# KOMPLEKSNI BROJEVI

23. septembar 2020

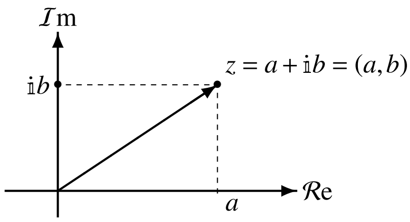
Kompleksni brojevi su uređeni parovi realnih brojeva, pri čemu je uobičajeno da kompleksni broj $z = (a, b)$ zapisujemo u tzv. ***algebarskom obliku***

$$z = a + \mathbb{i}b,$$

gde je $\mathbb{i}$ ***imaginarna jedinica*** koja je definisana kao broj sa osobinom

$$\mathbb{i}^2 = -1.$$

Svakom kompleksnom broju $z = a + \mathbb{i}b$ u ***kompleksnoj ravni*** jednoznačno odgovara vektor $\overrightarrow{Oz}$ čija je početna tačka u koordinatnom početku, a krajnja tačka ima koordinate $(a, b)$ (vidi sliku 1). U kompleksnoj ravni je uobičajeno da umesto $x$-ose i $y$-ose




Slika 1: Kompleksni broj kao vektor u kompleksnoj ravni.

koristimo redom nazive ***realna osa*** i ***imaginarna osa***.

**Definicija 1** *Za kompleksni broj $z = a + \mathbb{i}b$ definišemo*

- ***realni deo**: $\mathcal{R}\mathrm{e}(z) \stackrel{\text{def}}{=} a$,*
- ***imaginarni deo**: $\mathcal{I}\mathrm{m}(z) \stackrel{\text{def}}{=} b$,*
- ***konjugovani kompleksni broj**: $\overline{z} \stackrel{\text{def}}{=} a - \mathbb{i}b$,*
- ***moduo**: $|z| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{a^2 + b^2}$,*

- ***argument***: $\arg z \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a} & , \quad a > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a} & , \quad a < 0 \land b \geq 0 \\ -\pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a} & , \quad a < 0 \land b < 0 \\ \frac{\pi}{2} & , \quad a = 0 \land b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & , \quad a = 0 \land b < 0 \end{cases}$ .

◃

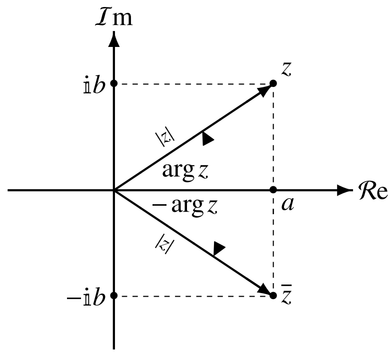
☞ Argument kompleksnog broja 0 se ne definiše, a argument kompleksnog broja različitog od nule je broj iz intervala $(-\pi, \pi]$, tzv. ***intervala glavne vrednosti argumenta kompleksnog broja***.

☞ Svaki od prethodno navedenih pojmova ima svoju geometrijsku interpretaciju u kompleksnoj ravni. Naime, za kompleksni broj $z = a + \mathbb{i}b$ i njemu odgovarajući vektor $\overrightarrow{0z}$ je:

- realni deo $a$ je projekcija tačke $z$ na realnu osu;
- za imaginarni deo $b$ je tačka $\mathbb{i}b$ projekcija tačke $z$ na imaginarnu osu osu;
- konjugovani kompleksni broj $\overline{z} = a - \mathbb{i}b$ je tačka koja je osnosimetrična tački $z$ u odnosu na realnu osu;
- moduo kompleksnog broja $z$ je intenzitet vektora $\overrightarrow{0z}$;
- argument kompleksnog broja $z$ je mera orijentisanog ugla kojeg zaklapaju pozitivni deo realne ose i vektor $\overrightarrow{0z}$, i meri se realnim brojevima iz intervala $(-\pi, \pi]$ (interval glavne vrednosti argumenta).

☞ Uočimo da za kompleksne brojeve $z$ i $\overline{z}$ važi (vidi sliku 2)

$$|z| = |\overline{z}|, \qquad \arg z = -\arg \overline{z}. \tag{1}$$




Slika 2: Argument kompleksnog broja.

Osim u algebarskom vektorskom obliku, kompleksne brojeve po potrebi možemo predstavljati i u ***Ojlerovom*** ili ***trigonometrijskom obliku***:

$$z = \underbrace{a + \mathbb{i}b}_{\substack{\text{algebarski}\\ \text{oblik}}} = \underbrace{\overrightarrow{0z}}_{\substack{\text{vektorski}\\ \text{oblik}}} = \underbrace{\rho e^{\mathbb{i}\varphi}}_{\substack{\text{Ojlerov}\\ \text{oblik}}} = \underbrace{\rho(\cos\varphi + \mathbb{i}\sin\varphi)}_{\substack{\text{trigonometrijski}\\ \text{oblik}}}$$

gde je

$$\begin{array}{lll} \rho = |z| = \left|\overrightarrow{0z}\right|, & a = \rho\cos\varphi, & \rho \in [0,\infty), \ \varphi \in (-\pi,\pi], \\ \varphi = \arg z = \sphericalangle\left(\mathcal{R}\mathrm{e}^+, \overrightarrow{0z}\right), & b = \rho\sin\varphi, & a,b \in \mathbb{R}. \end{array} \tag{2}$$

