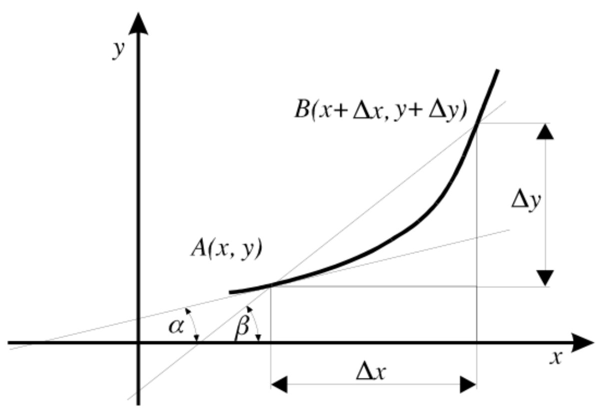
1

Izvod funkcije

- Posmatrajmo grafik neprekidne funkcije f definisane na intervalu (a, b) i neka je x tačka iz intervala (a, b).



Prava AB, gde su $A(x, f(x))$ i $B(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ tačke grafika, je sečica te krive, određena tačkama A i B. Pustimo da se tačka B kreće po krivoj i teži da se poklopi sa tačkom A. Sečica pri tom menja svoj položaj (nagib). Ukoliko postoji granični položaj te sečice kada tačka B teži ka tački A, tada se prava koja zauzima taj položaj naziva tangenta krive $y = f(x)$ u tački A.

Pretpostavimo da je ugao α koji tangenta zaklapa sa pozitivnim smerom x-ose različit od $\frac{\pi}{2}$. Ako je β ugao koji sečica AB zaklapa sa pozitivnim smerom x-ose, to je

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x},$$

pa je koeficijent pravca $\text{tg}\,\alpha$ tangente grafika funkcije kroz tačku A

$$tg\alpha = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x}.$$

Definicija: Ako postoji granična vrednost

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x},$$

gde $x, x+\Delta x \in (a,b)$, tada se ova granična vrednost naziva **prvi izvod** funkcije f **u tački** x i obeležava se sa $f'(x)$, $f'_x(x)$ ili y'.

Desni i **levi izvod** funkcije f u tački x su definisani sa

$$\lim_{\triangle x \to 0^+} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x} \quad \text{i} \quad \lim_{\triangle x \to 0^-} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x},$$

ako date granične vrednosti postoje i obeležavaju se sa $f'_+(x)$ i $f'_-(x)$ respektivno.

Ako u tački x postoje levi i desni izvod funkcije f i ako su jednaki, tada postoji izvod funkcije f u tački x, tj. važi

$$f'_+(x) = f'_-(x) = f'(x).$$

- **Tablica prvih izvoda elementarnih funkcija**

$$\begin{aligned}
(c)' &= 0 \\
(x^\alpha)' &= \alpha x^{\alpha-1}, \ \ 1.\ x > 0,\ \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \\
& \phantom{= \alpha x^{\alpha-1}, \ \ } 2.\ x < 0,\ \alpha = \frac{p}{q},\ p \in \mathbf{Z},\ q \in \mathbf{N},\ q \text{ neparno} \\
& \phantom{= \alpha x^{\alpha-1}, \ \ } 3.\ x = 0,\ \alpha = \frac{p}{q} \geq 1,\ p \in \mathbf{Z},\ q \in \mathbf{N},\ q \text{ neparno} \\
(\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a},\ \ a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0 \\
(\ln x)' &= \frac{1}{x},\ x > 0 \\
(a^x)' &= a^x \ln a,\ \ a > 0 \\
(e^x)' &= e^x,\ \ x \in \mathbf{R} \\
(\sin x)' &= \cos x,\ \ x \in \mathbf{R} \\
(\cos x)' &= -\sin x,\ \ x \in \mathbf{R} \\
(\text{tg}\, x)' &= \frac{1}{\cos^2 x},\ x \in \mathbf{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} | k \in \mathbf{Z}\} \\
(\text{ctg}\, x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x},\ x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbf{Z}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ |x|<1 \\
(\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ |x|<1 \\
(\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2}, \ \ x\in\mathbf{R} \\
(\operatorname{arcctg} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}, \ \ x\in\mathbf{R}
\end{aligned}$$

- **Osnovna pravila diferenciranja**
  Neka funkcije f i g imaju prve izvode u tački x iz intervala (a,b). Tada je:

$$\begin{aligned}
\big(c\cdot f(x)\big)' &= c\cdot f'(x), \qquad c\in\mathbf{R} \\
\big(f(x)\pm g(x)\big)' &= f'(x)\pm g'(x) \\
\big(f(x)\cdot g(x)\big)' &= f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x) \\
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}, \qquad g(x)\neq 0.
\end{aligned}$$

- **Izvod složene funkcije**
  Neka funkcija $g:(a,b)\to(c,d)$ ima izvod u tački $x\in(a,b)$, i neka funkcija $f:(c,d)\to\mathbf{R}$ ima izvod u tački $g(x)\in(c,d)$.

