24.3.2020. MATEMATIČKA ANALIZA I   DOMAĆI ZADATAK

U pitanjima gde stoji □ treba staviti + ako je iskaz tačan, - ako je netačan i • ako ne znate da li je iskaz tačan ili netačan. Ako ima više ponuđenih odgovora treba zaokružiti tačne. Ako stoji linija iza pitanja potrebno je dati objašnjenje (može primer ili kontraprimer).

STUDENT ŠALJE ODGOVOR NA SOVA PLATFORMU. VREME RADA JE 15min, tj. 9h-9h15min utorak 24.3.2020. posle toga se ne prima. STUDENTU BROJ INDEKSA KAZUJE KOJA TRI PITANJA ODGOVARA: PRVA CIFRA ODREDJUJE PITANJE IZ PRVE GRUPE, DRUGA CIFRA IZ DRUGE I TREĆA CIFRA ODREDJUJE PITANJE IZ TREĆE GRUPE PITANJA. U ODGOVORU INDEX NAJPRE I IME PREZIME

GRANIČNI PROCESI   DZI4

PRVA CIFRA

0. *** □ Ako niz $\{a_n\}$, $a_n \geq 0$ konvergira ka broju a, tada je i niz $\{\sqrt[k]{a_n}\}$, $k \in \mathbb{N}$, konvergentan i konvergira ka broju $\sqrt[k]{a}$.
1. *** □ Ako je $\{a_n\}$ niz takav da $a_n \to \infty$, tada je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.
2. *** □ Ako je $\{a_n\}$ niz takav da $a_n \to -\infty$, tada je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.
3. Navesti osnovne limesa nizova.
4. Šta je niz umetnutih intervala?
5. Navesti Kantorovu teoremu.
6. Navesti Bolcano-Vajerštrasovu teoremu.
7. *** □ Iz svakog ograničenog niza može se izdvojiti konvergentan podniz.
8. *** □ Svaki ograničen niz $\{a_n\}$ koji ima samo jednu tačku nagomilavanja, je konvergentan.
9. Kada kažemo da je niz $\{a_n\}$ Košijev niz u metričkom prostoru (X, d)?

DRUGA CIFRA

0. □ Ako je niz $\{a_n\} \subset X$ konvergentan u metričkom prostoru (X, d), tada je $\{a_n\}$ Košijev niz u (X, d).
1. □ Neka je $\{a_n\}$ Košijev niz u metričkom prostoru (X, d). Ako neki podniz $\{a_{n_k}\}$ niza $\{a_n\}$ konvergira prema $a \in X$ u (X, d), tada i niz $\{a_n\}$ konvergira ka a u (X, d).
2. □ Svaki Košijev niz $\{a_n\}$ u metričkom prostoru (X, d) je ograničen u datom prostoru.
3. Navesti primer da u svakom metričkom prostoru Košijev niz ne mora konvergirati.
4. Kada je metrički prostor (X, d) kompletan?
5. Navesti primere kompletnih metričkih prostora.
6. Da li je potprostor kompletnog prostora kompletan? Primer.
7. Zatvoren potprostor kompletnog metričkog prostora je kompletan.
8. Definisati nepokretnu tačku preslikavanja.
9. Kada za preslikavanje $f : X \to Y$ metričkog prostora (X, d_1) u metrički prostor (Y, d_2) kažemo da je kontrakcija?

TREĆA CIFRA

0. Navesti Banahovu teoremu o fiksnoj teoremi.
1. Definicija granične vrednosti funkcije u proizvoljnom m.p.
2. Definicija granične vrednosti realne funkcije. Geometrijska interpretacija.
3. Navesti Hajneovu teoremu (veza granične vrednosti funkcije i granične vrednosti niza).
4. □ Granična vrednost A funkcije $f : D \to Y$ ako postoji u tački a, je jednoznačno određena.
5. Ako je $f : D \to Y$ konstantna funkcija, tj. $f(x) = c$, za svako $x \in D$, tada je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$. Pokazati.
6. □ Za funkciju $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ je $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(2x+1) = 3$.
7. Funkcija $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$ nije definisana u tački 0, a ima graničnu vrednost.

8. $\square$ Neka je $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Funkcija nije definisana za $x = 0$. Ne postoji ni $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$.

$\square$ Neka je $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$. Tada je funkcija f definisana za $x = 0$, $f(0) = 1$, ali ne postoji $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$.

9. $\square$ Posmatrajući niz $a_n(k) = \left(\frac{1}{n}, \frac{k}{n}\right)$ i koristeći Hajneovu teoremu pokazati da funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definisana sa $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, nema graničnu vrednost u tački $O(0,0)$.