☞ Uočimo da za kompleksne brojeve $z_1 = x_1 + \mathbb{i}y_1 = \rho_1 e^{\mathbb{i}\varphi_1}$ i $z_2 = x_2 + \mathbb{i}y_2 = \rho_2 e^{\mathbb{i}\varphi_2}$ (različite od 0) važi

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1 = x_2 \ \wedge \ y_1 = y_2) \quad \Leftrightarrow \quad (\rho_1 = \rho_2 \ \wedge \ \exists k \in \mathbb{Z}, \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi).$$

***Osnovne operacije u skupu kompleksnih brojeva i njihove geometrijske interpretacije***: neka je $z = x + \mathbb{i}y = \rho e^{\mathbb{i}\varphi}$ i $w = a + \mathbb{i}b = re^{\mathbb{i}\psi}$, i neka je $n \in \mathbb{N}$.

[±] $z \pm w = (x \pm a) + \mathbb{i}(y \pm b)$,

tj.

$\mathcal{R}\mathrm{e}(z \pm w) = \mathcal{R}\mathrm{e}(z) \pm \mathcal{R}\mathrm{e}(w)$,

$\mathcal{I}\mathrm{m}(z \pm w) = \mathcal{I}\mathrm{m}(z) \pm \mathcal{I}\mathrm{m}(w)$.

Uočimo da se zbog prethodno navedenih jednakosti kompleksni brojevi sabiraju kao vektori (po pravilu paralelograma), tj. ako je $u = z \pm w$, tada je $\overrightarrow{0u} = \overrightarrow{0z} \pm \overrightarrow{0w}$. Kompleksne brojeve nije zgodno sabirati u Ojlerovom obliku. Ako su zadani u Ojlerovom ili trigonometrijskom obliku, tada ih najpre pretvaramo u algebarski oblik a zatim sabiramo.

[·] $zw = (xa - yb) + \mathbb{i}(xb + ya) = \rho r e^{\mathbb{i}(\varphi+\psi)}$,

tj.

$\mathcal{R}\mathrm{e}(zw) = \mathcal{R}\mathrm{e}(z)\mathcal{R}\mathrm{e}(w) - \mathcal{I}\mathrm{m}(z)\mathcal{I}\mathrm{m}(w)$,

$\mathcal{I}\mathrm{m}(zw) = \mathcal{R}\mathrm{e}(z)\mathcal{I}\mathrm{m}(w) + \mathcal{I}\mathrm{m}(z)\mathcal{R}\mathrm{e}(w)$,

$|zw| = |z||w|$,

$\arg zw = \arg z +_{2\pi} \arg w \in (-\pi, \pi]$.

Dakle, u algebarskom obliku kompleksne brojeve množimo kao realne binome, koristeći pri tome da je $\mathbb{i}^2 = -1$. U Ojlerovom i trigonometrijskom obliku, kompleksne brojeve množimo tako što im pomnožimo module i saberemo argumente.

[/] $\dfrac{z}{w} = \dfrac{x + \mathbb{i}y}{a + \mathbb{i}b} \cdot \dfrac{a - \mathbb{i}b}{a - \mathbb{i}b} = \dfrac{xa + yb}{a^2 + b^2} + \mathbb{i}\dfrac{ya - xb}{a^2 + b^2} = \dfrac{\rho}{r} e^{\mathbb{i}(\varphi-\psi)}$,

tj. $\mathcal{R}\mathrm{e}\left(\dfrac{z}{w}\right) = \dfrac{\mathcal{R}\mathrm{e}(z)\mathcal{R}\mathrm{e}(w) + \mathcal{I}\mathrm{m}(z)\mathcal{I}\mathrm{m}(w)}{|w|^2}$,

$\mathcal{I}\mathrm{m}\left(\dfrac{z}{w}\right) = \dfrac{\mathcal{I}\mathrm{m}(z)\mathcal{R}\mathrm{e}(w) - \mathcal{R}\mathrm{e}(z)\mathcal{I}\mathrm{m}(w)}{|w|^2}$,

$\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$,

$\arg \frac{z}{w} = \arg z -_{2\pi} \arg w \in (-\pi, \pi]$.

Primetimo da pri deljenju kompleksnih brojeva u Ojlerovom i trigonometrijskom obliku njihove module delimo a argumente oduzimamo.

