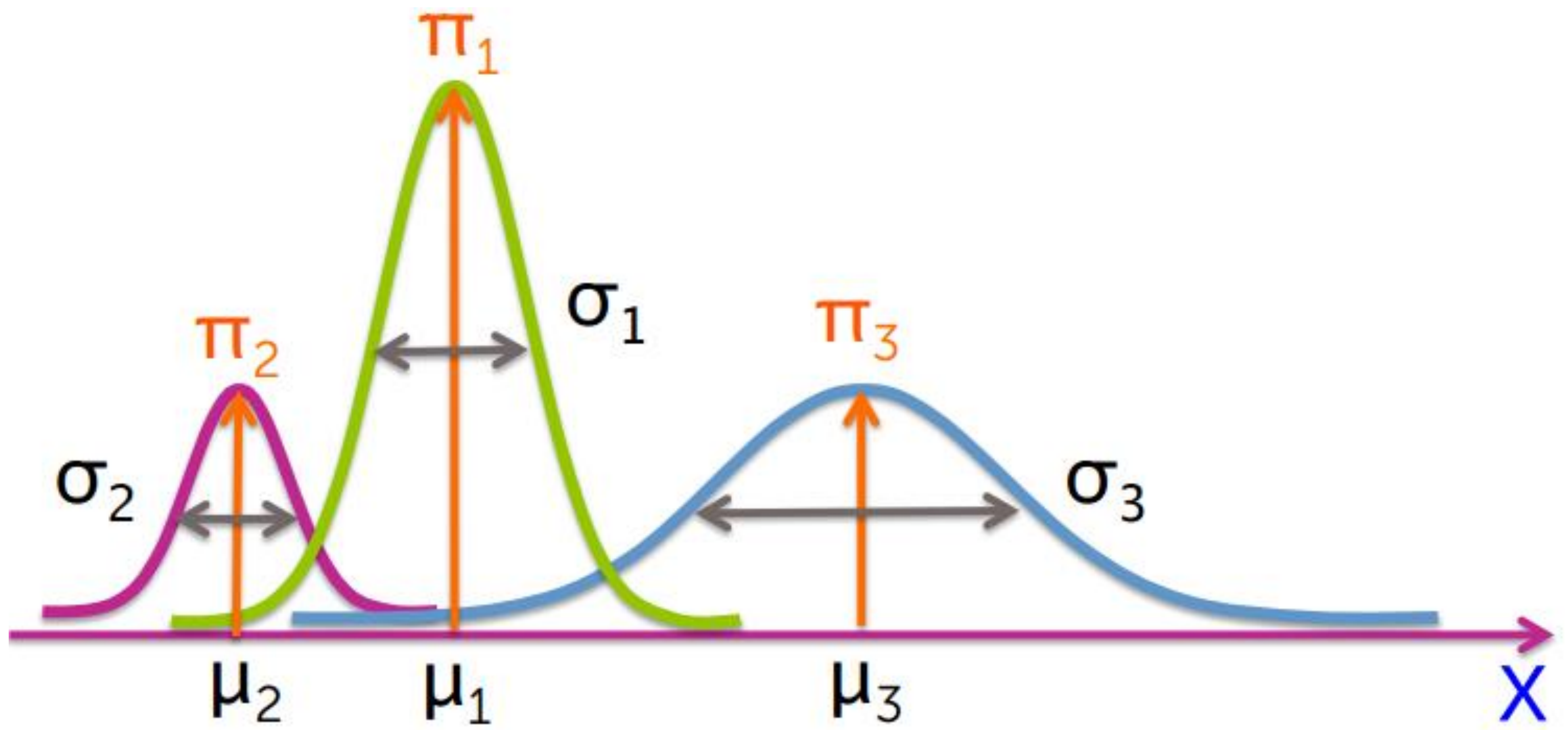


Model Gausovih mešavina (GMM)

Model Gausovih mešavina

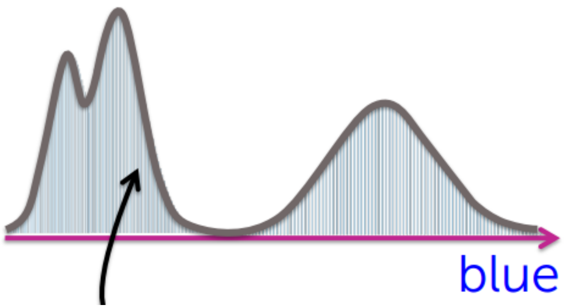
- *Gausian Mixture Model* (*GMM*)

