1

Nizovi, granična vrednost i neprekidnost funkcije

Nizovi

- **Brojni niz**, u oznaci $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, je preslikavanje $a:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ skupa prirodnih brojeva u skup realnih brojeva. $a_n := a(n)$ se naziva **opšti član niza** $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$.
- Brojni niz $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ je **ograničen** ako postoji realan broj $M>0$ takav da za svako $n\in\mathbf{N}$ važi $|a_n|\le M$.
- Brojni niz $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ je **monotono rastući (monotono neopadajući)**, ako za svako $n\in\mathbf{N}$ važi $a_n<a_{n+1}(a_n\le a_{n+1})$.

  Brojni niz $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ je **monotono opadajući (monotono nerastući)**, ako za svako $n\in\mathbf{N}$ važi $a_n>a_{n+1}(a_n\ge a_{n+1})$.
- Za realan broj a interval $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ predstavlja ε**-okolinu tačke** a. Za $a\in\mathbf{R}$ kažemo da je **tačka nagomilavanja** niza $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ ako se u svakoj ε-okolini tačke a nalazi beskonačno mnogo članova niza $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$.
- Za realan broj a kažemo da je **granična vrednost** niza $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ ako se izvan svake ε-okoline tačke a nalazi najviše konačno mnogo članova niza $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, tj. ako za svako $\varepsilon>0$ postoji prirodan broj n_0 (koji zavisi od ε) tako da za svaki prirodan broj $n\ge n_0$, važi $|a_n-a|<\varepsilon$. Tada pišemo

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

  i kažemo da niz $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ **konvergira** ka broju a, ili da je broj a **granična vrednost (granica)** tog niza.
  Za svaki niz koji ima graničnu vrednost kažemo da je **konvergentan,** u suprotnom kažemo da je **divergentan**.

- Za niz $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ kažemo da **divergira u plus beskonačno,** i pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, ako za svaki realan broj $M > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ sa osobinom da za svako $n \geq n_0$ važi $a_n > M$.

  Za niz $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ kažemo da **divergira u minus beskonačno,** i pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, ako za svaki realan broj $M < 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ sa osobinom da za svako $n \geq n_0$ važi $a_n < M$.

- Svaki monoton i ograničen niz je konvergentan.

  Konvergentan niz ima jedinstvenu graničnu vrednost i ta granična vrednost je jedina tačka nagomilavanja tog niza.

  Konvergentan niz je ograničen.

- Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, tada važi:

  1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$;
  2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$;
  3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$, ako je $b \neq 0$ i ako za svako $n \in \mathbf{N}$ važi $b_n \neq 0$;
  4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$, gde je k neparan broj, ili je k paran broj i za svako $n \in \mathbf{N}$ važi $a_n \geq 0$;
  5. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^k = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^k = a^k$, gde je $k \in \mathbf{N}$.

- Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ i postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ sa osobinom da za svako $n \geq n_0$ važi $a_n \leq b_n$, onda sledi $a \leq b$.

- Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$ i postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ sa osobinom da za svako $n \geq n_0$ važi $a_n \leq c_n \leq b_n$, onda sledi $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$.

- U zadacima se često koriste sledeće granične vrednosti:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^a} = \begin{cases} 0, & a > 0 \\ 1, & a = 0 \\ +\infty, & a < 0 \end{cases}$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ \infty, & q > 1 \\ \text{ne postoji}, & q \leq -1 \end{cases}$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty} n^b q^n = 0, \quad |q| < 1, \quad b \in \mathbf{R}$;

4. Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$,

   onda važi $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$,

   kao i

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n \cdot b_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^a}{n!} = 0, \quad a \in \mathbf{R}$;

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0$;

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$;

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0, \quad a \in \mathbf{R}$.

Neodređeni izrazi su izrazi oblika:

„$\frac{0}{0}$” „$\frac{\infty}{\infty}$” „$0 \cdot \infty$” „$\infty - \infty$” „1^∞” „0^0” „∞^0”

Zadaci - Nizovi

1. **Ispitati konvergenciju niza čiji je opšti član**

   a) $a_n = \frac{1}{n}$. **b)** $a_n = (-1)^n$. **c)** $a_n = n$.

