PCA: dekompozicija matrice Σ

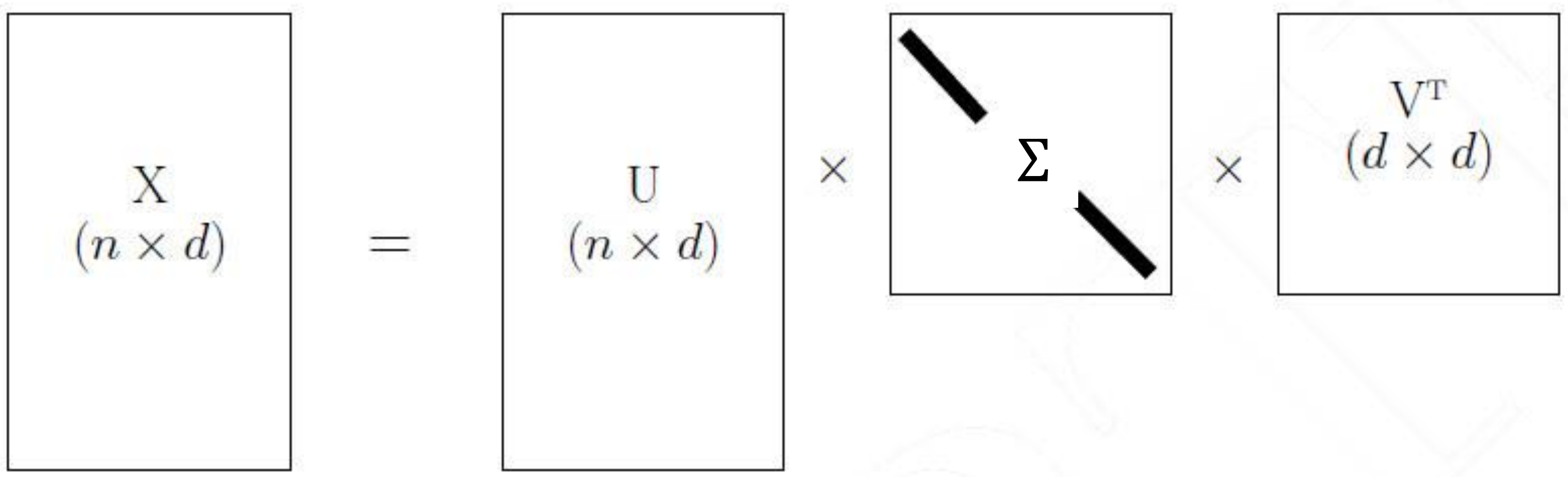
- Kao što smo videli, možemo matricu kovarijanse predstaviti pomoću njenih sopstvenih vektora/vrednosti:
$$\Sigma v = \lambda v$$
- Ovo se može zapisati u matričnoj formi
$$\Sigma V = VL$$
gde je V matrica čije su kolone sopstveni vektori matrice Σ, a L je dijagonalna matrica čiji su ne-nula elementi odgovarajuće sopstvene vrednosti
- Odavde možemo Σ predstaviti kao funkciju njenih sopstvenih vrednosti i vektora:
$$\Sigma = VLV^{-1} = VLV^{T}$$
- Ova jednačina se zove eigendecomposition of the covariance matrix i može se dobiti postupkom koji se naziva Singular Value Decomposition (SVD)

Singular Value Decomposition (SVD)

- Svaka matrica (npr. matrica sa podacima $X \in \mathbb{R}^{N \times D}$) se može predstaviti kao proizvod tri matrice. Matrica $X \in \mathbb{R}^{N \times D}$:

$$X = USV^T$$

  - Gde su $U = [u_1, \dots, u_D]$ i $V = [v_1, \dots, v_D]$ ortonormalne baze (za ovakve matrice važi da je inverz jednak transponovanoj matrici, tj. $V^T V = VV^T = 1$) za prostor redova i kolona matrice X
  - a S je dijagonalna matrica sa elementima $\{\sigma_1, \dots, \sigma_D\}$



Singular Value Decomposition (SVD)

$$X = USV^T$$

- Ako je X matrica koja sadrži originalne podatke ($X \in \mathbb{R}^{N \times D}$):

$$X^T X = (USV^T)^T USV^T = VS^T U^T USV^T = VS^2 V^T$$

Singular Value Decomposition (SVD)

- Ako uporedimo jednačine:

$$X^T X = V S^2 V^T$$

$$\Sigma = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{X} = V L V^T$$

veoma su slične, osim što je $\sigma_i^2 = \lambda_i (i = 1, \dots, D)$

- Drugim rečima, SVD je identičan sa PCA
- Matricu V (koja u kolonama ima odgovarajuće sopstvene vektore) možemo pronaći direktnom primenom SVD na ulazne podatke X:

$$[U, S, V] = \mathrm{svd}(X)$$

Prednosti i nedostaci SVD

- Dakle, PCA možemo primeniti:
  - izračunavanjem sopstvenih vrednosti matrice kovarijanse $\Sigma = X^T X$ ili
  - primenom SVD metode direktno na matricu podataka X

- Prednosti SVD:
  - numerička stabilnost (računanje $X^T X$ može da izazove gubitak preciznosti)
  - Ako je $D \gg N$ (više obeležja nego instanci), $\Sigma \in R^{D \times D}$ može biti veoma velika matrica