31.3.2020. MATEMATIČKA ANALIZA I DOMAĆI ZADATAK

U pitanjima gde stoji □ treba staviti + ako je iskaz tačan, - ako je netačan i • ako ne znate da li je iskaz tačan ili netačan. Ako ima više ponuđenih odgovora treba zaokružiti tačne. Ako stoji linija iza pitanja potrebno je dati objašnjenje (može primer ili kontraprimer).

STUDENT ŠALJE ODGOVOR NA SOVA PLATFORMU. VREME RADA JE 15min, tj. 9h-9h15min utorak 31.3.2020. posle toga se ne prima. STUDENTU BROJ INDEKSA KAZUJE KOJA TRI PITANJA ODGOVARA: PRVA CIFRA ODREDJUJE PITANJE IZ PRVE GRUPE, DRUGA CIFRA IZ DRUGE I TREĆA CIFRA ODREDJUJE PITANJE IZ TREĆE GRUPE PITANJA. U ODGOVORU INDEX NAJPRE I IME PREZIME

GRANIČNI PROCESI DZI5

PRVA CIFRA

0. Kada kažemo da funkcija f ima graničnu vrednost A u tački nagomilavanja a skupa E dok $x \in E$?

1. Da li postoji $\lim_{x\to 1} f(x)$, za funkciju f datu sa $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \le 1 \\ -2x+3, & x > 1 \end{cases}$. Šta reći za $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \in [1,2]}} f(x)$?

3. □ Da li funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisana sa $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, nema graničnu vrednost ni u jednoj tački $a \in \mathbb{R}$. Šta reći za restrikciju $f_{\mathbb{Q}}$?

4. Kada kažemo da funkcija f ima levu odnosno desnu graničnu vrednost A?

5. Ako funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ u tački a ima graničnu vrednost A, tada

   □ postoji bar jedna jednostrana granična vrednost koja je jednaka broju A, tj. graničnoj vrednosti funkcije f u tački a;

   □ ako postoje obe jednostrane granične vrednosti, one su jednake graničnoj vrednosti funkcije u tački a, tj. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

6. Ako funkcija f u tački a ima obe jednostrane granične vrednosti, ona će imati graničnu vrednost samo onda ako su jednostrane granične vrednosti jednake, tj. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ postoji ako $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = A$ i tada je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

7. Da li funkcija $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$, u tački $x = 0$ nema desnu graničnu vrednost? Da li postoji $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$?

7. □ Za $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, i $E = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$, važi $\lim\limits_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in E}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2+4x^2} = \frac{2}{5}$.

8. *** □ Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori i neka je $a \in X$ tačka nagomilavanja za definicioni skup $D \subset X$ funkcije $f : D \to Y$. Tada važi

   a) Ako funkcija f ima graničnu vrednost $A \in Y$ u tački a i ako je a tačka nagomilavanja za neprazan skup $E \subset D$, tada postoji $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in E}} f(x)$ i važi jednakost $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in E}} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

   b) Neka je a tačka nagomilavanja svakog od skupova $E_1, ..., E_n \subset D$ koji vrše particiju skupa $D \setminus \{a\}$. Tada ako postoje granične vrednosti $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in E_i}} f(x)$, za svako $i = 1, ..., n$ i pri tome su međusobno jednake, tada postoji $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ i važi jednakost $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in E_i}} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, za $i = 1, ..., n$.

9. Napisati definicije za $f(x) \to \infty$, $x \to a$, i $f(x) \to -\infty$, $x \to a$.

DRUGA CIFRA

0. Dati definiciju granične vrednosti funkcije $f(x)$ kada $x \to \pm\infty$.

1. Dati definiciju $f(x) \to \pm\infty$, kada $x \to \pm\infty$.

2. Navesti Hajneovu teoremu za funkcije.

3. Navesti teoremu o računskim operacijama sa graničnim vrednostima funkcija.

4. Navesti teoremu o računskim operacijama sa proširenim graničnim vrednostima funkcija.

5. Neka su date funkcije f i g sa $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt{-x}$. Da li postoje $\lim_{x\to 0} f(x)$ i $\lim_{x\to 0} g(x)$ i $\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))$?