- U našem primeru klasifikacije slika, pretpostavićemo da svaka od [R, G, B] varijabli prati Gausovu distribuciju

- Pretpostavljamo Gausovu raspodelu za ceo 3D vektor [R, G, B] – postojaće i korelacije (intenzitet RGB slike obično nije nezavisan, naročito u istoj klasi slika)

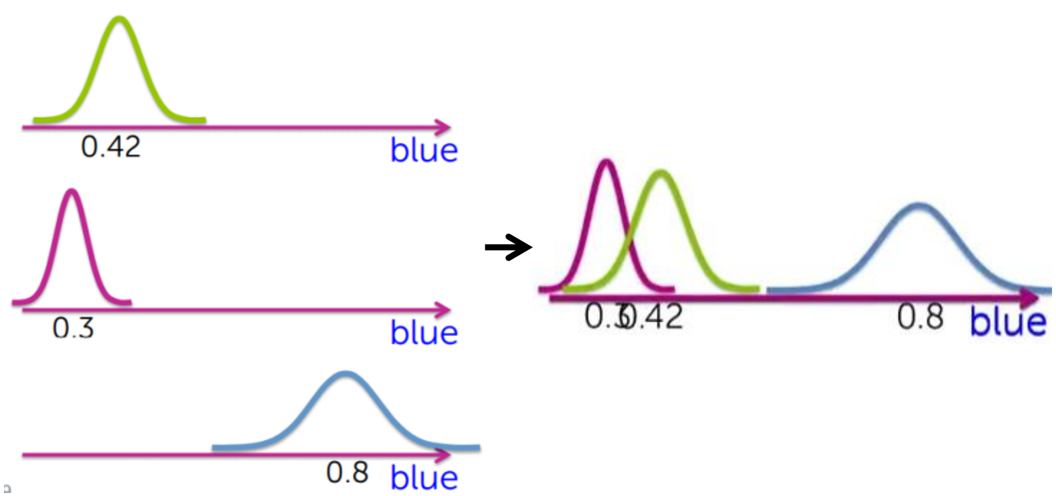
- Za sada ćemo se zbog ilustracije ograničiti na jednu dimenziju

Model Gausovih mešavina

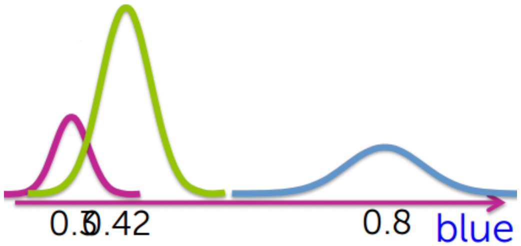


Kako da modelujemo ovu distribuciju?

Uzećemo distribucije karakteristične za svaku od kategorija i uprosečiti ih:

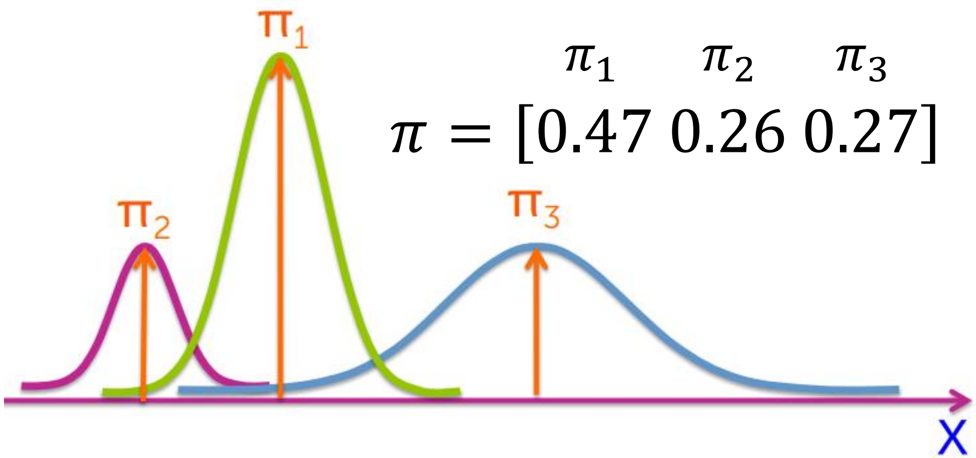


- Jednostavno uprosečavanje podrazumeva da su proporcije klasa jednake
- Ako nisu (npr. slika šuma ima više od ostalih) – moramo više zastupljenim klasama dati veću težinu prilikom uprosečavanja