$[\ ^n]$ Stepenovati kompleksni broj u algebarskom obliku možemo primenom binomnog obrasca

$$z^n = (x + \mathbb{i}y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \mathbb{i}^{n-k},$$

gde je

$$\mathbb{i}^m = \begin{cases} 1 & , \text{ ako je } m = 4j \text{ za neko } j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ \mathbb{i} & , \text{ ako je } m = 4j+1 \text{ za neko } j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ -1 & , \text{ ako je } m = 4j+2 \text{ za neko } j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ -\mathbb{i} & , \text{ ako je } m = 4j+3 \text{ za neko } j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}.$$

Međutim, kompleksne brojeve je mnogo lakše stepenovati kada su u Ojlerovom obliku[1]:

$$z^n = \rho^n e^{\mathbb{i}n\varphi}, \quad \text{tj.} \quad |z^n| = |z|^n, \quad \arg z^n = n \cdot_{2\pi} \arg z \in (-\pi, \pi], \tag{3}$$

odnosno

$$z^n = \rho^n (\cos(n\varphi) + \mathbb{i} \sin(n\varphi)).$$

$[\sqrt[n]{\ }]$ Svaka od prethodnih operacija u skupu $\mathbb{R}$ je restrikcija dotične operacije u skupu $\mathbb{C}$. Sa korenovanjem to nije slučaj, iako koristimo istu oznaku $\sqrt[n]{\ }$ u oba skupa[2]. U skupu kompleksnih brojeva je korenovanje definisano sa

$$\sqrt[n]{z} = u \quad \Leftrightarrow \quad z = u^n, \tag{4}$$

tj. $\sqrt[n]{z}$ je promenljiva koja uzima vrednosti iz skupa rešenja jednačine $z = u^n$ po nepoznatoj $u$, za dati kompleksni broj $z$. Radi jednostavnosti, često kažemo da je $\sqrt[n]{z}$ skup rešenja jednačine $z = u^n$ po $u \in C$.

Kao i kod množenja, deljenja i stepenovanja, vrednosti $\sqrt[n]{z}$ ćemo izračunavati kada je broj $z$ zadan u Ojlerovom obliku. Za $z = 0$ je $\sqrt[n]{0} = 0$, a za $z \neq 0$ je

$$u_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} e^{\mathbb{i}\frac{\varphi + 2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{\rho} e^{\mathbb{i}\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}, \tag{5}$$

$$\text{tj.} \quad \left|\sqrt[n]{z}\right| = \sqrt[n]{|z|}, \quad \arg \sqrt[n]{z} \in \left\{ \frac{\arg z}{n} + \frac{2k\pi}{n} \;\middle|\; k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \right\},$$

gde je $\sqrt[n]{\rho}$ realni koren nenegativnog realnog broja $\rho$. Umesto $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, za vrednosti „brojača" $k$ možemo uzeti bilo kojih uzastopnih $n$ vrednosti, tj. $\{m, m+1, m+2, \ldots, m+n-1\}$, i često ćemo početno $m$ birati tako svaki od uglova $\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ upadne u interval glavne vrednosti argumenta.

Kao što vidimo, sve vrednosti $\sqrt[n]{z}$ imaju isti moduo $\sqrt[n]{\rho}$, tj. sve pripadaju kružnici $\mathsf{K}\left(0, \sqrt[n]{\rho}\right)$. Takođe uočimo da za $k = j$ i $k = j+1$ dobijamo uglove (argumente)

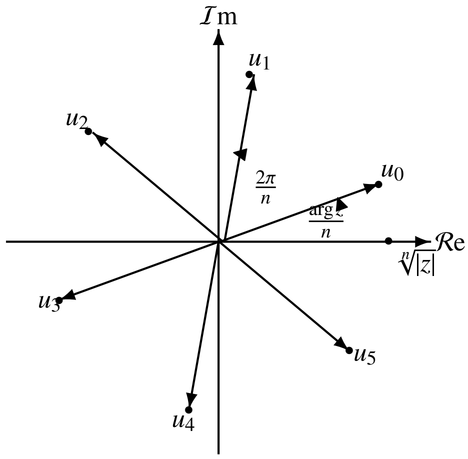
[1] Po potrebi ćemo ih, radi stepenovanja, pretvarati iz algebarskog u Ojlerov oblik.

[2] U zadacima će ili biti eksplicitno naglašeno, ili će iz konteksta biti jasno da li $\sqrt[n]{\ }$ predstavlja korenovanje u $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$.

koji se razlikuju za $\frac{2\pi}{n}$, tj. ugao između svake dve „susedne” vrednosti $\sqrt[n]{z}$ je isti ugao $\frac{2\pi}{n}$ ($n$-ti deo punog kruga). Odatle zaključujemo da se svaka od vrednosti $u_k$ promenljive $\sqrt[n]{z}$ može dobiti rotacijom oko koordinatnog početka vrednosti $u_{k-1}$ za ugao $\frac{2\pi}{n}$, a $u_{k-1}$ se može dobiti rotacijom oko koordinatnog početka vrednosti $u_k$ za ugao $-\frac{2\pi}{n}$, tj.

$$\begin{aligned} u_k &= u_{k-1}e^{\mathbb{i}\frac{2\pi}{n}},\\ u_{k-1} &= u_k e^{-\mathbb{i}\frac{2\pi}{n}}, \end{aligned} \qquad k \in \{0,1,2,\dots,n-1\}. \tag{6}$$

To znači da vrednosti $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ čine temena pravilnog $n$-tougla sa centrom opisane kružnice (težištem) u koordinatnom početku, poluprečnika $\sqrt[n]{\rho}$, pri čemu je $\arg u_0 = \frac{\arg z}{n}$. Na primer, za $z = 64e^{\mathbb{i}\frac{\pi}{3}}$ i $n = 6$ je $\sqrt[6]{|z|} = 2$, $\arg u_0 = \frac{\arg z}{6} = \frac{\pi}{18}$ i $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, te su vrednosti $u_k$ u kompleksnoj ravni raspoređene kao na slici 3.