  Tada složena funkcija $h:(a,b)\to\mathbf{R},\ h(x)=f(g(x))$ ima izvod u tački x i važi
  $$h'(x)=f'_g(g(x))\cdot g'(x).$$

- **Izvod implicitne funkcije**
  Ako je funkcija $y=f(x)$ data implicitno jednačinom $F(x,y)=0$, onda se određuje izvod funkcije F po x, gde je y funkcija koja zavisi od x. Tako se dobija izvod funkcije f u implicitnom obliku.

- **Izvod inverzne funkcije**
  Neka je $f:(a,b)\to(c,d)$ bijektivna funkcija, a f^{-1} inverzna funkcija za datu funkciju. Ako funkcija f^{-1} ima izvod u tački x i ako je $f'(f^{-1}(x))\neq 0$, onda je
  $$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

- **Izvod parametarski zadate funkcije**
  Ako funkcije $x=x(t)$ i $y=y(t)$ imaju izvode po t i ako je $x'(t)\neq 0$, onda

je izvod parametarski zadate funkcije $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ parametarski zadata funkcija $\begin{cases} x = x(t) \\ y'_x(t) = \dfrac{y'_t(t)}{x'_t(t)} \end{cases}$.

Jednačina tangente t na grafik funkcije f u tački $A(x_0, y_0)$ krive $y = f(x)$ je

$$t: \ y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

ukoliko je prvi izvod $f'(x_0)$ konačan. Ako $f'(x_0)$ nije konačan ($f'(x_0) = \pm\infty$), onda je tangenta prava $x = x_0$.

Jednačina normale n na grafik funkcije f u tački $A(x_0, y_0)$ krive $y = f(x)$ je

$$n : y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \, (x - x_0)$$

ako je prvi izvod $f'(x_0)$ konačan i $f'(x_0) \neq 0$.
Ako je $f'(x_0) = 0$, tada je normala prava $x = x_0$, a ako prvi izvod nije konačan ($f'(x_0) = \pm\infty$), tada je normala prava $y = y_0$.

- **Izvodi višeg reda**
  $(n+1)$-vi izvod funkcije f je prvi izvod (ako postoji) n-tog izvoda funkcije f, tj.
  $$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)', \ n \in \mathbf{N}.$$

- **Diferencijal funkcije**
  Ako funkcija $y = f(x)$ ima konačan prvi izvod u nekoj tački x, za priraštaj funkcije $\triangle y$ važi
  $$\triangle y = f'(x) \cdot \triangle x + \alpha(\triangle x) \cdot \triangle x$$
  gde je $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \alpha(\triangle x) = 0$. **Diferencijal nezavisne promenljive** x je
  $$dx = \triangle x,$$
  a **diferencijal zavisne promenljive** y je
  $$dy = f'(x)dx.$$

Ako funkcija f ima konačan prvi izvod u tački x, kažemo da je funkcija f **diferencijabilna** u tački x. Ako je funkcija f diferencijabilna u svakoj tački intervala (a, b), kaže se da je ona **diferencijabilna na intervalu** (a, b).

Zadaci

1. **Odrediti, po definiciji, vrednost $f'(0)$ ako je**
   a) $y = \sin x$. **b)** $y = \sqrt{x}$.

   Rešenje:

   Po definiciji, vrednost prvog izvoda u tački $x_0 = 0$ je

   $$f'(0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(0 + \triangle x) - f(0)}{\triangle x},$$

   ako ova vrednost postoji.

   a) $f'(0) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{\sin \triangle x - \sin 0}{\triangle x} = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{\sin \triangle x}{\triangle x} = 1.$

   b) $f'(0) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{\sqrt{\triangle x} - \sqrt{0}}{\triangle x} = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{\triangle x}}$,

   $f'_+(0) = \lim\limits_{\triangle x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{\triangle x}} = +\infty$,

   $f'_-(0) = \lim\limits_{\triangle x \to 0^-} \dfrac{1}{\sqrt{\triangle x}} = -\infty$.