   Rešenje:

   a) Posmatrani niz je ograničen, jer postoji $M = 1$ sa osobinom da za svako $n \in \mathbf{N}$ važi $\left|\frac{1}{n}\right| \leq M$. Dati niz je monotono opadajući,jer za svako $n \in \mathbf{N}$ važi $n < n + 1$, tj. $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$. Znači, niz čiji je opšti član $a_n = \frac{1}{n}$ je konvergentan.
   b) Niz $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbf{N}}$ je divergentan jer ima dve tačke nagomilavanja. To su $a_{2k} = 1$ i $a_{2k+1} = -1$.
   c) Za svaki pozitivan realan broj M postoji prirodan broj n (npr. $n = [M] + 1$) koji je veći od njega, što znači da niz $\{n\}_{n\in\mathbf{N}}$ nije ograničen, a samim tim nije ni konvergentan. Prema definiciji je

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

2. **Koristeći definiciju granične vrednosti niza, pokazati da je**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3}.$$

Rešenje:

Neka je ε proizvoljan pozitivan realan broj. Treba pokazati da postoji prirodan broj n_0 sa osobinom da za svako $n \geq n_0$ važi $\left|\frac{n}{3n+1} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{n}{3n+1} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{3n-3n-1}{3(3n+1)}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{9n+3} < \varepsilon.$$

Za svako $n \in \mathbf{N}$ je $9n+3 > 9n$, tj. $\frac{1}{9n+3} < \frac{1}{9n}$. Nejednakost $\frac{1}{9n} < \varepsilon$ će važiti za svako $n \in \mathbf{N}$ koje zadovoljava uslov $9n > \frac{1}{\varepsilon}$, tj. $n > \frac{1}{9\varepsilon}$.

Znači ako za n_0 uzmemo npr. najmanji prirodan broj koji je veći od $\frac{1}{9\varepsilon}$, odnosno $n_0 = [\frac{1}{9\varepsilon}] + 1$, onda za svako $n \geq n_0$ važi $\left|\frac{n}{3n-1} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$.

(*Napomena:* Za n_0 se može uzeti bilo koji prirodan broj koji je veći od $\frac{1}{9\varepsilon}$. Sa $[x]$ se označava **ceo deo od** x.)

3. **Odrediti** **a)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-3n+4}{3n^3+5n^2+1}$. **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3+3n+5}{3n^3+5n^2+1}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^7-3n^4+8n^2-10}{6n^6-1}$.

Rešenje:

Graničnu vrednost niza, čiji opšti član ima oblik količnika polinoma stepena k i polinoma stepena m, računaćemo tako što ćemo brojilac i imenilac podeliti sa n^l, gde je $l = max\{k, m\}$, a zatim primeniti osobine konvergentnih nizova i nizova koji divergiraju u plus ili minus beskonačno. Na drugi način zadatak se može rešiti izdvajanjem ispred zagrade, u brojiocu n^k, a u imeniocu n^m.

a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2-3n+4}{n^3}}{\frac{3n^3+5n^2+1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{4}{n^3}}{3 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{4}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^3}\right)} = 0.$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n^3+3n+5}{n^3}}{\frac{3n^3+5n^2+1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 + \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^3}}{3 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4 + \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^3}\right)} = \frac{4}{3}.$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^7-3n^4+8n^2-10}{6n^6-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^7(1 - \frac{3}{n^3} - \frac{8}{n^5} - \frac{10}{n^7})}{n^6(6 - \frac{1}{n^6})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{1-\frac{3}{n^3}-\frac{8}{n^5}-\frac{10}{n^7}}{6-\frac{1}{n^6}}\right)=\infty.$$

4. **Odrediti** **a)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}-6n}{3n+1}$. **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+n}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$.

Rešenje:

Ideja primenjena u prethodnom zadatku može se primeniti i u opštijim slučajevima:

a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n}-6n)\ /:n}{(3n+1)\ /:n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}-6}{3+\frac{1}{n}}=-2.$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n})}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6(1+\frac{1}{n^6})}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n\right)^2}{n^2\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^6}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)^2}{n^2\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^6}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)^2}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^6}}}=4.$$

5. **Odrediti** **a)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5n+4}-n\right)$**.**

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-\sqrt[3]{n^3-2}\right)$**.**

c) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+n})$.

