I}(s) + \mathrm{II}_k(s) + \mathrm{III}_k(s).$$

ここで

$$\begin{aligned} \mathrm{I}(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx, \\ \mathrm{II}_k(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \left(\frac{1}{e^x - 1} - \sum_{\ell=0}^{k+1} \frac{B_\ell}{\ell!} x^{\ell-1} \right) x^{s-1} dx, \\ \mathrm{III}_k(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \left(\sum_{\ell=0}^{k+1} \frac{B_\ell}{\ell!} x^{\ell-1} \right) x^{s-1} dx \end{aligned}$$

である。また、 k は $k \geq 0$ を満たす整数とし、 B_ℓ はベルヌーイ数である。

このように積分を3つに分割して書くことで、 $\operatorname{Re}(s) > 1$ でしか定義されなかったゼータ関数 $\zeta(s)$ を、 $s = 1$ の一点を除き、各整数 k に対し $\operatorname{Re}(s) > -k - 1$ にまで解析接続できる。つまり、いくらでも大きな整数 k を取れば、ゼータ関数 $\zeta(s)$ は $s = 1$ を除いた全ての複素数で正則となるように解析接続できる！！ そのことを以下で詳しく見てみよう。

まず、 $\frac{1}{\Gamma(s)}$ は複素数全体で正則な関数である。さらに、 $I(s)$ の積分は、被積分関数の分母の指数関数の方が収束が速いので、 s の値に依らず有限値に収束し、 $I(s)$ は複素数全体で正則関数となる。

次に、 $\Pi_k(s)$ の被積分関数は、ベルヌーイ数の定義を思い出すと

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \sum_{\ell=0}^{k+1} \frac{B_\ell}{\ell!} x^{\ell-1} \right) x^{s-1} &= \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{\ell!} x^{\ell-1} - \sum_{\ell=0}^{k+1} \frac{B_\ell}{\ell!} x^{\ell-1} \right) x^{s-1} \\ &= \sum_{\ell=k+2}^{\infty} \frac{B_\ell}{\ell!} x^{\ell-1} \cdot x^{s-1} \\ &= \mathcal{O}(x^{s+k}) \quad (0 < x < 1) \end{aligned}$$

であることから、 $\Pi_k(s)$ の積分は $\mathcal{O}(x^{s+k+1})$ ($0 < x < 1$) となり、 $\operatorname{Re}(s) > -k - 1$ で有限値に収束することがわかる。よって、 $\Pi_k(s)$ は $\operatorname{Re}(s) > -k - 1$ において正則な関数である。

最後に、 $\text{III}_k(s)$ の積分は

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{k+1} \frac{B_\ell}{\ell!} \int_0^1 x^{s+\ell-2} dx &= \sum_{\ell=0}^{k+1} \frac{B_\ell}{\ell!} \left[\frac{x^{s+\ell-1}}{s+\ell-1} \right]_0^1 dx \\ &= \sum_{\ell=0}^{k+1} \frac{B_\ell}{\ell!} \cdot \frac{1}{s+\ell-1} \end{aligned}$$

となるので、 $s = 1, 0, -1, -2, \dots, -k$ に1位の極を持つ。ここで、 $s = 1$ 以外のすべての極は、 $\frac{1}{\Gamma(s)}$ の零点と打ち消しあう。よって、 $\text{III}_k(s)$ は $s = 1$ を除いた複素平面全体で正則である。

以上のことから、 $\zeta(s)$ は $k \geq 0$ である各整数 k に対し

$$\zeta(s) = I(s) + \Pi_k(s) + \text{III}_k(s)$$

は、 $\operatorname{Re}(s) > -k - 1$ において、 $s = 1$ の一点のみを除き、正則な関数として解析接続される。 k は好きに取れるので、結局 $\zeta(s)$ は $s = 1$ を除いた複素平面全体に解析接続される。

1.4.3 特殊値表示

上の $\zeta(s)$ の解析接続の式から、次の特殊値表示も得られる。

特殊値表示 (負の整数)。 $k \geq 0$ である整数 k に対し

$$\zeta(-k) = (-1)^k \frac{B_{k+1}}{k+1} \quad (1.39)$$

証明。 上の $\zeta(s)$ の解析接続において、 $I(s)$ と $II(s)$ の積分はともに有限であり、 $\frac{1}{\Gamma(s)}$ は $s = -k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) に零点を持つので

$$I(-k) = 0, \quad II_k(-k) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

となる。また、 $III_k(s)$ は

$$\begin{aligned} III_k(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{\ell=0}^{k+1} \frac{B_\ell}{\ell!} \cdot \frac{1}{s+\ell-1} \\ &= \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{1}{(s+k)\Gamma(s)} + \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{\ell=0}^k \frac{B_\ell}{\ell!} \cdot \frac{1}{s+\ell-1} \\ &= \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{s(s+1)\cdots(s+k-1)}{\Gamma(s+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{\ell=0}^k \frac{B_\ell}{\ell!} \cdot \frac{1}{s+\ell-1} \\ &\quad (\because \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \text{ を } k+1 \text{ 回用いた}) \end{aligned}$$

となるので、 $s = -k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) として

$$\begin{aligned} III_k(-k) &= \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{(-k)(-k+1)\cdots(-1)}{\Gamma(1)} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(-k)} \sum_{\ell=0}^k \frac{B_\ell}{\ell!} \cdot \frac{1}{-k+\ell-1} \\ &= \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} \cdot (-1)^k \frac{k!}{\Gamma(1)} + 0 \\ &= (-1)^k \frac{B_{k+1}}{k+1} \end{aligned}$$

となる。よって、 $k \geq 0$ である整数 k に対し

$$\begin{aligned}\zeta(-k) &= \text{I}(-k) + \text{II}_k(-k) + \text{III}_k(-k) \\ &= 0 + 0 + (-1)^k \frac{B_{k+1}}{k+1} \\ &= (-1)^k \frac{B_{k+1}}{k+1}.\end{aligned}$$

□

特殊値表示 (正の偶数). $k \geq 0$ である整数 k に対し

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{2k+1} (2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!} \quad (1.40)$$

