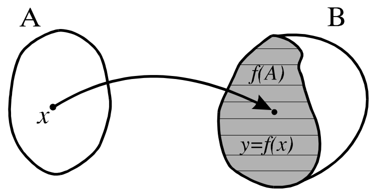
UVOD



Ako su A i B neprazni skupovi i ako je svakom $x \in A$ dodeljen, po izvesnom zakonu, tačno jedan element $y \in B$, tada kažemo da je na skupu A definisana funkcija (preslikavanje) f sa vrednostima u skupu B.

Simbolički zapisano:

1. $(\forall x \in A)\ (\exists y \in B)\ (x, y) \in f$,
2. $(\forall x \in A)\ (\forall\ y_1,\ y_2 \in B)$

   $(x, y_1) \in f\ \wedge\ (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$.

Umesto $(x, y) \in f$ pišemo y=f(x).

Skup A nazivamo *oblast definisanosti* (ili domen) funkcije f, a skup $f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subset B$ *skup vrednosti* (ili kodomen) funkcije f. Promenljivu x zovemo *nezavisna promenljiva* (argument, original), a y *zavisna promenljiva* (vrednost funkcije ili slika). Ako je $A \subset R$ i $B \subset R$ tada za funkciju $f : A \to B$ kažemo da je realna funkcija jedne realne promenljive.

Napomena: Umesto „funkcija f data sa f(x)=?” kraće pišemo samo funkcija y=f(x).

Funkcija može biti zadata:

1. *Analitički*:
   - Eksplicitno y=f(x),
   - Implicitno F(x,y)=0,
   - Parametarski y=f(t), x=g(t).
2. *Grafički*,
3. *Tabelarno*.

Funkcija može biti zadata i pomoću dve ili više formula

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & , \quad x \le 0 \\ x & , \quad 0 < x \le 1 \\ \sqrt{x} & , \quad x > 1 \end{cases} .$$

Za preslikavanje $f : A \to B$ kažemo da je:

- *Injektivno* (“1 – 1”) ako različitim originalima odgovaraju različite slike, tj. $x_1 \ne x_2 \Rightarrow f(x_1) \ne f(x_2)$,
- *Sirjektivno* (“na”) ako za svako $y \in B$ postoji $x \in A$ takvo da je f(x)=y, tj. $f(A) = B$,
- *Bijektivno* (“1 – 1” i “na”).

Oblast definisanosti

Oblast definisanosti je najširi podskup skupa R gde su izvodljive sve operacije date funkcijom.

- Racionalna funkcija $y=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $Q_m(x)\neq 0$

  Primer: $y=\dfrac{x-3}{x-2}$, $\qquad \begin{matrix} x-2\neq 0 \\ x\neq 2 \end{matrix} \Rightarrow D: x\in R\backslash\{2\}$.

- $y=\sqrt[n]{f(x)}$

$n=2k\in N$, $\qquad$ f(x)≥0
$n=2k+1\in N$, $\qquad$ nema ograničenja za f(x)

$$\sqrt{x^2}=|\ x\ |=\begin{cases} x\ , & x\geq 0 \\ -x, & x<0\,. \end{cases}$$

Nule funkcije

Nula funkcije $y=f(x)$ je vrednost promenljive x za koju je y=0.

Parnost i neparnost funkcije

Ako je oblast definisanosti D funkcije $y=f(x)$ simetričan skup (skup D je simetričan ako za svako x∈D sledi da je i $-x\in D$) tada:

1. za funkciju f kažemo da je *parna* ako je $f(-x)=f(x)$ za sve vrednosti x∈D,
2. za funkciju f kažemo da je *neparna* ako je $f(-x)=-f(x)$, za sve vrednosti x∈D.

Funkcija ne mora da bude ni parna ni neparna.

Periodičnost

Funkcija je periodična ako postoji broj $\omega\neq 0$, takav da je $f(x+\omega)=f(x)$ za svako x∈D. Broj ω nazivamo *period*. Najmanji pozitivan broj ω, ako postoji, zove se *osnovni period* funkcije.