Rešenje:

Zadaci ovog tipa mogu se rešiti racionalisanjem:

a)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5n+4}-n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5n+4}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2-5n+4}+n}{\sqrt{n^2-5n+4}+n}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-5n+4-n^2}{\sqrt{n^2-5n+4}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(-5+\frac{4}{n})}{n\left(\sqrt{1-\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}+1\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-5+\frac{4}{n}}{\sqrt{1-\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}+1} = -\frac{5}{2},$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+2n^2} - \sqrt[3]{n^3-2}\right) \cdot$$

$$\cdot \frac{(\sqrt[3]{n^3+2n^2})^2 + \sqrt[3]{(n^3+2n^2)(n^3-2)} + (\sqrt[3]{n^3-2})^2}{(\sqrt[3]{n^3+2n^2})^2 + \sqrt[3]{(n^3+2n^2)(n^3-2)} + (\sqrt[3]{n^3-2})^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n^2-(n^3-2)}{\sqrt[3]{(n^3+2n^2)^2} + \sqrt[3]{n^3+2n^2}\sqrt[3]{n^3-2} + \sqrt[3]{(n^3-2)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+2}{\sqrt[3]{n^6+4n^5+4n^4} + \sqrt[3]{n^6+2n^5-2n^3-4n^2} + \sqrt[3]{n^6-4n^3+4}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2+\frac{2}{n^2})}{n^2(\sqrt[3]{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}} + \sqrt[3]{1+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^3}-\frac{4}{n^4}} + \sqrt[3]{1-\frac{4}{n^3}+\frac{4}{n^6}})} = \frac{2}{3}.$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1} - n + n - \sqrt[3]{n^3+n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n) + \lim_{n\to\infty} n(n-\sqrt[3]{n^3+n}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-\sqrt[3]{n^3+n})(n^2+n\sqrt[3]{n^3+n}+\sqrt[3]{(n^3+n)^2})}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+n}+\sqrt[3]{(n^3+n)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n^2+1-n^2)}{\sqrt{n^2+1}+n} + \lim_{n\to\infty} \frac{n(n^3-(n^3+n))}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+n}+\sqrt[3]{(n^3+n)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} + \lim_{n\to\infty} \frac{-n^2}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+n}+\sqrt[3]{(n^3+n)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)} + \lim_{n\to\infty} \frac{-n^2}{n^2\left(1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n^2})^2}\right)} = \frac{1}{6}.$$

6. **Odrediti** $\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}+5^{n+1}}{3^n-5^n}$.

Rešenje:

Kako je za $q = \frac{3}{5} < 1$ granična vrednost niza sa opštim članom $(\frac{3}{5})^n$ jednaka 0, dobijamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}+5^{n+1}}{3^n-5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}+1\right)}{5^n\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n-1\right)} =$$

$$= 5\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}+1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n-1} = -5.$$

7. **Odrediti** **a)** $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$.

b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

Rešenje:

Za izračunavanje ove granične vrednosti ne može se iskoristiti pravilo da je granična vrednost zbira konačno mnogo konvergentnih nizova jednaka zbiru njihovih graničnih vrednosti, jer broj sabiraka zavisi od n, tj. traži se granična vrednost sume beskonačno mnogo sabiraka.

a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

b) Da bismo odredili vrednost zbira $\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$, uočimo da važi

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

(postupak rastavljanja racionalne funkcije na parcijalne razlomke).

Tada je

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\\
=&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\\
=&\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.
\end{aligned}$$

8. **Odrediti** **a)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n}$. **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)^{n}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^3+2}{5n^3}\right)^{n^3}$.

