

# Regularizacija

---

# Regularizacija

- Koristićemo regularizaciju da penalizujemo velike vrednosti koeficijenata
- Na  $\mathcal{L}(\theta)$  dodaćemo regularizacioni penal:
  - Suma kvadrata koeficijenata ( $L_2$  norma)
$$\|\theta\|_2^2 = \theta_1^2 + \dots + \theta_D^2$$
  - Suma apsolutnih vrednosti koeficijenata ( $L_1$  norma)
$$\|\theta\|_1 = |\theta_1| + \dots + |\theta_D|$$
  - Prema konvenciji, ne penalizujemo  $\theta_0$

# Logistička regresija sa $L_2$ regularizacijom

- Minimizovaćemo sledeću funkciju:

$$J(\theta) = \mathcal{L}(\theta) + \lambda \sum_{j=1}^N \theta_j^2$$

- Gradijentni spust:

$$\theta_j^{(t+1)} = \theta_j^{(t)} - \alpha \left[ \sum_{i=1}^N (h_{\theta}(x^{(i)}) - y^{(i)}) x_j^{(i)} + 2\lambda \theta_j \right]$$

# Izbor $\lambda$ kod $L_2$ regularizacije

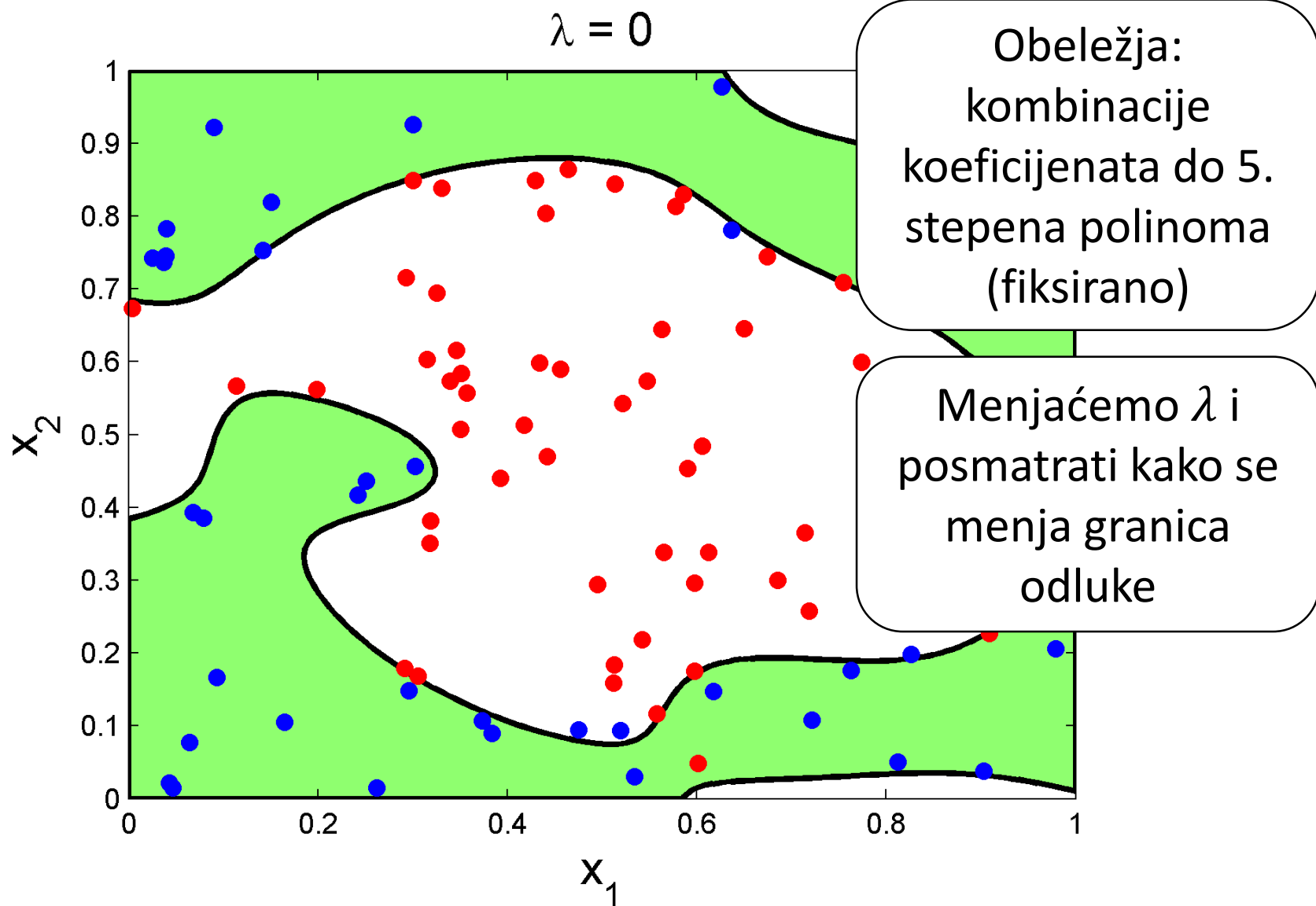
$$J(\theta) = \mathcal{L}(\theta) + \lambda \sum_{j=1}^N \theta_j^2$$

$\lambda = 0$  : *Maximum Likelihood*  
rešenje (bez regularizacije)

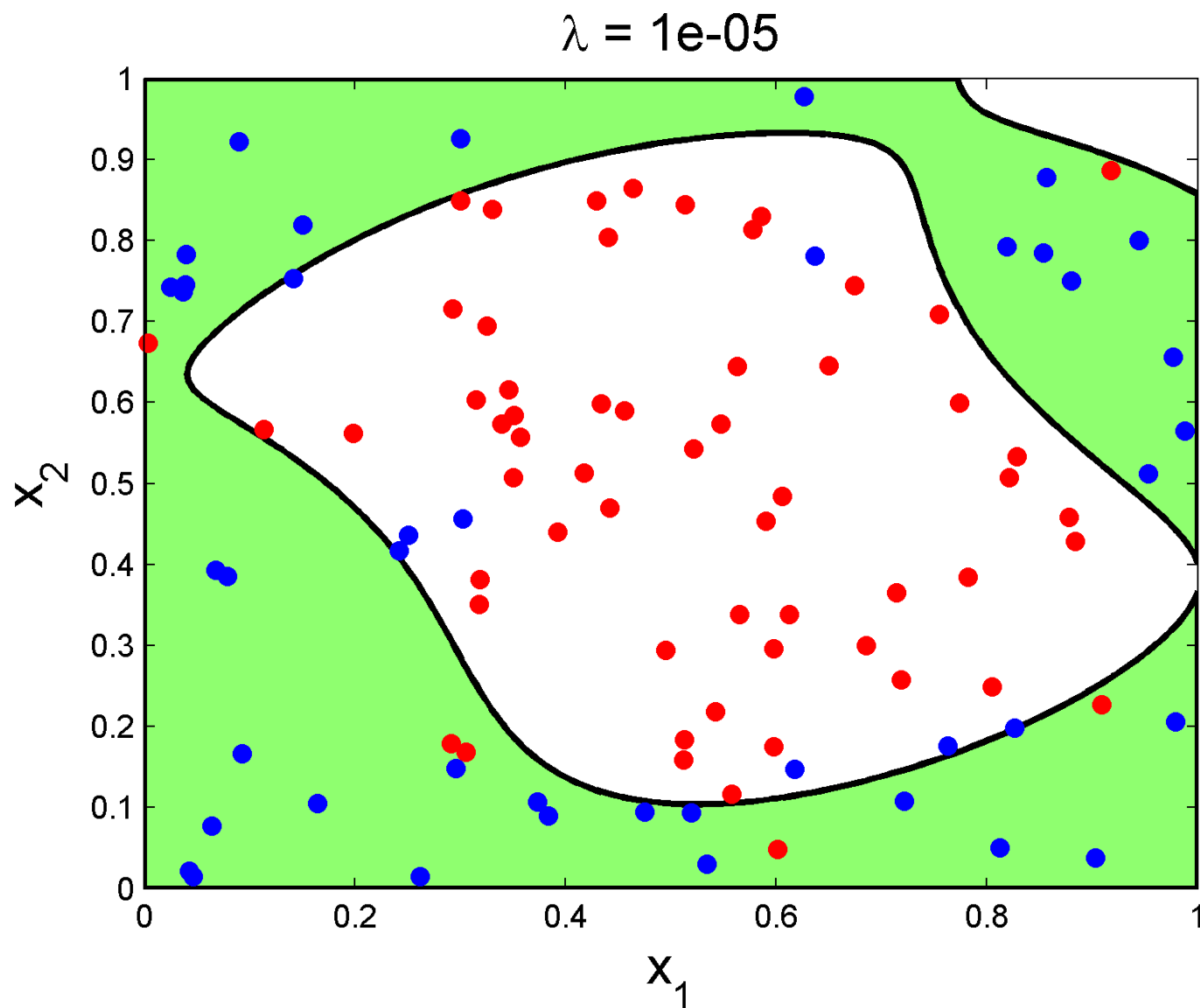
$\lambda = \infty \rightarrow \theta = 0$   
(ignorišu se podaci)