   Dakle, za funkciju $f(x) = \sqrt{x}$ desni i levi izvod u nuli nisu jednaki pa prvi izvod u nuli ne postoji.

2. **Koristeći definiciju prvog izvoda, odrediti izvod funkcije $y = \ln x$ za $x \in (0, +\infty)$.**

   Rešenje:

   $$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\ln(x + \triangle x) - \ln x}{\triangle x} =$$

   $$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\ln \frac{x + \triangle x}{x}}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{1}{\triangle x} \ln \frac{x + \triangle x}{x} =$$

   $$= \lim_{\triangle x \to 0} \ln \left(\frac{x + \triangle x}{x} \right)^{\frac{1}{\triangle x}} = \ln \lim_{\triangle x \to 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{\triangle x}} \right)^{\frac{x}{\triangle x} \cdot \frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}.$$

3. **Odrediti konstantu A tako da za funkciju $f(x) = \begin{cases} x^2 + Ax, & x \geq 0 \\ \sin x, & x < 0 \end{cases}$ postoji prvi izvod u nuli.**

   Rešenje:

   Da bi za funkciju f postojao prvi izvod u nuli, moraju postojati levi i desni izvod u toj tački i moraju biti jednaki. Dakle, koristimo da je

$$f'(0) = f'_{-}(0) = f'_{+}(0)$$

ako postoje vrednosti $f'_{-}(0)$ i $f'_{+}(0)$.

$$f'_{-}(0) = \lim_{\triangle x \to 0^-} \frac{\sin(0+\triangle x) - \sin 0}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0^-} \frac{\sin \triangle x}{\triangle x} = 1.$$

$$f'_{+}(0) = \lim_{\triangle x \to 0^+} \frac{(0+\triangle x)^2 + A(0+\triangle x)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0^+} \frac{(\triangle x)^2 + A\triangle x}{\triangle x} =$$
$$= \lim_{\triangle x \to 0^+} (\triangle x + A) = A.$$

Dakle, da bi bio ispunjen uslov $f'_{-}(0) = f'_{+}(0)$, mora biti $A = 1$ i tada je $f'(0) = 1$.

4. **Naći prvi izvod funkcije**

a) $y = \dfrac{1}{x}$ **b)** $y = \sqrt{x}$

c) $y = \dfrac{x}{x+1}$ **d)** $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

e) $y = e^x \sin x$ **f)** $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

g) $y = \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

za sve vrednosti x iz domena funkcije y.

Rešenje:

Tražene izvode odredićemo koristeći tablicu izvoda elementarnih funkcija i pravila za izvod zbira, proizvoda i količnika.

a) $y' = (x^{-1})' = (-1)x^{-1-1} = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$.

b) $y' = (x^{\frac{1}{2}})' = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x \neq 0$.

Za $x = 0$ prvi izvod ne postoji (vidi Zadatak 1 b)).

c) $y' = \dfrac{x'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} = \dfrac{x+1-x}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

d) $$y' = \frac{(1+\sqrt{x})'(1-\sqrt{x}) - (1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})'}{(1-\sqrt{x})^2} =$$
$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x}) - (1+\sqrt{x})\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{(1-\sqrt{x})^2} =$$
$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}}{(1-\sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}, \ x \neq 0.$$

U tački $x = 0$ desni prvi izvod je $f'_{+}(0) = 2$.

e) $$y' = (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x =$$
$$= e^x(\sin x + \cos x).$$

$$\text{f) } y' = \frac{(\ln x)'x^2 - \ln x(x^2)'}{x^4} = \frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x\ln x}{x^4} = \\ = \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}.$$

$$\text{g) } y' = \frac{(\cos x)'(1-\sin x) - \cos x(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2} = \\ = \frac{(-\sin x)(1-\sin x) - \cos x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} = \\ = \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1-\sin x)^2} = \frac{1}{1-\sin x}.$$

5. **Naći prvi izvod funkcije**

a) $y = e^{-x}$.

b) $y = \sqrt{1-x^2}$.

c) $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

d) $y = \cos^3 x - \dfrac{1}{\cos^3 x}$.

e) $y = \sqrt{\sin 3x} + \sin x^2$.

f) $y = \ln(\sin x)$.

g) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x^2}$.

h) $y = \arccos e^x$.

i) $y = \sin 2x \cdot e^{\sin x}$.

j) $y = \ln^2 x - \ln(\ln x)$.

k) $y = 3\ln \dfrac{x-1}{x+1}$.

l) $y = 3^{\frac{x}{\ln x}}$.