Monotonost funkcije

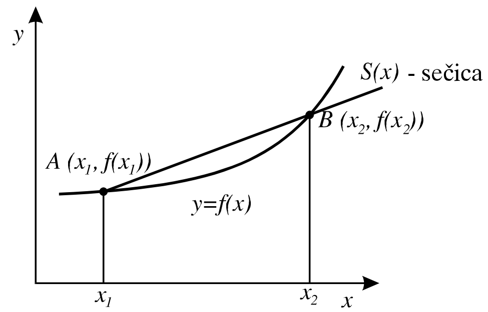
Za funkciju $f: D\rightarrow R$ kaže se da je nad intervalom $I\subset D$:

- *monotono rastuća*, ako za svake dve tačke $x_1, x_2\in I$, $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$,
- *monotono opadajuća*, ako za svake dve tačke $x_1, x_2\in I$, $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$,
- *monotono nerastuća*, ako za svake dve tačke $x_1, x_2\in I$, $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$,
- *monotono neopadajuća*, ako za svake dve tačke $x_1, x_2\in I$, $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$.

U svakom od navedenih slučajeva se kaže da je funkcija *monotona* nad intervalom I.

Konveksnost i konkavnost

Konveksnost i konkavnost funkcije se posmatra nad intervalom $I \subset D \subset R$.



Ako za svake dve tačke $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ i $x \in (x_1, x_2)$ sledi:

- $f(x) < S(x)$ funkcija je *konveksna* nad intervalom I,
- $f(x) > S(x)$ funkcija je *konkavna* nad intervalom I.

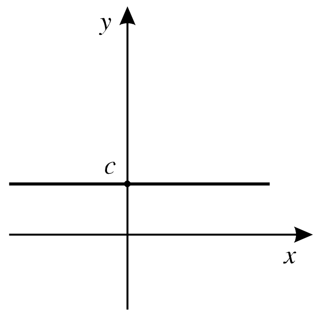
Ograničenost

Za funkciju y=f(x) kažemo da je *ograničena sa donje strane* ako postoji broj M_1, takav da je za svako $x \in D, f(x) \geq M_1$.

Funkcija f je *ograničena sa gornje strane* ako postoji broj M_2, takav da je za svako $x \in D, f(x) \leq M_2$.

Funkcija je *ograničena* ako je ograničena i sa donje i sa gornje strane, tj. ako postoje brojevi M_1 i M_2, takvi da je za svako $x \in D, M_1 \leq f(x) \leq M_2$, ili ako postoji pozitivan broj K, takav da je $|f(x)| \leq K$ za svako $x \in D$.

Konstantna funkcija $y = f(x) = c$



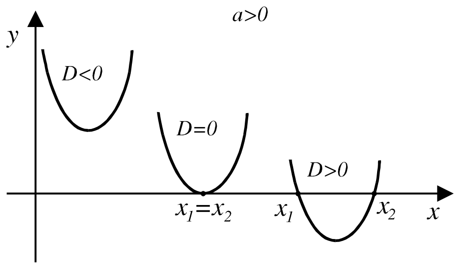
- $D : x \in R$,
- monotono nerastuća i monotono ne-opadajuća,
- nije ni konveksna ni konkavna.

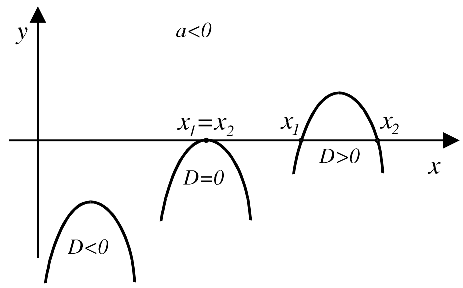
Parabola $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

– $D : x \in R$.