- $\lambda$  kontroliše nagodbu sistematskog odstupanja i varijanse (kompleksnost modela):
  - Malo  $\lambda$  – malo sistematsko odstupanje, velika varijansa
  - Veliko  $\lambda$  – veliko sistematsko odstupanje, mala varijansa

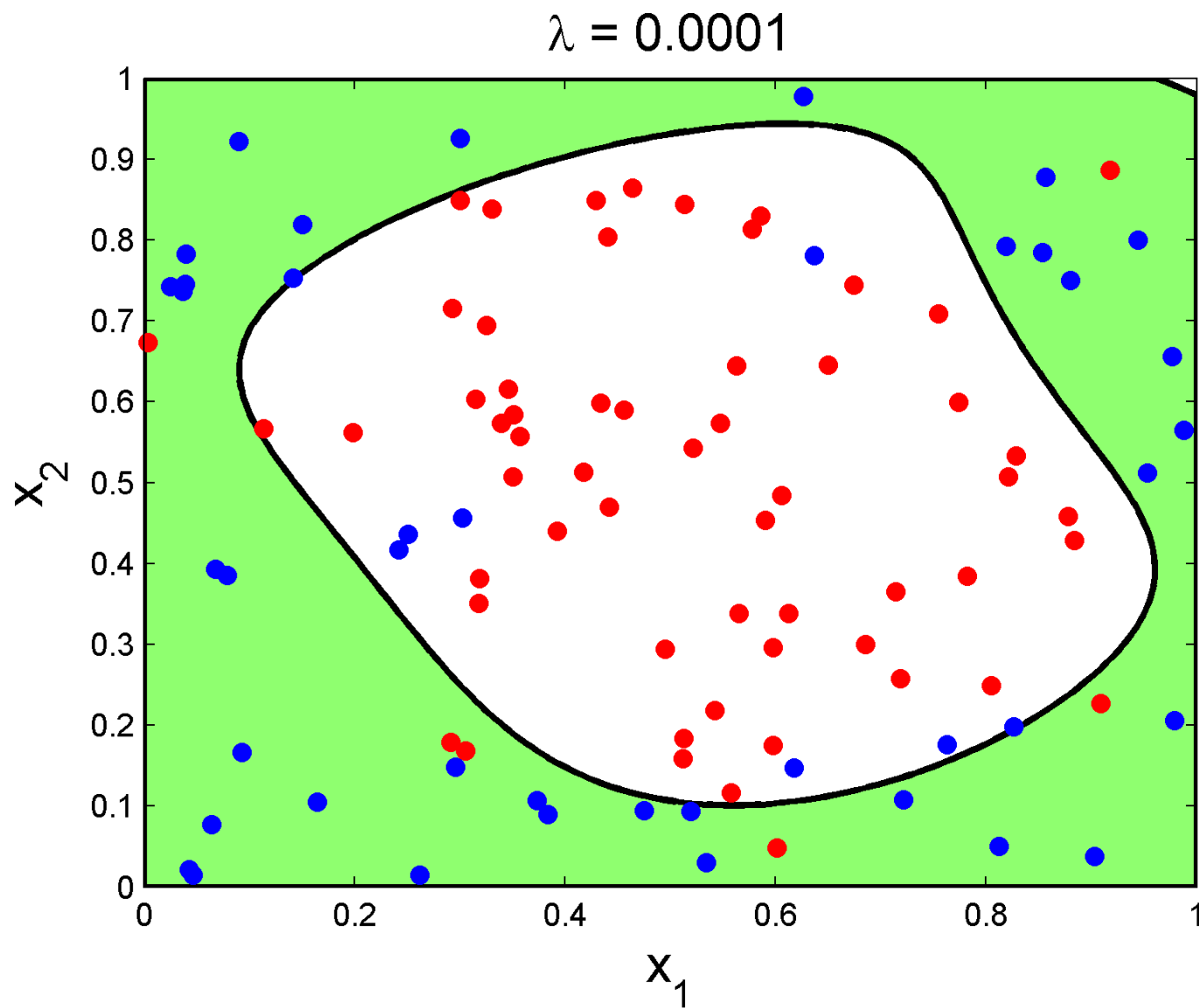
# Efekat $\lambda$ kod $L_2$ regularizacije



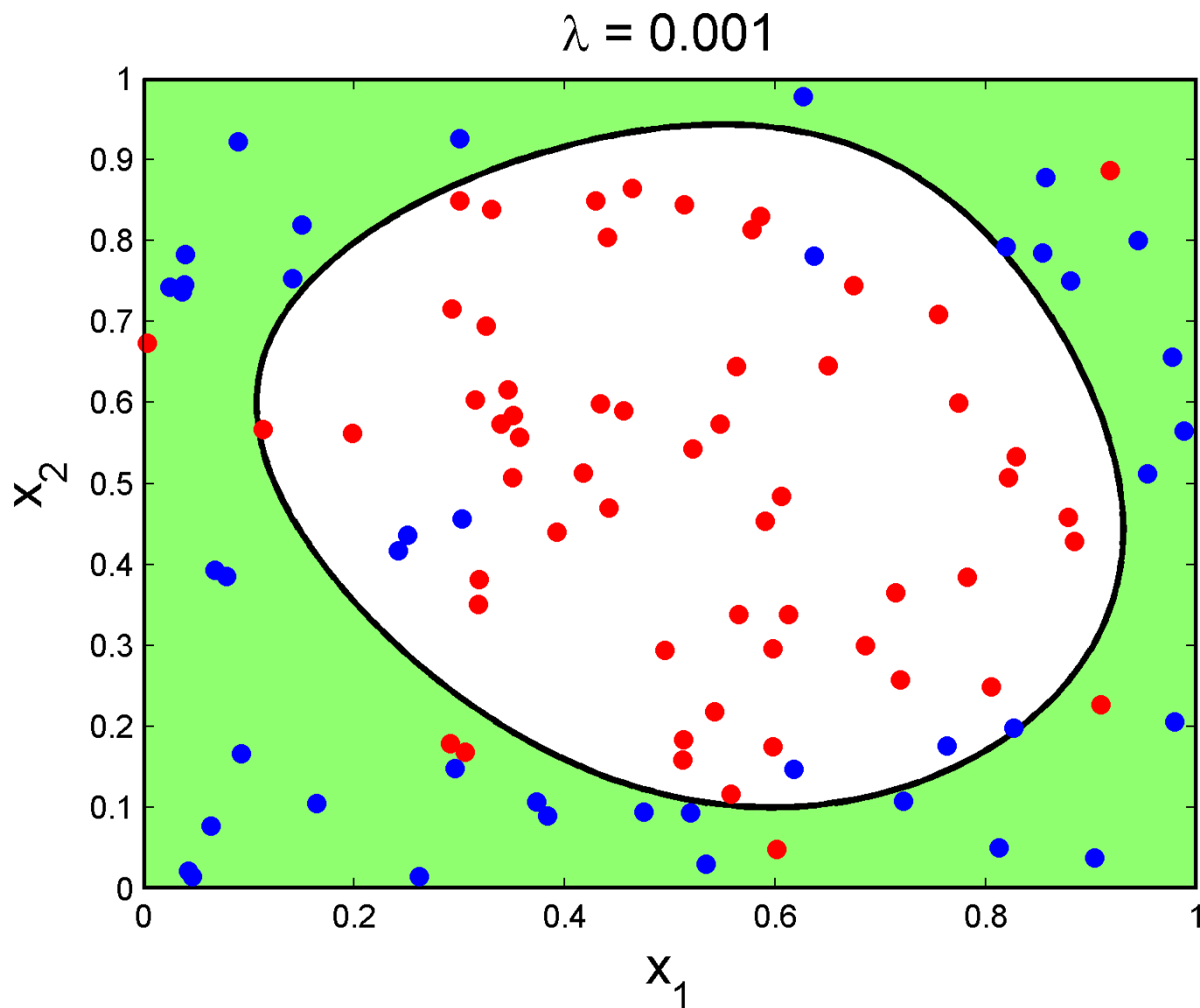
# Efekat $\lambda$ kod $L_2$ regularizacije