Rešenje:

U svim navedenim primerima potrebno je naći izvod složene funkcije. *Napomena:* U tačkama u kojima prvi izvod nije definisan, a koje pripadaju unutrašnjosti domena funkcije y, izvod se traži po definiciji.

$$\text{a) } y' = e^{-x}\cdot(-x)' = -e^{-x}.$$

$$\text{b) } y' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(1-x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{c) } y' = \frac{((x+1)^3)'(x-1)^2 - (x+1)^3((x-1)^2)'}{(x-1)^4} = \\ = \frac{3(x+1)^2(x+1)'(x-1)^2 - (x+1)^3\cdot 2(x-1)(x-1)'}{(x-1)^4} = \\ = \frac{(x+1)^2(x-1)(3(x-1)-2(x+1))}{(x-1)^4} = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}.$$

$$\text{d) } y' = 3\cos^2 x\cdot(\cos x)' - (-3\cos^{-4} x)\cdot(\cos x)' = \\ = 3\cos^2 x(-\sin x) + \frac{3}{\cos^4 x}(-\sin x) = \\ = -3\sin x\Big(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^4 x}\Big).$$

$$\text{e) } y' = \frac{1}{2\sqrt{\sin 3x}}\cdot(\sin 3x)' + \cos x^2\cdot(x^2)' =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}} + 2x\cos x^2. \\
\text{f) } y' &= \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' \;=\; \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x \;=\; \operatorname{ctg} x. \\
\text{g) } y' &= \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)' \;=\; \frac{1}{\frac{x^4+1}{x^4}}\cdot\frac{-2}{x^3} \;=\; \frac{-2x}{x^4+1}. \\
\text{h) } y' &= -\frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}}(e^x)' \;=\; -\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}. \\
\text{i) } y' &= (\sin 2x)'\cdot e^{\sin x} + \sin 2x\cdot(e^{\sin x})' \;= \\
&= \cos 2x\cdot(2x)'\cdot e^{\sin x} + \sin 2x\cdot e^{\sin x}(\sin x)' \;= \\
&= 2\cos 2x\cdot e^{\sin x} + \sin 2x\cdot\cos x\cdot e^{\sin x}. \\
\text{j) } y' &= 2\ln x\cdot(\ln x)' - \frac{1}{\ln x}\cdot(\ln x)' \;=\; \frac{2\ln x}{x} - \frac{1}{x\ln x}. \\
\text{k) } y' &= 3\frac{x+1}{x-1}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)' \;=\; 3\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} \;= \\
&= 3\frac{1}{x-1}\cdot\frac{2}{x+1} \;=\; \frac{6}{x^2-1}. \\
\text{l) } y' &= 3^{\frac{x}{\ln x}}\cdot\ln 3\cdot\left(\frac{x}{\ln x}\right)' \;=\; 3^{\frac{x}{\ln x}}\cdot\ln 3\cdot\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}.
\end{aligned}
$$

6. **Naći drugi izvod funkcije**

a) $y = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$. **b)** $y = (x-2)e^{2x}$.

Rešenje:

Drugi izvod funkcije određujemo kao prvi izvod prvog izvoda.

$$
\begin{aligned}
\text{a) } y' &= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) \;= \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \\
y'' &= -\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x \;=\; -\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}. \\
\text{b) } y' &= e^{2x} + (x-2)e^{2x}\cdot 2 \;=\; (2x-3)e^{2x}; \\
y'' &= 2e^{2x} + (2x-3)e^{2x}\cdot 2 \;=\; 4(x-1)e^{2x}.
\end{aligned}
$$

7. **Odrediti y'_x parametarski zadate funkcije**

a) $x = \sin t,\ y = \cos t$.

b) $x = \ln t,\ y = t + \frac{1}{t}$.

c) $x = e^{-t},\ y = e^{2t}$.