Kombinacija otežinjenih Gausijana

- Svakoj klasi (klasteru) odgovara jedna Gausova komponenta
- Svakoj Gausovoj komponenti dodelićemo težinu π_k koja odgovara proporciji date klase u podacima



$$\begin{array}{cccc} & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi = & [0.47 & 0.26 & 0.27] \end{array}$$

$$0 \leq \pi_k \leq 1$$

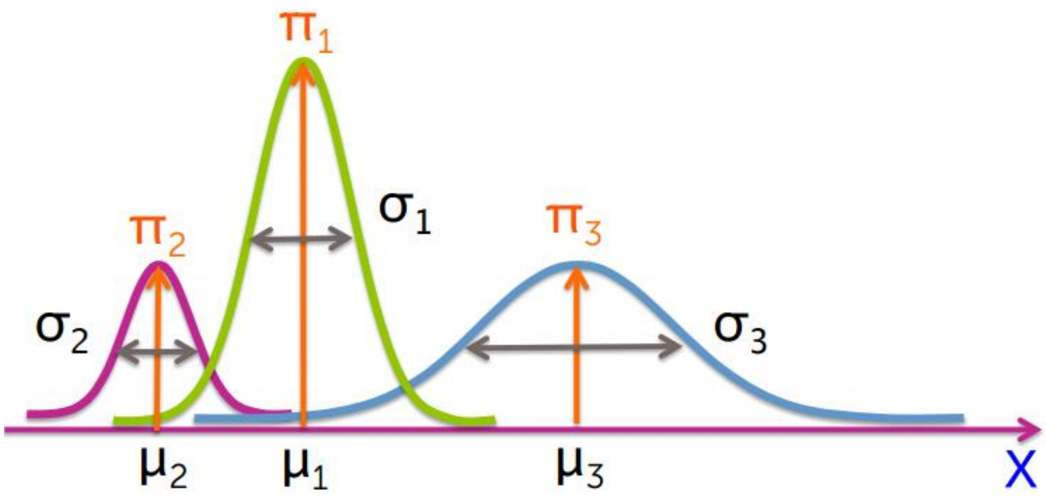
$$\sum_{k=1}^{K} \pi_k = 1$$

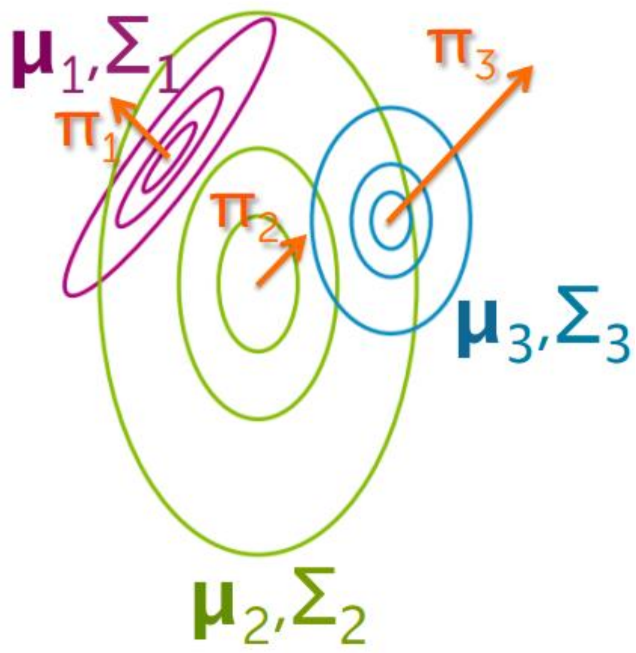
Konveksna kombinacija:

- Gausova raspodela je distribucija, tj. za svaku Gausovu komponentu važi $\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}(x|\mu, \sigma^2)dx = 1$
- Pošto je $\sum_{k-1}^{K} \pi_k = 1$, i integral krive dobijene otežinjenim uprosečavanjem distribucija će biti 1 → i dalje imamo validnu distribuciju

Kombinacija otežinjenih Gausijana

- Svaka komponenta predstavlja jedinstven klaster specificiran pomoću $\{\pi_k, \mu_k, \sigma_k^2\}$
- U *D*-dimenzionom prostoru imamo generalizaciju $\{\pi_k, \mu_k, \Sigma_k^2\}$