# Efekat $\lambda$ kod $L_2$ regularizacije

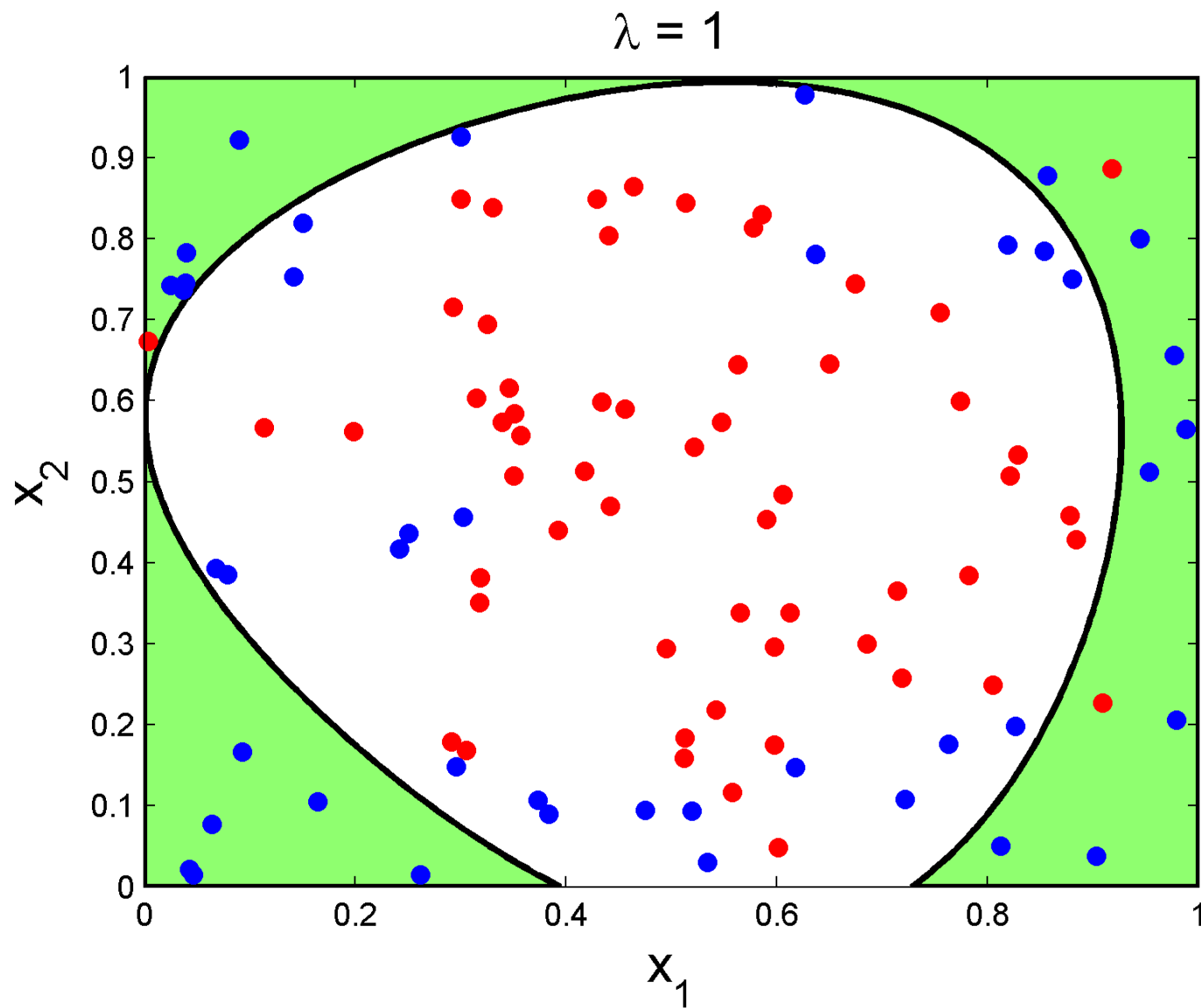


# Efekat $\lambda$ kod $L_2$ regularizacije

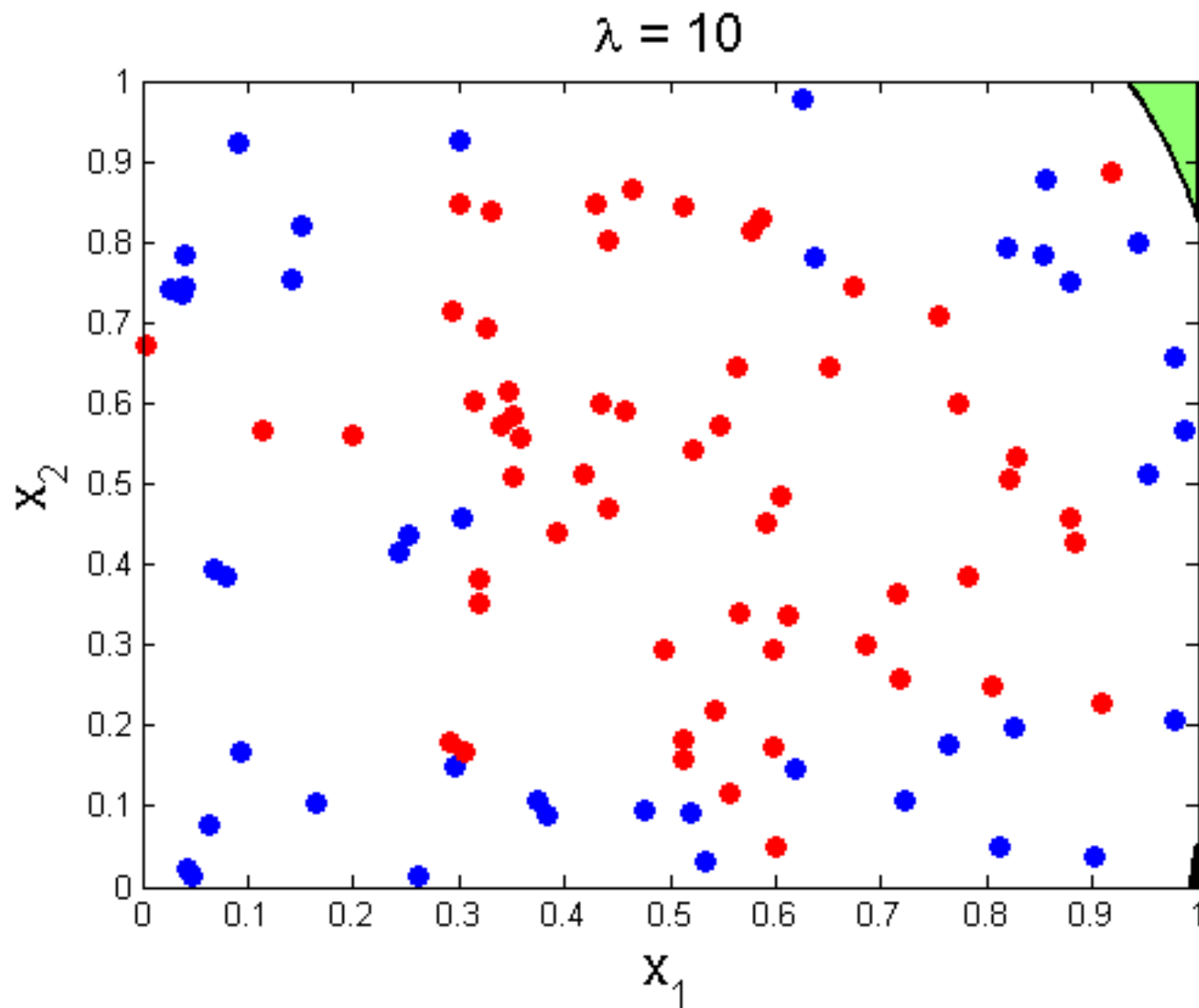