Rešenje:

Prvi izvod određujemo koristeći pravilo za diferenciranje parametarski zadate funkcije.

$$
\begin{aligned}
\text{a)}\quad y'_x &= \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(\cos t)'}{(\sin t)'} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t;\\
\text{b)}\quad y'_x &= \frac{\left(t+\frac{1}{t}\right)'}{(\ln t)'} = \frac{1-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{t^2-1}{t};\\
\text{c)}\quad y'_x &= \frac{(e^{2t})'}{(e^{-t})'} = \frac{2e^{2t}}{-e^{-t}} = -2e^{3t};
\end{aligned}
$$

8. **Izračunati x'_y funkcije $y = x + \ln x$ koristeći izvod inverzne funkcije.**

Rešenje:

$$y'_x = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} \Rightarrow x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{x}{x+1}.$$

9. **Naći prvi i drugi izvod implicitno zadate funkcije $y = y(x)$**
   a) $x^3 + y^3 = a^3$. **b)** $e^y = x + y$.
   c) $\ln y + \frac{x}{y} = c$. **d)** $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

Rešenje:

Ako je funkcija $y = y(x)$ data implicitno jednačinom $F(x, y) = 0$, prvo se odredi izvod leve i izvod desne strane po x, pri čemu se vodi računa da je y funkcija koja zavisi od x. Dakle i izvod y' funkcije y se dobija takođe u implicitnom obliku. Zatim se drugi izvod traži takođe kao izvod implicitno zadate funkcije $y' = y'(x, y(x))$.

a)

$$
\begin{aligned}
x^3 + y^3 &= a^3\\
3x^2 + 3y^2 y' &= 0\\
y' &= -\frac{x^2}{y^2},\quad y \neq 0;\\
y'' &= -\frac{2xy^2 - 2x^2 y y'}{y^4} =\\
&= -\frac{2xy + 2x^2 \cdot \frac{x^2}{y^2}}{y^3} =\\
&= -2\frac{x(x^3+y^3)}{y^5}.
\end{aligned}
$$

b)

$$\begin{aligned}
e^y &= x+y\\
e^y y' &= 1+y'\\
y'(e^y-1) &= 1\\
y' &= \frac{1}{e^y-1}, \quad y\neq 0;\\
y'' &= -\frac{1}{(e^y-1)^2}\cdot e^y\cdot y' \quad =\\
&= -\frac{1}{(e^y-1)^2}\cdot e^y\cdot \frac{1}{e^y-1} \quad =\\
&= \frac{-e^y}{(e^y-1)^3}.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\ln y+\frac{x}{y} &= c\\
\frac{1}{y}y'+\frac{y-xy'}{y^2} &= 0\\
yy'+y-xy' &= 0\\
y'(y-x) &= -y\\
y' &= \frac{y}{x-y}, \quad y\neq x;\\
y'' &= \frac{y'(x-y)-y(1-y')}{(x-y)^2} \quad =\\
&= \frac{\frac{y}{x-y}(x-y)-y(1-\frac{y}{x-y})}{(x-y)^2} \quad =\\
&= \frac{y^2}{(x-y)^3}.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\operatorname{arctg}\frac{y}{x} &= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\\
\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{y}{x}\right)' &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}(x^2+y^2)'\\
\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}(2x+2yy')\\
\frac{y'x-y}{x^2+y^2} &= \frac{x+yy'}{x^2+y^2}\\
y'x-y &= x+yy'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'(x-y) &= x+y \\
y' &= \frac{x+y}{x-y}, \quad y \neq x; \\
y'' &= \frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2} = \\
&= \frac{x-y+xy'-yy'-x-y+xy'+yy'}{(x-y)^2} = \\
&= \frac{2x\frac{x+y}{x-y}-2y}{(x-y)^2} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.
\end{aligned}$$

10. **Odrediti prvi izvod funkcije**

a) $y = x^x$. **b)** $y = (\cos x)^{\sin x}$. **c)** $y = \dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$.

Rešenje:

Potrebno je diferencirati funkciju oblika $y = f(x)^{g(x)}$, što nije moguće uraditi primenom nijednog od navedenih pravila. Zato prvo logaritmujemo datu funkciju, a zatim tražimo izvod dobijene implicitne funkcije.

a)
$$\begin{aligned}
y &= x^x \\
\ln y &= \ln x^x = x\ln x \\
\frac{y'}{y} &= \ln x + x\cdot\frac{1}{x} \\
\frac{y'}{y} &= \ln x + 1 \\
y' &= x^x(\ln x + 1).
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
y &= (\cos x)^{\sin x} \\
\ln y &= \sin x\cdot\ln(\cos x) \\
\frac{y'}{y} &= \cos x\cdot\ln(\cos x) + \sin x\cdot\frac{-\sin x}{\cos x} \\
\frac{y'}{y} &= \frac{1}{\cos x}(\cos^2 x\cdot\ln(\cos x) - \sin^2 x) \\
y' &= (\cos x)^{\sin x - 1}(\cos^2 x\cdot\ln(\cos x) - \sin^2 x).
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
y &= \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \\
\ln y &= \ln(\ln x)^x - \ln x^{\ln x} \\
\ln y &= x\ln(\ln x) - \ln x\cdot\ln x \\
\frac{y'}{y} &= \ln(\ln x) + x\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} - 2\cdot\frac{1}{x}\ln x
\end{aligned}$$

$$y' = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}\big(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} - \frac{2\ln x}{x}\big).$$

11. **Napisati jednačinu tangente i normale krive** $y = x^2 + 2x$ **u tački čija je apscisa** $x = 1$.