証明. サイン関数の無限積展開 (1.22)

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right)$$

において、 $z =: \frac{u}{2i}$ とおき、両辺を対数微分する。まず左辺は

$$(\text{左辺}) = \sin \frac{u}{2i} = \frac{e^{\frac{u}{2}} - e^{-\frac{u}{2}}}{2i} = \frac{e^{\frac{u}{2}}(1 - e^{-u})}{2i}$$

であるから

$$\begin{aligned}\frac{d}{du} \log(\text{左辺}) &= \frac{d}{du} \left[\frac{u}{2} + \log(1 - e^{-u}) - \log 2i \right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^u - 1}\end{aligned}$$

となる。また、右辺は

$$(\text{右辺}) = \frac{u}{2i} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{u^2}{4\pi^2 n^2}\right) = \frac{u}{2i} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi^2 n^2 + u^2}{4\pi^2 n^2}$$

であるから

$$\begin{aligned}\frac{d}{du} \log(\text{右辺}) &= \frac{d}{du} \left[\log u - \log 2i + \sum_{n=1}^{\infty} \log(4\pi^2 n^2 + u^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \log 4\pi^2 n^2 \right] \\ &= \frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2u}{4\pi^2 n^2 + u^2}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2u}{4\pi^2 n^2 + u^2}.$$

ここで左辺は、ベルヌーイ数の定義 (1.36)

$$\frac{u}{e^u - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} u^k$$

と、 $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$ であることを用いて

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{u} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} u^k - \frac{1}{u} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{u} (B_0 + B_1 u) + \frac{1}{u} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_k}{k!} u^k - \frac{1}{u} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{u} \left(1 - \frac{u}{2}\right) + \frac{1}{u} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_k}{k!} u^k - \frac{1}{u} \\ &= \frac{1}{u} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_k}{k!} u^k \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_k}{k!} u^k &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2u^2}{4\pi^2 n^2 + u^2} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{u}{2\pi n}\right)^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{u}{2\pi n}\right)^2} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{u}{2\pi n}\right)^2 \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{u}{2\pi n}\right)^{2r} \\ &= 2 \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{u}{2\pi n}\right)^{2r+2} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{u}{2\pi n}\right)^{2k} \quad (k := r+1) \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k) u^{2k}. \end{aligned}$$

両辺を u のべき乗として比較すると、右辺は偶数次の項からなるので、 k が 3 以上のとき $B_k = 0$ であることがわかる。また、 u^{2k} の係数を比較することで

$$\frac{B_{2k}}{(2k)!} = 2 \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k)$$

となり、整理すれば結論を得る。 □

上の証明から次のことも得られた。

定理. k が 3 以上の奇数のとき $B_k = 0$ である。

1.4.4 $\zeta(s)$ の零点と非零領域

(1.39) と、ベルヌーイ数 B_k は k が 3 以上の奇数のとき $B_k = 0$ であることから、 $\zeta(s)$ は s が負の偶数のとき零点を持つことがわかる。これらの零点はゼータ関数の**自明な零点**と呼ばれる。

$$\zeta(-2n) = 0 \quad (n \geq 1, n \in \mathbb{Z}).$$

自明な零点以外にも $\zeta(s) = 0$ となるような複素数 s は存在するのだが、それらはゼータ関数の**非自明な零点**と呼ばれ、存在分布の規則性は未だにわかっていない。しかしこれから示すことによって、 $\zeta(s)$ の非自明な零点が存在する領域をある程度絞ることができる。

定理. $\zeta(s)$ は絶対収束域で非零である。すなわち、 $\operatorname{Re}(s) > 1$ なる領域で $\zeta(s) \neq 0$ である。

証明. 第 1.1.1 節で示したように、ゼータ関数 $\zeta(s)$ は次のようにかける（オイラー積表示）。

$$\zeta(s) = \prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}. \quad (1.41)$$

無限積が収束すればその値は非零なので*8、(1.41) の右辺の無限積が $\operatorname{Re}(s) > 1$ で収束することを示せばよい。 $\operatorname{Re}(s) \equiv \sigma$ とすれば

$$\sum_{p:\text{素数}} \left| \frac{1}{p^s} \right| = \sum_{p:\text{素数}} \frac{1}{p^\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}$$

であり、最右辺は $\sigma > 1$ すなわち $\operatorname{Re}(s) > 1$ で収束するので、(1.41) の右辺は $\operatorname{Re}(s) > 1$ で絶対収束する。よって、 $\operatorname{Re}(s) > 1$ において $\zeta(s) \neq 0$ である。 □

上では $\operatorname{Re}(s) > 1$ において $\zeta(s) \neq 0$ であることを見たが、さらに境界 $\operatorname{Re}(s) = 1$ においても $\zeta(s) \neq 0$ であることが知られている。さらに、ゼータ関数のオイラー積表示

*8 第 1.2.2 節を参照

(1.41) は境界 $\operatorname{Re}(s) = 1$ ($s \neq 0$) において (絶対収束とは限らない普通の) 収束することとも知られている。すなわち、この境界上では $\zeta(s)$ が単に非零であるだけでなく、オイラー積表示が収束するような非零となっている。また、オイラー積表示の収束領域はこの境界以上には広がらないことも知られている。

証明は省略するが、このことを改めて定理として書いておく。

定理. 境界 $\operatorname{Re}(s) = 1$ ($s \neq 0$) で $\zeta(s) \neq 0$ である。

証明. 省略 (ToT) □

最後に、完備ゼータ関数というものを定義すると、以下のような美しい関数等式が成り立つことを紹介しておく。

定理 (関数等式). 完備ゼータ関数を

$$\hat{\zeta}(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) \quad (1.42)$$

