Dodatak: pronalaženje glavnih komponenti matrice

$$\Sigma v = \lambda v \Rightarrow (\Sigma - \lambda I)v = 0$$

- Pretpostavljajući da je v ne-nula vektor, ova jednačina može biti zadovoljena samo ako je $\Sigma - \lambda I$ singularna matrica

- Znamo da je $\Sigma - \lambda I$ kvadratna matrica. Ako je singularna, to znači da je njena determinanta 0:
$$Det(\Sigma - \lambda I) = 0$$

Dodatak: pronalaženje glavnih komponenti matrice

- Npr., neka je

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

- Tada jednačina postaje:

$$|\Sigma - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{bmatrix} \right| = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$$

- Za prvu sopstvenu vrednost λ_1:

$$(\Sigma - \lambda_1)v = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = 0$$

$$v_{11} + v_{12} = 0 \Rightarrow u_{11} = -v_{12}$$

$$-2v_{11} - 2v_{12} = 0 \Rightarrow u_{11} = -v_{12}$$

Dodatak: pronalaženje glavnih komponenti matrice

- Dakle, prvi sopstveni vektor je bilo koji vektor oblika $v_1 = k_1 \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$, gde je k_1 proizvoljna konstanta
- Ako sličan postupak ponovimo za λ_2, dobićemo da je drugi sopstveni vektor $v_2 = k_2 \begin{bmatrix} +1 \\ -2 \end{bmatrix}$, gde je k_2 proizvoljna konstanta
- Sopstveni vektori reprezentuju orijentaciju. Proizvoljne konstante k_1 i k_2 ne utiču na tu orijentaciju. Ako normalizujemo vektore, dobijamo isti rezultat

Literatura

- PCA:
  - Stanford Machine Learning Course lecture notes http://cs229.stanford.edu/notes/cs229-notes10.pdf
  - Yaser Abu-Mostafa, Malik Magdon-Ismail and Hsuan-Tien Lin. Learning From Data, e-Chapter 9: "Learning Aides," Amlbook.com, March, 2012.
  - http://www.cs.cmu.edu/~10701/lecture/pca.pdf
- Sopstveni vektori/vrednosti:
  - http://www.visiondummy.com/2014/04/geometric-interpretation-covariance-matrix/
- Stanford Machine Learning Course lecture notes:
  - PCA Linear Algebra Review http://cs229.stanford.edu/section/cs229-linalg.pdf
  - Lagranžijan http://cs229.stanford.edu/section/cs229-cvxopt2.pdf