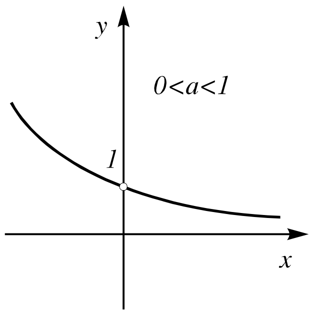
U zavisnosti od znaka diskriminante D $(D = b^2 - 4ac)$ za rešenja (nule) funkcije se dobija:

- D>0 – rešenja su realna i različita,
- D=0 – rešenja su realna i jednaka,
- D<0 – nema realnih nula (rešenja su konjugovano-kompleksna).

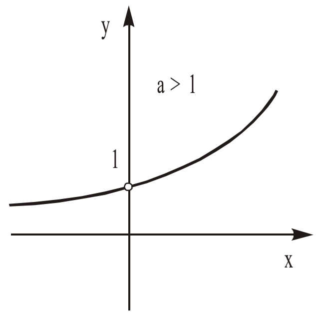




Eksponencijalna funkcija $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$



monotono opada



monotono raste

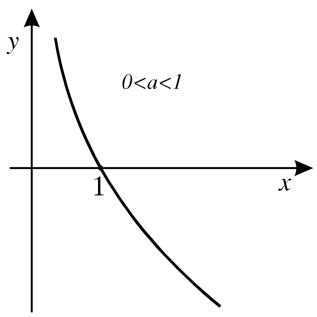
– $D : x \in R$,

– funkcija nema nula,

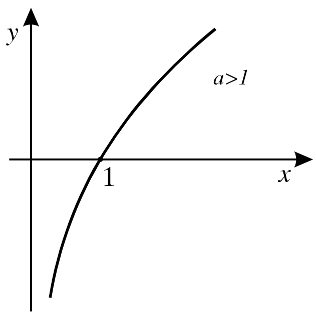
– specijalan slučaj za a=e $(y = e^x)$ ili $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$.

Logaritamska funkcija $y = f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

- $D: x \in R^+$.
- Simetrična je u odnosu na pravu y=x sa funkcijom $y = a^x$.
- Logaritamska funkcija je inverzna funkcija funkcije $y = a^x$.



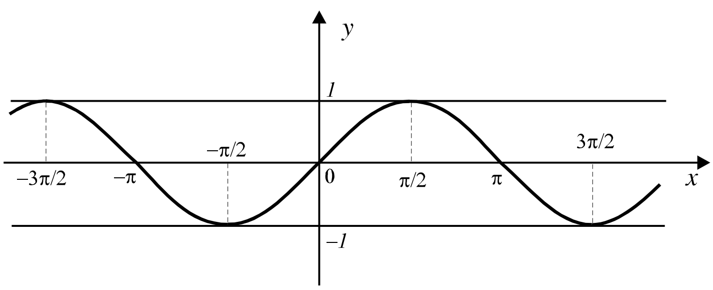
monotono opada



monotono raste

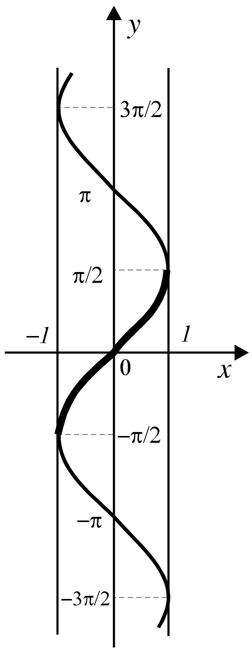
– x=1 je nula funkcije,
– a=e=2,71828… y=lnx,
– a=10 y=logx.

y=sinx



– $D: x \in R$,
– skup vrednosti $[-1, 1]$,
– funkcija je periodična: osnovni period je $\omega = 2\pi$,
– $\sin(-x) = -\sin x$ (funkcija je neparna),
– $x = k\pi$, $k \in Z$ su nule funkcije.

y=arcsinx



Funkcija y=sinx obostrano jednoznačno (zbog monotonosti) preslikava interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ na interval $\left[-1, 1\right]$.