とおくと、関数等式

$$\hat{\zeta}(s) = \hat{\zeta}(1-s) \quad (1.43)$$

が成り立つ。

証明. 省略 (ToT) □

先ほど示した $\zeta(s)$ が $\operatorname{Re}(s) \geq 1$ で非零であることと、この関数等式を使うことで、 $\zeta(s)$ は自明な零点 ($s = -2, -4, -6, \dots$) を除き、 $\operatorname{Re}(s) \leq 0$ においても非零であることがわかる。つまり、 $\zeta(s)$ は自明な零点を除いた $\operatorname{Re}(s) \leq 0$ および $1 \leq \operatorname{Re}(s)$ の領域では非零である。

1.4.5 リーマン予想

ここでようやく本題のリーマン予想の話に入る。ゼータ関数とお友達になった今の私たちには、リーマンの主張をすぐに理解することができる。それは次のようである。

命題 (リーマン予想). ゼータ関数 $\zeta(s)$ のすべての非自明な零点は、 $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$ の直線上にある。

前節で述べたように、 $\zeta(s)$ は自明な零点を除いた $\operatorname{Re}(s) \leq 0$ および $1 \leq \operatorname{Re}(s)$ の

領域では非零である。よって、もし非自明な零点が存在するならば、それらはすべて $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ の領域にあることがわかる。リーマンの主張は零点の存在領域がさらに $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$ にまで狭められるというのだ。しかし、リーマンの予想が発表されてから 150 年以上経った現在においても、零点の収束領域を $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ よりさらに狭めることに成功した人は存在しない。

主張がシンプルな割に 150 年以上も解かれていないというこのツンデレな予想は、クレイ数学研究所のミレニアム懸賞問題にもなっている。つまりこれを解けば（肯定的な証明を与えれば）懸賞金 100 万ドル（= iPhone XS 1000 個分）が貰えるのである！ ただし反例を見つけて予想を否定したのでは懸賞金は貰えないらしいので、今すぐ PC を起動して数値計算してやろうとしている人は一旦落ち着こう。

また、非自明な零点は何個ぐらいあるのか気になるところであるが、これは既に $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ の領域に無限個存在することが証明されている。 $N(T)$ を $\zeta(s)$ の零点で

$$0 < \operatorname{Re}(s) < 1, \quad 0 < \operatorname{Im}(s) \leq T$$

を満たすものの個数とすると、次の定理が成り立つ。

定理 ($N(T)$ の挙動).

$$N(T) = \frac{T \log T}{2\pi} - \frac{1 + \log 2\pi}{2\pi} + \mathcal{O}(\log T) \quad (T \rightarrow \infty) \quad (1.44)$$

証明. 省略 (ToT) □

この定理から $N(T)$ の主要項のオーダーは $T \log T$ であり、これは $T \rightarrow \infty$ のとき ∞ の発散するので、非自明な零点は無限個存在することがわかる。

1.4.6 素数定理

偉い人たちがゼータ関数の非自明な零点にこだわるのには理由がある。それはみんな大好き素数の話と関係がある。まずは素数階段というものを作ってみよう。次の図 1.7 のように素数が来るたびに 1 だけ上がる関数^{*9}である。

^{*9} 素数の点 $x = x_p$ で $\pi(x)$ を垂直に上げてしまうと（一価）関数にならないので、その点では不連続に

$$\pi(x_p) := \frac{1}{2} [\pi(x_p - 0) + \pi(x_p + 0)]$$

の値を取るとする。

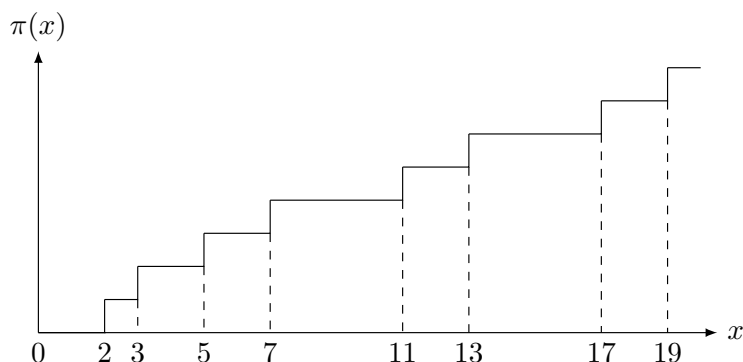


図 1.7 素数階段

この関数を $\pi(x)$ と書く。素数は英語で prime number というので、その頭文字 p に対応するギリシャ文字 π という名前が付けられている。円周率とは関係ない。

$\pi(x)$ には x 以下の素数の個数という意味がある。つまり $\pi(x)$ を具体的な x の式として表すことができれば、素数の分布が正確にわかることになる。果たしてそのようなことができるのであろうか。まずは近似式^{*10} として、以下の定理を与える。

定理 (素数公式). $\pi(x)$ について、以下の近似式が成り立つ。

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \sim \text{li}(x) \quad (x \rightarrow \infty). \quad (1.45)$$

ここで $\text{li}(x)$ は次式で定義される対数積分関数である。

$$\text{li}(x) := \int_2^x \frac{du}{\log u}. \quad (1.46)$$

注意. $x/\log x$ より $\text{li}(x)$ の方が近似の精度がよいことが示されている。

証明. 省略 (ToT)

□

^{*10} ここでは近似記号 “ \sim ” (ニヨロ) は

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \rightarrow \infty) \stackrel{\text{def}}{\iff} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

と定義されているとする。

定理 (明示公式). $\pi(x)$ について、以下の等式が成り立つ。

$$\pi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m} \left(\text{Li}\left(x^{\frac{1}{m}}\right) - \sum_{\widehat{\zeta}(\rho)=0} \text{Li}\left(x^{\frac{\rho}{m}}\right) - \log 2 + \int_{x^{\frac{1}{m}}}^{\infty} \frac{du}{(u^2-1)u \log u} \right).$$

注意. 上の定理において、 $\text{Li}(x)$ は

$$\text{Li}(x) := \int_0^x \frac{du}{\log u} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\int_0^{1-\epsilon} \frac{du}{\log u} + \int_{1+\epsilon}^x \frac{du}{\log u} \right)$$

で定義される対数積分であり、 ρ は $\zeta(s)$ の非自明な零点を表す。また、 $\mu(m)$ はメビウス関数と呼ばれ

$$\mu(m) := \begin{cases} +1 & (m \text{ が偶数個の相異なる素数の積}) \\ -1 & (m \text{ が奇数個の相異なる素数の積}) \\ 0 & (m \text{ が素数の平方で割れる}) \end{cases}$$

と定義されている。具体的には

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu(m)$	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1

のようである。

証明. 省略 (ToT)

□

この定理は $\pi(x)$ に厳密に等しい式を与えている。そしてそこにゼータ関数の非自明な零点が絡んでいる!!!! しかし、 $\pi(x)$ の式が与えられたといっても、無限級数や広義積分が使われているため、数値計算で厳密に $\pi(x)$ を知ることはできない。さらにゼータ関数の零点も無限個あるのでなおさらだ。こんな式は使わないで、普通に素数判定プログラム作った方が早そう.....