Slika 3: Vrednosti korena u kompleksnoj ravni.

☞ Svaka od osnovnih računskih operacija $+$, $-$, $\cdot$ i $/$ u skupu $\mathbb{R}$ je restrikcija te operacije u skupu $\mathbb{C}$.

☞ Uočimo da je kompleksne brojeve najzgodnije sabirati i oduzimati kada su u algebarskom obliku, a množiti, deliti, stepenovati i korenovati kada su u Ojlerovom obliku.

**Teorema 1 (Neke osobine u skupu kompleksnih brojeva)** *Neka su z, w i t proizvoljni kompleksni brojevi.*

- $|z+w| \le |z|+|w|, \quad ||z|-|w|| \le |z+w|, \quad |zw| = |z|\cdot|w|, \quad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|},$ (7)

☛ $z \cdot \overline{z} = |z|^2,$ (8)

☛ $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}},$ (9)

☛ $|z| = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{z} = \overline{z},$ (10)

☛ *Ojlerove formule:*

$$\begin{aligned} z + \overline{z} &= 2\mathcal{R}\mathrm{e}\,(z), \\ z - \overline{z} &= 2\mathbb{i}\,\mathcal{I}\mathrm{m}\,(z), \end{aligned} \qquad \textit{tj.} \qquad \begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{e^{\mathbb{i}\varphi} + e^{-\mathbb{i}\varphi}}{2}, \\ \sin\varphi &= \frac{e^{\mathbb{i}\varphi} - e^{-\mathbb{i}\varphi}}{2\mathbb{i}}, \end{aligned} \tag{11}$$

☛ *formule za ugao u kompleksnoj ravni:*

$$\begin{aligned} \sphericalangle z0w &= \arg\frac{w}{z} = \arg w - \arg z, \\ \sphericalangle ztw &= \arg\frac{w-t}{z-t} = \arg\,(w-t) - \arg\,(z-t), \end{aligned} \tag{12}$$

☛ *ako je u kompleksnoj ravni tačka $t$ sredina duži $zw$, tada iz $\overrightarrow{zt} = \overrightarrow{tw}$, odnosno $t - z = w - t$ sledi da je*

$$t = \frac{1}{2}(z + w). \tag{13}$$

◃

**Primer 1** *Označimo kompleksne brojeve $z = -2 + 2\mathbb{i}$, $w = 3e^{-\mathbb{i}\frac{\pi}{2}}$ i $u = \sqrt{3} - \mathbb{i}$.*

❈ *Korišćenjem definicija parametara kompleksnog broja i formula* (2) *za konverziju iz jednog u drugi oblika zapisa kompleksnog broj dobijamo*

$\langle z \rangle$ $\mathcal{R}\mathrm{e}\,(z) = -2, \qquad \mathcal{I}\mathrm{m}\,(z) = 2,$

$|z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \qquad \arg z = \operatorname{arctg}\frac{2}{-2} + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4},$

$z = 2\sqrt{2}e^{\mathbb{i}\frac{3\pi}{4}},$

$\langle w \rangle$ $|w| = 3, \qquad \arg w = -\frac{\pi}{2},$

$\mathcal{R}\mathrm{e}\,(w) = |w| \cdot \cos\,(\arg w) = 0, \qquad \mathcal{I}\mathrm{m}\,(w) = |w| \cdot \sin\,(\arg w) = -3,$

$w = -3\mathbb{i},$

$\langle u \rangle$ $\mathcal{R}\mathrm{e}\,(u) = \sqrt{3}, \quad \mathcal{I}\mathrm{m}\,(u) = -1,$

$|u| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2, \qquad \arg u = \operatorname{arctg}\frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6},$

$u = 2e^{\mathbb{i}\frac{\pi}{6}}.$

❈ *Pri tome je*

$\overline{z} = -2 - 2\mathbb{i} = 2\sqrt{2}e^{-\mathbb{i}\frac{3\pi}{4}},$

$\overline{w} = 3\mathbb{i} = 3e^{\mathbb{i}\frac{\pi}{2}},$

$\overline{u} = \sqrt{3} + \mathbb{i} = 2e^{\mathbb{i}\frac{\pi}{3}}.$

❄ *Primenom definicije sabiranja i oduzimanja kompleksnih brojeva dobijamo*

$$z+w=(-2+0)+(2-3)\mathbb{i}=-2-\mathbb{i},$$

$$z-w=(-2-0)+(2-(-3))\mathbb{i}=-2+5\mathbb{i},$$

$$z+u=\left(-2+\sqrt{3}\right)+(2-1)\mathbb{i}=\sqrt{3}-2+\mathbb{i},$$

$$z-u=\left(-2-\sqrt{3}\right)+(2-(-1))\mathbb{i}=-2-\sqrt{3}+3\mathbb{i}.$$

❄ *Primenom definicije množenja kompleksnih brojeva dobijamo*

$$zw=(-2+2\mathbb{i})(-3\mathbb{i})=6\mathbb{i}-6\mathbb{i}^2=6\mathbb{i}-6(-1)=6+6\mathbb{i},$$

$$zu=(-2+2\mathbb{i})\left(\sqrt{3}-\mathbb{i}\right)=-2\sqrt{3}+2\mathbb{i}+2\sqrt{3}\mathbb{i}-2\mathbb{i}^2=2-2\sqrt{3}+\mathbb{i}\left(2+2\sqrt{3}\right),$$