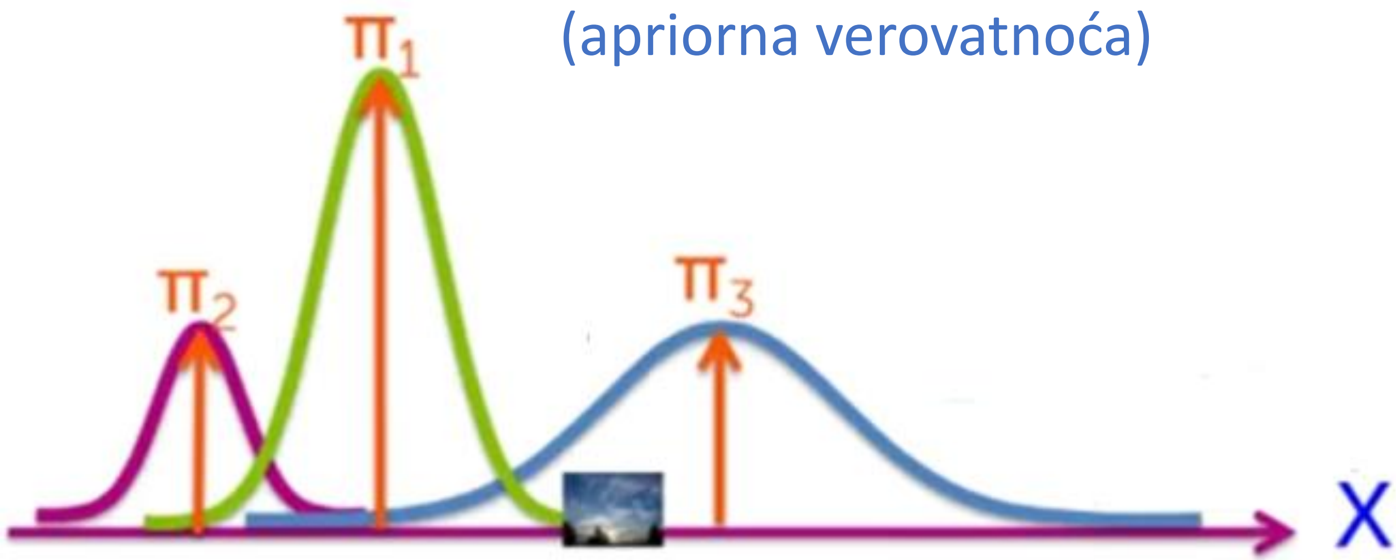


GMM u klasterovanju

1. Bez da znamo sadržaj slike, koja je verovatnoća da slika pripada klasteru *k*?
   - Npr. verovatnoća da se na slučajno odabranoj slici nalaze oblaci
   - Sa $z^{(i)}$ ćemo označiti klaster kom je opservacija $x^{(i)}$ dodeljena:

$$p\left(z^{(i)} = k\right) = \pi_k$$

(apriorna verovatnoća)

