SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

Definicija 0.1 *Sistem linearnih jednačina S nad skupom $\mathbb{R}$ za n-torku nepoznatih $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n, m \in \mathbb{N}$, gde su $a_{ij} \in F$ i $b_i \in F$ za $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ i $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, jeste konjunkcija formula (linearnih jednačina) odnosno*

$$S: \quad \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}$$

Ako je $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, onda se za sistem S kaže da je **homogen.** *Skalari $b_1, b_2, \ldots, b_m$ polja F nazivaju se slobodni članovi.*

Skup svih rešenja sistema S označavaće se sa $R_S = \{x \in F^n | Ax = b\}$.

Definicija 0.2 *Sistemi S_1 i S_2 su ekvivalentni ako i samo ako imaju iste skupove rešenja, to jest $R_{S_1} = R_{S_2}$.*

Primer 0.3 *Da li su sledeća dva sistema ekvivalentna?*

$$\begin{array}{ccccc} 3x_1 & - & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 5 \end{array}; \quad \begin{array}{ccccc} x_1 & + & 3x_2 & = & 7 \\ & & x_2 & = & 2. \end{array}$$

Ova dva sistema su ekvivalentna jer imaju isto rešenje i to $(x_1, x_2) = (1, 2)$.

Primer 0.4 *Da li su sledeća dva sistema ekvivalentna?*

$$\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & x_2 & = & 6 \\ x_1 & - & x_2 & = & 0 \end{array}; \quad \begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & = & 8. \end{array}$$

Prvi sistem jednačina ima jedinstveno rešenje $(x_1, x_2) = (2, 2)$, uvrštavanjem ovog rešenja u drugi sistem zaključujemo da je $(x_1, x_2) = (2, 2)$ i rešenje drugog sistema, međutim drugi sistem ima beskonačno mnogo rešenja $(x_1, x_2) = \{(4 - \alpha, \alpha) | \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$ koja nisu rešenja prethodnog sistema, tako da zaključujemo da ova dva sistema nisu ekvivalentna.

Definicija 0.5 *Ekvivalentne (elementarne) transformacije sistema linearnih jednačina:*

1. *Zamena mesta jednačinama.*
2. *Množenje jednačine brojem različitim od nule.*
3. *Dodavanje jednačine nekoj drugoj jednačini.*
4. *Promena mesta sabircima u jednačinama (iste nepoznate pišu se jedna ispod druge odnosno u istoj koloni).*

Teorema 0.6 *Ekvivalentnim transformacijama skup rešenja sistema se ne menja, to jest ako je sistem S_1 dobijen od sistema S_2 ekvivalentnim transformacijama, tada je $R_{S_1} = R_{S_2}$, odnosno sistemi S_1 i S_2 su ekvivalentni.*

Teorema 0.7 *Homogeni kvadratni sistem linearnih jednačina ima netrivijalna rešenja, tj. rešenja različita od $(0, 0, \ldots, 0)$, ako i samo ako je determinanta toga sistema jednaka nuli.*

Klasifikacija sistema linearnih jednačina u zavisnosti od rešenja

Sistemi linearnih jednačina mogu da budu rešivi (sistemi koji imaju rešenja, zovu se još i **saglasni sistemi**) i nerešivi (sistemi koji nemaju rešenja).

1. **Saglasni sistemi**-mogući, rešivi.
   1.a. Određeni sistemi - tačno jedno rešenje.
   1.b. Neodređeni sistemi-više od jednog rešenja, (tj. beskonačno mnogo rešenja).

2. **Nerešivi sistemi**-kontradiktorni, sistemi koji nemaju rešenje, nemogući, protivrečni.

Primer 0.8 *Rešiti sisteme jednačina i prikazati sisteme grafički.*

$$a)\ \begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 3 \\ -x & + & y & = & 5 \end{array},\quad b)\ \begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 3 \\ 2x & + & 2y & = & 6 \end{array},\quad c)\ \begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 3 \\ x & + & y & = & 4 \end{array}.$$

$\emptyset$

Rešenje: $(-1, 4)$ $\quad R_S = \{(\alpha, 3-\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$

$$a)\ \begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 3 \\ -x & + & y & = & 5 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 3 \\ & & 2y & = & 8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rcr} x & = & -1 \\ y & = & 4 \end{array}.$$

Sistem je određen ima tačno jedno rešenje $(x, y) = (-1, 4)$.

$b)$ $$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 3 \\ 2x & + & 2y & = & 6 \\ \hline x & + & y & = & 3 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}.$$ $/ \cdot -2$

Sistem je jednostruko neodređen i ima beskonačno mnogo rešenja. Skup rešenja sistema je $(x, y) = \{(\alpha, 3 - \alpha) | \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$.

$c)$ $$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 3 \\ x & + & y & = & 4 \\ \hline x & + & y & = & 3 \\ & & 0 & = & 1 \end{array}.$$ $/ \cdot 1$

U ovom primeru sistem je nemoguć, odnosno nerešiv.