1.4.7 リーマン予想と RSA 暗号

某公共放送局の某番組でそのように伝えられてしまったが故かは知らないが、リーマン予想が証明されると RSA 暗号（現在一般的な暗号方式）が無意味になってしまうなどと、いくらかの人がそういう心配をしているのをたまに見かける。結論から言えばそんなことはない。

RSA 暗号は、簡単というかテキトーに言うと、デカイ素数の積（公開鍵）をその約数であるデカイ素数（秘密鍵）を用いて因数分解することで暗号を復元している。これがなぜ暗号として機能するかというと、デカイ数の因数分解は短時間（例えば数ヶ月）では計算できないからである。素因数分解のアルゴリズムはいろいろあるが、わざわざそれに前節に書いた $\pi(x)$ の公式を使って素数判定するのは賢くない。 $\zeta(s)$ の非自明な零点が $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$ にしかないということがわかれば、確かに非自明な零点を探すのは楽になるがそれだけである。

例えば暗号方式などについて全くの無知であっても、リーマン予想が解かれることで現在使われている暗号が無意味になってしまうという主張は正しくないことがわかる。もしリーマン予想が暗号解読に繋がるのならば、仮にそれが真であると仮定してしまえば暗号は解読できることになってしまう。リーマン予想は広く知られているのに、現在も RSA 暗号が使われていることから、リーマン予想は暗号解読に影響しないことがわかる。よって、リーマン予想が証明されたところで世の中は大して変わらない。数学界については知らないが。

暗号解読に関係するのはむしろ、 $P \neq NP$ 予想と呼ばれる問題の方である。こちらもミレニアム懸賞問題になっている。よくわからんが、現在では因数分解を多項式時間で行うアルゴリズムは見つかっていないが、もし $P = NP$ が証明されてしまうと、多項式時間で因数分解ができるアルゴリズムが存在することになってしまうらしい。そしてもしそのアルゴリズムが発見されると、今度こそ RSA 暗号が簡単に解読することができてしまうのかな？ ただし、 $P \neq NP$ 予想という名前からわかるように、 $P \neq NP$ であるだろうと多くの人が考えているらしい。

1.4.8 数値計算（ギャラリー）

最後に付録として、 $\Gamma(s)$ や $\zeta(s)$ 、素数公式の様子などを Fortran で数値計算し、Gnuplot と TikZ を用いて^{*11} 美しい(?) 図を作成したので、それらをいくつか載せておく。クリティカルライン $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$ 上の $\zeta(s)$ も計算したので是非参照されたい。

^{*11} Gnuplot で pdf を直接出力しても十分美しいグラフを作成できるが、Gnuplot の出力先を TikZ に変更し (`set terminal tikz`)、 \LaTeX を経由してグラフを作成した方がより美しいものが得られる。その際には、 \LaTeX 側でプリアンブルに `\usepackage{gnuplot-lua-tikz}` と記し、`\input` コマンドで Gnuplot が吐いた tex ファイルを読み込むだけでよい。ただし、Gnuplot から `gnuplot-lua-tikz.sty` を生成しておく必要がある。

ガンマ関数 $\Gamma(s)$

まずは、相反公式を変形した

$$\Gamma(s) = \frac{\pi}{\Gamma(1-s) \sin \pi s} \quad (1.47)$$

によって複素数全体へと解析接続されたガンマ関数 $\Gamma(s)$ のグラフを紹介する。ガンマ関数の性質

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad (1.48)$$

を用いて計算するより、(1.47) を用いた方が多少精度が良かった。とはいえ、図 1.8 を見ればわかりやすいが、 s が -4 より小さいところでは無限大に発散する様子が上手く描かれていない。教科書に載っているような美しい図を描くのはなかなか難しそうである。素人のプログラムではこれが限界だったので堪忍していただきたい。

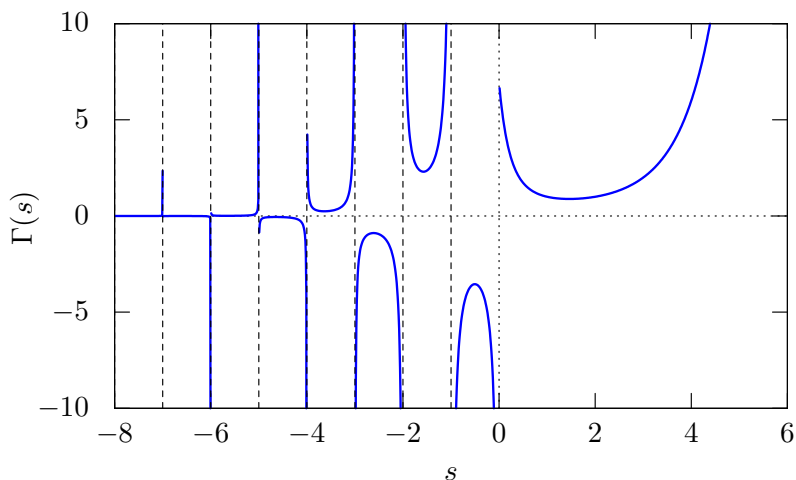
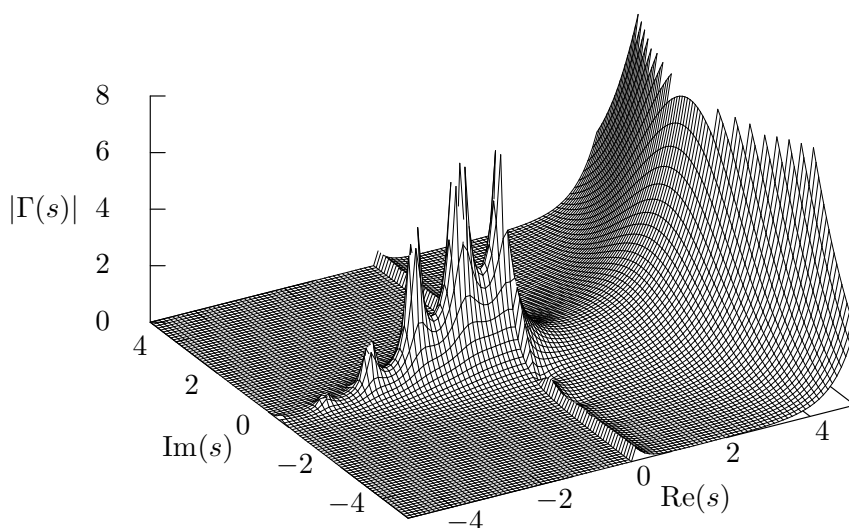