*ili*

$$zw=\left(2\sqrt{2}e^{\mathbb{i}\frac{3\pi}{4}}\right)\left(3e^{-\mathbb{i}\frac{\pi}{2}}\right)=\left(2\sqrt{2}\cdot 3\right)e^{\mathbb{i}\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)}=6\sqrt{2}e^{\mathbb{i}\frac{\pi}{4}},$$

$$zu=\left(2\sqrt{2}e^{\mathbb{i}\frac{3\pi}{4}}\right)\left(2e^{-\mathbb{i}\frac{\pi}{6}}\right)=\left(2\sqrt{2}\cdot 2\right)e^{\mathbb{i}\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}=4\sqrt{2}e^{\mathbb{i}\frac{7\pi}{12}}.$$

❄ *Primenom definicije deljenja kompleksnih brojeva dobijamo*

$$\frac{z}{w}=\frac{-2+2\mathbb{i}}{-3\mathbb{i}}=\frac{-2+2\mathbb{i}}{-3\mathbb{i}}\cdot\frac{3\mathbb{i}}{3\mathbb{i}}=\frac{-6\mathbb{i}-6}{9}=-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\mathbb{i},$$

$$\frac{z}{u}=\frac{-2+2\mathbb{i}}{\sqrt{3}-\mathbb{i}}=\frac{-2+2\mathbb{i}}{\sqrt{3}-\mathbb{i}}\cdot\frac{\sqrt{3}+\mathbb{i}}{\sqrt{3}+\mathbb{i}}=\frac{-2\sqrt{3}-2\mathbb{i}+2\sqrt{3}\mathbb{i}-2}{3+\sqrt{3}\mathbb{i}-\sqrt{3}\mathbb{i}+1}$$

$\cdot\ 3-i^2$

$$=\frac{-2\left(\sqrt{3}+1\right)+2\left(\sqrt{3}-1\right)\mathbb{i}}{4}=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\mathbb{i},$$

$1-(-1)$

*ili*

$$\frac{z}{w}=\frac{2\sqrt{2}e^{\mathbb{i}\frac{3\pi}{4}}}{3e^{-\mathbb{i}\frac{\pi}{2}}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}e^{\mathbb{i}\left(\frac{3\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}e^{\mathbb{i}\frac{5\pi}{4}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}e^{-\mathbb{i}\frac{3\pi}{4}},$$

$$\frac{z}{u}=\frac{2\sqrt{2}e^{\mathbb{i}\frac{3\pi}{4}}}{2e^{-\mathbb{i}\frac{\pi}{6}}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}e^{\mathbb{i}\left(\frac{3\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)}=\sqrt{2}e^{\mathbb{i}\frac{11\pi}{12}}.$$

❄ *Primenom definicije stepenovanja kompleksnih brojeva dobijamo*

$$z^{2006}=\left(2\sqrt{2}e^{\mathbb{i}\frac{3\pi}{4}}\right)^{2006}=2^{3009}e^{\mathbb{i}\frac{3\cdot 2006}{4}\pi}=2^{3009}e^{\mathbb{i}\frac{3009\pi}{2}}$$

$$=2^{3009}e^{\mathbb{i}\left(752\cdot 2\pi+\frac{\pi}{2}\right)}=2^{3009}e^{\mathbb{i}\frac{\pi}{2}}=2^{3009}\mathbb{i},$$

$$w^{2006}=(-3\mathbb{i})^{2006}=3^{2006}\mathbb{i}^{4\cdot 501+2}=3^{2006}\mathbb{i}^2=-3^{2006}=3^{2006}e^{\mathbb{i}\pi}.$$

❄ *Korišćenjem formule* (5) *za korenovanje na Ojlerov oblik kompleksnog broja dobijamo*

$$\sqrt[6]{z}=\sqrt[6]{2\sqrt{2}e^{\mathbb{i}\frac{3\pi}{4}}}=\left\{\sqrt[4]{2}e^{\mathbb{i}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{3}\right)}\;\middle|\;k\in\{-3,-2,-1,0,1,2\}\right\}=$$

$$=\left\{\sqrt[4]{2}e^{-\mathbb{i}\frac{7\pi}{8}},\sqrt[4]{2}e^{-\mathbb{i}\frac{13\pi}{24}},\sqrt[4]{2}e^{-\mathbb{i}\frac{5\pi}{24}},\sqrt[4]{2}e^{\mathbb{i}\frac{\pi}{8}},\sqrt[4]{2}e^{\mathbb{i}\frac{11\pi}{24}},\sqrt[4]{2}e^{\mathbb{i}\frac{19\pi}{24}}\right\},$$

$$\sqrt[4]{w} = \sqrt[4]{3e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}} = \left\{ \sqrt[4]{3}e^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)} \;\middle|\; k \in \{-1,0,1,2\} \right\} =$$
$$= \left\{ \sqrt[4]{3}e^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{8}},\ \sqrt[4]{3}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}},\ \sqrt[4]{3}e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}},\ \sqrt[4]{3}e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}} \right\},$$
$$\sqrt{u} = \sqrt{2e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}} = \left\{ \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{6}+k\pi\right)} \;\middle|\; k \in \{0,1\} \right\} = \left\{ \sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}},\ \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} \right\}.$$