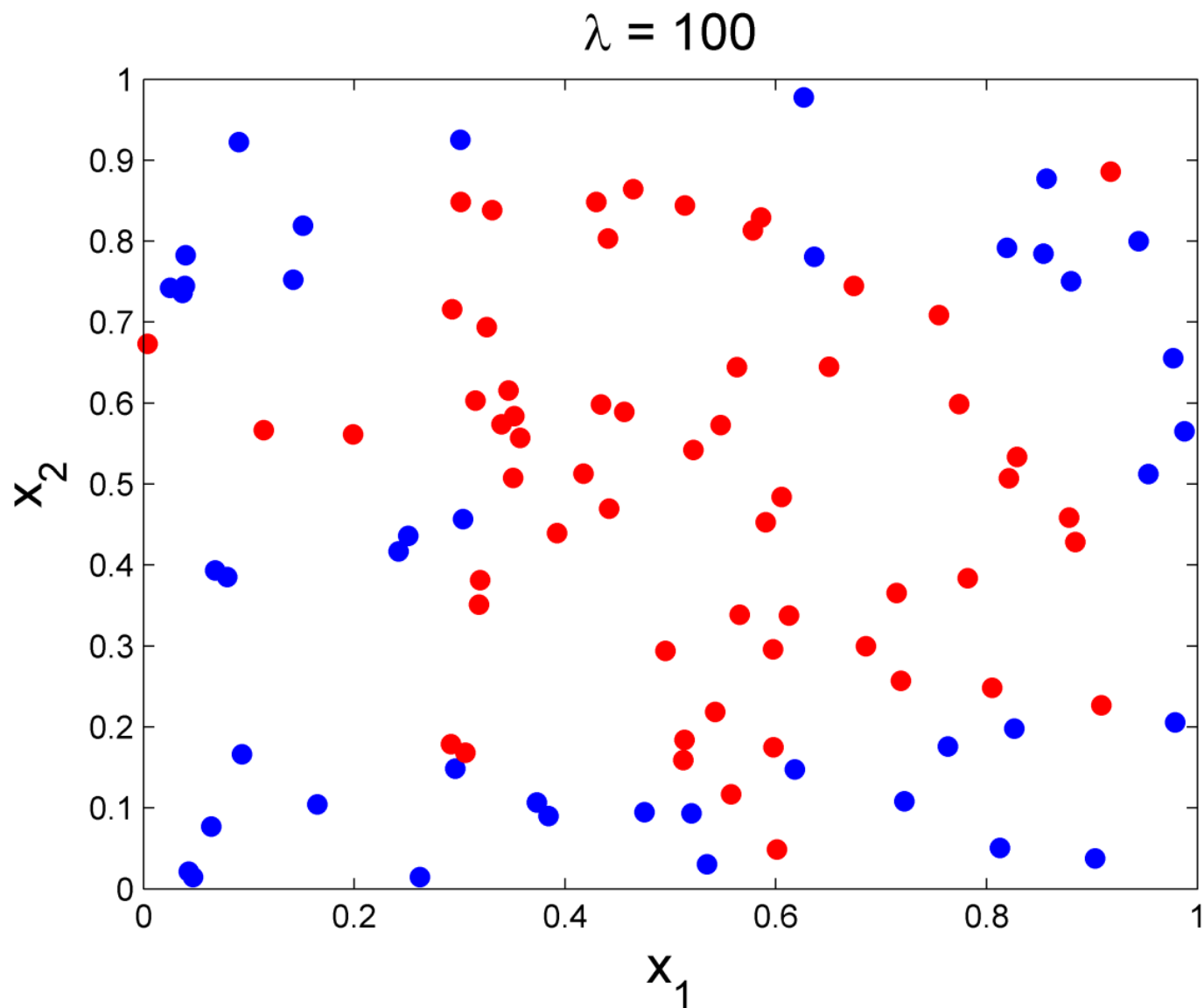
# Efekat $\lambda$ kod $L_2$ regularizacije



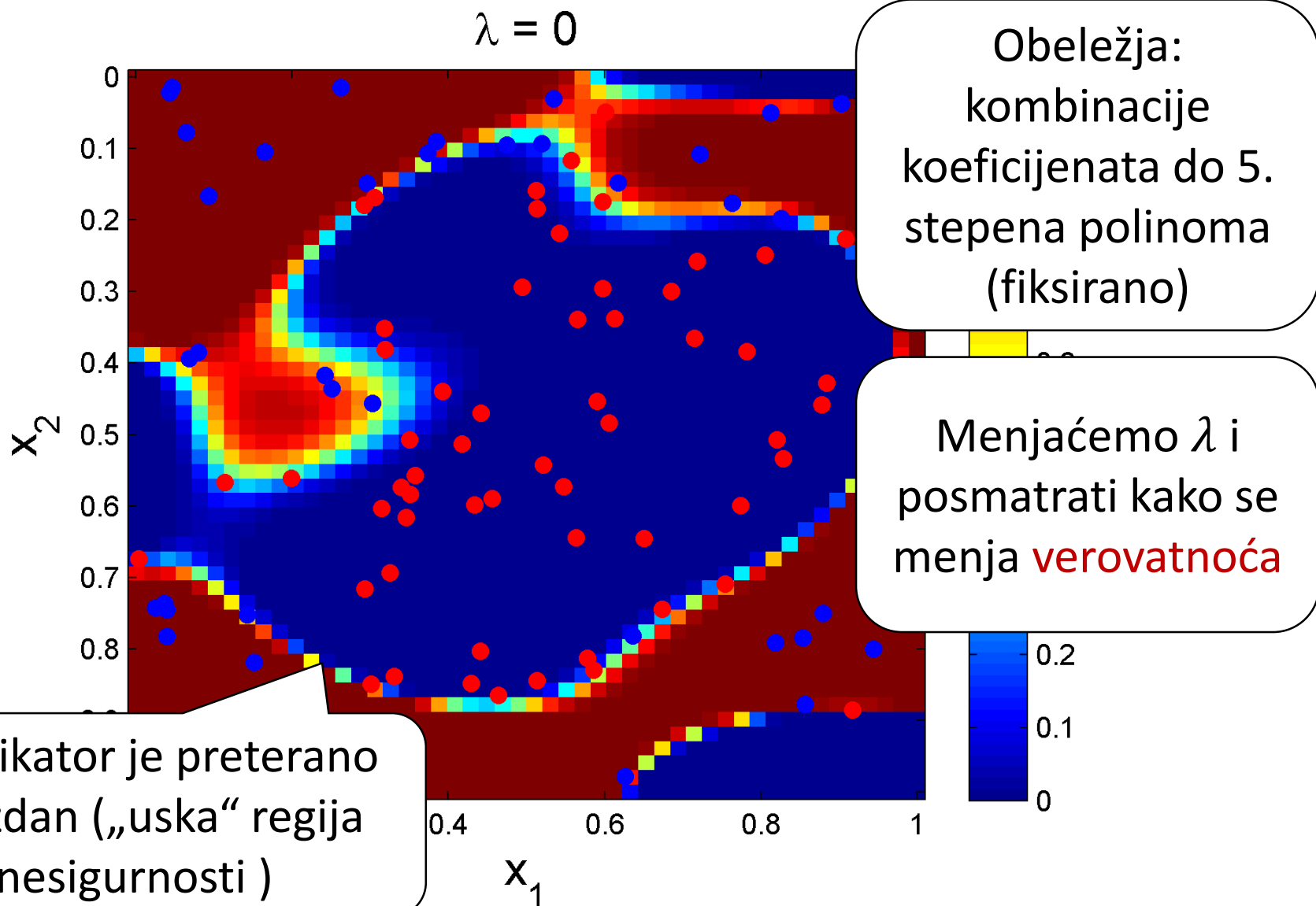
# Efekat $\lambda$ kod $L_2$ regularizacije