Rešenje:

Ordinata date tačke je $y(1) = 3$. **Funkcija je data eksplicitno što znači da je** $y' = 2x+2$, **a u datoj tački je** $y'(1) = 4$. **Tada je jednačina tangente u tački** $(1, 3)$

$$t : y - 3 = 4(x - 1),\ \textbf{odnosno}\ t : 4x - y - 1 = 0,$$

a jednačina normale

$$n : y - 3 = -\frac{1}{4}(x - 1),\ \textbf{odnosno}\ n : x + 4y - 13 = 0.$$

Zadaci za samostalni rad

1. Naći prvi izvod funkcije
a) $y = 3\sqrt[3]{x^2} - 2x\sqrt{x}$. b) $y = \frac{x^5}{e^x}$. c) $y = \frac{x^2+1}{x^2+4}$.

Rezultat:
a) $y' = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 3\sqrt{x}$. b) $y' = \frac{x^4(5-x)}{e^x}$. c) $y' = \frac{6x}{(x^2+4)^2}$.

2. Naći prvi izvod funkcije
a) $y = \frac{(2x-3)^2}{(x+5)^2}$. b) $y = \ln(\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x})$. c) $y = \sqrt{1 - x^2}\arcsin x$.

Rezultat:
a) $y' = \frac{26(2x-3)}{(x+5)^3}$. b) $y' = -\frac{1}{\sin x}$. c) $y' = 1 - \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. Naći drugi izvod funkcije
a) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$. b) $y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$.

Rezultat:
a) $y' = -2\sin 2x \cos 2x\ ;\ y'' = -4\cos 4x$.
b) $y' = \frac{1}{1+x^2}\ ;\ y'' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$.

4. Odrediti y'_x parametarski zadate funkcije
   a) $y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2,\ x = \frac{1}{t+1}$. b) $y = b\sin^3 t,\ x = a\cos^3 t$.

   Rezultat:
   a) $y'_x = \dfrac{-2t}{t+1}$.
   b) $y'_x = -\dfrac{b}{a}\operatorname{tg} t$.

5. Naći prvi izvod implicitno zadate funkcije
   a) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$. b) $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = c$.

   Rezultat:
   a) $y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. b) $y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$.

6. Odrediti prvi izvod funkcije
   a) $y = (x^2)^x$. b) $y = (\frac{1}{x})^{\ln x}$.

   Rezultat:
   a) $y' = (x^2)^x(\ln x^2 + 2)$. b) $y' = (\frac{1}{x})^{\ln x+1}(\ln\frac{1}{x} - \ln x)$.

7. Napisati jednačinu tangente i normale krive $y = \frac{-8a}{4a^2+x^2}$ u tački čija je apscisa $x = 2a$.

   Rezultat:
   $t : y + \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{2a^2}(x - 2a);\quad n : y + \dfrac{1}{a} = -2a^2(x - 2a)$.

2

Lopitalovo pravilo

- Granične vrednosti mogu biti različitog neodređenog tipa

$$„\frac{0}{0}”,\ „\frac{\infty}{\infty}”,\ „0\cdot\infty”,\ „\infty-\infty”,\ „1^{\infty}”,\ „0^{0}”,\ „\infty^{0}”.$$

  U ovim slučajevima pogodno je primeniti **Lopitalovo pravilo**.

- **Lopitalovo pravilo (teorema).** Neka su funkcije f i g neprekidne u nekoj okolini U tačke a i imaju izvod za sve x iz te okoline sem eventualno u tački a i važi $g'(x) \neq 0$ za sve $x \in U \setminus \{a\}$, gde je a broj ili simbol beskonačnosti[1] ($a = \pm\infty$).
  Ako $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (ili $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$) i postoji (konačna ili beskonačna) granična vrednost $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, tada postoji i $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ i važi

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

- Pokažimo da se i ostali neodređeni izrazi mogu transformisati na oblike „$\frac{0}{0}$” ili „$\frac{\infty}{\infty}$”, koji su pogodni za primenu Lopitalovog pravila.