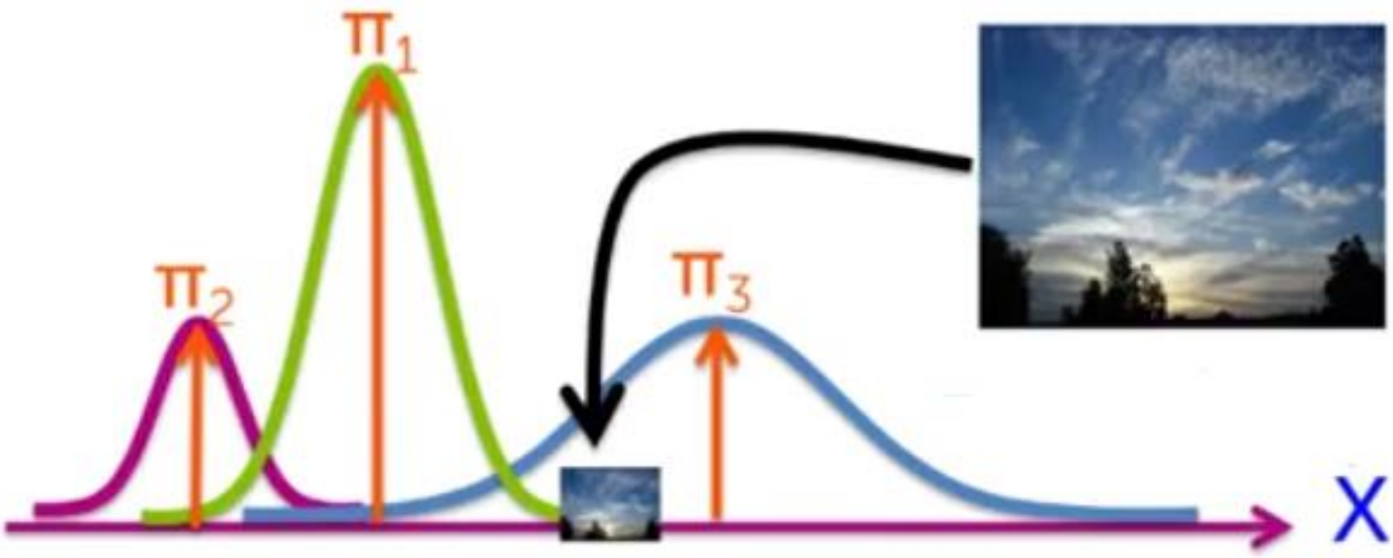


GMMu klasterovanju

2. Ako znamo da opservacija $x^{(i)}$ pripada klasteru *k*, koja je verovatnoća da uočimo opservaciju $x^{(i)}$?

$$p\left(x^{(i)} | z^{(i)} = k, \mu_k, \Sigma_k\right) = \mathcal{N}\left(x^{(i)} | \mu_k, \Sigma_k\right)$$

(verodostojnost)



Koliko parametara treba da naučimo?

- Za $D = 2$:
  - Svaki klaster je određen sa $\{\pi_k, \mu_k, \Sigma_k\}$
  - $\mu_k = [\mu_1, \mu_2]$
  - $\Sigma_k = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$
  - Σ_k je simetrična matrica pa je $\sigma_{1,2} = \sigma_{2,1}$

- U opštem slučaju, u D-dimenzinom prostoru treba da naučimo $\frac{D(D+1)}{2}$ parametra kako bismo specificirali Σ
- Ovo je jako mnogo parametara!

Simplifikacija

- Uvešćemo ograničenje da je matrica Σ dijagonalna matrica čiji su svi elementi van glavne dijagonale 0:

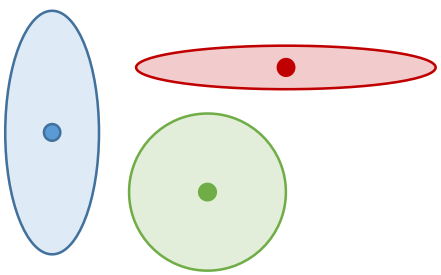
$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ldots & \\ & & & \sigma_D^2 \end{pmatrix}$$

  - Pretpostavljamo da je kovarijansa među promenljivama 0
  - Ograničili smo elipse da budu poravnate sa osama

- Sada je matrica Σ određena sa *D* jedinstvenih parametara

Ovo je ograničavajuća pretpostavka, ali...

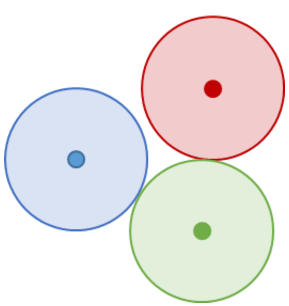
- Možemo da naučimo težine različitih dimenzija (koje se mogu razlikovati unutar pojedinačnih klastera)

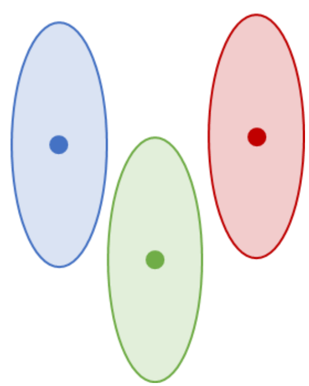


Npr. unutar jednog klastera, možemo naučiti da je intenzitet jedne boje važniji od intenziteta druge prilikom određivanja klasteru (a to može biti različito u svim klasterima)

- Ovo je i dalje manje restriktivno od *k*-means

Sferno simetrični klasteri





- Uz specifikaciju težina dimenzija, svi klasteri su jednake elipse poravnate sa osama
- Nemamo način da odredimo težine dimenzija