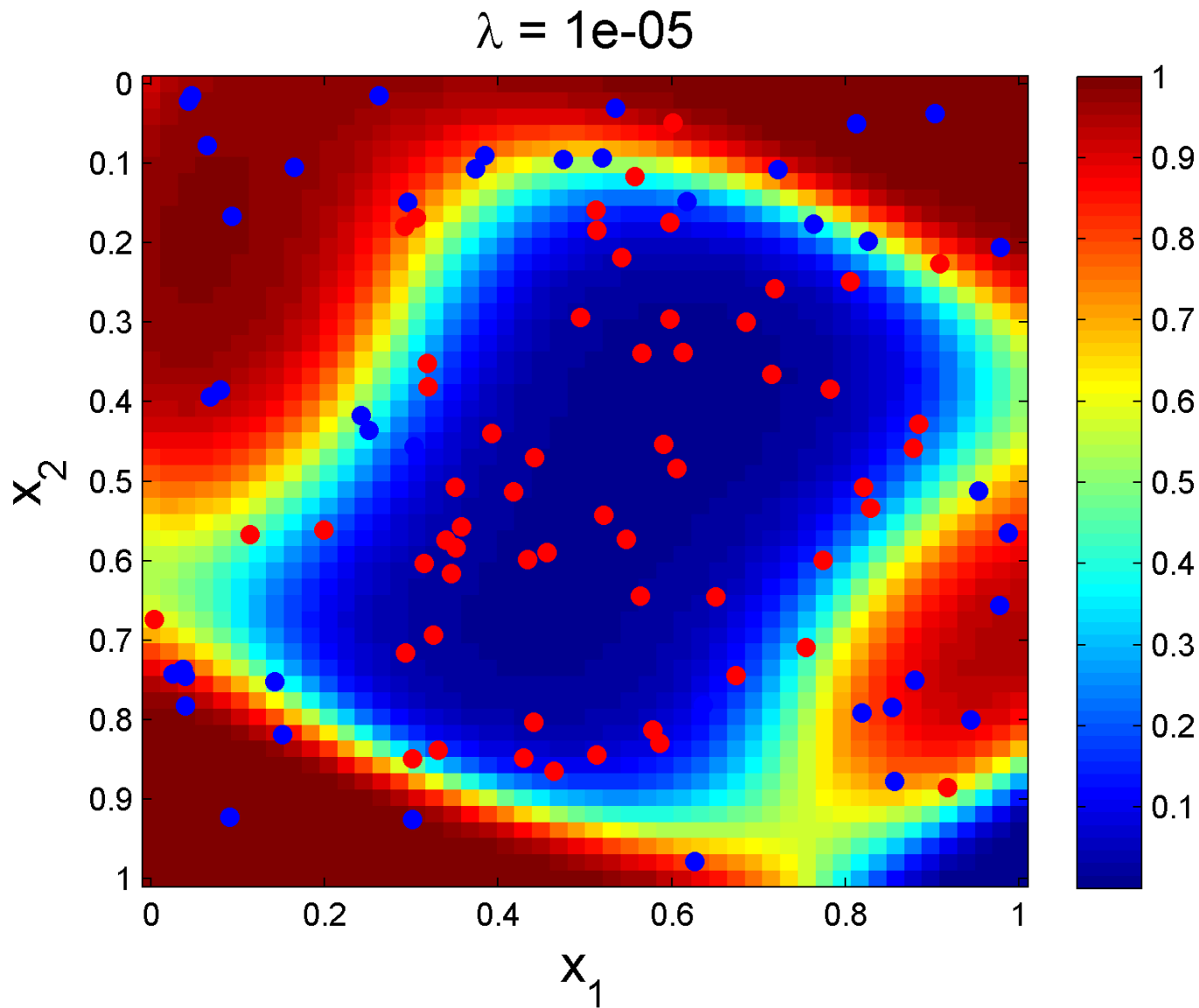
# Efekat $\lambda$ kod $L_2$ regularizacije



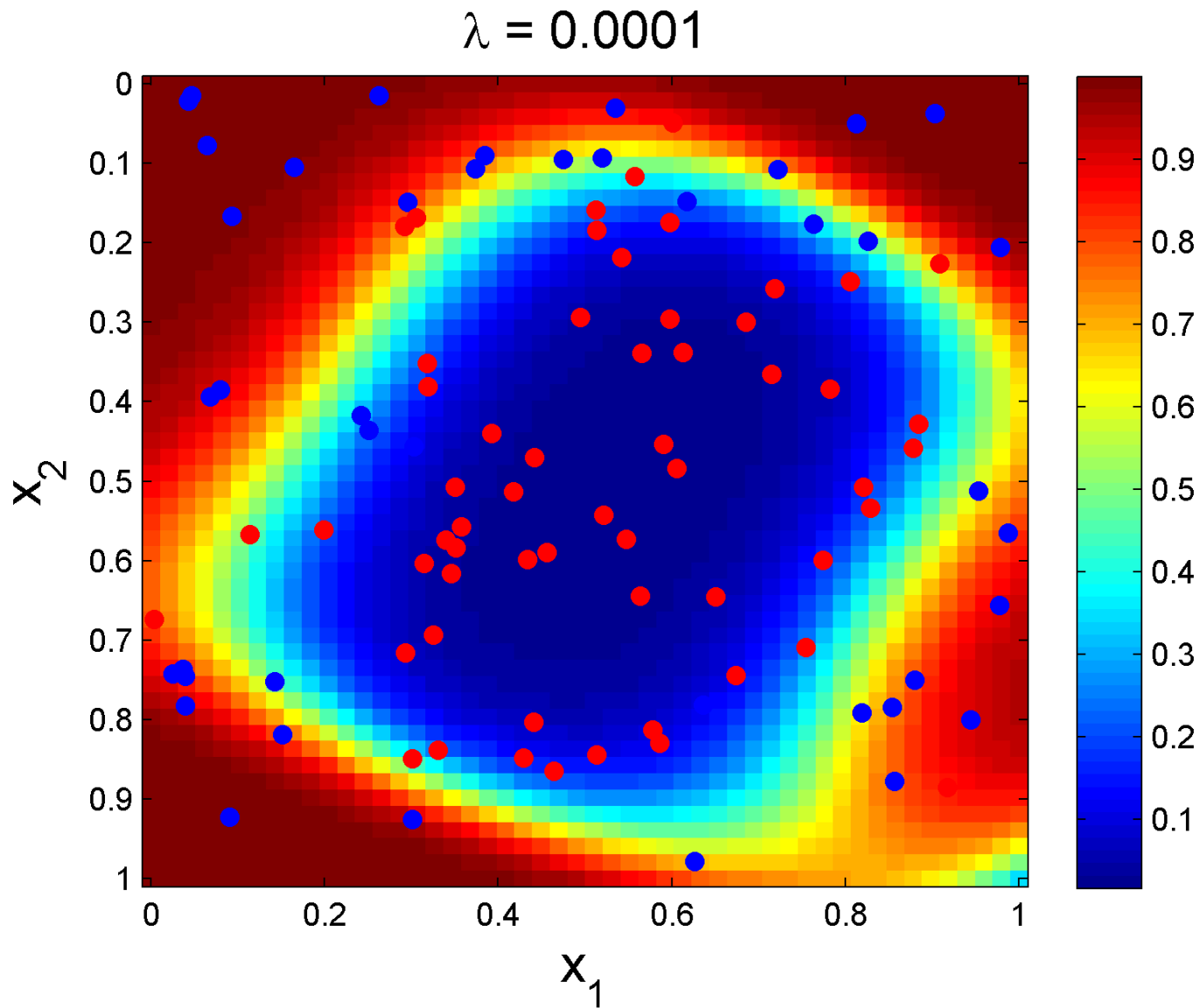
# Efekat $\lambda$ kod $L_2$ regularizacije