  1° „$0\cdot\infty$”. Pri izračunavanju granične vrednosti $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)\cdot f_2(x))$, gde je $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = 0$ i $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = \infty$, možemo izraz $f_1(x)\cdot f_2(x)$ zapisati na sledeći način

$$f_1(x)\cdot f_2(x) = \frac{f_1(x)}{\frac{1}{f_2(x)}}$$

  i tako ga svesti na oblik „$\frac{0}{0}$”.
  Slično, možemo izraz $f_1(x)\cdot f_2(x)$ zapisati kao

$$f_1(x)\cdot f_2(x) = \frac{f_2(x)}{\frac{1}{f_1(x)}}$$

[1] Ako je $a = \infty(-\infty)$ onda se pod okolinom U podrazumeva skup svih brojeva x tako da je $x > \frac{1}{\varepsilon}$ $(-x > \frac{1}{\varepsilon})$, za neko $\varepsilon > 0$.

i tako ga svesti na oblik „$\frac{\infty}{\infty}$".

2° „$\infty - \infty$". Pri izračunavanju $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) - f_2(x))$, gde je $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = \infty$, možemo postupiti na sledeći način:
Kako je

$$f_1(x) - f_2(x) = f_1(x)\left(1 - \frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right),$$

ako $\frac{f_2(x)}{f_1(x)} \to 1$ kada $x \to a$, dobijamo slučaj 1°. Ako $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$ ne teži ka 1 $(x \to a)$, odnosno $\frac{f_2(x)}{f_1(x)} \to \infty$ ili $\frac{f_2(x)}{f_1(x)} \to c$, $c \neq 1$ $(x \to a)$, onda dobijamo određene izraze „$\infty \cdot \infty$" $= \infty$ ili „$\infty \cdot (1-c)$" $= \infty$.

3° „1^∞", „0^0", „∞^0". Ti oblici se pomoću jednakosti

$$[f_1(x)]^{f_2(x)} = e^{f_2(x)\cdot \ln f_1(x)}$$

svode na slučaj 1°. Dakle, pri računanju izraza $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)^{f_2(x)}$ prvo računamo $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)\ln f_1(x)$.

- U zadacima ćemo iznad znaka jednakosti uvek naznačiti o kom tipu granične vrednosti se radi. Primena Lopitalovog pravila, odnosno korišćenje jednakosti $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, obeležavaćemo sa $\left(L, \frac{0}{0}\right)$ ili $\left(L, \frac{\infty}{\infty}\right)$ u zavisnosti od tipa granične vrednosti $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$. Čitaocu se ostavlja da proveri da li su uslovi za primenu ovog pravila zadovoljeni.

Zadaci

1. **Izračunati graničnu vrednost**

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1}$. **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\arcsin 5x}$. **d)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{\ln x}$.

Rešenje.

Ove granične vrednosti su oblika „$\frac{0}{0}$" i možemo direktno primeniti Lopitalovo pravilo.

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1} \overset{(L,\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{\frac{-1}{e-x}+1} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}+1)(e-x)}{e^x(e-x-1)} = \frac{2e}{e-1}.$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x-\sin x} \overset{(L,\frac{0}{0})}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1-\cos x)\cos^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x} = 2.$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\arcsin 5x} \overset{(L,\frac{0}{0})}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+4x^2}\cdot 2}{\frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\cdot 5} = \dfrac{2}{5}.$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{\ln x} \overset{(L,\frac{0}{0})}{=} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos(x-1)}{\frac{1}{x}} = 1.$

2. **Izračunati graničnu vrednost**

a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x\cdot\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}.$ **b**) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}.$

c) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}).$ **d**) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x - x\cdot e^{\frac{1}{x-2}}).$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right).$

Rešenje.

U zadacima pod a) i b) imamo granične vrednosti oblika „$\frac{\infty}{\infty}$". Može se direktno primeniti Lopitalovo pravilo.

a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x\cdot\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)} = \lim\limits_{x\to a}\cos x\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)} \overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=}$

$$= \cos a\cdot\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x-a}}{\frac{1}{e^x-e^a}\cdot e^x} = \cos a\cdot\lim_{x\to a}\frac{1}{e^x}\cdot\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a} \overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=}$$

$$= \cos a\cdot\frac{1}{e^a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{e^x}{1} = \cos a.$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^n} \overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = \dfrac{1}{n}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^n} = 0.$

c) Pre primene Lopitalovog pravila, neodređeni izraz oblika „$0\cdot\infty$" svodimo na oblik „$\frac{\infty}{\infty}$".