Rešenje:

Sve navedene granične vrednosti mogu se odrediti korišćenjem činjenice da za svaki niz $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ koji divergira ka plus ili minus beskonačnosti, važi

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e.$$

Štaviše,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n\cdot b_n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

a)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{(-n)}\right)^{(-n)\cdot(-1)}=e^{-1}.$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{(-3n)}\right)^{(-3n)\cdot(-\frac{1}{3})}=e^{-\frac{1}{3}}.$$

c)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^3+2}{5n^3}\right)^{n^3}&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{5n^3}\right)^{n^3}=\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{5n^3}{2}}\right)^{\frac{5n^3}{2}\cdot\frac{2}{5}}=e^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{e^2}.
\end{aligned}$$

Granična vrednost funkcije

- Tačka x_0 je **tačka nagomilavanja** skupa $D \subseteq \mathbf{R}$, ako za svako $\varepsilon > 0$ interval $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ sadrži bar jedan elemenat iz skupa D, koji je različit od x_0.
  Drugim rečima, x_0 je tačka nagomilavanja skupa D, ako za svako $\varepsilon > 0$ skup $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap D$ ima beskonačno mnogo elemenata.

- Neka je x_0 tačka nagomilavanja domena D funkcije $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$. Kažemo da je broj A **granična vrednost** funkcije f u tački x_0 ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ (δ zavisi od ε), tako da za svako $x \in D$ koje zadovoljava uslov $0 < |x - x_0| < \delta$, važi $|f(x) - A| < \varepsilon$. U tom slučaju pišemo
  $$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

- Kažemo da je broj A **desna granična vrednost** funkcije $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ u tački x_0 ako je x_0 tačka nagomilavanja skupa $D \cap (x_0, +\infty)$ i ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ (δ zavisi od ε), tako da za svako $x \in D$ koje zadovoljava uslov $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, važi $|f(x) - A| < \varepsilon$. U tom slučaju pišemo
  $$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A.$$

- Kažemo da je broj A **leva granična vrednost** funkcije $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ u tački x_0 ako je x_0 tačka nagomilavanja skupa $D \cap (-\infty, x_0)$ i ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ (δ zavisi od ε), tako da za svako $x \in D$ koje zadovoljava uslov $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, važi $|f(x) - A| < \varepsilon$. U tom slučaju pišemo
  $$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A.$$

- Neka postoji realan broj a takav da domen funkcije $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ sadrži interval $(a, +\infty)$. Broj A je **granična vrednost funkcije f u plus beskonačnosti** ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $M > a$ (M zavisi od ε), tako da za $x > M$ važi $|f(x) - A| < \varepsilon$.
  U tom slučaju pišemo: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A.$
  Analogno se definiše: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A.$

- Neka je x_0 tačka nagomilavanja domena funkcije $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$. Ako za svako $K > 0$, postoji $\delta > 0$ (δ zavisi od K), tako da za svako $x \in D$ sa osobinom $0 < |x - x_0| < \delta$, važi $f(x) > K$, onda kažemo da f **teži ka plus beskonačnosti kada** $x \to x_0$.
  U tom slučaju pišemo: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty.$
  Analogno se definiše: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$

  Često u zadacima umesto $+\infty$ pišemo ∞.

- Neka postoji realan broj a takav da domen funkcije $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ sadrži interval $(a, +\infty)$. Ako za svako $K > 0$, postoji $\delta > 0$ (δ zavisi od K), tako da za svako $x > a$ važi $f(x) > K$, onda kažemo da f **teži ka plus beskonačnosti u plus beskonačnosti.**
  U tom slučaju pišemo: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
  (Analogno se definišu: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

- Neka je x_0 tačka nagomilavanja zajedničkog domena $D \subseteq \mathbf{R}$ funkcija $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ i $g : D \longrightarrow \mathbf{R}$. Pretpostavimo da postoje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$. Tada važe jednakosti:

  1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \pm B$,
  2. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \cdot B$,
  3. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}$, ako je $B \neq 0$ i za svako $x \in D$ je $g(x) \neq 0$.

  Jednakosti važe i ako se x_0 zameni sa ∞ ili $-\infty$.

- Navodimo neke granične vrednosti koje se često koriste:

  1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$,
  2. $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$,
  3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ +\infty, & \alpha < 0 \end{cases}$,
  4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$,
  5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$,
  6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$,
  7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha,\ \alpha \in \mathbf{R}$.

Zadaci - Granična vrednost funkcije

1. **Pokazati po definiciji da je**

   a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2} = 5.$ **b)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{x^2-2x} = -2.$

   Rešenje:

   a) Primetimo da je $x_0 = 2$ tačka nagomilavanja domena funkcije $\frac{x^2+x-6}{x-2}$. Po definiciji granične vrednosti potrebno je, za unapred zadato $\varepsilon > 0$, pronaći $\delta > 0$ tako da za svako $x \in \mathbf{R}\backslash\{2\}$ koje zadovoljava uslov $0 < |x-2| < \delta$, važi $\left|5 - \frac{x^2+x-6}{x-2}\right| < \varepsilon$.