図 1.8 解析接続した $\Gamma(s)$ 。 s および $\Gamma(s)$ は実数。

図 1.9 は x, y 軸に引数 s の実部と虚部を表し、 z 軸に $\Gamma(s)$ の絶対値を表している。虚軸付近に小さな山が見えるが、これは計算精度のせいで生じてしまったものであり、実際は存在しないらしい。ガンマ関数を数値計算するときは Lanczos 近似というものを使うのが良いらしいが、ここでは深入りしない。

図 1.9 $|\Gamma(s)|$ の値。3次元プロット。

素数階段と素数公式

次に、素数公式

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \sim \text{li}(x) \quad (x \rightarrow \infty) \quad (1.49)$$

の様子を図にした。図 1.10, 1.11 を見ると、確かに素数公式は正しいようであることがわかる。また、 x がある程度大きいところでは、常に $x/\log x < \pi(x) < \text{li}(x)$ の関係があることがわかる。

明示公式の方については、式を見るだけで非常に面倒臭いことを悟ってしまったので、今回はパスすることにした。tsujimotter さん^{*12} が明示公式が $\pi(x)$ に収束する様子を体感できるブラウザアプリを公開していたので、是非そちら^{*13} で確認していただきたい。

^{*12} <http://tsujimotter.hatenablog.com/about>

^{*13} こちら：「リーマンの素数公式を可視化する」<http://tsujimotter.hatenablog.com/entry/2014/06/29/002109>

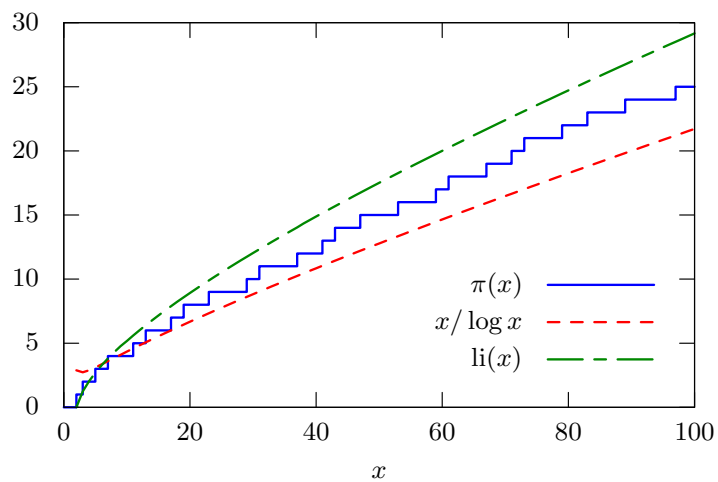


図 1.10 $\pi(x)$ とその近似式。 $x \leq 100$ 。

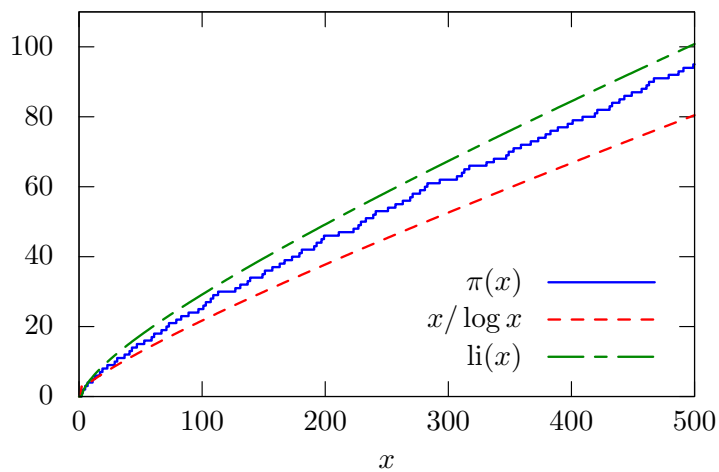


図 1.11 $\pi(x)$ とその近似式。 $x \leq 500$ 。

ゼータ関数 $\zeta(s)$

初めに $s > 1$ について級数で定義したゼータ関数 (1.2) の様子を見てみる。当然無限回足しあげるのは不可能なので、第 N 項までで切り上げることにする。

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s}.$$

図 1.12 を見ればわかるように、この級数は収束が非常に遅い。 $s \rightarrow 1$ で $\zeta(s) \rightarrow \infty$ になることは既に示したが、図 1.12 で見られるように、 $N = 10^6 = 1,000,000$ まで足し上げても $s \rightarrow 1$ で $\zeta(s)$ は 14 にも満たない。