❈ *Korišćenjem formule* (12) *dobijamo npr.*

$$\sphericalangle z0u = \arg u - \arg z = -\frac{11\pi}{12}.$$ ✔

**Primer 2** *Neka je* $z = 1 - 2\mathrm{i}$, $w = -2 - \mathrm{i}$, $u = -5 + 7\mathrm{i}$.

➩ *Ako je tačka* $s_t \in \mathbb{C}$ *dobijena translacijom*[3] *tačke* $z$ *u kopleksnoj ravni za vektor* $\overrightarrow{wu}$, *tada je*

$$s_t = z + (u - w) = -3 + 8\mathrm{i}.$$

➩ *Ako je tačka* $s_r \in \mathbb{C}$ *dobijena kao projekcija*[4] *tačke* $z$ *na realnu osu, a tačka* $s_i \in \mathbb{C}$ *kao projekcija tačke* $z$ *na imaginarnu osu, tada je*

$$s_r = \mathcal{R}\mathrm{e}(z) = 1, \qquad s_i = \mathrm{i}\,\mathcal{I}\mathrm{m}(z) = -2\mathrm{i}.$$

➩ *Ako je tačka* $s_{sr} \in \mathbb{C}$ *dobijena osnom simetrijom*[5] *tačke* $z$ *u odnosu na realnu osu, a tačka* $s_{si} \in \mathbb{C}$ *osnom simetrijom tačke* $z$ *u odnosu na imaginarnu osu, tada je*

$$s_{sr} = \overline{z} = 1 + 2\mathrm{i}, \qquad s_{si} = -\mathcal{R}\mathrm{e}(z) + \mathrm{i}\,\mathcal{I}\mathrm{m}(z) = -1 - 2\mathrm{i}.$$

➩ *Ako je tačka* $s_0 \in \mathbb{C}$ *dobijena centralnom simetrijom*[6] *tačke* $z$ *u odnosu na koordinatni početak, a tačka* $s_w \in \mathbb{C}$ *centralnom simetrijom tačke* $z$ *u odnosu* $w$, *tada je*

$$s_0 = -z = -1 + 2\mathrm{i}, \qquad s_w = 2w - z = -5$$

*(sledi iz* $\overrightarrow{zw} = \overrightarrow{ws_w}$*).* ✔

**Primer 3** *Za kompleksne brojeve* $z = 3 + 9\mathrm{i}$, $w = -3 + \mathrm{i}$ *i* $u = -4\sqrt{3} + \mathrm{i}\left(5 + 3\sqrt{3}\right)$, *primenom formule* (12) *dobijamo da je*

$$\sphericalangle zwu = \arg(u - w) - \arg(z - w) = \arg\left(3 - 4\sqrt{3} + \mathrm{i}\left(4 + 3\sqrt{3}\right)\right) - \arg(6 + 8\mathrm{i}) =$$
$$= \pi + \operatorname{arctg}\frac{4 + 3\sqrt{3}}{3 - 4\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}\frac{4}{3},$$

*odnosno*

$$\sphericalangle zwu = \arg\frac{u - w}{z - w} = \arg\frac{3 - 4\sqrt{3} + \mathrm{i}\left(4 + 3\sqrt{3}\right)}{6 + 8\mathrm{i}} = \arg\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$ ✔

---

[3] Translacija za vektor $\vec{a}$ je funkcija $f$ tj. geometrijska transformacija prostora (ili ravni) koja svaku tačku $T$ prostora (ravni) preslika u tačku $T' = f(T)$ sa osobinom $\overrightarrow{TT'} = \vec{a}$ tj. $\overrightarrow{OT'} = \overrightarrow{OT} + \vec{a}$.

[4] Projekcija na pravu $p$ je funkcija $f$ tj. geometrijska transformacija prostora (ili ravni) koja svaku tačku $T$ prostora (ravni) preslika u tačku $T' = f(T)$ sa osobinom da $T' \in p$ i $TT' \perp p$.

[5] Osna simetrija u odnosu na pravu $p$ je funkcija $f$ tj. geometrijska transformacija prostora (ili ravni) koja svaku tačku $T$ prostora (ravni) preslika u tačku $T' = f(T)$ sa osobinom da je $TT' \cap p = \{S\}$, $TT' \perp p$ i $TS \cong ST'$.

[6] Centralna simetrija u odnosu na tačku $C$ je funkcija $f$ tj. geometrijska transformacija prostora (ili ravni) koja svaku tačku $T$ prostora (ravni) preslika u tačku $T' = f(T)$ sa osobinom da je $TC = CT'$.

