7.4.2020. MATEMATIČKA ANALIZA I   DOMAĆI ZADATAK

U pitanjima gde stoji □ treba staviti + ako je iskaz tačan, - ako je netačan i • ako ne znate da li je iskaz tačan ili netačan. Ako ima više ponuđenih odgovora treba zaokružiti tačne. Ako stoji linija iza pitanja potrebno je dati objašnjenje (može primer ili kontraprimer).

STUDENT ŠALJE ODGOVOR NA SOVA PLATFORMU. VREME RADA JE 15min, tj. 9h-9h15min utorak 7.4.2020. posle toga se ne prima. STUDENTU BROJ INDEKSA KAZUJE KOJA TRI PITANJA ODGOVARA: PRVA CIFRA ODREDJUJE PITANJE IZ PRVE GRUPE, DRUGA CIFRA IZ DRUGE I TREĆA CIFRA ODREDJUJE PITANJE IZ TREĆE GRUPE PITANJA. U ODGOVORU INDEX NAJPRE I IME PREZIME

GRANIČNI PROCESI   DZI6

PRVA CIFRA

0. □ Ako je funkcija f neprekidna nad skupom E, ona ne mora biti neprekidna u svakoj tački skupa E.
1. Kada kažemo da je funkcija f neprekidna u tački a sa desne (leve) strane?
2. □ Funkcija f jedne realne promenljive je neprekidna u tački a ako i samo ako je neprekidna u tački a i sa leve i sa desne strane.
3. □ Funkcija jedne realne promenljive je neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a,b]$ ako i samo ako je
   - neprekidna u svakoj tački otvorenog intervala (a,b);
   - u tački a je neprekidna sa desne strane;
   - u tački b je neprekidna sa leve strane.
4. Ako su realne (kompleksne) funkcije f i g neprekidne u tački a, tada su u tački a neprekidne i sledeće funkcije:
   1) $h = f + g$,
   2) $h = f \cdot g$,
   3) $h = \frac{f}{g}$, pod uslovom da je $g \neq 0$ u nekoj okolini tačke a.
5. Pokazati da je konstantna funkcija $f(x) = c$ neprekidna funkcija.
6. Pokazati da je funkcija $f(x) = \sin x$ neprekidna za svako $x \in (-\infty, \infty)$.
7. □ Funkcija $f(x) = x^2$ je neprekidna za svako $x \in (-\infty, \infty)$. Pokazati po definiciji.
8. □ Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definisana sa
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   nije neprekidna u tački $(0,0)$. Pokazati po definiciji.
9. □ Funkcija $f : D \to Y$ je neprekidna u tački $a \in D$ ako i samo ako za svaki niz $\{x_n\} \subset D$ koji konvergira ka a sledi da niz $\{f(x_n)\} \subset Y$ konvergira ka $f(a)$.

DRUGA CIFRA

0. Kada funkcija ima prekid prve, a kada druge vrste?
1. □ Funkcija $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ □ $F(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, ima u tački 0 prividan prekid.
7. Kada kažemo da je funkcija neprekidna po delovima?
2. □ Neka su dati metrički prostori (X, d_X), (Y, d_Y) i (Z, d_Z) kao i funkcije $g : D \to Y$, $D \subset X$ i $f : Y \to Z$.
   Ako je g (neprekidna funkcija) neprekidna funkcija u tački a, f (neprekidna funkcija) neprekidna funkcija u tački $g(a)$ (neprekidna), tada je složena funkcija $h = f \circ g$ (neprekidna funkcija) neprekidna funkcija u tački a.
3. □ Neka su dati metrički prostori (X, d_X), (Y, d_Y) i (Z, d_Z) kao i funkcije $g : D \to Y$, $D \subset X$ i $f : Y \to Z$.
   Ako je $\lim_{x\to a} g(x) = \alpha \in Y$ i f neprekidna funkcija u tački α, tada je $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)) = f(\alpha)$.
4. *** □ Neka su dati metrički prostori (X, d_X), (Y, d_Y) i (Z, d_Z) kao i funkcije $g : D \to Y$, $D \subset X$ i $f : Y \to Z$. Pretpostavimo da
   1) $g(x) \to \alpha \in Y$, kada $x \to a$;
   2) $f(u) \to \beta$, kada $u \to \alpha$;
   3) a) Ako $a \in X$, (za slučaj $X = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, tj. x ne teži $\pm\infty$), onda
   $(\exists \delta^* \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in (D \setminus \{a\}) \cap L(a, \delta^*))\ g(x) \neq \alpha$;

b) Ako je $X = \mathbb{R}$ i $g(x) \to \alpha$, kada $x \to \infty$, onda
$(\exists \delta^* \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D \cap (\delta^*, \infty))\ g(x) \neq \alpha$;

c) Ako je $X = \mathbb{R}$ i $g(x) \to \alpha$, kada $x \to -\infty$, onda
$(\exists \delta^* \in \mathbb{R}^-)(\forall x \in D \cap (-\infty, \delta^*))\ g(x) \neq \alpha$.