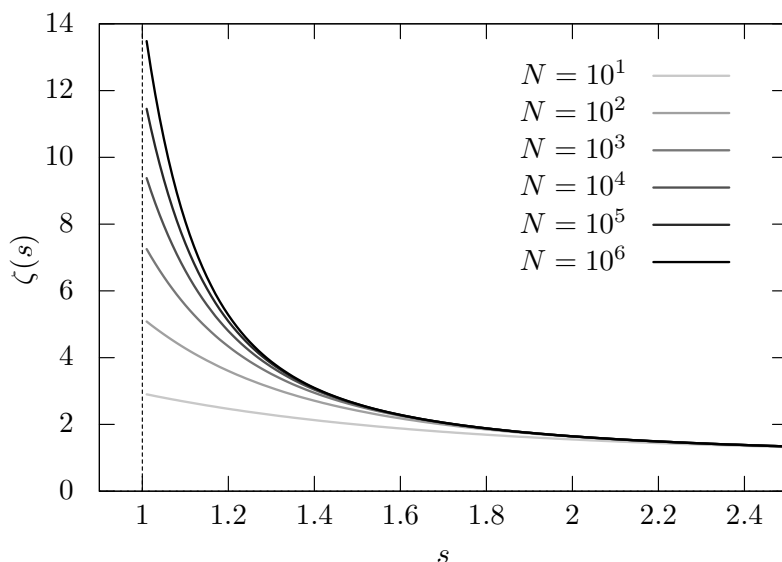


図 1.12 級数表示 (1.2) による $\zeta(s)$ 。

1.3.2 節の (1.15) で $\zeta(s)$ を解析接続した際にも、 $s = 1 + \varepsilon$ における収束性の悪さが、 $\text{Re}(s)$ が 1 以下の領域にも影響してくる。実際、この解析接続で $\zeta(s)$ の値を計算してみたが、やはり上手くいかなかった。

そこで、本文中では証明を与えていないが、tsujimotter さんなどいくつかのサイトで紹介されている次の式で $\zeta(s)$ を $s = 1$ を除く複素数全体へ解析接続する。

$$\zeta(s) := \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} \binom{m-1}{j-1} j^{-s}. \quad (1.50)$$

この解析接続の証明はせきゅーんさん^{*14} の記事「リーマンゼータ関数の級数表示による解析接続 (<http://integers.hatenablog.com/entry/2016/08/16/133319>)」で紹介されている。今回はこの式を使わせていただいて、 $\zeta(s)$ の数値計算をしてみようと思う。

まずは実軸上の値を計算し、 $s > 1$ ではちゃんと解析接続する前の $\zeta(s)$ と一致していることを確認する。

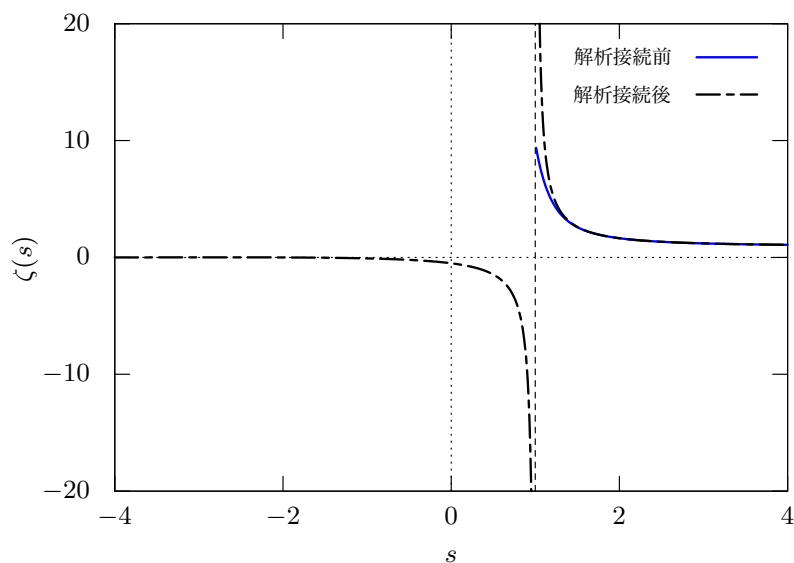


図 1.13 解析接続した $\zeta(s)$ 。 s は実数。

図 1.13 からわかるように、(1.50) で解析接続した $\zeta(s)$ は $s > 1$ でちゃんと解析接続前と一致するどころか、解析接続前のものより収束が速くなっている。この図を描くとき外側の級数は $m = 10$ までしか足し上げていない。それでこんなに収束が速くなるので驚きだ。

この式を信用してもらえたところで、次は実軸上の自明な零点について見てみる。 $s < 0$ での振動は非常に小さく、図 1.13 では零点があるのかよくわからないのでもう少し拡大してみる。

^{*14} <http://integers.hatenablog.com/about>

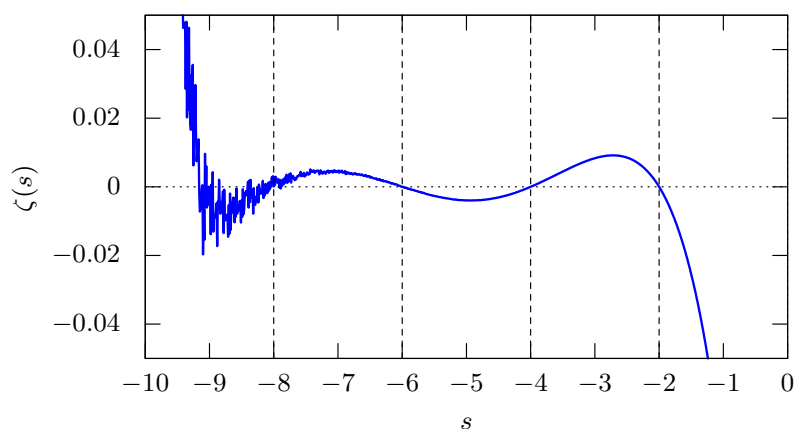
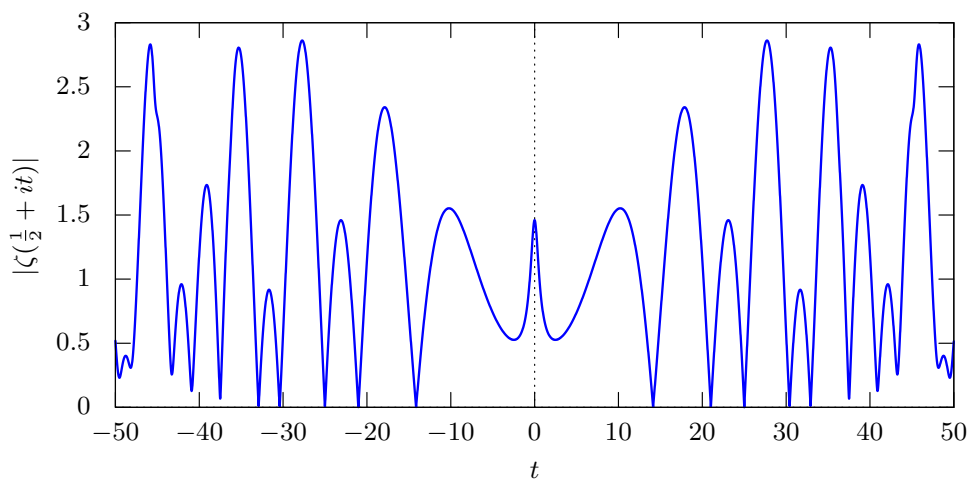
図 1.14 解析接続した $\zeta(s)$ の自明な零点。