# O rešavanju jednačina u skupu kompleksnih brojeva

Posmatrajmo jednačinu[7]

$$J: \quad f(z) = 0 \tag{14}$$

po nepoznatoj $z \in \mathbb{C}$. Rešiti jednačinu (14) znači odrediti skup $\mathcal{R}_J \subseteq \mathbb{C}$ za koji važi da $z \in \mathcal{R}_J$ ako i samo ako je jednakost $f(z) = 0$ tačna. Da bi jednakost (14) mogla biti tačna za broj $z$, jednačina mora biti definisana za $z$. Stoga je uvek poželjno da pre rešavanja jednačine jasno uočimo tzv. ***domen*** $\mathcal{D}_J$ ***rešavanja jednačine*** (14), a to je skup svih $z \in \mathbb{C}$ za koje je jednačina uopšte definisana. Tek nakon toga rešavamo jednačinu, tj. određujemo skup rešenja $\mathcal{D}_J \subseteq \mathcal{R}_J$.

Pri rešavanju jednačine (14), možemo primeniti neku od sledećih strategija[8].

1. Uvođenjem smene $z = x + \mathbb{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$ pokušavamo jednačinu (14) napisati u obliku
$$f_r(x,y) + \mathbb{i} f_i(x,y) = 0,$$
i time je svesti na sistem od dve realne jednačine
$$f_r(x,y) = 0 \quad \wedge \quad f_i(x,y) = 0, \tag{15}$$
po nepoznatim $x, y \in \mathbb{R}$. Ovu smenu ima svrhe uvoditi onda kada umemo rešiti sistem (15). U načelu, to je onda kada u jednačini (14) preovladaju operacije sabiranja, konjugovanja, i slično.

2. Uvođenjem smene $z = \rho e^{\mathbb{i}\varphi}$, $\rho \in [0, \infty)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$ pokušavamo jednačinu (14) napisati u obliku
$$R_1(\rho,\varphi) e^{\mathbb{i}A_1(\rho,\varphi)} = R_2(\rho,\varphi) e^{\mathbb{i}A_2(\rho,\varphi)},$$
i time je svesti na sistem od dve realne jednačine
$$R_1(\rho,\varphi) = R_2(\rho,\varphi) \quad \wedge \quad A_1(\rho,\varphi) = A_2(\rho,\varphi) + 2k\pi, \tag{16}$$
po nepoznatim $\rho \in [0, \infty)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Ovu smenu ima svrhe uvoditi onda kada umemo rešiti sistem (16). U načelu, to je onda kada u jednačini (14) preovladaju operacije množenja, deljenja, stepenovanja, i slično.

3. Ako ni jednom ni drugom smenom ne dobijamo željeni rezultat (sistem realnih jednačina koji umemo rešiti), tada se snalazimo u zavisnosti od oblika jednačine.

[7] Svaka jednačina može da se zapiše u ovakvoj formi.
[8] U zavisnosti od oblika jednačine procenjujemo kojim metodom najlakše dolazimo do rešenja

# Zadaci za vežbanje

**Zadatak 1** *Za kompleksne brojeve*

$$z = -4 - 4\mathbb{i}, \quad w = 2 - 2\sqrt{3}\mathbb{i},$$

*izračunati*

| | |
|---|---|
| $\mathcal{R}\mathrm{e}\,(z) =$ ________________ | $\mathcal{I}\mathrm{m}\,(z) =$ ________________ |
| $\mathcal{R}\mathrm{e}\,(w) =$ ________________ | $\mathcal{I}\mathrm{m}\,(w) =$ ________________ |
| $\lvert z\rvert =$ ________________ | $\arg z =$ ________________ |
| $\lvert w\rvert =$ ________________ | $\arg w =$ ________________ |
| $\overline{z} =$ ________________ | $\overline{w} =$ ________________ |
| $z + w =$ ________________ | $z - w =$ ________________ |
| $5 \cdot z =$ ________________ | $z \cdot e^{\mathbb{i}\pi} =$ ________________ |
| $z \cdot w =$ ________________ | $\dfrac{z}{w} =$ ________________ |

**Zadatak 2** *Prevesti u trigonometrijski, odnosno eksponencijalni (Ojlerov), odnosno algebarski oblik kompleksne brojeve*

$$z_1 = 1 + \mathbb{i}, \quad z_2 = \sqrt{3} - \mathbb{i}, \quad z_3 = e^{\mathbb{i}\pi}, \quad z_4 = 3e^{\mathbb{i}\frac{\pi}{2}},$$
$$z_5 = 5, \quad z_6 = -2\mathbb{i}, \quad z_7 = 1 - \cos\alpha + \mathbb{i}\sin\alpha.$$

**Zadatak 3** *Izračunati u algebarskom obliku* $\sqrt[3]{-8 + \mathbb{i}8}$.

**Zadatak 4** *U skupu kompleksnih brojeva rešiti jednačinu*

$$J: \quad z\mathcal{R}\mathrm{e}\,(z-1) - 2\mathcal{I}\mathrm{m}\left(\frac{\overline{z}-1}{1+\mathbb{i}}\right) = -\mathbb{i}.$$

# Rešenja zadataka

**Rešenje zadatka 1:**

$\mathcal{R}\mathrm{e}(z) = \underline{\ -4\ }$ $\quad$ $\mathcal{I}\mathrm{m}(z) = \underline{\ -4\ }$