   Kako je

   $$\left|5 - \frac{x^2+x-6}{x-2}\right| = \left|\frac{5x-10-x^2-x+6}{x-2}\right| = \left|-\frac{(x-2)^2}{x-2}\right| =$$

   $$= |x-2|\,,$$

   za dato ε, biramo $\delta = \varepsilon$, pa iz $|x-2| < \delta$ sledi

   $$\left|5 - \frac{x^2+x-6}{x-2}\right| < \varepsilon.$$

   b) Primetimo da, bez ograničenja opštosti, uvek možemo smatrati da je $\varepsilon < 1$. Neka je, dakle, dato $0 < \varepsilon < 1$. Tada, birajući $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, dobijamo

   $$0 < |x-2| < \delta \;\Rightarrow\; \left|-2 - \frac{4-x^2}{x^2-2x}\right| = \left|2 - \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)}\right| =$$

   $$= \left|\frac{x-2}{x}\right| = \frac{|x-2|}{x} < \frac{|x-2|}{1} < \delta < \varepsilon,$$

   jer, za $\varepsilon < 1$ i $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ iz $0 < |x-2| < \delta$ sledi $x > \frac{3}{2} > 1$.

2. **Odrediti graničnu vrednost**

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2+2x-1}{2x^2-x+1}.$ **b)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{x}.$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0} 2^x.$

   d) $\lim\limits_{x\to 0} \arccos x.$

   Rešenje:

Ako je funkcija f definisana u okolini tačke x_0 i neprekidna u x_0, onda važi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Kako su sve elementarne funkcije neprekidne, ovu činjenicu ćemo koristiti u narednim zadacima.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2+2x-1}{2x^2-x+1} = \dfrac{3\cdot 0+2\cdot 0-1}{2\cdot 0-0+1} = -1.$

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2}{\pi}.$

c) $\lim\limits_{x\to 0} 2^x = 2^0 = 1.$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \arccos x = \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}.$

3. **Odrediti graničnu vrednost**

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3+3x^2+2x+3}{5x^4+2x^2+x+3}.$ **b**) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^4+2x^2+x+5}{5x^3+x^2+x+3}.$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}.$ **d**) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}.$

Rešenje:

Ovo su neodređeni izrazi oblika „$\frac{\infty}{\infty}$” i potrebno ih je na neki način transformisati.

a)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3+3x^2+2x+3}{5x^4+2x^2+x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3(5+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3})}{x^4(5+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^4})} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{x(5+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^4})} = 0.$$

b)
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4(5+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{5}{x^4})}{x^3(5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(5+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{5}{x^4})}{5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}} = -\infty.$$

c)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}} = 1.$$

d) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{\sqrt{x}}{x}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=1.$$

4. **Izračunati graničnu vrednost**

a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-4x}{x^2-x-12}$.

b) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-13x-10}{4x^2-14x-30}$.

c) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2+9x+9}$.

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-2}{x^3+2x^2-2x-1}$.

e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-2x^3-8x+16}$.

f) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4+2x^3+8x+16}{x^3+7x^2+16x+12}$.

Rešenje:

Ovo su neodređeni izrazi oblika „$\frac{0}{0}$" kod kojih je potrebno faktorisati izraze u brojiocu i imeniocu.

a)

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{x^2-x-12}=\lim_{x\to 4}\frac{x(x-4)}{(x-4)(x+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{x}{x+3}=\frac{4}{7}.$$

b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}\frac{3x^2-13x-10}{4x^2-14x-30} &= \lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(3x+2)}{2(x-5)(2x+3)}=\lim_{x\to 5}\frac{3x+2}{2(2x+3)}=\\ &= \frac{17}{26}.\end{aligned}$$

c)

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{2x^2+9x+9}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-2)}{2(x+3)(x+\frac{3}{2})}=\lim_{x\to -3}\frac{x-2}{2x+3}=\frac{5}{3}.$$

d) Kako je $x=1$ koren polinoma u brojiocu i imeniocu, faktorisaćemo te polinome (npr. koristeći Hornerovu šemu).