図 1.14 から確かに $\zeta(s)$ は s が負の偶数に零点を持っていることがわかる。しかし私のチーププログラムでは $s = -8$ ぐらいまでが限界で、それより小さいところの様子はわからない。こちらも $\zeta(s)$ の値を計算するとき外側の級数は $m = 10$ までにしてある。 m の上限をあげると精度が増すはずなのだが、あまりそれをしてしまうと二項係数の部分がオーバーフローしてしまい、訳のわからないことになってしまう（これで 5 時間ほど無駄にした）。とりあえず自明な零点についてはこれで妥協していただきたい。

図 1.15 解析接続した $\zeta(s)$ の非自明な零点。

次に本題である $\zeta(s)$ の非自明な零点について見てみる (図 1.15)。リーマンによって $\zeta(s)$ の非自明な零点は全て $s = \frac{1}{2} + it$ 上にあるだろうと予想されている。この直線はクリティカルラインと呼ばれている。

複素変数の複素関数を 2 次元や 3 次元にプロットするのは困難なので、以降 $\zeta(s)$ の値は絶対値を取ることにする。図 1.15 が左右対称になっているのはそのためである^{*15}。

先人たちによって既に知られている非自明な零点の虚部を、原点に近い順に書いてみると、以下の表のようである^{*16}。ただし虚部が負の部分は省略している。

表 1.1 $\zeta(s)$ の非自明な零点

番号	虚部 $\text{Im}(s) = t$
1	14.1347251417346937904572519835624766
2	21.0220396387715549926284795938969162
3	25.0108575801456887632137909925627734
4	30.4248761258595132103118975305839571
5	32.9350615877391896906623689640747418
6	37.5861781588256712572177634807052984
7	40.9187190121474951873981269146334247
8	43.3270732809149995194961221654068456
9	48.0051508811671597279424727494276636
10	49.7738324776723021819167846785638367

表 1.1 を参照しつつ図 1.15 を見てみると、確かに $t = 14, 21, 25, 30, 33$ 付近に零点があることがわかる。

最後に $\zeta(s)$ の 3 次元プロットを見て終わりにしよう。図 1.16 は原点周りの $\zeta(s)$ の全体像である。1 つ目の非自明な零点が見られる。

また、図 1.17 は実軸付近の様子を描いている。自明な零点と $s = 1$ で発散する点が見られる。ただし自明な零点の凹凸は非常に小さいため、 $|\zeta(s)|$ の値は対数表示している。

^{*15} 一般に複素数 z について、実数 x, y を用いて $z = x + iy$ と書けたとすると、 $|z| \equiv \sqrt{z\bar{z}}$ であるから、 $|\bar{z}| = \sqrt{\bar{z}z} = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\bar{z}z}$ となり、 $|z| = |\bar{z}|$ すなわち $|x + iy| = |x - iy|$ であるので、複素数の絶対値は虚部について反転対称性がある。