Primer 0.9 *Rešiti sistem linearnih jednačina* $\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & = & 1 \end{array}$

Rešenje: Prvo ćemo zameniti mesta jednačinama, onda prvu jednačinu pomnožimo sa -2 i dodamo je drugoj jednačini

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & = & 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ & - & y & - & 5z & = & -1 \end{array}$$

$x = 3\alpha$

$x + 1 - 5\alpha + 2\alpha = 1$

Drugu jednačinu pomnožimo sa -1 i tada dobijamo $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ & & y & + & 5z & = & 1 \end{array}$,

odakle dobijamo skup rešenja sistema $(x, y, z) = \{(3\alpha, 1-5\alpha, \alpha) | \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Primer 0.10 *Rešiti sistem linearnih jednačina*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z = & 1 \\ 2x & + & 2y & + & 3z = & 2 \\ x & - & y & + & 4z = & 1 \end{array} . \qquad /\cdot -2 \quad /\cdot -1$$

Prvu jednačinu pomnožimo sa -2 i dodamo drugoj a zatim prvu jednačinu pomnožimo sa -1 i dodamo trećoj jednačini. Dobijamo sistem jednačina koji je ekvivalentan sa polaznim sistemom:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z = & 1 \\ & & 4y & + & z = & 0 \\ & & & & 3z = & 0 \end{array} . \qquad \begin{array}{l} z = 0 \\ y = 0 \\ x = 1 \end{array}$$

Sada drugu jednačinu pomnožimo sa -3 i dodamo trećoj jednačini,

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z = & 1 \\ & & & & z = & 0 \\ & & & & 0 = & 0 \end{array} .$$

Dakle, dobijamo da je sistem jednostruko neodređen i rešenje sistema je $(x, y, z) = \{(1 + \alpha, \alpha, 0) | \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Primer 0.11 *Rešiti sistem linearnih jednačina.*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ 4x & + & 4y & + & 8z & = & 4 \\ -2x & - & 2y & - & 4z & = & -2 \end{array} \qquad /\cdot -4 \quad /\cdot 2$$

Prvu jednačinu pomnožimo sa -4 i dodamo drugoj a zatim prvu jednačinu pomnožimo sa 2 i dodamo trećoj jednačini. Dobijamo sistem jednačina koji je ekvivalentan sa polaznim sistemom:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Dakle, dobijamo da je sistem dvostruko neodređen i rešenje sistema je $(x, y, z) = \{(1 - \alpha - 2\beta, \alpha, \beta) | \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Primer 0.12 *U zavisnosti od realnog parametra* a, *diskutovati sledeći sisteme linearnih jednačina:*

$$\begin{array}{rcrcr} 2ax & + & y & = & a \\ 2x & + & ay & = & -1 \end{array}.$$

Rešenje: Prvo ćemo izračunati determinantu sistema

$$D_s = \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = 2a^2 - 2 = 2(a^2-1) = 2(a-1)(a+1).$$

1. Prvi slučaj diskusije je kada je determinanta sistema različita od nule. $D_s = \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = 2(a-1)(a+1) \neq 0$ akko je $a \neq 1$ i $a \neq -1$ tada je sistem određen tj. ima tačno jedno rešenje.

2. Drugi slučaj diskusije je ako je $a = 1$
$$\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & y & = & -1 \\ \hline 2x & + & y & = & 1 \\ & & 0 & = & -2 \end{array}$$
Tako da je u ovom slučaju sistem kontradiktoran.

3. Treći slučaj diskusije je ako je $a = -1$
$$\begin{array}{rcrcr} -2x & + & y & = & -1 \\ 2x & - & y & = & -1 \\ \hline -2x & + & y & = & -1 \\ & & 0 & = & -2 \end{array}$$
Tako da je u ovom slučaju sistem kontradiktoran.

Primer 0.13 *U zavisnosti od realnih parametara* a *i* b, *diskutovati sledeći sistem linearnih jednačina:*

$$\begin{array}{rcrcr} ax & - & y & = & 2 \\ 4x & + & 2y & = & b \end{array}.$$

Rešenje:

Prvo ćemo izračunati determinantu sitema $D_S = \begin{vmatrix} a & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2a + 4 = 2(a+2)$.

1. Prvi slučaj diskusije je kada je determinanta sistema različita od nule. $D_S = \begin{vmatrix} a & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2a + 4 = 2(a+2) \neq 0$ akko je $a \neq -2$. Tada je sistem određen tj. ima tačno jedno rešenje.