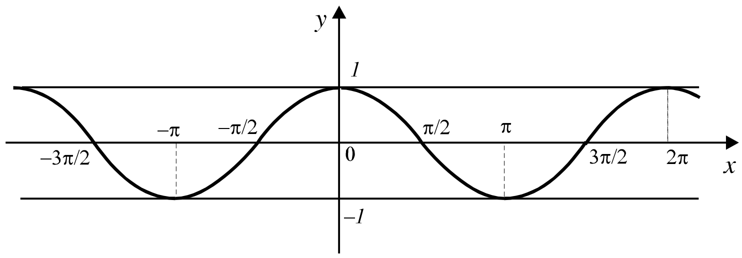
Zato je moguće definisati inverznu funkciju sa domenom $\left[-1, 1\right]$ i skupom vrednosti $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Restrikcija funkcije $f(x) = \sin x$ nad intervalom $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ima inverznu funkciju, koja se označava sa $y = \arcsin x$.

Simetrična je u odnosu na pravu y=x sa y=sinx.

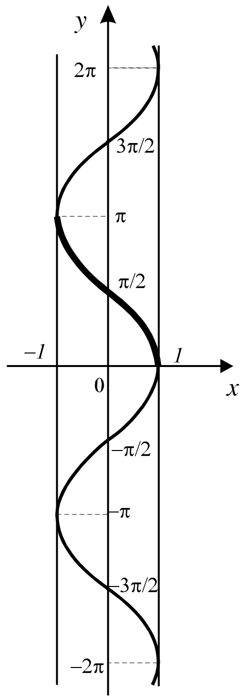
- $D: x \in \left[-1, 1\right]$,
- skup vrednosti $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
- $y = \arcsin(-x) = -\arcsin x$ (funkcija je neparna),
- funkcija monotono raste.

y=cosx



- $D: x \in R$,
- skup vrednosti $\left[-1, 1\right]$,
- funkcija je periodična: osnovni period je $\omega = 2\pi$,
- $\cos(-x) = \cos x$ (funkcija je parna),
- $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in Z$ su nule funkcije.

y=arccosx



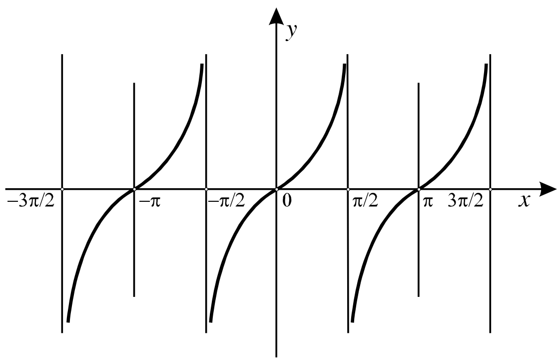
Funkcija y=cosx obostrano jednoznačno (zbog monotonosti) preslikava interval $[0,\pi]$ na interval $[-1,1]$.

Zato je moguće definisati inverznu funkciju sa domenom $[-1,1]$ i skupom vrednosti $[0,\ \pi]$.

Restrikcija funkcije $f(x)=\cos x$ nad intervalom $[0,\pi]$ ima inverznu funkciju, koja se označava sa y=arccosx.

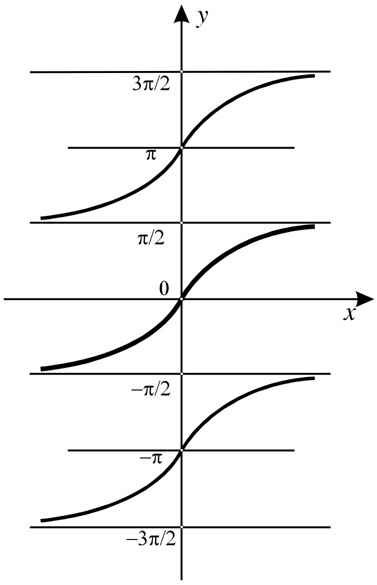
– D: $x \in [-1,1]$,
– Skup vrednosti $[0,\ \pi]$,
– Funkcija monotono opada.