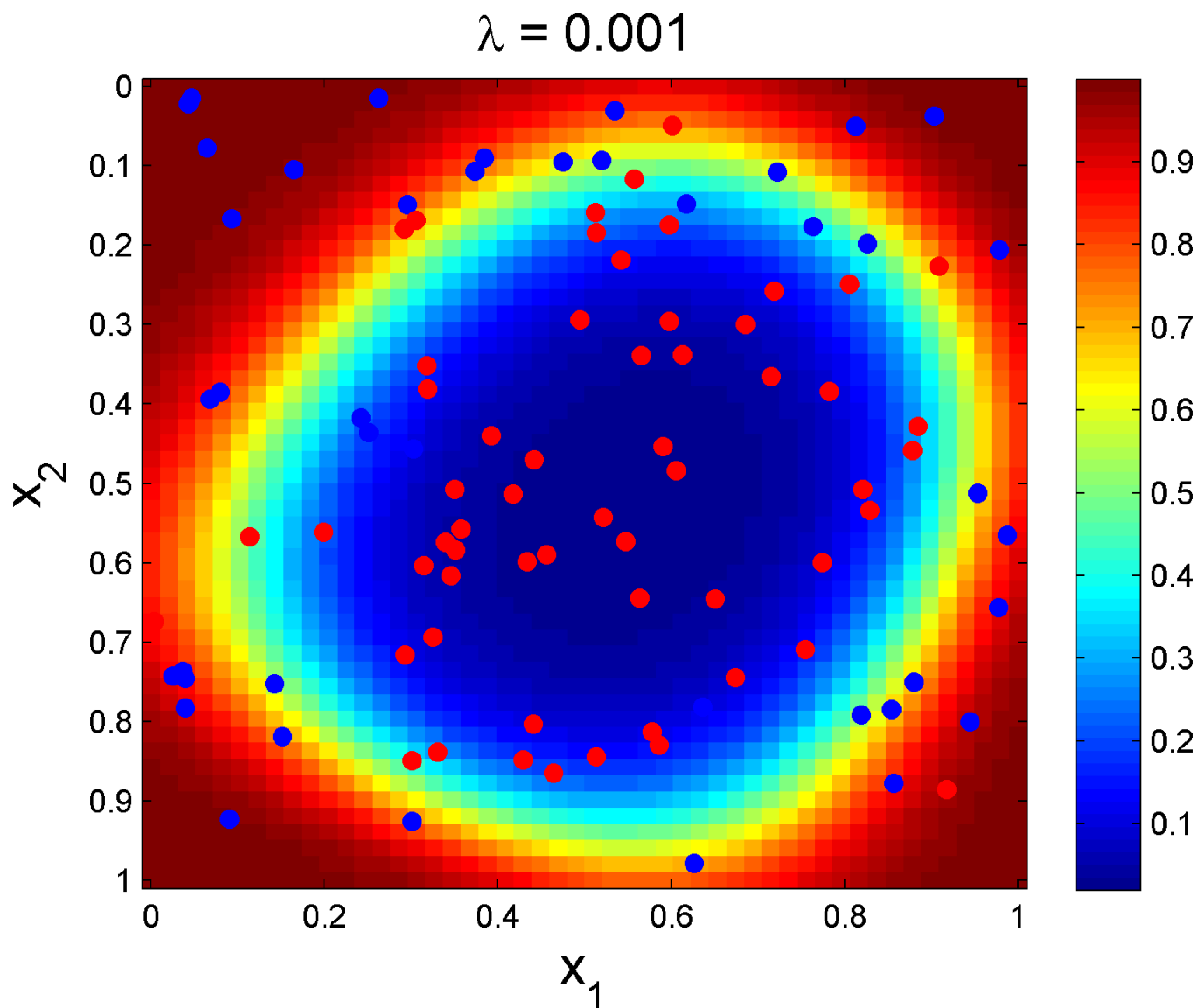
# Efekat $\lambda$ kod $L_2$ regularizacije



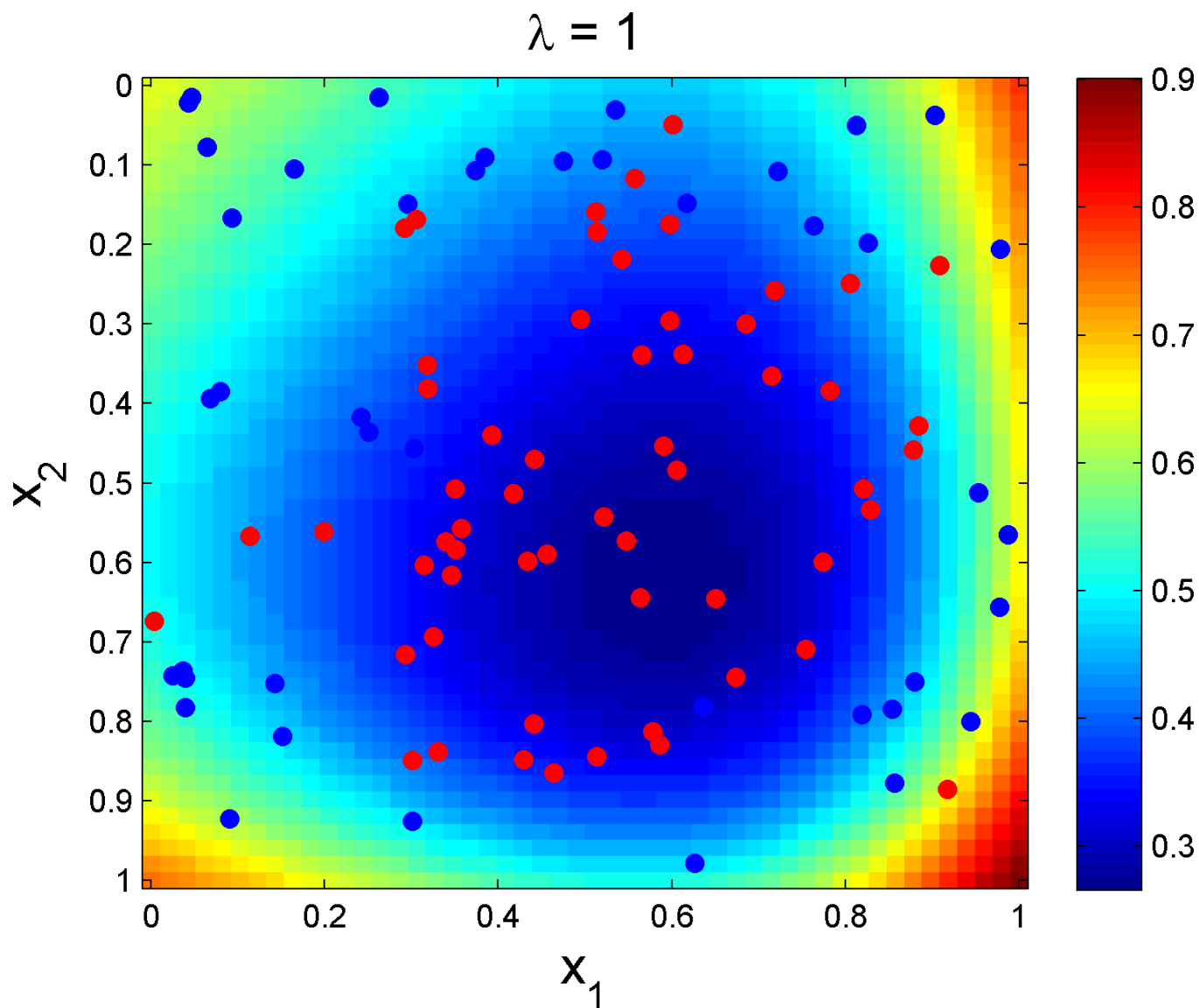
# Efekat $\lambda$ kod $L_2$ regularizacije