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-2}{x^3+2x^2-2x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{(x-1)(x^2+3x+1)}=$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x+2}{x^2+3x+1} = 1.$$

e) Postupamo slično kao i u prethodnim zadacima.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-2x^3-8x+16} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2-4)}{(x-2)(x^3-8)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^3-8} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x^2+2x+4} = \frac{1}{3}.$$

f)

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^4+2x^3+8x+16}{x^3+7x^2+16x+12} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x^3+8)}{(x+2)^2(x+3)} =$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{(x+2)(x+3)} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x+3)} =$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{x^2-2x+4}{x+3} = 12.$$

5. **Izračunati graničnu vrednost**

a) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

b) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-x}{x-3}$.

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

d) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt[3]{x^3+x^2+15}}{x^2-5x+6}$.

e) $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}, \quad a \in \mathbf{R}$.

Rešenje:

Ove granične vrednosti sadrže izraze koje treba racionalisati.

a)

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{4}.$$

b)

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-x}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-x}{x-3} \cdot \frac{\sqrt{x+6}+x}{\sqrt{x+6}+x} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x+6-x^2}{(x-3)(\sqrt{x+6}+x)} = \lim_{x\to 3} \frac{-(x-3)(x+2)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+x)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-(x+2)}{\sqrt{x+6}+x} = \frac{-5}{\sqrt{3+6}+3} = -\frac{5}{6}.$$

c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} \cdot \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x-1)(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}{(1+x-1)(\sqrt{1+x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1+1+1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Na drugi način, koristeći $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha$, je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{(1+x)^{\frac{1}{3}}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{x}}{\frac{(1+x)^{\frac{1}{3}}-1}{x}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

d)

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt[3]{x^3+x^2+15}}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-5x+6} -$$

$$- \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{x^3+x^2+15}-3}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+5-9}{(x-2)(x-3)(\sqrt{x^2+5}+3)} -$$

$$- \lim_{x\to 2} \frac{x^3+x^2+15-27}{(x-2)(x-3)(\sqrt[3]{(x^3+x^2+15)^2}+3\sqrt[3]{x^3+x^2+15}+9)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x-3)(\sqrt{x^2+5}+3)} -$$

$$- \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+3x+6)}{(x-2)(x-3)(\sqrt[3]{(x^3+x^2+15)^2}+3\sqrt[3]{x^3+x^2+15}+9)} = -\frac{2}{27}.$$

e)

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}} + \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{(x-a)(x+a)}} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})} + \lim_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x+a}} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} + \lim_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x+a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

6. **Izračunati graničnu vrednost**

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$. **b**) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{\sin ax}$, $a\neq 0$, $a\in\mathbf{R}, b\in\mathbf{R}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. **d**) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$, $a\in\mathbf{R}$.

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$. **g**) $\lim\limits_{x\to -a}\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} a}{x+a}$, $a\in\mathbf{R}$.

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\cdot\sin x}$.

Rešenje:

U ovim zadacima ćemo koristiti graničnu vrednost (4).
a)

$$\lim_{x\to 0} 3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3.$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{bx}{\sin ax}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin ax}{bx}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{a}{b}\cdot\frac{\sin ax}{ax}}=\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}}=\frac{b}{a}.$$

c) Koristićemo poznatu vezu $1-\cos x=2\cdot\sin^2\frac{x}{2}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2\cdot 4}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

d)

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\cdot\cos(\frac{x+a}{2})\cdot\sin(\frac{x-a}{2})}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\cos(\frac{x+a}{2})\cdot\sin(\frac{x-a}{2})}{\frac{(x-a)}{2}}=\cos(\frac{2a}{2})\cdot\lim_{x\to a}\frac{\sin(\frac{x-a}{2})}{\frac{x-a}{2}}=\cos a.$$

e)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot\frac{\sin 4x}{4x}}{\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}-1}{x}}=\frac{4\cdot 1}{\frac{1}{2}}=8.$$