$\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}} \overset{(0\cdot\infty)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} \overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}}{-\frac{2}{x^3}} = \infty.$

Granične vrednosti u zadacima pod d) i e) su oblika „$\infty-\infty$". Faktorizacijom taj oblik svodimo na „$0\cdot\infty$" a zatim na oblik „$\frac{\infty}{\infty}$", nakon čega primenjujemo Lopitalovo pravilo.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-x\cdot e^{\frac{1}{x-2}}) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot(1-e^{\frac{1}{x-2}}) \overset{(\infty\cdot 0)}{=} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x-2}}}{\frac{1}{x}} \overset{(L,\frac{0}{0})}{=}$

$$= \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x-2}}\cdot \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{(x-2)^2} = 1\cdot(-1) = -1.$$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot\left(\dfrac{x}{\sin x}-1\right) \overset{(\infty\cdot 0)}{=}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}-1}{x} \overset{(L,\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} \overset{(L,\frac{0}{0})}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x + x\sin x}{2\sin x\cos x} = 0.$$

3. **Izračunati graničnu vrednost**

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$. **b)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$. **c)** $\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{ctg} x)^x$.
d) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$. **e)** $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$. **f)** $\lim\limits_{x\to 0}(3x+1)^{\operatorname{ctg} x}$.

Rešenje.

a) Granična vrednost je oblika „0^0”.

Neka je $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = A$. Tada je

$$\ln A = \ln\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} x\ln x \overset{(0\cdot\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

Na osnovu toga je

$$\ln A = 0 \;\Rightarrow\; A = e^0 = 1.$$

b) Granična vrednost je oblika „0^0”.

Neka je $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x} = A$. Tada je

$$\ln A = \ln\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x\to 0^+}\ln x^{\sin x} = \lim_{x\to 0^+}\sin x\cdot\ln x \overset{(0\cdot\infty)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}\cdot\cos x} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x} =$$

$$= -\lim_{x\to 0^+}\operatorname{tg} x\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 0\cdot 1 = 0.$$

Na osnovu toga je A,

$$\ln A = 0 \;\Rightarrow\; A = e^0 = 1.$$

c) Granična vrednost je oblika „∞^0”.

Neka je $\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{ctg} x)^x = A$. Tada imamo

$$\ln A = \ln \lim_{x\to 0^+}(\operatorname{ctg} x)^x = \lim_{x\to 0^+} x\ln\operatorname{ctg} x \overset{(0\cdot\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\operatorname{ctg} x}{\frac{1}{x}} \overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\sin x\cdot\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\cos x} = 0.$$

Prema tome je

$$\ln A = 0 \;\Rightarrow\; A = e^0 = 1.$$

d) Granična vrednost je oblika „∞^0”.

Neka je $\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}} = A$. Tada imamo

$$\ln A = \ln \lim_{x\to 0^+}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\operatorname{ctg} x}{\ln x} \overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x\cdot\cos x} = -1.$$

Na osnovu toga je

$$\ln A = -1 \;\Rightarrow\; A = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

e) Granična vrednost je oblika „1^∞”.

Neka je $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = A$. Tada je

$$\ln A = \ln\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} \overset{(L,\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Prema tome je

$$\ln A = 1 \;\Rightarrow\; A = e.$$

f) Granična vrednost je oblika „1^∞”.

Neka je $\lim\limits_{x\to 0}(3x+1)^{\operatorname{ctg} x} = A$. Tada je

$$\ln A = \ln\lim_{x\to 0}(3x+1)^{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x\ln(3x+1)) \overset{(\infty\cdot 0)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(3x+1)}{\operatorname{tg} x} \overset{(L,\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{3x+1}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 3.$$

Prema tome je

$$\ln A = 3 \;\Rightarrow\; A = e^3.$$

Zadaci za samostalni rad

1. Izračunati graničnu vrednost

   $a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\ln(x+1)}.\qquad b)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}\quad (a,b>0).$

   $c)\ \lim\limits_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1).\qquad d)\ \lim\limits_{x\to a}(\arcsin(x-a)\cdot \operatorname{ctg}(x-a)).$

   Rezultat: $a)$ 1. $b)$ 1. $c)$ 1. $d)$ 1.

2. Izračunati graničnu vrednost

   $a)\ \lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}.\qquad b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}.$

   $c)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}.$

   Rezultat: $a)\ e^2.\quad b)\ e^2.\quad c)\ \frac{1}{e}.$