$\mathcal{R}\mathrm{e}(w) = \underline{\ 2\ }$ $\quad$ $\mathcal{I}\mathrm{m}(w) = \underline{\ -2\sqrt{3}\ }$

$|z| = \underline{\ 4\sqrt{2}\ }$ $\quad$ $\arg z = \underline{\ -\frac{3\pi}{4}\ }$

$|w| = \underline{\ 4\ }$ $\quad$ $\arg w = \underline{\ -\frac{\pi}{3}\ }$

$\bar{z} = \underline{\ -4+4\mathbb{i}\ }$ $\quad$ $\overline{w} = \underline{\ 2+2\sqrt{3}\mathbb{i}\ }$

$z+w = \underline{\ -2-2\left(2+\sqrt{3}\right)\mathbb{i}\ }$ $\quad$ $z-w = \underline{\ -6+2\left(-2+\sqrt{3}\right)\mathbb{i}\ }$

$5\cdot z = \underline{\ -20-20\mathbb{i}\ }$ $\quad$ $z\cdot e^{\mathbb{i}\pi} = \underline{\ 4+4\mathbb{i}\ }$

$z\cdot w = \underline{\ -8\left(1+\sqrt{3}\right)+8\left(\sqrt{3}-1\right)\mathbb{i}\ }$ $\quad$ $\frac{z}{w} = \underline{\ \frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathbb{i}\ }$ ☑

**Rešenje zadatka 2:**

$$\begin{aligned}
z_1 &= 1+\mathbb{i} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathbb{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathbb{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\mathbb{i}\frac{\pi}{4}},\\
z_2 &= \sqrt{3}-\mathbb{i} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\mathbb{i}\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathbb{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{-\mathbb{i}\frac{\pi}{6}},\\
z_3 &= e^{\mathbb{i}\pi} = \cos\pi+\mathbb{i}\sin\pi = -1+0\mathbb{i} = -1,\\
z_4 &= 3e^{\mathbb{i}\frac{\pi}{2}} = 3\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathbb{i}\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3(0+\mathbb{i}) = 3\mathbb{i},\\
z_5 &= 5 = 5\,(1+0\mathbb{i}) = 5\,(\cos 0+\mathbb{i}\sin 0) = 5e^{0\mathbb{i}},\\
z_6 &= -2\mathbb{i} = 2\,(0-\mathbb{i}) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\mathbb{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2e^{-\mathbb{i}\frac{\pi}{2}i},\\
z_7 &= 1-\cos\alpha+\mathbb{i}\sin\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\mathbb{i}2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} =\\
&\qquad = 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+\mathbb{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$ ☑

**Rešenje zadatka 3:** Da bi mogli primeniti formule (5) za korenovanje, potkoreni broj najpre zapisujemo u Ojlerovom obliku, a zatim vrednosti korena izračunavamo primenom formule (5).

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{-8+\mathbb{i}8} &= \sqrt[3]{8\sqrt{2}e^{\mathbb{i}\frac{3\pi}{4}}} = \left\{2\sqrt[6]{2}e^{\mathbb{i}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)}\ \middle|\ k\in\{-1,0,1\}\right\}\\
&= \left\{2\sqrt[6]{2}e^{-\mathbb{i}\frac{5\pi}{12}}, 2\sqrt[6]{2}e^{\mathbb{i}\frac{3\pi}{12}}, 2\sqrt[6]{2}e^{\mathbb{i}\frac{11\pi}{12}}\right\}.
\end{aligned}$$ ☑

**Rešenje zadatka 4:** Domen rešavanja jednačine je ceo skup kompleksnih brojeva. Neka je $z = x + \mathrm{i}y$. Tada je

$$
\begin{aligned}
J \quad &\Leftrightarrow \quad (x+\mathrm{i}y)\mathcal{R}\mathrm{e}(x-1+\mathrm{i}y) - 2\mathcal{I}\mathrm{m}\left(\frac{x-1-\mathrm{i}y}{1+\mathrm{i}} \cdot \frac{1-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right) = -\mathrm{i} \\
&\Leftrightarrow \quad (x+\mathrm{i}y)(x-1) - 2\mathcal{I}\mathrm{m}\left(\frac{x-y-1+\mathrm{i}(1-x-y)}{2}\right) = -\mathrm{i} \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 - x + \mathrm{i}y(x-1) - 2\frac{1-x-y}{2} + \mathrm{i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y - 1 + \mathrm{i}\,(y(x-1)+1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(x^2 + y - 1 = 0 \,\wedge\, y(x-1)+1 = 0\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \left(y = 1 - x^2 \,\wedge\, \left(1-x^2\right)(x-1)+1 = 0\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \left(y = 1 - x^2 \,\wedge\, x\left(x^2 - x - 1\right) = 0\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \left(y = 1 - x^2 \,\wedge\, \left(x = 0 \,\vee\, x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \,\vee\, x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \left((x = 0 \,\wedge\, y = 1) \,\vee\, \left(x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \,\wedge\, y = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \,\vee\right. \\
&\qquad\quad \left.\vee\, \left(x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \,\wedge\, y = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Dakle, skup rešenja jednačine $J$ je

$$
\mathcal{R}_J = \left\{\mathrm{i}\,,\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \mathrm{i}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} - \mathrm{i}\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}.
$$

☑