2. Drugi slučaj diskusije je ako je $a = -2$. Uvrštavanjem vrednosti $a = -2$ u polazni sistem dobijamo:
$$\begin{array}{rcrcl} -2x & - & y & = & 2 \\ 4x & + & 2y & = & b \\ \hline -2x & - & y & = & 2 \\ & & 0 & = & b+4 \end{array}.$$
Ovaj slučaj se razdvaja na još dva slučaja:
i) ako je $b \neq -4$ onda je sistem kontradiktoran
ii) ako je $b = -4$ onda je sistem jednostruko neodređen i skup rešenja je $(x, y) = \{(\alpha, -2 - 2\alpha) | \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Primer 0.14 *U zavisnosti od realnih parametara a i b, diskutovati sledeći sistem linearnih jednačina:*

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & by & = & 0 \\ ax & - & by & = & b \end{array}.$$

Rešenje:

Prvo ćemo izračunati determinantu sistema $D_S = \begin{vmatrix} 1 & b \\ a & -b \end{vmatrix} = -b - ab = -b(a+1)$.

1. Prvi slučaj diskusije je kada je determinanta sistema različita od nule. $D_S = \begin{vmatrix} 1 & b \\ a & -b \end{vmatrix} = -b - ab = -b(a+1) \neq 0$ akko je $b \neq 0 \ \wedge \ a \neq -1$. Tada je sistem određen tj. ima tačno jedno rešenje.

2. Drugi slučaj diskusije je ako je $b = 0$. Uvrštavanjem vrednosti $b = 0$ u polazni sistem dobijamo:
$$\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ ax & = & 0 \end{array}$$
Odavde sledi da je $x = 0 \wedge y \in \mathbb{R}$. U ovom slučaju za $b = 0$ sistem je jednostruko neodređen i skup rešena je $(x, y) = \{(0, \alpha) | \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$.

3. Teči slučaj diskusije je ako je $a = -1$. Uvrštavanjem vrednosti $a = -1$ u polazni sistem dobijamo:
$$\begin{array}{rcrcl} x & + & by & = & 0 \\ -x & - & by & = & b \\ \hline x & + & by & = & 0 \\ & & 0 & = & b \end{array}.$$
Ovaj slučaj se razdvaja na još dva slučaja:
   i) ako je $b \neq 0$ onda je sistem kontradiktoran
   ii) ako je $b = 0$ onda je sistem $\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}$ pa sledi da je $x = 0 \wedge y \in \mathbb{R}$. Tako da je sistem jednostruko neodređen i skup rešenja je $(x, y) = \{(0, \alpha) | \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$.

U ovom primeru sistem je:

1. Određen: $b \neq 0 \ \wedge \ a \neq -1$;
2. Jednostruko neodređen: $\Big((b = 0 \ \wedge \ a \in \mathbb{R}) \ \vee \ (a = -1 \ \wedge \ b = 0)\Big) \Rightarrow b = 0$;
3. Kontradiktoran: $a = -1 \ \wedge \ b \neq 0$.

Primer 0.15 *U zavisnosti od realnog parametra a, diskutovati sledeći sistem linearnih jednačina:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & az & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & -6 \\ 3x & + & ay & + & 5z & = & 6 \end{array}$$

i rešiti ga u slučaju neodređenosti.

Rešenje: Prvo ćemo izračunati determinantu sistema

$$D_s = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & a & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & a \end{matrix} = 10 + 9 + a^2 - 6a - 3a - 5 = a^2 - 9a + 14.$$

1. Sistem je određen kada je determinanta sistema različita od nule, tj. $D_s = a^2 - 9a + 14 = (a-2)(a-7) \neq 0$. Odavde sledi da je sistem određen, tj. ima tačno jedno rešenje za $a \neq 2$ i $a \neq 7$.

2. Zamenom $a = 2$ u početni sistem i množenjem prve jednačine sa -1 i dodavanjem drugoj jednačini i množenjem prve jednačine sa -3 i dodavanjem trećoj dobija se:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & -6 \\ 3x & + & 2y & + & 5z & = & 6 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & -6 \\ & - & y & - & z & = & 6 \end{array},$$

Dalje množenjem druge jednačine sa -1 i dodavanjem trećoj dobija se

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & -6 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}.$$

Sistem je (jednostruko) neodređen.
Rešenje sistema je $R_s = \{(6 - \alpha, -6 - \alpha, \alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$.

3. Zamenom $a = 7$ u početni sistem i množenjem prve jednačine sa -1 i dodavanjem drugoj jednačini i množenjem prve jednačine sa -3 i dodavanjem trećoj dobija se:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 7z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & -6 \\ 3x & + & 7y & + & 5z & = & 6 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 7z & = & 0 \\ & & y & - & 4z & = & -6 \\ & & 4y & - & 16z & = & 6 \end{array}.$$

Dalje množenjem druge jednačine sa -4 i dodavanjem trećoj dobija se:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 7z & = & 0 \\ & & y & - & 4z & = & -6 \\ & & & & 0 & = & 30 \end{array}.$$

U ovom slučaju sistem je kontradiktoran, odnosno nerešiv.