f)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\cdot\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x+\sin^2 x+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{x\cdot\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x\cdot\cos^2 x+\sin^2 x}{x\cdot\sin x\cdot\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\cdot(2\cos^2 x+1)}{x\cdot\sin x\cos^2 x}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} = 1 \cdot \frac{2+1}{1} = 3.$$

g)

$$\lim_{x\to -a} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} a}{x+a} = \lim_{x\to -a} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin a}{\cos a}}{x+a} =$$

$$= \lim_{x\to -a} \frac{\sin x \cdot \cos a + \sin a \cdot \cos x}{(x+a)\cdot \cos x \cdot \cos a} = \lim_{x\to -a} \frac{\sin(x+a)}{(x+a)\cdot \cos x \cdot \cos a} =$$

$$= \lim_{x\to -a} \frac{\sin(x+a)}{x+a} \cdot \frac{1}{\cos x \cdot \cos a} = \frac{1}{\cos^2 a}.$$

7. **Izračunati graničnu vrednost**

a) $\lim\limits_{x\to 0} (1+4x)^{\frac{3}{x}}$. **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{3x^2+x-1}{x-1}\right)^{\frac{2x+1}{3x^2}}$.

c) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \left(\frac{x^2+5}{x^2-2}\right)^{\frac{2x^2}{x+1}}$. **d)** $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{2x^2-3}{x+3}\right)^{\frac{x}{x^2-4}}$.

e) $\lim\limits_{x\to 3} (x-2)^{\frac{1}{(x-3)^2}}$. **f)** $\lim\limits_{x\to e} \frac{\ln x - 1}{x-e}$.

Rešenje:

Ove granične vrednosti a) - e) su oblika „1^∞". Izračunaćemo ih primenom poznatih graničnih vrednosti (1) i (2).

a) $\lim\limits_{x\to 0} (1+4x)^{\frac{3}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} (1+4x)^{\frac{1}{4x}\cdot\frac{3}{x}\cdot 4x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{12x}{x}} = e^{12}.$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{3x^2+x-1}{x-1}\right)^{\frac{2x+1}{3x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \left(1 + \frac{3x^2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{3x^2}\cdot\frac{2x+1}{x-1}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+1}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+1}{x-1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$

c) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \left(\frac{x^2+5}{x^2-2}\right)^{\frac{2x^2}{x+1}} = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \left(\frac{x^2-2+7}{x^2-2}\right)^{\frac{2x^2}{x+1}} =$

$= \lim\limits_{x\to \pm\infty} \left(1 + \frac{7}{x^2-2}\right)^{\frac{x^2-2}{7}\cdot\frac{2x^2}{x+1}\cdot\frac{7}{x^2-2}} = e^{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{14x^2}{(x+1)(x^2-2)}} =$
$= 1.$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{2x^2-3}{x+3}\right)^{\frac{x}{x^2-4}} = \lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{x+3+2x^2-6-x}{x+3}\right)^{\frac{x}{x^2-4}} =$

$= \lim\limits_{x\to 2} \left(1 + \frac{2x^2-x-6}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{2x^2-x-6}\cdot\frac{x}{x^2-4}\cdot\frac{2x^2-x-6}{x+3}} =$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 2} \frac{x}{x+3}\cdot\frac{(x-2)(2x+3)}{(x-2)(x+2)}} = e^{\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{4}} = e^{\frac{7}{10}}.$$

e) $$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{\ln(\frac{x}{e})}{x-e} = \lim_{x\to e}\ln(\frac{x}{e})^{\frac{1}{x-e}} =$$

$$= \ln\lim_{x\to e}\left(1+\frac{x}{e}-1\right)^{\frac{1}{x-e}} = \ln\lim_{x\to e}\left(1+\frac{x-e}{e}\right)^{\frac{e}{x-e}\cdot\frac{1}{x-e}\cdot\frac{x-e}{e}} =$$

$$= \ln e^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e}.$$

f) $$\lim_{x\to 3}(x-2)^{\frac{1}{(x-3)^2}} = \lim_{x\to 3}(1+x-3)^{\frac{1}{x-3}\cdot\frac{1}{(x-3)^2}\cdot(x-3)} = e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x-3}}.$$