# Efekat $\lambda$ kod $L_2$ regularizacije

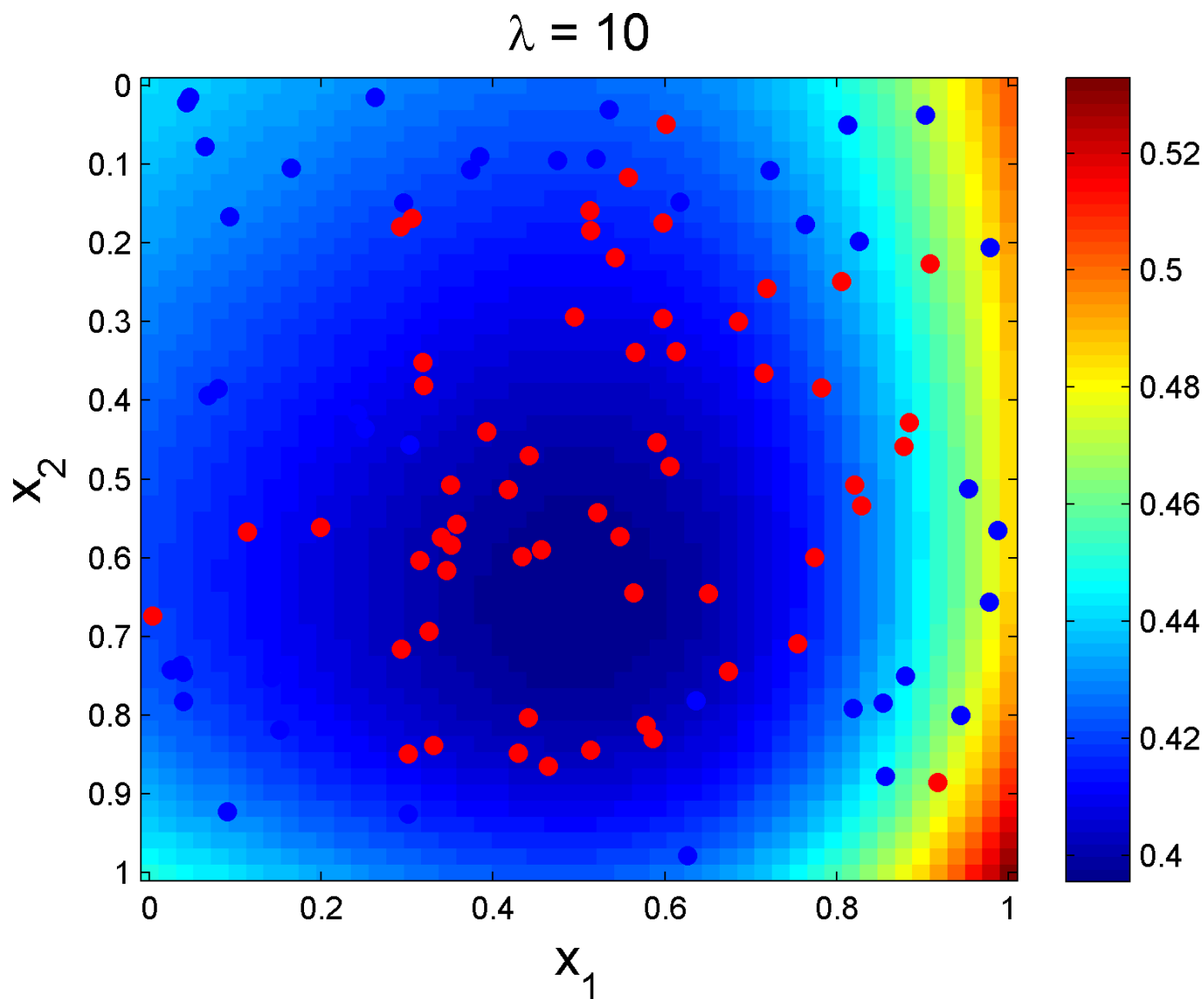


# Efekat $\lambda$ kod $L_2$ regularizacije

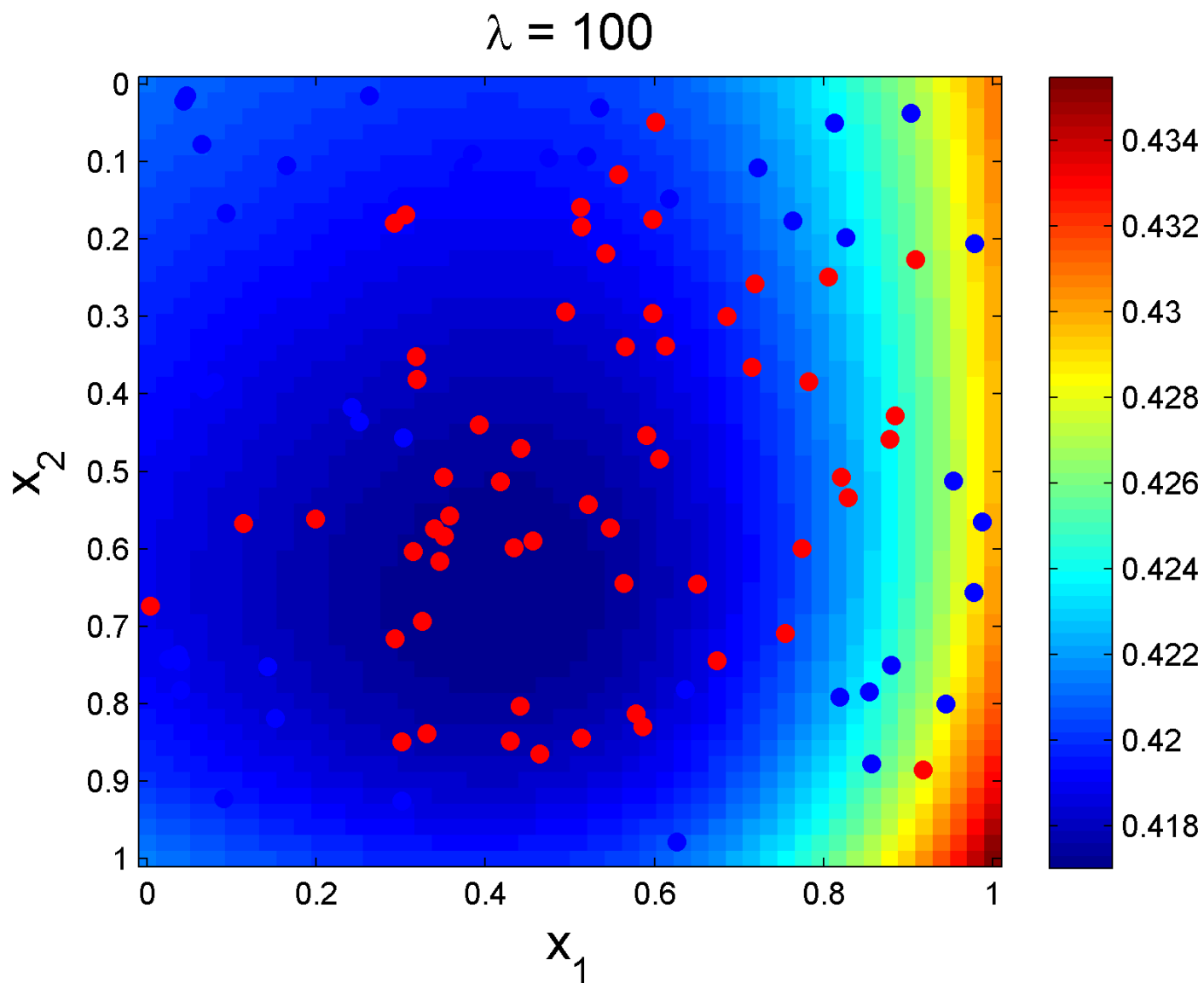




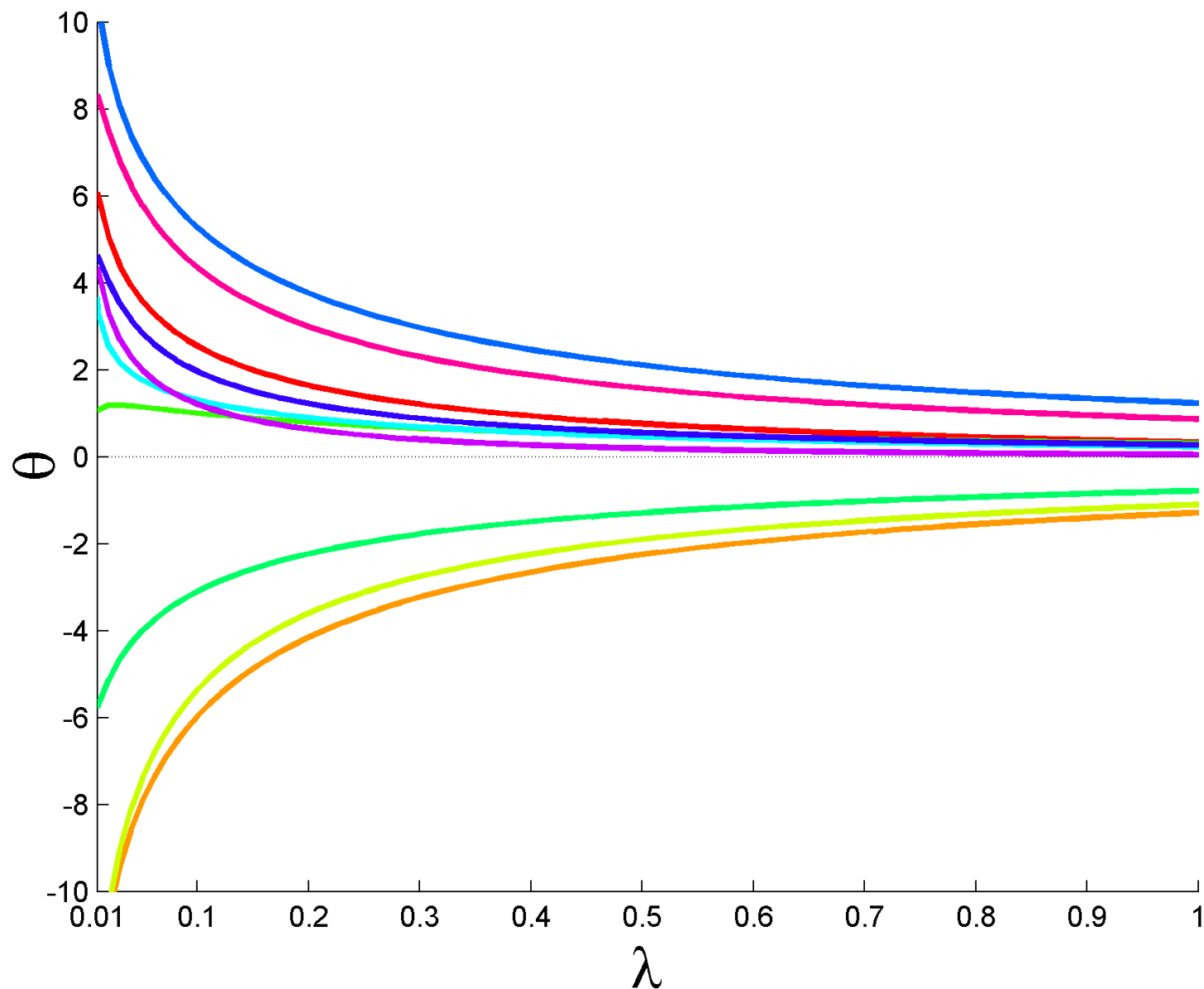
# Efekat $\lambda$ kod $L_2$ regularizacije



# Efekat $\lambda$ kod $L_2$ regularizacije



# Efekat $\lambda$ kod $L_2$ regularizacije

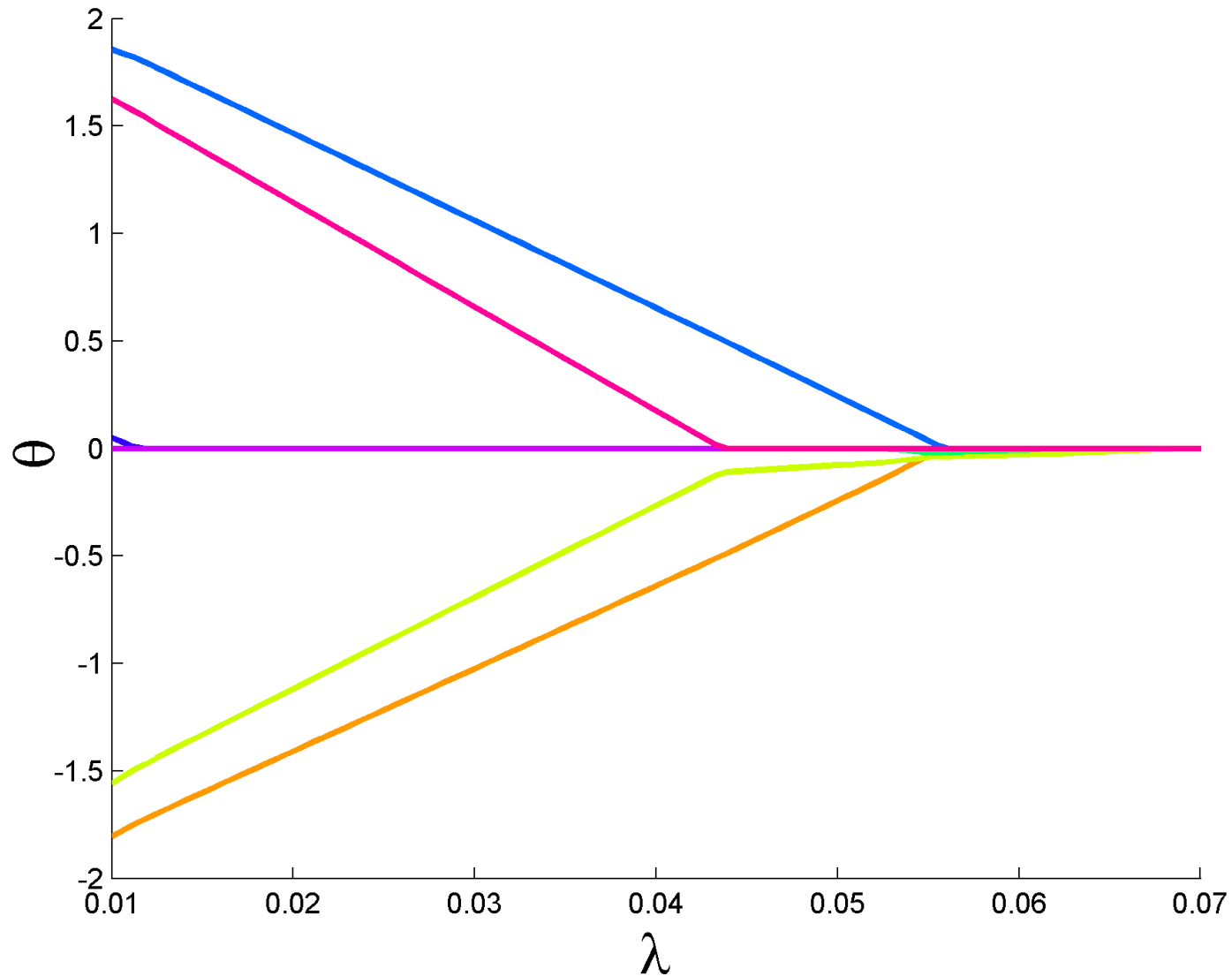


# Logistička regresija sa $L_1$ regularizacijom

$$J(\theta) = \mathcal{L}(\theta) + \lambda \sum_{j=1}^N |\theta_j|$$

- Ova vrsta regularizacije dovodi do **sparse rešenja**
  - Za većinu koeficijenata važi  $\theta_j = 0$ , a samo za nekolicinu važi  $\theta_j \neq 0$
  - Ovim dobijamo na efikasnosti i interpretabilnosti modela

# Efekat $\lambda$ kod $L_1$ regularizacije



# Primena logističke regresije

- Gotovo svuda
- Posebna popularnost u medicinskim primenama
- Standardni model za poređenje prilikom klasifikacije