^{*16} 引用元：<http://www.lmfdb.org/zeros/zeta/>

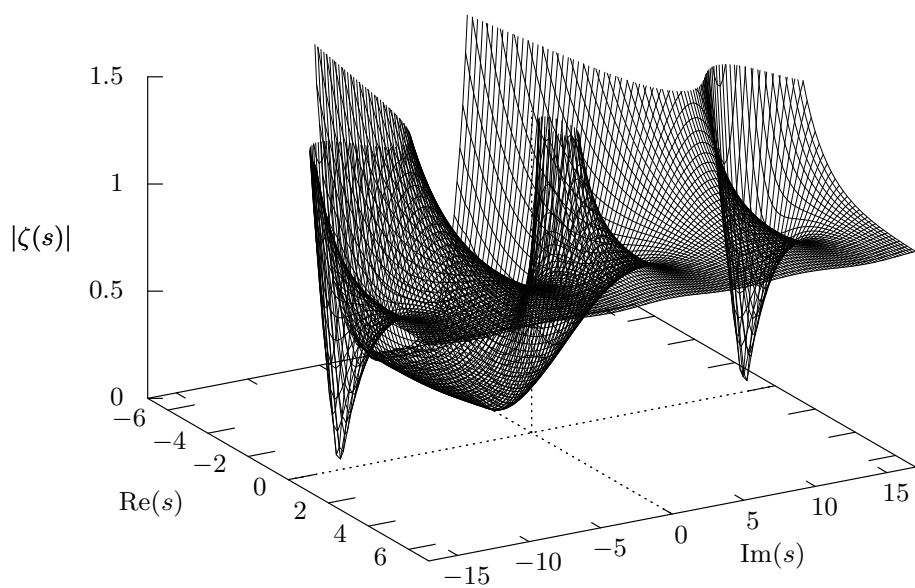
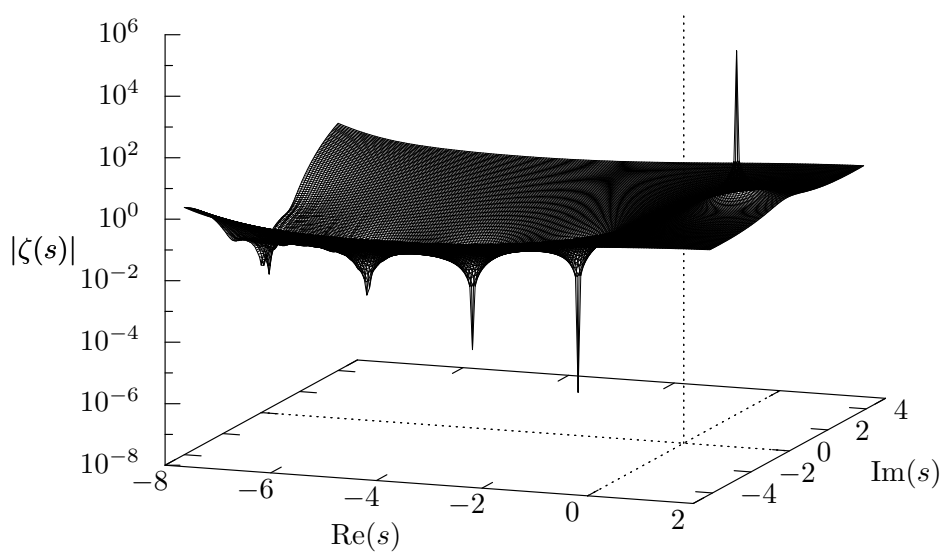
図 1.16 $|\zeta(s)|$ の値。3次元プロット。図 1.17 実軸付近。 $|\zeta(s)|$ の自明な零点が見られる。

図 1.18 はクリティカルライン $s = \frac{1}{2} + it$ 付近の $|\zeta(s)|$ の値を描いている。一体どういう規則で非自明な零点は現れるのであろうか。

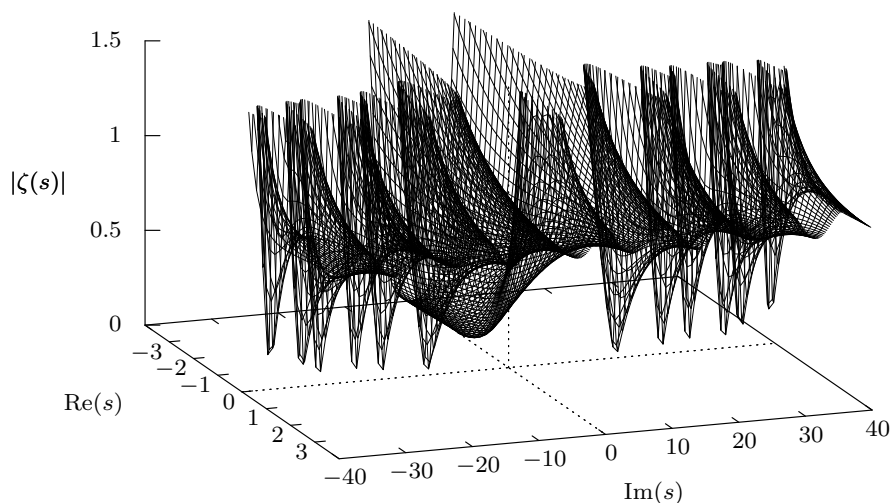


図 1.18 クリティカルライン付近。 $|\zeta(s)|$ の非自明な零点が見られる。

おわりに

今回配布する会誌では予算の都合上、図などがモノクロ印刷となってしまう大変見にくいものであるかと思いますが、うちの研究会のホームページ <http://rp2017xy.starfree.jp/> に会誌を PDF でアップロードする予定なので、フルカラーなキレイな図を見たい方は是非そちらも確認していただきたい。以上、お疲れ様でした。

T H E E N D

T H A N K Y O U F O R R E A D I N G

参考文献

書籍

- [1] 小山信也; 素数とゼータ関数; 共立出版社; 2016.
- [2] 森正武, 杉原正顯; 複素関数論; 岩波書店; 2003.
- [3] 野村隆昭; 複素関数論講義; 共立出版; 2016.
- [4] 福山秀敏, 小形正男; 基礎物理学シリーズ 3 物理数学 I; 朝倉書店; 2015.
- [5] ハロルド・M・エドワーズ 著, 鈴木治郎 訳; 明解 ゼータ関数とリーマン予想; 講談社; 2012.

Web サイト

- [1] 全ての素数の無限積が $4\pi^2$ であることの数学的な証明; 2016/04/04.
<https://www.youtube.com/playlist?list=PL006ccJyFqlHtQQhonFlgactqdunSQ10W>
- [2] のんびり固体物理学; ゼータ関数の導関数の特殊値 $\zeta'(0)$ の導出; 2017/02/12.
<http://solidstatephysics.blog.fc2.com/blog-entry-24.html>
- [3] INTEGERS; 階乗とガンマ関数; 2015/11/30.
<http://integers.hatenablog.com/entry/2015/11/30/020829>
- [4] 倭算数理研究所; ベルヌーイ数; 2013/08/23.
<https://wasan.hatenablog.com/entry/2013/08/23/040806>
- [5] tsujimotter; リーマンの素数公式を可視化する; 2014/06/29.
<http://tsujimotter.hatenablog.com/entry/2014/06/29/002109>
- [6] LMFDB; Zeros of $\zeta(s)$; 2018/08/16.
<http://www.lmfdb.org/zeros/zeta/>
- [7] INTEGERS; リーマンゼータ関数の級数表示による解析接続; 2016/08/16.
<http://integers.hatenablog.com/entry/2016/08/16/133319>
- [8] tsujimotter; リーマンのゼータ関数で遊び倒そう (Ruby 編); 2015/02/11.
<http://tsujimotter.hatenablog.com/entry/riemann-zeta-function>