6. □ Neka je dat metrički prostor (X, d) i neka je a tačka nagomilavanja za definicioni skup $D \subset X$ funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ i $g : D \to \mathbb{R}$. Tada, ako je $f(x) \leq g(x)$ i $\lim_{x\to a} f(x) = A$ i $\lim_{x\to a} g(x) = B$, tada je i $A \leq B$.

7. □ Neka je dat metrički prostor (X, d) i neka je a tačka nagomilavanja za definicioni skup $D \subset X$ funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ i $g : D \to \mathbb{R}$. Tada

   a) Ako za funkciju $h : D \to \mathbb{R}$, važi $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ i ako je $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = A$, to je i $\lim_{x\to a} h(x) = A$.

   b) Slična osobina važi i za slučaj kada je $X = \mathbb{R}$ i kada $x \to \infty$, odnosno $x \to -\infty$.

8. Kada za funkciju $f(x)$ kažemo da je beskonačno mala veličina kada $x \to a$?

9. Kada za funkciju $f(x)$ kažemo da je beskonačno velika veličina kada $x \to a$?

TREĆA CIFRA

0. Kada za funkciju $f(x)$ kažemo da je beskonačno mala (velika) veličina višeg reda od $g(x)$ kada $x \to a$ tj. da brže teži nuli?

1. Kada za funkciju $f(x)$ kažemo da je beskonačno mala (velika) veličina istog reda kao $g(x)$ kada $x \to a$? Kada su $f(x)$ i $g(x)$ ekvivalentne beskonačno male veličine? Kada su one neuporedive?

2. Kada kažemo da je funkcija $f : D \to Y$, $D \subset X$, (gde su (X, d_X) , (Y, d_Y) m.p.) neprekidna u tački $a \in D$?

3. Kada kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, neprekidna u tački $a \in D$?

4. Zahtevi za neprekidnost u tački a i postojanje granične vrednost u a se razlikuju u

   □ za graničnu vrednost u tački a pretpostavka je da je a tačka nagomilavanja za D, a kod neprekidnosti da $a \in D$, tj. da je funkcija f definisana u tački a;

   □ kod neprekidnosti se zahteva da funkcija f otvorenu loptu $L(a, \delta(\varepsilon))$ preslika u otvorenu loptu $L(f(a), \varepsilon)$, dok kod granične vrednosti je zahtev da funkcija f otvorenu loptu $L(a, \delta(\varepsilon))$ bez centra a preslika u otvorenu loptu $L(A, \varepsilon)$.

5. □ Ako je f neprekidna funkcija u tački a ne mora da postoji $\lim_{x\to a} f(x)$ (ako je $a \in D$ izolovana tačka za skup D, tada je f automatski neprekidna u tački a, dok u tom slučaju ne postoji $\lim_{x\to a} f(x)$).

6. □ ako postoji $\lim_{x\to a} f(x)$ bez obzira da li je funkcija f definisana u tački a, funkcija ne mora da bude neprekidna u tački a.

7. Kada funkcija f ima prekid u tački?

8. □ Realni niz (a i svaki drugi), je neprekidna funkcija.

9. *** Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori i neka je data funkcija $f : D \to Y$, $D \subset X$.

   □ Ako je restrikcija f_E funkcije f nad nepraznim skupom $E \subset D$ neprekidna u tački $a \in E$, onda kažemo da je funkcija f neprekidna u tački a dok $x \in E$.

   □ Ako je f_E neprekidna u svakoj tački skupa E, onda kažemo da je f **neprekidna nad skupom** E.

   □ Ako je $E = D$, tj. ako je funkcija f neprekidna u svakoj tački definicionog skupa D, onda kažemo da je f neprekidna funkcija.