y=tgx



– definisana za svako $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in Z$,
– skup vrednosti funkcije je $(-\infty,\infty)$,
– funkcija je periodična: osnovni period je $\omega=\pi$,
– $tg(-x)=-tg(x)$ (funkcija je neparna),
– monotono je rastuća na svim intervalima oblika $(\frac{(2k+1)}{2}\pi,\frac{(2k+3)}{2}\pi)$, $k \in Z$
– $x=k\pi$, $k \in Z$ su nule funkcije.

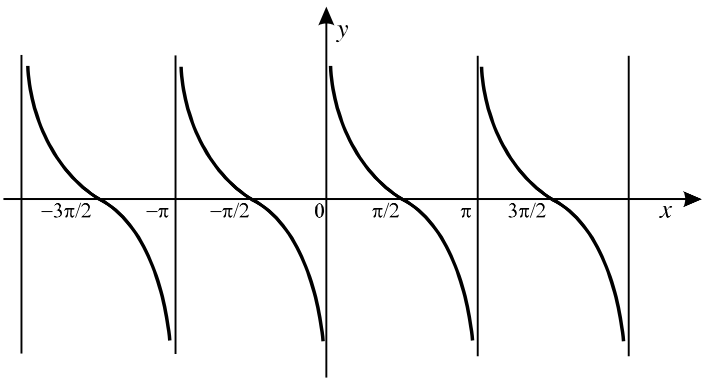
y=arctgx



Funkcija y=tgx obostrano jednoznačno (zbog monotonosti) preslikava interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ na interval $(-\infty, \infty)$. Zato je moguće definisati inverznu funkciju sa oblašću definisanosti $(-\infty, \infty)$ i skupom vrednosti $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Restrikcija funkcije y=tgx nad intervalom $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ima inverznu funkciju, koja se označava sa $y = \mathrm{arctgx}$.

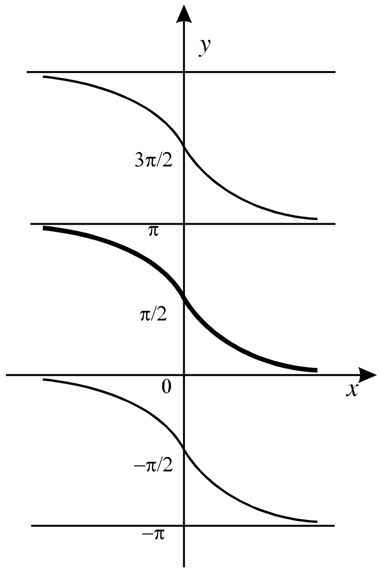
- $D: x \in R$,
- Skup vrednosti $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
- Monotono raste,
- $\mathrm{arctg}(-x) = -\mathrm{arctg}(x)$ - neparna.

y=ctgx



- definisana za svako $x \neq k\pi$, $k \in Z$,
- skup vrednosti funkcije je $(-\infty, \infty)$,
- funkcija je periodična: osnovni period je $\omega = \pi$,
- $\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}(x)$ (funkcija je neparna,
- funkcija monotono opada na svim intervalima oblika $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in Z$
- $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$ su nule funkcije.

y=arcctgx



Funkcija y=ctgx obostrano jednoznačno (zbog monotonosti) preslikava interval $(0,\pi)$ na interval $(-\infty,\infty)$.

Zato je moguće definisati inverznu funkciju sa domenom $(-\infty,\infty)$ i skupom vrednosti $(0,\pi)$.

Restrikcija funkcije y=ctgx nad intervalom $(0,\pi)$ ima inverznu funkciju, koja se označava sa $y = \mathrm{arcctgx}$.

- $D: x \in R$,
- skup vrednosti je $(0,\pi)$,
- monotono opada.