Tada $f(g(x)) \to \beta$, kada $x \to a$.

5. *** □ Neka su dati metrički prostori (X, d_X) i (Z, d_Z) kao i funkcije $g : D \to \mathbb{R}$, $D \subset X$ i $f : \mathbb{R} \to Z$. Pretpostavimo da

   1) $g(x) \to \pm\infty$, kada $x \to a$,
   2) $f(u) \to \beta$, kada $u \to \pm\infty$.

   Tada $f(g(x)) \to \beta$, kada $x \to a$.

6. *** □ Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori i neka je data funkcija $f : X \to Y$. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna

   a) Funkcija f je neprekidna.

   b) Inverzna slika svakog otvorenog skupa $U \subset Y$ je otvoren skup.

   c) Inverzna slika svakog zatvorenog skupa $F \subset Y$ je zatvoren skup.

7. □ Neka je (X, d) metrički prostor i $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset X$ funkcija koja je neprekidna u tački $a \in D$.
   Ako je $f(a) > c$ ($f(a) < c$), tada postoji pozitivan realan broj ε, tako da za sve $x \in L(a, \varepsilon) \cap D$ važi $f(x) > c$ ($f(x) < c$).

8. □ Ako je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset X$, neprekidna u tački $a \in D$ i $f(a) > 0$ ($f(a) < 0$), tada postoji otvorena lopta $L(a, \delta)$, tako da za svako $x \in D \cap L(a, \delta)$ sledi da je $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

9. □ Ako je funkcija $f : [a, b] \to Y$ neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a, b]$, onda je ona nad tim intervalom i o graničena.

TREĆA CIFRA

0. *** □ Kada je skup kompaktan u metričkom prostoru? *** □ A kada je prostor kompaktan?

1. *** □ Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) proizvoljni metrički prostori. Ako je $f : D \to Y$, $D \subset X$ neprekidna funkcija i ako je skup D kompaktan u metričkom prostoru (X, d_X), tada je f ograničena funkcija.

2. □ Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna nad $[a, b]$, tada ona bar jednom dostiže svoju najveću i najmanju vrednost (funkcija $f(x)$ ima maksimum i minumum nad intervalom $[a, b]$), tj. postoje realni brojevi $\alpha, \beta \in [a, b]$, takvi da je $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x) = f(\alpha)$ i $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x) = f(\beta)$.

3. *** □ Neka je (X, d_X) metrički prostor i $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset X$ neprekidna funkcija nad kompaktnim skupom D. Tada funkcija f dostiže najveću i najmanju vrednost nad skupom D.

4. □ Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna nad intervalom $[a, b]$ i $f(a) \cdot f(b) < 0$, tada u intervalu (a, b) postoji bar jedna nula funkcije, tj. postoji tačka $\xi \in (a, b)$, tako da je $f(\xi) = 0$.

5. □ Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija nad $[a, b]$ i ako je $f(a) \neq f(b)$, ona u tom intervalu uzima sve vrednosti između $f(a)$ i $f(b)$.

6. □ Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, tada je ili za svako $x \in [a, b]$, $f(x) = c$ ili $f([a, b]) = [c, d]$.

7. □ Ako je $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ neprekidna strogo monotona funkcija nad (a, b), tada je $f((a, b))$ otvoren interval.

8. □ Ako je $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna strogo monotona funkcija nad proizvoljnim intervalom realnih brojeva I, tada je inverzna funkcija $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ neprekidna nad $f(I)$.

9. Koje su osnovne elementarne funkcije?

DOPUNSKA PITANJA

0. Šta su elementarne funkcije?

1. □ Elementarne funkcije su neprekidne u oblasti definisanosti.

2. Dati definiciju uniformne neprekidnost funkcije.

3. □ Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uniformno neprekidna nad $[a, b]$, ona je nad tim intervalom i neprekidna.

4. □ Funkcija $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ definisana sa
   $$f(x) = \frac{1}{x}$$
   je nad intervalom $(0, 1)$ neprekidna, ali nije i uniformno neprekidna.

5. □ Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna nad $[a, b]$, ona je nad tim intervalom i uniformno neprekidna.