Ova granična vrednost ne postoji. Zaista, jer desna granična vrednost ne postoji (kao konačna)

$$\lim_{x\to 3^+}(x-2)^{\frac{1}{(x-3)^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}} = +\infty,$$

a leva granična vrednost je jednaka nuli

$$\lim_{x\to 3^-}(x-2)^{\frac{1}{(x-3)^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{1}{x-3}} = 0.$$

8. **Izračunati graničnu vrednost**

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\sqrt{x})$. **b)** $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{1}{x-4}$. **c)** $\lim\limits_{x\to 0^+}3^{\frac{1}{x}}$.

d) $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{1}{x-4}$. **e)** $\lim\limits_{x\to 0^-}3^{\frac{1}{x}}$. **f)** $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{1-x}}{1-x^2}$.

g) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x+|x|}{3x}$. **h)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x+|x|}{3x}$.

Rešenje:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\sqrt{x}) = 1.$

Primetimo da ovde nije moguće tražiti levu graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$, jer funkcija $1+\sqrt{x}$ nije definisana za $x<0$.

b) Ovo je granična vrednost oblika „$\frac{1}{0^+}$”, dakle $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{1}{x-4} = +\infty.$

c) Ovo je granična vrednost oblika „$3^{+\infty}$”, dakle $\lim\limits_{x\to 0^+}3^{\frac{1}{x}} = +\infty.$

d) Ovo je granična vrednost oblika „$\frac{1}{0^-}$”, dakle $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{1}{x-4} = -\infty.$

e) Ovo je granična vrednost oblika „$3^{-\infty}$”, dakle $\lim\limits_{x\to 0^-}3^{\frac{1}{x}} = 0.$

f) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{1-x}}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{1-x}}{(\sqrt{(1-x)(1+x)})^2} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}} =$
$= +\infty.$

g) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x+|x|}{3x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x-x}{3x} = \dfrac{1}{3}.$

h) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x+|x|}{3x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x+x}{3x} = 1.$

9. **Izračunati graničnu vrednost**

a) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$. **b**) $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}}$.

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{x-2}$. **d**) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{|x-1|}$.

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|\sin x|}{x}$. **f**) $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin(x+1)$.

Rešenje:

a)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (1+\sin x - 1)^{\frac{1}{\sin x - 1}\cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot(\sin x - 1)} =$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \frac{\sin x - 1}{\cos^2 x}} = e^{\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{-1}{1+\sin x}} = e^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

b) Logaritmovanjem leve i desne strane izraza

$$y = (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}}$$

dobijamo

$$\ln y = \frac{1}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}} \cdot \ln \operatorname{tg} x.$$

Tada je

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}} \cdot \ln \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln \sin x - \ln \cos x}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln \sin x}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}} - \lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos x}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln \sin x}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}} - 0 = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\cdot x\right)}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}} + \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}} =$$

$$= 0 + \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{\ln x} + \sqrt[3]{\frac{1}{\ln^3 x} + \frac{1}{\ln x}}} = -\infty.$$

Dakle, $\lim\limits_{x\to 0} \ln y = \ln \lim\limits_{x\to 0} y = -\infty$, tj. $\lim\limits_{x\to 0} y = 0$.

c) Posmatrajmo levi i desni limes u tački $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x-2} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2} = +\infty.$$

Kako leva i desna granična vrednost u tački $x = 2$ imaju različitu vrednost, sledi da $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x}{x-2}$ ne postoji.

d) Posmatrajmo levu i desnu graničnu vrednost u tački $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1,$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{-(x-1)} = -1.$$

Dakle, ova granična vrednost ne postoji.

e) Slično kao u prethodnom primeru, posmatramo levu i desnu graničnu vrednost u tački $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sin x}{x} = -1.$$

Dakle, granična vrednost u nuli ne postoji.

f) Kako je domen funkcije $f(x) = \arcsin(x+1)$, $D = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x+1 \leq 1\} = [-2, 0]$, to se granična vrednost u tački $x = 0$ svodi na jednostranu graničnu vrednost, tj. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ (ova jednakost važi pod uslovom da $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ postoji). Kako je

$$\lim_{x\to 0^-} \arcsin(x+1) = \frac{\pi}{2},$$

sledi da granična vrednost $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin(x+1)$ postoji i jednaka je $\frac{\pi}{2}$.